Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН

УПРАВЛЕНИЕ БОЛЬШИМИ СИСТЕМАМИ

Специальный выпуск 26.1

СБОРНИК ТРУДОВ

Ноябрь 2009

ISSN 1819-2467

Регистрационный номер Эл №ФС77-27285 от 22.02.2007

Москва – 2009

СПЕЦИАЛЬНЫЙ ВЫПУСК СБОРНИКА ТРУДОВ «УПРАВЛЕНИЕ БОЛЬШИМИ СИСТЕМАМИ»

ВЫПУСК 26.1: МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ИГР И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Настоящим выпуском **Сборник трудов «Управление большими системами»** начинает практику специальных (как правило, тематических) выпусков, выходящих на непериодической основе в дополнение к основным периодическим выпускам.

Подобная практика широко распространена в научных журналах. Она позволяет оперативно знакомить читателей с современным состоянием того или иного направления науки, а также сделать журнал более удобным для своих читателей, собирая в одном выпуске сходные по тематике статьи.

В подготовке настоящего выпуска принимал участие **Санкт-петербургский региональный редакционный совет Сборника трудов «Управление большими системами»** и **Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН**.

Материалы настоящего специального выпуска представляют собой избранные статьи трех последних выпусков издаваемого Карельским научным центром РАН и Санкт-Петербургским государственным университетом журнала **«Математическая теория игр и ее приложения»**.

Уважаемые читатели! Редакционная коллегия Сборника трудов «Управление большими системами» надеется на продолжение и развитие традиции организации специальных выпусков. С замечаниями и предложениями Вы можете обращаться в редакционную коллегию по адресу электронной почты **ubs.ipu@mail.ru**.

Вниманию авторов и читателей! Опубликованные в настоящем выпуске статьи, первоначально вышедшие в одном из номеров журнала «Математическая теория игр и ее приложения» за 2009 год, **не считаются новыми публикациями**. Однако при ссылке на любую из опубликованных статей можно ссылаться как на журнал «Математическая теория игр и ее приложения», так и на настоящий выпуск сборника трудов «Управление большими системами».

mgta.krc.karelia.ru

Журнал "МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ИГР И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ"

ЖУРНАЛ “МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ИГР И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ”

Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН

Журнал публикует статьи, касающиеся **теоретико-игрового анализа и методов оптимального управления** для решения прикладных задач **в экономике, экологии, политике и менеджменте**.

Целью публикаций задач стратегического анализа является поддержка взаимосвязи между математической теорией и приложениями. Публикуемые статьи содержат строгий анализ современных проблем и перспективы новых исследований. Журнал принимает статьи, связанные с теоретико-игровым подходом из всех областей применения в экономике, менеджменте, экологии и политике.

Важной задачей журнала является поощрение междисциплинарных взаимосвязей (математические и экономические науки, математические и биологические науки, математические и политические науки) и взаимодействия исследователей в области теории игр. Журнал «МТИ&П» приветствует не только статьи по теории игр и приложениям, но и технические заметки, комментарии, примеры, численный анализ, моделирование и вычислительные алгоритмы.

ubs.mtas.ru

Интернет-сайт электронного периодического научного издания «Управление большими системами: сборник трудов»

УПРАВЛЕНИЕ БОЛЬШИМИ СИСТЕМАМИ

ЭЛЕКТРОННЫЙ СБОРНИК НАУЧНЫХ ТРУДОВ ИНСТИТУТА ПРОБЛЕМ УПРАВЛЕНИЯ ИМ. В.А. ТРАПЕЗНИКОВА РАН

С 1998 года Институт проблем управления РАН выпускает периодический сборник трудов ученых, занимающихся разработкой и исследованием математических моделей управления большими (социально-экономическими, организационными, организационно-техническими и др.) системами. Все статьи, публикуемые в сборнике, проходят рецензирование ведущими специалистами по теории управления.

С 2006 года сборник "Управление большими системами" вместе с ведущим журналом ИПУ РАН "Проблемы управления" – включены в Российский индекс научного цитирования (РИНЦ).

С июля 2007 года Сборник входит в список ВАК (перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертации на соискание ученой степени доктора и кандидата наук):

* по управлению, вычислительной технике и информатике;
* по электронике, измерительной технике, радиотехнике и связи; по энергетике.

Уважаемые коллеги! Приглашаем Вас опубликовать Вашу статью в очередном выпуске сборника "Управление большими системами"!

Периодичность сборника - 4 раза в год. Время выхода прошедшей рецензирование статьи - 3-4 месяца. Плата с авторов за публикацию рукописей не взимается.

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова

УПРАВЛЕНИЕ БОЛЬШИМИ СИСТЕМАМИ

СБОРНИК ТРУДОВ

Выпуск 26.1
Математическая теория игр и ее приложения

Москва – 2009

УДК 519 ISSN 1819-2467
ББК 32.81
У 67
Управление большими системами / Сборник трудов. Выпуск 26.1. М.: ИПУ РАН, 2009. – 408 с. **Дата опубликования:** 30.11.2009.

Адрес редакции: 117997, г. Москва, ул. Профсоюзная, д. 65.
Адрес в Интернет: ubs.mtas.ru.
Номер гос. регистрации электронного научного издания (ЭНИ): 0420900023.

СОДЕРЖАНИЕ

Системный анализ

Васильев В. А.
Об одной аксиоматизации обобщенного расширения Оуэна 5

Винниченко С. В.
Непрерывная игра НИМ 18

Кацев И. В., Яновская Е. Б.
Промежуточные между пред k- и пред n-ядрами решения кооперативных игр 32

Мазалов В. В., Сакагучи М.
Равновесие в бескоалиционной игре n лиц с выбором момента времени 55

Наумова Н. И.
Ограниченная согласованность, порожденная функциями полезности коалиций 79

Петросян Л. А., Зенкевич Н. А.
Принципы устойчивой кооперации 100

Петросян Л. А., Седаков А. А.
Многошаговые сетевые игры с полной информацией 121

Тур А. В.
Линейно-квадратичные неантагонистические дискретные игры 139

Информационные технологии в управлении

Чуйко Ю. В.
Задача маршрутизации с разделяемым трафиком и неполной информацией 164

Управление в социально-экономических системах

Галегов А. И., Гарнаев А. Ю.
Налоговая игра в дуополии Курно 177

Гарнаев А. Ю., Торицын А. О.
Игровая задача справедливого распределения ресурсов при наличии активных помех 193

Губанов Д. А., Новиков Д. А., Чхартишвили А. Г.
Модели репутации и информационного управления в социальных сетях 209

Зенкевич Н. А., Колабутин Н. В., Янг Д. В. К.
Стохастическая модель устойчивого совместного предприятия 235

Ивашко А. А.
Игра наилучшего выбора двух объектов с полной информацией.. 270

Искаков М. Б., Павлов П. А.
Равновесие в безопасных стратегиях в модели пространственной конкуренции Хотеллинга.................................... 287

Коргин Н. А.
Эквивалентность и score неманипулируемость неанонимных приоритетных механизмов распределения ресурсов......... 319

Угольницкий Г. А.
Оптимизационные и теоретико-игровые модели управления инвестиционно-строительными проектами 348

Управление в медико-биологических и экологических системах

Реттиева А. Н.
Кооперативное регулирующее условие в задаче разделения биоресурсов 366

Шевкопляс Е. В.
Уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана в дифференциальных играх со случайной продолжительностью 385

УДК 519.83
ББК 22.18

ОБ ОДНОЙ АКСИОМАТИЗАЦИИ ОБОБЩЕННОГО РАСШИРЕНИЯ ОУЭНА [1] [2]

Васильев В. А. [3] ,
(Учреждение Российской академии наук Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск)

Предлагается новый подход к построению обобщенного расширения Оуэна, базирующийся на идеях неаддитивного интегрирования. Большое внимание уделяется вопросам аксиоматической характеризации этого обобщенного расширения как для дискретных, так и для неатомических игр. Основные результаты работы показывают, что для широких классов кооперативных игр исчерпывающее описание рассматриваемого расширения может быть получено с использованием известной аксиоматизации Аумана-Шепли, разработанной для характеризации мультипликативного продолжения неатомических игр на «идеальные» коалиции.

Ключевые слова: регулярная полиномиальная игра, обобщенное расширение Оуэна, неатомическая кооперативная игра, мультипликативное продолжение Аумана-Шепли.

Введение

В статье дается описание нового подхода к построению обобщенного расширения Оуэна для некоторых классов так называе-

[1] *Работа поддержана грантами РФФИ №07-06-00363, РГНФ №09-06-00337 и грантом Президента РФ №НШ 4113.2008.6.*

[2] *Текст приводится в соответствии с изданием «Математическая теория игр и ее приложения. – 2009. – Т. 1. №2».*

[3] *Валерий Александрович Васильев, доктор физико-математических наук, профессор, (vasilev@math.nsc.ru).*

мых регулярных полиномиальных кооперативных игр. Этот подход основан на использовании неаддитивного интегрирования, объединяющего и конкретизирующего идеи v-интегрируемости, предложенные в [2, 5, 6]. Помимо построения и анализа ряда конструкций продолжения, связанных с неаддитивным интегрированием, большое внимание уделяется различным аспектам аксиоматизации свойств отображения, сопоставляющего играм их обобщенные расширения Оуэна. В частности, один из главных результатов работы показывает, что в качестве искомой аксиоматизации для некоторых классов неатомических кооперативных игр можно использовать аксиоматизацию Аумана-Шепли [1], предназначенную для описания мультипликативного продолжения неатомических игр, необходимого для бесконечномерного обобщения известной интегральной формулы Оуэна [1, 4]. Как одно из важных следствий указанного результата получена явная формула для мультипликативного продолжения Аумана-Шепли, представляющая интерес как для численного отыскания вектора Шепли неатомических кооперативных игр, так и для теоретического анализа полярных форм этих игр [5, 6]. Что касается дискретных кооперативных игр, то для этого класса найдена аксиоматизация классического расширения Оуэна, отличающаяся от аксиоматизации Аумана-Шепли лишь ослабленным вариантом аксиомы мультипликативности (необходимо подчеркнуть, что эта аксиома не выполняется в полном объеме ни для дискретных, ни для смешанных игр). Именно, в отличие от неатомического случая, расширение Оуэна произведения двух дискретных игр равно произведению расширений сомножителей только при условии дизъюнктности минимальных носителей этих игр.

Полученные результаты могут найти применение в анализе так называемых полярных форм неатомических кооперативных игр и их использовании для представления вектора Шепли (подробности, касающиеся полярных форм, см. в [5, 6]).

1. Регулярные полиномиальные игры

Ниже дается описание основного класса игр, используемого в главных конструкциях работы (и, прежде всего, в явном определении мультипликативного продолжения Аумана-Шепли).

Пусть (Q, d) – произвольный непустой метрический компакт с метрикой d. Обозначим через B борелевскую σ-алгебру этого компакта и рассмотрим совокупность $\mathcal{V}$ фунций множества $v : B \to \mathbf{R}$, удовлетворяющих требоанию $v(\emptyset) = 0$. Согласно теоретико-игровой терминологии [1] тройку $\Gamma = (Q, B, v)$ с v из $\mathcal{V}$ называют кооперативной игрой (с побочными платежами), элементы множества Q – игроками, а подмножества $e \subseteq Q$, принадлежащие алгебре B – коалициями игроков. Напомним, что значение $v(e)$ интерпретируется как максимальный гарантированный доход коалиции e. В дальнейшем, как это принято в теоретико-игровой литературе, кооперативными играми будем называть и сами функции v.

Детальное описание интересующего нас класса полиномиальных кооперативных игр требует введения некоторых вспомогательных понятий и обозначений (большинство из них, включая используемые понятия теории векторных решеток, можно найти в [5, 6]; там же указан ряд полезных ссылок на литературу по смежной тематике). Пусть e – произвольный элемент алгебры B. Обозначим через $H(e)$ совокупность конечных B-измеримых разбиений e и положим $H = \cup_{e \in B} H(e)$. Далее, для каждого разбиения $\eta = \{e_i\}_{i \in \Omega} \in H$, состоящего из m элементов ($|\Omega| = m$), и для функции $v \in \mathcal{V}$ через $v(\eta) = v(\{e_i\}_{i \in \Omega})$ обозначим *полиномиальную m-разность,* определяемую формулой

$$(1) \qquad v(\eta) := \sum_{\omega \subseteq \Omega} (-1)^{|\Omega| - |\omega|} \, v(\cup_{i \in \omega} e_i),$$

где, как обычно, символ $|\omega|$ обозначает число элементов конечного множества ω. *Полиномиальная вариация* $||v||_o$ функции $v \in \mathcal{V}$

определяется формулой

$$|v\|_o := \sup\{\sum_{\omega\subseteq\Omega} |v(\eta^\omega)| \;\Big|\; \eta = \{e_i\}_{i\in\Omega} \in H(Q)\}$$

где $\eta^\omega := \{e_i\}_{i\in\omega}$, а $v(\eta^\omega)$ определена согласно формуле (1). Говорят, что функция $v \in \mathcal{V}$ имеет ограниченную полиномиальную вариацию, если $||v||_o < \infty$. Положим $V := \{v \in \mathcal{V} \;\Big|\; \|v\|_o < \infty\}$ и определим конус положительных элементов векторного пространства V, наделяющий его структурой векторной решетки. Напомним [2, 5, 6], что игра $v \in \mathcal{V}$ называется *вполне положительной*, если $v(\eta) \geqslant 0$ для любого разбиения $\eta = \{e_i\}_1^m$ из $\in H$. В качестве вышеупомянутого конуса положительных элементов в дальнейшем рассматривается выпуклый конус вполне положительных игр. Обозначим этот конус через V_+. Ясно, что все элементы конуса V_+ имеют ограниченную полиномиальную вариацию. Кроме того, как показано в [5], частичный порядок $u \geqslant_o v \iff u - v \in V_+$, индуцируемый V_+ (вместе с нормой полиномиальной вариации $\|\cdot\|_o$), наделяет V структурой банахова векторного кольца. Более подробно [5]: V является банаховой и дедекиндово полной векторной решеткой, с согласованными структурами упорядоченного и нормированного пространства (монотонная порядковая сходимость влечет монотонную сходимость по норме).

Следуя стандартным обозначениям теории векторных решеток, для каждой игры $v \in V$ введем в рассмотрение положительную (v^+), отрицательную (v^-) и полную ($|v|$) вариацию этой игры, полагая $v^+ := v \vee 0$, $v^- := (-v) \vee 0$ и $|v| := (-v) \vee v$, соответственно (здесь через $u \vee w = \sup\{u, w\}$ и $u \wedge w = \inf\{u, w\}$ обозначаются точная верхняя и нижняя грани двухэлементного множества $\{u, v\}$ в полуупорядоченном векторном пространстве $(V, \geqslant_o)$). Обозначим через F совокупность всех непустых замкнутых подмножеств метрического компакта Q. Укажем типичный класс игр, фигурирующих в дальнейших рассмотрениях.

Определение 1. *Игра* $v \in V$ *называется регулярной, если ее полная вариация* $|v|$ *удовлетворяет условию:* $|v|(\{e_i\}_1^m) = \sup\{|v|(\ \{f_i\}_1^m\ )\ \Big|\ f_i \subseteq e_i,\ f_i \in F,\ i = 1, \ldots, m\}$ *для любого разбиения* $\eta = \{e_i\}_1^m \in H$.

Совокупность регулярных игр обозначим через $rV = rV(B)$.

Определение 2. *Игра* $v \in rV$ *называется регулярной полиномиальной игрой порядка* n*, если все ее полиномиальные разности порядка* $n+1$ *обращаются в* 0*:* $v(\{e_i\}_1^{n+1}) = 0$ *для каждого разбиения* $\{e_i\}_1^{n+1} \in H$.

Обозначим через rV^n пространство всех регулярных полиномиальных игр порядка n и положим $rpV = \cup_{n=1}^{\infty} rV^n$. Будем говорить, что игра v является *регулярной полиномиальной игрой*, если v принадлежит rpV.

2. Неаддитивное интегрирование и обобщенное расширение Оуэна

Для описания интегрирования по полиномиальной неаддитивной функции множества из rpV, зафиксируем некоторое натуральное число $n \geqslant 1$ и функцию $v \in rV^n$. Первое, что потребуется для характеризации искомого интегрирования – построить продолжение v на n-тую симметрическую степень $B^{[n]}$ алгебры B. С этой целью нам понадобится определение n-той симметрической степени $e^{[n]}$ коалиции $e \in B$, задаваемое формулой: $e^{[n]} = \{\tau \subseteq e \Big| |\tau| \leqslant n\}$, где, как и ранее, через $|\tau|$ обозначается число элементов конечного множества τ.

Определение 3. *Симметрической степенью порядка* n *алгебры* B *называется наименьшая алгебра подмножеств множества* $Q^{[n]}$*, содержащая семейство симметрических степеней* $\{e^{[n]} \Big| e \in B\}$ *всех элементов алгебры* B.

На основании описания строения алгебры $B^{[n]}$, предложенного в [5], установлено, что существует единственная аддитивная функция множества $\lambda_v : B^{[n]} \to \mathbf{R}$, удовлетворяющая условию: $\lambda_v(e^{[n]}) = v(e)$ для каждого $e \in B$. Более того, учитывая регулярность v и компактность метрического пространства (Q, d), с помощью стандартной аргументации можно доказать, что имеется единственное счетно-аддитивное продолжение μ_v функции λ_v на наименьшую σ-алгебру $\sigma B^{[n]}$, содержащую алгебру $B^{[n]}$ (другими словами, аддитивная функция $\lambda_v : B^{[n]} \to \mathbf{R}$ допускает единственное счетно-аддитивное продолжение $\mu_v : \sigma B^{[n]} \to \mathbf{R}$ на σ-алгебру $\sigma B^{[n]}$, порожденную алгеброй $B^{[n]}$). Интересно отметить, что σ-алгебра $\sigma B^{[n]}$ имеет достаточно простое описание в традиционных терминах теории меры.

Предложение 1. *Алгебра $\sigma B^{[n]}$ совпадает с борелевской σ-алгеброй метрического пространства $(Q^{[n]}, d^{[n]})$, где $d^{[n]}$ есть сужение стандартной метрики Хаусдорфа на $Q^{[n]}$: $d^{[n]}(\tau, \tau') :=$ $\min \left\{\epsilon \,\middle|\, \tau \subseteq \tau'_\epsilon, \tau' \subseteq \tau_\epsilon\right\}$, где τ_ϵ, τ'_ϵ - ϵ-окрестности τ, τ' в пространстве (Q, d).*

Пусть теперь f – произвольный элемент векторного пространства $I(Q, B)$ ограниченных и B-измеримых функций, определенных на Q. Введем *полиномиальное продолжение* $f_\rho^{[n]}$ функции f на $Q^{[n]}$, определяемое формулой

$$f_\rho^{[n]}(\tau) := \prod_{t \in \tau} f(t), \ \tau \in Q^{[n]}.$$

Нетрудно проверить, что полиномиальное продолжение каждой функции $f \in I(Q, B)$ является σB-измеримой ограниченной функцией, определенной на множестве $Q^{[n]}$ (другими словами, для каждой функции $f \in I(Q, B)$ ее полиномиальное продолжение $f_\rho^{[n]}$ принадлежит пространству $I(Q^{[n]}, \sigma B^{[n]})$ ограниченных

$\sigma B^{[n]}$-измеримых функций, определенных на $Q^{[n]}$. Следовательно, для любой функции $f \in I(Q, B)$ ее продолжение $f_\rho^{[n]}$ является μ_v-интегрируемой функцией. Но это означает, в частности, что для каждого $v \in rV^n$ функционал $P_v : I(Q, B) \to \mathbf{R}$, задаваемый формулой

$$(2) \qquad P_v(f) := \int f_\rho^{[n]} d\mu_v, \qquad f \in I(Q, B),$$

определен корректно.

Используя введенные обозначения и конструкции, сформулируем одно из главных понятий статьи.

Определение 4. *Для каждого $v \in rV^n$ функционал P_v, определяемый формулой (2), называется обобщенным расширением Оуэна кооперативной игры v.*

Нетрудно проверить, что в случае конечного множества Q введенное понятие обобщенного расширения Оуэна совпадает с классическим определением полилинейного продолжения кооперативной игры, предложенным Оуэном в [4]. Что касается бесконечного случая, то здесь мы отметим лишь некоторые характерные свойства обобщенного расширения Оуэна, показывающие, что и в случае бесконечного числа игроков выполняются аналоги ряда ключевых соотношений, типичных для конечных кооперативных игр. Для формулировки соответствующего результата потребуются некоторые дополнительные определения.

Определение 5. *Будем говорить, что функция $v \in rV^n$ является однородной порядка n, если она дизъюнктна с пространством rV^{n-1} (т. е. выполняется соотношение: $|v| \wedge |u| = 0$ для всех $u \in rV^{n-1}$). Совокупность однородных порядка n регулярных полиномиальных функций обозначим через $rV^{(n)}$ ($V^0 = V^{(0)} := \{0\}$).*

Предложение 2. *Для всех $n \geqslant 1$ пространства $rV^{(n)}$ являются полосами пространства rV.*

Отметим сразу же, что согласно Предложению 2, для каждой функции $v \in rpV$ и для каждого натурального $m \geqslant 1$ существует проекция $v_{(m)}$ на $rV^{(m)}$, определяемая формулой

$$(3)\ \ v_{(m)} := \sup\left\{u \in rV^{(m)} \middle| v^{+} \geqslant_0 u\right\} - \sup\left\{u \in rV^{(m)} \middle| v^{-} \geqslant_0 u\right\}.$$

Переходя к описанию некоторых важных для дальнейшего свойств обобщенного расширения Оуэна, напомним, что ниже через χ_e обозначается индикаторная функция множества $e \in B$, через $\mathcal{P}^{(n)}$ – совокупность однородных порядка n непрерывных полиномиальных функционалов на $I(Q,B)$ (с обычной нормой

$||f||_\infty := \sup\left\{\ |f(t)|\ \middle|\ t \in Q\right\}$ на пространстве $I(Q,B)$), а через

$\mathcal{P}_+$ – совокупность непрерывных полиномиальных функционалов l на $I(Q,B)$, удовлетворяющих неравенствам:

$$\sum_{\omega \subseteq \{1,\ldots,m\}} (-1)^{m-|\omega|} l\Big(\sum_{i\in\omega} f_i\Big) \geqslant 0$$

для любых $m \geqslant 1$ и $f_i \in I(Q,B),\ i = 1,\ldots,m$.

Теорема 1. *Для любой игры $v \in rV^n$ обобщенное расширение Оуэна P_v является непрерывным полиномиальным функционалом порядка n на нормированном пространстве $(I(Q,B), ||\cdot||_\infty)$. При этом выполняются следующие соотношения:*

$(P.1)$ $P_v(\chi_e) = v(e)$ для любой коалиции $e \in B$;

$(P.2)$ $P_v \in \mathcal{P}_+$, если $v \in rV^n_+ := rV^n \cap V_+$;

$(P.3)$ $P_v \in \mathcal{P}^{(n)}$, если $v \in rV^{(n)}$;

$(P.4)$ $|P_v(f)| \leqslant \sum_{m=1}^{n} ||f||^m_\infty \cdot ||v_{(m)}||_o$ для любой функции $f \in I(Q,B)$

(здесь $v_{(m)}$ – однородные компоненты игры v, определяемые формулой (3)).

3. Аксиоматизация расширения Оуэна: неатомический случай

Напомним сначала аксиоматизацию мультипликативного продолжения для неатомических кооперативных игр, предложенную в [1] в связи с необходимостью обобщения известной интегральной формулы Оуэна на случай бесконечного множества игроков. Для простоты ограничимся случаем пространства $pvNA$, представляющего из себя замыкание в рассматривавшейся выше норме полиномиальной вариации $||\cdot||_o$ линейной оболочки всевозможных степеней $\mu^k,\ k \geqslant 1$, неатомических мер μ. Как и в [1], будем рассматривать случай, когда $Q = [0,1]$, а B – борелевская σ-алгебра единичного интервала $[0,1]$. *Продолжение φ Аумана-Шепли игры v* на пространство $I(Q,B)$ определяется неявным образом с помощью указания свойств оператора φ, сопоставляющего каждой игре $v \in pvNA$ ее расширение $\varphi(v) : I(Q,B) \to \mathbf{R}$ (с класса индикаторных функций на векторное пространство всех ограниченных B-измеримых функций на Q):

$(Qw.1)$ $\varphi(v)(\chi_e) = v(e), \quad v \in pvNA,\ e \in B;$

$(Ow.2)$ $\varphi(\alpha v + \beta w) = \alpha\varphi(v) + \beta\varphi(w), \quad \alpha, \beta \in \mathbf{R},\ v, w \in pvNA;$

$(Ow.3)$ $\varphi(v \cdot w) = \varphi(v) \cdot \varphi(w), \quad u, w \in pvNA;$

$(Ow.4)$ $\varphi(v)(f) = \int f dv, \quad f \in I(Q,B), v \in rV^1.$

В заключение этого пункта сформулируем один из главных результатов работы – аксиоматическое описание обобщенного расширения Оуэна P_v на пространстве $pvNA$.

Теорема 2. *Отображение $\varphi : pvNA \to \mathcal{P}$ удовлетворяет условиям $(Ow.1) - (Ow.4)$ тогда и только тогда, когда выполняются соотношения*

$$\varphi(v) = P_v, \quad v \in pvNA.$$

4. Аксиоматизация расширения Оуэна: конечные игры

В заключение остановимся на особенностях аксиоматизации расширения Оуэна для случая, когда компакт Q конечен (и, тем самым, все определенные на нем регулярные кооперативные игры заведомо дискретные, атомические). Итак, пусть $|Q| = n$ для некоторого натурального n. Не уменьшая общности, будем считать, что $Q = \{1, \ldots, n\}$, а алгебра B представляет из себя семейство 2^Q – совокупность всех непустых подмножеств множества Q (элементы алгебры 2^Q, как это принято в теории конечных кооперативных игр, будем обозначать большими латинскими буквами: $S, T, \ldots$). Рассмотрим произвольную кооперативную игру n лиц $v : B \to \mathbf{R}$ и напомним [1], что ее (классическим) *полилинейным расширением Оуэна* называется отображение $\bar{P}_v^n : I_n \to \mathbf{R}$, определенное на единичном кубе $I_n := \{(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbf{R}_+^n \big| t_i \leqslant 1,\ i \in Q\}$ формулой
(4)

$$\bar{P}_v^n(v)(t_1, \ldots, t_n) := \sum_{T \in B} v(T) \prod_{i \in T} t_i \prod_{j \in Q \setminus T} (1 - t_j), \quad (t_1, \ldots, t_n) \in I_n.$$

В дальнейшем для удобства анализа вместо $\bar{P}_v^n$ будем рассматривать отображение $P_v^n : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, определяемое уже на всем пространстве $\mathbf{R}^n$ по формуле, задаваемой правой частью соотношения (4). Собирая в этой формуле коэффициенты при мономах $\prod_{i \in T} t_i$, получаем следующее представление для отображения P_v^n :

$$P_v^n(t_1, \ldots, t_n) = \sum_{T \in B} v_T \prod_{i \in T} t_i, \quad (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbf{R}^n,$$

где v_T – так называемые дивиденды Харшаньи [3] игры v, определяемые как коэффициенты разложения $v = \sum_{T \in B} v_T u^T$ функции v по стандартному базису $\{u^T\}_{T \in B}$ векторного пространства

$V_n = rpV(B)$. Напомним, что игра u^T определяется соотношениями: $u^T(S) = 1$, когда $T \subseteq S$, и $u^T(S) = 0$ в остальных случаях. Отметим еще, что в рассматриваемом дискретном случае пространство V_n состоит из всех функций $v : B \to \mathbf{R}$, удовлетворяющих единственному условию $v(\emptyset) = 0$.

Как показывает элементарная проверка, отображение $v \mapsto P_v^n$, $v \in V_n$, удовлетворяет всем требованиям $Ow.1 - Ow.4$, за исключением условия $Ow.3$. Оказывается, что в рассматриваемом конечномерном случае мультипликативность отображения $v \mapsto P_v^n$ гарантируется лишь при дизъюнктности так называемых минимальных носителей сомножителей. Напомним, что коалиция $R \subseteq Q$ называется *носителем игры* v, если выполняются соотношения:

(5) $\qquad v(T \cap R) = v(T) \quad$ для каждой коалиции $\quad T \in B.$

Совокупность всех носителей игры v будем обозначать через $Supp\ v$. Непосредственно из соотношения (5) вытекает, что $Supp\ v \neq \emptyset$, и при этом общая часть $Q_v = \bigcap_{R \in Supp\ v} R$ всех элементов семейства $Supp\ v$ также принадлежит этому семейству. Тем самым, Q_v является наименьшим (относительно вложения) элементом семейства $Supp\ v$, чем и объясняется вводимая терминология: множество Q_v будем называть *наименьшим носителем игры* v. Отметим, что в ряде случаев удобнее более конструктивное задание наименьшего носителя Q_v, определяемое формулой

$$Q_v = \{i \in Q \big| \text{ существует } T \in B_i \quad \text{такое, что} \quad v_T \neq 0\},$$

где, как обычно, $B_i := \{T \in B \big| i \in T\}$.

Используя обозначения, максимально приближенных к стандартным, сформулируем аналоги условий (Ow.1)-(Ow.4) для случая игр с конечным (фиксированным) числом участников (далее $V_n := rV(Q)$ - совокупность всех кооперативных игр n лиц с побочными платежами на алгебре B, χ_T – индикаторная функция множества $T \subseteq Q$, а $\mathcal{P}_n$ - пространство полиномов, заданных на n-мерном арифметическом пространстве $\mathbf{R}^n$):

$(Qw_n.1)\ \varphi_n(v)(\chi_T) = v(T), \quad v \in V_n,\ T \in B;$

$(Ow_n.2)$ $\varphi_n(\alpha v+\beta w)=\alpha\varphi_n(v)+\beta\varphi_n(w),\quad \alpha,\beta\in\mathbf{R},\ v,w\in V_n$;

$(Ow_n.3)$ $\varphi_n(v\cdot w)=\varphi(v)_n\cdot\varphi_n(w),\quad$ если $\quad Q_u\cap Q_w=\emptyset$;

$(Ow_n.4)$ $\varphi_n(v)(t_1,\ldots,t_n)=\sum_{i\in Q}v(i)t_i,\ (t_1,\ldots,t_n)\in\mathbf{R}^n, v\in V_n^1$.

Выше, как обычно, $v(i):=v(\{i\})$, а V_n^1 – подпространство аддитивных (несущественных) игр из пространства V_n.

В приведенных обозначениях аналог теоремы 4.1 формулируется следующим образом.

Теорема 3. *Отображение* $\varphi_n : V_n\to\mathcal{P}_n$ *удовлетворяет условиям* $Ow_n.1$-$Ow_n.4$ *тогда и только тогда, когда оно определяется формулой:*

$$\varphi_n(v)=P_n^v\quad\text{для каждой игры}\quad v\in V_n.$$

Литература

1. АУМАН Р., ШЕПЛИ Л. *Значения для неатомических игр*. – М.: Мир, 1977.
2. ВАСИЛЬЕВ В. А. *Общая характеристика полиномиальных функций множества* // Оптимизация. – 1974. – №14. – С. 103-123.
3. HARSANYI J. A. *A bargaining model for cooperative n-person games* // Contributions to the Theory of Games IV (eds. A. W. Tucker, and R. D. Luce). – 1959. – С. 325-355.
4. OWEN G. *Multilinear extensions of games* // Journal of Management Sciences. – 1972. – V. 18., №5. – P. 64-79.
5. VASIL’EV V.A. *The Shapley functional and the polar form of homogeneous polynomial games* // Siberian Advances in Mathematics. – 1998. – V. 8. – №4. – P. 109-150.
6. VASIL’EV V. A. *Polar forms, p-values, and the core* // Approximation, Optimisation and Mathematical Economics (ed. M, Lassonde). Heidelberg-New York: Physica-Verlag. – 2001. – P. 357-368.

7. VASIL'EV V. A. *Cores and generalized NM-solutions for some classes of cooperative games* // Russian Contributions to Game Theory and Equilibrium Theory (eds. T. Driessen, G. van der Laan, V. Vasil'ev, and E. Yanovskaya), Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag. – 2006. – P. 91-150.

AN AXIOMATIZATION OF GENERALIZED OWEN EXTENSION

Valeri Vasil'ev, Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch of RAS, Novosibirsk, Doctor of Science, professor (vasilev@math.nsc.ru).

Abstract: To introduce a generalized Owen extension we propose a new approach based on the nonadditive integration. Besides, we pay strong attention to the axiomatization problem for the extension introduced. One of the main results of the paper demonstrates that the axiomatization in question can be chosen similar to that elaborated by R. J. Aumann and L. S. Shapley for the multiplicative extension of nonatomic cooperative games.

Keywords: regular polynomial game, generalized Owen extension, nonatomic cooperative game, Aumann-Shapley multiplicative extension.

УДК 519
ББК 22.18

НЕПРЕРЫВНАЯ ИГРА НИМ [1]

Винниченко С. В. [2]
(Учреждение Российской академии наук Читинский институт природных ресурсов СО РАН, Чита)

В работе рассматривается непрерывный вариант игры НИМ, в которой два игрока по очереди зачерпывают воду из какой-то емкости. Выигрывает игрок, сделавший это последним. Находятся оптимальные стратегии и значение игры.

Ключевые слова: игра НИМ, ограничения на выбор, непрерывный вариант, оптимальные стратегии.

Введение

Epp и Ferguson рассмотрели в [1] следующую игру двух лиц и нашли ее решение. В данной игре два игрока достают из кучи камней какое-то число камней. При этом заданы некоторое положительное число m и неубывающая функция $f(n)$. Вначале первый игрок достает из кучи положительное число камней n_1, которое не превышает m. На следующем шаге другой игрок достает из кучи какое-то положительное число камней n_2, которое не превышает $f(n_1)$, и так далее. Игрок, доставший последний камень из кучи, выигрывает в данной игре. Эта игра является вариантом игры НИМ (см., например, [2]). В данной работе рассматривается непрерывная версия данной игры.

---

[1] *Текст приводится в соответствии с изданием «Математическая теория игр и ее приложения. – 2009. – Т. 1. №3».*

[2] *Сергей Викторович Винниченко, кандидат физико-математических наук.*

1. Непрерывная игра НИМ

Рассмотрим игру двух лиц. Пусть m, b положительные действительные числа такие, что $m \leqslant b$, и пусть g неубывающая функция определенная на $[m, +\infty[$, которая удовлетворяет условиям:

$$g(m) \geqslant m, \tag{1}$$

$$g(x) < M \quad x \in [m, M[, \tag{2}$$

где $M = g(m) + m$.

Пусть в некотором бассейне налито X литров воды. На первом шаге первый игрок зачерпывает из бассейна некоторый объем воды x_1, который удовлетворяет условиям:

$$min(m, X) \leqslant x_1 \leqslant min(b, X).$$

На следующем шаге второй игрок зачерпывает из бассейна объем воды x_2, который удовлетворяет неравенствам:

$$min(m, X) \leqslant x_2 \leqslant min(g(x_1), X),$$

и так далее. Игрок, зачерпнувший воду последним, выигрывает в данной игре.

2. Оптимальная стратегия

Для $X > 0$ определим $V(X)$ как множество таких $x \geqslant \min(m, X)$, что игрок может зачерпнуть x литров воды и обязательно выиграет. Тогда для X, не превышающего M, множество $V(X)$ состоит из одного элемента X.

Положим $v(X) = \inf V(x)$. Для всех положительных X и всех $x \in [m, X[$, очевидно, выполняются следующие условия:
Если $g(x) < v(X - x)$, то $x \in V(X)$.
Если $g(x) > v(X - x)$, то $x \notin V(X)$.
Если $g(x) = v(X - x)$ и $v(X - x) \in V(X - x)$, то $x \notin V(X)$.

Предположим, что $v(X) \in V(X)$. Тогда, первый игрок выигрывает, если $b \geqslant v(X)$, а второй выигрывает, если $b < v(X)$.

Таким образом, для решения игры достаточно доказать, что для всех X выполняется $v(X) \in V(X)$ и найти способ определения $v(X)$.

Лемма 1. *Пусть $X \geqslant m$ можно записать в виде $X = nM + h$, где n целое число, и $0 < h \leqslant M$. Тогда $v(X) \geqslant \max(m, h)$, и для $h < M$ имеет место $v(X) \in V(X)$, и $v(X) = \max(m, h)$.*

Доказательство. Утверждение справедливо для $m \leqslant X \leqslant M$. Предположим оно справедливо для $X \leqslant K$ аи докажем его для $X \leqslant K + m$.

Для $y \in [m, max(m, h)[$ имеем

$$X - y = nM + h - y, \quad h \geqslant m, \quad 0 < h - y < M, \quad X - y \leqslant K.$$

По индуктивному предположению, $v(X - y) \in V(X - y)$, и $v(X - y) = \max(m, h - y)$. Кроме того, имеем $v(X - y) \leqslant M - m = g(m) \leqslant g(y)$, и $y \notin v(X)$. Отсюда следует, что $v(X) \geqslant max(m, h)$. С другой стороны, для $h < M$, и $y = \max(m, h)$ имеет место

$$X - y = (n - 1)M + M + h - y, \quad 0 < M + h - y \leqslant M.$$

По индуктивному предположению, $v(X - y) \geqslant M + h - y$. Если $h \geqslant m$, то $y = h$, и $g(y) < M = M + h - y$. Если $h < m$, то $y = m$, и $g(y) = M - m < M + h - y$. В обоих случаях $g(y) < v(X - y)$. Таким образом, $y \in V(X)$, и $v(X) = y$. Это доказывает лемму.

Остается найти $v(X)$ и доказать, что $v(X) \in V(X)$ для X вида nM. Рассмотрим два случая.

Первый случай $g(M) < M$. Из леммы следует $g(M) < M \leqslant v((n - 1)M)$. Тогда $M \in V(nM)$. Еще раз применяя лемму, получим $v(nM) \geqslant M$, и $v(nM) = M$.

Второй случай $g(M) \geqslant M$. Определим функцию f от натурального аргумента по формуле

$$f(n) = [g(nM)/M]$$

(Скобки означают целую часть числа). Эта функция определяет дискретную игру НИМ. Коротко опишем решение этой игры (детали см. в [1]). Для кучи из n камней пусть $L(n)$ минимальное число камней, которое игрок должен достать из кучи и быть победителем. Тогда функция f и L обладают следующими свойствами:

$$f(k) \geqslant L(n-k) \quad \text{для} \quad 1 \leqslant k < L(n),$$

$$f(k) < L(n-k) \quad \text{для} \quad k = L(n).$$

Для построения решения остается доказать теорему.

Теорема 1. *$v(nM) = L(nM)$, и $v(nM) \in V(nM)$.*

Доказательство. Докажем теорему по индукции по n. Очевидна база индукции. По лемме имеет место неравенство $v(nM) \geqslant M$. Для $x \in [M, L(n)M]$ возможны два варианта.

1) $x = kM + h$, где k целое число, и $0 < h < M$. Тогда $nM - x = (n-k-1)M + M - h$, и $0 < M - h < M$. Согласно лемме, $v(nM - x) = M - h < g(x)$, и $x \notin V(nM)$.

2) $x = kM, \quad 1 \leqslant k \leqslant L(n)$. По индукции $v((n-k)M) = L((n-k)M)$, и $v((n-k)M) \in V((n-k)M)$. Согласно определению функции f, имеем

$$(f(k)+1)M > g(x) \geqslant f(k)M.$$

Следовательно, если $k < L(n)$, то

$$f(k) \geqslant L(n-k), \; g(x) \geqslant L(n-k)M, \; \text{и } x \notin V(nM).$$

Если же $k = L(n)$, то

$$f(k) < L(n-k), \; f(k)+1 \leqslant L(n-k), \; g(x) < L(n-k)M, \; \text{и } x \in V(nM).$$

3. Непрерывная игра НИМ без условия (2)

Теперь предположим, что, как и выше, два игрока вычитают по очереди числа, удовлетворяющие прежним условиям, из положительного вещественного числа X. Но если раньше игра заканчивалась, когда разница становилась неположительной, и игрок, сделавший это, становился победителем, то теперь рассмотрим случай, когда игра заканчивается при отрицательной разнице. В этом случае ограничение (2) на функцию g не требуется.

4. Выигрывющее представление

Предположим, что $g(i) = g(m)$ при $1 \leqslant i \leqslant m$. Обозначим $V(X)$ набор таких $x \geqslant m$, что игрок может вычесть x из X и обязательно выиграет. Пусть $v(n) = \inf V(n)$. Предположим также, что $v(X) = \infty$ при $X \leqslant 0$. Определим

$$\tilde{v}(X) = (v(X), 0) \text{ если } v(X) \in V(X),$$

$$\tilde{v}(X) = (v(X), 1) \text{ если } v(X) \notin V(X),$$

$$\tilde{g}(x) = (g(x), 0).$$

Считаем, что $R \times \{0, 1\}$ линейно упорядочено в лексикографическом порядке, т.е.

$$(x, s) \leqslant (x', s') \text{ эквивалентно } \quad x < x' \text{ или } (x = x' \text{ и } s \leqslant s').$$

Легко видеть, что $x \in V(X)$ тогда и только тогда, когда $\tilde{g}(x) < \tilde{v}(X - x)$. Заметим, что $m \leqslant v(X) \leqslant X$ и $\tilde{v}(X) = \max((m, 0), (X, 1))$ для $0 \leqslant X < m + g(m)$. Введем следующие обозначения

$$\tilde{v}_-(X) = \inf_{\varepsilon > 0} \sup\{\tilde{v}(x) | \, X - \varepsilon < x < X\},$$

$$v_-(X) = pr_1 \tilde{v}_-(X),$$

$$g_+(X) = \inf_{\varepsilon > 0} \{\tilde{g}(X + \varepsilon)\},$$

$$g_-(X) = \sup_{\varepsilon > 0} \{\tilde{g}(X - \varepsilon)\}.$$

Пусть

$$A = \{X \geqslant 0 | \, v(X) = \max\{(X, 1), (m, 0)\}\},$$

$$B = \{X \geqslant 0 |\, v(X) < v_-(X)\},$$
$$C = \{X \geqslant 0 |\, v(X) < X \text{ и } v_-(X) = X\}.$$

Считаем, что $(x_1, s) + x_2 = (x_1 + x_2, s)$.

Заметим, что

$$X \in A, \qquad 0 \leqslant X < m + g(m),$$
$$X \notin B, \qquad 0 < X < m + g(m),$$
$$0 \in B, \quad m + g(m) \in C.$$

Лемма 2. *Пусть* $0 \leqslant Y < X,$ $\qquad t \in V(X),$ $\qquad t - (X - Y) \in V(Y)$*. Тогда* $t - (X - Y) \in V(Y)$.

Доказательство. Имеем

$$\tilde{g}(t) < \tilde{v}(X - t),$$
$$\tilde{g}(t - (X - Y)) \leqslant \tilde{g}(t) < \tilde{v}(X - t) = \tilde{v}(Y - (t - (X - Y))),$$
$$t - (X - Y) \in V(Y).$$

Лемма 3. *Пусть* $\leqslant Y < X \leqslant Y + m$*,* $\tilde{v}(Y) > (m, 0)$*,* $\tilde{v}(X) < \tilde{v}(Y) + X - Y$*. Тогда* $\tilde{v}(x) = (m, 0)$ *для* $X \leqslant x \leqslant Y + m$.

Доказательство. Пусть $[(X + Y)/m] = k$. ($[z]$ обозначает целую часть числа z.) Докажем это утверждение индукцией по k. Очевидно, это верно для $k \leqslant 1$. Предположим, что это верно для $k \leqslant K$ и докажем выполнение для $k = K + 1$. Выберем $t \in V(X)$ такое, что $(t, 0) < \tilde{v}(Y) + X - Y$. Если $t \geqslant m + X - Y$,, то по Лемме 2 $t - (X - Y) \in V(Y)$ и $(t - (X - Y), 0) \geqslant \tilde{v}(Y)$. Это противоречие показывает что $t < m + X - Y$. Пусть $X - t < s \leqslant Y$. Тогда $[(X - t + s)/m] \leqslant k$. Если $\tilde{v}(s) < \tilde{v}(X - t)$, то $\tilde{v}(Y) = (m, 0)$ по индукционному предположению. Это противоречит условию леммы . Следовательно $\tilde{v}(X - t) \leqslant \tilde{v}(s)$, и имеем $\tilde{g}(m) \leqslant g(t) < \tilde{v}(X - t) \leqslant \tilde{v}(x - m)$ и $\tilde{v}(x) = (m, 0)$ for $X \leqslant x \leqslant Y + m$. Это доказывает лемму.

Следствие 1. *Если* $v(X) = (v(X), 1)$*, то существует* $\varepsilon > 0$ *такое, что* $]v(X), v(X) + \varepsilon[\subset V(X)$.

Доказательство. Выберем $0 < \varepsilon_1 < m$ такое, что $v(X) + \varepsilon_1 \in V(X)$. Тогда

$$\tilde{v}(X - (v(X) + \varepsilon_1)) > \tilde{g}(v(X) + \varepsilon_1) \geqslant (m, 0).$$

Если $\tilde{v}(x) < \tilde{v}(X - (v(X) + \varepsilon_1))$ для $X - (v(X) + \varepsilon_1) < x < X - v(X)$, то по Лемме 3 $\tilde{v}(t) = (m, 0)$ для $x \leqslant t \leqslant X - v(X)$, и $s \notin V(X)$ for $v(X) < s < X - x$. Это противоречие показывает, что для такого x неравенство $\tilde{v}(x) \geqslant \tilde{v}(X - (v(X) + \varepsilon))$ выполняется. Следовательно $]v(X), v(X) + \varepsilon[\subset V(X)$.

Лемма 4. *Пусть* $X \in B$. *Тогда* $\tilde{v}(X) = (m, 0)$ *для* $X \leqslant x < X + m$.

Доказательство. Пусть $0 < \varepsilon < m$. Выберем Y так, что $X - \varepsilon < Y < X$ и $\tilde{v}(Y) > \tilde{v}(X)$. Тогда для $X \leqslant x \leqslant Y + m$ имеем $\tilde{v}(x) = (m, 0)$ по Лемме 2. Необходимое заключение следует из произвольности ε.

Лемма 5. *Пусть* $X \geqslant 0$. *Если* $\tilde{v}(X) > (m, 0)$, *то* $\tilde{v}(X) = (v(X), 1)$ *и существует* $\varepsilon > 0$ *такое, что* $\tilde{v}(x) = \tilde{v}(X) + x - X$ *для* $X \leqslant x < X + \varepsilon$. *Если* $\tilde{v}(X) = (m, 0)$, *то существует* $\varepsilon > 0$ *такое, что* $\tilde{v}(X) = (m, 0)$ *для* $X \leqslant x < X + \varepsilon$.

Доказательство. Пусть $[X/m] = k$. Утверждение очевидно верно при $k \leqslant 1$. Предположим, что оно верно для $k \leqslant K$ и докажем для $k = K + 1$.

Случай $\tilde{v}(X) > (m, 0)$.

Пусть $t \in V(X)$. Тогда $t > m$, $\tilde{g}(x) < \tilde{v}(X - t)$, $\tilde{v}(X - t) > (m, 0)$. По индуктивному предположению существует $\varepsilon > 0$ такой, что $\tilde{v}(x) = \tilde{v}(X - t) + x - (X - t)$ для $X - t \leqslant x < (X - t) + \varepsilon$. Тогда $\tilde{g}(t - \varepsilon/2) < \tilde{v}(X - (t - \varepsilon/2))$ и $t - \varepsilon/2 \in V(X)$. Следовательно $\tilde{v}(X) = (v(X), 1)$. Выберем $t \in V(X)$ такое, что $t - v(X) < m$. Тогда $\tilde{v}(X - t) > (m, 0)$. Из Леммы 2 получим, что $\tilde{v}(y) \geqslant \tilde{v}(X - t)$ для $X - t \leqslant y < X - v(X)$. Пусть $X \leqslant x < X + (t - v(X))$. Тогда для $v(X) + x - X < s \leqslant t$ имеем $\tilde{g}(s) < \tilde{v}(x - s)$, $s \in V(X)$, и следовательно $\tilde{v}(x) \leqslant \tilde{v}(X) + x - X$.

Аналогичными рассуждениями, можно доказать, что существует $\varepsilon_1 > 0$ такое, что $m \notin V(x)$ для $X \leqslant x < X + \varepsilon_1$. Обозначая $\varepsilon = min(t - v(X), \varepsilon_1)$ и используя Лемму 3, получим $\tilde{v}(x) = \tilde{v}(X) + x - X$ для $X \leqslant x < X + \varepsilon$.

Случай $\tilde{v}(X) = (m, 0)$ может быть доказан таким же образом.

Лемма 6. *Пусть* $0 \leqslant Y < X$, $\tilde{v}(Y) > (m, 0)$, $\tilde{v}(Y) + X - Y \leqslant \tilde{v}(X) < \tilde{v}(Y) + X - Y + m$. *Тогда* $\tilde{v}(X) = \tilde{v}(Y) + X - Y$.

Доказательство. Предположим, что $\tilde{v}(X) > \tilde{v}(Y) + X - Y$. Тогда $0 < (Y - v(Y)) - (X - v(X)) < m$. Выберем $x \in V(X)$ и $y \in V(Y)$ так, что $X - x < Y - v(Y)$ и $(Y - y) - (X - x) < m$. Тогда $\tilde{v}(Y - y)$, $\tilde{v}(X - x) > (m, 0)$. По Лемме 3 $\tilde{v}(Y - y) \geqslant \tilde{v}(X - x)$. Следовательно $\tilde{g}(X - Y + y) < \tilde{v}(Y - y)$, $\quad X - Y + y \in V(X)$. Переходя к пределу $y \to v(Y)$, имеем $v(X) = v(Y) + X - Y$. Поэтому, по Лемме 5, $\tilde{v}(X) = (v(X), 1)$, $\quad \tilde{v}(Y) = (v(Y), 1)$ и $\tilde{v}(X) = \tilde{v}(Y) + X - Y$.

Лемма 7. *Пусть* $v_-(X) > (m, 0)$. *Тогда существует* $\varepsilon > 0$ *такое, что* $\tilde{v}(x) = (v_-(X) + x - X, 1)$ *для* $X - \varepsilon < x < X$.

Доказательство. Выберем $\varepsilon_1 < m$ так, что $v(t) - v_-(X) < m/2$ for $X - \varepsilon_1 \leqslant t < X$. Выберем $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ так, что $v(X - \varepsilon) - v_-(X) > -m/2$. По Лемме 6 имеем $\tilde{v}(x) = \tilde{v}(X - \varepsilon) + x - (X - \varepsilon)$ и $\tilde{v}(x) = (v_-(X) + x - X, 1)$.

Следствие 2. *Если* $X \in C$, *тогда существует* $\varepsilon > 0$ *такое, что* $x \in A$ *для* $X - \varepsilon < x < X$.

Лемма 8. *Пусть*

$$m \leqslant Y \leqslant X,\ m \leqslant y \leqslant Y,\ g_+(Y - y) < v_-(X - Y),\ x - Y \in B.$$

Тогда $y \in V(Y)$ *эквивалентно* $y \in V(X)$.

Доказательство. Пусть $y \in V(Y)$. Тогда первый игрок вычитает y из X и выигрывает игру с начальным значением X. На последнем шаге он вычитает y_1 из $X - Y + y_2$, $0 \leqslant y_2 \leqslant Y - y$, $y_1 > y_2$. Существует $\varepsilon > 0$ такое, что $g(Y - y + \varepsilon) < v(X - Y - \varepsilon)$. Если $y_2 \geqslant m$, то первый игрок вычитает $y_2 + \varepsilon$ вместо y_1 выигрывает игру с начальным значением X. Если $y_2 < m$, то он вычитает m вместо y_1 и также выигрывает игру с начальным значением X. Следовательно $y \in V(Y)$.

Пусть теперь $y \notin V(Y)$. Аналогичными рассуждениями получим, что первый игрок, вычитающий y из X проигрывает. Следовательно $y \notin V(X)$.

Лемма 9. *Пусть $m \leqslant Y \leqslant X$. Тогда $(Y,1) = \tilde{v}(X)$ эквивалентно $g_+(Y) < v_-(X-Y)$, $Y \in A$, и $X - Y \in B$.*

Доказательство. Пусть $(Y,1) = \tilde{v}(X)$. По следствию 2 существует $\varepsilon > 0$ такое, что $]Y, Y+\varepsilon[\subset V(X)$. Из этого имеем $g_+(Y) < v_-(X-Y)$. Поскольку $Y \notin V(X)$, то $v(X-Y) < v_-(X-Y)$ и $X - Y \in B$. Let $m \leqslant y \leqslant Y$. Предположим, что $y \in V(Y)$. По Лемме 7 имеем $y \in V(X)$. Это противоречие показывает, что $Y \in A$.

Пусть, наоборот, $g_+(Y) < v_-(X-Y)$, $Y \in A$, $X - y \in B$, и $m \leqslant y \leqslant Y$. Тогда $y \in V(Y)$. Из Леммы 7 получим, что $y \notin V(X)$. Из Леммы 7 следует существование $\varepsilon > 0$ токого, что $]Y, y+\varepsilon[\subset V(X)$. Следовательно $\tilde{v}(X) = (Y,1)$.

Лемма 10. *Пусть $X > 0$. Тогда $X \in B$ эквивалентно $v_-(X) \in C$.*

Доказательство. По Лемме 7 существует $\varepsilon > 0$ такое, что $v(x) = v_-(X) + x - X$ для $X - \varepsilon < x < X$. Пусть $Y = v(x)$. По Лемме 9 имеем $g_+(Y) < V_-(X-Y)$, $Y \in A$, и $x - Y = X = v_-(X) \in B$. Легко видеть, что $g_+(v_-(X) - m) < v_-(X - v_-(X))$. По Лемме 8 $m \in V(X)$ эквивалентно $m \in V(v_-(X))$. Следовательно $X \in B$ эквивалентно $v_-(X) \in C$.

Лемма 11. *Пусть $\tilde{v}(X) = (m,0)$. Тогда существует $0 \leqslant a < m$ такое, что $X - a \in B$.*

Доказательство. Имеем $(m,0) \leqslant \tilde{g}(m) < \tilde{v}(X-m)$. По Лемме 4 существует $\varepsilon > 0$ такое, что $\tilde{v}(x) = \tilde{v}(X-m) + x - (X-m)$ для $X - m \leqslant x < X - m + \varepsilon$. Пусть $a = sup\{0 \leqslant x < m | \, \tilde{v}(X-x) = (m,0)\}$. Тогда $0 \leqslant a < m$. Из Леммы 5 следует, что $\tilde{v}(X-a) = (m,0)$ и $X - a \in B$.

Пусть X представлено как сумма:

$$X = a + h_1 + \ldots + h_t, \tag{3}$$

$$h_i \in C, \quad \tilde{g}_-(h_{i-1}) < (h_i, 1), \quad 2 \leqslant i \leqslant t,$$

$$a \in A,\ g_+(a) < h_1. \tag{4}$$

Как и в [1], сумму (3) будем называть *выигрывающее представление* числа X.

Теорема 2. *Пусть X имеем выигрывающее представление (3). Тогда*

1) $\tilde{v}(X) = \max((m,0),(a,1))$;

2) $v_-(X-a) = h_1$;

3) $X \in B$ *эквивалентно* $a = 0$.

Доказательство. Докажем теорему индукцией по t. База индукции при $t = 0$ очевидна. Выберем $\varepsilon > 0$ так, что $x \in A$ для $h_1 - \varepsilon < x < h_1$. Тогда

$$Y = x + h_2 + \ldots + h_t$$

выигрывающее представление для такого x. По индуктивному предположению $\tilde{v}(Y) = \max((m,0),(a,1))$. Следовательно $v_-(X-a) = h_1 \in C$. По Лемме 10 $X - a \in B$. Из Лемм 3 и 7 следует $\tilde{v}(X) = \max((m,0),(a,1))$. Окончательно, если $X \in B$, то $\tilde{v}(X) = (m,0)$, $v_-(X) > m$, $m > a$. Если $a > 0$, то $v_-(X) = m$. Это противоречие доказывает, что $a = 0$.

Теорема 3. *Каждое $X \geqslant 0$ имеет единственное выигрывающее представление.*

Доказательство. Пусть $[X/m] = k$. Докажем теорему индукцией по k. Утверждение, очевидно, верно при $k \leqslant 1$. Предположим, что оно верно при $k \leqslant K$ и докажем для $k = K + 1$.

Случай $\tilde{v}(X) = (a,1)$.

В этом случае $g_+(a) < v_-(X-a)$, $a \in A$, $X - a \in B$, и $[(X-a)/m] \leqslant K$. По индуктивному предположению $X - a$ имеет выигрывающее представление

$$X - a = a' + h_1 + \ldots + h_t,$$

и $a' = 0$ по Теореме 2. Следовательно

$$x = a + h_1 + \ldots + h_t$$

выигрывающее представление.

Случай $\tilde{v}(X) = (m, 0)$.

По Лемме 11 существует $0 \leqslant a < m$ такое, что $X - a \in B$. По Лемме 7 можно выбрать $\varepsilon > 0$ такое, что $\tilde{v}(x) = (v_-(X) + x - X, 1)$ для $X - \varepsilon < x < X$. Аналогично предыдущему случаю x имеет выигрывающее представление

$$x = a' + h_2 + \ldots + h_t,$$

$$a' = v_-(X) + x - X.$$

Пусть $h_1 = v_-(X)$. Тогда $\tilde{g}_-(h_1) < (h_2, 1)$. По Лемме 10 $h_1 \in C$. Следовательно $g_(a) < v_-(X)$, и

$$x = a + h_1 + \ldots + h_t$$

выигрывающее представление.

Единственность выигрывающего представления можно доказать простой индукцией.

5. Вычисление a и h_i

Определим последовательности a_i, c_i. Пусть $a_1 = 1$, $c_1 = m + f(m)$. Предположим, что a_i, c_i были уже определены для $i \leqslant r$ и выполнены следующие неравенства:

$$a_1 < c_1 < a_2 < c_2 < \ldots < a_r < c_r.$$

Если $\tilde{g}_-(c_r) < (c_r, 1)$, то последовательности a_i, c_i конечны и каждая из них состоит из r членов.

В другом случае, пусть p наименьшее число такое, что $p \leqslant r$ и $g_-(c_p) \geqslant (c_r, 1)$. Пусть $q = \inf\{a_p \leqslant t < c_p | \, g(t) \geqslant c_r\}$. Тогда $g_+(q) \geqslant c_r$.

Определим a_{r+1}, c_{r+1} неравенствами:

$$a_{r+1} = c_r + q, \; c_{r+1} = a_{r+1} + \min(m, c_p - q)$$

Теорема 4. *Пусть $X \geqslant 0$. Если $a_i \leqslant X < c_i$ для некоторого i, то $X \in A$,. Если $c_i \leqslant X < a_{i+1}$, то $X \notin A$. Если c_s – наибольшее число последовательности c_i, то $X \notin A$ для $X \geqslant c_s$. Числа c_r формируют набор C.*

Доказательство. Докажем утверждение индукцией по i. База индукции очевидна. Предположим, что утверждение доказано для $i \leqslant r$ и докажем для $i = r+1$. Пусть $a_{r+1} \leqslant X < c_{r+1}$. Тогда $X - c_r \in A$. Если $m \leqslant x \leqslant X - c_r$ и

$$X - c_r - x = a + h_1 + \ldots + h_t$$

выигрывающее представление, то $h_t < c_p$ и $\tilde{g}_-(h_t) < (c_r, 1)$ по выбору p. Также имеем, что $\tilde{g}(x) < (a, 1)$. Следовательно

$$X - x = a + h_1 + \ldots + h_t + c_r$$

выигрывающее представление, и $x \notin V(X)$. Если $X - c_r < x \leqslant X$, то $x > q$, $g(x) \geqslant c_r > X - x$, $x \notin V(X)$. Тогда $X \in A$. Пусть теперь $c_{r+1} \leqslant X < a_{r+2}$ и

$$X - c_{r+1} = a + h_1 + \cdots + h_t$$

выигрывающее представление. Как и выше имеем

$$x = a + h_1 + \ldots + h_t + c_{r+1}$$

выигрывающее представление с более чем одним слагаемым. Следовательно $X \notin A$. В частности $c_{r+1} \notin A$. Поскольку $v_-(c_{r+1}) = c_{r+1}$, то $c_{r+1} \in C$. Легко видеть, что $X \notin C$ для $a_{r+1} \leqslant X < c{-}_{r+1}$ и $c_{r+1} < X < a_{r+2}$.

Наконец, рассмотрим случай, когда последовательность c_i имеет наибольший элемент c_s. Тогда $\tilde{g}_-(c_s) < (c_s, 1)$. Запишем $x \geqslant c_s$ в форме $X = nc_s + X'$ где $0 \leqslant X' < c_s$, $n \geqslant 1$. Пусть

$$X' = a + h_1 + \cdots + h_t$$

выигрывающее представление. Тогда $\tilde{g}(h_t) \leqslant \tilde{g}_-(c_s) < (c_s, 1)$, и

$$X = a + h_1 + \ldots + h_t + \underbrace{c_s + \ldots + c_s}_{n \text{ слагаемых}}$$

также выигрывающее представление, состоящее более чем из одного слагаемого. Следовательно, $X \notin A$. Очевидно $X \notin C$.

Легко доказать следующую теорему.

Теорема 5. *Пусть X имеет выигрывающее представление (3), $a \geqslant m$, $t \geqslant 1$, $h_1 = c_i$, $x > a$, и $g(x) < h_1$. Тогда $]a, L] \subset V(X)$, где $L = \min(x,\, a + h_1 - g(x),\, a + c_i - a_i)$.*

Поэтому имеем следующую выигрывающую стратегию. Если есть неотрицательное число X и верхнее ограничение b, то игрок должен найти выигрывающее представление

$$X = a + h_1 + \cdots + h_t.$$

Если $a < m$, тогда он должен вычесть m. Если $a \geqslant m$, то он должен вычесть любое число x, удовлетворяющее ограничениям $a < x \leqslant \min(b, L)$. ($L$ определено в Теореме 5.) Если $a \leqslant b$, то выиграть невозможно.

Если игрок, который делает отрицательную разницу, проигрывает, необходимо использовать ту же самую стратегию для числа $X - m$.

Литература

1. EPP R. J., FERGUSON T. S. *A note on take-away games* // The Fibonacci Quarterly. – 1980. – V. 44. – №18. – P. 39-53.
2. MOULIN H. *Theorie des jeux pour l'economie et la politique*. – Hermann, Paris, 1981.
3. SCHWENK A. J. *Take-Away Games* // The Fibonacci Quarterly. – 1970. – V. 8. – P. 225-234.

CONTINUOUS NIM GAME

Sergey V. Vinnichenko, Chita Institute of Natural Resources, Siberian Branch of RAS, Novosibirsk, Cand. Sc.

Abstract: A continuous version of NIM game is considered. Two players take water from the tank one by one. The player wins the game if she makes the last turn. Optimal strategies and the value of the game are calculated.

Keywords: NIM game, choice restrictions, continuous version, optimal strategies.

УДК 519.833.5
ББК 210.301

ПРОМЕЖУТОЧНЫЕ МЕЖДУ ПРЕД k- И ПРЕД n-ЯДРАМИ РЕШЕНИЯ КООПЕРАТИВНЫХ ИГР [1] [2]

Кацев И. В. [3] , **Яновская Е. Б.** [4]
(Учреждение Российской академии наук Санкт-Петербургский экономико-математический институт РАН, Санкт-Петербург)

Определяется набор решений кооперативных игр с трансферабельными полезностями, промежуточных между пред k- и n-ядрами. Все эти решения обладают свойствами симметрии, ковариантности и согласованности в определении Дэвиса–Машлера. Каждое решение из этого набора определяется параметром – положительным целым числом k, таким что для всех игр с числом игроков, не превосходящим k, решение для параметра k совпадает с пред n-ядром, а для игр с числом игроков, большим чем k, оно является максимальным согласованным решением, т. е. удовлетворяет свойству «k-обратной согласованности». Описываются свойства этих решений и дается их характеризация посредством сбалансированности некоторых наборов коалиций.

Ключевые слова: игра с трансферабельными полезностями, пред k-ядро, пред n-ядро, согласованность.

---

[1] *Работа поддержана РФФИ, проект №09-06-00155а*
[2] *Текст приводится в соответствии с изданием «Математическая теория игр и ее приложения. – 2009. – Т. 1. №1».*
[3] *Илья Владимирович Кацев, аспирант (economics-hse@yandex.ru).*
[4] *Елена Борисовна Яновская, доктор физико-математических наук, профессор (eyanov@emi.nw.ru).*

Введение

Классические кооперативные игры предполагают разрешенными любые коалиции из множества игроков. На практике по разным причинам оказывается, что не все коалиции возможны. Поэтому большой раздел теории решений кооперативных игр посвящен определению и нахождению решений для кооперативных игр с ограниченной кооперацией. Начало этим работам было положено Оуэном [13], который обобщил значение Шепли на игры с заданной коалиционной структурой. В дальнейшем именно линейные значения были определены и охарактеризованы для различных возможностей кооперации игроков. В первую очередь следует выделить работы Майерсона [9, 10], в которых были даны определение и аксиоматизация линейного «значения Майерсона». Другое важное значение (и тоже линейное) – «позиционное значение», рассмотренное в работах [4, 8]. Также аналоги значения Шепли были построены для некоторых специфических структур допустимых коалиций, например, в работах [2, 3].

Во всех этих работах ограниченная кооперация задавалась с помощью графа связей между игроками или с помощью наперед заданного набора допустимых коалиций.

Однако возможен и другой подход к определению ограниченной кооперации. В случае, когда нет экзогенно заданной коалиционной структуры, игрокам труднее объединиться в большие коалиции, чем в малые. Поэтому в таких случаях целесообразно считать коалиции разрешенными, если число их участников не превышает некоторого заданного числа. В данной статье максимальный размер разрешенных коалиций используется в качестве параметра, с помощью которого построен однопараметрический набор решений кооперативных игр, которые оказались «промежуточными» между популярными решениями: пред k-ядром и пред n-ядром.

Эти решения обладают схожей аксиоматической характеризацией: они непусты для любой кооперативной игры и удовлетворяют известным аксиомам симметрии, ковариантности относительно линейных преобразований и согласованности в определении Дэвиса–Машлера [5].

Пред n-ядро является одноточечным решением, т. е. оно является минимальным (хотя и не единственно минимальным) решением, удовлетворяющим остальным аксиомам, а пред k-ядро обладает свойством обратной согласованности, иначе, оно является максимальным по включению решением, удовлетворяющим остальным аксиомам. Таким образом, оба они занимают крайние позиции среди множества ковариантных, симметричных и согласованных решений.

Если в определении пред n-ядра существенно используются сила всех коалиций, задаваемая значениями характеристической функции, то определение пред k-ядра можно рассматривать как набор таких векторов выигрышей, против исхода которых не может возразить ни одна пара игроков в смысле того, что их относительные максимальные «недовольства» оказываются равными, если этих игроков по очереди исключить из игры. Оказалось, что пред k-ядро можно определить оптимизационным образом так же, как и пред n-ядро, если сравниваемые вектора выигрышей отличаются только двумя компонентами. Дальнейшее расширение возможностей сравнений векторов выигрышей происходит увеличивающимся размером разрешенных коалиций, так что если все коалиции оказываются разрешенными, то мы получаем пред n-ядро.

В статье определен и охарактеризован набор решений кооперативных игр, «промежуточных» между пред k-ядром и пред n-ядром. Каждое решение PKN_k определяется максимальным размером разрешенных коалиций k, где $k = 2, 3, \ldots$. Решение PKN_k совпадает с пред k-ядром для $k = 2$. Для $k > 2$ вектор выигрышей x принадлежит решению $PKN_k(N, v)$, если для каждой коалиции $S \subset N, |S| = k$ выполнено $x_S = PN(S, v^x)$, где $\langle S, v^x \rangle$ – редуцированная игра в определении Дэвиса–Машлера на множество игроков S относительно вектора x.

Решения PKN_k имеют и другое определение в терминах лексикографической минимизации аналогично определению пред

n-ядра, которое определяется как множество векторов выигрышей лексикографически минимизирующих векторы эксцессов, компоненты которых расположены в порядке убывания. Решение PKN_k для каждой игры определяется аналогичной «частичной» лексикографической минимизацией векторов эксцессов, которая сравнивает между собой только векторы с не более чем k разными координатами. Из этого определения следует, что для любой игры $\langle N, v\rangle$ и $k < l$ $PKN_l(N, v) \subset PKN_k(N, v)$, и $PKN_k(N, v)$ совпадает с пред n-ядром для $k \geqslant n$. Таким образом, набор решений $PKN_k, k = 2, ...$, можно рассматривать как «мост» между пред k-ядром и пред n-ядром.

Структура статьи следующая: в параграфе 2 приводятся основные определения и свойства известных согласованных решений и определения рассматриваемого набора таких решений. Параграф 3 посвящен оптимизационному подходу к определениям пред k-ядра, пред n-ядра и набору рассматриваемых решений. Модификация определения сбалансированности наборов коалиций и ее применение к характеризации решений из предлагаемого набора дается в параграфе 4. Примеры таких решений даны в параграфе 5.

1. Определения и основные свойства решений кооперативных игр с трансферабельными полезностями

Кооперативной игрой с трансферабельными полезностями (ТП игрой) называется пара $\langle N, v\rangle$, где N – конечное множество игроков; $v : 2^N \to \mathbb{R}$ – *характеристическая функция игры* сопоставляющая каждой коалиции $S \subset N$ вещественное число $v(S)$ (полагается $v(\emptyset) = 0$), выражающее силу коалиции. *Исходом* игры называется вектор выигрышей игроков $x \in \mathbb{R}^N \in X(N, v)$, где $X(N, v) = \{x \in \mathbb{R}^N \mid \sum_{i\in N} x_i \leqslant v(N)\}$ – множество *допустимых векторов выигрышей.*

Решением σ для класса $\mathcal{G}$ ТП игр называется отображение, сопоставляющее каждой игре $\langle N, v\rangle \in \mathcal{G}$ некоторое подмножество $\sigma(N, v) \subset X(N, v)$

Через $X^*(N, v)$ обозначим множество *эффективных* векторов выигрышей:

$$X^*(N, v) = \{x \in \mathbb{R}^N \mid \sum_{i \in N} x_i = v(N)\}.$$

Если для каждой игры $\langle N, v\rangle$ из класса $\mathcal{G}$ $|\sigma(N, v)| = 1$, то решение σ называется *значением*.

Пусть $\mathcal{N}$ – произвольное *универсальное* множество игроков. Через $\mathcal{G}_{\mathcal{N}}$ будем обозначать такой класс игр , что

$$\langle N, v\rangle \in \mathcal{G}_{\mathcal{N}} \implies N \subset \mathcal{N}.$$

Пусть $\pi : N \to \mathcal{N}$ – взаимно-однозначное отображение. Определим игру $\langle \pi(N), \pi v\rangle \in \mathcal{G}_{\mathcal{N}}$ равенствами $v(\pi(S)) = v(S)$ для всех $S \subseteq N$. Для любого вектора $x \in \mathbb{R}^N$ обозначим через $y = \pi(x)$ такой вектор $y \in \mathbb{R}^{\pi(N)}$, что $y_{\pi(i)} = x_i, i \in N$. Игра $\langle N', w\rangle$ называется *изоморфной* игре $\langle N, v\rangle$, если существует такое взаимно-однозначное отображение $\pi : N \to \mathcal{N}$, что $\pi(N) = N'$ и $\pi v = w$.

Две игры $\langle N, v\rangle, \langle N', w\rangle \in \mathcal{G}_{\mathcal{N}}$ называются *стратегически эквивалентными* , если существует такое взаимно-однозначное отображение $\pi : N \to \mathcal{N}$, что $\pi(N) = N'$ и такие вектор $\beta \in \mathbb{R}^N$ и положительное число $\alpha > 0$, что $w = \pi(v')$, где $v' = \alpha v + \beta$.

Напомним некоторые известные свойства теоретико-игровых решений:

Решение σ для класса $\mathcal{G}_{\mathcal{N}}$ называется

– *не пустым*, если $\sigma(N, v) \neq \emptyset$ для всех $\langle N, v\rangle \in \mathcal{G}_{\mathcal{N}}$;

– *эффективным,* если $\sum\limits_{i \in N} \Phi_i(N, v) = v(N)$ для любого $x \in \sigma(N, v)$ и любой игры $\langle N, v\rangle \in \mathcal{G}_{\mathcal{N}}$;

– *анонимным,* если для любых игры $\langle N, v\rangle \in \mathcal{G}_{\mathcal{N}}$, игрока $i \in N$ и отображения $\pi : N \to \mathcal{N}$ игра $\langle \pi(N), \pi v\rangle \in \mathcal{G}_{\mathcal{N}}$ и $\sigma_{\pi(i)}(\pi(N), \pi v) = \sigma_i(N, v)$;

– *симметричным*, если для любой игры $\langle N, v\rangle \in \mathcal{G}_{\mathcal{N}}$ *симметричные игроки* i, j, для которых $v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\})$ для всех $S \not\ni i, j$, получают поровну: $x_i(N, v) = x_j(N, v)$ для всех $x \in \sigma(N, v)$;

– *ковариантным*, если оно ковариантно относительно стратегически эквивалентных игр $\langle N, v\rangle, \langle N', w\rangle$: из $w = \pi(\alpha v + \beta)$ следует

$$\sigma(N', w) = \pi(\alpha\sigma(N, v) + \beta)$$

для всех $\alpha > 0, \beta \in \mathbb{R}^N$, где $(\alpha v + \beta)(S) = \alpha v(S) + \sum\limits_{i \in S} \beta_i$

для всех $S \in N$;

– удовлетворяет *инвариантности относительно сдвига*, если для любой игры $\langle N, v\rangle \in \mathcal{G}_{\mathcal{N}}$ и числа b $\langle N, v + b\rangle \in \mathcal{G}_{\mathcal{N}}$, и

$$x \in \sigma(N, v) \implies x \in \sigma(N, v + b),$$

где $(v+b)(S) = v(S) + b$ для всех $S \subsetneq N$, и $(v+b)(N) = v(N)$;

– *непрерывным*, если из $\langle N, v\rangle = \langle N, v_n\rangle \in \mathcal{G}_{\mathcal{N}}$, $v_n \to v, x_n \in \sigma(N, v_n), x_n \to x$ при $n \to \infty$, следует $x \in \sigma(N, v)$;

– *согласованным*, если для любой игры $\langle N, v\rangle \in \mathcal{G}_{\mathcal{N}}$, коалиции $T \subset N$, и вектора $x \in \sigma(N, v)$ ее *редуцированная игра* $(N \setminus T, v^x_{N\setminus T})$, полученная после ухода игроков из коалиции T с выигрышами $x_i, i \in T$, также принадлежит классу $\mathcal{G}_{\mathcal{N}}$ и (1) $x = (x_{N\setminus T}, x_T) \in \sigma(N, v) \implies x_{N\setminus T} \in \sigma(N \setminus T, v^{\Phi}_{N\setminus T})$;

– *обратно согласованным*, если для $x \in X(N, v)$ из соотношений $x_{\{i,j\}} \in \sigma(\{i, j\}, v^x_{\{i,j\}})$ для всех $i, j \in N$ следует

$x \in \sigma(N, v)$;

– удовлетворяет *свойству подтверждения*, если из $x \in \sigma(N, v)$, $S \subset N$, $y_S \in \sigma(S, v^x_S)$, $\langle S, v^x\rangle \in \mathcal{G}_{\mathcal{N}}$, где $\langle S, v^x\rangle$ – редуцированная игра на множество игроков S относительно вектора x, следует $(x_{N\setminus S}, y_S) \in \sigma(N, v)$.

В формулировках трех последних свойств использовались редуцированные игры. Такие игры не определены просто заданием игры и ее векторов выигрышей, относительно которых происходит редуцирование. Различные определения редуцированных игр приводят к различным свойствам согласованности решений. В данной работе используется определение согласованности в определении Дэвиса–Машлера со следующим определением редуцированных игр:

Пусть σ произвольное решение для класса $\mathcal{G}_{\mathcal{N}}$, $\langle N, v\rangle \in \mathcal{G}_{\mathcal{N}}$ – произвольная игра, $x \in X^*(N, v)$, $S \subsetneq N$ – произвольные вектор выигрышей и коалиция.

Редуцированной игрой (S, v_S^x) на множество игроков S относительно вектора x называется игра со следующей характеристической функцией:

$$v_S^x(T) = \begin{cases} v(N) - x(N \setminus S), & \text{если } T = S, \\ \max\limits_{Q \subset N \setminus S} (v(T \cup Q) - x(Q)) & \text{для остальных коалиций.} \end{cases}$$

Из определений последних трех свойств решений следует, что если для некоторого класса игр $\mathcal{G}_{\mathcal{T}}$ мы рассматриваем множество всех согласованных (и, возможно, удовлетворяющих еще каким-либо свойствам) решений, то в этом множестве одноточечные решения, т. е. значения, если они существуют, являются *минимальными* [5] относительно включения, а те из них, которые удовлетворяют еще свойству обратной согласованности, являются *максимальными* относительно включения. Для класса игр с бесконечным универсальным множеством игроков $\mathcal{N}$ среди множества всех непустых, эффективных, анонимных, ковариантных и согласованных решений существуют единственные одноточечное решение – пред n-ядро [1], и максимальное – пред k-ядро [14].

[5] *Хотя минимальным может быть и не одноточечное решение, см., напр. [12]*

Приведем их определения.

Для произвольных игры $\langle N, v\rangle$ и ее вектора выигрышей x *эксцессом* коалиции S относительно вектора x называется разность $v(S) - \sum_{i\in S} x_i$. Эта разность выражает отрицательную относительную полезность выигрыша $x(S) = \sum_{i\in S} x_i$ для коалиции S. Вектор значений эксцессов $e(x) = \{e(S,x)\}_{S\subset N}$ называется *вектором эксцессов* для x. В некоторых случаях мы будем пользоваться обозначениями $e_v(x)$, $e_v(S,x)$ для того чтобы подчеркнуть, для каких характеристических функций определен соответствующий эксцесс.

Пред n-ядром (PN) называется решение, уравнивающие значения эксцессов относительно лексиминного упорядочения. Формально пред n-ядро игры $\langle N, v\rangle$, $PN(N,v)$, состоит из единственного вектора выигрышей, определяемого из следующего соотношения:

(2) $\quad -e(PN(N,v)) \succ_{lexmin} -e(x)$ для всех $x \in X(N,v)$.

Существование и единственность пред n-ядра для каждой игры следует из теоремы Шмайдлера [15], хотя он рассматривал только *n-ядра*, определяемые соотношениями (2), но только для *индивидуально рациональных* векторов выигрышей (дележей): $x \in I(N,v)$, где

$$I(N,v) = \{x \in X^*(N,v) \,|\, x_i \geqslant v(\{i\}) \;\; \forall i \in N\}.$$

Для любой пары игроков $i,j \in N$ и любого вектора выигрышей x определим *максимальное превышение* игрока i над игроком j в x равенством

$$s_{ij}(x) = \max_{S\ni i, S\not\ni j} (v(S) - x(S)).$$

Пред k-ядром [7] игры $\langle N, v\rangle$, $PK(N,v)$, называется множество

(3) $\quad PK(N,v) = \{x \in X(N,v) \,|\, s_{ij}(x) = s_{ji}(x)$ для всех $i,j \in N\}$.

Пред n-ядро и пред k-ядро имеют аксиоматические характеризации. Рассмотрим класс всех игр $\mathcal{G}_{\mathcal{N}}$ с бесконечным универсальным множеством игроков $\mathcal{N}$.

Теорема 1. [1]. *Единственным значением для класса $\mathcal{G}_{\mathcal{N}}$, удовлетворяющим аксиомам непустоты, ковариантности, анонимности и согласованности, является пред n-ядро.*

Теорема 2. [11]. *Единственным значением для класса $\mathcal{G}_{\mathcal{N}}$, удовлетворяющим аксиомам непустоты, ковариантности, симметрии и согласованности, является пред n-ядро.*

Так как из одноточечности решения и его анонимности следует симметрия, теорема 2 является усилением теоремы 1.

Теорема 3. [14]. *Единственным решением для класса $\mathcal{G}_{\mathcal{N}}$, удовлетворяющим аксиомам непустоты, ковариантности, симметрии, согласованности и обратной согласованности, является пред k-ядро.*

Известно [1], что из согласованности следует эффективность, так что оба приведенных решения эффективны. Заметим, что вышеприведенные формулировки теорем 1 и 2 даются для значений, поэтому их можно (как это и делают авторы) сформулировать для общих решений, но добавляя при этом свойство одноточечности. При такой формулировке теорема 2 отличается от теоремы 3 одной аксиомой: Аксиома одноточечности в теореме 2 заменяется на обратную согласованность в теореме 3.

2. Решения, промежуточные между $\mathbf{k}$-ядром и $\mathbf{n}$-ядром

В этом параграфе строится набор решений для класса $\mathcal{G}_{\mathcal{N}}$ с произвольным множеством $\mathcal{N}$, каждое из которых для любой игры из этого класса содержит пред n-ядро и содержится в пред k-ядре. Свойства этих решений также совпадают со свойствами пред n-ядра и пред k-ядра, приводимыми в теоремах 2 и 3, кроме разделяющих их одноточечности и обратной согласованности: для некоторых игр и решений из приводимого набора эти решения оказываются одноточечными, в противном случае эти решения удовлетворяют ослабленным вариантам обратной согласованности.

Заметим, что определение пред k-ядра, в противоположность определению n-ядра, не содержит никаких оптимизационных процедур, приводящих к решению. Однако на самом деле пред k-ядро имеет и определение, сходное с оптимизационным определением пред n-ядра. Для каждого вектора выигрышей $x \in \mathbb{R}^N$, любой пары игроков $i, j \in N$ и трансфера между ними $(y_i, y_j) : y_i + y_j = x_i + x_j$ j, обозначим через $x||y_{i,j}$ вектор x, в котором компоненты x_i, x_j заменены соответственно на y_i, y_j.

Предложение 1. *Для того чтобы вектор выигрышей x произвольной игры $\langle N, v\rangle \in \mathcal{G}_T$ принадлежал пред k-ядру, $x \in PK(N, v)$, необходимо и достаточно, чтобы*

(4) $-e(x) \succ_{lexmin} -e(x||y_{ij})$ *для всех* $i,j \in N$ *и трансферов* y_i, y_j.

Доказательство. *Достаточность.* Предположим, что вектор x удовлетворяет (4), но не принадлежит пред k-ядру. Тогда найдутся такие игроки i, j, для которых $s_{ij}(x) \neq s_{ji}(x)$, и пусть $s_{ij}(x) > s_{ji}(x)$, что означает выполнение неравенства

$$\max_{S:S\ni i, S\not\ni j}(v(S) - x(S)) > \max_{S:S\ni j, S\not\ni i}(v(S) - x(S)).$$

Тогда для любого положительного ε и трансфера $(y_i, y_j) = (\varepsilon, -\varepsilon)$ справедливы неравенства

$$e(x||y_{ij}, S) \begin{cases} < e(x, S), & \text{если } i \in S, j \notin S, \\ > e(x, S), & \text{если } j \in S, i \notin S, \\ = e(x, S), & \text{иначе .} \end{cases} \tag{5}$$

Следовательно, для достаточно малых ε

$$-e(x||y_{ij}) \succ_{lexmin} -e(x),$$

что противоречит (4).

Необходимость. Предположим, что для некоторого $x \in PK(N, v)$, соотношение (4) не выполняется. Тогда найдется такой трансфер (y_i, y_j), что

$$-e(x||y_{ij}) \succ_{lexmin} -e(x). \tag{6}$$

Пусть $y_i < x_i, y_j > x_j$. Тогда

$$(7)\quad e(S,x)\begin{cases} = e(S,x||y_i,y_j) \text{ для коалиций } S\colon S \ni i,j \text{ или } S \not\ni i,j; \\ < e(S,x||y_i,y_j) \text{ для коалиций } S \ni i, S \not\ni j; \\ > e(S,x||y_i,y_j) \text{ для коалиций } S \ni j, S \not\ni i. \end{cases}$$

и первые неравные компоненты упорядоченных по убыванию векторов $e^*(x)$ и $e^*(x||y_{ij}$ соответствуют некоторым коалициям $S' \ni j, S' \notin i$ и $S'' \ni i, S'' \not\ni j$. Из (7) и $s_{ij}(x) = s_{ji}(x)$ следует, что $e(S'',x) < e(S'',x||y_i,y_j)$, поэтому выполняется соотношение (4).

Утверждение 1 показывает, что и пред k-ядро, и пред n-ядро состоят из векторов, на которых отрицательный вектор эксцессов достигает максимума по отношению лексимина. Однако области, на которых производится максимизация этого отношения, разные для этих двух задач. Для пред n-ядра такой областью является множество всех допустимых векторов выигрышей $X(N,v)$, а для пред k-ядра отношение лексимина рассматривается только между векторами, отличающимися не более чем двумя компонентами.

Очевидно, можно рассмотреть и другие возможности, которые приведут к построению решений, состоящих из векторов выигрышей, чьи отрицательные эксцессы достигают максимумов по отношению лексимина на множестве векторов, отличающихся только фиксированным числом компонент. Приведем формальные определения.

Определение 1. Для каждого целого числа $k \geqslant 2$ и произвольной игры $\langle N,v\rangle \in \mathcal{G}_{\mathcal{N}}$, $|N| = n$ решение

$$PKN_k(N,v) = \begin{cases} PK(N,v) \text{ для } k = 2, \\ PN(N,v), \text{ для } k \geqslant n, \end{cases}$$

а для $2 < k < n$

$$x \in PNK_k(N,v) \iff -e(x) \succ_{lexmin} -e(x||y_S)$$

для любого трансфера $y_S, |S| = k$, определяемого равенством $\sum\limits_{i \in S} y_i = \sum\limits_{i \in S} x_i$.

Из определения 1 непосредственно следует монотонность решений PKN_k по k : для любой игры $\langle N, v \rangle$

$$k_1 < k_2 \implies PKN_{k_2}(N, v) \subset PKN_{k_2}(N, v).$$

Другие свойства решений PNK_k будут приведены в следующих разделах.

3. *Характеризация решений* $\mathbf{PKN_k}$ *посредством сбалансированности*

Прежде всего, заметим, что решения PKN_k удовлетворяют ковариантности и симметрии: ковариантность решений PKN_k следует из их определения – они определяются с помощью отношения лексимина на подмножествах множества векторов эксцессов, а векторы эксцессов при ковариантных преобразованиях характеристической функции и вектора выигрышей отличаются только одинаковым положительным множителем, так что отношение лексимина сохраняется; симметрия решений PNK_k также следует из их определения. Действительно, определение 1 показывает, что для любой игры $\langle N, v \rangle \in \mathcal{G}_\mathcal{N}$ и всех k $PNK_k(N, v) \subset PK(N, v)$.

Из определения 1 следует, что решения PNK_k одноточечны для класса $\mathcal{G}_\mathcal{N}$ с $|\mathcal{N}| = k$.

Приведем характеризацию решений PKN_k с помощью сбалансированности наборов коалиций, аналогичную характеризации Колберга пред n-ядра [6].

Определение 2. Набор $\mathcal{S}$ коалиций $S \subset N$ называется k-*сбалансированным*, если для любой коалиции $K \subset N$ мощности $|K| = k$ набор

$$\mathcal{S}_K = \{S' \subset K \mid S' = S \cap K, S \in \mathcal{S}\}$$

является сбалансированным на множестве K.

Теорема 4. *Для того чтобы $x \in PNK_k(N,v)$ для произвольной игры $\langle N,v\rangle \in \mathcal{G}_\mathcal{N}$ необходимо и достаточно, чтобы для любого числа α набор коалиций*

$$\mathcal{B}_\alpha^k(x,v) = \{S \in N \,|\, e(S,x) \geqslant \alpha\}$$

являлся пустым или k-сбалансированным

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $x \in PNK_k(N,v)$, $K \subset N$ – произвольная коалиция мощности $|K| = k$. Тогда для любого трансфера $y_K \in \mathbb{R}^N$, $y_K(K) = x_K(K)$ выполняется соотношение

(8) $$-e(x) \succ_{lexmin} -e(x||y_K).$$

По определению трансфера y_K для любой коалиции $S \subset N$

$$e(x,S) > e(x||y_K,S) \implies y(S \cap K) > x(S \cap K).$$

Следовательно, из отношения (8) следует неразрешимость системы неравенств

(9) $$\begin{array}{l} x(S \cap K) \geqslant y_K(S \cap K) \text{ для всех } S \in B_k(\alpha) \\ \text{ и для произвольного } \alpha, \text{ если } x_K \not\equiv y_K. \end{array}$$

Так как $x(K) = y_K(K)$, то по теореме Колберга [6] неразрешимость системы неравенств (9) эквивалентна k-сбалансированности набора коалиций $\mathcal{B}_\alpha$ или ее пустоте.

Достаточность. Пусть наборы B_α k-сбалансированы или пусты для всех α. Рассмотрим α, для которого $B_\alpha \neq \emptyset$. Тогда для любой коалиции K мощности $|K| = k$ и трансфера $y_K \neq x_K$ невозможны неравенства $y_K(S \cap K) \geqslant x(S \cap K)$ для всех $S \in \mathcal{B}_\alpha$, что означает существование такой коалиции $T_{K,\alpha} \in \mathcal{B}_\alpha$, что $y_K(T_{K,\alpha} \cap K) < x(T_{K,\alpha} \cap K)$.

Пусть $\alpha_1 = \max_{S \subset N}(v(S) - x(S)$. Тогда либо $x(S) = y(S)$ для всех $S \in \mathcal{B}_{\alpha_1}$, либо найдется такая коалиция $T_{K,\alpha_1} \in \mathcal{B}_{\alpha_1}$, для которой $(x||y_K)(T_{K,\alpha_1}) < x(T_{K,\alpha_1})$, откуда получаем отношение $-e(x) \succ_{lexmin} -e(x||y_K)$.

Если $x(S) = y(S)$ для всех $S \in \mathcal{B}_{\alpha_1}$, то рассмотрим второй по величине эксцесс

$$\alpha_2 = \max_{S: S \notin \mathcal{B}_{\alpha_1}} (v(S) - x(S)).$$

Опять имеем либо $x(S) = y(S)$ для всех $S \in \mathcal{B}_{\alpha_2}$, либо найдется такая коалиция $T_{K,\alpha_2} \in \mathcal{B}_{\alpha_2}$, для которой $(x||y_K)(T_{K,\alpha_2}) < x(T_{K,\alpha_2})$, и мы опять получаем $-e(x) \succ_{lexmin} -e(x||y_K)$.

Повторяя эту процедуру, мы придем к тому, что либо $y_K \equiv x_K$, либо $-e(x) \succ_{lexmin} -e(x||y_K)$.

4. Свойства согласованности решений $\mathbf{PKN_k}$

Как будет далее показано в этом параграфе, решения PKN_k согласованы для всех k. Однако они не удовлетворяют свойствам обратной согласованности и подтверждения. Поэтому для характеризации этих решений единой системой аксиом мы определим «k-модификации» этих аксиом, аналогично тому как «k-сбалансированность», обобщающая понятие сбалансированности, была определена в предыдущем параграфе. Будет показано, что для каждого k решение PKN_k удовлетворяет k-модифицированным аксиомам обратной согласованности и подтверждения.

Определение 3. Решение σ для класса $\mathcal{G}_\mathcal{N}$ удовлетворяет свойству *k-обратной согласованности*, если для любой игры $\langle N, v\rangle \in \mathcal{G}_\mathcal{N}$ и $x \in X(N, v)$ из соотношений $x_K \in \sigma(K, v_K^x)$ для всех $K \subset N$ с $|K| = k$ следует $x \in \sigma(N, v)$.

Легко видеть, что обратная согласованность эквивалентна 2-обратной согласованности, а из k-обратной согласованности следует l-обратная согласованность для $l > k$. Это свойство не накладывает никаких условий на решения игр с числом игроков меньших или равным k.

Определение 4. Решение σ для класса $\mathcal{G}_\mathcal{N}$ удовлетворяет свойству *k-подтверждения*, если для любых игры $\langle N, v\rangle \in \mathcal{G}_\mathcal{N}$, вектора $x \in \sigma(N, v)$ и коалиции $S \subset N, |S| \leqslant k$, $y_S \in \sigma(S, v^x)$, где $\langle S, v^x \rangle$ – редуцированная игра на множество S относительно вектора выигрышей x, выполняется соотношение $(x_{N\setminus S}, y_S) \in \sigma(N, v)$.

Очевидно, из свойства l-подтверждения следует свойство k-подтверждения для $k < l$.

Из теоремы 4 легко следуют свойства согласованности и k-согласованности решений PNK_k :

Предложение 2. *Решения PNK_k согласованы в классе $\mathcal{G}_\mathcal{N}$ для любого $k \geqslant 2$.*

Доказательство. Пусть $\langle N, v \rangle \in \mathcal{G}_\mathcal{N}$ – произвольная игра и $x \in PNK_k(N, v)$. Если $k \geqslant n = |N|$, то $x = PN(N, v)$, и согласованность решения PNK_k следует из согласованности пред n-ядра.

Рассмотрим случай $k < n$. По теореме 4 для каждого α наборы $\mathcal{B}_\alpha$ k-сбалансированы. Следовательно, наборы

$$\mathcal{B}_\alpha \cap T = \{S \subset T \,|\, S = S' \cap T, S' \in \mathcal{B}_\alpha\}$$

также k-сбалансированы для любой на любой коалиции $T \subset N$.

Для редуцированной игры (T, v_T^x) на множество игроков $T \subset N$ соответствующий набор коалиций $\mathcal{B}_\alpha$, обозначаемый как $\mathcal{B}_\alpha^T$, равен $\mathcal{B}_\alpha^T = \mathcal{B}_\alpha \cap T$. Из этого равенства и теоремы 4 следует соотношение $x_T \in PNK_k(T, v_T^x)$.

Предложение 3. *Для всех $k \geqslant 2$ решение PNK_k удовлетворяет l-обратной согласованности на классе $\mathcal{G}_\mathcal{N}$ для $l \geqslant k$.*

Доказательство. Из определения 3 следует, что достаточно установить это свойство для игр с числом игроков $n > k$.

Пусть $\langle N, v \rangle \in \mathcal{G}_\mathcal{N}$, $|N| > k$, $x \in X(N, v)$, и $x_K = PNK_k(K, v_K^x) = PN(K, v_K^x)$ для всех коалиций $K \subset N, |K| = k$, где (K, v_K^x) – редуцированная игра на множество игроков K относительно x.

Тогда для таких коалиций K выполняется отношение

$$-e_{v_K^x}(x_K) \succ_{lexmin} -e_{v_K^x}(y_K) \tag{10}$$

для любого вектора выигрышей $y_K \in X(K, v_K^x)$. Из отношений (10) следуют отношения

$$-e_v(x) \succ_{lexmin} -e_v(x||y_K) \text{ для всех } K, |K| = k,$$

откуда, по определению, $x \in PNK_k(N, v)$.

Предложение 4. *Решение PKN_k обладает свойством k-подтверждения на классе $\mathcal{G}_\mathcal{N}$.*

Доказательство. Для игр $\langle N, v \rangle \in \mathcal{G}_\mathcal{N}$ с числом игроков $|N| \leqslant k$ по определению 1 решения PKN_k одноточечны, а по утверждению 1 они согласованы. Следовательно, для таких игр решение PKN_k обладает свойством k-подтверждения.

Пусть теперь $|N| > k$ и $x \in PKN_k(N, v)$. Рассмотрим редуцированную игру $\langle S, v^x \rangle$ на множество игроков S, $|S| \leqslant k$ относительно x. Тогда по свойству согласованности решения PKN_k выполняется соотношение $x_S \in PKN_k(S, v^x)$. Однако решение $PKN_k(S, v^x)$ одноточечно, поэтому $x_S = PKN_k(S, v^x)$, откуда и следует свойство k-подтверждения решения PKN_k.

Заметим, что свойства решений PKN_k для любого $k \geqslant 2$, описанные в утверждениях 2-4, были определены и установлены для всех игр в классе $\mathcal{G}_\mathcal{N}$.

5. Пример

Для игр двух и трех лиц пред k-ядро совпадает с пред n-ядром. Следовательно, решения PKN_k также совпадают с этими решениями.

Для игр четырех лиц $|N| = 4$ решение $PKN_3(N, v) = PN(N, v)$. Решение $PKN_4(N, v)$ состоит из всех векторов выигрышей, которые редуцируются на пред n-ядро во всех редуцированных играх трех лиц. Так как в играх трех лиц пред n-ядро совпадает с пред k-ядром, получаем, что $PKN_4(N, v) = PK(N, v)$.

Открытым вопросом остается нахождение минимального n, для которого нашлась бы такая игра $\langle N, v \rangle, |N| = n$, для которой $PKN_k \neq PN(N, v), PK(N, v)$ для некоторого $2 < k < n$.

В этом параграфе мы покажем, что $n \leqslant 11$ путем построения примера игры 11 лиц, для которой для некоторых k решения PKN_k отличны и от пред k-ядра, и от пред n-ядра.

Рассмотрим игры $\Gamma_1 = \langle N_1, v_1 \rangle, \Gamma_2 = \langle N_2, v_2 \rangle$, где $|N_1| = 5, |N_2| = 6$. Для определения их характеристических функций

v_1 и v_2 обозначим $N_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, и $N_2 = \{1', 2', 3', 4', 5', 6'\}$, $S_1 = \{1, 2, 3\}, S_2 = \{4, 5\}, S_3 = \{1', 2', 3', 4'\}, S_4 = \{5', 6'\}$ В этих обозначениях характеристические функции v_1, v_2 определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} v_1(N_1) = v_2(N_2) = 6,& \\ v_1(i,j,k) = 3,&\quad \text{если } i,j \in S_1, k \in S_2, \\ v_2(i,j,k) = 3,&\quad \text{если } i,j \in S_3, k \in S_4, \\ v_1(S) = v_2(T) = 0&\quad \text{для остальных } S \subset N_1, T \subset N_2. \end{aligned}$$

Игры Γ_1 и Γ_2 являются модификациями игры из известного примера в [5]. В игре Γ_1 игроки 1, 2, 3 и 4, 5 симметричны, а в игре Γ_2 игроки $1', 2', 3', 4'$ и $5', 6'$ симметричны. Следовательно, нетрудно проверить, что пред k-ядра этих игр имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} PK(N_1, v_1) &= \left\{t, t, t, 3 - \tfrac{3t}{2}, 3 - \tfrac{3t}{2}\right\}_{t \in [0, \frac{3}{2}]}, \\ PK(N_2, v_2) &= \{\tau, \tau, \tau, \tau, 3 - 2\tau, 3 - 2\tau\}_{\tau \in [0, \frac{3}{2}]}. \end{aligned} \tag{11}$$

Если $x \in PK(N_1, v_1)$, то

$$\mathcal{S}_1(v_1, x) = \begin{cases} \{i,j,k\}_{i,j \in S_1, k \in S_2} & \text{для } t \leqslant 3/2, \\ \{i,j,k\}_{i,j \in S_1, k \in S_2}, \{k\}, k \in S_2 & \text{для } t = 3/2. \end{cases} \tag{12}$$

Набор коалиций во второй строке равенств (12) сбалансирован, и вектор из пред n-ядра, соответствующий значению $t = \frac{3t}{2}$, равен пред n-ядру игры Γ_1. Набор коалиций в первой строке равенств (12) не является сбалансированным, но он 3-сбалансирован, поэтому по теореме 4, $PKN_3(N_1, v_1) = PK(N_1, v_1)$, $PKN_4(N_1, v_1) = PN(N_1, v_1)$.

Аналогично, если $y \in PK(N_2, v_2)$, то

$$\mathcal{S}_1(v_2, y) = \{i,j,k\}_{i,j \in S_3, k \in S_4}$$

и этот набор сбалансирован.

Обозначим через $\mathcal{S}_2(v_2, y)$ набор коалиций из множества игроков N_2, на котором достигается второй по величине эксцесс для вектора y:

$$\mathcal{S}_2(v_2, y) = \arg \max_{S \notin \mathcal{S}_1(v_2,y)} e(v_2, y).$$

Тогда этот набор имеет следующий вид для разных значений t :

$$\mathcal{S}_2(v_2, y) = \begin{cases} \{i\},\ i \in S_3, & \text{если } t \in [0, 1), \\ \{k\},\ k \in S_4, & \text{если } t \in (1, \frac{3}{2}), \\ \{i\}, i \in S_3, \{k\}, k \in S_4, & \text{если } t = 1. \end{cases} \tag{13}$$

Наборы в первых двух строках равенств (13) не являются сбалансированными, но они 5-сбалансированы; набор в третьей строке (13) сбалансирован, и вектор y, соответствующий значению $t = 1$, совпадает с пред n-ядром. Из теоремы 4 следует
$PKN_3(N_2, v_2) = PKN_4(N_2, v_2) = PK(N, v)$,
$PKN_5(N_2, v_2) = PN(N_2, v_2)$.

Рассмотрим теперь сумму игр $\langle N, v\rangle = \Gamma_1 + \Gamma_2$, где $N = N_1 \cup N_2$, и если $Q = S \cup T, S \subset N_1, T \subset N_2$, то $v(Q) = v_1(S) + v_2(T)$.

Покажем, что для любого k

$$PNK_k(N, v) = PNK_k(N_1, v_1) \times PNK_k(N_2, v_2).$$

Для доказательства этого результата нам понадобится простое свойство пред k-ядра суммы игр.

Лемма 1. *Пусть $\langle N, v\rangle$– сумма двух игр:*

$$\langle N, v\rangle = \langle N_1, v_1\rangle + \langle N_2, v_2\rangle.$$

Тогда для любого $x \in PK(N, v)$ и любого числа α наборы коалиций

$$\{S \subsetneqq N_i, \mid e(S, v) \geqslant \alpha, \}, i = 1, 2$$

является пустыми или 2-сбалансированными.

Доказательство. Пусть $S = S_1 \cup S_2$ – произвольная коалиция, $S_1 \subset N_1, S_2 \subset N_2$. Тогда $e(S,x) = e(S_1,x) + e(S_2,x)$ и

$$e(S_1,x) \geqslant \alpha \implies e(S,x) \geqslant \alpha + e(S_2,x).$$

Пусть $i \in S_1$, $j \in N_1 \setminus S_1$. Так как $e(S,x) \leqslant s_{ij}(x) = \max\limits_{\substack{Q:Q\ni i\\ Q\not\ni j}} e(Q,x)$ и $x \in PK(N,v)$, найдется такая коалиция $T \subset N$, для которой $j \in T, i \notin T$, и $e(T,x) \geqslant e(S,x) \geqslant \alpha + e(S_2,x)$. Пусть $T = T_1 \cup T_2$, $T_i \subset N_i, i = 1,2$. Тогда

$$e(T,x) = e(T_1,x) + e(T_2,x) \geqslant \alpha + e(S_2,x). \tag{14}$$

Заметим, что равенство (14) выполняется для любых коалиций $S_2 \subset N_2$, следовательно, и для $S_2 = T_2$, и из неравенства (14) следует $e(T_1,x) \geqslant \alpha$.

Покажем теперь, что для выше приведенной игры $\langle N,v\rangle$ $x(N_1) = x(N_2) = 6$ для любого $x \in PK(N,v)$. Предположим, что это не так. Тогда для некоторого вектора выигрышей $x \in PK(N,v)$ справедливо либо неравенство $x(N_1) > 6$, либо неравенство $x(N_1) < 6$. Рассмотрим оба случая.

1. $x(N_1) > 6$. Возьмем коалиции $T \in \arg\max_{S\subset N_1} e(S,x)$, $U \in \arg\max_{S\subset N_2} e(S,x)$. Покажем, что $e(T,x) \geqslant 0$. Предположим противное: $e(T,x) < 0$. Так как $e(N_2,x) > 0$, то и $e(U,x) > 0$. Для произвольных игроков $i \in T, j \in U$ рассмотрим коалицию $R : e(R,x) = s_{ij}(x)$, и пусть она имеет вид $R = R_1 \cup R_2, R_i \subset N_i, i = 1,2$. Тогда

$$e(R,x) = e(R_1,x) + e(R_2,x) \leqslant e(T,x) + e(U,x) < e(U,x).$$

Полученное противоречие доказывает, что $e(T,x) \geqslant 0$.

Из симметрии игроков в коалициях S_1, S_2, S_3, S_4 следует, что любой вектор x из пред k-ядра $PK(N,v)$ можно представить в виде

$$x = \left(t,t,t,B - \frac{3t}{2}, B - \frac{3t}{2}, y,y,y,y,6 - B - 2y, 6 - B - 2y\right) \tag{15}$$

где $2B = x(N_1) = 12 - x(N_2)$. Проверим, какой может быть коалиция $T \subset N_1$, с максимальным неотрицательным эксцессом $e(T,x) \geqslant 0$. Так как $x \in PK(N,v)$, по симметрии игроков в коалициях S_1, S_2 для $t > 0$ неравенство $e(T,x) \geqslant 0$ возможно только для $T = \{4,5\}, \{i,4,5\}$, $i \in S_1$. Игроки $4,5$ принадлежат всем этим коалициям. Однако по лемме 1 найдется такая коалиция $Q \subset N_1, Q \not\ni 4$, или $Q \not\ni 5$, что $e(Q,x) = e(T,x)$.

Если $t = 0$, то $e(T,x) = 0$, и $e(S,x) = 0 \implies S \subset S_1$. Опять по лемме 1 этот случай невозможен.

Рассмотрим случай $t > 0$. Аналогично вышеприведенным рассуждениям мы получаем, что коалиция T может иметь вид только $T = \{1,2,3\}, \{1,2,3,k\}$, где $k \in S_2$, для того чтобы быть кандидатом на коалицию с максимальным эксцессом.

Однако, так как игроки $1,2,3$ принадлежат всем таким коалициям, этот случай также невозможен.

2. $x(N_1) < 6$. Тогда $x(N_2) >$, и $e(N_2,x) < 0$. Аналогично случаю 1 мы получаем, что $e(U,x) > 0$ и $B < 3$ в представлении (15). В этом случае $e(\{i,j,k\},x) = B - 3 < 0$ для $i,j \in S_3, k \in S_4$, откуда $\{i,j,k\} \neq U$. Таким образом, если $y \geqslant 0$, то $U = S_4$, а если $y < 0$, то $U = S_3$ единственные возможные кандидаты на коалиции с максимальным эксцессом. Однако по лемме 1 оба эти случая невозможны.

Таким образом, мы доказали равенства $x(N_1) = x(N_2) = 6$, и для любой коалиции $S \subset N$, $S = S_1 \cup S_2, S_i \subset N_i, i = 1,2$, справедливо равенство

$$e_v(S,x) = e_{v_1}(S_1,x) + e_{v_2}(S_2,x),$$

где через $e_{v_i}(\cdot,\cdot)$, $i = 1,2$, обозначены эксцессы в играх $\langle N_1, v_1\rangle, \langle N_2, v_2\rangle$. Следовательно, из представления 11 мы получаем равенства

$$PK(N,v) = PK(N_1,v_1) \times PK(N_2,v_2) =$$

$$= \left\{t,t,t,3-\frac{3t}{2},3-\frac{3t}{2},y,y,y,y,3-2y,3-2y\right\}_{t\in[0,\frac{3}{2}],y\in[0,\frac{3}{2}]},$$

из которых следует соотношение $PK(N, v) \subset C(N, v)$ где $C(N, v)$ – с-ядро игры $\langle N, v\rangle$. Следовательно, если $e(S, x) \geqslant \alpha$, для некоторой коалиции $S \subset N$, то $\alpha \leqslant 0$ и

$$S \cap N_1 \neq \emptyset, S \cap N_2 \neq \emptyset \implies e(S \cap N_1) \geqslant \alpha, e(S \cap N_2) \geqslant \alpha.$$

Из этого соотношения мы можем заключить, что k-сбалансированность наборов $\mathcal{B}_\alpha$ для всех $\alpha \leqslant 0$ эквивалентна k-сбалансированности наборов $\mathcal{B}^i_\alpha$ для всех $\alpha \leqslant 0$, где $\mathcal{B}^i_\alpha = \{S \cap N_i, \mid S \in \mathcal{B}_\alpha\}$.

Теперь с помощью теоремы 4 мы получаем равенства $PNK_k(N, v) = PNK_k(N_1, v_1) \times PNK_k(N_2, v_2)$ для всех $k = 2, 3, \ldots$. Итак, для игры-суммы мы получаем следующие решения:

$$PN(N, v) = PNK_2(N, v) = PNK_3(N, v) =$$

$$= \left\{t, t, t, 3 - \frac{3x}{2}, 3 - \frac{3x}{2}, y, y, y, y, 3 - 2y, 3 - 2y\right\}_{t\in[0,\frac{3}{2}], y\in[0,\frac{3}{2}]},$$

$$PNK_4(N, v) = \left\{\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, y, y, y, y, 3 - 2y, 3 - 2y\right\}_{y\in[0,\frac{3}{2}]},$$

$$PNK_5(N, v) = PN(N, v) = \left\{\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, 1, 1, 1, 1, 1, 1\right\}.$$

Литература

1. СОБОЛЕВ А. И. *Характеризация принципов оптимальности в кооперативных играх посредством функциональных уравнений* // Математические методы в социальных науках. Под ред. Н. Н. Воробьева. – 1975. – №6. – Вильнюс: Институт физики и математики АН Литовской ССР. – С. 94-151.

2. ALGABA E., BILBAO J. M., BORM P., LÓPEZ J. J. *The Myerson Value for Union Stable Structure* // Mathematical Methods of Operations Research. – 2001. – V. 54. – P. 359-371.
3. ALGABA E., BILBAO J. M., VAN DEN BRINK R., JIMÉNEZ-LOSADA A. *An axiomatizations of the Banzhaf value for cooperative games on antimatroids* // Mathematical Methods of Operations Research. – 2004. – V. 59. – P. 147-166.
4. BORM P., OWEN G., TIJS S. *On the position value for communication situations* // SIAM Journal on Discrete Mathematics. – 1992. – V. 5. – P. 305-320.
5. DAVIS M., MASCHLER M. *The kernel of a cooperative game* // Naval Research Logistics Quarterly. – 1965. – V. 12. – P. 223-259.
6. KOHLBERG E. *On the nucleolus of a characteristic function game* // SIAM Journal of Applied Mathematics. – 1971. – V. 20. – P. 62-66.
7. MASCHLER M., PELEG B., SHAPLEY L. S. *Geometric properties of the kernel, nucleolus, and related solution concepts* // Mathematics of Operations Research. – 1979. – V. 4. – P. 303-338.
8. MEESSEN R. *Communication games*. Master's thesis. Department of Mathematics. University of Nijmegen, The Netherlands (in Dutch), 1988.
9. MYERSON R. B. *Graphs and cooperation in games* // Mathematics of Operations Research. – 1977. – V. 2. – P. 225-229.
10. MYERSON R. B. *Conference structures and fair allocation rules* // International Journal of Game Theory. – 1980. – V. 9. – P. 169-182.
11. ORSHAN G. *The prenucleolus and the reduced game property:equal treatment replaces anonymity* // International Journal of Game Theory. – 1993. – V. 22. – P. 241-248.
12. ORSHAN G., SUDHÖLTER P. *Reconfirming the*

prenucleolus // Mathematics of Operations Research. – 2003. – V. 28. – P. 283-293.

13. OWEN G. *Values of games with a priori unions* // In: R. Henn, O. Moeschlin, eds., Mathematical economics and game theory. Essays in honor of Oskar Morgenstern (Lecture Notes Econ. and Math.Syst. – 1977. – V. 141. – Berlin: Springer. – P. 76-88.
14. PELEG B. *On the reduced game property and its converse* // Internat. J. Game Theory. – 1987. – V. 15. – P. 187-200, *A correction* // Internat. J. Game Theory. – 1987. – V. 16. – P. 209.
15. SCHMEIDLER D. *The nucleolus of a characteristic function game*, SIAM Journal of Applied Mathematics. – 1969. – V. 17. – P. 1163-1170.

BETWEEN THE PREKERNEL AND THE PRENUCLEOLUS

Ilya Katsev, post-graduate student(economics-hse@yandex.ru).
Elena Yanovskaya, St.Petersburg Institute for Economics and Mathematics RAS, St.Petersburg, Doctor of Science, professor (eyanov@emi.nw.ru).

Abstract: A collection of TU games solutions intermediate between the prekernel and the prenucleolus is considered. All these solutions are Davis-Maschler consistent, symmetric and covariant. Each solution from the collection is parametrized by a positive integer k such that for all games with the number of players not greater than k the solution for parameter k coincides with the prenucleolus, and for the games with more than k players it is maximal, i.e. satisfies the "k-converse consistency". The properties of solutions are described and their characterization in terms of balancedness is given.

Keywords: TU game, prekernel, prenucleolus, consistency.

УДК 519.8
ББК 22.18

РАВНОВЕСИЕ В БЕСКОАЛИЦИОННОЙ ИГРЕ n ЛИЦ С ВЫБОРОМ МОМЕНТА ВРЕМЕНИ [1]

Мазалов В. В. [2]
(Учреждение Российской академии наук Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН, Петрозаводск)
Сакагучи М. [3]
(Университет Осака, Япония)

В статье рассматривается игра n-лиц с выбором момента времени. В каждый момент времени игрок решает, сделать выстрел или нет. В терминах таких игр формулируются модели аукционов, игры на истощение, предсказания и др. Используя симметрию задачи, строится равновесие в данной игре.

Ключевые слова: игра с выбором момента времени, равновесие, игра на истощение, предсказание случайной величины.

Введение

Игры с выбором момента представляют собой важный раздел теории игр, определенных на компактных множествах. В терминах таких игр формулируются задачи, связанные с дуэлями, аукционами, играми на истощение и другие. Сложность таких задач в том, что равновесие достигается в смешанных стратегиях. Для нахождения равновесия здесь разработаны специальные методы

[1] *Текст приводится в соответствии с изданием «Математическая теория игр и ее приложения. – 2009. – Т. 1. №1».*

[2] *Владимир Викторович Мазалов, доктор физико-математических наук, профессор(vmazalov@krc.karelia.ru).*

[3] *Минору Сакагучи, доктор наук, профессор.*

сведения игровой задачи к нахождению решения системы дифференциальных уравнений [1-2]. В литературе в основном были исследованы игры двух лиц. В данной работе мы исследуем бескоалиционные игры с выбором момента времени для n игроков. Вначале мы рассматриваем модели аукционов, затем дуэли, игры на истощение и, в завершение, игры, связанные с угадыванием случайной величины [3].

1. Аукционы

Задача, которую мы рассмотрим в этом параграфе, относится к моделям аукционов. Для простоты мы рассмотрим только симметричный случай, когда все n игроков находятся в одинаковых условиях. Итак, на аукционе выставлен некоторый предмет с одинаковой ценностью V для всех игроков и игроки одновременно объявляют цену за него, соответственно $(x_1, ..., x_n)$. Тот из игроков, который объявил наивысшую цену, получает этот предмет. Существуют различные схемы аукционов. Мы рассмотрим две схемы аукционов: по первому и второму предложениям.

Аукцион по первому предложению. Предположим, что правила аукциона таковы, что победитель, т. е. игрок, назвавший максимальную цену, получает данный предмет и ничего не платит. Остальные игроки должны заплатить за участие в аукционе ту цену, которую они заявили. Если же несколько игроков заявили максимальную цену, они делят выигрыш поровну. Согласно данным правилам функция выигрыша в данной игре имеет вид

$$(1) \qquad H_i(x_1, ..., x_n) = \begin{cases} -x_i, & \text{если } x_i < y_{-i}, \\ \frac{V}{m_i(x)} - x_i, & \text{если } x_i = y_{-i}, \\ V, & \text{если } x_i > y_{-i}, \end{cases}$$

где $y_{-i} = \max\limits_{j \neq i}\{x_j\}$ и $m_i(x)$ – число игроков, чьи предложения совпали с x_i, $i = 1, ..., n$. Нетрудно понять, что здесь нет равновесия в чистых стратегиях, будем искать его среди смешанных стратегий. Пользуясь симметрией, можно проводить рассуждения только для первого игрока.

Предположим, что игроки $\{2, ..., n\}$ используют одну и ту же смешанную стратегию с функцией распределения $F(x), x \in [0, \infty)$. Выигрыш первого игрока зависит от распределения величины $y_{-1} = \max\{x_2, ..., x_n\}$. Легко понять, что распределение этого максимума есть просто $(n-1)$-я степень распределения $F(x)$, а именно $F_{n-1}(x) = F^{n-1}(x)$. Тогда, с вероятностью $[F(x)]^{n-1}$ предложение первого игрока будет максимальным и он получит выигрыш V, и с вероятностью $1 - [F(x)]^{n-1}$ кто-то назовет большую цену и ему придется заплатить x. Теперь мы можем выписать выигрыш первого игрока, использующего чистую стратегию x

$$H_1(x, \overbrace{F, \cdots, F}^{n-1}) = V[F(x)]^{n-1} - x\left(1 - [F(x)]^{n-1}\right) = \\ = (V + x)[F(x)]^{n-1} - x. \tag{2}$$

Достаточным условием того, что профиль $(F(x), ..., F(x))$ будет образовывать равновесие, является условие

$$H_1(x, \overbrace{F, \cdots, F}^{n-1}) = const \text{ или } \partial H_1(x, \overbrace{F, \cdots, F}^{n-1})/\partial x = 0.$$

Последнее условие приводит к дифференциальному уравнению

$$\frac{dF_{n-1}(x)}{dx} = \frac{1 - F_{n-1}(x)}{V + x}, \ \ 0 \leqslant x < \infty$$

с граничным условием $F_{n-1}(0) = 0$. Интегрирование дает

$$F_{n-1}(x) = \frac{x}{V + x}.$$

Следовательно, оптимальная смешанная стратегия определяется следующим образом

$$F^*(x) = \left(\frac{x}{V+x}\right)^{1/(n-1)},$$

а плотность данного распределения имеет вид

$$f^*(x) = \frac{1}{n-1}\left(\frac{x}{V+x}\right)^{-\frac{n-2}{n-1}}.$$

Подставляя найденное распределение в (2), находим $H_1(x, \overbrace{F^*, \cdots, F^*}^{n-1}) = 0$ для любого $x \geqslant 0$. Таким образом, какую бы смешанную стратегию не использовал первый игрок, его выигрыш будет равен нулю. А это означает, что значение игры равно нулю.

Теорема 1. *В аукционе с функцией выигрыша (1) равновесие образуют смешанные стратегии вида*

$$F^*(x) = \left(\frac{x}{V+x}\right)^{1/(n-1)},$$

а значение игры равно нулю.

Аукцион по второму предложению. Правила данного аукциона таковы, что все игроки должны заплатить за участие в аукционе названную цену, а выигравший игрок платит лишь цену второго по величине игрока. Аукционы, в которых победитель платит цену второго по величине предложения, называются аукционами Викри. Если несколько игроков сделали максимальное предложение, V распределяется на всех поровну.

Таким образом, функция выигрыша в данной игре имеет вид

$$(3)\qquad H_i(x_1, ..., x_n) = \begin{cases} -x_i, & \text{если } x_i < y_{-i}, \\ \frac{V}{m_i} - x_i, & \text{если } x_i = y_{-i}, \\ V - y_{-i}, & \text{если } x_i > y_{-i}, \end{cases}$$

где $y_{-i} = \max\limits_{j \neq i}\{x_j\}$ и m_i – имеют то же значение, что и в первой модели. Здесь нет равновесия в чистых стратегиях. Если все предложения не превосходят V, следует пытаться максимально увеличить предложение, однако, если хотя бы одно предложение станет больше V, следует объявлять нулевую цену. Найдем равновесие в смешанных стратегиях, причем в силу симметрии проведем рассуждения только для первого игрока.

Предположим, что игроки $\{2, ..., n\}$ используют одну и ту же смешанную стратегию с функцией распределения $F(x), x \in [0, \infty)$. Выигрыш первого игрока зависит от распределения величины $y_{-1} = \max\{x_2, ..., x_n\}$. Мы отмечали выше, что распределение этого максимума есть просто $(n-1)$-я степень распределения $F(x)$, а именно $F_{n-1}(x) = F^{n-1}(x)$. Теперь мы можем выписать выигрыш первого игрока, использующего чистую стратегию x.

$$H_1(x, \overbrace{F, \cdots, F}^{n-1}) = \int\limits_0^x (V - t)dF_{n-1}(t) - \int\limits_x^\infty x dF_{n-1}(t).$$

Поскольку носитель распределения $F(x)$ есть $[0, \infty)$, то достаточное условие существования равновесия $H_1(x, \overbrace{F, \cdots, F}^{n-1}) = const$ или $\partial H_1(x, \overbrace{F, \cdots, F}^{n-1}))/\partial x = 0$ приводит к дифференциальному уравнению

$$\frac{dF_{n-1}(x)}{dx} = \frac{1 - F_{n-1}(x)}{V},$$

общее решение которого имеет вид

$$F_{n-1}(x) = 1 - c\exp(-\frac{x}{V}).$$

Поскольку $F(0) = 0$ находим $F_{n-1}(x) = 1 - \exp(-\frac{x}{V})$. Теперь мы можем найти $F(x)$

$$F(x) = \left(1 - \exp(-\frac{x}{V})\right)^{\frac{1}{n-1}}. \tag{4}$$

Итак, если игроки $\{2, ..., n\}$ используют смешанную стратегию $F(x)$, то выигрыш первого игрока имеет постоянное значение

$H_1(x, \overbrace{F, \cdots, F}^{n-1}) = H_1(x, \overbrace{F, \cdots, F}^{n-1}) = 0$. Отсюда, какую бы стратегию не использовал первый игрок, его выигрыш в такой ситуации всегда будет равен нулю. А это означает оптимальность стратегий $F(x)$.

Теорема 2. *В аукционе с функцией выигрыша (3) равновесие образуют смешанные стратегии вида*

$$F(x) = \left(1 - \exp(-\frac{x}{V})\right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Для $n = 2$ плотность распределения (4) имеет вид $f^*(x) = V^{-1}e^{-x/V}$, и для $n \geqslant 3$,

$$f^*(x) = \frac{1}{n-1}\left(1 - e^{-x/V}\right)^{\frac{1}{n-1}-1} \cdot \frac{1}{V}e^{-x/V} \to \begin{cases} +\infty, & \text{если} \quad x \downarrow 0 \\ 0, & \text{если} \quad x \uparrow \infty. \end{cases}$$

Интересно отметить, что хотя условия этих двух аукционов различаются незначительно, оптимальные стратегии имеют совершенно разный вид. В первом случае это степенная функция, а во втором – экспоненциальное распределение. Неожиданно оказывается, что обе оптимальные стратегии могут привести к предложениям, которые больше, чем ценность объекта V. В заключение сравним вероятности превысить данное значение V для обеих моделей аукционов для $n = 2$. Для аукциона по первому предложению данная вероятность равна $1 - F^*(V) = 1 - (1/2)^{-1} = 0.5$, а для аукциона по второму предложению эта вероятность меньше $1 - F^*(V) = 1 - (1 - \exp(-1))^{1/(n-1)} \approx 0.3679$.

2. Игра на истощение

Существует другая биологическая интерпретация игры, рассмотренной в предыдущем параграфе. Эта модель близка к модели конкуренции среди животных в борьбе за ресурс V, которая была предложена английским биологом М. Смитом.

Предположим, что $V = V(x)$, положительная и убывающая функция от x, представляет собой некий ресурс на данной территории. За ресурс идет борьба между n животными (игроками) и время игры ограничено единичным интервалом. В течение какого-то времени $x_i \in [0, 1], i = 1, ..., n$ животные демонстрируют свою силу и то из них, которое делает это дольше всех, захватывает весь ресурс. При этом, затраты участников пропорциональны времени их затраченных усилий, а затраты победителя равны длине интервала времени, когда его последний конкурент покинул поле битвы.

Будем искать равновесие среди смешанных стратегий в виде функций распределения

$$F(x) = I(0 \leqslant x < a) \int_0^x h(t)dt + I(a \leqslant x \leqslant 1),$$

где a некоторое значение из интервала $[0, 1]$ и I_A индикатор события A. Предположим, что все игроки $\{2, ..., n\}$ используют одну и ту же стратегию F, а первый игрок использует чистую стратегию $x \in [0, 1]$. Его ожидаемый выигрыш равен

$$H_1(x, \overbrace{F, \cdots, F}^{n-1}) = \tag{5}$$

$$\begin{cases} \int\limits_0^x (V(x) - t) d\,(F(t))^{n-1} - x\left\{1 - (F(x))^{n-1}\right\}, & \text{если } 0 \leqslant x < a, \\ \int\limits_0^a (V(x) - t)\, d\,(F(t))^{n-1}, & \text{если } a < x \leqslant 1, \end{cases}$$

где t есть время прекращения борьбы второго по силе игрока. Пусть

$$Q(x) = V(x)\,(F(x))^{n-1}, \quad \text{для} \quad 0 < x < a. \tag{6}$$

Тогда (5) можно представить для $0 < x < a$,

$$\begin{aligned} H_1(x, F, \cdots, F) = \quad & Q(x) - \int\limits_0^x t d\,(F(t))^{n-1} - x\left\{1 - \frac{Q(x)}{V(x)}\right\} = \\ = \quad & Q(x) + \int\limits_0^x \frac{Q(t)}{V(t)} dt - x. \end{aligned} \tag{7}$$

Условие $\frac{\partial H_1}{\partial x} = 0$ приводит к линейному дифференциальному уравнению

$$Q'(x) + \frac{Q(x)}{V(x)} = 1, \quad \text{с} \quad Q(0) = 0 \tag{8}$$

решение которого есть

$$(9) \qquad Q(x) = e^{-\int (V(x))^{-1}dx} \left[\int e^{\int (V(x))^{-1}dx} dx + c \right],$$

где c произвольная постоянная.

Предположим, например, $V(x) = \overline{x}, 0 \leqslant x \leqslant 1$. Для этого случая находим

$$Q(x) = \overline{x} \left[\int\limits_0^x dt/\overline{t} + c \right] = \overline{x}(-\log \overline{x} + c).$$

Из граничных условий $Q(0) = 0$ следует $c = 0$, следовательно,

$$(10) \qquad Q(x) = -\overline{x} \log \overline{x},$$

что дает вместе с (6)

$$(11) \qquad F(x) = (-\log \overline{x})^{\frac{1}{n-1}}, \quad 0 \leqslant x \leqslant a,$$

это возрастающая функция с $F(0) = 0$ и $F(a) = (-\log \overline{a})^{\frac{1}{n-1}}$. Условие $F(a) = 1$ дает $a = 1 - e^{-1} \approx 0{,}63212$.

Для $F(x)$ вида (8) выигрыш (5)-(7) первого игрока становится равным для $0 < x < a$,

$$H_1(x, F, \cdots, F) = -\overline{x} \log \overline{x} + \int\limits_0^x (-\log \overline{t}) dt - x = 0,$$

так как второе выражение в правой части равно $\overline{x} \log \overline{x} + x$, как следует из соотношения $\int (1 + \log \overline{t}) dt = -\overline{t} \log \overline{t}$.

Для $a < x \leqslant 1$, $H_1(x, F, \cdots, F)$ согласно (5) является убывающей функцией от x.

Следовательно, если $F^*(x)$ выбрано так, как определено в (8), то

$$H_1(F, F^*, \cdots, F^*) \leqslant H_1(F^*, F^*, \cdots, F^*) = 0,$$

$\forall$ функции распределения $F(x)$.

Окончательно, приходим к следующему утверждению.

Теорема 3. *В игре на истощение с ресурсом вида* $V(x) = \overline{x}$ *равновесие по Нэшу достигается среди смешанных стратегий вида*

$$F^*(x) = I(0 \leqslant x \leqslant a)(-\log \overline{x})^{\frac{1}{n-1}} + I(a < x \leqslant 1),$$

с выигрышем для каждого игрока равным 0*, где* $a = 1 - e^{-1}(\approx 0{,}63212)$.

Например, для $n = 2$, оптимальная плотность $f_2^*(x) = (-\log \overline{x})$, а при $n = 3$

$$f_3^*(x) = \frac{1}{2\overline{x}\,(-\log \overline{x})^{1/2}} \to \begin{cases} +\infty, & \text{если } x \downarrow 0 \\ e/2 \approx 1{,}359, & \text{если } x \uparrow a. \end{cases}$$

Их вид представлен на рис. 1. Интересно, отметить, что меняется радикально вид смешанных стратегий. Для $n = 2$ с большей вероятностью надо бороться за ресурс как можно дольше. При увеличении числа соперников следует с большой вероятностью сразу же покидать поле битвы.

Рассуждая аналогично, нетрудно получить более общий результат.

Теорема 4. *Для* $V(x) = \dfrac{1}{k}\overline{x}, (0 < k \leqslant 1)$*, равновесие по Нэшу достигается среди смешанных стратегий вида*

$$F^*(x) = \left[\left(k/\overline{k}\right)\left\{(\overline{x})^{k-1} - 1\right\}\right]^{\frac{1}{n-1}}, \quad 0 \leqslant x < a,$$

где a *есть единственный корень в интервале* $(0,1)$ *уравнения*

$$-\overline{k}\log \overline{a} = -\log k.$$

Оптимальный выигрыш каждого игрока равен 0.

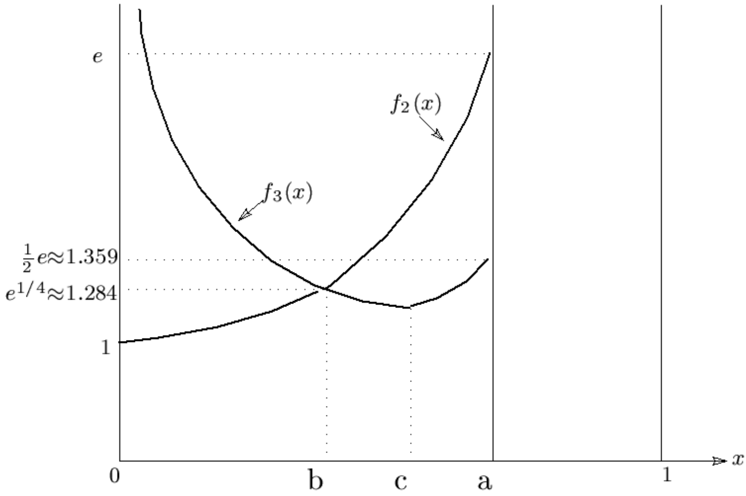


Рис. 1. Решение для $n = 2$ и 3, где $V(x) = \overline{x}$.

Заметим, что $\lim\limits_{k\to 1-0} \dfrac{(\overline{x})^{k-1} - 1}{\overline{k}} = -\log \overline{x}$ и, следовательно,

$$\lim_{k\to 1-0} F^*(x) = (-\log \overline{x})^{\frac{1}{n-1}}.$$

3. Дуэли, труэли и другие соревнования на меткость

Рассмотрим соревнования n игроков, связанные с поражением некоторой мишени (в частном случае своего противника). Каждый из игроков имеет одну пулю, которой он может выстрелить в цель в любой момент времени из интервала $[0, 1]$. Стартуя в момент $t = 0$, он движется к своей цели, которую может достигнуть в момент $t = 1$, и в какой-то момент должен выстрелить в нее. Пусть $A(t)$ есть вероятность поражения цели, если выстрел происходит в момент $t \in [0, 1]$. Предполагается, что $A(t)$ дифференцируема и $A'(t) > 0, A(0) = 0$ и $A(1) = 1$.

Выигрыш игрока равен 1, если он поразил свою цель раньше, чем другие игроки, и равен 0, в противном случае. В случае, если несколько игроков поразили цель, их выигрыш равен 0. Каждый игрок заинтересован найти такую стратегию, при которой математическое ожидание попадания в цель максимально.

В силу симметрии задачи, естественно предположить, что в равновесии все оптимальные стратегии игроков одинаковы. Предположим, что все игроки используют одинаковые смешанные стратегии с функцией распределения $F(t)$ и, соответственно, плотностью $f(t), a \leqslant t \leqslant 1$, где параметр $a \in [0, 1]$. Тогда, ожидаемый выигрыш первого игрока, если он стреляет в момент x, а другие игроки используют смешанные стратегии $F(t)$ равен

$$H_1(x, \overbrace{F, \cdots, F}^{n-1}) = \tag{12}$$

$$\begin{cases} A(x), & \text{если } 0 \leqslant x < a, \\ A(x)\left[1 - \int\limits_a^x A(t)f(t)dt\right]^{n-1}, & \text{если } a \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

так как для $a \leqslant x \leqslant 1$ игрок 1 получит выигрыш 1, только в случае, если все другие игроки $2 \sim n$ не стреляли, или стреляли до момента x, но не попали в цель.

Пусть v общий для всех игроков оптимальный выигрыш. Тогда достаточное условие для равновесия будет выглядеть так.

$$H_1(x, F, \cdots, F) \left\{ \begin{array}{c} \leqslant \\ = \end{array} \right\} v, \text{ для} \left\{ \begin{array}{c} 0 \leqslant x < a \\ a \leqslant x \leqslant 1 \end{array} \right\}. \tag{13}$$

Для $a \leqslant x \leqslant 1$ дифференцируя (12) и приравнивая нулю, мы приходим к дифференциальному уравнению

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{2n-1}{n-1}\left[\frac{A'(x)}{A(x)} - \frac{A''(x)}{A'(x)}\right]. \tag{14}$$

Интегрирование от a до x дает

$$\frac{f(x)}{f(a)} = \frac{A'(x)}{A'(a)} \left(\frac{A(x)}{A(a)}\right)^{-\frac{2n-1}{n-1}}, \tag{15}$$

откуда

$$f(x) = c\,(A(x))^{-\frac{2n-1}{n-1}}\, A'(x). \tag{16}$$

Условие $\int\limits_a^1 f(t)dt = 1$ дает

$$c^{-1} = \int\limits_a^1 (A(x))^{-\frac{2n-1}{n-1}}\, A'(x)dx = \left(\frac{n-1}{n}\right)\left[(A(a))^{-\frac{n}{n-1}} - 1\right]. \tag{17}$$

Условие (13) на интервале $a \leqslant x \leqslant 1$ требует, чтобы выполнялось

$$A(x)\left[1 - \int\limits_a^x A(t)f(t)dt\right]^{n-1} \equiv v,$$

которое приводит вместе с (14) после упрощений к равенству

$$\begin{gathered} c(n-1)\left[(A(a))^{-\frac{1}{n-1}} - (A(x))^{-\frac{1}{n-1}}\right] = \\ 1 - v^{\frac{1}{n-1}}\,(A(x))^{-\frac{1}{n-1}}, \quad \forall x \in [a,1]. \end{gathered} \tag{18}$$

Исключая c в соответствии с (15), приходим к равенству

$$\begin{gathered} (A(a))^{-\frac{1}{n-1}} - (A(x))^{-\frac{1}{n-1}} = \\ = \frac{1}{n}\left[1 - \left(\frac{v}{A(x)}\right)^{\frac{1}{n-1}}\right]\left[(A(a))^{-\frac{n}{n-1}} - 1\right], \quad \forall x \in (a,1). \end{gathered} \tag{19}$$

Следовательно, должны выполняться соотношения

$$(A(a))^{-\frac{n}{n-1}} - n\,(A(a))^{-\frac{1}{n-1}} - 1 = 0 \quad \text{и}$$
(20)
$$v^{\frac{1}{n-1}}\left[(A(a))^{-\frac{n}{n-1}} - 1\right] = n.$$

Из этих двух уравнений находим $v^{-\frac{1}{n-1}} = (A(a))^{-\frac{1}{n-1}}$, и отсюда $v = A(a)$.

Кроме того, умножая обе части первого уравнения (20) на $(A(a))^{\frac{n}{n-1}}$, приходим к уравнению

$$(A(a))^{\frac{n}{n-1}} + nA(a) - 1 = 0. \tag{21}$$

Окончательно, нам остается установить условие $H_1(x, F, \cdots, F) \leqslant v, \ \forall x \in [0, a]$. А это выполняется, поскольку в силу предположений $A(x) \leqslant A(a) = v, \ \forall x \in [0, a)$.

Данные рассуждения приводят нас к следующему утверждению.

Теорема 5. *Пусть α_n единственный корень на $[0, 1]$ уравнения*

$$\alpha^{\frac{n}{n-1}} + n\alpha - 1 = 0. \tag{22}$$

Тогда равновесие по Нэшу в данной игре состоит из смешанных стратегий вида

$$f^*(x) = \frac{1}{n-1}\,(\alpha_n)^{\frac{1}{n-1}}\,(A(x))^{-\frac{2n-1}{n-1}}\,A'(x),$$
(23)
$$\text{для } \ A^{-1}(\alpha_n) = a_n \leqslant x \leqslant 1.$$

При этом оптимальные выигрыши игроков в равновесии равны α_n.

Мы видим, во-первых, что оптимальный выигрыш игроков α_n не зависит от функции точности $A(t)$, и, во-вторых, начальная точка носителя оптимальной стратегии a зависит от $A(t)$. Кроме того, мы видим из (23), что вероятность ничьей, т. е. когда все игроки получают нуль равна $(\alpha_n)^{\frac{n}{n-1}}$.

При $n = 2$ (дуэль) ожидаемый выигрыш равен $\alpha_n = \sqrt{2} - 1 \approx 0{,}4142$, а при $n = 3$ (труэль) $\alpha_n \approx 0{,}2831$. Интервал носителя распределения зависит от вида функции точности.

Пример 1. Пусть $A(x) = x^\gamma, \gamma > 0$. Тогда

$$a_n = A^{-1}(\alpha_n) = \alpha_n^{1/\gamma}$$

и оптимальная стратегия имеет следующую плотность распределения

$$f^*(x) = \frac{\gamma}{n-1}(\alpha_n)^{\frac{1}{n-1}} x^{-\left(\frac{n}{n-1}\gamma + 1\right)}, \quad \text{для } \alpha_n^{1/\gamma} \leqslant x \leqslant 1.$$

При $\gamma = 1$ и $n = 2$(дуэль) $a_n = \alpha_n = \sqrt{2} - 1$, т. е. начинать стрелять надо после момента $0{,}4142$. Заметим, что для любого $n \geqslant 2$, a_n возрастает, когда параметр γ возрастает. Это соответствует интуитивному ожиданию, что чем меньше меткость игрока, тем позже надо начинать стрелять. •

Пример 2. Пусть $A(x) = \dfrac{e^x - 1}{e - 1}$. Тогда

$$a_n = A^{-1}(\alpha_n) = \log\left\{1 + (e-1)\alpha_n\right\},$$

следовательно, a_n убывает, если n возрастает. Например, при $n = 2$ (дуэль)

$$a_n = \log\left\{(\sqrt{2} - 1)(e + \sqrt{2})\right\} \approx 0{,}5375,$$

а при $n = 3$ (труэль)

$$a_n \approx 0{,}3964.$$

При этом оптимальные стратегии определяются с помощью плотности распределения вида

$$f^*(x) = \tfrac{1}{n-1}\left(\alpha_n\right)^{\frac{1}{n-1}}(e-1)^{-1}(e^x - 1)^{-\frac{2n-1}{n-1}} e^x,$$

для $a_n \leqslant x \leqslant 1$. •

4. Игра предсказания

Представим, что n игроков стараются предсказать значение u случайной величины U, которая имеет равномерное распределение $U_{[0,1]}$ на интервале $[0,1]$. Правила игры таковы, что выигрывает тот игрок, который назвал значение, ближайшее к u, но не большее его. При этом он выигрывает единицу, а остальные $n-1$ игроков получают 0. Каждый из игроков стремится максимизировать ожидаемый выигрыш.

Будем искать равновесие в виде распределений с носителем на некотором интервале $[0,a]$, $a \leqslant 1$, а именно пусть

$$G(x) = I(x < a) \int\limits_0^x g(t)dt + I(x \geqslant a).$$

Тогда ожидаемый выигрыш игрока 1, если его предсказанное значение равно x, а другие игроки следуют смешанной стратегии с функцией распределением $G(t)$ и ее плотностью $g(t)$, равен

$$H_1(x, \overbrace{G, \cdots, G}^{n-1}) = \overline{x}, \quad \text{если } a < x < 1. \tag{24}$$

Для $0 < x < a$ согласно условиям

$$H_1(x, G, \cdots, G) = (G(x))^{n-1}\, \overline{x} +$$

$$+\sum_{k=1}^{n-1} \left(\begin{array}{c} n-1 \\ k \end{array} \right) k\, (G(x))^{n-1-k} \int\limits_x^a g(t) \left(\overline{G}(t)\right)^{k-1} (t-x)dt, \tag{25}$$

поскольку k игроков ($1 \leqslant k \leqslant n-1$) могут назвать значения большие, чем x, а другие $n-1-k$ игроков назвать меньше, чем x. Заметим, что плотность распределения случайной величины

$\min(X_1, \cdots, X_k)$ есть $k\left(\overline{G}(t)\right)^{k-1} g(t)$.

Поскольку интегрирование по частям приводит к равенству

$$\int_x^a (t-x)\left(\overline{G}(t)\right)^{k-1} g(t)dt = \frac{1}{k}\int_x^a \left(\overline{G}(t)\right)^k dt,$$

мы можем переписать (25) в виде

$$H_1(x,\overbrace{G,\cdots,G}^{n-1}) =$$

(26)

$$(G(x))^{n-1}\,\overline{x} + \sum_{k=1}^{n-1}\left(\begin{array}{c} n-1 \\ k \end{array}\right)(G(x))^{n-1-k}\int_x^a \left(\overline{G}(t)\right)^k dt,$$

для $0 < x < a$. Пусть v оптимальное ожидаемое значение выигрыша каждого игрока. Запишем условие смешанного равновесия для $G(x)$

(27) $$H_1(x,G,\cdots,G)\left\{\begin{array}{c} \equiv \\ \leqslant \end{array}\right\}v, \quad \text{для} \quad \left\{\begin{array}{c} 0\leqslant x<a \\ a<x\leqslant 1 \end{array}\right\}.$$

Пользуясь (26)-(27), преобразуем уравнение $\frac{\partial}{\partial x}H_1(x,g,\cdots,g) = 0$ на интервале $0 \leqslant x < a$. Деля обе части уравнения на $(G(x))^{n-1}$ и упрощая, приходим к уравнению

$$1+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\begin{array}{c} n-1 \\ k \end{array}\right)\left(\frac{\overline{G}(x)}{G(x)}\right)^k = \frac{g(x)}{G(x)}\Bigg[(n-1)\overline{x}+$$

(28)

$$+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\begin{array}{c} n-1 \\ k \end{array}\right)(n-1-k)\int_x^a \left(\frac{\overline{G}(t)}{G(x)}\right)^k dt\Bigg].$$

Левая часть уравнения (28) равна $[G(x)]^{-(n-1)}$, а правая часть может быть представлена как

$$\frac{g(x)}{G(x)} \cdot (n-1) \left[\overline{a} + \int\limits_x^a \left\{ 1 + \frac{\overline{G}(t)}{G(x)} \right\}^{n-2} dt \right].$$

Таким образом, мы можем представить (28) в виде

$$\overline{a}[G(x)]^{n-2} + \int\limits_x^a (G(x) + \overline{G}(t))^{n-2} dt = [(n-1)g(x)]^{-1}, \tag{29}$$

$$0 < x < a, \ \ \forall n \geqslant 2.$$

Естественно $g(x), G(x)$ и a зависят от n. Но мы для простоты опускаем индекс n.

Рассмотрим последовательность функций

$$s_k(x) = \left[\overline{a}[G(x)]^k + \int\limits_x^a (G(x) + \overline{G}(t))^k dt \right] \Big/ \ \overline{x}, \tag{30}$$

$$\forall k = 1, 2, \cdots, n-2.$$

Очевидно, выполняются неравенства

(31) $1 \equiv s_0(x) \geqslant s_1(x) \geqslant s_2(x) \geqslant \cdots \geqslant s_{n-2}(x) \geqslant 0, \ \ \forall x \in [0, a].$

Умножая обе части (30) на $\overline{x}$ и дифференцируя, приходим к рекуррентным дифференциальным уравнениям

$$\overline{x} s_k'(x) - s_k(x) = k g(x) \overline{x} s_{k-1}(x) - 1,$$

или, эквивалентно,

(32) $s_k'(x) + (1 - s_k(x)) / \overline{x} = k g(x) s_{k-1}(x), \ \ \forall k = 1, 2, \cdots, n-2$

с граничными условиями

$$s_k(a) = 1, \ \ \forall k = 1, 2, \cdots, n-2.$$

Из (29)-(30) мы видим

(33) $$s_{n-2}(x) = [(n-1)\overline{x}g(x)]^{-1}$$

что эквивалентно

$$g(x) = [(n-1)\overline{x}s_{n-2}(x)]^{-1} \geqslant [(n-1)\overline{x}]^{-1} \quad \text{(из (31))}$$

Среднее значение этого распределения равно

(34) $$\int\limits_0^a xg(x)dx = \int\limits_0^a \frac{xdx}{(n-1)\overline{x}s_{n-2}(x)}.$$

Теорема 6. *Пусть* $\{s_1, \cdots, s_{n-2}\}$ *есть решение системы дифференциальных уравнений (32) и* $g(x) = \frac{1}{(n-1)(1-x)s_{n-2}(x)}$. *Выберем* a *из условия* $\int\limits_0^a g(x)dx = 1$. *Тогда* $g(x)$ *оптимальная смешанная стратегия в игре предсказания.*

Система (32) вместе с (33) может быть использована для нахождения решения задачи. Опишем этот алгоритм. Вначале фиксируем значение параметра a, и рассматриваем систему дифференциальных уравнений (32) на интервале $[0, a]$. Когда найдем решение с граничным условием $s_k(a) = 1, k = 1, \cdots, n-2$, определяем плотность распределения $g(x) = [(n-1)s_{n-2}(x)(1-x)]^{-1}, x \in [0, a]$. Затем вычисляем a из условия $\int\limits_0^a g(x) = 1$.

Случай $n = 2$.

Из (24)-(26) следует

$$H_1(x, G) = \begin{cases} G(x)\overline{x} + \int\limits_x^a (t-x)g(t)dt, & \text{для } 0 < x < a \\ \overline{x}, & \text{для } a < x < 1. \end{cases}$$

Уравнение (29) дает для $0 < x < a, g(x) = 1/\overline{x}$, и отсюда $G(x) = -\log \overline{x}, a = 1 - e^{-1} \approx 0{,}63212$. Для $a < x < 1$, имеет место $H_1(x, g^*) = \overline{x} \leqslant \overline{a} = H_1(a, g^*)$ и, следовательно, условие (27) удовлетворяется. Общее значение игры равно $e^{-1} \approx 0{,}36788$.

Случай $n = 3$.

(35)
$$H_1(x, G, G) =$$
$$= \begin{cases} (G(x))^2\,\overline{x} + 2G(x)\displaystyle\int\limits_x^a (t-x)g(t)dt+ & \\ +2\int\limits_x^a (t-x)\overline{G}(t)g(t)dt, & \text{если } 0 < x < a \\ \overline{x}, & \text{если } a < x < 1. \end{cases}$$

Уравнение (32) для $n = 3$ приводит к дифференциальному уравнению

(36) $s_1'(x) + (1 - s_1(x))/\overline{x} = g(x)s_0(x) = g(x)$, при этом $s_1(a) = 1$,

и после упрощения

(37)
$$\overline{x}s_1(x) = \overline{a}G(x) + \int\limits_x^a \left(G(x) + \overline{G}(t)\right) dt =$$
$$= \frac{1}{2g(x)} \text{ (из (29) при } n = 3).$$

Исключая $g(x)$ из (36)-(37), приходим к дифференциальному уравнению

(38)
$$\frac{s_1 s_1'}{s_1^2 - s_1 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{\overline{x}}, \ \ 0 < x < a, \quad \text{с} \quad s_1(a) = 1.$$

Функция $g(x) = (2s_1(x)\overline{x})^{-1}$ является положительной и непрерывной и представляет плотность распределения, если

$\int\limits_0^a g(x)dx = 1$. Отсюда

$$1 = \int\limits_0^a g(x)dx = \int\limits_0^a \left\{ s_1'(x) + \frac{1 - s_1(x)}{1 - x} \right\} dx =$$

$$= 1 - s_1(0) + \int\limits_0^a \frac{1 - s_1(x)}{1 - x} dx$$

так что

$$\begin{aligned} s_1(0) &= \int\limits_0^a \frac{1 - s_1(x)}{1 - x} dx = \int\limits_{s_1(0)}^1 \frac{s_1 \overline{s}_1}{s_1^2 - s_1 + \frac{1}{2}} ds_1 \quad \text{(из (38))} \\ &= -1 + s_1(0) + \frac{\pi}{4} - \tan^{-1}(2s_1(0) - 1) \end{aligned}$$

$$\left(\text{так как} \quad \int \frac{ds_1}{s_1^2 - s_1 + r_2} = 2\tan^{-1} 2x \right)$$

и поэтому

(39) $$s_1(0) = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \tan\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \right\} \approx 0{,}3910.$$

Кроме того, интегрируя обе части (38) от x до a, мы приходим к уравнению

(40) $$\left(s_1^2 - s_1 + \frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{2}} e^{\tan^{-1}(2s_1 - 1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\pi/4} \overline{a}/\overline{x}.$$

Подставляя здесь $x = 0$ и используя $s_1(0) \approx 0{,}3910$, получаем

(41) $$a = 1 - \left\{ 2\left(s_1(0)\right)^2 - 2s_1(0) + 1 \right\}^{1/2} e^{-1} \approx 0{,}7156.$$

Условие (27) выполняется согласно (35) с $v = \overline{a} = 0{,}2844$. Решения для $n = 2$ и $n = 3$ изображены на рис. 2.

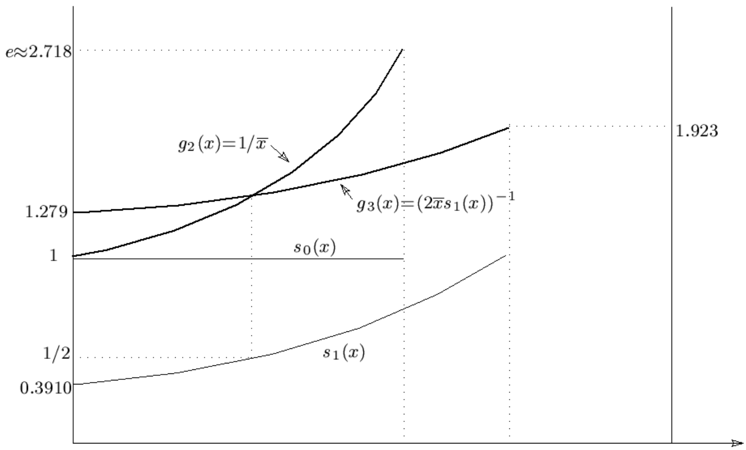


Рис. 2. Решения для $n = 2$ и 3

Случай $n = 4$.

Из (24)-(26) для $n = 4$ имеем

$$H_1(x, G, G, G, G) = \tag{42}$$

$$= \begin{cases} (G(x))^3\,\overline{x} + \sum\limits_{k=1}^{3} \begin{pmatrix} 3 \\ k \end{pmatrix} (G(x))^{3-k} \int\limits_x^a \left(\overline{G}(t)\right)^k dt, & 0 < x < a \\ \overline{x}, & a < x < 1. \end{cases}$$

Система (32)-(33) становится

(43)

$$\begin{cases} s_1'(x) + (1 - s_1(x))\,/\overline{x} = g(x)s_0(x) = g(x), & \text{с } s_1(0) = 1 \\ s_2'(x) + (1 - s_2(x))\,/\overline{x} = 2g(x)s_1(x), & \text{с } s_2(0) = 1 \\ s_2(x) = (3g(x)\overline{x})^{-1}. \end{cases}$$

Плотность распределения имеет вид $g(x) = (3\overline{x}s_2(x))^{-1}$, и мы можем выбрать a так, что $1 = \int\limits_0^a \frac{dx}{3\overline{x}s_2(x)}$. Так как правая часть есть $\geqslant \frac{2}{3}\int\limits_0^a \frac{dx}{2\overline{x}s_1(x)}$, мы можем использовать решение для случая $n = 3$.

Исключая $g(x)$ из (43), получаем простое дифференциальное уравнение

$$(44) \qquad \begin{cases} s_1'(x) + (1 - s_1(x))\,/\overline{x} = (3\overline{x}s_2(x))^{-1} \\ s_2'(x) + (1 - s_2(x))\,/\overline{x} = \frac{2}{3}s_1(x)/\left(\overline{x}s_2(x)\right). \end{cases}$$

После вычислений находим $a \approx 0{,}7917$. Условие (27) выполняется с $v = \overline{a} \approx 0{,}2083$.

Другие примеры.

Для случаев $n \geqslant 5$ вычисления приводят к следующим результатам

$n = 2;$	$a \approx 0{,}6321,$	$\mathrm{v} \approx 0{,}3679,$	$\int\limits_0^a xg(x)dx \approx 0{,}3678$
3;	0,7156,	0,2844,	
4;	0,7917,	0,2083,	
5;	0,8286,	0,1714,	0,4251
7;	0,8731,	0,1269,	0,4425
10;	0,9084,	0,0916,	0,4573

Мы видим, что когда n возрастает, $a \uparrow 1$, оптимальные выигрыши $\downarrow 0$, и в равновесии плотности распределения асимптотически становятся равномерными распределениями $U_{[0,1]}$.

Литература

1. КАРЛИН С. *Математические методы в теории игр, программировании и экономике*. – М.: Мир, 1964.
2. ПЕТРОСЯН Л.А., ЗЕНКЕВИЧ Н.А., СЕМИНА Е.А. *Теория игр*. - – М: Высшая школа, 1998.
3. SAKAGUCHI M., SZAJOWSKI K. *Competetive prediction of a random variable*
   Math. Japonica. – 1996. – V. 34. №3. P. 461-472.

EQUILIBRIUM IN n-PLAYER COMPETITIVE GAME OF TIMING

Vladimir Mazalov, Institute of Applied Mathematical Research Karelian Research Center of RAS, Doctor of Science, professor (vmazalov@krc.karelia.ru).
Minoru Sakaguchi, Osaka University, Doctor of Science, professor

Abstract: Each player in the game of timing has to decide his time to shoot under the condition that he is not informed of the shooting times of his rivals. That is, we deal with silent games of timing. Games of timing are used to model auctions, games of war of attrition, competitive predictions of a random variable, etc. Using the symmetry of the model we derive the equation to determine the equilibrium of the game.

Keywords: game of timing, n-person game, equilibrium, war of attrition, prediction of random variable.

УДК 519.834
ББК В183.3

ОГРАНИЧЕННАЯ СОГЛАСОВАННОСТЬ, ПОРОЖДЕННАЯ ФУНКЦИЯМИ ПОЛЕЗНОСТИ КОАЛИЦИЙ [1] [2]

Наумова Н. И. [3]
(Факультет математики и механики, Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург)

Кооперативная игра рассматривается как задача векторной оптимизации с целевой точкой, координаты которой – требования коалиций. Для заданного набора непрерывных строго возрастающих функций полезности коалиций предполагается, что для каждого разбиения множества игроков решение задачи не изменится после переоценки требований его элементов, в которой потери полезностей всех элементов разбиения будут одинаковы. В условии непрерывности это приводит к специальному значению игры, имеющему итеративный метод вычисления. В частности, для одинаковых логарифмических функций полезности возникает пропорциональная переоценка требований коалиций и получается значение взвешенной энтропии. Условие анонимности и свойство «болвана» дают вектор Шепли, а условие положительной однородности приводит к значению взвешенной энтропии.

Ключевые слова: кооперативная игра, взвешенная энтропия, вектор Шепли.

---

[1] *Работа была поддержана грантом NWO (The Netherlands Organization for Scientific Research) NL-RF 047.017.017 и РФФИ грант №05-01-89005-НВО-а*

[2] *Текст приводится в соответствии с изданием «Математическая теория игр и ее приложения. – 2009. – Т. 1. №1».*

[3] *Наталия Ивановна Наумова, доктор физико-математических наук, профессор (nataliai.naumova@mail.ru).*

Введение

Игрой с трансферабельными полезностями (TU) называется пара (N, v), где $N = \{1, \ldots, n\}$ – *множество игроков*, v – *характеристическая функция*, т. е. v назначает каждой коалиции $S \subset N$ скалярную силу влияния $v(S)$. В этой статье сила влияния коалиции интерпретируется как ее запрос в процессе переговоров.

Одной из главных проблем в кооперативной теории игры является построение правила распределения. *Правило распределения* Ψ назначает для каждой игры (N, v) n-вектор $\Psi(N, v)$, где $\Psi_i(N, v)$ – величина влияния (или сила) игрока i. Оно *эффективно*, если сумма распределений равна $v(N)$. *Решение* – это эффективное правило распределения.

В данной статье кооперативная игра рассматривается как задача переговоров с целевой точкой, где вектор значений характеристической функции коалиций – целевая точка и набор всех аддитивных функций множеств с зафиксированным решением для коалиции N – допустимое множество. Некоторые результаты из [2], [3], [6] касающиеся решений общих задач переговоров с целевыми точками применены здесь к кооперативным играм.

Специальный класс задач переговоров с целевыми точками – класс проблем распределения ресурса, где цель состоит в том, чтобы разделить фиксированную сумму между агентами в соответствии с их требованиями (см. [11] например). Для задач распределения ресурса широко рассматриваются два главных метода распределения: равное приращение и пропорциональное разделение. Методы равных убытков, где все участники имеют равные приращения полезностей их выигрышей, обобщают эти методы.

Эти идеи ведут нас к семейству новых решений кооперативных игр. Пусть для каждой коалиции S ее функция полезности g_S известна. Тогда решение, основанное на этих функциях полезности определено. Решение назначает для каждой кооперативной игры единственное решение специальной проблемы минимизации. Если функции полезности всех коалиций равны одной и той же логарифмической функции, тогда это решение – результат максимизации взвешенной функции энтропии на наборе эффективных распределений. Класс решений, основанных на линейных функциях полезности коалиций, содержит решение Шепли и минимальное квадратичное решение.

Решение, основанное на функциях полезности коалиций, может быть обосновано двумя путями. Первый рассматривает итеративный процесс модификации запросов коалиций. На каждой стадии этого процесса рассматриваемое разбиение набора всех игроков переоценивает запросы всех его членов. Сумма новых запросов равна значению главной коалиции и все члены разбиения имеют равные приращения их функций полезности.

Например, если функции полезности всех членов разбиения равны одной и той же логарифмической функции, то разбиение распределяет доход от полной кооперации среди его членов пропорционально их запросам. Следующая стадия процесса рассматривает другое разбиение множества игроков. Если все возможные разбиения появляются в этом процессе циклически, то последовательность характеристических функций сходится к аддитивной функции, которая обеспечивает результат распределения. Это распределение является единственным решением специальной задачи минимизации.

Второй путь – аксиоматическое обоснование решения, где ключевая аксиома – ограниченная согласованность, основанная на функциях полезности коалиций. Это требует для каждого разбиения множества игроков сохранение результата правила распределения после переоценки запросов членов разбиения при равных потерях их функций полезности. Предположение, что для каждого разбиения множества игроков, пропорциональная переоценка значений характеристической функции для членов разбиения не изменяет результат правила распределения и предположение непрерывности ведут нас к обоснованию решения, максимизирующего взвешенную энтропию в кооперативных играх. Если мы заменяем пропорциональный принцип переоценки принципом равного приращения, то те же самые аргументы ведут нас к распределению, минимизирующему сумму квадратов эксцессов коалиций, т. е. к минимальному квадратичному решению.

Некоторые дополнительные свойства решений, основанных на функциях полезности коалиций, дают возможность описывать эти функции полезности. Свойство «болвана» и предположение анонимности приводят к решению Шепли. Предположение положительной однородности и равные права всех коалиций дают решение, максимизирующее взвешенную энтропию.

Для задач переговоров с целевыми точками, независимыми от допустимых множеств, результат максимизации взвешенной функции энтропии был предложен Брегман и Романовским [3]. Наумова [4] формализовала их аргументы и представила аксиоматическое обоснование этого решения. Эта аксиоматика была обобщена в Брегман и Наумова [2], где логарифмические функции, приводящие к решению, максимизирующему взвешенную энтропию, были заменены произвольными функциями полезности агентов. Кроме того, в [2] и [6] существование функций полезности агентов, порождающих решение задачи, было получено из некоторых аксиом. Подобный результат был получен позже независимо Csiczar [7] при дополнительных предположениях.

В теории кооперативных игр Hamiache [9] описал последовательность характеристических функций, сходящуюся к аддитивной функции, которая обеспечивает решение Шепли для первой функции последовательности. В этой статье решение Шепли получено как предел другой последовательности характеристических функций и сходимость последовательности характеристических функций в общем случае основана на результате Брегман [1]. Понятие «ограниченной согласованности» было введено Hamiache [9], где оно использовалось для нового аксиоматического обоснования решения Шепли. Это означает постоянство решения при некоторых изменениях характеристических функций.

1. Решения, основанные на функциях полезности коалиций

Пусть $X = R^1$ или $X = (0, +\infty)$, (N, v) – TU кооперативная игра с $v(S) \in X$ для всех $S \neq \emptyset$, $v(\emptyset) = 0$, $\mathcal{G} = \{g_Q\}_{\emptyset \neq Q \subset N}$ – семейство строго возрастающих непрерывных функций, определенных на X с множеством значений равным R^1.

Рассмотрим следующую задачу:

$$(1) \qquad \min_{x \in X^n : x(N) = v(N)} \sum_{S : S \subset N} \int_{v(S)}^{x(S)} (g_S(t) - g_S(v(S)))dt,$$

где $x(S) = \sum\limits_{i \in S} x_i$.

Предложение 1. *Задача (1) имеет единственное решение.*

Доказательство. Рассмотрим другую задачу

$$(2) \qquad \min \sum_{S : S \subset N} \int_{v(S)}^{x_S} (g_S(t) - g_S(v(S)))dt,$$

определенную для $\{x_S\}_{S : S \subseteq N, S \neq \emptyset}$ с ограничениями

$$\begin{array}{ll} x_S \in X & \text{для всех } S \subset N, S \neq \emptyset, \\ \sum\limits_{S \in \mathcal{P}} x_S = v(N) & \text{для всех разбиений } \mathcal{P} \text{ множества } N. \end{array}$$

Задачи (1) и (2) эквивалентны, поскольку все допустимые точки задачи (2) являются аддитивными функциями множества.

Для каждого $S \subset N$, $y \in X$ обозначим $f_S(y) = \int\limits_{v(S)}^{y} (g_S(t) - g_S(v(S)))dt$. Имеем $f'_S(y) = g_S(y) - g_S(v(S))$, следовательно строгое возрастание g_S влечет то, что f_S – строго выпуклая функция. Целевая функция (2) также строго выпуклая функция, определенная на выпуклом множестве, поэтому, если решение (2) существует, то оно единственно.

Теперь докажем существование решения. Заметим, что $f_S(y) \geqslant f_S(v(S)) = 0$ для всех $y \in X$.

Пусть $X = R^1$, тогда, поскольку $\{g_S(y) : y \in X\} = R^1$, $f_S(y) \to +\infty$ при $y \to \infty$. Следовательно существует α_S, β_S ($S \subset N$), такая что дополнение неравенств $\alpha_S \leqslant x_S \leqslant \beta_S$ для всех $S \subset N$ к ограничениям (2) не изменяет решение (2). Новая задача имеет решение, поскольку она имеет компактное допустимое множество.

Пусть $X = (0, +\infty)$. Тогда для всех S, $x_S \leqslant v(N)$ для всех допустимых x. Функция $f_S(y)$ строго убывает по $y < v(S)$. Если $\lim\limits_{y \to 0} f_S(y) = +\infty$, то существует $\alpha_S > 0$ такая, что дополнение

неравества $x_S \geqslant \alpha_S$ к ограничениям (2) не изменяет решение (2). Если $\lim\limits_{y \to 0} f_S(y) < +\infty$, то определим $f_S(0) = \lim\limits_{y \to 0} f_S(y)$ и

$\alpha_S = 0$. Теперь рассмотрим задачу (3), где условие $x_S \in X$ в задаче (2) заменено на $\alpha_S \leqslant x_S \leqslant v(N)$. Задача (3) имеет компактное допустимое множество и непрерывную целевую функцию, следовательно имеет решение $z = \{z_S\}_{S \subset N}$. Докажем, что z – решение (2). Предположим, что $z_Q = 0$ для некоторого $Q \subset N$. Существуют $i, j \in N$ такие, что $i \in Q$, $z_{\{j\}} > 0$. Зафиксируем $\epsilon : 0 < \epsilon < \min\limits_{z_S > 0} z_S$. Пусть $M = \max\limits_{S : z_S > 0} \max\{|g_S(t) -$

$g_S(v(S))| : t \in [z_S - \epsilon, z_S + \epsilon]\}$. Зафиксируем $\delta > 0$ такое, что $\delta < \min\{\epsilon, \min\limits_{S \subset N} v(S)\}$ и $g_Q(\delta) - g_Q(v(Q)) > 2^n M$. Рассмотрим

следующее $x = \{x_S\}_{S \subset N}$:
$x_S = z_S + \delta$, $i \in S$, $j \notin S$,
$x_S = z_S - \delta$, $i \notin S$, $j \in S$,
$x_S = z_S$ иначе.
Если $z_s > 0$, то $|f_S(x_S) - f_S(z_S)| < \delta M$. Если $z_s = 0$, то

$f_S(x_S) < f_S(z_S)$. Более того, $f_Q(x_Q) - f_Q(z_Q) < -2^n\delta M$. Следовательно $\sum\limits_{S\subset N} f_S(x_S) < \sum\limits_{S\subset N} f_S(z_S)$. Это противоречит определению z, следовательно z – решение задачи (2).

Пусть $\mathcal{G} = \{g_Q\}_{\emptyset\neq Q\subset N}$ – семейство строго возрастающих непрерывных функций, определенных на X с множеством значений равным R^1. *Решение* $\Psi^{\mathcal{G}}$, *основанное на семействе функций* $\mathcal{G}$ – это отображение, переводящее каждое (N,v) с $v(S)\in X$ в единственное решение задачи (1). Теперь опишем обоснование значения $\Psi^{\mathcal{G}}$.

Для каждого разбиения $\mathcal{P}$ из N определим характеристическую функцию $v^{\mathcal{P},\mathcal{G}}$ следующим образом.

$$\begin{cases} v^{\mathcal{P},\mathcal{G}}(S) = v(S) \quad \text{для всех } S\notin\mathcal{P}, \\ \sum\limits_{S\in\mathcal{P}} v^{\mathcal{P},\mathcal{G}}(S) = v(N), \\ g_S(v^{\mathcal{P},\mathcal{G}}(S)) - g_S(v(S)) \quad \text{равны для всех } S\in\mathcal{P}. \end{cases}$$

Здесь характеристическая функция $v^{\mathcal{P},\mathcal{G}}$ – результат переоценки v для членов $\mathcal{P}$, где все члены получают равные приращения их полезностей.

Рассмотрим следующие 3 свойства правила распределения Ψ, определенное на множестве (всех / положительных) кооперативных TU игр.

C1. Если v – аддитивная функция, то $\Psi_i(N,v) = v(\{i\})$ для всех $i\in N$.

C2. Если $v_k \to v$ при $k\to\infty$, то $\Psi(N,v_k)\to\Psi(N,v)$ при $k\to\infty$.

C3. $\Psi(N,v) = \Psi(N,v^{\mathcal{P},\mathcal{G}})$ для всех v, всех разбиений $\mathcal{P}$ множества N.

Условие C1 известно как *несущественное свойство игры*, C2, предположение непрерывности, C3 можно рассмотреть как некоторый тип устойчивости или некоторый тип условий инвариантности. (Hamiache [9] называет свойство этого типа «ограниченной согласованностью».) Фактически это эквивалентно сохранению результата распределения при переоценке требований членов разбиения $\mathcal{P}$ с равными приращениями их полезностей.

Теорема 1. *Пусть* $X = R^1$ *или* $X = (0, +\infty)$, $\mathcal{G} = \{g_Q\}_{\emptyset \neq Q \subset N}$ *– семейство строго возрастающих непрерывных функций, определенных на* X *с множеством значений, равным* R^1.

Тогда $\Psi^{\mathcal{G}}$ *– единственное решение, определенное на множестве кооперативных TU игр* (N, v) *с* $v(S) \in X$ *для* $S \neq \emptyset$ *и удовлетворяющее условиям C1, C2, C3.*

Доказательство. Проверим, что $\Psi^{\mathcal{G}}$ удовлетворяем условиям C1, C2, C3.

Пусть v – аддитивная функция, $z_i = v(\{i\})$ для всех $i \in N$, тогда $z(S) = v(S)$ для всех S. Поскольку функция f_S минимизирована на $v(S)$ для всех $S \subset N$, C1 выполнено.

Целевая функция задачи (1) – непрерывная функция от v. Пусть $v_k \to v$ при $k \to \infty$. Поскольку множество значений g_S равно R^1, все $\Psi^{\mathcal{G}}(N, v_k)$ принадлежат компактному множеству. Тогда предположение $\Psi^{\mathcal{G}}(N, v_k) \not\to \Psi^{\mathcal{G}}(N, v)$ при $k \to \infty$ противоречит единственности решения (1). Поэтому C2 выполнено.

Проверим C3. Пусть $\mathcal{P}$ – разбиение N. Рассмотрим новую задачу минимизации (4) с такой же целевой функцией как и (2) и только одним уравнением во множестве ограничений: $\sum\limits_{S \in \mathcal{P}} x_S =$

$v(N)$.

Также как и задача (2), задача (4) имеет единственное решение $z = \{z_S\}_{S \subset N}$. Для каждого $S \subset N$, $y \in X$ обозначим

$f_S(y) = \int\limits_{v(S)}^{y} (g_S(t) - g_S(v(S)))dt$. Это следует из правила множи-

телей Лагранжа, что для некоторого $\lambda \in R^1$,
$f'_S(z_S) = 0$ для $S \notin \mathcal{P}$ и $f'_S(z_S) = \lambda$ для всех $S \notin \mathcal{P}$.
Поскольку $f'_S(z_S) = g_S(z_S) - g_S(v(S))$, получим $z = v^{\mathcal{P},\mathcal{G}}$.

Рассмотрим следующее представление целевой функции задачи (2):

$$\sum_{S:S\subset N}\int\limits_{v(S)}^{x_S}(g_S(t)-g_S(v(S)))dt=\sum_{S:S\subset N}\int\limits_{v(S)}^{z_S}(g_S(t)-g_S(v(S)))dt$$
$$+\sum_{S:S\subset N}\int\limits_{z_S}^{x_S}(g_S(t)-g_S(z_S))dt+\sum_{S:S\subset N}\int\limits_{z_S}^{x_S}(g_S(z_S)-g_S(v(S)))dt.$$

Так как для всех допустимых x, $\sum\limits_{S\in\mathcal{P}}x_S=v(N)=\sum\limits_{S\in\mathcal{P}}z_S$,

$$\sum_{S:S\subset N}\int_{z_S}^{x_S}(g_S(z_S)-g_S(v(S)))dt=\sum_{S\in\mathcal{P}}\lambda(x_S-z_S)=0.$$

Следовательно, если мы заменим в задаче (2) v на $z=v^{\mathcal{P},\mathcal{G}}$, то целевые функции новой задачи и задачи (2) различаются на константу $\sum\limits_{S:S\subset N}\int\limits_{v(S)}^{z_S}(g_S(t)-g_S(v(S)))dt$, следовательно решения этих задач совпадают. Так как задача (1) эквивалентна задаче (2), $\Psi^{\mathcal{G}}$ удовлетворяет C3.

Теперь пусть решение Ψ удовлетворяет C1, C2, C3. Перечислим все возможные разбиения $\mathcal{P}_1,\ldots,\mathcal{P}_m$ множества N. Рассмотрим следующую последовательность характеристических функций $v^0,v^1,\ldots$: $v^0=v$, $v^i=(v^{i-1})^{\mathcal{P}_j,\mathcal{G}}$ с $j\equiv i \pmod m$. В [1] было доказано, что $v^i\to w$ при $i\to\infty$, где w – решение задачи (2), т. е. w – аддитивная функция и $\{w_{\{i\}}\}_{i\in N}=\Psi^{\mathcal{G}}(N,v)$. По C1, $\{w_{\{i\}}\}_{i\in N}=\Psi^{\mathcal{G}}(N,w)$, следовательно $\Psi^{\mathcal{G}}(N,v)=\Psi^{\mathcal{G}}(N,w)$. По C1, $\Psi^{\mathcal{G}}(N,w)=\Psi(N,w)$. Ввиду C3 и C2, $\Psi(N,v)=\Psi(N,v^i)\to\Psi(N,w)$, следовательно $\Psi(N,v)=\Psi(N,w)$, so $\Psi=\Psi^{\mathcal{G}}$.

Замечание 1. Итеративный процесс модификаций запросов коалиций, рассмотренный в доказательстве Теоремы 1, может сам быть обоснованием значения $\Psi^{\mathcal{G}}$. Это обоснование кажется естественным для некоторых специальных функций полезности, рассмотренных ниже.

Замечание 2. Итеративный процесс описанный в доказательстве может быть использован для вычисления $\Psi^{\mathcal{G}}(N, v)$.

Замечание 3. Множество ограничений в задаче (2) может быть изменено: необходимо только гарантировать аддитивность допустимых векторов в этой задаче. Например, достаточно рассматривать только разбиения, состоящие из не более чем трех элементов.

2. Взвешенная энтропия и минимальное квадратичное решение

Рассмотрим решение $\Psi^{\mathcal{G}}$ для некоторого семейства $\mathcal{G}$ функций полезности. Пусть $X = (0, +\infty)$, $g_S(t) = \ln(t)$ для всех $S \subset N$, $S \neq \emptyset$, Ψ – решение, определенное на множестве кооперативных TU игр с положительными характеристическими функциями. Тогда C3 превращается в следующее условие.

C4. $\Psi(N, v) = \Psi(N, v^{\mathcal{P}})$ для всех положительных v, всех разбиений $\mathcal{P} = \{S_1, \ldots, S_k\}$ множества N, где

$$\begin{cases} v^{\mathcal{P}}(S) = v(S) \quad \text{для } S \notin \mathcal{P}, \\ v^{\mathcal{P}}(S) = v(N)v(S)/\sum_{i=1}^{k} v(S_i) \quad \text{для } S \in \mathcal{P}. \end{cases}$$

Характеристическая функция $v^{\mathcal{P}}$ – результат пропорциональной переоценки запросов для коалиций в $\mathcal{P}$, если переговоры ведутся среди ее членов.

C4 – сохранение результата распределения при пропорциональной переоценке запросов членами разбиения $\mathcal{P}$.

Решение, максимизирующее взвешенную энтропию для

(N, v) – единственное решение задачи

$$\min_{x \in R^n : x_i > 0, x(N) = v(N)} \sum_{S : S \subset N} x(S) \ln(x(S)/v(S)), \tag{5}$$

где $x(S) = \sum\limits_{i \in S} x_i$.

Существование этого решения будет доказано в Теореме 2. *Решение взвешенной энтропии* – решение, которое назначает каждой игре (N, v) с положительными v решение, максимизирующее ее взвешенную энтропию.

Теорема 2. *Решение взвешенной энтропии – это единственное решение, определенное на множестве положительных кооперативных TU игр и удовлетворяющее условиям C1, C2, C4.*

Доказательство. Заметим, что если $x \in R^n$, $x(N) = v(N)$, то $\sum\limits_{S \subset N} x(S) = v(N) \cdots 2^{n-1}$. Поэтому решение, максимизирующее взвешенную энтропию для (N, v), существует тогда и только тогда, когда существует единственное решение следующей задачи:

$$\min_{x \in R^n : x_i > 0, x(N) = v(N)} \sum_{S : S \subset N} x(S)(\ln(x(S)/v(S)) - 1). \tag{6}$$

Более того, эти решения совпадают.

Для каждого $S \subset N$ рассмотрим $h_S(t) = t(\ln(t/v(S)) - 1)$. Имеем $h'_S(t) = \ln t - \ln v(S)$, следовательно задача (6) совпадает с задачей (1) для $g_S(t) = \ln t$.

Замечание 4. Итеративный процесс, описанный в доказательстве Теоремы 1, может использоваться для вычисления решения взвешенной энтропии. Автор использует этот метод для вычисления. Поскольку пропорциональная переоценка запросов коалиций кажется естественной, это можно рассмотреть как обоснование решения взвешенной энтропии.

Теперь рассмотрим те же самые аргументы обоснования, используя принцип равного приращения вместо пропорционального.

Пусть $X = R^1$, $g_S(t) = t$ для всех $S \subset N$, $S \neq \emptyset$, Ψ – решение, определенное на множестве всех кооперативных TU игр. Тогда C3 превращается в следующее условие.

C5. $\Psi(N, v) = \Psi(N, v_{\mathcal{P}})$ для всех v, всех разбиений $\mathcal{P}$ множества N, где
$v_{\mathcal{P}}(S) = v(S)$ для $S \notin \mathcal{P}$,

$$v_{\mathcal{P}}(S) = v(S) + (v(N) - \sum_{i=1}^{k} v(S_i))/|\mathcal{P}| \text{ для } S \in \mathcal{P}.$$

C5 означает сохранение результата распределения, когда все коалиции в фиксированном разбиении N разделяют кооперативный излишек поровну.

Минимальное квадратичное решение – решение, которое дает каждой TU игре (N, v) решение задачи

$$\min_{x \in R^n : x(N) = v(N)} \sum_{S : S \subset N} (v(S) - x(S))^2.$$

Существование этого решения известно. Тогда Теорема 1 обеспечивает следующий результат.

Теорема 3. *Минимальное квадратичное решение – это единственное решение, определенное на множестве всех кооперативных TU игр и удовлетворяющее условиям C1, C2, C5.*

Обобщенное минимальное квадратичное решение – решение, которое дает каждой TU игре (N, v) решение задачи

$$\min_{x \in R^n : x(N) = v(N)} \sum_{S : S \subset N} a(S)(v(S) - x(S))^2,$$

где $a(S) \geqslant 0$ для всех $S \subset N$.

Keane [10] доказал, что решение Шепли – обобщенное минимальное квадратичное решение для $a(S) = (|S| - 1)!(n - |S| - 1)!$.

Это представление генерирует итеративный процесс, сходящийся к решению Шепли. Процесс отличается от процесса в [9].

Рассмотрим некоторые свойства наших решений.

Решение f удовлетворяет *свойству «болвана»* если $v(S \cup \{i_0\}) = v(S) + v(\{i_0\})$ для всех $S \neq \emptyset$ влечет $f_{i_0}(N,v) = v(\{i_0\})$.

Следующая теорема показывает, что при дополнительной симметрии и условии «болвана» только решение Шепли возможно.

Теорема 4. *Пусть* $n \geqslant 3$*,* $X = R^1$ *или* $X = (0,+\infty)$*,* $\{g_k\}_{k=1}^{n-1}$ *– семейство строго возрастающих непрерывных функций, определенных на* X *со множеством значений равным* R^1*. Если решение* f*, определенной на TU-играх с* $v(S) \in X$ *удовлетворяет свойству «болвана» и для всех* (N,v)*,* $f(N,v)$ *– решение задачи*

$$\min_{x \in X^n : x(N) = v(N)} \sum_{S:S\subset N} \int_{v(S)}^{x(S)} (g_{|S|}(t) - g_{|S|}(v(S)))dt,$$

то $X = R^1$ *и* f *– решение Шепли.*

Доказательство. Пусть $u, t \in X$, рассмотрим следующее (N,v):
$v(\{i\} = u$ для всех $i \in N \setminus \{n\}$,
$v(S) = t|S|$ для $S \subset N \setminus \{n\}$, $|S| \geqslant 2$,
$v(S \cup \{n\}) = v(S) + v(n)$ для всех $S \subset N \setminus \{n\}$.
Обозначим $\bar{x} = f(N,v)$. Поскольку n – «болван» для (N,v) и $g_S = g_{|S|}$, из свойства «болвана» следует, что $\bar{x}_i = t$ для всех $i < n$ и $\bar{x}_n = v(n)$, следовательно $\bar{x}(S) = v(S)$ для $|S \setminus \{n\}| \geqslant 2$. Пусть

$$H(x) = \sum_{S:S\subset N} \int_{v(S)}^{x(S)} (g_{|S|}(t) - g_{|S|}(v(S)))dt,$$

тогда из правила множителей Лагранжа следует, что $\frac{\partial}{\partial x_i} H(\bar{x}) =$

$\frac{\partial}{\partial x_j}H(\bar{x})$ для всех $i, j \in N$. Имеем

$$\frac{\partial}{\partial x_i}H(\bar{x}) = \sum_{S:i \in S}(g_{|S|}(\bar{x}(S)) - g_{|S|}(v(S)).$$

Условие $\frac{\partial}{\partial x_1}H(\bar{x}) = \frac{\partial}{\partial x_n}H(\bar{x})$ влечет
(7) $\quad g_1(t) - g_1(u) = (n-2)(g_2(t + v(n)) - g_2(u + v(n)))$.
Поскольку t, u, $v(n)$ произвольны, имеем

$$g_1(t) - g_1(u) = g_1(t+h) - g_1(u+h) \quad \text{для всех } t, u, h \in X.$$

Для $u, w \in X$, $w > u$, $h = (w-u)/2$, $t = (w+u)/2$, получим

$$2g_1((t+u)/2) = g_1(t) + g_1(u).$$

Это уравнение Йенсена (см. [5]), таким образом $g_1(t) = at + b$. Так как множество значений g_1 равняется R^1, $X = R^1$ и $a \neq 0$. Строгое возрастание g_1 влечет $a > 0$ и мы можем принять без потери общности, что $g_1(t) = t$. Точно так же следует из (7), что g_2 является линейной функцией, тогда

$$(n-2)g_2 = g_1.$$

Докажем индукцией по m что $C_{n-2}^{m-1}g_m = g_1$ для всех $m \leqslant$

$n-1$. Пусть $m > 2$ и $C_{n-2}^{j-1}g_j(t) = g_1(t) = t$ для всех $j < m$. Пусть $t \in X$, тогда рассмотрим игру (N, v^m), где
$v^m(S) = 0$ для $|S| < m$, $n \notin S$,
$v^m(S) = t|S|$ для $|S| \geqslant m$, $n \notin S$,
$v^m(S \cup \{n\}) = v^m(S) + v(n)$ для всех $S \subset N \setminus \{n\}$.
Тогда, по свойству «болвана», $f_i(N, v^m) = t$ для всех $i < n$ и $f_n(N, v^m) = v(n)$.

Условие $\frac{\partial}{\partial x_1}H(f(N, v^m)) = \frac{\partial}{\partial x_n}H(f(N, v^m))$ влечет

$$\sum_{k=1}^{m-1} C_{n-2}^{k-1}(g_k(kt) - g_k(0)) = \sum_{k=2}^{m} C_{n-2}^{k-1}(g_k((k-1)t + v(n)) - g_k(v(n))).$$

По индуктивному предположению

$$\sum_{k=1}^{m-2} C_{n-2}^{k-1}(g_k(kt)-g_k(0)) = \sum_{k=2}^{m-1} C_{n-2}^{k-1}(g_k((k-1)t+v(n))-g_k(v(n))),$$

следовательно

$$C_{n-2}^{m-1}(g_m((m-1)t+v(n))-g_m(v(n))) =$$
$$C_{n-2}^{m-2}(g_{m-1}((m-1)t)-g_{m-1}(0)) = (m-1)t.$$

Поскольку t и $v(n)$ произвольны, из этого следует (подобно случаю $m=1$), что g_m – линейная функция и тогда $C_{n-2}^{m-1}g_m(t)=t$. Таким образом,

$$g_k(t) = t\frac{(k-1)!(n-k-1)!}{(n-2)!}$$

и, ввиду результата Keane, f совпадает с решением Шепли.

Замечание 5. В случае, когда известно, что все функции g_S линейны, результат Теоремы 4 следует из [14].

Теорема 5. *Пусть $X=(0,+\infty)$ или $X=R^1$. Предположим, что $\Psi^G=\Psi^H$ для двух семейств строго возрастающих непрерывных функций $G=\{g_S\}_{S\subset N}$ и $H=\{h_S\}_{S\subset N}$, определенных на X с множеством значений, равным R^1. Тогда существуют $K>0$ и $c_S\in R^1$ ($S\subset N$, $S\neq N$), такие что $h_S(t)=Kg_S(t)+c_S$ для всех $S\subset N$, $S\neq N$, $t\in X$.*

Доказательство. Достаточно показать, что для каждого разбиения $\mathcal{P}$ N с $|\mathcal{P}|>1$, $h_S(t)=Kg_S(t)+c_S$ для всех $S\in\mathcal{P}$. Зафиксируем $\mathcal{P}$ такое, что $|\mathcal{P}|>1$. Зафиксируем некоторое $Q\in\mathcal{P}$ и определим функцию $\mu(\lambda)$ на R^1 как

$$\mu(\lambda)=h_Q(g_Q^{-1}(\lambda))-h_Q(g_Q^{-1}(0)).$$

Будет доказано, что

(8) $\mu(\lambda) = h_S(g_S^{-1}(\lambda)) - h_S(g_S^{-1}(0))$ для всех $S \in \mathcal{P}$

и

(9) $\mu(\lambda) = K\lambda$ для некоторого $K > 0$.

Из (8) и (9) следует, что для $c_S = h_S(g_S^{-1}(0))$ для каждого $t \in X$, если $\lambda = g_S(t)$, то $Kg_S(t) + c_S = h_S(t)$ для всех $S \in \mathcal{P}$.

Докажем (8). Зафиксируем $\lambda \in R^1$. Существует $z \in X^n$ таое, что $z(S) = g_S^{-1}(0)$ для всех $S \in \mathcal{P}$. Рассмотрим кооперативную игру (N, v), где

$v(T) = z(T)$ для всех $T \notin \mathcal{P}$,

$v(T) = g_T^{-1}(\lambda)$ для всех $T \in \mathcal{P}$.

Пусть $x = \Psi^G(N, v)$. Из правила множителей Лагранжа следует, что

$$(10) \qquad \left.\begin{array}{l} \sum\limits_{T: i \in T} (g_T(x(T)) - g_T(v(T))) + \eta = 0 \\ \text{для некоторого } \eta \in R^1 \text{ для всех } i \in N, \\ x(N) = v(N). \end{array}\right\}$$

Вектор z удовлетворяет (10). Действительно, для каждого $S \in \mathcal{P}$, $i \in N$,

$\sum\limits_{T: i \in T} (g_T(z(T)) - g_T(v(T))) = g_S(z(S)) - g_S(v(S)) = 0 - \lambda, z(N) =$

$v(N)$.

Более того, поскольку целевая функция задачи (1) строго выпукла, z – единственное решение (1). Тогда $z = \Psi^G(N, v) = \Psi^H(N, v)$, следовательно z – единственное решение задачи

$$(11) \qquad \min_{x \in X^n : x(N) = v(N)} \sum_{S: S \subset N} \int_{v(S)}^{x(S)} (h_S(t) - h_S(v(S)))dt.$$

По правилу множителей Лагранжа существует $\chi \in R^1$ такой, что

$$\sum_{T: i \in T} (h_T(z(T)) - h_T(v(T))) = \chi \quad \text{для всех } i \in N.$$

Зафиксируем $S \in \mathcal{P}$, $i \in S$, тогда $h_S(z(S)) - h_S(v(S)) = \chi$, т. е. $h_S(g_S^{-1}(0) - h_S(g_S^{-1}(\lambda)) = \chi$. Таким образом (8) доказано.

Докажем (9). Поскольку функция $\mu(\lambda)$ строго возрастающая непрерывная функция, достаточно доказать, что

(12) $$\mu(\lambda_1 + \lambda_2) = \mu(\lambda_1) + \mu(\lambda_2).$$

Существует $y \in X^n$ такой, что $y(S) = g_S^{-1}(0)$ для $S \in \mathcal{P}$, $S \neq Q$, $y(Q) = g_Q^{-1}(\lambda_1)$. Рассмотрим игру (N, w), где
$w(T) = y(T)$ для $T \notin \mathcal{P}$,
$w(T) = g_T^{-1}(\lambda_2)$ для $T \in \mathcal{P}$, $T \neq Q$,
$w(Q) = g_Q^{-1}(\lambda_1 + \lambda_2)$.

Проверим, что y – решение задачи

(13) $$\min_{x \in X^n : x(N) = w(N)} \sum_{S : S \subset N} \int_{w(S)}^{x(S)} (g_S(t) - g_S(w(S)))dt.$$

Если $S \in \mathcal{P}$, $S \neq Q$, то $g_S(y(S)) - g_S(w(Q)) = -\lambda_2$. Более того, $g_Q(y(Q)) - g_Q(w(Q)) = \lambda_1 - \lambda_1 - \lambda_2 = \lambda_2$. Тогда

$$\sum_{T : i \in T} (g_T(y(T)) - g_T(w(T))) = -\lambda_2 \quad \text{для всех } i \in N,$$

следовательно y – единственное решение (13), т. е. $y = \Psi^G(N, w)$.

Тогда $y = \Psi^H(N, w)$ и y – решение следующей задачи:

(14) $$\min_{x \in X^n : x(N) = w(N)} \sum_{S : S \subset N} \int_{w(S)}^{x(S)} (h_S(t) - h_S(w(S)))dt.$$

Из правила множителей Лагранжа следует, что существует $\delta \in R^1$ такой, что
$h_S(y(S)) - h_S(w(S)) = \delta$ для $S \in \mathcal{P}$, $S \neq Q$,
$h_Q(y(Q)) - h_Q(w(Q)) = \delta$.
По определению y и благодаря (8), получим

$\delta = h_S(g_S^{-1}(0)) - h_S(g_S^{-1}(\lambda_2)) = \mu(\lambda_2)$ для $S \neq Q$, $S \in \mathcal{P}$, следовательно ввиду определения y,

$$h_Q(g_Q^{-1}(\lambda_1)) - h_Q(g_Q^{-1}(\lambda_1 + \lambda_2) = -\mu(\lambda_2).$$

Теперь

$$\begin{aligned}
&\mu(\lambda_1 + \lambda_2) = h_Q(g_Q^{-1}(\lambda_1 + \lambda_2)) - h_Q(g_Q^{-1}(0))\\
&= h_Q(g_Q^{-1}(\lambda_1 + \lambda_2)) - h_Q(g_Q^{-1}(\lambda_1)) + h_Q(g_Q^{-1}(\lambda_1)) - h_Q(g_Q^{-1}(0))\\
&= \mu(\lambda_2) + \mu(\lambda_1).
\end{aligned}$$

Это доказывает (12).

Теорема 6. *Пусть $X = (0, +\infty)$, $G = \{g_S\}_{S \subset N}$ – семейство строго возрастающих непрерывных функций с множеством значений, равным R^1 и*

(15) $$\Psi^G(N, \alpha v) = \alpha \Psi^G(N, v) \quad \text{для всех } \alpha > 0.$$

Тогда существуют $\delta_S > 0$, $\beta_S \in R^1$ такие, что $g_S(t) = \delta_S \ln t + \beta_S$.

Доказательство. Пусть $x = \Psi^G(N, v)$, $\alpha > 0$. Из (15) и правила множителей Лагранжа следует, что для некоторого $\lambda \in R^1$, $\sum\limits_{T: i \in T} (g_T(\alpha x(T)) - g_T(\alpha v(T))) = \lambda$ для всех $i \in T$ и $\alpha x(N) = \alpha v(N)$. Поскольку целевая функция задачи (1) строго выпукла, $x = \Psi^H(N, v)$, где $H = \{h_S\}_{S \subset N}$ и $h_S(t) = g_S(\alpha t)$. По Теореме 5, существуют $K(\alpha) > 0$ и $c_S(\alpha) \in R^1$ такие, что

$$g_S(\alpha t) = K(\alpha) g_S(t) + c_S(\alpha).$$

Если мы предположим, что $g_s(1) = 0$, то $g_s(\alpha) = c_S(\alpha)$, поэтому

(16) $$g_S(\alpha t) = K(\alpha) g_S(t) + g_S(\alpha).$$

Поскольку множество значений g_S равно R^1, (16) влечет $g_S(t) = \delta_S \ln t$ для некоторого $\delta_S > 0$ (см. [5], [7] (Теорема 4) или [12] (Следствие 2.1)).

В общем случае $\beta_S = g_S(1)$.

3. Заключение

1. Рассмотрим проблему: являются ли исследованные решения индивидуально рациональными для супераддитивных игр? Для игры трех лиц решение взвешенной энтропии и минимальное квадратичное решение индивидуально рациональны для суперадитивных игр, но ответ отрицателен в общем случае. Существуют супераддитивные игры 4-х лиц с не индивидуально рациональным решением взвешенной энтропии. Может быть, есть не анонимный $\Psi^{\mathcal{G}}$ кроме решения Шепли, который удовлетворяет этому условию.

2. Другая открытая проблема состоит в том, чтобы найти естественные предположения на решение, обеспечивающие существование функций полезности коалиций.

Литература

1. БРЕГМАН Л.М. *Релаксационный метод нахождения общей точки выпуклых множеств и его применение для задач выпуклого программирования* // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1967. – №7. С. 620-631.
2. БРЕГМАН Л.М., НАУМОВА Н.И. *Арбитражные решения с идеальной точкой, порождаемые системами функций* // Доклады Академии наук СССР. – 1984. – Т. 279. – №1. – С. 16-20.
3. БРЕГМАН Л.М., РОМАНОВСКИЙ И.В. *Исследование операций и статистическое моделирование (ред. И.В. Романовский)*. – 1975. – №3. Изд. Ленинградского университета. – С. 137-162.
4. НАУМОВА Н.И. *Некоторые арбитражные схемы с идеальной точкой*// Вестник Ленинградского университета. – 1983. – №19. (сер. Математика. Механика. Астрономия. – В. 4). – С. 30-36.
5. ACZEL J., DHOMBRES J. *Functional equations in several variables with application to mathematics, information theory*

and to the natural and social sciences. – Cambridge Univ. Press, 1989.

6. BREGMAN L.M., NAUMOVA N.I. *Goal programming solutions generated by utility functions* // Lecture Notes in Economic and Math. Systems. – 2002. – №510. – P. 495-514.
7. CSISZAR I. *Why Least Squares and Maximum Entropy? An Axiomatic Approach to Inference for Linear Inverse Problems* // The Annals of Statistics. – 1991. – V. 19. – №4. – P. 2032-2066.
8. FELDMAN B. *The proportional value of a cooperatie game*, manuscript, Chicago: Scudder Kemper Investments, 1999.
9. HAMIACHE G. *Associated consistency and Shapley value*// International Journal of Game Theory. – 2001. – V. 30. – №2. – P. 279-289.
10. KEANE M. *Some topics in n-person game theory*, Thesis North–Western Univ. Evanston, Illinois, 1969.
11. MOULIN H. *Handbook of Social Choice and Welfare*. – 2002. – V. 1. Chapter 6, Ed. by K.J.Arrow, A.K.Sen, K.Suzumura, Elsevier Science B.V., – P. 290-357.
12. NAUMOVA N.I. *Nonsymmetric equal sacrifice solutions for claim problem* // Mathematical Social Sciences. – 2002. – V. 43. – P. 1-18.
13. ORTMANN K.M. *The proportional value of a positive cooperative game*// Mathematical Methods of Operations Research. – 2000. – V. 51. – P. 235-248.
14. RUIS L.M. *The Family of Least Squares Values for Transferable Utility Games* // F. Valenciano, J.M. Zarzuelo. Games and Economic Behaviour. – 1998. – №24. – P. 109-130.

ASSOCIATED CONSISTENCY BASED ON UTILITY FUNCTIONS OF COALITIONS

Natalia Naumova, Department of Mathematics and Mechanics, St.

Petersburg State University, Saint Petersburg, Doctor of Science, professor (nataliai.naumova@mail.ru).

Abstract: A cooperative game problem is treated as a bargaining problem with claim point. For given continuous strictly increasing utility functions of coalitions we suppose that for every partition of the player set the result does not change after equal sacrifice w.r.t. these functions overestimation of characteristic function values for partition members. This supposition and continuity assumption lead to a special value and give an iterative method for its results computation. In particular, for equal logarithmic utility functions of coalitions we get proportional overestimation of characteristic functions for partition members and the value is the weighted entropy solution. The anonymity assumption and the "dummy" property give the Shapley value. The weighted entropy solution follows from the positive homogeneity assumption.

Keywords: cooperative game, weighted entropy, Shapley value.

УДК 518.9 + 517.9
ББК 65.050.2

ПРИНЦИПЫ УСТОЙЧИВОЙ КООПЕРАЦИИ [1]

Петросян Л. А. [2]
(Факультет прикладной математики – процессов управления, Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург)
Зенкевич Н. А. [3]
(Высшая школа менеджмента, Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург)

Имеются три важных условия, которые должны быть исследованы, если рассматривается проблема устойчивости долгосрочного кооперативного соглашения: временная состоятельность (динамическая устойчивость) кооперативного соглашения, стратегическая устойчивость и защита от иррационального поведения такого соглашения. В работе получены математические результаты, основанные на использовании процедуры распределения дележа (ПРД), которые развивают разработанные ранее аспекты динамически устойчивой кооперации. В работе доказано для специального класса дифференциальных игр, что динамически устойчивое кооперативное соглашение может быть стратегически поддержано равновесием по Нэшу. Также приведен пример, в котором выполняются все три условия.

Ключевые слова: дифференциальная игра, кооперативное решение, временная состоятельность кооперативных соглашений, про-

---

[1] *Текст приводится в соответствии с изданием «Математическая теория игр и ее приложения. – 2009. – Т. 1. №1».*

[2] *Леон Аганесович Петросян, доктор физико-математических, наук, профессор (spbuoasis7@peterlink.ru).*

[3] *Николай Анатольевич Зенкевич, кандидат физико-математических наук, доцент (zenkevich@gsom.pu.ru).*

цедура распределения выигрыша (ПРВ), процедура распределения дележа (ПРД), стратегическая устойчивость, защита от иррационального поведения.

Введение

Кооперация представляет собой одну из основных форм человеческого поведения. Поэтому по многим практическим причинам важно, чтобы такая кооперация была устойчивой на всем временном промежутке ее реализации. Мы выделим три на наш взгляд основных условия такой устойчивости при рассмотрении проблемы устойчивости долгосрочных кооперативных соглашений.

1. *Состоятельность во времени (динамическая устойчивость) кооперативных соглашений*. Временная состоятельность представляет собой свойство кооперативного соглашения, когда, следуя кооперативной траектории, участники соглашения придерживаются одного и того же принципа оптимальности в каждый текущий момент времени, а поэтому не имеют объективных мотивов отклоняться от ранее выбранного решения о кооперации.

2. *Стратегическая устойчивость*. Предположим, что никакое индивидуальное отклонение от кооперации каждого участника не приносит выгоды отклонившемуся участнику. Это означает, что исход такого кооперативного соглашения достигается при некотором равновесии по Нэшу, которое и будет гарантировать стратегическую поддержку такой кооперации.

3. *Защита от иррационального поведения*. Это свойство кооперации должно рассматриваться, поскольку нет уверенности в том, что все участники кооперации будут вести себя рационально на всем продолжительном промежутке реализации кооперативного соглашения. Участники кооперации должны быть уверены, что даже в случае реализации

наихудшего сценария (например, аннулирования кооперативного соглашения) их выигрыш будет не меньше, чем при изначальном некооперативном поведении.

В работе развит математический аппарат, основанный на применении процедуры распределения выигрыша (ПРВ) или процедуры распределения дележа (ПРД) применительно к анонсированным выше аспектам кооперации [1].

1. Случай непрерывного времени

Рассмотрим дифференциальную игру n - лиц $\Gamma(x_0, T-t_0)$ с предписанной продолжительностью и независимыми движениями на временном промежутке $[t_0, T]$. Уравнения движения имеют вид:

$$\begin{gathered}\dot{x}_i = f_i(x_i, u_i), \quad u_i \in U_i \subset R^\ell, x_i \in R^m, \\ x_i(t_0) = x_i^0, \quad i = 1, \ldots, n.\end{gathered} \tag{1}$$

Предполагается, что система дифференциальных уравнений (1) удовлетворяет всем условиям существования, единственности и продолжимости решения для любого n – набора измеримых управлений $u_1(t), \ldots, u_n(t)$.

Выигрыш игрока i определяется следующим образом:

$$H_i(x_0, T-t_0; u_1(\cdot), \ldots, u_n(\cdot)) = \int_{t_0}^{T} h_i(x(\tau))d\tau,$$

где $h_i(x)$ представляет собой непрерывную функцию и $x(\tau) = \{x_1(\tau), \ldots, x_n(\tau)\}$ решение системы (1) при допустимом программном управлении

$$u_1(\tau), \ldots, u_n(\tau)$$

и начальных условиях

$$x(t_0) = \{x_1(t_0), \ldots, x_n(t_0)\} = \{x_1^0, \ldots, x_n^0\} = x_0.$$

Предположим, что существует n – набор программных управлений $\bar{u}(\tau) = (\bar{u}_1(\tau), \ldots, \bar{u}_n(\tau))$ и траектория $\bar{x}(\tau)$, $\tau \in [t_0, T]$, такие что

$$\max_{u_1(\tau),\ldots,u_n(\tau)} \sum_{i=1}^{n} H_i(x_0, T - t_0; u_1(\tau), \ldots, u_n(\tau)) =$$

(2)

$$= \sum_{i=1}^{n} H_i(x_0, T - t_0; \bar{u}_1(\tau), \ldots, \bar{u}_n(\tau)) = \sum_{i=1}^{n} \int_{t_0}^{T} h_i(\bar{x}(\tau)) d\tau.$$

Траекторию $\bar{x}(\tau) = (\bar{x}_1(\tau), \ldots, \bar{x}_n(\tau))$, удовлетворяющую (2), будем называть «оптимальной кооперативной траекторией».

Обозначим через $N = \{1, \ldots, n\}$ – множество игроков и определим в игре $\Gamma(x_0, T - t_0)$ – классическим образом характеристическую функцию:

$$V(x_0, T - t_0; N) = \sum_{i=1}^{n} \int_{t_0}^{T} h_i(\bar{x}(\tau)) d\tau,$$

(3)

$$V(x_0, T - t_0; \emptyset) = 0,$$
$$V(x_0, T - t_0; S) = Val\ \Gamma_{S, N \setminus S}(x_0, T - t_0),$$

где $Val\ \Gamma_{S,N\setminus S}(x_0, T - t_0)$ обозначает значение антагонистической игры между коалицией S, действующей как игрок 1, и коалицией $N \setminus S$, действующей как игрок 2, при этом выигрыш игрока S равен:

$$\sum_{i \in S} H_i(x_0, T - t_0; u_1(\cdot), \ldots, u_n(\cdot)).$$

Определим также $L(x_0, T - t_0)$ как множество дележей в игре $\Gamma(x_0, T - t_0)$ (см. [4]):

$$L(x_0, T - t_0) = \{\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) :$$

(4)
$$\alpha_i \geqslant V(x_0, T - t_0; \{i\}), \quad \sum_{i \in N} \alpha_i = V(x_0, T - t_0; N)\}.$$

Регуляризованная игра $\Gamma_\alpha(x_0, T - t_0)$. Для каждого дележа $\alpha \in L(x_0, T - t_0)$ определим некооперативную игру $\Gamma_\alpha(x_0, T - t_0)$, которая отличается от игры $\Gamma(x_0, T - t_0)$ только выигрышами вдоль оптимальной кооперативной траектории $\bar{x}(\tau)$, $\tau \in [t_0, T]$. Пусть $\alpha \in L(x_0, T - t_0)$. Определим процедуру распределения дележа (ПРД) ([5]) как функцию $\beta(\tau) = (\beta_1(\tau), \ldots, \beta_n(\tau))$, $\tau \in [t_0, T]$ такую, что

(5)
$$\alpha_i = \int_{t_0}^{T} \beta_i(\tau) d\tau.$$

Определим через $H_i^\alpha(x_0, T - t_0; u_1(\cdot), \ldots, u_n(\cdot))$ функцию выигрыша в игре $\Gamma_\alpha(x_0, T - t_0)$ и через $x(\tau)$ соответствующую траекторию. Тогда

$$H_i^\alpha(x_0, T - t_0; u_1(\cdot), \ldots, u_n(\cdot)) = H_i(x_0, T - t_0; u_1(\cdot), \ldots, u_n(\cdot))$$

если не существует такого $t \in (t_0, T]$, что $x(\tau) = \bar{x}(\tau)$ для $\tau \in (t_0, t]$. Пусть $t = \sup\{t' : x(\tau) = \bar{x}(\tau), \tau \in [t_0, t']\}$ и $t > t_0$. Тогда

$$H_i^\alpha(x_0, T - t_0; u_1(\cdot), \ldots, u_n(\cdot)) =$$

$$= \int_{t_0}^{t} \beta_i(\tau) d\tau + H_i(\bar{x}(t), T - t; u_1(\cdot), \ldots, u_n(\cdot)) =$$

$$= \int_{t_0}^{t} \beta_i(\tau) d\tau + \int_{t}^{T} h_i(x(\tau)) d\tau.$$

В частном случае, когда $x(\tau) = \bar{x}(\tau)$, $\tau \in [t_0, T]$ (если $x(\tau)$ представляет собой кооперативную траекторию), имеем

$$H_i^{\alpha}(x_0, T - t_0; \bar{u}_1(\cdot), \ldots, \bar{u}_n(\cdot)) = \int_{t_0}^{T} \beta_i(\tau) d\tau = \alpha_i.$$

По определению функции выигрыша в игре $\Gamma_\alpha(x_0, T - t_0)$ получим, что вдоль оптимальной кооперативной траектории эти выигрыши равны компонентам дележа $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.

Рассмотрим текущие подыгры ([4]) $\Gamma(\bar{x}(t), T - t)$ вдоль $\bar{x}(t)$ и текущие множества дележей $L(\bar{x}(t), T - t)$. Пусть $\alpha(t) \in L(\bar{x}(t), T - t)$. Предположим, что $\alpha(t)$ может быть выбрана как дифференцируемая по t, $t \in [t_0, T]$ функция.

Определение 1. *Игра* $\Gamma_\alpha(x_0, T - t_0)$ *называется регуляризацией игры* $\Gamma(x_0, T - t_0)$ *(α – регуляризация), если ПРД β определяется таким образом, что*

$$\alpha_i(t) = \int_{t}^{T} \beta_i(\tau) d\tau$$

или

(6) $$\beta_i(t) = -\alpha_i'(t).$$

Из (6) получаем

(7) $$\alpha_i = \int_{t_0}^{t} \beta_i(\tau) d\tau + \alpha_i(t),$$

где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in L(x_0, T - t_0)$ *, и* $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \ldots, \alpha_n(t)) \in L(\bar{x}(t), T - t)$.

Пусть $M(x_0, T - t_0) \subset L(x_0, T - t_0)$ представляет собой некоторый принцип оптимальности для кооперативной версии игры $\Gamma(x_0, T - t_0)$, а $M(\bar{x}(t), T - t) \subset L(\bar{x}(t), T - t)$ – тот же принцип оптимальности, но определенный для подыгр $\Gamma(\bar{x}(t), T-t)$ с начальными условиями на кооперативной траектории. В качестве M может быть выбрано c - ядро, HM - решение, вектор Шепли, ядро и другие принципы оптимальности, используемые в кооперативной теории игр. Если $\alpha \in M(x_0, T-t_0)$ и $\alpha(t) \in M(\bar{x}(t), T-t)$, то условие (7) дает нам временную состоятельность выбранного дележа α, или выбранного принципа оптимальности, поскольку в этом случае условие (7) означает, что ожидаемый к получению выигрыш в текущей подыгре $\alpha(t)$ при всех t принадлежит одному и тому же принципу оптимальности $M(\bar{x}(t), T-t)$. В таком случае будем говорить, что имеет место *временная состоятельность (динамическая устойчивость) выбранного кооперативного соглашения*.

Рассмотрим теперь проблему *стратегической устойчивости* кооперативных соглашений. Основываясь на процедуре распределения дележа β, удовлетворяющей (5), можно доказать следующую основную теорему.

Теорема 1. *В регуляризованной игре $\Gamma_\alpha(x_0, T-t_0)$ для каждого $\varepsilon > 0$ существует ε - равновесие по Нэшу ([3]) с выигрышами $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_n)$.*

Доказательство. основано на конструктивном построении ε - равновесия по Нэшу в кусочно-программных стратегиях (КПС) с памятью.

Напомним определение КПС стратегий с памятью в дифференциальной игре. Обозначим через $\hat{x}(t)$ произвольную допустимую траекторию системы (1) на временном промежутке $[t_0, t]$, $t \in [t_0, T]$. Стратегия $u_i(\cdot)$ игрока i называется КПС, если она определяется парой (a, σ), где σ представляет собой разбиение промежутка $[t_0, T]$, $t_0 < t_1 < \ldots < t_l = T$, ($t_{k+1} - t_k = \delta > 0$) и a отображение, которое каждой точке разбиения $(\hat{x}(t_k), t_k)$, $t_k \in \sigma$, ставит в соответствие программное управление $u_i(t)$, $t \in [t_k, t_{k+1})$.

Рассмотрим семейство ассоциированных с $\Gamma(x, T-t)$ (но не с $\Gamma_\alpha(x, T-t)$) антагонистических игр $\Gamma_{\{i\}, N\setminus\{i\}}(x, T-t)$ из начального состояния x продолжительности $T-t$ между коалицией S , состоящей из одного игрока i и дополнительной коалицией $N\backslash\{i\}$ с выигрышем игрока i равным

$$H_i(x, T-t; u_1(\cdot)\ldots, u_n(\cdot)).$$

Выигрыш игрока $N\backslash\{i\}$ в игре $\Gamma_{\{i\},N\backslash\{i\}}(x, T-t)$ равен $(-H_i)$. Пусть $\hat{u}(x,t;\cdot)$ есть ε-оптимальная КПС стратегия игрока $N\backslash\{i\}$ в игре $\Gamma_{\{i\},N\backslash\{i\}}(x, T-t)$. Заметим, что $\hat{u}(x,t;\cdot) = \{\hat{u}_j(x,t;\cdot)\}$, $j \in N\backslash\{i\}$.

Пусть $\hat{x}(\tau) = \{\hat{x}_1(\tau), \ldots, \hat{x}_n(\tau)\}$ – отрезок допустимой траектории (1), определенной на временном промежутке $[t_0, t]$, $t \in [t_0, T]$. Для каждого $i \in \{1, \ldots, n\}$ определим $\bar{t}(i) = \sup\{t_i : \hat{x}_i(t_i) = \bar{x}_i(t_i)\}$ и $\bar{\bar{t}}(j) = \min\limits_i\{\bar{t}(i) = \bar{t}(j)\}$. $\bar{\bar{t}}(j)$

принадлежит одному из промежутков $[t_k, t_{k+1})$, $k = 0, 1, \ldots, l-1$. Таким образом, $\bar{t}(i) - t_0$ представляет собой длину временного промежутка, начинающегося в t_0, на котором $\hat{x}_i(t)$ совпадает с $\bar{x}_i(t)$ – i-ая компонента кооперативной траектории $\bar{x}(t)$. В свою очередь, $\bar{\bar{t}}(j) - t_0$ представляет собой длину временного промежутка, начинающегося в t_0, на котором $\hat{x}(t)$ совпадает с кооперативной траекторией $\bar{x}(t)$.

Определим следующие стратегии игрока $i \in N$:

$$u_i^*(\cdot) = \begin{cases} \bar{u}_i(t) & \text{для } (\hat{x}(t_k), t_k) \text{ на оптимальной} \\ & \text{кооперативной траектории} \\ & \bar{x}(t)\ \ (\hat{x}(\tau) = \bar{x}(\tau), \tau \in [t_0, t_k]); \\ \hat{u}_i(\hat{x}(t_{k+1}), t_{k+1}; \cdot) & i\text{-ая компонента } \varepsilon/2 \text{ оптим. КПС} \\ & \text{стратегии игрока } N \setminus \{j\} \text{ в игре} \\ & \Gamma_{\{j\},N\backslash\{j\}}(\underline{x}(t_{k+1}), T - t_{k+1}), \\ & \text{если } t_k \leqslant \bar{\bar{t}}(j) < t_{k+1}; \\ \text{произвольно} & \end{cases}$$

Покажем, что ситуация $u^*(\cdot) = (u_1^*(\cdot), \ldots, u_n^*(\cdot))$ и есть ε-равновесие по Нэшу в игре $\Gamma_\alpha(x_0, T-t_0)$.

Действительно, имеют место следующие равенства

$$H_i(x_0, T - t_0; u^*(\cdot)) = H_i(x_0, T - t_0; u_1^*(\cdot), \dots, u_n^*(\cdot)) =$$

$$= \int_{t_0}^{T} \beta_i(t)dt = \alpha_i. \tag{8}$$

Рассмотрим набор стратегий $(u^*(\cdot)||u_i(\cdot))$, где игрок i изменяет свою стратегию с $u_i^*(\cdot)$ на $u_i(\cdot)$. Нужно показать, что

$$H_i(x_0, T - t_0; u^*(\cdot)) \geqslant H_i(x_0, T - t_0; u^*(\cdot)||u_i(\cdot)) - \varepsilon. \tag{9}$$

для всех $i \in N$ и любой КПС игрока i.

Легко видеть, что когда разыгрывается ситуация $u^*(\cdot)$, игра развивается вдоль оптимальной траектории $\bar{x}(t)$. Если при $(u^*(\cdot)||u_i(\cdot))$ также реализуется траектория $\bar{x}(t)$, то (9) выполняется как равенство и поэтому утверждение верно. Предположим теперь, что при $(u^*(\cdot)||u_i(\cdot))$ реализовавшаяся траектория $x(t)$ отличается от $\bar{x}(t)$. Тогда пусть

$$\bar{t} = \inf\{t : \bar{x}(t) \neq x(t)\}.$$

и $\bar{t} \in [t_{k-1}, t_k)$. Поскольку движения игроков независимы, то сразу можем сказать, что $\bar{x}_m(t_k) = x_m(t_k)$ для $m \in N\backslash\{i\}$ и $\bar{x}_i(t_k) \neq x_i(t_k)$ (но $\bar{x}_j(t_{k-1}) = x_j(t_{k-1})$ для $j \in N$).

Из определения стратегии $u^*(\cdot)$ следует, что игроки $m \in N\backslash\{i\}$ будут использовать свои стратегии, которые являются $\varepsilon/2$ - оптимальными в антагонистической игре $\Gamma_{\{i\},N\backslash\{i\}}(x(t_k), T - t_k)$ против игрока i, который отклонился от оптимальной траектории на временном промежутке $[t_{k-1}, t_k)$.

Если игроки из множества $N\backslash\{i\}$ будут использовать свои стратегии $\hat{u}_m(\hat{x}(t_k), t_k; \cdot)$, то игрок i, начиная из состояния $x(t_k), t_k$, получит не больше, чем

$$V(x(t_k), T - t_k; \{i\}) + \frac{\varepsilon}{2},$$

где $V(x(t_k), T - t_k; \{i\})$ представляет собой значение игры $\Gamma_{\{i\}, N \setminus \{i\}}(x(t_k),\ T - t_k)$. Тогда общий выигрыш игрока i в игре $\Gamma_\alpha(x_0, T - t_0)$ при реализации ситуации $(u^*(\cdot)||u_i(\cdot))$ не превышает величину

(10) $$\int_{t_0}^{t_{k-1}} \beta_i(\tau)d\tau + V(x(t_k), T - t_k; \{i\}) + \frac{\varepsilon}{2} + \int_{t_{k-1}}^{t_k} h_i(x(\tau))d\tau.$$

Но выигрыш игрока i в ситуации $u^*(\cdot)$ равен

(11)
$$\alpha_i = \int_{t_0}^{T} \beta_i(\tau)d\tau =$$

$$= \int_{t_0}^{t_{k-1}} \beta_i(\tau)d\tau + \int_{t_{k-1}}^{T} \beta_i(\tau)d\tau = \int_{t_0}^{t_{k-1}} \beta_i(\tau)d\tau + \alpha_i(t_{k-1}).$$

По определению ПРД (см. (5), (6)), $\alpha_i(t_{k-1}) \in L(\bar{x}(t_{k-1}), T - t_{k-1})$,

(12) $$\int_{t_{k-1}}^{T} \beta_i(\tau)d\tau = \alpha_i(t_{k-1}) \geqslant V(\bar{x}(t_{k-1}), T - t_{k-1}; \{i\}).$$

Из непрерывности функции V и непрерывности траектории $x(t)$ при соответствующем выборе $\delta > 0$ ($t_{k+1} - t_k = \delta$) справедливо выполнение следующих неравенств:

$$|V(\bar{x}(t_{k-1}), T - t_{k-1}; \{i\}) - V(x(t_k), T - t_k; \{i\})| < \frac{\varepsilon}{4},$$

$$\int_{t_{k-1}}^{T} \beta_i(\tau)d\tau = \alpha_i(t_{k-1}) \geqslant V(x(t_k), T - t_k; \{i\}) - \frac{\varepsilon}{4}.$$

Сравним $\alpha_i(t_{k-1})$ и $V(x(t_k), T - t_k; \{i\}) + \frac{\varepsilon}{2} + \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} h_i(x_i(\tau))d\tau.$

Выбирая величину $\delta = t_{k+1} - t_k$ достаточно малой, можно показать, что интеграл $\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} h_i(x_i(\tau))d\tau$ будет также мал (меньше, чем $\varepsilon/4$).

Добавляя в обе части (12) величину $\int_{t_0}^{t_{k-1}} \beta_i(\tau)d\tau$ и используя предыдущее неравенство получаем, что

$$\alpha_i = \int_{t_0}^{t_{k-1}} \beta_i(\tau)d\tau + \alpha_i(t_{k-1}) \geqslant$$

$$\geqslant \int_{t_0}^{t_{k-1}} \beta_i(\tau)d\tau + V(\bar{x}(t_{k-1}), T - t_{k-1}; \{i\})$$

$$\geqslant \int_{t_0}^{t_{k-1}} \beta_i(\tau)d\tau + V(x(t_k), T - t_k; \{i\}) - \frac{\varepsilon}{4}$$

$$\geqslant \int_{t_0}^{t_{k-1}} \beta_i(\tau)d\tau + V(x(t_k), T - t_k; \{i\}) - \frac{\varepsilon}{4} + \int_{t_{k-1}}^{t_k} h_i(\tau)d\tau - \frac{\varepsilon}{4}$$

$$\geqslant \int_{t_0}^{t_{k-1}} \beta_i(\tau)d\tau + V(x(t_k), T - t_k; \{i\}) + \int_{t_{k-1}}^{t_k} h_i(\tau)d\tau - \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\geqslant \int_{t_0}^{t_{k-1}} \beta_i(\tau)d\tau + V(x(t_k), T - t_k; \{i\}) + \int_{t_{k-1}}^{t_k} h_i(\tau)d\tau +$$

$$+\frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2}. \tag{13}$$

Здесь первые четыре слагаемых в правой части неравенства составляют верхнюю границу выигрыша игрока i в ситуации $(u^*(\cdot)||u_i^*(\cdot))$.

Однако α_i представляет собой выигрыш игрока i в ситуации $u^*(\cdot)$, откуда

$$H_i(x_0, T-t_0; u^*(\cdot)) = \alpha_i \geqslant$$

$$\geqslant \int_{t_0}^{t_{k-1}} \beta_i(\tau)d\tau + V(x(t_k), T-t_k; \{i\})+ \tag{14}$$

$$+\int_{t_{k-1}}^{t_k} h_i(\tau)d\tau + \frac{\varepsilon}{2} - \varepsilon \geqslant H_i(x_0, T-t_0; u^*(\cdot)||u_i(\cdot)) - \varepsilon$$

И тем самым мы получаем (9). Теорема доказана.

Содержательно, утверждение теоремы означает, что кооперативное решение (некоторый дележ) может быть стратегически поддержано в регуляризованной игре $\Gamma_\alpha(x_0, T-t_0)$ (реализуемо в специально сконструированном равновесии по Нэшу) равновесием по Нэшу $u^*(\cdot)$, определенным в теореме 1.

Условия защиты от иррационального поведения. Предположим теперь, что в некоторый момент времени иррациональное поведение игрока (или группы игроков) приводит к распаду большой коалиции, а тем самым и прекращению действия кооперативного соглашения. В этом случае *условие защиты от иррационального поведения* (см.[7]) требует, чтобы выполнялось следующее неравенство:

$$V(x_0, T-t_0; \{i\}) \leqslant \int_{t_0}^{t} \beta_i(\tau)d\tau + V(\bar{x}(t), T-t; \{i\}),\ \ i \in N. \tag{15}$$

Если ПРД $\beta(t)$ может быть выбран так, что удовлетворяются и условие временной состоятельности и условие защиты от иррационального поведения (условие стратегической устойчивости следует из временной состоятельности в соответствии с теоремой 2.1), тогда кооперативное соглашение о выборе дележа $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ будем называть *устойчивым кооперативным соглашением*.

Если предположить дифференцируемость функции $V(x, T; \{i\})$, то для выполнения (15) достаточно, чтобы ПРД $\beta(\tau) = (\beta_1(\tau), \beta_2(\tau), \ldots, \beta_n(\tau))$ удовлетворяло условию:

$$\beta_i(\tau) \geqslant -\frac{d}{d\tau} V(\bar{x}(\tau), T - \tau; \{i\}), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{16}$$

Другими словами, для устойчивого соглашения все три условия устойчивости должны выполняться. Не всегда это именно так. Однако следующий пример показывает, что в некоторых случаях в задаче с дискретным временем все три условия выполняются.

В (16) величина $V(\bar{x}(\tau), T - \tau; \{i\})$ представляет собой значение антагонистической игры между коалицией $N \backslash \{i\}$, действующей как один игрок и игроком $\{i\}$ с коалиционным выигрышем равным $[-H_i(\bar{x}(\tau), T - \tau; u_1, \ldots, u_n)]$.

Предположим, что $y(t), t \in [\tau, T]$ есть траектория этой антагонистической игры при реализации оптимальных стратегий (стратегий из седловой точки). Предположим, что для любых начальных условий $\bar{x}(\tau), T - \tau, \tau \in [t_0, T]$ такая седловая точка существует (если нет, то можно рассмотреть ε-седловую точку в кусочно-программных стратегиях, которая всегда существует для каждого заданного $\varepsilon \geqslant 0$, но следующие формулы будут верны с точностью до ε).

Тогда можно написать

$$V(\bar{x}(\tau), T - \tau; \{i\}) = \int_\tau^T h_i(\bar{x}(\tau); y(t))dt,$$

где $y(\tau) = \bar{x}(\tau)$. Из (16) имеем

$$\beta_i(\tau) \geqslant -\frac{d}{d\tau} \int_\tau^T h_i(\bar{x}(\tau); y(t))dt =$$

$$= -[-h_i(\bar{x}(\tau); y(\tau)) + \int_\tau^T \sum_{l=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial h_i(\bar{x}(\tau); y(t))}{\partial x_{lk}} f_{lk}(\bar{x}(\tau), \bar{u}(\tau))dt] =$$

$$= h_i(\bar{x}(\tau); \bar{x}(\tau)) - \int_\tau^T \sum_{l=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial h_i(\bar{x}(\tau); y(t))}{\partial x_{lk}} f_{lk}(\bar{x}(\tau), \bar{u}(\tau))dt$$

или

$$\beta_i(\tau) \geqslant h_i(\bar{x}(\tau); \bar{x}(\tau)) - \int_\tau^T \sum_{l=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial h_i(\bar{x}(\tau); y(t))}{\partial x_{lk}} f_{lk}(\bar{x}(\tau), \bar{u}(\tau))dt.$$

2. Случай дискретного времени

В качестве основной модели для случая дискретного времени рассмотрим игру в развернутой форме с полной (совершенной) информацией.

Определение 2. *Дерево игры представляет собой конечный древовидный граф K с корневой вершиной (корнем) x_0.*

В дальнейшем будем использовать следующие обозначения. Пусть x некоторая вершина (позиция). Обозначим через $K(x)$ поддерево K с корнем x. Обозначим через $Z(x)$ – множество вершин, непосредственно следующих за x. Вершины y, непосредственно следующие за x, называются альтернативами в вершине x ($y \in Z(x)$).

Игрока, который делает ход в x (который выбирает следующую альтернативу в позиции x), будем обозначать через $i(x)$. Выбор игрока $i(x)$ в позиции x будем обозначать через $\bar{x} \in Z(x)$.

Пусть $N = \{1, \ldots, n\}$ – множество всех игроков в игре.

Определение 3. *Игра в развернутой форме с полной информацией (см. [2]) $G(x_0)$ представляет собой древовидный граф $K(x_0)$, который обладает следующими дополнительными свойствами:*

- *Множество вершин (позиций) разлагается на $n+1$ подмножество*

  $$P_1, P_2, \ldots, P_{n+1},$$

  которые образуют разбиение множества всех вершин графа K. Вершины (позиции) $x \in P_i$ называются личными позициями игрока i, $i = 1, \ldots, n$; вершины (позиции) $x \in P_{n+1}$ называются терминальными позициями.

- *В каждой вершине (позиции) x задан набор действительных чисел $h(x) = (h_1(x), \ldots, h_n(x))$, где $h_i(x)$ интерпретируется как выигрыш игрока i в вершине (позиции) x.*

Определение 4. *Стратегия игрока i представляет собой отображение $U_i(\cdot)$, которое каждой $x \in P_i$ ставит в соответствие единственную альтернативу $y \in Z(x)$.*

Как и в предыдущем случае обозначим через $H_i(x; u_1(\cdot), \ldots, u_n(\cdot))$ функцию выигрыша игрока $i \in N$ в подыгре $G(x)$ из позиции x. Будем предполагать, что

$$H_i(x; u_1(\cdot), \ldots, u_n(\cdot)) = \sum_{i=1}^{l} h_i(x'_i)$$

где $x' = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_l)$ представляет собой путь, реализовавшийся в подыгре $G(x)$ в ситуации $(u_1(\cdot), \ldots, u_n(\cdot))$, $x'_1 = x$.

Обозначим через $\bar{u}(\cdot) = (\bar{u}_1(\cdot), \ldots, \bar{u}_n(\cdot))$ ситуацию и соответствующую траекторию (путь) $\bar{x} = (\bar{x}_0, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_m)$, $\bar{x}_m \in$

P_{n+1} , такие что

$$\max_{u_1(\cdot),\dots,u_n(\cdot)} \sum_{i=1}^{n} H_i(x_0; u_1(\cdot),\dots,u_n(\cdot)) =$$

(17)

$$= \sum_{i=1}^{n} H_i(x_0; \bar{u}_1(\cdot),\dots,\bar{u}_n(\cdot)) = \sum_{i=1}^{n} h_i(\bar{x}_m).$$

Путь $\bar{x} = (\bar{x}_0,\dots,\bar{x}_m)$, удовлетворяющий уравнению (17), будем называть «кооперативной траекторией» или «кооперативным путем».

Определим в $G(x_0)$ характеристическую функцию классическим образом:

$$V(x_0; N) = \sum_{i=1}^{n} h_i(\bar{x}_m),$$

$$V(x_0; \emptyset) = 0,$$
$$V(x_0; S) = Val\ \Gamma_{S,N\setminus S}(x_0),$$

где $Val\ \Gamma_{S,N\setminus S}(x_0)$ есть значение антагонистической игры между коалицией S, действующей как первый игрок, и дополнительной коалицией $N\setminus S$, действующей как игрок 2, с выигрышем игрока S равным

$$\sum_{i\in S} H_i(x_0; u_1(\cdot),\dots,u_n(\cdot)).$$

Определим $L(x_0)$ как множество дележей в игре $G(x_0)$.

$$L(x_0) = \left\{ \alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n) : \alpha_i \geqslant V(x_0;\{i\}),\ \sum_{i\in N} \alpha_i = V(x_0; N) \right\}.$$

Регуляризованная игра $G_\alpha(x_0)$. Для каждого $\alpha \in L(x_0)$ определим некооперативную игру $G_\alpha(x_0)$, которая отличается от игры $G(x_0)$ только выигрышами, определенными в вершинах (позициях) вдоль оптимального кооперативного пути $\bar{x} = (\bar{x}_0, \ldots, \bar{x}_m)$. Пусть $\alpha \in L(x_0)$. Определим процедуру распределения дележа (ПРД) как функцию $\beta_k = (\beta_1(k), \ldots, \beta_n(k))$, $k = 0, 1, \ldots, m$, такую что

$$\alpha_i = \sum_{k=0}^{m} \beta_i(k). \tag{18}$$

Определим через $H_i^\alpha(x_0; u_1(\cdot), \ldots, u_n(\cdot))$ функцию выигрыша в игре $G_\alpha(x_0)$ и через $\bar{x} = \{\bar{x}_0, \ldots, \bar{x}_m\}$ кооперативный путь.

Положим, что при развитии игры вдоль кооперативной траектории

$$H_i^\alpha(x_0; u_1(\cdot), \ldots, u_n(\cdot)) = H_i(x_0; u_1(\cdot), \ldots, u_n(\cdot))$$

И пусть $\bar{x}_k = x_k$, при $0 \leqslant k \leqslant l$. Тогда

$$H_i^\alpha(x_0; u_1(\cdot), \ldots, u_n(\cdot)) = H_i(x_0; u_1(\cdot), \ldots, u_n(\cdot)) =$$

$$= \sum_{k=0}^{l} \beta_i(k) + \sum_{k=l+1}^{m} h_i(x_k)$$

Таким образом, по определению функции выигрыша в игре $G_\alpha(x_0)$ выигрыши вдоль оптимальной кооперативной траектории равны компонентам дележа $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.
Рассмотрим текущие подыгры $G(\bar{x}_k)$ вдоль оптимального пути $\bar{x}$ и текущие множества дележей $L(\bar{x}_k)$. Пусть $\alpha^k \in L(\bar{x}_k)$.

Определение 5. *Игра $G_\alpha(x_0)$ называется регуляризацией игры $G(x_0)$ (α-регуляризация), если ПРД β определена таким образом, что*

$$\alpha_i^k = \sum_{j=k}^{m} \beta_i(j)$$

или $\beta_i(k) = \alpha_i^k - \alpha_i^{k+1}$, $i \in N$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$, $\beta_i(m) = \alpha_i^m$, $\alpha_i^0 = \alpha_i$.

Теорема 2. *В регуляризации $G_\alpha(x_0)$ исходной игры существует равновесие по Нэшу с равновесными выигрышами $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.*

Доказательство. Вдоль кооперативного пути имеем

$$\alpha_i^k \geqslant V(\bar{x}_k; \{i\}), \quad i \in N, k = 0, 1, \ldots, m,$$

поскольку $\alpha^k = (\alpha_1^k, \ldots, \alpha_n^k) \in L(\bar{x}_k)$ представляет собой дележ в $G(\bar{x}_k)$ (заметим, что здесь $V(\bar{x}_k; \{i\})$ вычисляется в подыгре $G(\bar{x}_k)$, а не в $G_\alpha(\bar{x}_k)$). В тоже время

$$\alpha_i^k = \sum_{j=k}^{m} \beta_i(j)$$

и мы получаем

$$\sum_{j=k}^{m} \beta_i(j) \geqslant V(\bar{x}_k; \{i\}), \quad i \in N, k = 0, 1, \ldots, m. \tag{19}$$

Однако $\sum\limits_{j=k}^{m} \beta_i(j)$ есть выигрыш игрока i в подыгре $G_\alpha(\bar{x}_k)$ вдоль кооперативного пути. Тогда из (19), используя аргументы аналогичные таковым в теореме 1, можно построить равновесие по Нэшу с выигрышами $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ и результирующим кооперативным путем $\bar{x} = (\bar{x}_0, \ldots, \bar{x}_m)$. Условие *защиты от иррационального поведения* в случае дискретного времени примет вид

$$\sum_{j=0}^{l} \beta_i(j) + V_i(\bar{x}_{l+1}; \{i\}) \geqslant V_i(x_0; \{i\}), \quad 0 \leqslant l \leqslant m,\ i \in N. \tag{20}$$

Пример.

В этом примере в качестве дележа рассмотрим вектор Шепли (Shapley value) [6]. Используя приведенную выше регуляризацию игры, покажем, что здесь существует равновесие по Нэшу с равновесными выигрышами равными компонентам вектора Шепли.

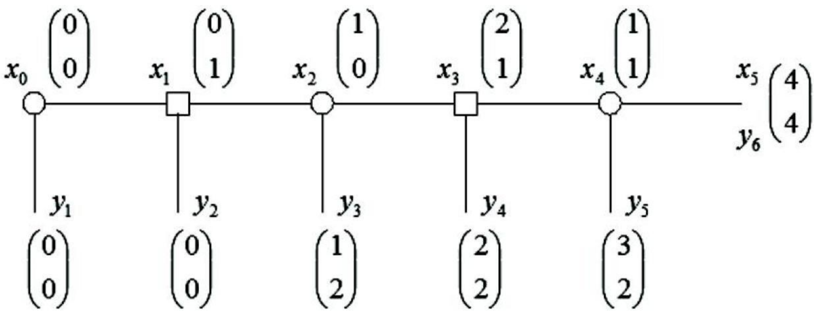


Рис. 1. Игра $G(x_0)$

В игре $G(x_0) : N = \{1, 2\}$, $P_1 = \{x_0, x_2, x_4\}$, $P_2 = \{x_1, x_3\}$, $P_3 = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6\}$. $h(x_0) = (0, 0)$, $h(x_1) = (0, 1)$, $h(x_2) = (1, 0)$, $h(x_3) = (2, 1)$, $h(x_4) = (1, 1)$, $h(x_5) = (4, 4)$, $h(y_1) = (0, 0)$, $h(y_2) = (0, 0)$, $h(y_3) = (1, 2)$, $h(y_4) = (2, 2)$, $h(y_5) = (3, 2)$, $h(y_6) = h(x_5) = (4, 4)$. Оптимальная кооперативная траектория (кооперативный путь) $\bar{x} = \{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$.

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$V(x;\{1\})$	0	0	5	4	5	4
$V(x;\{2\})$	0	3	2	4	3	4
$V(x;\{1,2\})$	15	15	14	13	10	8
$Sh(x;\{1\})$	7,5	6	8,5	6,5	6	4
$Sh(x;\{2\})$	7,5	9	5,5	6,5	4	4
$\beta_1(x)=\beta_1(j)$	1,5	-2,5	2	0,5	2	4
$\beta_2(x)=\beta_2(j)$	-1,5	3,5	-1	2,5	0	4

Легко увидеть, что в этом случае имеет место неравенство (19)

$$\sum_{j=k}^{m} \beta_i(j) \geqslant V(\bar{x}_k;\{i\})$$

для $i \in N$, и свойство защиты от иррационального поведения (20) также выполняется:

$$\sum_{j=0}^{l} \beta_i(j) + V_i(\bar{x}_{l+1};\{i\}) \geqslant V(x_0;\{i\}), \quad i=1,2, \quad 1 \leqslant l \leqslant 4.$$

Литература

1. ПЕТРОСЯН Л.А., ДАНИЛОВ Н.А. *Устойчивые решения неантагонистических дифференциальных игр с транзитивными выигрышами*// Вестник ЛГУ. – 1979. – №1. – С. 46-54.
2. KUHN H.W. *Extensive games and the problem of imputation*. Contributions to the Theory of Games II (in H.W. Kuhn and A.W. Tucker (eds.). Princeton: Princeton University Press, 1953. – P. 193-216.
3. NASH J. *Non-cooperative games* // Ann. Mathematics. – 1951. – V. 54. – P. 286-295.
4. NEUMANN J., MORGENSTERN O. *Theory of Games and Economic Behavior*. – Princeton, 1947.

5. PETROSJAN L.A. *Differential Games of Pursuit*. – World Scientific, Singapore, 1993.
6. SHAPLEY L.S. *A Value for n-Person Games*. Contributions to the Theory of Games (in H.W. Kuhn and A.W. Tucker (eds.). Princeton: Princeton University Press, 1953. – P. 307-315.
7. YEUNG D.W.K. *An irrational-behavior-proofness condition in cooperative differential games*// Int. J. of Game Theory Review. – 2007. – V. 9. – №1. – P. 256-273.

PRINCIPLES OF DYNAMIC STABILITY

Leon Petrosyan, Faculty of Applied Mathematics and Control Processes, St. Petersburg State University, Saint Petersburg, Doctor of Science, professor (spbuoasis7@peterlink.ru).
Nickolay Zenkevich, School of Management, St. Petersburg State University, Saint Petersburg, Cand.Sc. (zenkevich@gsom.pu.ru).

Abstract: There are three important aspects which must be taken into account when the problem of stability of long-range cooperative agreements is investigated: time-consistency of the cooperative agreements, strategic stability and irrational behavior proofness. The mathematical results based on imputation distribution procedures (IDP) are developed to deal with the above mentioned aspects of cooperation. We proved that for a special class of differential games time-consistent cooperative agreement can be strategically supported by Nash equilibrium. We also consider an example where all three conditions are satisfied.

Keywords: differential game, cooperative solution, time-consistency of the cooperative agreements, payoff distribution procedures (PDP), imputation distribution procedures (IDP), strategic stability, irrational behavior proofness.

УДК 021.8 + 025.1
ББК 78.34

МНОГОШАГОВЫЕ СЕТЕВЫЕ ИГРЫ С ПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИЕЙ [1]

Петросян Л. А. [2], **Седаков А. А.** [3]
(Факультет прикладной математики – процессов управления, Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург)

В статье рассматриваются многошаговые сетевые игры с полной информацией. В каждый момент игры задается текущая сетевая структура, связывающая игроков. Предполагается, что любое ребро сети имеет полезность (полезность одного игрока от связи со вторым), и игроки вправе изменять структуру сети на каждом шаге. Предлагается способ нахождения оптимального поведения игроков в играх такого типа.

Ключевые слова: сеть, сетевые игры, функция полезности, характеристическая функция, вектор Шепли, равновесие по Нэшу.

1. Построение многошаговой сетевой игры с полной информацией

Пусть $N = \{1, \dots, n\}$ – множество игроков. Построим дерево игры – конечный древовидный граф $K = (X, F)$ с начальной вершиной x_0 [2, 6]. Множество X есть множество вершин графа K, а $F : X \mapsto X$ есть точечно-множественное отображение,

[1] *Текст приводится в соответствии с изданием «Математическая теория игр и ее приложения. – 2009. – Т. 1. №2».*

[2] *Леон Аганесович Петросян, доктор физико-математических наук, профессор (spbuoasis7@peterlink.ru).*

[3] *Артем Александрович Седаков, кандидат физико-математических наук (formail@list.ru).*

которое каждому элементу $x \in X$ ставит в соответствие множество F_x вершин графа, следующих непосредственно за вершиной x. Вершины x древовидного графа K, для которых $F_x = \emptyset$ будем называть окончательными (терминальными). Множество X вершин древовидного графа K представим стандартным образом в виде объединения $n+1$ непересекающихся множеств: $X = P_1 \cup \ldots \cup P_n \cup P_{n+1}$, где множество P_i – множество личных позиций игрока i, $i \in N$, а множество P_{n+1} – множество окончательных позиций древовидного графа K. В дальнейшем через $i(x)$ будем обозначать игрока, который делает ход в вершине x в игре на древовидном графе K.

Опишем пошаговое развитие игрового процесса.

1.1. ПОСТРОЕНИЕ ДРЕВОВИДНОГО ГРАФА МНОГОШАГОВОЙ СЕТЕВОЙ ИГРЫ

Начальный шаг. В начальной вершине x_0 древовидного графа K определена сеть $G_{x_0} = (N, \theta(x_0))$. Через g^{x_0} обозначим множество ребер сети G_{x_0}. Множество узлов N совпадает со множеством игроков (узел сети отождествляем с игроком), и $\theta(x_0) : g^{x_0} \mapsto R$ – числовая функция, которую мы будем интерпретировать как *функцию полезности*.

Шаг 1. Игрок $i(x_0)$ имеет следующие n альтернатив в вершине x_0:

- не предпринимать никаких действий, при этом игровой процесс переходит в вершину $y_{11} \in F_{x_0}$;
- разорвать связь с одним игроком $j \in N$, $j \neq i(x_0)$, если ребро $(i(x_0), j) \in g^{x_0}$; при этом игровой процесс переходит в вершину $y_{1j} \in F_{x_0}$;
- предложить игроку k, $k \neq i(x_0)$ установить связь $(i(x_0), k)$, если ребро $(i(x_0), k) \notin g^{x_0}$; при этом игровой процесс переходит в вершину $y_{1k} \in F_{x_0}$.

Таким образом, каждая из n вершин y_{11}, $\{y_{1j}\}_j$, $\{y_{1k}\}_k$ принадлежит множеству F_{x_0}. В зависимости от выбора игроком $i(x_0)$ альтернативы, в вершинах множества F_{x_0} начальная сеть изменяется, соответственно множество ребер новой сети имеет следующий вид:

$$
\begin{array}{ll}
g^{y_{11}} = g^{x_0}, & \text{если игрок } i(x_0) \text{ не предпринимает} \\
 & \text{никаких действий;} \\
g^{y_{1j}} = g^{x_0} \setminus (i(x_0), j), & \text{если игрок } i(x_0) \text{ разрывает связь} \\
 & \text{с игроком } j; \\
g^{y_{1k}} = g^{x_0} \cup (i(x_0), k), & \text{если игрок } i(x_0) \text{ устанавливает связь} \\
 & \text{с игроком } k.
\end{array}
$$

Следовательно, для вершины $x_1 \in F_{x_0} = \{y_{11}, \{y_{1j}\}_j, \{y_{1k}\}_k\}$ множество ребер g^{x_1} однозначно определено. Если $x_1 \notin P_{n+1}$, то мы переходим к рассмотрению шага 2 для каждой вершины $x_1 \in F_{x_0}$. Этот шаг полностью аналогичен шагу 1, поэтому, опуская изложение второго шага игры, рассмотрим некоторый шаг t.

Шаг t $(1 < t \leqslant l)$. Предположим, мы построили древовидный граф до вершин, которые можно достичь из начальной вершины x_0 не более чем за $t-1$ шагов. Пусть $\{x_0, x_1, \ldots, x_{t-1}\}$ – некоторая траектория из x_0 построенного древовидного графа в вершину x_{t-1}, в которую можно попасть из x_0 за $t-1$ шаг. По построению во всех позициях $x_0, x_1, \ldots, x_{t-1}$ соответствующие множества ребер g^{x_0}, g^{x_1}, …, $g^{x_{t-1}}$ однозначно определены. Определим множество g^{x_t}.

В вершине x_{t-1} у игрока $i(x_{t-1})$ имеются следующие n альтернатив:

- не предпринимать никаких действий, при этом игровой процесс переходит в вершину $y_{t1} \in F_{x_{t-1}}$;
- разорвать связь с одним игроком $j \in N$, $j \neq i(x_{t-1})$, если ребро $(i(x_{t-1}), j) \in g^{x_{t-1}}$; при этом игровой процесс переходит в вершину $y_{tj} \in F_{x_{t-1}}$;
- предложить игроку k, $k \neq i(x_{t-1})$ установить связь $(i(x_{t-1}), k)$, если ребро $(i(x_{t-1}), k) \notin g^{x_{t-1}}$; при этом игровой процесс переходит в вершину $y_{tk} \in F_{x_{t-1}}$.

Таким образом, каждая из n вершин y_{t1}, $\{y_{tj}\}_j$, $\{y_{tk}\}_k$ принадлежит множеству $F_{x_{t-1}}$. В зависимости от выбора игроком $i(x_{t-1})$ альтернативы, в вершинах множества $F_{x_{t-1}}$ текущая сеть изменяется, соответственно множество ребер новой сети имеет следующий вид:

$g^{y_{t1}} = g^{x_{t-1}}$,	если игрок $i(x_{t-1})$ не предпринимает никаких действий;
$g^{y_{tj}} = g^{x_{t-1}} \setminus (i(x_{t-1}), j)$,	если игрок $i(x_{t-1})$ разрывает связь с игроком j;
$g^{y_{tk}} = g^{x_{t-1}} \cup (i(x_{t-1}), k)$,	если игрок $i(x_{t-1})$ устанавливает связь с игроком k.

Следовательно, для вершины $x_t \in F_{x_{t-1}} = \{y_{t1}, \{y_{tj}\}_j, \{y_{tk}\}_k\}$ множество ребер g^{x_t} однозначно определено. Если $x_t \notin P_{n+1}$, то мы переходим к рассмотрению очередного шага построения древовидного графа для каждой вершины $x_t \in F_{x_{t-1}}$. Если в вершине x_t игровой процесс не заканчивается, т. е., если $x_t \notin P_{n+1}$, то мы переходим к рассмотрению следующего шага игры, и построение игры на древовидном графе продолжается аналогичным образом. При $t = l$ построение древовидного графа K закончено.

1.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ВЫПЛАТ ИГРОКАМ

Определение 1. *Пусть $S \subseteq N$. Вещественную функцию $v : X \times 2^N \mapsto R$, заданную на декартовом произведении множества X и множества всех подмножеств множества N и определенную по правилу*

$$v(y, S) = \sum_{(i,j) \in g^y:\ i,j \in S} \theta_{ij}(y), \tag{1}$$

где $y \in X$, будем называть характеристической функцией. Здесь $\theta_{ij}(y)$ – значение функции полезности $\theta(y)$, определенной сетевой *игрой $G_y = (N, \theta(y))$, которое представляет собой полезность игрока i от связи с игроком j в вершине y.*

Задав конечное множество игроков N и функцию $v(y, \cdot)$, определенную по правилу (1), можно построить игру в форме характеристической функции, в которой для каждого игрока определены лишь полезности связей с другими игроками. Определим выплаты игрокам в сети. С этой целью выбираем некоторый принцип оптимальности теории кооперативных игр. Для простоты в качестве такого принципа оптимальности выберем вектор Шепли [9], и с его помощью определим дележ $\gamma(y) = (\gamma_1(y), \ldots, \gamma_n(y))$, компоненты которого вычисляются по формуле:

$$\gamma_k(y) = \sum_{\{S:\, S \subseteq N,\, k \in S\}} \frac{(n-s)!(s-1)!}{n!} \left[v(y, S) - v(y, S \setminus k) \right]. \tag{2}$$

Здесь s – число элементов множества S, $v(y, S)$ – характеристическая функция, определенная по правилу (1).

Распишем более подробно выражение, стоящее в квадратных скобках в правой части равенства (2). Подставив значения характеристической функции $v(y, \cdot)$ из (1) для любого $y \in X$ и $k \in N$, имеем:

$$v(y, S) - v(y, S \setminus k) =$$

$$= \sum_{(i,j) \in g^y:\ i,j \in S} \theta_{ij}(y) - \sum_{(i,j) \in g^y:\ i,j \in S \setminus k} \theta_{ij}(y) =$$

$$= \sum_{(i,k) \in g^y:\ i \in S \setminus k} \theta_{ik}(y) + \sum_{(k,j) \in g^y:\ j \in S \setminus k} \theta_{kj}(y).$$

С учетом полученного компоненты вектора Шепли записываются в виде:

$$
\gamma_k(y) = \sum_{\{S\colon S\subseteq N,\, k\in S\}} \frac{(n-s)!(s-1)!}{n!} \left[\sum_{(i,k)\in g^y\colon\ i\in S\setminus k} \theta_{ik}(y) + \right.
\tag{3}
$$

$$
\left. + \sum_{(k,j)\in g^y\colon\ j\in S\setminus k} \theta_{kj}(y) \right],
$$

где $y \in X$, $k \in N$.

Величина $\sum\limits_{(i,k)\in g^y\colon\ i\in S\setminus k} \theta_{ik}(y) + \sum\limits_{(k,j)\in g^y\colon\ j\in S\setminus k} \theta_{kj}(y)$ представляет собой вклад игрока k, если тот, присоединившись к коалиции $S \setminus k$, приведет к образованию коалиции S. Здесь первое слагаемое $\sum\limits_{(i,k)\in g^y\colon\ i\in S\setminus k} \theta_{ik}(y)$ представляет собой дополнительную полезность игроков коалиции $S \setminus k$, внесенную игроком k. Второе слагаемое $\sum\limits_{(k,j)\in g^y\colon\ j\in S\setminus k} \theta_{kj}(y)$ представляет собой дополнительную полезность игрока k, получаемую при присоединении к игрокам коалиции $S \setminus k$.

Пусть в игре реализовался путь $\{x_0, x_1, \ldots, x_l\}$. Тогда выигрыш игрока $i \in N$ вдоль этого пути определяется следующим образом:

$$
\sum_{x\in\{x_0,\ldots,x_l\}} \gamma_i(x), \quad i \in N,
$$

где $\gamma_i(x)$ представляет собой i-ю компоненту вектора Шепли, вычисленного по правилу (3) в сетевой игре $G_x = (N, \theta(x))$.

1.3. ФОРМАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ МНОГОШАГОВОЙ СЕТЕВОЙ ИГРЫ С ПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИЕЙ

Определение 2. *Многошаговой сетевой игрой n лиц с полной информацией называется древовидный граф K, на котором:*

- *задано разбиение множества вершин X на $n+1$ множество P_1, $P_2, \ldots, P_n, P_{n+1}$, где P_i, $i \in N$ есть множество личных позиций игрока i, множество $P_{n+1} = \{x : F_x = \emptyset\}$ есть множество окончательных вершин;*
- *в каждой вершине $x \in X$ однозначным образом задана сеть $G_x = (N, \theta(x))$: множество узлов сети N (множество игроков) и функция полезности $\theta : g^x \mapsto R$.*

Определение 3. *Стратегией $u_i(\cdot)$ игрока $i \in N$ назовем отображение, которое каждой вершине $x \in P_i$ ставит в соответствие вершину $y \in F_x$ либо вероятностное распределение p^x на множестве F_x*

$$p^x = \{p^x(y)\},\ y \in F_x,\ p^x(y) \geqslant 0,\ \sum_{y \in F_x} p^x(y) = 1.$$

Для каждого набора стратегий (ситуации) $u(\cdot) = (u_1(\cdot), \ldots, u_n(\cdot))$ в игре на древовидном графе K определим функции выигрыша игроков следующим образом. Пусть в ситуации $u(\cdot) = (u_1(\cdot), \ldots, u_n(\cdot))$ реализовался некоторый путь $\{x_0, x_1, \ldots, x_l\}$ из начальной вершины x_0 в окончательную x_l. Тогда функция выигрыша игрока i:

$$H_i(u(\cdot)) = \sum_{x \in \{x_0, \ldots, x_l\}} \gamma_i(x), \quad i \in N.$$

Здесь $\gamma_i(x)$ есть выплата игроку i, которая получена как i-ая компонента вектора Шепли, рассчитанного по характеристической функции $v(x, \cdot)$ для сетевой игры $G_x = (N, \theta(x))$, заданной в вершине x (см. (3)).

Определение 4. *Набор стратегий* $u^*(\cdot) = (u_1^*(\cdot), \ldots, u_i^*(\cdot), \ldots, u_n^*(\cdot))$ *называется равновесием по Нэшу в многошаговой сетевой игре на древовидном графе* K *с начальной вершиной* x_0*, если*

$$H_i(u^*(\cdot)||u_i(\cdot)) \leqslant H_i(u^*(\cdot))$$

для любых $i \in N$ *и любых допустимых* u_i.

2. Построение ситуации равновесия по Нэшу в многошаговой сетевой игре

Предположим, что длина игры равна $l + 1$. Для определения оптимального поведения игроков будем использовать концепцию абсолютного равновесия в конечношаговой игре с полной информацией.

Введем функцию Беллмана [1, 5] φ_i^t как выигрыш игрока i в ситуации равновесия по Нэшу в игре за $l - t$ шагов (положим $\varphi_i^{l+1} = 0$). Значения функции Беллмана φ во всех вершинах древовидного графа K определяются стандартным образом методом обратной индукции (решая уравнение Беллмана от окончательных вершин графа K к начальной при граничном условии).

В данном случае для любой окончательной вершины $x_l \in P_{n+1}$ граничное условие выглядит следующим образом:

$$\varphi_i^l(x_l) = \gamma_i(x_l), \quad i \in N.$$

В промежуточной вершине x_t древовидного графа K функция Беллмана удовлетворяет следующему рекуррентному соотношению:

$$\begin{aligned} \varphi^t_{i(x_t)}(x_t) = &\max_{y \in F_{x_t}} \Big(\gamma_{i(x_t)}(x_t) + \varphi^{t+1}_{i(x_t)}(y)\Big) = \\ = &\ \gamma_{i(x_t)}(x_t) + \max_{y \in F_{x_t}} \Big(\varphi^{t+1}_{i(x_t)}(y)\Big) = \\ = &\ \gamma_{i(x_t)}(x_t) + \varphi^{t+1}_{i(x_t)}(\bar{y}). \end{aligned} \tag{4}$$

Для игрока $j \neq i(x_t)$ значения функции Беллмана определяются по правилу:

$$\varphi^t_j(x_t) = \gamma_j(x_t) + \varphi^{t+1}_j(\bar{y}). \tag{5}$$

Решая уравнение Беллмана, находим значения φ^t_i, $t = 0, \dots, l$, $i \in N$. При $t = 0$ уравнение решено. Вектор $(\varphi^0_1(x_0), \dots, \varphi^0_n(x_0))$ назовем *значением многошаговой сетевой игры с полной информацией*.

Вместе с нахождением значения многошаговой сетевой игры определяются и оптимальные стратегии игроков, которые по построению образуют ситуацию абсолютного равновесия в игре: в каждой вершине $x \in X$ древовидного графа K игрок $i(x)$ выбирает вершину $y \in F_x$ согласно правилу (4). В ситуации абсолютного равновесия реализуется некоторый путь в графе из начальной вершины в окончательную. Такой путь будем называть *оптимальным путем* в многошаговой сетевой игре.

На основании приведенного алгоритма имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *Построенная ситуация $u^*(\cdot) = (u^*_1(\cdot), \dots, u^*_n(\cdot))$, в которой для каждой вершины $x \notin P_{n+1}$, стратегия $u^*_i(x)$ игрока i определяется по правилу*

$$u^*_i(x) = \bar{y},$$

где $\bar{y}$ находится из соотношения (4), образует ситуацию абсолютного равновесия по Нэшу в многошаговой сетевой игре, заданной на древовидном графе K.

Однако, не всегда гарантируется единственность абсолютного равновесия по Нэшу в многошаговой сетевой игре.

Замечание 1. Пусть наряду с вершиной $\bar{y} \in F_{x_t}$, доставляющей максимальное значение функции $\varphi_{i(x_t)}^{t+1}(y)$ в (4), вершина $\tilde{y} \in F_{x_t}$ также является точкой максимума этой функции. Тогда с очевидностью выполняется следующее равенство:

$$\varphi_{i(x_t)}^{t+1}(\bar{y}) = \varphi_{i(x_t)}^{t+1}(\tilde{y}),$$

которое, в свою очередь, приводит к одному и тому же значению $\varphi_{i(x_t)}^{t}(x_t)$. Следовательно, игроку, принимающему решение в вершине x_t (игроку $i(x_t)$), можно выбрать любую вершину $y \in F_{x_t}$, доставляющую максимум функции $\varphi_{i(x_t)}^{t+1}(y)$ в (4).

В тех же вершинах $\bar{y}$ и $\tilde{y}$ для отличных от $i(x_t)$ игроков $j \in N$, $j \neq i(x_t)$ в общем случае справедливо следующее соотношение:

$$\varphi_{j}^{t+1}(\bar{y}) \neq \varphi_{j}^{t+1}(\tilde{y}).$$

Данное обстоятельство означает, что выбор игроком $i(x_t)$ вершины из множества

$$I(x_t) = \arg\max_{y \in F_{x_t}} \varphi_{i(x_t)}^{t+1}(y) \tag{6}$$

влияет на решения последующих игроков (в силу различия значений функции Беллмана этих игроков в точках множества $I(x_t)$). Таким образом, в общем случае в многошаговой сетевой игре имеет место неединственность оптимального пути с различными значениями функции выигрыша.

Случай неединственности оптимального пути легко обходится введением понятия индифферентного равновесия по Нэшу в многошаговой игре с полной информацией [8]. Поскольку в общем случае $|I(x_t)| \geqslant 1$, предполагается, что игроку $i(x_t)$ безразличен выбор вершины из множества $I(x_t)$. Предпишем $i(x_t)$ выбирать эти вершины с одинаковыми вероятностями, т. е. $p^{x_t}(y) = 1/|I(x_t)|$, для любого $y \in I(x_t)$. Тогда в промежуточной вершине x_t древовидного графа K функция φ_i^t удовлетворяет аналогичному (4) рекуррентному соотношению:

$$(7) \qquad \varphi_{i(x_t)}^t(x_t) = \gamma_{i(x_t)}(x_t) + \frac{1}{|I(x_t)|} \cdot \sum_{y \in I(x_t)} \varphi_{i(x_t)}^{t+1}(y).$$

Для игрока $j \neq i(x_t)$ значения функции φ определяются по правилу:

$$(8) \qquad \varphi_j^t(x_t) = \gamma_j(x_t) + \frac{1}{|I(x_t)|} \cdot \sum_{y \in I(x_t)} \varphi_j^{t+1}(y).$$

Решая уравнение Беллмана, находим значения φ_i^t, $t = 0, \ldots, l$, $i \in N$. При $t = 0$ уравнение решено. Вектор $(\varphi_1^0(x_0), \ldots, \varphi_n^0(x_0))$ также назовем *значением многошаговой сетевой игры с полной информацией.*

По аналогии с теоремой 1 справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Построенная ситуация* $u^{IE}(\cdot) = (u_1^{IE}(\cdot), \ldots, u_n^{IE}(\cdot))$, *в которой для каждой вершины* $x \notin P_{n+1}$, *стратегия* $u_i^{IE}(x)$ *игрока* i *определяется по правилу*

$$u_i^{IE}(x) = \{p^x(y)\}, y \in I(x), p^x(y) = \frac{1}{|I(x)|},$$

где вершины y *находятся с использованием соотношений (6)-(7), образует ситуацию индифферентного равновесия по Нэшу в многошаговой сетевой игре, заданной на древовидном графе* K.

3. Численный пример многошаговой сетевой игры с полной информацией

Для иллюстрации алгоритма построения решения сетевой игры приведем контрольный пример.

Рассмотрим трехшаговую сетевую игру. Пусть $N = \{1, 2, 3\}$ есть множество игроков. Построим древовидный граф K с начальной вершиной в x_0.

Пусть в x_0 задана сеть, представленная на рис. 1.

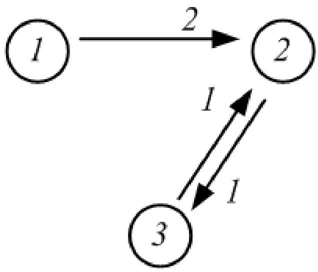


Рис. 1. Сеть G_{x_0}

Множество ребер $g^{x_0} = \{(1, 2), (2, 3), (3, 2)\}$. Зададим функцию полезности $\theta(x_0)$ в виде матрицы $\Theta(x_0)$:

$$\Theta(x_0) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Предположим, что в начальной вершине ходит игрок 1, у которого есть три альтернативы: (1) не предпринимать никаких действий (при этом игра переходит в вершину x_1), (2) разорвать связь с игроком 2 (при этом игра переходит в вершину x_2), (3) наладить связь с игроком 3 (при этом игра переходит в вершину x_3). В зависимости от выбора альтернативы игроком 1 имеем:

$g^{x_1} = g^{x_0}$,	если игрок 1 выбирает первую альтернативу в вершине x_0;
$g^{x_2} = g^{x_0} \setminus (1, 2)$,	если игрок 1 выбирает вторую альтернативу в вершине x_0;
$g^{x_3} = g^{x_0} \cup (1, 3)$,	если игрок 1 выбирает третью альтернативу в вершине x_0.

Пусть функции полезностей $\theta(x_1)$, $\theta(x_2)$ и $\theta(x_3)$ заданы в виде следующих матриц:

$$\Theta(x_1) = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \Theta(x_2) = \Theta(x_3) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Будем считать, что вершины x_1 и x_3 являются окончательными, а вершина x_2 является личной позицией игрока 2. В x_2 второй игрок имеет три альтернативы: (1) не предпринимать никаких действий (при этом игра переходит в вершину x_4), (2) наладить связь с игроком 1 (при этом игра переходит в вершину x_5), (3) разорвать связь с игроком 3 (при этом игра переходит в вершину x_6). В зависимости от выбора альтернативы игроком 2 имеем:

$g^{x_4} = g^{x_2}$, если игрок 2 выбирает первую альтернативу в вершине x_2;
$g^{x_5} = g^{x_2} \cup (2,1)$, если игрок 2 выбирает вторую альтернативу в вершине x_2;

$g^{x_6} = g^{x_2} \setminus (2,3)$, если игрок 2 выбирает третью альтернативу в вершине x_2.

Пусть функции полезностей $\theta(x_4)$, $\theta(x_5)$ и $\theta(x_6)$ заданы в виде следующих матриц:

$$\Theta(x_4) = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \Theta(x_5) = \Theta(x_6) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Будем считать, что вершины x_4 и x_6 являются окончательными, а вершина x_5 является личной позицией игрока 3. В x_5 третий игрок имеет три альтернативы: (1) не предпринимать никаких действий (при этом игра переходит в вершину x_7), (2) наладить связь с игроком 1 (при этом игра переходит в вершину x_8), (3) разорвать связь с игроком 2 (при этом игра переходит в вершину x_9). В зависимости от выбора альтернативы игроком 2 имеем:

$$\begin{array}{ll} g^{x_7} = g^{x_5}, & \text{если игрок 3 выбирает первую альтернативу} \\ & \text{в вершине } x_5; \\ g^{x_8} = g^{x_5} \cup (3,1), & \text{если игрок 3 выбирает вторую альтернативу} \\ & \text{в вершине } x_5; \\ g^{x_9} = g^{x_5} \setminus (3,2), & \text{если игрок 3 выбирает третью альтернативу} \\ & \text{в вершине } x_5. \end{array}$$

Пусть функции полезностей $\theta(x_7)$, $\theta(x_8)$ и $\theta(x_9)$ заданы в виде следующих матриц:

$$\Theta(x_7) = \Theta(x_8) = \Theta(x_9) = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Будем считать, что вершины x_7, x_8, x_9 являются окончательными вершинами. Тогда множества личных позиций игроков P_1, P_2, P_3 и множество окончательных вершин P_4 имеют вид: $P_1 = \{x_0\}, P_2 = \{x_2\}, P_3 = \{x_5\}, P_4 = \{x_1, x_3, x_4, x_6, x_7, x_8, x_9\}$, а древовидный граф K представлен на рис. 2.

Для начала вычислим индивидуальные выплаты игрокам в каждой вершине графа K. Рассмотрим вершину x_0. Построим характеристическую функцию по правилу (1):

$$\begin{aligned} &v(x_0, \{1,2,3\}) = 4, \\ &v(x_0, \{1,2\}) = 2, \\ &v(x_0, \{1,3\}) = 0, \\ &v(x_0, \{2,3\}) = 2, \\ &v(x_0, \{1\}) = v(x_0, \{2\}) = v(x_0, \{3\}) = 0. \end{aligned}$$

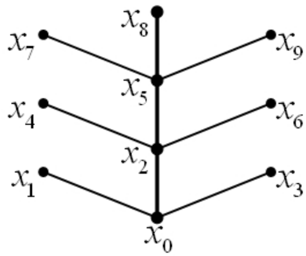


Рис. 2. Древовидный граф K

Индивидуальные выплаты игрокам в x_0 вычисляются в соответствии с вектором Шепли по правилу (3). Таким образом получаем вектор:

$$\gamma(x_0) = (1, 2, 1).$$

Аналогичным образом вычисляются индивидуальные выплаты игрокам в остальных вершинах древовидного графа K. Приведем их окончательные значения:

$$\begin{aligned}
&\gamma(x_1) = (-1{,}5, 0, 1{,}5), && \gamma(x_6) = (0, 2, 2),\\
&\gamma(x_2) = (0, 1, 1), && \gamma(x_7) = (1, 2{,}5, 1{,}5),\\
&\gamma(x_3) = (0{,}5, 2{,}5, 0), && \gamma(x_8) = (3{,}5, 2{,}5, 4),\\
&\gamma(x_4) = (0, 1{,}5, 1{,}5), && \gamma(x_9) = (1, 2, 1).\\
&\gamma(x_5) = (-0{,}5, 2{,}5, 3), &&
\end{aligned}$$

После определения выплат игрокам в каждой вершине графа K построение ситуации абсолютного равновесия в многошаговой сетевой игре не представляет особых трудностей. Данная процедура полностью аналогична задаче отыскания ситуации абсолютного равновесия в многошаговой игре с полной информацией с той лишь разницей, что в классической постановке выигрыши игроков заданы в окончательных вершинах графа игры, а в промежуточных полагаются равными нулю. Искомая ситуация абсолютного равновесия в многошаговой сетевой игре находится с использованием соотношений (4)-(5).

Оптимальные стратегии игроков следующие:

$$u_1^*(x_0) = x_2, \quad u_2^*(x_2) = x_5, \quad u_3^*(x_5) = x_8.$$

В ситуации абсолютного равновесия (u_1^*, u_2^*, u_3^*) реализуется оптимальный путь $\{x_0, x_2, x_5, x_8\}$ из начальной вершины x_0 в окончательную x_8. Вдоль оптимального пути игра развивается следующим образом. В начальный момент задана сеть G_{x_0}, указанная на рис. 1. Далее игрок 1 разрывает связь со вторым игроком, что приводит к сети G_{x_2}, показанной на рис. 3. После этого делает

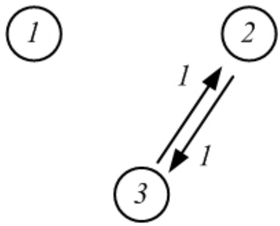


Рис. 3. Сеть G_{x_2}

ход игрок 2, который за свой ход устанавливает связь с игроков 1, что приводит к сети G_{x_5}, показанной на рис. 4. И, наконец,

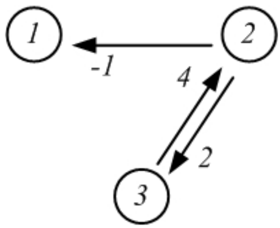


Рис. 4. Сеть G_{x_5}

своим ходом игрок 3 заканчивает игру, установив связь с игроком 1, что приводит к сети G_{x_8}, показанной на рис. 5.

Значение многошаговой сетевой игры равно $(4, 8, 9)$, а пошаговые индивидуальные выплаты следующие: $\gamma(x_0) =$

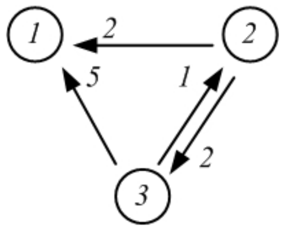


Рис. 5. Сеть G_{x_8}

$(1,2,1)$, $\gamma(x_2) = (0,1,1)$, $\gamma(x_5) = (-0{,}5, 2{,}5, 3)$, $\gamma(x_8) = (3{,}5, 2{,}5, 4)$.

Литература

1. БЕЛЛМАН Р. *Динамическое программирование*. – М, 1960.
2. ПЕТРОСЯН Л.А., КУЗЮТИН Д.В. *Игры в развернутой форме: оптимальность и устойчивость*. – СПб, 2000.
3. ПЕТРОСЯН Л.А., СЕДАКОВ А.А., СЮРИН А.Н. *Многошаговые игры с коалиционной структурой* // Вестник СПбГУ. – 2006. – Т. 10. – №3. – С. 97-110.
4. ADJEROH D., KANDASWAMY V. *Game-Theoretic Analysis of Network Community Structure* // International Journal of Computational Intelligence Res. – 2007. – V. 3. – №4. – P. 313-325.
5. BELLMAN R.E. *On the Theory of Dynamic Programming*. – Proceedings of the National Academy of Sciences, 1952.
6. KUHN H.W. *Extensive Games and Problem Information* // Ann. Math Studies. – 1953. – V. 28. – P. 193-216.
7. NASH J. *Non-cooperative Games* // Ann. of Math. – 1951. – V. 54. – P. 286-295.
8. PETROSJAN L.A., MAMKINA S.I. *Value for the Games with Changing Coalitional Structure* // Games Theory and Applications. – 2005. – V. 10. – P. 141-152.

9. SHAPLEY L.S. *A Value for n-Person Games*. Contributions to the Theory of Games II, Princeton: Princeton University Press. 1953. – P. 307-317.
10. VIVES X. *Nash equilibrium with strategic complementarities* // Journal of Mathematical Economics. – 1990. – V. 19. – №3. – P. 305-321.
11. VIVES X. *Strategic Complementarities in Multi-Stage Games*. CEPR Discussion Papers 5583. C.E.P.R. Discussion Papers, 2006.

MULTISTAGE NETWORKING GAMES WITH FULL INFORMATION

Leon Petrosjan, Faculty of Applied Mathematics and Control Processes, Saint-Peterburg State University, Doctor of Sc., professor (spbuoasis7@peterlink.ru).
Artem Sedakov, Faculty of Applied Mathematics and Control Processes, Saint-Peterburg State University, Cand.Sc. (formail@list.ru).

Abstract: Multistage networking games with full information are considered. The network structure which connects the players is defined at every time moment. We assume that each verge has a utility (the player's profit from the connection with another player), and players have a right to change the network structure at every stage. The approach to define optimal players' behavior is proposed.

Keywords: network, networking games, utility, Shapley value, Nash equilibrium.

УДК 519.837.3
ББК 22.18

ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНЫЕ НЕАНТАГОНИСТИЧЕСКИЕ ДИСКРЕТНЫЕ ИГРЫ [1]

Тур А. В. [2]
(Факультет прикладной математики - процессов управления, Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург)

Рассмотрены линейно-квадратичные неантагонистические дискретные игры. Введены необходимые и достаточные условия существования равновесия по Нэшу. Получены различные кооперативные решения. Исследовано условие Д.В.К. Янга в линейно-квадратичных дискретных играх. В качестве примера рассмотрена модель планирования производства в условиях конкуренции.

Ключевые слова: линейно-квадратичные дискретные игры, равновесие по Нэшу, кооперативные игры, условие Д.В.К. Янга.

Введение

Систематические исследования решений линейно-квадратичных дифференциальных игр обычно связывают с выходом работы [1]. В этой работе большое внимание уделено формализму бескоалиционных линейно-квадратичных дифференциальных игр многих лиц, получены условия существования решений бескоалиционных игр в различных классах стратегий. Однако во многих приложениях сама постановка задач диктует необходимость объединения игроков в коалиции. Поэтому исследование кооперативных дифференциальных игр

[1] *Текст приводится в соответствии с изданием «Математическая теория игр и ее приложения. – 2009. – Т. 1. №3».*

[2] *Анна Викторовна Тур, аспирант (markovkina86@mail.ru).*

является актуальной задачей. В данной работе рассматривается кооперативный вариант линейно-квадратичных дискретных игр с бесконечным временем окончания.

Рассмотрим дискретную линейно-квадратичную неантагонистическую игру n лиц, состояние которой в каждый момент времени характеризуется вектором $x(k)$, изменяющимся во времени в соответствии с системой уравнений

$$x(k+1) = A(k)x(k) + \sum_{i=1}^{n} B_i(k)u_i(k), \qquad (1)$$

$$k \geqslant k_0, \quad k_0 \in \mathcal{T}_+, \quad x(k_0) = x_0,$$

где $x \in R^m$ – вектор-столбец, $u_i \in R^r$ – вектор-столбец управления игрока i, $i = 1, \dots, n$; $A(k), B_i(k) \in Z(\mathcal{T}_+)$ – $(m \times m)$ и $(m \times r)$ – матрицы соответственно, $x(k_0) = x_0$ – начальное состояние, $\mathcal{T}_+$ – множество неотрицательных целых чисел, $Z(\mathcal{T}_+)$ – множество ограниченных на $\mathcal{T}_+$ матриц.

Обозначим через $N = \{1, \dots, n\}$ множество всех игроков. Выигрыш игрока $i \in N$ обозначим через $J_i(k_0, x_0, u)$, где $u = (u_1, \dots, u_n)$. Будем предполагать, что выигрыш игрока i имеет вид:

$$J_i(k_0, x_0, u) =$$

$$= \sum_{k=k_0}^{\infty} (x^T(k)P_i(k)x(k) + u^T(k)R_i(k)u(k)), \forall i = 1, \dots, n, \qquad (2)$$

где $P_i(k) = P_i^T(k), \quad R_i(k) = R_i^T(k) \in Z(\mathcal{T}_+)$ – $(m \times m)$ и $(r \times r)$ – матрицы соответственно, $i = 1, \dots, n$.

Определение 1. *Набор стратегий вида*

$$\{u_i(k, x) = M_i(k)x(k), \quad i = 1, \dots, n\} \qquad (3)$$

будем называть допустимым, если выполняются условия:

1)$M_i(k) \in Z(\mathcal{T}_+) \quad \forall i = 1, \dots, n;$

2) Система (1)*, замкнутая набором стратегий* (3)*, т. е. система*

$$x(k+1) = (A(k) + \sum_{i=1}^{n} B_i(k) M_i(k)) x(k)$$

равномерно асимптотически устойчива (при $k \to \infty$*) [4].*

Предполагается, что игроки выбирают только допустимые стратегии вида $u_i(k,x) = M_i(k)x(k)$, $k \geqslant k_0$, $i = 1, \ldots, n$. Обозначим построенную выше игру $\Gamma(k_0, x_0)$. Это обозначение показывает, что игра началась в момент времени $k = k_0$ из состояния $x(k_0) = x_0$.

1. Теорема о существовании равновесия по Нэшу

Найдем решение бескоалиционной игры $\Gamma(k_0, x_0)$. В качестве принципа оптимальности будем рассматривать равновесие по Нэшу [6].

Определение 2. *Набор стратегий*

$$\{u_i^{NE}(k,x) = M_i^{NE}(k)x(k), i = 1, \ldots, n\}$$

называется равновесием по Нэшу, если этот набор допустим в смысле определения 1 и имеет место

$$J_i(k_0, x_0, u^{NE}) \geqslant J_i(k_0, x_0, u^{NE}/u_i), \quad i = 1, \ldots, n,$$

где u_i *– любая стратегия игрока* i*, такая что набор стратегий* $\{u^{NE}/u_i\}$ *принадлежит классу допустимых.*
Здесь $\{u^{NE}/u_i\}$ – такой набор стратегий, что все игроки $j \neq i$ используют стратегии u_j^{NE}, а игрок i – стратегию u_i.

В теореме 1 приведены необходимые и достаточные условия для существования равновесия по Нэшу в игре $\Gamma(k_0, x_0)$. Пусть $Q_+(\mathcal{T}_+) \subset Z(\mathcal{T}_+)$ – множество положительных ограниченных на $\mathcal{T}_+$ матриц.

Теорема 1. *Для того, чтобы в игре* $\Gamma(k_0, x_0)$ *существовало равновесие по Нэшу, необходимо и достаточно, чтобы:*

1) Система матричных уравнений

$$\begin{cases} (A(k) + \sum_{i=1}^{n} B_i(k) M_i^{NE}(k))^T \Theta_i(k+1) \cdot \\ \cdot (A(k) + \sum_{i=1}^{n} B_i(k) M_i^{NE}(k)) - \\ - \Theta_i(k) - P_i(k) - M_i^{NE}(k)^T R_i(k) M_i^{NE}(k) = 0, \\ M_i^{NE}(k) = -(-R_i(k) + B_i^T(k)\Theta_i(k+1)B_i(k))^{-1} \cdot \\ \cdot B_i^T(k)\Theta_i(k+1)(A(k) + \sum_{j \neq i} B_j(k) M_j^{NE}(k)),\ i = 1, \ldots, n \end{cases}$$

была разрешима относительно $\{M_i^{NE}(k), \Theta_i(k)\} \in Z(\mathcal{T}_+)$, *в виде вещественных, ограниченных матриц размерности* $r \times m$ *и* $m \times m$*соответственно, где* $\Theta_i(k)$ *– симметричны для любого* $i \in N$.

2) Набор стратегий

(4) $$\{u_i^{NE} = M_i^{NE}(k)x(k), \quad i = 1, \ldots, n\}$$

был бы допустимым в смысле определения 1.

3) $(-R_i(k) + B_i^T(k)\Theta_i(k+1)B_i(k)) \in Q_+(\mathcal{T}_+), \quad i = 1, \ldots, n.$

Тогда набор стратегий (4) будет являться равновесием по Нэшу в игре $\Gamma(k_0, x_0)$, *при этом выигрыш игрока* i *в равновесии равен*

$$J_i(k_0, x_0, u^{NE}) = -x_0^T \Theta_i(k_0) x_0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть ситуация

$$u^{NE} = (u_1^{NE}, \ldots, u_n^{NE})$$

является равновесием по Нэшу. Тогда для любых $i = 1, \ldots, n$, и u_i имеет место неравенство:

$$J_i(k_0, x_0, u^{NE}/u_i) \leqslant J_i(k_0, x_0, u^{NE}).$$

Ясно, что u_i^{NE} является оптимальным управлением в следующей задаче:

$$x(k+1) = (A(k) + \sum_{j \neq i} B_j(k) M_j^{NE}(k)) x(k) + B_i(k) u_i(k)$$

с начальным условием $x(k_0) = x_0$ и функционалом J_i. В [4] выведены условия для существования единственного оптимального управления в такого рода задаче. Согласно [4]

$$\{u_i^{NE} = -(-R_i(k) + B_i^T(k)\Theta_i(k+1)B_i(k))^{-1} B_i^T(k)\Theta_i(k+1)(A(k) +$$

$$+ \sum_{j \neq i} B_j(k) M_j^{NE}(k)) x(k), \quad i = 1, \ldots, n\},$$

где $\Theta_i(k)$ – симметричные ограниченные матрицы m-го порядка, для которых выполнены условия

$$\begin{cases} (A(k) + \sum\limits_{i=1}^{n} B_i(k) M_i^{NE}(k))^T \Theta_i(k+1)(A(k) + \sum\limits_{i=1}^{n} B_i(k) M_i^{NE}(k)) - \\ - \Theta_i(k) - P_i(k) - M_i^{NE}(k)^T R_i(k) M_i^{NE}(k) = 0, \\ M_i^{NE}(k) = -(-R_i(k) + B_i^T(k)\Theta_i(k+1)B_i(k))^{-1} B_i^T(k)\Theta_i(k+1) \cdot \\ \cdot (A(k) + \sum\limits_{j \neq i} B_j(k) M_j^{NE}(k)), \quad i = 1, \ldots, n, \end{cases}$$

$$(-R_i(k) + B_i^T(k)\Theta_i(k+1)B_i(k)) \in Q_+(\mathcal{T}_+).$$

Откуда и следует необходимость теоремы.

Достаточность. Доказательство достаточности также следует из [4]. Для этого нужно отметить, что при замыкании системы (1) набором допустимых управлений $\{u^{NE}/u_i\}$, она превратится в систему с одним управлением:

$$(5) \quad x(k+1) = (A(k) + \sum_{j \neq i} B_j(k)M_j^{NE}(k))x(k) + B_i(k)u_i(k).$$

Для u_i существуют такие $M_i^{NE}(k)$ и $\Theta_i(k)$ – симметричная, что для них выполняется

$$\begin{cases} (A(k) + \sum_{i=1}^{n} B_i(k)M_i^{NE}(k))^T\Theta_i(k+1)(A(k) + \sum_{i=1}^{n} B_i(k)M_i^{NE}(k)) - \\ - \Theta_i(k) - P_i(k) - M_i^{NE}(k)^T R_i(k)M_i^{NE}(k) = 0, \\ M_i^{NE}(k) = -(-R_i(k) + B_i^T(k)\Theta_i(k+1)B_i(k))^{-1}B_i^T(k)\Theta_i(k+1)\cdot \\ \cdot (A(k) + \sum_{j \neq i} B_j(k)M_j^{NE}(k)), \quad i = 1, \ldots, n, \end{cases}$$

$$(-R_i(k) + B_i^T(k)\Theta_i(k+1)B_i(k)) \in Q_+(\mathcal{T}_+).$$

Тогда согласно [10], $u_i^{NE}(k)$ – оптимальное управление для системы (5) с функционалом J_i, т. е.

$$J_i(k_0, x_0, u^{NE}/u_i) \leqslant J_i(k_0, x_0, u^{NE}), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Поэтому набор управлений (4) будет являться равновесием по Нэшу.

Простые вычисления показывают, что выигрыши игроков в ситуации равновесия по Нэшу будут равны:

$$J_i(k_0, x_0, u^{NE}) = -x_0^T\Theta_i(k_0)x_0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

2. Теоремы о существовании набора стратегий, доставляющего максимум произвольной сумме функционалов

Пусть $S \subset N$, $s = |S|$, $i_1, \ldots, i_s$ – игроки, входящие в коалицию S. Введем обозначение

$$J^S(k_0, x_0, u) = \sum_{i \in S} J_i(k_0, x_0, u), \quad \text{где} \quad u = (u_1, \ldots, u_n).$$

$$u_S(k) = \begin{pmatrix} u_{i_1} \\ u_{i_2} \\ \ldots \\ u_{i_s} \end{pmatrix}, \quad B_S = (B_{i_1}, \ldots, B_{i_s}),$$

$$P_S = \sum_{i \in S} P_i, \quad R_S = \begin{pmatrix} R_{i_1} & \mathbb{O} & \ldots & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & R_{i_2} & \ldots & \mathbb{O} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \ldots & R_{i_s} \end{pmatrix}.$$

Тогда $J^S = \sum\limits_{i \in S} J_i = \sum\limits_{k=k_0}^{\infty} (x^T(k) P_S(k) x(k) + u_S^T(k) R_S(k) u_S(k))$.

Теорема 2. *Для того, чтобы существовал единственный набор стратегий*

$$\{u_i^0 = M_i^0(k)x, \quad i \in S\},$$

доставляющий максимум $J^S(k_0, x_0, u)$ при фиксированном наборе стратегий

$$\{\bar{u}_j = \bar{M}_j(k)x, \quad j \notin S\}$$

, необходимо и достаточно, чтобы:

1) Система матричных уравнений

$$\begin{cases} (A(k) + \sum\limits_{j \notin S} B_j(k)\bar{M}_j(k) + B_S(k)M_S^0(k))^T \Theta_S(k+1) \cdot \\ \cdot (A(k) + \sum\limits_{j \notin S} B_j(k)\bar{M}_j(k) + B_S(k)M_S^0(k)) - \Theta_S(k) - \\ - P_S(k) - M_S^0(k)^T R_S(k) M_S^0(k) = 0, \\ M_S^0(k) = -(-R_S(k) + B_S^T(k)\Theta_S(k+1)B_S(k))^{-1} \cdot \\ \cdot B_S^T(k)\Theta_S(k+1)(A(k) + \sum\limits_{j \notin S} B_j(k)\bar{M}_j(k)) \end{cases}$$

была разрешима относительно $\{M_S^0(k), \Theta_S(k)\}$ в виде вещественных, ограниченных матриц размерности $rs \times m$ и $m \times m$, соответственно, где $\Theta_S(k)$ – симметрична.

2) Набор стратегий

(6) $u^0(k) = \{\bar{u}_j = \bar{M}_j(k)x,\ j \notin S,\ u_i^0 = M_i^0(k)x(k),\ i \in S\}$,

где $M_i^0(k)$ – i-й блок матрицы $M_S^0(k) = \begin{pmatrix} M_{i_1}^0(k) \\ M_{i_2}^0(k) \\ \dots \\ M_{i_s}^0(k) \end{pmatrix}$, был бы допустимым в смысле определения 1.

3) $(-R_S(k) + B_S^T(k)\Theta_S(k+1)B_S(k)) \in Q_+(\mathcal{T}_+)$.

Тогда набор стратегий (6) доставляет максимум $J^S(k_0, x_0, u)$. И $J^S(k_0, x_0, u^0) = -x_0^T \Theta_S(k_0) x_0$.

Доказательство. Замкнем систему (1) допустимым набором управлений $u(k) = \{\bar{u}_j = \bar{M}_j(k)x, \quad j \notin S, \quad u_i = M_i(k)x(k), \quad i \in S,\}$:

$$x(k+1) = (A(k) + \sum_{j \notin S} B_j(k)\bar{M}_j(k))x(k) + \sum_{i \in S} B_i(k)u_i(k).$$

Или

$$x(k+1) = (A(k) + \sum_{j \notin S} B_j(k)\bar{M}_j(k))x(k) + B_S(k)u_S(k), \tag{7}$$

$$\text{где} \quad u_S(k) = \begin{pmatrix} M_{i_1}(k) \\ M_{i_2}(k) \\ \dots \\ M_{i_s}(k) \end{pmatrix} x(k).$$

Тогда систему (7) можно рассмотреть как систему с одним управлением $u_S(k)$ и функционалом J^S. Согласно [4], чтобы у этой системе существовало единственное управление, доставляющее максимум J^S, необходимо и достаточно, чтобы:

1) Система матричных уравнений

$$\begin{cases} (A(k) + \sum_{j \notin S} B_j(k)\bar{M}_j(k) + B_S(k)M_S^0(k))^T \Theta_S(k+1)\cdot \\ \cdot (A(k) + \sum_{j \notin S} B_j(k)\bar{M}_j(k) + B_S(k)M_S^0(k)) - \Theta_S(k) - \\ - P_S(k) - M_S^0(k)^T R_S(k) M_S^0(k) = 0, \\ M_S^0(k) = -(-R_S(k) + B_S^T(k)\Theta_S(k+1)B_S(k))^{-1}\cdot \\ \cdot B_S^T(k)\Theta_S(k+1)(A(k) + \sum_{j \notin S} B_j(k)\bar{M}_j(k)) \end{cases}$$

была разрешима относительно$\{M_S^0(k), \Theta_S(k)\}$ в виде вещественных, ограниченных матриц размерности $rs \times m$ и $m \times m$, соответственно, где $\Theta_S(k)$ – симметрична.

2) Управление $u_S^0(k) = M_S^0(k)x(k)$ было бы допустимым в смысле определения 1.

3) $(-R_S(k) + B_S^T(k)\Theta_S(k+1)B_S(k)) \in Q_+(\mathcal{T}_+)$.

Тогда управление $u_S^0(k)$ доставляет максимум функционалу J^S и $J^S(k_0, x_0, u^0) = -x_0^T\Theta_S(k_0)x_0$, где $u^0(k) = \{\bar{u}_j = \bar{M}_j(k)x, \quad j \notin S, \quad u_i^0 = M_i^0(k)x(k), \quad i \in S, \}$, что и требовалось доказать.

3. Кооперативный случай дискретной игры

Перейдем теперь к рассмотрению кооперативного варианта игры. Для этого предположим, что игроки имеют возможность образовать максимальную коалицию с целью обеспечения максимального суммарного выигрыша. На основе теоремы 2 построим решения дискретной кооперативной игры.

3.1. ПРОПОРЦИОНАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ

Предположим, что игроки договорились совместно достичь максимального суммарного выигрыша:

$$J^N(k_0, x_0, u(k)) = \sum_{i=1}^{N} J_i(k_0, x_0, u(k)).$$

Пусть набор стратегий $u^N = (u_1^N, \ldots, u_n^N)$, где $u_i^N = M_i^N(k)x(k)$, $i = 1, \ldots, n$, доставляет максимум J^N, т. е.

$$u^N = \arg \max_{u_i, i=1,\ldots,n} J^N.$$

Тогда согласно теореме 2 можем найти $M_N(k) = \begin{pmatrix} M_1^N(k) \\ M_2^N(k) \\ \dots \\ M_n^N(k) \end{pmatrix}$ из системы

$$\begin{cases} (A(k) + B_N(k)M_N(k))^T \Theta_N(k+1)(A(k) + B_N(k)M_N(k)) - \\ - \Theta_N(k) - P_N(k) - M^N(k)^T R_N(k) M^N(k) = 0, \\ M_N(k) = -(-R_N(k) + B_N^T(k)\Theta_N(k+1)B_N(k))^{-1} \cdot \\ \cdot B_N^T(k)\Theta_N(k+1)A(k). \end{cases}$$

Максимальное значение J^N будет

$$J^N(k_0, x_0, u^N(k)) = -x_0^T \Theta_N(k_0) x_0.$$

Пусть u_i^{prop} – стратегия игрока i, максимизирующая его выигрыш при условии, что остальные игроки используют стратегии u_j^N, т. е.

$$u_i^{prop} = \arg\max_{u_i} J_i(u^N/u_i), i = 1, \dots, n.$$

Если управление u_i^{prop} существует, то согласно теореме 2 можем найти $M_i^{prop}(k)$ из системы

$$\begin{cases} (A(k)+\sum\limits_{j\in N, j\neq i} B_j(k)M_j^N(k)+B_i(k)M_i^{prop})^T\Theta_{i,prop}(k+1)\cdot \\ \cdot\,(A(k)+\sum\limits_{j\in N, j\neq i} B_j(k)M_j^N(k)B_i(k)M_i^{prop})-\Theta_{i,prop}(k)- \\ -\,P_i(k)-M_i^{prop}(k)^TR_i(k)M_i^{prop}(k)=0, \\ M_i^{prop}(k)=-(-R_i(k)+B_i^T(k)\Theta_{i,prop}(k+1)B_i(k))^{-1}B_i^T(k)\cdot \\ \cdot\,\Theta_{i,prop}(k+1)(A(k)+\sum\limits_{j\in N, j\neq i} B_j(k)M_j^N(k)), \quad i\in N. \end{cases}$$

При этом

$$J_i(k_0,x_0,u^N/u_i^{prop})=-x_0^T\Theta_{i,prop}x_0.$$

Введем обозначения

$$\lambda_i=J_i(k_0,x_0,u^N/u_i^{prop}), \quad i=1,\ldots,n,$$

$$\Lambda=\sum_{i=1}^n\lambda_i.$$

Тогда, согласно определению пропорционального решения игры [8], выигрыш каждого игрока будет определяться следующим образом:

$$\alpha_i^{prop}=\frac{\lambda_i}{\Lambda}J^N(k_0,x_0,u^N).$$

Вектор

$$\alpha^{prop}=(\alpha_1^{prop},...,\alpha_n^{prop})$$

будем называть пропорциональным решением дискретной игры.

3.2. РЕШЕНИЯ, ОСНОВАННЫЕ НА ПОСТРОЕНИИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ

Решения кооперативных дискретных игр, основанные на построении характеристической функции, в достаточной степени объективно отражают вклад каждого игрока в достижение коалициями максимально результата.

Для определенной линейно-квадратичной дискретной игры $\Gamma(k_0, x_0)$ характеристическую функцию

$$v(S, x_0) : 2^N \to R$$

будем строить по следующему правилу (см., например, [7]):

$$v(S, x_0) = \max_{u_i, i \in S} J^S(u^{NE}/u^S).$$

где $(u^{NE}/u^S) = \{u_j^{NE}, j \notin S, \quad u_i, i \in S\}$. Заметим, что в общем случае построенная таким образом характеристическая функция не является супераддитивной.

Обозначим

$$\{u_i^*\}_{i \in S} = \arg\max_{u_i, i \in S} J^S(u^{NE}/u^S).$$

Тогда, если набор стратегий

$$\{u_i^* = M_i^*(k)x, i \in S\}$$

существует, то согласно теореме 2, $M_S^*(k) = \begin{pmatrix} M_{i_1}^*(k) \\ M_{i_2}^*(k) \\ \dots \\ M_{i_s}^*(k) \end{pmatrix}$ можно найти из системы

$$\begin{cases} (A(k) + \sum\limits_{j \notin S} B_j(k) M_j^{NE}(k) + B_S(k) M_S^*(k))^T \Theta_S^*(k+1)(A(k) + \\ + \sum\limits_{j \notin S} B_j(k) M_j^{NE}(k) + B_S(k) M_S^*(k)) - \Theta_S^*(k) - P_S(k) - \\ - M_S^*(k)^T R_S(k) M_S^*(k) = 0, \\ M_S^*(k) = -(-R_S(k) + B_S^T(k) \Theta_S^*(k+1) B_S(k))^{-1} B_S^T(k) \cdot \\ \cdot \Theta_S^*(k+1)(A(k) + \sum\limits_{j \notin S} B_j(k) M_j^{NE}(k)). \end{cases}$$

При этом

$$J^S(k_0, x_0, u^{NE}/u_S^*) = -x_0^T Q_S^* x_0.$$

Согласно определению характеристической функции получаем

$$v(S, x_0) = -x_0^T Q_S^* x_0.$$

После определения характеристической функции для каждой коалиции мы можем воспользоваться любым из известных принципов оптимальности, таких как вектор Шепли, С-ядро и др.

4. Условие Д.В.К. Янга для линейно-квадратичных дискретных игр

Конкретизируем условие Д.В.К. Янга [10] для линейно-квадратичных дискретных игр. Тем самым мы получим условие, страхующее игроков от распада максимальной коалиции N.

Пусть набор стратегий $u^N = (u_1^N, \ldots, u_n^N)$ доставляет максимум J^N. Траекторию $x^*(k)$, которая реализуется при замыкании системы (1) набором стратегий u^N, будем называть оптимальной.

Определим множество дележей в дискретной кооперативной игре:

$$C = \{\varphi(k_0, x_0) = (\varphi_1(k_0, x_0), \ldots, \varphi_n(k_0, x_0)) :$$

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(k_0, x_0) = v(N, x_0), \quad \varphi_i(k_0, x_0) \geqslant v(i, x_0), \quad i = 1, \ldots, n\}.$$

Обозначим через $M \subset C$ – кооперативный принцип оптимальности.

Пусть $\Gamma(k, x^*(k))$ подыгра игры $\Gamma(k_0, x_0)$, которая начинается в момент времени k из состояния $x^*(k)$. В этой подыгре введем характеристическую функцию $v(S, x^*(k))$ таким же образом, как она была введена в игре $\Gamma(k_0, x_0)$. И множество дележей подыгры равно

$$C(x^*(k)) = \{\varphi(k, x^*(k)) = (\varphi_1(k, x^*(k)), \ldots, \varphi_n(k, x^*(k))) :$$

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(k, x^*(k)) = v(N, x^*(k)),\ \varphi_i(k, x^*(k)) \geqslant v(i, x^*(k)),\ i = 1, \ldots, n\}.$$

Обозначим через $M(x^*(k)) \subset C(x^*(k))$ принцип оптимальности $M \subset C$, реализуемый в подыгре $\Gamma(k, x^*(k))$.

Определение 3. *Пусть $\varphi(k_0, x_0) \in M$, тогда вектор-функцию $\beta(k) = (\beta_1(k), \ldots, \beta_n(k))$, $k \geqslant k_0$ назовем процедурой распределения дележа (ПРД) если,*

$$\varphi_i(k_0, x_0) = \sum_{k=k_0}^{\infty} \beta_i(k), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Интерпретация ПРД следующая: $\beta_i(k)$ – выплата игроку i на шаге k.

Определение 4. *Вектор-функция $\beta(k) = (\beta_1(k), \ldots, \beta_n(k))$ называется состоятельной во времени ПРД, если при любом $l \geqslant k_0$ выполняется следующее равенство*

$$\varphi_i(k_0, x_0) = \sum_{k=k_0}^{l} \beta_i(k) + \varphi_i(l+1, x^*(l+1)), i = 1, \ldots, n,$$

где $\varphi_i(k_0, x_0) \in M$, $\varphi_i(l+1, x^*(l+1) \in M(x^*(l+1))$.

Эти понятия впервые введены в [2], [3]. В определении 3 значение $\varphi_i(k_0, x_0)$ представляет собой сумму двух слагаемых. Первое является «накопленным выигрышем» игрока i к моменту времени $l+1$, если выплаты сделаны согласно ПРД $\beta(k)$, а второе является выигрышем игрока i в подыгре $\Gamma(l+1, x^*(l+1))$ при условии, что при решении подыгры $\Gamma(l+1, x^*(l+1))$ используется тот же принцип оптимальности, что и при решении игры $\Gamma(k_0, x_0)$.

Теорема 3. *Вектор-функция $\beta(k) = (\beta_1(k), \ldots, \beta_n(k))$, где*

(8) $\quad \beta_i(k) = \varphi_i(k, x^*(k)) - \varphi_i(k+1, x^*(k+1)), \quad i = 1, \ldots, n$

является состоятельной во времени ПРД.

Доказательство. Покажем сначала, что вектор $\beta_i(k)$, определенный в (8), является ПРД. Из равномерной асимптотической устойчивости системы (1) имеем:

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} \beta_i(k) = \sum_{k=k_0}^{\infty} (\varphi_i(k, x^*(k)) - \varphi_i(k+1, x^*(k+1))) = \varphi_i(k_0, x_0) -$$

$$- \varphi_i(\infty, x^*(\infty)) = \varphi_i(k_0, x_0).$$

Покажем теперь, что $\beta_i(k)$ является состоятельной во времени

ПРД:

$$\sum_{k=k_0}^{l}\beta_i(k)+\varphi_i(l+1,x^*(l+1))=\sum_{k=k_0}^{l}(\varphi_i(k,x^*(k))-\varphi_i(k+1,x^*(k+1)))+$$

$$+\varphi_i(l+1,x^*(l+1))=\varphi_i(k_0,x_0)-\varphi_i(l+1,x^*(l+1))+\varphi_i(l+1,x^*(l+1))=$$
$$=\varphi_i(k_0,x_0).$$

Теорема доказана. Предположим, что если на шаге k происходит распад максимальной коалиции, то игроки узнают об этом до выбора ими стратегий $u_i(k)$.

Определение 5. *Дележ* $\varphi(k_0,x_0) = (\varphi_1(k_0,x_0),\ldots,\varphi_n(k_0,x_0))$ *удовлетворяет условию Д.В.К. Янга [10], если выполнено неравенство*

$$\sum_{k=k_0}^{l}\beta_i(k)+v(i,x^*(l+1))\geqslant v(i,x_0),\quad i=1,\ldots,n \tag{9}$$

при любом $l\geqslant k_0$*, где* $\beta(k)=(\beta_1(k),\ldots,\beta_n(k))$ *состоятельная во времени ПРД, соответствующая дележу* $\varphi(k_0,x_0)$.

Интерпретировать (9) можно следующим образом: до момента $l+1$ игроки образуют максимальную коалицию и используют стратегии, максимизирующие суммарный выигрыш, получают при этом «накопленные выигрыши» $\sum\limits_{k=k_0}^{l}\beta_i(k)$ согласно ПРД $\beta(k)$. В момент $l+1$ происходит распад максимальной коалиции, и в подыгре $\Gamma(l+1,x^*(l+1))$ игрок i, играя индивидуально, получает выигрыш $v(i,x^*(l+1))$. Таким образом, условие (9) гарантируют, что в случае распада максимальной коалиции в момент $l+1$, игроки получат не меньше, чем если бы играли индивидуально изначально.

Выведем достаточное условие для выполнения условия Д.В.К. Янга в линейно-квадратичных дискретных играх. Заметим, что

$$\sum_{k=k_0}^{l} \beta_i(k) + v(i, x^*(l+1)) - v(i, x_0) =$$
$$= \sum_{k=k_0}^{l} (\beta_i(k) + v(i, x^*(k+1)) - v(i, x^*(k))).$$

Тогда для выполнения условия Янга достаточно, чтобы

$$\beta_i(k) + v(i, x^*(k+1)) - v(i, x^*(k)) \geqslant 0 \quad i = 1, \ldots, n, \quad k \geqslant k_0.$$

В разделе 3.2. было показано, что в линейно-квадратичной дискретной игре $v(i, x^*(k))$ можно определить по следующему правилу

$$v(i, x^*(k)) = -x^{*T}(k)\Theta_i^*(k)x^*(k),$$

где $\Theta_i^*(k)$ – решение системы матричных уравнений

$$\begin{cases} (A(k) + \sum\limits_{j \in N, j \neq i} B_j(k)M_j^{NE}(k) + B_i(k)M_i^*(k))^T \Theta_i^*(k+1) \cdot \\ \cdot (A(k) + + \sum\limits_{j \in N, j \neq i} B_j(k)M_j^{NE}(k) + B_i(k)M_i^*(k)) - \Theta_i^*(k) - \\ - P_i(k) - M_i^*(k)^T R_S(k) M_i^*(k) = 0, \\ M_i^*(k) = -(-R_S(k) + B_S^T(k)\Theta_i^*(k+1)B_S(k))^{-1} B_S^T(k) \cdot \\ \cdot \Theta_i^*(k+1)(A(k) + \sum\limits_{j \in N, j \neq i} B_j(k)M_j^{NE}(k)). \end{cases}$$

Тогда

$$\beta_i(k) + v(i,k+1) - v(i,k) = \beta_i(k) + x^{*T}(k)\Theta_i^*(k)x^*(k) -$$

$$- x^{*T}(k+1)\Theta_i^*(k+1)x^*(k+1) = \beta_i(k) + x^{*T}(k)(\Theta_i^*(k) -$$

$$-(A(k)+\sum_{i=1}^{n} B_j(k)M_i^N)^T\Theta_i^*(k+1)(A(k)+\sum_{i=1}^{n} B_j(k)M_i^N))x^*(k),$$

где $M_N(k) = \begin{pmatrix} M_1^N(k) \\ M_2^N(k) \\ \dots \\ M_n^N(k) \end{pmatrix}$ согласно разделу 3.1 находятся из системы:

$$\begin{cases} (A(k) + B_N(k)M_N(k))^T\Theta_N(k+1)(A(k) + B_N(k)M_N(k)) - \\ - \Theta_N(k) - P_N(k) - M^N(k)^T R_N(k) M^N(k) = 0, \\ M_N(k) = -(-R_N(k) + B_N^T(k)\Theta_N(k+1)B_N(k))^{-1} \cdot \\ \cdot B_N^T(k)\Theta_N(k+1)A(k). \end{cases}$$

Получаем, что если

$$\beta_i(k) + x^{*T}(k)(\Theta_i^*(k) - (A(k) + \sum_{i=1}^{n} B_j(k)M_i^N)^T\Theta_i^*(k+1)(A(k) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} B_j(k)M_i^N))x^*(k) \geqslant 0$$

выполнено для всех $i = 1, \ldots, n$ и при всех $k \geqslant k_0$, то дележ будет удовлетворять условию Д.В.К. Янга.

5. Пример

Рассмотрим пример планирования производства в условиях конкуренции. Решение данного примера для случая непрерывного времени можно найти в [1]. Предполагаем, что функция спроса имеет вид:

$$g(k) = a - [q_1(k) + q_2(k)], \tag{10}$$

где a – положительная постоянная и $q_i(k), i \in \{1, 2\}$ – скорость роста производства фирмы i. Пусть для рыночной цены имеет место следующее уравнение

$$p(k+1) = s(a - [q_1(k) + q_2(k)] - p(k)); \quad p(0) = p_0 > 0.$$

Здесь $s \in [0, \infty)$ – заданный параметр. Доход фирмы i полагается равным $p(k)q_i(k)$. Для простоты будем предполагать, что производственные затраты обеих фирм описываются одной и той же функцией

$$C(q_i) = cq_i + \frac{1}{2}q_i^2,$$

где c – заданный параметр. Пусть $\rho > 0$ – параметр дисконтирования.

Цель фирмы i заключается в нахождении такого программного управления $q_i \geqslant 0$, которое доставляет максимум функционалу

$$J_i(q_i) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+\rho}\right)^k (p(k)q_i(k) - C(q_i(k))),$$

при условии, что система развивается в соответствии с динамикой (10) и $q_i(k) \geqslant 0$ для всех $k \geqslant 0$. После замены

$$x_1(k) = \left(\frac{1}{1+\rho}\right)^{\frac{k}{2}} (p(k) - c),$$

$$x_2(k) = (s(a-c)-c)\left(\frac{1}{1+\rho}\right)^{\frac{k+1}{2}},$$

$$u_1(k) = \left(\frac{1}{1+\rho}\right)^{\frac{k}{2}}(q_1(k)-p(k)+c),$$

$$u_2(k) = \left(\frac{1}{1+\rho}\right)^{\frac{k}{2}}(q_2(k)-p(k)+c)$$

задача сводится к виду (1)-(2) с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} -3s\left(\frac{1}{1+\rho}\right)^{\frac{1}{2}} & 1 \\ 0 & \left(\frac{1}{1+\rho}\right)^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}, \quad B_i = \begin{pmatrix} -s\left(\frac{1}{1+\rho}\right)^{\frac{1}{2}} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R = -\frac{1}{2}, \quad x_0 = \begin{pmatrix} p_0 - c \\ \left(\frac{1}{1+\rho}\right)^{\frac{1}{2}}(s(a-c)-c) \end{pmatrix}.$$

Согласно теореме 1 для нахождения равновесия по Нэшу необходимо решить систему

$$\begin{cases} (A(k)+B_1(k)M_1^{NE}(k)+B_2(k)M_2^{NE}(k))^T\Theta_i(k+1)\cdot \\ \cdot(A(k)+B_1(k)M_1^{NE}(k)+B_2(k)M_2^{NE}(k))-\Theta_i(k)- \\ -P_i(k)-M_i^{NE}(k)^TR_i(k)M_i^{NE}(k)=0, \\ M_i^{NE}(k)=-(-R_i(k)+B_i^T(k)\Theta_i(k+1)B_i(k))^{-1}B_i^T(k)\cdot \\ \cdot\Theta_i(k+1)(A(k)+B_j(k)M_j^{NE}(k)), \quad i=1,2, \quad j\neq i. \end{cases}$$

Тогда ситуация $u^{NE} = (u_1^{NE}, u_2^{NE})$ является равновесием по Нэшу, где $u_i^{NE}(k,x) = M_i^{NE}(k)x(k)$. Выигрыши равны

$$J_i = -x_0^T \Theta_i(k_0) x_0.$$

Непосредственной проверкой можно показать, что при $s = 1, \left(\frac{1}{1+\rho}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{15}$

$$u_1^{NE}(k,x) = \begin{pmatrix} 0{,}014026995 & -0{,}06919932097 \end{pmatrix} x(k),$$

$$u_2^{NE}(k,x) = \begin{pmatrix} 0{,}014026995 & -0{,}06919932097 \end{pmatrix} x(k),$$

и соответствующие выигрыши равны

$$J_1 = J_2 = -x_0^T \begin{pmatrix} -0{,}5211388670 & 0{,}1042843108 \\ 0{,}1042843108 & -0{,}5166690544 \end{pmatrix} x_0.$$

Перейдем к рассмотрению кооперативного варианта. Для нахождения J^N можем пользоваться теоремой 3. Тогда необходимо решить систему

$$\begin{cases} (A(k) + B_1 M_1^N + B_2 M_2^N)^T \Theta_N(k+1)(A(k) + B_1 M_1^N + B_2 M_2^N) - \\ - \Theta_N(k) - P_N(k) - M^N(k)^T R_N(k) M^N(k) = 0, \\ M_N(k) = -(-R_N(k) + B_N^T(k)\Theta_N(k+1)B_N(k))^{-1} \cdot \\ \cdot B_N^T(k)\Theta_N(k+1)A(k). \end{cases}$$

Набор стратегий доставляющий максимум J^N имеет вид

$$u_1^N = u_2^N = \begin{pmatrix} 0{,}02832460 & -0{,}1397247874 \end{pmatrix} x(k).$$

Для вычисление оптимального дележа с использованием характеристической функции имеем:

$$v(1,2,x_0) = J^N = -x_0^T \begin{pmatrix} -1{,}042486890 & 0{,}2095871811 \\ 0{,}2095871811 & -1{,}038317865 \end{pmatrix} x_0,$$

$$v(1,x_0) = v(2,x_0) = -x_0^T \begin{pmatrix} -0{,}5211388670 & 0{,}1042843108 \\ 0{,}1042843108 & -0{,}5166690544 \end{pmatrix} x_0.$$

В случае $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, значения характеристической функции равны $v(1,2,x_0) = 1{,}661630393$, $v(1,x_0) = v(2,x_0) = 0{,}82923936$.

Вектор Шепли [5] имеет вид $\varphi^{Sh} = (0{,}8308151965; 0{,}8308151965)$.

Проверим теперь выполнение условия Д.В.К. Янга в нашем примере. Имеем

$$v(i,x^*(k)) = -x^{*T}(k) \begin{pmatrix} -0{,}52124345 & 0{,}10479359 \\ 0{,}104793590 & -0{,}519158933 \end{pmatrix} x^*(k),$$

$$\varphi^{Sh}(k) = -1/2x^{*T}(k) \begin{pmatrix} -0{,}5211388670 & 0{,}1042843108 \\ 0{,}1042843108 & -0{,}5166690544 \end{pmatrix} x^*(k).$$

Тогда

$$\beta_i(k) + x^{*T}(k)(\Theta_i(k) - (A(k) + \sum_{i=1}^{n} B_j(k)M_i^N)^T\Theta_i(k+1)(A(k)+$$

$$+\sum_{i=1}^{n} B_j(k)M_i^N))x^*(k) = \varphi_i^{Sh}(k) - \varphi_i^{Sh}(k+1) + x^{*T}(k)(\Theta_i(k)-$$

$$-(A(k)+\sum_{i=1}^{n} B_j(k)M_i^N)^T \Theta_i(k+1)(A(k)+\sum_{i=1}^{n} B_j(k)M_i^N))x^*(k) =$$

$$= x^{*T}(k) \begin{pmatrix} 0{,}000100235408157 & -0{,}00049449080455 \\ -0{,}00049449080455 & 0{,}0024394701238552 \end{pmatrix} x^*(k) \geqslant 0,$$

поскольку это выполнено для всех $i = 1, \ldots, n$ и при всех $k \geqslant k_0$, то дележ будет удовлетворять условию Д.В.К. Янга.

Литература

1. ЗЕНКЕВИЧ Н.А., ПЕТРОСЯН Л.А. *Дифференциальные игры в менеджменте*// Научные доклады Научно-исследовательского института менеджмента СПбГУ. – 2006. – №38(R). – С. 6-8.
2. ПЕТРОСЯН Л.А. *Построение сильно динамически устойчивых решений в кооперативных дифференциальных играх*// Вестн. С.-Петерб. ун-та. – 1992. – №4. – С. 33-38.
3. ПЕТРОСЯН Л.А., ДАНИЛОВ Н.Н. *Устойчивость решений в неантагонистических дифференциальных играх с трансферабельными выигрышами*. Вестн. Ленингр. ун-та. – 1979. – №1. – С. 46-54.
4. СМИРНОВ Е.Я. *Стабилизация программных движений*. – СПб:Изд-во С.-Петербургского университета, 1997.
5. BASAR T., OLSDER G.J. *Non-cooperative differential games*. – Academic Press, 1992.
6. NASH J. *Non-cooperative Games*// Ann. of Math. – 1951. – V. 54. – P. 286-295.
7. PETROSJAN L.A., ZACCOUR G. *Time-consistent Shapley value allocation of pollution cost reduction*// Journal of Economic Dynamic and Control. – 2003. – V. 27. – P. 381-398.
8. PETROSJAN L.A., YEUNG D.W.K. *Proportional Time-Consistent Solution in Differential Games*// Extended Abstracts Volume of the 2-nd International Conference "Logic,

Game Theory and Social Choice". – 2001. St Petersburg State University. – P. 254-256.
9. SHAPLEY L.S. *A Value for n-Person Games* // Contributions to the Theory of Games II. Princeton: Princeton University Press, 1953. – P. 307-317.
10. YEUNG D.W.K. *An Irrational-Behavior-Proof Condition in Cooperative Defferential Games*// IGTR. – 2007. – V. 9. – №1. – P. 5-7.

LINEAR-QUADRATIC NON-ANTAGONISTIC DISCRETE-TIME DYNAMIC GAMES

Anna Tur, Faculty of Applied Mathematics and Control Processes, Saint-Petersburg State University, post-graduate student (markovkina86@mail.ru).

Abstract: Linear-quadratic discrete-time dynamic games are considered. The necessary and sufficient conditions of the existence of Nash equilibrium in such class of games are presented. Different cooperative solutions are obtained. D.W.K. Yeung's condition for linear-quadratic discrete-time dynamic games is studied. As an example, the model of production planning under competition is examined.

Keywords: linear-quadratic games, Nash equilibrium, cooperative games, D.W.K. Yeung's condition.

УДК 519.711.7
ББК 22.18

ЗАДАЧА МАРШРУТИЗАЦИИ С РАЗДЕЛЯЕМЫМ ТРАФИКОМ И НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИЕЙ [1] [2]

Чуйко Ю. В. [3]
(Учреждение Российской академии наук Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН, Петрозаводск)

Работа посвящена исследованию равновесий в байесовской игре оптимальной маршрутизации, в которой игроки действуют эгоистично, стараясь минимизировать ожидаемую задержку своего трафика. Подобная схема для задачи с неделимым трафиком была представлена в работе [1], здесь предлагается ее модификация для модели сети параллельных каналов, где трафик произвольно разделяемый. Рассматриваются два вида равновесия: равновесие по Вардропу, которое всегда существует и может быть найдено с использованием потенциала, и его частный случай – байесовское равновесие по Вардропу, структура которого представляется более понятной игроку, однако его существование в данный момент является открытым вопросом.

Ключевые слова: оптимальная маршрутизация, разделяемый трафик, неполная информация, равновесие по Вардропу.

---

[1] *Работа поддержана отделением математических наук РАН по программе «Математические и алгоритмические проблемы новых информационных систем»*

[2] *Текст приводится в соответствии с изданием «Математическая теория игр и ее приложения. – 2009. – Т. 1. №3».*

[3] *Юлия Васильевна Чуйко, кандидат физико-математических наук, (julia@krc.karelia.ru).*

1. Модель

Рассмотрим игру $\Gamma = \langle n, m, f, T, p, w\rangle$ с n игроками, m параллельными каналами, функциями задержки трафика $f_{ie}(x) = a_{ie}x$, зависящими от мощностей каналов, определенных для каждого игрока. Для каждого игрока определен набор типов отправляемого трафика T_i и задано совместное распределение $p(t_1, \ldots, t_n)$ этих типов. Трафик каждого типа t для игрока i характеризуется своим объемом $w_i(t)$. В данной модели каждый игрок i знает только тип t_i своего трафика, который он собирается отправить, и не знает, какой трафик посылают остальные игроки. Однако, используя известное ему совместное распределение типов трафика, он может найти условное распределение типов трафика, отправляемого остальными игроками, когда сам он посылает трафик типа t_i: $p(t_1, \ldots, t_{i-1}, t_{i+1}, \ldots, t_n | t_i = t) = \frac{p(t_1,\ldots,t,\ldots,t_n)}{p(i,t)}$, где $p(i,t) = \sum\limits_{(t_1,\ldots,t_n)\in T: t_i = t} p(t_1, \ldots, t_n)$ – вероятность, что игрок i отправляет трафик типа t.

Профилями стратегий в данной игре являются $x = \{x_i^{te}\}_{i\in[n], t\in T_i, e\in[m]}$ где x_i^{te} – трафик типа t игрока i, который он отправляет по каналу e. Компоненты профиля стратегий должны быть неотрицательными и такими, что $\sum\limits_{e\in[m]} x_i^{te} = w_i(t)$. X – множество допустимых профилей x в игре Γ.

Ожидаемая загрузка канала e может быть найдена как $\delta_e(x,p) = \sum\limits_{(t_1,\ldots,t_n)\in T} p(t_1, \ldots, t_n) \sum\limits_{i\in[n]} x_i^{t_i e}$, и ожидаемые затраты, как

$$PC_i(x,p) = \max_{e\in[m]: \exists t\in T_i : x_i^{te} > 0} f_{ie}(\delta_e(x,p)).$$

Каждый игрок i знает тип трафика, который он посылает. Его целью может быть оптимизация затрат для каждого посылаемого им типа трафика в отдельности. В этом случае рассматривается условная функция ожидаемых затрат, зависящая от условной ожидаемой загрузки каналов сети, которая для каждого канала e имеет вид $\delta_e(x,(p|t_i = t)) = \delta_e^{-i}(x,(p|t_i = t)) + x_i^{te}$, где $\delta_e^{-i}(x,(p|t_i = t)) = \sum\limits_{(t_1,\ldots,t_n)\in T: t_i = t} p(t_1,\ldots,t_{i-1},t_{i+1},\ldots,t_n|t_i = t) \sum\limits_{i\in[n]\setminus\{i\}} x_i^{t_i e}$ – это условная ожидаемая загрузка канала трафиком всех игроков, кроме i.

Таким образом, условные ожидаемые затраты для игрока i, посылающего трафик типа t, имеют вид $v_{(i,t)}(x,p) = \max\limits_{e\in[m]: x_i^{te}>0} f_{ie}(\delta_e(x,(p|t_i = t)))$ и его байесовские ожидаемые затраты определим как $BPC_i(x,p) = \sum\limits_{t\in T_i} p(i,t) v_{(i,t)}(x,p)$. Заметим, что каждое слагемое в данной сумме не зависит от типов трафика других игроков, кроме i.

Найдем, как связаны между собой ожидаемая загрузка канала и условная ожидаемая загрузка канала.

$$
\begin{aligned}
&\delta_e(x,p) = \sum_{(t_1,\ldots,t_n)\in T} p(t_1,\ldots,t_n) \sum_{i\in[n]} x_i^{t_i e} \\
&= \sum_{t\in T_k} \sum_{(t_1,\ldots,t_n)\in T: t_k = t} p(t_1,\ldots,t_n) \sum_{i\in[n]} x_i^{t_i e} \\
&= \sum_{t\in T_k} p(k,t) \sum_{(t_1,\ldots,t_n)\in T: t_k = t} p(t_1,\ldots,t_{k-1},t_{k+1},\ldots,t_n|t_k = t)\cdot \\
&\left(\sum_{i\in[n]\setminus\{k\}} x_i^{t_i e} + x_k^{te}\right).
\end{aligned}
$$

Заметим, что

$$
\begin{aligned}
&\sum_{(t_1,\ldots,t_n)\in T: t_k = t} p(t_1,\ldots,t_{k-1},t_{k+1},\ldots,t_n|t_k = t) = \\
&= \sum_{(t_1,\ldots,t_n)\in T: t_k = t} \tfrac{p(t_1,\ldots,t,\ldots,t_n)}{p(k,t)} = \sum_{(t_1,\ldots,t_n)\in T: t_k = t} \tfrac{p(t_1,\ldots,t_n)}{p(k,t)} = 1.
\end{aligned}
$$

Тогда

$$\delta_e(x,p) = \sum_{t \in T_k} p(k,t) \cdot$$
$$\cdot \left(\sum_{(t_1,\dots,t_n)\in T : t_k = t} p(t_1,\dots,t_{k-1},t_{k+1},\dots,t_n | t_k = t) \sum_{i \in [n]\setminus\{k\}} x_i^{t_i e} + x_k^{te} \right)$$
$$= \sum_{t \in T_k} p(k,t) \delta_e(x,(p|t_k = t)).$$

Найдем общую ожидаемую загрузку сети как суммарную загрузку каналов $\delta_e(x,p)$

$$\begin{aligned}
\sum_{e \in [m]} \delta_e(x,p) &= \sum_{e \in [m]} \sum_{(t_1,\dots,t_n)\in T} p(t_1,\dots,t_n) \sum_{i \in [n]} x_i^{t_i e} \\
&= \sum_{(t_1,\dots,t_n)\in T} p(t_1,\dots,t_n) \sum_{i \in [n]} \sum_{e \in [m]} x_i^{t_i e} \\
&= \sum_{(t_1,\dots,t_n)\in T} p(t_1,\dots,t_n) \sum_{i \in [n]} w_i(t_i) =: W.
\end{aligned}$$

То есть данная величина является постоянной, обозначим ее W.

Еще одно полезное свойство такого вида загрузки $\delta_e(x,p)$ – вид ее частной производной.

$$\frac{\partial}{\partial x_k^{te}} \delta_e(x,p) = \frac{\partial}{\partial x_k^{te}} \left(\sum_{t \in T_k} p(k,t) \delta_e(x,(p|t_k = t)) \right)$$
$$= \frac{\partial}{\partial x_k^{te}} \left(\sum_{t \in T_k} p(k,t) \left(\delta_e^{-k}(x,(p|t_k = t)) + x_k^{te} \right) \right) = p(k,t).$$

2. Равновесия

Определение 1. *Профиль x в игре Γ называется равновесием по Вардропу, если для каждого игрока $i \in [n]$, любых каналов $e, q \in [m]$, таких, что $x_i^{te} > 0$, выполнено $f_{ie}(\delta_e(x,p)) \leqslant f_{iq}(\delta_q(x,p))$.*

Данная форма определения эквивалентна $PC_i(x,p) \leqslant PC(x',p)$, где x – равновесие по Вардропу и x' – профиль, получаемый из x, когда кто-то из игроков отклоняется от своей стратегии в x. Равновесие по Вардропу достигается, когда каждый игрок старается минимизировать свои ожидаемые затраты на всех каналах, которые он с ненулевой вероятностью будет использовать хотя бы для одного из возможных типов своего трафика.

Определение 2. *Профиль x в игре Γ называется байесовским равновесием по Вардропу, если для каждого игрока $i \in [n]$, его трафика типа $t \in T_i$ и каналов $e, q \in [m]$, таких, что $x_i^{te} > 0$, выполняется $f_{ie}(\delta_e(x,(p|t_i = t))) \leqslant f_{iq}(\delta_q(x,(p|t_i = t)))$.*

Данная форма определения эквивалентна $BPC_i(x,p) \leqslant BPC(x',p)$, где x – байесовское равновесие по Вардропу и x' – профиль, получаемый из x, когда кто-то из игроков отклоняется от своей стратегии в x. Байесовское равновесие по Вардропу достигается, когда игроки стараются минимизировать свои байесовские ожидаемые затраты, оптимизируя для себя отправку каждого конкретного типа трафика.

Предложение 1. *Если x – байесовское равновесие по Вардропу в игре Γ, то $BPC_i(x,p) \leqslant PC_i(x,p)$.*

Доказательство. Пусть x – байесовское равновесие по Вардропу. Тогда для всех $i \in [n]$, $t \in T_i$, $e \in [m]$, таких что $x_i^{te} > 0$,

$a_{ie}\delta_e(x,(p|t_k=t)) = \lambda_i^t$, иначе $a_{ie}\delta_e(x,(p|t_k=t)) \geqslant \lambda_i^t$.

$$
\begin{aligned}
&BPC_i(x,p) = \\
&= \sum_{t\in T_i} p(i,t) \max_{e\in[m]:x_i^{te}>0} a_{ie}\delta_e(x,(p|t_k=t)) = \sum_{t\in T_i} p(i,t)\lambda_i^t. \\
&PC_i(x,p) = \\
&= \max_{e\in[m]:\exists\tau\in T_i:x_i^{\tau e}>0} \delta_e(x,p) \\
&= \max_{e\in[m]:\exists\tau\in T_i:x_i^{\tau e}>0} \sum_{t\in T_i} p(i,t)a_{ie}\delta_e(x,(p|t_k=t)) \\
&= \max_{e\in[m]:\exists\tau\in T_i:x_i^{\tau e}>0} \left(\sum_{t\in T_i:x_i^{te}>0} p(i,t)\lambda_i^t + \sum_{t\in T_i:x_i^{te}=0} p(i,t)\left(\lambda_i^t+\Delta_i^{te}\right)\right) \\
&\geqslant \max_{e\in[m]:\exists\tau\in T_i:x_i^{\tau e}>0} \left(\sum_{t\in T_i} p(i,t)\lambda_i^t\right) = BPC_i(x,p).
\end{aligned}
$$

Определение 3. *Профиль x в игре Γ – нормальный, если для каждого игрока $i \in [n]$ и каждого канала $e \in [m]$ справедливо: если хотя бы для одного типа трафика $t \in T_i$ выполняется $x_i^{te} > 0$, то $x_i^{\tau e} > 0$ для всех $\tau \in T_i$.*

Данное определение означает, что в нормальном профиле игрок использует один и тот же набор каналов для всех типов своего трафика.

Определение 4. *Байесовское равновесие по Вардропу x в игре Γ называется нормальным байесовским равновесием по Вардропу, если x – нормальный профиль в игре Γ.*

Теорема 1. *В игре Γ любое нормальное байесовское равновесие по Вардропу является частным случаем равновесия по Вардропу, однако могут существовать равновесия по Вардропу, не являющиеся нормальными байесовскими.*

Доказательство. Покажем, что нормальное байесовское равновесие по Вардропу является частным случаем равновесия по Вардропу. Если x – байесовское равновесие по Вардропу, то из $x_i^{te} > 0$ следует $a_{ie}\delta_e(x,(p|t_i=t)) \leqslant a_{iq}\delta_q(x,(p|t_i=t))$, где $e, q \in [m]$. Если x – нормальное байесовское равновесие по Вардропу, то из $x_i^{te} > 0$ следует $x_i^{\tau e} > 0$ для всех $\tau \in T_i$. Таким образом, в нормальном байесовском равновесии по Вардропу из $x_i^{te} > 0$ мы имеем $a_{ie}\delta_e(x, (p|t_i = \tau)) \leqslant a_{iq}\delta_q(x, (p|t_i = \tau))$ для всех $\tau \in T_i$, и, следовательно, $a_{ie}\delta_e(x, p) \leqslant a_{iq}\delta_q(x, p)$.

Пусть теперь x – некоторое равновесие по Вардропу и байесовское равновесие по Вардропу в игре с 2 каналами (быстрым и медленным), 2 игроками, у каждого из которых есть 2 типа трафика для отправки (большого объема и маленького). $a_{11} = a_{21} = 1, a_{12} = a_{22} = 1000$. У игроков следующие множества типов трафика: $T_1 = \{1, 2\}$, $T_2 = \{3, 4\}$, где их объемы $w(1) = 1, w(2) = 1000, w(3) = 1, w(4) = 1000$. Совместное распределение выбора типов трафика такое, что $p(1, 4) + p(2, 3) = 1$. Стратегией в равновесии по Вардропу является использование игроками различных каналов, причем для трафика большого объема выбирается наиболее быстрый канал. Очевидно, что такой профиль стратегий не является нормальным байесовским равновесием по Вардропу.

Теорема 2. *В игре Γ с двумя игроками, у каждого из которых два типа трафика, и двумя каналами, где совместное распределение типов трафика такое, что $p(1, 4) + p(2, 3) = 1$, любое байесовское равноесие по Вардропу – случай равновесия по Вардропу.*

Доказательство. Пусть x – такое байесовское равновесие по Вардропу, которое не является нормальным (если оно нормальное, то очевидно удовлетворяет определению равновесия по Вардропу). Таким образом, хотя бы один из игроков использует разные наборы каналов для разных типов трафика. Пусть это первый игрок, использующий канал 1 для трафика типа 1 и канал 2 для трафика типа 2. Следовательно, для первого игрока

$$\begin{array}{rcl} a_{11}\delta_1(x, (p|t_1 = 1)) & = & a_{11}(w_1(1) + x_2^{41}) \leqslant \\ & \leqslant & a_{12}\delta_2(x, (p|t_1 = 1)) = a_{12}x_2^{42}, \\ a_{11}\delta_1(x, (p|t_1 = 2)) & = & a_{11}x_2^{31} \geqslant \\ & \geqslant & a_{12}\delta_2(x, (p|t_1 = 2)) = a_{12}(w_1(2) + x_2^{32}), \end{array}$$

и для второго игрока

$$\begin{array}{rcl} a_{21}\delta_1(x,(p|t_2=4)) & = & a_{21}(w_1(1)+x_2^{41}) \geqslant \\ & \geqslant & a_{22}\delta_2(x,(p|t_2=4)) = a_{22}x_2^{42}, \\ a_{21}\delta_1(x,(p|t_2=3)) & = & a_{21}x_2^{31} \leqslant \\ & \leqslant & a_{22}\delta_2(x,(p|t_2=3)) = a_{22}(w_1(2)+x_2^{32}). \end{array}$$

Заметим, что все части данных неравенств положительны. Обозначая $A = a_{11}$, $B = a_{12}$, $C = a_{21}$, $D = a_{22}$, $a = w_1(1) + x_2^{41}$, $b = x_2^{42}$, $c = x_2^{31}$, $d = w_1(2) + x_2^{32}$ и применяя Лемму 1 получим, что данные неравенства выполняются как равенства.

Лемма 1. *Для любых положительных* A, B, C, D *и* a, b, c, d *из*

$$\begin{array}{ll} Aa \leqslant Bb & Ca \geqslant Db \\ Ac \geqslant Bd & Cc \leqslant Dd \end{array}$$

следует

$$\begin{array}{ll} Aa = Bb & Ca = Db \\ Ac = Bd & Cc = Dd. \end{array}$$

Доказательство. Из первого и второго левых неравенств имеем $\frac{a}{b} \leqslant \frac{B}{A} \leqslant \frac{c}{d}$. Из оставшихся получаем $\frac{a}{b} \geqslant \frac{D}{C} \geqslant \frac{c}{d}$, что доказывает лемму.

Более того, следующая теорема демонстрирует, что даже в общем случае игры Γ байесовское равновесие по Вардропу является равновесием по Вардропу.

Теорема 3. *Любое байесовское равновесие по Вардропу в игре* Γ *является случаем равновесия по Вардропу.*

Доказательство. Пусть x является байесовским равновесием по Вардропу. Тогда для всех $i \in [n]$, $t \in T_i$, $e \in [m]$, таких, что $x_i^{te} > 0$, $a_{ie}\delta_e(x,(p|t_k = t)) = \lambda_i^t$, иначе $a_{ie}\delta_e(x,(p|t_k = t)) \geqslant \lambda_i^t$.

Предположим, что x не равновесие по Вардропу. Тогда существует хотя бы один игрок i, который может, отклонившись от стратегии в x, уменьшить свои ожидаемые затраты $PC_i(x,p)$.

$$\begin{aligned}
&PC_i(x,p) = \\
&= \max_{e\in[m]:\exists\tau\in T_i:x_i^{\tau e}>0} a_{ie}\delta_e(x,p) \\
&= \max_{e\in[m]:\exists\tau\in T_i:x_i^{\tau e}>0} \sum_{t\in T_i} p(i,t)a_{ie}\delta_e(x,(p|t_k=t)) \\
&= \max_{e\in[m]:\exists\tau\in T_i:x_i^{\tau e}>0} \left(\sum_{t\in T_i:x_i^{te}>0} p(i,t)\lambda_i^t + \sum_{t\in T_i:x_i^{te}=0} p(i,t)\left(\lambda_i^t+\Delta_i^{te}\right) \right).
\end{aligned}$$

Игрок i не может уменьшить загрузку каналов с задержкой трафика, большей λ_i^t, так как он не использует данные каналы для трафика типа t. Добавление небольшую часть трафика с канала e с задержкой λ_i^t на некоторый канал q в любом случае ведет к увеличению ожидаемых затрат за счет увеличения загрузки канала q. На нем либо уже есть загрузка λ_i^t, если он используется для трафика t в x, либо добавление на него трафика типа t вовлекает в ожидаемые затраты новый канал с загрузкой $\geqslant \lambda_i^t$. Таким образом, для игрока i нет возможности отклониться, уменьшив свои ожидаемые затраты, и, следовательно, x является равновесием по Вардропу.

3. Существование равновесия по Вардропу

Рассмотрим функцию

$$\Psi(x) = \sum_{i\in[n]}\sum_{t\in T_i}\sum_{e\in[m]} p(i,t)x_i^{te}\ln(a_{ie}) + \sum_{e\in[m]} \delta_e(x,p)\ln(\delta_e(x,p)),$$

которая является вероятностной модификацией функции потенциала в работе [2]. Она выпуклая как сумма выпуклых функций, следовательно, для нее существует минимум на выпуклом множестве X.

Теорема 4. *Если в игре* Γ *существует равновесие по Вардропу* x, *то* $\Psi(x) = \min\limits_{y \text{ – профиль стратегий в } \Gamma} \Psi(y)$.

Доказательство.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi(x)}{\partial x_i^{te}} &= p(i,t)\ln(a_{ie}) + p(i,t)\ln(\delta_e(x,p)) + p(i,t) \\ &= p(i,t)(\ln(a_{ie}\delta_e(x,p)) + 1). \end{aligned}$$

В равновесии по Вардропу из $x_i^{te} > 0$ следует $a_{ie}\delta_e(x,p) \leqslant a_{iq}\delta_q(x,p)$ и тогда

$$p(i,t)(\ln(a_{ie}\delta_e(x,p)) + 1) \leqslant p(i,t)(\ln(a_{iq}\delta_q(x,p)) + 1)$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial \Psi(x)}{\partial x_i^{te}} \leqslant \frac{\partial \Psi(x)}{\partial x_i^{tq}}.$$

Тогда из Леммы в работе [2] $\Psi(x) = \min\limits_{y \text{ – профиль стратегий в } \Gamma} \Psi(y)$.

Теорема 5. *Если профиль* x *в игре* Γ *обеспечивает минимум функции* $\Psi(x)$, *то* x *является равновесием по Вардропу.*

Доказательство. Из условий Куна-Таккера следует, что x обеспечивает минимум функции $\Psi(x)$ тогда и только тогда, когда существует такое значение λ, что для $i \in [n]$, $t \in T_i$, $e \in [m]$ и

$$L(x,\lambda) = \Psi(x) - \sum_{i\in[n]} \sum_{t\in T_i} \lambda_i^t \left(\sum_{e\in[m]} x_i^{te} - w_i(t) \right)$$

выполняется:

$$\begin{aligned} &\text{если } x_i^{te} > 0, \text{ то} \quad \frac{\partial}{\partial x_i^{te}} L(x,\lambda) = 0, \\ &\text{если } x_i^{te} = 0, \text{ то} \quad \frac{\partial}{\partial x_i^{te}} L(x,\lambda) \geqslant 0. \end{aligned}$$

Следовательно, обозначив $\alpha_i^t = e^{\left(\frac{\lambda_i^t}{p(i,t)}-1\right)}$, получаем

$$a_{ie}\delta_e(x,p) = \alpha_i^t \text{ если } x_i^{te} > 0 \text{ и } a_{ie}\delta_e(x,p) \geqslant \alpha_i^t \text{ если } x_i^{te} = 0.$$

Поскольку $a_{ie}\delta_e(x,p)$ не зависит от типа трафика игрока, то α_i^t равны для всех тех типов трафика игрока i, для каждых двух из которых существует хотя бы один канал, используемый для обоих типов; обозначим их как α_i. Для остальных типов трафика τ их $\alpha_i^\tau \leqslant \alpha_i$.

С другой стороны трафик типа τ отправляется по некоторому каналу q, где $x_i^{\tau q} > 0$. Если $x_i^{tq} > 0$, то $a_{iq}\delta_q(x,p) = \alpha_i^\tau = \alpha_i^t = \alpha_i$. Если $x_i^{tq} = 0$, то $a_{iq}\delta_q(x,p) = \alpha_i^\tau \geqslant \alpha_i^t = \alpha_i$. Таким образом, $\alpha_i^\tau = \alpha_i^t = \alpha_i$.

Следовательно, для всех $i \in [n]$, $e \in [m]$, таких что каждый игрок i использует канал e для отправки хотя бы одного типа своего трафика, имеем $a_{ie}\delta_e(x,p) = \alpha_i$, где α_i – некоторые константы.

Заметим, что минимум функции $\Psi(x)$ на X существует, отсюда следует справедливость следующей теоремы.

Теорема 6. *В игре* Γ *всегда существует равновесие по Вардропу.*

Заметим, что равновесие по Вардропу в игре Γ может быть не единственным и некоторые равновесия могут быть байесовскими. Это иллюстрируется следующими примерами.

Пример 1. Данный пример демонстрирует ситуацию, когда равновесие по Вардропу также является байесовским. Рассмотрим игру с двумя игроками и двумя каналами с $a_{11} = a_{21} = 1, a_{12} = a_{22} = 2$. Множества типов трафика игроков определены как $T_1 = \{1,2\}$, $T_2 = \{3,4\}$, где $w(1) = 1, w(2) = 25, w(3) = 1, w(4) = 50$. Совместное распределение типов трафика такое, что $p(1,4) = p(2,3) = 1/2$.

Стратегии в равновесии по Вардропу:

$$\begin{array}{ll}
x_1^{11} = 0 & x_1^{12} = 1 \\
x_1^{21} = 16\frac{1}{3} & x_1^{22} = 8\frac{2}{3} \\
x_2^{31} = 1 & x_2^{32} = 0 \\
x_2^{41} = 34 & x_2^{42} = 16.
\end{array}$$

Условные ожидаемые загрузки и ожидаемые загрузки равны для обоих каналов, $\Psi(x) \approx 124{,}939$. $\bullet$

Пример 2. Данный пример демонстрирует равновесие по Вардропу, которое не является байесовским. Рассмотрим игру из предыдущего примера. Следующий профиль также является равновесием по Вардропу:

$$\begin{array}{ll}
x_1^{11} = 1 & x_1^{12} = 0 \\
x_1^{21} = 25 & x_1^{22} = 0 \\
x_2^{31} = 1 & x_2^{32} = 0 \\
x_2^{41} = 24\frac{1}{3} & x_2^{42} = 25\frac{2}{3}.
\end{array}$$

Ожидаемые загрузки равны для обоих каналов, $\Psi(x) \approx 124{,}939$, но условные ожидаемые загрузки не соответствуют байесовскому равновесию по Вардропу. Например, для игрока 1:

$$\begin{gathered}
a_{11}\delta_1(x,(p|t_1=1)) = x_1^{11} + x_2^{41} = 25\tfrac{1}{3} \\
a_{12}\delta_2(x,(p|t_1=1)) = x_1^{12} + x_2^{42} = 51\tfrac{1}{3} \\
a_{11}\delta_1(x,(p|t_1=2)) = x_1^{21} + x_2^{31} = 26 \\
a_{12}\delta_2(x,(p|t_1=2)) = x_1^{22} + x_2^{32} = 0.
\end{gathered}$$

$\bullet$

Литература

1. GAIRING M., MONIEN B., TIEMANN K. *Selfish Routing with Incomplete information* // Theory Comput Syst. – 2008. – P. 91-130.

2. GAIRING M., MONIEN B., TIEMANN K. *Routing (Un-) Splittable Flow in Games with Player-Specific Linear Latency Functions* / Proceedings of the 33rd International Colloquium on Automata, Languages and Programming (ICALP 2006), LNCS 4051. – 2006. – P. 501-512.

ROUTING PROBLEM WITH SPLITABLE TRAFFIC AND INCOMPLETE INFORMATION

Julia Chuiko, Institute of Applied Mathematical Research Karelian Research Center of RAS, Petrozavodsk Cand.Sc. (julia@krc.karelia.ru).

Abstract: We investigate the equilibria in Bayesian routing game in network with selfish users' behavior where each user chooses his route trying to minimize the expected delay of the traffic he sends. This scheme is based on [1] and modified for model with parallel links where user's traffic is splittable. Our interest are equilibria: Wardrop Equilibrium, that always exists and can be found using potential function, and its special case Bayesian Wardrop Equilibrium, that can be more easily understood by users, but its existence is an open question.

Keywords: optimal routing, splittable traffic, incomplete information, Wardrop equilibrium.

УДК 519.8
ББК 22.1

НАЛОГОВАЯ ИГРА В ДУОПОЛИИ КУРНО [1]

Галегов А. И. [2] , **Гарнаев А. Ю.** [3]
(Факультет прикладной математики – процессов управления, Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург)

Модель Штакельберга для иерархических олигопольных рынков с однородными продуктами исследовалась учеными интенсивно. В данной работе мы расширим на общий случай иерархической структуры решение по Штакельбергу в аналитическом виде. Игра может рассматриваться как многошаговая с полной информацией. Главной особенностью игры является наличие лидирующих групп фирм, которые первыми устанавливают объем выпуска товаров, а остальные фирмы ориентируются в своих расчетах на них.

Ключевые слова: иерархические структуры, равновесие Штакельберга в иерархических структурах, Курно-Нэш равновесия.

Введение

Во многих странах налоговая ставка зависит от базы налогообложения. В России в 2003 г. для поддержки малого бизнеса была введена так называемая упрощенная налоговая система, которая состоит из двух налоговых ставок (6% и 15%). Именно поэтому некоторые фирмы оказываются перед проблемой выбора

[1] *Текст приводится в соответствии с изданием «Математическая теория игр и ее приложения. – 2009. – Т. 1. №1».*

[2] *Александр Игоревич Галегов, аспирант, (galegov@rambler.ru).*

[3] *Андрей Юрьевич Гарнаев, доктор физико-математических наук, профессор (agarnaev@rambler.ru).*

одной из них: либо налоговая ставка с чистой прибыли (когда фирма платит налоги от совокупного дохода минус общие затраты), либо налоговая ставка с совокупного дохода (когда фирма платит налог с совокупного дохода). Налоговая ставка с совокупного дохода (6%) меньше чем налоговая ставка с чистой прибыли (15%), потому что база налогообложения в первом случае больше.

В конкурентной среде, когда есть несколько фирм, производящих однородную продукцию для рынка, проблема выбора становится теоретико-игровой задачей, так как каждая фирма должна взять в рассмотрение поведение его конкурента. Мы назовем эту ситуацию налоговой игрой. Цель данной статьи состоит в обобщении проблемы выбора налоговой ставки так же как и критериев этого выбора для случая конкуренции. В этой работе мы рассматриваем два сценария данной задачи. Первый сценарий – двухшаговая игра. На первом шаге фирмы планируют их производство в модели Курно для каждой комбинации возможных налоговых ставок, в то время как на втором шаге они решают, какую налоговую ставку лучше использовать. Таким образом, двухшаговая игра является комбинацией модели Курно и биматричной игры, как это было сделано в R&D игре в транспорте и коммуникациях Lambertini, Mantovani и Rossini ([3], [4])

Второй сценарий – одношаговая игра, где фирмы выбирают оптимальную налоговую ставку после установки плана производства, и этот сценарий является модификацией модели Курно.

1. Модель двухшаговой игры

Мы исследуем дуополию, где две фирмы (1 и 2) конкурируют некооперативно в двухшаговой структуре модели Курно. Обе фирмы производят однородную продукцию. Рыночная конкуренция описывается с помощью игры Курно, где каждая фирма выбирает максимизирующее прибыль количество продукции по отдельности. На первом шаге фирмы планируют свое производство в модели Курно для каждой комбинации возможных налоговых ставок, в то время как на втором шаге они решают какую налоговую ставку лучше использовать. Мы используем обратную индукцию.

2. Первый шаг игры: модель Курно

В этом разделе и в последующих четырех подразделах мы исследуем первый шаг налоговой игры, где фирмы планируют их производство в модели Курно для каждой комбинации возможных налоговых ставок (совокупный доход и чистая прибыль). Пусть q_i – количество продукции, произведенной фирмой i, где $i = 1, 2$, и p – цена продукции, которая зависит от его общего количества на рынке по следующей линейной модели ([5])

$$p = A - q_1 - q_2,$$

где A – максимально возможная цена продукции, поддерживаемая рынком. Также мы предполагаем, что предельные затраты для продукции для обеих фирм есть c и $A > c$ (из-за неотрицательности предельных затрат).

2.1. ОБЕ ФИРМЫ ВЫБИРАЮТ НАЛОГОВУЮ СТАВКУ С ЧИСТОЙ ПРИБЫЛИ

В этом подразделе мы предполагаем, что обе фирмы выбирают налоговую ставку с чистой прибыли. Тогда их функции прибыли в модели Курно имеют следующий вид

$$\pi_1^{pp} = \beta_p((A - q_1 - q_2)q_1 - cq_1),$$
$$\pi_2^{pp} = \beta_p((A - q_1 - q_2)q_2 - cq_2),$$

где $\beta_p = 1 - T_p$ и T_p – налоговая ставка с чистой прибыли.

Каждая фирма максимизирует свою прибыль, учитывая количество продукции, проданной на рынке. Поэтому равновесные стратегии задаются соотношениями:

$$q_{*1}^{pp} = q_{*2}^{pp} = \frac{A - c}{3}.$$

Подставляя равновесные стратегии в функции прибыли, мы получаем равновесные общие прибыли:

$$\pi_{*1}^{pp} = \pi_{*2}^{pp} = \frac{\beta_p (A-c)^2}{9}.$$

2.2. ОБЕ ФИРМЫ ВЫБИРАЮТ НАЛОГОВУЮ СТАВКУ С СОВОКУПНОГО ДОХОДА

В этом подразделе мы предполагаем, что обе фирмы выбирают налоговую ставку с совокупного дохода. Тогда их функции прибыли в модели Курно имеют следующий вид

$$\pi_1^{tt} = \beta_t (A - q_1 - q_2) q_1 - c q_1,$$
$$\pi_2^{tt} = \beta_t (A - q_1 - q_2) q_2 - c q_2,$$

где $\beta_t = 1 - T_t$ и T_t – налоговая ставка с совокупного дохода.

Тогда равновесные стратегии задаются уравнениями:

$$q_{*1}^{tt} = q_{*2}^{tt} = \frac{\beta_t A - c}{3\beta_t},$$

с соответствующими равновесными прибылями:

$$\pi_{*1}^{tt} = \pi_{*2}^{tt} = \frac{(\beta_t A - c)^2}{9\beta_t}.$$

2.3. ФИРМЫ ВЫБИРАЮТ РАЗЛИЧНЫЕ НАЛОГОВЫЕ СТАВКИ

В этом подразделе мы предполагаем, что фирмы выбирают различные налоговые ставки. Например, фирма 1 выбирает налоговую ставку с чистой прибыли и фирма 2 выбирают налоговую ставку с совокупного дохода. Тогда их функции прибыли в модели Курно имеют следующий вид

$$\pi_1^{pt} = \beta_p((A - q_1 - q_2)q_1 - cq_1),$$

$$\pi_2^{pt} = \beta_t(A - q_1 - q_2)q_2 - cq_2.$$

Каждая фирма максимизирует свою прибыль, учитывающую количество, проданное на рынке. Тогда равновесные стратегии задаются уравнениями:

$$q_{*1}^{pt} = \frac{\beta_t A + (1 - 2\beta_t)c}{3\beta_t}$$

$$q_{*2}^{pt} = \frac{\beta_t A + (\beta_t - 2)c}{3\beta_t},$$

с соответствующими равновесными прибылями:

$$\pi_{*1}^{pt} = \frac{\beta_p(\beta_t A + (1 - 2\beta_t)c)^2}{9\beta_t^2},$$

$$\pi_{*2}^{pt} = \frac{(\beta_t A + (\beta_t - 2)c)^2}{9\beta_t}.$$

Теперь фирма 2 выбирает налоговую ставку с чистой прибыли и фирма 1 выбирают налоговую ставку с совокупного дохода. Тогда их функции прибыли имеют следующий вид

$$\pi_1^{tp} = \beta_t(A - q_1 - q_2)q_1 - cq_1,$$

$$\pi_2^{tp} = \beta_p((A - q_1 - q_2)q_2 - cq_2).$$

В этом случае равновесные стратегии и соответствующие равновесные общие прибыли имеют вид:

$$q_{*1}^{tp} = \frac{\beta_t A + (\beta_t - 2)c}{3\beta_t},$$

$$q_{*2}^{tp} = \frac{\beta_t A + (1 - 2\beta_t)c}{3\beta_t},$$

$$\pi_{*1}^{tp} = \frac{(\beta_t A + (\beta_t - 2)c)^2}{9\beta_t},$$

$$\pi_{*2}^{tp} = \frac{\beta_p(\beta_t A + (1 - 2\beta_t)c)^2}{9\beta_t^2}.$$

3. Второй шаг игры: выбор налоговой ставки

В этом разделе мы исследуем второй шаг игры, где фирмы выбирают налоговую ставку, чтобы максимизировать свои доходы. Итак, каждая фирма имеет две чистые стратегии: выб рать налоговую ставку с чистой прибыли (P) и выбрать налоговую ставку с совокупного дохода (T). Таким образом, второй шаг игры может быть описан следующей биматрицей:

$$\begin{array}{ccc} & P & T \\ P & (b_{11}, b_{11}) & (b_{12}, b_{21}) \\ T & (b_{21}, b_{12}) & (b_{22}, b_{22}) \end{array}$$

где

$$b_{11} = \frac{\beta_p (A - c)^2}{9},$$

$$b_{21} = \frac{(\beta_t A + (\beta_t - 2)c)^2}{9\beta_t},$$

$$b_{12} = \frac{\beta_p (\beta_t A + (1 - 2\beta_t)c)^2}{9\beta_t^2},$$

$$b_{22} = \frac{(\beta_t A - c)^2}{9\beta_t}.$$

Так как база налогообложения налога с совокупного дохода больше чем налога на чистую прибыль, то чтобы приблизительно уравнять налоговые выплаты в реальных налоговых ставках, не теряя общности, будем предполагать, что $T_t < T_p$. Итак, $\beta_t > \beta_p$. Например, в Российской Федерации фирма может использовать упрощенную налоговую систему, где $T_t = 0{,}06$ и $T_p = 0{,}15$ ([2]). Тогда, $\beta_t = 0{,}94$ и $\beta_p = 0{,}85$. Мы будем исследовать нашу игру для этих конкретных значений. Таким образом наша цель найти равновесие по Нэшу (NE) в следующей матричной игре

(1)
$$\begin{array}{ccc} & P & T \\ P & (a_{11}, a_{11}) & (a_{12}, a_{21}) \\ T & (a_{21}, a_{12}) & (a_{22}, a_{22}) \end{array},$$

где

$$a_{11} = \frac{17}{180}A^2 - \frac{17}{90}Ac + \frac{17}{180}c^2,$$

$$a_{21} = \frac{47}{450}A^2 - \frac{53}{225}Ac + \frac{2809}{21150}c^2,$$

$$a_{12} = \frac{17}{180}A^2 - \frac{374}{2115}Ac + \frac{8228}{99405}c^2,$$

$$a_{22} = \frac{47}{450}A^2 - \frac{2}{9}Ac + \frac{50}{423}c^2.$$

Теорема 1. *Пусть*

$$t_1 = \frac{2}{47}(\frac{160}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{7990}) \approx 1{,}0016,$$

$$t_2 = \frac{7}{3} - \frac{2}{141}\sqrt{7990} \approx 1{,}065,$$

$$t_3 = \frac{2}{47}(\frac{160}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{7990}) \approx 3{,}54,$$

$$t_4 = \frac{7}{3} + \frac{2}{141}\sqrt{7990} \approx 3{,}6.$$

Тогда
(a) (P,P) – NE тогда и только тогда, когда $A \in [t_2c, t_4c]$,
(b) (T,T) – NE тогда и только тогда, когда $A \leqslant t_1c$ *или* $A \geqslant t_3c$,
(c) (T,P) – NE тогда и только тогда, когда $A \in [t_1c, t_2c]$,
(d) (P,T) – NE тогда и только тогда, когда $A \in [t_1c, t_2c]$,
(e) (P,P) Парето доминирует (T,T) тогда и только тогда, когда $A \in [t_{1*}c, t_{2*}c]$, *где*

$$t_{1*} = \frac{5}{3} - \frac{\sqrt{7990}}{141} \approx 1{,}0327, \quad t_{2*} = \frac{5}{3} + \frac{\sqrt{7990}}{141} \approx 2{,}3006.$$

Доказательство. (a) следует из (1) и факта, что (P,P) – NE тогда и только тогда, когда $a_{11} \geqslant a_{21}$. (b) следует из (1) и факта, что (T,T) – NE тогда и только тогда, когда $a_{22} \geqslant a_{12}$. (c) следует из (1) и факта, что (T,P) – NE тогда и только тогда, когда $a_{21} \geqslant a_{11}$ и $a_{12} \geqslant a_{22}$. (d) следует из (1) и факта, что (P,T) – NE тогда и только тогда, когда $a_{12} \geqslant a_{22}$ и $a_{21} \geqslant a_{11}$. (e) следует из (1) и факта, что (P,P) – Парето доминирует (T,T) тогда и только тогда, когда $a_{11} \geqslant a_{22}$.

Теорема 2. *В игре существует смешанное равновесие по Нэшу тогда и только тогда, когда* $A \in (t_1c, t_2c)$ *или* $A \in (t_3c, t_4c)$.

Доказательство. Пусть фирма 1 и фирма 2 используют стратегии $x = (p, 1-p)$ и $y = (q, 1-q)$ где $p, q \in (0,1)$. Тогда

$$\pi_1(x,y) = a_{11}xy + a_{21}y(1-x) + a_{12}x(1-y) + a_{22}(1-x)(1-y).$$

Предположим, что стратегия y фирмы 2 зафиксирована. Тогда, фирма 1 хочет максимизировать прибыль $\pi_1(x,y)$.
Пусть W равно:

$$W = \frac{1}{3}\frac{6627A^2 - 30080Ac + 23480c^2}{c(282A - 649c)}.$$

Для фиксированного $y \in [0,1]$ имеем

$$p = \begin{cases} 0 & \text{для } q < W, \\ \text{любое из } [0,1], & \text{для } q = W, \\ 1 & \text{для } q > W. \end{cases}$$

Аналогично

$$\pi_2(x,y) = a_{11}xy + a_{21}x(1-y) + a_{12}y(1-x) + a_{22}(1-x)(1-y).$$

Наилучший ответ фирмы 2 для фиксированной стратегии x фирмы 1 имеет вид

$$q = \begin{cases} 0 & \text{для } p < W, \\ \text{любое из } [0,1], & \text{для } p = W, \\ 1 & \text{для } p > W. \end{cases}$$

Если $p = W$, $q = W$ и $W \in [0,1]$ ($A \in (t_1c, t_2c)$ или $A \in (t_3c, t_4c)$) имеем NE $((W, 1-W), (W, 1-W))$ с вектором выигрышей (π, π), где

$$\pi = \frac{34}{2115}\frac{(2209A^2 - 4559Ac + 2341c^2)c}{282A - 649c}.$$

4. Точка переключения для двухшаговой игры

В этом разделе мы рассматриваем точку переключения с одной налоговой ставки на другую. Сначала рассмотрим переключение без модели Курно. Пусть TR – совокупный доход, TC – общие затраты. Тогда прибыль $\pi = TR - TC$. Таким образом, налоговые выигрыши для обеих налоговых ставок равны, если следующее условие выполнено ([1])

$$0{,}06(TR - TC) = 0{,}015TR.$$

Поэтому,

$$\frac{TC}{TR} = 0{,}6. \tag{2}$$

Это соотношение может интерпретироваться следующим образом: если общие затраты составляют больше чем 60% совокупного дохода, тогда фирма выбирает налоговую ставку с чистой прибыли, и если общие затраты меньше 60% совокупного дохода, тогда фирма выбирает налоговую ставку с совокупного дохода.

Теперь рассмотрим игру Курно с одной фирмой и найдем эквивалент условия (2), когда фирма предпочитает изменить налоговую ставку. Следуя рассмотренной выше схеме, мы предполагаем, что сначала фирма находит оптимальный план производства относительно каждой комбинации налоговых ставок и затем выбирает оптимальную налоговую ставку. Тогда выигрыши, оптимальные планы производства и соответствующие прибыли задаются следующим образом:

$$\pi^p = \beta_p((A-q)q - cq),$$

$$q_*^p = \frac{A-c}{2},$$

$$\pi_*^p = \frac{\beta_p(A-c)^2}{4},$$

$$\pi^t = \beta_t(A-q)q - cq,$$

$$q_*^t = \frac{\beta_t A - c}{2\beta_t},$$

$$\pi_*^t = \frac{(\beta_t A - c)^2}{4\beta_t}.$$

Сравнивая π_*^p и π_*^t находим, что фирма будет использовать налоговую ставку с совокупного дохода, если $A > t_{2*}c$.
Перейдем к двухшаговой игре для двух фирм. Сначала заметим

(a) если $A > t_3 c$, то единственное возможное NE для фирм – (T, T), поскольку для $A \in [t_3 c, t_4 c]$ оно доминирует чистое NE (P, P) и использование смешанной стратегии для $A \in [t_3 c, t_4 c]$ невыгодно из-за существования чистого NE.

(b) Если $A \in (t_2c, t_3c)$, то существует единственное NE для фирм – $(P,\ P)$.

(c) Неотрицательность равновесных прибылей и равновесных количеств для налоговой ставки с совокупного дохода влечет, что $A > 50c/47$. Таким образом, нет никакого смысла рассматривать налоговую ставку с совокупного дохода для $A \leqslant 50c/47$. Если $A \in (50c/47, t_2c)$, то ситуация становится чрезвычайно неопределенной и конкурентоспособной для фирм с маленькими прибылями.

Таким образом, хотя в двухшаговой игре есть несколько NE, только два из них доступны, а именно, $(T,\ T)$ и $(P,\ P)$ и точка переключения t_3c. Эта точка переключения больше чем точка переключения для двухшаговой игры с одной фирмой. Это означает, что в конкурентной среде точка переключения повышается и это гарантирует меньшую, но более устойчивую прибыль.

5. Одношаговая налоговая игра Курно

В этом разделе мы исследуем дуополию, где фирма выбирает налоговую ставку оптимальным образом после установления плана производства. Сначала рассмотрим игру с одной фирмой. После сравнения прибыли для налоговых ставок с чистой прибыли и совокупного дохода, прибыль фирмы задается как:
(a) если $A > 5c/3$, то

$$\pi(q) = \begin{cases} \dfrac{85}{100}((A-q)q - cq) & \text{для } q > A - 5c/3, \\[2ex] \dfrac{94}{100}(A-q)q - cq & \text{для } q \leqslant A - 5c/3, \end{cases}$$

(b) если $A \leqslant 5c/3$, то

$$\pi(q) = \frac{85}{100}((A-q)q - cq).$$

Оптимальные количества для налоговых ставок с чистой прибыли и совокупного дохода имеют вид

$$q_*^p = \frac{A}{2} - \frac{c}{2}, \quad q_*^t = \frac{A}{2} - \frac{25}{47}c.$$

Ясно, что $q_*^t < q_*^p$. Три случая должны быть рассмотрены:

(i) Пусть $A - 5c/3 < q_*^t < q_*^p$. Тогда $A \leqslant 320\,c/141$ и фирма выбирает налоговую ставку с чистой прибыли.

(ii) Пусть $q_*^t < A - 5c/3 < q_*^p$. Тогда $320\,c/141 < A \leqslant 7\,c/3$ и

- **(a)** если $320c/141 < A \leqslant (5/3 + \sqrt{7990}/141)c$, то фирма выбирает налоговую ставку с чистой прибыли,
- **(b)** если $(5/3 + \sqrt{7990}/141)c < A \leqslant 7c/3$, то фирма выбирает налоговую ставку с совокупного дохода,

(iii) Пусть $q_*^t < q_*^p < A - 5c/3$. Тогда $A > 7c/3$ и фирма выбирает налоговую ставку с совокупного дохода.

Следовательно, следующая теорема доказана для игры с одной фирмой.

Теорема 3. *В налоговой игре с одной фирмой*

(a) Если $A \leqslant (5/3 + \sqrt{7990}/141)c$, то фирма выбирает налоговую ставку с чистой прибыли, оптимальное количество продукции $q_*^p = \frac{A}{2} - \frac{c}{2}$ и соответствующая прибыль $\frac{17}{80}(A-c)^2$.

(b) Если $A > (5/3 + \sqrt{7990}/141)c$, то фирма выбирает налоговую ставку с совокупного дохода, оптимально количество продукции $q_*^t = \frac{A}{2} - \frac{25}{47}c$ и соответствующая прибыль $\frac{47}{200}A^2 + \frac{25}{94}c^2 - \frac{1}{2}Ac$.

Перейдем к игре Курно с двумя фирмами. Пусть фирмы производят q_1 и q_2 количества продукции, тогда из функции прибыли имеют вид :

если $q_2 < A - 5c/3$, то

$$\pi_1(q_1, q_2) = \begin{cases} \frac{85}{100}((A - q_1 - q_2)q_1 - cq_1) & \text{для } q_1 > A - q_2 - 5c/3, \\ \\ \frac{94}{100}(A - q_1 - q_2)q_1 - cq_1 & \text{для } q_1 \leqslant A - q_2 - 5c/3, \end{cases}$$

если $q_2 \geqslant A - 5c/3$, то

$$\pi_1(q_1, q_2) = \frac{85}{100}((A - q_1 - q_2)q_1 - cq_1),$$

если $q_1 < A - 5c/3$, то

$$\pi_2(q_1, q_2) = \begin{cases} \frac{85}{100}((A - q_1 - q_2)q_2 - cq_2) & \text{для } q_2 > A - q_1 - 5c/3, \\ \\ \frac{94}{100}(A - q_1 - q_2)q_2 - cq_2 & \text{для} q_2 \leqslant A - q_1 - 5c/3, \end{cases}$$

если $q_1 \geqslant A - 5c/3$, то

$$\pi_2(q_1, q_2) = \frac{85}{100}((A - q_1 - q_2)q_2 - cq_2).$$

Аналогично теореме 3 получаем следующую теорему.

Теорема 4. *В налоговой игре с двумя фирмами*
(a) Если $A < 135c/47$, то фирма выбирает налоговую ставку с чистой прибыли, оптимальные количества продукции $q^p_{1*} = q^p_{2*} = (A - c)/3$ и соответствующая прибыль $\frac{17}{180}(A - c)^2$.
(b) Если $A \geqslant 135c/47$, то фирма выбирает налоговую ставку с совокупного дохода, оптимальные количества продукции $q^t_{1*} = q^t_{2*} = (47A - 50c)/141$ и соответствующая прибыль $\frac{47}{450}A^2 - \frac{2}{9}Ac + \frac{50}{423}c^2$.

6. Заключение

Сначала заметим, что для одношаговой игры с одной фирмой, так же как для двухшаговой игры, точки переключения совпадают и равны $t_{2*}c$. Для игр с двумя фирмами ситуация изменяется. Было показано, что точка переключения с налоговой ставки с чистой прибыли на налоговую ставку с совокупного дохода для двухшаговой игры равна t_3c и для одношаговой игры – $135c/47$ и $t_3c > 135c/47$. Это можно объяснить существованием в двухшаговой схеме некоторой дополнительной неопределенности по сравнению с одношаговой схемой. Эта неопределенность влияет на поведение фирм, заставляя их соглашаться получать меньшую прибыль, чтобы получить более устойчивое положение на рынке.

Литература

1. НАРЕГНЫЙ В. *Управление малым бизнесом: выгодно ли использовать упрощенную налоговую систему с 2003?* // Финансовая газета. – 2002. – №10. – С. 15-18.
2. *Налоговый Кодекс Российской Федерации*. Раздел N 346.20.
3. LAMBERTINI L., MANTOVANI A. *Price vs Quantity in a Duopoly with Technological Spillovers: A Welfare Re-Appraisal*// Keio Economic Studies. – 2001. – V. 38. – P. 41-52.
4. LAMBERTINI L., MANTOVANI A., ROSSINI G. *R&D in Transport and Communication in a Cournot Duopoly*// Rivista Internazionale di Scienze Economiche e Commerciali. – 2003. – V. 50. - №2. – P. 185-198.
5. PETROSYAN L. A., ZENKEVICH N. A. *Game Theory*. – World Scientific, London, 1996.

A TAX GAME IN A COURNOT DUOPOLY

Alexander Galegov, Faculty of Applied Mathematics and Control

Processes, St. Petersburg State University, Saint Petersburg, post-graduate student (galegov@rambler.ru).
Andrey Garnaev, Faculty of Applied Mathematics and Control Processes, St. Petersburg State University, Saint Petersburg, Doctor of Science, professor (agarnaev@rambler.ru).

Abstract: Stackelberg models for hierarchical oligopolistic markets with a homogenous product were studied by researchers extensively. The goal of this paper is to extend the classical solution in closed form of the Stackelberg model for a general hierarchical structures composed by firms arranged into groups of different hierarchical levels.

Keywords: hierarchical structures, multi-level Stackelberg equilibrium, Nash-Cournot equilibrium.

УДК 519.83
ББК 22.18

ИГРОВАЯ ЗАДАЧА СПРАВЕДЛИВОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ ПРИ НАЛИЧИИ АКТИВНЫХ ПОМЕХ [1]

Гарнаев А. Ю. [2] **, Торицын А. О.** [3]
(Факультет прикладной математики – процессов управления, Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург)

Рассматриваются задача справедливого распределения ресурсов базовой станцией между пользователями при наличии активных помех с учетом стоимости. Задача моделируется неантагонистической игрой между базовой станцией и источником активных помех. В качестве выигрыша базовой станции взят обобщенный критерий α-полезности (включающий в себя как частный случай критерий Шенона) минус стоимость сигнала. Выигрыш активного источника помех равен сумме обобщенного критерия α-полезности и стоимости установки помех взятой с обратным знаком. Доказана единственность равновесия по Нэшу в данной задаче и, кроме того, само решение представлено в явном виде. Проведено численное моделирование равновесных стратегий.

Ключевые слова: справедливое распределение ресурсов, беспроводные сети, помехи, игра с ненулевой суммой.

---

[1] *Текст приводится в соответствии с изданием «Математическая теория игр и ее приложения. – 2009. – Т. 1. №3».*

[2] *Андрей Юрьевич Гарнаев, доктор физико-математических наук, профессор (agarnaev@rambler.ru).*

[3] *Антон Олегович Торицын, аспирант (toxru@inbox.ru).*

Введение

Аспект справедливости распределения ресурсов играет центральную роль в сетевых технологиях. В стандарте ATM (Asynchronous Transfer Mode) [6] на максимальной справедливости и ее взвешенных вариантах основывается распределение имеющейся пропускной способности по каналам с использованием ABR (Available Bit Rate) сервиса наилучшей попытки. Пропорциональная справедливость была введена в [3, 4] и реализована, например, в беспроводной связи компнией Qualcomm в технологии HDR (High Data Rate) для доступа пользователей в интернет и к электронным почтовым ящикам с помощью мобильных телефонов. Унифицированная математическая формулировка для справедливого распределения ресурсов была предложена в [5]. В данной работе используется концепция α-справедливости для распределения мощности между пользователями при наличии пользователя, создающего помехи. Целью базовой станции является максимизация функции α-справедливости, построенной на основе функции SINR со смещением, а целью пользователя, устанавливающего помехи, наоборот, является минимизация данной функции. При этом как на базовую станцию, так и на пользователя, создающего помехи, накладывается стоимость за использование мощности. Поэтому данная проблема может быть рассмотрена как игра с ненулевой суммой. Целью данной работы является обобщение результатов [1] на случай, когда игроки должны учитывать стоимость используемых ресурсов. Отметим, что для частного случая обобщенного критерия справедливости, а именно, критерия Шенона, при одинаковых стоимостях задача была решена в [2].

1. Постановка задачи

Перейдем к математической формулировке проблемы. Будем рассматривать базовую станцию, которой требуется распределить мощность $\bar{P}$ между n пользователями. Предполагаем, что каждому пользователю выделен отдельный канал, а также предполагаем наличие интерференции между каналами. Чистой стратегией базовой станции является $P = (P_1, \ldots, P_n)$, где $P_i \geqslant 0$ для $i \in [1, n]$, причем $\sum_{i=1}^{n} P_i = \bar{P}$ и $\bar{P} > 0$. Компонент P_i может быть интерпретирован как уровень мощности выделенный пользователю i. Чистой стратегией активного источника помех является $J = (J_1, \ldots, J_n)$, где $J_i \geqslant 0$ для $i \in [1, n]$ и $\sum_{i=1}^{n} = \bar{J}$, где $\bar{J} > 0$ – общая мощность помех. Функцией выигрыша базовой станции являются обобщенный критерий α-справедливости [1] (причем, $\alpha \in [0, 1]$) минус стоимость сигналов, а выигрыш активного источника помех равен сумме обобщенного критерия α-полезности и стоимости установки помех взятой с обратным знаком:

$$(1) \quad v_P(P,J) = \frac{1}{1-\alpha} \sum_{i=1}^{n} \left[\left(1 + \frac{g_i P_i}{N_i^0 + h_i J_i} \right)^{1-\alpha} - 1 \right] - \sum_{i=1}^{n} c_P^i P_i,$$

$$(2) \quad v_J(P,J) = -\frac{1}{1-\alpha} \sum_{i=1}^{n} \left[\left(1 + \frac{g_i P_i}{N_i^0 + h_i J_i} \right)^{1-\alpha} - 1 \right] - \sum_{i=1}^{n} c_J^i J_i.$$

В случае, если $\alpha = 1$, функции выигрыша превращаются в критерий Шенона минус соответствующие стоимости:

$$(3) \qquad v_P(P,J) = \sum_{i=1}^{n} \ln \left(1 + \frac{g_i P_i}{N_i^0 + h_i J_i} \right) - \sum_{i=1}^{n} c_P^i P_i,$$

$$(4) \qquad v_J(P,J) = -\sum_{i=1}^{n} \ln \left(1 + \frac{g_i P_i}{N_i^0 + h_i J_i} \right) - \sum_{i=1}^{n} c_J^i J_i,$$

где N_i^0 – уровень неконтролируемого шума в канале i; g_i, h_i – коэффициенты искажения сигнала, а c_J^i, c_P^i – стоимости использования единицы мощности сигнала игроками. Будем предполагать, что коэффициенты искажения сигнала g_i и h_i, стоимости использования единицы мощности сигнала c_J^i, c_P^i, уровень неконтролируемого шума N_i^0 для $i \in [1, n]$, а также общая мощность

$\bar{P}$ базовой станции и общий уровень шума $\bar{J}$ фиксированы и известны обоим игрокам.

2. Решение задачи

В этом разделе выигрыш будет рассматриваться как функция α-справедливости от функции SINR со смещением (1) и (2). Одним из достоинств этой функции является тот случай, что при $\alpha = 1$ она соответствует пропускной способности Шенона. В данном разделе будет рассмотрен случай, когда $\alpha > 0$. Случай $\alpha = 0$ исследован в разделе 5.

Нетрудно проверить, что $v_P(P, J)$ вогнуто по P при любых α, а $v_J(P, J)$ вогнуто по J при $\alpha \leqslant 2$, так как

$$\frac{\partial^2 v_P}{\partial P_i^2} = -\alpha g_i^2 \frac{(N_i^0 + h_i J_i)^{\alpha-1}}{(N_i^0 + h_i J_i + g_i P_i)^{\alpha+1}}$$

и

$$\frac{\partial^2 v_J}{\partial J_i^2} = -\alpha P_i g_i h_i^2 \frac{(N_i^0 + h_i J_i)^{\alpha-3}}{(N_i^0 + h_i J_i + g_i P_i)^{\alpha+1}} (2N_i^0 + 2h_i J_i + (2-\alpha) g_i P_i).$$

Поэтому будет рассматриваться случай $\alpha \leqslant 1$. Можно показать, что в таком случае у игры будет единственное равновесие по Нэшу [7]. Применяя теорему Куна-Такера, получаем следующий результат.

<u>Лемма 1.</u> *Пусть $\alpha \leqslant 1$, тогда (P, J) будет равновесием тогда и только тогда, когда существуют неотрицательные ω и ν (множители Лагранжа) такие, что*

$$\frac{g_i}{(N_i^0 + h_i J_i + g_i P_i)^{\alpha} (N_i^0 + h_i J_i)^{1-\alpha}} \begin{cases} = \omega, \text{если } P_i > 0, \\ \leqslant \omega, \text{если } P_i = 0, \end{cases}$$

$$\frac{g_i h_i P_i}{(N_i^0 + h_i J_i + g_i P_i)^\alpha (N_i^0 + h_i J_i)^{1-\alpha}} \begin{cases} = \nu, \text{если } J_i > 0, \\ \leqslant \nu, \text{если } J_i = 0. \end{cases}$$

Применяя лемму 1 можно получить структуру оптимального решения более точно, а именно, она описывается следующей теоремой.

Теорема 1. *Каждое равновесие по Нэшу имеет вид $(P(\omega,\nu), J(\omega,\nu))$ для некоторых положительных ω и ν, причем,*

$$P_i(\omega,\nu) = \begin{cases} \left[\dfrac{(\omega + c_P^i)h_i}{(\omega + c_p^i)h_i + (\nu + c_J^i)g_i}\right]^\alpha \dfrac{(\nu + c_J^i)g_i}{(\omega + c_P^i)^2 h_i}, & i \in I_{11}(\omega,\nu), \\ \dfrac{N_i^0}{g_i}\left[\left(\dfrac{g_i}{(\omega + c_P^i)N_i^0}\right)^{1/\alpha} - 1\right], & i \in I_{10}(\omega,\nu), \\ 0, & i \in I_{00}(\omega,\nu), \end{cases}$$

$$J_i(\omega,\nu) = \begin{cases} \dfrac{g_i}{h_i}\left[\dfrac{1}{\omega + c_P^i}\left(\dfrac{(\omega + c_P^i)h_i}{(\omega + c_p^i)h_i + (\nu + c_J^i)g_i}\right)^\alpha - \dfrac{N_i^0}{g_i}\right], & i \in I_{11}(\omega,\nu), \\ 0, \quad i \in I_{10}(\omega,\nu) \cup I_{00}(\omega,\nu) \end{cases}$$

и

$$I_{00}(\omega,\nu) = \left\{ i \in [1,n] : \frac{g_i}{N_i^0} \leqslant \omega + c_P^i \right\},$$

$$I_{10}(\omega,\nu) = \left\{ i \in [1,n] : \omega + c_P^i < \frac{g_i}{N_i^0} \leqslant (\omega + c_P^i)\left(\frac{(\omega + c_p^i)h_i + (\nu + c_J^i)g_i}{(\omega + c_P^i)h_i}\right)^\alpha \right\},$$

$$I_{11}(\omega,\nu)=\left\{i\in[1,n]:(\omega+c_P^i)\left(\frac{(\omega+c_p^i)h_i+(\nu+c_J^i)g_i}{(\omega+c_P^i)h_i}\right)^\alpha<\frac{g_i}{N_i^0}\right\}$$

Теорема 1 сводит проблему нахождения оптимального решения к задаче нахождения двух параметров ω и ν таких, что выполняются следующие соотношения

$$H_P(\omega,\nu)=\bar{P},\qquad H_J(\omega,\nu)=\bar{J}, \tag{5}$$

где

$$H_P(\omega,\nu)=\sum_{i=1}^n P_i(\omega,\nu),\qquad H_J(\omega,\nu)=\sum_{i=1}^n J_i(\omega,\nu).$$

Стратегии $P(\omega,\nu),J(\omega,\nu)$ обладают важными свойствами непрерывности и монотонности, которые сформулированы в следующей лемме, позволяющие получить достаточно простой алгоритм нахождения оптимального решения

Лемма 2. *Стратегии $P(\omega,\nu),J(\omega,\nu)$ обладают следующими свойствами монотонности и непрерывности:*

1) *Стратегии $J_i(\omega,\nu)$ для $i\in[1,n]$, а поэтому и $H_J(\omega,\nu)$, строго убывают по ν до тех пор, пока они остаются положительными.*

2) *Если $\alpha<1$, то стратегии $J_i(\omega,\nu)$ для $i\in[1,n]$, а поэтому и $H_J(\omega,\nu)$, строго убывают по ω до тех пор, пока они остаются положительными.*

3) *Стратегии $P_i(\omega,\nu)$ для $i\in[1,n]$, а поэтому и $H_P(\omega,\nu)$, строго убывают по ω, пока они положительны.*

4) *Если $\alpha\leqslant 1$, то стратегии $P_i(\omega,\nu)$ для $i\in[1,n]$, а поэтому и $H_P(\omega,\nu)$, строго возрастают по ν, пока они положительны.*

5) *Функции $H_P(\omega,\nu)$ и $H_J(\omega,\nu)$ являются непрерывными по ω и ν.*

Из перечисленных свойств монотонности получаются следующие две теоремы представляющие равновесие по Нэшу при $0 < \alpha < 1$ в соответствующих подслучаях:

Теорема 2. *Если $H_J(0,0) \leqslant \bar{J}$, то единственным равновесием по Нэшу является пара (P, J), где*

1) *если $H_P(0,0) \leqslant \bar{P}$, то $(P, J) = (P(0,0), J(0,0))$,*

2) *если $H_P(0,0) > \bar{P}$, то $(P, J) = (P(\omega^*, 0), J(\omega^*, 0))$, где ω^* единственный корень уравнения $H_P(\omega^*, 0) = \bar{P}$.*

Перейдем к рассмотрению случая, когда $H_J(0,0) > \bar{J}$. В следующей лемме показано, что существует строгая монотонная зависимость между параметрами ω и ν в (5), что позволяет понизить размерность задачи.

Лемма 3. *Если $H_J(0,0) > \bar{J}$, то для каждого $\omega \in [0, \bar{\omega}]$ существует единственное неотрицательное $\nu(\omega)$ такое, что $H_J(\omega, \nu(\omega)) = \bar{J}$, где $\bar{\omega} > 0$ – единственное решение уравнения $H_J(\bar{\omega}, 0) = \bar{J}$.*

Из леммы 2, следует, что $\nu(\omega)$ является непрерывной строго убывающей функцией при $\omega \in [0, \bar{\omega}]$, поэтому решение двупараметрической системы уравнений (5) эквивалентно решению однопараметрического нелинейного уравнения

$$H_P(\omega, \nu(\omega)) = \bar{H}_P(\omega) = \bar{P}. \tag{6}$$

Полученный результат, дает возможность найти явный вид равновесных стратегий для случая $H_J(0,0) > \bar{J}$, который представлен в следующей теореме.

Теорема 3. *Если $H_J(0,0) > \bar{J}$, то единственным равновесием по Нэшу является пара (P, J), где*

1) *если $H_P(0, \nu_{01}^*) \leqslant \bar{P}$, где ν_{01}^* единственный корень уравнения $H_J(0, \nu_{01}^*) = \bar{J}$, то $(P, J) = (P(0, \nu_{01}^*), J(0, \nu_{01}^*))$,*

2) *если $H_P(0, \nu_{01}^*) > \bar{P}$, то*

   a) *если $H_P(\hat{\omega}, 0) > \bar{P}$, где $\hat{\omega}$ является решением уравнения $H_J(\hat{\omega}, 0) = \bar{J}$, то $(P, J) = (P(\omega_{10}^*, 0), J(\omega_{10}^*, 0))$, где ω_{10}^* является решением уравнения $H_P(\omega_{10}^*, 0) = \bar{P}$,*

b) *если* $H_P(\hat{\omega}, 0) \leqslant \bar{P}$, *то равновесием по Нэшу будет точка* $(P, J) = (P(\omega_{11}^*, \nu(\omega_{11}^*)), J(\omega_{10}^*, \nu(\omega_{11}^*)))$, *где* ω_{11}^* *является решением уравнения (6).*

Таким образом, получаем следующий результат единственности равновесия.

Теорема 4. *При* $0 < \alpha < 1$ *описанная игра имеет единственное равновесие по Нэшу, которое можно найти с помощью теорем (2)-(3).*

3. Частный случай: критерий Шенона

Следует отметить, что в случае, когда функция выигрыша записывается формулой пропускной способности Шенона (3)-(4) (т. е. в случае, когда $\alpha = 1$), равновесные стратегии будут иметь более простую структуру, а именно:

$$P_i(\omega, \nu) = \begin{cases} \dfrac{g_i}{(\omega + c_p^i)h_i + (\nu + c_J^i)g_i} \dfrac{\nu + c_J^i}{\omega + c_P^i}, & i \in I_{11}(\omega, \nu), \\ \dfrac{1}{(\omega + c_P^i)} - \dfrac{N_i^0}{g_i}, & i \in I_{10}(\omega, \nu), \\ 0, & i \in I_{00}(\omega, \nu), \end{cases}$$

$$J_i(\omega, \nu) = \begin{cases} \dfrac{g_i}{(\omega + c_p^i)h_i + (\nu + c_J^i)g_i} - \dfrac{N_i^0}{h_i}, & i \in I_{11}(\omega, \nu), \\ 0, & i \in I_{10}(\omega, \nu) \cup \\ & \cup I_{00}(\omega, \nu) \end{cases}$$

и

$$I_{00}(\omega, \nu) = \left\{ i \in [1, n] : \frac{g_i}{N_i^0} \leqslant \omega + c_P^i \right\},$$

$$I_{10}(\omega, \nu) = \left\{ i \in [1, n] : \omega + c_P^i < \frac{g_i}{N_i^0} \leqslant \frac{(\omega + c_p^i)h_i + (\nu + c_J^i)g_i}{h_i} \right\},$$

$$I_{11}(\omega,\nu) = \left\{ i \in [1,n] : \frac{(\omega + c_p^i)h_i + (\nu + c_J^i)g_i}{h_i} < \frac{g_i}{N_i^0} \right\}.$$

4. Частный случай: линейная функция выигрыша

В этом разделе будет рассмотрен случай линейного выигрыша по P, а именно, когда $\alpha = 0$. Тогда функции выигрышей имеют вид:

$$v_P(P,J) = \sum_{i=1}^{n} \frac{g_i P_i}{N_i^0 + h_i J_i} - \sum_{i=1}^{n} c_P^i P_i,$$

$$v_P(P,J) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{g_i P_i}{N_i^0 + h_i J_i} - \sum_{i=1}^{n} c_J^i J_i.$$

В следующей теореме приведен вид, который доложны иметь равновестные стратегии соответствующие линейному случаю.

Теорема 5. *Если $\alpha = 0$, то каждое равновесие имеет вид $(P(\omega,\nu),\ J(\omega,\nu))$ для некоторых положительных ω и ν, где*

$$P_i(\omega,\nu) = \begin{cases} \dfrac{g_i}{h_i}\dfrac{\nu + c_J^i}{(\omega + c_P^i)^2}, & i \in I(\omega), \\ 0, & i \notin I(\omega), \end{cases}$$

$$J_i(\omega) = \frac{g_i}{h_i}\left[\frac{1}{\omega} - \frac{N_i^0}{g_i}\right]_+,$$

где

$$I(\omega) = \{ i \in [1,n] : J_i(\omega) > 0 \}.$$

Теорема сводит проблему нахождения оптимального решения к задаче нахождения двух параметров ω и ν таких, что выполняются следующие соотношения:

$$H_P(\omega,\nu)=\bar{P},\quad H_J(\omega)=\bar{J},$$

где

$$H_P(\omega,\nu)=\sum_{i=1}^{n}P_i(\omega,\nu),\quad H_J(\omega)=\sum_{i=1}^{n}J_i(\omega).$$

Очевидно, что функция $H_J(\omega)$ строго убывает по ω пока $J_i(\omega)$ положительна. Из этого свойства легко получить следующую теорему представляющую равновесные стратегии.

Теорема 6. *Если $\alpha=0$, то равновесные стратегии единственны и имеют следующий вид:*

1) *если $H_J(0)\leqslant\bar{J}$, то*

   a) *если $H_P(0,0)>\bar{P}$, то равновесием по Нэшу будет точка $(P(\omega^*,0),J(\omega^*))$, где ω^* является решением уравнения $H_P(\omega^*,0)=\bar{P}$;*

   b) *если $H_P(0,0)\leqslant\bar{P}$, то равновесием по Нэшу будет точка $(P(0,\nu^*),J(0))$, где ν^* это решение уравнения $H_P(0,\nu^*)=\bar{P}$,*

2) *если $H_J(0)>\bar{J}$, то точка $(P(\bar{\omega},\bar{\nu}),J(\bar{\omega}))$ будет равновесием по Нэшу, где $\bar{\omega}$ является решением уравнения $H_J(\bar{\omega})=\bar{J}$, а $\bar{\nu}$ это решение уравнения $H_P(\bar{\omega},\bar{\nu})=\bar{P}$.*

5. Алгоритм нахождения равновесия по Нэшу

В данном разделе приведен алгоритм нахождения равновесных стратегий основанный на теоремах 2 и 3.

Шаг 1. Если $H_J(0,0)\leqslant\bar{J}$ и $H_P(0,0)\leqslant\bar{P}$, то $\omega=\nu=0$ и пара $(P(0,0),J(0,0))$ является равновесием по Нэшу. Алгоритм завершается.

Шаг 2. Если $H_J(0,0) \leqslant \bar{J}$ и $H_P(0,0) > \bar{P}$, то находим $\omega^* = BS_P^1(0)$ и тогда пара $(P(\omega^*,0), J(\omega^*,0))$ является равновесием по Нэшу. Алгоритм завершается.

Шаг 3. Если $H_J(0,0) > \bar{J}$, то находим $\nu_{01}^* = BS_J^2(0)$.

Шаг 4. Если $H_P(0,\nu_{01}^*) \leqslant \bar{P}$, то пара $(P(0,\nu_{01}^*), J(0,\nu_{01}^*))$ является равновесием по Нэшу. Алгоритм завершается.

Шаг 5. Находим $\bar{\omega} = BS_J^1(0)$.

Шаг 6. Если $H_P(\bar{\omega},0) > \bar{P}$, то находим $\omega_{10}^* = BS_P^1(0)$ и тогда пара $(P(\omega_{10}^*,0), J(\omega_{10}^*,0))$ является равновесием по Нэшу. Алгоритм завершается.

Шаг 7. Устанавлваем $\omega_1^0 = 0, \omega_1^1 = \bar{\omega}$.

Шаг 7a. Определяем $\tilde{\omega} = (\omega_1^1 + \omega_1^0)/2$.

Шаг 7b. $\tilde{\nu} = BS_J^2(\tilde{\omega})$.

Шаг 7c. Если $\omega_1^1 - \omega_1^0 \leqslant \epsilon$ или $H_P(\tilde{\omega},\tilde{\nu}) = \bar{P}$, то $\omega_{11}^* = \tilde{\omega}$, $\nu_{11}^*(\omega_{11}^*) = \tilde{\nu}$ и пара $(P(\omega_{11}^*,\nu_{11}^*(\omega_{11}^*)), J(\omega_{11}^*,\nu_{11}^*(\omega_{11}^*)))$ является равновесием по Нэшу. Алгоритм завершается.

Шаг 7d.

- если $H_P(\tilde{\omega},\tilde{\nu}) < \bar{P}$, то $\omega_1^1 = \tilde{\omega}$.
- если $H_P(\tilde{\omega},\tilde{\nu}) > \bar{P}$, то $\omega_1^0 = \tilde{\omega}$.

Шаг 7e. Переходим к шагу 7a.

Построение функции $\omega = BS_P^1(\nu)$:

Шаг 1. Пусть $\omega^0 = 0$, $\omega^1 = \max_i \left\{ \frac{g_i}{N_i^0} - c_P^i \right\}$.

Шаг 2. Определяем $\tilde{\omega} = (\omega^1 + \omega^0)/2$.

Шаг 3. Если $\omega^1 - \omega^0 \leqslant \epsilon$ или $H_P(\tilde{\omega},\nu) = \bar{P}$, то вернуть $\tilde{\omega}$.

Шаг 4.

- если $H_P(\tilde{\omega}, \nu) < \bar{P}$, то $\omega^1 = \tilde{\omega}$.
- если $H_P(\tilde{\omega}, \nu) > \bar{P}$, то $\omega^0 = \tilde{\omega}$.

Шаг 5. Возвращаемся к Шагу 2.

Построение функции $\omega = BS_J^1(\nu)$**:**

Шаг 1. Пусть $\omega^0 = 0$, $\omega^1 = \max_i \left\{ \frac{g_i}{N_i^0} - c_P^i \right\}$.

Шаг 2. Определяем $\tilde{\omega_1} = (\omega^1 + \omega^0)/2$.

Шаг 3. Если $\omega^1 - \omega^0 \leqslant \epsilon$ или $H_J(\tilde{\omega}, \nu) = \bar{J}$, то вернуть $\tilde{\omega}$.

Шаг 4.

- если $H_J(\tilde{\omega}, \nu) < \bar{J}$, то $\omega^1 = \tilde{\omega}$.
- если $H_J(\tilde{\omega}, \nu) > \bar{J}$, то $\omega^0 = \tilde{\omega}$.

Шаг 5. Переходим к шагу 2.

Построение функции $\nu = BS_J^2(\omega)$**:**

Шаг 1. Пусть $\nu^0 = 0$, $\nu^1 =$

$$\max_i \left\{ \frac{1}{g} \left[\left(\frac{g}{N(w + c_P^i)} \right)^{\frac{1}{\alpha}} - h \right] (w + c_P^i) - c_J^i \right\}.$$

Шаг 2. Определяем $\tilde{\nu} = (\nu^0 + \nu^1)/2$.

Шаг 3 Если $\nu^1 - \nu^0 \leqslant \epsilon$ или $H_J(\omega, \tilde{\nu}) = \bar{J}$, то вернуть $\tilde{\nu}$.

Шаг 4.

- если $H_J(\omega, \tilde{\nu}) < \bar{J}$, то $\nu^1 = \tilde{\nu}$.
- если $H_J(\omega, \tilde{\nu}) > \bar{J}$, то $\nu^0 = \tilde{\nu}$.

Шаг 5. Переходим к шагу 2.

6. Результаты численного моделирования

В данном разделе приведем результаты численного моделирования. Будем считать, что имеется пять пользователей ($n = 5$), а качество каналов ухудшается от первого к последнему по степенному закону $g_i = k^{i-1}$, где $k = 0{,}87$. Пусть уровень неконтролируемого шума и коэффициенты искажения сигнала будут одинаковым для всех каналов, а именно, $N_i = h_i = 1, i \in [1, 5]$. Ниже на четырех численных примерах показано, как изменяется мощности назначаемые базовой станцией пользователям при изменении стоимости сигнала первого пользователя, т. е. $c_P^1 \in [0{,}1; 0{,}15; 0{,}25; 0{,}7]$, $c_P^i = 0{,}1, i \in [2, 5]$, $c_J^i = 0{,}1, i \in [1, 5]$.

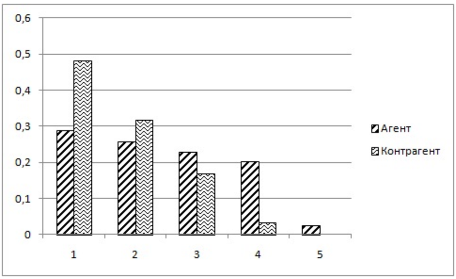


Рис. 1. Распределение мощностей между пользователями при $c_P^1 = 0, 1$

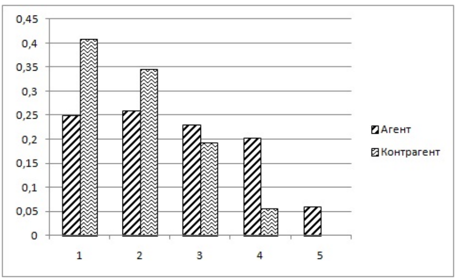


Рис. 2. Распределение мощностей между пользователями при $c_P^1 = 0, 15$

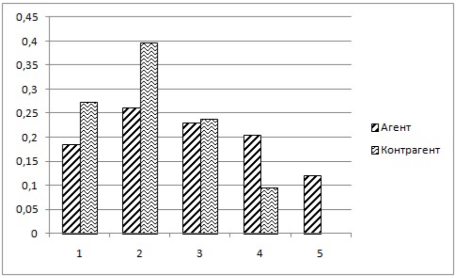


Рис. 3. Распределение мощностей между пользователями при $c_P^1 = 0{,}25$

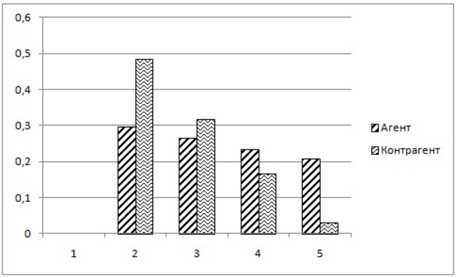


Рис. 4. Распределение мощностей между пользователями при $c_P^1 = 0{,}70$

При наименьшем значении $c_P^1 = 0{,}1$, которое совпадает со стоимостями передачи сигналов другими пользователями, первый пользователь получает максимальный уровень сигнала из всех пользователи в силу того, что качество используемого им канала является наилучшим (рис. 1). При увеличении стоимости c_P^1 в 1,5 раза до 0,15 пользователь получает второй по уровню сигнал (рис. 2), а при 2,5-кратном увеличении пользователь получает четвертый (рис. 3) по уровню сигнал. Если же $c_P^1 = 0{,}7$, то первый пользователь лишается возможности передачи сигнала из-за высокой стоимости, несмотря на то что в его распоряжении находится лучший по качеству канал.

Литература

1. ALTMAN E., AVRACHENKOV K., GARNAEV A. *Fair resource allocation in wireless networks in the presence of a jammer* // Performance Evaluation. – 2009.
2. ALTMAN E., AVRACHENKOV K., GARNAEV A. *Jamming game in wireless networks with transmission cost* // Lecture Notes in Computer Science. – 2007. – V. 4465. – P. 1-12.
3. KELLY F., TAN D. *Rate control for communication networks: shadow prices, proportional fairness and stability* // Journal of the Operational Research Society. – 1998. – V. 49. – P. 237-252.
4. KELLY F. *Charging and rate control for elastic traffic* // European Trans. on Telecom. – 1998. – V. 8. – P. 33-37.
5. MO J., WALRAND J. *Fair end-to-end window-based congestion control* // IEEE A CM Trans. on Networking. – 2000. – V. 8. – P. 556-567.
6. *Traffic management specification* / In the ATM forum technical cometee, April 1996. – P. 84-89.
7. ROSEN J. *Existence and uniqueness of equilibrium points for concave n- person games* // Econometrica. – 1965. – V. 22. – P. 520-534.

FAIR RESOURCE ALLOCATION IN THE PRESENCE OF A JAMMER

Andrey Garnaev, Faculty of Applied Mathematics and Control Processes, St. Petersburg State University, Saint Petersburg, Doctor of Science, professor (agarnaev@rambler.ru).
Anton Toticin, Faculty of Applied Mathematics and Control Processes, St. Petersburg State University, Saint Petersburg, post-graduate student (toxru@inbox.ru).

Abstract: A game-theoretical model between a base station distributing power among users and a jammer trying to harm the base station is considered. The goal of the base station is to distribute the power among users fairly taking into account its cost. The goal of the jammer is to harm the work of the base station also taking into account the cost of the employed power. The existence and uniqueness of Nash equilibrium are proved and its properties are investigated.

Keywords: fairness, wireless network, jamming, non-zero-sum-game.

УДК 519
ББК 32.81

МОДЕЛИ РЕПУТАЦИИ И ИНФОРМАЦИОННОГО УПРАВЛЕНИЯ В СОЦИАЛЬНЫХ СЕТЯХ [1]

Губанов Д. А. [2] , **Новиков Д. А.** [3] , **Чхартишвили А. Г.** [4]
(Учреждение Российской академии наук Институт проблем управления РАН, Москва)

Рассмотрен ряд моделей социальных сетей, позволяющих ставить и решать задачи формирования репутации с целью последующего ее использования при осуществлении информационного управления.

Ключевые слова: социальная сеть, репутация, теория игр, манипулирование информацией, информационное управление.

Введение

Настоящая работа посвящена теоретико-игровым и оптимизационным моделям репутации и информационного управления в социальных сетях. Приведем определения основных понятий.

Под *социальной сетью* понимается социальная структура, состоящая из множества агентов (субъектов – индивидуальных или коллективных, например: индивидов, семей, групп, организаций) и определенного на нем множества *отношений* (совокупности

---

[1] *Текст приводится в соответствии с изданием «Математическая теория игр и ее приложения. – 2009. – Т. 1. №2».*

[2] *Дмитрий Александрович Губанов, аспирант (DimaGubanov@mail.ru).*

[3] *Дмитрий Александрович Новиков, доктор физико-математических наук, профессор (novikov@ipu.ru).*

[4] *Александр Гедеванович Чхартишвили, доктор физико-математических наук, профессор (sandro_ch@mail.ru).*

связей между агентами, например: знакомства, дружбы, сотрудничества, коммуникации). Формально социальная сеть представляет собой граф $G(V, E)$, в котором V – множество вершин (агентов) и E – множество ребер (отношений).

При моделировании социальных сетей возникает необходимость учета взаимного влияния их членов, динамики их мнений. *Влияние* – процесс и результат изменения индивидом (субъектом влияния) поведения другого субъекта (индивидуального или коллективного объекта влияния), его установок, намерений, представлений и оценок (а также основывающихся на них действий) в ходе взаимодействия с ним [1]. *Влияние* – способность воздействовать на чьи-либо представления или действия [15]. Различают направленное и ненаправленное влияние [1]. Направленное (целенаправленное) влияние использует в качестве механизмов воздействия на другого человека убеждение и внушение. При этом индивид – *субъект влияния* – ставит перед собой задачу добиться определенных результатов от *объекта влияния*. Ненаправленное (нецеленаправленное, «косвенное») влияние – это влияние, при котором индивид не ставит перед собой задачу добиться определенных результатов от объекта влияния. Обзор моделей влияния в социальных сетях можно найти в [4].

Целенаправленное влияние членов социальной сети (или субъектов, не входящих в сеть, но использующих ее в качестве инструмента информационного воздействия) является частным случаем *информационного управления*, заключающегося в формировании (как правило, путем сообщения соответствующей информации) у управляемых субъектов такой информированности [12], чтобы принимаемые ими на основании этой информированности решения были наиболее выгодны для управляющего субъекта [11].

Возможности влияния одних членов социальной сети на других ее членов существенно зависят от репутации первых. *Репутация* – «создавшееся общее мнение о достоинствах или недостатках кого-либо, чего-либо, общественная оценка» [13, с. 431]. Репутацию можно рассматривать, во-первых, как ожидаемую (другими агентами) норму деятельности агента – какого поведения от него ожидают остальные [7]. Во-вторых, как «весомость» мнения агента, определяемую предшествуемой оправдываемостью его суждений и/или эффективностью его деятельности. Репутация оправдывается и, как правило, возрастает, если выбор агента (его суждения, действия и т.п.) совпадает с тем, чего от него ожидают остальные и/или с тем, что остальные впоследствии считают нормой (например, эффективной деятельностью). Репутация может и снижаться, например, при нарушении субъектом принятых в сообществе норм поведения, при принятии неэффективных решений и т.д. Отметим, что репутация может быть как индивидуальной, так и коллективной. Обзор моделей индивидуальной и коллективной репутации приведен в [7], см. также обзор онлайновых систем репутации/доверия [2].

Настоящая работа посвящена моделированию динамики репутации членов социальной сети и исследованию роли репутации в осуществлении информационных воздействий. Изложение имеет следующую структуру. Во втором разделе рассматривается модель социальной сети. В третьем – динамика репутации ее членов. В четвертом формулируется и решается (для ряда частных случаев) задача информационного управления. В пятом разделе обсуждаются теоретико-игровые модели информационного противоборства; в шестом разделе содержится иллюстративный пример информационного управления; в седьмом разделе анализируются подходы к построению моделей стратегической и информационной рефлексии агентов; в восьмом разделе приводятся примеры рефлексии.

1. Модель социальной сети

В качестве основы для построения модели социальной сети примем подход, предложенный в работе [3], в которой рассматривается информационное влияние агентов в социальных сетях на формирование мнений друг друга. Структура сети описывается с помощью понятий: *сообщество* (множество агентов, которые не подвергаются влиянию агентов вне него), *группа* (сообщество агентов, в котором каждый агент влияет или подвергается влиянию каждого другого агента группы прямо или косвенно) и *спутник* (агент, не оказывающий влияния ни на одну из групп). Как оказывается, в конечном итоге мнения спутников определяются мнением групп, а в группах мнения одинаковы.

Пусть $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ – множество агентов, входящих в социальную сеть. Агенты в сети влияют друг на друга, и степень влияния задается матрицей прямого влияния a размерности $n \times n$, где $a_{ij} \geqslant 0$ обозначает степень *доверия* i-го агента j-му агенту (или, что будем считать эквивалентным, степень влияния j-го агента на i-го агента). Считается, что выполняется *условие нормировки*:

$$\forall i \in N \ \ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1\,. \tag{1}$$

Если i-й агент доверяет j-му, а j-й доверяет k-му, то это означает следующее: k-й агент косвенно влияет на i-го и т. д., т. е. возможны «цепочки» косвенных (опосредованных) влияний.

У каждого агента в начальный момент времени имеется *мнение* по некоторому вопросу. Мнение всех агентов сети отражает вектор-столбец неотрицательных начальных мнений b размерности n. Агенты в социальной сети взаимодействуют, обмениваясь мнениями (проблемы манипулирования информацией и построения неманипулируемых процедур принятия решений [11] в явном виде в настоящей работе практически не рассматриваются (мы ограничиваемся сведением ряда задач к известным в теории коллективного выбора), хотя необходимо признать, что их изучение представляется чрезвычайно перспективным направлением исследований). Этот обмен приводит к тому, что мнение каждого агента меняется под влиянием мнений агентов, которым данный агент доверяет.

Будем считать, что мнение i-го агента в момент времени τ

равно

$$b_i^\tau = \sum_{j \in N} a_{ij} b_j^{\tau-1}\,. \tag{2}$$

Предположим, что в каждой группе существует как минимум один агент, который хоть сколько-нибудь доверяет сам себе (т. е. $\in i\,:\,a_{ii} > 0$). Тогда, как показано в [3], в конечном итоге (при многократном обмене мнениями) мнения агентов сходятся к результирующему (итоговому) вектору мнений $B = \lim\limits_{\tau \to \infty} b^\tau$. Тогда можно записать соотношение

$$B = Ab\,, \tag{3}$$

где $A = \lim\limits_{\tau \to \infty} (a)^\tau$. При этом, во-первых, в каждой из групп итоговые мнения агентов совпадают; во-вторых, итоговые мнения спутников полностью определяются мнением одной или нескольких групп. Все эти результаты следуют из известных фактов теории конечных цепей Маркова [8].

Пусть $r_i \geqslant 0$ – параметр, описывающий *репутацию* i-го агента. Вектор репутаций $r = (r_1, r_2, \ldots, r_n)$, если не говорено особо, будем считать общим знанием среди агентов. Потребуем, чтобы в сети всегда существовал агент с ненулевой репутацией. Также будем считать, что сеть представляет собой полный граф, следовательно, в силу приведенных выше результатов работы [3], результирующее мнение будет единым для всех агентов, входящих в рассматриваемую социальную сеть.

Определим степень доверия i-го агента j-му агенту как

$$a_{ij} = \frac{r_j}{\sum\limits_{k \in N} r_k},\ i, j \in N\,, \tag{4}$$

то есть будем считать, что степень влияния каждого агента не зависит явным образом от объектов влияния и пропорциональна его относительной репутации. В соответствии с выражением (4) агент i тем более подвержен влиянию со стороны агента j, чем ниже репутация первого, чем выше репутация второго и чем ниже репутация других членов социальной сети [5] .

Отметим, что при определении степени доверия в виде (4), условие нормировки (1) всегда выполнено. Обозначим через $R = \sum\limits_{k \in N} r_k$ *суммарную («коллективную») репутацию* членов сети.

Тогда выражение (2) примет вид

$$b_i^\tau = \frac{1}{R} \sum_{j \in N} r_j b_j^{\tau-1}, \; i \in N \,, \tag{5}$$

а выражение (3), соответственно, вид

$$B = \frac{1}{R} (r \cdot b) \,, \tag{6}$$

то есть скалярное (одинаковое для всех агентов) итоговое мнение агентов B (которое сформируется за один шаг!), так как правая часть выражения (5) не зависит от i, будет определяться скалярным произведением вектора репутаций r и вектора начальных мнений агентов b и нормироваться на суммарную репутацию.

Следует признать, что (4)-(6) представляет собой, наверное, простейшую модель влияния в социальной сети с учетом репутации агентов. Возможные обобщения этой модели очевидны – можно отказываться от предположений о полноте графа, определять доверие/влияние в зависимости от репутации более сложным образом, учитывать мнения агентов с весами, зависящими от отклонения от некоторого «среднего» мнения, принимать во внимание взаимные оценки агентами друг друга и т. д. (см. в [2] обзор моделей взаимосвязи доверия, влияния и репутации в социальных сетях). Тем не менее, ниже мы будем пользоваться приведенной

[5] *Естественно, можно определять зависимость степени влияния от репутации и другим образом, удовлетворяющим перечисленным свойствам частичной монотонности, имеющим прозрачную содержательную интерпретацию (см. обсуждение ниже).*

моделью, так как она позволяет получить ряд аналитических решений для задач информационного управления.

Простейшей моделью *информационного управления* (манипулирования мнениями членов социальной сети [6]) является следующая. Пусть некоторый агент (без потери общности здесь и далее будем считать, что это агент с номером один, имеющий $r_1 > 0$) заинтересован в том, чтобы итоговое мнение агентов было равно B_*. При заданном векторе репутаций и фиксированных мнениях остальных агентов для этого, в силу (6), ему достаточно сообщить

$$s_1 = \frac{1}{r_1}[RB_* - \sum_{k>1} r_k b_k]\,. \tag{7}$$

Из условия неотрицательности начальных мнений (в том числе, и $b_1 \geqslant 0$) можно найти нижнюю границу «диапазона манипулирования» первого агента (любого большего значения при неограниченных сверху своих сообщениях и ненулевой репутации он всегда может добиться):

$$B_* \geqslant \frac{1}{R}\sum_{k>1} r_k b_k\,. \tag{8}$$

Из выражения (8) следует, что, **чем выше репутация агента, осуществляющего манипулирование, тем больше его возможности по влиянию на итоговое мнение агентов в социальной сети**.

---

[6] *Под манипулированием мы будем понимать целенаправленное формирование мнений участников социальной сети, т. е. информационное управление. При этом не предполагается негативная окраска этого термина, т. е. будем считать манипулирование этически нейтральным. Вопрос об этико-психологических аспектах манипулирования подробно рассмотрен в [6]. Второе (близкое) значение термина «манипулирование» – искажение агентом сообщаемой кому-либо информации (см. также ниже).*

В общем случае манипулировать итоговым мнением могут все агенты (если предположить, что любой из агентов может сообщать другим мнение, отличное от его истинного мнения). В результате получим модель линейной (см. выражение (6)) *активной экспертизы* [7], хорошо известную в литературе (см., например, [11]).

Исследуем теперь возможности манипулирования со стороны первого агента в зависимости от его репутации. Предположим, что значение начального мнения, которое может сообщать первый агент, ограничено снизу величиной $b_1^{\min} > 0$. Тогда из (6) получаем оценку репутации первого агента, минимально необходимой для обеспечения равновесия $B*$ при ограничении $b_1^{\min}$ на свои сообщения:

$$r_1 = \frac{\sum\limits_{j>1} r_j(b_j - B_*)}{B_* - b_1^{\min}}\,. \tag{9}$$

Из выражения (9) следует, что чем выше репутации других агентов, тем жестче требования к репутации манипулирующего агента.

В реальных социальных сетях агенты зачастую могут сообщать свои мнения в достаточно широком диапазоне. Однако самостоятельно выбирать непосредственно свою репутацию они, как правило, не могут, так как последняя в существенной степени зависит от предыстории взаимодействия агентов.

На качественном уровне идея дальнейших рассмотрений заключается в следующем. Если некоторый агент хочет осуществлять манипулирование мнениями членов социальной сети, то для этого он должен иметь достаточную репутацию. Поэтому необходимо рассмотрение сценария, при котором этот агент сначала предпринимает действия по увеличению своей репутации, а затем использует ее для достижения своих целей – эффективно-

[7] *Обмен мнениями между членами социальной сети с формированием некоторого итогового «коллективного» мнения можно интерпретировать как экспертизу.*

го манипулирования. Следовательно, возникает задача описания, во-первых, динамики репутации и, во-вторых – процессов целенаправленного ее формирования.

2. Динамика репутации

Для моделирования динамики репутации агентов предположим, что описанное в предыдущем разделе их взаимодействие повторяется последовательно (при различных «начальных условиях») конечное число раз. Содержательно – агенты могут последовательно обсуждать ряд интересующих их вопросов, причем репутация каждого агента в общем случае зависит от всей предшествующей «истории» обсуждений.

Предположим, что члены социальной сети последовательно рассматривают T вопросов (имеются T последовательных периодов времени – в каждый период времени «обсуждается» соответствующий вопрос), по каждому из которых у каждого из агентов имеется свое начальное мнение b_i^t, $i \in N$, $t = \overline{1, T}$. Начальные репутации агентов обозначим r_i^1, $i \in N$. Будем считать, что общим знанием среди агентов являются репутации (начальные и текущие – для соответствующего момента времени, а также история изменения репутаций), начальные и результирующие мнения всех агентов для текущего и всех прошлых периодов.

Обозначим R^t – суммарную репутацию агентов в начале периода t, B^t – результирующее мнение агентов к концу периода t (из (6) следует, что это мнение будет одинаковым для всех агентов).

Итак, вопросы, рассматриваемые агентами, независимы, и результирующие мнения будут определяться

$$B_t = \frac{1}{R^t}(r^t \cdot b^t)\,, \tag{10}$$

где $r^t = (r_1^t, \ldots, r_2^t)$, $b^t = (b_1^t, \ldots, b_n^t)$ – соответственно, вектора репутаций и начальных мнений агентов в начале периода времени t, $t = \overline{1, T}$.

Для описания всей траектории изменения мнений и репутаций агентов необходимо доопределить, как изменяется репутация каждого из агентов в каждом периоде времени. Будем считать, что репутация является «кумулятивной» характеристикой (забывание отсутствует) и репутация любого агента в начале любого периода равна репутации данного агента в конце предыдущего периода времени.

Содержательно обсуждаемые агентами вопросы принадлежат примерно одной тематике, так что агент, имеющий высокую репутацию по одному вопросу (по результатам обсуждения этого вопроса), будет иметь эту же репутацию при начале обсуждения следующего вопроса.

В общем случае можно предположить, что репутация i-го агента в момент времени t определяется начальными и результирующими мнениями всех агентов (пока считаем, что каждый из них ведет себя честно и сообщает достоверную информацию) и их репутациями во всех предшествующих периодах:

(11) $r_i^t = F_i(r_1, \ldots, r^{t-1}, b^1, \ldots, b^{t-1}, B^1, \ldots, B^{t-1}),\ i \in N,\ t = \overline{2, T}$,

причем, наверное, логично предположить, как минимум, что функция $F_i(\cdot)$ монотонно убывает по разности $|b_i^{t-1} - B^{t-1}|$ и возрастает по предыдущим значениям репутации данного агента. В качестве частного можно использовать, например, следующий закон изменения репутации:

(12) $$r_i^t = \frac{r_i^{t-1}}{\alpha + \beta |b_i^{t-1} - B^{t-1}|},\ i \in N,\ t = \overline{2, T},$$

где $\alpha \in (0; 1]$, $\beta > 0$ – заданные константы. В соответствии с выражением (12) репутация агента в начале некоторого периода времени зависит только от его репутации в предыдущем периоде, а также того, насколько его начальное мнение в предыдущем периоде оказалось отличным от результирующего мнения всех агентов к концу этого периода. Другими словами, репутация агента возрастает (уменьшается), причем скорость изменения определяется константами α и β, если итоговое мнение всех агентов оказывается близким к (сильно отличается от) его мнению(я).

Закон (12) изменения репутации является одним из множества возможных. Нередко используют логистический закон изменения репутации (см. [2, 7, 9]) и др. – в каждом конкретном случае необходимо решать задачу идентификации – поиска тех зависимостей, которые наилучшим образом приближают или объясняют наблюдаемые или прогнозируемые эффекты.

Можно надеяться, что сложные динамические модели репутации позволят имитировать такие распространенные на практике эффекты, как создание ложной репутации, использование инерционности репутации (прекратив «инвестиции» в свою репутацию, агент может пользоваться тем, что ее снижение происходит не сразу) и др. (см. примеры в [7]). Разработка подобных теоретико-игровых моделей представляется перспективной задачей будущих исследований и выходит за рамки настоящей работы.

Описав информационное влияние и динамику репутации, перейдем к постановке и решению для рассматриваемой модели задачи управления.

3. Задача информационного управления

Имея уравнения (10) и (11), описывающих соответственно динамику мнений агентов в зависимости от репутации и динамику репутации в зависимости от динамики мнений, можно ставить и решать задачу *управления* – воздействия на агентов социальной сети с целью формирования требуемых их мнений.

Ограничимся случаем манипулирования со стороны одного (первого) агента, целью которого является такое *манипулирование* своими начальными мнениями по каждому из вопросов, чтобы (с учетом соответствующей динамики его репутации) добиться определенного результирующего мнения всех членов социальной сети по последнему вопросу.

Итак, имеем динамическую систему (10)-(11). Требуется найти последовательность сообщаемых другим агентам начальных мнений первого агента $s_1^1, s_1^2, \ldots, s_1^T$ (манипулирование как раз и заключается в возможности сообщения им $s_1^t \neq b_1^t$), удовлетворяющую ограничениям $s_1^t \geqslant b_1^{t\,\min}$, $t = \overline{1, T}$, и минимизирующую заданную монотонную целевую функцию $F(|B^T - B_*^T|)$, где формирование итогового мнения B_*^T по последнему вопросу может интерпретироваться как цель управления (манипулирования).

В общем случае сформулированная задача является задачей динамического программирования (при наложении соответствующих ограничений на свойства функций и допустимых множеств) и в каждом конкретном случае может быть решена численно.

Рассмотрим следующую *эвристику* поведения первого агента. Напомним, что выше было показано, что чем выше репутация агента, осуществляющего манипулирование, тем при фиксированных репутациях остальных агентов больше его возможности по влиянию на итоговое мнение агентов в социальной сети. Значит, можно предполагать, что к началу последнего периода первому агенту желательно иметь максимально возможную репутацию. Если функция $F_1(\cdot)$ удовлетворяет введенному выше условию монотонности и такова, что репутация первого агента на текущем шаге зависит только от его репутации на предыдущем шаге, его начального мнения на предыдущем шаге и от результирующего мнения на предыдущем шаге (обозначим это предположение (*)), то рассмотрим следующее решение задачи информационного управления: первому агенту следует на каждом шаге (независимо от других шагов), кроме последнего шага, выбирать такое значение своего начального мнения на этом шаге, чтобы к его завершению максимизировать свою репутацию. На последнем шаге (при сложившейся и фиксированной в рамках этого шага его репутации) первому агенту следует выбирать свое начальное мнение с целью минимизации $F(|B^T - B_*^T|)$, причем значение B^T будет зависеть только от его начального мнения s_1^T на шаге T.

Формально первый агент должен решить задачу, состоящую из $T-1$ независимой задачи максимизации репутации и одной задачи выбора своего начального мнения на последнем шаге:

$$(13)\qquad |s_1^t - \frac{1}{R^t}[r_1^t s_1^t + \sum_{j>1} r_j^t b_j^t]| \to \min_{s_1^t \geqslant b_1^{t\,\min}},\ t = \overline{1, T-1},$$

$$(14)\qquad \left|\frac{1}{R^t}[r_1^T s_1^T + \sum_{j>1} r_j^T b_j^T] - B_*^T\right| \to \min_{s_1^T \geqslant b_1^{T\,\min}}.$$

При отсутствии ограничений на сообщаемые первым агентом начальные мнения решение задачи (13) имеет вид:

$$(15)\qquad s_1^t = \frac{\sum\limits_{j>1} r_j^t b_j^t}{\sum\limits_{j>1} r_j^t},\ t = \overline{1, T-1},$$

то есть для максимизации своей репутации ему всегда следует высказывать «средневзвешенное» (с учетом репутаций) мнение остального коллектива. Образно говоря, выражение (15) иллюстрирует принцип «всегда говори то же, что и большинство – сойдешь за умного» [8] .

Итак, на первых $T-1$ шагах манипулирующий агент максимизирует свою репутацию, а на последнем шаге использует ее для достижения целей информационного управления. Подчеркнем, что такое поведение хотя и выглядит рациональным с точки зрения здравого смысла, является только эвристикой, т. е. не дает точного решения задачи информационного управления. Причина заключается в том, что в суммарной репутации R^T агентов в периоде T (см. выражение (14)) фигурирует сумма репутаций всех агентов, а выбирая в каждом периоде свои действия в соответствии с принципом (13), в рамках предположения (*) первый агент, не учитывая этого, влияет на репутацию других агентов (см. также пример в шестом разделе). Избежать этого, превратив эвристическое решение в точное, можно определив, вместо (4), влияние и репутацию таким образом, чтобы суммарная репутация была постоянна [9] или обосновав тем или иным образом

[8] *Точнее говоря, выражение (13) все-таки подразумевает прогнозирование результатов обмена мнениями.*

[9] *Произведя нормировку индивидуальной репутации на суммарную, получим Марковскую модель, в которой вероятности стационарных состояний (принятия коллективом агентов решения, совпадающего с мнением одного из агентов) будут определяться относительными ре-*

гипотезу слабого влияния [9, 11].

4. Информационное противоборство

При рассмотрении моделей, учитывающих информированность агентов, традиционно выделяют три вложенных класса задач: моделирование информационного влияния, информационного управления и информационного противоборства (см. рис. 1).

Рис. 1. Информационное влияние, управление и противоборство

Модель информационного влияния дает возможность исследовать зависимость поведения субъекта от его информированности и, следовательно, от информационных воздействий. Имея модель информационного влияния, можно ставить и решать задачу информационного управления: какими должны быть информационные воздействия (с точки зрения управляющего субъекта), чтобы добиться требуемого поведения от управляемого субъекта. И, наконец, умея решать задачу информационного управления, можно моделировать *информационное противоборство* – взаимодействие нескольких субъектов, обладающих несовпадающими интересами и осуществляющих информационные воздействия на один и тот же управляемый субъект. Условно говоря, при рассмотрении информационного влияния анализируется один субъект; при

путациями соответствующих агентов.

рассмотрении информационного управления – как минимум два субъекта – управляющий и управляемый(-ые); при рассмотрении информационного противоборства – как минимум три субъекта – два (или более) управляющих и один или более управляемых (см. рис. 2).

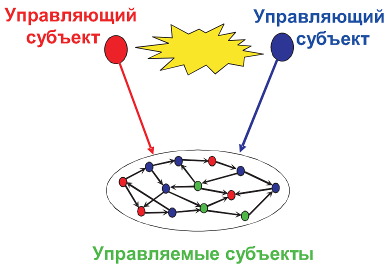


Рис. 2. Информационное противоборство

Наличие приведенных выше решений задач информационного влияния и информационного управления дает возможность перейти к постановке задач информационного противоборства в рамках описываемой модели социальной сети.

Предположим, что часть агентов – назовем их *активными* (их множество является для элементов этого множества общим знанием) – имеет возможность осуществлять манипулирование, выбирая из заданного множества на каждом (или в более общем случае – заранее оговоренном) шаге значения сообщаемых другим агентам своих мнений, естественно, учитывая не только влияния этих сообщений на итоговые мнения, но и принимая во внимание влияние этих сообщений на репутацию. Предпочтения активных агентов определены на множестве последовательностей итоговых мнений социальной сети по рассматриваемым вопросам. Требуется найти решение игры активных агентов – множества их равновесных (в том или ином смысле) действий. Используемая концепция равновесия определяется как содержательными соображениями, так и последовательностью и объемом получаемой агентами информации – можно рассматривать повторяющиеся, в развернутой форме, кооперативные и другие игры на социальных сетях.

Завершая качественное обсуждение постановочных задач информационного влияния, управления и противоборства, сделаем два методологических замечания.

Во-первых, при рассмотрении теоретико-игровых моделей информационного противоборства неизбежно возникнет каноническая для теории игр проблема того, как соотносится индивидуальная рациональность поведения агентов с оптимумом для их сообщества в целом (например, будет ли совершенное по подыграм равновесие [5] эффективным по Парето и т. д.). Ответ на этот вопрос следует, наверное, искать опять же традиционными для теории игр методами (см. обзор теории повторяющихся игр в [10]).

Во-вторых, как отмечалось выше, в рамках предложенной модели социальной сети задача информационного противоборства, фактически, сводится к *задаче динамической активной экспертизы с репутацией*, что представляется перспективным обобщением классической задачи теории коллективного выбора. В рамках динамической активной экспертизы с репутацией возникает ключевой для теории коллективного выбора вопрос о *манипулируемости* (strategy-proofness) результатов экспертизы – в каких случаях (при каких процедурах принятия решений, т. е. при каких процессах информационного влияния агентов друг на друга) агентам невыгодно манипулирование информацией, а выгодно сообщение достоверной информации о своих мнениях? Этот вопрос ждет своего ответа.

5. Пример манипулирования информацией и информационного управления

Рассмотрим пример взаимодействия трех агентов ($n = 3$) в течение двух периодов ($T = 2$). Начальные мнения агентов: $b_1^1 = 1$, $b_2^1 = 2$, $b_3^1 = 3$, $b_1^2 = 4$, $b_2^2 = 5$, $b_3^2 = 6$, $b_i^{t\,\min} = 0{,}5$,

$i = 1, 2, 3$, $t = 1, 2$, начальные репутации агентов одинаковы и равны единице ($r_1^1 = 1$, $r_2^1 = 1$, $r_3^1 = 1$), репутация меняется в соответствии с законом (12), в котором $\alpha = 1/2$, $\beta = 1$.

Сначала найдем результирующие мнения и репутации при отсутствии манипулирования (когда все агенты сообщают достоверную информацию). Суммарная репутация в первом периоде $R^1 = 3$. В соответствии с выражением (6) вычисляем $B^1 = 2$. В соответствии с выражением (12) находим репутации агентов во втором периоде: $r_1^2 = 2/3$, $r_2^2 = 2$, $r_3^2 = 2/3$. Опять же в соответствии с выражением (6) вычисляем итоговое мнение агентов в конце второго периода: $B^2 = 5$.

Предположим теперь, что первый агент осуществляет манипулирование с целью максимально приблизить результирующее мнение во втором периоде к своему мнению, то есть $B_*^2 = b_1^2$ (содержательная интерпретация такой целевой функции такая же, как и в моделях активной экспертизы [11]). Для этого он должен выбрать два числа: $s_1^1, s_1^2 \geqslant b_1^{\min} = 0{,}5$, минимизирующие (см. выражение (14)), следующую целевую функцию:

$$F(|B^T - B_*^T|) = |\frac{1}{R^2}[r_1^2 s_1^2 + r_2^2 b_2^2 + r_3^2 b_3^2] - B_*^T|. \tag{16}$$

Из выражения (6) имеем: $B^1(s_1^1) = (s_1^1 + 5)/3$. Подставляя выражение (12), найдем зависимость репутаций агентов во втором периоде от действий первого агента в первом периоде:

$$r_1^2(s_1^1) = \frac{6}{3 + 2|2s_1^1 - 5|}, \;\; r_2^2(s_1^1) = \frac{6}{3 + 2|1 - s_1^1|}\,,$$

$$r_3^2(s_1^1) = \frac{6}{3 + 2|4 - s_1^1|}\,.$$

Задача (16) окончательно примет вид:

$$|\frac{r_1^2(s_1^1)s_1^2 + 5r_2^2(s_1^1) + 6r_3^2(s_1^1)}{r_1^2(s_1^1) + r_2^2(s_1^1) + r_3^2(s_1^1)} - 4| \to \min_{s_1^1 \geqslant 1/2,\ s_1^2 \geqslant 1/2}. \tag{17}$$

Решение этой задачи – $s_1^1 = 2{,}5$, $s_1^2 = 2{,}5$ (репутации агентов во втором периоде равны: $r_1^2 = 2$, $r_2^2 = 1$, $r_3^2 = 1$). При этом целевая функция (17) принимает значение 0, т. е. цель управления полностью достижима при заданных ограничениях ($B^2 = 4 = 4 = B_*^2$). Отметим, что в рассмотренном примере эвристический алгоритм дает оптимальное решение.

Предположим теперь, что первый агент осуществляет манипулирование с целью максимально приблизить результирующее мнение в первом периоде к своему мнению, то есть $B_*^1 = b_1^1$, а второй агент осуществляет манипулирование с целью максимально приблизить результирующее мнение к своему мнению во втором периоде ($B_*^2 = b_2^2$). Тогда $B^1(s_1^1, s_2^1) = (s_1^1 + s_2^1 + 3)/3$. Найдем зависимость репутаций агентов во втором периоде от действий первого и второго агента в первом периоде:

$$r_1^2(s_1^1, s_2^1) = \frac{6}{3 + 2|2s_1^1 - s_2^1 - 3|}\,,$$

$$r_2^2(s_1^1, s_2^1) = \frac{6}{3 + 2|2s_2^1 - s_1^1 - 3|}\,,$$

$$r_3^2(s_1^1, s_2^1) = \frac{6}{3 + 2|6 - s_1^1 - s_2^1|}\,.$$

Первый агент должен выбрать s_1^1 и минимизировать свою целевую функцию: $F(B^1 - b_1^1) = |\frac{1}{3}[s_1^1 + s_2^1 + 3] - 1| = |\frac{1}{3}[s_1^1 + s_2^1]|$ при заданных ограничениях на мнения. Очевидно, что независимо от действий второго игрока минимум достигается при $s_1^1 = 0{,}5$.

Второй игрок в первом периоде выбирает s_2^1 для максимизации своей репутации. Для этого ему необходимо минимизировать (при заданных ограничениях на мнения): $|s_2^1 - \frac{1}{3}[s_1^1 + s_2^1 + 3]|$. Т. е. $s_2^1 = 1{,}75 = B^1$ (следовательно, первый агент не полностью достиг своей цели $1{,}75 - 1{,}0 = 0{,}75$). Репутации агентов во втором периоде равны $r_1^2 = 4/7$, $r_2^2 = 2$, $r_3^2 = 4/7$.

Во втором периоде второй игрок должен выбрать s_2^2 и минимизировать свою целевую функцию:

$$F(B^2 - b_2^2) = |\frac{4r_1^2(s_1^1, s_2^1) + s_2^2 r_2^2(s_1^1, s_2^1) + 6r_3^2(s_1^1, s_2^1)}{r_1^2(s_1^1, s_2^1) + r_2^2(s_1^1, s_2^1) + r_3^2(s_1^1, s_2^1)} - 5|$$

при заданных ограничениях на мнения. Откуда $s_2^2 = 5$ при полном достижении цели вторым агентом.

Аналогично можно рассматривать и другие игры с фиксированной последовательностью ходов.

6. Рефлексия агентов

Выше мы предполагали, что такие параметры социальной сети как начальные мнения каждого из агентов по каждому из вопросов, репутации агентов, законы формирования результирующего мнения и динамики репутации являются общим знанием среди агентов. Однако на практике это не всегда так: например, в больших социальных сетях агенты могут не знать всего множества членов сети, представления агентов о мнениях и/или репутации друг друга могут быть неполными и/или различающимися. Для адекватного отражения подобных ситуаций целесообразно рассматривать неопределенность (неполную информированность) и/или нетривиальную взаимную информированность агентов. Неопределенность в задачах информационного управления в социальных сетях может вводиться по аналогии с тем, как это делается в других моделях принятия решений и теоретико-игровых моделях (см., например, [5, 12]). Поэтому рассмотрим кратко аспекты рефлексии агентов.

Наряду с *информационной рефлексией*, основанной на асимметричной информированности агентов, интерес представляет более традиционная для теоретико-игровых моделей *стратегическая рефлексия* – процесс и результат размышления агентов о том, какое действие выберут оппоненты. Однако здесь необходимо сделать важное замечание: в рамках данной статьи агенты не являются активными участниками ситуации, поскольку не выбирают свое действие и не имеют собственных предпочтений. Они лишь пассивно (или «доверчиво») формируют свое мнение на основе мнений других. Исключение представляет манипулирующий агент – он как раз является игроком, т. е. стремится достичь определенной цели и выбирает наиболее оптимальное действие для ее достижения. Иными словами, «обычные» агенты и игрок-«манипулятор» – это два принципиально разных объекта моделирования. Их различие незаметно в простых случаях (см. пример в разделе 6), но в более сложных (например, когда несколько манипулирующих агентов осуществляют информационное противоборство) оно весьма существенно. Повторим: это различие между агентом, меняющим свое мнение в зависимости от мнений других, и игроком, который формирует мнение других (не меняя при этом своего), преследуя определенные цели. Подобный подход принят, в частности, в работе [3], когда узлы сети рассматриваются как *агенты*, которые управляются «более интеллектуальными» *игроками* (в частном случае игрок может являться агентом или их группой).

Как нам представляется, возможны два подхода к моделированию игроков. Первый состоит в том, что игроки сами не являются элементами социальной сети (агентами), а лишь воздействуют на нее тем или иным способом. Второй подход состоит в рассмотрении игроков как агентов (элементов социальной сети), для которых репутация других агентов не имеет значения и которые не меняют своего мнения. Проработка данных подходов, однако, выходит за рамки данной статьи.

В качестве иллюстративного примера рассмотрим следующую модель принятия произвольным агентом из множества N решений (случай стратегической рефлексии [12]) о сообщаемом другим агентам своем мнении [10] : пусть он заинтересован в том, чтобы результирующее мнение совпадало с сообщенным им мне-

[10] *Если каждый из агентов честно сообщает свое мнение, то рассмотрение рефлексии вряд ли имеет смысл.*

нием [11] . При этом его «вес» (репутация) содержательно в глазах оппонентов будет высок – все сообщество «соглашается с ним».

Если рефлексия отсутствует, то из (6) следует, что i-ый агент сообщит мнение (см. также выражение (15)):

$$s_i^*(r, b{-}i) = \frac{\sum\limits_{j \neq i} r_j b_j}{R - r_i}, \tag{18}$$

где $b_{-i} = (b_1, b_2, \ldots, b_{i-1}, b_{i+1}, \ldots, b_n)$, $i \in N$. Содержательно выражение (18) означает, что при рассматриваемом принципе принятия решений агент не обращает внимания на свое мнение и сообщает «среднее» (взвешенное с учетом репутаций) мнение остальных агентов. Вектор (18) можно условно назвать *«рефлексивным равновесием»* (первого ранга, – см. ниже).

Возникает вопрос, какие предположения о принципах принятия решений оппонентами использует агент. Если предположить, что каждый агент использует принцип принятия решений типа (18), то единственным «равновесием» будет сообщение всеми агентами одного и того же мнения, причем, например, в случае одинаковых репутаций агентов равновесием Нэша это «равновесие» будет только при условии, что и истинные мнения всех агентов одинаковы.

Поэтому добавим фактор стратегической рефлексии, т. е. будем считать, что, выбирая свое сообщение в соответствии с выражением (18), i-ый агент полагает, что все остальные агенты **честно сообщат свои истинные мнения** (это предположение в рамках приведенного выше обсуждения различий между «агентами» и «игроками» означает, что в рассматриваемом случае все агенты являются «не очень интеллектуальными» игроками [12]). Если все агенты ведут себя так же, то сложится следующее ито-

---

[11] *Если каждый из агентов честно сообщает свое мнение, то рассмотрение рефлексии вряд ли имеет смысл.*

[12] *Более интеллектуальный игрок должен был бы, как минимум, предполагать, что остальные агенты-игроки также способны к рефлексии.*

говое мнение:

$$\hat{B} = \frac{1}{R} \sum_{i \in N} \frac{\sum\limits_{j \neq i} r_j b_j}{R - r_i} r_i \,. \tag{19}$$

В случае двух агентов выражение (19) примет вид $\hat{B} = \dfrac{b_1 r_2 + b_2 r_1}{r_1 + r_2}$, т. е., осуществляя стратегическую рефлексию, агенты «обмениваются» своими репутациями и сообщают не свое мнение, а мнение оппонента.

Условием стабильности [14] рефлексивного равновесия (18) можно считать условие совпадения результирующих мнений, определяемых выражениями (6) и (19):

$$\sum_{i \in N} r_i [s_i^*(r, b_{-i}) - b_i] = 0. \tag{20}$$

Перейдем теперь к краткому качественному обсуждению случая *информационной рефлексии*, которая в соответствии с [12] предшествует стратегической. Обозначим Σ – множество всевозможных конечных последовательностей индексов из N, $r_{i\sigma}$ – представления i-го агента о репутации σ-агента [12], $i \in N$, $\sigma \in \Sigma$. Например, r_{ij} – представления i-го агента о репутации j-го; r_{ijk} – представления i-го агента о представлениях j-го агента о репутации k-го агента и т. д. (в случае общего знания $r_{ij} = r_j$, $i, j \in N$). К такой конструкции применим аппарат теории рефлексивных игр [12], с помощью которого можно искать *информационные равновесия*, исследовать их стабильность и т. д. (соответствующий пример рассматривается в следующем разделе), что представляется актуальной задачей будущих исследований.

В заключение настоящего раздела отметим, что информационные воздействия, направленные на формирование той или иной структуры информированности агентов в социальной сети о репутациях друг друга, также являются разновидностью информационного управления. Исследование этого вида информационного управления, наряду с изучением такого его вида как манипулирование агентами информацией (см. выше), также представляется перспективным направлением будущих исследований.

7. Примеры рефлексии агентов

Рассмотрим пример стратегической рефлексии при взаимодействии трех агентов ($n = 3$). Начальные мнения агентов: $b_1 = 1$, $b_2 = 2$, $b_3 = 3$, репутации агентов одинаковы и равны единице. Если бы все агенты честно сообщали свои мнения, то сложилось бы результирующее мнение $B = 2$.

В соответствии с выражением (18) находим:

$$s_1^* = 5/2,\ s_2^* = 2,\ s_3^* = 3/2\,.$$

При таких сообщениях результирующее мнение $\hat{B} = 2$, т. е. условие (20) выполнено.

Примером невыполнения условия (20) является ситуация, когда мнение третьего агента $b_3 = 4$. Тогда

$$s_1^* = 3,\ s_2^* = 5/2,\ s_3^* = 3/2 \text{ и } \hat{B} = 7/3 > B = 2\,.$$

Рассмотрим пример информационной рефлексии при взаимодействии двух агентов ($n = 2$). Начальные мнения агентов: $b_1 = 1$, $b_2 = 2$; репутации агентов: $r_1 = 2$, $r_2 = 1$. Если бы все агенты честно сообщали свои мнения, то сложилось бы результирующее мнение $B = 4/3$. При стратегической рефлексии результат будет $5/3$.

Предположим, что имеет место следующая структура информированности: $1 \to 2 \leftrightarrow 21$, т. е. второй агент имеет свои представления $r_{21} = 3$ о репутации первого агента и считает, что это является общим знанием. Первый агент об этом полностью информирован. Найдем информационное равновесие: второй агент в соответствии с выражением (18) выберет $s_2^*(r_{21}, r_2, b_1) = b_1$ (отметим, что в случае двух агентов этот выбор не зависит от представлений второго агента о репутации первого), рассчитывая на такое же сообщение первого агента; первый же агент выберет свой наилучший ответ s_1^* из условия $\dfrac{s_1^* r_1 + b_1 r_2}{r_1 + r_2} = s_1^*$, т. е. $s_1^* = b_1$. Информационное равновесие (b_1, b_1) *стабильно*, но является *ложным равновесием*, так как приводит к итоговому мнению $2/3$, отличающемуся от итогового мнения $B = 4/3$ в условиях полного знания.

8. Заключение

Перспективным направлением дальнейших исследований представляется, во-первых, рассмотрение обобщений предложенных выше моделей за счет ослабления вводимых предположений, в первую очередь – допущение неполной и асимметричной информи-рованности агентов. Во-вторых, представляется целесообразной разработка теоретико-игровых моделей информационного управления и информационного противоборства, учитывающих неопределенность, рефлексию агентов и возможность образования их коалиций.

Литература

1. *Глоссарий по теории управления и ее приложениям* // http://glossary.ru.
2. ГУБАНОВ Д. А. *Обзор онлайновых систем репутации /доверия.* – 2009. – М.: ИПУ РАН, Интернет-конференция по проблемам управления (www.mtas.ru/forum). – 25 с.
3. ГУБАНОВ Д. А., НОВИКОВ Д. А., ЧХАРТИШВИЛИ А. Г. *Модели информационного влияния и информационного управления в социальных сетях* // Проблемы управления. – 2009.
4. ГУБАНОВ Д. А., НОВИКОВ Д. А., ЧХАРТИШВИЛИ А. Г. *Модели влияния в социальных сетях (обзор)* // Управление большими системами. – 2009.

5. ГУБКО М. В., НОВИКОВ Д. А. *Теория игр в управлении организационными системами*. – М.: Синтег, 2002. – 148 с.
6. ДОЦЕНКО Е. Л. *Психология манипуляции: ф еномены, механизмы и защита*. – М.: ЧеРо, 1997. – 344 с.
7. ЕРМАКОВ Н. С., ИВАЩЕНКО А. А., НОВИКОВ Д. А. *Модели репутации и норм деятельности*. – М.: ИПУ РАН, 2005. – 67 с.
8. КЕМЕНИ ДЖ., СНЕЛЛ ДЖ. *Конечные цепи Маркова*. – М.: Наука, 1970.
9. НОВИКОВ Д. А. *Математические модели формирования и функционирования команд*. – 2008. – 188 с.
10. НОВИКОВ Д. А., СМИРНОВ И. М., ШОХИНА Т. Е. *Механизмы управления динамическими активными системами.* – М.: ИПУ РАН, 2002. – 124 с.
11. НОВИКОВ Д. А. *Теория управления организационными системами*. 2-е издание. – М.: Физматлит, 2007.
12. НОВИКОВ Д. А., ЧХАРТИШВИЛИ А. Г. *Рефлексивные игры.* – М.: Синтег, 2003. – 227 с.
13. *Словарь иностранных слов*. – М.: Русский язык, 1982.
14. ЧХАРТИШВИЛИ А. Г. *Теоретико-игровые модели информационного управления.* – М.: ПМСОФТ, 2005. – 160 с.
15. *Oxford English Dictionary*: http://www.askoxford.com.

MODELS OF REPUTATION AND INFORMATION CONTROL IN SOCIAL NETWORKS

Dmitry Gubanov, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, post-graduate student (DimaGubanov@mail.ru).
Dmitry Novikov, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Doctor of Sc., Professor, Deputy director (novikov@ipu.ru).
Alexander Chkhartishvili, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Doctor of Sc., Leading researcher(sandro_ch@mail.ru).

Abstract: The models of social networks are considered which allow to formulate and solve reputation formation problems. The reputation is further used in information control.

Keywords: social network, reputation, game theory, revelation of information, information control.

УДК 518.9 + 517.9
ББК 65.050.2

СТОХАСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ УСТОЙЧИВОГО СОВМЕСТНОГО ПРЕДПРИЯТИЯ [1]

Зенкевич Н. А. [2]
(Высшая школа менеджмента, Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург)
Колабутин Н. В. [3]
(Факультет прикладной математики – процессов управления, Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург)
Янг Д. В. К. [4]
(Центр теории игр, Гонконгский Баптистский университет, Гонконг)

Исследована модель динамической кооперации при создании совместного предприятия. Получено теоретическое решение задачи и проведено количественное моделирование на основе разработанного математического обеспечения как для случая детерминированной, так и стохастической динамики. Влияние случайных процессов на развитие компаний в совместном предприятии описано с помощью многомерного стохастического процесса Ито. В результате количественного моделирования получено, что при одинаковых значениях параметров и начальных данных ожидаемая прибыль определяется с помощью динамического вектора Шепли, который является устойчивым решением кооперативной игры. При различных значениях параметров устойчивость

---

[1] *Текст приводится в соответствии с изданием «Математическая теория игр и ее приложения. – 2009. – Т. 1. №1».*

[2] *Николай Анатольевич Зенкевич, кандидат физико-математических наук, доцент (zenkevich@gsom.pu.ru).*

[3] *Николай Валерьевич Колабутин, аспирант (kolabutin_Nik@mail.ru).*

[4] *Дэвид Янг, доктор физико-математических наук, профессор (wkyeung@hkbu.edu.hk).*

вектора Шепли нарушается, и наблюдается непрерывное перераспределение совместной прибыли. В этом случае строится новое решение на основе процедуры распределения дележа, обладающее требуемыми свойствами устойчивости.

Ключевые слова: дифференциальная стохастическая игра, кооперативное решение, временная и позиционная состоятельность кооперативных соглашений, процедура распределения выигрыша (ПРВ), процедура распределения дележа (ПРД), позиционно состоятельный вектор Шепли, устойчивое совместное предприятие.

Введение

Кооперация представляет собой одну из основных форм поведения в бизнесе, при этом по многим практическим причинам важно, чтобы долгосрочная кооперация была устойчивой на всем временном промежутке ее реализации, при этом устойчивость понимается в первую очередь как *динамическая устойчивость* или состоятельность во времени кооперативных соглашений. Это свойство кооперативного соглашения означает, что в каждой подыгре с начальными условиями на оптимальной кооперативной траектории выигрыши игроков соответствуют тем принципам выбора, согласно которым был определен оптимальный дележ во всей игре.

Динамическая устойчивость (временная состоятельность) принципов оптимальности в дифференциальных играх подробно исследовалась в работах специалистов по теории игр. А.Ори [5] заметил временную несостоятельность арбитражной схемы Нэша при ее использовании в качестве принципа оптимальности в дифференциальной игре. Л.А. Петросян [1] математически формализовал понятие динамической устойчивости (временной состоятельности). Несколько позже временную несостоятельность долгосрочных планов обнаружили при решении одной специальной задачи Ф. Кидланд и Е. Прескотт [6], получившие Нобелевскую премию в области экономики в 2004 г. Впервые в журнальной литературе термин динамическая устойчивость появился в работе С.В. Чистякова [3]. Этим же автором практически одновременно с Л.А. Петросяном, сформулирована проблема сильной динамической устойчивости [4]. Л.А.Петросян и Н.Н.Данилов [2] ввели «понятие процедуры распределения дележа» для кооперативных решений. В работе [14] исследовано кооперативное равновесие в дифференциальных играх, в котором система угроз обеспечивает развитие игры по кооперативному пути. Л.А.Петросян со своими учениками провел подробный анализ динамической устойчивости в кооперативных дифференциальных играх и предложил метод регуляризации для построения динамически устойчивых (состоятельных во времени) решений [8, 9, 11]. Подробный анализ проблемы динамической устойчивости и связанных с ней прикладных проблемах см. в [12]. В работе [15] впервые исследованы проблемы динамической устойчивости для дифференциальных игр со стохастической динамикой, которые в дальнейшем систематически изложены в книге [16].

В данной работе рассмотрена стохастическая модель совместного предприятия, образованного тремя фирмами с целью максимизации прибыли за счет взаимной передачи технологий. Предполагается, что образование совместного предприятия является результатом долгосрочного кооперативного соглашения. Несмотря на то, что формально данная модель не вкладывается в рамки класса игр, исследованных в [4], проведенное численное моделирование показывает, что все три свойства устойчивости выполняются, если в качестве принципа оптимальности выбран динамический вектор Шепли [12, 18].

Изложение результатов проведенного исследования начнем с рассмотрения обобщенного винеровского процесса, определяющего динамику конфликтно-управляемого процесса.

1. Обобщенный винеровский процесс

Известно, что переменные, которые с течением времени меняют свое значение случайным образом, следуют стохастическому процессу. Стохастические процессы могут рассматриваться с дискретным и непрерывным временем. Рассмотрим сначала случай непрерывного времени [2].

Обобщенный винеровский процесс может быть представлен в виде:

$$dx = adt + bdz, \tag{1}$$

где a и b – константы, а величина dz равна: $dz = \theta\sqrt{dt}$, θ – случайная величина, подчиняющаяся закону стандартного нормального распределения.

Первое слагаемое adt в правой части уравнения (1) предполагает, что средний ожидаемый темп роста величины x в единицу времени есть a. Без второго слагаемого в правой части, процесс (1) имеет вид $dx = adt$ или $x = x_0 + at$, где x_0 – значение состояния процесса x при $t = 0$ и является детерминированным. Второе слагаемое bdz в правой части (1) имеет смысл шума в развитии данного процесса. Эта неопределенность описывается винеровским процессом и характеризуется параметром b.

На малых промежутках времени Δt изменение значений x и Δx может быть записано:

$$\Delta x = a\Delta t + b\theta\sqrt{\Delta t}, \tag{2}$$

где θ – случайная величина, подчиняющаяся закону стандартного нормального распределения. Уравнение (2) описывает обобщенный винеровский процесс при дискретном времени.

Дальнейшее развитие идеи винеровского процесса приводит к процессу Ито, в котором коэффициенты a и b являются функциями состояния x и времени t:

$$dx = a(x,t)dt + b(x,t)dz. \tag{3}$$

В дискретном случае процесс Ито, может быть представлен следующим образом:

$$\Delta x = a(x,t)\Delta t + b(x,t)\theta\sqrt{\Delta t}. \tag{4}$$

В приведенной ниже модели будет применяться уравнение (3), а для его аппроксимации при численном моделировании применяется уравнение (4).

2. Стохастическая модель совместного предприятия

Рассмотрим случай, когда три компании (игроки $i \in N = \{1, 2, 3\}$) заключают кооперативное соглашение на промежуток времени $[t_0, T]$ об организации совместного предприятия с целью максимизации совместной прибыли. Прибыль компании i от совместного предприятия на этом промежутке равна

$$E_{t_0}\left\{\int_{t_0}^{T}\left[P_i[x_i(s)]^{\frac{1}{2}} - c_i u_i(s)\right]\exp[-r(s-t_0)]ds + \right. \tag{5}$$
$$\left. + \exp[-r(T-t_0)]q_i[x_i(T)]^{\frac{1}{2}}\right\}, i \in N$$

Здесь: E_{t_0} – оператор математического ожидания; P_i, c_i, и q_i – положительные константы, r – процентная ставка; $x_i(s) \subset R^+$ – технологический уровень компании i в момент s, который мы будем называть состоянием игрока i, $u_i(s) \subset R^+$ – инвестиции в технологическое развитие, (управлением игрока i); $P_i[x_i(s)]^{1/2}$ – чистая операционная прибыль компании i при технологическом уровне $x_i(s)$; $c_i u_i(s)$ – стоимость инвестиций, $q_i\left[x_i(T)\right]^{1/2}$ – ликвидационная стоимость технологии компании в момент T.

Будем предполагать, что развитие технологии компании i при независимом функционировании происходит в соответствии с дифференциальным уравнением Ито:

$$dx_i(s) = \left[\alpha_i\left[u_i(s)x_i(s)\right]^{1/2} - \delta x_i(s)\right]ds + \sigma_i x_i(s)dz_i(s),\ x_i(t_0) = x_i^0,$$

где $\alpha_i\left[u_i(s)x_i(s)\right]^{1/2}$ – прибавка в технологии, полученная при обьеме инвестиций $u_i(s)$, δ – параметр устаревания технологии; последнее слагаемое в правой части представляет собой неопределенность в развитии технологии (так называемый «белый шум»); $dz_i(s) = \theta_i\sqrt{ds}$ – стандартный винеровский процесс и θ_i – случайная величина, подчиняющаяся закону стандартного нормального распределения, а σ_i – положительная константа (параметр волатильности).

Предполагается, что если несколько компаний заключают кооперативное соглашение (объединяются) для организации совместного предприятия с целью максимизации совместной прибыли, то компания - участник кооперативного соглашения может получить дополнительные возможности в развитии своей технологии. Поэтому в совместном предприятии динамика развития технологии изменяется. В случае, когда все три фирмы объединяются в совместное предприятие, развитие технологии компании i принимает вид

$$\begin{gathered}
dx_i(s) = [\alpha_i\left[u_i(s)x_i(s)\right]^{1/2} + b_j^{[j,i]}\left[x_j(s)x_i(s)\right]^{1/2} + \\
+b_k^{[k,i]}\left[x_k(s)x_i(s)\right]^{1/2} - \delta x_i(s)]ds + \sigma_i x_i(s) dz_i(s) \\
x_i(t_0) = x_i^0, \quad i,j,k \in N = \{1,2,3\},\ i \neq j \neq k,
\end{gathered} \tag{6}$$

где $b_j^{[j,i]}$ и $b_k^{[k,i]}$ – положительные константы, характеризующие эффект передачи технологии компании i от компаний j и k соответственно. Прибыль совместного предприятия определяется математическим ожиданием от суммы прибылей входящих в него компаний

$$\begin{gathered}
E_{t_0}\left\{\int\limits_{t_0}^{T}\sum_{i=1}^{3}\left[P_i[x_i(s)]^{1/2} - c_i u_i(s)\right]\exp\left[-r(s-t_0)\right]ds\right. \\
\left. + \sum_{i=1}^{3}\exp\left[-r(T-t_0)\right]q_i\left[x_i(T)\right]^{1/2}\right\}.
\end{gathered} \tag{7}$$

3. Выигрыш коалиции

Предполагаемая прибыль коалиции K определяется максимизацией математического ожидания суммы входящих в коалицию компаний:

$$E_{t_0}\left\{\int\limits_{t_0}^{T}\sum_{i\in K}\left[P_i[x_i(s)]^{1/2}-c_iu_i(s)\right]\exp\left[-r(s-t_0)\right]ds\right. \tag{8}$$

$$\left.+\sum_{i\in K}\exp\left[-r(T-t_0)\right]q_i\left[x_i(T)\right]^{1/2}\right\},$$

при этом

$$dx_i(s)=$$

$$\left[\alpha_i\left[u_i(s)x_i(s)\right]^{1/2}+\sum_{j\in K, j\neq i}b_j^{[j,i]}\left[x_j(s)x_i(s)\right]^{1/2}-\delta x_i(s)\right]ds \tag{9}$$

$$+\sigma_i x_i(s)dz_i(s),\quad x_i(t_0)=x_i^0,\quad i\in K\subset N=\{1,2,3\}$$

Для простоты записи перепишем (9) в виде:

$$dx_K(s)=f^K[s,x_i(s),u_K^{(t_0)K*}(s,x_K(s))]ds+\sigma_K x_K(s)dz_K(s), \tag{10}$$

Здесь $dx_K(s)=\{dx_i(s)\}_{i\in K}$, $dz_K(s)=\{dz_i(s)\}_{i\in K}$,

$$f^K(s)=\left\{f_i^K(s)\right\}_{i\in K}=$$

$$=\left\{\alpha_i\left[u_i(s)x_i(s)\right]^{1/2}+\sum_{j,i\in K,\, j\neq i}b_j^{[j,i]}\left[x_j(s)x_i(s)\right]^{1/2}-\delta x_i(s)\right\}_{i\in K},$$

$$\sigma_K x_K(s) = \{\sigma_i x_i(s)\}_{i \in K}\,.$$

Обозначим через $\Gamma\,[K; t_0, x_0]$ стохастическую задачу оптимального управления (8)-(10). Теоретическое решение данной задачи было найдено в [16]. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Множество оптимальных управлений* $\{u_K^*(t)\}$ *дает множество оптимальных решений задачи* $\Gamma\left[K; t_0, x_K^0\right]$, *если существует непрерывно дифференцируемая функция* $W^{(t_0)K}(t, x_K) \,:\, [t_0, T] \times \prod\limits_{j \in K} R^{m_j} \to R$, *являющаяся решением уравнения Беллмана:*

$$-W_t^{(t_0)K}(t, x_K) - \tfrac{1}{2} \sum_{h,\zeta=1}^{m} \Omega_K^{h\zeta}(t, x_K) W_{x^h x^\zeta}^{(t_0)K}(t, x_K) =$$
$$\max_{u_K} \left\{ \sum_{j \in K} g^j\,[t, x_j, u_j] \exp\left[-\int_{t_0}^{t} r(y)dy\right] + \right.$$
$$\left. + \sum_{j \in K} W_{x_j}^{(t_0)K}(t, x_K) f_j^K\,[t, x_K, u_j] \right\},$$
$$W^{(t_0)K}(T, x_K) = \sum_{j \in K} \exp\left[-\int_{t_0}^{T} r(y)dy\right] q^j(x_j),$$

где $g^i\,[t, x_i, u_i] \exp\left[-\int_{t_0}^{t} r(y)dy\right]$ *– мгновенная прибыль игрока* i *в момент* t*, дисконтированная на момент начала игры,* $\Omega_K(t, x_K)$ *– диагональная матрица с элементами* $\sigma_i x_i(s), \quad i \in K \subseteq N$, $\Omega_K^{h\zeta}(t, x_K)$ *– элемент в строке* h *и столбце* ζ *матрицы* $\Omega_K(t, x_K)$.

Определим функцию $W^{(t_0)K}(t, x_K)$ как максимальный выигрыш коалиции K на временном промежутке $[t, T]$, $t_0 \leqslant t \leqslant T$ (функция Беллмана).

Рассмотрим задачу $\Gamma\,[K; \tau, x_K^\tau]$, которая начинается в момент $\tau \in [t_0, T]$ в начальном состоянии x_K^τ. Используя теорему 1, можно показать, что:

$$\exp\left[\int_{\tau}^{t} r(y)dy\right] W^{(\tau)K}(t, x_K^t) = W^{(t)K}(t, x_K^t),$$

$$u_K^{(\tau)K*}(t, x_K^t) = u_K^{(t)K*}(t, x_K^t), \quad t_0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant T\,.$$

Заметим, что уровень технологии компании i увеличивает доход, так как $g^i[s, x_i(s), u_i(s)]$ и $q^i(x_i(T))$ монотонно возрастают по $x_i(t)$, компания-участник кооперации K может получить новые навыки и технологии от другой фирмы в коалиции, поэтому имеет место супераддитивность функции Беллмана, т. е.

$$W^{(\tau)K}(\tau, x_K^\tau) \geqslant W^{(\tau)L}(\tau, x_L^\tau) + W^{(\tau)K\setminus L}(\tau, x_{K\setminus L}^\tau), \quad L \subset K \subseteq N,$$

где $K \setminus L$ – дополнение L до K.

В нашем случае уравнение Беллмана принимает вид:

$$-W_t^{(t_0)K}(t, x_K^t) - \frac{1}{2}\sum_{i\in K} \sigma_i^2 x_i^2 W_{x_i x_i}^{(t_0)K}(t, x_K) =$$

$$\max_{u_k}\{\sum_{i\in K}[P_i x_i^{\frac{1}{2}}(t) - c_i u_i(t)]e^{-r(t-t_0)} + \tag{11}$$

$$+\sum_{i\in K} W_{x_i}^{(t_0)K}(t, x_K^t) f_i^K[t, x_K^t, u_K^t]\},$$

$$W^{(t_0)K}(T, x_K^T) = \sum_{i\in K} e^{-r(T-t_0)} q_i(x_i(T));$$

при условии

$$x_i^*(t) = x_i^0 + \int_{t_0}^{t} f_i^N[s, x_i(s), u_i^{(t_0)N*}(s, x_N(s))]ds +$$

$$+\int_{t_0}^{t} \sigma_i[s, x_i(s)]dz_i(s),\ i \in N.$$

Рассмотрим три возможных варианта формирования коалиции в нашем случае. Для одной фирмы i уравнение (11) принимает вид:

$$-W_t^{(t_0)i}(t,x_i) - \frac{1}{2}W_{x_ix_i}^{(t_0)i}(t,x_i)\sigma_i^2 x_i^2 =$$

$$\max_{u_i}\left\{ \left[P_i x_i^{1/2} - c_i u_i\right] e^{-r(t-t_0)} + W_{x_i}^{(\tau)i}(t,x_i)\left[\alpha_i (u_i x_i)^{1/2} - \delta x_i\right] \right\},$$

(12) $W^{(t_0)i}(T,x_i) = \exp\left[-r(T-t_0)\right] q_i \left[x_i\right]^{1/2}, \quad i \in \{1,2,3\}.$
Из этого уравнения получаем оптимальное управление:

(13) $u_i = \dfrac{\alpha_i^2}{4(c_i)^2}\left[W_{x_i}^{(t_0)i}(t,x_i)\exp\left[r(t-t_0)\right]\right]^2 x_i,\ i \in \{1,2,3\}.$

Заменяя u_i в уравнении Беллмана, имеем:

(14) $$-W_t^{(t_0)i}(t,x_i) - \frac{1}{2}W_{x_ix_i}^{(t_0)i}(t,x_i)\sigma_i^2 x_i^2 =$$

$$P_i x_i^{1/2}\exp\left[-r(t-t_0)\right] - \frac{\alpha_i^2}{4c_i}\left[W_{x_i}^{(t_0)i}(t,x_i)\right]^2 \exp\left[r(t-t_0)\right] x_i$$

$$+\frac{\alpha_i^2}{2c_i}\left[W_{x_i}^{(t_0)i}(t,x_i)\right]^2 \exp\left[r(t-\tau)\right] x_i - \delta W_{x_i}^{(t_0)i}(t,x_i) x_i.$$

Решая полученное уравнение, получаем:

(15) $W^{(t_0)i}(t,x_i) = \left[A_i^{\{i\}}(t) x_i^{1/2} + C_i^{\{i\}}(t)\right]\exp\left[-r(t-t_0)\right],$

где $\dot{A}_i^{\{i\}}(t) = \left(r + \frac{\sigma_i^2}{8} + \frac{\delta}{2}\right) A_i^{\{i\}}(t) - P_i$, $\dot{C}_i^{\{i\}}(t) = rC_i^{\{i\}}(t) - \frac{\alpha_i^2}{16c_i}\left[A_i^{\{i\}}(t)\right]^2$,

(16) $A_i^{\{i\}}(T) = q_i,\ C_i^{\{i\}}(T) = 0, \quad i \in \{1,2,3\}.$

Первое уравнение в системе (16) – линейное дифференциальное уравнение первого порядка относительно $A_i^{\{i\}}(t)$, которое решается независимо с помощью стандартной техники. Подстановка решения $A_i^{\{i\}}(t)$ во второе уравнение (16) дает линейное дифференциальное уравнение относительно $C_i^{\{i\}}(t)$, которое затем легко решается. Явное решение здесь не приведено в силу громоздкости записи окончательного результата.

Легко получить, что

$$W^{(\tau)i}(t, x_i) = \left[A_i^{\{i\}}(t)x_i^{1/2} + C_i^{\{i\}}(t)\right] \exp\left[-r(t-\tau)\right] \tag{17}$$

и оптимальное управление для компании $i \in \{1, 2, 3\}$ равно:

$$u_i(t) = \frac{\alpha_i^2}{16(c_i)^2}\left[A_i^{\{i\}}(t)\right]^2. \tag{18}$$

Соответственно уравнение (9) принимает вид:

$$\begin{gathered} dx_i(s) = \left[\frac{\alpha_i^2}{4c_i}A_i^{\{i\}}(s)x_i(s)^{1/2} - \delta x_i(s)\right] ds + \sigma_i x_i(s) dz_i(s), \\ x_i(t_0) = x_i^0, \quad i \in K \subset N = \{1, 2, 3\}. \end{gathered} \tag{19}$$

Решая (19), получаем оптимальные траектории для индивидуального случая.

Если три фирмы образуют совместное предприятие, то уравнение Беллмана принимает вид:

$$-W_t^{(t_0)\{1,2,3\}}(t,x_1,x_2,x_3) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} W_{x_i x_i}^{(t_0)\{1,2,3\}}(t,x_1,x_2,x_3)\sigma_i^2 x_i^2 =$$

$$(20) \qquad = \max_{u_i}\left\{\sum_{i=1}^{3}\left[P_i x_i^{1/2} - c_i u_i\right]\exp\left[-r(t-t_0)\right] + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{3} W_{x_i}^{(\tau)i}(t,x_i)\left[\alpha_i(u_i x_i)^{\frac{1}{2}} + b_j^{[j,i]}\left[x_j x_i\right]^{\frac{1}{2}} + b_k^{[k,i]}\left[x_k x_i\right]^{\frac{1}{2}} - \delta x_i\right]\right\},$$

$$W^{(t_0)\{1,2,3\}}(T,x_1,x_2,x_3) = \sum_{i=1}^{3}\exp\left[-r(T-t_0)\right] q_i\left[x_i\right]^{1/2},$$

$$i,j,k \in N = \{1,2,3\}, \quad i \neq j \neq k\,.$$

Проведя максимизацию, получаем:

$$(21) \quad u_i = \frac{\alpha_i^2}{4(c_i)^2}\left[W_{x_i}^{(t_0)\{1,2,3\}}(t,x_1,x_2,x_3)e^{r(t-t_0)}\right]^2 x_i,\ i \in \{1,2,3\}\,.$$

Подставляя (21) в (20), получаем:

$$-W_t^{(t_0)\{1,2,3\}}(t,x_1,x_2,x_3) - \frac{1}{2}W_{x_ix_i}^{(t_0)\{1,2,3\}}(t,x_1,x_2,x_3)\sigma_i^2x_i^2 =$$

$$\sum_{i=1}^{3}\left[P_i x_i^{1/2}e^{r(t-t_0)} - \frac{\alpha_i^2 x_i}{4c_i}\left[W_{x_i}^{(t_0)\{1,2,3\}}(t,x_1,x_2,x_3)\right]^2 e^{r(t-t_0)}\right]$$

$$+\sum_{i=1}^{3}W_{x_i}^{(t_0)\{1,2,3\}}(t,x_1,x_2,x_3)\left[\frac{\alpha_i^2}{2c_i}\left[W_{x_i}^{(t_0)\{1,2,3\}}(t,x_1,x_2,x_3)\right]^2\cdot\right.$$

$$\left.\cdot e^{r(t-t_0)}x_i + b_j^{[j,i]}\left[x_jx_i\right]^{1/2} + b_k^{[k,i]}\left[x_kx_i\right]^{1/2} - \delta x_i\right]$$

$$W^{(t_0)\{1,2,3\}}(T,x_1,x_2,x_3) = \sum_{i=1}^{3}\exp\left[-r(T-t_0)\right]q_i\left[x_i\right]^{1/2} \tag{22}$$

для $i,j,k \in N = \{1,2,3\}, \quad i \neq j \neq k.$

Решая (22), получаем:

$$W^{(t_0)\{1,2,3\}}(t,x_1,x_2,x_3) = \left[A_1^{\{1,2,3\}}(t)x_1^{1/2} + A_2^{\{1,2,3\}}(t)x_2^{1/2}\right.$$

$$\left. +A_3^{\{1,2,3\}}(t)x_3^{1/2} + C^{\{1,2,3\}}(t)\right]\exp\left[-r(t-t_0)\right], \tag{23}$$

где $A_1^{\{1,2,3\}}(t), A_2^{\{1,2,3\}}(t), A_3^{\{1,2,3\}}(t)$ и $C^{\{1,2,3\}}(t)$ удовлетворяют системе

$$\dot{A}_i^{\{1,2,3\}}(t) =$$

$$\left(r + \frac{\sigma^2}{8} + \frac{\delta}{2}\right)A_i^{\{1,2,3\}}(t) - \frac{b_i^{[i,j]}}{2}A_j^{\{1,2,3\}}(t) - \frac{b_i^{[i,k]}}{2}A_k^{\{1,2,3\}}(t) - P_i,$$

$$i,j,k \in N = \{1,2,3\}, \quad i \neq j \neq k, \tag{24}$$

$$\dot{C}^{\{1,2,3\}}(t) = rC^{\{1,2,3\}}(t) - \sum_{i=1}^{3} \frac{\alpha_i^2}{16c_i} \left[A_i^{\{1,2,3\}}(t)\right]^2,$$

$$A_i^{\{1,2,3\}}(T) = q_i\,,\; C_i^{\{1,2,3\}}(T) = 0.$$

Первые три уравнения в системе (24) образуют систему трех линейных дифференциальных уравнений, которая решается в явном виде. Подстановка решения $\left\{A_i^{\{1,2,3\}}(t)\right\}$ во второе уравнение (24) дает линейное дифференциальное уравнение относительно $C^{\{1,2,3\}}(t)$. Оптимальные инвестиционные стратегии в совместном предприятии могут быть получены в виде:

$$u_i^{\{1,2,3\}}(t) = \frac{\alpha_i^2}{16(c_i)^2} \left[A_i^{\{1,2,3\}}(t)\right]^2, \quad i \in \{1,2,3\}\,. \tag{25}$$

Динамика траекторий развития технологий совместного производства на временном промежутке $[t_0,\ T]$ имеет вид:

$$dx_i(s) =$$

$$\left[\frac{\alpha_i^2}{4c_i} A_i^{\{1,2,3\}}(s) x_i(s)^{1/2} + b_j^{[j,i]} \left[x_j(s)x_i(s)\right]^{1/2} + b_k^{[k,i]} \left[x_k(s)x_i(s)\right]^{1/2}\right.$$

$$\left. - \delta x_i(s)\right] ds + \sigma_i x_i(s) dz_i(s)\,, \tag{26}$$

$$x_i(t_0) = x_i^0,\;\; i,j,k \in N = \{1,2,3\},\; i \neq j \neq k\,.$$

Решая полученное уравнение, получаем оптимальные кооперативные траектории.

Если же две из трех фирм решают создать коалицию для максимизации совместной прибыли, то для них уравнение (11) принимает вид:

(27)
$$-W_t^{(t_0)K}(t, x_K^t) - \frac{1}{2}\sum_{i\in K}\sigma_i^2 x_i^2 W_{x_i x_i}^{(t_0)K}(t, x_K) =$$
$$\max_{u_k}\left\{\sum_{i\in K}[P_i x_i^{\frac{1}{2}}(t) - c_i u_i(t)]e^{-r(t-t_0)} +\right.$$
$$\left. + \sum_{i\in K} W_{x_i}^{(t_0)K}(t, x_K^t) f_i^K[t, x_K^t, u_K^t]\right\},$$
$$W^{(t_0)K}(T, x_K^T) = \sum_{i\in K} e^{-r(T-t_0)} q_i(x_i(T));$$

Следуя проведенному выше анализу, получаем следующие функции:

(28)
$$u_i = \frac{\alpha_i^2}{4(c_i)^2}\left[W_{x_i}^{(t_0)\{i,j\}}(t, x_i, x_j)e^{r(t-t_0)}\right]^2 x_i, i, j \in \{1, 2, 3\}, i \neq j$$

(29)
$$W^{(t_0)\{i,j\}}(t, x_i, x_j) =$$
$$\left[A_i^{\{i,j\}}(t)x_i^{1/2} + A_j^{\{i,j\}}(t)x_j^{1/2} + C^{\{i,j\}}(t)\right] e^{-r(t-t_0)},$$
$$\{i, j\} \subset \{1, 2, 3\}, \quad i \neq j,$$

где $A_i^{\{i,j\}}(t), A_j^{\{i,j\}}(t)$ и $C^{\{i,j\}}(t)$ удовлетворяют системе уравнений

$$\dot{A}_i^{\{i,j\}}(t) = \left(r + \frac{\sigma^2}{8} + \frac{\delta}{2}\right) A_i^{\{i,j\}}(t) - \frac{b_i^{[i,j]}}{2} A_j^{\{i,j\}}(t) - P_i,$$

$$i, j \in N = \{1,2,3\}, \quad i \neq j,$$

(30)

$$\dot{C}^{\{i,j\}}(t) = rC^{\{i,j\}}(t) - \sum_{i=1}^{3} \frac{\alpha_i^2}{16c_i} \left[A_i^{\{i,j\}}(t)\right]^2,$$

$$A_i^{\{i,j\}}(T) = q_i\,,\ C^{\{i,j\}}(T) = 0.$$

Система (30) решается стандартными методами:

$$W^{(t_0)\{i,j\}}(t, x_i, x_j) = (W^{(\tau)\{i,j\}}(t, x_i, x_j)) \exp\left[-r(\tau - t_0)\right] \quad (31)$$
$$\{i,j\} \subset \{1,2,3\}, \quad i \neq j\,.$$

Оптимальные инвестиционные стратегии для коалиции двух игроков принимают вид:

$$u_i^{\{i,j\}}(t) = \frac{\alpha_i^2}{16(c_i)^2}\left[A_i^{\{i,j\}}(t)\right]^2,\ i \in K \subset \{1,2,3\}\,;\ |K| = 2\,. \quad (32)$$

Динамика технологических состояний коалиции на временном промежутке $[t_0,\ T]$ имеет вид:

$$dx_i(s) = \left[\frac{\alpha_i^2}{4c_i} A_i^{\{1,2,3\}}(s) x_i(s)^{1/2} + \sigma_i x_i(s) dz_i(s) + \right.$$

$$\left. + b_j^{[j,i]} \left[x_j(s) x_i(s)\right]^{1/2} - \delta x_i(s)\right] ds \quad (33)$$

$$x_i(t_0) = x_i^0, \quad i, j \in K \subset N = \{1,2,3\},\ i \neq j, \quad |K| = 2.$$

Отсюда и получаем оптимальные траектории для коалиции из двух фирм.

4. Вектор Шепли в стохастическом случае

Как и в детерминированном случае, игроки будут делить совместную прибыль в соответствии с вектором Шепли. Чтобы максимизировать доход совместного предприятия фирмы будут использовать вектор управлений (25) на интервале $[t_0,\ T]$, получая из (26) соответствующие оптимальные траектории $\{x_N^*(t)\}_{t=t_0}^{T}$.

В момент t_0 и состоянии $x_N^{t_0}$ фирмы договариваются, что доля дохода фирмы i будет:

(34)
$$v^{(t_0)i}(t_0, x_N^0) =$$

$$\sum_{K \subseteq N} \frac{(k-1)!(n-k)!}{n!} \left[W^{(t_0)K}(t_0, x_K^0) - W^{(t_0)K \backslash i}(t_0, x_{K \backslash i}^0) \right].$$

Для динамической устойчивости необходимо поддерживать вектор Шепли на всем протяжении совместного производства, т. е. для любого момента $\tau \in [t_0, T]$ должно выполняться условие:

(35)
$$v^{(\tau)i}(\tau, x_N^\tau) =$$

$$\sum_{K \subseteq N} \frac{(k-1)!(n-k)!}{n!} \left[W^{(\tau)K}(\tau, x_K^\tau) - W^{(\tau)K \backslash i}(\tau, x_{K \backslash i}^\tau) \right].$$

Построенный вектор Шепли $v^{(\tau)}(\tau, x_N^{\tau *}) = \left[v^{(\tau)1}(\tau, x_N^{\tau *}), \ldots, v^{(\tau)n}(\tau, x_N^{\tau *}) \right]$ удовлетворяет свойствам дележа:

(36)
$$\sum_{i=1}^{n} v^{(\tau)i}(\tau, x_N^{\tau *}) = W^{(\tau)N}(\tau, x_N^{\tau *}),$$

$$v^{(\tau)i}(\tau, x_N^{\tau *}) \geqslant W^{(\tau)i}(\tau, x_N^{\tau *}) \quad i \in N, \tau \in [t_0, T].$$

Первое условие в (36) говорит о том, что $v^{(\tau)}(\tau, x_N^{\tau *})$ удовлетворяет свойству оптимальности по Парето в каждый момент игры. Второе условие иллюстрирует, что вектор Шепли $v^{(\tau)}(\tau, x_N^{\tau *})$

индивидуально рационален в любой момент игры. При выполнении условий (34)-(36) принцип оптимальности (распределение дохода в соответствии с вектором Шепли) существует в каждый момент игры вдоль оптимальной траектории, выбранной изначально, и по построению он динамически устойчив на промежутке выполнения кооперативного соглашения.

В нашем случае ожидаемая доля прибыли компании в соответствии с вектором Шепли будет равна:

$$
\begin{aligned}
v^{(\tau)i}(\tau, x_N^\tau) = \frac{1}{6} W^{(\tau)i}(\tau, x_i^\tau) + \\
+\frac{1}{3}\left(W^{(\tau)\{i,j\}}(\tau, x_{\{i,j\}}^\tau) - W^{(\tau)j}(\tau, x_j^\tau)\right) + \\
\frac{1}{3}\left(W^{(\tau)\{i,k\}}(\tau, x_{\{i,k\}}^\tau) - W^{(\tau)k}(\tau, x_k^\tau)\right) + \\
+\frac{1}{6}\left(W^{(\tau)\{i,j,k\}}(\tau, x_{\{i,j,k\}}^\tau) - W^{(\tau)\{j,k\}}(\tau, x_{\{j,k\}}^\tau)\right), \\
i, j, k \in N = \{1, 2, 3\}, \ \tau \in [t_0, T].
\end{aligned}
\tag{37}
$$

5. Процедура распределения дележа в стохастическом случае

Как и для детерминированного случая в данной модели необходимо компенсировать переходные изменения в доходах фирм, чтобы вектор Шепли поддерживался на всем протяжении совместного производства. Для этого компоненты вектора Шепли представляются в следующем виде:

$$v^{(t_0)i}(t_0, x_N^0) =$$

$$\sum_{K \subseteq N} \frac{(k-1)!(n-k)!}{n!} \left[W^{(t_0)K}(t_0, x_K^0) - W^{(t_0)K \setminus i}(t_0, x_{K \setminus i}^0) \right] =$$

$$= E_{t_0} \left\{ \int\limits_{t_0}^{T} B_i(s) \exp\left[- \int\limits_{t_0}^{T} r(y) dy \right] ds \; + q^i(x_i^*(T)) \exp\left[- \int\limits_{t_0}^{T} r(y) dy \right] \right.$$

$$\left. \vphantom{\int} \,|\, x_N(t_0) = x_N^0 \right\}. \tag{38}$$

Здесь $B_i(s)$ – платеж, получаемый компанией i в момент $s \in [t_0, T]$ после перераспределения дохода. Более того, для $i \in N$ и $t \in [t_0, T]$:

$$v^{(t_0)i}(t, x_N^{t*}) = E_{t_0} \left\{ \int_t^T B_i(s) \exp\left[- \int_{t_0}^{s} r(y) dy \right] ds + \right.$$

$$\left. + q^i(x_i^*(T)) \exp\left[- \int\limits_{t_0}^{T} r(y) dy \right] \Big| x_N(t) = x_N^{t*} \right\} \tag{39}$$

– выигрыш игрока i от кооперации на промежутке $[t,\ T]$, где x_N^{t*} – состояние игры в момент $t \in [t_0, T]$. Чтобы $v^{(t_0)i}(t, x_N^{t*})$ удовлетворяло (5.2), необходимо:

$$v^{(t_0)i}(t, x_N^{t*}) = v^{(t)i}(t, x_N^{t*}) \exp\left[- \int\limits_{t_0}^{T} r(y) dy \right], \tag{40}$$

$$i \in N, \quad t \in [t_0, T] \text{ и } x_N^{t*} \in X_N^{t*}.$$

Поэтому задача заключается в нахождении такого $B_i(s)$, при котором $v^{(t_0)i}(t, x_N^{t*})$ удовлетворяет (38)-(40). Отметим, что в каждый момент происходит только перераспределение прибыли, поэтому сумма доходов игроков должна оставаться неизменной, но так как здесь мы имеем дела со случайными величинами, то суммы доходов должны совпадать в среднем, т. е.

$$E_s\left\{\sum_{i=1}^{3} B_i(s)\right\} = E_s\left\{\sum_{i=1}^{3}\left[P_i x_i^{1/2}(s) - c_i u_i(s)\right]\right\}, s \in [t_0, T]\,. \tag{41}$$

В общем случае прибыль, получаемая игроком i в момент $\tau \in [t_0, T]$, равна:

$$B_i(\tau) = -\sum_{K \subseteq N} \frac{(k-1)!(n-k)!}{n!}\left\{\left[W_t^{(\tau)K}(\tau, x_K^{\tau})|_{t=\tau}\right] - \right.$$

$$-\left[W_t^{(\tau)K\backslash i}(\tau, x_{K\backslash i}^{\tau})\,|_{t=\tau}\right] + \frac{1}{2}\sum_{h,\zeta=1}^{n}\Omega_K^{h\zeta}(\tau, x_\tau^*)\left[W_{x_t^h x_t^\zeta}^{(\tau)K}(t, x_t^*)\,|_{t=\tau}\right]$$

$$\left. -\frac{1}{2}\sum_{h,\zeta=1}^{n}\Omega_{K\backslash i}^{h\zeta}(\tau, x_\tau^*)\left[W_{x_t^h x_t^\zeta}^{(\tau)K\backslash i}(t, x_t^*)\,|_{t=\tau}\right]\right\} \tag{42}$$

Поскольку частная производная $W^{(\tau)K}(\tau, x_K^{\tau*})$по x_j, где $j \notin$

K уходит, мы можем переписать (42) более лаконично:

(43) $$B_i(\tau) = -\sum_{K\subseteq N} \frac{(k-1)!(n-k)!}{n!}$$

$$\Big\{ \Big[W_t^{(\tau)K}(\tau, x_K^\tau)\,|_{t=\tau} \Big] \ \Big[W_t^{(\tau)K\backslash i}(\tau, x_{K\backslash i}^\tau)\,|_{t=\tau} \Big] +$$

$$+\sum_{j\in K} \Big[W_{x_j^{\tau*}}^{(\tau)K}(\tau, x_K^\tau)\,|_{t=\tau} \Big] f_j^N \Big[\tau, x_N^{\tau*}, u_i^{(\tau)N*}(\tau, x_N^{\tau*}) \Big] -$$

$$-\sum_{h\in K\backslash i} \Big[W_{x_h^{\tau*}}^{(\tau)K\backslash i}(\tau, x_{K\backslash i}^\tau)\,|_{t=\tau} \Big] \, f_h^N \Big[\tau, x_N^{\tau*}, u_i^{(\tau)N*}(\tau, x_N^{\tau*}) \Big] +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{h,\zeta=1}^{n} \Omega_K^{h\zeta}(\tau, x_\tau^*) \Big[W_{x_t^h x_t^\zeta}^{(\tau)K}(t, x_t^*)\,|_{t=\tau} \Big]$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{h,\zeta=1}^{n} \Omega_{K\backslash i}^{h\zeta}(\tau, x_\tau^*) \Big[W_{x_t^h x_t^\zeta}^{(\tau)K\backslash i}(t, x_t^*)|_{t=\tau} \Big] \Big\},$$

где $f_K^N \Big[\tau, x_N^{\tau*}, u_i^{(\tau)N*}(\tau, x_N^{\tau*}) \Big]$ - вектор, состоящий из $f_i^N \Big[\tau, x_N^{\tau*}, u_i^{(\tau)N*}(\tau, x_N^{\tau*}) \Big]$, $i \in K$.

В данном случае функция $B_i(\tau)$ принимает вид:

$$B_i(\tau) = (-1) \cdot \left(\frac{1}{3} \left(W_t^{(\tau)i}(\tau, x_i^\tau) \, + \right.\right.$$

$$\left. + W_{x_i}^{(\tau)i}(\tau, x_i^\tau) f_i^N \left[\tau, x_N^{\tau *}, u_i^{(\tau)N*}(\tau, x_N^{\tau *}) \right] + \frac{1}{2} \sigma_i^2 (x_i^\tau)^2 W_{x_i x_i}^{(\tau)i}(\tau, x_i^\tau) \right) +$$

$$+ \frac{1}{6} \left(W_t^{(\tau)\{i,j\}}(\tau, x_{\{i,j\}}^\tau) - W_t^{(\tau)j}(\tau, x_j^\tau) \, + W_{x_i}^{(\tau)\{i,j\}}(\tau, x_{\{i,j\}}^\tau) \cdot \right.$$

$$\cdot f_i^N \left[\tau, x_N^{\tau *}, u_{\{i,j\}}^{(\tau)N*}(\tau, x_N^{\tau *}) \right] \tag{44}$$

$$+ W_{x_j}^{(\tau)\{i,j\}}(\tau, x_{\{i,j\}}^\tau) f_j^N \left[\tau, x_N^{\tau *}, u_{\{i,j\}}^{(\tau)N*}(\tau, x_N^{\tau *}) \right] -$$

$$- W_{x_i}^{(\tau)j}(\tau, x_j^\tau) f_j^N \left[\tau, x_N^{\tau *}, u_j^{(\tau)N*}(\tau, x_N^{\tau *}) \right]$$

$$+ \frac{1}{2} \sigma_i^2 (x_i^\tau)^2 W_{x_i x_i}^{(\tau)\{i,j\}}(\tau, x_{\{i,j\}}^\tau) +$$

$$\left. + \frac{1}{2} \sigma_j^2 (x_j^\tau)^2 W_{x_j x_j}^{(\tau)\{i,j\}}(\tau, x_{\{i,j\}}^\tau) - \frac{1}{2} \sigma_j^2 (x_j^\tau)^2 W_{x_j x_j}^{(\tau)j}(\tau, x_j^\tau) \right) +$$

$$\frac{1}{6} \left(W_t^{(\tau)\{i,k\}}(\tau, x_{\{i,k\}}^\tau) - \right.$$

$$- W_t^{(\tau)k}(\tau, x_k^\tau) + W_{x_i}^{(\tau)\{i,k\}}(\tau, x_{\{i,k\}}^\tau) f_i^N \left[\tau, x_N^{\tau *}, u_{\{i,k\}}^{(\tau)N*}(\tau, x_N^{\tau *}) \right]$$

$$+ W_{x_k}^{(\tau)\{i,k\}}(\tau, x_{\{i,k\}}^\tau) f_k^N \left[\tau, x_N^{\tau *}, u_k^{(\tau)N*}(\tau, x_N^{\tau *}) \right] - W_{x_k}^{(\tau)k}(\tau, x_k^\tau) \cdot$$

$$\cdot f_k^N \left[\tau, x_N^{\tau *}, u_k^{(\tau)N*}(\tau, x_N^{\tau *}) \right] + \frac{1}{2} \sigma_i^2 (x_i^\tau)^2 W_{x_i x_i}^{(\tau)\{i,k\}}(\tau, x_{\{i,k\}}^\tau) +$$

$$\left. + \, \frac{1}{2} \sigma_k^2 (x_k^\tau)^2 W_{x_k x_k}^{(\tau)\{i,k\}}(\tau, x_{\{i,k\}}^\tau) - \frac{1}{2} \sigma_k^2 (x_k^\tau)^2 W_{x_k x_k}^{(\tau)k}(\tau, x_k^\tau) \right)$$

$$\frac{1}{3}\Big(W_t^{(\tau)\{i,j,k\}}(\tau, x_N^\tau) - W_t^{(\tau)\{j,k\}}(\tau, x_{\{j,k\}}^\tau) + W_{x_i}^{(\tau)\{i,j,k\}}(\tau, x_N^\tau)\cdot$$

$$\cdot f_i^N\left[\tau, x_N^{\tau*}, u_N^{(\tau)N*}(\tau, x_N^{\tau*})\right]$$

$$+ W_{x_j}^{(\tau)\{i,j,k\}}(\tau, x_N^\tau) f_j^N\left[\tau, x_N^{\tau*}, u_N^{(\tau)N*}(\tau, x_N^{\tau*})\right] +$$

$$+ W_{x_k}^{(\tau)\{i,j,k\}}(\tau, x_N^\tau) f_k^N\left[\tau, x_N^{\tau*}, u_N^{(\tau)N*}(\tau, x_N^{\tau*})\right] - W_{x_j}^{(\tau)\{j,k\}}(\tau, x_N^\tau)\cdot$$

$$\cdot f_j^N\left[\tau, x_N^{\tau*}, u_{\{j,k\}}^{(\tau)N*}(\tau, x_N^{\tau*})\right] -$$

$$W_{x_k}^{(\tau)\{j,k\}}(\tau, x_N^\tau) f_k^N\left[\tau, x_N^{\tau*}, u_{\{j,k\}}^{(\tau)N*}(\tau, x_N^{\tau*})\right] +$$

$$+ \frac{1}{2}\sigma_i^2(x_i^\tau)^2 W_{x_i x_i}^{(\tau)\{i,j,k\}}(\tau, x_N^\tau) + \frac{1}{2}\sigma_j^2(x_j^\tau)^2 W_{x_j x_j}^{(\tau)\{i,j,k\}}(\tau, x_N^\tau) +$$

$$+ \frac{1}{2}\sigma_i^2(x_i^\tau)^2 W_{x_k x_k}^{(\tau)\{i,j,k\}}(\tau, x_N^\tau) - \frac{1}{2}\sigma_j^2(x_j^\tau)^2 W_{x_j x_j}^{(\tau)\{j,k\}}(\tau, x_{\{j,k\}}^\tau)$$

$$- \frac{1}{2}\sigma_k^2(x_k^\tau)^2 W_{x_k x_k}^{(\tau)\{j,k\}}(\tau, x_{\{j,k\}}^\tau)\Big).$$

Вектор $B_i(\tau)$, полученный из процедуры распределения дохода, гарантирует реализуемость дележа согласно вектору Шепли на всем протяжении игры. Таким образом, мгновенные выплаты $B_i(\tau, x_N^{\tau*})$ игроку $i \in N$ обеспечивают динамическую устойчивость совместного предприятия.

6. Результаты количественного моделирования при детерминированной динамике

Подтвердим полученные математические выводы результатами численных расчетов в детерминированном случае ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0$).

Для начала рассмотрим симметричный случай, когда все 3 компании имеют одинаковые параметры. Все вычислительные процессы проводились в программной среде MAPLE.

Пусть

$t_0 = 0$ – начальный момент игры (момент начала работы совместного предприятия).

$T = 20$ – конечный момент игры (момент ликвидации совместного предприятия).

$r = 0{,}2$ – процентная ставка.

$\delta = 0{,}05$ – параметр устаревания технологий.

$c_1 = 0{,}5$, $c_2 = 0{,}5$, $c_3 = 0{,}5$ – параметры инвестиционного вклада игроков в технологическое развитие.

$q_1 = 0{,}1$, $q_2 = 0{,}1$, $q_3 = 0{,}1$ – параметры ликвидационной стоимости технологий компаний на момент окончания игры.

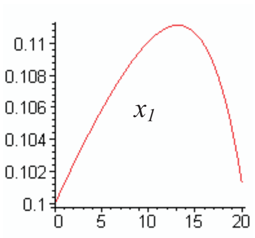
$P_1 = 0{,}1$, $P_2 = 0{,}1$, $P_3 = 0{,}1$ – параметры чистой операционной прибыли компаний.

$\alpha_1 = 0{,}3$, $\alpha_2 = 0{,}3$, $\alpha_3 = 0{,}3$ – параметры прибавки в технологическое развитие компаний.

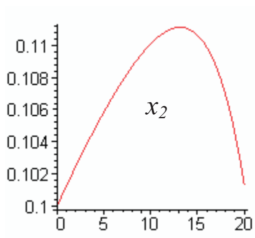
$b_1^{[2,1]} = b_1^{[3,1]} = b_2^{[1,2]} = b_2^{[3,1]} = b_3^{[1,3]} = b_3^{[2,3]} = 0{,}1$ – параметры передачи технологий между компаниями.

Графики динамики состояний игроков, действующих индивидуально, выглядят так:

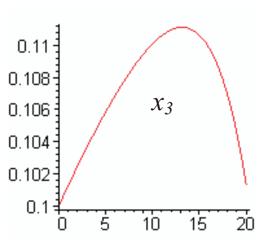
1-я компания



2-я компания

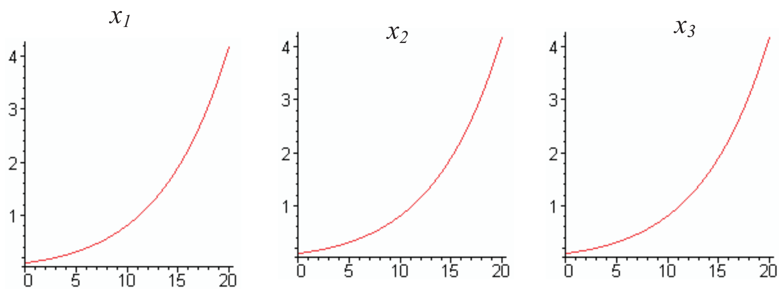


3-я компания

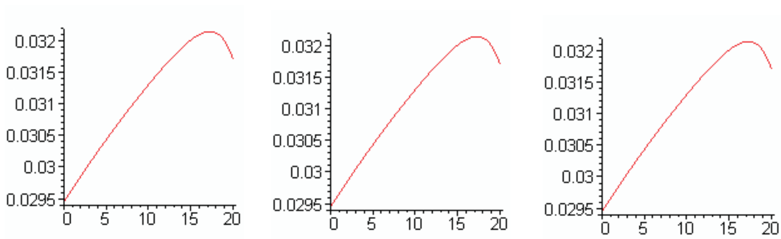


Как мы видим, развитие всех компаний одинаково. В совместном предприятии развития уровней технологий компаний во времени также равны между собой.

1-я компания 2-я компания 3-я компания

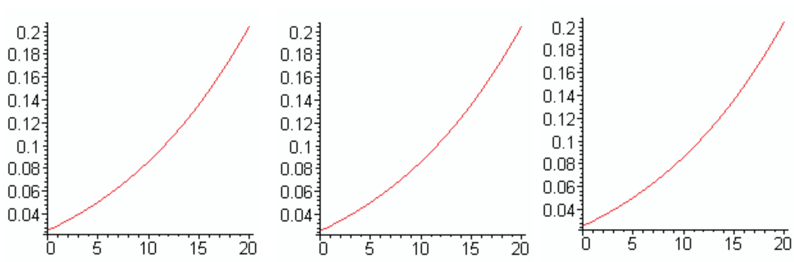


Графики прибыли компаний во времени представлены ниже. Они также одинаковы как для индивидуального случая,

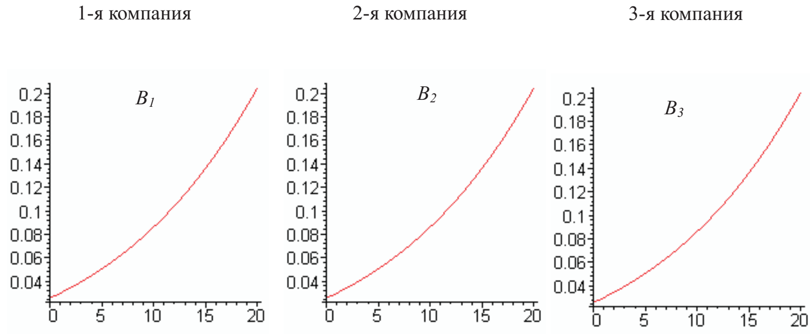


так и для совместного предприятия:

1-я компания 2-я компания 3-я компания



Для симметричного случая прибыль в соответствии с вектором Шепли должна распределяться между игроками одинаково, следовательно, здесь мы не должны наблюдать перераспределения дохода. Графики функций $B_i(t)$ это подтверждают:



Проверим корректность наших вычислений и убедимся, что прибыль, полученная каждой компанией до перераспределения, равна прибыли этой же компании после перераспределения. Обозначим через

$$Pr_i(t) = P_i[x_i(t)]^{1/2} - c_i u_i(t) \tag{45}$$

прибыль компании i в момент t до перераспределения выигрышей.

В данном примере не происходит перераспределения прибыли. Различие в последних цифрах – погрешность вычислений.

Несложно проверить динамическую устойчивость вектора Шепли на всем интервале существования совместного предприятия, т. е. проверить выполнение равенства:

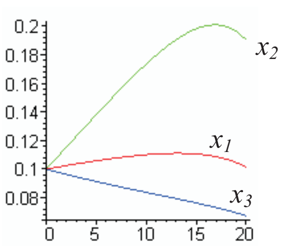
$$v^{(t_0)i}(t, x_N^t) = \int_t^T B_i(s) \exp\left[-r(s - t_0)\right] ds +$$

$$\exp\left[-r(T - t_0)\right] q_i \left[x_i(T)\right]^{1/2}, i \in N, t \in [t_0, T]. \tag{46}$$

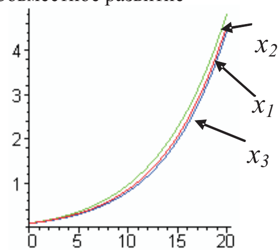
Рассмотрим асимметричный случай. Сначала изменим параметр P.

Пусть теперь $P_1 = 0{,}1$, $P_2 = 0{,}2$, $P_3 = 0{,}05$. Посмотрим, как изменится динамика состояний игроков и их выигрыши. Ниже представлены графики динамики состояний компаний для всех возможных коалиций в игре:

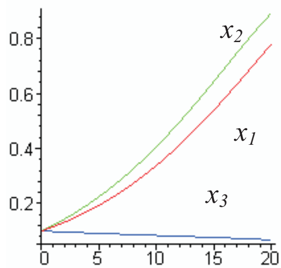
Индивидуальное развитие



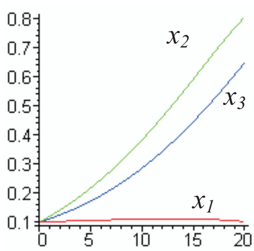
Совместное развитие



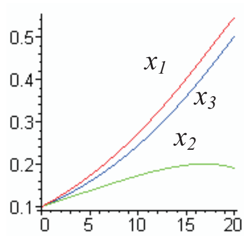
Объединение 1 и 2



Объединение 3 и 2

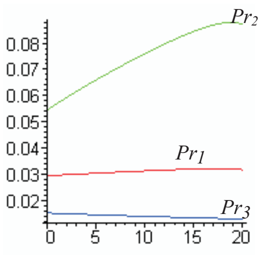


Объединение 1 и 3

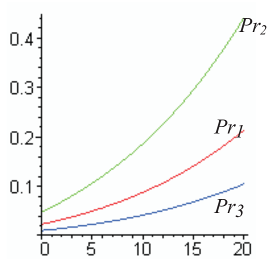


Далее представлены графики прибыли компаний на протяжении игры для всех возможных коалиций:

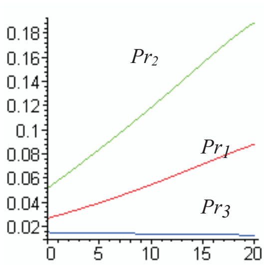
Индивидуальная прибыль



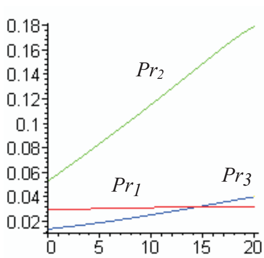
Совместная прибыль



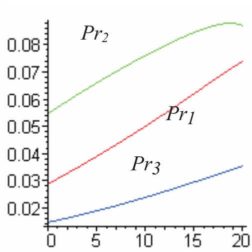
Объединение 1 и 2



Объединение 3 и 2

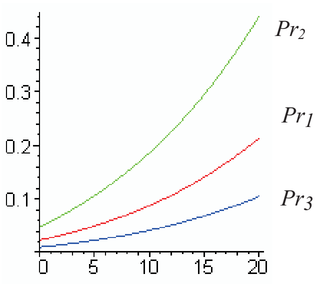


Объединение 1 и 3

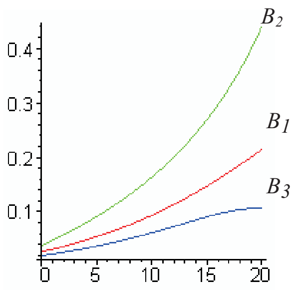


Ниже представлены графики прибылей компаний в совместном предприятии без и после перераспределения прибыли:

Без перераспределения



С перераспределением



Как мы видим, в данном случае имеет место перераспределение доходов от кооперации. Это наблюдается в различные моменты времени. Имеет место различие в величинах, но сумма доходов остается неизменной за вычетом погрешности вычисления. Итак, в данном случае происходит перераспределения доходов компаний, и строится новое решение, которое является динамически устойчивым. Анализ количественных данных также подтверждает выполнение свойств стратегической устойчивости и защиты от иррационального поведения. Таким образом, анализ результатов количественного моделирования подтверждает корректность изложенных выше теоретических результатов.

7. Результаты количественного моделирования при стохастической динамике

Для сравнения используем те же параметры, что и в детерминированном случае.

Как и ранее рассмотрим сначала симметричный случай, когда все 3 компании имеют одинаковые параметры.

Пусть:

$t_0 = 0$ – начальный момент игры;

$T = 20$ – конечный момент игры (период существования совместного предприятия);

$r = 0{,}2$ – размер дисконта;

$\delta = 0{,}05$ – параметр устаревания технологий;

$c_1 = 0{,}5$, $c_2 = 0{,}5$, $c_3 = 0{,}5$ – параметры инвестиционного вклада игроков в технологическое развитие;

$q_1 = 0{,}1$, $q2 = 0{,}1$, $q_3 = 0{,}1$ – параметры ликвидационной стоимости технологий игроков на момент окончания процесса;

$P_1 = 0{,}1$, $P_2 = 0{,}1$, $P_3 = 0{,}1$ – константы, определяющие чистую операционную прибыль игроков;

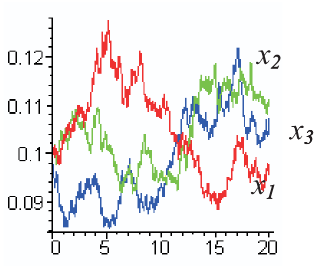
$\alpha_1 = 0{,}3$, $\alpha_2 = 0{,}3$, $\alpha_3 = 0{,}3$ – константы, определяющие прибавку в технологии игроков;

$b_1^{[2,1]} = b_1^{[3,1]} = b_2^{[1,2]} = b_2^{[3,1]} = b_3^{[1,3]} = b_3^{[2,3]} = 0{,}1$ – параметры, характеризующие эффекты передачи технологий между участниками совместного предприятия;

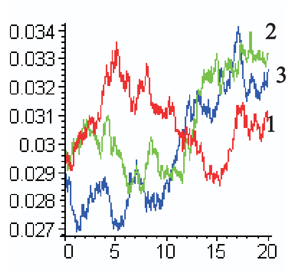
$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0{,}05$ – параметры волатильности технологического развития.

Графики изменения состояний и прибылей игроков, действующих индивидуально, при указанных параметрах имеют вид:

Состояния компаний
компания



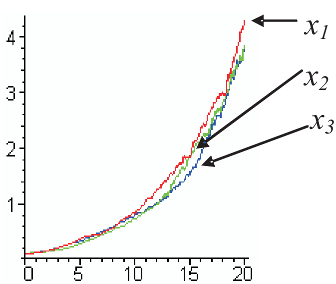
Прибыли компаний



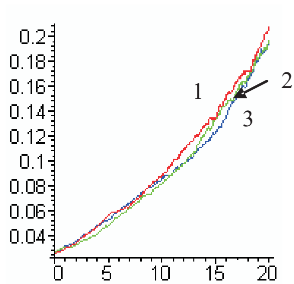
Как мы видим развитие технологий всех компаний даже в симметричном случае неодинаково вследствие случайных отклонений.

При объединении в совместное предприятие траектории технологий компаний и графики прибылей компаний как функции времени приблизительно одинаковы:

Технологии компаний

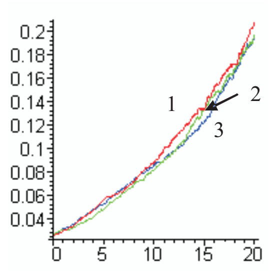


Прибыли компаний

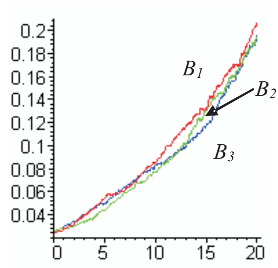


Для симметричного случая прибыль в соответствии с вектором Шепли должна распределяться между игроками одинаково. Поэтому здесь мы не наблюдаем перераспределения дохода при кооперации. Графики функций $B_i(t)$ это подтверждают:

Прибыль до перераспределения



Прибыль после перераспределения

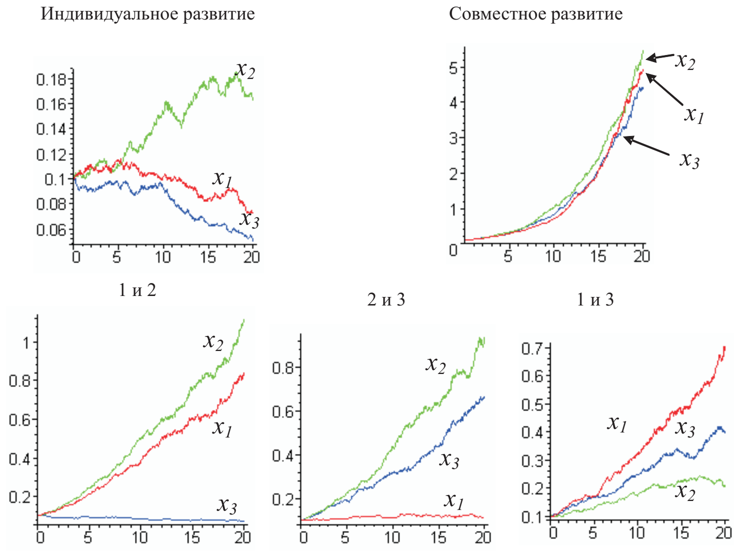


Результаты количественного моделирования подтверждают корректность наших вычислений. В частности, нетрудно убедиться, что прибыль, полученная каждой компанией до перераспределения, равна прибыли этой же компании после перераспределения. Обозначим через

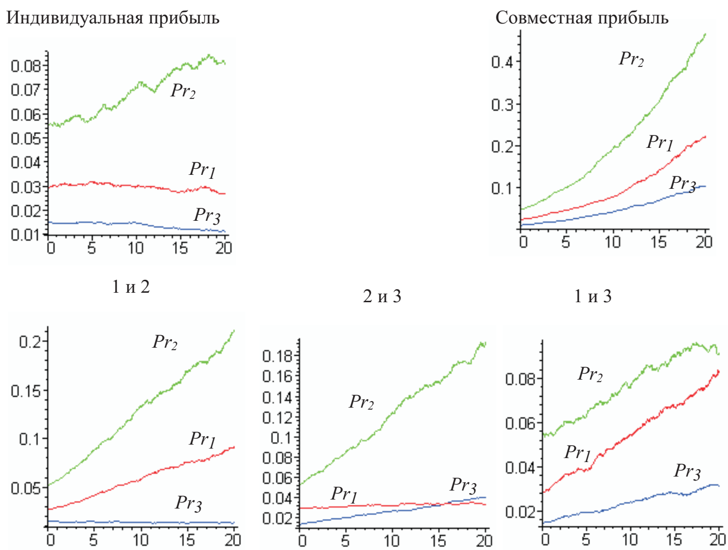
$\mathrm{Pr}_i(t) = P_i[x_i(t)]^{1/2} - c_i u_i(t)$ – прибыль компании i в момент t до перераспределения. Несмотря на симметричность примера значения прибылей неодинаковы, но перераспределения прибыли не происходит. Различие имеет место из-за случайности доходов. Введем в наш случай асимметрию. Изменим параметр P.

Пусть теперь $P_1 = 0{,}1$, $P_2 = 0{,}2$, $P_3 = 0{,}05$. Посмотрим, как изменится динамика состояний игроков и их выигрыши.

Ниже представлены графики динамики состояний игроков для всех возможных коалиций в игре. Как видно из графиков, здесь имеет место сильное колебание состояний, из-за чего наблюдаются более сильные отклонения величин:

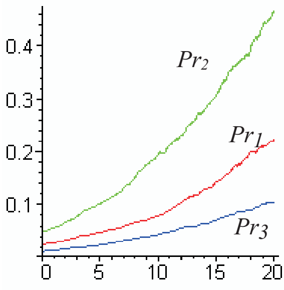


Далее представлены графики прибыли компаний на протяжении игры для всех возможных коалиций:

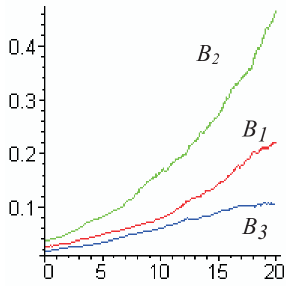


Ниже представлены графики прибылей компаний в совместном предприятии до и после перераспределения:

До перераспределения



После перераспределения



Как мы видим, в данном случае имеет место перераспределение на начальных стадиях, которое затем постепенно глушится. Имеет место различие в величинах, но сумма доходов остается приблизительно неизменной. Следовательно, построенное решение сохраняет динамическую устойчивость.

Литература

1. ПЕТРОСЯН Л.А. *Устойчивые решения дифференциальных игр со многими участниками*// Вестник Ленинградского Университета. – 1977. – №19. – С. 46-52.
2. ПЕТРОСЯН Л.А., ДАНИЛОВ Н.Н. *Кооперативные дифференциальные игры и их приложения*. – Издательство Томского Университета, Томск, 1982.
3. ЧИСТЯКОВ С.В. *О бескоалиционных дифференциальных играх*// ДАН СССР. – 1981. – Т. 259. – №5. – С. 1052-1055.
4. ЧИСТЯКОВ С.В. *О построении сильно динамически устойчивых решений кооперативных дифференциальных игр*// Вестник СПбГУ. сер. 1. – 1992. – Вып. 1. – №1. – С. 50-54.

5. HAURIE A. *A note on nonzero-sum differential games with bargaining solutions*// Journal of Optimization Theory and Application. – 1976. – V. 18. – P. 31-39.
6. KIDLAND F.E., PRESCOTT E.C. *Rules rather than decisions the inconsistency of optimal plans*// Journal of Political Economy. – 1977. – V. 85. – P. 473-490.
7. NASH J.F. *Non-cooperative games*// Ann. Mathematics. – 1951. – V. 54. – P. 286-295.
8. PETROSYAN L.A. *Differential Games of Pursuit*. – World Scientific, Singapore, 1993.
9. PETROSYAN L.A. *Bargaining in Dynamic Games*. In: Petrosyan L., Yeung D.W.K. (ed) ICM Millenium Lectures on Games. Springer. Verlag. Berlin. – 2003. – P. 139-143.
10. PETROSJAN L.A., ZACCOUR G. *Time-consistent Shapley value allocation of pollution cost reduction*// Journal of Economic Dynamics and Control. – 2003. – V. 27. – №3. – P. 381-398.
11. PETROSJAN L.A., ZENKEVICH N.A. *Game Theory*. – World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.: Singapore, 1996.
12. PETROSYAN L.A., ZENKEVICH N.A. *Time-consistency of cooperative solutions in management*. In: “Contributions to game theory and management”. GSOM. St. Petersburg University Publ. – 2007. – P. 233-252.
13. SHAPLEY L.S. *A Value for n-Person Games*. in “Contributions to the Theory of Games” (eds. H.W. Kuhn and A.W. Tucker). Princeton. Princeton University Press. – 1953. – P. 307-315.
14. TOLWINSKI B., HAURIE A., LEITMANN G. *Cooperative equilibria in differential games*// J. of Mathematical Analysis and Applications. – 1986. – V. 119. – P. 182-202.
15. YEUNG D.W.K., PETROSYAN L.A. *Subgame consistent cooperative solutions in stochastic differential games*// J. Optimiz. Theory and Appl. – 2004. – V. 120. – №3. – P. 651-666.
16. YEUNG D.W.K., PETROSJAN L.A. *Cooperative Stochastic*

Differential Games. – Springer, 2006.
17. ZENKEVICH N.A., KOLABUTIN N.V. *Quantitative Modeling of Dynamic Stable Joint Venture*. In: Preprint Vol. of the 11th IFAC Symposium "Computational Economics and Financial and Industrial Systems". IFAC. Dogus University of Istanbul. Turkey. – 2007. – P. 68-74.

STABLE JOINT VENTURE STOCHASTIC MODEL

Nickolay Zenkevich, School of Management, St. Petersburg State University, Saint Petersburg, Cand. Sc (zenkevich@gsom.pu.ru).
Nickolay Kolabutin, Faculty of Applied Mathematics and Control Processes, St. Petersburg State University, Saint Petersburg, post-graduate student (kolabutin_Nik@mail.ru).
David Yeung, PhD, professor, Center of Game Theory, Hong Kong Baptist University, professor (wkyeung@hkbu.edu.hk).

Abstract: Dynamic joint venture model is investigated. Through knowledge diffusion participating firms can gain core skills and technology that would be very difficult for them to obtain on their own. The stochastic evolution of the technology level of company under joint venture is known as a multivariate stochastic Ito's process. The profit of the joint venture is the expected sum of the participating firms' profits. The member firms would maximize their joint profit and share their cooperative profits according to the Shapley value. Applying the method of regularization for dynamic cooperation problem, we constructed the control in the form of special payments, paid at each time instant on the optimal trajectory. The dynamic stable solution is obtained for the stochastic joint venture dynamic model.

Keywords: differential game, cooperative solution, time-consistency of cooperative agreement, payoff distribution procedure (PDP), imputation distribution procedure (IDP), dynamic stability, strategic stability, Shapley value, stable joint venture.

УДК 519.833
ББК 22.18

ИГРА НАИЛУЧШЕГО ВЫБОРА ДВУХ ОБЪЕКТОВ С ПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИЕЙ [1] [2]

Ивашко А. А. [3]
(Учреждение Российской академии наук Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН, Петрозаводск)

Рассматривается игровая модель выбора двух секретарей с полной информацией и критерием оптимальности в виде максимума суммы ожидаемых значений качеств претендентов. Данная задача исследована в двух вариантах: игра m лиц с возможностью отказа претендента от предложения и игра двух лиц с доминирующим игроком. Получены оптимальные стратегии игроков. Доказано, что в задаче с возможностью отказа претендента от предложения выигрыш каждого игрока не зависит от общего числа игроков.

Ключевые слова: задача наилучшего выбора, оптимальная стратегия, многошаговая игра, многократная остановка..

Введение

В данной работе рассматривается игровая модель выбора двух секретарей в двух вариантах: игра m лиц с возможностью

[1] *Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект 08-01-98801-р-север-а) и гранта ОМН РАН (программа "Математические и алгоритмические проблемы информационных систем нового поколения").*

[2] *Текст приводится в соответствии с изданием «Математическая теория игр и ее приложения. – 2009. – Т. 1. №3».*

[3] *Анна Антоновна Ивашко, кандидат физико-математических наук, (afalco@krc.karelia.ru).*

отказа претендента от предложения и игра двух лиц с доминирующим игроком.

Пусть имеется m фирм, каждая из которых хочет нанять на работу двух секретарей. Всего имеется N претендентов на свободное место, и качество каждого определяется равномерно распределенной на отрезке [0, 1] случайной величиной. Директора фирм (игроки) по очереди беседуют с каждым претендентом и после этого выносят решение принять его на место секретаря или отвергнуть. Если j-ый игрок решает предложить претенденту работу, то претендент соглашается принять предложение с вероятностью p_j, $j = 1, 2, ..., m$, $p_1 + p_2 + ... + p_m \leqslant 1$. Если j-ый игрок принимает двух секретарей, то он выходит из игры. При этом его выигрыш равен сумме значений качеств выбранных секретарей. Если все игроки отвергают текущего претендента, то рассматривается следующий, причем, отвергнув претендента, к нему нельзя будет вернуться в дальнейшем. Если фирма не приняла ни одного секретаря, то она терпит убытки C, $C \in [0, 1]$. Каждый игрок стремится максимизировать свой выигрыш.

Во второй части статьи рассматривается постановка задачи с двумя игроками, каждый из которых хочет выбрать двух секретарей из множества N претендентов. Исследуется вариант задачи, в которой один из игроков имеет преимущество при принятии претендента.

Данная задача относится к классу задач наилучшего выбора, исследуемых теорией оптимальной остановки и теорией игр. В зависимости от имеющейся у наблюдателя информации о значениях качеств поступающих объектов различают задачи с обсутствием информации, частичной и полной информацией. Неигровые постановки задачи наилучшего выбора двух объектов с различной информированностью о значениях качества поступающих объектов были рассмотрены в работах [2, 3, 5, 10]. Игровые задачи, в которых необходимо выбрать одного секретаря исследованы в [1, 7, 8, 11, 13, 14, 16]. Постановки с возможностью отказа претендента от предложения рассмотрены в работах [4, 9, 15, 17]. В работе [12] решена задача с арбитром, в которой два игрока хотят совместно выбрать двух секретарей.

1. Игра m лиц наилучшего выбора одного секретаря с возможностью отказа от предложения

Имеется m фирм, каждая из которых хочет нанять секретаря из множества N претендентов. Качество каждого претендента – случайная величина, равномерно распределенная на отрезке [0,1]. Директора фирм (игроки) по очереди беседуют с каждым претендентом, и после этого выносят решение принять его на место секретаря или отвергнуть. Если j-ый игрок решает предложить претенденту работу, то претендент соглашается принять предложение с вероятностью p_j, $j = 1, 2, ..., m$, $p_1+p_2+...+p_m \leqslant 1$. Если j-ый игрок принимает претендента, то он выходит из игры. При этом его выигрыш равен ожидаемому среднему значению качества выбранного секретаря. Если все игроки отвергают текущего претендента, то рассматривается следующий, причем, отвергнув претендента, к нему нельзя будет вернуться в дальнейшем. Если фирма не приняла секретаря, то она терпит убытки C, $C \in [0, 1]$. Каждый игрок стремится максимизировать свой выигрыш.

В работе [9] был исследован сценарий выбора одного секретаря для одного и двух игроков. В случае с одним игроком каждый претендент имеет качество x, которое определяется равномерно распределенной на отрезке [0, 1] случайной величиной. Вероятность того, что претендент согласится принять предложение равна p, $p \leqslant 1$. Тогда $\bar{p} = 1 - p$ есть вероятность отказа от предложения. Если на шаге i игрок отказывает претенденту, то он переходит к собеседованию с $(i+1)$-ым претендентом. Обозначим $v_i^1(p)$ – ожидаемый выигрыш игрока на шаге i , $i = 1, 2, ..., N$.

Если $i = N$, то игрок должен предложить претенденту работу независимо от его качества, так как в противном случае он потерпит убытки. Тогда, учитывая, что значение качества равномерно распределено на [0, 1], получим

$$v_N^1(p) = \int\limits_0^1 px\,dx + \int\limits_0^1 \bar{p}(-C)dx = \frac{p}{2} - \bar{p}C.$$

На шаге i игрок примет текущего претендента с качеством x, тогда и только тогда, когда $x \geqslant v_{i+1}^1(p)$. Следовательно,

$$v_i^1(p) \ = \int\limits_0^{v_{i+1}^1(p)} v_{i+1}^1(p)\,dx + \int\limits_{v_{i+1}^1(p)}^1 (px + \bar{p}v_{i+1}^1(p))\,dx.$$

Получим выражение для вычисления выигрыша игрока

(1) $v_i^1(p) = \dfrac{p}{2}(1 - v_{i+1}^1(p))^2 + v_{i+1}^1(p), v_{N+1}^1(p) = -C, i = 1, 2, ..., N.$

Если на каком-нибудь шаге $v_{i+1}^1(p) < 0$, то

$$v_i^1(p) = \int\limits_0^1 (px + \bar{p}v_{i+1}^1(p))dx = \frac{p}{2} + \bar{p}v_{i+1}^1(p).$$

Далее будем рассматривать случай, когда все функции выигрыша неорицательны, т. е. при $0 \leqslant C \leqslant \frac{p}{2(1-p)}$.

Рассмотрим случай двух игроков. Вероятность того, что претендент согласится принять предложение игрока j, равна p_j, где $j = 1, 2$, $p_1 + p_2 \leqslant 1$, $\bar{p}_j = 1 - p_j$.

Обозначим выигрыш j-го игрока на i-ом шаге в случае двух игроков $v_i^{2,j}, j = 1, 2, i = 1, ..., N$. Заметим, что $v_N^{2,j} = v_N^1(p_j), j = 1, 2$, так как каждый игрок заинтересован принять последнего претендента.

Пусть $p_1 \geqslant p_2$, тогда $v_i^{2,1} \geqslant v_i^{2,2}$. Стратегия «принять» доминирует стратегию «отклонить» для игрока $j, j = 1,2$ тогда и только тогда, когда $x \geqslant v_{i+1}^{2,j}$.

В работе [6] доказано, что $v_i^{2,j} = v_i^1(p_j); j = 1,2$. Докажем, что в игре m лиц справедлива аналогичная формула.

В игре m лиц обозначим ожидаемый выигрыш j-го игрока на i-ом шаге $v_i^{m,j}$, $j = 1,2,...,m$, и пусть $p_1 \geqslant p_2 \geqslant ... \geqslant p_m$.

Предположим, что $v_i^{m,j} = v_i^1(p_j); j = 1,2,...,m$. Докажем, что $v_i^{m+1,j} = v_i^1(p_j); j = 1,2,...,m+1$.

На последнем шаге $v_N^{m+1,j} = v_N^1(p_j); j = 1,2,...,m+1$.

На шаге $N-1$ получим, что j-ый игрок примет претендента, если $x \geqslant v_N^{m+1,j}$. Например, в игре трех лиц в ситуации $\Pi_1 \text{O}_2 \Pi_3$, где стратегиями игрока j являются Π_j — принять , O_j — отклонить ($j = 1,2,3$), первый игрок получит $p_1 x + p_3 v_N^{m,1} + (1 - p_1 - p_3) v_N^{m+1,1} = p_1 x + \bar{p}_1 v_N^{m+1,1}$, а в ситуации $\text{O}_1 \text{O}_2 \Pi_3$ его выигрыш равен $p_3 v_N^{m,1} + (1-p_3) v_N^{m+1,1} = v_N^{m+1,1}$. Следовательно, первый игрок примет претендента, если $x \geqslant v_N^{m+1,1}$.

Учитывая, что x равномерно распределено на отрезке [0,1] и $v_N^{m+1,j} = v_N^1(p_j); j = 1,2,...,m+1$, получим

$$\begin{aligned} v_{N-1}^{m+1,j} &= \int\limits_0^{v_N^{m+1,j}} v_N^{m,j}\,dx + \int\limits_{v_N^{m+1,j}}^1 (p_j x + \bar{p}_j v_N^{m+1,j})\,dx = \\ &= v_N^1(p_j); \;\; j = 1,2,...,m+1. \end{aligned}$$

Рассуждая аналогично для $v_i^{m+1,j}$, $j = 1,2,...,m+1$, получим, что для j-го игрока оптимально принять i-го претендента, если $x \geqslant v_{i+1}^{m+1,j}$, $i = 1,2,...,N-1$. Справедлива следующая теорема

Теорема 1. *В игре m лиц наилучшего выбора с возможностью отказа претендента от предложения каждый игрок ведет себя независимо от числа игроков в игре, т. е.* $v_i^{m,j} = v_i^1(p_j), j = 1, 2, ..., m; i = 1, ..., N; v_i^1(p_j) = \frac{p_j}{2}(1 - v_{i+1}^1(p_j))^2 + v_{i+1}^1(p_j), v_{N+1}^1(p_j) = -C.$

2. Игра m лиц наилучшего выбора двух секретарей с возможностью отказа от предложения

В данном разделе рассматривается игровая модель выбора двух секретарей с возможностью отказа претендента от предложения игрока.

Пусть сначала в игре присутствуют два игрока. Если оба игрока сделали предложение претенденту, то претендент согласится принять предложение первого игрока с вероятностью p_1, а предложение второго — с вероятностью p_2, $p_1 + p_2 \leqslant 1$. Если один игрок уже выбрал себе двух специалистов, то другой игрок остается один. В этом случае претендент примет предложение игрока с вероятностью p_j, $\bar{p}_j = 1 - p_j$, $j = 1, 2$. Найдем выигрыш игрока. Обозначим $v_i^1(p_j)$ — ожидаемый выигрыш игрока на шаге i, если он выбирает первого претендента, $v_{i,r}^1(p_j)$ — ожидаемый выигрыш игрока на шаге r, если он выбирает второго претендента при условии, что первого он уже выбрал на шаге i.

Тогда ожидаемые выигрыши игрока удовлетворяют следующим выражениям:

$$\begin{aligned}
&v_i^1(p_j) = \mathbf{E}\left(\max\left\{p_j(x + v_{i,i+1}^1(p_j)) + \bar{p}_j v_{i+1}^1(p_j); v_{i+1}^1(p_j)\right\}\right), i = \overline{1,N},\\
&v_{N+1}^1(p_j) = -C;\\
&v_{i,r}^1(p_j) = \mathbf{E}\left(\max\left\{p_j x + \bar{p}_j v_{i,r+1}^1(p_j); v_{i,r+1}^1(p_j)\right\}\right), r = \overline{i+1,N},\\
&v_{i,N+1}^1(p_j) = -C.
\end{aligned}$$

Игрок примет претендента на шаге r (при условии, что он уже выбрал первого секретаря), если значение качества претендента $x \geqslant v_{i,r+1}^1(p_j)$. Аналогично, игрок примет первого претендента на шаге i, если значение качества претендента $x \geqslant v_{i+1}^1(p_j) - v_{i,i+1}^1(p_j)$.

Вычислим значения выигрышей

$$(2) \qquad v_i^1 =$$

$$= v_{i,i+1}^1 + \int\limits_0^{v_{i+1}^1 - v_{i,i+1}^1} (v_{i+1}^1 - v_{i,i+1}^1)dx + \int\limits_{v_{i+1}^1 - v_{i,i+1}^1}^1 (p_j x + \bar{p}_j(v_{i+1}^1 - v_{i,i+1}^1))dx$$

$$= v_{i,i+1}^1 + (v_{i+1}^1 - v_{i,i+1}^1)^2 + p_j \frac{1 - (v_{i+1}^1 - v_{i,i+1}^1)^2}{2}$$

$$+(1-p_j)(v_{i+1}^1 - v_{i,i+1}^1 - (v_{i+1}^1 - v_{i,i+1}^1)^2) = v_{i+1}^1 + \frac{p_j}{2}(1 - (v_{i+1}^1 - v_{i,i+1}^1))^2;$$

$$v_{i,r}^1 =$$

$$= \int\limits_0^{v_{i,r+1}^1} v_{i,r+1}^1 dx + \int\limits_{v_{i,r+1}^1}^1 (p_j x + (1-p_j)v_{i,r+1}^1)dx = v_{i,r+1}^1 + \frac{p_j}{2}(1 - v_{i,r+1}^1)^2;$$

$$v_{i,N}^1 = \frac{p_j}{2} - \bar{p}_j C;$$

$$v_{i,r}^1 = v_{i,r}^1(p_j); v_i^1 = v_i^1(p_j), i = 1, ..., N-1, r = i+1, ..., N.$$

Теперь перейдем к игре двух лиц. Обозначим ожидаемые выигрыши j-го игрока при выборе первого секретаря на i-ом шаге $v_i^{2,j}$, и при выборе второго на r-ом шаге — $v_{i,r}^{2,j}, j = 1, 2$. Найдем выигрыши по индукции с последнего шага. На последнем шаге каждый игрок заинтересован в принятии последнего претендента, поэтому $v_N^{2,j} = v_N^1(p_j)$ и $v_{i,N}^{2,j} = v_{i,N}^1(p_j), j = 1, 2$. На шаге $N - 1$

получим

$$v_{i,N-1}^{2,j} = \int\limits_0^{v_{i,N}^{2,j}} v_{i,N}^{2,j}\,dx + \int\limits_{v_{i,N}^{2,j}}^{1} (p_j x + (1-p_j)v_{i,N}^{2,j})\,dx = v_{i,N}^{1}(p_j), j = 1,2$$

независимо от того, выбрал ли другой игрок первого секретаря. Продолжая рассуждения аналогично для произвольного шага r, получим $v_{i,r}^{2,j} = v_{i,r}^{1}(p_j), j = 1,2$. Если оба игрока уже выбрали по одному секретарю, то задача сводится к рассмотренной в разделе 2.

Далее $v_{N-1}^{2,j} = v_{N-1}^{1}(p_j), j = 1,2$, так как каждый игрок заинтересован принять двух последних претендентов независимо от поведения другого.

На шаге $N-2$ в случае, если первый игрок еще не выбрал первого секретаря, а второй уже выбрал на шаге i, матрица игры будет иметь вид:

$$M_{N-2}^{2}(x) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \text{П}_2 & \text{О}_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{П}_1 \\ \text{О}_1 \end{array} & \begin{pmatrix} (m_{11}^1, m_{11}^2) & (m_{12}^1, m_{12}^2) \\ (m_{21}^1, m_{21}^2) & (m_{22}^1, m_{22}^2) \end{pmatrix} \end{array},$$

где

$$\begin{aligned}
& m_{11}^1 = p_1(x + v_{N-2,N-1}^{2,1}) + p_2 v_{N-1}^{1}(p_1) + (1-p_1-p_2)v_{N-1}^{2,1} \\
& = p_1(x + v_{N-2,N-1}^{2,1}) + (1-p_1)v_{N-1}^{1}(p_1); \\
& m_{11}^2 = p_2 x + p_1 v_{i,N-1}^{2,2} + (1-p_1-p_2)v_{i,N-1}^{2,2} = p_2 x + \bar{p}_2 v_{i,N-1}^{1}(p_2); \\
& m_{12}^1 = p_1(x + v_{N-2,N-1}^{2,1}) + (1-p_1)v_{N-1}^{2,1}; \\
& m_{12}^2 = p_1 v_{i,N-1}^{1}(p_2) + \bar{p}_1 v_{i,N-1}^{2,2}; \\
& m_{21}^1 = p_2 v_{N-1}^{1}(p_1) + \bar{p}_2 v_{N-1}^{2,1}; \\
& m_{21}^2 = p_2 x + \bar{p}_2 v_{i,N-1}^{2,2}; \\
& m_{22}^1 = v_{N-1}^{2,1}; \\
& m_{22}^2 = v_{i,N-1}^{2,2}.
\end{aligned}$$

Из матрицы видно, что первый игрок примет претендента, если значение качества претендента $x \geqslant v^1_{N-1}(p_1) - v^1_{N-2,N-1}(p_1)$, а

второй игрок примет претендента, если $x \geqslant v^1_{i,N-1}(p_2)$.

Продолжая рассуждения аналогично для произвольного шага i, получим, что при выборе секретаря каждый игрок ведет себя независимо от поведения другого.

Для игры m лиц обозначим ожидаемые выигрыши j-го игрока $v^{m,j}_i$, $v^{m,j}_{i,r}$ $(j = 1, 2, ..., m,\ i = 1, 2, ..., N-1,\ r = i+1, ..., N)$ для выбора первого и второго секретаря соответственно. На двух последнем шагах каждый игрок заинтересован в принятии двух последних претендентов, поэтому $v^{m,j}_{i,N} = v^1_{i,N}(p_j)$, $v^{m,j}_{N-1} =$

$v^1_{N-1}(p_j)$, $j = 1, 2, ..., m$.

Перейдем к шагу $N-2$. Обозначим A множество игроков, которые решили принять $(N-2)$-го претендента, $B \subseteq A$ — множество игроков, которые уже приняли первого секретаря. Выигрыш игрока $j \in A \setminus B$, в ситуации, когда он решил принять претендента, равен

$$\begin{aligned} p_j(x + v^{m,j}_{N-2,N-1}) \quad &+ \sum_{k\in A\setminus\{j\}} p_k v^{m-1,j}_{N-1} + \left(1 - \sum_{k\in A} p_k\right) v^{m,j}_{N-1} = \\ &= p_j(x + v^{m,j}_{N-2,N-1}) + (1-p_j) v^{m,j}_{N-1}, \end{aligned}$$

а в ситуации, когда игрок отказал претенденту —

$$\sum_{k\in A\setminus\{j\}} p_k v^{m-1,j}_{N-1} + \left(1 - \sum_{k\in A\setminus\{j\}} p_k\right) v^{m,j}_{N-1} = v^{m,j}_{N-1}.$$

Получаем, что игрок j примет $(N-2)$-го претендента, если $x \geqslant v^{m,j}_{N-1} - v^{m,j}_{N-2,N-1}$.

Ожидаемый выигрыш игрока $j \in A \setminus B$ равен

$$v_{N-2}^{m,j} = \\ = \int\limits_0^{v_{N-1}^{m,j} - v_{N-2,N-1}^{m,j}} v_{N-1}^{m,j} dx + \int\limits_{v_{N-1}^{m,j} - v_{N-2,N-1}^{m,j}}^{1} \left(p_j(x + v_{N-2,N-1}^{m,j}) + (1-p_j) v_{N-1}^{m,j}\right) dx = \\ = v_{N-2}^1(p_j).$$

Аналогично, выигрыш игрока $j \in B$ в ситуации, когда он решил принять претендента, равен

$$p_j x + \sum_{k \in A \setminus \{j\}} p_k v_{N-2,N-1}^{m-1,j} + \left(1 - \sum_{k \in A} p_k\right) v_{N-2,N-1}^{m,j} = \\ = p_j x + (1 - p_j) v_{N-2,N-1}^{m,j},$$

а в ситуации, когда игрок отказал претенденту –

$$\sum_{k \in A \setminus \{j\}} p_k v_{N-2,N-1}^{m-1,j} + \left(1 - \sum_{k \in A \setminus \{j\}} p_k\right) v_{N-2,N-1}^{m,j} = v_{N-2,N-1}^{m,j}.$$

Следовательно, игрок j примет $(N-2)$-го претендента, если $x \geqslant v_{N-2,N-1}^{m,j}$.

Ожидаемый выигрыш игрока $j \in B$ равен

$$v_{i,N-2}^{m,j} = \int\limits_0^{v_{i,N-1}^{m,j}} v_{i,N-1}^{m,j} dx + \int\limits_{v_{i,N-1}^{m,j}}^{1} \left(p_j x + (1-p_j) v_{i,N-1}^{m,j}\right) dx = v_{i,N-2}^1(p_j).$$

Рассуждая аналогично для произвольного i, получим, что при выборе первого секретаря на шаге i игрок j примет претендента, если $x \geqslant v_{i+1}^{m,j} - v_{i,i+1}^{m,j}$, а при выборе второго, если $x \geqslant v_{i,i+1}^{m,j}$. Таким образом, приходим к следующей теореме.

Теорема 2. *В игре m лиц наилучшего выбора двух секретарей каждый игрок ведет себя независимо от числа игроков в игре, т. е.* $v_i^{m,j} = v_i^1(p_j)$, $i = 1, ..., N-1$; $v_{i,r}^{m,j} = v_{i,r}^1(p_j)$, $r = i+1, ..., N$; $v_{i,N}^1(p_j) = \frac{p_j}{2} - \bar{p}_j C$, $j = 1, 2, ..., m$.

3. Игра двух лиц с доминирующим игроком

Рассмотрим игру двух лиц, в которой каждая фирма хочет принять на работу двух секретарей. Всего имеется N претендентов, которые поступают последовательно в случайном порядке. Качество каждого претендента определяется случайной величиной, равномерно распределенной на единичном отрезке. Первый игрок доминирует, т. е. на каждом шаге претенденты сначала идут в первую фирму, и только получив отказ, обращаются во вторую. В данной игре каждый игрок стремится максимизировать сумму качеств выбранных секретарей.

Рассмотрим случай одного игрока. Обозначим ожидаемые выигрыши игрока v_i и $v_{i,r}$ при выборе первого секретаря на шаге i, а второго на шаге r, где $i = 1, 2, ..., N$, $r = i+1, ..., N$. Ожидаемые выигрыши игрока удовлетворяют следующим соотношениями:

$$v_i = \mathbf{E}\left(\max\left\{x + v_{i,i+1}; v_{i+1}\right\}\right), i = 1, 2, ..., N, v_{N+1} = 0;$$

$$v_{i,r} = \mathbf{E}\left(\max\left\{x; v_{i,r+1}\right\}\right), r = i+1, ..., N, v_{i,N+1} = 0.$$

Учитывая, что x имеет равномерное распределение на отрезке [0,1], получим

$$v_i = v_{i,i+1} + \int\limits_0^{v_{i+1}-v_{i,i+1}} (v_{i+1} - v_{i,i+1})dx + \int\limits_{v_{i+1}-v_{i,i+1}}^1 xdx$$
$$= v_{i,i+1} + (v_{i+1} - v_{i,i+1})^2 + \frac{1-(v_{i+1}-v_{i,i+1})^2}{2} = v_{i,i+1} + \frac{1+(v_{i+1}-v_{i,i+1})^2}{2};$$
$$v_{i,r} = \int\limits_0^{v_{i,r+1}} v_{i,r+1}dx + \int\limits_{v_{i,r+1}}^1 xdx = \frac{1+(v_{i,r+1})^2}{2}.$$

Рассмотрим игру с двумя участниками. Обозначим v_i^1 и $v_{i,r}^1$ — ожидаемые выигрыши первого игрока при выборе первого секретаря на шаге i и второго на шаге r. В силу его преимущества, он будет действовать так, как если бы он делал выбор один, следовательно, $v_{i,r}^1 = v_{i,r}$, $v_i^1 = v_i$. Также $v_{i,r}^1$ и v_i^1 являются выигрышами второго игрока в случае, когда первый игрок выбывает из игры, выбрав себе обоих секретарей.

Обозначим $v_{i,r}^2$ и v_i^2 — ожидаемые выигрыши второго игрока в случае, когда в игре участвуют два игрока. Так как его выигрыш зависит от того, выбрал ли первый игрок первого секретаря, то введем следующие обозначения:

$v_{i,r}^2(B)$ — выигрыш второго игрока в случае, когда оба уже выбрали по одному секретарю;

$v_{i,r}^2(H)$ — выигрыш второго игрока в случае, когда первый игрок еще не выбрал первого секретаря, а второй выбрал;

$v_i^2(B)$ — выигрыш второго игрока в случае, когда первый игрок выбрал первого секретаря, а второй нет;

$v_i^2(H)$ — выигрыш второго игрока в случае, когда оба игрока не выбрали ни одного секретаря.

Последовательно выпишем формулы для вычисления выигрышей второго игрока:

$$
\begin{aligned}
&v_{i,r}^2(B) = \mathbf{E}\left(\max\left\{x; v_{i,r+1}^2(B); v_{i,r+1}^1\right\}\right) \\
&= \int\limits_0^{v_{i,r+1}^2(B)} (v_{i,r+1}^2(B))dx + \int\limits_{v_{i,r+1}^2(B)}^{v_{i,r+1}^1} xdx + \int\limits_{v_{i,r+1}^1}^{1} (v_{i,r+1}^1)dx \\
&= (v_{i,r+1}^2(B))^2 + \tfrac{(v_{i,r+1}^1)^2-(v_{i,r+1}^2(B))^2}{2} - v_{i,r+1}^1 v_{i,r+1}^1 + v_{i,r+1}^1 \\
&= v_{i,r+1}^1 + \tfrac{(v_{i,r+1}^2(B))^2-(v_{i,r+1}^1)^2}{2},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&v^2_{i,r}(H) = \mathbf{E}\left(\max\left\{x; v^2_{i,r+1}(H); v^2_{i,r+1}(B)\right\}\right)\\
&= \int\limits_0^{v^2_{i,r+1}(H)} (v^2_{i,r+1}(H))dx + \int\limits_{v^2_{i,r+1}(H)}^{v^1_{r+1}-v^1_{r,r+1}} xdx + \int\limits_{v^1_{r+1}-v^1_{r,r+1}}^{1} (v^2_{i,r+1}(B))dx\\
&= (v^2_{i,r+1}(H))^2 + \tfrac{(v^1_{r+1}-v^1_{r,r+1})^2-(v^2_{i,r+1}(H))^2}{2} - v^2_{i,r+1}(B)(v^1_{r+1}-v^1_{r,r+1})\\
&+ v^2_{i,r+1}(B) = v^2_{i,r+1}(B) + \tfrac{(v^1_{r+1}-v^1_{r,r+1})^2+(v^2_{i,r+1}(H))^2}{2}\\
&- v^2_{i,r+1}(B)(v^1_{r+1} - v^1_{r,r+1}),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&v^2_i(B) = \mathbf{E}\left(\max\left\{x + v^2_{i,i+1}(B); v^2_{i+1}(B); v^1_{i+1}\right\}\right)\\
&= v^2_{i,i+1}(B) + \int\limits_0^{v^2_{i+1}(B)-v^2_{i,i+1}(B)} (v^2_{i+1}(B) - v^2_{i,i+1}(B))dx\\
&+ \int\limits_{v^2_{i+1}(B)-v^2_{i,i+1}(B)}^{v^1_{i,i+1}} xdx + \int\limits_{v^1_{i,i+1}}^{1} (v^1_{i+1} - v^2_{i,i+1}(B))dx\\
&= v^2_{i,i+1}(B) + (v^2_{i+1}(B) - v^2_{i,i+1}(B))^2 + \tfrac{(v^1_{i,i+1})^2-(v^2_{i+1}(B)-v^2_{i,i+1}(B))^2}{2}\\
&- v^1_{i,i+1}(v^1_{i+1} - v^2_{i,i+1}(B)) + v^1_{i+1} - v^2_{i,i+1}(B)\\
&= v^1_{i+1} + \tfrac{(v^2_{i+1}(B)-v^2_{i,i+1}(B))^2+(v^1_{i,i+1})^2}{2} - v^1_{i,i+1}(v^1_{i+1} - v^2_{i,i+1}(B)),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&v^2_i(H) = \mathbf{E}\left(\max\left\{x + v^2_{i,i+1}(H); v^2_{i+1}(B); v^2_{i+1}(H)\right\}\right)\\
&= v^2_{i,i+1}(H) + \int\limits_0^{v^2_{i+1}(H)-v^2_{i,i+1}(H)} (v^2_{i+1}(H) - v^2_{i,i+1}(H))dx\\
&+ \int\limits_{v^2_{i+1}(H)-v^2_{i,i+1}(H)}^{v^1_{i+1}-v^1_{i,i+1}} xdx + \int\limits_{v^1_{i+1}-v^1_{i,i+1}}^{1} (v^2_{i+1}(B) - v^2_{i,i+1}(H))dx\\
&= v^2_{i,i+1}(H) + (v^2_{i+1}(H) - v^2_{i,i+1}(H))^2 + \tfrac{(v^1_{i+1}-v^1_{i,i+1})^2-(v^2_{i+1}(H)-v^2_{i,i+1}(H))^2}{2}\\
&- (v^1_{i+1} - v^1_{i,i+1})(v^2_{i+1}(B) - v^2_{i,i+1}(H)) + v^2_{i+1}(B) - v^2_{i,i+1}(H)\\
&= v^2_{i,i+1}(H) + \tfrac{(v^1_{i+1}-v^1_{i,i+1})^2+(v^2_{i+1}(H)-v^2_{i,i+1}(H))^2}{2}\\
&- (v^1_{i+1} - v^1_{i,i+1})(v^2_{i+1}(B) - v^2_{i,i+1}(H)) + v^2_{i+1}(B) - v^2_{i,i+1}(H).
\end{aligned}
$$

В таблице 1 представлены значения оптимальных порогов принятия претендента для обоих игроков и $N = 10$.

Таким образом, для $N = 10$ ожидаемый выигрыш первого игрока в начале игры равен $v_1^1 = 1{,}636$, а выигрыш второго равен $v_1^2(H) = 1{,}31$.

Таблица 1. Значения оптимальных порогов для $N = 10$

i	$v_{i+1}^1 - v_{i,i+1}^1$	$v_{i,i+1}^1$	$v_{i+1}^2(H) - v_{i,i+1}^2(H)$	$v_{i+1}^2(B) - v_{i,i+1}^2(B)$	$v_{i,i+1}^2(H)$	$v_{i,i+1}^2(B)$
1	0,757	0,850	0,584	0,669	0,669	0,757
2	0,735	0,836	0,546	0,639	0,639	0,735
3	0,708	0,820	0,5	0,603	0,603	0,708
4	0,676	0,8	0,442	0,558	0,558	0,676
5	0,634	0,775	0,366	0,5	0,5	0,634
6	0,579	0,742	0,258	0,421	0,421	0,579
7	0,5	0,695	0	0,305	0,305	0,5
8	0,375	0,625	0	0	0	0,375
9	0	0,5	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0

Лемма 1. *Для оптимальных порогов принятия претендента справедливы следующие равенства* $v_{r+1}^1 - v_{i,r+1}^1 = v_{i,r+1}^2(B)$ *и*

$v_{r+1}^2(B) - v_{i,r+1}^2(B) = v_{i,r+1}^2(H)$, $r = 2, ..., N$.

Доказательство.

Докажем первое равенство по индукции.

Для $r + 1 = N - 1$ данное равенство справедливо. Докажем его для r, $r = 2, ..., N-2$. Получим

$$\begin{aligned} v^2_{i,r}(B) &= v^1_{i,r+1} + \tfrac{(v^2_{i,r+1}(B))^2 - (v^1_{i,r+1})^2}{2} \\ &= v^1_{i,r+1} + \tfrac{(v^1_{r+1} - v^1_{i,r+1})^2 - (v^1_{i,r+1})^2}{2} = v^1_r - v^1_{i,r}. \end{aligned}$$

Аналогично доказывается второе равенство

$$\begin{aligned} v^2_{i,r}(H) &= v^2_{i,r+1}(B) + \tfrac{(v^1_{r+1} - v^1_{r,r+1})^2 + (v^2_{i,r+1}(H))^2}{2} \\ &-v^2_{i,r+1}(B)(v^1_{r+1} - v^1_{r,r+1}) \\ &= v^2_{i,r+1}(B) + \tfrac{(v^2_{r+1}(B) - v^2_{i,r+1}(B))^2 - (v^2_{i,r+1}(B))^2}{2} = \\ &= v^2_r(B) - v^2_{i,r}(B). \end{aligned}$$

С учетом Леммы 1 формулу выигрыша $v^2_i(H)$ можно упростить следующим образом:

$$v^2_i(H) = v^2_{i+1}(B) - \tfrac{(v^2_{i,i+1}(B))^2 + (v^2_{i+1}(H) - v^2_{i+1}(B) + v^2_{i,i+1}(B))^2}{2}.$$

Литература

1. МАЗАЛОВ В. В., ВИННИЧЕНКО С. В. *Моменты остановки и управляемые случайные блуждания.* – Новосибирск: Наука, 1992. – 104 с.
2. НИКОЛАЕВ М. Л. *Об одном обобщении задачи наилучшего выбора* // Теория вероятностей и ее применения. – 1977. – Т. 22. – №1. – С. 191-194.
3. НИКОЛАЕВ М. Л. *Оптимальные правила многократной остановки* // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 1998. – Т. 5. – №2. – С. 309-348.
4. ФАЛЬКО А. А. *Игра наилучшего выбора с возможностью отказа от предложения и перераспределением вероятностей* // Методы математического моделирования и информационные технологии. Труды ИПМИ. – 2006. – №7. – Петрозаводск: КарНЦ РАН. – С. 87-94.

5. ФАЛЬКО А. А. *Задача наилучшего выбора двух объектов* // Методы математического моделирования и информационные технологии. Труды ИПМИ. – 2007. – №8. – Петрозаводск: КарНЦ РАН. – С. 34-42.
6. BASTON V., GARNAEV A. *Competition for staff between two department* // Game Theory and Applications. – 2005. – V. 10. – P. 13-20.
7. ENNS E. G., FERENSTEIN E. Z. *On a multiperson time-sequential game with priorities* // Sequential Anal. – 1987. - V. 6. – P. 239-256.
8. FUSHIMI M. *The secretary problem in a competitive situation* // J. Oper. Res. Soc. Japan. – 1981. – V. 24. – P. 350-358.
9. GARNAEV A., SOLOVYEV A. *On a two department multi stage game* / Extended abstracts of International Workshop "Optimal Stopping and Stochastic Control", August 22-26, 2005. – Petrozavodsk, Russia. – P. 24-37.
10. SOFRONOV G., KEITH J., KROESE D. *An optimal sequential procedure for a buying-selling problem with independent observations* // J. Appl. Prob. – 2006. – V. 43. – P. 454-462.
11. SAKAGUCHI M. *Non-zero-sum games related to the secretary problem* // J. Oper. Res. Sos. Jap. – 1980. – V. 23. – №3. – P. 287-293.
12. SAKAGUCHI M. *Non-zero-sum best-choice games where two stops are required* // Scientiae Mathematicae Japonicae. – 2003. – V. 58. - №1. – P. 137-176.
13. SAKAGUCHI M. *Optimal stopping games where players have weighted privilege* // Annals of the International Society of Dynamic Games, Advances in Dynamic Games Application to Economics, Finance, Optimization and Stochastic Control. – 2005. – V. 7. – P. 116-131.
14. SAKAGUCHI M., MAZALOV V. *A non-zero-sum no-information best-choice game* // Mathematical Methods of Operation Research. – 2004. – V. 60. – P. 437-451.

15. SMITH M. *A secretary problem with uncertain employment* // J. Appl. Probab. – 1975. – V. 12. – №3. – P. 620-624.
16. SZAJOWSKI K. *On non-zero-sum game with priority in secretary problem* // Math.Japonica. – 1992. – V. 37. – P. 415-426.
17. TAMAKI M. *Minimal expected ranks for the secretary problems with uncertain selection* / Game Theory, Optimal Stopping, Probability and Statistics, ed. Bruss F.T. and Cam L.Le, Institute of Mathematical Statistics. – 2000. – P. 127-139.

FULL-INFORMATION BEST-CHOICE GAME WITH TWO STOPS

Anna Ivashko, Institute of Applied Mathematical Research Karelian Research Center of RAS, Petrozavodsk Cand.Sc. (afalco@krc.karelia.ru).

Abstract: We consider a full-information best-choice game in which each player wants to hire two secretaries. The aim of a player is to maximize the sum of expected applicant' quality values. Two models are considered: m-person best-choice game with the possibility for an applicant to refuse an offer and two-person best-choice game with dominant player. Optimal strategies are obtained. We prove that in the best-choice game with the possibility for an applicant to refuse an offer the players' payoffs don't depend on the total number of players in the game.

Keywords: best-choice game, optimal strategy, multistage game, multiple stopping .

УДК 519.833.2
ББК 22.18

РАВНОВЕСИЕ В БЕЗОПАСНЫХ СТРАТЕГИЯХ В МОДЕЛИ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ КОНКУРЕНЦИИ ХОТЕЛЛИНГА [1]

Искаков М. Б. [2] , **Павлов П. А.** [3]
(Учреждение Российской академии наук Институт проблем управления РАН, Москва)

Задача пространственной конкуренции была сформулирована в 1929 году Хотеллингом. Это модель игрового двухшагового взаимодействия участников, в котором их стратегиями являются, во-первых, определение расположения своих торговых точек в пространстве и, во-вторых, установление цен на товар. В задаче не для всех случаев местоположения существует равновесие Нэша в игре определения цен. Для исследования таких случаев предлагается использовать равновесие в безопасных стратегиях, что позволяет полностью решить игровую задачу. Рассмотрен нетривиальный частный случай повышения цен на пространственном рынке при переходе от монополии к дуополии.

Ключевые слова: теория игр, равновесие в безопасных стратегиях, пространственная конкуренция Хотеллинга.

Введение

Статья посвящена исследованию классической задачи пространственно распределенной конкуренции, поставленной Хотел-

---

[1] *Текст приводится в соответствии с изданием «Математическая теория игр и ее приложения. – 2009. – Т. 1. №2».*

[2] *Михаил Борисович Искаков, кандидат технических наук (mih_iskakov@mail.ru).*

[3] *Павел Алексеевич Павлов, аспирант (pashapavlov@gmail.com).*

лингом в 1929 году [11]. Основной предпосылкой появления модели пространственно распределенной конкуренции стало наблюдение, что на большом рынке, где один покупатель приобретает товар у одного продавца, а другой у иного, выбор зависит не только от цены. Причиной такого эффекта может служить множество факторов, которые влияют на характер конкуренции и на поведение как покупателей, так и продавцов. Одним из важнейших факторов является пространственное расположение продавцов и покупателей и вытекающие из этого транспортные издержки. Модель Хотеллинга описывает поведение участников рынка, на которых влияют два фактора: цены и затраты на перевозку товара. Основная сложность, обнаружившаяся при исследовании модели, – отсутствие равновесия Нэша в игре установления цен для многих случаев расположения магазинов продавцов, предлагающих товар [9]. При дальнейших исследованиях модели разными авторами был получен ряд как положительных, так и отрицательных результатов. Отрицательные результаты сводились к доказательству несуществования равновесия Нэша в различных вариантах модели [8, 9]. Положительные результаты были получены на разных путях: модификации функции транспортных издержек, при которой игра цен всегда имеет равновесное положение [9], решение игровой задачи в смешанных стратегиях [12], введение «эффекта сноба», при котором предпочтения покупателей зависят от объема продаж магазинов [7]. В предлагаемой статье в качестве исхода игры цен для тех случаев, в которых не существует равновесия Нэша, берется простое равновесие в безопасных стратегиях (РБС) [4, 6], которое для рассматриваемой задачи существует всегда. Такой подход подкрепляется тем, что игровой смысл РБС, заключающийся в стремлении игроков к увеличению своего выигрыша, но при условии своей безопасности относительно действий других игроков, полностью соответствует естественной логике поведения участников моделируемой ситуации. Применяемое доопределение равновесного состояния позволяет получить решение игровой задачи по обоим параметрам стратегии – местоположению и ценам – и попутно обнаружить интересные эффекты, возникающие в частных случаях игры пространственной конкуренции.

1. Постановка задачи

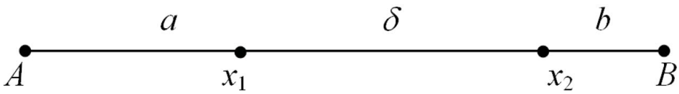


Рис. 1. Расположение игроков-продавцов на отрезке

Рассматривается отрезок $[A, B]$ длины l, – это может быть улица в городе, береговая линия или автомагистраль. На нем расположены покупатели с некоторой постоянной плотностью, которую без потери общности можно считать единичной. На расстоянии a и b от концов отрезка в точках $x_1, x_2 (x_1 \leqslant x_2)$ расположены магазины игроков 1 и 2, предлагающие одинаковый товар по ценам p_1, p_2. Расстояние между магазинами обозначается $\delta = l - a - b$. Каждый покупатель тратит на транспортировку товара до дома некоторую цену на единицу длины, которая, также без потери общности, считается единичной. Единица товара потребляется в каждую единицу времени в каждой точке отрезка, т. е. спрос является абсолютно неэластичным (для наиболее распространенного варианта постановки задачи). Все потребители не имеют никаких предпочтений по выбору продавца, кроме как по сумме стоимости товара и затрат на транспортировку. Таким образом, объемы проданного товара q_1, q_2 равны длине отрезков, на которых расположены покупатели, выбравшие тот или иной магазин. Издержки производства (приобретения) товаров магазинами считаются нулевыми и не входят в их целевые функции. Исследуется равновесие, совершенное по подыграм в динамической игре, которая проходит в три шага:

Шаг 1. Продавцы определяют точки своего расположения x_1, x_2 $(x_1 \leqslant x_2)$.

Шаг 2. Продавцы определяют цену на свой товар p_1, p_2.

Шаг 3. Покупатели выбирают продавца, у которого они покупают единицу товара.

Целевая функция покупателя:

$$u(x) = u_0 - \min_{i \in 1,2}(p_i + |x_i - x|).$$

где x – точка расположения покупателя, а u_0 – полезность товара для покупателя, которая без ограничения общности может считаться единичной. Возможны два варианта постановки задачи. В первом каждый покупатель обязательно покупает единицу товара, даже если при этом его целевая функция становится отрицательной. В большей части работ рассматривается именно этот случай. Во втором случае покупатель отказывается от приобретения товара, если это для него убыточно.

Для первого варианта постановки задачи целевая функция игрока-продавца 1:

$$u_1(x_1, x_2, p_1, p_2) = p_1 q_1 = \begin{cases} p_1 l, & p_1 < p_2 - \delta; \\ p_1(a + \frac{\delta + p_2 - p_1}{2}), & |p_1 - p_2| \leqslant \delta; \\ 0, & p_1 > p_2 + \delta. \end{cases}$$

В зависимости от назначенных цен для игрока 1 может реализоваться один из трех случаев: полный захват рынка, установление конкурентного сосуществования, потеря рынка. Целевая функция игрока 2 выписывается симметрично. Несколько более сложные целевые функции игроков для второго случая постановки задачи будут приведены ниже.

2. Обзор полученных ранее результатов

К моменту постановки задачи Хотеллингом в 1929 году [11] строгой математической теории игрового равновесия Нэша еще не существовало, хотя словесная формулировка соответствующего понятия была дана еще в XIX веке в работах Курно, поэтому равновесная ситуация искалась в терминах простых логических соображений. Была найдена такая точка границы между областями двух конкурирующих магазинов x, что для находящегося в ней покупателя безразличен выбор того или иного продавца, при условии, что разница цен не превышает стоимости перевозки на расстояние между магазинами δ:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{p_2 - p_1}{2}.$$

Далее было получено выражение для целевых функций продавцов, их производные по ценам были приравнены нулю, и в результате найдены равновесные значения:

$$p_1 = l + \frac{a-b}{3},\ p_2 = l - \frac{a-b}{3},$$

$$q_1 = \frac{1}{2}(l + \frac{a-b}{3}),\ q_2 = \frac{1}{2}(l - \frac{a-b}{3}).$$

Хотеллинг в своей статье нашел решение, являющееся оптимальным, но не исследовал, при каких условиях локальное равновесие является глобальным. На протяжении пятидесяти лет не было почти никаких работ, посвященных данной теме. Большинство последующих работ можно разделить на две группы: 1) поиск равновесий для базовой модели и исследование поведения игроков в тех областях, где равновесие отсутствует; 2) модификации модели с целью описания более сложного поведения участников рынка. Необходимо отметить, что в большинстве публикаций разбирается модель дуополии на отрезке ввиду резкого усложнения задачи при увеличении размерности (количества игроков).

В работе [9], посвященной полностью модели Хотеллинга, для некоторых случаев опровергается результат, полученный в 1929 году. Также приведена измененная модель, в которой равновесие по подыграм существует всегда. Сформулировано и доказано следующее утверждение.

Утверждение 1. *Для* $a + b = l$ *существует единственное равновесие* $p_1 = p_2 = 0$. *Для* $a + b < l$ *точка равновесия существует тогда и только тогда, когда выполняются*

$$(l + \frac{a-b}{3})^2 \geqslant \frac{4}{3} l(a + 2b), \ (l + \frac{b-a}{3})^2 \geqslant \frac{4}{3} l(b + 2a)$$

и в данном равновесии

$$p_1 = l + \frac{a-b}{3}, \ p_2 = l - \frac{a-b}{3}.$$

Если же изменить функцию транспортных издержек с x на x^2, тогда равновесие в подыгре определения цен существует всегда и задача имеет решение.

В работе [12] рассматривается модификация задачи Хотеллинга, когда стратегией производителя является интервал цен с плотностью вероятности выбора каждого значения. Пусть (F_1, F_2) – равновесие, где F_i – функция распределения цены каждого игрока, и пусть a_i, b_i – наименьшая и наибольшая цена из данного распределения. Определяется равновесие T как такое, для которого $b_i - a_i \leqslant 2\delta$. Доказывается утверждение о том, что в двухшаговой игре производителей со стратегиями по местоположениям и ценам любое равновесие является равновесием типа T по ценам, и есть как минимум одно такое равновесие.

В работе [8] доказано, что если игроки определяют местоположение и цену не в 2 шага, а одновременно, то равновесие отсутствует.

В [7] в модель вводится «эффект сноба», при котором в целевую функцию покупателя вводится дополнительная отрицательная полезность, зависящая от объема продаж выбранного магазина:

$$-u(x) = p_i + |x_i - x| + kq_i.$$

При этом покупатель должен при выборе прогнозировать объем продаж производителей. То есть в данной постановке при такой активной позиции покупателя игра, фактически 2-шаговая в исходной постановке задачи, становится реально 3-шаговой. Найдены уникальные выпуски товаропроизводителями q_i при фиксированных x_i, p_i. На отрезке $[A, B]$ определены регионы с различными предпочтениями покупателей по выбору производителя.

3. Постановка задачи при неотрицательных выигрышах покупателя

В этой статье исследуется постановка задачи с неотрицательной полезностью покупателя. Целевая функция покупателя:

$$u(x) = \max(0, 1 - \min_{i \in 1,2}(p_i + |x_i - x|)).$$

Для такого варианта постановки задачи при выписывании целевых функций продавцов более удобным будет сначала рассмотреть игру установления цен в пространственной конкуренции неотрицательной полезности покупателей на прямой $(A = -\infty, B = \infty)$. Условие неотрицательной полезности позволяет ограничить область рынка, где расположены покупатели, не отказывающиеся от покупок, что делает задачу корректной. Единственной существенной характеристикой расположения магазинов, влияющей на выбираемые игроками стратегии p_1, p_2, является расстояние между ними $\delta = |x_2 - x_1|$.

При заданных ценах p_1, p_2 возможны следующие исходы. Если цены различаются более чем на $\delta : |p_1 - p_2| > \delta$, то игрок с более высокими ценами исчезает с рынка. Также исчезает с рынка игрок, установивший цены выше или равные единичной полезности товара $p_1 > 1$. Если сумма величин $1 - p_i$ превышает расстояние δ, то области двух магазинов не соприкасаются друг с другом. В оставшемся случае границей областей двух магазинов будет точка $\frac{x_1+x_2}{2} + \frac{p_2-p_1}{2}$, в которой расположен покупатель, которому безразличен выбор того или иного продавца (рис. 2).

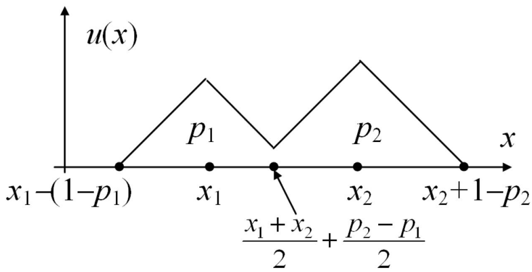


Рис. 2. Полезность покупателей в областях продавцов при условии их соприкосновения

Целевые функции игроков:

$$u_1(p_1,p_2)=\begin{cases} u_I(p_1), & ((p_1<p_2-\delta)\cup(p_1>2-\delta-p_2)) \\ & \qquad\cap(p_1\leqslant 1); \\ u_{II}(p_1,p_2), & (p_1\geqslant p_2-\delta)\cap(p_1\leqslant p_2+\delta)\cap \\ & \cap(p_1\leqslant 2-\delta-p_2); \\ u_{III}, & (p_1>p_2+\delta)\cup(p_1>1); \end{cases}$$

(1)

$$u_2(p_1,p_2)=\begin{cases} u_I(p_2), & ((p_2<p_1-\delta)\cup(p_2>2-\delta-p_1)) \\ & \qquad\cap(p_2\leqslant 1); \\ u_{II}(p_1,p_2), & (p_2\geqslant p_1-\delta)\cap(p_2\leqslant p_1+\delta)\cap \\ & \cap(p_2\leqslant 2-\delta-p_1); \\ u_{III}, & (p_2>p_1+\delta)\cup(p_2>1); \end{cases}$$

где

$$u_I(p_1)=2p_1(1-p_1),$$

$$u_{II}(p_1,p_2)=p_1(1-p_1+\frac{p_2-p_1+\delta}{2}),$$

$$u_{III}=0.$$

На рис. 3 (для случая $\delta<1$) изображены области, на которых функция $u_1(p_1, p_2)$ принимает значения $u_I(p_1)$, $u_{II}(p_1, p_2)$ и u_{III}. В области II происходит конкуренция сосуществующих на рынке фирм. В нижнем треугольнике области I в конкуренции побеждает фирма 1. В верхнем треугольнике области I зоны покупателей фирм не пересекаются. В области III фирма 1 терпит поражение в конкуренции и исчезает с рынка. Сравнительно со случаем

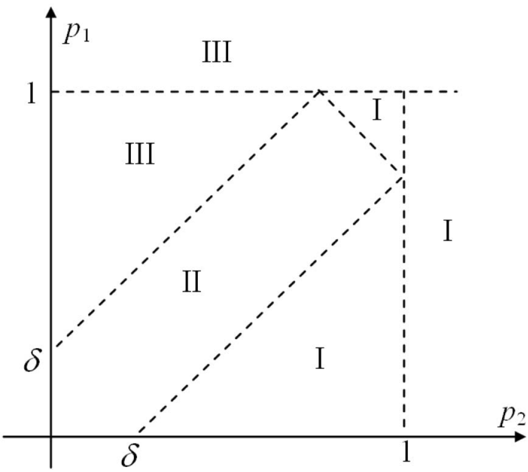


Рис. 3. Области значений целевой функции игрока 1

игры на прямой, в игре с симметричным расположением игроков (рис. 4) целевые функции игроков имеют более сложный вид. Области I и II разделяются на подобласти, в зависимости от того, достигает ли граница зоны покупателей данного магазина края отрезка $[A, B]$ (рис. 5).

Целевая функция (для игрока 1) имеет вид:

$$u_I(p_1) = \begin{cases} u_{I.1}(p_1) = 2p_1(1 - p_1), & p_1 \geqslant 1 - a, \\ u_{I.2}(p_1) = p_1(1 + a - p_1), & p_1 \in [1 - \delta - a, 1 - a], \\ u_{I.3}(p_1) = p_1(\delta + 2a) = p_1 l, & p_1 \leqslant 1 - \delta - a; \end{cases}$$

$$u_{II}(p_1,p_2) = \begin{cases} u_{II.1}(p_1,p_2) = \frac{3}{2}p_1(\frac{2+\delta+p_2}{3} - p_1), & p_1 \geqslant 1-a, \\ u_{II.2}(p_1,p_2) = \frac{1}{2}p_1(\delta + 2a + p_2 - p_1), & p_1 \leqslant 1-a; \end{cases}$$

$$u_{III} = 0.$$

При несимметричном расположении игроков $a \neq b$ их целевые функции еще несколько усложняются. Для игрока 1:

$$u_I^1(p_1) = \begin{cases} u_{I.1}(p_1) = 2p_1(1-p_1), & p_1 \geqslant 1-a, p_1 \geqslant 1-\delta-b; \\ u_{I.2}(p_1) = p_1(1+a-p_1), & p_1 \leqslant 1-a, p_1 \geqslant 1-\delta-b; \\ u_{I.3}(p_1) = p_1(1+b+\delta-p_1), & p_1 \geqslant 1-a, p_1 \leqslant 1-\delta-b; \\ u_{I.4}(p_1) = p_1(\delta+a+b), & p_1 \leqslant 1-a, p_1 \leqslant 1-\delta-b; \end{cases}$$

(2)

$$u_{II}^1(p_1,p_2) = \begin{cases} u_{II.1}(p_1,p_2) = \frac{3}{2}p_1(\frac{2+\delta+p_2}{3} - p_1), & p_1 \geqslant 1-a; \\ u_{II.2}(p_1,p_2) = \frac{1}{2}p_1(\delta+2a+p_2-p_1), & p_1 \leqslant 1-a; \end{cases}$$

$$u_{III}^1 = 0.$$

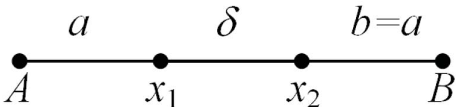


Рис. 4. Симметричное расположение игроков на отрезке

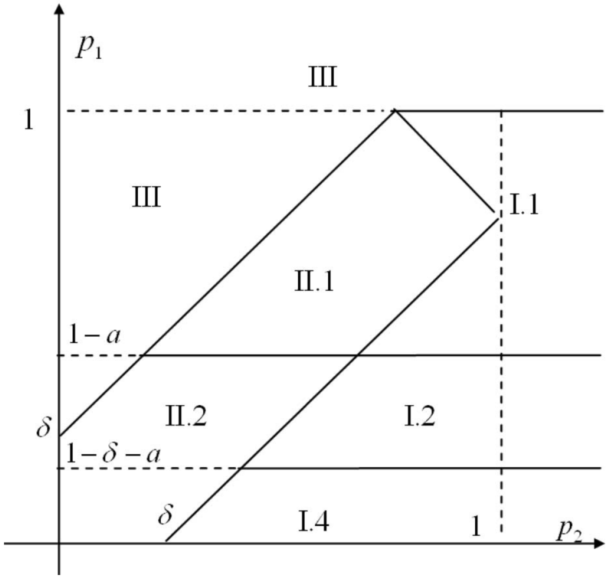


Рис. 5. Области значений целевой функции

Целевая функция игрока 2 выписывается симметрично:

$$u_I^2(p_2)=\begin{cases} u_{I.1}(p_2)=2p_2(1-p_2), & p_2\geqslant 1-a, p_2\geqslant 1-\delta-b;\\ u_{I.2}(p_2)=p_2(1+a-p_2), & p_2\leqslant 1-a, p_2\geqslant 1-\delta-b;\\ u_{I.3}(p_2)=p_2(1+b+\delta-p_2), & p_2\geqslant 1-a, p_2\leqslant 1-\delta-b;\\ u_{I.4}(p_2)=p_2(\delta+a+b), & p_2\leqslant 1-a, p_2\leqslant 1-\delta-b;\end{cases}$$

(3)

$$u_{II}^2(p_1,p_2)=\begin{cases} u_{II.1}(p_1,p_2)=\frac{3}{2}p_2(\frac{2+\delta+p_1}{3}-p_2), & p_2\geqslant 1-a;\\ u_{II.2}(p_1,p_2)=\frac{1}{2}p_2(\delta+2a+p_1-p_2), & p_2\leqslant 1-a;\end{cases}$$

$$u_{III}^2=0.$$

Функция $u_1(p_1)$ всегда состоит из не более чем трех участков, случаи $u_{I.2}(p_1)$ и $u_{I.3}(p_1)$ являются взаимоисключающими при фиксированных a, b, δ.

4. Модель простого равновесия в безопасных стратегиях

Если рассмотреть игру установления цен при фиксированных местоположениях игроков, то для несовпадающих $x_1 \neq x_2$ каждый из игроков может, назначив достаточно низкие цены, обеспечить себе положительный выигрыш независимо от стратегии конкурента. С другой стороны, при некоторых местоположениях магазинов не существует равновесия Нэша в игре цен, потому что в локальном равновесии, найденном Хотеллингом (далее называемом равновесием Хотеллинга), возникает следующая ситуация. По крайней мере один из игроков может, опустив цены относительно данного равновесия, полностью овладеть рынком и получить при этом дополнительную прибыль. Поскольку при реализации этой угрозы одним игроком второй теряет все и получает наихудший результат из возможных, естественно предположить, что рациональной стратегией в областях несуществования равновесия Нэша будет стремление к наибольшему выигрышу при исключении возможности указанного наихудшего результата игры. Именно эта логика поведения заложена в идее равновесия в безопасных стратегиях [4, 6]. Приведем определения простого РБС, достаточного для исследования задачи.

Пусть задана игра $\Gamma = (X_i, u_i, i \in N)$, где N - множество игроков, X_i - множества их стратегий, u_i - их функции выигрыша.

Определение 1. *Угрозой игрока j игроку i $j \to i$ называется пара ситуаций $x, (x'_j, x_{-j})$ такая, что $u_j(x'_j, x_{-j}) > u_j(x)$ и $u_i(x'_j, x_{-j}) < u_i(x)$. При этом ситуация x называется* ***содержащей угрозу****, а профиль (x'_j, x_{-j}), так же как и стратегия x'_j , называются* ***угрожающими*** *игроку i со стороны игрока j в ситуации x.*

Определение 2. *Стратегия x_i игрока i называется* ***простой безопасной стратегией*** *при заданной обстановке x_{-i}, если ситуация x не содержит угроз игроку i.*

Определение 3. ***Множеством*** $W_i(x) \subseteq X_i$ ***простых стратегий, предпочтительных с учетом угроз*** *для игрока i от-*

носительно ситуации x называется множество стратегий x'_i *таких, что* $u_i(x'_i, x_{-i}) \geqslant u_i(x)$ *и для любого игрока* $i \neq j$ *и для любой его угрозы игроку i:* $(x'_i, x_{-i})(x'_i, x'_i, x_{-ij})$ *выполнено* $u_i(x'_i, x'_i, x_{-ij}) \geqslant u_i(x)$.

Определение 4. *Ситуация* x^* *называется* ***простым равновесием в безопасных стратегиях****, если* $\forall i : x^*_i \subseteq \arg\max\limits_{x_i \subseteq W_i(x^*)} u_i(x_i, x^*_{-i})$.

Комментарий. $x_i \in W_i(x^*) \Leftrightarrow (u_i(x_i, x^*_{-i}) = u_i(x^*)) \cap (x_i$ – безопасна при окружении $x^*_{-i})$.

5. Существование РБС в задаче Хотеллинга

Теорема 1. *Игровая задача* $\Gamma : (X_i = \Re^+, u_i, i \in 1,2)$ *, где* u_i *определяются (1), (2), (3), всегда имеет решение в смысле РБС.*

Доказательство. Зафиксировав цену конкурента p_2 и рассматривая срез функции $u_1(p_1, p_2)$, можно заметить, что при различных p_2 целевая функция игрока 1 имеет качественно различный вид. Пусть $\delta < 0{,}5$, – это наиболее интересный случай. Тогда при $p_2 \leqslant \delta$ целевая функция $u_1(p_1, p_2)$ располагается в областях II и III и является однопиковой по p_1 (рис. 6). При $\delta < p_2 \leqslant 1 - \delta$ целевая функция $u_1(p_1, p_2)$ располагается в областях I, II и III и является двупиковой (рис. 7), причем возможен как случай превышения первого пика, располагающегося в области I, над вторым, так и обратный случай. При $p_2 > 1 - \delta$ целевая функция первого игрока по мере роста p_1 располагается в областях I, II, I и III и также может быть двупиковой (рис. 8). При $\delta > 0{,}5$ и при $1 - \delta < p_1 \leqslant \delta$ целевая функция является однопиковой и располагается в областях II, I и III (рис. 9).

Каждый из игроков при $x_1 \neq x_2, \delta > 0$ может гарантированно получить неотрицательный выигрыш, назначив положительную цену ниже, чем δ. Следовательно, при любом положении в игре, при котором какой-либо из игроков полностью вытесняется с рынка, угрозой проигравшего победителю будет назначение такой цены, значит такое положение не может быть РБС. Следовательно, любое РБС в данной задаче может находиться либо в области конкурентного сосуществования (область II для обоих игроков), либо в области непересечения покупательских зон (область I для обоих игроков). То есть РБС может лежать только в выпуклом компактном множестве $M_{II} : |p_1 - p_2| \leqslant \delta, 0 \leqslant p_i \leqslant 1$.

Рассмотрим игру Γ', в которой целевые функции совпадают с u_1, u_2 на множестве M_{II}, а вне него определяются следующим образом:

$$u'_i(p_i, p_{-i}) = \begin{cases} u_i(\mu_{min}(p_{-i}), p_{-i}) - & p_i < \mu_{min}(p_{-i}), \\ -2(\mu_{min}(p_{-i})) + 2p_i\,, & p_{-i} \in [0,\ 1], \\ u_i(p_i, p_{-i})\,, & p_i \in [\mu_{min}(p_{-i}),\ \mu_{max}(p_{-i})], \\ & p_{-i} \in [0, 1], \\ u_i(\mu_{max}(p_{-i}), p_{-i}) + & p_i > \mu_{max}(p_{-i}), \\ +2(\mu_{max}(p_{-i})) - 2p_i\,, & p_{-i} \in [0,\ 1], \\ -\infty\,, & p_{-i} \notin [0, 1]; \end{cases}$$

где

$$\mu_{min}(p_{-i}) = \max\{0, p_{-i} - \delta\}, \quad \mu_{max}(p_{-i}) = \min\{p_{-i} + \delta, 0\}.$$

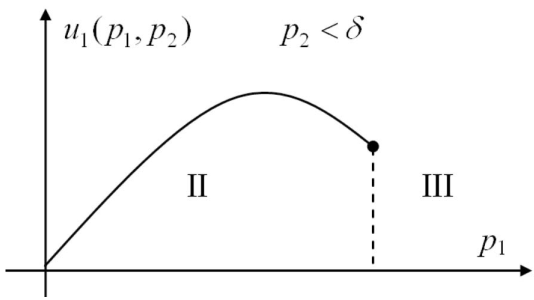


Рис. 6. Целевая функция игрока 1 при $p_1 < \delta, \delta < 0.5$

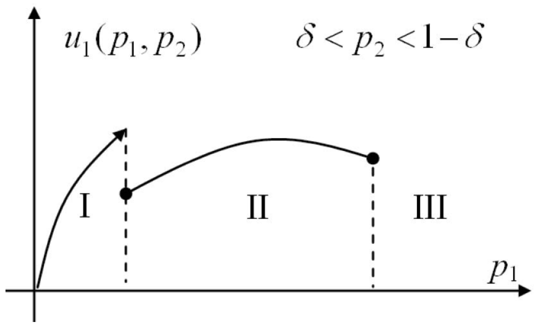


Рис. 7. Целевая функция игрока 1 при $\delta < p_2 \leqslant 1 - \delta, \delta < 0.5$

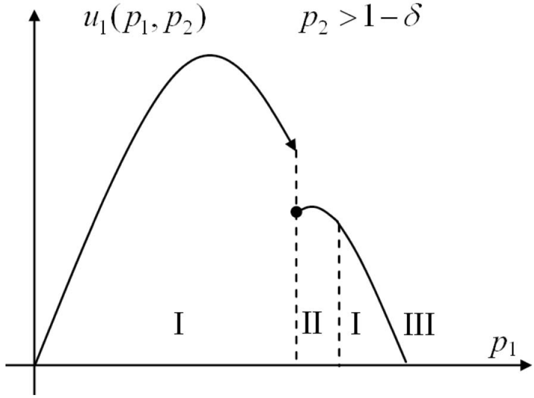


Рис. 8. Целевая функция игрока 1 при $p_2 > 1 - \delta, \delta < 0.5$

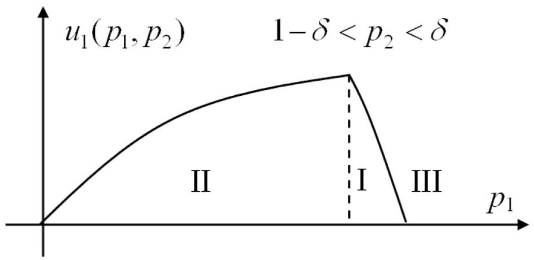


Рис. 9. Целевая функция игрока 1 при $1 - \delta < p_2 < \delta, \delta > 0.5$

Так как абсолютное значение производных u_1, u_2 не превышает 2, то целевые функции u_i игры Γ' вогнуты по p_i. Следовательно, существует равновесие Нэша в игре $\Gamma' : (\widehat{p_1}, \widehat{p_2}) \in M_{II}$. Если это равновесие является глобальным равновесием Нэша (а, следовательно, и РБС) в исходной игре, то $(\widehat{p_1}, \widehat{p_2}) = (p_1^*, p_2^*)$ и для данного случая утверждение теоремы доказано.

Допустим, что это не так, что означает: $(u_I^1(\hat{p}_2 - \delta) > u_{II}^1(\hat{p}_1, \hat{p}_2)) \vee (u_I^2(\hat{p}_1 - \delta) > u_{II}^2(\hat{p}_2, \hat{p}_1))$, то есть хотя бы для одного из игроков первый пик целевой функции выше второго (рис. 7).

Предположим, что $p_1 > 0{,}5 + \delta$. Тогда игрок 2, выбрав $p_2 = 0{,}5$, вытеснит соперника с рынка и получит максимально возможный в игре выигрыш 0,5. Следовательно, (p_1, p_2) не безопасна. То есть РБС следует искать при выполнении условия $p_1, p_2 \leqslant 0{,}5 + \delta$, при котором функция $u_I(p)$ является возрастающей на $[0,\ p_i - \delta]$.

По аналогии с наилучшим ответом при заданном окружении ($p_i^{BR}(p_{-i}) = \arg\max\limits_{p_i \in X_i} u_i(p, p_{-i})$) введем понятие наилучшего безопасного ответа:

$$p_i^{BSR}(p_{-i}) = \arg\max_{p_i \in V_i(p_{-i})} u_i(p, p_{-i}),$$

где $V_i(p_{-i})$ множество безопасных стратегий игрока *i* при окружении p_{-i}. В исследуемой игре могут быть угрозы двух видов: угрозы полного вытеснения игрока с рынка ("сильные"угрозы) и угрозы в таких ситуациях игры, в которых назначенная цена одного из игроков превосходит цену второго пика его целевой функции. Для решаемой задачи удобно учитывать угрозы только первого типа, и в качестве наилучшего безопасного ответа рассматривать стратегии безопасные относительно только таких угроз. При таком ограничении наилучший безопасный ответ определяется следующим образом:

(4) $$p_1^{BSR}(p_2) = \arg\max_{p \in [p_2 - \delta, p_2 + \delta]} u_{II}^1(p, p_2) = p_1^{BR}(p_2),$$

если $u_{II}^2(p_2, p_1^{BSR}(p_2)) \geqslant u_I^2(p_1^{BSR}(p_2) - \delta)$, т. е. когда второму игроку невыгодно вытеснять с рынка соперника. В ином случае наилучший безопасный ответ определяется из условия:

$$u_I^2(p_1^{BSR}(p_2) - \delta) = u_{II}^2(p_2, p_1^{BSR}(p_2)) \tag{5}$$

При этом в области $p_1 \in [p_2 - \delta, p_2 + \delta]$ (область II) безопасными для игрока 1 будут только цены $p_1 \leqslant p_1^{BSR}(p_2)$. Только при таких ценах будет выполняться условие безопасности его стратегий: $u_I^2(p_1 - \delta) \leqslant u_{II}^2(p_2, p_1)$ (второму игроку невыгодно вытеснять соперника). Функции $p_1^{BSR}(p_2),\ p_2^{BSR}(p_1)$ являются непрерывными в силу непрерывности $u_I(p),\ u_{II}(p_1, p_2)$ и того, что решение (4) переходит в решение (5) непрерывно. Данные функции определяются для произвольных значений p_1, p_2 и принимают значения внутри множества M_{II}. Следовательно, существует точка $(p_1^*, p_2^*) \in M_{II}$ такая, что $p_1^* = p_1^{BSR}(p_2),\ p_2^* = p_2^{BSR}(p_1)$. Так как, согласно (4), (5), наилучший безопасный ответ не превосходит цену второго пика, то для найденной точки этот наилучший безопасный ответ учитывает не только сильные, но и вообще все угрозы. Только такие точки являются РБС. Они являются РБС тогда, когда для любого игрока его переход к стратегии, не являющейся безопасной, не является предпочтительным с учетом угроз (то есть угрозы превосходят выигрыш при таком переходе). Для данной задачи это так, поскольку содержащиеся в ней угрозы связаны с максимальным ущербом (полным вытеснением игрока с рынка).

6. Исследование игры цен на прямой

Решение игровой задачи назначения цен на прямой $[A, B] = [-\infty, +\infty]$, при заданных местоположениях, зависит только от одного параметра, от δ. Функции выигрыша задаются формулой (1). Исследуем возможные типы равновесий в игре на прямой – равновесия Нэша и РБС. Прежде всего, следует заметить, что равновесие (Нэша или РБС) может располагаться либо в области II (которая идентична для обоих игроков), там где устанавливается конкурентное равновесие, либо в той части области I, где зоны двух игроков не пересекаются. Случаи полного вытеснения с рынка одного из игроков при $\delta > 0$ исключены.

Область, в которой не существует равновесий Нэша, – это область достаточно малых δ. В таком случае локальное равновесие, найденное Хотеллингом (точнее, его аналог для рассматриваемой модификации задачи), не является глобальным. Это происходит потому, что максимум двупиковой функции игрока, при условии, что партнер выбрал точку локального равновесия, лежит в области I, т. е. первый пик выше второго. При этом в игре существует РБС, описываемое следующей системой уравнений (рис. 10):

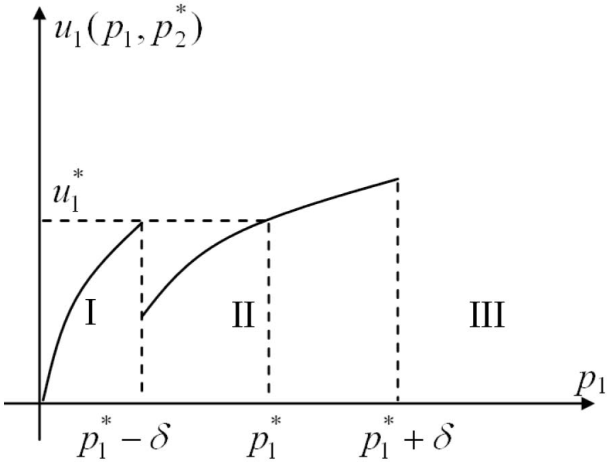


Рис. 10. Равновесие в безопасных стратегиях

$$\begin{cases} u_{II}(p_1^*, p_2^*) = u_I(p_1^* - \delta), \\ u_{II}(p_2^*, p_1^*) = u_I(p_2^* - \delta). \end{cases}$$

Так как равновесные стратегии равны из соображений симметрии $p_1^* = p_2^* = p^*$, то уравнение равновесных цен: $u_{II}(p^*, p^*) = u_I(p^* - \delta)$.

Для того чтобы точка была РБС, необходимо выполнение условий РБС:

$$\forall \varepsilon \in (0, \delta] : u_I(p^* - \delta + \varepsilon) > u_{II}(p^*, p^* + \varepsilon).$$

Это условие означает, что если игрок увеличит свою стратегию до $p^* + \varepsilon$, то игроку 2, сравнительно с его равновесным положением p^*, станет выгодно предпочесть стратегию $p^* - \delta + \varepsilon$, при которой он вытесняет с рынка игрока 1.

Равновесие Хотеллинга описывается уравнениями:

$$\text{(6)} \qquad \begin{cases} u_{II}(p_1^*, p_2^*) = \max\limits_{p_1} u_{II}(p_1, p_2^*), \\ u_{II}(p_2^*, p_1^*) = \max\limits_{p_2} u_{II}(p_2, p_1^*), \end{cases}$$
$$u_{II}(p^*, p^*) = \max_{p} u_{II}(p, p^*).$$

Условием, при котором это равновесие является решением задачи, будет требование, чтобы игрокам не было выгодно переходить с него к стратегии вытеснения конкурента (рис. 11):

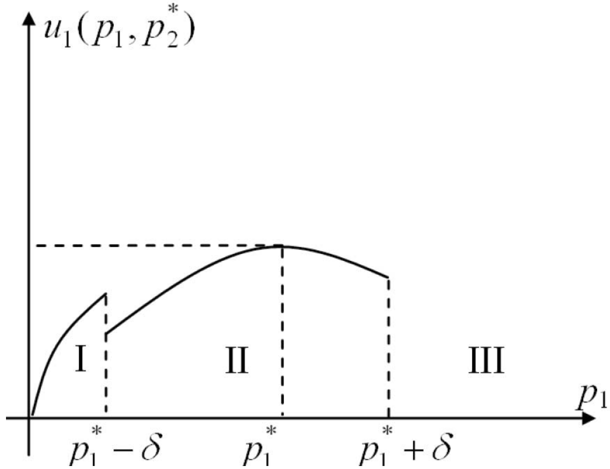


Рис. 11. Равновесие Хотеллинга

$$\text{(7)} \qquad u_I(p^* - \delta) < u_2(p^*, p^*).$$

Условие неотрицательности целевой функции покупателей порождает появление еще одного типа равновесия – равновесия при условии отрыва. В нем покупатель, находящийся на границе зон двух магазинов получает при покупке товара в любом из них нулевую полезность, т. е. при малейшем повышении цен покупательские зоны магазинов отрываются друг от друга. В этом случае равновесные стратегии игроков находятся на границе областей II и I их целевых функций (рис. 12). Условием равновесия будет система неравенств:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_{II}(p_1^*, p_2^*)}{\partial p_1} > 0, \\ \frac{\partial u_I(p_1^*)}{\partial p_1} < 0, \\ \frac{\partial u_{II}(p_2^*, p_1^*)}{\partial p_2} > 0, \\ \frac{\partial u_I(p_2^*)}{\partial p_2} < 0. \end{cases} \tag{8}$$

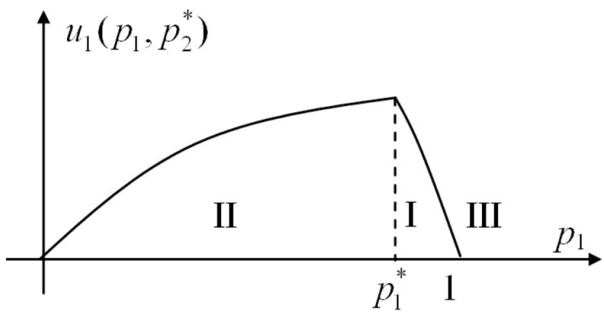


Рис. 12. Равновесие при условии отрыва

Этот случай допускает не единственное решение, а целый отрезок возможных равновесий на плоскости (p_1, p_2). Наконец, последний, четвертый случай, при котором игроки расположены настолько далеко, что никак не влияют друг на друга, и игра сводится к независимой оптимизации цены каждым.

Исследуя все вышеперечисленные случаи и решая соответствующие системы уравнений (6), (7), (8), можно получить решение задачи установления цен на прямой и доказать следующее утверждение (рис. 13).

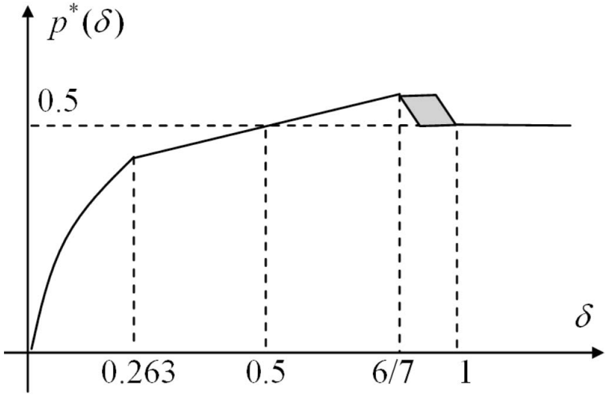


Рис. 13. Зависимость равновесных цен от расстояния между магазинами

Утверждение 2. *Игровая задача установления цен на прямой имеет следующее решение в РБС:*

1) При $\delta \in \left[0, \frac{-2{,}24+\sqrt{25{,}6}}{10{,}72}\right] \approx [0, 0{,}263]$ *– РБС:*

$$p_1^* = p_2^* = p^* = \tfrac{2+7\delta-\sqrt{17\delta^2-4\delta+4}}{4},$$
$$u_1^* = u_2^* = 2(p^* - \delta)(1 - p^* + \delta);$$

2) При $\delta \in \left[\frac{-2{,}24+\sqrt{25{,}6}}{10{,}72}, \frac{6}{7}\right]$ *– равновесие Хотеллинга:*

$$p_1^* = p_2^* = p^* = 0{,}4 + 0{,}2\delta, \quad u_1^* = u_2^* = \frac{3}{2}p^{*2};$$

3) При $\delta \in \left[\frac{6}{7},\ 1\right]$ *– равновесие при условии отрыва:*

$$\max\left\{\tfrac{10}{7} - \delta,\ 0{,}5\right\} \leqslant p_1^* \leqslant \min\left\{\tfrac{4}{7},\ 1{,}5 - \delta\right\},$$
$$p_2^* = 2 - \delta - p_1^*, \quad u_i^* = 2p_i^*(1 - p_i^*);$$

4) При $\delta \in [1, \infty)$: $\quad p_i^* = u_i^* = 0{,}5.$

Следует отметить интересный парадокс: при $\delta \in (0{,}5;\ 1)$ уровень цен, устанавливающихся при конкуренции, выше, чем в монопольном случае непересекающихся областей. Но значение их выигрышей при этом тем не менее меньше, чем в монопольном положении. Чтобы пояснить этот феномен, можно представить, что игроки, находящиеся на расстоянии, соответствующем равновесию при условии отрыва, установили цены $p_i^* = 0{,}5$. Тогда зона покупателей игрока 1 имеет длину 0,5 слева от его магазина и длину $\delta/2$ – справа. При этом любое малое увеличение или уменьшение цены компенсируется соответствующим уменьшением или увеличением его левой подобласти так, что доходы с нее не увеличиваются. Но граница его правой подобласти, встречая конкурентное давление второго игрока, изменяет свою длину с приращениями в два раза меньшими, чем левая граница. Поэтому, слабо увеличивая цену, игрок получает с правой подобласти дополнительный доход. Таким образом, устанавливаются равновесные, более высокие цены.

7. Исследование игры цен с симметричным расположением игроков

Исследование игровой задачи цен открывает, что количество вариантов равновесного решения, возможных при различных значениях параметров a и δ, увеличивается, сравнительно со случаем игры на прямой, с 4 до 11. Соответствующие всем возможным равновесиям уравнения, равновесные цены и выигрыши, ограничения приведены в таблице 1. На рис. 14 показано расположение областей, соответствующих различным равновесиям на плоскости (a, δ), а рис. 15 и 16 иллюстрируют общий вид функций равновесных цен и выигрышей игроков в зависимости от a и δ. Для случаев 7, 8, в которых существуют множественные равновесия, показаны средние значения равновесных цен и выигрышей.

Утверждение 3. *Игровая задача установления цен на отрезке с симметричным расположением игроков имеет решение (таблица 1)*

Таблица 1. Решение игры цен с симметричным расположением игроков

	Уравнение	Решение	Ограничения
1	$u_{I.1}(p^*-\delta)=u_{II.1}(p^*,p^*)$	$p^*=\frac{2+7\delta-\sqrt{17\delta^2-4\delta+4}}{4}$, $u^*=2(p^*-\delta)(1+\delta-p^*)$	$a\geqslant\frac{2-3\delta+\sqrt{17\delta^2-4\delta+4}}{4}$, $\delta\leqslant\frac{-2{,}24+\sqrt{25{,}6}}{10{,}72}\approx 0{,}263$
2	$u_{I.2}(p^*-\delta)=u_{II.1}(p^*,p^*)$	$p^*=\frac{2\delta(1+\delta+a)}{3\delta+2a}$, $u^*=(p^*-\delta)(1+a+\delta-p^*)$	$a\leqslant\frac{2-3\delta+\sqrt{17\delta^2-4\delta+4}}{4}$, $a\geqslant\frac{\delta(4+7\delta)}{4-8\delta}$, $a\geqslant 1-2\delta$
3	$u_{I.3}(p^*-\delta)=u_{II.2}(p^*,p^*)$	$p^*=2\delta,\quad u^*=\delta(\delta+2a)$	$\delta/2\leqslant a\leqslant 1-2\delta$
4	$p^*=\underset{p}{\operatorname{argmax}}\,u_{II.1}(p,p^*)$	$p^*=0{,}4+0{,}2\delta$, $u^*=0{,}06(2+\delta)^2$	$a\leqslant\frac{\delta(4+7\delta)}{4-8\delta},\delta\in\left[\frac{2}{9},0{,}263\right]$ $a\geqslant 0{,}6-0{,}2\delta,\delta\in\left[\frac{2}{9},\frac{6}{7}\right]$
5	$u_{II.1}(p^*,p^*)=u_{II.2}(p^*,p^*)$	$p^*=1-a$, $u^*=0{,}5(1-a)(\delta+2a)$	$a\leqslant 0{,}6-0{,}2\delta$, $a\geqslant 1-2\delta, a\geqslant\delta/2$
6	$p^*=\underset{p}{\operatorname{argmax}}\,u_{II.2}(p,p^*)$	$p^*=\delta+2a, u^*=0{,}5(\delta+2a)^2$	$a\leqslant\delta/2$, $a\leqslant 0{,}5-0{,}75\delta$

Таблица 1 (продолжение).

	Уравнение	Решение	Ограничения
7	$u_{II.2}(p_1^*, p_2^*) = u_{I.2}(p_1^*)$ $u_{II.2}(p_2^*, p_1^*) = u_{I.2}(p_2^*)$	$p_1^* \geqslant \max\left\{\begin{array}{l}\frac{4-3\delta-2a}{3}, \frac{1+a}{2},\\ 1+a-\delta\end{array}\right\}$ $p_1^* \leqslant \min\left\{\begin{array}{l}\frac{2+2a}{3}, \frac{3-2\delta-a}{2},\\ 1-a\end{array}\right\}$ $p_2^* = 2-\delta-p_1^*,$ $u_i^* = p_i^*(1+a-p_i^*)$	$a \leqslant \delta/2, a \geqslant 0{,}5 - 0{,}75\delta,$ $a \leqslant 1-\delta$
8	$u_{II.1}(p_1^*, p_2^*) = u_{I.1}(p_1^*)$ $u_{II.1}(p_2^*, p_1^*) = u_{I.1}(p_2^*)$	$p_1^* \geqslant \max\left\{\frac{10}{7}-\delta, 1-a, \frac{1}{2}\right\}$ $p_1^* \leqslant \min\left\{\frac{4}{7}, 1+a-\delta, \frac{3}{2}-\delta\right\}$ $p_2^* = 2-\delta-p_1^*,$ $u_i^* = 2p_i^*(1-p_i^*)$	$a \geqslant \delta/2, \quad \delta \in [6/7,\ 1]$
9	$p^* = \arg\max\limits_p u_{I.1}(p)$	$p^* = u^* = 0{,}5$	$a \geqslant 0{,}5, \quad \delta \geqslant\ 1$
10	$p^* = \arg\max\limits_p u_{I.2}(p)$	$p^* = \frac{1+a}{2}, u^* = \left(\frac{1+a}{2}\right)^2$	$a \leqslant 1/3, \quad \delta \geqslant\ 1-a$
11	$u_{I.1}(p^*) = u_{I.2}(p^*)$	$p^* = 1-a, u^* = 2a(1-a)$	$1/3 \leqslant a \leqslant 0{,}5, \quad \delta \geqslant\ 2a$

Доказательство. Заключается в решении уравнений из первого столбца таблицы. Ограничения выводятся из условия непрерывного перехода одного решения в другое.

В приведенном решении областям 1, 2, 3 соответствуют РБС. Области 4 и 6 соответствуют равновесиям Хотеллинга, где покупательские зоны касаются краев отрезка в первом случае, и касаются во втором. В областях 7 и 8 имеются множественные равновесия при условии отрыва зон игроков друг от друга. Области 5 и 11 занимают равновесия при условии отрыва зон игроков от края отрезка. Области 9, 10, 11 – решения при непересекающихся зонах игроков. На решения в областях 1, 4, 8, 9 не влияют края отрезка. Особый интерес представляет точка $a = 0{,}2,\ \delta = 0{,}4$, граничащая сразу с четырьмя областями: РБС, равновесия Хотеллинга, равновесия при отрыве зон игроков друг от друга, равновесия при условии отрыва от края отрезка. В этой точке достигается максимальный уровень цен, возможный для исследуемой задачи. Эта точка представляет такой интерес, что ее следует рассмотреть отдельно, как пример.

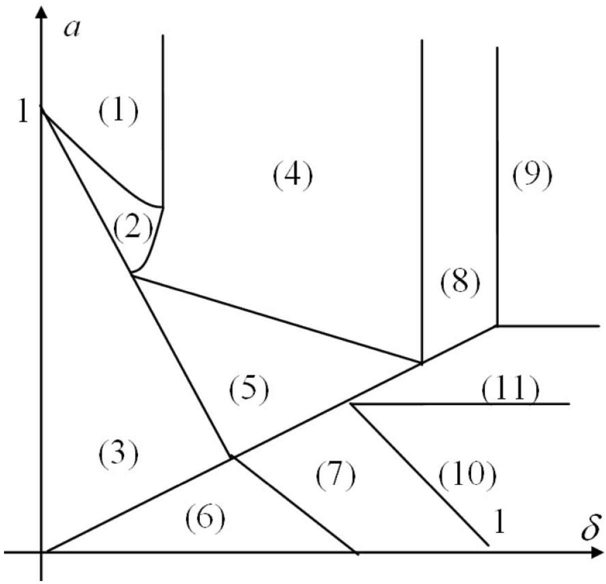


Рис. 14. Области решений симметричной игры цен

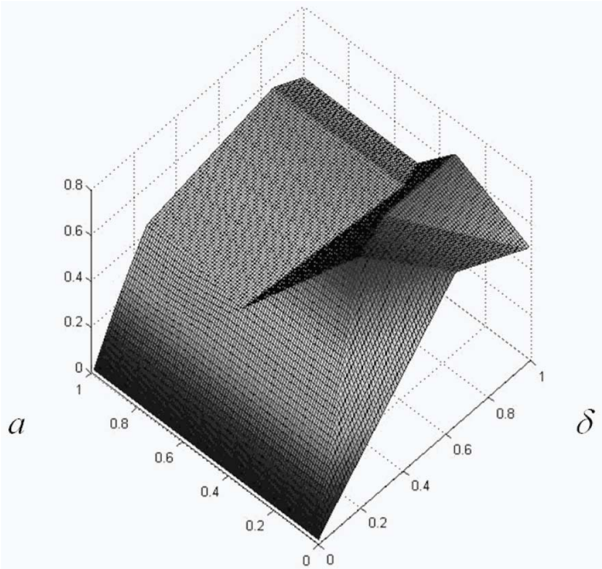


Рис. 15. Равновесные цены в симметричной игре цен

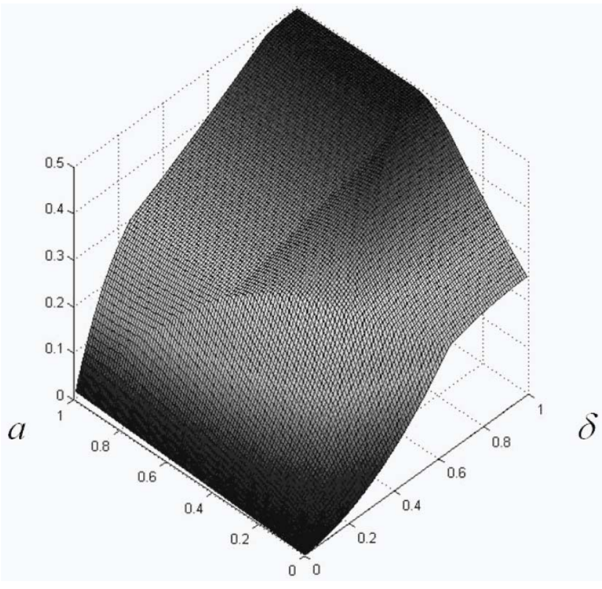


Рис. 16. Равновесные выигрыши в симметричной игре цен

8. Пример: повышение цен при переходе от монополии к дуополии

Пусть $A = 0,\ B = 0{,}8,\ l = 0{,}8$. При монополистическом случае одного продавца его наивысший выигрыш при оптимальной цене достигается при расположении магазина в центре отрезка $x_0 = 0{,}4$. При этом оптимальная цена $p_0^* = 0{,}6$, а выигрыш $u_0^* = 0{,}6 \cdot 0{,}8 = 0{,}48$. Полезность покупателя, расположенного в точке x, при приобретении товара (рис. 17):

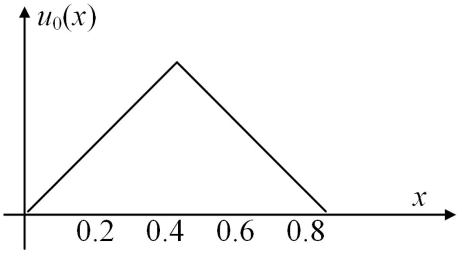


Рис. 17. Полезность покупателей при монополии

$$u(x) = \begin{cases} x, & x \leqslant 0{,}4, \\ 0{,}8 - x, & x \geqslant 0{,}4. \end{cases}$$

Для случая дуополии при $a = b = 0{,}2,\ \delta = 0{,}4$ равновесие в игре цен дает $p_1^* = p_2^* = 0{,}8$, выигрыши продавцов $u_i^* = 0{,}8 \cdot 0{,}4 = 0{,}32$. Функция полезности игрока 1 при фиксированной равновесной цене соперника будет иметь вид (рис. 18):

$$u_1(p_1, p_2^*) = \begin{cases} 0{,}8p_1, & p_1 \in [0;\ 0{,}4]; \\ 0{,}5p_1(1{,}6 - p_1), & p_1 \in [0{,}4;\ 0{,}8]; \\ 2p_1(1 - p_1), & p_1 \in [0{,}8;\ 1]. \end{cases}$$

Видно, что стратегия $p_1^* = p_2^* = 0{,}8$ является равновесием Нэша в игре цен. При снижении цен от этого уровня игроком 1 контролируемый им участок слева не возрастает, так как упирается в край отрезка,

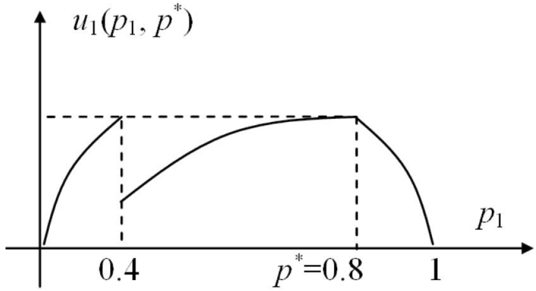


Рис. 18. Полезность продавца при дуополии

а увеличение участка справа не компенсирует падения дохода от снижения цен. Полезность покупателя в точке *x* при приобретении товара (рис. 19):

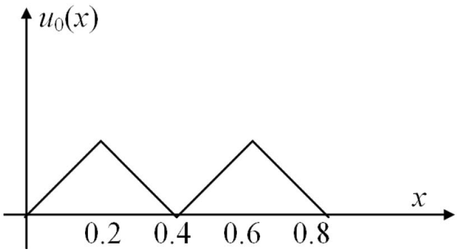


Рис. 19. Полезность продавца при дуополии

$$u(x) = \begin{cases} x, & x \in [0;\ 0{,}2], \\ 0{,}4 - x, & x \in [0{,}2;\ 0{,}4], \\ x - 0{,}4, & x \in [0{,}4;\ 0{,}6], \\ 0{,}8 - x, & x \in [0{,}6;\ 1]. \end{cases}$$

То есть с точки зрения покупателей вариант дуополии доминируется по Парето монопольным вариантом наличия одного магазина. Конкуренция при таких условиях на пространственно распределенном рынке вызывает повышение цен.

9. Обсуждение методов решения игры цен при несимметричном расположении игроков

Технически задача исследования игры цен при несимметричном расположении становится существенно более сложной. Это происходит, с одной стороны, из-за увеличения количества типов возможных равновесий несимметричного типа. Например, равновесие, в котором один из игроков выбирает безопасную стратегию, а другой – равновесную по Нэшу-Хотеллингу. С другой стороны, сами уравнения и решения становятся более сложными.

В качестве примера можно привести решение для несимметричного аналога симметричного случая 3 из таблицы 1. Симметричным решением было: $p_1^* = p_2^* = p^* = 2\delta$, $u^* = \delta(\delta + 2a)$. Для несимметричного случая решение получается существенно сложнее (формула для игрока 1):

$$
\begin{aligned}
&p_1^* = 2(l - y_1),\\
&y_1 = \sqrt[3]{-\tfrac{r_1}{2} + \sqrt{R_1}} + \sqrt[3]{-\tfrac{r_1}{2} - \sqrt{R_1}},\\
&R_1 = \left(\tfrac{s_1}{3}\right)^3 + \left(\tfrac{r_1}{2}\right)^2,\\
&r_1 = -\tfrac{2}{3}\left(l + a - \tfrac{\delta}{2}\right)^3 + \tfrac{1}{3}b\left(l + b + \tfrac{\delta}{2}\right)\left(l + b - \tfrac{\delta}{2}\right) - b^2 l,\\
&s_1 = \tfrac{1}{3}\left(l + b - \tfrac{\delta}{2}\right)^3 + b\left(l + b + \tfrac{\delta}{2}\right),\\
&u_1^* = l(p_1^* - \delta).
\end{aligned}
$$

Для ряда равновесий аналитических решений получить не удалось. Для других не удалось аналитически определить области возрастания и убывания u_i^* по a, b, что необходимо для решения двухшаговой задачи, со стратегиями x_i^* на первом шаге и p_i^* – на втором. Так что, вероятно, дальнейшее полное решение двухшаговой игровой задачи Хотеллинга будет проведено численно, причем теоретических сложностей на этом пути не предвидится, так как все получающиеся системы уравнений корректны и решабельны.

10. Заключение

В предложенной работе получено 3 основных результата. Во-первых, логика угроз и безопасных стратегий позволила предложить убедительное решение классической задачи.

Во-вторых, с точки зрения метода найдено еще одно приложение, в котором применение идеи РБС оказалось плодотворно. Первой задачей, для которой были предложены и на которой опробованы безопасные стратегии, была задача Даунса [2, 4, 5, 6, 10]. Теоретически эта задача является аналогом задачи Хотеллинга с нулевыми ценами, в которой стратегиями игроков является только определение своих местоположений. Как приложение, эта модель применяется для описания политического процесса предвыборной борьбы партий, представляющих свои программы как местоположения на пространстве предпочтений избирателей. Другие классы задач, для которых применялось РБС: исследование конкурсных механизмов [1], конструирование механизмов, восстанавливающих доверие агентов центру [3].

В-третьих, особым, неожиданным результатом работы стало обнаружение эффекта повышения цен вследствие конкуренции на пространственно распределенных рынках. Этот результат тем более ценен, что является не отдельным экзотическим случаем, специально построенным для демонстрации парадокса, а занимает в пространстве возможных местоположений магазинов существенную область. То есть замеченный эффект – не просто чисто теоретическая возможность при совершенно невероятном стечении обстоятельств, но должен быть значимым и при решении практических задач.

Литература

1. ИВАЩЕНКО А. А., ИСКАКОВ М. Б., КОЛОБОВ Д. В., НОВИКОВ Д. А. *Конкуренция на рынке инноваций* // Иващенко А. А., Колобов Д. В., Новиков Д. А. Механизмы финансирования инновационного развития фирмы. – М.: ИПУ РАН, 2005. – С. 26-37.
2. ИСКАКОВ М. Б. *Игровая задача дележа распределенного на отрезке ресурса. Модернизация экономики и глобализация. Кн. 3.* – М.: Изд. дом ГУ ВШЭ, 2009. – С. 519-531.
3. ИСКАКОВ М. Б. *Модели и методы управления привлечением вкладов в банковскую сберегательную систему*. – М.: Изд. ЭГВЕС, 2006.
4. ИСКАКОВ М. Б. *Равновесие в безопасных стратегиях* // Автоматика и телемеханика. – 2005. – №3. – С. 139-153.

5. ИСКАКОВ М. Б. *Равновесие в безопасных стратегиях в задаче дележа распределенного на отрезке ресурса* // Равновесные модели экономики и энергетики: Труды Всероссийской конференции и секции Математической экономики XIV Байкальской международной школы-семинара "Методы оптимизации и их приложения", Иркутск, Байкал, 2-8 июля 2008 г. – Изд-во ИСЭМ СО РАН, 2008.
6. ИСКАКОВ М. Б. *Равновесие в безопасных стратегиях и равновесия в угрозах и контругрозах в некооперативных играх* // Автоматика и телемеханика. – 2008. – №2. – С. 114-134.
7. AHLIN P. *Equilibrium existence in the symmetric Hotelling model with negative network effects* // Duke Journal of Economics. – 1997. – V. IX. – P. 1-28.
8. BASU K. *Lectures in Industrial Organization Theory*. Blakwell Cambridge, USA, 1993.
9. D'ASPREMONT C., GABSZEWICZ J., THISSE J. F. *On Hotelling's "Stability in Competition"* // Econometrica. – 1979. – V. 47. – №5. – P. 1145-1150.
10. DOWNS A. *An Economic Theory of Democracy*. N.Y.: Harper & Row, 1957.
11. HOTELLING H. *Stability in Competition* // The Economic Journal. – 1929. – V. 39. – №153. – P. 41-57.
12. OSBORNE M. J., PITCHIK C. *Equilibrium in Hotelling's Model of Spatial Competition* // Econometrica. – 1987. – V. 55. – №4. – P. 911-922.

SECURE STRATEGY EQUILIBRIUM IN HOTELLING'S MODEL OF SPATIAL COMPETITION

Mihail Iskakov, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Cand. Sc. (mih_iskakov@mail.ru).
Pavel Pavlov, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, post-graduate student(pashapavlov@gmail.com).

Abstract: The problem of spatial competition was formulated in 1929 by Harold Hotelling. He considered two firms playing a two-stage game. They choose locations in stage 1 and prices in stage 2. If locations are chosen by competitors Nash equilibrium do not always exist. For studying these cases we employ the concept of secure strategy equilibrium (SSE) which allows to solve the game of choosing prices for any locations. We examine a nontrivial particular case when prices grow if market moves from a monopoly to a duopoly.

Keywords: game theory, secure strategy equilibrium, Hotelling's model of spatial competition.

УДК 519
ББК 32.81

ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ И НЕМАНИПУЛИРУЕМОСТЬ НЕАНОНИМНЫХ ПРИОРИТЕТНЫХ МЕХАНИЗМОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ [1] [2]

Коргин Н. А. [3]
(Учреждение Российской академии наук Институт проблем управления РАН, Москва)

Вводится аналитическая запись неманипулируемых механизмов последовательного распределения ресурсов, эквивалентных механизмам прямых и обратных приоритетов. Известная эквивалентность анонимных приоритетных механизмов распределения ресурсов распространяется на неанонимные механизмы – доказывается, что для произвольного механизма прямых приоритетов можно предъявить эквивалентный механизм обратных приоритетов, но не наоборот. Определяются классы механизмов обратных приоритетов, для которых можно предъявить эквивалентный механизм прямых приоритетов.

Ключевые слова: механизмы распределения ресурсов, неманипулируемые механизмы, теория игр, механизмы планирования.

Введение

Задача распределения ограниченных ресурсов является актуальной задачей *теории управления организационными системами* (ТУОС) [3], математической экономики [4], микроэкономической теории [9], теории игр и теории выбора [5]. Кратко эта

[1] *Работа выполнена в рамках гранта РФФИ №09-07-00093-а.*

[2] *Текст приводится в соответствии с изданием «Математическая теория игр и ее приложения. – 2009. – Т. 1. №3».*

[3] *Николай Андреевич Коргин, кандидат технических наук, (nkrogin@ipu.ru).*

проблема может быть сформулирована следующим образом. Для каждого *агента* существует наилучшее с его точки зрения количество ресурсов (точка пика), которое он хотел бы получить, и сумма точек пика превышает количество ресурсов, имеющегося в системе. Управляющему органу – *центру* – необходимо распределить ресурсы между агентами, обеспечив при этом *эффективность* их использования в соответствии с теми или иными критериями. Процедура принятия решений центром, ставящая в соответствие вектору *заявок* агентов количество ресурсов, выделяемое тому или иному агенту, называется *механизмом распределения ресурсов*. Если агенты сообщают непосредственно требуемое им количество ресурсов, то механизм называется *прямым*. В классификации ТУОС механизмы распределения ресурсов принадлежат классу механизмов планирования, для которых помимо эффективности, важным свойством является их *манипулируемость/неманипулируемость*. При фиксированном механизме распределения ресурсов агенты являются вовлеченными в игру – количество ресурсов, получаемое каждым из агентов, зависит в общем случае от заявок всех агентов. При этом в равновесии этой игры не всем агентам может быть выгодно честно сообщать информацию о своих точках пика. Механизм называется неманипулируемым, если при его использовании в равновесии всем агентам выгодно сообщать достоверную информацию.

Для *монотонных* по заявкам агентов механизмов распределения ресурсов было доказано [2], что для любого из них существует *эквивалентный* (для фиксированного набора агентов дающий тоже результирующее распределение ресурсов) прямой механизм – неманипулируемый *механизм последовательного распределения ресурсов*. То есть поиск эффективных механизмов распределения ресурсов можно ограничить классом прямых неманипулируемых механизмов последовательного распределения ресурсов.

Важным свойством механизмов распределения ресурсов является *анонимность*. Механизм является анонимным, если он симметричен относительно перестановок агентов – итоговое распределение ресурсов зависит только от заявок агентов. В [1] было доказано, что при заданном количестве ограниченных ресурсов все анонимные монотонные по заявкам агентов механизмы эквивалентны, и, как следствие, обладают одинаковой эффективностью. То есть, если в дополнение к свойствам, описанным выше, от механизма распределения ресурсов требуется анонимность, то достаточно использовать «простейший» механизм – *пропорционального* распределения ресурсов, в котором ресурсы, выделяемые агенту прямо пропорциональны его заявке.

Упомянутые выше результаты исследования механизмов распределения ресурсов считаются «классическими» в ТУОС [3, 6]. Однако, эти результаты, как правило, ограничиваются только классом анонимных механизмов, причем до сих пор не была получена аналитическая запись механизма последовательного распределения ресурсов. В зарубежной литературе, посвященной данной проблематике, основной акцент делался также на анонимные механизмы. Наиболее полный обзор полученных результатов можно найти в [8]. Особо следует выделить работу [10], в которой был получен общий вид аналитической записи анонимных неманипулируемых механизмов распределения ресурсов. Данный результат был распространен на неанонимные механизмы в [7], где был получен общий вид записи любого неманипулируемого и неанонимного механизма распределения ресурсов и было доказано, что все такие механизмы являются механизмами последовательного распределения ресурсов.

На практике широко распространены и достаточно хорошо изучены с теоретической точки зрения так называемые *приоритетные механизмы* [6], в которых решение о том, как должен быть распределен ресурс между агентами, определяется на основании их *функций приоритета*, аргументом которых являются заявки агентов на ресурс. Выделяют три класса приоритетных механизмов – *прямых приоритетов*, в которых функция приоритета каждого агента является возрастающей функцией его заявки на ресурс; *обратных приоритетов*, в которых функция приоритета убывает с ростом заявки агента на ресурс; и *абсолютных приоритетов*, в которых функция приоритета каждого агента не зависит от его заявки. Приоритетный механизм является анонимным, если все агенты имеют одинаковые функции приоритета.

В рамках настоящей работы акцент сделан на исследование неанонимных приоритетных механизмов распределения ресурсов. Приводится аналитическая запись прямого неманипулируемого механизма последовательного распределения ресурсов, эквивалентного заданному приоритетному механизму. На основе данного результата исследуется эквивалентность механизмов прямых и обратных приоритетов. Доказывается, что все механизмы прямых приоритетов сводятся к механизму *взвешенного пропорционального* распределения ресурсов, в котором количество ресурсов, выделяемое агенту пропорционально его заявке, умноженной на его приоритет. Среди всего класса механизмов обратных приоритетов выделяется подкласс механизмов – *с постоянными весами агентов*, для которых существуют эквивалентные механизмы прямых приоритетов.

В разделе 2 формализованы основные понятия, приведены определения и предварительные результаты. Раздел 3 посвящен построению прямых неманипулируемых механизмов, эквивалентных неанонимным приоритетным механизмам распределения ресурсов. Раздел 4 – исследованию эквивалентности механизмов прямых и обратных приоритетов.

1. Основные определения и предварительные результаты

1.1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Формально, задача распределения ресурсов записывается следующим образом. *Организационная система* состоит из одного *центра* и множества $N = \{1, \ldots, n\}$ *агентов*. У центра имеются ресурсы в ограниченном количестве – $R \in \Re^1_+$, которые должны быть распределены между агентами. Предпочтения каждого агента $i \in N$ относительно количества выделяемого ему ресурсов $x_i \in [0, R]$ определяются однопиковой функцией $u_i(x_i)$: $\Re^1 \to \Re^1$:

1) Существует единственная точка пика $\tau_i = \arg\max\limits_{x \in \Re^1_+} u_i(x)$ $\forall i \in N$;
2) $\forall z, z' \in \Re^1$, если $\tau_i \geqslant z > z'$, то $u(z) \geqslant u(z')$, если $z > z' \geqslant \tau_i$, то $u(z) \leqslant u(z')$.

В случае, когда $\sum\limits_{i \in N} \tau_i > R$, имеет место *дефицит ресурсов*. Считается, что значения точек пика не известны центру, но являются общим знанием для агентов.

Для распределения ресурсов центр использует механизм планирования $x = \pi(s)$, определяя итоговое распределение ресурсов $x = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $x_i \geqslant 0$, $\sum\limits_{i \in N} x_i \in [0, R]$ на основании сообщений (*заявок*) агентов $s = \{s_1, \ldots, s_n\}$, $s_i \in S_i$, $i \in N$, где S_i – множество допустимых заявок *i*-го агента. Если в качестве сообщения агента просят сообщить значение своей точки пика, то такой механизм является *прямым*.

Так как выделяемые каждому агенту центром ресурсы зависят от заявок всех агентов (которые они сообщают одновременно), то между агентами возникает *игра в нормальной форме*:

$$\Gamma_0 = (N,\ \{u_i(\pi_i(s))\}_{i \in N},\ \{S_i\}_{i \in N}),$$

где $\pi_i(s)$ – количество ресурсов, выделяемое в соответствии с механизмом $\pi(s)$ агенту $i \in N$.

Если для механизма планирования $\pi(s)$ можно для каждого возможного вектора точек пика агентов $\tau = \{\tau_1, \ldots, \tau_n\}$ определить *равновесные по Нэшу* заявки [4] – $s^*_\pi(\tau)$, то для него можно предъявить соответствующий прямой механизм $h(\tau)$:

$$x_i = h_i(\tau) = \pi_i(s^*_\pi(\tau)).$$

[4] *Следует отметить, что равновесия может не быть вообще, или их может быть несколько. Если равновесий несколько, то необходимо ввести правило отбора равновесий, позволяющее из любого множества равновесий выбирать единственное.*

Прямой механизм планирования $h(\tau)$ называется неманипулируемым, если доминантной стратегией каждого агента является сообщение своей истинной точки пика:

$$\tau_i \in \mathrm{A}rg\max_{s_i} u_i(h_i(s_i, s_{-i})),\ \forall s_{-i},\ \forall i \in N,$$

где s_{-i} обозначает сообщения всех агентов, кроме i-го. Механизмы $\pi(s)$ и $\varphi(s)$ считаются *эквивалентными*, если при заданном количестве ресурсов R для любого вектора точек пика агентов эти механизмы в равновесии дают одинаковое распределение ресурсов – $\pi(s^*_\pi(\tau)) = \varphi(s^*_\varphi(\tau))$. Соответствующий $\pi(s)$ прямой механизм $h(\tau)$ является эквивалентным $\pi(s)$, если он неманипулируем. Традиционно в ТУОС рассматриваются механизмы планирования (распределения ресурсов), удовлетворяющие следующим требованиям [2, 3]:

P1. процедура планирования непрерывна и монотонна по заявкам агентов (монотонность означает, что чем больше просит агент ресурсов, тем больше он получает и наоборот);

P2. если агент получил некоторое количество ресурсов, то, изменяя свою заявку, он может получить любое меньшее количество ресурсов;

P3. если количество ресурсов, распределяемое между группой агентов, увеличилось, то каждый из агентов этой группы получит не меньшее количество ресурсов, чем раньше.

Достаточно широким и популярным классом механизмов распределения ресурсов, удовлетворяющим требованиям P1-P3, является класс *приоритетных* механизмов, в которых решение о том, как должен быть распределен ресурс между агентами, определяется на основании их *функций приоритета*, аргументом которых являются заявки агентов на ресурс. Формально приоритетный механизм распределения ресурсов записывается следующим образом [2, 6]:

$$\pi_i(s) = \begin{cases} s_i, & \sum\limits_{i \in N} s_i \leqslant R \\ \\ min\left\{s_i,\ \gamma\,\eta_i(s_i)\right\}, & \sum\limits_{i \in N} s_i > R \end{cases}, \tag{1}$$

где $\eta_i(s_i)_{i\in N}$ – функции приоритета агентов, γ – некоторый нормировочный параметр, обеспечивающий выполнение условия $\sum\limits_{i\in N} x_i = R$.

Приоритетные механизмы делятся на три класса [6]:

1) *механизмы прямых приоритетов*, для которых $\frac{\partial \eta_i}{\partial s_i}(s_i) \geqslant 0$ $\forall s_i \in S_i$ и $\forall i \in N$;

2) *механизмы обратных приоритетов* – $\frac{\partial \eta_i}{\partial s_i}(s_i) \leqslant 0$ $\forall s_i \in S_i$ и $\forall i \in N$;

3) *механизмы абсолютных приоритетов* – $\frac{\partial \eta_i}{\partial s_i}(s_i) = 0\,\forall s_i \in S_i$ и $\forall i \in N$.

Для механизма прямых приоритетов множество допустимых заявок для каждого агента обычно ограничивается максимально возможным количеством ресурсов – $s_i \in [0, R]$, $\forall i \in N$. Для механизмов обратных и абсолютных приоритетов подобных ограничений обычно не накладывается.

Механизм распределения ресурсов является *анонимным*, если он симметричен относительно перестановок агентов – итоговое распределение ресурсов зависит только от заявок агентов. Для приоритетных механизмов это означает, что $\forall i \in N$ $\eta_i(s_i) = \eta(s_i)$. Например, механизм *пропорционального* распределения ресурсов $\pi_i = R\dfrac{s_i}{\sum\limits_{j\in N} s_j}$ является анонимным механизмом распределения ресурсов прямых приоритетов. Введя основные понятия, перейдем к изложению известных на сегодняшний день фактов, предваряющих результаты настоящей работы.

1.2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В работе [2], было показано, что для любого механизма распределения ресурсов, удовлетворяющего условиям P1-P3, существует эквивалентный прямой механизм – *механизм последовательного распределения ресурсов*. Это позволило при поиске эффективных механизмов распределения ресурсов ограничиться классом механизмов последовательного распределения ресурсов. Был предложен алгоритм построения данных механизмов. Приведем здесь его. Пусть задан *исходный* механизм распределения ресурсов $\pi(s)$. Тогда соответствующий ему прямой механизм $h(\tau)$ строится следующим образом:

Алгоритм 1.

Шаг 0. Все агенты сообщают τ_i, множество агентов - *диктаторов* $K_0 = \emptyset$, множество «неудовлетворенных» агентов - *недиктаторов* $N_0 = N$, доступные к распределению ресурсы $R_0 = R$. Номер шага $l = 1$.

Шаг l_1. Всем агентам из $N_l = N_{l-1} \backslash K_{l-1}$ вычисляется, исходя из доступного к распределению ресурсов R_{l-1}, равновесный по Нэшу вектор заявок $s^{l*}(\tau)$. Например, как было показано в [2], для всех механизмов прямых приоритетов каждый агент из множества N_l будет сообщать максимально возможную заявку. Для механизма обратных приоритетов этот вектор является решением системы уравнений, определяющей равновесные по Нэшу заявки [2]:

$$s_i^{l*} = \frac{\eta_i(s_i^{l*})}{\sum\limits_{j \in N_l} \eta_j(s_j^{l*})} R_{l-1},\ i \in N_l\,.$$

Шаг l_2. Определяется подмножество агентов, чьи заявки могут быть удовлетворены на текущем шаге l - $K_l : \{i \in N_l, \tau_i \leqslant \pi_i(s^{l*}(\tau))\}$. Если $K_l = \emptyset$, то алгоритм останавливается.

Шаг l_3**.** Определяется доступное к распределению количество ресурсов $R_l = R - \sum\limits_{i \in K_l} s_i$. Переход к следующем шагу –

$l := l + 1$.

Было доказано [2], что данный алгоритм завершает свою работу не более, чем за n шагов ($l \leqslant n$). Агенты, не попавшие в K_l на l-ом шаге, получают $\pi_i(s^{l*}(\tau))$ ресурсов. Агенты из множества $\bigcup\limits_{j \leqslant n} K_j$ называются *диктаторами*, так как только от сообщаемых ими своих точек пика зависит, сколько ресурсов получат остальные агенты, в то время, как сами они получают в точности то, что просят. Остальные агенты называются *не-диктаторами*, так как от их сообщений равновесное распределение ресурсов не зависит.

Так же, в [2] доказано, что прямой механизм $h(\tau)$, построенный в соответствии с приведенным выше алгоритмом, является неманипулируемым, т. е. эквивалентным исходному механизму $\pi(s)$. Приведем пример работы алгоритма 1.

Пример 1. $R = 10$, $n = 5$, $\tau = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Покажем, как должен функционировать механизм последовательного распределения ресурсов, порожденный пропорциональным механизмом (функция приоритетов $\eta_i = A_i s_i$) с вектором приоритетов $A = \{3, 2, 10, 1, 17\}$. На первом шаге каждому агенту будет предложено $x_i^1 = \frac{10}{33} A_i$. Для агентов 3 и 5 эти величины будут больше, чем τ_3 и τ_5, и эти агенты переходят в множество диктаторов. Соответственно, на второй шаг останется количество ресурсов $R_1 = 2$ для распределения между агентами 1, 2, 4. Соответственно, им будет предложено $x_i^2 = \frac{2}{6} A_i$. Для агента 1 эта величина совпадает с τ_1. На третий шаг останется $R_2 = 1$ для распределения между агентами 2 и 4. Для них $x_i^3 = \frac{1}{3} A_i$, что не превышает значений их точек пика. Соответственно, алгоритм 1 остановится на третьем шаге, агенты 1, 3 и 5 будут диктаторами (получат нужное им количество ресурсов), а равновесное распределение ресурсов будет

$x^* = \{1, \frac{2}{3}, 3, \frac{1}{3}, 5\}$. •

Однако до сих пор не было предъявлено аналитической записи механизма распределения ресурсов, получаемого в результате действия алгоритма 1, хотя это существенно облегчило бы поиск эффективных по заданному критерию (например, максимуму суммарной полезности всех агентов) механизмов из этого класса. Отчасти, данная ситуация была обусловлена следующим результатом.

В [1] было доказано, что все анонимные механизмы распределения ресурсов эквивалентны. Данный результат был получен на основе исследования алгоритма 1 построения механизма последовательного распределения ресурсов, эквивалентного произвольному анонимному механизму распределения ресурсов, удовлетворяющему P1-P3. Это означает, что все анонимные механизмы обладают одинаковой эффективностью. Однако, отказ от анонимности делает актуальной задачу поиска эффективного по заданному критерию (например, максимума суммарной полезности всех агентов) механизма из класса механизмов последовательного распределения ресурсов (эквивалентных неанонимным механизмам). Представление механизмов последовательного распределения ресурсов в аналитическом виде позволит упростит решение данной задачи.

Кроме того, изучение механизмов последовательного распределения ресурсов, эквивалентных механизмам прямых и обратных приоритетов, может помочь в ответе на вопрос, существует ли эквивалентность между неанонимными механизмами прямых и обратных приоритетов. То есть найдется ли для произвольного механизма прямых приоритетов эквивалентный механизм обратных приоритетов и наоборот. Установление такой связи так же упростит задачу поиска эффективных механизмов распределения ресурсов из класса приоритетных (точнее эквивалентных им механизмов последовательного распределения ресурсов), так как позволит сузить область поиска. К сожалению, ответить на данный вопрос с помощью исследования алгоритма 1 крайне затруднительно. Поэтому представляется перспективным изучение механизмов последовательного распределения ресурсов, эквивалентных механизмам прямых и обратных приоритетов, записанных в аналитическом виде.

В зарубежной литературе исследовался вопрос о том, как должны выглядеть прямые неманипулируемые механизмы распределения ресурсов. В работе [10] было доказано, что любой прямой неманипулируемый анонимный механизм распределения ресурсов может быть записан в виде:

$$\pi_i(\tau) = \min[\tau_i, \lambda(\tau)], \tag{2}$$

если $\sum_{i \in N} \tau_i \geqslant R$, где $\lambda(\tau)$ – «балансировочная» константа, своя для каждого τ, определяемая из условия $\sum_{i \in N} \pi_i(\tau) = R$. В работе [7] данный результат был обобщен на неанонимные механизмы, т. е. было показано, что любой прямой неманипулируемый анонимный механизм распределения ресурсов может быть записан в виде:

$$\pi_i(\tau) = \min[\tau_i, \lambda_i(\tau_{-i})], \tag{3}$$

если $\sum_{i \in N} \tau_i \geqslant R$, где $\lambda_i(\tau_{-i})$ определяется из условия $\sum_{i \in N} \pi_i(\tau) = R$. Кроме того, в [7] было доказано, что неанонимный неманипулируемый механизм распределения ресурсов должен обязательно быть механизмом последовательного распределения, т. е. строиться в соответствии с алгоритмом 1. Однако ни в одной из работ не приводилось конструктивного алгоритма определения $\lambda_i(\tau_{-i})$. Таким образом, аналитическая запись механизмов последовательного распределения ресурсов актуальна. В данной работе эта задача решается для механизмов последовательного распределения ресурсов эквивалентных механизмы прямых или обратных приоритетов.

2. Аналитическая запись механизмов последовательного распределения ресурсов

Из алгоритма 1 построения механизма последовательного распределения ресурсов видно, что количество ресурсов, выдаваемое агентам не-диктаторам, должно зависеть от того, сколько ресурсов осталось после того, как были удовлетворены запросы диктаторов, и от того, насколько «сильны» возможности агента в борьбе за ресурсы в рамках исходного механизма (условно говоря, от того, насколько высок «относительный приоритет» агента). Рассмотрим произвольное множество агентов $S \subseteq N$. Будем считать, что все агенты из $N \backslash S$ – диктаторы. Очевидно, что для любых механизмов остатки ресурсов, которые могут быть распределены между агентами из S, всегда будут записываться одинаково:

$$R(S) = R - \sum_{j \in N \backslash S} \tau_j. \tag{4}$$

Для того, чтобы оценить, как эти остатки могут быть распределены между агентами из S, необходимо более детальное изучение исходного механизма $\pi(s)$.

2.1. *МЕХАНИЗМЫ ПРЯМЫХ ПРИОРИТЕТОВ*

В соответствии с [2], в механизмах прямых приоритетов, любой агент при фиксированных заявках остальных агентов получает максимально возможное количество ресурсов, сообщая максимальную свою заявку. То есть для некоторого шага l алгоритма 1, $\forall i \in N_l \; s^*_{il} = R$ и каждый агент из множества N_l может получить ресурсы в количестве, не большем чем:

$$x_{il} = \frac{\eta_i(R)}{\sum\limits_{j \in N_l} \eta_j(R)} R(N_l). \tag{5}$$

Теорема 1. *Механизм последовательного распределения ресурсов, порождаемый механизмом прямых приоритетов с функ-*

циями приоритетов $\eta_i(s_i)$, $i \in N$, имеет вид:

$$x_i = \min\{\tau_i, \max_{S \subseteq N: i \in S}\{R(S)d_i(S)\}\}, \ i \in N, \tag{6}$$

где

$$d_i(S) = \frac{\eta_i(R)}{\sum\limits_{j \in S} \eta_j(R)}, \ i \in S \tag{7}$$

может трактоваться как «относительный приоритет» агента i в множестве S, а $R(S)$ определяется выражением (4).

Доказательство теоремы 1 и других утверждений вынесено в приложение к статье. Легко видеть, что выражение (6) не противоречит выражению (3), так как $\max\limits_{S: i \in S}\{R(S)d_i(S)\}$ не зависит от τ_i.

Кроме того, полученный механизм последовательного распределения ресурсов является механизмом абсолютных приоритетов, так как выражение (6) может рассматриваться как запись приоритетного механизма, в котором функция приоритета каждого агента не зависит от его сообщения: $\forall \eta_i \ \eta_i(\tau_i) = \max\limits_{S: i \in S}\{R(S)d_i(S)\}$.

Пример 2. Пусть по аналогии с примером 1 $R = 10$, $n = 5$, $\tau = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, и используется пропорциональный механизм (функция приоритетов $\eta_i = A_i s_i$) с вектором приоритетов $A = \{3, 2, 10, 1, 17\}$.

Для агента 1 $\max\limits_{S: i \in S}\{R(S)d_i(S)\} = 1 = \tau_1$ и достигается при $S = \{1, 2, 4\}$.

Для агента 2 $\max\limits_{S: i \in S}\{R(S)d_i(S)\} = \frac{2}{3} < \tau_2$ и достигается при $S = \{2, 4\}$.

Для агента 3 $\max\limits_{S: i \in S}\{R(S)d_i(S)\} = 3{,}125 > \tau_3$ и достигается при $S = \{1, 2, 3, 4\}$.

Для агента 4 $\max\limits_{S:i\in S}\{R(S)d_i(S)\} = \frac{1}{3} < \tau_4$ и достигается при $S = \{2, 4\}$.

Для агента 5 $\max\limits_{S:i\in S}\{R(S)d_i(S)\} \approx 5.17 > \tau_5$ и достигается при $S = \{1, 2, 4, 5\}$.

Соответственно, диктаторами являются агенты 1, 3 и 5, а не-диктаторами – 2 и 4. Итоговое распределение ресурсов аналогично полученному в примере 1: $x^* = \{1, \frac{2}{3}, 3, \frac{1}{3}, 5\}$. •

Из аналитической записи неанонимного механизма последовательного распределения ресурсов как частный случай можно получить аналитическую запись для анонимного механизма.

Следствие 1. *Пусть агенты упорядочены по сообщаемым точкам пика: $\tau_1 \leqslant \ldots \leqslant \tau_n$. Тогда механизм последовательного распределения ресурсов, порождаемый анонимным механизмом распределения ресурсов, записывается следующим образом:*

$$x_i = \min\{\tau_i, \frac{R - \sum\limits_{j<i} x_j}{n - (i-1)}\}, \; i \in N. \tag{8}$$

Из аналитической записи механизма последовательного распределения ресурсов видно, что для его построения не важен конкретный вид функций приоритетов $\eta_i(s_i)$, а важно ее значение при сообщении максимально возможной заявки $\bar{s}_i = R : \eta_i(R)$.

Определение 1. *Механизм взвешенного пропорционального распределения ресурсов – механизм прямых приоритетов с функциями приоритетов $\tilde{\eta}_i(s_i) = A_i s_i$, $i \in N$.*

Теорема 2. *Для любого механизма прямых приоритетов, задаваемого функциями приоритетов $\eta_i(s_i)$, $i \in N$, при заданном количестве распределяемых ресурсов существует эквивалентный механизм взвешенного пропорционального распределения ресурсов, задаваемый следующими функциями приоритетов:*

$\tilde{\eta}_i(s_i) = A_i s_i$, *где*

$$A_i = \frac{\eta_i(R)}{\sum\limits_{j \in N} \eta_j(R)},\ i \in N.$$

Если механизм прямых приоритетов анонимен, то в соответствии с теоремой 2 он эквивалентен механизму пропорционального распределения ресурсов (функции приоритетов $\tilde{\eta}_i(s_i) = s_i$), что полностью соответствует результатам, полученным в [1].

Проиллюстрируем, как теорема 2 работает для неанонимных механизмов.

Пример 3. Все приоритетные механизмы распределения ресурсов, задаваемые функциями приоритетов $\eta_i(s_i) = A_i s_i^{\alpha}$, $\alpha > 0$, $i \in N$ эквивалентны приоритетному механизму с функциями приоритетов $\eta_i(s_i) = A_i s_i$, $i \in N$. •

Однако, в общем случае одному и тому же механизму прямых приоритетов при одном и том же составе агентов для разного количества ресурсов, доступного к распределению будут эквивалентны разные механизмы взвешенного пропорционального распределения ресурсов.

Пример 4. Пусть n = 2 и $\eta_1(s_1) = B_1 s_1^2$, $\eta_2(s_2) = B_2 s_2^3$. Тогда этому механизму эквивалентен механизм взвешенного пропорционального распределения ресурсов $\tilde{\eta}_1(s_1) = B_1 s_1$, $\tilde{\eta}_2(s_2) = B_2 R s_2$, где R – доступное к распределению количество ресурсов. •

Перейдем к рассмотрению механизмов обратных приоритетов.

2.2. МЕХАНИЗМЫ ОБРАТНЫХ ПРИОРИТЕТОВ

В отличие от механизмов прямых приоритетов, для механизмов обратных приоритетов равновесные заявки агентов в алгоритме построения механизма последовательного распределения ресурсов на каждом шаге l (см. алгоритм 1) могут меняться, так как они определяются из решения следующей системы уравнений [2]:

$$s_i^{l*} = \frac{\eta_i(s_i^{l*})}{\sum\limits_{j\in N_l} \eta_j(s_j^{l*})} R_{l-1},\ i \in N_l.$$

Одновременно s_i^{l*} является тем максимальным количеством ресурсов, которое агент i может получить на шаге l.

Теорема 3. *Механизм последовательного распределения ресурсов, порождаемый механизмом обратных приоритетов с функциями приоритетов $\eta_i(s_i)$, $i \in N$, имеет вид:*

$$x_i = \min\{\tau_i, \max_{S\subseteq N: i\in S}\{s_i^*(S)\}\},\ i \in N, \tag{9}$$

где $s_i^*(S)$ определяется из решения системы уравнений

$$s_i^*(S) = \frac{\eta_i(s_i^*(S))}{\sum\limits_{j\in S} \eta_j(s_j^*(S))} R(S), i \in S, \tag{10}$$

а $R(S)$ определяется выражением (4).

В системе уравнений (10) не фигурируют точки пиков агентов, поэтому $\forall i \in N \max\limits_{S: i\in S}\{s_i^*(S)\}$ не зависит от τ_i, следовательно (9) не противоречит (3). По аналогии с (6), механизм, определяемый (9), является механизмом абсолютных приоритетов.

Пример 5. $R = 10$, $n = 5$, $\tau = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, функции приоритетов: $\eta_i = B_i/s_i$, вектор приоритетов $B = \{9, 4, 100, 1, 289\}$

Для агента 1 $\max\limits_{S: i\in S}\{s_i^*(S)\} = 1 = \tau_1$ и достигается при $S = \{1, 2, 4\}$.

Для агента 2 $\max\limits_{S: i\in S}\{s_i^*(S)\} = \frac{2}{3} < \tau_2$ и достигается при $S = \{2, 4\}$.

Для агента 3 $\max\limits_{S:i\in S}\{s_i^*(S)\} = 3{,}125 > \tau_3$ и достигается при $S = \{1,2,3,4\}$.

Для агента 4 $\max\limits_{S:i\in S}\{s_i^*(S)\} = \frac{1}{3} < \tau_4$ и достигается при $S = \{2,4\}$.

Для агента 5 $\max\limits_{S:i\in S}\{s_i^*(S)\} \approx 5{,}17 > \tau_5$ и достигается при $S = \{1,2,4,5\}$.

Соответственно, диктаторами являются агенты 1, 3 и 5, а не-диктаторами – 2 и 4. Итоговое распределение ресурсов аналогично полученному в примерах 1 и 2: $x^* = \{1, \frac{2}{3}, 3, \frac{1}{3}, 5\}$. •

Пример 6. Пусть $R = 10$, $n = 5$, $\tau = \{1,2,3,4,5\}$, функции приоритетов: $\eta_i = B_i - s_i$, вектор приоритетов $B = \{3,2,10,1,17\}$.

Для агента 1 $\max\limits_{S:i\in S}\{s_i^*(S)\} = 1 = \tau_1$ и достигается при $S = \{1,2,4\}$.

Для агента 2 $\max\limits_{S:i\in S}\{s_i^*(S)\} = \frac{2}{3} < \tau_2$ и достигается при $S = \{2,4\}$.

Для агента 3 $\max\limits_{S:i\in S}\{s_i^*(S)\} = 3{,}125 > \tau_3$ и достигается при $S = \{1,2,3,4\}$.

Для агента 4 $\max\limits_{S:i\in S}\{s_i^*(S)\} = \frac{1}{3} < \tau_4$ и достигается при $S = \{2,4\}$. Для агента 5 $\max\limits_{S:i\in S}\{s_i^*(S)\} \approx 5{,}17 > \tau_5$ и достигается при $S = \{1,2,4,5\}$.

Соответственно, диктаторами являются агенты 1, 3 и 5, а не-диктаторами – 2 и 4. Итоговое распределение ресурсов аналогично полученному в предыдущем примере и примерах 1 и 2: $x^* = \{1, \frac{2}{3}, 3, \frac{1}{3}, 5\}$. •

Из примеров 5 и 6 видно, что механизм прямых приоритетов и различные механизмы обратных приоритетов дают одинаковый результат при идентичных начальных условиях, что позволяет выдвинуть гипотезу о возможной эквивалентности механизмов прямых и обратных приоритетов.

3. Эквивалентность механизмов прямых и обратных приоритетов

Для того, чтобы в общем виде доказать эквивалентность механизмов прямых и обратных приоритетов, необходимо показать, что для произвольного набора функций прямых приоритетов $\eta\uparrow = \{\eta\uparrow_1, \dots, \eta\uparrow_n\}$ найдется набор функций обратных приоритетов $\eta\downarrow = \{\eta\downarrow_1, \dots, \eta\downarrow_n\}$ (и наоборот), такой, что разрешима систем уравнений:

$$d_i(S)R(S) = s_i^*(S),\ \forall i \in S,\ \forall S \subset N.$$

Или

$$\frac{\eta\uparrow_i(R)}{\sum\limits_{j\in S}\eta\uparrow_j(R)} = \frac{\eta\downarrow_i(s_i^*(S))}{\sum\limits_{j\in S}\eta\downarrow_j(s_j^*(S))},\ \forall i \in S,\ \forall S \subset N. \tag{11}$$

Однако в общем не существует набора функций приоритетов, удовлетворяющих условию (11). Определим условия, которым должен удовлетворять механизм обратных приоритетов для того, чтобы для него существовал эквивалентный механизм прямых приоритетов. Из теоремы 2 следует, что для всех механизмов прямых приоритетов величины $d_i(S)$ могут быть представлены в виде:

$$d_i(S) = \frac{A_i}{\sum\limits_{j\in S} A_j},\ i \in N,$$

где A_i не зависит от S для $\forall i \in N$ при каждом фиксированном R. Соответственно, выражение (11) может быть преобразовано в

$$\frac{A_i}{\sum\limits_{j\in S} A_j} = \frac{\eta\downarrow_i(s_i^*(S))}{\sum\limits_{j\in S}\eta\downarrow_j(s_j^*(S))},\ \forall i \in S,\ \forall S \subset N. \tag{12}$$

Обозначим $B_i(S) = \eta\downarrow_i (s_i^*(S))$.

Теорема 4. *При фиксированных распределяемых ресурсах и множестве агентов для механизма обратных приоритетов эквивалентный механизм прямых приоритетов существует тогда и только тогда, когда*

$$\frac{B_i(N)}{B_i(S)} = D(S), \forall S \subseteq N, \forall i \in S, \tag{13}$$

где $D(S)$ зависит только от множества S и количества ресурсов $R(S)$. При этом эквивалентным исходному механизму обратных приоритетов механизмом прямых приоритетов является взвешенный пропорциональный механизм с функциями приоритетов $\eta_i(s_i) = B_i(N)s_i$, $i \in N$.

Определение 2. *Механизм обратных приоритетов с постоянными весами агентов – механизм обратных приоритетов, удовлетворяющий условию (13).*

Приведем примеры механизмов обратных приоритетов, удовлетворяющих (13).

Пример 7. Степенной механизм обратных приоритетов. Пусть функции приоритетов – $\eta\downarrow_i = B_i s_i^\alpha$, $\alpha < 0$, $i \in N$. Тогда $\forall S \subseteq N, \forall i \in S$

$$s_i^*(S) = \frac{B_i^{1/(1-\alpha)}}{\sum\limits_{j\in S} B_j^{1/(1-\alpha)}} R(S).$$

Следовательно, $\forall R \geqslant 0$ данный механизм эквивалентен механизму пропорционального распределения ресурсов с функциями приоритетов $\eta\uparrow_i = A_i s_i$, где $A_i = B_i^{1/(1-\alpha)}$, $i \in N$. •

Приведем пример механизма обратных приоритетов, который в зависимости от значений параметров функций приоритетов может удовлетворять или не удовлетворять (13).

<u>*Пример* 8.</u> *Линейный механизм обратных приоритетов.* Пусть функции приоритетов: $\eta\downarrow_i = B_i - \alpha_i s_i$, $\alpha_i > 0$, $i \in N$. Тогда $\forall i \in N$:

$$s_i^*(S) = \frac{B_i/(1+\gamma(S)\alpha_i)}{\sum\limits_{j \in S} B_j/(1+\gamma(S)\alpha_j)} R(S),$$

где $\gamma(S)$ определяется из условия $\sum\limits_{i \in S} s_i^*(S) = R(S)$. Если $\forall i \in N$

$\alpha_i = \alpha$, то

$$s_i^*(S) = \frac{B_i}{\sum\limits_{j \in S} B_j} R(S).$$

Следовательно, $\forall R \geqslant 0$ данный механизм эквивалентен механизму взвешенного пропорционального распределения ресурсов с $\eta\uparrow_i = B_i s_i$, $i \in N$.

Однако, если показатели степени α_i – разные, условие (13) выполняется, только если $\forall S \subseteq N$, $\forall i, j \in S$ выполняется равенство

$$(\gamma(N) - \gamma(S))(\alpha_i - \alpha_j) = 0.$$

Иными словами, для выполнения (13) необходимо, чтобы $\forall R \geqslant 0$ $\forall S \subseteq N$ $\gamma(S) = const$, что невыполнимо, так как $\gamma(S)$ – «балансировочная» константа, зависящая от величины $R(S)$, которая может в общем случае произвольно меняться в пределах $[0, R]$. •

Таким образом, не для всех механизмов обратных приоритетов существуют эквивалентные механизмы прямых приоритетов.

4. Заключение

В данной статье получены аналитические записи прямых неманипулируемых механизмов последовательного распределения ресурсов, соответствующих исходным механизмам прямых (теорема 1) и обратных (теорема 3) приоритетов. Это позволило показать, что для всех механизмов прямых приоритетов (теорема 2) и механизмов обратных приоритетов с постоянными весами агентов (теорема 4) существуют эквивалентные механизмы взвешенного пропорционального распределения ресурсов (которые являются механизмами прямых приоритетов). В тоже время, существуют механизмы обратных приоритетов, для которых не существует эквивалентных механизмов прямых приоритетов.

Данные об эквивалентности разных классов приоритетных механизмов приведены в таблице 1.

Таблица 1. Отношение эквивалентности между приоритетными механизмами

Механизм → эквивалентен механизму ↓	Прямых приоритетов	Обратных приоритетов
Прямых приоритетов	Для любого механизма прямых приоритетов существует эквивалентный механизм взвешенного пропорционального распределения ресурсов.	Для любого механизма обратных приоритетов с постоянными весами агентов существует эквивалентный механизм взвешенного пропорционального распределения ресурсов обратных приоритетов.
Обратных приоритетов	Для любого механизма прямых приоритетов существует эквивалентный механизм обратных приоритетов.	Соотношения эквивалентности могут быть установлены между различными механизмами обратных приоритетов с постоянными весами агентов.
Абсолютных приоритетов	Для любого механизма прямых приоритетов существует эквивалентный механизм последовательного распределения ресурсов.	Для любого механизма обратных приоритетов существует эквивалентный механизм последовательного распределения ресурсов.

Полученные результаты могут облегчить решение задачи поиска эффективных по заданному критерию (например, максимума суммарной полезности всех агентов) механизмов распределения ресурсов. Так, нет смысла рассматривать «сложные» механизмы прямых приоритетов или механизмы обратных приоритетов с постоянными весами агентов. Без потери эффективности (так как результаты равновесного распределения будут те же) можно использовать «простые» механизмы взвешенного пропорционального распределения ресурсов. Вопрос о том, когда целесообразно использование механизмов обратных приоритетов без постоянных весов агентов, представляется перспективным направлением дальнейших исследований.

5. Приложение

Доказательство. [Доказательство теоремы 1.] Очевидно, что для любого шага l
$R(N_l)d_i(N_l)$ совпадает с (5). Проанализируем, на каких $S \subset N$ может достигаться $\max\limits_{S: i \in S}\{R(S)d_i(S)\}$. Зафиксируем произвольное

подмножество агентов $S \subset N$. Покажем, что

$$d_i(S)R(S) \leqslant d_i(S/k)R(S/k) \ \Leftrightarrow \ \tau_k \leqslant d_k(S)R(S)$$

. $\forall i, k \in S$:

$$d_i(S)R(S) \ \leqslant \ d_i(S/k)R(S/k),$$

$$\Updownarrow$$

$$\eta_i(R)(R - \sum_{j \in S} \tau_j) \sum_{j \in S/k} \eta_j(R) \ \leqslant \ \eta_i(R)(R - \sum_{j \in S} \tau_j - \tau_k) \sum_{j \in S} \eta_j(R),$$

$$\Updownarrow$$

$$\tau_k \sum_{j \in S} \eta_j(R) \leqslant (R - \sum_{j \in S} \tau_j)(\sum_{j \in S} \eta_j(R) - \sum_{j \in S/k} \eta_j(R)),$$

$$\Updownarrow$$

$$\tau_k \leqslant \frac{\eta_k(R)}{\sum\limits_{j\in S}\eta_j(R)}(R-\sum_{j\in S}\tau_j),$$

$$\Updownarrow$$

$$\tau_k \leqslant d_k(S)R(S).$$

Следовательно, $\forall i \in N \max\limits_{S:i\in S}\{R(S)d_i(S)\}$ достигается, когда

$\forall k \in S\backslash i\ \tau_k > d_k(S)R(S)$. При этом, если $\tau_i > d_i(S)R(S)$, т. е. все множество S состоит из не-диктаторов, то во множестве $S\backslash i$ так же не возникнет новых диктаторов, так как $\forall j \in S\backslash i$

$$\tau_j > d_j(S)R(S) > d_j(S/i)R(S/i).$$

Следовательно, $\forall S' \subset S, \forall j \in S'\ \tau_j > d_j(S')R(S')$, т. е. в любом подмножестве S не найдется новых диктаторов.

Однако, если $\tau_i \leqslant d_i(S)R(S)$, то возможно, что $\exists k \in S\backslash i$, такое, что $\tau_k > d_k(S)R(S)$ но $\tau_k \leqslant d_k(S\backslash i)R(S\backslash i)$. Это соответствует ситуации, когда для некоторого шага алгоритма l агент $k \notin \bigcup\limits_{j<l} K_j$, но $k \in K_l$ в то время как агент $i \in \bigcup\limits_{j<l} K_j$. То есть

для агентов-диктаторов $\max\limits_{S:i\in S}\{R(S)d_i(S)\}$ может достигаться на

таких $S \subset N$, в которые входят другие диктаторы. Однако, так как $\tau_k \leqslant d_k(S\backslash i)R(S\backslash i)$, то
$\min\{\tau_k, \max\limits_{S:k\in S}\{R(S)d_k(S)\}\} = \tau_k$, что соответствует работе алго-

ритма 1.

Доказательство. [Доказательство следствия 1.] В анонимном механизме приоритеты всех агентов одинаковы, следовательно, $\forall i \in N\ d_i(S) = \frac{1}{\#S}$, где $\#S$ – число агентов в множестве S. Из упорядочения агентов по возрастанию точек пика следует, что если агент $k \in N$, является диктатором, то любой агент $i < k$ так же является диктатором, если нет, то любой агент $i > k$ так же не является диктатором. То есть, если агент $k \in N$ – диктатор, то все агенты, следующие за ним в упорядочении, могут получить не более $\frac{R - \sum\limits_{j \leqslant k} s_j}{n-k}$ ресурсов. Причем

$$\frac{R - \sum\limits_{j \leqslant k} \tau_j}{n-k} \geqslant \frac{R - \sum\limits_{j \leqslant k-1} \tau_j}{n-k+1} \Leftrightarrow \frac{R - \sum\limits_{j \leqslant k-1} \tau_j}{n-k+1} \geqslant \tau_k.$$

Следовательно, $\max\limits_{S: i \in S}\{R(S)d_i(S)\} = \max\limits_{k<i}\{\frac{R - \sum\limits_{j \leqslant k} \tau_j}{n-k}\}$, а анонимный механизм последовательного распределения ресурсов записывается следующим образом:

$$x_i = \min\{s_i, \max_{k<i}\{\frac{R - \sum\limits_{j \leqslant k} \tau_j}{n-k}\}\}.$$

Пусть $k \in N$ – последний в упорядочении агент, который является диктатором. Тогда $\forall j \leqslant k\ x_j = \tau_j$, $\forall i > k\ x_i = \frac{R - \sum\limits_{j \leqslant k} x_j}{n-k}$.

Покажем, что $\forall i > k\ x_i = \frac{R - \sum\limits_{j \leqslant k} x_j}{n-k} = \frac{R - \sum\limits_{j < i} x_j}{n-(i-1)}$. Для агента

$k+2$:

$$\begin{aligned} x_{k+2} &= \frac{R - \sum\limits_{j \leqslant k} x_j - x_{k+1}}{n-(k+2-1)} = \frac{R - \sum\limits_{j \leqslant k} x_j}{n-(k+1)}(1 - \frac{1}{n-k}) = \\ &= \frac{R - \sum\limits_{j \leqslant k} x_j}{n-k} = x_{k+1} \end{aligned}$$

Следовательно, по рекурсии, получаем, что $\forall i > k \; x_i = \frac{R - \sum\limits_{j<i} x_j}{n-(i-1)}$. То есть $\forall i \in N \; x_i = \min\{s_i, \frac{R - \sum\limits_{j<i} x_j}{n-(i-1)}\}$.

Доказательство. [Доказательство теоремы 2.] Для механизма, задаваемого функциями приоритетов $\tilde{\eta}_i(s_i) = A_i s_i$, $i \in N$, эквивалентный механизм последовательного распределения ресурсов записывается следующим образом:

$$\forall S \subseteq N, \forall i \in S \; x_i = \min\{s_i, \max_{S: i \in S}\{R(S) d_i(S)\}\},$$

где

$$d_i(S) = \frac{A_i R}{\sum\limits_{j \in S} A_i R} = \frac{\eta_i(R)}{\sum\limits_{l \in N} \eta_j(R)} / \sum_{j \in S} \frac{\eta_j(R)}{\sum\limits_{l \in N} \eta_l(R)} = \frac{\eta_i(R)}{\sum\limits_{j \in S} \eta_j(R)}.$$

То есть данный механизм последовательного распределения ресурсов является эквивалентным исходному механизму прямых приоритетов, задаваемому функциями приоритетов $\eta_i(S)$, $i \in N$.

Доказательство. [Доказательство теоремы 3.]Очевидно, что $s_i^*(S)$ эквивалентно s_i^l* при $S = N \setminus \bigcup\limits_{k<l} K_k$.

Проанализируем, на каких $S \subset N$ может достигаться $\max\limits_{S:i \in S}\{s_i^*(S)\}$. Зафиксируем произвольное подмножество агентов $S \subset N$. Покажем, что $\forall i, k \in S$

$$s_i * (S) \leqslant s_i^*(S \backslash k) \Leftrightarrow \tau_k \leqslant s_k^*(S).$$

Пусть $\tau_k \leqslant s_k^*(S)$. Так как

$$\sum_{i \in S/k} s_i^*(S) + s_k^*(S) = \sum_{i \in S/k} s_i * (S \backslash k) + \tau_k = R(S),$$

то

$$\sum_{i \in S/k} s_i^*(S) \leqslant \sum_{i \in S/k} s_i^*(S \backslash k).$$

Пусть $\exists l, m \in S \backslash k$ такие, что

$$s_m^*(S) \leqslant s_m^*(S \backslash k), \text{ но } s_l^*(S) > s_l * (S \backslash k).$$

$$\Downarrow$$

$$\eta_m(s_m^*(S)) \geqslant \eta_m(s_m * (S \backslash k)) \text{ и } \eta_l(s_l^*(S)) \leqslant \eta_l(s_l^*(S \backslash k)).$$

При этом

$$\frac{s_l^*(S)}{\eta_l(s_l^*(S))} = \frac{s_m*(S)}{\eta_m(s_m^*(S))} \text{ и } \frac{s_l^*(S \backslash k)}{\eta_l(s_l^*(S \backslash k))} = \frac{s_m^*(S \backslash k)}{\eta_m(s_m^*(S \backslash k))}$$

$$\Downarrow$$

$$s_m^*(S) \frac{\eta_l(s_l^*(S))}{\eta_m(s_m * (S))} > s_m^*(S \backslash k) \frac{\eta_l(s_l^*(S \backslash k))}{\eta_m(s_m^*(S \backslash k))}.$$

$$\Downarrow$$

$$s_m * (S)\frac{\eta_l(s_l^*(S))}{\eta_l(s_l^*(S\backslash k))} > s_m^*(S\backslash k)\frac{\eta_m(s_m^*(S))}{\eta_m(s_m * (S\backslash k))}.$$

$$\Downarrow$$

$$s_m^*(S) > s_m^*(S\backslash k).$$

Получили противоречие.

Пусть $\forall i \in S\backslash k\ s_i^*(S) \leqslant s_i^*(S\backslash k)$, но $\tau_k > s_k^*(S)$. Тогда

$$R(S) = \sum_{i \in S/k} s_i^*(S) + s_k^*(S) < \sum_{i \in S/k} s_i^*(S\backslash k) + \tau_k,$$

что невозможно.

То есть $\forall i \in N\ \max\limits_{S:i \in S}\{s_i^*(S)\}$ достигается, когда $\forall k \in S\backslash i$ $s_k > s_k^*(S)$. При этом, если $\tau_i > s_i^*(S)$ (т. е. все множество S состоит из не-диктаторов), то во множестве $S\backslash i$ так же не возникнет новых диктаторов, так как $\forall j \in S\backslash i\ \tau_j > s_j^*(S) > s_j^*(S\backslash i)$. Следовательно, $\forall S' \subset S$, $\forall j \in S'\ \tau_j > s_j^*(S')$, т. е. в любом подмножестве S не найдется новых диктаторов.

Однако, если $\tau_i \leqslant s_i^*(S)$, то возможно, что $\exists k \in S\backslash i$, такое, что $\tau_k > s_k^*(S)$ но $\tau_k \leqslant s_k^*(S\backslash i)$. Это соответствует ситуации, когда для некоторого шага алгоритма l агент $k \notin \bigcup\limits_{j<l} K_j$, но $k \in K_l$ в то время как агент $i \in \bigcup\limits_{j<l} K_j$. То есть для агентов-диктаторов $\max\limits_{S:i \in S}\{s_i^*(S)\}$ может достигаться на таких $S \subset N$, в которое входят другие диктаторы. Однако, так как $\tau_k \leqslant s_k^*(S\backslash i)$, то $\min\{\tau_k, \max\limits_{S \subset N:k \in S}\{s_k^*(S)\}\} = \tau_k$, что соответствует работе алгоритма 1.

Доказательство. [Доказательство теоремы 4.] Доказательство следует из того факта, что для двух последовательностей

$a = \{a_1, \ldots, a_n\}$ и $b = \{b_1, \ldots, b_n\}$ верно следующее утверждение:

$$\forall i \in N \, \frac{a_i}{b_i} = const \Leftrightarrow \forall S \subseteq N, \forall i \in S \, \frac{a_i}{\sum\limits_{j \in S} a_j} = \frac{b_i}{\sum\limits_{j \in S} b_j}.$$

Поэтому при выполнении (13), переобозначив $A_i = B_i(N)$, получаем (12) и наоборот.

Литература

1. БУРКОВ В.Н., ГОРГИДЗЕ И.И., НОВИКОВ Д.А., ЮСУПОВ Б.С. *Модели и механизмы распределения затрат и доходов в рыночной экономике*. – М.: ИПУ РАН, 1997. 61 с.
2. БУРКОВ В.Н., ДАНЕВ Б., ЕНАЛЕЕВ А.К. И ДР. *Большие системы: моделирование организационных механизмов*. – М.: Наука, 1989. 248 с.
3. БУРКОВ В.Н., КОРГИН Н.А., НОВИКОВ Д.А. *Введение в теорию управления организационными системами* / Под ред. чл.-корр. РАН Д.А. Новикова. – М.: Либроком, 2009. 264 с.
4. ИНТРИЛЛИГАТОР М. *Математические методы оптимизации и экономическая теория*. – М.: Прогресс, 1975. 606 с.
5. МУЛИН Э. *Кооперативное принятие решений: Аксиомы и модели:Пер. с англ.* – М.: Мир, 1991. 464 с.
6. НОВИКОВ Д.А. *Теория управления организационными системами*. 2-е издание. – М.: Физматлит, 2007. 584 с.
7. BARBERA S., JACKSON M., NEME A. *Strategy-Proof Allotment Rules* // Games and Economic Behavior. – 1997. – V. 18. – №1. – P. 1-21.
8. BOSSERT W., WEYMARK J.A. *Social choice (new developments)* / The New Palgrave Dictionary of Economics.

Second Edition. Eds. Steven N. Durlauf and Lawrence E. Blume. Palgrave Macmillan, 2008.

9. MAS-COLLEL A., WHINSTON M. D., GREEN J. R. *Microeconomic theory*. – N.Y.: Oxford Univ. Press, 1995. 981 p.
10. SPRUMONT Y. *The division problem with single-peaked preferences: A characterization of the uniform rule* // Econometrica. – 1991. – V. 59. – P. 509-519.

EQUIVALENCE AND STRATEGY-PROOFNESS OF NON-ANONYMOUS PRIORITY RESOURCE ALLOCATION MECHANISMS

Nikolay Korgin, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Cand.Sc. (nkorgin@ipu.ru).

Abstract: We provide characterizations of strategy-proof mechanisms of sequential resource allocation, which are equivalent to mechanisms of direct and reverse priorities. Previously known equivalency of anonymous priority mechanisms is extended to non-anonymous case. Equivalency of all non-anonymous direct priorities mechanisms is shown. We provide characterization of class of reverse priorities mechanisms, that have equivalent mechanisms of direct priorities.

Keywords: resource allocation mechanisms, strategy-proof mechanisms, game theory, planning mechanisms .

УДК 519
ББК 22.18 65.23

ОПТИМИЗАЦИОННЫЕ И ТЕОРЕТИКО-ИГРОВЫЕ МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ ИНВЕСТИЦИОННО-СТРОИТЕЛЬНЫМИ ПРОЕКТАМИ [1]

Угольницкий Г. А. [2]
(Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону)

Описана система оптимизационных и теоретико-игровых моделей девелопмента недвижимости. Система включает модели оптимизации продаж, конкуренции и кооперации, иерархических отношений, управления устойчивым развитием.

Ключевые слова: теория игр, теория оптимизации, девелопмент недвижимости.

Введение

Инвестиционно-строительный проект (ИСП) – это проект, предусматривающий реализацию полного цикла инвестиций в строительство объекта [3, с.143]. Деятельность по реализации ИСП принято называть девелопментом (более точно, девелопментом недвижимости – real estate development). Субъектом девелоперской деятельности (реализации ИСП) выступает девелоперская компания (девелопер). Главной целью девелоперской деятельности является удовлетворение общественных потребностей в объектах недвижимости. Достижение этой цели позволяет девелоперской компании получать доход, обеспечивающий прибыль

---

[1] *Текст приводится в соответствии с изданием «Математическая теория игр и ее приложения. – 2009. – Т. 1. №2».*

[2] *Геннадий Анатольевич Угольницкий, доктор физико-математических наук, профессор, (ougoln@mail.ru).*

акционеров и инвесторов, а также оплату труда сотрудников компании.

Объекты недвижимости подразделяются по типам и классам. К основным типам объектов недвижимости относятся: городское и загородное жилье, офисные помещения, торгово-развлекательные комплексы, складские помещения, здания и сооружения производственного назначения. Среди основных классов объектов недвижимости выделяют: премиум-класс (A), бизнес-класс (B), эконом-класс (C), социальный класс (последний относится преимущественно к жилью). Возможны и промежуточные варианты вида B^+, B^- и т.п. Существуют профессиональные классификаторы признаков, позволяющие утверждать принадлежность объектов недвижимости к тому или иному классу. Класс объекта определяет затраты на его строительство и диапазон значений цен продажи или аренды.

Можно считать, что каждый ИСП включает объекты одного и только одного типа и класса (например, городской жилой комплекс бизнес-класса или офисный центр премиум-класса). Тогда каждый ИСП можно охарактеризовать одним условным индексом, обозначающим определенное сочетание типа и класса недвижимости.

Разумеется, что в реальности на любой территории действуют несколько девелоперских компаний. Взаимодействие между ними можно рассматривать как с точки зрения конкуренции (участие в конкурсах, предложение однородного продукта), так и с точки зрения кооперации (объединение ресурсов, слияния и поглощения компаний).

Кроме взаимодействия равноправных девелоперских компаний «по горизонтали», большую важность представляют связанные с девелопментом «вертикальные», иерархические отношения. К этой группе можно отнести отношения между девелоперами и банками (инвесторами), между девелоперами и поставщиками услуг (консалтинговыми, проектными, строительными, обслуживающими и иными организациями), а также между девелоперами и органами государственного управления на данной территории. Особый интерес представляет задача управления устойчивым развитием инвестиционно-строительного комплекса региона.

Для изучения качественных и количественных характеристик девелопмента и решения задач управления девелоперской деятельностью целесообразно использовать математические модели.

1. Система математических моделей девелоперской деятельности

Существует обширная литература, посвященная управлению проектами, в том числе математическим методам и моделям в этой области. Основное место здесь занимают модели календарно-сетевого планирования [1], организационные механизмы управления проектами [7], информационные системы управления проектами [2]. Большой интерес для управления ИСП представляют методика освоенного объема [4] и методы управления портфелями проектов [5]. В работе [17] для описания динамики инвестиций в недвижимость используется имитационная модель конечного автомата. В статье [15] исследуется применение теории реальных опционов к девелопменту.

В настоящей работе описывается система оптимизационных и теоретико-игровых моделей девелоперской деятельности, структура которой показана на рис. 1. Базисную роль в предлагаемой системе играют агрегированные модели отдельной девелоперской компании. Во-первых, это статические оптимизационные модели, направленные на определение оптимальных цен на недвижимость с учетом ограничений на платежеспособный спрос и необходимости возврата кредитов. Объемы строительства считаются заданными концепцией ИСП, девелоперская компания назначает цены на свою продукцию (объекты недвижимости). Во-вторых, это динамические модели поиска оптимального соотношения между продажей и арендой при планировании ИСП в сфере коммерческой недвижимости.

Естественное обобщение базисной модели девелоперской компании возможно в двух направлениях: «по горизонтали» и «по

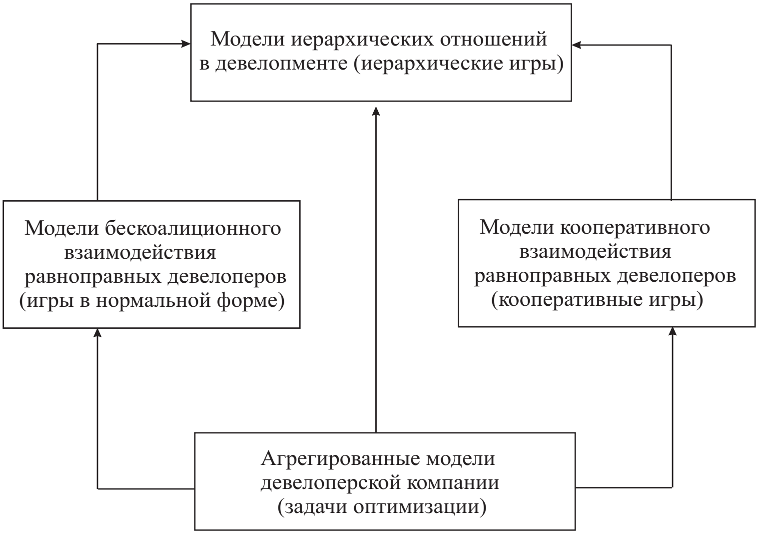


Рис. 1. Иерархическая система математических моделей девелоперской деятельности

вертикали». Во-первых, можно рассматривать взаимодействие девелоперских компаний как равноправных хозяйствующих субъектов. В свою очередь, здесь возможны два варианта моделирования. Если рассматривать конкурентные отношения девелоперов без образования коалиций, то возникают теоретико-игровые модели нескольких лиц в нормальной форме. Если же допускается кооперация, то приходим к кооперативным играм (играм в форме характеристической функции). Во-вторых, девелоперские компании вступают в экономические отношения с организациями других типов. Эти отношения обычно имеют иерархическую природу, причем девелоперская компания может выступать как в роли Ведущего (например, в отношениях со своими поставщиками), так и в роли Ведомого (в отношениях с инвесторами, кредитными организациями, органами государственного управления). Соответственно, возникают иерархические теоретико-игровые модели.

2. Агрегированные оптимизационные модели девелоперской компании

Статическая модель нахождения оптимальной цены продаж при ограничениях на неудовлетворенный платежеспособный спрос имеет вид

$$u = \sum_{j=1}^{N} [\alpha_j(p_j)p_j - c_j]S_j - C \to \max \tag{1}$$

$$\sum_{j=1}^{N} \alpha_j(p_j)S_j = S^{\max},\ \ 0 \leqslant p_j \leqslant p_j^{\max},\ j = 1, \ldots, N\,, \tag{2}$$

где j – индекс ИСП (сочетание типа и класса недвижимости); N – количество ИСП, реализуемых компанией в текущем году; u – годовая прибыль компании (руб.); S_j – годовой объем строительства по j-му ИСП (м2); c_j – себестоимость строительства по j-му ИСП (руб.); p_j – цена продажи 1 м^2 недвижимости по j-му ИСП (руб.); $\alpha_j(p_j)$ – доля проданных м^2 от общей величины S_j; – не зависящие от объемов строительства затраты компании (руб.); $S^{\max}$ – максимальный платежеспособный спрос целевой потребительской группы компании (м^2); $p_j^{\max}$ – максимально возможная цена 1 м^2 по j-му ИСП (руб.).

Для дальнейшего анализа учтем следующие соображения:

– не зависящие от p переменные можно не включать в целевую функцию;

– платежеспособный спрос удобно характеризовать параметром $\beta = S^{\max}/S_j$, $0 \leqslant \beta \leqslant 1$;

– без ограничения общности можно опустить индекс j . Тогда получим

$$u = \alpha(p)p \to \max \tag{3}$$

$$\alpha(p) \leqslant \beta,\ \ 0 \leqslant \beta \leqslant 1,\ \ 0 \leqslant p \leqslant p^{\max}\,, \tag{4}$$

где все переменные относятся к некоторому отдельному ИСП.

Модели (1)-(2) или (3)-(4) являются статическими, т. е. описывают деятельность девелоперской компании в течение одного года. Ключевую роль в модели (3)-(4) играет функция $\alpha(p)$, описывающая зависимость доли продаж от цены на недвижимость. Параметризация функции $\alpha(p)$ основана на следующих предположениях, не ограничивающих общность:

– $\alpha(p)$ – убывающая функция цены, $0 \leqslant \alpha(p) \leqslant 1$;

– $\alpha(0) = 1$, $\alpha(p^{\max}) = 0$. Простейшей функцией, удовлетворяющей этим предположениям, является линейная функция

$$\alpha(p) = 1 - p/p^{\max}\,; \tag{5}$$

Решая задачу (3)-(4), находим:

$$p^* = \begin{cases} p^{\max}(1-\beta), & 0 \leqslant \beta < 1/2\,, \\ p^{\max}/2, & 1/2 \leqslant \beta \leqslant 1\,, \end{cases} \tag{6}$$

при этом

$$u(p^*) = \begin{cases} \beta(1-\beta)p^{\max}, & 0 \leqslant \beta < 1/2\,, \\ p^{\max}/4, & 1/2 \leqslant \beta \leqslant 1\,, \end{cases}$$

Таким образом, с уменьшением β от $1/2$ до 0 оптимальную цену p^* приходится увеличивать от $p^{\max}/2$ до $p^{\max}$, но при этом все равно прибыль $u(p^*)$ снижается от $p^{\max}/4$ до 0.

Динамическая модель поиска оптимального соотношения между продажей и арендой при реализации ИСП в сфере коммерческой недвижимости имеет вид

$$U = K_1(s,c)\sum_{t=1}^{T}\alpha_t\beta_t + K_2(r,z)\sum_{t=1}^{T}(T-t+1)(1-\alpha_t)\beta_t \to \max$$

$$\sum_{t=1}^{T}\beta_t \leqslant 1, \;\; \beta_t \geqslant 0, \;\; 0 \leqslant \alpha_t \leqslant 1.$$

Здесь U – общая прибыль компании (руб. на 1 м^2); T – период реализации (мес.); s – цена продажи 1 м^2 (руб.); c – себестоимость строительства 1 м^2 (руб.); r - цена аренды 1 м^2 в месяц (руб.); z – затраты на содержание 1 м^2 в месяц (руб.); $K_1(s,c)$ – прибыль компании от продажи 1 м^2 с учетом налогов (руб.); $K_2(r,z)$ – месячная прибыль компании от аренды 1 м^2 с учетом налогов (руб.); β_t – доля площади, реализованной в месяц t (задана по сценарию); α_t – доля площади, реализованной в месяц t в виде продаж.

Поскольку целевая функция модели линейна по управляемой переменной α_t, то оптимальное решение имеет вид

$$\alpha^* = \begin{cases} 1, & K_1(s,c)\sum\limits_{t=1}^{T}\beta_t + K_2(r,z)\sum\limits_{t=1}^{T}(T-t+1)\beta_t\,, \\ 0, & \text{иначе}\,, \end{cases}$$

Например, при условии реализации всех площадей в течение первого месяца условие большей выгодности аренды по сравнению с продажей имеет вид $K_1(s,c) < TK_2(r,z)$, а при равномерной реализации в течение всего периода – уже $K_1(s,c) < 0.5(T+1)K_2(r,z)$.

3. Модели бескоалиционного взаимодействия девелоперских компаний

Пусть на данной территории (город, субъект РФ, федеральный округ) действуют n девелоперских компаний, обозначаемых индексом $i = 1,\ldots,n$. Тогда конкурентное взаимодействие этих компаний описывается игрой n лиц в нормальной форме [6]

$$G = \Big\langle \{1,\ldots,n\},\ \{X_1,\ldots,X_n\},\ \{u_1,\ldots,u_n\} \Big\rangle, \tag{7}$$

где функции выигрыша игроков u_i задаются формулой (1), а множества допустимых стратегий X_i – ограничениями типа (2). При исследовании теоретико-игровой модели (7) были изучены следующие предположения:

1) $\alpha_i = \alpha_i(p_i),\ \ 0 \leqslant p_i \leqslant p_i^{\max},\ \ i = 1, \ldots, n,$
где $p_i^{\max}$ – максимально допустимая цена на недвижимость, устанавливаемая i-й компанией независимо от остальных из соображений здравого смысла;

2) $\alpha_i = \alpha_i(p_i^{\text{отн}}),\ p_i^{\text{отн}} = p_i/p_{\max},\ p_{\max} = \max\{p_1, \ldots, p_n\}$;

3) X_i определяется ограничениями $\alpha_i S_i = S_i^{\max}$ независимо для каждой компании $i = 1, \ldots, n$;

4) X_i определяется совместными ограничениями $\sum \alpha_i S_i = S^{\max}$ для общего платежеспособного спроса населения данной территории.

При этом во всех четырех случаях возможных сочетаний α_i и X_i качественный характер оптимального решения (3.6) не меняется.

Поскольку решение (6) представляет собой доминирующую стратегию игрока i, то вектор

$$p^* = (p_1^*, \ldots, p_n^*) \tag{8}$$

может рассматриваться как равновесие в доминирующих стратегиях в игре (7). Однако следует иметь в виду, что поведение игроков является полностью изолированным только в случае $\alpha_i = \alpha_i(p_i)$, $\alpha_i S_i \leqslant S_i^{\max}$. В остальных трех случаях определение доминирующей стратегии требует от игрока знания параметров других игроков, поэтому решение (8) лучше интерпретировать как равновесие по Нэшу, фактически допускающее некоторый информационный обмен между игроками.

4. Модели кооперативного взаимодействия девелоперских организаций

Пусть по-прежнему на данной территории действуют n девелоперских компаний $i = 1, \ldots, n$, которые теперь могут обмениваться информацией, объединять ресурсы и осуществлять совместные проекты. Обозначим через A_i величину собственных средств i-й девелоперской компании.

Тогда кооперативное взаимодействие девелоперских компаний можно формализовать как взвешенную мажоритарную игру [8]

$(A^{\min}; A_1, \ldots, A_n)$, т. е. характеристическая функция имеет вид

$$v(S) = \begin{cases} 1, & \sum\limits_{i \in S} A_i \geqslant A^{\min}\,, \\ 0, & \text{иначе}\,, \end{cases} \tag{9}$$

Таким образом, выигрывающими являются те и только те коалиции, суммарный объем собственных средств, которых не меньше $A^{\min}$. Пороговую величину $A^{\min}$ можно интерпретировать, например, как объем залога, необходимый для участия в конкурсе или получения банковского кредита.

Можно выделить следующие частные случаи игры (9):

1) диктаторская игра $i \in \{1, \ldots, n\} \; : \; A_i \geqslant A^{\min}, \; \forall j \neq i \;\; A_j < A^{\min}$.
В этом случае игра несущественная, $v(S) = 1 \iff i \in S$, существует единственный дележ $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ $(x_i = 1)$, который образует С-ядро, является единственным устойчивым множеством и вектором Шепли;

2) симметричная игра k-го порядка

$$v(S) = \begin{cases} 1, & s \geqslant k\,, \\ & \\ 0, & \text{иначе}\,, \end{cases} \quad s = |S|, \; 1 \leqslant k \leqslant n$$

В этом случае С-ядро игры пусто, вектор Шепли имеет вид $(1/n, \ldots, 1/n)$, устойчивым множеством является, например, дискриминирующее решение вида $\{(x_{i1}, \ldots, x_{ik}, 0, \ldots, 0) \; : \; x_{i1} \geqslant 0, \ldots, x_{ik} \leqslant 0; \; x_{i1} + \ldots + x_{ik} = 1\}$.

Можно рассматривать игры в форме характеристической функции общего вида, где образование коалиции $S \cup T$ означает слияние (поглощение) девелоперских компаний S и T или просто объединение их ресурсов.

5. Модели взаимодействия девелоперских компаний с банком

Описание взаимодействия девелоперских компаний с банком (считаем для простоты, что на данной территории кредиты девелоперам выдает единственный банк) основывается на принятии следующего регламента.

Этап 1: подготовка кредитных заявок девелоперскими компаниями.

Этот этап включает для каждой девелоперской компании $i = 1, \ldots, n$: формирование концепций реализуемых ИСП $j = 1, \ldots, n_i$; составление графиков проектирования, строительства и финансирования в рамках каждого ИСП; оценку собственных средств компании и общей себестоимости 1 м^2 недвижимости по каждому ИСП; выявление потребности в кредитовании и обращение в банк с кредитной заявкой в размере

$$K_i^0 = \sum_{j=1}^{n_i} K_{ij}^0 .$$

Этап 2: принятие решения банком. На этом этапе банк: анализирует поданные заявки $K_1^0, \ldots, K_n^0$; оценивает риски кредитования r_i по каждой заявке; определяет процентную ставку по кредитам $s_i = s_i(r_i)$; принимает решение о выделении кредитов $K_1, \ldots, K_n$ и назначении соответствующих процентных ставок $s_1, \ldots, s_n$; сообщает девелоперам о своем решении.

Этап 3: принятие решения девелопером. На этом этапе каждая девелоперская компания $i = 1, \ldots, n$ уточняет реальные объемы строительства и соответствующие графики исходя из выделенных кредитных средств K_i и процентной ставки s_i; определяет оптимальную цену на объекты недвижимости путем решения задачи (3)-(4).

При построении модели принятия решения банком принимаются следующие предположения:

– риск кредитования определяется по формуле

(10) $$r_i = K_i/A_i, \ \ i = 1, \ldots, n\,,$$

где A_i – собственные средства девелоперской компании, K_i – выделяемые банком кредитные средства. Тогда условием выделения кредита является выполнение неравенства $r_i \leqslant r^{\max}$, где $r^{\max}$ – банковский норматив допустимого риска.

Реально выделение кредитов и соответствующая оценка рисков осуществляются по каждому отдельному ИСП, но в первом приближении можно считать, что формула (10) учитывает все ИСП, реализуемые i-й девелоперской компанией;

– процентная ставка по кредиту является возрастающей линейной функцией риска:

$$s_i = ar_i + b = aK_i/A_i + b = a_i K_i + b, \ \ i = 1, \ldots, n\,.$$

Будем считать, что

$$0 < s_{\min} \leqslant s_i \leqslant s_{\max} < 1, \ r_{\min} \leqslant r_i \leqslant r_{\max},$$

$$s(r_{\min}) = s_{\min}, \, s(r_{\max}) = s_{\max}\,.$$

Тогда получаем

$$a_i = (s_{\max} - s_{\min})/[A_i(r_{\max} - r_{\min})],$$

$$b = (s_{\min} r_{\max} - s_{\max} r_{\min})/(r_{\max} - r_{\min}), \ i = 1, \ldots, n\,.$$

С учетом сделанных предположений модель принятия решения банком на этапе 2 представляет собой задачу оптимизации

(11) $$u_0 = \sum_{i=1}^{n} s_i K_i = \sum_{i=1}^{n} (a_i K_i + b) K_i \longrightarrow \max$$

(12) $$\sum_{i=1}^{n} K_i = K, \ \ 0 \leqslant K_i \leqslant L_i, \ i = 1, \ldots, n\,,$$

где K – общий капитал банка в текущем году, $L_i = \min\{K_i^0, A_i r_{\max}\}$.

Решая задачу (11)-(12) методом Лагранжа, находим оптимальные значения

(13) $$K_i^* = \min\{L_i, M_i\},\ \ M_i = K/(a_i \sum a_i^{-1})\,;$$

(14) $$s_i^* = \frac{(s_{\max} - s_{\min})K_i^* + A_i(s_{\min} r_{\max} - s_{\max} r_{\min})}{A_i(r_{\max} - r_{\min})},\ i = \overline{1, n}\,.$$

Модель принятия решения девелоперской компанией на этапе 3 имеет вид (3)-(4) с дополнительным ограничением

$$c_i S_i \leqslant A_i - C_i + (1 - s_i^*)K_i^*,$$

откуда окончательно определяется величина оптимальных объемов строительства

(15) $$S_i^* = [A_i - C_i + (1 - s_i^*)K_i^*]/c_i\,,$$

и соответствующее значение $\beta_i^* = S_i^{\max}/S_i^*$, которое следует подставить в формулу (6) для вычисления оптимальной цены.

Рассмотрим случай взаимодействия единственной девелоперской компании с банком. Описанный выше регламент определяет иерархическую игру «Банк – Девелопер» следующего вида:

(16) $$u_0(K_1) = a_1 K_1^2 + bK_1 \longrightarrow \max$$

(17) $$0 \leqslant K_1 \leqslant \min\{K, K_1^0, A_1 r_{\max}\}$$

(18) $$u_1(K_1, p_1) = [\alpha_1(p_1)p_1 - c_1][A_1 - C_1 + (1 - s_1)K_1]/c_1 \to \max$$

(19) $$0 \leqslant \alpha_1(p_1)[A_1 - C_1 + (1 - s_1)K_1]/c_1 \leqslant S_1^{\max},\ 0 \leqslant p_1 \leqslant p_1^{\max}\,.$$

Ситуация (K_1^*, p_1^*), где K_1^* вычисляется по формуле (13), а p_1^* – по одной из формул (5) или (6) после подстановки значений s_i^* и S_i^* по формулам (14) и (15), соответственно, является равновесием по Штакельбергу в игре (16)-(19).

6. Модели управления устойчивым развитием инвестиционно-строительного комплекса

Концепция иерархического управления устойчивым развитием применительно к эколого-экономическим системам описана в [9-11, 16]. В работах [12, 13] предложено обобщение этой концепции для более широкого класса систем управления. Применительно к инвестиционно-строительному комплексу задачу управления устойчивым развитием можно сформулировать следующим образом.

Рассматривается древовидная система управления, на верхнем уровне которой находится Администрация – орган государственного управления территорией, а на нижнем – девелоперские компании (Девелоперы) $i = 1, \ldots, n$. Каждый Девелопер максимизирует свою прибыль при ограничениях на платежеспособный спрос. Администрация решает двоякую задачу. Во-первых, она заинтересована в развитии инвестиционно-строительного комплекса региона, что можно в рамках модели выразить стремлением к максимизации суммарной прибыли девелоперов с учетом расходов на управление инвестиционно-строительным комплексом. Во-вторых, она должна обеспечить выполнение условий устойчивого развития, которые в рамках модели означают обязательное строительство определенных объемов социального жилья.

В общей модели управления устойчивым развитием [9-13, 16] для достижения своих целей ведущий игрок может использовать методы принуждения (административное воздействие), побуждения (экономическое воздействие) и убеждения (психологическое воздействие). В описываемой модели управления устойчивым развитием инвестиционно-строительного комплекса возможности принуждения у Администрации отсутствуют, поскольку она не может обязать Девелоперов заниматься строительством социального жилья [3]. Зато имеется широкий спектр возможностей

[3] *Принуждение может возникать в задачах управления инвестиционно-строительным комплексом более низкого уровня, где существуют законодательные ограничения на тип использова-*

побуждения, имеющих экономическую природу: гарантии выкупа квартир социального класса по заранее обусловленной цене, государственные гарантии банковских кредитов, прямые субсидии на социальное строительство и т.п. Существует (по крайней мере, теоретически) и возможность реализации метода убеждения, т. е. добровольной кооперации Девелоперов с Администрацией для совместной максимизации суммарной прибыли от ИСП с обязательным выполнением требований устойчивого развития.

Модель управления устойчивым развитием инвестиционно-строительного комплекса можно представить в следующем виде:

$$u_0(p, S) = \sum_{i=1}^{n} u_i(p_i, S_i) - f_0(p) \longrightarrow \max\,, \tag{20}$$

$$p_i \in P_i,\ i = 1, \ldots, n\,; \tag{21}$$

$$\sum_{i=1}^{n} S_{i1} \geqslant S_1^{\min}\,; \tag{22}$$

$$u_i(p_i, S_i) \longrightarrow \max\,, \tag{23}$$

$$S_i \in \Omega_i,\ i = 1, \ldots, n\,. \tag{24}$$

Здесь индексом $j = 1$ обозначены проекты по строительству социального жилья; S_{ij} – объемы строительства по j-му ИСП для i-го Девелопера; $S_1^{\min}$ – обязательный объем строительства социального жилья, т. е. неравенство (22) отражает социальные требования к устойчивому развитию инвестиционно-строительного комплекса; $S_i = (S_{i1}, \ldots, S_{in_i})$, где n_i – общее количество ИСП, реализуемых i-м Девелопером; $S = (S_1, \ldots, S_n)$; $p = (p_1, \ldots, p_n)$ – вектор управлений побуждения, применяемых Администрацией; $f_0(p)$ – функция затрат Администрации на управление инвестиционно-строительным комплексом; u_i – функция прибыли i-го Девелопера; Ω_i – множество ограничений на строительство для i-го Девелопера. Заметим, что в отличие от

ния территории, этажность зданий, обязательные требования к благоустройству территории застройки и т. п.

модели (1)-(2) в модели (20)-(24) стратегиями Девелопера служат не цены, а объемы строительства; при этом предполагается, что цены определяются выбором ИСП (типа и класса объектов недвижимости).

Решением иерархической игры (20)-(24) называется ситуация

$$(p_1^*, \ldots, p_n^*, S_1^*, \ldots, S_n^*) \in P_1 \times \ldots \times P_n \times \Omega_1 \times \ldots \times \Omega_n$$

такая, что

$$u_0(p_1^*, \ldots, p_n^*, S_1^*, \ldots, S_n^*) = \\ = \max_{p_i \in P_i} \min_{S_i \in R_i(p_i),\, i=1,\ldots,n} u_0(p_1, \ldots, p_n, S_1, \ldots, S_n)\,,$$

где $R_i(p_i) = \{S_i \in \Omega_i : u_i(p_i, S_i) = \max_{z_i \in \Omega_i} u_i(p_i, z_i)\}, i = 1, \ldots, n,$

при обязательном выполнении условия (22).

7. Заключение

Математическое моделирование представляется полезным инструментом решения задач управления ИСП. В настоящей работе описан ряд упрощенных оптимизационных и теоретико-игровых моделей, намечающих возможные направления исследований в этой области. На уровне отдельной девелоперской компании экономико-математическая модель позволяет найти оптимальные цены на недвижимость с учетом ограничений на платежеспособный спрос. Теоретико-игровые модели в нормальной форме описывают конкурентные отношения между девелоперскими компаниями, а теоретико-игровые модели в форме характеристической функции – кооперативные отношения между девелоперами (объединение ресурсов, слияния и поглощения).
Иерархические игровые модели отображают соответствующие отношения между девелоперами и банком (инвестором) либо девелоперами и поставщиками, а также служат основой для управления устойчивым развитием инвестиционно-строительного комплекса региона.

Перспективы развития намеченных исследований включают: уточнение, детализацию и обобщение моделей описанных классов, продолжение аналитических исследований; идентификацию моделей на основе реальных статистических, отчетных и экспертных данных, исследование параметрических семейств зависимостей между модельными переменными; программную реализацию описанных моделей в динамической постановке, осуществление компьютерных имитационных экспериментов по методу сценариев; рассмотрение иных классов математических моделей девелоперской деятельности, например, моделирование бизнес-процессов в инвестиционно-строительных компаниях с помощью методов теории массового обслуживания [14]; внедрение разработанных моделей в практику управления инвестиционно-строительными проектами.

Литература

1. ВОРОПАЕВ В.И. *Модели и методы календарного планирования в автоматизированных системах управления строительством*. – М: Стройиздат, 1974.
2. ГЛАМАЗДИН Е.С., НОВИКОВ Д.А., ЦВЕТКОВ А.В. *Механизмы управления корпоративными программами: информационные системы и математические модели*. – М: Спутник, 2003.
3. ЗАРЕНКОВ В.А. *Управление проектами*. – М: Изд-во АСВ. – СПб: СПбГАСУ, 2006.
4. КОЛОСОВА Е.В., НОВИКОВ Д.А., ЦВЕТКОВ А.В. *Методика освоенного объема в оперативном управлении проектами*. – М: Апостроф, 2001.
5. МАТВЕЕВ А.А., НОВИКОВ Д.А., ЦВЕТКОВ А.В. *Модели и методы управления портфелями проектов*. – М: ПМСОФТ, 2005.
6. МУЛЕН Э. *Теория игр с примерами из математической экономики*. – М: Мир, 1985.
7. НОВИКОВ Д.А. *Управление проектами: организационные механизмы*. – М: ПМСОФТ, 2007.

8. РОБЕРТС Ф. *Дискретные математические модели с приложениями к социальным, биологическим и экологическим задачам*. – М: Наука, 1986.
9. УГОЛЬНИЦКИЙ Г.А. *Теоретико-игровое исследование некоторых способов иерархического управления*// Известия РАН. Теория и системы управления. – 2002. – №1. – С. 97-101.
10. УГОЛЬНИЦКИЙ Г.А. *Математическое моделирование иерархического управления устойчивым развитием*// Компьютерное моделирование. Экология. – Вып. 2. – М: Вузовская книга. – 2004. – С. 101-125.
11. УГОЛЬНИЦКИЙ Г.А. *Теоретико-игровые принципы оптимальности иерархического управления устойчивым развитием*// Известия РАН. Теория и системы управления. – 2005. – №4. – С. 72-78.
12. УГОЛЬНИЦКИЙ Г.А. *Иерархическое управление устойчивым развитием социальных организаций*// Общественные науки и современность. – 2002. – №3. – С. 133-140.
13. УГОЛЬНИЦКИЙ Г.А., МАЛЬСАГОВ М.Х., АГИЕВА М.Т. *Иерархическое управление устойчивым развитием системы образования*// Научная мысль Кавказа. приложение. – 2002. – Т. 3. – №29. – С. 69-78.
14. УГОЛЬНИЦКИЙ Г.А., ТИХОНОВ С.В. *Модель инвестиционно-строительной организации как системы массового обслуживания*// Проблемы теории и практики управления. – 2008. – №4. – С. 40-47.
15. LUCIUS D. *Real options in real estate development*// Journal of Property Investment and Finance. – 2001. – V. 19. – №1. – P. 73-78.
16. OUGOLNITSKY G.A. *Game theoretic modeling of the hierarchical control of sustainable development*// Game Theory and Applications. – 2002. – V. 8. – P. 82-91.
17. WU F. *Simulating Temporal Fluctuations of Real Estate Development in a Cellular Automata City*// Transactions in GIS. – 2003. – V. 7. – №2. – P. 193-210.

OPTIMIZATION AND GAME THEORETIC MODELS IN REAL ESTATE DEVELOPMENT

Gennady Ougolnitsky, Southern Federal University, Doctor of Sc., professor (ougoln@mail.ru).

Abstract: A system of optimization and game theoretic models in real estate development is described. The system includes models of sales optimization, competence and cooperation, hierarchical relations, control of sustainable development.

Keywords: game theory, optimization theory, real estate development.

УДК 519.837 + 517.977
ББК 22.18

КООПЕРАТИВНОЕ РЕГУЛИРУЮЩЕЕ УСЛОВИЕ В ЗАДАЧЕ РАЗДЕЛЕНИЯ БИОРЕСУРСОВ [1] [2]

Реттиева А. Н. [3]
(Учреждение Российской академии наук Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН, Петрозаводск)

Проведено исследование динамической игры управления биоресурсами в дискретном времени. В игре участвует центр, который разделяет водоем между участниками, и игроки, производящие вылов биоресурсов. Предполагается, что между частями водоема существует миграционный обмен. В работе получены равновесие по Нэшу и кооперативное равновесие для бесконечного периода планирования. Для поддержания кооперативного соглашения строится динамически устойчивая процедура распределения дележа. Предлагается новое условие, которое побуждает игрока соблюдать кооперативное соглашение, называемое кооперативным регулирующим условием.

Ключевые слова: динамические игры, задача управления биоресурсами, кооперативное равновесие, динамическая устойчивость, процедура распределения дележа.

---

[1] *Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ №08-01-98801-р-север-а и гранта ОМН РАН (программа «Математические и алгоритмические проблемы информационных систем нового поколения»).*

[2] *Текст приводится в соответствии с изданием «Математическая теория игр и ее приложения. – 2009. – Т. 1. №3».*

[3] *Анна Николаевна Реттиева, кандидат физико-математических наук (annaret@krc.karelia.ru).*

Введение

В работе проведено исследование динамической игры управления биоресурсами (выловом рыбы) в дискретном времени. В данной модели водоем разделен на две части, в каждой из которых вылов ведет игрок. В игре участвует центр (арбитр), который разделяет водоем между участниками, и игроки (страны), производящие вылов биоресурсов.

Предполагается, что между частями водоема существует миграционный обмен. Таким образом, размер популяции в одном районе (где вылов ведет первый игрок) зависит не только от размера популяции и вылова в предыдущий момент, но и от размера популяции и вылова в другом районе (где популяцию эксплуатирует второй игрок).

Существует альтернативная интерпретация данной модели. Можно рассмотреть два вида рыбы, каждый из которых эксплуатируется игроком [6]. В этом случае миграции соответствует процесс межвидового взаимодействия.

В традиционной постановке задачей центра является регулирование вылова путем введения квот на вылов рыбы. В серии работ [1, 8] был разработан новый подход, где задачей центра является определение оптимальной доли территории, где будет запрещен вылов.

Основной задачей предложенной работы является применение разработанного подхода к задаче разделения биоресурсов. В статье получены равновесие по Нэшу и кооперативное равновесие для бесконечного периода планирования.

Существует несколько методологических схем для поддержания кооперативного соглашения, достигнутого в начале периода планирования: кооперативное регулируемое равновесие и динамически устойчивая процедура распределения дележа. Схема построения кооперативного регулируемого равновесия для задач управления биоресурсами описана авторами в работах [2, 9].

В данной статье исследуется схема построения динамически устойчивой процедуры распределения дележа, предложенная и развитая в работах Петросяна Л.А. [3, 4, 10]. Рассматривается случай, когда центр является игроком и может формировать коалиции с участниками (странами). Получен в аналитическом виде вектор Шепли и динамически устойчивая процедура распределения дележа. Предлагается новое условие, которое побуждает игрока соблюдать кооперативное соглашение, называемое кооперативным регулирующим условием.

Приведены результаты моделирования.

1. Модель разделения биоресурсов

Разделим акваторию водоема на две части: s и $1 - s$, где вылов ведут два игрока. Центр (арбитр) разделяет водоем между участниками. Игроки (страны), производящие вылов биоресурсов на бесконечном промежутке времени, являются участниками игры.

Модель может иметь другую интерпретацию: в водоеме имеются два вида рыбы и игрок может ловить только один из них.

Предполагаем, что популяция развивается в соответствии с биологическим законом:

$$\begin{cases} x_{t+1} = x_t^{\alpha}\left(\frac{y_t}{x_t}\right)^{\beta s}, \quad x_0 = x\,, \\ y_{t+1} = y_t^{\alpha}\left(\frac{x_t}{y_t}\right)^{\beta(1-s)}, \quad y_0 = y\,, \end{cases} \tag{1}$$

где $x_t \geqslant 0$ – размер популяции в первом районе в момент времени t, $y_t \geqslant 0$ – размер популяции во втором районе в момент времени t, $0 < \alpha < 1$ – коэффициент внутреннего роста, $0 < \beta < 1$ – коэффициент миграции.

Здесь α представляет эффект прямого влияния размера популяции на размер в следующий период времени на этой территории. β представляет миграционный эффект между двумя частями водоема.

Игрок 1 эксплуатирует x_t и игрок 2 ведет вылов популяции y_t.

Можно заметить, что в нашей модели интенсивность миграции зависит также и от доли территории. Это предположение естественно, поскольку размер среды обитания уменьшается, когда s уменьшается, и рыба должна мигрировать в другой район.

Предполагается логарифмический вид функций выигрыша. Рассматриваются задачи максимизации бесконечных сумм дисконтированных выигрышей двух игроков:

$$J_1 = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t \ln(u_{1t}) \,, \quad J_2 = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t \ln(u_{2t}) \,, \tag{2}$$

где $0 \leqslant u_{1t}, u_{2t} \leqslant 1$ – выловы игроков в момент времени t, $0 < \delta < 1$ – коэффициент дисконтирования.

И динамика принимает вид:

$$\begin{cases} x_{t+1} = (x_t - u_{1t})^{\alpha-\beta s}(y_t - u_{2t})^{\beta s} \,, \\ y_{t+1} = (y_t - u_{2t})^{\alpha-\beta(1-s)}(x_t - u_{1t})^{\beta(1-s)} \,. \end{cases} \tag{3}$$

В данной модели в отличие от [2] центр также является игроком и его выигрыш на бесконечном промежутке времени имеет вид:

$$I = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t \ln(x_t y_t) \,. \tag{4}$$

Таким образом, центр хочет максимизировать общий размер популяции в водоеме.

2. Вектор Шепли и динамическая устойчивость

Динамическая устойчивость принципов оптимальности в дифференциальных играх подробно исследовалась в работах специалистов по теории игр. Л.А. Петросян [3] математически формализовал понятие динамической устойчивости. Л.А.Петросян и Н.Н.Данилов [4] ввели понятие процедуры распределения дележа для кооперативных решений.

Для данной модели определяется вектор Шепли и динамически устойчивая процедура распределения дележа [10].

Теорема 1. *При $x_0 = y_0$ вектор Шепли в задаче (2)-(4) имеет вид*

$$(\xi_1, \xi_2, \xi_s)\,,$$

где

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= \frac{2-\mu_1}{2(1-\alpha\delta)}\ln x + \\
&+ \frac{1}{6(1-\delta)}(2C_1 + 2C_{1,2,s} - 2C_{2,s} + C_{1,2} + C_{1,s} - C_2 - C_s)\,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\xi_2 &= \frac{1+\mu_1}{2(1-\alpha\delta)}\ln x + \\
&+ \frac{1}{6(1-\delta)}(-C_1 + 2C_{1,2,s} + C_{2,s} + C_{1,2} - 2C_{1,s} + 2C_2 - C_s)\,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\xi_s &= \frac{3}{2(1-\alpha\delta)}\ln x + \\
&+ \frac{1}{6(1-\delta)}(-C_1 + 2C_{1,2,s} + C_{2,s} - 2C_{1,2} + C_{1,s} - C_2 + 2C_s)\,,
\end{aligned}$$

и

$$C_1 = C_2 = \ln(\frac{\Delta}{1-a+0.5b}) + \frac{a}{1-a}\ln(1 - \frac{\Delta}{1-a+0.5b})\,,$$

$$C_s = \frac{2a}{(1-a)}\ln(1 - \frac{\Delta}{1-a+0.5b}),\ C_{1,2} = \ln(1-a) + \frac{a}{1-a}\ln(a)\,,$$

$$C_{1,2,s} = \ln(\frac{1-a}{1+2a}) + \frac{3a}{1-a}\ln(1 - \frac{1-a}{1+2a})\,,$$

$$\begin{aligned}
C_{1,s} &= \mu_1 \ln(\frac{2\Delta}{2-\mu_1 a(1-a+b)-(a-b)(a+1)}) + \\
&+ \frac{(2-\mu_1)a}{1-a}\ln(1 - \frac{2\Delta}{2-\mu_1 a(1-a+b)-(a-b)(a+1)})\,,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
C_{2,s} &= (1-\mu_1)\ln(\frac{2\Delta}{2+\mu_1 a(1-a+b)-2a+b})+ \\
&+ \frac{(1+\mu_1)a}{1-a}\ln(1-\frac{2\Delta}{2+\mu_1 a(1-a+b)-2a+b}),
\end{aligned}
$$

где $a=\alpha\delta$, $b=\beta\delta$, $\Delta=(1-a)(1-a+b)$.

Доказательство. Последующее доказательство верно и для случая $x_0 \neq y_0$, но получаемые коэффициенты и управление центра имеют значительно более сложный вид. Поэтому ограничимся здесь только простым случаем.

Рассмотрим случай некооперативного поведения игроков, т. е. ситуацию равновесия по Нэшу.

Пусть $V_1(x,y)$ функция выигрыша игрока 1, $V_2(x,y)$ – игрока 2, а $V_s(x,y)$ – выигрыш центра.

Следуя принципу Беллмана эти функции должны удовлетворять уравнениям:

$$
\begin{aligned}
V_1(x,y) = \max_{0\leqslant u_1\leqslant x}\{\ln u_1 + \\
+\delta V_1((x-u_1)^{\alpha}\Big(\frac{y-u_2}{x-u_1}\Big)^{\beta s},(y-u_2)^{\alpha}\Big(\frac{x-u_1}{y-u_2}\Big)^{\beta(1-s)})\},
\end{aligned}
\tag{5}
$$

$$
\begin{aligned}
V_2(x,y) = \max_{0\leqslant u_2\leqslant y}\{\ln u_2 + \\
+\delta V_2((x-u_1)^{\alpha}\Big(\frac{y-u_2}{x-u_1}\Big)^{\beta s},(y-u_2)^{\alpha}\Big(\frac{x-u_1}{y-u_2}\Big)^{\beta(1-s)})\}.
\end{aligned}
\tag{6}
$$

$$
\begin{aligned}
V_s(x,y) = \max_{0\leqslant s\leqslant 1}\{\ln(xy) + \\
+\delta V_s((x-u_1)^{\alpha}\Big(\frac{y-u_2}{x-u_1}\Big)^{\beta s},(y-u_2)^{\alpha}\Big(\frac{x-u_1}{y-u_2}\Big)^{\beta(1-s)})\}.
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Будем искать функцию выигрыша в следующем виде:

$$V_i(x,y) = A_i \ln x + B_i \ln y + C_i\,, \quad i = 1, 2, s\,,$$

где A_i, B_i и C_i константы, зависящие от параметров модели.

Тогда для игрока 1 из (5) получим

$$\begin{aligned} &A_1 \ln x + B_1 \ln y + C_1 = \\ &= \ln u_1 + \delta A_1[(\alpha - \beta s)\ln(x - u_1) + \beta s \ln(y - u_2)] + \\ &+ \delta B_1[(\alpha - \beta(1-s))\ln(y - u_2) + \beta(1-s)\ln(x - u_1)] + \delta C_1\,. \end{aligned} \tag{8}$$

Предположим, что $u_1 = \gamma_1 x$ и $u_2 = \gamma_2 y$. Тогда составим систему для определения констант:

$$\begin{cases} A_1 = 1 + \delta A_1(\alpha - \beta s) + \delta B_1 \beta(1-s)\,, \\ B_1 = \delta A_1 \beta s + \delta B_1(\alpha - \beta(1-s))\,, \end{cases}$$

решая которую получим

$$A_1 = \frac{1 - \delta(\alpha - \beta(1-s))}{\Delta}\,, \quad B_1 = \frac{\delta \beta s}{\Delta}\,,$$

где

$$\Delta = (1 - \delta\alpha)(1 - \delta\alpha + \delta\beta)\,.$$

Аналогично для игрока 2 из (6) получим

$$B_2 = \frac{1 - \delta(\alpha - \beta s)}{\Delta}\,, \quad A_2 = \frac{\delta\beta(1-s)}{\Delta}\,.$$

Для определения оптимальных выловов максимизируем правую часть (8)

$$\frac{1}{u_1} + \frac{\delta A_1(-\alpha + \beta s) - \delta B_1 \beta(1-s)}{x - u_1} = 0$$

откуда получим

$$u_1 = \frac{x\Delta}{1 - \delta\alpha + \delta\beta(1-s)} .$$

Аналогично для игрока 2:

$$u_2 = \frac{y\Delta}{1 - \delta\alpha + \delta\beta s} .$$

Для центра из (7) получим уравнение

$$\begin{aligned} A_s \ln x + B_s \ln y + C_s = \\ = \ln x + \ln y + \delta A_s[(\alpha - \beta s)\ln(x - u_1) + \beta s \ln(y - u_2)] + \\ + \delta B_s[(\alpha - \beta(1-s))\ln(y - u_2) + \beta(1-s)\ln(x - u_1)] + \delta C_s , \end{aligned} \tag{9}$$

максимизируя правую часть которого получим

$$(\delta A_s + \delta B_s)\beta(\ln(x - u_1) - \ln(y - u_2)) = \frac{2\delta\beta}{1 - \alpha\delta} \ln \frac{x - u_1}{y - u_2} = 0 .$$

Следовательно, оптимальное управление центра определяется из условия

$$\frac{x(1-\gamma_1)}{(1-\gamma_2)y} = 1 .$$

Для рассматриваемого некооперативного случая при условии $x_0 = y_0$ получим, что центр должен разделять водоем поровну

$$s = \frac{1}{2} .$$

Для всех возможных коалиций, действуя аналогично, найдем оптимальные стратегии игроков и центра.

При этом, стратегии игроков ищутся в виде:

$$u_{1t} = \gamma_1 x_t\,, \;\; u_{2t} = \gamma_2 y_t\,.$$

Было получено, что для всех возможных коалиций оптимальное управление центра определяется в виде:

$$s : \frac{x_t(1-\gamma_1)}{(1-\gamma_2)y_t} = 1,$$

и ниже будут приведены выражения для s только для случая $x_0 = y_0$.

А именно, были получены следующие оптимальные управления:

1) Коалиции $\{1\}, \{2\}, \{s\}$.

$$s = \frac{1}{2},$$

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \frac{\Delta}{1 - \alpha\delta + 0.5\beta\delta}\,,$$

где
$$\Delta = (1-\alpha\delta)(1-\alpha\delta+\delta\beta)\,.$$

2) Гранд коалиция $\{1, 2, s\}$.

$$s = \frac{\alpha(1-\alpha\delta+\delta\beta)(1-2\mu_1) + \beta(2-\mu_1)}{3\beta}$$

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \frac{1-\alpha\delta}{1+2\alpha\delta}\,.$$

3) Коалиции $\{1,2\}$, $\{s\}$.

$$s = 1 - \mu_1$$

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 1 - \alpha\delta\,.$$

4) Коалиции $\{1,s\}$, $\{2\}$.

$$s = \frac{-\alpha\mu_1(1-\alpha\delta+\delta\beta)+\beta(1+\alpha\delta)+\alpha(1-\alpha\delta)}{2\beta}$$

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \frac{2\Delta}{2-\mu_1\delta\alpha(1-\alpha\delta+\delta\beta)-\delta(\alpha-\beta)(\alpha\delta+1)}\,.$$

5) Коалиции $\{2,s\}$, $\{1\}$.

$$s = \frac{-\alpha\mu_1(1-\alpha\delta+\delta\beta)+\beta}{2\beta}$$

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \frac{2\Delta}{2+\mu_1\delta\alpha(1-\alpha\delta+\delta\beta)-\delta(2\alpha-\beta)}\,.$$

Заметим, что в рассматриваемом случае $x_t = y_t$ для всех возможных коалиций, поскольку $\frac{x_{t+1}}{y_{t+1}} = (\frac{x_t}{y_t})^{\alpha-\beta}$ и $x_0 = y_0$.

Поэтому, если в общем случае выигрыш имеет вид:

$$V_{\{K\}} = A_K \ln x + B_K \ln y + C_K$$

для всех коалиций K, то при нашем предположении ($x_0 = y_0$) выигрыш имеет вид:

$$V_{\{K\}} = (A_K + B_K)\ln x + C_K\,.$$

Приведем функции выигрыша для всех коалиций

(10)
$$V_{\{1\}} = V_{\{2\}} = \frac{1}{1-\alpha\delta}\ln x + \frac{1}{1-\delta}C_1,\ V_{\{s\}} = \frac{2}{1-\alpha\delta}\ln x + \frac{1}{1-\delta}C_s\,,$$

$$V_{\{1,2,s\}} = \frac{3}{1-\alpha\delta}\ln x + \frac{1}{1-\delta}C_{1,2,s},\ V_{\{1,2\}} = \frac{1}{1-\alpha\delta}\ln x + \frac{1}{1-\delta}C_{1,2}\,,$$

$$V_{\{1,s\}} = \frac{2-\mu_1}{1-\alpha\delta}\ln x + \frac{1}{1-\delta}C_{1,s},\ V_{\{2,s\}} = \frac{1+\mu_1}{1-\alpha\delta}\ln x + \frac{1}{1-\delta}C_{2,s}\,,$$

где коэффициенты C_i, $C_{i,j}$, $C_{i,j,s}$ приведены в формулировке теоремы ($i, j = 1, 2, s$).

Теперь мы можем найти вектор Шепли, используя формулу:

$$\xi_i = \sum_{K \in N} \frac{(3-|K|)!(|K|-1)!}{6}[V_{\{K\}} - V_{\{K\setminus i\}}]\,,\ i \in N = \{1, 2, s\}\,,$$

общий вид которого приведен в формулировке теоремы.

Динамика развития популяции ($x_t = y_t$) при кооперативном поведении всех участников имеет вид:

$$x_{t+1} = x_t^{\alpha}(1-\gamma)^{\alpha} = x_t^{\alpha}(\frac{3\alpha\delta}{1+2\alpha\delta})^{\alpha}$$

откуда получим $x_t = x_0^{\alpha^t}(\frac{3\alpha\delta}{1+2\alpha\delta})^{\sum\limits_{j=1}^{t}\alpha^j}$.

Определение 1. *Вектор* $\beta(t) = (\beta_1(t), \beta_2(t), \beta_s(t))$ *называется процедурой распределения дележа (ПРД) [4, 10], если*

$$\xi_i(0) = \sum_{t=0}^{\infty}\delta^t\beta_i(t)\,, i = 1, 2, s\,.$$

Основная идея этой схемы заключается в распределении кооперативного выигрыша по всему периоду продолжения игры.

Определение 2. *Вектор* $\beta(t) = (\beta_1(t), \beta_2(t), \beta_s(t))$ *называется динамически устойчивой ПРД [3, 4, 10], если*

$$\xi_i(0) = \sum_{\tau=0}^{t-1} \delta^\tau \beta_i(\tau) + \delta^t \xi_i(t)\,, i = 1, 2, s\,.$$

Здесь игроки, следуя кооперативной траектории, придерживаются одного и того же принципа оптимальности в каждый текущий момент времени и поэтому не имеют объективных мотивов отклоняться от ранее выбранного решения о кооперации.

Для нашей модели получим

$$\beta_i(t) = \xi_i(t) - \delta \xi_i(t+1)\,, i = 1, 2, s\,.$$

Определение 3. *Дележ* (ξ_1, ξ_2, ξ_s) *удовлетворяет условию Янга [11], если*

$$\sum_{\tau=0}^{t-1} \delta^\tau \beta_i(\tau) + \delta^t V_{\{i\}}(t) \geqslant V_{\{i\}}(0)$$

для всех $t \geqslant 1$, *где* $\beta(t) = (\beta_1(t), \beta_2(t), \beta_s(t))$ – *динамически устойчивая ПРД.*

Это условие гарантирует участникам кооперации, что даже в случае расторжения кооперативного соглашения их выигрыш будет не меньше, чем при изначальном некооперативном поведении.

Это условие в нашей модели принимает вид:

$$\xi_i(0) - \xi_i(t)\delta^t \geqslant V_{\{i\}}(0) - \delta^t V_{\{i\}}(t)\,.$$

Определение 4. *Дележ* (ξ_1, ξ_2, ξ_s) *удовлетворяет кооперативному регулирующему условию, если*

$$\beta_i(t) + \delta V_{\{i\}}(t+1) \geqslant V_{\{i\}}(t)$$

для всех $t \geqslant 1$, *где* $\beta(t) = (\beta_1(t), \beta_2(t), \beta_s(t))$ – *динамически устойчивая ПРД.*

Это условие в нашей модели принимает вид:

$$\xi_i(t) - \delta\xi_i(t+1) \geqslant V_{\{i\}}(t) - \delta V_{\{i\}}(t+1)\,.$$

Предложенное условие дает стимул игроку поддерживать кооперацию, поскольку на каждом шаге он получает больше выгоды от кооперации, чем от некооперативного поведения.

В нашей модели кооперативное регулирующее условие имеет вид:

$$\xi_i(t) - \delta\xi_i(t+1) \geqslant V_{\{i\}}(t) - \delta V_{\{i\}}(t+1)\,.$$

Заметим, что кооперативное регулирующее условие влечет условие Янга, поэтому докажем наше модифицированное условие.

Теорема 2. *Кооперативное регулирующее условие выполнено для всех игроков.*

Доказательство. Для случая $x_t = y_t$ регулирующее условие принимает вид:

Для первого игрока

$$-\frac{\mu_1}{2}\ln(x_t) + \frac{1}{6}\Big[\frac{3\mu_1\alpha\delta}{1-\alpha\delta}\ln(\frac{3\alpha\delta}{1+2\alpha\delta}) - 5C_1 + \\ +2C_{1,2,s} - 2C_{2,s} + C_{1,2} + C_{1,s} - C_s\Big] \geqslant 0\,.$$

Для второго игрока

$$\frac{\mu_1-1}{2}\ln(x_t) + \frac{1}{6}\Big[\frac{3(1-\mu_1)\alpha\delta}{1-\alpha\delta}\ln(\frac{3\alpha\delta}{1+2\alpha\delta}) - 5C_1 + \\ +2C_{1,2,s} + C_{2,s} + C_{1,2} - 2C_{1,s} - C_s\Big] \geqslant 0\,.$$

Для центра

$$-\frac{1}{2}\ln(x_t)+\frac{1}{6}\Big[\frac{3\alpha\delta}{1-\alpha\delta}\ln(\frac{3\alpha\delta}{1+2\alpha\delta})-2C_1+ \\ +2C_{1,2,s}+C_{2,s}-2C_{1,2}+C_{1,s}-4C_s\Big]\geqslant 0\,.$$

Рассмотрим первое условие и покажем, что выражение в квадратных скобках неотрицательно.

$$D=\frac{3\mu_1\alpha\delta}{1-\alpha\delta}\ln(\frac{3\alpha\delta}{1+2\alpha\delta})-5C_1+2C_{1,2,s}- \\ -2C_{2,s}+C_{1,2}+C_{1,s}-C_s= \\ =\frac{3\mu_1\alpha\delta}{1-\alpha\delta}\ln(\frac{3\alpha\delta}{1+2\alpha\delta})-5C_1+3C_{1,2,s}+(C_{1,s}-2C_{2,s})-C_s- \\ -\frac{3\alpha\delta}{1-\alpha\delta}\ln(3\alpha\delta)+\frac{1+2\alpha\delta}{1-\alpha\delta}\ln(1+2\alpha\delta)+\frac{\alpha\delta}{1-\alpha\delta}\ln(\alpha\delta)\,.$$

Заметим, что это убывающая по μ_1 функция, поэтому достаточно проверить, что $D\geqslant 0$ при $\mu_1=1$. Несложно заметить также, что $C_{1,s}-2C_{2,s}>0$. Тогда

$$\begin{aligned} D &> 3C_{1,2,s}-5C_1-C_s+\ln(1+2\alpha\delta)+\frac{\alpha\delta}{1-\alpha\delta}\ln(\alpha\delta)= \\ &= \Big(3C_{1,2,s}-5C_1-\frac{3\alpha\delta}{2(1-\alpha\delta)}\ln(1-\frac{\Delta}{1-\alpha\delta+(\beta\delta)/2})\Big)+ \\ &+ \Big(\ln(1+2\alpha\delta)+\frac{\alpha\delta}{1-\alpha\delta}\ln(\alpha\delta)- \\ &\quad -\frac{\alpha\delta}{2(1-\alpha\delta)}\ln(1-\frac{\Delta}{1-\alpha\delta+(\beta\delta)/2})\Big)\,, \end{aligned}$$

где $\Delta=(1-\alpha\delta)(1-\alpha\delta+\beta\delta)\,.$

Легко видеть, что выражения в скобках неотрицательны. Для завершения доказательства вспомним, что

$$\ln(x_t)<0\,.$$

Условия для второго игрока и центра проверяются аналогично.

3. Результаты численного моделирования

Моделирование было проведено для следующих параметров:

$$\begin{array}{lll} \alpha = 0{,}4\,, & \delta = 0{,}1\,, & s^d = 0{,}5 \\ \beta = 0{,}3\,, & \mu_1 = 0{,}55\,, & \mu_2 = 0{,}45\,. \end{array}$$

Начальный размер популяции $x = y = 0.5$. Число шагов 10.

На рис. 1-3 показана динамически устойчивая процедура распределения дележа ($\beta_i(t)$) для игрока i (темная линия), выигрыш игрока i в равновесии по Нэшу – $V_{\{i\}}$ (светлая линия) и его компонента дележа – $\xi_i(0)$ (пунктир).

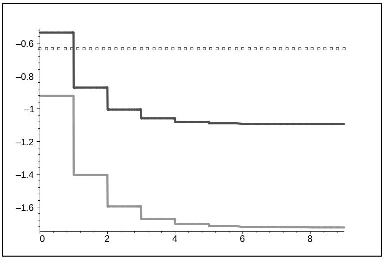


Рис. 1. Процедура распределения дележа для игрока 1

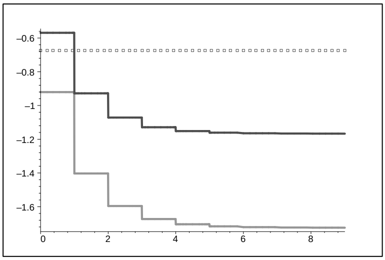


Рис. 2. Процедура распределения дележа для игрока 2

На рис. 4-6 представлено выполнение кооперативного регулирующего условия для всех игроков. На рисунках можно видеть $\xi_i(t) - \delta\xi_i(t+1)$ (темная линия) и $V_{\{i\}}(t) - \delta V_{\{i\}}(t+1)$ (светлая линия).

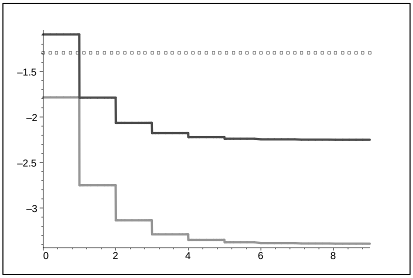


Рис. 3. Процедура распределения дележа для центра

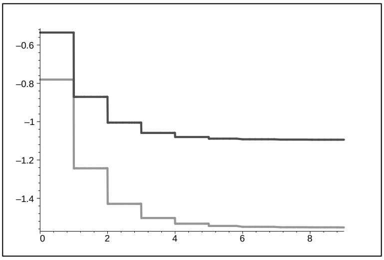


Рис. 4. Кооперативное регулирующее условие для игрока 1

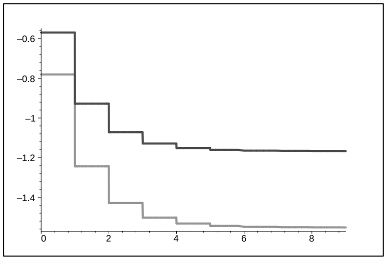


Рис. 5. Кооперативное регулирующее условие для игрока 2

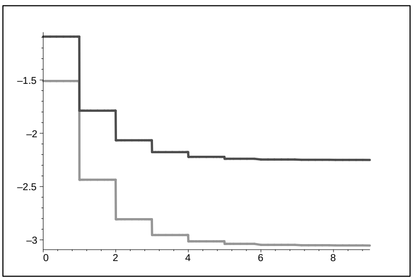


Рис. 6. Кооперативное регулирующее условие для центра

4. Заключение

В работе исследована теоретико-игровая модель эксплуатации ресурсов в дискретном времени. Для степенной функции развития популяции и логарифмических выигрышей игроков найдены равновесие по Нэшу и кооперативное равновесие. Получены в аналитическом виде вектор Шепли и динамически устойчивая процедура распределения дележа.

В данной работе особое внимание уделяется условиям, гарантирующим соблюдение кооперативного договора, достигнутого в начале периода планирования. Предлагается новое условие, которое побуждает игрока соблюдать кооперативное соглашение, называемое кооперативным регулирующим условием. Оказывается, что новое условие является сильнее и легче проверяемым, чем известное ранее условие Янга.

Литература

1. МАЗАЛОВ В.В., РЕТТИЕВА А.Н. *Равновесие по Нэшу в задачах охраны окружающей среды*// Мат. моделирование. – 2006. - Т. 18. – №. 5. – С. 73-90.
2. МАЗАЛОВ В.В., РЕТТИЕВА А.Н. *Регулируемое равновесие в дискретной задаче разделения биоресурсов*// Доклады Академии Наук. – 2008. – Т. 423. – №3. – С. 320-322.
3. ПЕТРОСЯН Л.А. *Устойчивые решения дифференциальных игр со многими участниками*// Вестник Ленинградского Университета. – 1977. – №19. – С. 46-52.
4. ПЕТРОСЯН Л.А., ДАНИЛОВ Н.Н. *Кооперативные дифференциальные игры и их приложения*. – Изд-во Томского Университета, Томск, 1982.
5. BASAR T., OLSDER G.J. *Dynamic noncooperative game theory*. – NY: Academic Press, 1982.
6. FISHER R.D., MIRMAN L.J. *The complete fish wars: biological and dynamic interactions* // J. of Environmental Economics and Management. – 1996. – V. 30. – P. 34-42.

7. LEVHARI D., MIRMAN L.J. *The great fish war: an example using a dynamic Cournot-Nash solution*// The Bell J. of Econom. – 1980. – V. 11. – №1. – P. 322-334.
8. MAZALOV V.V., RETTIEVA A.N. *Bioresource management problem with changing area for fishery* // Game Theory and Applications. – 2008. – V. 13. – P. 101-110.
9. MAZALOV V.V., RETTIEVA A.N. *Incentive equilibrium in bioresource management problem*// Evolutionary methods for design, optimization and control, CIMNE, Barcelona, Spain, 2008. – P. 301-312.
10. PETROSJAN L., ZACCOUR G. *Time-consistent Shapley value allocation of pollution cost reduction*// J. of Economic Dynamic and Control. – 2003. – V. 7. – P. 381-398.
11. YEUNG D.W.K. *An irrational-behavior-proof condition in cooperative differential games*//Game Theory Review. – 2006. – V. 8. – №4. – P. 739-744.

COOPERATIVE INCENTIVE CONDITION IN BIORESOURCE SHARING PROBLEM

Anna Rettieva, Institute of Applied Mathematical Research Karelian Research Center of RAS, Petrozavodsk, Cand.Sc. (annaret@krc.karelia.ru).

Abstract: The discrete-time game model for bio-resource management problem (fish catching) is considered. The center (referee) shares a reservoir between the competitors, and the players (countries) capture the fish. We assume that there is a migratory exchange between the regions of the reservoir. The Nash and cooperative equilibria are obtained for infinite planning horizon. Time-consistent imputation distribution procedure is considered as a method for cooperation maintenance. The new condition which offers an incentive to players to keep cooperation is introduced and called "incentive cooperative condition".

Keywords: dynamic games, bio-resource management problem, cooperative equilibrium, time-consistency, imputation distribution procedure.

УДК 517.977.8 + 517.977.5 + 519.857 + 519.87
ББК 22.18

УРАВНЕНИЕ ГАМИЛЬТОНА-ЯКОБИ-БЕЛЛМАНА В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ СО СЛУЧАЙНОЙ ПРОДОЛЖИТЕЛЬНОСТЬЮ [1]

Шевкопляс Е. В. [2]
(Факультет прикладной математики – процессов управления, Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург)

Рассматривается класс дифференциальных игр со случайной продолжительностью. Показывается, что задача со случайной продолжительностью может быть сведена к стандартной задаче с бесконечным временем. Для нахождения оптимальных решений в дифференциальных играх со случайной продолжительностью выводится уравнение типа Гамильтона-Якоби-Беллмана. Результаты демонстрируются на примере теоретико-игровой модели разработки невозобновляемых ресурсов. Задача решается при предположении о том, что случайная величина, соответствующая моменту окончания игры, распределена по закону Вейбулла.

Ключевые слова: дифференциальные игры, уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана, случайная продолжительность, разработка невозобновляемых ресурсов.

---

[1] *Текст приводится в соответствии с изданием «Математическая теория игр и ее приложения. – 2009. – Т. 1. №2».*

[2] *Екатерина Викторовна Шевкопляс, кандидат физико-математических наук (katya_shev@mail.ru).*

Введение

В настоящее время в теории игр, в том числе и в теории дифференциальных игр, достаточно ярко выражен интерес к более адекватному моделированию конфликтно-управляемых процессов, происходящих в реальности. При моделировании таких процессов необходимо учитывать стохастический характер окружающей нас действительности. В частности, очевидно, что любой реальный процесс, развивающийся во времени, также как и сама жизнь, имеет случайную продолжительность, поскольку заканчивается в некоторый случайный момент времени. В приложениях дифференциальных игр часто изучаются различные конфликтно-управляемые процессы в экономике, экологии, менеджменте и других сферах человеческой деятельности, которые развиваются во времени, а затем заканчиваются в фиксированный момент времени. Кроме того, в последнее время многие задачи, особенно в экономических приложениях, рассматриваются на бесконечном временном промежутке при условии дисконтирования мгновенных выигрышей во времени. На практике же такие процессы имеют случайный момент окончания, что связано со множеством причин неигрового характера. В том числе, недавно случившийся экономический кризис послужил основанием для досрочного прекращения многих товарно-денежных отношений. По этой причине рассмотрение игр со случайной продолжительностью представляется более реалистичным.

Впервые постановка задачи со случайной продолжительностью дифференциальной игры была сформулирована в работе Петросяна Л.А., Мурзова Н.В. в 1966 году [7]. В данной работе изучалась антагонистическая игра преследования двух лиц с терминальными выигрышами в последний момент времени, который являлся случайной величиной с известной функцией распределения. Для игры в такой постановке впервые было выведено уравнение типа Айзекса-Беллмана.

Затем общая постановка дифференциальной игры со случайной продолжительностью была представлена в работе Петросяна

Л.А., Шевкопляс Е.В. в 2000 году [8]. В данной работе изучались кооперативные дифференциальные игры со случайной продолжительностью, и акцент был сделан на проблеме динамической устойчивости принципов оптимальности в новой постановке игры. В то же время стоит отметить, что параллельно и независимо в теории оптимального управления рассматривались неигровые модели со случайной продолжительностью, начиная с работы M.E. Yaari [17] 1965 года, посвященной теории страхования жизни потребителя при неопределенном времени его смерти.

В данной работе рассматриваются дифференциальные игры со случайной продолжительностью. В разделе 1 приводится постановка задачи, причем интегральные выигрыши игроков при помощи перестановки интегралов приводятся к стандартному виду. В разделе 2 выводится уравнение типа Гамильтона-Якоби-Беллмана для задачи со случайной продолжительностью. Раздел 3 содержит некоторые сведения и понятия из математической теории надежности, которые возникают в дифференциальной игре при условии случайной продолжительности игры. Кроме того, будет выбрано распределение Вейбулла, как распределение, описывающее случайную величину, являющуюся моментом окончания игры. В разделе 4 рассматривается конкретный пример дифференциальной игры со случайной продолжительностью, а именно теоретико-игровая модель разработки невозобновляемых ресурсов.

1. Модель игры

В дифференциальных играх, как правило, используются два основных подхода к тому, на каком промежутке времени рассматривается игра. Согласно первому подходу, игра развивается во времени на фиксированном временном промежутке $[t_0, T]$: момент окончания игры T известен заранее и игра имеет так называемую предписанную продолжительность [6].

Существуют также подход, имеющий большое число экономических приложений и широко применяющийся на практике, согласно которому игра развивается на бесконечном временном промежутке [12]. При таком подходе подынтегральная функция полезности игрока (или функция мгновенного выигрыша), как правило, дисконтируется при помощи экспоненциальной функции, однако фактически такая игра не имеет окончания. В данной работе используется другая постановка дифференциальной игры, а именно дифференциальные игры со случайной продолжительностью.

Итак, рассмотрим дифференциальную игру n лиц $\Gamma(x_0)$ со случайной продолжительностью $T - t_0$ [8-10] и начальным состоянием x_0. Динамика игры задается системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{gathered}\dot{x} = g(x, u_1, \ldots, u_n), \quad x \in R^n,\, u_i \in U \subseteq \operatorname{comp} R^l, \\ x(t_0) = x_0.\end{gathered} \tag{1}$$

Игра начинается в момент t_0 из состояния x_0, однако, момент ее окончания не фиксирован заранее, а является реализацией некоторой случайной величины T. Будем полагать, что для случайной величины T задана функция распределения $F(t)$, которая определена при $t \in [t_0, \infty)$ и удовлетворяет условию нормировки:

$$\int\limits_{t_0}^{\infty} dF(t) = 1.$$

Функцию «мгновенного» выигрыша игрока i в момент времени τ, $\tau \in [t_0, \infty)$ обозначим как $h_i(x(\tau)) \geqslant 0$. Предполагается, что $h_i(\cdot)$ являются непрерывными функциями на R^m. Тогда ожидаемый интегральный выигрыш игрока i имеет вид:

$$K_i(x_0, t_0, u_1, \ldots, u_n) = \int_{t_0}^{\infty} \int_{t_0}^{t} h_i(x(\tau)) d\tau dF(t),\ i = 1, \ldots, n. \tag{2}$$

Пусть игра развивается во времени, тогда в некоторый промежуточный момент времени ϑ, $\vartheta \in (t_0; \infty)$ игроки попадают в подыгру $\Gamma(x(\vartheta))$ с начальным состоянием $x(\vartheta) = x$. Очевидно, что игра может и закончиться до момента ϑ с вероятностью $F(\vartheta)$, а вероятность продолжить игру после момента ϑ равна $(1 - F(\vartheta))$.

Тогда ожидаемый интегральный выигрыш игрока i вычисляется по формуле

$$K_i(x, \vartheta, u_1, \dots, u_n) = \int_{\vartheta}^{\infty} \int_{\vartheta}^{t} h_i(x(\tau)) d\tau \, dF_{\vartheta}(t), \tag{3}$$

где $F_{\vartheta}(t),\ t \geqslant \vartheta$ – это функция распределения момента окончания игры в подыгре $\Gamma(x(\vartheta))$. Не трудно заметить, что $F_{\vartheta}(t)$ является условной функцией распределения, а именно функцией распределения момента окончания игры при условии, что игра не закончилась до момента ϑ, $\vartheta \in (t_0; \infty)$. Кроме того, необходимо, чтобы $F_{\vartheta}(t)$ удовлетворяла стандартному условию нормировки при $\vartheta \in (t_0; \infty)$. В данной работе мы рассматриваем только стационарные процессы. Тогда условная функция распределения $F_{\vartheta}(t)$ вычисляется по следующей формуле:

$$F_{\vartheta}(t) = \frac{F(t) - F(\vartheta)}{1 - F(\vartheta)}, \quad t \in [\vartheta, \infty). \tag{4}$$

Далее мы будем предполагать существование плотности распределения момента окончания игры $f(t) = F'(t)$. Очевидно, что в подыгре $\Gamma(x(\vartheta))$ условная плотность распределения $f_{\vartheta}(t)$ определяется следующим образом:

$$f_{\vartheta}(t) = \frac{f(t)}{1 - F(\vartheta)},\ t \in [\vartheta, \infty). \tag{5}$$

Таким образом, при предположении о существовании плотности $f(t) = F'(t)$ и учитывая равенства (3) и (5), получаем интегральный выигрыш игрока $i, i = 1, \dots, n$, в подыгре $\Gamma(x(\vartheta))$:

$$K_i(x, \vartheta, u_1, \dots, u_n) = \frac{1}{1 - F(\vartheta)} \int_{\vartheta}^{\infty} \int_{\vartheta}^{t} h_i(x(\tau)) d\tau \, f(t) dt. \tag{6}$$

1.1. ПЕРЕСТАНОВКА ИНТЕГРАЛОВ В ИНТЕГРАЛЬНОМ ФУНКЦИОНАЛЕ

Рассмотрим интегральный выигрыш игрока i, который имеет вид (6). Не умаляя общности, в этом разделе положим $t_0 = 0$. Кроме того, введем более компактное обозначение $h_i(\tau) = h_i(x(\tau))$. Итак, рассмотрим интегральный функционал

$$\int_0^\infty \int_0^t h_i(\tau)\, d\tau\, f(t) dt.$$

Введем кусочную функцию $a(t, \tau)$ следующим образом:

$$a(t,\tau) = f(t)h_i(\tau) \cdot \chi_{\{\tau \leqslant t\}} = \begin{cases} f(t)h_i(\tau), & \tau \leqslant t; \\ 0, & \tau > t. \end{cases}$$

Если функция $a(t, \tau) \geqslant 0$ неотрицательно определена, то можно использовать теорему Тонелли [2,3] о перестановке интегралов в повторном интеграле. Тогда справедливо следующее равенство:

$$\int_0^{+\infty} dt \int_0^t f(t)h_i(\tau)d\tau = \int_0^{+\infty} dt \int_0^{+\infty} a(t,\tau)d\tau =$$

$$\iint\limits_{[0,+\infty)\times[0,+\infty)} a(t,\tau)dtd\tau = \int_0^{+\infty} d\tau \int_0^{+\infty} a(t,\tau)dt =$$

$$\int_0^{+\infty} d\tau \int_\tau^{+\infty} f(t)h_i(\tau)dt = \int_0^{+\infty} (1 - F(\tau))h_i(\tau)d\tau.$$

Если же нельзя гарантировать $a(t, \tau) \geqslant 0$ (а, фактически, неотрицательность функции мгновенного выигрыша $h_i(\tau)$), но при этом выполнено условие абсолютной сходимости кратного интеграла

$$\iint_{[0,+\infty)\times[0,+\infty)} |a(t,\tau)|dt d\tau < +\infty,$$

то можно использовать теорему Фубини [2,3] и также изменить порядок интегрирования.

Следовательно, при некоторых стандартных ограничениях на функцию $h_i(\cdot)$ мгновенного выигрыша игрока i, интегральный функционал, соответствующий ожидаемому интегральному выигрышу игрока i в игре $\Gamma(x_0)$ может быть приведен к стандартному виду для динамического программирования:

$$K_i(x_0, t_0, u_1, \ldots, u_n) = \int_{t_0}^{\infty} \int_{t_0}^{t} h_i(x(\tau))d\tau \, dF(t) =$$

$$= \int_{t_0}^{\infty} (1 - F(\tau))h_i(x(\tau))d\tau.$$

Аналогично, для выигрыша игрока i в подыгре $\Gamma(x(\vartheta))$ справедливо следующее представление:

$$\begin{aligned} K_i(x, \vartheta, u_1, \ldots, u_n) &= \int_{\vartheta}^{\infty} \int_{\vartheta}^{t} h_i(x(\tau))d\tau \, dF_{\vartheta}(t) = \\ &= \frac{1}{1 - F(\vartheta)} \int_{\vartheta}^{\infty} (1 - F(\tau))h_i(x(\tau))d\tau. \end{aligned} \qquad (7)$$

Таким образом, нестандартный для динамического программирования функционал, а именно функционал с повторным интегрированием (6), был приведен к стандартному виду (7) при помощи замены порядка интегрирования.

2. Уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана

Рассмотрим кооперативную форму игры $\Gamma(x_0)$. Перед началом игры игроки договариваются об использовании ими таких допустимых программных управлений, которые будут максимизировать совокупный ожидаемый выигрыш игроков:

$$\sum_{i=1}^{n} K_i(x_0, t_0, u_1, \ldots, u_n) = \sum_{i=1}^{n} \int_{t_0}^{\infty} (1 - F(\tau)) h_i(x(\tau)) d\tau. \tag{8}$$

Управления $\{u_1^*(t), \ldots, u_n^*(t)\}$, доставляющие максимум (8), будем называть оптимальными, а траекторию $x^*(t)$, соответствующую оптимальным управлениям, – условно-оптимальной. Очевидно, что при непрерывности функций h_i в (8) знак суммирования можно перенести в подынтегральную функцию:

$$\sum_{i=1}^{n} K_i(x_0, t_0, u_1, \ldots, u_n) = \int_{t_0}^{\infty} (1 - F(\tau)) \sum_{i=1}^{n} h_i(x(\tau)) d\tau.$$

Обозначим $\sum\limits_{i=1}^{n} h_i(x(\tau))$ как $L(x, \tau)$. В общем случае будем рассматривать $L(x, u, \tau)$.

Для нахождения оптимальных управлений можно использовать и принцип максимума Понтрягина, и уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана. В данной работе используется второй подход, поскольку новое уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана можно будет использовать не только для нахождения оптимальных управлений, но и для нахождения других решений в управлениях с обратной связью для кооперативного и некооперативного вариантов игры.

Итак, рассмотрим следующую задачу максимизации:

$$\frac{1}{1-F(t)}\int_t^{\infty} L(x,u,s)(1-F(s))ds,$$

(9)

$$\dot{x} = g(x,u)$$
$$x(t) = x.$$

Пусть $W(x,t)$ – это функция Беллмана для данной оптимизационной задачи.

Кроме того, рассмотрим другую задачу максимизации, которая отличается от сформулированной выше только отсутствием множителя $\frac{1}{1-F(t)}$ перед интегральным функционалом:

$$\int_t^{\infty} L(x,u,s)(1-F(s))ds,$$

(10)

$$\dot{x} = g(x,u)$$
$$x(t) = x.$$

Обозначим как $\bar{W}(x,t)$ функцию Беллмана для этой задачи.

Очевидно, что справедливо следующее равенство:

(11) $$\bar{W}(x,t) = W(x,t)\cdot(1-F(t)).$$

Тогда частные производные от функции $\bar{W}$ по ее аргументам вычисляются по следующим формулам:

(12) $$\frac{\partial \bar{W}}{\partial t} = -f(t)W + (1-F(t))\frac{\partial W}{\partial t};$$

(13) $$\frac{\partial \bar{W}}{\partial x} = (1-F(t))\frac{\partial W}{\partial x}.$$

Для задачи динамического программирования (10) для функции Беллмана $\bar{W}$ мы имеем стандартное уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана [12]:

(14) $$\frac{\partial \bar{W}}{\partial t} + \max_u \left(L(x,u,t)(1-F(t)) + \frac{\partial \bar{W}}{\partial x} g(x,u) \right) = 0.$$

Используя (11), (12), (13), из уравнения (14) получаем уравнение Гамильтона - Якоби - Беллмана для задачи (9) со случайным моментом окончания игры:

$$\frac{f(t)}{1-F(t)}W = \frac{\partial W}{\partial t} + \max_u \left(L(x,u,t) + \frac{\partial W}{\partial x} g(x,u) \right). \tag{15}$$

Уравнение типа Гамильтона-Якоби-Беллмана для дифференциальной игры со случайной продолжительностью впервые было выведено в работе Л.А. Петросяна, Н.В. Мурзова [7] в 1966 году для частного случая дифференциальной игры преследования с терминальными выигрышами. Позднее в диссертационной работе Е.В. Шевкопляс [9,10] в 2004 году было напрямую получено уравнение (15) в общей постановке дифференциальной игры со случайной продолжительностью и интегральными выигрышами без предварительного приведения интегрального функционала к стандартному виду.

Кроме того, независимо уравнение (15) было получено и другими авторами различными способами. Как будет показано ниже в разделе 4.3, интегральный функционал, соответствующий выигрышу игрока для случая игры со случайной продолжительностью, приведенный к стандартному виду, эквивалентен функционалу, соответствующему выигрышу игрока в задаче с непостоянным дисконтированием мгновенного выигрыша на бесконечном временном промежутке [11,15,16]. В неигровой постановке задачи страхования жизни с рекурсивным дисконтированием функции полезности Ф.Р. Чангом в 2004 году [11] также было выведено уравнение (15) в форме (19) . Независимо от работ Чанга, уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана (15) в форме (19) для теоретико-игровых моделей, в которых функции полезности игроков дисконтируются при помощи функции $e^{-\int_{t_o}^{t} \lambda(\tau)d\tau}$, было получено в работах [15,16] в 2007-2009 годах для нахождения так называемых предварительных соглашений для агентов.

Заметим, что если случайная величина T распределена по экспоненциальному закону, а именно

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda(t-t_0)}; \quad F(t) = 1 - e^{-\lambda(t-t_0)}; \quad \frac{f(t)}{1-F(t)} = \lambda,$$

то интегральный выигрыш $K_i(\cdot)$ игрока i эквивалентен интегральному выигрышу игрока i в игре, рассматриваемой на бесконечном временном промежутке и дисконтированием со ставкой λ мгновенных выигрышей игроков:

$$K_i(x_0, t_0, u_1, \ldots, u_n) = \int_{t_0}^{\infty} h_i(x(\tau))(1 - F(\tau))d\tau =$$

$$= \int_{t_0}^{\infty} h_i(x(\tau))e^{-\lambda(\tau-t_0)}d\tau.$$

Полученное уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана, таким образом, для случая с экспоненциальным распределением момента окончания игры, должно сводиться к известному уравнению для игры с дисконтированными мгновенными выигрышами (или функциями полезности в терминологии зарубежной литературы по теории игр) [12]. Легко проверить, что при $\frac{f(t)}{1-F(t)} = \lambda$ новое уравнение типа Гамильтона-Якоби-Беллмана (15) принимает вид уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана (16) для игры с дисконтированными мгновенными выигрышами, опубликованного в работе [12] в 2000 году:

$$(16)\quad \lambda W(x,t) = \frac{\partial W(x,t)}{\partial t} + \max_u \left(L(x,u,t) + \frac{\partial W(x,t)}{\partial x} g(x,u) \right).$$

Таким образом, задача со случайной продолжительностью с экспоненциальным законом распределения T и стандартная задача с дисконтированными мгновенными выигрышами являются эквивалентными. Этот факт ранее был отмечен в работе A. Haurie [13] для другой постановки задачи со случайной продолжительностью игры, а именно игры конфликта поколений, имеющих случайную продолжительность существования.

3. Вероятностные распределения для момента окончания игры

Заметим, что множитель $\frac{f(\vartheta)}{1-F(\vartheta)}$, появившийся в левой части уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана (15), является стандартной для теории надежности функцией интенсивности отказов $\lambda(t)$ [1, 4, 14]. В математической теории надежности одной из важнейших изучаемых случайных величин является время T отказа системы элементов, а функция интенсивности отказов $\lambda(t)$ (или функция угрозы) – одна из основных ее характеристик. Таким образом, можно провести аналогию между теорией игр, в которой игроки, как элементы системы, взаимодействуют между собой в некотором процессе, разворачивающимся во времени, и математической теорией надежности. Мы рассматриваем игры со случайным моментом окончания T, к которым можно непосредственно применить основную терминологию из математической теории надежности.

3.1. ФУНКЦИЯ ИНТЕНСИВНОСТИ ОТКАЗОВ

Итак, функция интенсивности отказов или функция угрозы, определяется следующим образом:

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)}. \tag{17}$$

Фактически, функция интенсивности отказов является условной плотность распределения, т. е. плотностью распределения при условии, что система не отказала до момента t, в нашей же терминологии – плотностью распределения момента окончания игры при условии, что игра не закончилась до момента t. Стандартными обозначениями являются $\lambda(t)$ или $h(t)$, далее будем использовать обозначение $\lambda(t)$. Функция интенсивности отказов $\lambda(t)$, описывающая жизненный цикл системы, имеет следующий вид: Первая фаза называется фазой приработки и отказы в ней,

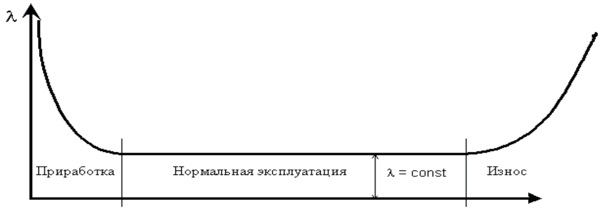


Рис. 1. Функция интенсивности отказов $\lambda(t)$

согласно теории надежности, возникают за счет невыявленных перед началом эксплуатации скрытых дефектов [4]. Специфика этой проблемы понятна и не только с точки зрения приложения к техническим системам элементов, не зря в теории надежности в англоязычной литературе для данного периода используется такая терминология как «новорожденный период», «детская смертность» и «ранние отказы». С точки зрения теории игр, ранние отказы могут быть вызваны неопытностью, несогласованностью и не налаженной деятельностью игроков, только что вступивших в игру. Функция интенсивности отказов $\lambda(t)$ в данной фазе является убывающей функцией времени.

Следующим периодом жизненного цикла системы является так называемый период нормальной эксплуатации системы. Функция интенсивности отказов $\lambda(t)$ в этом периоде постоянна (либо постоянна в приближении), а сами внезапные отказы вызваны несовершенством самой системы и обусловлены, как правило, внешними причинами. В англоязычной терминологии этот период называется «взрослым» периодом [14]. Игра в рассматриваемом периоде может прекратиться под воздействием каких-то непредусмотренных обстоятельств внешнего мира, в частности, в экономических приложениях – под воздействием дефолта, кризиса или других серьезных причин.

После периода нормальной эксплуатации, система переходит в фазу старения. Отказы системы в этом периоде связаны с износом и старением элементов системы, а функция интенсивности отказов $\lambda(t)$ является возрастающей функцией. Очевидно, что этому факту нетрудно дать интерпретацию в игре – наступает износ технической и инструментальной базы игроков (например, в игре разработки природных ресурсов оборудование подвергается износу). Кроме того, сами соглашения, заключенные перед началом игры, в общем случае не являются реализуемыми в долгосрочных проектах. Этот факт, впервые отмеченный в работе Л.А. Петросяна в 1977 году [5,6] и названный динамической неустойчивостью решений, в англоязычной литературе получил название несостоятельности во времени. Таким образом, можно заключить, что сами соглашения игроков, заключенные перед началом игры, тоже в некотором смысле подвергаются старению и износу.

Отметим, что функция интенсивности отказов является константой тогда и только тогда, когда случайное время отказа системы T подчинено экспоненциальному закону распределения, т. е.

$$\frac{f(t)}{1 - F(t)} = \lambda(t) = \lambda = const$$

только при

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda(t-t_0)}, \qquad t > t_0.$$

Таким образом, только при экспоненциальном распределении случайной величины T выведенное уравнение Гамильтона-Якоби- Беллмана (15) сводится к более простому уравнению (16).

3.2. ВЫБОР РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДЛЯ МОМЕНТА ОКОНЧАНИЯ ИГРЫ

В математической теории надежности для случайной величины T (момента отказа системы технических элементов) используются различные вероятностные распределения, а именно экспоненциальное, Вейбулла, нормальное, логарифмически нормальное, Гамма-распределение и другие [4, 14].

В актуарной математике, а также в геронтологии (науке о продолжительности жизни), для времени существования биологических систем также замечены некоторые закономерности, при этом основными законами являются закон Гомперца-Мейкема и закон Вейбулла [1].

Поскольку в данной статье игра может быть интерпретирована как сочетание различных взаимодействий (как на биологическом, так и техническом уровне), то распределение Вейбулла, используемое для описания продолжительности существования как технических, так и биологических систем, представляется наиболее адекватным распределением для случайного момента окончания игры.

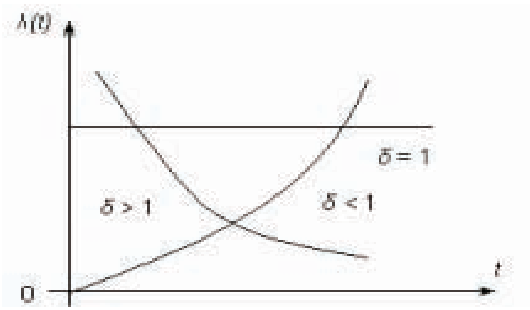


Рис. 2. Функция интенсивности отказов $\lambda(t)$ для распределения Вейбулла

Распределение Вейбулла имеет функцию интенсивности отказов следующего вида [4]:

$$\lambda(t) = \lambda\delta t^{\delta-1}; \quad t \geqslant 0;\ \lambda > 0;\ \delta > 0. \tag{18}$$

Здесь λ и δ – параметры, определяющие данное распределение. λ – это параметр масштаба , а параметр формы δ соответствует одной из трех фаз, в которой может находиться система (в данном контексте игра). Значение $\delta < 1$ соответствует «новорожденному» периоду, здесь функция интенсивности отказов $\lambda(t)$ является убывающей функцией. При $\delta = 1$ система находится в режиме нормальной эксплуатации, $\lambda(t)$ равна константе λ. Отметим, что при $\delta = 1$ распределение Вейбулла соответствует экспоненциальному распределению. При $\delta > 1$ система находится в состоянии износа, $\lambda(t)$ является возрастающей функцией. Частным случаем распределения Вейбулла для «стареющей» системы является распределение Рэлея, которому соответствует $\delta = 2$.

3.3. УРАВНЕНИЕ ГАМИЛЬТОНА-ЯКОБИ-БЕЛЛМАНА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЫ СО СЛУЧАЙНЫМ МОМЕНТОМ ОКОНЧАНИЯ, РАСПРЕДЕЛЕННЫМ ПО ЗАКОНУ ВЕЙБУЛЛА

Согласно определению функции интенсивности отказов $\lambda(t)$ (), выведенное в разделе 3 уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана (15) может быть переписано в следующем виде:

$$(19)\quad \lambda(t)W(x,t) = \frac{\partial W(x,t)}{\partial t} + \max_u \left(L(x,u,t) + \frac{\partial W(x,t)}{\partial x} g(x,u) \right).$$

Как было сказано выше в разделе 4.1 функция $\lambda(t)$ для экспоненциального распределения является константой, а именно $\lambda(t) = \lambda$. Следовательно, для экспоненциального распределения момента окончания игры из уравнения (19) непосредственно следует стандартное уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана [12] для игр с дисконтированными мгновеннными выигрышами (16).

Кроме того, отметим, что уравнение (19) имеет тот же вид, что и уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана для игр с непостоянными дисконтированными мгновенными выигрышами, а именно, когда дисконтирование выигрыша h_i производится при помощи умножения его на $e^{-\int_{t_0}^{\tau} \lambda(t)dt}$ [15,16]. Это непосредственно следует из того, что в приведенном к стандартному виду функционале (6) при помощи функции интенсивности отказов $\lambda(t)$ (17), выражение $(1 - F(\tau))$ путем несложных преобразований можно записать как $(1 - F(\tau)) = e^{-\int_{t_0}^{\tau} \lambda(t)dt}$.

Пусть момент окончания игры T распределен по закону Вейбулла. Тогда функция интенсивности отказов $\lambda(t)$ вычисляется по формуле (18). Следовательно, уравнение (19) Гамильтона-Якоби-Беллмана принимает следующий вид:

$$\lambda\delta t^{\delta-1} W(x,t) = \\ = \frac{\partial W(x,t)}{\partial t} + \max_u \left(L(x,u,t) + \frac{\partial W(x,t)}{\partial x} g(x,u) \right). \tag{20}$$

Очевидно, что при значении $\delta = 1$, которое соответствует экспоненциальному распределению, уравнение (20) принимает стандартный вид (16).

4. Пример

В качестве примера рассмотрим теоретико-игровую модель разработки невозобновляемых ресурсов симметричными игроками, опубликованную в работе [12]. Однако в данной работе будем предполагать, что мгновенные выигрыши игроков не дисконтируются и, кроме того, игра заканчивается в случайный момент времени T, распределенный по закону Вейбулла. Итак, согласно модели [12], в игре участвуют n игроков – фирмы или страны, которые разрабатывают некоторый невозобновляемый природный ресурс, например, нефть. Множество всех игроков обозначим как $I = \{1, 2, ..., n\}$. Пусть $x(t)$ – это поток невозобновляемого ресурса. Управлениями игроков являются темпы разработки ресурса, которые обозначим как $\{c_i(t)\}$. Динамика изменений потока ресурса $x(t)$ описывается следующим дифференциальным уравнением:

$$\dot{x}(t) = -\sum_{i=1}^{n} c_i(t);$$

$$\lim_{t->\infty} x(t) \geqslant 0;$$

$$x(t_0) = x_0.$$

Каждый игрок i имеет функцию полезности (функцию мгновенного выигрыша) $h(c_i)$, определенную для всех $c_i > 0$. Рассмотрим только логарифмический вид функции полезности игрока:

(21) $$h(c_i) = ln(c_i).$$

Пусть игра начинается в момент времени $t_0 = 0$, заканчивается в момент времени T, который является случайной величиной, распределенной по закону Вейбулла. Тогда ожидаемый выигрыш игрока i имеет следующий вид:

(22) $$K_i(x_0, u_1, \ldots, u_n) = \int_0^{\infty} \int_0^{t} h_i(\cdot) d\tau f(t) dt,$$

$$f(t) = \lambda\delta t^{\delta-1} e^{-\lambda t^{\delta}}.$$

Согласно разделу 2.1, интегральный выигрыш (22) можно представить в виде (7). Для распределения Вейбулла $(1 - F(t)) = e^{-\lambda t^{\delta}}$ [4], следовательно, интегральный выигрыш игрока i вычисляется по следующей формуле:

(23) $$K_i(x_0, u_1, \ldots, u_n) = \int_0^{\infty} h_i(\cdot) e^{-\lambda t^{\delta}} dt.$$

Тогда общий ожидаемый выигрыш игроков вычисляется по формуле

$$\sum_{i=1}^{n} K_i(x_0, u_1, \ldots, u_n) = \int_0^{\infty} \sum_{i=1}^{n} h_i(\cdot) e^{-\lambda t^{\delta}} dt.$$

Пусть $V(N, x_0)$ – максимальное значение общего ожидаемого выигрыша в игре $\Gamma(x_0)$.

Очевидно, что в данной модели рассматриваются только симметричные игроки, поэтому положим $c_i = c_j = c$. Кроме того, на данном этапе представляется возможным найти решение для произвольного распределения с функцией интенсивности отказов $\lambda(t)$. Итак, согласно (19) имеем уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана следующего вида:

$$\lambda(t)W(x,\vartheta) = \frac{\partial W(x,\vartheta)}{\partial \vartheta} + \tag{24}$$

$$+\max_c\left[nln(c(\vartheta)) + \frac{\partial W(x,\vartheta)}{\partial x}(-nc(\vartheta)\right].$$

Будем искать решение уравнения (24) в виде $W(x,t) = A(t)lnx + B(t)$. Тогда частные производные $W(x,t)$ вычисляются по формуле

$$\frac{\partial W(x,t)}{\partial x} = \frac{A(t)}{x}; \qquad \frac{\partial W(x,t)}{\partial t} = \dot{A}(t)ln(x) + \dot{B}(t). \tag{25}$$

Учитывая (25), из условия максимизации правой части уравнения (24) следует, что оптимальные управления имеют вид $c = \frac{x}{A}$. Применяя метод неопределенных коэффициентов в уравнении (24), получаем следующую систему уравнений для коэффициентов $A(t), B(t)$:

$$\dot{A}(t) - \lambda(t)A(t) + n = 0;$$

$$\dot{B}(t) - \lambda(t)B(t) - nln(A(t)) - n = 0.$$

Окончательно имеем следующие оптимальные управления для задачи разработки невозобновляемых ресурсов со случайной продолжительностью:

$$c_i^* = c^* = \frac{x \cdot e^{-\lambda(t)t}}{n\int_t^\infty e^{-\lambda(s)s}ds}. \tag{26}$$

Предположим, что случайный момент окончания разработки ресурсов подчинен закону Вейбулла. Тогда функция $\lambda(t)$ имеет вид (18). Тогда при $\delta = 1$, соответствующем экспоненциальному распределению момента окончания игры, фактически рассматривается уже изученная модель с дисконтированными выигрышами на бесконечном временном промежутке. Непосредственно из (26) следует, что при $\delta = 1$ оптимальными стратегиями игроков являются

$$c_i^* = c^* = \frac{\lambda}{n}x, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Тогда оптимальные управления и траектория вычисляются по формуле

$$x^*(t) = x_0 \cdot e^{-\lambda t};$$

$$c_i^*(t) = \frac{\lambda}{n}x_0 \cdot e^{-\lambda t}.$$

Этот результат совпадает с результатом, полученным в работе Докнера и др. [12] для случая дисконтированных выигрышей на бесконечном временном промежутке для единичной эластичности маргинальной полезности игроков. Отметим, что траектория $x^*(t)$ удовлетворяет условию устойчивости по Ляпунову. Получаем следующее значение общего ожидаемого выигрыша:

$$W(x(\vartheta), \vartheta) = \frac{ln(x(\vartheta))}{\lambda} + \frac{(-lnA - n)}{\lambda}.$$

Далее, для $\delta = 2$, соответствующем распределению Рэлея для стареющей системы, из (26) получаем

$$c_i^* = \frac{x \cdot e^{-2\lambda t^2}}{n \int_t^{\infty} e^{-2\lambda s^2} ds}.$$

Тогда оптимальный способ поведения при разработки ресурса должен определяться согласно следующей формуле

$$c_i^* = \frac{2\sqrt{2}\sqrt{\lambda} \cdot e^{-2\lambda t^2}}{n(1 - erf(\sqrt{2\lambda} t))} x =$$

$$= \frac{2\sqrt{2}\sqrt{\lambda} \cdot e^{-2\lambda t^2}}{n(1 - 2\Phi_0(2\sqrt{\lambda} t))} x, \quad \text{где}$$

$$erf(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-s^2} ds,$$

$\Phi_0(t)$ – интегральная функция Лапласа.

Для периода приработки (раннего периода) возьмем $\delta = \frac{1}{2}$. Тогда из уравнения (26) получаем

$$c_i^* = \frac{x \cdot e^{-\frac{\lambda}{2} t^{1/2}}}{n \int_t^\infty e^{-\frac{\lambda}{2} s^{1/2}} ds}.$$

Следовательно, получаем оптимальные стратегии в управлениях с обратной связью:

$$c_i^* = \frac{\lambda^2}{4n(\lambda\sqrt{t} + 2)} x.$$

Таким образом, для модели разработки невозобновляемых ресурсов удалось получить оптимальные решения для всех трех фаз игры. Анализ полученных решений может являться предметом дальнейшего изучения.

5. Благодарности

Данное исследование было инициировано профессором Л.А. Петросяном в 1998 году. Кроме того, автор выражает благодарность профессору Дж. Заккуру и господину Д. Громову за информационную помощь во время ознакомления с проблематикой задачи. Ценные замечания и комментарии из области математического анализа и теории оптимального управления во время подготовки статьи были высказаны доцентом Д.С. Челкаком и профессором Дж. Марин-Солано.

Литература

1. ГАВРИЛОВ Л.А., ГАВРИЛОВА Н.С. *Биология продолжительности жизни*. – М.: Наука, 1991.
2. ДАНФОРД Н., ШВАРЦ ДЖ. Т. *Линейные операторы. Общая теория*. – М: Изд-во иностранной литературы, 1962.
3. КОЛМОГОРОВ А.Н., ФОМИН С.В. *Элементы теории функций и функционального анализа*. – М: Наука, 1976.
4. МАТВЕЕВСКИЙ В.Р. *Надежность технических систем*. – Учебное пособие. МГУ электроники и математики. Москва, 2002.
5. ПЕТРОСЯН Л.А. *Дифференциальные игры преследования*. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1977.
6. ПЕТРОСЯН Л.А., ДАНИЛОВ Н.В. *Кооперативные дифференциальные игры и приложения*. – Томск: Изд-во Томского университета, 1985.
7. ПЕТРОСЯН Л.А., МУРЗОВ Н.В. *Теоретико-игровые проблемы в механике*// Литовский математический сборник. – 1966. – №VI-3. – С. 423-433.
8. ПЕТРОСЯН Л.А., ШЕВКОПЛЯС Е.В. *Кооперативные дифференциальные игры со случайной продолжительностью*// Вестник СПбГУ. – 2000. – Сер. 1. – Вып. 4. – С. 18-23.

9. ШЕВКОПЛЯС Е.В. *Кооперативные дифференциальные игры со случайной продолжительностью*. – Автореф. дис. канд. физ.-мат. наук. СПб.: ООП НИИХ СПбГУ, 2004.
10. ШЕВКОПЛЯС Е.В. *О построении характеристической функции в кооперативных дифференциальных играх со случайной продолжительностью*// Труды Межд. семинара "Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона-Якоби", посвященного 60-летию академика А.И.Субботина. изд-во Уральского ун-та. Екатеринбург. – 2006. – №1. – С. 285-293.
11. CHANG F.R. *Stochastic Optimization in Continuous Time*. – Cambridge Univ. Press, 2004.
12. DOCKNER E.J., JORGENSEN S., VAN LONG N., SORGER G. *Differential Games in Economics and Management Science*. – Cambridge Univ. Press, 2000.
13. HAURIE A. *A Multigenerational Game Model to Analyze Sustainable Development*// Annals of Operations Research. – 2005. – V. 137. – №1. – P. 369-386.
14. HENLEY E.J., KUMAMOTO H. *Reliability engineering and risk assessment*. – Prentice-Hall, Inc., 1981.
15. KARP L. *Non-constant discounting in continuous time*// Journal of Economic Theory. – 2007. – V. 132. – P. 557–568.
16. MARÍN-SOLANO J., NAVAS J. *Non-constant discounting in finite horizon: the free terminal time case*// Journal of Economic Dynamics and Control. – 2009. – V. 33. – P. 666-675.
17. YAARI M.E. *Uncertain Lifetime, Life Insurance, and the Theory of the Consumer*// The Review of Econimic Studies. – 1965. – V. 32. – №2. – P. 137-150.

THE HAMILTON-JACOBI-BELLMAN EQUATION FOR A CLASS OF DIFFERENTIAL GAMES WITH RANDOM DURATION

Ekaterina Shevkoplyas, Faculty of Applied Mathematics and Control Processes, Saint-Peterburg State University, Cand. Sc. (katya_shev@mail.ru).

Abstract: The class of differential games with random duration is studied. It turns out that the problem with random duration of the game can be simplified to the standard problem with infinite time horizon. The Hamilton-Jacobi-Bellman equation which help us to find the optimal solution under condition of random duration of the processes is derived. The results are illustrated with a game-theoretical model of non-renewable resource extraction. The problem is analyzed under condition of Weibull distribution for the random terminal time of the game.

Keywords: differential games, Hamilton-Jacobi-Bellman equation, random duration, non-renewable resource extraction.