УДК 519.1
ББК 32.81

МЕХАНИЗМЫ СТИМУЛИРОВАНИЯ СОКРАЩЕНИЯ СРОКОВ РЕАЛИЗАЦИИ ПРОЕКТОВ ПРИ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИЯХ ЗАТРАТ

Бурков В. Н. [1], Цветков А. В.[2]
*(Учреждение Российской академии наук
Институт проблем управления РАН, Москва)*
Сычев А. П.[3]
(ЦНИИ Транспортного строительства)

Даны постановки задач стимулирования сокращения сроков реализации проектов. Решена задача разработки унифицированной линейной системы стимулирования сокращения сроков реализации проекта. Для решения задачи введены понятия пропускной способности пути и мощности разреза и доказана теорема двойственности о равенстве максимальной пропускной способности путей и минимальной мощности разрезов.

Ключевые слова: механизм стимулирования, реализация проекта, функция затрат.

1. Введение

Система стимулирования определяет зависимость вознаграждения исполнителя (агента), получаемого им от центра, от выбираемых действий. Исследование моделей стимулирования

---

[1] *Владимир Николаевич Бурков, доктор технических наук, профессор (vlab17@bk.ru).*
[2] *Александр Васильевич Цветков, доктор технических наук, профессор (olvinogr@ipu.ru).*
[3] *Анатолий Петрович Сычев, кандидат технических наук, генеральный директор ЦНИИТС (mail@tsniis.com)*

в рамках теории управления началось практически одновременно и независимо примерно в конце 60-х годов прошлого века.

Основными научными школами по этому направлению являются теория активных систем (научный центр – Институт проблем управления РАН) [2], теория иерархических игр (научный центр – Вычислительный центр РАН) [3] и теория контрактов, развиваемая в основном зарубежными учеными [4]. В настоящее время в рамках теории активных систем разработаны базовые механизмы стимулирования: компенсаторные (*К*-типа), скачкообразные (*С*-типа), линейные (*L*-типа), основанные на перераспределении дохода (*Д*-типа) [5]. Различают два вида систем стимулирования – персонифицированные (индивидуальные) и унифицированные. В унифицированных системах зависимость вознаграждения от тех или иных параметров одинакова для всех агентов. На основе базовых систем стимулирования можно строить более сложные системы [5]. Особенностью систем стимулирования в управлении проектами является технологическая зависимость между работами проекта, определяемая сетевым графиком. В работе рассматривается задача построения оптимальной линейной унифицированной системы стимулирования сокращения продолжительности проекта.

2. Постановка задачи

Задан проект из n операций (работ), зависимости между которыми определяются сетевым графиком. Для каждой операции (i, j)определена зависимость

(1) $Z_{ij} = K_{ij}\tau_{ij},\ 0 \le \tau_{ij} \le \Delta_{ij}$

затрат Z_{ij}, требуемых на сокращение продолжительности операции на время τ_{ij}. Унифицированная линейная система стимулирования определяется функцией стимулирования

(2) $S_{ij}(\tau_{ij}) = \lambda\tau_{ij}$,

определяющей вознаграждение исполнителям операции (i, j) при сокращении ее продолжительности на время τ_{ij}. Коэффициент k_{ij} определяет затраты исполнителей на сокращение продолжительности операции на единицу, а параметр λ равен ставке оплаты исполнителей за каждую единицу сокращения продолжительности операции.

Очевидно, что исполнители согласны на сокращение продолжительности операции на время $\tau_{ij} > 0$, если

(3) $\lambda \geq K_{ij}$.

Суммарные выплаты вознаграждения равны

(4) $$S(\lambda, \tau) = \sum_{(i,j)} \lambda \tau_{ij} = \lambda \sum_{(i,j)} \tau_{ij}$$

Задача. Определить λ и $\{\tau_{ij}\}$, такие что продолжительность проекта уменьшилась на величину $\Delta > 0$, а суммарное вознаграждение (премия) (4) минимально.

Для решения поставленной задачи сначала рассмотрим вспомогательную задачу.

3. Задача о разрезе минимальной мощности

Рассмотрим $(n + 1)$–вершинную сеть с входом 0 и выходом n. Обозначим через $K_{ij} > 0$ пропускную способность дуги $(i, j) \in U$ (U – множество дуг сети). Обозначим через μ путь в сети, соединяющей вход 0 с выходом n.

Определение 1. Пропускной способностью пути μ называется минимальная из пропускных способностей дуг пути

$$C(\mu) = \min_{(i,j)\in\mu} K_{ij} .$$

Определение 2. Мощностью разреза $q(V)$ называется максимальная пропускная способность дуг, заходящих в разрез

$$q(V) = \max_{(i,j)\in W(V)} K_{ij} ,$$

где $W(V)$ – множество дуг заходящих в разрез (напомним, что разрезом называется множество вершин сети, содержащее выход и не содержащее вход [1]).

Заметим, что пропускная способность любого пути не превышает мощности любого разреза. Действительно, для любого пути μ и любого разреза V найдется дуга $(i, j) \in \mu$ и заходящая в разрез V. Имеем

$$C(\mu) \le K_{ij} \le q(V).$$

Поэтому, если найдется путь μ и разрез V, такие что

$$C(\mu) = q(V),$$

то путь μ имеет максимальную пропускную способность, а разрез V имеет минимальную мощность.

Задача 1. Определить разрез минимальной мощности.

Теорема 1 (двойственности). Минимальная мощность разрезов равна максимальной пропускной способности путей.

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы Форда-Фалкерсона [5], доказательство проведем конструктивно. Пометим вершину 0 индексом 0, а остальные вершины индексом $\lambda_i = M$, где M – большое положительное число ($M > \max\limits_{(ij)} K_{ij}$).

k-ый шаг. Рассматриваем все дуги сети. Для каждой вершины j проверяем условие

$$\lambda_j \le \max_{i \in U_j} \min(\lambda_i, K_{ij}),$$

где U_j – множество дуг, заходящих в вершину j.

Если это условие нарушено, то заменяем индекс λ_j на меньший

$$\lambda'_j = \max_{i \in U_j} \min(\lambda_i, K_{ij}).$$

В противном случае оставляем индекс λ_j без изменений. За конечное число шагов индексы установятся. Действительно, последовательность индексов является невозрастающей, причем на каждой итерации, если происходит уменьшение, то на конечную величину.

Докажем, что установившиеся индексы λ_i равны максимальной пропускной способности путей из входа в вершину i. Это справедливо для $n = 1$. Пусть это справедливо для сети из n вершин. Докажем, что тогда это справедливо и для $(n + 1)$ вершин. Покажем, что

$$\lambda_n = \max_{i \in U_n} \min(\lambda_i, K_{in}) \tag{5}$$

является максимальной пропускной способностью путей сети. Заметим, что $\min(\lambda_i, K_{in})$ определяет максимальную пропускную способность всех путей, содержащих дугу (i, n). Следовательно (5) определяет максимальную пропускную способность путей в сети.

Для определения разреза минимальной мощности удалим из сети все дуги, такие что $K_{ij} \le \lambda_n$. Пометим вершину 0 индексом (+). Пусть Q – множество помеченных вершин. Помечаем индексом (+) вершину j, если $(i, j) \in U$ и $i \in Q$, а $j \notin Q$. Покажем, что множество непомеченных вершин является разрезом V сети мощность которого равна λ_n. Во-первых, это разрез сети, поскольку выход $n \in V$, а вход $0 \notin V$. Далее для всех дуг, заходящих в разрез, имеет место неравенство $K_{ij} \le \lambda_n$ (в противном случае вершина j была бы помечена), причем существует хотя бы одна дуга $(i, j) \in V$ такая, что $K_{ij} = \lambda_n$. Теорема доказана.

Пример 1. Рассмотрим сеть на рис. 1.

1 шаг. Индексы вершин $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 1$, $\lambda_4 = 3$, $\lambda_5 = 3$.

2 шаг. $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 1$, $\lambda_4 = 3$, $\lambda_5 = 3$; индексы установились. Поэтому $\max\limits_{\mu} C(\mu) = 3$.

Для определения пути с максимальной пропускной способностью удаляем из сети все дуги с $K_{ij} < \lambda_n$. Все оставшиеся пути имеют пропускную способность, равную λ_n (рис. 2).

Для определения разреза минимальной мощности помечаем вершины 0, 1. Множество вершин 2, 3, 4, 5 образует разрез сети, а множество дуг (0, 2), (0, 3), (0, 4), (1, 2), (1, 5) – это множество дуг, заходящих в разрез. Мощность разреза, очевидно, равна 3.

Если сеть не имеет контуров и вершины имеют правильную нумерацию, то алгоритм существенно упрощается:

1 шаг. Определяем $\lambda_1 = K_{01}$.

k-ый шаг. Определяем $\lambda_k = \max\limits_{i<k} \min(\lambda_i; K_{ik})$.

n-ый шаг. Определяем $\lambda_n = \max\limits_{i<n} \min(\lambda_i, K_{in})$.

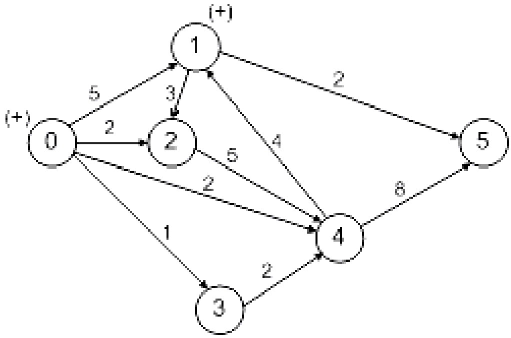

Рис.1. Сеть для примера 1

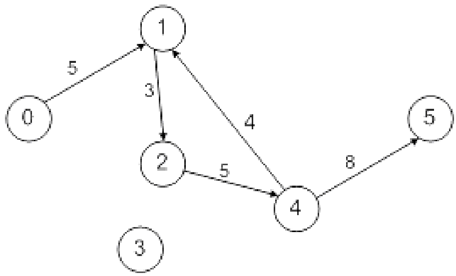

Рис. 2. Сеть без дуг с $k_{ij} < \lambda_n$

4. Синтез оптимальной унифицированной системы

Перейдем к описанию алгоритма синтеза оптимальной унифицированной линейной системы стимулирования. Обозначим D_{ij} – нормативные продолжительности операций, d_{ij} – минимальные продолжительности операций ($\Delta_{ij} = D_{ij} - d_{ij}$).

1 шаг. Полагаем продолжительности всех операций равными D_{ij}.

2 шаг. Определяем сеть критических путей.

3 шаг. Для сети критических путей решаем задачу определения разреза минимальной мощности q_1.

Полагаем $\lambda_1 = q_1$, фиксируем продолжительности на уровне D_{ij} для всех операций таких, что $K_{ij} > q_1$, а также для тех, у которых $d_{ij} = D_{ij}$, и определяем разрез сети V_1 с минимальным числом дуг. Дело в том, что при заданном λ задача минимизации фонда стимулирования сводится к задаче минимизации суммарного сокращения продолжительностей операций. Пусть число дуг разреза равно m_1. В этом случае сокращение продолжительности проекта на 1 требует величины фонда стимулирования q_1m_1.

Увеличим q до q_2, при котором число критических операций таких, что $K_{ij} \leq q_2$, увеличивается, и снова определяем разрез с минимальным числом заходящих дуг m_2.

Если, $q_2m_2 < q_1m_1$, то очевидно, что норматив q_2 выгоднее, чем q_1, хотя $q_2 > q_1$. Продолжаем увеличивать q до тех пор, пока на некотором шаге S не получим $q_S = \max\limits_{(i,j)\in M} K_{ij}$, где M – множество критических операций. Определяем τ, такое что $q_\tau m_\tau = \min\limits_j q_j m_j$.

Сокращаем продолжительности дуг, заходящих в разрез V_τ, до тех пор, пока в сети не появится новый критический путь либо пока продолжительность хотя бы одной дуги, заходящей в разрез, не будет равна минимальной. Далее возвращаемся к шагу 2. Алгоритм заканчивается, когда в сети появляется хотя бы один критический путь, у которого продолжительности всех работ равны минимальным.

Пример 2. Рассмотрим сеть на рис. 3 с данными таблицы 1.

Итерация 1. На рис. 4. приведена сеть, состоящая из критических операций.

Числа у дуг в скобках равны пропускным способностям K_{ij}. Числа в квадратных скобках у вершин равны максимальным пропускным способностям путей из входа в соответствующую вершину. Минимальная мощность разрезов равна 3, полагаем $q_1 = 3$.

Для определения разреза с минимальным числом заходящих дуг таких, что $K_{ij} \leq q_1$, полагаем пропускные способности дуг с $K_{ij} \leq q_1$ равными 1, а пропускные способности дуг с

$K_{ij} > q_1$ – равными M (M – большое число), и определяем максимальный поток и минимальный разрез в полученной сети. В данном случае решение очевидно. В минимальный разрез v_1 заходят дуги (1, 3) (1, 4), число которых равно $m_1 = 2$.

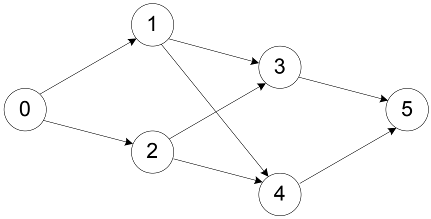

Рис. 3. Сеть для примера 2

Таблица 1. Данные о параметрах d_{ij}, D_{ij} и K_{ij}.

(i, j)	(0, 1)	(0, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(2, 3)	(2, 4)	(3, 5)	(4, 5)
d_{ij}	2	1	4	1	2	3	2	4
D_{ij}	6	3	7	5	3	7	5	7
K_{ij}	5	2	3	1	3	2	6	7

Берем следующее значение $q_2 = 5$. Теперь в минимальный разрез заходит всего одна дуга (0, 1), то есть $m_2 = 1$. Так как $q_1m_1 = 6 > q_2m_2 = 5$, то сокращаем продолжительность операции (0, 1) на $\Delta = 1$. Больше нельзя, так как при $\Delta = 1$ в сети появляется новый критический путь (0, 2, 4, 5). Продолжительность проекта равна 17, фонд стимулирования равен 5.

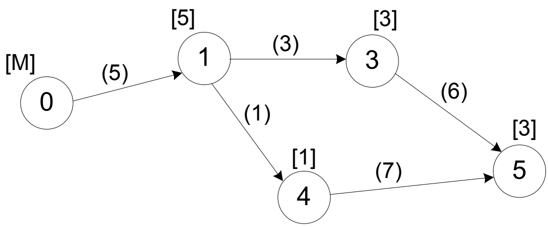

Рис.4. Сеть критических операций на шаге 1

Итерация 2. Сеть критических операций приведена на рис. 5.

Минимальная мощность разреза равна 3. Множество дуг, заходящих в разрез: (0, 2); (1, 3); (1, 4). Берем $q_1 = 3$ и определяем разрез с минимальным числом дуг. В этот разрез заходят дуги (0, 2); (1, 3); (1, 4), т. е. $m_1 = 3$. Следующее значение $q_2 = 5$. Минимальное число дуг, заходящих в разрез, равно $m_2 = 2$. Дальнейшее увеличение q нецелесообразно, так как нет ни одного разреза с числом заходящих дуг меньше 2. Так как $q_1m_1 = 9 < q_2m_2 = 10$, то сокращаем продолжительности дуг (0, 2); (1, 3); (1, 4) на $\Delta = 2$. Больше нельзя, так как при $\Delta = 2$ продолжительность операции (0, 2) равна минимальной. Продолжительность проекта равна $T = 15$, фонд стимулирования увеличился на $\Delta\Phi = 18$.

Итерация 3. Сеть критических операций приведена на рис. 6.

Минимальная мощность разрезов по-прежнему равна 3. Берем $q_1 = 3$ и определяем разрез с минимальным числом заходящих дуг. Это дуги (1, 3); (1, 4); (2, 4), $m_1 = 3$. Увеличение q до $q_2 = 5$ не дает выигрыша, как в предыдущем случае. Сокращаем продолжительности операций на $\Delta = 1$. Больше нельзя, поскольку при $\Delta = 1$ продолжительность операции (1, 3) равна минимальной. Продолжительность проекта равна 14, фонд стимулирования увеличился на $\Delta\Phi = 9$.

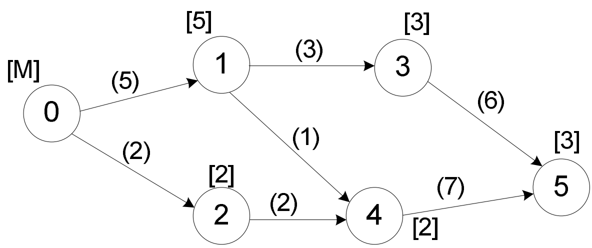

Рис.5. Сеть критических операций на шаге 2

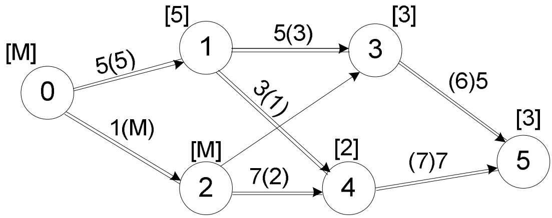

Рис. 6. Сеть критических операций на шаге 3

Итерация 4. Сеть критических путей не изменилась. Полагаем $K_{13} = M$ и определяем минимальную мощность разрезов. В данном случае она равна 5. Полагаем $q_1 = 5$. Минимальное число заходящих дуг равно $m_1 = 2$. Это дуги (0, 1) и (2, 4). Сокращаем продолжительности операций (0, 1) и (2, 4) на $\Delta = 3$. Больше нельзя, так как их продолжительности становятся равными минимальным. Продолжительность проекта равна $T = 11$, фонд стимулирования увеличился на $\Delta\Phi = 30$.

Итерация 5. Сеть критических путей не изменилась, однако $K_{01} = K_{24} = M$ (рис. 7).

Минимальная мощность разрезов равна 7. Берем $q_1 = 7$. В разрез с минимальным числом заходящих дуг заходят дуги (3, 5) и (4, 5). Сокращаем их продолжительности на $\Delta = 3$. Продолжительность проекта равна 8, фонд стимулирования увеличился на $\Delta\Phi = 42$.

Алгоритм окончен, так как в сети появились два критических пути, продолжительности операций которых равны минимальным.

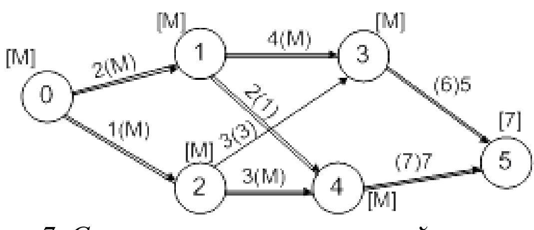

Рис. 7. Сеть критических операций на шаге 4

Заключение

Рассмотренный подход к разработке унифицированных линейных механизмов сокращения сроков реализации проекта можно обобщать в различных направлениях. Во-первых, можно рассмотреть унифицированные скачкообразные системы стимулирования сроков сокращения проектов. Во-вторых, обобщить метод решения на случай нелинейных (кусочно-линейных) функций затрат. Наконец, представляют интерес групповые системы стимулирования, в которых исполнители разбиты на группы, так что для каждой группы применяется своя унифицированная система стимулирования. Эти и другие задачи, связанные с разработкой механизмов стимулирования в управлении проектами, требуют дальнейших исследований.

Литература

1. БУРКОВ В. Н., ЗАЛОЖНЕВ А. Ю., НОВИКОВ Д. А. *Теория графов в управлении организационными системами*. – М.: СИНТЕГ, 2001. – 124 с.
2. БУРКОВ В. Н., НОВИКОВ Д. А. *Теория активных систем: состояние и перспективы*. – М.: СИНТЕГ, 1999. – 128 с.
3. ГЕРМЕЙЕР Ю. Б. *Игры с непротивоположными интересами*. – М.: Наука, 1976. – 327 с.
4. МУЛЕН Э. *Кооперативное принятие решений: аксиомы и модели*. – М.: Мир, 1991. – 464 с.
5. НОВИКОВ Д. А. *Теория управления организационными системами*. – М.: Московский психолого-социальный институт, 2005. – 584 с.

INSENTIVE MECHANISMS TO REDUCE PROJECTS EXECUTION TIME UNDER LINEAR EXPENSE FUNCTIONS

Vladimir Burkov, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Cand.Sc., Doctor of Science, professor (vlab17@bk.ru).
Alexandr Tsvetkov, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Doctor of Science, professor (olvinogr@ipu.ru).
Anatoly Sychev, Research Institute of Transport Construction, Moscow, General Director (mail@tsniis.com).

Abstract: Incentive problems to reduce projects execution time are put. The optimal unified linear incentive scheme is found that reduces project execution time. The solution is based on the notions of network path capacity and the power of a cutset. A sort of duality theorem is proven to establish the equality of the maximum ways capacity and the minimum power of cutsets.

Keywords: incentive mechanism, project execution, expense function.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии Д.А. Новиковым.