

**Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН**

УПРАВЛЕНИЕ БОЛЬШИМИ СИСТЕМАМИ

Выпуск 23

Декабрь 2008

**СБОРНИК
ТРУДОВ**

ISSN 1819-2467

Регистрационный номер Эл №ФС77-27285 от 22.02.2007

Москва – 2008

www.mtas.ru

ИНТЕРНЕТ-сайт теории управления организационными системами

Целью сайта является предоставление специалистам по теории и практике управления организационными системами (ученым, преподавателям, аспирантам, студентам, а также реальным управленцам) доступа к ресурсам, отражающим современное состояние теории и возможности обмена идеями и результатами.



На сайте имеются разделы:

Теория – с обзором теории управления организационными системами, глоссарием, информацией для аспирантов;

Практика – с обзором результатов внедрения механизмов управления в реальных организациях;

Библиография – около 2500 публикаций по теории управления, снабжена классификатором и аннотациями;

Электронная библиотека – более 600 полнотекстовых монографий, статей и учебных пособий;

а также многое другое.

На сайте работает **форум**, на котором можно обсудить вопросы, относящиеся к математике, экономике, управлению организациями, узнать новости теории управления и ознакомиться с планируемыми конференциями и семинарами.

НАУЧНО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ЦЕНТРЫ (НОЦ) – НОВАЯ ФОРМА СЕТЕВОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

НОЦ создаются на базе ВУЗов в целях объединения усилий и ресурсов ИПУ РАН и ВУЗов для:

- подготовки, переподготовки и повышения квалификации специалистов по теории и практике управления;
- проведения фундаментальных и прикладных научных исследований на основе грантов и договоров с заказчиками, федеральных и региональных научных программ и проектов;
- организации стажировок и обучения молодых ученых;
- проведения конкурсов по теории управления и приложениям;
- организации конференций и других научных мероприятий;
- осуществления издательской деятельности и т.д.

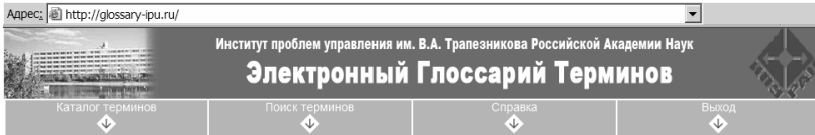
На сегодняшний день успешно функционируют:

- Волгоградский научно-образовательный центр проблем управления (на базе ВолГУ)
- Воронежский научно-образовательный центр проблем управления (на базе ВГАСУ)
- Казанский научно-образовательный центр проблем управления (на базе КГТУ)
- Инновационный научно-образовательный центр (на базе МАИ)
- Инновационный научно-образовательный центр (на базе МВТУ)
- Липецкий научно-образовательный центр проблем управления (на базе ЛГТУ)
- Самарский научно-образовательный центр проблем управления (на базе СГАУ)
- Старооскольский научно-образовательный центр проблем управления (на базе СТИ).
- Тверской научно-образовательный центр проблем управления (на базе ТГТУ)
- Удмуртский научно-образовательный центр проблем управления (на базе УдГУ)

Сборник трудов «Управление большими системами» выпускается ИПУ РАН совместно с этими НОЦ.

Приглашаем к сотрудничеству!

glossary-ipu.ru



Глоссарий - это комплексное введение в какую-либо тему. Он состоит из статей, в которых дается определение терминов и ссылки, по которым можно найти углубленное раскрытие темы. Своими статьями в совокупности глоссарий описывает ту или иную область знаний, в данном случае - это проблемы теории управления и ее приложений.

Задача сайта **glossary-ipu.ru** и, в частности, глоссария - дать возможность специалистам в области проблем управления лучше и правильно понимать друг друга. Это не означает единообразия в понимании той или иной проблемы, но сама она и ее решение должно быть описано в терминах, одинаково понятых всеми заинтересованными специалистами.

Каждый автор или группа по интересам может претендовать на свое понимание того или иного термина. Поэтому соответствующий раздел статьи глоссария может иметь несколько определений, которые заносятся туда после определенной процедуры согласования, выполняемой модератором рубрики.

Просмотр статей глоссария доступен любому пользователю. При желании Вы можете стать автором, предварительно пройдя регистрацию и получив разрешение модератора рубрики.

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова

**УПРАВЛЕНИЕ
БОЛЬШИМИ
СИСТЕМАМИ**

СБОРНИК ТРУДОВ

Выпуск 23

Москва – 2008

Управление большими системами / Сборник трудов. Выпуск 23. М.: ИПУ РАН, 2008. – 170 с.

Дата опубликования: 30.12.2008.

КООРДИНАЦИОННЫЙ СОВЕТ

Академики РАН: Васильев С.Н., Емельянов С.В., Коровин С.К., Федосов Е.А., Черноусько Ф.Л. Члены-корреспонденты РАН: Желтов С.Ю., Каляев И.А., Пархоменко П.П., Попков Ю.С. Д-ра. техн. наук: Бутковский А.Г., Дорофеев А.А., Кузнецов О.П., Кульба В.В., Кротов В.Ф., Лотоцкий В.А., Павлов Б.В., Поляк Б.Т., Рутковский В.Ю.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор: Новиков Д.А. **Ответственный секретарь:** Губко М.В. Алескеров Ф.Т. (ГУ ВШЭ), Артамонов Е.И. (ИПУ РАН), Афанасьев В.Н. (МИЭМ), Бахтадзе Н.Н. (ИПУ РАН), Бурков В.Н. (ИПУ РАН), Вишневский В.М. (ИППИ РАН), Добровидов А.В. (ИПУ РАН), Заложнев А.Ю. (ИПУ РАН), Земляков С.Д. (ИПУ РАН), Ириков В.А. (МФТИ), Калянов Г.Н. (ИПУ РАН), Касаткин С.И. (ИПУ РАН), Каравай М.Ф. (ИПУ РАН), Кононенко А.Ф. (ВЦ РАН), Курдюков А.П. (ИПУ РАН), Лебедев В.Г. (ИПУ РАН), Лебедев В.Н. (ИПУ РАН), Мандель А.С. (ИПУ РАН), Нижегородцев Р.М. (ИПУ РАН), Новосельцев В.Н. (ИПУ РАН), Орлов А.И. (МВТУ), Петрикевич Я.И. (ИПУ РАН), Рапопорт Л.Б. (ИПУ РАН), Рыков А.С. (МИСИС), Сидельников Ю.В. (МАИ), Совлуков А.С. (ИПУ РАН), Уткин В.А. (ИПУ РАН), Хоботов Е.Н. (МВТУ), Чеботарев П.Ю. (ИПУ РАН), Чхартишвили А.Г. (ИПУ РАН), Щербаков П.С. (ИПУ РАН).

РЕГИОНАЛЬНЫЕ РЕДАКЦИОННЫЕ СОВЕТЫ

Волгоград – Воронин А.А. (ВолГУ), Лосев А.Г. (ВолГУ); **Воронеж** – Баркалов С.А. (ВГАСУ), Головинский П.А. (ВГАСУ), Подвальный С.Л. (ВГТУ); **Ижевск** – Непейвода Н.Н. (УдмГУ), Родионов В.И. (УдмГУ); **Иркутск** – Бычков И.В., Лакеев А.В. (ИДСТУ СО РАН); **Казань** – Маликов А.И., Сиразетдинов Р.Т. (КГТУ-КАИ); **Липецк** – Кузнецов Л.А. (ЛГТУ), Погодаев А.К. (ЛГТУ); **Самара** – Богатырев В.Д. (СГАУ), Засканов В.Г. (СГАУ); **Санкт-Петербург** – Петросян Л.А. (СПбГУ), Фрадков А.Л. (ИПИМ РАН); **Старый Оскол** – Еременко Ю.И. (СТИ); **Тверь** – Кузнецов В.Н. (ТГТУ), Палюх Б.В. (ТГТУ).

Адрес редакции: 117997, г. Москва, ул. Профсоюзная, д. 65. Адрес в Интернет – ubs.mtas.ru.

С 2006 года сборник зарегистрирован как электронное научное издание (ЭНИ) за номером № 0420600023. Публикация в ЭНИ учитывается при защите диссертации при указании номера ЭНИ и идентификационного номера публикации, присваиваемых НТЦ «Информрегистр» (www.infoformreg.ru).

СОДЕРЖАНИЕ

Системный анализ

Алиев В. С.

Многошаговые игры двух лиц с принятием решений на каждом шаге при агрегированной информации о выборе «осторожного» второго игрока..... 5

Анализ и синтез систем управления

Чечурин Л.С.

Алгебраическое достаточное условие периодически нестационарных систем управления..... 24

**Шубладзе А. М., Попадько В. Е., Якушева А. А.,
Бобриков Н. М., Кузнецов С. И.**

Исследование оптимальных по степени устойчивости решений при ПИД управлении. Часть 2..... 39

Информационные технологии в управлении

Андриевский Б. Р., Фрадков А. Л.

Адаптивные методы передачи информации модуляцией генераторов хаотических сигналов..... 56

Трахтенгерц Э.А.

Компьютерные технологии коррекции целей, стратегических решений и оперативных воздействий в динамике управления..... 81

Управление в социально-экономических системах

Горелов М. А.

Конкурентное равновесие на финансовом рынке..... 110

Юдицкий С. А.

Графодинамическая автоматная модель разрешения конфликтов в организационных системах..... 126

*Управление техническими системами
и технологическими процессами*

Воронин Ю.Ф., Камаев В.А., Бойко Н.А.
Эмпирическая методика снижения брака отливок..... 137

*Надёжность и диагностика
средств и систем управления*

Калимулина Э. Ю.
*Расчёт надёжности сложных систем с параллельной
структурой, полностью восстанавливаемых в процессе
эксплуатации.....* 156

УДК 519.837.3

ББК (В) 22.18

МНОГОШАГОВЫЕ ИГРЫ ДВУХ ЛИЦ С ПРИНЯТИЕМ РЕШЕНИЙ НА КАЖДОМ ШАГЕ ПРИ АГРЕГИРОВАННОЙ ИНФОРМАЦИИ О ВЫБОРЕ «ОСТОРОЖНОГО» ВТОРОГО ИГРОКА

Алиев В. С.¹

*(ФГОУ ВПО «Финансовая академия при Правительстве
Российской Федерации», Москва)*

Рассматривается многошаговая игра двух лиц с фиксированной последовательностью ходов при информации на каждом ходу о сложившейся к моменту принятия решения предыстории игры и агрегированной информации о выборе игрока 2 на этом ходу. Игрок 1, обладая на каждом шаге этой информацией, первым выбирает на этом шаге свою стратегию и сообщает её второму только на очередной ход. Игрок 2, получая информацию о выборе игрока 1, действует осторожно, т.е. выбором стратегии на этом ходе стремится к увеличению своей функции выигрыша. Найдены максимальные гарантированные результаты и соответствующие оптимальные (эпсилон-оптимальные) стратегии первого игрока на каждом шаге.

Ключевые слова: игра, агрегирование, оптимальная стратегия, максимальный гарантированный результат.

1. Введение

При решении адекватных математических моделей социально-экономических систем одним из методов преодоления

¹ Алиев Вагиф Судеиф оглы, доцент, кандидат физико-математических наук (Aliiev_VS@mail.ru, тел. (499) 760-96-22).

трудностей, связанных с большой размерностью, является замена исходной задачи другой задачей, более агрегированной (укрупненной). Здесь агрегированием называется переход от некоторого вектора экономических показателей к вектору интегральных показателей гораздо меньшей размерности.

В результате решения агрегированной задачи определяются значения укрупненных переменных, которые обычно не совпадают со значениями аналогичных агрегатов, получаемых при укрупнении точного решения первоначальной задачи. Разность между укрупненными переменными решения агрегированной задачи и значениями аналогичных агрегатов, получаемых при укрупнении точного решения первоначальной задачи, называется *ошибкой агрегирования*. Классическая теория агрегирования изучает методы нахождения наилучшего способа агрегирования, которые максимально уменьшали бы ошибку агрегирования.

Методы классического агрегирования применялись для решения весьма широкого круга задач. Однако, несмотря на это, теория классического агрегирования, за исключением конкретных случаев, не решила проблемы устранения ошибки агрегирования и, главное, – проблемы дезагрегирования, т.е. получение решения исходной задачи. Для устранения этих недостатков в экономико-математических исследованиях появились методы итеративного агрегирования, позволяющие получать значения укрупненных и детализированных показателей плана с любой заранее заданной точностью.

Исследование социально-экономических систем и моделей с помощью теории агрегирования и теории игр как аппарата анализа иерархических систем управления велось параллельно, независимо друг от друга.

Вопросы агрегирования, исследованные для управляемых динамических систем, оптимизационных задач, активных систем, можно рассматривать как продукт синтеза этих двух направлений решения задач с большой размерностью. Однако ни в классической теории игр, ни в дифференциальных играх и играх с противоположными интересами, вопросы агрегирования не

рассматривались. Впервые вопросы агрегирования в игровых задачах рассматривались автором в работах [1-7].

Настоящая работа посвящена вопросам принятия решений в многошаговых играх двух лиц с фиксированной последовательностью ходов при агрегированной информации о выборе игрока 2 на этом ходу и информации о сложившейся к моменту принятия решения предыстории игры. Она отличается от игры, рассмотренной в [7] тем, что игрок 1 сообщает второму свою стратегию последовательно, т.е. только на очередной ход. В этой игре процедура принятия решений для каждого из игроков существенно многошаговая.

2. Постановка задачи

Рассматривается многошаговая игра двух лиц. Функции выигрыша игроков, соответственно, $f_i(x, v)$, $i = 1, 2$, к увеличению значения которых каждый из них стремится, предполагаются непрерывными, а x , v выбираются из соответствующих множеств

$$X = \prod_{i=1}^n X_i \subset E^k, \quad V = \prod_{i=1}^n V_i \subset E^m,$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$, $x_i \in X_i \subset E^{k_i}$, $v_i \in V_i \subset E^{m_i}$, $i = \overline{1, n}$, $n < m$, $k_1 + k_2 + \dots + k_n = k$, $m_1 + m_2 + \dots + m_n = m$; X_i, V_i , $i = 1, \dots, n$ – компактные множества; $E^k, E^m, E^{k_i}, E^{m_i}$, $i = 1, \dots, n$ – евклидовы пространства соответствующей размерности.

В отличие от [6, 7] будем предполагать, что агрегированный вектор выбора игрока 2 $y = (y_1, \dots, y_n) = (T_1(v_1), \dots, T_n(v_n))$ при отсутствии информации о выборе v будет известен игроку 1 последовательно в n шагов, где $v_i \in V_i$, $y_i \in E^{r_i}$, $r_i < m_i$, $i = 1, \dots, n$, а $T_i(\cdot): E^{m_i} \rightarrow E^{r_i}$ – известные игрокам непрерывные на V_i операторы, $i = 1, \dots, n$.

Введем следующие обозначения:

$$\bar{x}_i = (x_1, \dots, x_i), \bar{y}_i = (y_1, \dots, y_i), \bar{v}_i = (v_1, \dots, v_i);$$

$$\bar{T}_i(\bar{v}_i) = (T_1(v_1), \dots, T_i(v_i)),$$

$$\bar{x}_i(\bar{T}_i(\bar{v}_i)) = (x_1(\bar{T}_1(\bar{v}_1)), \dots, x_i(\bar{T}_i(\bar{v}_i)));$$

$Y_i(T_i) = T_i(V_i)$ – образ множества V_i ;

$V_i(y_i, T_i) = T_i^{-1}(y_i) \cap V_i$ – пересечение прообраза $y_i \in Y_i(T_i)$ с множеством V_i ;

$$\bar{V}_i(\bar{y}_i, \bar{T}_i) = \prod_{k=1}^i V_k(y_k, T_k), \bar{V}_i = \prod_{k=1}^i V_k;$$

$$\bar{X}_i = \prod_{k=1}^i X_k, \bar{Y}_i(\bar{T}_i) = \prod_{k=1}^i Y_k(T_k), i = 1, \dots, n;$$

$$T(\cdot) = (T_1(\cdot), \dots, T_n(\cdot)), V(y, T) = \prod_{i=1}^n V_i(y_i, T_i).$$

Будем предполагать, что множеством стратегий игрока 1 на i -м ходу является множество произвольных функций $\tilde{x}_i(\cdot)$, аргументами которых являются сложившаяся к моменту принятия решения агрегированная предыстория $\bar{x}_{i-1}, \bar{y}_{i-1}$ и агрегированный выбор игрока 2 на i -м ходу y_i , где $\tilde{x}_i(\bar{x}_{i-1}, \bar{y}_{i-1}, T_{i,n}^-) \in X_i$. Обозначим это множество через \tilde{X}_i .

Стратегией игрока 2 на i -м ходу ($1 \leq i \leq n$) является $v_i \in V_i$, а агрегированной стратегией $y_i \in Y_i(T_i)$.

Введем следующие обозначения:

$$v_i(y_i, T_i) = v_i = V_i(y_i, T_i), y_i \in Y_i(T_i), i = 1, \dots, n;$$

$$L_n^n(\bar{x}_n, \bar{v}_n(\bar{y}_n, \bar{T}_n), T_{n+1,n}^-) = f_2(\bar{x}_n, \bar{v}_n(\bar{y}_n, \bar{T}_n));$$

$$(1) \quad F_2^i(\bar{x}_i, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i, \bar{T}_{i,n}^-) = \\ = \max_{v_i \in V_i(y_i, T_i)} L_i^n(\bar{x}_i, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), v_i, \bar{T}_{i+1,n}^-);$$

$$(2) \quad L_{i-1}^n(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), \bar{T}_{i,n}^-) = \\ = \max_{y_i \in Y_i(T_i)} \min_{x_i \in \tilde{X}_i} F_2^i(\bar{x}_i, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i, \bar{T}_{i,n}^-),$$

$$T_{i,n} = (T_i, \dots, T_n), \quad i = 1, \dots, n.$$

В нашем изложении обозначения z_0 (для произвольного аргумента z_0) и $T_{n+1,n}$ означают отсутствие таких аргументов.

Рассмотрим агрегированный аналог игры, исследованный в [8], и назовем его игрой $\Gamma_2^n(T)$.

В отличие от игры, рассмотренной в [7], будем предполагать, что игрок 1 сообщает второму свои стратегии $x_i(\cdot)$ последовательно, т.е. только на очередной ход, $i = \overline{1, n}$. Кроме того, предположим, что игрок 2 не знает интересов игрока 1 и на каждом i -м ходе ($1 \leq i \leq n$), получая информацию о выборе $x_i(\cdot)$ игрока 1, не имея информации о его намерениях и последующих стратегиях, будет действовать осторожно, т.е. выбором стратегии на i -м ходе он будет стремиться к увеличению агрегированной функции выигрыша для i -го хода $F_2^i(\bar{x}_i, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i, \bar{T}_{i,n})$. Такая информированность и поведение игрока 2 известна первому.

На i -м ходу ($1 \leq i \leq n$) игрок 2 в соответствии со своим правилом поведения стратегию v_i выбирает из множества

$$\begin{aligned} R_i^n(\bar{x}_{i-1}, \tilde{x}_i(\cdot), \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i, \bar{T}_{i,n}) &= \\ &= \left\{ v_i \in V_i \mid L_i^n(\bar{x}_{i-1}, \tilde{x}_i(\bar{x}_{i-1}, \bar{y}_{i-1}, T_i(v_i), T_{i,n}), \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), v_i, \bar{T}_{i+1,n}) = \right. \\ &= F_2^i(\bar{x}_{i-1}, \tilde{x}_i(\bar{x}_{i-1}, \bar{y}_{i-1}, T_i(v_i), T_{i,n}), \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i, T_{i,n}) \geq \\ &\geq \max \left\{ L_{i-1}^n(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}); \right. \\ &\quad \left. \sup_{v_i \in V_i} L_i^n(\bar{x}_{i-1}, \tilde{x}_i(\bar{x}_{i-1}, \bar{y}_{i-1}, T_i(v_i), T_{i,n}), \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), v_i, T_{i+1,n}) - \right. \\ &\quad \left. - \delta_i(\bar{x}_{i-1}, \tilde{x}_i(\cdot), \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}) \right\} \}, \end{aligned}$$

где $\delta_i(\cdot)$ – известный игроку 1 функционал, причем $\delta_i(\cdot) = 0$, если в определении $R_i^n(\cdot)$ супремум достигается, и равен числу $\delta_i > 0$ в противном случае.

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} \gamma_n^n(\bar{x}_n, \bar{v}_n(\bar{y}_n, \bar{T}_n), T_{n+1,n}^-) &= f_1(\bar{x}_n, \bar{v}_n(\bar{y}_n, \bar{T}_n)); \\ \gamma_{i-1}^n(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-) &= \\ &= \sup_{\tilde{x}_i(\cdot) \in \tilde{X}_i} \inf_{v_i \in R_i^n(\bar{x}_{i-1}, \tilde{x}_i(\cdot), \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_i(v_i), T_{i,n}^-)} \gamma_i^n(\bar{x}_{i-1}, \\ &\tilde{x}_i(\bar{x}_{i-1}, \bar{y}_{i-1}, T_i(v_i), T_{i,n}^-), \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), v_i, T_{i+1,n}^-), \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Отметим, что здесь $\gamma_i^n(\bar{x}_i, \bar{v}_i(\bar{y}_i, \bar{T}_i), T_{i+1,n}^-)$ является промежуточной функцией выигрыша, а $\gamma_{i-1}^n(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-)$ – максимальным гарантированным результатом игрока 1 на i -м ходу, $i = 1, \dots, n$.

В соответствии с [2, 6, 7], введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} X_i^{n,u}(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i, T_{i,n}^-) &= \text{Arg min}_{x_i \in X_i} F_2^i(\bar{x}_i, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i, T_{i,n}^-), \\ V_i^{n,+}(\bar{x}_i, v_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i, T_{i,n}^-) &= \text{Arg max}_{v_i \in V_i(y_i, T_i)} L_i^n(\bar{x}_i, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), v_i, T_{i+1,n}^-), \\ E_i^n(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-) &= \text{Arg max}_{y_i \in Y_i(T_i)} \min_{x_i \in X_i} F_2^i(\bar{x}_i, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i, T_{i,n}^-), \\ f_1^n(\bar{x}_n, \bar{v}_n(\bar{y}_n, \bar{T}_n), T_{n+1,n}^-) &= f_1(\bar{x}_n, \bar{v}_n(\bar{y}_n, \bar{T}_n)), \\ F_1^i(\bar{x}_i, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i, T_{i,n}^-) &= \\ &= \inf_{v_i \in V_i^{n,+}(\bar{x}_i, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i, T_{i,n}^-)} f_1^i(\bar{x}_i, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), v_i, T_{i,n}^-), \\ M_i^n(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-) &= \\ &= \inf_{y_i \in E_i^n(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-)} \sup_{x_i \in X_i} F_1^i(\bar{x}_i, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i, T_{i,n}^-), \\ D_i^n(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-) &= \\ &= \{(x_i, y_i) \in X_i \times Y_i(T_i) \mid F_2^i(\bar{x}_i, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i, T_{i,n}^-) > L_{i-1}^n(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-)\}, \\ K_i^n(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-) &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sup_{(x_i, y_i) \in D_i^n(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-)} F_1^i(\bar{x}_i, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i, T_{i,n}^-), \\
 & f_1^{i-1}(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-) = \\
 &= \max \{ K_i^n(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-), M_i^n(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-) \}, \quad i = 1, \dots, n.
 \end{aligned}$$

Введем малые числа ε_i ($\varepsilon_i > 0$) и определим точки $(x_i^{\varepsilon_i}(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-), y_i^{\varepsilon_i}(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-))$,

$x_i^{a, \varepsilon_i}(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i, T_{i,n}^-)$, $x_i^{h, \varepsilon_i}(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i, T_{i,n}^-)$, $i = 1, \dots, n$, следующим образом:

$$\begin{aligned}
 &(x_i^{\varepsilon_i}(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-), y_i^{\varepsilon_i}(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-)) \in \\
 &\in D_i^n(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-): \\
 &F_1^i(\bar{x}_{i-1}, x_i^{\varepsilon_i}(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-), \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i^{\varepsilon_i}(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-), T_{i,n}^-) \geq \\
 &\geq K_i^n(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-) - \varepsilon_i, \\
 &x_i^{a, \varepsilon_i}(\cdot) \in \tilde{X}_i : F_1^i(\bar{x}_{i-1}, x_i^{a, \varepsilon_i}(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i, T_{i,n}^-), \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i, T_{i,n}^-) \geq \\
 &\geq \sup_{x_i \in \tilde{X}_i} F_1^i(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i, T_{i,n}^-) - \varepsilon_i, \\
 &x_i^{h, \varepsilon_i}(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i, T_{i,n}^-) \in X_i^{n, h}(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i, T_{i,n}^-): \\
 &F_1^i(\bar{x}_{i-1}, x_i^{h, \varepsilon_i}(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i, T_{i,n}^-), \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i, T_{i,n}^-) \geq \\
 &\geq \sup_{x_i \in X_i^{n, h}(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i, T_{i,n}^-)} F_1^i(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i, T_{i,n}^-) - \varepsilon_i, \\
 &i = 1, \dots, n.
 \end{aligned}$$

Здесь и в дальнейшем везде принято соглашение, что для любой функции $\psi(\cdot)$ выполняются следующие равенства:

$$\max_{u \in \emptyset} \psi(u) = \sup_{u \in \emptyset} \psi(u) = -\infty, \quad \min_{u \in \emptyset} \psi(u) = \inf_{u \in \emptyset} \psi(u) = +\infty,$$

где \emptyset – пустое множество.

Точно так же, как лемму 1 из [6], можно доказать следующую лемму.

Лемма. Множества $V_i(y_i, T_i)$, $V_i^{n,+}(\bar{x}_i, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i, T_{i,n})$, $Y_i(T_i)$, $i = 1, \dots, n$, являются компактными; функции $F_2^i(\bar{x}_i, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i, T_{i,n})$, $i = 1, \dots, n$, непрерывны по $(\bar{x}_i, \bar{v}_{i-1})$ и полунепрерывны сверху по y_i соответственно на множествах $\bar{X}_i \times \bar{V}_{i-1}$ и $Y_i(T_i)$; максимумы и минимумы в (1), (2) достигаются.

Теорема. В сформулированных условиях максимальный гарантированный результат $\gamma_0^n(T)$ игрока 1 в игре $\Gamma_2^n(T)$ равен $\gamma_0^n(T) = f_1^0(T) = \max \{ K_1^n(T), M_1^n(T) \}$, при этом его максимальный гарантированный результат на i -м ходу равен $\gamma_{i-1}^n(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-) = f_1^{i-1}(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-) = \max [K_i^n(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-), M_i^n(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-)]$, $i = 1, \dots, n$. Эти результаты на i -м ходу гарантируют ему (может быть, с ε_i -точностью) стратегии:

$$\tilde{x}_i^{\varepsilon_i}(\bar{x}_{i-1}, \bar{y}_i, T_{i,n}^-) = \begin{cases} x_i^{\varepsilon_i}(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-), & \text{если } y_i = y_i^{\varepsilon_i}(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-) \\ & \text{и } K_i^n(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-) \geq M_i^n(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-); \\ x_i^{a, \varepsilon_i}(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i, T_{i,n}^-), & \text{если } y_i \in E_i^n(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-) \\ & \text{и } K_i^n(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-) < M_i^n(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-); \\ x_i^{h, \varepsilon_i}(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i, T_{i,n}^-) & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$$

$i = 1, \dots, n$.

Доказательство теоремы. Сначала докажем некоторые соотношения, которые будут необходимы для доказательства того, что при достаточно малых положительных числах $\varepsilon_i > 0$ стратегия $\tilde{x}_i^{\varepsilon_i}(\cdot)$ гарантирует игроку 1 выигрыш $\max [K_i^n(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-), M_i^n(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-)] - \varepsilon_i$.

Пусть $K_i^n(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-) \geq M_i^n(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-)$, тогда стратегия $\tilde{x}_i^{\varepsilon_i}(\cdot)$ гарантирует использование игроком 2 такой стратегии $v_i \in V_i$, что выполняются условия

$$y_i = y_i^{\varepsilon_i}(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-), v_i \in V_i^{n,+}(\bar{x}_i, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i^{\varepsilon_i}, T_{i,n}^-).$$

Действительно, в этом случае он получит выигрыш

$$\begin{aligned} & L_i^n(\bar{x}_{i-1}, \tilde{x}_i^{\varepsilon_i}(\bar{x}_{i-1}, \bar{y}_i, T_{i,n}^-), \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), v_i, T_{i+1,n}^-) = \\ & = F_2^i(\bar{x}_{i-1}, \tilde{x}_i^{\varepsilon_i}(\bar{x}_{i-1}, \bar{y}_i, T_{i,n}^-), \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i, T_{i,n}^-). \end{aligned}$$

А при выборе $v_i \in V_i \setminus V_i^{n,+}(\bar{x}_i, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i, T_{i,n}^-)$ игрок 2 может обеспечить себе лишь выигрыш

$$\begin{aligned} & L_i^n(\bar{x}_{i-1}, \tilde{x}_i^{\varepsilon_i}(\bar{x}_{i-1}, \bar{y}_i, T_{i,n}^-), \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), v_i, T_{i+1,n}^-) < \\ & < F_2^i(\bar{x}_{i-1}, \tilde{x}_i^{\varepsilon_i}(\bar{x}_{i-1}, \bar{y}_i, T_{i,n}^-), \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i, T_{i,n}^-). \end{aligned}$$

В самом деле, при $y_i = y_i^{\varepsilon_i}(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-)$, $v_i \in V_i(y_i^{\varepsilon_i}, T_i) \setminus V_i^{n,+}(\bar{x}_i, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i^{\varepsilon_i}, T_{i,n}^-)$ игрок 2 может обеспечить себе выигрыш

$$\begin{aligned} & L_i^n(\bar{x}_{i-1}, x_i^{\varepsilon_i}(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-), \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), v_i, T_{i+1,n}^-) < \\ & < F_2^i(\bar{x}_{i-1}, x_i^{\varepsilon_i}(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-), \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i^{\varepsilon_i}(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-), T_{i,n}^-), \end{aligned}$$

а при $y_i \neq y_i^{\varepsilon_i}(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-)$, $v_i \in V_i(y_i, T_i)$ – выигрыш

$$\begin{aligned} & L_i^n(\bar{x}_{i-1}, x_i^{n,\varepsilon_i}(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i, T_{i,n}^-), \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), v_i, T_{i+1,n}^-) \leq \\ & \leq F_2^i(\bar{x}_{i-1}, x_i^{n,\varepsilon_i}(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i, T_{i,n}^-), \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i, T_{i,n}^-) \leq \\ & \leq L_{i-1}^n(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-) < \\ & < F_2^i(\bar{x}_{i-1}, x_i^{\varepsilon_i}(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-), \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i^{\varepsilon_i}(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-), T_{i,n}^-). \end{aligned}$$

Получаем, что в случае $K_i^n(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-) \geq$

$M_i^n(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-)$ справедливы следующие соотношения:

$$\delta_i(\bar{x}_{i-1}, \tilde{x}_i^{\varepsilon_i}(\cdot), \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-) = 0,$$

$$R_i^n(\bar{x}_{i-1}, \tilde{x}_i^{\varepsilon_i}(\cdot), \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i, T_{i,n}^-) =$$

$$= V_i^{n,+}(\bar{x}_{i-1}, x_i^{\varepsilon_i}(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-), \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i^{\varepsilon_i}(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-), T_{i,n}^-),$$

$$(3) \quad \gamma_{i-1}^n(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-) \geq$$

$$\geq \inf_{v_i \in V_i^{n,+}(\bar{x}_{i-1}, x_i^{\varepsilon_i}(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-), \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i^{\varepsilon_i}(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-), T_{i,n}^-)} \gamma_i^n(\bar{x}_{i-1}, x_i^{\varepsilon_i}(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-), \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-), \bar{v}_i(\bar{y}_i, \bar{T}_i), T_{i+1,n}^-).$$

Если же $K_i^n(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-) < M_i^n(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-)$, тогда стратегия $\tilde{x}_i^{\varepsilon_i}(\cdot)$ гарантирует использование игроком 2 стратегии

$$v_i \in \bigcup_{y_i \in E_i^n(\bar{x}_{i-1}, v_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-)} V_i^{n,+}(\bar{x}_{i-1}, \tilde{x}_i^{\varepsilon_i}(\bar{x}_{i-1}, \bar{y}_i, T_{i,n}^-), \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i, T_{i,n}^-).$$

Действительно, в этом случае ему обеспечивается выигрыш

$$L_i^n(\bar{x}_{i-1}, \tilde{x}_i^{\varepsilon_i}(\bar{x}_{i-1}, \bar{y}_i, T_{i,n}^-), \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), v_i, T_{i+1,n}^-) =$$

$$= F_2^i(\bar{x}_{i-1}, x_i^{a,\varepsilon_i}(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i, T_{i,n}^-), \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i, T_{i,n}^-) \geq$$

$$\geq L_{i-1}^n(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-).$$

При выборе стратегии

$$v_i \in \bigcup_{y_i \in E_i^n(\bar{x}_{i-1}, v_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-)} V_i(y_i, T_i) \setminus V_i^{n,+}(\bar{x}_{i-1},$$

$$\tilde{x}_i^{\varepsilon_i}(\bar{x}_{i-1}, \bar{y}_i, T_{i,n}^-), \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i, T_{i,n}^-)$$

игрок 2 может получить выигрыш

$$L_i^n(\bar{x}_{i-1}, x_i^{a,\varepsilon_i}(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i, T_{i,n}^-), \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), v_i, T_{i+1,n}^-) <$$

$$< F_2^i(\bar{x}_{i-1}, x_i^{a,\varepsilon_i}(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i, T_{i,n}^-), \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i, T_{i,n}^-),$$

в противном случае – выигрыш

$$L_i^n(\bar{x}_{i-1}, x_i^{n,\varepsilon_i}(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i, T_{i,n}^-), \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), v_i, T_{i+1,n}^-) \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq F_2^i(\bar{x}_{i-1}, \tilde{x}_i^{n, \epsilon_i}(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1})), y_i, T_{i,n}^-), \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i, T_{i,n}^-) < \\ &< L_{i-1}^n(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-). \end{aligned}$$

Поэтому в силу определения множества получаем, что при $K_i^n(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-) < M_i^n(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-)$ справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} &R_i^n(\bar{x}_{i-1}, \tilde{x}_i^{\epsilon_i}(\cdot), \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i, \bar{T}_{i,n}^-) \subseteq \\ &\subseteq \bigcup_{y_i \in E_i^n(\bar{x}_{i-1}, v_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-)} V_i^{n,+}(\bar{x}_{i-1}, \tilde{x}_i^{\epsilon_i}(\bar{x}_{i-1}, \bar{y}_i, T_{i,n}^-), \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i, T_{i,n}^-), \\ (4) \quad &\gamma_{i-1}^n(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-) \geq \inf_{y_i \in E_i^n(\bar{x}_{i-1}, v_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-)} \\ &\inf_{v_i \in V_i^{n,+}(\bar{x}_{i-1}, x_i^{a, \epsilon_i}(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i, T_{i,n}^-), \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i, T_{i,n}^-)} \gamma_i^n(\bar{x}_{i-1}, x_i^{a, \epsilon_i}(\bar{x}_{i-1}, \\ &\bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i, T_{i,n}^-), \bar{v}_i(\bar{y}_i, \bar{T}_i), T_{i+1,n}^-). \end{aligned}$$

Теперь докажем некоторые соотношения, необходимые для доказательства того, что игрок 1 при любой стратегии $\tilde{x}_i(\bar{x}_{i-1}, \bar{y}_i) \in \tilde{X}_i$ не может гарантированно получить выигрыш более чем

$$\max [K_i^n(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-), M_i^n(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-)].$$

Предположим, что

$$\begin{aligned} &\sup_{y_i \in Y_i(T_i)} F_2^i(\bar{x}_{i-1}, \tilde{x}_i(\bar{x}_{i-1}, \bar{y}_i, T_{i,n}^-), \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i, T_{i,n}^-) > \\ &> L_{i-1}^n(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-). \end{aligned}$$

Тогда существует такая агрегированная стратегия $y' \in Y_i(T_i)$, что

$$\begin{aligned} &F_2^i(\bar{x}_{i-1}, \tilde{x}_i(\bar{x}_{i-1}, \bar{y}_{i-1}, y', T_{i,n}^-), \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y', T_{i,n}^-) > \\ &> L_{i-1}^n(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-) \end{aligned}$$

и такая стратегия $v_i^* \in R_i^n(\bar{x}_{i-1}, \tilde{x}_i(\cdot), \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y', \bar{T}_{i,n}^-)$, что справедливо включение

$$(\tilde{x}_i(\bar{x}_{i-1}, \bar{y}_{i-1}, T_i(v_i^*), T_{i,n}^-), T_i(v_i^*)) \in D_i^n(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-).$$

Действительно, в противном случае для любых $v_i^* \in R_i^n(\bar{x}_{i-1}, \tilde{x}_i(\cdot), \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i', \bar{T}_{i,n}^-)$

и $v_i' \in V_i^{n,+}(\bar{x}_{i-1}, \tilde{x}_i(\bar{x}_{i-1}, \bar{y}_{i-1}, y_i', T_{i,n}^-), \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i', T_{i,n}^-)$ справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} & L_i^n(\bar{x}_{i-1}, \tilde{x}_i(\bar{x}_{i-1}, \bar{y}_{i-1}, T_i(v_i'), T_{i,n}^-), \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), v_i', T_{i+1,n}^-) = \\ & = F_2^i(\bar{x}_{i-1}, \tilde{x}_i(\bar{x}_{i-1}, \bar{y}_{i-1}, y_i'), T_{i,n}^-), \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i', T_{i,n}^-) \geq \\ & \geq L_{i-1}^n(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-) \geq \\ & \geq F_2^i(\bar{x}_{i-1}, \tilde{x}_i(\bar{x}_{i-1}, \bar{y}_{i-1}, T_i(v_i^*), T_{i,n}^-), \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_i(v_i^*), T_{i,n}^-) = \\ & = L_i^n(\bar{x}_{i-1}, \tilde{x}_i(\bar{x}_{i-1}, \bar{y}_{i-1}, T_i(v_i^*), T_{i,n}^-), \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), v_i^*, T_{i+1,n}^-). \end{aligned}$$

Таким образом, можно делать вывод, что

$$\begin{aligned} & V_i^{n,+}(\bar{x}_{i-1}, \tilde{x}_i(\bar{x}_{i-1}, \bar{y}_{i-1}, y_i', T_{i,n}^-), \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i', T_{i,n}^-) \subseteq \\ & \subseteq R_i^n(\bar{x}_{i-1}, \tilde{x}_i(\cdot), \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i', \bar{T}_{i,n}^-) \end{aligned}$$

и для любого $v_i' \in V_i^{n,+}(\bar{x}_{i-1}, \tilde{x}_i(\bar{x}_{i-1}, \bar{y}_{i-1}, y_i', T_{i,n}^-), \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i', T_{i,n}^-)$ справедливо включение

$$(\tilde{x}_i(\bar{x}_{i-1}, \bar{y}_{i-1}, y_i', T_{i,n}^-), y_i') \in D_i^n(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-).$$

Полученное противоречие показывает, что такая стратегия v_i^* существует и справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} (5) \quad & V_i^{n,+}(\bar{x}_{i-1}, \tilde{x}_i(\bar{x}_{i-1}, \bar{y}_{i-1}, T_i(v_i^*), T_{i,n}^-), \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_i(v_i^*), T_{i,n}^-) \subseteq \\ & \subseteq R_i^n(\bar{x}_{i-1}, \tilde{x}_i(\cdot), \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_i(v_i^*), \bar{T}_{i,n}^-); \\ & \inf_{v_i \in R_i^n(\bar{x}_{i-1}, \tilde{x}_i(\cdot), \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_i(v_i^*), \bar{T}_{i,n}^-)} \gamma_i^n(\bar{x}_{i-1}, \\ & \tilde{x}_i(\bar{x}_{i-1}, \bar{y}_{i-1}, T_i(v_i), T_{i,n}^-), \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), v_i, T_{i+1,n}^-) \leq \\ & \leq \inf_{v_i \in V_i^{n,+}(\bar{x}_{i-1}, \tilde{x}_i(\bar{x}_{i-1}, \bar{y}_{i-1}, T_i(v_i^*), T_{i,n}^-), \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_i(v_i^*), T_{i,n}^-)} \gamma_i^n(\bar{x}_{i-1}, \end{aligned}$$

$$\tilde{x}_i(\bar{x}_{i-1}, \bar{y}_{i-1}, T_i(v_i), \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), v_i, T_{i+1,n}^-).$$

Теперь предположим, что

$$\begin{aligned} & \sup_{y_i \in Y_i(T_i)} F_2^i(\bar{x}_{i-1}, \tilde{x}_i(\bar{x}_{i-1}, \bar{y}_i, T_{i,n}^-), \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i, T_{i,n}^-) = \\ & = L_{i-1}^n(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-). \end{aligned}$$

(по определению функции $L_{i-1}^n(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-)$, в этом соотношении знака «больше» ($>$) не может быть). Тогда для любого $y_i \in E_i^n(\bar{x}_{i-1}, v_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-)$ справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} & L_{i-1}^n(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-) = \\ & = \sup_{v_i \in V_i} L_i^n(\bar{x}_{i-1}, \tilde{x}_i(\bar{x}_{i-1}, \bar{y}_i, T_i(v_i), T_{i,n}^-), \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), v_i, \bar{T}_{i+1,n}^-) \geq \\ & \geq \sup_{v_i \in V_i(y_i, T_i)} L_i^n(\bar{x}_{i-1}, \tilde{x}_i(\bar{x}_{i-1}, \bar{y}_i), T_{i,n}^-), \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), v_i, \bar{T}_{i+1,n}^-) \geq \\ & \geq \min_{x_i \in X_i} F_2^i(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i, T_{i,n}^-) = \\ & L_{i-1}^n(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-). \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что в этом случае для любого $y_i \in E_i^n(\bar{x}_{i-1}, v_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-)$ справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} & \delta_i(\bar{x}_{i-1}, \tilde{x}_i(\cdot), \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-) = 0, \\ & V_i^{n,+}(\bar{x}_{i-1}, \tilde{x}_i(\bar{x}_{i-1}, \bar{y}_i, T_{i,n}^-), \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i, T_{i,n}^-) \subseteq \\ & \subseteq R_i^n(\bar{x}_{i-1}, \tilde{x}_i(\cdot), \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i, \bar{T}_{i+1,n}^-), \\ & \tilde{x}_i(\bar{x}_{i-1}, \bar{y}_i, T_{i,n}^-) \in X_i^{n,n}(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i, T_{i,n}^-). \end{aligned}$$

Тогда справедливы следующие неравенства:

$$\begin{aligned} (6) \quad & v_i \in R_i^n(\bar{x}_{i-1}, \tilde{x}_i(\cdot), \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i, \bar{T}_{i+1,n}^-) \gamma_i^n(\bar{x}_{i-1}, \\ & \tilde{x}_i(\bar{x}_{i-1}, \bar{y}_i, T_i(v_i), T_{i,n}^-), \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), v_i, T_{i+1,n}^-) \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \inf_{y_i \in E_i^n(\bar{x}_{i-1}, v_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-)} \\ & v_i \in V_i^{n,+}(\bar{x}_{i-1}, \tilde{x}_i(\bar{x}_{i-1}, \bar{y}_{i-1}, T_i(v_i), T_{i,n}^-), \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i, T_{i,n}^-) \gamma_i^n(\bar{x}_{i-1}, \\ & \tilde{x}_i(\bar{x}_{i-1}, \bar{y}_{i-1}, T_i(v_i), \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), v_i, T_{i+1,n}^-)). \end{aligned}$$

Пусть $i = n$. Сначала докажем, что для достаточно малых чисел $\varepsilon_n > 0$ стратегия $\tilde{x}_n^{\varepsilon_n}(\cdot)$ гарантирует игроку 1 выигрыш $\max[K_n^n(\bar{x}_{n-1}, \bar{v}_{n-1}(\bar{y}_{n-1}, \bar{T}_{n-1}), T_{n,n}^-), M_n^n(\bar{x}_{n-1}, \bar{v}_{n-1}(\bar{y}_{n-1}, \bar{T}_{n-1}), T_{n,n}^-)] - \varepsilon_n$.

Из (3) получим

$$\begin{aligned} (7) \quad &\gamma_{n-1}^n(\bar{x}_{n-1}, \bar{v}_{n-1}(\bar{y}_{n-1}, \bar{T}_{n-1}), T_{n,n}^-) \geq \\ &\geq \inf_{v_n \in V_n^{n,+}(\bar{x}_{n-1}, x_n^{\varepsilon_n}, \bar{v}_{n-1}(\bar{y}_{n-1}, \bar{T}_{n-1}), y_n^{\varepsilon_n}, T_{n,n}^-)} f_1^n(\bar{x}_{n-1}, \tilde{x}_n^{\varepsilon_n}(\bar{x}_{n-1}, \bar{y}_{n-1}, T_n(v_n), T_{n,n}^-), \\ & \bar{v}_{n-1}(\bar{y}_{n-1}, \bar{T}_{n-1}), v_n, T_{n+1,n}^-) = \\ &= F_1^n(\bar{x}_{i-1}, x_n^{\varepsilon_n}(\bar{x}_{n-1}, \bar{v}_{n-1}(\bar{y}_{n-1}, \bar{T}_{n-1}), T_{n,n}^-), \bar{v}_{n-1}(\bar{y}_{n-1}, \bar{T}_{n-1}), \\ & y_n^{\varepsilon_n}(\bar{x}_{n-1}, \bar{v}_{n-1}(\bar{y}_{n-1}, \bar{T}_{n-1}), T_{n,n}^-), T_{n,n}^-) \geq K_n^n(\bar{x}_{n-1}, \bar{v}_{n-1}(\bar{y}_{n-1}, \bar{T}_{n-1}), T_{n,n}^-) - \varepsilon_n. \end{aligned}$$

А из (4) получим следующие соотношения:

$$\begin{aligned} (8) \quad &\gamma_{n-1}^n(\bar{x}_{n-1}, \bar{v}_{n-1}(\bar{y}_{n-1}, \bar{T}_{n-1}), T_{n,n}^-) \geq \\ &\geq \inf_{y_n \in E_n^n(\bar{x}_{n-1}, v_{n-1}(\bar{y}_{n-1}, \bar{T}_{n-1}), T_{n,n}^-)} \\ & v_n \in V_n^{n,+}(\bar{x}_{n-1}, x_n^{a,\varepsilon_n}(\bar{x}_{n-1}, \bar{v}_{n-1}(\bar{y}_{n-1}, \bar{T}_{n-1}), y_n, T_{n,n}^-), \bar{v}_{n-1}(\bar{y}_{n-1}, \bar{T}_{n-1}), y_n, T_n) f_1^n(\bar{x}_{n-1}, \\ & x_n^{a,\varepsilon_n}(\bar{x}_{n-1}, \bar{v}_{n-1}(\bar{y}_{n-1}, \bar{T}_{n-1}), y_n, T_{n,n}^-), \bar{v}_{n-1}(\bar{y}_{n-1}, \bar{T}_{n-1}), v_n, T_{n+1,n}^-) = \\ &= \inf_{y_n \in E_n^n(\bar{x}_{n-1}, v_{n-1}(\bar{y}_{n-1}, \bar{T}_{n-1}), T_n)} \\ & F_1^n(\bar{x}_{i-1}, x_n^{a,\varepsilon_n}(\bar{x}_{n-1}, \bar{v}_{n-1}(\bar{y}_{n-1}, \bar{T}_{n-1}), T_{n,n}^-), \bar{v}_{n-1}(\bar{y}_{n-1}, \bar{T}_{n-1}), y_n, T_{n,n}^-) \geq \\ &\geq M_n^n(\bar{x}_{n-1}, \bar{v}_{n-1}(\bar{y}_{n-1}, \bar{T}_{n-1}), T_{n,n}^-) - \varepsilon_n. \end{aligned}$$

Из (7) и (8) получим

$$(9) \quad \gamma_{n-1}^n(\bar{x}_{n-1}, \bar{v}_{n-1}(\bar{y}_{n-1}, \bar{T}_{n-1}), T_{n,n}^-) \geq$$

$$\geq \max [K_n^n(\bar{x}_{n-1}, \bar{v}_{n-1}(\bar{y}_{n-1}, \bar{T}_{n-1}), T_{n,n}^-), M_n^n(\bar{x}_{n-1}, \bar{v}_{n-1}(\bar{y}_{n-1}, \bar{T}_{n-1}), T_{n,n}^-)] - \varepsilon_n.$$

Учитывая (5), можно получить следующие соотношения:

$$(10) \quad \begin{aligned} & \inf_{v_n \in R_n^n(\bar{x}_{n-1}, \tilde{x}_n(\cdot), \bar{v}_{n-1}(\bar{y}_{n-1}, \bar{T}_{n-1}), T_n(v_n^*), \bar{T}_{n,n}^-)} \gamma_n^n(\bar{x}_{n-1}, \\ & \tilde{x}_n(\bar{x}_{n-1}, \bar{y}_{n-1}, T_n(v_n), T_{n,n}^-), \bar{v}_{n-1}(\bar{y}_{n-1}, \bar{T}_{n-1}), v_n, T_{n+1,n}^-) \leq \\ & \leq F_1^n(\bar{x}_{n-1}, \tilde{x}_n(\bar{x}_{n-1}, \bar{y}_{n-1}, T_n(v_n^*), T_{n,n}^-), T_{n,n}^-, \bar{v}_{n-1}(\bar{y}_{n-1}, \bar{T}_{n-1}), T_n(v_n^*), T_{n,n}^-) \leq \\ & \leq K_n^n(\bar{x}_{n-1}, \bar{v}_{n-1}(\bar{y}_{n-1}, \bar{T}_{n-1}), T_{n,n}^-). \end{aligned}$$

А если учесть (6), можно записать следующие неравенства:

$$(11) \quad \begin{aligned} & \inf_{v_n \in R_n^n(\bar{x}_{n-1}, \tilde{x}_n(\cdot), \bar{v}_{n-1}(\bar{y}_{n-1}, \bar{T}_{n-1}), T_n(v_n^*), \bar{T}_{n,n}^-)} \gamma_n^n(\bar{x}_{n-1}, \\ & \tilde{x}_n(\bar{x}_{n-1}, \bar{y}_{n-1}, T_n(v_n), T_{n,n}^-), \bar{v}_{n-1}(\bar{y}_{n-1}, \bar{T}_{n-1}), v_n, T_{n+1,n}^-) \leq \\ & \leq \inf_{y_n \in E_n^n(\bar{x}_{n-1}, v_{n-1}(\bar{y}_{n-1}, \bar{T}_{n-1}), T_{n,n}^-)} F_1^n(\bar{x}_{n-1}, \tilde{x}_n(\bar{x}_{n-1}, \bar{y}_n, T_{n,n}^-), T_{n,n}^-, \bar{v}_{n-1}(\bar{y}_{n-1}, \bar{T}_{n-1}), y_n, T_{n,n}^-) \leq \\ & \leq M_n^n(\bar{x}_{n-1}, \bar{v}_{n-1}(\bar{y}_{n-1}, \bar{T}_{n-1}), T_{n,n}^-). \end{aligned}$$

В силу произвольности стратегии $\tilde{x}_n(\cdot)$ из (10), (11) получим

$$(12) \quad \begin{aligned} & \gamma_{n-1}^n(\bar{x}_{n-1}, \bar{v}_{n-1}(\bar{y}_{n-1}, \bar{T}_{n-1}), T_{n,n}^-) \leq \\ & \leq \max [K_n^n(\bar{x}_{n-1}, \bar{v}_{n-1}(\bar{y}_{n-1}, \bar{T}_{n-1}), T_{n,n}^-), M_n^n(\bar{x}_{n-1}, \bar{v}_{n-1}(\bar{y}_{n-1}, \bar{T}_{n-1}), T_{n,n}^-)]. \end{aligned}$$

В силу произвольности ε_n и выполнения соотношений (9),

(12) получим

$$(13) \quad \begin{aligned} & \gamma_{n-1}^n(\bar{x}_{n-1}, \bar{v}_{n-1}(\bar{y}_{n-1}, \bar{T}_{n-1}), T_{n,n}^-) = \max [K_n^n(\bar{x}_{n-1}, \bar{v}_{n-1}(\bar{y}_{n-1}, \bar{T}_{n-1}), T_{n,n}^-), \\ & M_n^n(\bar{x}_{n-1}, \bar{v}_{n-1}(\bar{y}_{n-1}, \bar{T}_{n-1}), T_{n,n}^-)] = f_1^{n-1}(\bar{x}_{n-1}, \bar{v}_{n-1}(\bar{y}_{n-1}, \bar{T}_{n-1}), T_{n,n}^-). \end{aligned}$$

Это результат на n -м ходу гарантирует игроку 1 (может быть, с ε_n -точностью) стратегия $\tilde{x}_n^{\varepsilon_n}(\bar{x}_{n-1}, \bar{y}_n, T_{n,n}^-)$, сформулированная в теореме 1.

Аналогично, выполняя процесс доказательства соотношений (7)-(13) для $i = n - 1, n - 2, \dots, 1$, получим

$$(14) \gamma_{i-1}^n(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-) = \max[K_i^n(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-),$$

$$M_i^n(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-)] = f_1^{i-1}(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-), i = 1, \dots, n.$$

Эти результаты на i -м ходу гарантируют игроку 1 (может быть, с ε_i -точностью) стратегии $\tilde{x}_i^{\varepsilon_i}(\bar{x}_{i-1}, \bar{y}_i, T_{i,n}^-)$, $i = 1, \dots, n$, сформулированные в теореме 1.

Более подробное описание для максимальных гарантированных результатов игрока 1 на i -м ходу $f_1^{i-1}(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-)$, $i = 1, \dots, n$ выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} f_1^{n-1}(\bar{x}_{n-1}, \bar{v}_{n-1}(\bar{y}_{n-1}, \bar{T}_{n-1}), T_{n,n}^-) &= \max \left\{ \sup_{(x_n, y_n) \in D_n^n(\bar{x}_{n-1}, \bar{v}_{n-1}(\bar{y}_{n-1}, \bar{T}_{n-1}), T_n)} \right. \\ &\quad \left. \inf_{v_n \in V_n^{n,+}(\bar{x}_n, \bar{v}_{n-1}(\bar{y}_{n-1}, \bar{T}_{n-1}), y_n, T_{n,n}^-)} f_1^n(\bar{x}_n, \bar{v}_{n-1}(\bar{y}_{n-1}, \bar{T}_{n-1}), v_n, T_{n+1,n}^-), \right. \\ &\quad \left. \inf_{y_n \in E_n^n(\bar{x}_{n-1}, \bar{v}_{n-1}(\bar{y}_{n-1}, \bar{T}_{n-1}), T_{n,n}^-)} \sup_{x_n \in X_n} f_1^n(\bar{x}_n, \bar{v}_{n-1}(\bar{y}_{n-1}, \bar{T}_{n-1}), v_n, T_{n+1,n}^-) \right\}; \\ f_1^{i-1}(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-) &= \max \left\{ \sup_{(x_i, y_i) \in D_i^n(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_i)} \right. \\ &\quad \left. \inf_{v_i \in V_i^{n,+}(\bar{x}_i, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i, T_{i,n}^-)} f_1^i(\bar{x}_i, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), v_i, T_{i+1,n}^-), \right. \\ &\quad \left. \inf_{y_i \in E_i^n(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-)} \sup_{x_i \in X_i} f_1^i(\bar{x}_i, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), v_i, T_{i+1,n}^-) \right\} = \dots \\ \dots &= \max \left\{ \sup_{(x_n, y_n) \in D_n^n(\bar{x}_{n-1}, \bar{v}_{n-1}(\bar{y}_{n-1}, \bar{T}_{n-1}), T_n)} \right. \\ &\quad \left. \inf_{v_n \in V_n^{n,+}(\bar{x}_n, \bar{v}_{n-1}(\bar{y}_{n-1}, \bar{T}_{n-1}), y_n, T_{n,n}^-)} f_1^n(\bar{x}_n, \bar{v}_{n-1}(\bar{y}_{n-1}, \bar{T}_{n-1}), v_n, T_{n+1,n}^-) \right\}, \end{aligned}$$

$$\inf_{y_n \in E_n^n(\bar{x}_{n-1}, \bar{v}_{n-1}(\bar{y}_{n-1}, \bar{T}_{n-1}), T_{n,n}^-)} \sup_{x_n \in X_n} \left. \inf_{v_n \in V_n^{n,+}(\bar{x}_n, \bar{v}_{n-1}(\bar{y}_{n-1}, \bar{T}_{n-1}), y_n, T_{n,n}^-)} f_1^n(\bar{x}_n, \bar{v}_{n-1}(\bar{y}_{n-1}, \bar{T}_{n-1}), v_n, T_{n+1,n}^-) \right\},$$

$i = 1, \dots, n - 1.$

Аналогичная процедура, проведенная последовательно до $i = 1$, дает $f_1^0(T) = \gamma_0^n(T) = \max[K_0^n(T), M_0^n(T)]$.

Теорема доказана.

3. Замечание

Отметим, что в игре $\Gamma_2^n(T)$ при рассмотрении задачи с конца функции $L_i^n(\bar{x}_i, \bar{v}_i, T_{i+1,n}^-)$ являются промежуточными функциями выигрыша, $F_2^i(\bar{x}_i, \bar{v}_{i-1}, y_i, T_{i,n}^-)$ – промежуточными агрегированными функциями выигрыша, а функции $L_{i-1}^n(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}, T_{i,n}^-)$ – промежуточными максимальными гарантированными результатами игрока 2 на i -м ходу, $i = 1, \dots, n$.

Для игрока 1, соответственно, функции $f_1^i(\bar{x}_i, \bar{v}_i, T_{i+1,n}^-)$ являются функциями выигрыша, $F_1^i(\bar{x}_i, \bar{v}_{i-1}, y_i, T_{i,n}^-)$ – агрегированными функциями выигрыша, а функции $f_1^{i-1}(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}, T_{i,n}^-)$ – максимальными гарантированными результатами на i -м ходу, $i = 1, \dots, n$.

Литература

1. АЛИЕВ В. С., КОНОНЕНКО А. Ф. *О принятии коллективных решений по агрегированной информации* / Всесоюзное совещание по статистическому и дискретному анализу нечисловой информации, экспертным оценкам и дискретной оптимизации (тезисы докладов). Москва – Алма-Ата, 1981. – С. 324-325.

2. АЛИЕВ В. С., ЦВЕТКОВ А. В. *Игра двух лиц с фиксированной последовательностью ходов при агрегированной информации* / Планирование, оценка деятельности и стимулирование в активных системах: Сб. трудов. М.: Институт проблем управления, 1985. – С. 35-42.
3. АЛИЕВ В. С. *Динамические игры двух лиц с фиксированной последовательностью ходов при агрегированной информации о текущем состоянии системы* / Неантагонистические дифференциальные игры и их приложения. Межвузовский сборник научных трудов. М.: всесоюзный заочный машиностроительный институт, 1986. – С. 63-71.
4. АЛИЕВ В. С., КОНОНЕНКО А. Ф. *Точное агрегирование в теоретико-игровых моделях* / Сообщения по прикладной математике. М.: ВЦ АН СССР, 1990.
5. АЛИЕВ В. С., КОНОНЕНКО А. Ф. *Об условиях точного агрегирования информации в теоретико-игровых моделях* / сообщения по прикладной математике. М.: ВЦ АН СССР, 1991.
6. АЛИЕВ В. С., КОНОНЕНКО А. Ф. *некоторые вопросы принятия решений в играх двух лиц при агрегированной информации* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1997. – Т. 37, № 10. – С. 1163-1173.
7. АЛИЕВ В. С. КОНОНЕНКО А. Ф. *Многошаговые игры двух лиц с фиксированной последовательностью ходов при агрегированной информации о выборе партнера.* // Автоматика и телемеханика. – 2005. – № 2. – С. 108-114.
8. ДАНИЛЬЧЕНКО Т. Н., МОСЕВИЧ К. К. *Многошаговая игра двух лиц при «осторожном» втором игроке и последовательной передаче информации.* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1974. – Т. 14, № 5. – С. 1323-1327.

MULTISTAGE TWO PERSONS GAMES WITH MAKING DECISIONS ON EACH STEP WITH AGGREGATED INFORMATION ON A CHOICE OF THE "CAUTIOUS" SECOND PLAYER

Vagif Aliev, Federal state educational establishment of the supreme vocational training «Financial academy at the Government of the Russian Federation», Moscow, Cand.Sc., assistant professor (Aliev_VS@mail.ru).

Abstract: Multistage game of two persons with the fixed sequence of moves at the information on everyone to a course about usual to the moment of decision making of background of game and the aggregated information on a choice of the player 2 on it to a course. The player 1, having on each step this information, the first chooses the strategy on this step and informs its(her) to the second only on the next course. The player 2, receiving the information on a choice of the player 1, operates cautiously, i.e. a choice of strategy on this course aspires to increase of the payoff functions. The maximal guaranteed results and the appropriate optimum (epsilon-optimum) strategy of the first player on each step are found.

Keywords: game, aggregation, optimum strategy, the maximal guaranteed result.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии А.Ф. Кононенко

УДК 007
ББК 22.213

АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Чечурин Л. С.¹

(Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Санкт-Петербургский государственный политехнический университет»)

Предлагаются достаточные алгебраические условия устойчивости систем управления с периодически нестационарным коэффициентом усиления обратной связи. Результат получен на основе теоремы Харитонова для интервальных полиномов и достаточного критерия Бонджиорно для нестационарных систем. Эффективность метода иллюстрируется примером.

Ключевые слова: линейные периодически нестационарные системы, устойчивость, теорема Харитонова

1. Введение

Один из важных разделов теории робастных систем управления относится к анализу линейных стационарных систем, параметры которых неизвестны, но принадлежат определенным интервалам. Если описание такой системы получено в форме характеристического полинома $D(p)$ с интервальными коэффициентами, то вопрос о робастности характеристического полинома имеет решение в форме необходимого и достаточного критерия устойчивости – теоремы Харитонова. Робастность

¹ Леонид Сергеевич Чечурин, кандидат технических наук, доцент (сereu4@gmail.com).

проверяется гурвицевостью четырех определенным образом составленных полиномов [3]. На комплексной плоскости при частоте ω^* каждому такому полиному соответствует угловая точка прямоугольника семейства возмущенных годографов $D(j\omega^*)$. Далее критерий Михайлова гарантирует, что устойчивость всех четырех полиномов будет означать и устойчивость всего семейства. Поскольку устойчивость можно проверить алгебраическими критериями, мы получаем алгебраический критерий робастной устойчивости интервальных стационарных систем. Тот факт, что из четырех годографов ближайшим к началу координат будет только один, позволяет после дополнительных построений и вовсе свести проверку робастности к анализу одного годографа (критерий Цыпкина-Поляка). Отметим также обобщение анализа В. Л. Харитоновна на случай полиномов с комплексными интервальными коэффициентами (см., например, [6]). Несмотря на достигнутые значительные результаты, направление исследования интервальных систем продолжает оставаться в центре внимания, поскольку содержит ряд не имеющих простого решения задач. Современный и детальный обзор состояния дел в этой области можно найти в [2].

С инженерной точки зрения кажется полезным иметь возможность оценить робастность в случае, когда у интервальной системы снимается предположение о стационарности. Ограничимся случаем, когда коэффициент усиления обратной связи может изменяться внутри указанного интервала по некоторому неизвестному периодическому закону (см. рис. 1, слева). Системы рассматриваемого класса достаточно широко распространены, кроме того, к такому описанию сводятся и некоторые случаи описания систем в форме дифференциальных уравнений с периодическими нестационарными коэффициентами. Обычно это означает переход к качественно другому классу систем – периодически нестационарным, где анализ устойчивости проводится специфическими и достаточно сложными инструментами [1].

В работе показывается, как на основании достаточного критерия устойчивости Бонджиорно можно построить простой

достаточный алгебраический критерий устойчивости указанного класса нестационарных систем в форме модифицированной теоремы Харитонова. Критерий имеет и простую графическую интерпретацию, позволяющую непосредственно иллюстрировать эффект периодического изменения интервального параметра.

Опубликованная в [5] идея существенно доработана, снабжена комментариями, примером расчета границы устойчивости и сравнением результата с полученным из известного критерия и из численного эксперимента.

2. Построение критерия

Рассмотрим систему управления, описываемую уравнением в операторной форме:

$$(1) \quad N(p)x(t) + M(p)[a(t)x(t)] = 0,$$

где $N(p)$, $M(p)$ – полиномы оператора дифференцирования p , $a(t)$ – периодически нестационарный параметр, т.е.

$$N(p) = b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_1 p + b_0,$$

$$(2) \quad M(p) = c_{n-1} p^{n-1} + c_{n-2} p^{n-2} + \dots + c_1 p + c_0,$$

$$a(t) = a_0 + a_{\sim}(t),$$

где a_0 – постоянная составляющая (среднее значение) параметра, $a_{\sim}(t)$ – ограниченная центрированная периодическая составляющая, т.е. $|a_{\sim}(t)| \leq a$.

Достаточные условия устойчивости системы (1) представленной в структурной форме с обратной связью на рис. 1 слева, где $W(p) = M(p)/N(p)$, дает частотный критерий Бонджиорно [7], имеющий ясный геометрический смысл. Для устойчивости (1) достаточно того, чтобы при устойчивости стационарной системы (устойчивости $W(j\omega)/(1 + a_0 W(j\omega))$) годограф обратной частотной амплитудно-фазовой характеристики $W^{-1}(j\omega)$ не попадал внутрь окружности радиуса a с центром в точке $(-a_0, 0)$ (см. рис. 1, справа). Аналитическое условие этого, очевидно, имеет вид

$$(3) \quad |a_0 + W^{-1}(j\omega)| = |a_0 + [N(j\omega)/M(j\omega)]| \geq a.$$

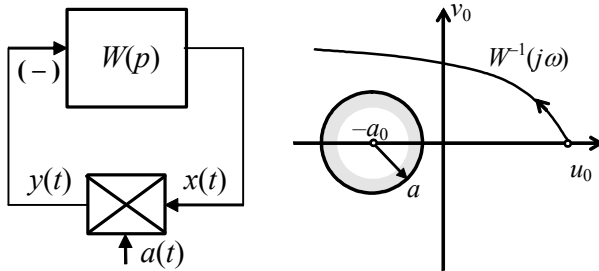


Рис. 1. Структурная схема нестационарной системы управления (слева) и иллюстрация критерия Бонджиорно (справа)

Знак равенства в правой части (3) соответствует критическому случаю, или, если рассматривается параметрическая (относительно размаха колебаний a) задача, уравнению для нахождения критического значения параметра, т.е. уравнению границы достаточной области устойчивости при изменении параметра.

Для нахождения границы допустимых в смысле устойчивости изменений параметра запишем равенство в показательной форме

$$(4) \quad W^{-1}(j\omega) = -(a_0 + ae^{j\varphi}) = -(a_0 + a\cos\varphi + j\sin\varphi).$$

Это равносильно тому, что с учетом обозначений (2) годограф

$$D(j\omega) = N(j\omega) + M(j\omega)[a_0 + a\cos\varphi + j\sin\varphi]$$

при некотором φ пересекает начало координат. В таком случае по крайней мере один из четырех годографов с интервальными комплексными коэффициентами

$$D(j\omega) = N(j\omega) + M(j\omega)[a_0 \pm a \pm ja]$$

не охватывает начало координат (обходит начало координат слева). Для данного случая мы можем связать этот факт с потерей устойчивости одного из полиномов семейства

$$(5) \quad D(p) = d_n p^n + d_{n-1} p^{n-1} + \dots + d_1 p + d_0 = 0,$$

коэффициенты которого имеют вид $d_i = b_i + (a_0 + a\cos\varphi + j\sin\varphi)c_i$ и их действительные $\text{Re } d_i$ и мнимые $\text{Im } d_i$ части ограничены интервалами $[\alpha_i, \beta_i]$ и $[\lambda_i, \mu_i]$ соответственно, причем

$$\alpha_i = b_i + (a_0 + a)c_i,$$

$$\beta_i = b_i + (a_0 - a)c_i,$$

$$\lambda_i = a,$$

$$\mu_i = -a.$$

Необходимые и достаточные условия устойчивости интервального полинома с комплексными коэффициентами определяются теоремой Харитонова. Таким образом, доказано

Утверждение. Для устойчивости колебаний периодически нестационарной системы (1) достаточно робастной параметрической (интервальной) устойчивости по φ системы, описываемой характеристическим уравнением (5), устойчивость которой проверяется гурвицевостью восьми полиномов

$$\begin{aligned} D_1^+(p) &= (\alpha_0 + j\lambda_0) + (\alpha_1 + j\mu_1)p + (\beta_2 + j\mu_2)p^2 + (\beta_3 + j\lambda_3)p^3 + \\ &\quad + (\alpha_4 + j\lambda_4)p^4 + (\alpha_5 + j\mu_5)p^5 + \dots, \\ (6) \quad D_2^+(p) &= (\alpha_0 + j\mu_0) + (\beta_1 + j\mu_1)p + (\beta_2 + j\lambda_2)p^2 + (\alpha_3 + j\lambda_3)p^3 + \\ &\quad + (\alpha_4 + j\mu_4)p^4 + (\beta_5 + j\mu_5)p^5 + \dots, \\ D_3^+(p) &= (\beta_0 + j\lambda_0) + (\alpha_1 + j\lambda_1)p + (\alpha_2 + j\mu_2)p^2 + (\beta_3 + j\mu_3)p^3 + \\ &\quad + (\beta_4 + j\lambda_4)p^4 + (\alpha_5 + j\lambda_5)p^5 + \dots, \\ D_4^+(p) &= (\beta_0 + j\mu_0) + (\beta_1 + j\lambda_1)p + (\alpha_2 + j\lambda_2)p^2 + (\alpha_3 + j\mu_3)p^3 + \\ &\quad + (\beta_4 + j\mu_4)p^4 + (\beta_5 + j\lambda_5)p^5 + \dots, \\ D_1^-(p) &= (\alpha_0 + j\lambda_0) + (\beta_1 + j\lambda_1)p + (\beta_2 + j\mu_2)p^2 + (\alpha_3 + j\mu_3)p^3 + \\ &\quad + (\alpha_4 + j\lambda_4)p^4 + (\beta_5 + j\lambda_5)p^5 + \dots, \\ D_2^-(p) &= (\alpha_0 + j\mu_0) + (\alpha_1 + j\lambda_1)p + (\beta_2 + j\lambda_2)p^2 + (\beta_3 + j\mu_3)p^3 + \\ &\quad + (\alpha_4 + j\mu_4)p^4 + (\alpha_5 + j\lambda_5)p^5 + \dots, \\ D_3^-(p) &= (\beta_0 + j\lambda_0) + (\beta_1 + j\mu_1)p + (\alpha_2 + j\mu_2)p^2 + (\alpha_3 + j\lambda_3)p^3 + \\ &\quad + (\beta_4 + j\lambda_4)p^4 + (\beta_5 + j\mu_5)p^5 + \dots, \\ D_4^-(p) &= (\beta_0 + j\mu_0) + (\alpha_1 + j\mu_1)p + (\alpha_2 + j\lambda_2)p^2 + (\beta_3 + j\lambda_3)p^3 + \\ &\quad + (\beta_4 + j\mu_4)p^4 + (\alpha_5 + j\mu_5)p^5 + \dots \end{aligned}$$

3. Обсуждение

Геометрический смысл сформулированного утверждения лучше всего пояснить на частном случае, когда $M(p) = 1$. Тогда можно прямо указать возмущения стационарного характери-

ческого полинома, вызванные снятием условия стационарности одного из его коэффициентов. Пусть у полинома $D(p)$ свободный член является интервальным стационарным

$$(7) \quad D(p, a) = \bar{d}_n p^n + \dots + d_1 p + a = 0,$$

$$\underline{a} \leq a \leq \bar{a}.$$

Устойчивость интервального полинома определяется по теореме Харитонова, однако из-за того, что неопределенный параметр только один, возможно непосредственно построить семейство годографов Михайлова. Для частоты ω сечение семейства годографов есть отрезок между $D(j\omega, \underline{a})$ и $D(j\omega, \bar{a})$, параллельный действительной оси. Эта ситуация приведена на рис. 2, где a_0 – центр интервала $[\underline{a}, \bar{a}]$.

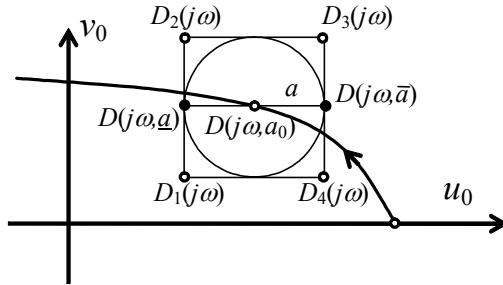


Рис. 2. Построение семейства возмущенных годографов Михайлова для одного интервального коэффициента

Предположим теперь, что $a = a(t) = a_0 + a_-(t)$. Отнесем a_0 к стационарной части полинома, обозначим его $D(p, a_0)$ и применим критерий Бонджиорно в такой формулировке: для устойчивости (7) достаточно, чтобы на произвольной частоте ω окружность с центром $D(j\omega, a_0)$ и радиусом a не охватывала начало координат (рис. 2). Если вместо окружности использовать описанный около нее квадрат с параллельными осям сторонами, то условия критерия усиливаются, однако мы получаем возможность оценить робастность по теореме Харитонова. Нетрудно видеть, что в данном случае (один интервальный комплексный

коэффициент), условия устойчивости сводятся к гурвицевости не восьми, а лишь четырех полиномов $D_{1-4}(p)$ (6). Рисунок явным образом иллюстрирует принципиальный факт: если интервальность коэффициента характеристического полинома для систем такого вида вызывает возмущения годографа вдоль одной лишь оси, то допущение к этому его нестационарности – уже вдоль двух. Иными словами, вопрос достаточной устойчивости системы, описываемой линейным дифференциальным уравнением с переменным коэффициентом, может быть сведен к вопросу устойчивости стационарного характеристического полинома с (неопределенным по фазе) комплексным коэффициентом.

В случае, когда $M(p)$ является полиномом, критерий остается работоспособным, однако переход к анализу устойчивости с характеристическим полиномом $D(p)$ уже не будет так нагляден, т.к. переменный коэффициент $a(t)$ и его производные войдут в него сложным образом.

Приведенные математические манипуляции дают возможность лучше понять эффект от снятия предположения о стационарности интервального коэффициента усиления обратной связи с точки зрения теории управления. Если линейная динамическая система может быть представлена в форме системы с обратной связью, условие ее устойчивости может быть установлено критерием Найквиста, проверяющим наличие в системе баланса фаз и амплитуд (случай пересечения точки $(-1, 0)$ на комплексной плоскости годографа Найквиста). Интервальность коэффициента усиления обратной связи приведет возмущению годографа разомкнутой системы, проявляющемуся в неравномерном переносе вдоль действительной оси. Нестационарность же этого коэффициента вызовет возмущение годографа уже в обоих направлениях, т.е. вносит в разомкнутую систему дополнительный сдвиг по фазе.

Сформулированный критерий является глобальным, т.е. оценивает устойчивость любых возможных колебаний системы (1). Однако на практике характерные частоты колебаний

системы часто предсказуемы. Во-первых, это резонансные частоты $D(j\omega, a_0)$, точнее, резонансная частота, соответствующая преобладающему пику амплитудно-частотной характеристики $|W(j\omega)/(1 + a_0W(j\omega))|$, или частота, определяющая $\|W(j\omega)/(1 + a_0W(j\omega))\|_\infty$. Во-вторых, если частота изменения параметра $a(t)$ задана и равна Ω , то это частоты первого $\Omega/2$, второго Ω , третьего $3\Omega/2$ и т. д. параметрических резонансов системы. В таком случае имеет смысл привести формулировку упрощенного «точечного» критерия устойчивости, сводящегося к проверке гурвицевости четырех полиномов с действительными коэффициентами.

Пусть левая часть (3) достигает минимума на частоте ω_p . Что означает, что на этой частоте годограф $a_0 + W^{-1}(j\omega)$ ближе всего к началу координат, или, что то же самое, на годографе $W(j\omega)/(1 + a_0W(j\omega))$ различим резонанс. Таким образом, для выполнения (3) достаточно его справедливости для частоты ω_p .

Рассмотрим колебания на интересующей нас частоте ω_p . Используем, следуя [4], замену $p = j\omega_p$ и $j = p/\omega_p$, тогда равенство (4) переписывается в виде

$$W^{-1}(p) + [a_0 + a\cos\varphi + (ap/\omega_p)\sin\varphi] = 0,$$

откуда с учетом обозначений (2) следует характеристическое уравнение

$$(8) \quad D(p) = N(p) + M(p)[a_0 + a\cos\varphi + (ap/\omega_p)\sin\varphi] = \\ = d_n p^n + d_{n-1} p^{n-1} + \dots + d_1 p + d_0 = 0.$$

Коэффициенты характеристического полинома, в отличие от (5), действительны и определяются для $i = 1, \dots, n$

$$(9) \quad d_i = b_i + (a_0 + a\cos\varphi)c_i + (c_{i-1}a/\omega_p)\sin\varphi = \\ = b_i + a_0c_i + a(c_i^2 + c_{i-1}^2\omega_p^{-2})^{1/2}\sin(\varphi + \arctg c_i/c_{i-1}\omega_p)$$

и $d_0 = b_0 + (a_0 + a\cos\varphi)c_0$. Таким образом, коэффициенты d_i ограничены и имеют максимальные \bar{d}_i и минимальные \underline{d}_i значения, причем для $i = 1, \dots, n$

$$(10) \quad \bar{d}_i = b_i + a_0c_i + a(c_i^2 + c_{i-1}^2\omega_p^{-2})^{1/2}, \\ \underline{d}_i = b_i + a_0c_i - a(c_i^2 + c_{i-1}^2\omega_p^{-2})^{1/2},$$

а для $i = 0$

$$\underline{d}_0 = b_0 + a_0 c_0 - a c_0, \quad \bar{d}_0 = b_0 + a_0 c_0 + a c_0.$$

Фазу φ можно считать неопределенностью системы. Таким образом, для устойчивости колебаний периодически нестационарной системы (1) достаточно робастной параметрической (интервальной) устойчивости по φ системы, описываемой характеристическим уравнением (8), устойчивость которой проверяется гурвицевостью четырех полиномов

$$(11) \begin{aligned} D_1(p) &= \underline{d}_0 + \underline{d}_1 p + \underline{d}_2 p^2 + \underline{d}_3 p^3 + \underline{d}_4 p^4 + \underline{d}_5 p^5 + \dots, \\ D_2(p) &= \underline{d}_0 + \bar{d}_1 p + \underline{d}_2 p^2 + \underline{d}_3 p^3 + \underline{d}_4 p^4 + \bar{d}_5 p^5 + \dots, \\ D_3(p) &= \bar{d}_0 + \bar{d}_1 p + \underline{d}_2 p^2 + \underline{d}_3 p^3 + \bar{d}_4 p^4 + \bar{d}_5 p^5 + \dots, \\ D_4(p) &= \bar{d}_0 + \underline{d}_1 p + \underline{d}_2 p^2 + \bar{d}_3 p^3 + \bar{d}_4 p^4 + \underline{d}_5 p^5 + \dots. \end{aligned}$$

4. Пример

Проведем анализ устойчивости динамической системы, описанной характеристическим полиномом

$$D(p) = b_2 p^2 + b_1 p + b_0,$$

где b принадлежит интервалу $[\underline{b}, \bar{b}]$. Пусть b_0 – центр этого интервала, а A – его полудлина, т.е. $b \in [b_0 - A, b_0 + A]$.

Задача эквивалентна анализу устойчивости колебательного звена с обратной связью, имеющей интервальный коэффициент усиления рис. 3, где $a \in [-A, A]$.

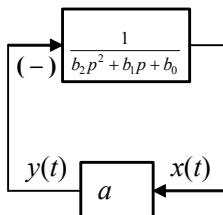


Рис. 3. Структурная схема интервальной системы с обратной связью

Если исследуемая система стационарна, то интервальность коэффициента породит необходимость рассмотреть семейство характеристических полиномов или семейство годографов

Михайлова. В данном случае они строятся сдвигом невозмущенного годографа $D(j\omega, b_0)$ вдоль действительной оси на значения от $-A$ до A . Определим устойчивость системы. Формальное применение для этого теоремы Харитоновна в данном случае потребует проверки гурвицевости лишь двух простых полиномов

$$D_1(p) = b_0 - A + b_1p + b_2p^2$$

и

$$D_3(p) = b_0 + A + b_1p + b_2p^2.$$

Теперь снимем условие стационарности коэффициента b , оставив прежними границы его изменения. В соответствии с критерием Бонджиорно в форме (3), для устойчивости достаточно выполнения на любой частоте условия

$$|D(j\omega, b_0)| = |b_0 + bj\omega + b_2(j\omega)^2| \geq A.$$

Минимум левой части достигается на (резонансной) частоте

$$\omega_p = \frac{\sqrt{4b_2b_0 - b_1^2}}{2b_2},$$

его значение $|D(j\omega_p, b_0)|$ дает достаточное граничное значение для A :

$$(12) A < \frac{b_1}{2b_2} \sqrt{4b_2b_0 - \frac{3}{4}b_1^2}.$$

С другой стороны, разрешимость (соответствующего случаю равенства) уравнения границы устойчивости, очевидно, могла бы быть истолкована как наличие такого φ , при котором выполняется

$$D(j\omega, \varphi) = b_0 + bj\omega + b_2(j\omega)^2 + A\cos\varphi + jA\sin\varphi = 0.$$

Иными словами, речь идет об устойчивости полинома с комплексным коэффициентом

$$D(p, \varphi) = b_2p^2 + b_1p + b,$$

$$b = b_0 + A\cos\varphi + jA\sin\varphi.$$

Очевидно, изменения действительной и комплексной частей коэффициента связаны, однако для решения вопроса устойчивости достаточно будет считать их независимыми и воспользо-

зоваться теоремой Харитонова для интервальных полиномов с комплексными коэффициентами. Соответственно, для устойчивости достаточно гурвицевости четырех полиномов

$$D_1(p) = b_0 - A - jA + b_1p + b_2p^2,$$

$$D_2(p) = b_0 - A + jA + b_1p + b_2p^2,$$

$$D_3(p) = b_0 + A - jA + b_1p + b_2p^2,$$

$$D_4(p) = b_0 + A + jA + b_1p + b_2p^2.$$

Для рассматриваемого случая граница устойчивости по A определится лишь одним полиномом $D_2(p)$, из которого можно получить напрямую алгебраическое условие устойчивости

$$(13) -b_1 \pm \operatorname{Re} (b_1^2 - 4b_0b_2 + 4Ab_2 - j4b_2A)^{1/2} < 0.$$

Наконец, получим «точечную» оценку для частоты ω_p . При этом годограф возмущенного полинома имеет вид (8):

$$D(j\omega, \varphi) = b_0 + A \cos \varphi + (b_1 + A \sin \varphi / \omega_p)j\omega + b_2(j\omega)^2 = 0.$$

Последнее означает, что на некоторой частоте ω возмущения годографа $D(j\omega, \varphi)$ пересекают начало координат. Для того, чтобы этого не произошло, в соответствии с критерием Михайлова, достаточно, чтобы при любом φ был устойчив полином

$$D(p, \varphi) = d_2p^2 + d_1p + d_0,$$

где

$$d_2 = b_2,$$

$$d_1 = b_1 + A \sin \varphi / \omega_p,$$

$$d_0 = b_0 + A \cos \varphi.$$

Коэффициенты d_1 и d_0 стационарны, принадлежат интервалам $d_0 \in [b_0 - A, b_0 + A]$, $d_1 \in [b_1 - A/\omega_p, b_1 + A/\omega_p]$ и связаны через φ . Для применения теоремы Харитонова будем считать их независимыми и проверим (более) достаточное условие устойчивости нестационарной системы, сформулированное, однако, в алгебраической форме: требуется гурвицевость четырех полиномов

$$D_1(p) = b_0 - A + (b_1 - A/\omega_p)p + b_2p^2,$$

$$D_2(p) = b_0 - A + (b_1 + A/\omega_p)p + b_2p^2,$$

$$D_3(p) = b_0 + A + (b_1 + A/\omega_p)p + b_2p^2,$$

$$D_4(p) = b_0 + A + (b_1 - A/\omega_p)p + b_2p^2.$$

В данном случае допустимая достаточная граница для A находится из этого условия (также по одному полиному) немедленно:

$$(14) A < b_1 \omega_p = \frac{b_1}{2b_2} \sqrt{4b_2 b_0 - b_1^2}.$$

Сравнение в явном виде с (12) показывает степень консервативности новой оценки.

Проведем примерный расчет, задавшись следующими значениями параметров: $b_2 = 1$, $b_1 = 0,1$, $b \in [1 - A, 1 + A]$. При стационарном b , очевидно, полином устойчив для любого $A < 1$. При $b = b(t)$ имеем

$$\omega_p = \frac{\sqrt{4 - 0,1^2}}{2} \approx 0,99875 \text{ (рад/с)},$$

и достаточную оценку по (12):

$$A < |D(j\omega_p, b_0)| = \frac{b_1}{2b_2} \sqrt{4b_2 b_0 - \frac{3}{4} b_1^2} \approx 0,09991.$$

Достаточная оценка по (13):

$$A < 0,0944$$

Достаточная оценка по (14):

$$A < \frac{b_1}{2b_2} \sqrt{4b_2 b_0 - b_1^2} \approx 0,09987.$$

Численный эксперимент, проведенный в пакете *Matlab*, показывает, что устойчивость данной нестационарной системы теряется в форме возбуждения первого параметрического резонанса лишь при $A > 0,16$ для наихудшего в смысле устойчивости закона изменения $a(t)$ – меандра с частотой $2\omega_p$. Разъяснение этого эффекта и методику уточнения границы устойчивости на основе метода гармонической стационаризации дано в [5].

Интересно сравнить на данном примере приведенный в [1] алгебраический достаточный критерий устойчивости для интервальных нестационарных систем. Для рассматриваемого примера в принятых обозначениях он запишется как

$$\alpha + A\rho R < 0,$$

где α – действительная часть ближайшего к мнимой оси корня $D(j\omega, b_0)$; ρ – модуль наибольшего корня $D(j\omega, b_0)$; R – сумма модулей вычетов $W(p) = 1/D(p, b_0)$. В нашем примере $\alpha = -0,05$, $\rho = 1$, $R \approx 1,0012$, соответственно, приближенно получаем, что для устойчивости системы достаточно выполнения

$$A < 0,049,$$

что в практически в два раза осторожнее предлагаемых в статье оценок.

5. Выводы

В работе сформулирован алгебраический достаточный критерий устойчивости класса систем управления с интервальным нестационарным коэффициентом усиления обратной связи и класса сводящихся к такому представлению некоторых систем, описываемых дифференциальными уравнениями с периодическими коэффициентами. Несмотря на большую по сравнению с критерием Бонджиорно консервативность, он кажется представляющим интерес для теории и практики. Во-первых, оценка устойчивости колебаний нестационарной системы проводится проверкой гурвицевости нескольких стационарных полиномов. Это, помимо упрощения оценки устойчивости, указывает приложение обобщения теоремы Харитоновна об устойчивости интервальных полиномов с комплексными коэффициентами. Во-вторых, критерий позволяет наглядно оценить то, какой «ущерб» устойчивости может нанести нестационарность коэффициента усиления обратной связи, а также оценить допустимый в смысле устойчивости интервал его изменения.

Автор благодарит А. А. Трембу за ряд замечаний и советов.

Литература

1. *Нестационарные системы автоматического управления: анализ, синтез и оптимизация* / Под ред. К. А. Пупкова,

- Н. Д. Егупова. – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2007. – 631 с.
2. ПОЛЯК Б. Т., ЩЕРБАКОВ П. С. *Робастная устойчивость и управление*. М.: Наука, 2002. – 303 с.
 3. ХАРИТОНОВ В. Л. *Асимптотическая устойчивость семейства систем линейных дифференциальных уравнений* // Дифференциальные уравнения. – 2002. – Т. 1, вып. 11. – С. 2086-2088.
 4. ХЛЫПАЛО Е. И. *Расчет и проектирование нелинейных корректирующих устройств в автоматических системах*. Л.: Энергоиздат, 1982. – 272 с.
 5. ЧЕЧУРИН Л. С. *Устойчивость нестационарных систем управления с периодически изменяющимися коэффициентами* // Изв. вузов. Приборостроение. – 2007. – Т. 50, №. 10. – С. 23-25.
 6. BHATTACHARYYA S. P., CHAPPELLAT H., KEEL L. H. *Robust Control: the Parametric Approach*. – Upper Saddle River: Prentice Hall PTR, 1995. – 625 p.
 7. BONGIORNO, J. J., JR. *An extension of the Nyquist-Barkhausen stability criterion to linear lumped parameter systems with time-varying elements*, IEEE Trans. – 1963. – AC-8, P. 166-172

ALGEBRAIC SUFFICIENT STABILITY CONDITION FOR PERIODICAL TIME-VARIANT CONTROL SYSTEMS

Leonid Chechurin, St.Petersburg State Polytechnical University, St.Petersburg, Cand.Sc., Dept. Head (cepreu4@gmail.com).

Abstract: Algebraic sufficient stability condition for periodical time-variant control systems is given. The result is based on Kharitonov Theorem for interval systems and Bongiorno sufficient condition for time-variant system stability. The efficiency of the method is illustrated by an example.

Keywords: linear periodical time-variant systems, stability, Kharitonov theorem.

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии П.С. Щербаковым*

ИССЛЕДОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ ПО СТЕПЕНИ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ПРИ ПИД УПРАВЛЕНИИ. ЧАСТЬ 2

Шубладзе А. М.¹

*(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова
РАН, г. Москва)*

Попадько В. Е.², Якушева А. А.³

*(Российский государственный университет нефти и газа
им. И.М. Губкина, г. Москва)*

Бобриков Н. М.⁴

(ОАО «Газавтоматика»)

Кузнецов С. И.⁵

(ОАО НИИТЕПЛОПРИБОР, г. Москва)

В работе рассматривается синтез систем управления по критерию максимальной степени устойчивости для ПИД – закона управления. Проводится исследование основных оптимальных по степени устойчивости решений, что позволило

¹ Александр Михайлович Шубладзе, заведующий лабораторией, доктор технических наук, профессор (*shub@ipu.rssi.ru*).

² Владимир Ефимович Попадько, декан факультета «Автоматики и вычислительной техники» РГУ нефти и газа им. И.М. Губкина, доктор технических наук, профессор (Москва, Ленинский проспект, д. 65, тел. (499) 1357096).

³ Анна Александровна Якушева, магистр техники и технологии РГУ нефти и газа им. И.М. Губкина (*yakusheva_a@mail.ru*).

⁴ Николай Михайлович Бобриков, начальник департамента ОАО «Газавтоматика», (499) 246-63-45..

⁵ Сергей Иванович Кузнецов, генеральный директор ОАО «НИИТЕПЛОПРИБОР», (495) 999-18-16.

наметить дальнейший путь развития метода машинным способом.

Ключевые слова: синтез систем максимальной степени устойчивости, исследование оптимальных по степени устойчивости решений.

Введение

Работа продолжает исследования по синтезу систем максимальной степени устойчивости, проведенные в [1]. В цитированной работе был рассмотрен ряд оптимальных по степени устойчивости решений для ПИД закона управления которые касались следующих четырех случаев:

- 1) случай действительных корней оптимального решения;
- 2) случай трех действительных корней и одной комплексно-сопряженной пары корней;
- 3) случай двух действительных корней и одной комплексно-сопряженной пары корней;
- 4) случай двух действительных и двух пар комплексно-сопряженных корней;

Всего при ПИД законе управления, как указывалось в [2], возможны 9 случаев оптимальных по степени устойчивости решений. В настоящей работе будут исследованы оставшиеся 5 случаев. При этом постановка самой задачи оптимального по степени устойчивости управления и все используемые обозначения будут те же самые, что и в работе [1]. С целью более понятного и удобного восприятия материала статьи повторим некоторые из этих обозначений.

Максимальная степень устойчивости

$$(1) \quad I_{\text{оп}} = -\min \max \operatorname{Re} \lambda_j(k_{\text{п}}, k_{\text{и}}, k_{\text{д}}),$$

где λ_j – корни характеристического полинома

$$D_{n+1}(\lambda) = \lambda^{n+1} + \sum_1^n a_i \lambda^i + k_0(k_{\text{п}}\lambda + k_{\text{и}} + \lambda^2 k_{\text{д}})$$

который после замены λ на $\lambda - I_{\text{оп}}$ при $k_{\Pi} = k_{\text{Поп}}$, $k_{\text{И}} = k_{\text{Иоп}}$ и $k_{\text{Д}} = k_{\text{Доп}}$ превращается в

$$(2) D_{1(n+1)}(\lambda_1, k_{\text{Поп}}, k_{\text{Иоп}}, k_{\text{Доп}}) = \lambda_1^{n_q} \prod_{i=1}^{n_k} (\lambda_1^2 + \omega_i^2)^{\gamma_i} D_{1[(n+1-n_g-2n_k)]}(\lambda_1) = \\ = \lambda_1^{n+1} + \sum_{i=3}^n a_i^* \lambda_1^{i-1} + \sum_{i=1}^2 a_i^* (k_{\text{Поп}}, k_{\text{Иоп}}, k_{\text{Доп}}) \lambda_1^{i-1},$$

где

$$(3) a_i^* = \frac{1}{(i-1)!} \frac{\partial^{i-1} D_{(n+1)}(\lambda, k_{\text{Поп}}, k_{\text{Иоп}}, k_{\text{Доп}})}{\partial \lambda^{i-1}},$$

– это i -я производная $D_{n+1}(\lambda)$ при $\lambda = -I_{\text{оп}}$; $D_{1[n+1-n_g-2n_k]}(\lambda_1)$ – полином, не имеющий корней в правой полуплоскости. В процессе исследований будет использован следующий модифицированный годограф характеристического полинома (3), в котором $\lambda_1 = i\omega$, $i^2 = -1$,

$$(4) Z_{n_0}(i\omega) = \text{Re } D_{1(n+1)}(i\omega) + i\omega^{-1} \text{Im } D_{1(n+1)}(i\omega) = \text{Re}_0(\omega^2) + i \text{Im}_0(\omega^2)$$

Проведем рассмотрение следующих 5 случаев, которые не были рассмотрены в [1].

1. Случай одного действительного корня и трех пар комплексно-сопряженных корней

В этом случае справедливы условия

$$(5) n_g = 1, n_k = 3, \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 1,$$

при которых крайними правыми корнями (2) являются один действительный корень и три пары комплексно-сопряженных корней. Условие (5) может выполняться при

$$(6) a_1^*(I_{\text{оп}}, k_{\text{Поп}}, k_{\text{Иоп}}, k_{\text{Доп}}) = 0, \\ \Delta^{(0)}(I_{\text{оп}}, k_{\text{Поп}}, k_{\text{Иоп}}, k_{\text{Доп}}) = \Delta^{(1)}_{n-5}(I_{\text{оп}}, k_{\text{Поп}}, k_{\text{Иоп}}, k_{\text{Доп}}) = \\ = \Delta^{(2)}_{n-5}(I_{\text{оп}}, k_{\text{Поп}}, k_{\text{Иоп}}, k_{\text{Доп}}) = 0, \\ \Delta^{(0)}_j(I_{\text{оп}}, k_{\text{Поп}}, k_{\text{Иоп}}, k_{\text{Доп}}) > 0,$$

где $1 < j < n - 5$; $\Delta^{(0)}_{n-5}(I_{\text{оп}}, k_{\text{Поп}}, k_{\text{Иоп}}, k_{\text{Доп}})$, $\Delta^{(1)}_{n-5}(I_{\text{оп}}, k_{\text{Поп}}, k_{\text{Иоп}}, k_{\text{Доп}})$,

$\Delta_{n-5}^{(2)}(I_{оп}, k_{Поп}, k_{Иоп}, k_{Доп})$ – основной и побочные определители Гурвица; a_1^* определяется соотношением (2). Из четырех уравнений (6) можно найти оптимальные значения $I_{оп}$, $k_{Поп}$, $k_{Иоп}$, и $k_{Доп}$. Но эти условия являются необходимыми условиями оптимальности (1). На рис. 1 изображен годограф (4) полинома (2), построенного при выполнении (6), не являющийся годографом оптимальной системы. Из этого годографа видно, что увеличение $k_{Доп}$, полученного из (6), приводит к появлению области, размещение в которой начала координат делает полином (2) устойчивым.

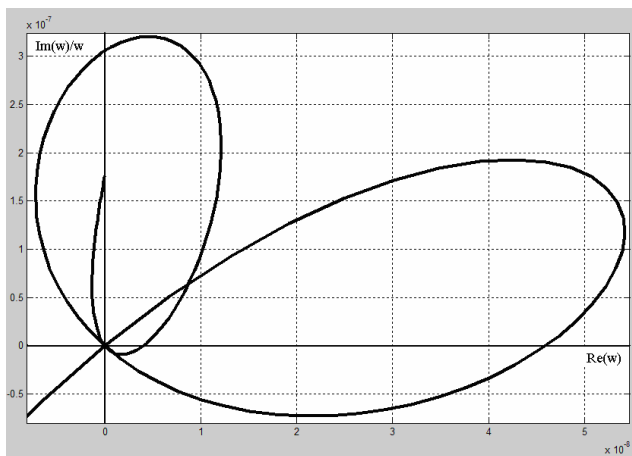


Рис. 1. Годограф неоптимальной системы

Годограф на рис. 1 получен для полинома (6), в котором

$$D_{[l_{n+1}-n_g-2n_k]}(\lambda_1) = D_{[l_{40}]}(\lambda_1) = (\lambda_1 + 1)^{40},$$

$$n_g = 1, n_k = 3, \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 1, \omega_1 = 0,03, \omega_2 = 0,1, \omega_3 = 0,14.$$

Оптимальность в рассматриваемом случае можно гарантировать следующими соображениями. Рассмотрим векторы, нормальные к годографу (4)

$$Z_{n0}^*(i\omega) = (\text{Re}_0(\omega^2) + i\text{Im}_0(\omega^2)),$$

в точках $\omega = \omega_1, \omega = \omega_2, \omega = \omega_3$ пересечения им начала коорди-

нат. Такими векторами являются

$$\bar{y}_1(\omega_1^2) = (-\operatorname{Im}_1(\omega_1^2), -\operatorname{Re}_1(\omega_1^2)),$$

$$\bar{y}_2(\omega_2^2) = (-\operatorname{Im}_1(\omega_2^2), -\operatorname{Re}_1(\omega_2^2)),$$

$$\bar{y}_3(\omega_3^2) = (-\operatorname{Im}_1(\omega_3^2), -\operatorname{Re}_1(\omega_3^2)),$$

$$\text{где } \operatorname{Im}_1(\omega^2) = \frac{\partial \omega^{-1} \operatorname{Im} D_{1(n+1)}(i\omega)}{\partial(\omega^2)}, \quad \operatorname{Re}_1(\omega^2) = \frac{\partial \operatorname{Re} D_{1(n+1)}(i\omega)}{\partial(\omega^2)}.$$

Найдем условие, при котором вариациями параметров управления k_{Π} , $k_{И}$ и $k_{Д}$ степень устойчивости полинома (2) не может быть увеличена. Каждая из трех пар комплексных корней вариациями δ_{Π} , $\delta_{И}$ и $\delta_{Д}$ параметров k_{Π} , $k_{И}$ и $k_{Д}$ может быть сдвинута в область устойчивости корней плоскости λ_1 (2), если каждое из скалярных произведений

$$(7) \quad \langle \bar{y}_i(\omega_i^2), (\delta_{\Xi} - \omega_i^2 \delta_{\tilde{\lambda}}, \delta_i) \rangle < 0, \quad \text{где } i = 1, 2, 3.$$

Но (7) справедливо, если матрица

$$(8) \quad A = \begin{pmatrix} -\operatorname{Im}_1(\omega_1^2) & \operatorname{Re}_1(\omega_1^2) & \omega_1^2 \operatorname{Im}_1(\omega_1^2) \\ -\operatorname{Im}_1(\omega_2^2) & \operatorname{Re}_1(\omega_2^2) & \omega_2^2 \operatorname{Im}_1(\omega_2^2) \\ -\operatorname{Im}_1(\omega_3^2) & \operatorname{Re}_1(\omega_3^2) & \omega_3^2 \operatorname{Im}_1(\omega_3^2) \end{pmatrix}$$

невырождена, т.е. ее определитель $|A| \neq 0$. Искомое дополнительное условие, гарантирующее оптимальность решения, зависит от знака вариации $\delta_{И}$, при которой наряду с вариациями δ_{Π} и $\delta_{Д}$ хотя бы одна из комплексных пар корней сдвинулась влево от прямой $\lambda_1 = 0$ (2), сохранив значение степени устойчивости I . В частном случае годограф(4) на частоте ω_1 может быть сдвинут в направлении $-\bar{y}_1(\omega_1^2)$ обратном направлению вектора нормали, обеспечивая на этой частоте устойчивость, а на частотах ω_2 и ω_3 – в направлениях, перпендикулярных направлениям векторов нормали $\bar{y}_2(\omega_2^2)$ и $\bar{y}_3(\omega_3^2)$, сохраняя на этих частотах систему на границе устойчивости. Вариации δ_{Π} , $\delta_{И}$ и $\delta_{Д}$, которые обеспечивают указанное движение годографа, находятся из уравнения

$$(9) \quad A \begin{pmatrix} \delta_{И} \\ \delta_{П} \\ \delta_{Д} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\delta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

где $\delta > 0$ – достаточно малое число. При выполнении (9) возможность увеличения степени устойчивости полинома (2), как было отмечено выше, зависит от знака вариации $\delta_{И}$ его свободного члена, который, как следует из (5), равен нулю. Член в (2) становится отрицательным, нарушая необходимое условие его устойчивости, и действительный корень в (5) переходит в правую полуплоскость λ_1 (2). Условие $\delta_{И} < 0$ имеет место при выполнении неравенства

$$(10) \quad |A| \begin{vmatrix} \text{Re}_1(\omega_2^2) & \omega_2^2 \text{Im}_1(\omega_2^2) \\ \text{Re}_1(\omega_3^2) & \omega_3^2 \text{Im}_1(\omega_3^2) \end{vmatrix} > 0,$$

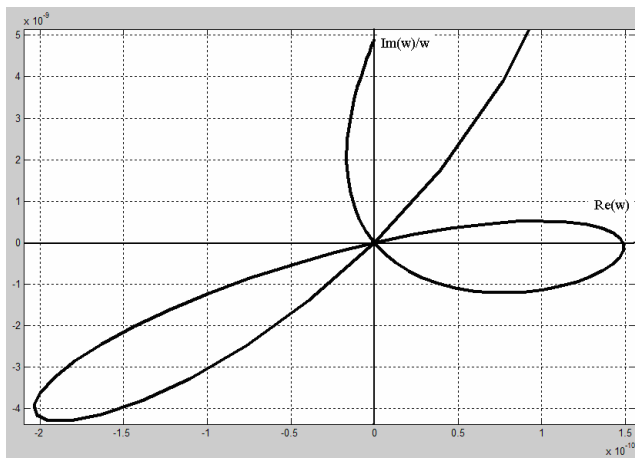


Рис. 2. Годограф оптимальной системы

Таким образом, неравенство (10) наряду с выражениями (6) являются достаточными условиями оптимальности в случае (5).

На рис. 2 изображен годограф полинома (6) оптимальной системы, для которой выполнено условие (10). Из этого годо-

графа следует, что любое изменение $k_{\text{Доп}}$, полученного из (6), приводит к появлению областей, размещение в которых начала координат делает полином (2) неустойчивым.

Годограф на рис. 2 получен для полинома (2), в котором

$$D_{1[n+1-n_g-2n_k]}(\lambda_1) = D_{1[40]}(\lambda_1) = (\lambda_1 + 1)^{40},$$

$$n_g = 1, n_k = 3, \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 1, \omega_1 = 0,02, \omega_2 = 0,05, \omega_3 = 0,07.$$

2. Случай одного действительного корня и кратной комплексно-сопряженной пары корней

В этом случае справедливы условия

$$(11) n_g = 1, n_k = 1, \gamma_1 = 2,$$

при которых крайними правыми корнями (2) являются один действительный корень и кратная комплексно-сопряженная пара корней. Условие (11) может быть выполнено при

$$(12) a_1^*(I_{\text{оп}}, k_{\text{Поп}}, k_{\text{Иоп}}, k_{\text{Доп}}) = 0,$$

$$\Delta_{n-3}^{(0)}(I_{\text{оп}}, k_{\text{Поп}}, k_{\text{Иоп}}, k_{\text{Доп}}) = \Delta_{n-3}^{(1)}(I_{\text{оп}}, k_{\text{Поп}}, k_{\text{Иоп}}, k_{\text{Доп}}) = 0,$$

$$\Delta_j^{(0)}(I_{\text{оп}}, k_{\text{Поп}}, k_{\text{Иоп}}, k_{\text{Доп}}) > 0,$$

где $1 < j < n - 3$; a_1^* – из (3); $\Delta_{n-4}^{(0)}(I_{\text{оп}}, k_{\text{Поп}}, k_{\text{Иоп}}, k_{\text{Доп}})$, $\Delta_{n-3}^{(1)}(I_{\text{оп}}, k_{\text{Поп}}, k_{\text{Иоп}}, k_{\text{Доп}})$ – основной и побочный определители Гурвица. Для нахождения четырех параметров $I_{\text{оп}}$, $k_{\text{Поп}}$, $k_{\text{Иоп}}$ и $k_{\text{Доп}}$ введем полином

$$(13) D_{1(n-1)}^{(1)}(I_{\text{оп}}) = \text{Re}_1(\omega^2) + i\omega \text{Im}_1(\omega^2),$$

$$\text{где } \text{Re}_1(\omega^2) = \frac{\partial \text{Re } D_{1(n+1)}(i\omega)}{\partial(\omega^2)}, \quad \text{Im}_1(\omega^2) = \frac{\partial \omega^{-1} \text{Im } D_{1(n+1)}(i\omega)}{\partial(\omega^2)}$$

Полином (13) имеет корень на той же частоте, что и полином (2), поэтому справедливо условие

$$(14) \Delta_{1(n-2)}(I_{\text{оп}}, k_{\text{Доп}}) = 0,$$

где $\Delta_{1(n-2)}(I_{\text{оп}}, k_{\text{Доп}})$ – основной определитель Гурвица полинома (13). Условия (12) и (14) являются необходимыми условиями оптимальности. Поэтому найденные из них четыре неизвестных $I_{\text{оп}}$, $k_{\text{П}}$, $k_{\text{И}}$, $k_{\text{Д}}$ могут и не быть оптимальными. На рис. 3 изображен годограф полинома (2), построенного при выполнении (12), (14), который не является годографом оптимальной системы, так

как при увеличении k_d «носик» преобразуется в петлю и сдвигается влево, образуя соответствующим выбором k_{II} и k_{II} область «устойчивых» корней.

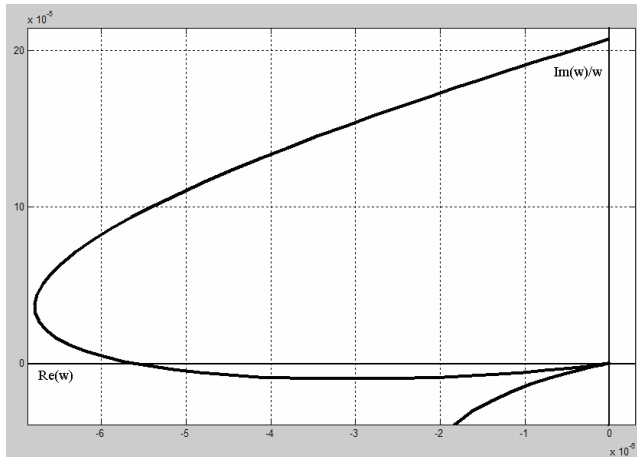


Рис. 3 Годограф неоптимальной системы

Годограф на рис. 3 получен для полинома (2), в котором

$$D_{1[n+1-n_g-2n_k]}(\lambda_1) = D_{1[6]}(\lambda_1) = (\lambda_1 + 1)^{20},$$

$$n = 24, n_g = 1, n_k = 1, \gamma_1 = 2, \omega_1 = 0,12.$$

Для оптимальности системы (2), (12) и (14) достаточно выполнения условия на знак второй производной мнимой части:

$$(15) \text{Im}_2(\omega_1^2) > 0,$$

где $\text{Im}_2(\omega^2) = \frac{\partial^2 \omega^{-1} \text{Im} D_{1(n+1)}(i\omega)}{\partial^2 (\omega^2)}$ при $\omega = \omega_1$; ω_1 – частота, на

которой годограф (4) «касается» начала координат. На рис. 4 изображен годограф (4) полинома оптимальной системы (2), для которой выполнено условие (15).

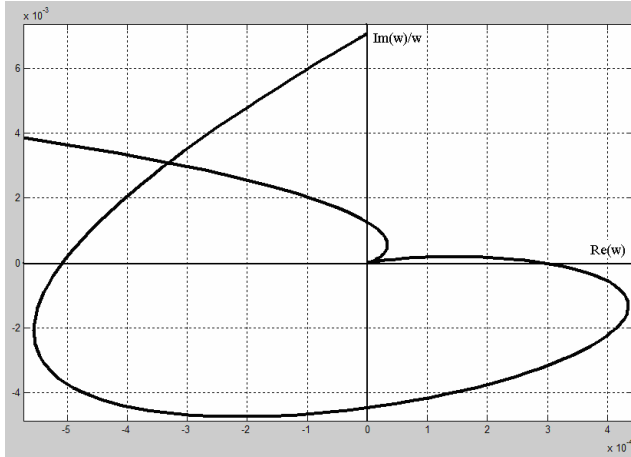


Рис. 4. Годограф оптимальной системы

Годограф на рис. 4 получен для полинома (2), в котором

$$D_{1[n+1-n_g-2n_k]}(\lambda_1) = D_{1[20]}(\lambda_1) = (\lambda_1 + 1)^{20},$$

$$n = 24, n_g = 1, n_k = 1, \gamma_1 = 2, \omega_1 = 0,29.$$

3. Случай одной комплексно-сопряженной пары и кратной комплексно-сопряженной пары корней

В этом случае справедливы условия

$$(16) n_g = 0, n_{k1} = 2, \gamma_1 = 1, \gamma_2 = 2,$$

при которых крайними правыми корнями (2) являются пара комплексно-сопряженных корней и кратная комплексно-сопряженная пара корней. Условие (16) может выполняться при

$$(17) \Delta_{n-4}^{(0)}(I_{оп}, k_{Поп}, k_{Иоп}, k_{Доп}) = \Delta_{n-4}^{(1)}(I_{оп}, k_{Поп}, k_{Иоп}, k_{Доп}) = \\ = \Delta_{n-4}^{(2)}(I_{оп}, k_{Поп}, k_{Иоп}, k_{Доп}) = 0,$$

$$\Delta_j^{(0)}(I_{оп}, k_{Поп}, k_{Иоп}, k_{Доп}) > 0,$$

где $1 < j < n - 4$; $\Delta_{n-4}^{(0)}$, $\Delta_{n-4}^{(1)}$ и $\Delta_{n-4}^{(2)}$ – основной и побочные определители Гурвица. Для нахождения четырех параметров $I_{оп}$, $k_{Поп}$, $k_{Иоп}$, $k_{Доп}$, как и в предыдущем случае, введем полином

$$(18) D_{1(n-1)}^{(1)}(I_{оп}) = \text{Re}_1(\omega^2) + i\omega \text{Im}_1(\omega^2),$$

где функции $\text{Re}_1(\omega^2)$ и $\text{Im}_1(\omega^2)$ определены в (13). Полином (18) имеет корень на той же частоте, что и полином (2). Поэтому справедливо условие

$$(19) \Delta_{1(n-2)}(I_{\text{оп}}, k_{\text{Доп}}) = 0,$$

где $\Delta_{1(n-2)}(I_{\text{оп}}, k_{\text{Доп}})$ – основной определитель Гурвица полинома (18). Условия (17) и (19) являются необходимыми условиями оптимальности. Найденные из них четыре неизвестных $I_{\text{оп}}, k_{\text{Поп}}, k_{\text{Иоп}}, k_{\text{Доп}}$ не всегда оптимальны. На рис. 5 изображен годограф полинома (2), построенного при выполнении (17), (19), который при этом не является годографом оптимальной системы, потому что его, как и в предыдущем случае 7, вариациями $k_{\text{П}}, k_{\text{И}}$ и $k_{\text{Д}}$ можно сделать годографом устойчивой системы.

Годограф на рис. 5 получен для полинома (2), в котором

$$D_{1[n+1-n_g-2n_k]}(\lambda_1) = D_{1[40]}(\lambda_1) = (\lambda_1 + 1)^{60},$$

$$n = 65, n_g = 0, n_k = 2, \gamma_1 = 1, \gamma_2 = 2, \omega_1 = 0,09, \omega_2 = 0,23.$$

Для оптимальности системы (2), (17) и (19) достаточно выполнение условия на знак произведения мнимых частей:

$$(20) \text{Im}_1(\omega_1^2) \text{Im}_2(\omega_2^2) > 0,$$

где $\text{Im}_1(\omega_1^2)$ – мнимая часть направляющего вектора годографа (4) при пересечении им на частоте ω_1 начала координат (что соответствует некратной паре корней (46));

$$\text{Im}_2(\omega^2) = \frac{\partial^2 \omega^{-1} \text{Im} D_{1(n+1)}(i\omega)}{\partial^2 (\omega^2)} \quad \text{при } \omega = \omega_2; \quad \omega_2 - \text{частота, на}$$

которой годограф (9) «касается» начала координат. На рис. 6 изображен годограф (4) полинома оптимальной системы (2), для которой выполнено условие (20).

Годограф на рис. 6 получен для полинома (2), в котором

$$D_{1[n+1-n_g-2n_k]}(\lambda_1) = D_{1[20]}(\lambda_1) = (\lambda_1 + 1)^{20},$$

$$n = 25, n_g = 0, n_k = 2, \gamma_1 = 1, \gamma_2 = 2, \omega_1 = 0,3, \omega_2 = 0,6.$$

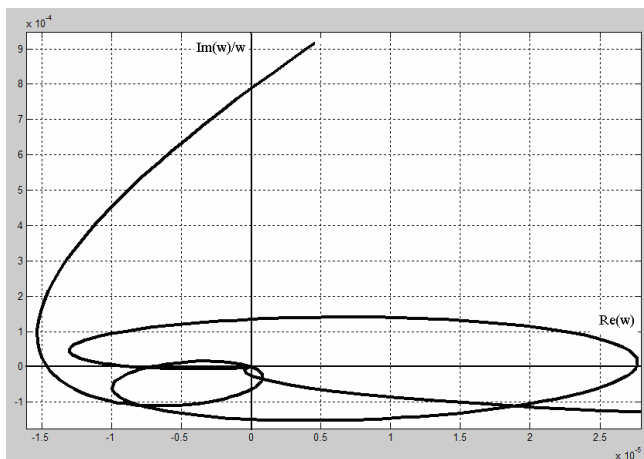


Рис. 5. Годограф неоптимальной системы

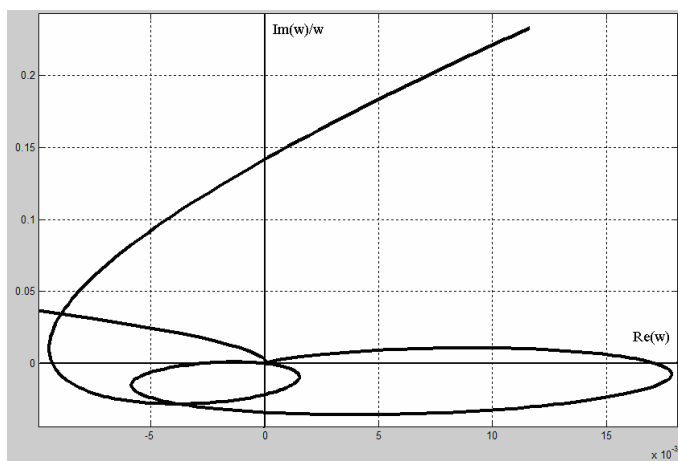


Рис. 6. Годограф оптимальной системы

4. Случай двух комплексно-сопряженных пар корней

В этом случае справедливы условия
 (21) $n_g = 0$, $n_{k1} = 2$, $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = 1$,

при которых крайними правыми корнями (2) являются две пары комплексно-сопряженных корней с касанием годографом (4) при пересечении им начала координат на частотах ω_1 и ω_2 действительной оси. Условию (21) соответствуют уравнения

$$(22) \Delta_{n-2}^{(0)}(I_{\text{оп}}, k_{\text{Поп}}, k_{\text{Иоп}}, k_{\text{Доп}}) = \Delta_{n-2}^{(1)}(I_{\text{оп}}, k_{\text{Поп}}, k_{\text{Иоп}}, k_{\text{Доп}}) = 0,$$

$$\Delta_j^{(0)}(I_{\text{оп}}, k_{\text{Поп}}, k_{\text{Иоп}}, k_{\text{Доп}}) > 0,$$

где $1 < j < n - 3$; $\Delta_{n-2}^{(0)}$ и $\Delta_{n-2}^{(1)}$ – основной и побочный определители Гурвица. Для получения двух дополнительных уравнений введем полином, учитывающий факт касания годографом (4) действительной оси. Такой факт имеет место при выполнении условия

$$(23) \text{Im}_1(\omega_1^2) = \text{Im}_1(\omega_2^2) = 0,$$

где $\text{Im}_1(\omega^2)$ из (15). Из (23) следует, что полином

$$(24) D_{1n_1}(\omega^2) = \text{Im}_0(\omega^2) + i\omega \text{Im}_1(\omega^2),$$

где $n_1 = 2 \left[\frac{n}{2} \right]$, $\left[\frac{n}{2} \right]$ – целая часть числа $\frac{n}{2}$, имеет те же ком-

плексно-сопряженные пары корней, что и исходный полином (2). Поэтому в оптимальном случае справедливо уравнение

$$(25) \Delta_{n_1-3}^{(0)}(I_{\text{оп}}, k_{\text{Поп}}) = \Delta_{n_1-3}^{(1)}(I_{\text{оп}}, k_{\text{Поп}}) = 0,$$

где $\Delta_{n_1-3}^{(0)}(I_{\text{оп}}, k_{\text{Поп}})$, $\Delta_{n_1-3}^{(1)}(I_{\text{оп}}, k_{\text{Поп}})$ – определители Гурвица размерности $n_1 - 3$ полинома (24).

Из (22) и (25) можно определить четыре неизвестных параметра $I_{\text{оп}}$, $k_{\text{Поп}}$, $k_{\text{Иоп}}$, $k_{\text{Доп}}$. Но условия (22) и (25) являются необходимыми условиями оптимальности. Подтверждается это годографом (4) полинома (2), изображенном на рис. 7, для которого условия (22) и (25) выполнены, но очевидно, что изменением только параметров $k_{\text{П}}$ и $k_{\text{И}}$ полином (2) может быть сделан устойчивым.

Годограф на рис. 7 получен для полинома (2), в котором $D_{1[n+1-n_g-2n_k]}(\lambda_1) = D_{1[40]}(\lambda_1) = (\lambda_1 + 1)^{40}$.

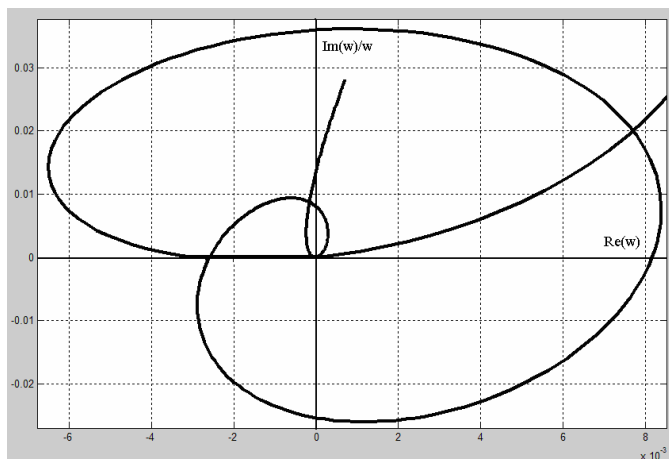


Рис. 7. Годограф неоптимальной системы

Достаточные условия оптимальности можно получить добавлением к (22), (25) условия на направления годографа в точке пересечения им на частотах ω_1 и ω_2 начала координат. Эти направления, лежащие на прямой $\text{Im} = 0$, должны быть противоположны друг другу, что имеет место при выполнении неравенства

$$(26) \text{Re}_1(\omega_1^2)\text{Re}_1(\omega_2^2) < 0,$$

где $\text{Re}_1(\omega^2)$ из (13).

Условия (22), (25) и (26) являются достаточными условиями оптимальности в рассматриваемом случае. На рис. 8 изображен годограф (4), соответствующий оптимальному по степени устойчивости решению и удовлетворяющий условиям (22), (25) и (26).

Годограф на рис. 8 получен для полинома (2), в котором

$$D_{1[n+1-n_g-2n_k]}(\lambda_1) = D_{1[20]}(\lambda_1) = (\lambda_1 + 1)^{20},$$

$$n = 23, n_g = 0, n_k = 2, \gamma_1 = \gamma_2 = 1, \omega_1 = 0,16, \omega_2 = 0,51.$$

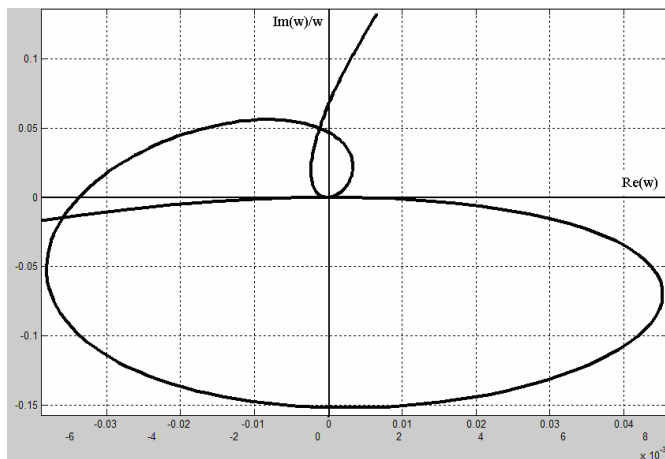


Рис. 8. Годограф оптимальной системы

5. Случай четырех комплексно-сопряженных пар корней

В этом случае справедливы условия

$$(27) n_g = 0, n_k = 4, \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_4 = 1,$$

при которых крайними правыми корнями (2) являются четыре пары комплексно-сопряженных корней. Условие (27) может быть выполнено при

$$(28) \Delta_{n-6}^{(0)}(I_{оп}, k_{Поп}, k_{Иоп}, k_{Доп}) = \Delta_{n-6}^{(1)}(I_{оп}, k_{Поп}, k_{Иоп}, k_{Доп}) = \\ = \Delta_{n-6}^{(2)}(I_{оп}, k_{Поп}, k_{Иоп}, k_{Доп}) = \Delta_{n-6}^{(3)}(I_{оп}, k_{Поп}, k_{Иоп}, k_{Доп}) = 0, \\ \Delta_{j}^{(0)}(I_{оп}, k_{Поп}, k_{Иоп}, k_{Доп}) > 0,$$

где $1 < j < n - 6$; $\Delta_{n-5}^{(0)}(I_{оп}, k_{Поп}, k_{Иоп}, k_{Доп})$, $\Delta_{n-5}^{(1)}(I_{оп}, k_{Поп}, k_{Иоп}, k_{Доп})$, $\Delta_{n-5}^{(2)}(I_{оп}, k_{Поп}, k_{Иоп}, k_{Доп})$ и $\Delta_{n-6}^{(3)}(I_{оп}, k_{Поп}, k_{Иоп}, k_{Доп})$ – основной и побочные определители Гурвица. Из четырех уравнений (28) можно найти оптимальные значения $I_{оп}$, $k_{Поп}$, $k_{Иоп}$ и $k_{Доп}$. Эти условия - необходимые условия оптимальности (1). На рис. 11 изображен годограф (4) полинома (2), построенного при выполнении (28), но который не является годографом оптимальной системы.

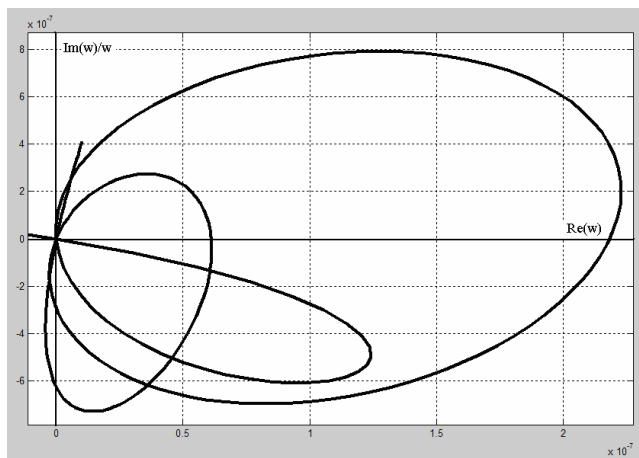


Рис. 9. Годограф неоптимальной системы

Годограф на рис. 9 получен для полинома (2), в котором

$$D_{1[n+1-n_g-2n_k]}(\lambda_1) = D_{1[40]}(\lambda_1) = (\lambda_1 + 1)^{40},$$

$$n = 47, n_g = 0, n_k = 4, \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_4 = 1, \omega_1 = 0,02, \omega_2 = 0,11, \omega_3 = 0,2, \omega_4 = 0,23.$$

Оптимальность в рассматриваемом случае гарантируется следующим образом. Рассмотрим векторы кривизны годографа $Z_{n0}^*(i\omega)$ (7) в точках $\omega = \omega_1, \omega = \omega_2, \omega = \omega_3$, пересечения им начала координат трехмерного пространства $(\text{Re}_0(\omega^2), \text{Im}_0(\omega^2), -\omega^2 \text{Re}_0(\omega^2))$. Такими векторами являются введенные при рассмотрении случая 1 векторы, используемые в матрице A (8). В силу линейной независимости этих векторов линейное уравнение (9), как было отмечено ранее, имеет единственное решение $\Delta k_{И}, \Delta k_{П}, \Delta k_{Д}$, при котором годограф (7) на частоте ω_1 сдвигается в сторону устойчивости, а на частотах ω_2 и ω_3 этот годограф сохраняется на границе устойчивости. В этом случае достаточным условием оптимальности наряду с (39) будет условие на знак скалярного произведения вектора кривизны на частоте $\omega = \omega_4$ на вариацию вектора $\Delta k_{И}, \Delta k_{П}, \Delta k_{Д}$, решения линейного уравнения (9)

$$(29) \quad \langle (\operatorname{Re}_2(\omega_4^2), \operatorname{Im}_2(\omega_4^2), -\omega_4^2 \operatorname{Re}_2(\omega_4^2) - 2\operatorname{Re}_1(\omega_4^2)), (\Delta k_i, \Delta k_n, \Delta k_d) \rangle = -\delta_4 < 0$$

На рис. 10 изображен годограф полинома (2) оптимальной системы (1), для которой выполнены условия (28), (29).

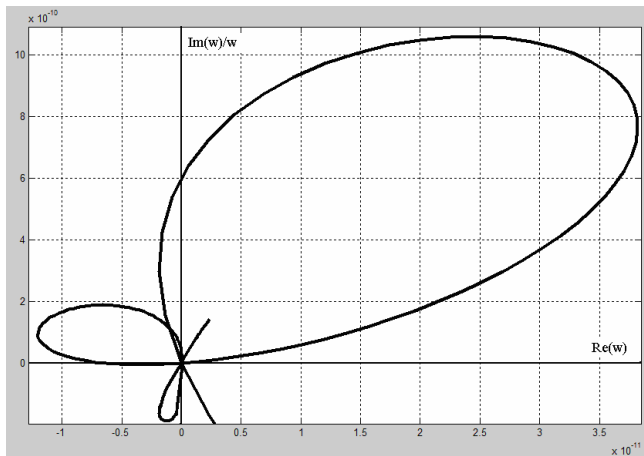


Рис. 10. Годограф оптимальной системы

Годограф на рис. 10 получен для полинома (2), в котором

$$D_{1[n+1-n_g-2n_k]}(\lambda_1) = D_{1[40]}(\lambda_1) = (\lambda_1 + 1)^{40},$$

$$n = 47, n_g = 0, n_k = 4, \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_4 = 1, \omega_1 = 0,015,$$

$$\omega_2 = 0,023, \omega_3 = 0,055, \omega_4 = 0,08.$$

Заключение

Проведено исследование шести структур оптимальных по степени устойчивости решений при ПИД законе управления. Получены достаточные условия оптимальности каждой из возможных оптимальных структур. С помощью машинных методов расчета построены годографы замкнутых систем управления, для которых в одном случае выполняются только необходимые

условия оптимальности, в другом – достаточные условия. Вид построенных годографов оптимальных систем отражает геометрический смысл полученных решений.

Литература

1. ШУБЛАДЗЕ А. М., ПОПАДЬКО В. Е., КУЗНЕЦОВ С. И., ЯКУШЕВА А. А. *Исследование оптимальных по степени устойчивости решений при ПИД управлении. Часть I* // Управление большими системами / Сборник трудов. Выпуск 22: М.: ИПУ РАН, 2008. – С. 86-100.
2. ШУБЛАДЗЕ А. М. *Достаточные условия экстремума в системах максимальной степени устойчивости. II.* // Автоматика и телемеханика. 1997, №8. С. 67-79.

PID CONTROLLERS' STABILITY DEGREE OPTIMIZATION

Alexander M. Shubladze, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Cand.Sc., professor (shub@ipu.rssi.ru).

Vladimir E. Popad'ko, Gubkin Russian State University of Oil and Gas, Moscow, professor, dean (Moscow, Lenin's Ave, 65, (495) 930-92-25).

Anna A. Yakusheva, student (yakusheva_a@mail.ru).

Sergey I. Kuznecov, («SRITeplopribor», (495) 999-18-16).

Synthesis of control systems by criterion of the maximum degree of stability for PID is considered. Solutions with optimal degree of stability had been obtained. These solutions enable us to find further prospects of computer based development of control systems.

Keywords: synthesis of systems with maximal degree of stability, optimal on degree of stability solutions.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии А.А. Дорофеевом

УДК 62.50
ББК Ж 30

АДАПТИВНЫЕ МЕТОДЫ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ МОДУЛЯЦИЕЙ ГЕНЕРАТОРОВ ХАОТИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ ¹

Андриевский Б. Р. ²

Фрадков А. Л. ³

(Учреждение Российской академии наук Институт проблем машиноведения Российской академии наук, Санкт-Петербург)

Изложены три метода передачи информации модулированием генераторов хаотических сигналов, основанные на: применении адаптивных наблюдателей; адаптивной идентификации с неявной настраиваемой моделью; частотной модуляции с адаптивным демодулятором. Показано применение предложенных методов для передачи информации модуляцией хаотического генератора, построенного на основе системы Чуа.

Ключевые слова: передача информации, адаптация, хаотические системы.

Введение

Возрастающий интерес исследователей к синхронизации хаотических систем [3, 5, 6, 11, 14, 23–25, 32, 40] в значительной степени вызван возможными ее применениями в различных об-

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант №06-08-01386, научной программы Президиума РАН №22 «Процессы управления» (проект 1.8) и Совета по грантам Президента РФ для поддержки молодых ученых и ведущих научных школ, проект НШ-2387.2008.1.

² Андриевский Борис Ростиславич, доктор технических наук, ведущий научный сотрудник, (bandri@yandex.ru).

³ Фрадков Александр Львович, доктор технических наук, заведующий лабораторией, (fradkov@mail.ru).

ластях наук и техники, в частности, – в телекоммуникации [6, 8–10, 15–18, 26, 27, 34, 35, 41]. В системах связи основное значение имеет синхронизация двух систем с однонаправленным взаимодействием (передатчика и приемника). Такая задача синхронизации может быть рассмотрена как задача оценивания состояния, или, более широко, как задача управления с эталонной моделью. В значительном числе работ, начиная с [26], используется идея синхронизации хаотических систем на базе наблюдателей состояния. При этом естественно возникает требование идентичности, или близости параметров ведущей системы (генератора) и ведомой системы (наблюдателя). Использование адаптивного подхода открывает более широкие возможности в выборе способа синхронизации и, если говорить о системах связи – в способе введения сообщения в передаваемый сигнал. При *адаптивной синхронизации* [3, 37] считается, что не только начальное состояние ведущей системы («передатчика»), но и ряд ее параметров неизвестны при построении ведомой системы («приемника»). Эта более сложная задача может соответствовать применению параметрической модуляции для передачи сообщений.

В предлагаемой статье изложены три метода передачи информации модулированием генераторов хаотических сигналов, основанные на: применении адаптивных наблюдателей (п. 1), адаптивной идентификации с неявной настраиваемой моделью (п. 2) и частотной модуляции с адаптивным демодулятором (п. 3). Показано применение предложенных методов для передачи информации модуляцией хаотического генератора, построенного на основе системы Чуа (п. 4).

1. Применение адаптивных наблюдателей с пассивацией

Зададим ведущую систему уравнением

$$(1) \quad \dot{x} = f(x),$$

а ведомую – уравнением

$$(2) \quad \dot{z} = f(z) + u(t),$$

где x, z, u – n -мерные векторы. Выбирая вектор сигналов обратной связи $u(t)$ пропорциональным ошибке

$$(3) \quad u(t) = -Ke(t),$$

где $e = x - z$ – вектор ошибок; $K > 0$ – коэффициент усиления, получим уравнение ошибок

$$(4) \quad \dot{e} = f(x(t)) - f(x(t) - e) - Ke,$$

в котором $x(t)$ – заданная функция времени, являющаяся реше-

нием (1). Если матрица Якоби $A(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x)$ ограничена в некоторой области Ω , содержащей решение системы (1)-(3), то легко подобрать такое $K > 0$, чтобы собственные числа симметричной матрицы $A(x) + A^T(x) - 2KI_n$, где I_n – единичная $n \times n$ -матрица, лежали левее мнимой оси при $x \in \Omega$. При этом система (1)-(3) будет обладать свойством *конвергентности в Ω* [7]: все ее траектории, лежащие в Ω , сходятся при $t \rightarrow \infty$ к единственному ограниченному решению. Поскольку $e(t) \equiv 0$ является решением (4), то к нему и сходятся все траектории. Таким образом, решения систем (1) и (2)-(3) неограниченно сближаются, что и означает синхронизацию двух систем. При этом поведение каждой из систем может быть и оставаться хаотическим.

Из литературы известен ряд методов *адаптивной синхронизации*, при которой часть параметров систем неизвестна. Один из них основан на применении адаптивных наблюдателей с пассивфикацией [30, 32, 37].

Рассмотрим применение адаптивных наблюдателей для выделения сообщений из модулированного хаотического сигнала.

Управляемый хаотический генератор модулированного сигнала (ведущую систему) зададим уравнениями состояния в форме Лурье:

$$(5) \quad \dot{x}_d = Ax_d + B\left(\varphi_0(y_d) + \sum_{i=1}^m \theta_i \varphi_i(y_d)\right), \quad y_d = Cx_d$$

где $x_d \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния модулятора; $y_d \in \mathbb{R}^l$ – вектор выходов (передаваемых сигналов); $\theta = \text{col}\{\theta_1, \dots, \theta_m\}$ – вектор

параметров модулятора (содержащий информацию о передаваемом сообщении). Нелинейности $\varphi_i(\cdot)$, $i = 0, 1, \dots, m$, матрицы A, C и вектор B считаются известными при синтезе системы, принимающей сообщение (демодулятора).

Ведомая система (демодулятор) формирует оценки $\hat{\theta}_i$, $i = 1, \dots, m$ параметров модулятора на основе зашумленных измерений передаваемого сигнала $y_d(t)$ и описывается уравнениями вида

$$(6) \quad \dot{z} = F(z, y_r),$$

$$(7) \quad \hat{\theta} = h(z, y_r).$$

Функция $F(z, y_r)$ в (6) строится так, чтобы обеспечить сходимость

$$(8) \quad \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \|\hat{\theta}(t) - \theta\| \leq \Delta,$$

где $y_r(t) = y_d(t) + \xi(t)$ — принимаемый сигнал; $\xi(t)$ — шум в канале связи; $\hat{\theta}(t) = \text{col}\{\hat{\theta}_1(t), \dots, \hat{\theta}_m(t)\}$ — вектор оценок параметров; $\Delta \geq 0$ — заданная точность.

Демодулятор, основанный на пассивации является разновидностью адаптивного наблюдателя и описывается уравнениями [30, 32, 37]

$$(9) \quad \dot{x} = Ax + \varphi_0(y_r) + B \left(\sum_{i=1}^m \hat{\theta}_i \varphi_i(y_r) + \hat{\theta}_0 G(y_r - y) \right), y = Cx,$$

$$(10) \quad \dot{\hat{\theta}}_i = \psi_i(y_r, y), \quad i = 0, 1, 2, \dots, m,$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^l$, $\hat{\theta}_0 \in \mathbb{R}$ и $G \in \mathbb{R}^l$ — вектор весовых коэффициентов. Алгоритм адаптации (10) получается на основе стандартного применения метода скоростного градиента [13] и имеет вид:

$$(11) \quad \dot{\hat{\theta}}_i = -\gamma_i (y - y_r) \varphi_i(y_r), \quad i = 1, \dots, m,$$

$$(12) \quad \dot{\hat{\theta}}_0 = -\gamma_0 (y - y_r)^2,$$

где γ_i , ($i = 0, 1, \dots, m$) — положительные коэффициенты усиления алгоритма. При наличии помех в канале связи алгоритм (11), (12) следует регуляризовать (робастифицировать). Одним из методов регуляризации является введение параметрической обратной связи [13]. Отсюда вытекает следующая форма алгоритма [1, 4, 6, 19, 20]

$$(13) \quad \dot{\hat{\theta}}_i = -\gamma_i(y - y_r)\varphi_i(y_r) - \alpha_i\hat{\theta}_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$(14) \quad \dot{\hat{\theta}}_0 = -\gamma_0(y - y_r)^2 - \alpha_0\hat{\theta}_0,$$

где $\alpha_i > 0$ ($i = 0, 1, \dots, m$) — коэффициенты регуляризации. Другим методом регуляризации является введение в алгоритм адаптации зоны нечувствительности. В этом случае алгоритм (10) принимает вид [4, 19, 20]

$$(15) \quad \dot{\hat{\theta}}_i = \begin{cases} -\gamma_i\delta\varphi_i(y_r), & \text{если } |\delta| \geq \Delta \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases} \quad i = 1, \dots, m,$$

$$(16) \quad \dot{\hat{\theta}}_0 = \begin{cases} -\gamma_0\delta^2, & \text{если } |\delta| \geq \Delta \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$$

где $\delta \triangleq y - y_r$ — ошибка адаптации, $\Delta \geq 0$ — выбранное значение (зоны нечувствительности).

Далее алгоритм (11), (12) исследуется для случая, когда в качестве генератора хаотического сигнала используется система Чуа с перестраиваемым коэффициентом. Развитие этого подхода связано с распространением методов синтеза адаптивных наблюдателей на непассивизируемые системы [2, 31].

Пример применения описанного метода приведен в п. 4.1.

2. Применение адаптивной идентификации с неявной настраиваемой моделью

Другой метод построения адаптивного наблюдателя основан на использовании неявной настраиваемой модели [3, 13]. Чтобы избежать дифференцирования входного процесса, в модель вводятся дополнительные (augmented) сигналы, которые генерируются набором фильтров нижних частот [3, 28, 33, 36]. Применим этот метод для синхронизации нелинейных колебательных систем.

Передачная функция $W(\lambda)$ линейной части системы (5), приведенной к форме Лурье, имеет вид

$$(17) \quad W(\lambda) = \frac{b_0\lambda^k + b_1\lambda^{k-1} + \dots + b_k}{\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n} \equiv \frac{B(\lambda)}{A(\lambda)},$$

так что для выходных и входных сигналов выполнено соотношение

$$(18) \quad y_r^{(n)} + a_1 y_r^{(n-1)} + \dots + a_n y_r = b_0 u^{(k)} + \dots + b_{k-1} u,$$

где $u(t)$ выход нелинейной части (5), т.е. $u(t) \triangleq \varphi_0(y_r) +$

$\sum_{i=1}^m \theta_i \varphi_i(y_r)$. С учетом этого выражения, перепишем уравнение

(18), явно выразив зависимость правой части от параметров θ_i (которые на этапе синтеза алгоритма предполагаем постоянными):

$$(19) \quad y_r^{(n)} + a_1 y_r^{(n-1)} + \dots + a_n y_r = b_0 \varphi_{t,0}(t)^{(k)} + \dots + b_{k-1} \varphi_{t,0} + \\ + \sum_{i=1}^m \theta_i \left(b_0 \varphi_{t,i}^{(k)} + \dots + b_{k-1} \varphi_{t,i} \right),$$

где обозначено $\varphi_{t,i} = \varphi_i(y_r(t))$.

Целью адаптивной идентификации является определение набора неизвестных параметров θ_i по измерениям выхода ведущей системы $y_r(t)$. Вид нелинейных зависимостей $\varphi_i(\cdot)$, а также значения параметров a_i, b_j считаем известными. Введем новые вход-

ные переменные $v_i = b_0(\varphi_{t,i}^{(k)} + \dots + b_{k-1}\varphi_{t,i})$ ($i = 0, 1, \dots, m$). Уравнение (19) влечет подобное соотношение относительно выходов и входов $\tilde{y}_r(t), \tilde{v}_i(t)$ идентичных фильтров, возбуждаемых сигналами $y_r(t), v_i(t)$:

$$(20) \quad \tilde{y}_r^{(n)} + a_1\tilde{y}_r^{(n-1)} + \dots + a_n\tilde{y}_r = \tilde{v}_0(t) + \sum_{i=1}^m \theta_i\tilde{v}_i(t).$$

В отличие от (18), (19), все производные в (20) могут быть измерены непосредственно, без дифференцирования входов/выходов системы. Для идентификации неизвестных параметров θ системы (18), используем метод неявной настраиваемой модели [3, 13]. Запишем уравнение для невязки δ :

$$(21) \quad \delta(t) = \tilde{y}_r^{(n)} + a_1\tilde{y}_r^{(n-1)} + \dots + a_n\tilde{y}_r - \tilde{v}_0(t) - \sum_{i=1}^m \hat{\theta}_i(t)\tilde{v}_i(t),$$

в котором через $\hat{\theta}_i(t)$ обозначены оценки неизвестных параметров θ_i ($i = 1, 2, \dots, m$) ведущей системы (генератора сигнала). Введя регрессор ψ и вектор настраиваемых параметров $\hat{\theta}$ как

$$\psi \triangleq [\tilde{y}_r^{(n-1)}, \dots, \tilde{y}_r, -\tilde{v}_1, -\dots, -\tilde{v}_m]^T, \quad \hat{\theta}(t) \triangleq [\hat{\theta}_1(t), \dots, \hat{\theta}_m(t)]^T,$$

приведем (21) к виду

$$(22) \quad \delta(t) = \delta_1(t) + \psi(t)^T \hat{\theta}(t),$$

где сигнал $\delta_1(t)$ содержит слагаемые, не зависящие от неизвестных параметров: $\delta_1(t) = \tilde{y}_r^{(n)} + a_1 \tilde{y}_r^{(n-1)} + \dots + a_n \tilde{y}_r - \tilde{v}_0(t)$. Применяя методы скоростного градиента и калмановской фильтрации, получим окончательно алгоритм идентификации в виде:

$$(23) \quad \dot{\Gamma}(t) = -\Gamma(t)\psi(t)\psi(t)^T\Gamma(t) + \alpha\Gamma(t), \quad \Gamma(0) = \Gamma(0)^T > 0,$$

$$(24) \quad \dot{\hat{\theta}}(t) = -\Gamma(t)\psi(t)\delta(t),$$

где $\Gamma(t) = \Gamma(t)^T > 0$ — квадратная положительно-определенная матрица коэффициентов усиления, $\alpha > 0$ — параметр алгоритма. Существенное для сходимости алгоритмов идентификации условие *неисчезающего возбуждения* [12] для рассматриваемых систем можно считать выполненным в силу хаотических свойств процесса на выходе генератора (ведущей системы). Кроме того, обычным предположением при обосновании сходимости различных алгоритмов адаптации является предположение о постоянстве неизвестных параметров. На практике это предположение выливается в «гипотезу квазистационарности». В рассматриваемом случае это означает, что идентификация параметров должна проходить существенно быстрее, чем процесс их изменения в ведущей системе, или, другими словами, что полоса частот информационного сигнала значительно уже полосы частот передаваемого (несущего) процесса. Такое требование является естественным в рамках *широкополосных систем связи* [34, 38]. Применение алгоритма (21)-(24) для передачи информации на основе модуляции хаотического генератора (системы Чуа) рассмотрено ниже в п. 4.2.

3. Адаптивная идентификация с частотной модуляцией

Обратимся снова к динамической системе (5) и введем *масштабный множитель по времени* θ [22, 29]. Масштабированная система описывается следующими уравнениями:

$$(25) \quad \dot{x}_d = A\theta x_d + \theta\varphi_0(y_d) + B\theta\varphi(y_d), \quad y_d = Cx_d,$$

где $x_d(t) \in \mathbb{R}^n$, $y_d(t) \in \mathbb{R}$. Очевидно, для всех $\theta = \text{const} > 0$ система (25) обладает хаотической динамикой, если исходная система была хаотической. Более того, при одинаковых начальных условиях выходы систем (5) и (25) совпадают с точностью до масштабного множителя θ , а именно, $x_d(0) = x(0)$ влечет $y_d(t) \equiv y(\theta t)$ для всех $t \geq 0$.

Далее будем считать, что параметр модулятора θ (масштаб по времени) является информационным сигналом (т. е. сообщением, которое должно быть передано). Ввиду этого, θ предполагается неизвестной демодулятору величиной, которую требуется восстановить с помощью соответствующего алгоритма. Как и выше, считаем что θ постоянно на достаточно длительных промежутках времени.

Демодулятор синтезируется как динамическая система, вырабатывающая оценку $\hat{\theta}$ параметра θ модулятора на основе текущих (зашумленных) значений переданного сигнала $y_d(t)$. Снова используем метод идентификации с неявной настраиваемой моделью и фильтрами состояния [4, 20–22, 29]. Передаточную функцию $W(\lambda)$ линейной части системы в форме Лурье (25) можно записать как $W_\theta(\lambda) = B_\theta(\lambda)/A_\theta(\lambda)$, где многочлены $A_\theta(\lambda)$, $B_\theta(\lambda)$ имеют степени n и k , соответственно ($k < n$), и зависят от θ как от параметра. Очевидно, их можно переписать в виде $A_\theta(\lambda) \equiv A(\lambda\theta^{-1})$, $B_\theta(\lambda) \equiv B(\lambda\theta^{-1})$, где $A(\lambda)$, $B(\lambda)$ — знаменатель и числитель линейной части системы (5) с передаточной

функцией $W(\lambda) = C(\lambda I - A)^{-1}B \equiv \frac{B(\lambda)}{A(\lambda)}$. Окончательно, для

выходных и входных сигналов линейной части (25) выполнено следующее соотношение

$$(26) \quad \begin{aligned} y_r^{(n)} + a_1\theta y_r^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}\theta^{n-1}y_r^{(1)} + a_n\theta^n y_r = \\ = b_0\theta^{n-k}u^{(k)} + \dots + b_{k-1}\theta^{n-1}u^{(1)} + b_k\theta^n u, \end{aligned}$$

где $u(t)$ — выход нелинейной части подсистемы (25): $u(t) \triangleq$

$\varphi_0(y_r) + B\theta\varphi(y_r)$. Стоит заметить, что все коэффициенты a_i, b_j ($i = 1, 2, \dots, n, j = 0, 1, \dots, k$) известны и могут быть непосредственно использованы в алгоритме приемника, а θ является единственным параметром, подлежащим оцениванию. Запишем следующее уравнение неявной настраиваемой модели:

$$(27) \quad \begin{aligned} & \tilde{y}_r^{(n)} + a_1 \hat{\theta} \tilde{y}_r^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \hat{\theta}^{n-1} \tilde{y}_r^{(1)} + a_n \hat{\theta}^n \tilde{y}_r = \\ & = b_0 \hat{\theta}^{n-k} \tilde{u}^{(k)} + \dots + b_{k-1} \hat{\theta}^{n-1} \tilde{u}^{(1)} + b_k \hat{\theta}^n \tilde{u}, \end{aligned}$$

где настраиваемый параметр $\hat{\theta}$ служит оценкой неизвестного параметра модулятора θ ; \tilde{u}, \tilde{y}_r — выходы идентичных фильтров, на входы которых поступают сигналы $y_r(t)$ и $u(t)$. Применяя метод скоростного градиента, получим алгоритм идентификации в виде:

$$(28) \quad \dot{\hat{\theta}} = -\gamma \delta(t) \phi(t),$$

где сигнал

$$(29) \quad \begin{aligned} \delta(t) \triangleq & \tilde{y}_r^{(n)} + a_1 \hat{\theta} \tilde{y}_r^{(n-1)} + \dots + a_n \hat{\theta}^n \tilde{y}_r - \\ & - b_0 \hat{\theta}^{n-k} \tilde{u}^{(k)} - \dots - b_{k-1} \hat{\theta}^{n-1} \tilde{u}^{(1)} - b_k \hat{\theta}^n \tilde{u}, \end{aligned}$$

является ошибкой идентификации. Тогда алгоритм идентификации принимает следующий вид:

$$(30) \quad \dot{\hat{\theta}} = -\gamma \delta(t) \phi(t),$$

где

$$(31) \quad \begin{aligned} \phi(t) \triangleq & a_1 \tilde{y}_r^{(n-1)} + 2a_2 \hat{\theta} \tilde{y}_r^{(n-2)} + \dots \\ & + na_n \tilde{y}_r \hat{\theta}^{n-1} - (n-k)b_0 \hat{\theta}^{n-k-1} \tilde{u}^{(k)} - \dots \\ & - (n-1)b_{k-1} \hat{\theta}^{n-2} \tilde{u}^{(1)} - nb_k \hat{\theta}^{n-1} \tilde{u}, \end{aligned}$$

— регрессор; $\gamma > 0$ — коэффициент идентификации.

Алгоритм (30), робастифицированный введением параметрической обратной связи имеет вид:

$$(32) \quad \dot{\hat{\theta}} = -\gamma\delta(t)\phi(t) - \alpha(\hat{\theta} - \theta_0),$$

где $\alpha > 0$ — коэффициент обратной связи, θ_0 — некоторое *a priori* выбранное значение $\hat{\theta}$. Естественно принять $\hat{\theta}(0) = \theta_0$.

Несколько иной алгоритм частотной модуляции хаотического сигнала предложен в работе [39]. Применение метода частотной модуляции а основе системы Чуа показано в п. 4.3.

4. Передача информации модуляцией хаотического генератора Чуа

4.1. Применение адаптивных наблюдателей и метода пассивации

Рассмотрим пример, в котором как источник сигнала (модулятор), так и приемник (демодулятор) реализованы в виде систем Чуа (см. [4, 19–21, 29, 30]). В безразмерной форме модулятор описывается уравнениями:

$$(33) \quad \begin{cases} \dot{x}_{d1} = p(x_{d2} - x_{d1} + f(x_{d1}) + sf_1(x_{d1})), \\ \dot{x}_{d2} = x_{d1} - x_{d2} + x_{d3}, \\ \dot{x}_{d3} = -qx_{d2}, \end{cases}$$

где $f(z) = M_0z + 0.5(M_1 - M_0)f_1(z)$; $f_1(z) = |z + 1| - |z - 1|$; M_0, M_1, p, q — параметры модулятора; $s = s(t)$ — информационный сигнал, который должен быть восстановлен в демодуляторе. Предположим что передаваемый сигнал $y_r(t) = x_{d1}(t)$ и значения параметров p, q, M_0, M_1 известны.

В соответствии с ранее приведенными соотношениями для синтеза адаптивного наблюдателя по методу пассивации, по-

лучим уравнения демодулятора

$$(34) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = p(x_2 - x_1 + f(y_r) + c_1 f_1(y_r) + c_0(x_1 - y_r)), \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 + x_3, \\ \dot{x}_3 = -qx_2, \end{cases}$$

где c_0, c_1 — настраиваемые параметры. Алгоритм адаптации (13), (14), принимает вид

$$(35) \quad \begin{cases} \dot{c}_0 = -\gamma_0(y_r - x_1)^2 - \alpha_0 c_0, \\ \dot{c}_1 = -\gamma_1(x_1 - y_r)f_1(y_r) - \alpha_1 c_1, \end{cases}$$

где γ_0, γ_1 — коэффициенты усиления алгоритма, α_0, α_1 — коэффициенты регуляризации.

Алгоритм адаптации (15), (16) в данном примере имеет вид

$$(36) \quad \begin{cases} \dot{c}_0 = \begin{cases} -\gamma_0 \delta^2, & \text{если } |\delta| \geq \Delta_0, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \\ \dot{c}_1 = \begin{cases} \gamma_1 \delta f_1(y_r), & \text{если } |\delta| \geq \Delta_0, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \end{cases}$$

где $\delta = y_r - x_1$, $\Delta_0 \geq 0, \Delta_1 \geq 0$.

4.2. Применение неявной настраиваемой модели

Применим теперь к рассматриваемой задаче алгоритм (22) — (24). С учетом выражения для передаточной функции линейной части системы, уравнение (21) для данного случая принимает вид

$$(37) \quad \begin{aligned} \delta(t) = & \tilde{y}^{(3)}(t) + (1+p)\tilde{y}^{(2)}(t) + q\tilde{y}^{(1)}(t) + p q \tilde{y}(t) - \\ & - \tilde{u}^{(2)}(t) - \tilde{u}^{(1)}(t) - q\tilde{u}, \end{aligned}$$

где $\tilde{y}^{(i)}, \tilde{u}^{(i)}$ — выходы, входы и их производные по времени двух фильтров нижних частот Баттерворта (Butterworth) третьего порядка, на входы которых поступают сигналы $y_r(t), u(t)$ соответственно; $y_r(t)$ — принимаемый сигнал (для идеального канала

связи $y_r(t) \equiv x_{d_1}(t)$ в (33)); «вход линейной части модели» $u(t)$ находится через $u = p\tilde{f}(y_d) + p\tilde{s}\tilde{f}_1(y_d)$, где $\tilde{s} = \tilde{s}(t)$ – оценка параметра модулятора, нелинейная часть описывается функциями $\tilde{f}_1(y_d) = |y_r + 1| - |y_r - 1|$, $\tilde{f}(y_r) = M_0 y_r + 0.5(M_1 - M_0)\tilde{f}_1(y_r)$, p, q, M_0, M_1 – заданные постоянные. Сигнал $\tilde{f}_1(y_r(t))$ подается на другой фильтр Баттерворта для формирования регрессора $\phi(t)$

в виде $\phi = -p(\tilde{f}_{1_f}^{(2)} + p\tilde{f}_{1_f}^{(1)} + q\tilde{f}_{1_f})$, где $\tilde{f}_{1_f}^{(i)}$ – выход фильтра и его производные. Алгоритм адаптации (21), формирующий оценку $\tilde{s}(t)$ переданного сигнала $s(t)$ имеет вид (23), (24).

4.3. Применение частотной модуляции

Для случая частотной модуляции, передатчик описывается уравнениями

$$(38) \quad \begin{cases} \dot{x}_{d_1} = \theta p(x_{d_2} - x_{d_1} + f(x_{d_1}) + f_1(x_{d_1})), \\ \dot{x}_{d_2} = \theta(x_{d_1} - x_{d_2} + x_{d_3}), \\ \dot{x}_{d_3} = -\theta q x_{d_2}, \end{cases}$$

где $\theta = \theta_0 + \vartheta$, а алгоритм адаптивного восстановления информации в приемнике – формулами (37), (28). Регрессор (31) для данного примера имеет вид

$$(39) \quad \begin{aligned} \phi(t) &\triangleq a_1 \tilde{y}_r^{(n-1)} + 2a_2 \hat{\theta} \tilde{y}_r^{(n-2)} + \dots \\ &+ na_n \tilde{y}_r \hat{\theta}^{n-1} - (n-k) b_0 \hat{\theta}^{n-k-1} \tilde{u}^{(k)} - \dots \\ &-(n-1) b_{k-1} \hat{\theta}^{n-2} \tilde{u}^{(1)} - n b_k \hat{\theta}^{n-1} \tilde{u}. \end{aligned}$$

Практически сигналы в системах связи всегда подвержены действию шумов. При моделировании примем, что $\xi(t)$ поступает аддитивно к выходу модулятора, так что сигнал на входе приемника $y_r(t)$ описывается выражением

$$(40) \quad y_r(t) = y_d(t) + \xi(t),$$

где $\xi(t)$ — гауссовский белый шум с нулевым средним и интенсивностью σ . (Более подробно, $\xi(t)$ моделируется как кусочно-постоянный случайный процесс с периодом квантования Δ_t и $\xi(t_k) = \zeta_k/\sqrt{\Delta_t}$, ($k = 0, 1, 2, \dots$, $t_k = k\Delta_t$), где ζ_k — гауссовские случайные числа с нулевым средним и среднеквадратическим отклонением σ .)

4.4. Результаты моделирования

Описанные выше схемы исследованы компьютерным моделированием при следующих значениях параметров модулятора: $p = 9$, $q = 14,286$, $M_0 = 5/7$, $M_1 = -6/7$. Для этих значений система (33) имеет хаотический аттрактор.

После некоторого периода «настройки» (связанного с необходимостью завершения переходных процессов в фильтрах) подавался информационный сигнал вида «прямоугольная волна»:

$$(41) \quad s(t) = s_0 + s_1 \operatorname{sign} \sin \left(\frac{2\pi t}{T_0} \right),$$

где $s_0 = 1,005$, $s_2 = 0,005$.

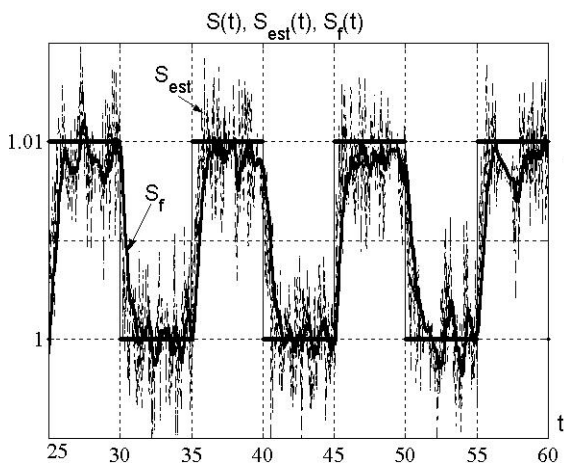


Рис. 1. Оценка параметров адаптивным наблюдателем (34), (35)

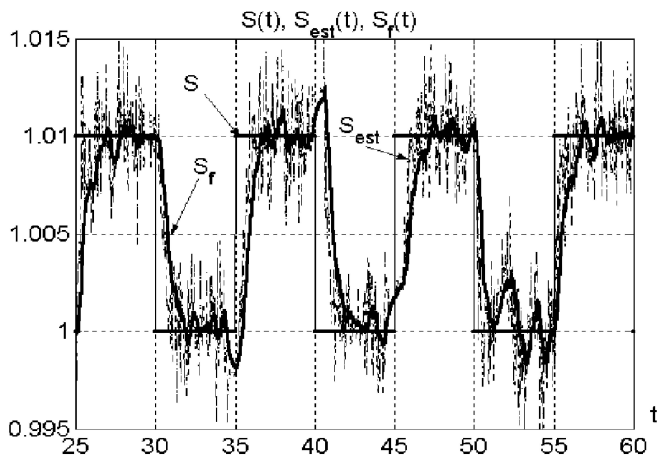


Рис. 2. Оценивание параметров адаптивным наблюдателем (34), (36)

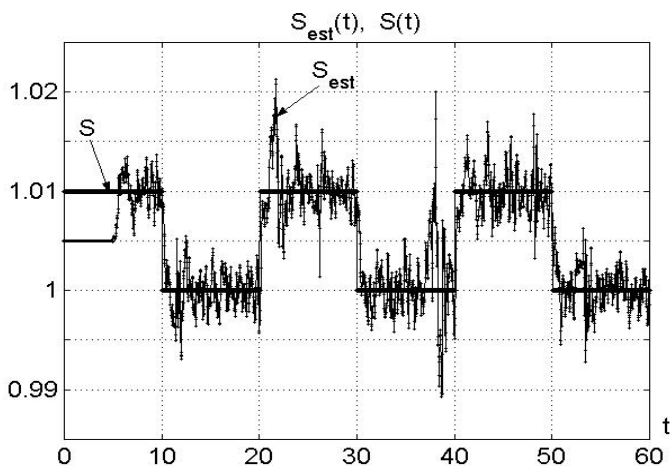


Рис. 3. Оценивание параметров алгоритмом идентификации (23), (24), (37).

Результаты оценивания параметра с помощью адаптивного

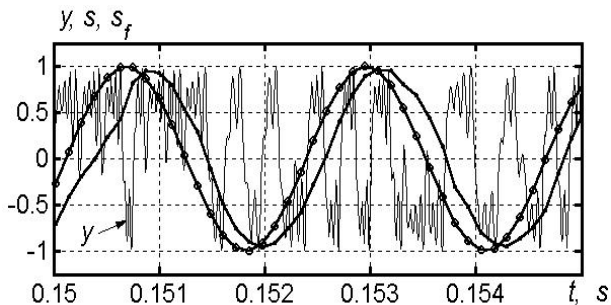


Рис. 4. Передача гармонического сигнала $s(t) = s_0 \sin \omega t$. s – модулирующий сигнал; s_f – восстановленный сигнал; y – передаваемый хаотический сигнал $y_d(t)$.

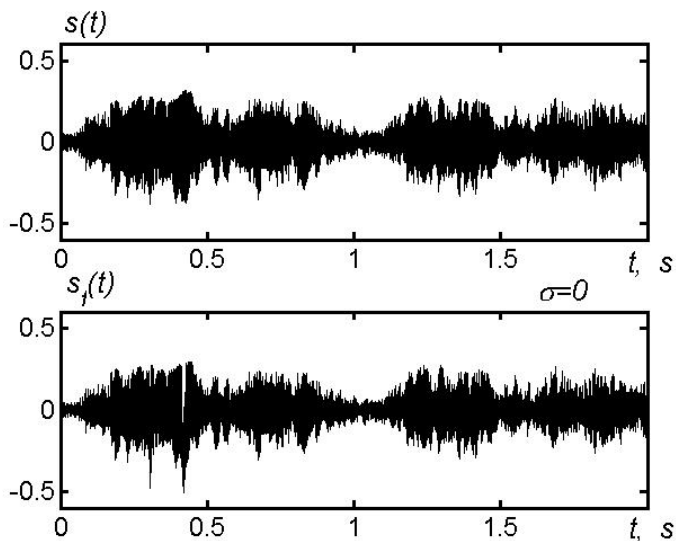


Рис. 5. Музыкальные сигналы; s – исходный, s_f – восстановленный. Алгоритм (30), $\sigma = 0$.

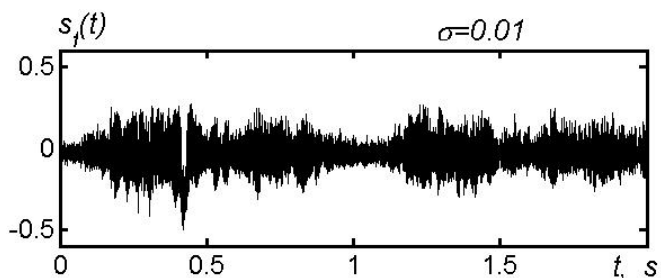


Рис. 6. Восстановленный сигнал s_f . Алгоритм (28), $\sigma = 0,01$.

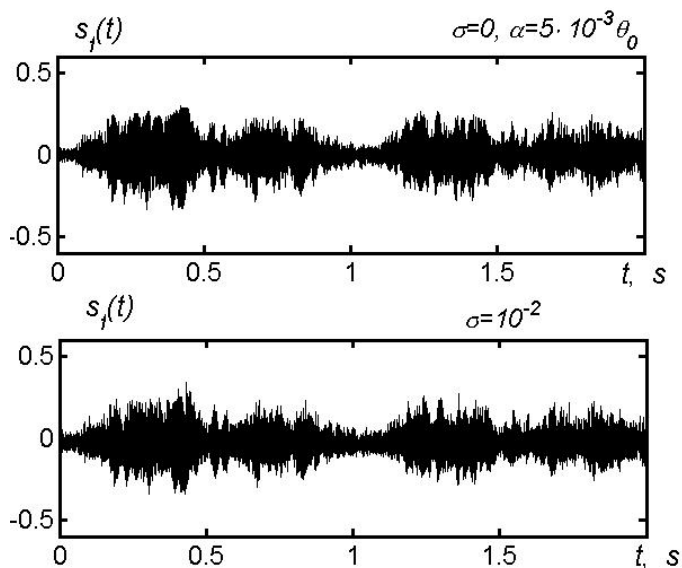


Рис. 7. Восстановленный сигнал s_f ; алгоритм (32), идеальный (а) и зашумленный (б) каналы связи.

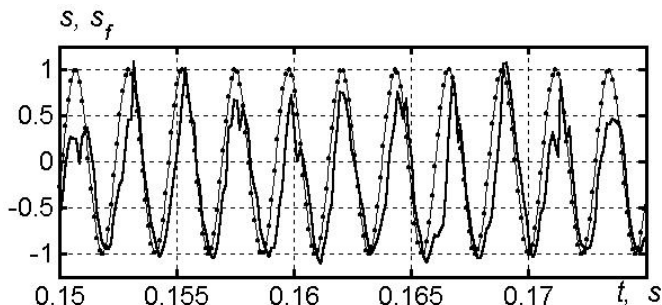


Рис. 8. Передача гармонического сигнала при наличии шумов, $\sigma = 0,01$.

наблюдателя с параметрической обратной связью (34), (35) показаны на рис. 1. Интенсивность шума σ принята равной $\sigma = 10^{-3}$. Результаты оценивания параметра с помощью адаптивного алгоритма с зоной нечувствительности (34), (36) для аналогичных условий показаны на рис. 2. Ширина зоны нечувствительности $\Delta_0 = \Delta_1 = 2,5 \cdot 10^{-3}$. Как показывают результаты моделирования, сигнал $c_1(t)$ можно использовать для восстановления сообщения.

Более сложный алгоритм (23), (24), (37) обладает большей помехозащищенностью, как это видно из рис. 3, где взято $\sigma = 0,1$ и не используется фильтрация процесса на выходе демодулятора. Приняты следующие параметры алгоритма (23), (24): $\gamma = \text{sgn}(t - t_0)$, (где $\text{sgn}(\cdot)$ означает единичную функцию Хевисайда, $t_0 = 5 c$) $\alpha = 5$, $\Gamma(t_0) = 10^{-5}$, ширина полосы пропускания фильтров Баттерворта взята 5^{-1} . При моделировании принято что $\vartheta(t) = \theta_0 s(t)$, где $s(t_k) = s[k]$, $s[k]$ – информационный сигнал, полученный квантованием по времени звукового файла с частотой F_s , $t_k = E(F_s t)$ ($\text{sign } E(\cdot)$ – функция *entier*), $|s(t)| < 1$. Таким образом, для модулятора (33) выполнено $\theta(t) = (1 + s(t))\theta_0$. При экспериментах взято $\theta_0 = 5 \cdot F_s$. Ширина полосы пропускания фильтров Баттерворта $\omega_f = 1,0\theta_0 c^{-1}$. Декодированный сигнал

(выход демодулятора (30)) $\hat{\theta}$ подвергнут сглаживанию с помощью

пост-фильтра $W_{pf}(\lambda) = \omega_{pf}/(\lambda + \omega_{pf})$, где $\omega_{pf} = 0,4\theta_0 \text{ с}^{-1}$. Окончательно, дискретный информационный сигнал $s[k]$ получен реконструкцией $s_f[k] = \hat{\theta}_{pf}[t_k]/\theta_0 - 1$, где $\hat{\theta}_{pf}(t)$ — выход

пост-фильтра со входным сигналом $\hat{\theta}(t)$.

4.5. Применение частотной модуляции

Представим некоторые результаты моделирования для описанной выше схемы с частотной модуляцией. На рис. 4 показаны процессы $s(t)$, $s_f(t)$ и выход модулятора $y_d(t)$ (приведенный масштабированием к единичной амплитуде) для идеального канала связи ($\sigma = 0$). Принят гармонический информационный сигнал $s(t) = 0,25 \sin \omega t$, $\omega = 2\pi F$, $F = 440 \text{ Гц}$, частота дискретности $F_s = 8192 \text{ Гц}$. Демодулятор описывался уравнениями (30), (37), (39). Рисунок дает возможность сопоставить границу частот несущего и сигнала с частотой информационного сигнала.

Рассмотрим также процесс передачи музыкального сигнала. В качестве примера взят фрагмент музыкального произведения «*Gloria in D*» Антонио Вивальди. Частота квантования $F_s = 44100 \text{ Гц}$. Процессы s , s_f при $\sigma = 0$ и демодулятором (30), (37), (39) показаны на рис. 5.

Для повышения помехозащищенности системы передачи сигналов, можно использовать: различные способы регуляризации алгоритма адаптации; введение дополнительных сглаживающих фильтров; расширение относительной ширины полосы частот несущего сигнала и т.д. Продемонстрируем на примере влияние робастификации алгоритма введением параметрической обратной связи. В условиях предыдущего эксперимента вместо алгоритма (30) использован алгоритм (32). Параметр $\alpha = 5 \cdot 10^{-3} \theta_0$. На рис. 7 показаны сигналы $s_f(t)$ на выходе демодулятора для случаев $\sigma = 0$ и $\sigma = 0,01$. Отсюда видно, что огрубление алгоритма адаптации обратной связью повышает качество передачи информации в условиях помех.

5. Заключение

В статье изложены методы передачи информации модулированием генераторов хаотических сигналов, основанные на:

- применении адаптивных наблюдателей;
- адаптивной идентификации с неявной настраиваемой моделью;
- частотной модуляции с адаптивным демодулятором.

Исследуется влияние аддитивных помех в канале связи на точность воспроизведения информационного сигнала приемником. Показано применение предложенных методов для передачи информации модуляцией хаотического генератора, построенного на основе системы Чуа. Приводятся результаты численного моделирования, показывающие высокое быстродействие предложенных алгоритмов и позволяющее оценить границы их применимости при действии помех в канале связи.

Литература

1. АНДРИЕВСКИЙ Б. Р., НИКИФОРОВ В. О., ФРАДКОВ А. Л. *Методы управления периодическими и хаотическими колебаниями* / Юбилейная конференция РФФИ. – 2002.
2. АНДРИЕВСКИЙ Б. Р., НИКИФОРОВ В. О., ФРАДКОВ А. Л. *Синхронизация нелинейных неаппроксимированных систем на основе адаптивных наблюдателей* // Автоматика и телемеханика. – 2007. – №7. – С. 74-89.
3. АНДРИЕВСКИЙ Б. Р., ФРАДКОВ А. Л. *Избранные главы теории автоматического управления с примерами на языке MATLAB*. – Санкт-Петербург: Наука, 1999. – 467 с.
4. АНДРИЕВСКИЙ Б. Р., ФРАДКОВ А. Л. *Элементы математического моделирования в программных средах MATLAB 5 и Scilab (учебное пособие)*. – Санкт-Петербург: Наука, 2001. – 286 с.
5. АНДРИЕВСКИЙ Б. Р., ФРАДКОВ А. Л. *Управление хаосом. Методы и приложения. Часть 1. Методы* // Автоматика и телемеханика. – 2003. – №5. – С. 3-45.

6. АНДРИЕВСКИЙ Б. Р., ФРАДКОВ А. Л. *Управление хаосом. Методы и приложения. Часть II. Приложения // Автоматика и телемеханика.* – 2004. – №4. – С. 3-34.
7. ДЕМИДОВИЧ Б. П. *Лекции по математической теории устойчивости.* 2-е изд. - М.: Изд-во МГУ, 1998.
8. ДМИТРИЕВ А. С., ПАНАС А. И., СТАРКОВ С. О. *Динамический хаос как парадигма современных систем связи // Зарубежная радиоэлектроника. Успехи современной радиоэлектроники.* – 1997. – №10. – С. 4-26.
9. ДМИТРИЕВ А. С., КУЗЬМИН Л. В. *Передача информации с использованием синхронного хаотического отклика при наличии фильтрации в канале связи // Письма в ЖТФ.* – 1999. – Том 25, №16. – С. 71-77.
10. НАПАРТОВИЧ А. П., СУХАРЕВ А. Г. *Декодирование информации в системе хаотического лазера, управляемого хаотическим сигналом // Квантовая электроника.* – 1998. – 25, 1. – С. 85-88.
11. *Управление мехатронными вибрационными установками /* Б. Р. Андриевский, И. И. Блехман, Ю. А. Борцов и др. Под ред. И. И. Блехмана и А. Л. Фрадкова. – Санкт-Петербург: Наука, 2001. - 278 с.
12. ФОМИН В. Н., ФРАДКОВ А. Л., ЯКУБОВИЧ В. А. *Адаптивное управление динамическими объектами.* – М.: Наука, 1981. – 448 с.
13. ФРАДКОВ А. Л. *Адаптивное управление в сложных системах.* – М.: Наука, 1990. – 292 с.
14. ФРАДКОВ А. Л. *Кибернетическая физика. Принципы и примеры.* – Санкт-Петербург: Наука, 2003. – 208 с.
15. ШАЛФЕЕВ В. Д., ОСИПОВ Г. В., КОЗЛОВ А. К., ВОЛКОВСКИЙ А. Р. *Хаотические колебания – генерация, синхронизация, управление // Зарубежная радиоэлектроника. Успехи современной радиоэлектроники.* – 1997. – №10. – С. 27-49.
16. ШИМАНСКИЙ В. Э. *Система связи с хаотической несущей на цифровом сигнальном процессоре ADSP-2181 //*

- Изв. ВУЗов. Прикл. нел. динам. – 1998. – 6, №5. – С. 66-75.
17. ABEL A., SCHWARZ W. *Chaos communication – principles, schemes, and system analysis* // Proc. IEEE. – 2002. – Vol. 90, 5. – P. 691-710.
 18. ALVAREZ-RAMIREZ J., PUEBLA H., CERVANTES I. *Stability of observer-based chaotic communications for a class of Lur'e systems* // Int. J. Bifurcation and Chaos. – 2002. – Vol. 12, 7. – P. 1605-1618.
 19. ANDRIEVSKY B. R. *Information transmission by adaptive identification with chaotic carrier* / Proc. 2nd International Conference “Control of Oscillations and Chaos (COC 2000)”, 5-7 July 2000, St. Petersburg, Russia. – Vol. 1. – P. 115-117.
 20. ANDRIEVSKY B. R. *Adaptive synchronization methods for signal transmission on chaotic carriers* // Mathematics and Computers in Simulation. – 2002. – Vol. 58, Issue 4-6. – P. 285-293.
 21. ANDRIEVSKY B. R., FRADKOV A. L. *Information transmission by adaptive synchronization with chaotic carrier and noisy channel* / Proc. 39th IEEE Conf. Decisions and Control, Sydney, 12-15 Dec. 2000. – P. 1025-1030.
 22. ANDRIEVSKY B. R., FRADKOV A. L. *Information transmission by means of chaos-based frequency modulation and adaptive identification* / Proc. 2007 IEEE Multi-conference on Systems and Control, Singapore, October 1-3, 2007.
 23. BLEKHMANN I. I., FRADKOV A. L., NIJMEIJER H., POGROMSKY A. Y. *On self-synchronization and controlled synchronization* // System and Control Letters. – 1997. – Vol. 31. – P. 299-305.
 24. BROWN R., CHUA L. O. *Clarifying chaos III: Chaotic and stochastic processes, chaotic resonance and number theory* // Int. J. Bifurcation and Chaos. – 1999. – №9(5). – P. 785-803.
 25. CHEN G., DONG X. *From chaos to order: Perspectives, Methodologies and Applications*. Singapore: World Scientific, 1998. – 753 p.

26. CUOMO K.M., OPPENHEIM A.V., STROGATZ S.H. *Synchronization of Lorenz-based chaotic circuits with application to communications* // IEEE Trans. Circ. Syst. – 1993. – II. 40. 10. – P.626-633.
27. CUOMO K.M., OPPENHEIM A.V. *Circuit implementation of synchronized chaos with applications to communications* // Phys. Rev. Lett. – 1993. – 71. 1. – P.65-68.
28. DEMIRCIOĞLU H., YAVUZYILMAZ Ç. *Constrained predictive control in continuous time* // IEEE Control Systems Magazine. – Vol. 22, No 4. – P. 57-67.
29. FRADKOV, A. L., ANDRIEVSKY, B. R. *Adaptive robustified synchronization methods for chaos-based information transmission* / Proc. 1st IEEE Int. Conf. Circ. Syst. for Communic. – St.Petersburg, 2002. – P. 275-280.
30. FRADKOV A. L., H. NIJMEIJER AND A. YU. MARKOV. *Adaptive observer-based synchronization for communication* // Int. J. Bifurcations and Chaos. – 2000. – Vol. 10, №12. – P. 2807-2813.
31. FRADKOV A. L., NIKIFOROV V. O., ANDRIEVSKY B. R. *Adaptive observers for nonlinear nonpassifiable systems with application to signal transmission* / Proc. 41st IEEE Conf. Dec. Contr. (CDC'02). – USA, 2002. – P. 4704-4711.
32. FRADKOV A.L., POGROMSKY A.Y. *Introduction to control of oscillations and chaos*. – Singapore: World Scientific, 1998.
33. GAWTHROP P.J. *Continuous-Time Self-Tuning Control*. – V.1. Letchworth. – U.K.: Research Studies Press, 1987.
34. HASLER, M., SCHIMMING, TH. *Chaos communication over noisy channels* // Intern. J. Bifurc. Chaos. – 2000. – Vol. 10, №4. – P. 719-735.
35. KOLUMBAN G., KENNEDY M.P., CHUA L.O. *The role of synchronization in digital communications using chaos – Part I: Fundamentals of digital communications* // IEEE Trans. Circ. Syst.– 1997. – Part I: 44(10). – P.927-936., Part II: *Chaotic modulation and chaotic synchronization*. // IEEE

- Trans. Circ. Syst.– 1998. – Part I: 45. 11. – P. 1129-1140.
36. LION P.M. *Rapid identification of linear and nonlinear systems* // AIAA J. – 1967. – Vol. 5. – P. 1835-1842. r
 37. MARKOV A. YU., FRADKOV A. L. *Adaptive synchronization of chaotic systems based on speed gradient method and passification* // IEEE Trans. Circ. and Syst. – 1997. – No 11. – P. 905-912.
 38. PETERSON, R. L., ZIEMER, R. E., BORTH, D. E. *Introduction to Spread-Spectrum Communications*. – Prentice Hall, NJ, 1995. – 695 p.
 39. TORRES, W. P., OPPENHEIM, A. V., ROSALES, R. R. *Generalized frequency modulation* // IEEE Trans. Circ. Syst. - I. – 2001. – Vol. 48, №12. – P. 1405-1412.
 40. IEEE Transactions on Circuits and Systems. *Special issue “Chaos control and synchronization”* / Eds. M. Kennedy, M. Ogorzalek. – 1997. – 44. 10.
 41. IEEE Transactions on Circuits and Systems. *Special issue on applications of chaos in modern communication systems* / Eds. L. Kocarev, G. M. Maggio, M. Ogorzalek, et al. – 2001. – Vol. 48. 12.
 42. IÑARREA M., LANCHARES V. *Chaos in the reorientation process of a dual-spin spacecraft with time-dependent moments of inertia* // Int. J. Bifurc. Chaos. – 2000. – Vol. 10, №5. – P. 997-1018.

ADAPTIVE-BASED METHODS FOR INFORMATION TRANSMISSION BY MEANS OF CHAOTIC SIGNAL SOURCE MODULATION

Boris Andrievsky, Dr.Sc., Leading Research Fellow
(bandri@yandex.ru).

Alexander L. Fradkov, Dr.Sc., Head of the Lab (Institute for Problems of Mechanical Engineering of RAS, Saint Petersburg, 61, V.O. Bolshoy Av., (812) 321-47-66, fradkov@mail.ru)

Abstract: Three methods for information transmission based on chaotic signal source modulation based on: implementation of adaptive observers, adaptive identification with the Implicit Adjustable Model, and frequency modulation with the adaptive demodulator are described. Application on the proposed methods for information transmission by means of modulation of chaotic Chua's generator is presented.

Keywords: information transmission, adaptation, chaotic systems.

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии В.М. Вишневым*

УДК 021.8 + 025.1
ББК 78.34

КОМПЬЮТЕРНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ КОРРЕКЦИИ ЦЕЛЕЙ, СТРАТЕГИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ И ОПЕРАТИВНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ В ДИНАМИКЕ УПРАВЛЕНИЯ

Трахтенгерц Э. А.¹

*(Учреждение Российской академии наук
Институт проблем управления РАН, Москва)*

Управленческие решения разделены на три уровня: оперативные, стратегические и целевые. Показано их взаимное влияние. Рассмотрены компьютерные методы коррекции целей, стратегических решений и оперативных воздействий в динамике управления. Приведены иллюстративные примеры

Ключевые слова: компьютерные управляющие системы, компьютерные технологии управления, коррекция целей, коррекция стратегических решений, коррекция оперативных воздействий, динамика управления.

1. Введение

Компьютерные управляющие системы и системы поддержки принятия решений используются на самых различных уровнях управления: от «ситуационных комнат» президентов стран и крупных компаний до кабин боевых самолетов и пунктов управления системами ПВО.

Практика показала, что хотя мы и говорим о компьютерных системах управления независимо от того, принимают они реше-

¹ Эдуард Анатольевич Трахтенгерц, профессор, доктор технических наук, заслуженный деятель науки РФ, главный научный сотрудник (Москва, ул. Профсоюзная, 65, тел. (495) 334-88-40).

ние сами или только поддерживают принятие управленческих решений, роль личных качеств руководителя (эксперта) – его интеллект, субъективные оценки, эрудиция, умение находить решение и т.п. – не уменьшается, а, может быть, даже возрастает.

Это вызвано тем, что на решение руководителя сильнейшее влияние оказывают его субъективные предпочтения и интересы, поэтому в вариантах решений, выработанных компьютерной системой, руководитель должен видеть тщательный учет его предпочтений, а не «абстрактное оптимальное» предложение, далекое от его интересов. Компьютерные системы управления вводят новую составляющую в искусство принятия решений: искусство применения компьютерных технологий, которое должно сочетать оценки и решения, полученные уже устоявшимися (или вновь разработанными) математическими методами, с субъективными эвристическими оценками, сделанными на основе знаний, опыта и интуиции руководителя.

С точки зрения учета интересов руководителя разница между двумя типами упомянутых выше систем заключается в том, что в системах управления предпочтения руководителей и учет неопределенностей заложены в процессе создания и программирования алгоритмов, а системы поддержки принятия решений могут выявлять эти предпочтения и неопределенности до или в процессе принятия решений. Поэтому в дальнейшем будем говорить о компьютерных системах управления, не подразделяя их на перечисленные выше классы. При подготовке управленческих решений и в динамике управления широко используются математические и алгоритмические модели. Однако необходимо помнить, что степень адекватности таких моделей в экономике, политике, экологии, при чрезвычайных ситуациях и в некоторых других областях существенно отличается от точности их соответствия реальным процессам, например, в физике или во многих областях астрономии. Это связано с тем, что физические модели многократно проверяются и при необходимости уточняются, а в социальных, экономических и некоторых других

моделях этого сделать нельзя, потому что экономическая или, скажем, политическая ситуация не может быть точно воспроизведена, а в экологии или, например, в чрезвычайных ситуациях возникает необходимость моделировать процессы, которые пока еще никто и никогда не наблюдал. Сказанное отнюдь не означает, что модели не нужны. Но как сами модели, так и принимаемые по ним оценки и решения, должны модифицироваться в динамике управления процессом или объектом на основе систематически измеряемых результатов управления, а корректировка решений должна осуществляться с учетом субъективных предпочтений и оценок руководителей.

Для того чтобы не вдаваться в технические подробности и для наглядности изложения, все управленческие решения условно разделим на три уровня: оперативные, стратегические и целевые. Соответственно, будем говорить об оперативном управлении, стратегическом управлениях и о формировании целей.

Под оперативным управлением будем понимать организацию непосредственных воздействий как реакцию на изменения, происходящие во внешнем мире, внутри организации и в самом управляемом процессе. Оно включает в себя сам управляемый процесс, сравнение полученных результатов с ожидаемыми и коррекцию величины воздействия для достижения требуемых значений.

В стратегическое управление включим принятие решений и их реализацию в отдельных отраслях экономики, политики и т.п.: изменение номенклатуры, развитие, сокращение или ликвидацию вида производства, изменение качества производимой продукции и т.д., а также организацию реакций на изменение каких-либо экономических параметров, маркетинговых позиций, внутренней политики и т.п., если оперативных воздействий для этого недостаточно [11, 13]. Энциклопедия Википедия отмечает, что стратегия «становится необходимой в ситуации, когда для прямого достижения основной цели недостаточно наличных ресурсов».

Цель указывает, что желательно или должно быть достигнуто.

На рис. 1 показано соотношение масштабов времени оперативного и стратегического управлений, а также моменты перехода к стратегическому управлению, когда только оперативного воздействия для получения требуемого результата уже недостаточно. Проиллюстрирована последовательность реализации i -х оперативных воздействий ($i = \overline{1, k_l}$) и j -х стратегических решений ($j = \overline{1, S_l}$) l -го процесса управления ($l = \overline{1, N}$) в моменты τ_{ij}^l .

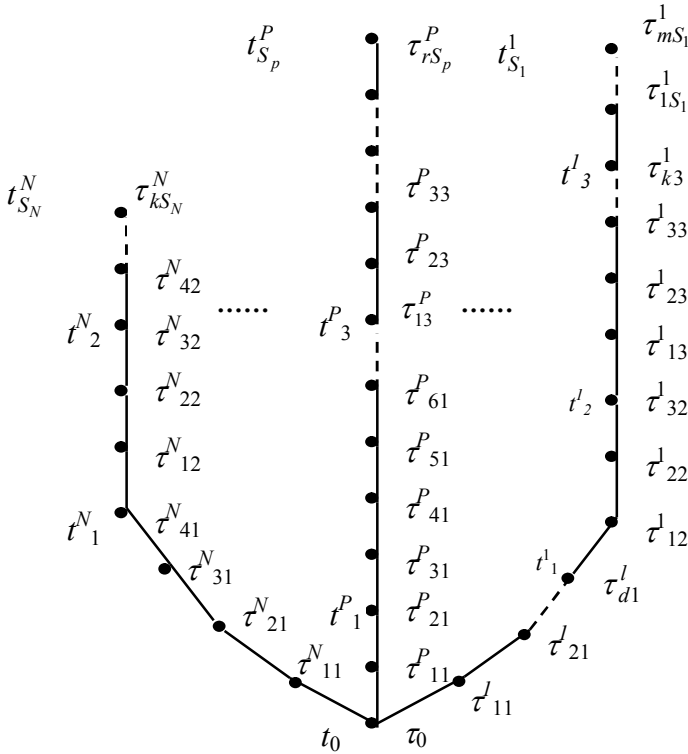


Рис. 1

Оперативное воздействие может быть как одномоментным, например, при повороте рукоятки регулятора, снижающего температуру, или при опубликовании рекламы или компрометирующего материала, так и иметь протяженность во времени, например, при доставке товара. Стратегические решения и принимаемые по ним действия всегда имеют протяженность во времени. В дальнейшем будем их называть стратегическими воздействиями.

Стратегические воздействия выполняются в тех случаях, когда привести процесс в норму только оперативными воздействиями не удастся. Поэтому оперативные воздействия могут быть как регулярными, например, при поставках товаров, так и нерегулярными, когда на какие-то товары непредвиденно резко возрастает или падает спрос. Стратегические решения принимаются нерегулярно и не определяются числом произведенных оперативных воздействий. Стратегические воздействия в разных процессах управления могут быть не связаны между собой по времени.

По результатам оперативных воздействий и реализации стратегических решений высшие уровни управления могут оценить, насколько правильно сформулированные задачи удовлетворяют требованиям внешнего мира (рынка) и условиям их реализации внутри фирмы, а также насколько эффективны технические средства, используемые методы и действия персонала. На основании этого анализа уровни формирования целей задают характер действий: генерируют задачи и цели, формируют критерии оценок, определяют допустимые границы значений критериев. Конечно, число уровней формирования целей, стратегий и оперативных воздействий решений может быть большим или меньшим, т. е. может быть несколько уровней целей (дерево целей) и несколько уровней стратегий их реализации. Идеология подхода от этого не меняется.

Информация на все уровни управления поступает параллельно, часть ее касается не одного, а двух или даже всех уровней управления. Поэтому одна из задач компьютерной системы

управления на основе данных мониторинга – своевременно предупреждать руководство всех уровней о необходимости оперативных воздействий и принятия стратегических решений или даже модификации целей и стратегий в связи с произошедшими изменениями.

Использование компьютерных технологий позволяет оптимизировать реализацию взаимодействия составляющих управленческой триады: цели функционирования, стратегии успешной ее реализации и оперативные воздействия на объекты управления или протекающие процессы, обеспечивающие выполнение выбранных стратегий. Структурная схема взаимодействия этих трех составляющих показана на рис. 2.

Подчеркнем, что выработка стратегических решений и формирование целей – процесс достаточно длительный, как правило, требующий определенной подготовки и согласования. Во многих случаях смена стратегий и, тем более, формирование целей вызывает серьезное сопротивление управленческого персонала. Однако в условиях возрастающего динамизма современного мира вообще, и экономики и политики в частности, необходимо уметь эффективно менять свои цели и стратегии в соответствии со складывающейся обстановкой.

На рис. 2 видна цикличность функционирования системы. Заметим, что процесс принятия решения может повторяться, если предлагаемый вариант решения оказывается неудовлетворительным. Конечно, совсем не обязательно, чтобы в компьютерной системе управления были реализованы все блоки, показанные на рис. 2. Во многих случаях они реализуются только частично.

Методы реализации схемы рис. 2 подробно рассмотрены в работах [6-10]. В этой работе фрагментарно остановимся только на оценке эффективности деятельности организации и коррекции оперативных, стратегических и целевых решений.

Существует несколько возможных источников информации о назревающей необходимости таких модификаций: тенденции изменения экономических показателей, тенденции изменения в

освещении деятельности организации, ее оценки в СМИ, социологические опросы и т.д. Их компьютерный анализ позволяет предвидеть необходимые изменения и своевременно подготовить соответствующие решения. Поэтому, не дожидаясь получения полной информации о происходящих изменениях, руководству следует определить, какие шаги могут быть предприняты при различных вариантах развития событий для парирования возникающих угроз и использования появляющихся возможностей [12].

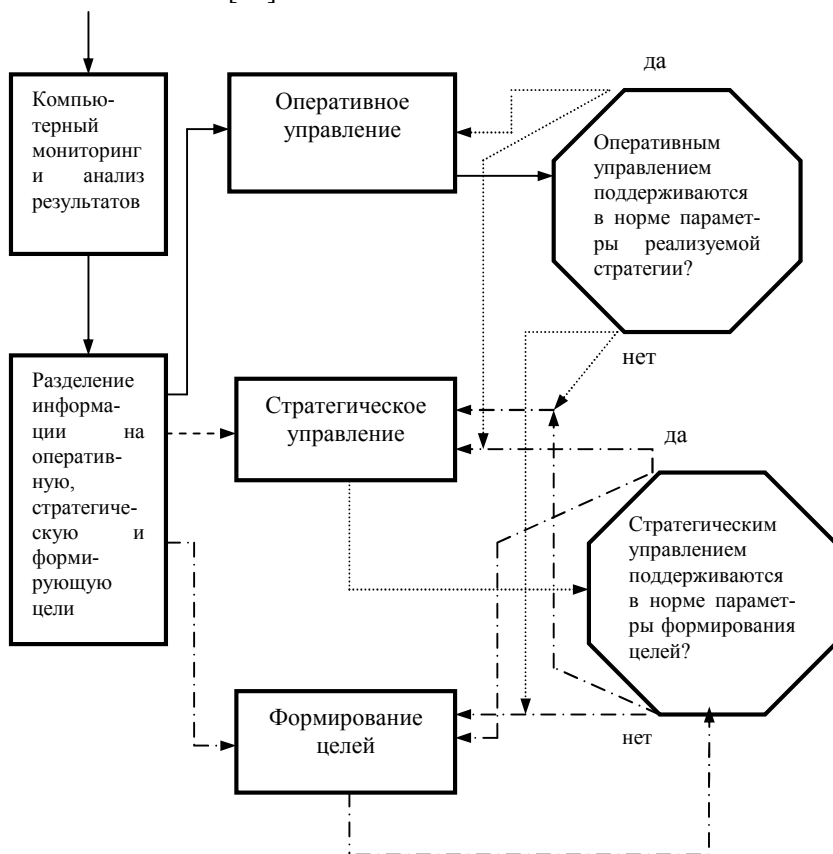


Рис. 2.

Оперативные воздействия модифицируются в зависимости от результатов предыдущих воздействий, оценка которых производится в процессе мониторинга. Модификация стратегии производится в тех случаях, когда результаты реализуемой стратегии неудовлетворительны.

Цель модифицируют, если по результатам мониторинга обнаружена ее неадекватность создавшейся обстановке. После того как цель модифицирована, система управления может изменить одну или несколько стратегий ее реализации.

Принципиальная схема взаимного влияния стратегий и оперативных воздействий показана на рис. 3, а целей и стратегий – на рис. 4.

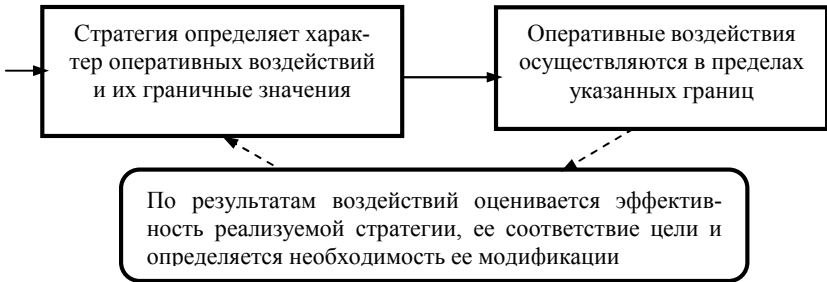


Рис. 3.

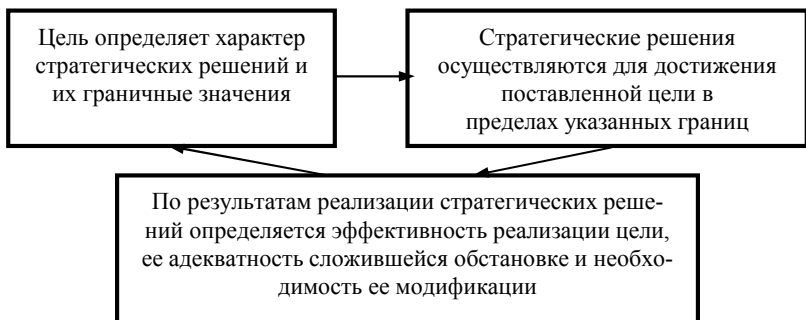


Рис. 4.

В иллюстративных примерах при дальнейшем изложении упростим задачу до взаимодействия только одной цели с двумя стратегиями, а оперативное управление ограничим только изменением объемов производства и цены продукции. Будем считать, что цель фирмы – захват 25% рынка, выбор стратегических решений ограничен расширением собственного производства или покупки другой фирмы с необходимой специализацией.

2. Компьютерная коррекция оперативных воздействий

Процесс анализа и выработки СППР рекомендаций и воздействий по коррекции оперативных воздействий может быть представлен как компьютерная игра с перебором вариантов. Такой подход часто используют, например, в компьютерных играх в шахматы. В ходе игры система управления осуществляет сбор, оценку информации, выработку рекомендаций и воздействий [1, 7, 11]. Такое представление позволяет отобразить «ответ» каждой стороны на действия оппонента, например фирмы-производителя на поведение рынка за определенный период и оценить результат произведенного «ответа». Два шага такой игры показаны на рис. 5.

Одним из участников игры является руководитель или эксперт фирмы, его противником – конкурирующая фирма, рынок, природа, социальная структура и т.д. Противников может быть несколько, например, несколько партий на выборах, несколько противостоящих экономических групп и т.д. Будем считать, что цель игры однозначно формулируется заранее, например, выпуск некоторого вида продукции и захват определенной доли рынка, прохождение в парламент представителей партии и т.д. В первом случае успех – не просто достижение результата, а получение соответствующей прибыли, во втором – количества мест в парламенте.

Ход игры будем описывать графами. Обычно для описания таких игр используют самый простой вид графа – дерево. Каж-

дой вершине дерева поставим в соответствие матрицу или несколько матриц, характеризующих состояние игрока. Переход из одного состояния в другое (от одной вершины к другой) обозначим дугами. Такие деревья называются деревьями игры.

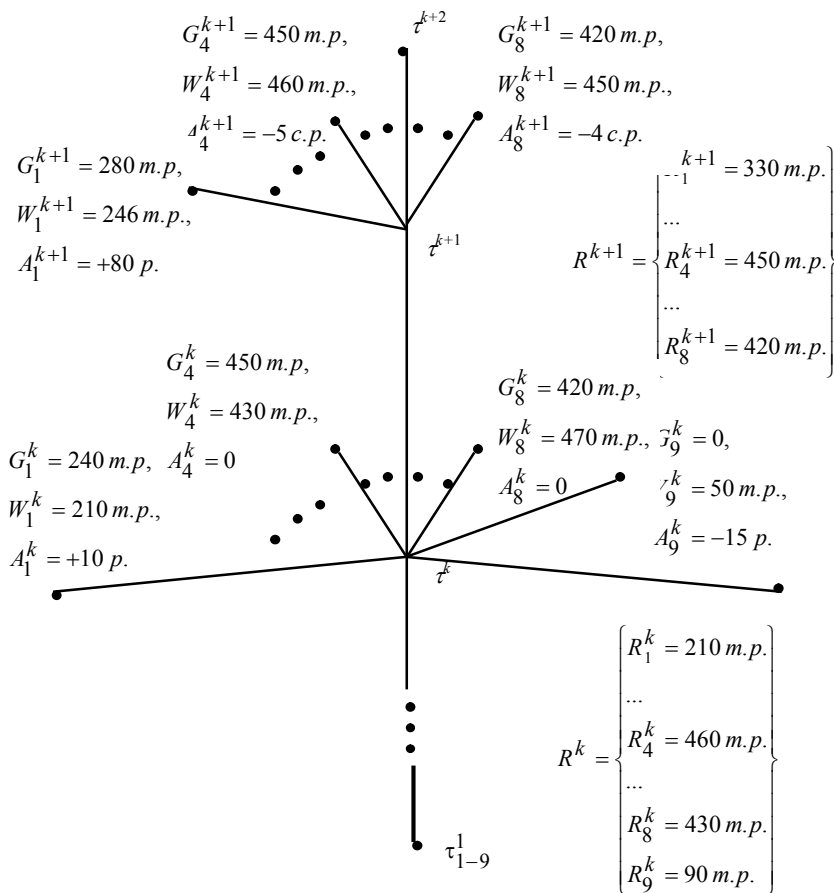


Рис. 5.

Рассмотрим на иллюстративных данных формирование системой управления оперативных воздействий с использованием метода компьютерной игры. Заметим, что при формировании оперативного воздействия этим методом вмешательство эксперта или руководителя может не потребоваться.

На рис. 5 показаны данные мониторинга о поставках на рынок продукции фирмы (являющейся ее реакцией на запросы рынка) за периоды t^k и t^{k+1} и реакции рынка по трем позициям: объем проданной продукции, среднее изменение цен на эту продукцию и объемы новых заказов. Объем поставок продукции j -го типа, произведенной фирмой продукции и полученный рынком за период t^k обозначен R_j^k , объем проданной продукции – W_j^k , объем продукции, заказанной рынком фирме – G_j^k , изменение цен на продукцию – $A_j^k = P_j^{k-i} - P_j^k$, где P_j^k – цена единицы продукции.

Цели рынка и фирмы-производителя в нашем случае как будто совпадают: произвести и продать как можно больше товаров и услуг по максимально возможной цене. Однако в период t^k рынок был вынужден сократить сбыт продукции фирмы типов $j = 4, j = 8$, и прекратил заказ продукции типа $j = 9$. Но при этом спрос на продукцию типа $j = 1$ не только не сократился, но даже возрос. (Наименование типа продукции в данном случае не имеет значения).

Один из возможных алгоритмов определения управляющей системой величины воздействия может быть аналогичен процессу определения равновесной цены, иногда называемой «нащупыванием» [2]. Он заключается в следующем. Если известны функции совокупного спроса $\Phi(p)$ и совокупного предложения $\Psi(p)$ безотносительно от возможного изменения их причин, то последовательность $\{p_s\}$ строится следующим образом. Пусть при некоторой цене p_s (или каком-либо другом параметре) спрос выше предложения. Тогда управляющая система повышает цену до величины p_{s+1} , чтобы выполнялось условие $\Phi(p_{s+1}) = \Psi(p_s)$

(или $\Psi(p_{s+1}) = \Phi(p_s)$). Если же спрос ниже предложения, то система наоборот понижает цену. Таким образом, каждый член p_s последовательности $\{p_s\}$ строится как решение уравнений относительно p :

$$\Phi(p_s) - \Psi(p_{s-1}) = 0 \text{ или } \Phi(p_{s-1}) - \Psi(p_s) = 0.$$

Корень этого уравнения и является следующим членом последовательности. В качестве начального приближения p_0 можно взять любое значение $p > 0$. Поскольку эти функции нам не известны, компьютерная система управления варьирует значения p_s , «нащупывая» нужные значения оперативных воздействий, определяющие объемы и цены выпускаемой фирмой продукции.

В соответствии с изменившейся обстановкой на основе анализа ситуации в период t^k фирма модифицировала значения оперативных воздействий, формирующих цену и объемы выпуска продукции в период t^{k+1} , но при этом оперативные воздействия, сокращающие производство продукции типа $j = 4, 8, 9$, противоречат стратегии увеличения производства, необходимой для выполнения цели: захват 25% рынка. Методы расчета системой управления этих параметров показаны, например, в [10].

3. Компьютерная коррекция стратегических решений

Начнем с оценки эффективности стратегии.

Для того чтобы система управления могла оценить реализуемую стратегию, она должна узнать от эксперта что такое «хорошо» и что такое «плохо». Для этого эксперты составляют список критериев оценки и для каждого критерия определяют его значения, соответствующие лингвистическим или балльным оценкам параметров, после чего согласовывают их. Пример такой критериальной оценки параметров показан в таблице 1.

Таблица 1 должна периодически пересматриваться экспертами. В период смены стратегий изменение значений тренда может быть значительным, но по мере приближения к желаемой

цели оно стабилизируется. В этом случае хорошими могут считаться весьма скромные изменения значения трендов.

Поскольку в систему мониторинга с заданной частотой поступает вся информация о количестве продаж, стоимости акций и т.п., она с той же частотой обновляет свои базы данных, если необходимо, запрашивая те, которые не поступают автоматически, например субъективные оценки руководителей.

Тренды значений критериев будем оценивать с использованием формул (1)-(3) следующим образом [4]:

$$W = \frac{R_1 + H_1}{2}; \theta = \frac{R_2 + H_2}{2}; Z = \frac{H_3 + U_3}{2}; U = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T U_t,$$

т. е. беря среднее из допустимых значений R , H и U , а процент потерянного рынка – оценивая как среднее за период T .

$$(1) R_i = \frac{100}{T} \sum_{t=1}^T \frac{x_i(t) - x_i(t-1)}{x_i(t-1)},$$

$$(2) H_i = \frac{100}{T} \frac{[x_i(1) - x_i(T)]}{x_i(t)},$$

$$(3) U_i = \frac{100}{T} \sum_{t=1}^T x_i(t),$$

где i – номер критерия; $x_i(t)$ – значение i -го критерия в период t ; T – число периодов. Значения $x_i(t)$ хранятся в базе данных мониторинга. Оценка C – экспертная, формулами типа (1)-(3) не оценивается.

По всем трем формулам производится оценка изменений показателей (трендов) за определенный период. Оценка (1), как правило, дает систематическую ошибку, завышая результаты в случае больших флуктуаций переменных. Оценка (2) учитывает значение тренда только по первому и последнему периодам, поэтому результат может быть сильно искажен за счет одного аномального значения. Результаты расчетов по формуле (3) обладают известными недостатками и достоинствами простого среднего за рассматриваемый период. Сопоставление оценок R_i , H_i и B_i способствует выявлению неравномерности деятельности фирмы. Эта неравномерность может быть представлена систе-

мой управления руководителям и экспертам с помощью диаграмм и графиков. Анализируя значения критериев фирмы, перечисленные в таблице 1 или какие-то другие, система определяет, насколько правильно выбрана стратегия управления для достижения поставленной цели.

Таблица 1

Обозначение и наименование критериев	Критериальная оценка тренда значений параметров стратегий				
	отлично	хорошо	удовлетв.	плохо	очень плохо
1. W – % изменения объема проданной продукции и услуг	$-5 \div -4$	$-4 \div -2,1$	$-2,1 \div -1$	$-0,9 \div 0$	> 0
2. θ – % изменения доходов	$-6 \div -5$	$-5 \div -3$	$-2,9 \div -1,1$	$-1,1 \div 0$	> 0
3. Z – % изменения курса акций фирмы	$-7 \div -6$	$-6 \div -3,1$	$-3 \div -0,9$	$-0,8 \div -0,1$	> 0
4. C – % оперативных воздействий, улучшающих синергетику управления	> 90	89-50	49-25	24-10	< 9
5. U – % потерянного рынка	> 20	19,9-15	14,9-10	9,9-8	< 8

На основании данных таблиц, аналогичных таблице 1 и хранящихся в базе данных, компьютерная система управления определяет тренды значений критериев эффективности страте-

гий управления. В таблице 2 показан период $t^{r-7} - t^{r+2}$ выполнения стратегии увеличение объемов производства и услуг данного типа за счет собственных средств (обозначим ее L_1).

Таблица 2

Периоды	W	θ	Z	C	P	U	Стратегия
1	2	3	4	5	6	7	8
$t^{r-7} - t^{r+2}$	Плохо	Плохо	Оч. пл.	Хор	Удовл.	Оч. пл.	L_1

Примечание. Столбец P – субъективная оценка ситуации руководителями за рассматриваемый период t .

Еще раз заметим, что оперативное управление не удовлетворяет требованиям стратегии L_1 , поскольку производство сокращается.

Эффективность стратегий будем определять следующим образом.

Эксперты разделяют все критериальное пространство на классы успешности реализации стратегий. В нашем примере в таблице 3 оно разбито на три класса. Значение критериев в опорных векторах определяется экспертами и согласовывается с помощью компьютерной системы [9].

В 1 класс эффективности попадают стратегии $h_1(\bar{x})$, у которых мера близости к опорному вектору класса 1 меньше, чем к опорным векторам других классов:

$$\rho(h_1(\bar{x}), h_1(\bar{x})) < \rho(h_2(\bar{x}), h_1(\bar{x})),$$

$$\rho(h_1(\bar{x}), h_1(\bar{x})) < \rho(h_3(\bar{x}), h_1(\bar{x})),$$

где $\rho(h_1(\bar{x}), h_1(\bar{x}))$ определено в соотношении (4).

Аналогично во 2 класс эффективности попадают стратегии, у которых мера близости к опорному вектору класса 2 меньше, чем к опорным векторам других классов, также определяются стратегии, попадающие в 3 класс эффективности. Значения опорных векторов показаны в таблице 3.

Таблица 3

№ класса и характеристика стратегии	Значения критериев в опорных векторах стратегий					
	<i>W</i>	θ	<i>Z</i>	<i>C</i>	<i>P</i>	<i>U</i>
Класс 1 – стратегия реализуется успешно	Отл.	Отл.	Отл.	Отл.	Отл.	Отл.
Класс 2 – для оценки успешности стратегии требуется дополнительный анализ	Хор.	Хор.	Удовл.	Удовл.	Хор.	Удовл.
Класс 3 - стратегия требует замены	Плохо	Плохо	Плохо	Плохо	Плохо	Плохо

Система управления определяет близость вектора $h_l(\bar{x})$, значений критериальных оценок трендов стратегии L_l к значениям опорных векторов таблице 3 по формуле (4), считая в нашем примере «веса» всех критериев одинаковыми.

$$(4) \rho(h_i(\bar{x}), h_l(\bar{x})) = \min_{\substack{h_i(\bar{x}) \in G \\ h_l(\bar{x}) \notin G}} \rho(h_i(\bar{x}), h_l(\bar{x})),$$

где $\rho(h_i(\bar{x}), h_l(\bar{x})) = \sqrt{\sum_{j=1}^J k_j (x_i^j - x_l^j)^2}$; $h_q(\bar{x})$ – вектор значений критериев l -й стратегии ($q = i, l$); k_j – «вес» j -го критерия, а x_i^j – оценка значения i -й стратегии по j -му критерию; G – множество векторов значений критериев в каждом классе таблицы 3.

Учитывая низкие оценки стратегии, система управления начинает с опорного вектора 3 класса эффективности.

$$\begin{aligned} \rho(\tilde{h}_3(\bar{x}), h_l(\bar{x})) &= \sqrt{\sum_{j=1}^6 (x_3^j - x_l^j)^2} = \\ &= \sqrt{(1-2)^2 + (1-2)^2 + (1-1)^2 + (1-4)^2 + (1-3)^2 + (1-1)^2} = \\ &= \sqrt{15} = 3,9. \end{aligned}$$

Затем система определяет близость вектора оценок тренда стратегии в этот же период к опорному вектору 2 класса эффективности.

$$\begin{aligned} \rho(\tilde{h}_2(\bar{x}), h_l(\bar{x})) &= \sqrt{\sum_{j=1}^6 (x_2^j - x_l^j)^2} = \\ &= \sqrt{(4-2)^2 + (4-2)^2 + (3-1)^2 + (3-4)^2 + (4-3)^2 + (3-1)^2} = \\ &= \sqrt{18} = 4,2. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\rho(\tilde{h}_3(\bar{x}), h_l(\bar{x})) < \rho(\tilde{h}_2(\bar{x}), h_l(\bar{x})).$$

Стратегия принадлежит 3 классу эффективности. Компьютерная система управления рекомендует руководству сменить стратегию.

Пусть система, используя алгоритмы, рассмотренные, например, в [9, 10], предлагает реализовать вместо стратегии L_1 одну из рассмотренных экспертами ранее стратегий – стратегию в известном смысле противоположную стратегии L_1 . Она заключается в приобретении фирмы с необходимой специализацией, назовем ее стратегией L_2 . Руководство утверждает это решение, осуществляет смену стратегий, т. е. приобретает необходимую фирму или объединяется с ней, и система начинает оценивать эффективность реализуемой стратегии. Для чего проверяет принадлежность стратегии L_2 к опорным векторам таблицы 3 в период $t^{r+4} - t^{r+13}$. Тренды значений критериев за этот период показаны в таблице 4.

Анализ начинается с опорного вектора 2 класса эффективности, поскольку значения критериев стратегии L_2 в таблице 4 достаточно хорошие.

Таблица 4

Периоды	W	θ	Z	C	P	U	Стратегия
1	2	3	4	5	6	7	8
$t^{r+4} - t^{r+13}$	Хор.	Хор.	Удовл	Отл.	Хор.	Отл.	L_2

$$\begin{aligned} \rho(\tilde{h}_2(\bar{x}), h_1(\bar{x})) &= \sqrt{\sum_{j=1}^6 (x_1^j - x_1^j)^2} = \\ &= \sqrt{(4-4)^2 + (4-4)^2 + (3-3)^2 + (3-5)^2 + (4-4)^2 + (3-5)^2} = \\ &= \sqrt{8} = 2,8. \end{aligned}$$

Затем сравнивается вектор критериальных оценок тренда стратегии L_2 с опорным вектором 1 класса эффективности.

$$\begin{aligned} \rho(\tilde{h}_1(\bar{x}), h_1(\bar{x})) &= \sqrt{\sum_{j=1}^6 (x_1^j - x_1^j)^2} = \\ &= \sqrt{(5-4)^2 + (5-4)^2 + (5-3)^2 + (5-5)^2 + (5-4)^2 + (5-5)^2} = \\ &= \sqrt{7} = 2,6. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\rho(\tilde{h}_1(\bar{x}), h_1(\bar{x})) < \rho(\tilde{h}_2(\bar{x}), h_1(\bar{x})).$$

В период $t^{r+4} - t^{r+13}$ стратегия L_2 принадлежит 1-му классу эффективности. Реализация стратегии дает требуемый результат, система управления предлагает продолжить ее реализацию. Тем самым, в силу того, что оперативные воздействия не смогли реализовать стратегию L_1 , она заменена стратегией L_2 . Смена стратегии, в свою очередь, может привести (но не обязательно) к необходимости коррекции цели (см. рис. 4).

Продолжим компьютерную игру. Будем считать, что доля рынка U^* , которую хочет захватить фирма-производитель, установлена, тогда ее целевую функцию можно представить в виде

$$(5) \quad E_\phi^r = \min_r F(U^* - U^r), \quad r = 1, 2, \dots$$

Рынок «хочет» все время увеличивать прибыль, поэтому его целевую функцию можно представить

$$(6) \quad E_p^r = \max_r f(\mu^{r+1} > \mu^r), \quad r = 1, 2, \dots,$$

где μ^r – изменения цен на продукцию фирмы в период r .

Заметим, что у целевой функции (5) есть предел U^* – процент рынка, который фирма-производитель хочет захватить. По

ряду причин, например, в силу антимонопольного законодательства, больше она захватывать не стремится. По крайней мере, в рассматриваемые фазы времени. Если считать, что целью фирмы-производителя является захват 23% рынка, то целевая функция (5) примет вид:

$$E_{\phi}^r = \min_r F(23\% - U^r), r = 1, 2, \dots$$

У целевой функции (6) предела нет, но в ней предполагается, что на каждой следующей фазе прибыль рынка будет увеличиваться, по крайней мере, такова цель рынка.

Представим «игру» фирмы-производителя и рынка в виде рис. 6, на котором показаны четыре «хода», отображающих реакции рынка и фирмы-производителя. Оба стараются достигнуть своих целей, и эти цели не антагонистичны или, по крайней мере, не полностью антагонистичны.

Примечания. 1) На рис. 6 не показаны возможные варианты выбора локальных стратегий L_1 и L_2 и методы их оценки; 2) $L_i = x$ показывает величину увеличения (или сокращения) объема производства в процессе реализации i -й стратегии. Методы расчета не показаны.

Из рис. 6 видно, что:

- в период t^{r-1} «ход» фирмы-производителя – пересмотр своих стратегий. Продолжение реализации стратегии L_1 , в ходе которой происходит сокращение своего производства на 6%. «Ход» рынка прежний – сокращение продаж продукции и услуг фирмы;

- в период t^{r+1} «ход» фирмы-производителя – новые стратегии фирмы начинают реализовываться (процесс выработки стратегий на рис. 6 не показан). Продолжает сокращаться свое производство (на 10%) и на 8% увеличилось производство приобретенной фирмы. Изменяется технология функционирования производимой продукции. Однако рынок этих изменений еще не почувствовал (сказалась эластичность спроса). «Ход» рынка – продолжение сокращения продаж продукции фирмы;

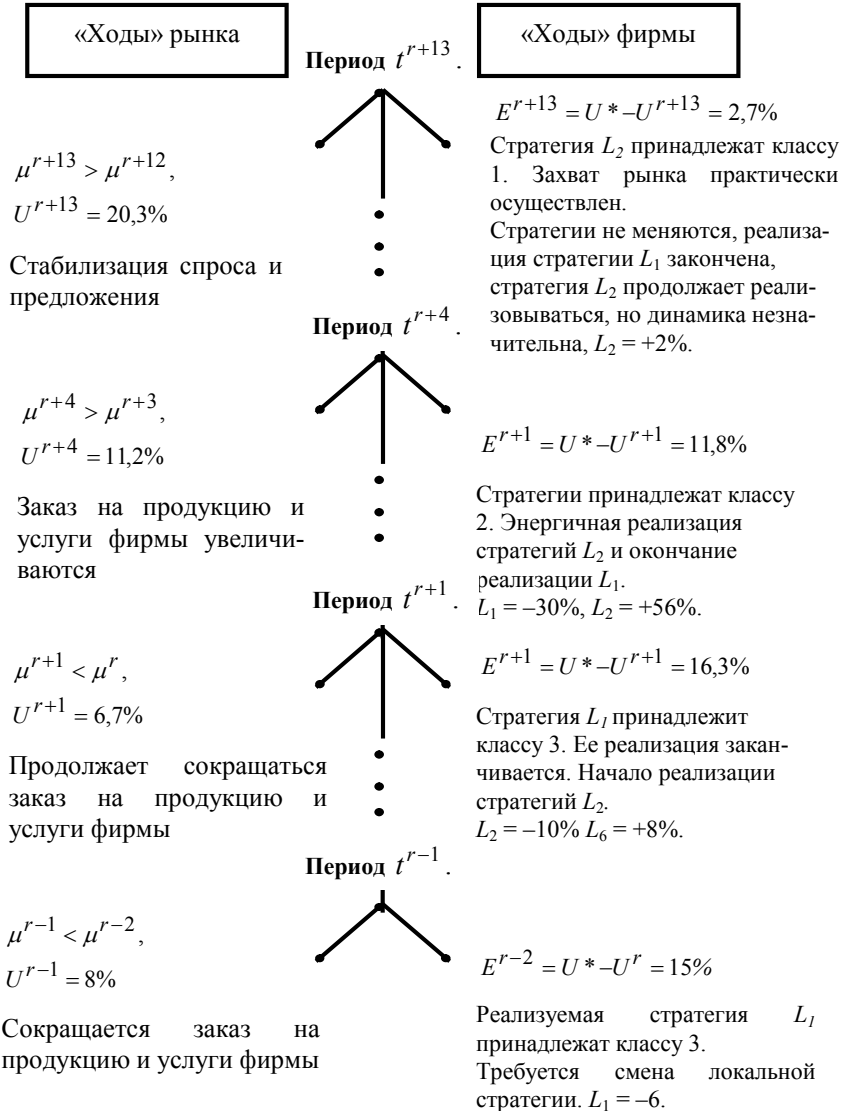


Рис. 6

- в период t^{r+4} «ход» фирмы – продолжение энергичной реализации новой стратегии L_2 , увеличение производства приобретенной фирмы (на 50%). Значительная часть продукции и услуг функционирует по новым технологиям (37%) Свертывание реализации стратегии L_1 : резкое сокращение своего производства (на 30%). «Ход» рынка – осязаемое увеличение роста продаж продукции и услуг фирмы-производителя и, как следствие, – увеличение доли рынка, захваченного фирмой.

- в период t^{r+13} «ход» фирмы – приближение к поставленной цели – захвату 23% рынка, поэтому значение E^{r+13} невелико – 2,7%. Положение на рынке и на фирме стабилизировалось, стратегия L_2 реализуется, но динамика уже не такая энергичная. Процесс сокращения производства собственной продукции и услуг закончен. «Ход» рынка – осязаемое увеличение доли продаж фирмы и ее доли захваченного рынка.

Таким образом, последовательной реализацией стратегии L_2 значение целевой функции E_{ϕ}^r уменьшается, так как % захвата рынка приближается к намеченным 23%. Доходы рынка от продукции и услуг фирмы в результате ее эффективных действий возрастают. Это вызывает увеличение заказов.

Этот раздел показывает, как выполнение цели на каждом шаге (периоде t') связано с реализацией стратегий, в нашем примере – со структурной перестройкой производства.

4. Компьютерная коррекция целей

Хотя рис. 6 показывает, что поставленная цель практически достигнута, но все это вовсе не значит, что она соответствует сложившейся обстановке и ее в дальнейшем можно будет продолжать реализовывать. Очень яркий пример такого несоответствия – захват Ирака. После того как армия этой страны была быстро разгромлена, казалось, что поставленная цель – политическое и экономическое доминирующее положение США в Ираке – достигнута. Однако вскоре оказалось, что это далеко не так. Более того, сам факт достижения цели оказался под вопро-

сом. Одной из многих причин этого была неправильная оценка рисков и достижимости поставленной цели.

Не вдаваясь, естественно, в дальнейшее рассмотрение иракской проблемы, остановимся на некоторых аспектах оценки адекватности поставленной цели сложившейся обстановке применительно к нашему примеру.

Критерии оценки успешности достижения цели и эффективности реализации стратегии могут совпадать, а успешность реализации цели может быть оценена аналогично эффективности стратегий, показанной в соотношении (4).

Для краткости изложения будем считать, что оценка эффективности реализации стратегии по оцениваемым критериям совпадает с оценкой успешности достижения цели. То есть успешность достижения цели оценивается классом эффективности 1 и значения критериев близки к критериальным оценкам первой области эффективности, показанным в таблице 3. Однако при оценке эффективности реализации стратегий не рассматривались два важнейших критерия достижения цели, связанные с ее реализацией: риск и возможность осуществления цели. Игнорирование или неправильная оценка этих критериев являлись одной из важнейших причин провалов многих проектов достижения цели как грандиозных, так и совсем незначительных бытовых целей. Хотя, конечно, может быть и множество других причин.

Рассмотрим иллюстративный пример их оценки с помощью компьютерной системы. Под оценкой риска можно понимать величину возможного ущерба, степень отступления от намеченной цели, недополучение ожидаемых преимуществ (доходов, политической власти, положения на рынке) и т.д. Необходимо отметить, что при оценке риска достижения цели руководитель или эксперт очень часто не имеет достаточно данных для объективной оценки возможных угроз и вынужден исходить только из своих субъективных оценок и интуиции. В литературе приведено несколько классификаций рисков и подходов к их оценкам

[3, 5], так или иначе, они связаны с характером выбираемых целей.

Как всегда в таких случаях приходится выбирать между желанием учесть как можно большее количество возможных рисков (угроз) и пониманием грубости их оценки. Наложение ошибок оценки большого количества рисков может привести к неверному интегральному результату. В литературе для оценки рисков обычно используют теоретико-вероятностные, вероятностно-статистические, статистические и экспертные модели [5]. Ограничимся кратким рассмотрением только одного иллюстративного экспертного метода.

Для определения опасности рисков система управления представляет на дисплеи руководителей и экспертов список возможных рисков, находящийся в базе данных, просит отметить те риски, которые они хотят внести в окончательный список, и добавить новые, если они считают это нужным.

Затем в систему управления вводится процедура согласования. Пусть это будет процедура голосования с требованием единогласия. Система анализирует списки рисков всех руководителей, оставляя в окончательном списке только те, которые помечены всеми руководителями, и высвечивает полученный список на их дисплеях. Если список утверждается, процедура формирования списка рисков считается законченной, если нет – процедура повторяется.

В нашем иллюстративном примере будем считать, что утверждены следующие риски (угрозы) достижения целей:

- отношение властей;
- действия конкурентов;
- рыночные риски.

Для оценки риска успешности достижения цели введем пятибалльную шкалу (она может быть и другой). Соответствие номера категории, ее наименования и балльной оценки показано в таблице 5.

Таблица 5

№ категории	Наименование категории риска	Балльная оценка
1.	Риск минимальный	5
2.	Риск небольшой	4
3.	Риск есть	3
4.	Риск существенный	2
5.	Риск чрезвычайный	1

Оценку риска успешности достижения цели проведем по среднему баллу. Величина риска (угрозы) должна быть оценена всеми руководителями и экспертами. Каждый из них ставит свои оценки риска в соответствии с таблицей 5, представленной системой, и пусть система управления определяет свою оценку цели по формуле:

$$(7) \quad X_i = \frac{1}{k} \sum_{k=1}^K x_{ij}^k, \quad i = \overline{1, I},$$

где x_{ij}^k – оценка риска i -й цели k -м руководителем по j -му риску. Конечно, существует множество других методов оценок.

Если руководитель определил каждому специалисту свой «вес» – m_k , то среднюю оценку система определяет по формуле:

$$(8) \quad X_i = \frac{\sum_{k=1}^K m_k x_{ij}^k}{\sum_{k=1}^K m_k}, \quad i = \overline{1, I}.$$

Специалисты могут и не знать, какой «вес» придал им руководитель. Опустим подробности вычислений по формулам (7) или (8), будем считать их выполненными.

В результате СППР представляет каждому специалисту таблицу типа таблицы 6, в верхней строке которой указаны категории риска, данные самим специалистом, а в нижней – подсчитанные по формуле (6) или (7). В предпоследнем столбце таблицы система указывает среднюю категорию риска реализа-

ции поставленной цели по оценкам данного специалиста и по усредненным оценкам, подсчитанным системой управления. Каждый специалист на дисплее будет видеть только свою таблицу, верхние строки которой не известны другим специалистом. В таблице 6 показан пример оценки риска цели «Захват 25% рынка». Оценка получена в процессе динамики управления.

Таблица 6

Наименование модификации цели	Категории риска (угрозы)			Сумма категорий	Средняя категория	Балльная оценка
	Отношение властей	Действия конкурентов	Рыночные риски			
Захват 25% рынка	Риск есть (3)	Риск небольшой (2)	Риск есть (3)	8	3	3
	Риск минимальный (1)	Риск минимальный (1)	Риск существенный (4)	6	2	4

Примечание: в скобках показан № категории в таблице 5.

После того, как каждый специалист увидел у себя на экране таблицу 6, он может скорректировать свои оценки с учетом средних оценок, данных другими специалистами. Они показаны во вторых строках этой таблицы. Система управления с учетом проведенных изменений введет соответствующие коррективы. Таким образом, вторые строки таблицы 6 являются оценками риска вариантов целей, позволяющими их проранжировать. Последний столбец показывает интегральную балльную оценку риска реализации цели, рассматриваемой в нашем примере.

Теперь перейдем к оценке реализуемости цели. Методика оценки реализуемости в каком-то смысле близка к методике оценки рисков. Близость объясняется тем, что эти оценки также в значительной степени субъективны, основанные на опыте, знаниях и интуиции, а не на точном расчете. Реализуемость целей будем оценивать по четырем критериям: техническому, экономическому,

ческому, финансовому и маркетинговому, как это сделано, например, в работе [14]. Существуют, конечно, и другие критерии реализуемости целей. Для оценки реализуемости система управления предложила руководителям пятибалльную шкалу, показанную в таблице 7. По этой шкале руководители дают оценку реализуемости каждой цели по всем рассматриваемым критериям. Для этого система управления высвечивает на дисплеях руководителей таблицу типа таблицы 8, которую они заполняют.

Таблица 7

Категория реализации	Балльная оценка
Вполне реализуема	5
Реализуема	4
Реализуема с трудом	3
Плохо реализуема	2
Нереализуема	1

Система управления согласовывает значения критериев, проставленные руководителями в таблице типа таблицы 8 одним из способов, рассмотренных, например, в [8]. Будем считать, что в таблице 8 проставлены уже согласованные значения и система рассчитывает приведенные «веса» критериев реализуемости цели информационного управления по формулам (9).

Таблица 8

№	Наименование цели	Критериальная оценка реализуемости цели			
		Техническая	Экономическая	Финансовая	Маркетинговая
		1	2	3	4
1	Захват 25% рынка	Вполне реализуема	Реализуема с трудом	Реализуема	Реализуема

$$(9) \left\{ \begin{array}{l} \beta_1 = \frac{y_1}{\sum_i y_i} = \frac{5}{16} = 0,31 \text{ – приведенные «веса»} \\ \text{технического критерия;} \\ \beta_2 = \frac{y_2}{\sum_i y_i} = \frac{3}{16} = 0,19 \text{ – приведенные «веса»} \\ \text{экономического критерия;} \\ \beta_3 \text{ и } \beta_4 = \frac{y_3}{\sum_i y_i} = \frac{y_4}{\sum_i y_i} = \frac{4}{16} = 0,25 \text{ – приведенные «веса»} \\ \text{финансового и маркетингового критериев,} \end{array} \right.$$

где y_i – оценка в i -м столбце таблицы 8, преобразованная системой в балльную оценку по таблице 7.

Оценку возможности реализации j -ой цели R_j можно произвести по формуле:

$$(10) R_j = \begin{cases} 1, \text{ если } \exists d_{ij} = 1; \\ \sum_i \beta_i d_{ij} \text{ – в противном случае} \end{cases}$$

где d_{ij} – оценка i -го критерия реализации j -ой цели в таблице 8.

В нашем случае $R_1 = 0,31 \cdot 5 + 0,19 \cdot 4 + 0,25 \cdot 3 + 0,25 \cdot 4 = 4,06$, т. е. оценка «Цель реализуема».

По таблице 3 средняя оценка 1 области эффективности равна «5,0». Оценка риска по таблице 6 равна «4» и оценка реализуемости по формуле (10) – «4». Средняя по этим трем критериям оценка успешности достижения цели – «4,3». Таким образом, оценка по выбранным критериям показала, что цель корректировать не нужно. В случае необходимости ее модификации вариант модификации может быть сгенерирован так, как это показано, например, в [8].

Заключение

Компьютерные технологии коррекции оперативных воздействий, стратегий и целей позволяют определить адекватность этой триады или ее составляющих сложившейся обстановке.

В случае несоответствия компьютерная система управления вырабатывает варианты их модификации, обеспечивающие реализацию ранее сформулированной или скорректированной цели.

Литература

1. АДЕЛЬСОН-ВЕЛЬСКИЙ Г. М., АРЛАЗАРОВ В. П., ДОНСКОЙ М. В. *Программирование игр* // М.: Наука, 1978.
2. АЛЬСЕВИЧ В. В. *Введение в математическую экономику*. М.: УРСС, 2004.
3. АНДРЕЕВ А. А., ЗУБАРЕВ В. Д., САРКИСОВ С. В. *Анализ рисков нефтегазовых проектов* // М.: РГУНиГ, 2003.
4. АНСОФФ И. *Стратегическое управление* // М.: Экономика, 1989.
5. ВИШНЯКОВ Я. Д., РАДАЕВ Н. Н. *Общая теория рисков* // М.: АСАДЕМІА, 2007.
6. ТРАХТЕНГЕРЦ Э. А. *Компьютерная поддержка переговоров при согласовании управленческих решений*. – М.: СИНТЕГ, 2003. – 284 с.
7. ТРАХТЕНГЕРЦ Э. А. *Компьютерная поддержка принятия решений*. – М.: СИНТЕГ, 1998. – 376 с.
8. ТРАХТЕНГЕРЦ Э. А. *Компьютерная поддержка формирования целей и стратегий*. – М.: СИНТЕГ, 2005. – 224 с.
9. ТРАХТЕНГЕРЦ Э. А. *Субъективность в компьютерной поддержке управленческих решений*. – М.: СИНТЕГ, 2001. – 256 с.
10. ТРАХТЕНГЕРЦ Э. А., ИВАНИЛОВ Е. Л., ЮРКЕВИЧ Е. В. *Современные компьютерные технологии управления ин-*

формационно-аналитической деятельностью. – М.: СИНТЕГ, 2007. – 372 с.

11. NORTON D.P. *Strategic vectors: translating vision into action // Stage by Stage* – 1987. Vol. 3 (7). – P. 1-8.
12. SIGH S.K., WATSON H.J., WATSON R.T. *EIS support for the strategic management process // Decision Support Systems.* – 2002. – Vol. 33. – P. 71-85.
13. VANDERMER S. *The process of market-driven transformation // Long Range Planning.* 1995. – Vol. 28 (2). – P. 79-91.
14. WEB ALLEN. *Project planning and feasibility analysis // <http://members.aol.com/AllenWeb/planning.htm>*

COMPUTER TECHNOLOGY OF PURPOSES, STRATEGIC DECISIONS AND OPERATIVE ACTIONS CORRECTION DURING DYNAMIC CONTROL.

Eduard A. Trahtengerts, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Doctor of Science, Professor, Honored Scientist of Russia, Chief Researcher (Moscow, Profsoyuznaya st., 65, (495) 334-88-40, E-mail: tracht@ipu.rssi.ru).

Abstract: *Control decisions are divided into three levels: operative, strategic and purposeful. Their interaction is shown. Computer-based methods of correction of purposes, strategic decisions and operative actions during dynamic control are considered.*

Keywords: Computer control systems, computer technologies, purposes correction, strategic decision and operative actions correction, dynamic control.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии А.С. Рыковым

УДК 519.865+519.95
ББК 22.165

КОНКУРЕНТНОЕ РАВНОВЕСИЕ НА ФИНАНСОВОМ РЫНКЕ

Горелов М. А.¹

(Вычислительный центр РАН, Москва)

Предлагается модель формирования цен на финансовом рынке при несовпадающих ожиданиях участников торгов. Доказывается существование цен, балансирующих спрос и предложение. Указывается метод численного поиска таких цен. Показано, что модель допускает агрегирование с сохранением ее структуры.

Ключевые слова: Конкурентное равновесие, иерархические игры, финансовые рынки.

Введение

В первой половине пятидесятих годов прошлого века появились модели, формализующие гораздо более ранние представления о рыночном равновесии [8]. В частности, было доказано существование цен, балансирующих спрос и предложение.

Примерно в то же время были предложены первые модели управления финансовыми активами [10]. Позднее на их основе были построены модели равновесия на финансовом рынке [9, 11]. Эти модели весьма популярны по сей день, хотя при их изложении работы по рыночному равновесию почему-то не упоминаются [7].

Модели равновесия на финансовом рынке обладают, по мнению автора, существенным недостатком: в них предполага-

¹ Михаил Александрович Горелов, кандидат физико-математических наук (griever@ccas.ru).

ется, что все участники рынка, принимая решение, ориентируются на один и тот же прогноз. В то же время одна из основных функций финансового рынка заключается в том, что он агрегирует мнения инвесторов относительно будущего и за счет такого «коллективного разума» обеспечивает рациональный переток капиталов между отраслями экономики. При этом существенно, что имеются оплаченные реальными деньгами, но различные мнения. В противном случае рыночный механизм был бы не нужен, а необходимую информацию можно было бы получать, например, путем экспертных оценок.

Предлагаемая ниже модель отличается от традиционных двумя моментами. Во-первых, в ней явно учтены несовпадающие прогнозы инвесторов относительно развития рынка. Во-вторых, в ней не учитывается наличие неопределенности прогноза. Если эту неопределенность учитывать так, как это предлагает Г. Марковиц [10] (см. также [7]), мы приходим к ситуации, описываемой классической моделью Эрроу–Дебре [1, 4, 5]. Автору такой способ устранения неопределенности представляется не слишком естественным. Во всяком случае, он не является единственным возможным. Некоторые другие способы учета неопределенности прогноза (например, принцип максимального гарантированного результата) приводят к модели, описанной ниже.

Позволю себе замечание общего характера. Автору пришлось слышать мнение, что *иерархическая* теория игр для специалистов по *рыночной* экономике бесполезна. Простая теорема 1 показывает наличие прозрачной связи между иерархическими играми и традиционными моделями идеального рынка.

Более того, использование этой взаимосвязи является ключевой идеей при получении элементарного доказательства существования равновесных цен. Вдобавок традиционные доказательства существования равновесия (см., например, [1, 4, 5]) опираются на теорему Какутани о неподвижной точке, а потому с трудом поддаются интерпретации в экономических

терминах. Предлагаемое ниже доказательство совершенно естественно как раз с точки зрения экономического здравого смысла.

Подчеркнем, что, вводя при доказательстве этой теоремы субъекта, назначающего цены, мы отнюдь не меняем моделируемую действительность. Речь при этом не идет о введении регулируемого рынка. Мы меняем только модель.

Доказываемая ниже теорема 2 не является прямым следствием теоремы Эрроу–Дебре, поскольку в классической модели функции полезности строго вогнуты, а в нашем случае они линейны. В принципе, можно поступить следующим образом: малым возмущением сделать функции полезности строго вогнутыми, сослаться не теореме Эрроу–Дебре, а затем перейти к пределу, устремляя возмущение к нулю. Возможно, такое доказательство и короче, но оно гораздо менее прозрачно.

Кроме того, таким образом мы получим чистую теорему существования. Конечно, поиск неподвижных точек можно попытаться конструктивизировать, однако соответствующие алгоритмы получаются крайне неэффективными [6]. Наше доказательство позволяет свести поиск равновесных цен к стандартной задаче выпуклого программирования.

За рамками классической теории равновесия обычно остается вопрос о том, откуда берется равновесие. В доказательстве теоремы 2 нетрудно усмотреть описание процедуры нащупывания равновесия рынком.

В последнем разделе данной заметки показывается, что рассматриваемая в ней модель допускает агрегирование с сохранением ее структуры. Это достаточно характерно для моделей равновесия.

1. Принятие решений портфельным инвестором

Предлагаемая ниже простая модель поведения инвесторов хорошо описывает валютный рынок или рынок дисконтных ценных бумаг. Впрочем, после преобразований к тому же виду

могут быть приведены модели поведения инвесторов и на других сегментах финансового рынка. Поскольку в дальнейшем будут существенны лишь некоторые качественные особенности поведения инвесторов, которые при таких преобразованиях сохраняются, мы ограничимся рассмотрением этого варианта.

Будем считать, что на рынке обращается l видов финансовых активов (в их число удобно включать и деньги). Обозначим $N = \{1, \dots, n\}$ – множество работающих на данном рынке инвесторов. Пусть в начальный момент времени k -й инвестор имеет портфель $(\omega_k^1, \dots, \omega_k^l)$, где ω_k^i – количество актива i -го вида «в штуках». Рассмотрим задачу инвестирования на заданный период времени.

Предположим, что k -й инвестор имеет собственный прогноз цен (q_k^1, \dots, q_k^l) на конец планового периода. Тогда ценность портфеля $x_k = (x_k^1, \dots, x_k^l)$ для этого инвестора естественно отождествлять со стоимостью этого портфеля в конце планового периода $\sum_{i=1}^l q_k^i x_k^i$. При формировании портфеля, разумеется,

выполняется финансовое ограничение $\sum_{i=1}^l p^i x_k^i = \sum_{i=1}^l p^i \omega_k^i$, где

$p = (p^1, \dots, p^l)$ – вектор цен на момент формирования портфеля.

По экономическому смыслу компоненты вектора p неотрицательны и не равны нулю одновременно.

Таким образом, инвестор решает задачу линейного программирования

$$\sum_{i=1}^l q_k^i x_k^i \rightarrow \max ,$$

$$(1) \quad \sum_{i=1}^l p^i x_k^i = \sum_{i=1}^l p^i \omega_k^i ,$$

$$(2) \quad x_k^i \geq 0, i = 1, \dots, l .$$

Множество решений $B_k(p)$ этой задачи в общем случае представляет собой симплекс, описываемый следующим образом.

Пусть $S_k(p) = \left\{ i \in \{1, \dots, l\} : \frac{q_k^i}{p^i} = \max_{1 \leq j \leq l} \frac{q_k^j}{p^j} \right\}$. Тогда

$$B_k(p) = \left\{ (x_k^1, \dots, x_k^l) : x_k^i \geq 0, \sum_{i=1}^l p^i x_k^i = \sum_{i=1}^l p^i \omega_k^i, i \notin S_k(p) \Rightarrow x_k^i = 0 \right\}.$$

В «типичном» случае множество $B_k(p)$, разумеется, вырождается в точку, но в дальнейшем нам придется рассматривать зависимость этого множества от p , и в таком параметрическом семействе вырожденные случаи могут быть неустраимыми.

2. Конкурентное равновесие

На содержательном уровне под равновесием понимают такое состояние рынка, при котором спрос равен предложению. В классической теории (см., например, [1, 4, 5]) рассматриваются строго выпуклые задачи, поэтому при заданных ценах спрос и предложение каждого участника рынка определяются однозначно. В таком случае указанное понимание естественным образом трансформируется в строгое определение.

Для рассматриваемой нами линейной задачи это уже не так, поэтому требуется некоторое уточнение. Сделаем его следующим образом.

Определение. Вектор цен p называется равновесным, если существуют такие портфели $x_k \in B_k(p)$, что равенства

$$\sum_{k=1}^n x_k^i = \sum_{k=1}^n \omega_k^i \text{ выполняются для всех } i=1, \dots, l.$$

Содержательно такой способ уточнения представляется весьма естественным. Если какой-то инвестор, придя на рынок, обнаружит, что активы i -го вида уже раскуплены, но имеются в продаже активы j -го вида, которые ему кажутся не менее привлекательными, он удовлетворится покупкой этих активов и при этом будет вполне доволен.

В классической теории равновесные цены устанавливает

«невидимая рука рынка». Нам будет удобно персонифицировать рынок. Кстати, это соответствует экономической практике, поскольку на некоторых сегментах рынка цены устанавливают «живые» *market maker*'ы.

Рассмотрим следующую игру. Множество игроков $N_0 = \{0, 1, \dots, n\}$ состоит из выделенного игрока с номером 0 («рынка») и n инвесторов. Множество управлений «рынка» $P = \{(p^1, \dots, p^l) : p \neq 0, p^i \geq 0, i = 1, \dots, l\}$. Множество управлений k -

го инвестора $X_k = \left\{ (x_k^1, \dots, x_k^l) : \sum_{i=1}^l p^i x_k^i = \sum_{i=1}^l p^i \omega_k^i, x_k^i \geq 0, i = 1, \dots, l \right\}$.

Цель «рынка» состоит в уменьшении дефицита, что формально описывается стремлением к минимизации критерия

$$g_0(p, x_1, \dots, x_n) = \max_{1 \leq i \leq l} \left\{ \sum_{k=1}^n x_k^i - \sum_{k=1}^n \omega_k^i \right\}.$$

Цели инвесторов, как и выше, задаются критериями $g_k(p, x_k) = \sum_{i=1}^l q_k^i x_k^i, k = 1, \dots, n$ (разумеется, инвесторы их максимизируют).

Итак, задана игра $\Gamma = \langle N_0, P, X_1, \dots, X_n, g_0, g_1, \dots, g_n \rangle$. Следуя [2, 3], определим максимальный гарантированный результат γ «рынка» при условии доброжелательности остальных игроков:

$$(3) \quad \gamma = \min_{p \in P} \min_{\substack{x_k \in B_k(p) \\ k=1, \dots, n}} g_0(p, x_1, \dots, x_n).$$

Теорема 1. На рассматриваемом сегменте рынка существует равновесный вектор цен тогда и только тогда, когда $\gamma = 0$.

Доказательство. Докажем сначала необходимость. Пусть вектор цен p – равновесный. Тогда по определению найдутся портфели $x_k \in B_k(p), k = 1, \dots, n$, для которых $g_0(p, x_1, \dots, x_n) = 0$. Значит, $\gamma \leq 0$.

Допустим, $\gamma < 0$. Тогда для некоторых p и $x_k \in B_k(p), k = 1, \dots, n$, имеют место соотношения $\sum_{k=1}^n x_k^i - \sum_{k=1}^n \omega_k^i < 0$. Умно-

жая на соответствующие цены и суммируя их по i , мы придем к

выводу, что $\sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^n p^i x_k^i - \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^n p^i \omega_k^i < 0$. А суммируя равенства (1)

по k , получим

$$(4) \quad \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^l p^i x_k^i = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^l p^i \omega_k^i .$$

Полученное противоречие доказывает, что на самом деле $\gamma = 0$.

Установим достаточность. Пусть вектор цен p реализует минимум в (3). Тогда, для $x_k \in B_k(p)$, $k = 1, \dots, n$, выполняется равенство

$$(5) \quad \max_{1 \leq i \leq l} \left\{ \sum_{k=1}^n x_k^i - \sum_{k=1}^n \omega_k^i \right\} = 0 .$$

Если бы для некоторого i цена актива i -го вида равнялась нулю, спрос на актив этого вида был бы бесконечно большим, и значит, соответствующий вектор цен не мог реализовывать минимум в (3). А в условиях положительности компонент вектора p из условий (4) и (5) следует, что равенства

$$\sum_{k=1}^n x_k^i = \sum_{k=1}^n \omega_k^i$$

выполняются для всех $i = 1, \dots, l$.

Теорема доказана.

Замечание. Таким образом, показано, что задача поиска равновесия на рынке формально эквивалентна некой задаче управления рынком. Причина, по которой возникает необходимость в рыночных механизмах, заключается в том, что управляемая система (рынок) является «большой». Для эффективного управления ею необходимо знать критерии агентов (в нашем случае их прогнозы q_k^i). На практике это невозможно.

3. Существование равновесия

Теорема 2. В рассматриваемой модели существует равновесный вектор цен.

Доказательство. Введем обозначения. Пусть вектор цен p доставляет минимум в формуле (3). Выберем портфели

$x_k \in B_k(p)$, $k = 1, \dots, n$, так, что

$g_0(p, x_1, \dots, x_n) = \min_{\substack{y_k \in B_k(p) \\ k=1, \dots, n}} g_0(p, y_1, \dots, y_n)$ и при этом множество

индексов j , для которых достигается максимум

$\max_{1 \leq j \leq l} \left[\sum_{k=1}^n x_k^j - \sum_{k=1}^n \omega_k^j \right]$, состоит из наименьшего возможного числа

элементов. Обозначим

$$L = \left\{ i \in \{1, \dots, l\} : \sum_{k=1}^n x_k^i - \sum_{k=1}^n \omega_k^i = \max_{1 \leq j \leq l} \left[\sum_{k=1}^n x_k^j - \sum_{k=1}^n \omega_k^j \right] \right\}.$$

Получим ряд необходимых условий оптимальности в задаче вычисления минимума (3).

Лемма 1. Существует такое множество инвесторов $M \subset N$, что выполняются условия

- $x_k^i = 0$ для всех $i \notin L$ и $k \in M$;
- $x_k^j = 0$ для всех $j \in L$ и $k \notin M$.

Доказательство. Допустим, существуют $k \in N$, $i \notin L$ и $j \in L$, для которых $x_k^i \neq 0$ и $x_k^j \neq 0$. Тогда $i \in S_k(p)$ и $j \in S_k(p)$, а значит для любого достаточно малого положительного ε портфель $x_k(\varepsilon)$ с компонентами

$$x_k^j(\varepsilon) = x_k^j - \frac{\varepsilon}{p^j} \quad x_k^i(\varepsilon) = x_k^i + \frac{\varepsilon}{p^i},$$

$x_k^t(\varepsilon) = x_k^t$, $t \neq i, j$ принадлежит $B_k(p)$. Так как $i \notin L$, выполняется

неравенство $\sum_{k=1}^n x_k^i - \sum_{k=1}^n \omega_k^i < \max_{1 \leq t \leq l} \left[\sum_{k=1}^n x_k^t - \sum_{k=1}^n \omega_k^t \right]$. Следовательно,

для достаточно малых положительных ε выполняется неравенство

$$\sum_{k=1}^n x_k^j(\varepsilon) - \sum_{k=1}^n \omega_k^j < \max_{1 \leq t \leq l} \left[\sum_{k=1}^n x_k^t - \sum_{k=1}^n \omega_k^t \right],$$

а кроме того, и неравенство $\sum_{k=1}^n x_k^j(\varepsilon) - \sum_{k=1}^n \omega_k^j < \max_{1 \leq t \leq l} \left[\sum_{k=1}^n x_k^t - \sum_{k=1}^n \omega_k^t \right]$. Последнее противоречит способу выбора портфелей x_k . Полученное противоречие доказывает лемму.

Лемма 2. Если $\gamma > 0$, а множество M выбрано как в условиях леммы 1, то найдется $k \in M$ и $j \in L$ для которых $\omega_k^j > 0$.

Доказательство. Пусть j доставляет максимум $\max_{1 \leq l \leq l} \left[\sum_{k=1}^n x_k^l - \sum_{k=1}^n \omega_k^l \right]$, где портфели x_k выбраны так, как указано выше. Тогда в силу леммы 1

$$\sum_{k \in M} x_k^j - \sum_{k=1}^n \omega_k^j = \sum_{k=1}^n x_k^j - \sum_{k=1}^n \omega_k^j > 0.$$

Если предположить, вопреки доказываемому утверждению, что $\omega_k^j = 0$ для всех $k \in M$ и $j \in L$, то

$$\sum_{k \in M} x_k^j - \sum_{k \in M} \omega_k^j = \sum_{k \in M} x_k^j - \sum_{k=1}^n \omega_k^j > 0.$$

Суммируя эти неравенства по $j \in L$, получим $\sum_{j \in L} \sum_{k \in M} x_k^j - \sum_{j \in L} \sum_{k \in M} \omega_k^j > 0$. А суммируя равенства (1) по $k \in M$, будем иметь $\sum_{k \in M} \sum_{j \in L} x_k^j - \sum_{k \in M} \sum_{j \in L} \omega_k^j = 0$. Полученное противоречие доказывает лемму.

Определим новый вектор цен $p(\delta)$ условиями

$$p^i(\delta) = \begin{cases} (1 + \delta)p^i, & \text{если } i \in L, \\ p^i & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

В силу оптимальности вектор цен p не имеет нулевых компонент (иначе спрос на соответствующие активы был бы бесконечным). Кроме того, не ограничивая общности можно считать, что $\sum_{i=1}^l p^i \omega_k^i > 0$ для любого $k = 1, \dots, n$. Пусть портфели $x_k(\delta)$ имеют компоненты

$$x_k^i(\delta) = \frac{\sum_{j=1}^l p^j(\delta) \omega_k^j}{\sum_{j=1}^l p^j \omega_k^j} \cdot \frac{p^i}{p^i(\delta)} x_k^i.$$

Лемма 3. При достаточно малых $\delta > 0$ имеют место включения $x_k(\delta) \in B_k(p(\delta))$.

Доказательство. Пусть M – множество, определенное в лемме 1.

Рассмотрим сначала случай $k \in M$. Тогда $S_k(p) \subset L$. Для любых i и j из $S_k(p)$ выполняется равенство $\frac{q_k^i}{p^i} = \frac{q_k^j}{p^j}$, а значит и

равенство $\frac{q_k^i}{p^i(\delta)} = \frac{q_k^j}{p^j(\delta)}$. Если же $i \in S_k(p)$, а $j \notin S_k(p)$, то вы-

полняется неравенство $\frac{q_k^i}{p^i} > \frac{q_k^j}{p^j}$, следовательно, при достаточно

малом $\delta > 0$ справедливо неравенство $\frac{q_k^i}{p^i(\delta)} > \frac{q_k^j}{p^j(\delta)}$. Поэтому

$S_k(p) = S_k(p(\delta))$.

Из условия $x_k \in B_k(p)$ следует, что $x_k^j = 0$ при $j \notin S_k(p)$. Но тогда $x_k^j(\delta) = 0$ при $j \notin S_k(p(\delta))$. Следовательно, $x_k(p(\delta)) \in B_k(p(\delta))$.

Обратимся к случаю $k \notin M$. Тогда $S_k(p) \cap L = \emptyset$. Дальнейшие рассуждения дословно такие же, как в предыдущем случае.

Лемма доказана.

Если δ настолько мало, что выполняется утверждение леммы 3, то для всех $i \in L$ имеют место неравенства

$$\sum_{k=1}^n x_k^i(\delta) - \sum_{k=1}^n \omega_k^i \leq \sum_{k=1}^n x_k^i - \sum_{k=1}^n \omega_k^i, \text{ так как } x_k^i(\delta) \leq x_k^i.$$

Если $\gamma > 0$, то в силу леммы 2 для некоторого $k \in M$ и для всех $i \in S_k(p)$ выполняются неравенства $x_k^i(\delta) < x_k^i$. Следовательно, для таких i имеет место неравенство

$$\sum_{k=1}^n x_k^i(\delta) - \sum_{k=1}^n \omega_k^i < \sum_{k=1}^n x_k^i - \sum_{k=1}^n \omega_k^i.$$

Если при этом множество L состоит из одного элемента, получается противоречие с тем, что вектор p доставляет мини-

мум в (3).

В противном случае, исходя из оптимальных вектора цен p и портфелей x_k , мы получаем новый оптимальный набор из вектора цен $p(\delta)$ и портфелей $x_k(\delta)$, для которого соответствующее множество L содержит меньше элементов. Проведя такую процедуру конечное число раз, мы вновь придем к противоречию.

Итак, установлено, что $\gamma \leq 0$. При доказательстве теоремы 1 показано, что отсюда следует равенство $\gamma = 0$. Остается сослаться на достаточное условие теоремы 1.

Замечание. Экономический смысл использованных конструкций достаточно прозрачен. Если какие-то активы пользуются ажиотажным спросом, цены на них следует поднять. Для нашего доказательства важно, чтобы при этом не возникло эффекта Гиффина, т. е. спрос на эти активы не возрос. Это самый технически сложный элемент доказательства. В лемме 1 показывается, что если какие-то активы пользуются повышенным спросом, то инвесторы, подавшие заявки на их приобретение строго предпочитают эти активы всем прочим. В лемме 2 показано, что если на каком-то сегменте рынка спрос превышает предложение, то на него приходят какие-то деньги извне. В лемме 3 устанавливается, что если мы пропорционально увеличим цены на активы повышенного спроса и оставим неизменной структуру портфелей (в стоимостном выражении), то портфели останутся оптимальными для инвесторов, но будут лучше для «рынка».

4. Поиск равновесия

Приведенное выше доказательство существования конкурентного равновесия использует лишь элементарные средства. В нем, по сути, моделируется поведение разумного *market maker*'а. В принципе, его конструкции можно превратить в алгоритм поиска равновесных цен и соответствующих оптимальных портфелей. Впрочем, эту задачу можно свести к задаче

выпуклого программирования и решать ее стандартными методами.

Преобразуем задачу вычисления минимума (3) к стандартному виду.

Чтобы избавиться от максимума в определении функции g_0 , введем вспомогательную переменную u , стесненную ограничениями

$$(6) \quad u \geq \sum_{k=1}^n x_k^i - \sum_{k=1}^n \omega_k^i, \quad i=1, \dots, l.$$

Так как максимум линейной функции на многограннике непременно достигается в одной из его вершин, условия $x_k \in B_k(p)$, $k = 1, \dots, n$, равносильны системе неравенств

$$\sum_{j=1}^l q_k^j x_k^j \geq q_k^i \cdot \frac{\sum_{j=1}^l p^j \omega_k^j}{p^i}, \quad i=1, \dots, l, \quad k=1, \dots, n,$$

или

$$(7) \quad p^i \sum_{j=1}^l q_k^j x_k^j \geq q_k^i \cdot \sum_{j=1}^l p^j \omega_k^j, \quad i=1, \dots, l, \quad k=1, \dots, n.$$

Кроме того, по экономическому смыслу

$$(8) \quad p^i \geq 0, \quad i = 1, \dots, l.$$

В силу однородности можно, не ограничивая общности, считать, что

$$(9) \quad \sum_{i=1}^l p^i = 1.$$

Очевидно, что если переменные u , p^i , $i = 1, \dots, l$, x_k^i , $i = 1, \dots, l$, $k = 1, \dots, n$, являются решением задачи минимизации величины u при ограничениях (1), (2), (6)-(8) и (9), то переменные p^i , $i = 1, \dots, l$ и x_k^i , $i = 1, \dots, l$, $k = 1, \dots, n$, доставляют минимум в формуле (3).

5. Равновесное агрегирование

Модель, описанную во втором разделе данной заметки, в

дальнейшем будем называть исходной. Наряду с ней будем рассматривать еще одну модель того же типа, которую ниже будем именовать агрегированной.

Фиксируем вектор цен $p = (p^1, \dots, p^l)$ в исходной модели. Множества инвесторов в обеих моделях совпадают. В агрегированной модели имеется $m + 1$ видов активов ($m + 1 < l$). Первые m из них характеризуются теми же запасами ω_k^i и теми же прогнозами q_k^i у всех инвесторов (здесь $i = 1, \dots, m, k = 1, \dots, n$). Оставшийся актив имеется у k -го инвестора в количестве $\Omega_k = \sum_{j=m+1}^l p^j \omega_k^j$, а прогноз его цены определяется равенством

$$Q_k = \max_{m+1 \leq j \leq l} \frac{q_k^j}{p^j}.$$

Теорема 3. Если вектор цен $p = (p^1, \dots, p^l)$ является равновесным в исходной модели, то вектор цен $\bar{p} = (p^1, \dots, p^m, 1)$ будет равновесным в агрегированной.

Доказательство. Обозначим $\bar{B}_k(\bar{p})$ множество решений задачи

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^m q_k^i x_k^i + Q_k y_k \rightarrow \max, \\ (10) \quad & \sum_{i=1}^m p^i x_k^i + y_k = \sum_{i=1}^m p^i \omega_k^i + \Omega_k, \\ & x_k^i \geq 0, i = 1, \dots, m, y_k \geq 0. \end{aligned}$$

Пусть портфели $x_k = (x_k^1, \dots, x_k^l)$ удовлетворяют условиям $x_k \in B_k(p)$, $k = 1, \dots, n$, $\sum_{k=1}^n x_k^i = \sum_{k=1}^n \omega_k^i$, $i = 1, \dots, l$. Покажем, что тогда портфели $\bar{x}_k = \left(x_k^1, \dots, x_k^m, \sum_{j=m+1}^l p^j x_k^j \right)$ удовлетворяют усло-

виям $\bar{x}_k \in \bar{B}_k(\bar{p})$, $k = 1, \dots, n$, $\sum_{k=1}^n x_k^i = \sum_{k=1}^n \omega_k^i$, $i = 1, \dots, m$ и

$$\sum_{k=1}^n y_k = \sum_{k=1}^n \Omega_k.$$

Второе из этих условий очевидно. Третье получается суммированием равенств $\sum_{k=1}^n x_k^i = \sum_{k=1}^n \omega_k^i$, $i = m + 1, \dots, l$ с весами p^i . Остается проверить первое. Возможны три случая.

Рассмотрим случай $\max_{1 \leq i \leq m} \frac{q_k^i}{p^i} < Q_k$. Тогда условие $\bar{x}_k \in \bar{B}_k(\bar{p})$

равносильно условиям $x_k^i = 0$, $i = 1, \dots, m$, и $y_k = \sum_{i=1}^l p^i \omega_k^i + \Omega_k$. В

силу определения величины Q_k в этом случае найдется $j = m + 1, \dots, l$, для которого неравенства $\frac{q_k^i}{p^i} < \frac{q_k^j}{p^j}$ выполняются

для всех $i = 1, \dots, m$. Но тогда условия $x_k \in B_k(p)$ влекут $x_k^i = 0$,

$i = 1, \dots, m$, а равенство $y_k = \sum_{i=1}^l p^i \omega_k^i + \Omega_k$ вытекает из формулы

(10).

Случаи $\max_{1 \leq i \leq m} \frac{q_k^i}{p^i} = Q_k$ и $\max_{1 \leq i \leq m} \frac{q_k^i}{p^i} > Q_k$ рассматриваются ана-

логично. Теорема доказана.

Разумеется, множество $M = \{m + 1, \dots, l\}$ агрегируемых активов выбрано именно таким только для упрощения формул. В принципе, оно может быть выбрано произвольно. В частности, в агрегированной модели множество активов $\{1, \dots, m\}$ тоже может быть агрегировано. В результате получим новую модель с двумя видами активов, в которой вектор цен $(1, 1)$ будет равновесным. Понятно, что при этом порядок агрегирования может выбираться произвольно, так же как и количество «агрегированных» активов может быть больше двух.

Эти результаты на самом деле показывают, что выполняются некие необходимые условия для того, чтобы рассматриваемую нами модель можно было считать адекватной. Действительно, на современном финансовом рынке обращается огромное количество инструментов. При этом отдельный инвестор работает на каком-то небольшом сегменте этого рынка. Обычно он достаточно детально представляет ситуацию о «своей» части рынка и не может иметь столь же подробной информации обо всем остальном. Выше показано, что модель «не разрушится», если он будет пользоваться агрегированной информацией об «окружающей среде».

Примечательно, что при этом для агрегирования прогнозов используется свертка типа максимума, а не традиционная для экономики свертка типа взвешенной суммы.

Литература

1. АЛИПРАНТИС К., БРАУН Д., БЁРКЕНШО О. *Существование и оптимальность конкурентного равновесия*. М.: Мир, 1995. – 384 с.
2. БУРКОВ В. Н. *Основы математической теории активных систем*. М.: Наука, 1977. – 256 с.
3. ГЕРМЕЙЕР Ю. Б. *Игры с противоположными интересами*. М.: Наука, 1976. – 327 с.
4. КАРЛИН С. *Математические методы в теории игр, программировании и экономике*. М.: Мир, 1964. – 838 с.
5. НИКАЙДО Х. *Выпуклые структуры и математическая экономика*. М.: Мир, 1972. – 517 с.
6. ТОДД М. ДЖ. *Вычисление неподвижных точек и приложения к экономике*. М.: Наука, 1983. – 112 с.
7. ШАРП У., АЛЕКСАНДЕР Г., БЭЙЛИ ДЖ. *Инвестиции*. М.: ИНФРА-М, 1997. – 1024 с.
8. ARROW K. J., DEBREU G. *Existence of an equilibrium for a competitive economy // Econometrica*. – 1954. – Vol. 22. – P. 265-290.

9. LINTNER J. *The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets* // Review of Economics and Statistics. – 1965. – Vol. 47, № 1. – P. 13-37.
10. MARKOWITZ H. M. *Portfolio Selection* // Journal of Finance. – 1952. – Vol. 7, № 1. – P. 77-91.
11. SHARP W. F. *Capital Asset Prices: a Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk* // Journal of Finance. – 1964. – Vol. 19, № 3. – P. 425-442.

COMPETITIVE EQUILIBRIUM IN THE FINANCIAL MARKET

Mikhail Gorelov, Computer Center of RAS, Moscow, Cand.Sc., (griefer@ccas.ru).

Abstract: A model of prices forming in the financial market under the circumstances of lack of coincidence of expectations of trade participants is suggested. The existence of prices which balances the demand and supply is proved. The method of numerical search of such prices is proposed. It is shown that the model permits aggregating with preserving of its structure.

Keywords: competitive equilibrium, hierarchical games, financial markets.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии М.В. Губко

УДК 007:681.518.2
ББК 22.18 65.23 65.29

ГРАФОДИНАМИЧЕСКАЯ АВТОМАТНАЯ МОДЕЛЬ РАЗРЕШЕНИЯ КОНФЛИКТОВ В ОРГАНИЗАЦИОННЫХ СИСТЕМАХ

Юдицкий С. А.¹

*(Учреждение Российской академии наук
Институт Проблем Управления РАН, Москва)*

Предлагается автоматный подход к идентификации и разрешению конфликтов в организационных системах, синтезирующий «языковую технику» теории игр и ее расширений и методы теории автоматов. В терминах автоматов формируется множество всех возможных последовательностей состояний (конфигураций) системы взаимодействующих субъектов, где состояние отражает структуру отношений между субъектами и структуру отношений субъектов к внешним факторам, в дискретные моменты времени. Это дает возможность сформировать общую картину развития конфликта и проанализировать возможные сценарии его разрешения. При реализации игры субъект (в ответ на действие конкурента) получает возможность выбрать собственное действие по достижению поставленных целей на основе автоматной модели. В статье рассмотрены автоматные модели, отображающие динамику развития бинарных межсубъектных отношений.

Ключевые слова: автоматы, конфликтные ситуации, бинарные отношения.

¹ Семен Абрамович Юдицкий, доктор технических наук (тел. (499) 783-2085, ivanov-ics@mail.ru).

1. Введение

Любая политико-социально-экономическая система, в которой определяющую роль играют люди, является организацией (организационной системой). Разнообразие организаций огромно: от семьи до государства и сообщества государств. При этом субъектами организаций могут быть личности, бизнес-структуры, регионы, государства. Субъекты вступают во взаимодействия: принимают решение об очередном действии, направленном на достижение своих (или общих) целей, на основе анализа действий других субъектов, оценки сложившейся ситуации и прогноза на будущее. Принятое решение претворяется в действие. Противоречивые решения и действия порождают конфликты между субъектами.

В науке о конфликтах – конфликтологии – базовым считают бинарное взаимодействие субъектов и, соответственно, бинарные конфликты. Взаимодействие с большим числом участников моделируется совокупностью бинарных взаимодействий. Бинарные взаимодействия субъектов (конфликты) могут быть трех типов: личность–личность, личность–организация, организация–организация.

В математической конфликтологии существует ряд направлений, определяемых различными аспектами видения проблемы:

- когнитивный анализ конфликтных ситуаций на основе знаковых графов [7] («когнитивных карт»), предусматривающий сопоставление каждому субъекту подмножества факторов, а каждой паре взаимодействующих субъектов – области на когнитивной карте (подматрицы). По виду подматрицы определяются согласованные между собой целевые и управляющие факторы и порождаемый ими исход конфликтной ситуации – достижение компромисса либо победа одного из субъектов [5, 6];

- рефлексивный анализ конфликтных ситуаций, отражающий психологический механизм взаимодействия субъектов в

форме цепочки мысленных рассуждений субъекта о конкуренте, базирующийся на применении «рефлексивной алгебры конфликтов» [3, 4];

- разработка языковых средств для описания и анализа конфликтных ситуаций с применением графодинамики – научного направления в теории управления, предложенного М. А. Айзерманом в 1977 г, оперирующего переменными в виде графов и функциями (отношениями), определенными на графах [1].

Примером использования принципов графодинамики является рассмотренная в [8] «языковая техника» – графический способ описания конфигураций связей (отношений) между субъектами, а также субъектами и внешними факторами, в виде так называемых знаковых структур (*s*-структур). В терминах *s*-структур в [8] промоделированы стандартные бинарные конфликты – позиционные дилеммы сотрудничества, доверия, сдерживания, искушения, угрозы, вины, изучавшиеся в теории драмы – расширении теории игр [9, 10]. Вместе с тем остается неясным ряд вопросов: является ли полным перечисленный набор стандартных (элементарных) конфликтов; как исходную произвольную конфликтную ситуацию представить композицией стандартных конфликтов; как регулярными методами проанализировать композицию конфликтов и т.д.

Решению этих (и иных) вопросов, по нашему мнению, способствовало бы дополнение известных языковых средств для описания и анализа конфликтных ситуаций графодинамической автоматной моделью [2] на основе дерева, отображающего множество всех возможных последовательностей *s*-структур, реализуемых на дискретной временной шкале. Это позволило бы посмотреть на развитие конфликта «не глазами его участников», а со стороны («встать над конфликтом») и проанализировать различные сценарии разрешения конфликта. При реализации игры субъект в ответ на действие конкурента имеет возможность выбирать очередное действие с учетом последствий для себя и для конкурента. При этом автоматная модель

может трактоваться как «дорожная карта», на которой субъекты формируют маршрут – сценарий разрешения конфликта.

Данная статья, относящаяся к графодинамическому направлению, развивает идею работы [8] и посвящена описанию автоматной модели изменения бинарных отношений каждого субъекта с конкурентом и доминантным внешним фактором, в которой состояния автомата сопоставлены конфигурациям межсубъектных и субъектно-факторных связей.

В статье дано формальное определение графодинамической автоматной модели развития конфликта, ее графическое представление в виде «нагруженного» дерева и пример разрешения реального конфликта на основе этой модели.

2. Формальное определение графодинамической автоматной модели развития конфликта

Знаковая структура определяется как набор

$$(1) \quad Z = \langle A, B, \Phi, \alpha, \beta \rangle,$$

где A, B – взаимодействующие субъекты; Φ – доминантный внешний фактор¹;

$$(2) \quad \alpha : \{A * B, B * A\} \rightarrow \{+, -\}$$

– функция означивания межсубъектных бинарных отношений $A * B, B * A$;

$$(3) \quad \beta : \{A * \Phi, B * \Phi\} \rightarrow \{+, -\}$$

– функция означивания субъектно-факторных бинарных отношений $A * \Phi, B * \Phi$.

Знаковую структуру будем называть сбалансированной (бесконфликтной), если отношения $A * B, B * A$ и $A * \Phi, B * \Phi$ одинаково помечены, т. е. выполняется условие

¹ Для простоты мы ограничились одним доминантным фактором. Если их несколько, то для каждого выполняются аналогичные построения.

$$(4) \quad (\alpha(A * B) = \alpha(B * A)) \& (\beta(A * \Phi) = \beta(B * \Phi)) = 1,$$

и несбалансированной (конфликтной) в противном случае:

$$(5) \quad (\alpha(A * B) \neq \alpha(B * A)) \vee (\beta(A * \Phi) \neq \beta(B * \Phi)) = 1,$$

где левая часть (5) является отрицанием левой части (4) (по правилу де Моргана [2]).

Пример графического изображения знаковой структуры дан на рис. 1. Позитивные бинарные отношения из множества $\{A * B, B * A, A * \Phi, B * \Phi\}$, помеченные согласно (2) и (3) знаком «+», показаны сплошными направленными дугами, а негативные отношения, помеченные знаком «-», показаны пунктирными дугами.

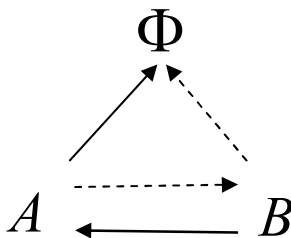


Рис. 1. Пример знаковой структуры

Структура на рис. 1 в силу условия (5) несбалансирована и, следовательно, конфликтна.

Число попарно различных знаковых структур при бинарном взаимодействии субъектов и одном доминантном факторе $N = 2^2 \times 2^2 = 16$, число бесконфликтных структур $N_b = 2 \times 2 = 4$, число конфликтных структур $N_k = N - N_b = 12$.

Графодинамическую автоматную модель развития бинарного конфликта определим через набор:

$$(6) \quad D = \langle S, Z, \delta, X, Y, \varphi, \psi \rangle,$$

где

$S = \{s_i \mid i = 0, 1, \dots, n\}$ – множество внутренних состояний автомата [2], s_0 – начальное состояние;

$Z = \{z_i \mid i = 0, 1, \dots, 16\}$ – множество знаковых структур;

$\delta: S \rightarrow Z$ – функция отображения внутренних состояний автомата в знаковые структуры;

$X = X_A \cup X_B$ – множество состояний входа автомата, отождествленных с действиями X_A , выполняемыми субъектом A , и действиями X_B , выполняемыми субъектом B ;

$Y = Y_A \cup Y_B$ – множество состояний выхода автомата, отождествленных с подмножествами целей, преследуемых субъектами при разрешении конфликта;

$\varphi: S \times X \rightarrow S$ – функция переходов автомата, выражаемая соотношением

$$(7) \quad s(t+1) = \varphi(s(t), x(t+1)),$$

где $t = 0, 1, 2, \dots$ – дискретные моменты времени (такты работы автомата), в любом такте выполняется действие только одним субъектом (субъекты «играют» по очереди), $x(t+1) \in X$;

$\psi: S \times X \rightarrow 2^Y$ – функция выходов автомата, выражаемая соотношением

$$(8) \quad \tilde{Y}(t) = \psi(s(t), x(t)),$$

где $\tilde{Y}(t)$ – подмножество множества Y ; 2^Y – множество всех подмножеств Y .

Графическое представление введенной автоматной модели разрешения конфликтов рассмотрим на примере.

3. Пример разрешения конфликта на основе графодинамической автоматной модели

Совершен террористический акт. Группа террористов захватила заложников и в обмен за их освобождение требует выполнения своих условий. В противном случае угрожает казнить заложников. Взаимодействующие субъекты: власть (администрация) В, террористы Т, доминантный фактор – жизнь заложников ЖЗ.

Цели субъектов:

$u_{В1}$ – освобождение заложников;

$У_{В2}$ – арест террористов и предание их суду;

$У_{В3}$ – уничтожение террористов (при невозможности выполнить предыдущую цель);

$У_{Т1}$ – привлечение внимания общественности к проблеме;

$У_{Т2}$ – минимизация наказания за совершенное преступление.

Действия, которые могут предприниматься властью и террористами:

$x_{В1}$ – переговоры с террористами (с одновременной подготовкой к силовому освобождению заложников);

$x_{В2}$ – задержание террористов;

$x_{В3}$ – силовое освобождение заложников;

$x_{Т1}$ – мирное освобождение заложников;

$x_{Т1}$ – отказ от освобождения заложников с угрозой после истечения определенного срока начать казни.

Графическое представление автоматной модели разрешения рассматриваемого конфликта дано на рис. 2.

Внутренние состояния автомата s_i изображаются квадратами, внутри которых размещены знаковые структуры согласно функции δ (два и более состояния могут иметь одинаковую структуру). На дугах дерева слева от косой черты проставлены действия субъектов, справа – цели выполнения действия в соответствии с функцией ψ . Проведение дуг определяется функцией переходов φ . Граф модели является деревом, корневая вершина которого соответствует начальному состоянию s_0 , инициирующему конфликт.

В примере на рис. 2 в состоянии s_0 В и Т негативно относятся друг к другу, но В позитивно относится к ЖЗ и беспокоится за судьбу заложников, а для Т ЖЗ безразлична, отношение Т*ЖЗ негативно. Состояние s_0 несбалансировано (конфликтно).

Власть В вступает в переговоры с Т по освобождению заложников (переход из s_0 в состояние s_1 «Проведение переговоров», в котором отношение В*Т трактуется как временно позитивное). Возможны два альтернативных исхода переговоров: Т мирно освобождает заложников либо отказываются это сделать и шантажируют В расправой над ними.

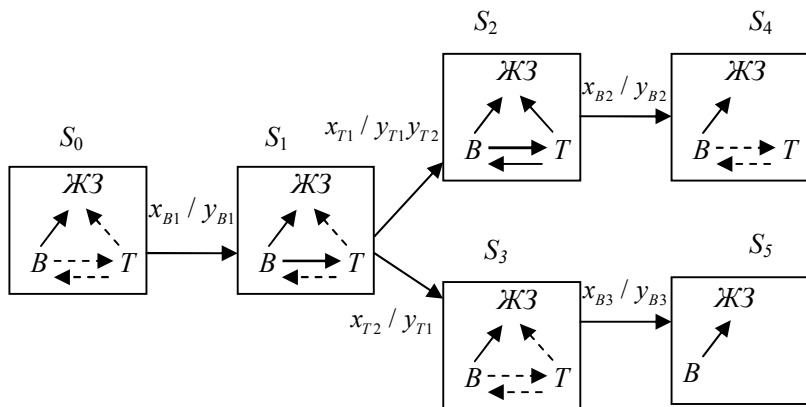


Рис. 2. Пример графодинамической автоматной модели

При первом исходе следует переход из s_1 в сбалансированное состояние s_2 «Мирное разрешение конфликта» со всеми позитивными (временно-позитивными) связями. Но преступники должны понести наказание по закону: Т взяты под стражу и ждут суда (состояние s_4 «Следственное и судебное разбирательство», в котором взаимное отношение В и Т негативное, а отношения Т*ЖЗ уже не существует). Конфликт разрешен без жертв среди заложников и с наказанием преступников.

При втором исходе переговоров выполняется переход в состояние s_3 «Решение о штурме», где структура s_3 совпадает со структурой начального состояния s_0 . В результате штурма заложники освобождены, хотя среди них могут быть жертвы, а террористы уничтожены (состояние s_5 «Последствия теракта», в котором осталась лишь одна связь В*ЖЗ).

В автоматной модели конфликта каждое состояние s_k (вершина дерева), достижимая из начального s_0 , характеризуется определенным набором достигнутых целей субъектов, проставленных на дугах пути на дереве из s_0 в s_k . Если этот набор целей с точки зрения одного или обоих субъектов определяет разре-

шение конфликта, то вершину s_k объявляем конечной в соответствующей ветви дерева. Путь из s_0 в s_k моделирует определенный сценарий разрешения конфликта, а дерево в целом – множество всех возможных альтернативных сценариев («дорожную карту»). Выбор наиболее предпочтительного сценария осуществляется неформально.

В рассматриваемом примере предпочтителен «бескровный» сценарий s_0, s_1, s_2, s_4 , предусматривающий достижение целей власти: освобождение заложников с последующим арестом и преданием суду террористов.

4. Заключение

В статье высказана идея графодинамического автоматного подхода к математическому моделированию конфликтных ситуаций в организационных системах, основанного на совместном применении «языковой техники» теории игр (и ее расширений) и методов теории автоматов. Конфликты возникают и разрешаются в ходе ведения игры субъектами системы. Каждый субъект (игрок), принимая решение об очередном ходе, исходит из своего видения сложившейся ситуации и ее последствий с точки зрения собственных целей и целей других участников игры. При этом субъект, как правило, мыслит «образами» структур, отражающих взаимные отношения между игроками и отношения игроков к внешним факторам. Автоматная модель наглядно представляет динамику изменения таких «структурных образов» на дискретной временной шкале, и тем самым расширяет и делает более эффективным математический аппарат игрового моделирования.

Литература

1. АЙЗЕРМАН М. А., ГУСЕВ Л. А., ПЕТРОВ С. В., СМИРНОВА И. М. *Динамический подход к анализу структур, описываемых графами (основы графодинамики)* // I.

- Автоматика и телемеханика. – 1977. – №7. – С.135-151; П.
Автоматика и телемеханика. – 1977. – №9. – С.123-136.
2. ГЛУШКОВ В. М. *Синтез цифровых автоматов* – М.: Физматгиз, 1962.
 3. ЛЕФЕВР В. А., СМОЛЯН Г. Л. *Алгебра конфликта* – Изд. 2-е, стереотипное. – М.: КомКнига, 2007.
 4. ЛЕФЕВР В. А. *Конфликтующие структуры*. – М.: Высшая школа, 1967.
 5. МАКСИМОВ В. И. *Структурно-целевой анализ развития социально-экономических ситуаций* // Проблемы управления. – 2005. – №3. – С.30-38.
 6. МАКСИМОВ В. И., КОВРИГА С. В. *Применение структурно-целевого анализа развития социально-экономических ситуаций* // Проблемы управления. – 2005. – С.39-44.
 7. РОБЕРТС Ф. *Дискретные математические модели с приложением к социальным, биологическим и экономическим задачам*. – М.: Наука, 1986.
 8. СВЕТЛОВ В. А. *Управление конфликтом* – СПб.: Росток, 2003.
 9. HOWARD N. *The Present and Future of Meta game Analysis* // European Journal of Operational Research. – 1987. –Vol. 32. – P. 1-25.
 10. HOWARD N. *Drama Theory and its relation to Game theory* // Group Decision and Negotiation. – 1994. – Vol.32. – P. 187-206, 207-253.

STRUCTURAL-MACHINE MODEL OF CONFLICT SOLUTIONS IN ORGANIZATIONAL SYSTEMS

Semen Yuditsky, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Doctor of Science, professor (499) 783-2085, vladislavlev@rambler.ru).

Abstract: This paper proposes finite automata approach to the identification and resolution of conflicts in organizational systems which synthesize "linguistic technique" of the game theory and its extensions and methods of finite automata theory. In terms of finite automata, we form sequences of all possible states (configurations) system of interacting agents, which reflects the state of the structure of relations between agents and structure of agents relations to external factors, in discrete points of time. This provides an opportunity to formulate a general picture of the conflict and examine possible scenarios for its resolution. In implementing the game, the agent (in response to a competitor action) gets the opportunity to choose his own actions to achieve his goals through the finite automata based model.

The paper considers the automata based model that shows the dynamics of the binary relations between game agents.

Keywords: finite automata, conflict, binary relations.

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии Д.А. Новиковым*

ЭМПИРИЧЕСКАЯ МЕТОДИКА СНИЖЕНИЯ БРАКА ОТЛИВОК

Воронин Ю.Ф.¹, Камаев В.А.², Бойко Н.А.³
(Волгоградский ГТУ, Волгоград)

Рассмотрена эмпирическая методика снижения брака отливок из железоуглеродистых сплавов. Показано, что использование дерева систематизации дефектов и таблиц определения парных связей причин возникновения дефектов способствует значительному повышению качества литых заготовок в машиностроении.

Ключевые слова: Системный подход, дерево систематизации, отливка, методология, методика, повышение качества, брак литья.

Литейное производство является заготовительной базой машиностроения. Несмотря на длительное время существования производства отливок, технология их изготовления имеет немало недостатков, способствующих снижению качества литья [1]. Анализ работы литейных предприятий показывает, что производство отливок терпит значительные убытки от брака литья. О количестве и видах литейных дефектов технологи узнают на площадке брака, где складывается дефектное литье. Здесь им предстоит определить разновидность дефекта, от которого зависит верное определение причины их возникновения и способа ликвидации. Это довольно

¹ Воронин Юрий Федорович, кандидат технических наук (voronin@vstu.ru)

² Камаев Валерий Анатольевич, доктор технических наук, профессор (cad@vstu.ru)

³ Бойко Николай Аркадьевич, студент (quakex@gmail.com)

затруднительный процесс, поскольку брак появляется вследствие:

- колебания технологических параметров (температура, влажность, прочность, газопроницаемость, газотворность и др., всего более двухсот параметров);
- несовершенства техпроцесса изготовления отливок;
- сезонные изменения температуры и влажности воздуха;
- недостаточной квалификации технологических работников литейных цехов.

Редко кто из литейщиков знает о том, что только газовых раковин насчитывается 7 разновидностей с характерными отличительными особенностями [2]. Обычно называют два, в лучшем случае три вида газовых раковин.

Описанное свидетельствует о том, что назрела реальная необходимость в разработке инструментария, позволяющего оказать помощь литейщикам при выявлении разновидностей дефектов и причин их возникновения.

В связи с этим был проведен анализ существующих подходов к идентификации и устранению литейных дефектов [3]. В результате проведенных исследований была разработана новая методология повышения качества литья. Методология выявления дефектов и снижения брака отливок состоит из качественных и количественных методов. Качественные методы выявления и ликвидации дефектов содержат методики логического и эмпирического определения дефектов. Количественные методы моделирования условий возникновения и ликвидации дефектов содержат математические описания происходящих в литейной форме процессов.

Представленное на рис. 1 дерево иллюстрирует иерархию компонентов методологии выявления дефектов и снижения брака отливок.

Методика логического определения дефектов не требует использования автоматизированных систем, но для ее реализации необходимо знание всех процессов, происходящих в литейной форме и, кроме этого, способность к логическим рассуждениям. Это необходимо для определения: разновидностей дефектов по дереву систематизации; цепочек

Управление техническими системами и технологическими процессами

причинно-следственных связей для выявления направлений поиска причин, связанных с дефектами; связей причин возникновения дефектов со способами их ликвидации.

Разновидности дефектов определяются по дереву систематизации дефектов, фрагмент которого приведен на рис. 2. Здесь рассматривается пример систематизации дефектов по четырехуровневому дереву, где на каждом уровне приводятся характерные отличительные особенности светлых газовых раковин [4, 5]. Количество уровней определяется количеством определенных отличительных особенностей рассматриваемого дефекта.

Для лучшего представления отличительных особенностей дефектов разработано дерево дефектов с реальными фотографиями дефектных мест отливок. Такой подход позволяет использовать визуальный и логический анализ дефектов отливок для определения их разновидностей [6].

Для перехода от конкретной разновидности дефектов к определению причин его возникновения были построены цепочки причинно-следственных связей образования светлых подкорковых раковин, представленные в виде графа на рис. 3. Результаты сверток этих цепочек позволят по характерным особенностям дефекта на конкретной отливке и по этапам технологического процесса определить наиболее вероятную причину его возникновения.

Следующим шагом после идентификации дефекта и определения причины его возникновения является определения способов его ликвидации.

Представить структуру экспертных знаний по выбору способов устранения дефекта удобнее всего с помощью специальной схемы, приведенной на рис. 4.

Схема содержит описание некоторых причин возникновения трех разновидностей светлых гладких блестящих раковин – средних, крупных и мелких подкорковых и способов их ликвидации.

Анализ деятельности технологического персонала литейного производства показывает, что большая их половина имеет затруднения при логическом определении дефектов. Для

этого случая разработан эмпирический вариант методики ликвидации дефектов отливок.

Методика эмпирического определения дефектов используется при ликвидации брака отливок. Ниже рассматривается эмпирический подход к устранению дефектов, основанный на реальных результатах производственной и научной деятельности.

Как отмечалось выше, в процессе производства отливок технологические параметры претерпевают частые динамические изменения в различных направлениях от оптимального значения. Математическое описание таких изменений практически невозможно в связи с большой сложностью определения изменения параметров технологического процесса.

Список отклонений параметров технологического процесса может увеличиваться до значительной величины. В частности, процесс заливки металла в литейную форму и происходящие в это время динамические превращения можно отнести к *слабоструктурированной динамической системе*. Исследование процесса повышения качества литья сводится к изучению модели выбора технологических параметров (набора технологических параметров, принимающих участие в возникновении конкретного дефекта отливки), влияния технологических факторов на возникновение дефекта, их взаимодействия между собой с результирующим влиянием на качество отливок. Особенностью разработанной методики эмпирического определения причин возникновения дефектов является качественно новый метод организации взаимодействия исследователя и компьютера для решения слабоструктурированных задач [7].

Эти особенности легли в основу реального моделирования процесса устранения литейных дефектов.

Для реализации рассмотренного процесса была предложена следующая методика. Возникновение каждого дефекта зависит от участия в процессе формирования отливки определенного перечня причин. Состояние воздействия и взаимодействия причин, а в целом и системы, задается набором (в составе причин) позитивных, массово используемых и негативных

факторов, оказывающих определенное влияние на формирование качества отливки [8]. *Позитивные факторы* оказывают положительное влияние на снижение дефектов отливок. *Массово используемые факторы* определяются расчетными или практическими приемами для конкретной отливки в начальной стадии отработки технологического процесса и относятся к наиболее используемым. *Негативные факторы* оказывают влияние на возникновение дефектов. Факторы располагаются в таблице, где определяется их принадлежность к причине возникновения дефекта и устанавливается влияние факторов (в числовом выражении, определенном на основании экспертной оценки с использованием теоретических знаний и практического опыта) на возникновение рассматриваемого дефекта. Влияние парных связей позитивных, массово используемых и негативных факторов на возникновение дефекта отражаются в таблице оценки их влияния. Величины факторов устанавливаются в результате большого числа практических наблюдений за процессом производства отливок различной сложности.

При ликвидации дефекта приходится решать три основные задачи:

Первая задача. Правильно определить дефект отливки, в частности, используя пример систематизации раковин по характерным отличительным особенностям (рис. 2). Бессистемное определение разновидностей дефектов способствует выбору ошибочного направления в определении причин возникновения дефекта.

Вторая задача. Точно определить причину возникновения дефекта.

Сложность определения причин возникновения дефектов заключается в том, что часто образование или ликвидация дефектов возможно от различных негативных факторов (причин, способствующих возникновению дефекта) и от их взаимодействия между собой, т. е. возникают парные связи негативных факторов возникновения дефектов.

Третья задача. Определить эффективный способ ликвидации дефекта для создания устойчивого технологического процесса.

При изготовлении отливки, факторы могут оказывать влияние как самостоятельно, так и взаимодействовать между собой, тем самым, усиливая или ослабляя общее воздействие на возникновение дефекта отливки. Одним из эффективных способов определения причин возникновения дефектов являются эвристические приемы, как результат обобщения опыта авторов с практическим опытом специалистов литейного производства. В процессе проведения исследований созданы таблицы оценки парных связей разновидностей позитивных, массово используемых и негативных факторов (в %), зависящих от уровня значимости технологических параметров производства отливок.

Рассмотрим использование такого способа на примере устранения газовых раковин «Пузырь подкорковый» в отливке.

В таблице 1 (левая часть) представлены причины возникновения дефекта и их номера. В правой части таблицы, в продолжение каждой причины, приведены позитивные (1), массово используемые (2), и негативные (3) факторы, оказывающие влияние на ликвидацию или возникновение дефекта «Пузырь подкорковый», относящегося к группе газовых раковин. Для определения причины возникновения дефекта, технолог выбирает факторы, сопутствующие процессу возникновения дефектных отливок.

При обобщении производственного опыта и литературных данных по ликвидации дефектов отливок нами было установлено следующее. Если эмпирически определить степень влияния каждого фактора на возникновение дефекта (в %) и степень взаимодействия этих факторов между собой, то можно построить обобщенную таблицу 2 парного влияния факторов на качество отливки (более сложные связи не оказывают существенного влияния, поскольку в парных связях задействованы наиболее значимые факторы). Первая цифра по границе таблицы от (п.ф.) означает причину возникновения дефекта, вторая – фактор (например, 2.3 – вторая причина,

третий фактор, или 4.2 – четвертая причина, второй фактор). Используя конкретные факторы на день изготовления отливка, по этой таблице строятся трехмерные графики влияния факторов на возможность образования дефекта и определяется основная причина его возникновения. Для каждой разновидности дефекта определены позитивные, массово используемые и негативные факторы, а также разработаны таблицы их взаимодействия. Используя графики и прилагаемые к ним таблицы с причинами возникновения дефектов, можно наметить направление моделирования позитивными и негативными факторами на снижение дефектности отливок.

На рис. 5 представлена общая схема методики определения разновидности дефектов и причин их возникновения. Данная методика реализуется в составе автоматизированной системы (9-11) и выполняется по следующим этапам.

Этап 1. Пользователь проводит идентификацию дефекта по его характерным отличиям (рис. 2). Для этого используется дерево дефектов с фотографиями и описанием. Это позволяет точно определить разновидность дефекта [3-5].

Этап 2. Пользователь выбирает один из трех факторов тех причин, которые использовались в техпроцессе в день возникновения дефекта.

Этап 3. Выполняется оценка значимости одинарных или парных связей выбранных пользователем факторов.

Этап 4. Проводится обработка данных и строится трехмерный график влияния выбранных факторов на возникновение дефекта и таблицу с результатами обработки графика.

Этап 5. Пользователем выполняется анализ полученных результатов и корректировка параметров техпроцесса, позволяющих снизить брак отливок.

Этап 6. Проводится моделирование процесса изготовления отливки с использованием откорректированных параметров. При получении положительных результатов процесс исследования заканчивается. При отрицательных результатах проводится выполнение этапов 5 и 6.

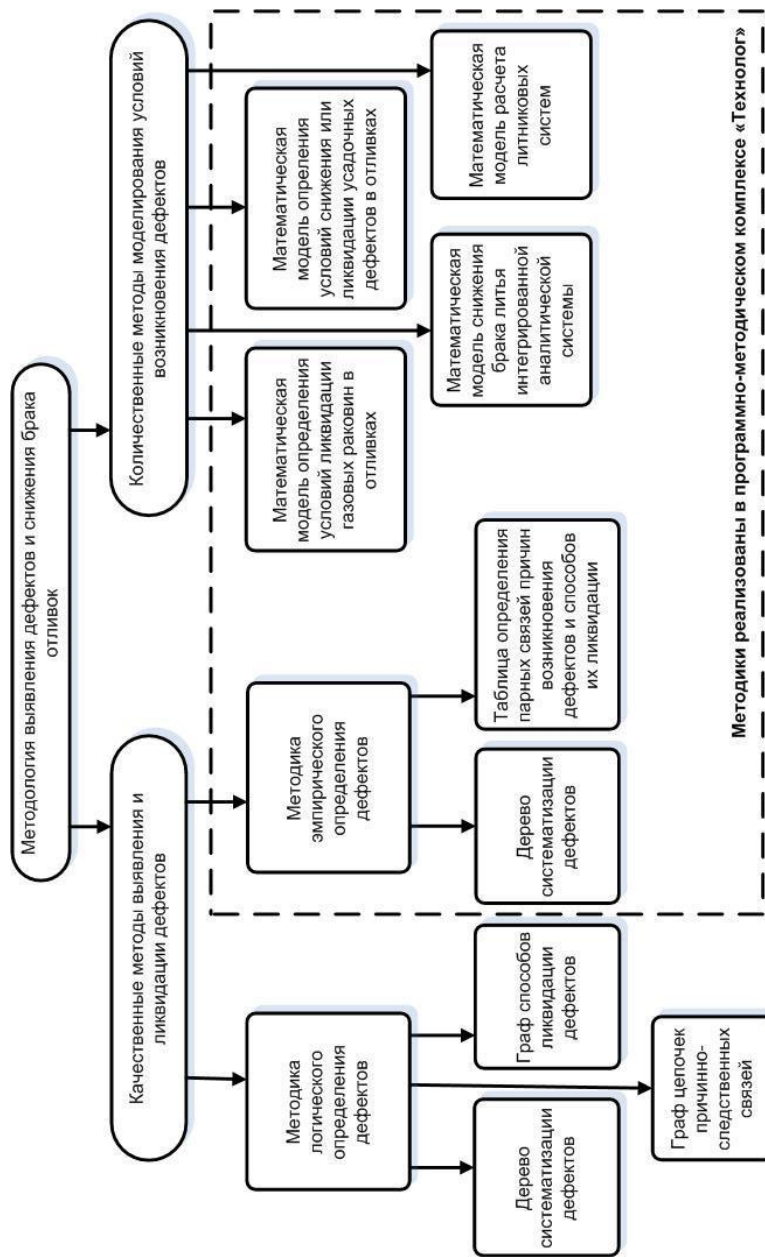


Рис. 1. Дерево компонентов методологии выявления дефектов и снижения брака отливок

Этап 7. Осуществляется выбор эффективного способа ликвидации дефектов по предлагаемым информационным материалам.

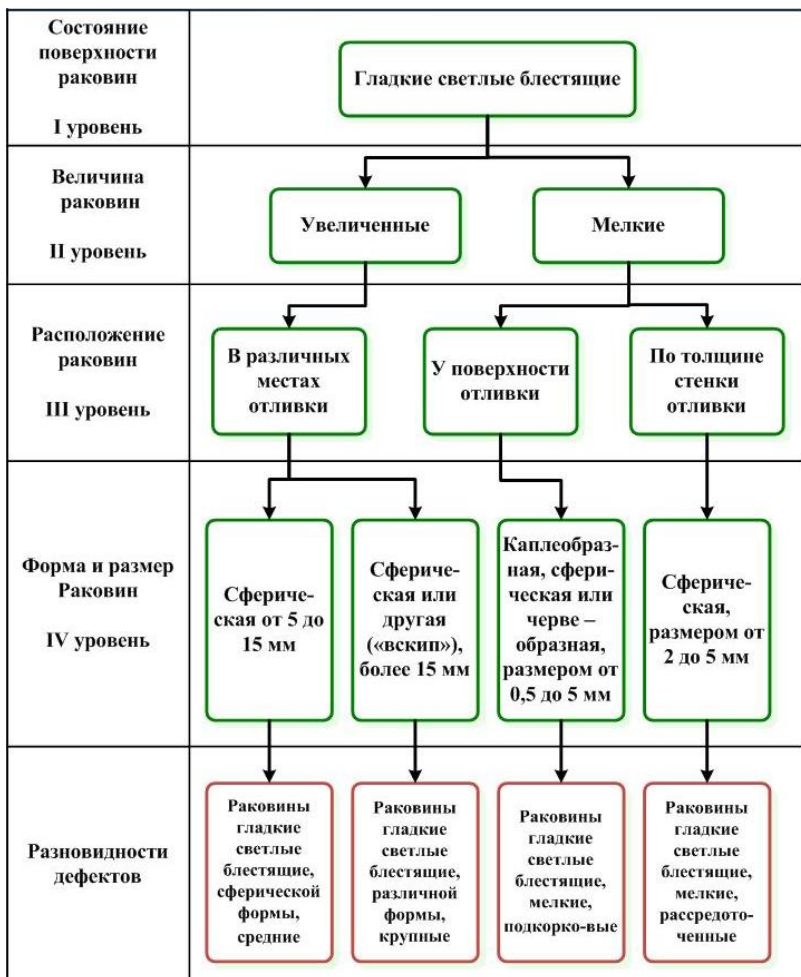


Рис. 2. Пример систематизации светлых газовых раковин по характерным отличительным особенностям

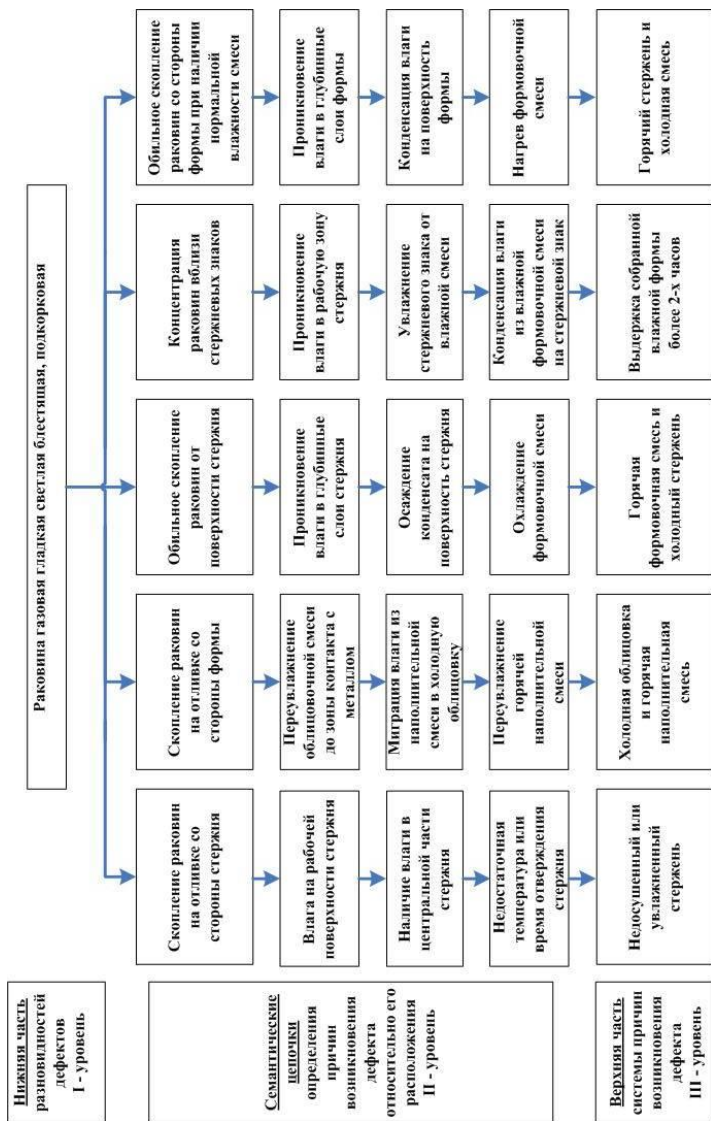


Рис. 3. Граф выявления причин возникновения мелких светлых газовых раковин на основе цепочек причинно-следственных связей

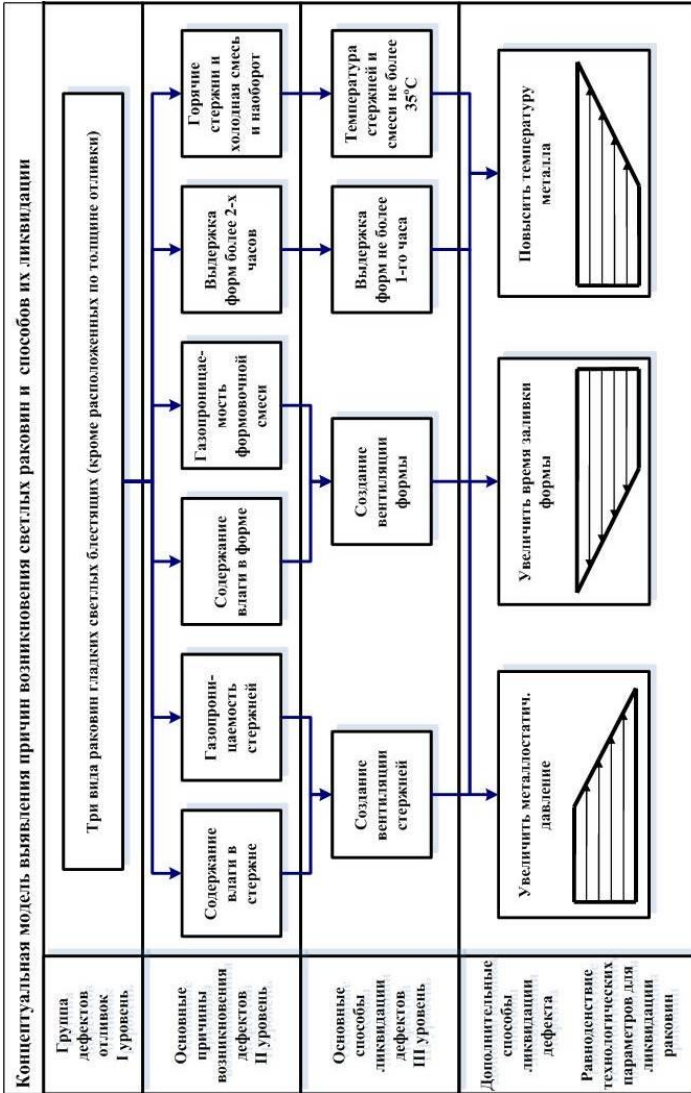


Рис. 4. Схема связи причин возникновения светлых газовых раковин и способов их ликвидации

Таблица 1. Факторы, влияющие на возникновение дефекта «Пузырь подкорковый»

№ п/п	Наименование причин возникновения дефектов	Состояние факторов: позитивные (1) массово используемые (2) негативные (3)
1.	Эффективность вентиляции стержней	1. Имеется полная вентиляция стержней 2. Имеется центральный вентиляционный канал 3. Вентиляции в стержне нет
2.	Температура заливаемого металла	1. С большим перегревом 2. Средний перегрев (расчетное) 3. С минимальным перегревом
3.	Время заливки формы	1. Увеличенное (выше расчетного) 2. Обычное (расчетное) 3. Уменьшенное (ниже расчетного)
4.	Газотворность стержней	1. Уменьшенная до $10 \text{ см}^3/\text{г.смеси}$ 2. Обычная – $10-15 \text{ см}^3/\text{г.смеси}$ 3. Увеличенная – более $15 \text{ см}^3/\text{г.смеси}$
5.	Газотворность формовочной смеси	1. Уменьшенная до $12 \text{ см}^3/\text{г.смеси}$ 2. Обычная – $12-16 \text{ см}^3/\text{г.смеси}$ 3. Увеличенная – более $16 \text{ см}^3/\text{г.смеси}$
6.	Газопроницаемость стержней	1. Увеличенная, более 130 ед. 2. Обычная – 100-130 ед. 3. Уменьшенная – 70 – 100 ед.
7.	Газопроницаемость формовочной смеси	1. Увеличенная, более 100 ед. 2. Обычная – 70-100 ед. 3. Уменьшенная – 40 – 70 ед.
8.	Количество вентиляционных наколов на поверхности формы	1. $\varnothing 5 \text{ мм}$, 10 шт./ дм^2 2. $\varnothing 5 \text{ мм}$, 4 шт./ дм^2 3. Наколов нет
9.	Противодавление газа в стержне при заливке металла  а) б) Схема противодавления газа.	1. Противодавление газа нет рис. б 2. Противодавление незначительно 3. Противодавление значительное рис. а
10.	Наличие ремонтного состава на стержнях	1. Площадь заделки незначительна: глубина менее $0,5 \text{ см}$., площадь менее 2 см^2 2. Площадь заделки допустимая: глубина 1 см ., площадь 4 см^2 3. Площадь заделки значительная: глубина более 2 см , площадь более 5 см^2

Таблица 2. Оценка влияния парных связей разнородностей факторов на возникновение дефекта «Пузырь подкорковый» в %.

№ ф.	2.1	2.2	2.3	3.1	3.2	3.3	4.1	4.2	4.3	5.1	5.2	5.3	6.1	6.2	6.3	7.1	7.2	7.3	8.1	8.2	8.3	9.1	9.2	9.3	10.1	10.2	10.3	
1.1	0	0	0	0	30	0	0	25	0	0	20	0	0	15	0	0	30	0	0	30	0	0	35	0	15	40		
1.2	20	30	35	10	20	40	15	30	50	20	25	30	20	25	40	20	30	40	20	30	50	20	35	70	30	30	80	
1.3	40	60	80	30	60	90	40	60	80	50	70	90	40	55	90	50	65	80	60	70	80	40	75	100	60	80	90	
2.1				0	10	30	10	20	30	5	10	30	10	20	35	10	20	30	10	25	35	10	25	70	10	25	70	
2.2				0	20	50	10	30	50	20	30	35	20	25	40	20	30	40	15	25	35	20	35	80	20	30	80	
2.3				25	40	70	30	45	80	40	50	80	30	40	55	40	50	60	40	50	60	40	50	100	40	50	80	
3.1							5	10	25	5	15	25	5	15	25	5	10	20	5	15	30	0	25	65	10	25	60	
3.2							15	25	40	15	25	30	15	25	30	15	25	30	15	22	30	15	30	70	40	35	90	
3.3							40	50	70	40	50	60	40	50	65	40	50	70	40	50	70	40	55	100	40	55	90	
4.1										10	15	20	10	20	25	10	20	30	10	20	30	5	25	60	10	25	60	
4.2										18	25	40	10	20	40	20	25	30	20	25	30	25	35	80	30	35	60	
4.3										40	20	60	30	60	70	40	50	60	40	50	55	45	60	100	30	60	90	
5.1													10	20	35	5	10	40	0	15	25	10	25	60	15	25	70	
5.2													15	20	45	10	15	45	10	20	30	20	30	75	20	35	80	
5.3													20	30	55	15	25	50	10	25	40	30	50	80	25	45	80	
6.1																5	15	25	10	20	30	10	25	60	15	20	60	
6.2																15	20	30	15	25	35	20	30	70	20	35	70	
6.3																20	30	45	25	35	45	35	40	80	30	40	90	
7.1																			0	10	30	10	25	70	20	40	70	
7.2																			10	25	40	20	35	75	50	45	80	
7.3																			20	40	60	40	60	85	40	50	90	
8.1																						10	25	70	20	20	80	
8.2																						25	35	75	25	35	85	
8.3																						35	55	85	35	55	90	
9.1																										20	20	80
9.2																										35	35	90
9.3																										60	90	100

Архитектура автоматизированной системы выявления и ликвидации дефектов представлена на рис. 6. Система создана на основе эмпирической методики определения и выявления дефектов при использовании оценки ординарных и парных связей позитивных и негативных факторов возникновения или ликвидации дефектов.

Структурно система имеет элементы, связывающие ее в единое целое, представляющее собой законченный объект. Архитектура автоматизированной системы (рис. 6) включает в себя ряд моделей и таблиц:

- «Модели идентификации дефектов», содержащие визуально-логические образы дефектов отливок с их характерными отличиями;
- «Технологические факторы производства отливок» содержат требуемые позитивные или негативные факторы, используемые в производстве в день возникновения дефекта;
- «Модуль корректировки модели идентификации и ликвидации дефектов» пополняет, удаляет или изменяет вводимые показатели факторов и образы дефектов;
- «Интерфейс визуализации моделей идентификации дефектов» позволяет определять разновидности дефектов по их характерным отличиям;
- «Интерфейс выбора технологических параметров» позволяет выбрать требуемые факторы производства отливок на день возникновения дефектов;
- «Таблицы оценки влияния парных связей факторов» и «Интерфейс выбора технологических параметров» используются «Модулем оценки парных связей факторов» для определения причины (причин) возникновения дефектов;
- «Модуль построения графика причин» принимает участие в определении причин возникновения дефекта с отображением результатов в виде двух- или трехмерного графиков. По вершинам причин на графиках пользователь может определить наиболее опасные причины возникновения дефекта;
- «Модуль построения таблицы причин возникновения дефектов» выдает таблицу определения причин возникновения дефектов. В таблице описываются возможные причины

образования дефектов с оценкой величины их воздействия на возникновение дефекта (в %).

Для получения короткой и расширенной информации по рассматриваемым причинам, используются дополнительные информационные «Блоки». Здесь пользователь получает короткий ответ на вопрос о ликвидации дефекта. По желанию «Блок» выдает более подробную информацию для пополнения знаний о рассматриваемом процессе. При достаточной наработке материалов на данной системе и приобретения требуемого профессионального навыка, возможна корректировка таблицы оценки парных связей причин возникновения дефектов под условия конкретного завода с использованием «Модуля корректировки модели идентификации и ликвидации дефектов».

Функционирование системы начинается с определения разновидности дефекта с помощью интерфейса визуализации моделей идентификации дефекта по его отличительным признакам. После этого осуществляется выявление причин возникновения дефекта при использовании:

- интерфейса выбора технологических параметров производства отливок на день возникновения дефекта;
- модуля оценки влияния факторов и их парных взаимодействий на возникновение дефекта, при помощи которого находятся причины, оказывающие наиболее значимое воздействие на формирование дефекта.

Полученные результаты о причинах возникновения дефектов представлены в виде таблицы и графика влияния причин на возникновение дефекта. Для каждой найденной причины система выводит способ ее ликвидации выбором из базы данных.

Разработанная методика апробирована в заводских условиях и используется на ряде (!) заводов:

- ОАО «АВТОВАЗ»;
- ОАО «АЛНАС»;
- ОАО «Тверьвагонзавод»;
- ОАО «БМЗ»;
- ОАО «Воронежский сталелитейный завод» и др.

Управление техническими системами и технологическими процессами



Рис. 6. Архитектура автоматизированной системы распознавания дефектов, причин их возникновения и способов ликвидации на основе прагматических результатов

Литература

1. ВОРОНИН Ю. Ф., Камаев В. А. *Атлас литейных дефектов. Чёрные сплавы.* – М.: Машиностроение–1, 2005. – 328 с.
2. ВОРОНИН Ю. Ф., Парфенов Ю. А., Шешенёва А. В. *Характерные особенности распознавания и устранения газовых раковин // Заготовительные производства в машиностроении.* – 2003.– №12. – С. 7-9, 57.
3. ВОРОНИН Ю. Ф. *Повышение качества литья. Системный подход.* Монография // М.: Машиностроение–1, 263 с.
4. Воронин Ю.Ф. *Системный подход к определению разновидностей светлых газовых раковин // Литейщик России.* – 2007. – №7. – С. 8-10
5. ВОРОНИН Ю. Ф., Камаев В. А. *Визуально-логические и формально-логические модели определения и ликвидации дефектов отливок из железоуглеродистых сплавов // Труды международной научно-технической конференции «Интеллектуальные системы» (AIS 07) и*

- «Интеллектуальные САПР». – М.: Физматлит, 2007. – Т. III. – С. 27-32.
6. ВОРОНИН Ю. Ф., Воронин С. Ю. *Ликвидация окисленных газовых раковин // Оборудование. Технический альманах.* – Март 2007. – №1. – С. 46-49.
 7. ПРАНГИШВИЛИ И. В. *Системный подход и общесистемные закономерности.* — М.: СИНТЕГ, 2000. – 528 с.
 8. ВОРОНИН Ю. Ф., Камаев В. А. *Определение условий возникновения дефектов отливок (на примере горячей трещины) // Заготовительное производство в машиностроении.* – 2005. – №3. – С. 10-14.
 9. ВОРОНИН Ю. Ф., Камаев В. А. *Методология разработки экспертной системы идентификации видов дефектов, а также причин их возникновения по прецедентам // Труды международной научно-технической конференции «Интеллектуальные системы. Интеллектуальные САПР», Москва, «Физматлит.», 2006. – Том 1. – С. 219-221.*
 10. ВОРОНИН Ю. Ф., Матохина А. В. *Моделирование влияния причин возникновения дефектов на качество отливок // Литейщик России.* – 2004. – №8. – С. 33-37.
 11. ВОРОНИН Ю. Ф., Камаев В. А. *Компьютер определяет причину возникновения дефектов отливки // Литейщик России.* – 2005. – №8. – С. 30-34.

EMPIRICAL TECHNIQUE OF DECREASE IN MARRIAGE CASTINGS

Voronin Yury, Volgograd State Technical University, Volgograd, Cand.Sc. (voronin@vstu.ru).

Kamaev Valery, Volgograd State Technical University, Volgograd, Doctor of Science, professor (cad@vstu.ru).

Boyko Nikolay, Volgograd State Technical University, Volgograd, student (quakex@gmail.com).

*Управление техническими системами
и технологическими процессами*

Abstract: The empirical technique of decrease in marriage castings from iron-carbon alloys is considered. It is shown that use of a tree of ordering of defects and tables of definition of pair communications of the reasons of occurrence of defects promotes substantial increase of quality of cast preparations in mechanical engineering.

Keywords: The system approach, ordering tree, casting, methodology, technique, improvement of quality, moulding marriage.

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии Н.Н. Бахтадзе*

УДК 004.3, 519.873
ББК 30.14

РАСЧЁТ НАДЁЖНОСТИ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ С ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ СТРУКТУРОЙ, ПОЛНОСТЬЮ ВОССТАНАВЛИВАЕМЫХ В ПРОЦЕССЕ ЭКСПЛУАТАЦИИ

Калимулина Э. Ю.¹

*(Московский технический университет связи
и информатики, Москва)*
elmira-yu-k@mail.ru

Рассматриваются вопросы оценки надёжности сложных параллельных систем, восстанавливаемых в процессе эксплуатации при неэкспоненциальном распределении времени восстановления. В работе представлен граф состояний для таких систем, выводится формула вероятности безотказной работы.

Ключевые слова: надёжность, корпоративные сети, восстанавливаемые системы.

Введение

Одним из важнейших этапов проектирования корпоративной сети (КС) является этап расчёта показателей надёжности её функционирования, причём хорошее качество проектирования избавляет от дополнительных материальных и временных затрат на устранение ошибок на стадии эксплуатации. С усложнением программно-аппаратных комплексов, применяемых для реализации конкретной КС, возникает необходимость в разработке

¹ Калимулина Эльмира Юрьевна, аспирант (+7 495 360-8376, +7 903 512-3444, Elmira-yu-k@mail.ru).

новых методов и методик расчёта, позволяющих адекватно оценивать показатели надёжности и эффективности таких систем. На сегодняшний момент наиболее эффективными при анализе надёжности являются абстрактные модели, построенные не на основе конкретных аппаратных единиц, а на базе логических подсистем, реализующих конкретные функции в работе сети. На первом этапе проектирования данные модели позволяют определить оптимальную надёжность логических подсистем. Но на последующих этапах проектирования для перехода от абстрактных функциональных блоков в модели надёжности к более конкретным подсистемам, которые могут быть доведены до программно-аппаратной реализации, данные логические подсистемы должны быть рассмотрены более детально. Например, в работе [4] сложная информационная система моделировалась всего тремя блоками. В работе [3] КС моделировалась пятью блоками: сеть доступа, центрально-вычислительный комплекс, магистральная транспортная сеть, сервис-центр, локально-вычислительная сеть.

Рассмотрим один из блоков – центрально-вычислительный комплекс (ЦВК). Системного уровня детализации достаточно для определения значения надёжности ЦВК в целом, но в дальнейшем полученное целевое значение надёжности должно быть распределено между элементами, образующими ЦВК. Сам ЦВК – это сложная система, предназначенная для осуществления обработки большого объема данных для оператора связи и реализованная на основе большого числа серверов (> 100), обрабатывающих данные параллельно. Адекватно оценить надёжность такой системы, рассматривая её как один функциональный блок, нельзя. Следовательно, нужна детализация; в частности, возникает задача определения надёжности параллельной системы, состоящей из большого числа элементов. Основным методом, используемым при решении таких задач, сегодня является метод имитационного моделирования. Несмотря на многие его достоинства, к числу которых, прежде всего, относится достаточно высокая точность, его отличает большая

трудоемкость создания модели и большое время, необходимое для получения результатов. Кроме того, сложность создания модели заключается ещё и в том, что некоторые упрощения, которые, казалось бы могли сократить время расчётов, просто некорректны при моделировании КС. Например, законы, по которым работают технические устройства корпоративных сетей, в большинстве случаев отличаются от экспоненциальных законов [5]. В данной работе будет сделано только общее предположение о том, что времена восстановления подсистем имеют некоторые произвольные функции распределения $F_a(t)$. Второе упрощение, делаемое при расчёте надёжности параллельных систем – идентичность элементов.

В корпоративных сетях при резервировании сетей доступа и магистральных сетей в качестве резервных используют линии связи с характеристиками надёжности, отличными от характеристик основной линии [1, 3]. Такая же ситуация и с ЦВК: основные и резервные сервера отличаются по своим надёжностным характеристикам. Из-за высокой стоимости в качестве резервных обычно используются системы, имеющие меньшую производительность и, соответственно, другую надёжность [1, 3].

В качестве ещё одного примера параллельной системы с различной конфигурацией элементов можно рассмотреть КС, построенную на основе объединения нескольких различных сетей с низкой надёжностью в одну, где объединение сетей осуществляется на основе параллельной архитектуры [7].

1. Постановка задачи

Цель данной статьи – получить формулы для расчёта надёжности параллельной системы для случая, когда все подсистемы различны.

Поскольку все подсистемы КС полностью восстанавливаются после отказа, то будет рассматриваться случай только восстанавливаемых систем. На сегодняшний момент все извест-

ные методы расчёта надёжности таких систем основываются на построении графа состояний системы, определении переходных вероятностей между состояниями и выводе на основе этих данных формул для характеристик надёжности. В работе [3] автором получен ряд формул, по которым можно определить показатели надёжности для подобных систем с небольшим числом состояний (~ 50). Однако для большего числа применение данных формул требует значительных вычислительных затрат.

Следовательно, необходимо построить модель для нахождения показателей надёжности параллельных систем с большим числом разнородных элементов.

2. Графовая модель надёжности

С учётом замечаний, сформулированных выше, и известных методов расчёта надёжности по графу состояний, построим граф состояний для общего случая – для системы, состоящей из n подсистем. Для наглядности всё множество состояний на графе удобно разбить на следующие подмножества:

- подмножество «0» – 0 отказавших элементов, данное подмножество включает всего 1 состояние;
- подмножество «1» – 1 отказавший элемент, в данном подмножестве n возможных состояний;
- подмножество «2» – 2 элемента находится в состоянии отказа, данное подмножество включает $n(n-1)/2$ возможных состояний;
- подмножество «3» – 3 элемента находится в состоянии отказа, $n(n-1)(n-2)/3$ возможных состояний;
- ...;
- подмножество « $n-2$ » – $(n-2)$ элемента находится в состоянии отказа, включает $n(n-1)/2$ возможных состояний;
- подмножество « $n-1$ » – $(n-1)$ элемента находится в состоянии отказа, n состояний;
- уровень « n » – n элементов находится в состоянии отказа, 1

состояние.

Таким образом, число состояний на каждом таком уровне, где из n работоспособными остаются $(n - z)$ элементов с различной надёжностью, находится элементарно как $C_n^z = \frac{n!}{z!(n-z)!}$.

Каждое состояние системы будем задавать бинарным вектором: $S_{lm}(t) = \{s_1(t), \dots, s_n(t)\}$, где l – число отказавших элементов ($l = \overline{0, n}$); $m = \overline{0, n! / l!(n-l)!}$ – номер состояний в l -ом подмножестве; $s_i(t) = 1$, если i -ая подсистема была работоспособна в момент времени t , $s_i(t) = 0$, если i -ая подсистема находилась в состоянии отказа.

Каждому состоянию соответствует n входящих дуг и n выходящих, общее число дуг графа: $\sum_{l=0}^n \frac{n!n}{l!(n-l)!}$. Дуга характери-

зует изменение состояние одного элемента: либо переход из работоспособного состояния в состояние отказа, либо восстановление. Интенсивности отказов у всех подсистем различны и равны: $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Времена восстановлений подсистем имеют произвольные функции распределения: $F_{e1}(t), F_{e2}(t), \dots, F_{en}(t)$.

Коэффициент готовности для системы, имеющей m состояний, матрица переходных вероятностей $P = (p_{ij})$ и вектор безусловных математических ожиданий времени пребывания в каждом из состояний $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m)$ находится следующим образом [6]:

$$K_T = \frac{\sum_{j \in E_+} \eta_j \pi_j - \sum_{j \in E_-} \eta_j \pi_j}{\sum_{j \in E} \eta_j \pi_j},$$

где $\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m)$ – вектор решения, $\pi_i = D_i / \sum_{j=0}^m D_j$, где D_i –

минор детерминанта матрицы $I - P$, получаемый вычеркиванием i -го столбца и i -ой строки; I – единичная матрица. Однако трудно заметить из самой формулы, что данный подход неэф-

фактивен с точки зрения времени работы алгоритма: вычисление миноров матрицы занимает много времени.

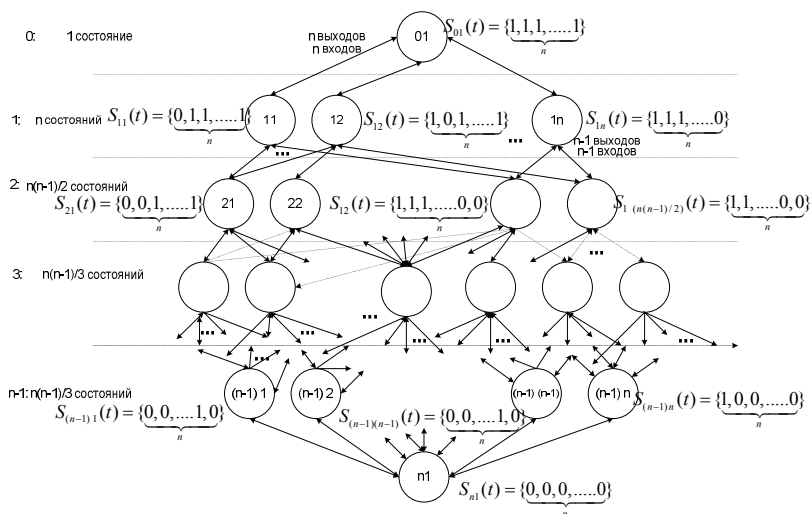


Рис. 1. Интерпретация модели подсистемы корпоративной сети ориентированным графом

3. Оценка надёжности сложных систем

Рассмотрим другой подход к оценке надёжности системы, представимой графом на рис. 1. Рассмотрим вероятность того, что система, находясь в момент времени $t_0 = 0$ в момент времени t окажется в нерабочем состоянии, т.е. откажет. Вероятность отказа здесь обозначим через Q_0 . Как и ранее, будем считать, что $F_{ai}(t)$ – функция распределения времени восстановления i -го элемента; $F_i(t) = 1 - \exp\{-\lambda_i t\}$ – функция распределения времени работы до отказа i -го элемента.

Поведение системы, представленной графом на рис. 1, можно описать некоторым случайным процессом $\zeta(t)$. Пространство состояний этого процесса $E = \{0, 1, 2, \dots\}$. Предполо-

жим, что в начальный момент времени $\zeta(0) = 0$, т.е. в системе все элементы находятся в работоспособном состоянии. Переход из некоторого состояния $n - l$ в состояние $n - l + 1$ следует рассматривать как отказ одного элемента. В зависимости от того, сколько элементов должны оставаться работоспособными, чтобы вся система находилась в работоспособном состоянии, под отказом системы можно понимать переход:

– из состояния $n - 1$ в состояние n , если для работоспособного состояния системы достаточно, чтобы один элемент находился в рабочем состоянии;

– из некоторого состояния $n - m$ в состояние $n - m + 1$, если система остаётся работоспособной при m работающих элементах.

В частности второму варианту соответствует условие работоспособности центра обработки данных оператора связи, где для нормального функционирования системы, достаточно, чтобы из 1000 серверов работало примерно 950.

Преимущество описанной выше схемы заключается в том, что она позволяет легко выделить промежуточные состояния, например, состояние частичного отказа. В случае необходимости можно рассмотреть различные схемы восстановления системы, определить оптимальные варианты профилактического обслуживания системы.

Оценим характеристики надёжности для данной модели. Составление системы интегральных уравнений и её решение для общего случая, когда элементы не одинаковые, – труднореализуемая задача. Рассмотрим некоторые приближённые оценки. Найдём вероятность отказа системы за время t по монотонной траектории, когда система последовательно переходит из состояний 0 в состояния 1, 2, ..., $n - 1$, n . Время до первого отказа системы будем оценивать как: $\tau = \min\{t: \zeta(t) = n \mid \zeta(0) = 0\}$. На рис. 2 показаны графики результатов имитационного моделирования системы, состоящей из 50 элементов. Для наглядности элементы считались одинаковыми и под отказом понимался: 1) отказ 40 элементов (отказ в момент τ_1), 2) отказ 30 элементов

(момент τ_2). Из траекторий реализации случайного процесса видно, что оценки времени работы системы до первого отказа и вероятности отказа по монотонной траектории могут быть использованы в качестве нижних границ надёжности, что в большинстве инженерных приложений, в частности, при анализе надёжности компьютерных сетей [2], находит широкое применение.

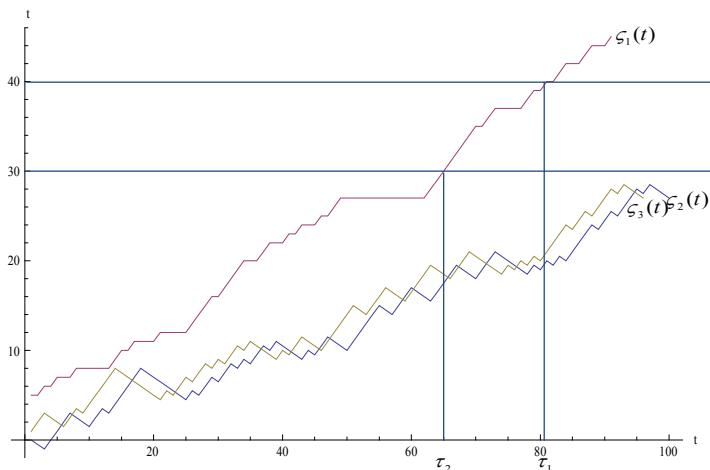


Рис. 2. График траектории случайного процесса

Рассмотрим траекторию, когда последовательно отказывают элементы $1, 2, \dots, n-1, n$. Вероятность отказа по такой монотонной траектории находится как

$$Q_{10} = \int_{0 < x_1} \int_{x_2 <} \dots \int_{x_{n-1} <} \int_{x_n} \lambda_1 \text{Exp}[-\lambda_1 x_1] (1 - F_{e1}(x_n))$$

$$(1) \quad \lambda_2 \text{Exp}[-\lambda_2 (x_2 - x_1)] (1 - F_{e2}(x_n - x_1)) \dots$$

$$\dots \lambda_{n-1} \text{Exp}[-\lambda_{n-1} (x_{n-1} - x_{n-2})] (1 - F_{e{n-1}}(x_n - x_{n-2}))$$

$$\lambda_n \text{Exp}[-\lambda_n (x_n - x_{n-1})] (1 - F_{en}(x_n - x_{n-1})) dx_n dx_{n-1} \dots dx_2 dx_1.$$

Для систем с нагруженным резервом отказ может произойти по одной из монотонных траекторий. Всего таких траекторий на графе $n!$ (рис. 1). Аналогичное выражение для вероятности отказа $Q_{20}, \dots, Q_{(n-1)0}, Q_{n0}, \dots, Q_{n!0}$ для каждой траектории нетрудно получить путем последовательных перестановок сомножителей в выражении (1). Перепишем выражение (1) в следующем виде:

$$Q_{10} = \prod_{j=1}^n \lambda_j \int_{0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n} \dots \int \int \text{Exp}[-\sum_{i=1}^n \lambda_i (x_i - x_{i-1})] \prod_{i=1}^n (1 - F_{ei}(x_n - x_{i-1})) dx_n dx_{n-1} \dots dx_2 dx_1$$

где $x_0 = 0$, $Q_0 = \sum_{\substack{\text{по всем} \\ \text{траекториям } i}} Q_{i0}$.

Произведём замену: $y_0 = x_n - x_0, y_1 = x_n - x_1, \dots, y_{n-1} = x_n - x_{n-1}$, соответственно, $x_n - x_{n-1} = y_{n-1}, x_{n-1} - x_{n-2} = y_{n-2} - y_{n-1}, \dots, x_2 - x_1 = y_1 - y_2, x_1 - x_0 = y_0 - y_1, y_n = 0$:

$$(2) \quad Q_{10} = \prod_{j=1}^n \lambda_j \int_{y_0 > y_1 > \dots > y_{n-2} > y_{n-1}} \dots \int \int \text{Exp}[-\sum_{i=1}^n \lambda_i (y_{i-1} - y_i)] \prod_{i=1}^n (1 - F_{ei}(y_{i-1})) dy_0 dy_1 \dots dy_{n-1}$$

Оценим Q_{10} сверху. От (2) перейдём к интегралу \overline{Q}_{10} :

$$(3) \quad Q_{10} \leq \overline{Q}_{10} = \prod_{j=1}^n \lambda_j \int_{y_0 > y_1 > \dots > y_{n-2} > y_{n-1}} \dots \int \int \prod_{i=1}^n (1 - F_{ei}(y_{i-1})) dy_0 dy_1 \dots dy_{n-1}$$

Оценка снизу:

$$(4) \quad Q_{10} \geq \underline{Q}_{10} = \prod_{j=1}^n \lambda_j \int_{y_0 > y_1 > \dots > y_{n-2} > y_{n-1}} \dots \int \int \text{Exp}[-\lambda y_0] \prod_{i=1}^n (1 - F_{ei}(y_{i-1})) dy_0 dy_1 \dots dy_{n-1}$$

где в качестве λ берётся произведение $\prod_{i=1}^n \lambda_i$.

Тогда

$$\begin{aligned}
 & 0 \leq \overline{Q}_{10} - Q_{10} \leq \overline{Q}_{10} - \underline{Q}_{10}, \\
 & \overline{Q}_{10} - \underline{Q}_{10} = \\
 & = \int_{y_0 > y_1 > \dots > y_{n-2} > y_{n-1}} \int (1 - \text{Exp}[-\lambda y_0]) \prod_{i=1}^n (1 - F_{\sigma i}(y_{i-1})) dy_0 dy_1 \dots dy_{n-1} \leq \\
 (5) \quad & \leq \lambda \int_{y_0 > y_1 > \dots > y_{n-2} > y_{n-1}} y_0 (1 - F_{\sigma 1}(y_0)) dy_0 dy_1 \dots dy_{n-1} = \\
 & = \frac{\lambda}{(n-1)!} \int_0^{\infty} y_0^n (1 - F_{\sigma 1}(y_0)) dy_0 = \\
 & = \frac{\lambda}{(n-1)!} \frac{1}{(n+1)} \int_0^{\infty} y_0^{n+1} dF_{\sigma 1}(y_0) = \frac{\lambda E \xi^{n+1}}{(n-1)!(n+1)}.
 \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь соотношение (5) в предположении, что для среднего времени восстановления и среднего времени работы i -ой подсистемы выполнено условие

$$(6) \quad E \xi_{\text{восст.}i}^{\xi} / E \xi_{\text{отк.}i}^{\xi} = T_{\text{восст.}i} / T_{\text{отк.}i} \rightarrow 0;$$

для экспоненциальных законов распределения времени отказа и восстановления $\lambda_i / \mu_i \rightarrow 0$.

Данное условие очевидно для элементов корпоративной сети: среднее время восстановления (ремонта) какой-либо подсистемы КС во много раз меньше среднего времени безотказной работы подсистемы. Тогда из (6) следует, что $\lambda E \xi^1 \ll 1$.

Обозначим $E \xi^{\xi} = \int_0^{\infty} t d(1 - F(t)) = T$. Рассмотрим $(n+1)$ -й начальный момент:

$$\begin{aligned}
 E\xi^{n+1} &= \int_0^{\infty} t^{n+1} dF(t) = \\
 &= t^{n+1}(1-F(t)) \Big|_0^{\infty} + n(n+1) \int_0^{\infty} (1-F(x)) dx \\
 (7) \quad &\int_0^{\infty} t^{n-1} \left(1 - \frac{1}{\int_0^{\infty} (1-F(x)) dx} \int_0^t (1-F(x)) dx \right) dt = \\
 &\leq n(n+1) T \int_0^{\infty} t^{n-1} \int_t^{\infty} (1-F(x)) dx dt = \\
 &= n(n+1)(n-1) T^2 \int_0^{\infty} t^{n-2} \int_t^{\infty} (1-F(x)) dx dt = \dots = (n+1)! T^{n+1}.
 \end{aligned}$$

Выражение (5) можно оценить с учётом (7):

$$\frac{\lambda E\xi^{n+1}}{(n-1)!(n+1)} \leq \lambda n T^{n+1},$$

тогда:

$$Q_{10} \approx \overline{Q}_{10} = \prod_{j=1}^n \lambda_j \int_{y_0 > y_1 > \dots > y_{n-2} > y_{n-1}} \dots \int \prod_{i=1}^n (1 - F_{ei}(y_{i-1})) dy_0 dy_1 \dots dy_{n-1}.$$

С помощью полученного выражения можно найти вероятность безотказной работы $1 - Q_{10}$ для случаев, когда время восстановления всех подсистем распределено одинаково с различными параметрами для наиболее часто используемых при анализе надёжности сетей распределений.

Теперь рассмотрим траекторию, когда процесс $\zeta(t)$ делает в некоторый момент времени один скачок вниз (рассмотрим случай, когда только одна подсистема восстанавливается, а затем снова отказывает):

1) в некоторый момент t_1 отказывает подсистема 1, затем в какой-то момент времени на интервале $(x_n - x_1)$ эта подсистема восстанавливается и снова отказывает в момент x_n ;

2) остальные подсистемы последовательно отказывают в моменты времени x_2, x_3, \dots, x_n и не успевают восстановиться до момента времени x_n .

Вероятность отказа по такой траектории находится аналогично вероятности отказа по монотонной траектории:

$$\begin{aligned}
 Q_{11} &= \lambda_1 \prod_{i=1}^n \lambda_i \int_{0 < x_1} \int_{x_2 <} \dots \int_{x_{n-1} <} \int_{x_n <} \int_{x_{n+1}} \text{Exp}[-\lambda_1 x_1] F_{e1}(x_n - x_1) \\
 &\quad \text{Exp}[-\lambda_2(x_2 - x_1)](1 - F_{e2}(x_{n+1} - x_1)) \dots \\
 &\quad \dots \text{Exp}[-\lambda_n(x_n - x_{n-1})](1 - F_{en}(x_{n+1} - x_{n-1})) \\
 &\quad \text{Exp}[-\lambda_1(x_{n+1} - x_n)](1 - F_{e1}(x_{n+1} - x_n)) dx_{n+1} dx_n dx_{n-1} \dots dx_2 dx_1 = \\
 &= \lambda_1 \prod_{i=1}^n \lambda_i \int_{y_0 > y_1 >} \int_{y_2 >} \dots \int_{y_{n-1} >} \int_{y_n} \text{Exp}[-(\lambda_1 y_n + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i (y_{i-1} - y_i))] \\
 &\quad F_{e1}(y_{n-1}) \prod_{i=2}^n (1 - F_{ei}(y_{i-1})) dy_0 dy_1 \dots dy_n < \\
 &< C \lambda_1 \prod_{i=1}^n \lambda_i \int_{y_0 > y_1 >} \int_{y_2 >} \dots \int_{y_{n-1} >} \int_{y_n} \text{Exp}[-y_0(\lambda_1^2 + \sum_{i=2}^n \lambda_i)] \\
 &\quad \prod_{i=2}^n (1 - F_{ei}(y_{i-1})) dy_0 dy_1 \dots dy_n \leq \\
 &\leq C \lambda_1 \prod_{i=1}^n \lambda_i \int_{y_0 > y_1 >} \int_{y_2 >} \dots \int_{y_{n-1} >} \int_{y_n} y_0 (1 - F_{e1}(y_0)) dy_0 dy_1 \dots dy_n = \\
 (8) \quad &= C \lambda_1 \prod_{i=1}^n \lambda_i \int_0^{\infty} \frac{y_0^{n+1}}{n!} (1 - F_{e1}(y_0)) = \\
 &= \frac{C \lambda_1 \prod_{i=1}^n \lambda_i}{n!(n+2)} \int_0^{\infty} y_0^{n+2} dF_{e1}(y_0) = \frac{C \lambda_1 \prod_{i=1}^n \lambda_i E \xi^{n+2}}{n!(n+2)},
 \end{aligned}$$

где C – некоторая константа ($0 < C < 1$).

$$\text{Тогда } \frac{Q_{10}}{Q_{11}} \approx \frac{Q_{11}}{\prod_{i=1}^n \lambda_i I_n} \leq \frac{C \lambda_1 E \xi^{n+1}}{n!(n+2) I_n} \leq \frac{C \lambda_1 E \xi^{n+1}}{n!(n+2) I_n} \rightarrow 0,$$

где
$$I_n = \int_{y_0 > y_1 > \dots > y_{n-2} > y_{n-1}} \int \dots \int \prod_{i=1}^n (1 - F_{\sigma_i}(y_{i-1})) dy_0 dy_1 \dots dy_{n-1},$$
 следова-

тельно, для оценки вероятности отказа можно использовать формулу (3), где для нагруженного резерва берётся сумма $Q_0 = \sum Q_{i_0}$ по всем монотонным траекториям. Нетрудно заметить, что данная формула справедлива для случая ненагруженного резервирования. В этом случае порядок отказа элементов точно известен, т.е. все подсистемы можно пронумеровать так, что последовательно будут отказывать элементы 1, 2, ..., n . Траектория отказов в этом случае будет единственной. Поэтому расчёт можно осуществлять по формуле (3).

С учётом полученных формул можно определить надёжность подсистем корпоративной сети, которые функционируют параллельно в смысле надёжности или для которых применяется нагруженное резервирование: ЛВС, Сеть доступа, подсистемы ЦВК как

$$(9) \quad 1 - Q = 1 - \prod_{i=1}^3 \sum_{\pi_{0i}} \left(\prod_{j=1}^{n_i} \lambda_{ij} \int_{y_0 > y_1 > \dots > y_{n-2} > y_{n-1}} \int \dots \int \prod_{j=1}^{n_i} (1 - F_{\sigma_{ij}}(y_{i-1})) dy_0 dy_1 \dots dy_{n-1} \right).$$

где $i = 1, 2, 3$ для ЛВС, Сети доступа и ЦВК соответственно; n_i – число параллельных подсистем в каждом блоке; $F_{\sigma_{ij}}(t)$ – функция распределения времени восстановления для j -ой подсистемы i -го блока; π_{0i} – множество монотонных путей для каждого блока.

4. Выводы

Полученные формулы позволяют аналитическим путем рассчитать надёжность сложной системы (в том числе корпоративных сетей), состоящих из большого количества подсистем с различными характеристиками надёжности, восстанавливаемых в процессе эксплуатации и работающих параллельно в смысле надёжности. Формулы получены для общего случая и позволяют определить коэффициент готовности для подсистем с неэкс-

пониженным временем восстановления. На основе полученных формул могут быть разработаны алгоритмические процедуры, которые позволят, не прибегая к построению сложной имитационной модели сети, оценить надёжность корпоративной сети на этапе проектирования и значительно сократить время расчётов.

Литература

1. АНАНЬЕВ А. Н. *Разработка и исследование методов расчёта надёжности корпоративных сетей региональных операторов связи* // Электросвязь. – 2002. – №10. – С. 30-33.
2. АНАНЬЕВ А. Н. *Разработка и исследования математических моделей и методик расчета показателей качества функционирования корпоративных сетей региональных операторов связи* // Диссертация на соискание учёной степени кандидата технических наук. – М.: МТУСИ, 2002.
3. ВОРОНЦОВ Ю. А., КАЛИМУЛИНА Э. Ю. *Обеспечение надёжности корпоративных сетей операторов связи* // Вестник связи. – 2004. – №10.
4. ПЕРЕГУДА А. И., ТВЕРДОХЛЕБОВ Р. Е. *Математическая модель надёжности информационных систем* // Методы менеджмента качества. – 2004. – №6.
5. ЧЕРКЕСОВ Г. Н. *Надёжность аппаратно-программных комплексов*. – Спб.: Питер, 2005.
6. BARLOW R. E., PROSCHAN F. *Mathematical theory of reliability*. – SIAM, 1996.
7. HARRAS K. A., WITTIE M. P., ALMEROTH K. C., BELDING M. E. *ParaNets: A Parallel Network Architecture for Challenged Networks* // in Proc. of the 7th IEEE Workshop on Mobile Computing Systems and Applications (Hotmobile), Tucson, AZ, February 2007. – P. 73-78.

ESTIMATION OF THE RELIABILITY OF COMPLEX PARALLEL FULLY REPAIRABLE SYSTEMS

Elmira Y. Kalimulina, Moscow technical university of Communications and Informatics, postgraduate student (elmira-yu-k@mail.ru).

Abstract: The problem of estimation of complex repairable parallel systems with non-exponential distributed recovery time is considered in this paper. The state graph for such system is presented here. The formula for the probability of no-failure operation is derived here.

Keywords: reliability, corporate networks, repairable systems.

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии В.Н. Лебедевым*