УДК 519.876.2
ББК 2.22.171

СТОХАСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ СОЦИАЛЬНЫХ СЕТЕЙ

Бреер В. В.[1]
(*Учреждение Российской академии наук
Институт проблем управления РАН, Москва*)

Рассматриваются стохастические модели поведения агентов в социальной сети, на основании которых определяется ценность этой сети с точки зрения агентов и управляющего органа – центра. Социальные сети классифицируются исходя из факторов влияния на поведение агентов. Описываются равновесные состояния социальной сети и их флуктуации. Рассматриваются различные содержательные интерпретации при предельных переходах количества агентов и других характеристик социальной сети.

Ключевые слова: социальные сети, энтропия, информация, флуктуации, статистическая физика, мера Гиббса, управление, фазовый переход.

1. Введение

Социальные сети вызывают интерес у исследователей, в частности (см. обзор [4]) в связи с тем, что в них возникают качественно новые (по сравнению с набором невзаимодействующих агентов) свойства поведения агентов. Например, в настоящее время идет активная дискуссия вокруг такого понятия, как ценность (*Value*, *Utility*) социальной сети. Это понятие можно перевести, кроме того, как важность, полезность, выгодность, но ниже будет использоваться именно термин «ценность социальной сети».

---

[1] *Владимир Валентинович Бреер* (breer@live.ru)

Ценность социальной сети – это потенциальная доступность агентов, с которыми любой агент может «связаться» в случае необходимости. Эта ценность имеет вполне определенную величину. Так, если рассмотреть американский рынок телефонов, которые могут набирать только номер 911, то покупатели таких телефонов платят за предоставленную возможность связаться со службой спасения, хотя этой возможностью могут никогда и не воспользоваться. Если в данном случае связь даже с одним агентом имеет ценность (которая определяется ценой, уплаченной за купленные телефоны), то потенциальная связь со многими агентами должна иметь, по-видимому, намного б*о*льшую полезность.

Наверное, одним из первых на ценность социальной сети обратил внимание основатель американской Национальной Радиовещательной Компании (*NBC*) Давид Сарнов. Закон Сарнова (*Sarnoff's Law*) гласит, что ценность радио- или телевещательной сети растет пропорционально количеству зрителей n.

С развитием локальных компьютерных сетей один из авторов технологии *Ethernet*, Роберт Меткалф, определил (*Metcalfe's Law*) [16], что ценность социальной сети асимптотически растет как n^2. Обоснование этому закону следующее: каждый агент социальной сети может быть соединен с $n - 1$ остальными агентами, и, таким образом, ценность для него пропорциональна $n - 1$. В сети всего n агентов, поэтому ценность всей сети пропорциональна $n(n - 1)$.

Появление Интернета внесло коррективы в оценку роста ценности социальной сети. Давид Рид в своей работе [14], допуская правильность предыдущих двух законов, добавил (*Reed's Law*) в выражение для ценности социальной сети еще одну составляющую, связанную с объединением многих пользователей Интернета в группы. Эта составляющая равна $2^n - n - 1$ и определяется как число подмножеств (групп) множества из n агентов за исключением одиночных элементов и пустого множества. Добавляя к каждому из законов свой коэффициент пропорциональности a, b или c, получается следующее выражение для ценности социальной сети с большим количеством агентов n:

(1) $an + bn^2 + c2^n$.

В конце 90-х годов произошло массовое разорение ориентированных на интернет-технологию компаний (так называемых «*dot-com companies*»), что заставило исследователей более умеренно отнестись к реальному росту ценности социальных сетей. В работе [11] приводится критика законов Меткалфа и Рида и предлагается оценивать рост ценности как $n\ln(n)$. Главный аргумент в пользу этого закона (который называется законом Ципфа – *Zipf's Law*) состоит в том, что в нем, в отличие от первых трех законов, ранжируются ценности связей. Так, если для произвольного агента социальной сети, состоящей из n членов, связи с остальными $n-1$ агентами имеют ценности от 1 до $1/(n-1)$, то вклад этого агента в общую ценность сети составляет (для большого n):

$$1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n-1}\approx\ln(n). \tag{2}$$

Просуммировав по всем агентам, получим полную ценность социальной сети порядка $n\ln(n)$. В рамках изложенной аргументации возникает много вопросов. Почему, например, ценности связей распределяются «равномерно» между другими агентами, а не по какому-либо другому принципу? И т.д.

Все приведенные законы, кроме, быть может, закона Сарнова, подвергаются критике, и на сегодняшний день исследователи не пришли еще к единому мнению. По-видимому, эти дискуссии продлятся достаточно долго, так как трудно сформулировать непротиворечивое правило, объясняющее явление в максимальной степени общности и не обращающее внимания на многочисленные детали.

Прибавим еще одно критическое замечание ко всем законам о ценности социальных сетей. Очевидно, что ценность двух изолированных социальных сетей должна быть равна сумме ценностей каждой из них, так как из-за отсутствия связей между последними дополнительной ценности не возникает. Такую аддитивность приведенные законы не описывают.

Для ценности социальной сети можно предложить еще одно, вероятностное, описание, которое отражает указанное свойство аддитивности. Ценность социальной сети как величина, зависящая от потенциальных связей всех агентов, очевидно должна возрастать с увеличением количества возможных конфигураций (потенциальных возможностей) этих связей в сети. Действительно, как видно из примера о рынке телефонов, который приведен выше, увеличение количества потенциальных возможностей связей в случае необходимости повышает ценность сети. Обозначим через $m \in \mathrm{N}$ количество этих возможных конфигураций, а через $f : \mathrm{N} \to \mathrm{P}$ – ценность сети. Тогда свойство неубывания ценности с возрастанием количества возможных конфигураций можно записать в виде:

(3) $f(m_1) \geq f(m_2)$ для всех $m_1 \geq m_2$.

Рассмотрим две изолированные социальные сети, т. е. любой агент из одной из них не связан ни с каким из агентов другой. Тогда ценность объединения этих двух сетей будет равна сумме ценностей каждой из них. Так как количество возможных конфигураций объединения двух сетей равно произведению m_1m_2, где m_1 и m_2 – количества конфигураций первой и второй сетей соответственно, то для ценности изолированных социальных сетей должно быть справедливо следующее равенство:

(4) $f(m_1m_2) = f(m_1) + f(m_2)$.

Если существует только одна конфигурация связей агентов, то ценность такой социальной сети примем равной нулю, так как эта социальная сеть не дает возможности агентам установить другие потенциальные связи. Поэтому

(5) $f(1) = 0$.

В теории вероятностей (см. [6, 8]) доказано, что функция, удовлетворяющая последним трем свойствам, пропорциональна $\ln(m)$, где m – число конфигураций, и носит название *энтропии*. Если считать, что каждая конфигурация равновероятна, то существует априорная неопределенность, численно равная энтропии $\ln(m)$ от числа конфигураций. Так как каждая конкретная конфигурация устраняет неопределенность о связях в сети, то энтропия (апостериорная) каждой конкретной конфигурации становится равной 0. Смысл ценности социальной сети в приводимой интерпретации состоит в том, что она показывает, насколько в сети может быть полностью устранена априорная неопределенность. Иными словами, осуществляется потенциальная доступность агентов в смысле введенного первоначально определения ценности.

Пусть сеть состоит из n агентов. Перенумеруем всех агентов сети. Предположим, что конфигурация сети определяется тем, какой агент от какого получает информацию. Например, агент 1 получает информацию от агента 2, агент 2 получает от агента 3 и т.д. Агент n получает информацию от агента 1. Остальные конфигурации получаются перестановками агентов в описанной исходной конфигурации. Комбинаторными методами можно показать, что существует $m = n!$ таких конфигураций сети. Воспользовавшись упрощенной формулой Стирлинга [7, 12], можно показать, что для большого количества агентов n ценность (в смысле энтропии) социальной сети равна:

(6) $\ln(n!) \approx n\ln(n) - n.$

Таким образом, мы получили закон еще более умеренного роста ценности сети по сравнению с законом Ципфа – $n\ln(n)$. Например, для сети *Facebook*, численность членов которой недавно достигла 300 000 000 пользователей, различие между приведенным законом и законом Ципфа составляет около 13%. Для меньших сетей это различие будет увеличиваться.

Что же касается практической реализации, то в настоящее время определился целый класс социальных сетей, существующих в интернете, которые объединены единой технологией *Web* 2.0 [11].

Web 2.0 (определение О’Рейли) – методика проектирования систем, которые путем учета сетевых взаимодействий становятся тем лучше, чем больше людей ими пользуются. Особенностью *Web* 2.0 является принцип привлечения пользователей к наполнению и многократной выверке содержания (контента).

В этом определении, как и в приведенных выше законах, существенным фактором является большое количество агентов (современные социальные сети могут охватывать десятки миллионов пользователей), взаимодействие которых в сети увеличивает ее ценность. Исходя из этого, целесообразно использовать развитый аппарат статистической физики и теории информации, который позволяет описывать поведение больших систем на языке теории вероятностей. Подробнее аналогии между социальными сетями и двумя этими дисциплинами приведены в таблице 1 в конце раздела 3.

Примем, что поведение агента в социальной сети может зависеть от следующих факторов:

– *индивидуального* – внутренней склонности (предпочтений) агента выбрать то или иное действие;

– *социального* – взаимодействия (взаимовлияния) с другими агентами сети;

– *административного* – воздействия (влияния) на него (*управления*) со стороны управляющего органа – центра.

Агентов, которые подвержены описанным факторам, будем называть *зависимыми* (от одного или нескольких из этих факторов). Если на агентов действует как минимум социальный фактор, то объединяющую их сеть будем называть *социальной сетью* или *невырожденной социальной сетью*. Не подверженных перечисленным факторам агентов будем называть *независимыми*. Если у агентов отсутствует зависимость от социального фактора, то такую сеть будем называть *вырожденной* социальной сетью.

Проводя условно аналогии с моделями *термодинамики* и *статистической физики* [7], вырожденная социальная сеть с независимыми агентами соответствует идеальному газу. Вырожденная социальная сеть с зависимыми агентами соответствует многоатомному газу. Невырожденная социальная сеть соответствует другим веществам, где присутствует взаимодействие между частицами (взаимовлияние между агентами). Сеть с/без управлени(-ем, -я) соответствует наличию или отсутствию воздействия, например, внешнего поля (влияние центра).

Для *теории информации* [8] можно привести следующие сопоставления. Вырожденной социальной сети соответствует кодирование сообщения без штрафов, а невырожденной социальной сети – кодирование со штрафами. Неаддитивные штрафы соответствуют взаимовлиянию между агентами, аддитивные – влиянию центра.

Настоящая работа состоит из пяти частей, заключения и приложения, в котором доказываются приводимые в основном тексте утверждения.

В первой части рассматриваются два варианта вырожденной социальной сети – с зависимыми и независимыми агентами. Множество допустимых действий агентов конечно. Склонность агента к выбору отражается неравномерностью распределения вероятности того или иного действия. Частным случаем вырожденной социальной сети является сеть с однородными зависимыми агентами, обладающими одинаковыми распределениями вероятностей выбора тех или иных действий.

Отсутствие социального фактора взаимовлияния агентов отражается тем, что состояние всей социальной сети выражается через меру, которая представляет собой произведение индивидуальных распределений вероятностей агентов.

Неопределенность поведения агента, связанная со стохастическим характером первого, определяется через энтропию распределения вероятностей его действий. Наиболее неопределенным поведением (максимальной энтропией) обладает агент с равномерным распределением вероятностей.

Далее вводится понятие зависимости агента как разность между значением энтропии независимого поведения и значением энтропии для распределения вероятности действий этого агента.

Рассматривается понятие конечной вырожденной социальной сети, характеризуемой своей энтропией, которая, в силу вырожденности, представляется в виде суммы энтропий поведения агентов. Такие же рассуждения проводятся для «зависимости» всей вырожденной социальной сети.

Рассматривается пример двоичной счетной социальной сети, в которой счетно количество агентов, принимающих одно из возможных действий. Для этого случая можно найти явный вид зависимости агента. Введя понятие частичного среднего действия как суммы действий первых n агентов, нормированной на их количество, можно показать, что при большом n подавляющее число состояний этой социальной сети будет сосредоточено вблизи состояния с нулевым частичным средним. При этом флуктуации будут экспоненциально убывать.

Во второй части работы рассматривается невырожденная социальная сеть с конечным числом агентов. Здесь вводится понятие полезности всей сети как суммы индивидуальных полезностей ее членов. Далее вводится понятие математического ожидания этой полезности. Распределение, которое определяет это математическое ожидание, заранее не известно и должно быть определено с помощь дополнительных условий.

По аналогии с первой частью вводится понятие зависимости невырожденной социальной сети через относительную энтропию. Далее с помощью математического ожидания полезности, цены автономности и относительной энтропии вводится понятие потенциальной ценности социальной сети, которая в статистической физике является аналогом свободной энергии. Нахождение максимума потенциальной ценности определяет то стационарное распределение (распределение Гиббса), которое вначале не было известно.

В конце части 2 приводится таблица соответствия понятий статистической физики, теории информации и социальных сетей.

В части 3 рассматривается двоичная невырожденная конечная социальная сеть. Здесь приводится явный вид полезности сети. Вводятся понятия «послушности» и «дружественности» социальной сети.

Формулируются утверждения о предельном поведении сети при устремлении цены автономности к бесконечности и к нулю. Так, при бесконечной величине цены автономности сеть превращается в «анархическую», что соответствует разрыву связей взаимодействия в статистической физике. При устремлении цены автономности к нулю состояние сети «сваливается» в одно из базисных состояний, которые зависят от знака величины управления со стороны центра.

Интерпретируя среднее действие членов социальной сети как выигрыш центра, а величину управления – как его затраты, можно показать, что существует оптимальное управление для невырожденной конечной социальной сети.

В части 5 рассматривается двоичная невырожденная бесконечная (счетная) социальная сеть. Показывается, что при определенном соотношении между ценой взаимодействия агентов в сети и ценой автономности среднее действие может быть ненулевым при бесконечно малом управлении центра. Знак этого среднего действия будет совпадать со знаком управления. Такое явление соответствует фазовому переходу в статистической физике. Показывается, что в этом случае также существует оптимальное управление. Эффективность этого оптимального управления можно рассматривать как ценность социальной сети с точки зрения центра.

2. Вырожденная социальная сеть

Построим стохастическую модель вырожденной социальной сети, состоящую из большого числа агентов. Пусть *множество допустимых действий* $X_r = \{1, 2, \ldots, r\}$ для каждого агента сети состоит из конечного числа r вариантов. *Действие* агента i обозначим через $w_i \in X_r$. Выберем в качестве *пространства состояний социальной сети* Ω_r декартово произведение множеств допустимых действий:

$$(7)\quad \Omega_r = \left\{ w = \left(w_1, w_2, \ldots\right) : w_i \in \mathrm{X}_r,\ i = \overline{1,\infty} \right\}.$$

Элемент этого множества $w \in \Omega_r$ будем называть *состоянием социальной сети*.

Далее, для построения стохастической модели вырожденной социальной сети необходимо выбрать соответствующую меру на всем пространстве состояний Ω_r. Для этого сначала зададим меру на множестве допустимых действий X_r. Как следует из классификации, введенной выше на основании факторов поведения агентов, социальная сеть может состоять как из зависимых, так и из независимых агентов. Для *вырожденной* социальной сети с *зависимыми агентами* будем считать, что действие любого агента i *характеризуется* следующим распределением $r_i : 2^{\mathrm{X}_r} \to [0,1]$:

$$(8)\quad r_i(\cdot) = \sum_{j=1}^{r} r_{ij} c_j(\cdot), \sum_{j=1}^{r} r_{ij} = 1,\ i = \overline{1,\infty},$$

где $c_j(\cdot)$ – точечная мера, сосредоточенная в точке $j \in X_r$. Поведение агента i *описывается* его склонностью выбирать то или иное действие j с неодинаковой, в общем случае, вероятностью

r_{ij}. Частным случаем вырожденной социальной сети с зависимыми агентами является социальная сеть с *однородными* зависимыми агентами, т.е. такими, что $r_{ij} = r_j$, $i = \overline{1,\infty}$.

Для *вырожденной* социальной сети *с независимыми агентами* будем считать, что действие любого агента i характеризуется следующим распределением $r_i : 2^{X_r} \to [0,1]$:

(9) $$r_i(\cdot) = r(\cdot) = \frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r} c_j(\cdot),$$

т. е. для независимого агента, у которого нет предпочтений, любое действие равновероятно.

Существенным для вырожденной сети является то, что в ней отсутствует социальный фактор взаимовлияния, т. е. между агентами нет взаимодействий. Чтобы модель удовлетворяла этому критерию, необходимо определить соответствующую меру на пространстве состояний (7).

Сначала определим алгебру $\Phi_n = \prod_n 2^{X_r}$ на декартовом произведении n множеств допустимых действий $\Omega_r^n = \prod_n X_r$. Чтобы показать, что n агентов действуют независимо друг от друга, зададим меру Π_n на алгебре Φ_n через произведение соответствующих распределений действий агентов:

(10) $$\Pi_n(A_1, A_2, \ldots, A_n) = \prod_{i=1}^{n} r_i(A_i), \text{ где } A_i \in 2^{X_r}.$$

Можно показать [9], что существуют s-алгебра Φ на Ω_r, согласованная с алгебрами Φ_n, и такая мера $\Pi : \Phi \to [0,1]$, что ее конечные распределения равны независимым распределениям, т. е.

(11) $$\Pi\{w \in \Omega : w_1 \in A_1, w_2 \in A_2, \ldots, w_n \in A_k\} = \Pi_n(A_1, A_2, \ldots, A_n),$$

где $A_i \in 2^{X_r}$. Эта мера характеризует отсутствие взаимозависимости между действиями агентов в большой социальной сети, т. е. вырожденность последней.

Таким образом, модель конечной вырожденной социальной сети описывается вероятностным пространством $\left(\Omega_r^n, \Phi_n, \Pi_n\right)$, а модель большой вырожденной социальной сети описывается вероятностным пространством $\left(\Omega_r, \Phi, \Pi\right)$.

Стохастическое поведение агентов вносит неопределенность в их действия, с одной стороны, что приводит к усложнению описания всей сети. С другой стороны, большое количество агентов позволяет описать социальную сеть в целом с помощью небольшого количества макро-характеристик. Как будет показано ниже, произвольность действий агентов описывает большие уклонения состояний w социальной сети $\left(\Omega_r, \Phi, \Pi\right)$ от ее стационарных состояний, которые описываются макро-характеристиками социальной сети, например, математическим ожиданием действия агента. Для численного описания произвольности и неопределенности поведения агента будем использовать одну и ту же функцию – энтропию.

Понятие энтропии изначально определялось в статистической механике и теории вероятностей как неопределенность опыта, т. е. некий недостаток информации у наблюдателя для определения исхода опыта. Для социальных сетей, где подразумевается, что агенты выбирают те или иные действия, заменим термин «неопределенность» поведения на термин «произвольность» поведения. В этом случае акцент смещается на самого агента и не возникает необходимости вводить еще и наблюдателя. Итак, определим численную характеристику произвольности действий агента i через *энтропию* S как функцию от вероятности (8) его индивидуального поведения r_i:

(12) $$S\left(r_i\right) = -\sum_{j=1}^{r} r_{ij} \ln\left(r_{ij}\right).$$

Энтропия (12) принимает максимальное значение, равное $\ln(r)$, когда $r_{ij} = 1/r$, т. е. агент является независимым, его действия обладают наибольшей произвольностью и описываются распределением r из выражения (9) (см. [6, 8, 2]).

Энтропия зависимого агента будет меньше энтропии независимого агента на следующую величину:

(13) $I_r(r_i) = \ln(r) - S(r_i) = \sum_{j=1}^{r} r_{ij} \ln(r r_{ij})$.

Величина (13) характеризует уменьшение произвольности действий зависимого агента по отношению к полной произвольности действий независимого. Так как уменьшение произвольности равно приросту зависимости от каких-либо факторов, то величину $I_r(r_i)$, определяемую выражением (13), будем называть *зависимостью*[2] агента i. Легко видеть, что зависимость независимого агента равна нулю.

Перейдем к описанию произвольности конечной вырожденной социальной сети в целом. По аналогии с выражением (12) определим энтропию следующим образом:

(14) $S_n(\Pi) = -\sum_{(w_1, w_2, \ldots, w_n) \in \Omega_r^n} \Pi(w) \ln[\Pi(w)]$.

Определения энтропии (12) и (14) связаны между собой следующим простым соотношением, называемым свойством аддитивности энтропии [6, 8]:

(15) $S_n(\Pi) = \sum_{i=1}^{n} S(r_i)$.

В частности, из свойства аддитивности (15) следует, что энтропия (14) достигает своего максимума $n\ln(r)$, когда вырожденная сеть состоит из независимых агентов. Из (13) и (15) также следует, что «зависимость» конечной вырожденной социальной сети в целом равна сумме зависимостей агентов этой сети:

(16) $I_{n,r}(\Pi) = n\ln(r) - S_n(\Pi) = \sum_{i=1}^{n} I_r(r_i) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{r} r_{ij} \ln(r r_{ij})$.

Для однородных вырожденных социальных сетей, где все агенты имеют одинаковые индивидуальные предпочтения $r_{ij} = r_j$, $i = \overline{1,n}$, выражение (16) примет следующий вид:

---

[2] *Величина* ***Ошибка! Источник ссылки не найден.*** *названа не приростом зависимости, а зависимостью, так как независимый агент обладает полной произвольностью действий, и, значит, прирост равен самой зависимости.*

(17) $I_{n,r}(\Pi) = nI_r(r) = n\sum_{j=1}^{r} r_j \ln\left(r r_j\right).$

Функция nI_r из выражения (17) ниже будет получена как характеристика флуктуаций состояний счетной социальной сети вокруг ее стационарных состояний.

Рассмотрим *однородную* двоичную счетную вырожденную социальную сеть, где агенты независимы и выбирают один из двух вариантов ($r = 2$) действий $X_2 = \{-1, 1\}$, с пространством состояний:

(18) $\Omega_2 = \left\{ w = (w_1, w_2, \ldots) : w_i \in \{-1, 1\}, i = \overline{1, \infty} \right\}.$

Выбор действия каждого (независимого) агента i в данном случае описывается следующим равномерным распределением вероятностей:

(19) $r_i(\cdot) = r(\cdot) = \frac{1}{2} c_{-1}(\cdot) + \frac{1}{2} c_1(\cdot),$

где $c_{-1}(\cdot)$ и $c_1(\cdot)$ – точечные меры на $X_i = \{-1, 1\}$, сосредоточенные в точках –1 и 1 соответственно.

Уточним понятия микро- и макропоказателей. Макропоказателями будем называть величины, описывающие бесконечную социальную сеть, к которым стремятся микропоказатели, являющиеся характеристиками конечной социальной сети, при стремлении количества агентов к бесконечности. Например, можно условно считать, что в законе больших чисел микропоказателем является *среднее арифметическое* первых n координат (частичная сумма), а макропоказателем – *математическое ожидание*.

Пространство вероятностных мер $M_1\left(2^{\{-1,1\}}\right)$, которому принадлежит распределение (19), изоморфно отрезку [–1, 1], а именно, любую меру $\mu \in M_1\left(2^{\{-1,1\}}\right)$ можно выразить через число $x \in [-1, 1]$ следующим образом:

(20) $m = \frac{1-x}{2} c_{-1}(\cdot) + \frac{1+x}{2} c_1(\cdot).$

Например, мера (19) получается при $x = 0$. Так как эта мера описывает выбор действия независимого агента, то $x = 0$ означает отсутствие предпочтений агентом в ту или другую сторону. Значения $x = 1$ и $x = -1$ определяют соответствующие детерминированные случаи.

Очевидно, что число x является математическим ожиданием действия агента w_i по мере m. Таким образом, математическое ожидание x можно интерпретировать в данном примере как индивидуальные предпочтения агентов. Кроме того, из (20) и (13) следует, что если зависимый агент «смещает» свои индивидуальные предпочтения на x от 0 в сторону –1 или 1, то его зависимость (13) будет равна

(21) $$I_2(m) = I(x) = \frac{1-x}{2}\ln(1-x) + \frac{1+x}{2}\ln(1+x),$$

причем $0\cdot\ln 0 = 0$. График функции (21) приведен на рис. 1. Как видно из рис. 1, функция (21) является строго выпуклой на отрезке [–1, 1], обладает свойством четности и достигает своего минимального значения 0 в точке $x = 0$.

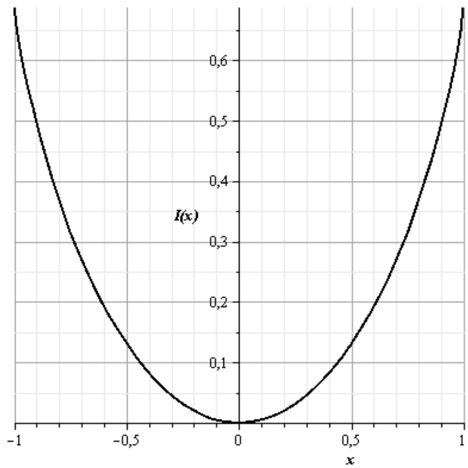

Рис. 1 Функция «зависимости» агента в двоичной сети

Назовем *частичным средним действием* состояния социальной сети величину $s_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} w_i$. Следующая теорема утверждает, что флуктуации тех состояний сети, у которых частичное среднее действие отклоняется от математического ожидания $x = 0$, экспоненциально уменьшаются с увеличением n. Причем скорость этого убывания определяется функцией зависимости (21).

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.

Для любого $0 < e £ 1$ и достаточно большого n относительное число состояний w с частичным средним действием s_n, отличающимся от математического ожидания 0 не менее чем на e, экспоненциально мало:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\left[\Pi\left\{w\in\Omega:\left|s_n\right|\geq e\right\}\right]=-\min_{1\geq|x|\geq e}I\left(x\right), \tag{22}$$

где функция $I(x)$ определяется выражением (21).

Это и все последующие утверждения доказываются в Приложении.

Из выражения (22) и того факта, что $\min\limits_{1\geq|x|\geq\varepsilon}I(x)>I(0)=0$, следует, что для всех достаточно больших n справедливо следующее неравенство:

$$\Pi\left\{w\in\Omega:\left|s_n\right|\geq e\right\}\leq\exp\left[-n\left(\min_{1\geq|x|\geq e}I\left(x\right)+1\right)\right]. \tag{23}$$

Выражение (23) показывает, что для больших социальных сетей характерна высокая кратность состояний, частичные средние которых находятся вблизи математического ожидания и флуктуации около этого равновесного состояния экспоненциально малы. Кратность этих состояний определяется минимумом функции зависимости (21).

3. Невырожденная социальная сеть с конечным числом агентов

Предположим, что для агентов социальной сети (независимых или индивидуально зависимых) добавляется зависимость поведения агентов от административного и социального факторов. Воздействие со стороны управляющего центра – *управление* – обозначим через u (см. ниже), а *взаимовлияние* агентов друг на друга – через t (см. ниже). Эта зависимость приводит к тому, что поведение агентов в невырожденной социальной сети уже не будет описываться распределениями типа (8), так же как и вся сеть не будет характеризоваться произведением индивидуальных распределений (10). В данном случае характеристики социальной сети в целом могут быть описаны некоторым вероятностным распределением $P\{\cdot\}$ (которое нам предстоит найти) на пространстве состояний Ω_r^n.

Как отмечалось во введении, полезность социальной сети для каждого из ее членов зависит от действий всех агентов этой сети, т. е. от состояния всей сети. Пусть полезность социальной сети в состоянии $w^{(n)}$ для агента i определяется функцией его индивидуальной полезности $H_{ut}^i(\omega^{(n)})$ (см. описание индивидуальных предпочтений, например, в [5]), которая также зависит и от факторов влияния u и t.

Тогда полезность всей сети в целом для ее членов можно определить через сумму индивидуальных полезностей:

$$(24)\quad H_{ut}\left(w^{(n)}\right)=\sum_{i=1}^{n}H_{ut}^i(w^{(n)}).$$

Так как состояние $w^{(n)}$ является случайным, то полезность (24) также является случайной и требует вероятностного описания. Определим *математическое ожидание полезности* (24) по некоторому вероятностному распределению P, которое характеризует социальную сеть в целом:

$$(25)\quad \mathrm{E}H_{ut}(P)=\sum_{w^{(n)}\in\Omega_n}H_{ut}\left(w^{(n)}\right)P\left\{w^{(n)}\right\}.$$

В дальнейшем функцию (25) будем называть *ценностью сети*. В статистической физике эта величина соответствует средней энергии системы. В теории информации она соответствует риску.

Произвольность поведения невырожденной социальной сети оценим, как и в (14), с помощью следующей энтропии:

$$(26)\quad S_n(P)=-\sum_{w^{(n)}\in\Omega_n}P\left(w^{(n)}\right)\ln\left[P\left(w^{(n)}\right)\right].$$

Можно показать, что $S_n(P) \le S_n(\Pi) = n\ln(r)$, где $S_n(\Pi)$ – значение энтропии для вырожденной социальной сети (14). Таким образом, произвольность поведения невырожденной социальной сети уменьшается по сравнению с вырожденной социальной сетью. Это происходит за счет зависимости поведения агентов от административного фактора u и социального фактора t. Зависимость агентов от этих факторов определим через *относительную энтропию* [12] меры P по мере Π_n:

$$(27)\quad I_\Pi(P) = \sum_{w^{(n)}\in\Omega_n} P\left\{w^{(n)}\right\}\ln\left[\frac{P\left\{w^{(n)}\right\}}{\Pi_n\left\{w^{(n)}\right\}}\right].$$

Если указанные два внешних фактора воздействуют на (внутренне) независимых агентов, поведение которых до этого воздействия описывалось распределением (9), то возникающая при этом зависимость агентов (27) от этих факторов примет следующий вид:

$$(28)\quad \begin{aligned} I_\Pi(P) &= \sum_{w^{(n)}\in\Omega_n} P\left\{w^{(n)}\right\}\ln\left[r^n P\left\{w^{(n)}\right\}\right] = \\ &= n\ln(r) + \sum_{w^{(n)}\in\Omega_n} P\left(w^{(n)}\right)\ln\left[P\left(w^{(n)}\right)\right], \end{aligned}$$

что совпадает с разностью энтропий $S_n(\Pi) - S_n(P)$, уменьшением произвольности поведения агентов.

Будем считать, что ценность социальной сети для ее агентов уменьшается с уменьшением свободы их действий, т. е. увеличением зависимости от внешних факторов. Таким образом, окончательную ценность социальной сети можно выразить следующим выражением:

$$(29)\quad G(P) = \mathrm{E}H_{ut}(P) - n\, I_\Pi(P),$$

где параметр $n > 0$ введен для приведения величины $I_\Pi(P)$ к размерности ценности. Кроме того, его можно содержательно интерпретировать как *цену автономности* агентов в социальной сети. В статистической механике и теории информации параметр n называется *температурой*.

В выражении (29) из ценности, которую приобрели агенты от социального и административного факторов, вычитается ценность, которую они потеряли в связи с уменьшением индивидуальной свободы (зависимостью). «Остаток», т. е. функцию G, будем называть *потенциальной ценностью социальной сети*. Термин «потенциальный» имеет двоякий смысл. Во-первых, как следует из введения, именно потенциальной (в смысле будущей потенциальной полезности) ценностью обладают социальные сети. Во-вторых, как будет видно ниже, функция (29) обладает свойствами термодинамического потенциала, при дифференцировании которого получаются зависимости макрохарактеристик системы $\mathrm{E}H_{ut}$ и I_Π от температуры n. В статистической механике термодинамический потенциал $F = -G$ называется *свободной энергией Гельмгольца*.

Как следует из введения, взаимодействие агентов в рамках сети должно приводить к увеличению ее ценности, в противном случае эта сеть распадается. Будем считать, что равновесное распределение $P\{\cdot\}$ соответствует максимальной потенциальной ценности социальной сети.

Формально говоря, необходимо найти такое распределение P_G,[3)] для которого потенциальная ценность сети (29) максимальна на симплексе вероятностных мер

$$\mathrm{M}_1 = \left\{ \mathrm{P} \in \mathrm{M}(\Phi_n) : \sum_{w^{(n)} \in \Omega_n} \mathrm{P}\left\{\omega^{(n)}\right\} = 1 \right\}:$$

(30) $$\mathrm{P_G} = \arg\max_{\mathrm{M}_1} \left[\mathrm{E}H_{ut}(\mathrm{P}) - \nu I_\Pi(\mathrm{P}) \right].$$

Вариационную задачу (30) можно решить методом неопределенных множителей Лагранжа. Для этого введем функцию Лагранжа:

(31) $$L = \sum_{w^{(n)} \in \Omega_n} H_{ut}\left(w^{(n)}\right) P\left\{w^{(n)}\right\} - n \sum_{w^{(n)} \in \Omega_n} P\left\{w^{(n)}\right\} \ln\left[\frac{P\left\{w^{(n)}\right\}}{\Pi_n\left\{w^{(n)}\right\}} \right] - $$
$$-a \sum_{w^{(n)} \in \Omega_n} P\left\{w^{(n)}\right\},$$

---

[3] *Символ G в обозначении распределения вводится, следуя названию этого распределения в статистической физике – распределение Гиббса.*

где a – неопределенный множитель Лагранжа для ограничения в (30). Продифференцировав выражение (31) по каждому $P\{w^{(n)}\}$, получим следующие условия экстремума:

$$(32)\quad \frac{\partial L}{\partial \mathrm{P}\left\{w^{(n)}\right\}} = H_{ut}\left(w^{(n)}\right) - n \ln \frac{P\left\{w^{(n)}\right\}}{\Pi_n\left\{w^{(n)}\right\}} - n - a = 0.$$

Значит, искомое распределение представляется в виде:

$$(33)\quad P_G\left\{w^{(n)}\right\} = e^{-\frac{(n+a)}{n}} e^{\frac{H_{ut}\left(w^{(n)}\right)}{n}} \Pi_n\left\{w^{(n)}\right\}.$$

Из условий нормировки $\sum P_G = 1$ и равенства (33) следует, что величина $e^{\frac{(n+a)}{n}}$ равна

$$(34)\quad \mathrm{Z} = Z(n) = \sum_{w \in \Omega_n} e^{\frac{H_{ut}\left(w^{(n)}\right)}{n}} \Pi_n\left\{w^{(n)}\right\}.$$

Следуя терминологии статистической физики, будем называть величину Z *статистической суммой*. Окончательно искомое равновесное распределение состояний социальной сети, которое будем называть *распределением Гиббса*, принимает следующий вид:

$$(35)\quad P_G\left\{w^{(n)}\right\} = \mathrm{Z}^{-1} e^{\frac{H_{ut}\left(w^{(n)}\right)}{n}} \Pi_n\left\{w^{(n)}\right\}.$$

Легко показать, что равновесную (соответствующую распределению Гиббса) потенциальную ценность социальной сети можно представить через статистическую сумму Z и цену автономности агентов n:

$$(36)\quad G(n) = n \ln Z(n).$$

Следующее утверждение показывает, что через потенциальную ценность сети можно определить равновесную ценность сети $R = R(n) = \mathrm{E}H_{ut}(P_G)$ и зависимость агентов от внешних факторов $I = I(n) = I_{\Pi}(P_G)$ как функции от n.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.

$$(37)\quad I(n) = -\frac{dG}{dn}(n).$$

Соотношение (37) показывает, что зависимость агентов от внешних факторов I можно вычислить из статистической суммы (34) и соотношения для потенциальной ценности сети (36). Ценность социальной сети (25) может быть тогда вычислена исходя из определения потенциальной ценности (29).

Содержательные интерпретации приведенных формул будут ниже проиллюстрированы примером конкретного вида полезности сети $H_{ut}(w^{(n)})$.

Таблица 1. Соответствие понятий различных дисциплин, описывающих большие системы

Статистическая физика [7]	**Теория информации [8]**	**Социальные сети**
Частица	Передаваемый символ	Агент социальной сети
Фазовое пространство	Пространство значений символа	Множество допустимых действий агента
Координаты точки в фазовом пространстве	Значение символа	Действие агента
Координаты N частиц в фазовом пространстве	Значения последовательности из N символов	Пространство состояний социальной сети из N агентов
Энергия частицы	Функция штрафа символа	Полезность социальной сети для агента
Средняя энергия системы	Риск	Ценность сети
Энтропия	Количество информации	Зависимость агентов от внешних факторов
Свободная энергия Гельмгольца	Свободная энергия	Потенциальная ценность сети
Температура	Дифференциальная ценность информации	Цена автономности агентов сети

4. Двоичная невырожденная конечная социальная сеть

Пусть социальная сеть состоит из конечного числа n агентов и они выбирают один из двух вариантов $r = 2$ действий $X_2 = \{-1, 1\}$. Тогда пространство состояний этой сети:

(38) $\Omega_2^n = \left\{ w^{(n)} = (w_1, w_2, \ldots, w_n) : w_i \in \{-1, 1\},\ i = \overline{1, n} \right\}.$

Будем характеризовать степень влияния агентов друг на друга (во введенной терминологии – это социальный фактор t) матрицей «цен» взаимовлияния агентов $\|t_{ij}\|$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, n}$. Величина t_{ij} содержательно интерпретируется как «цена» влияния агента j на агента i, а произведение $t_{ij}w_j$ – как ценность действия w_j агента j для агента i. Ценность состояния всей сети w для агента i запишем в виде суммы ценностей действий каждого агента сети:

(39) $\sum_{j=1}^{n} t_{ij} w_j .$

Свое действие агент i выбирает исходя из индивидуальных предпочтений, характеризуемых распределением (19), и знака ценности социального влияния (39) так, чтобы максимизировать следующую целевую функцию:

(40) $\sum_{j=1}^{n} t_{ij} w_i w_j .$

Положительность цены влияния t_{ij} соответствует «дружественности» отношения агента i к агенту j, т. е. полезность состояния сети w для агента i будет тем выше, чем большее число других агентов действуют одинаково, и агент действует так же, как и большинство. Очевидно, что $t_{ij} < 0$ соответствует недружественной сети, полезность состояний которой для агента i будет вести себя противоположным образом. Далее будем считать, что $t_{ij} \geq 0$ для всех агентов i и j, т. е. что сеть является «дружественно-нейтральной».

Будем считать, что все агенты подвергаются влиянию центра (административный фактор). Цену влияния центра обозначим числом $u \in \mathrm{P}$. Знак цены влияния центра характеризует мнение центра. Абсолютная величина $|u|$ характеризует удельные затраты центра на управление мнением одного агента. С учетом этого административного фактора запишем полезность социальной сети для агента i в следующем виде:

$$(41)\quad H_{ut}^{i}(w^{(n)}) = \left(\sum_{j=1}^{n} t_{ij} w_j + u \right) w_i .$$

Знак «+» в выражении (41) соответствует «послушности» агентов, т. е. полезность сети для агента возрастает, если его действия совпадают с мнением центра.

Полезность всей социальной сети для состояния $w^{(n)}$ определим, как и в (24), через сумму индивидуальных полезностей агентов:

$$(42)\quad H_{t,u}\left(w^{(n)}\right) = \sum_{i,j=1}^{n} t_{ij} w_i w_j + u \sum_{i=1}^{n} w_i .$$

Аналогом полезности (42) в статистической физике является гамильтониан для конечной модели Изинга. Эта модель рассматривается в социальных сетях (см., например, обзор [4]).

Согласно (33), распределение Гиббса для невырожденной социальной сети с функцией полезности (42) будет выглядеть следующим образом:

$$(43)\quad P_{n,t,u}\left\{w^{(n)}\right\} = Z^{-1} e^{\frac{H_{t,u}\left(w^{(n)}\right)}{n}} \Pi_n \left\{w^{(n)}\right\},$$

где n – цена автономности, а $H_{t,u}(w^{(n)})$ – полезность социальной сети для состояния $w^{(n)}$, определяемая равенством (42).

Рассмотрим свойства распределения Гиббса $P_{n,t,u}$ для различных значений n и управления центра u. Можно показать, что при неограниченном возрастании цены автономности n агенты действительно начинают действовать независимо, т. е. справедливо следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.

$$(44)\quad P_{n,t,u} \xrightarrow{W} \Pi_n, \; n \to \infty,$$

где W означает слабую сходимость мер (см. [1]). Содержательно это означает, что при неограниченном возрастании цены автономности агентов в сети будет «полная анархия» при любом значении управления u, т. е. сеть превратится в вырожденную. Аналогом этого явления в статистической физике является нагрев вещества до газообразного состояния.

Когда цена автономности («температура») принимает некоторое конечное значение $n > 0$, вступает в силу взаимовлияние агентов и влияние на них центра. Так как $P_{n,t,u}\left\{\overline{w^{(n)}}\right\} > P_{n,t,u}\left\{w^{(n)}\right\}$ тогда и только тогда, когда $H_{t,u}\left(\overline{w^{(n)}}\right) > H_{t,u}\left(w^{(n)}\right)$, то наиболее вероятными будут те состояния, которые максимизируют полезность сети. Такие максимизирующие состояния будем называть *базисными*. Обозначим через $w_+^{(n)}$ ($w_-^{(n)}$ соответственно) состояние сети, когда действия всех агентов равны 1 (–1 соответственно). Это и есть базисные состояния, для которых справедливы (см. Приложение) следующие утверждения, выполняющиеся для «дружественной» и «послушной» социальной сети:

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.

Для $u > 0$ состояние $w_+^{(n)}$ является единственным базисным состоянием.

Для $u < 0$ состояние $w_-^{(n)}$ является единственным базисным состоянием.

Для $u = 0$ только состояния $w_+^{(n)}$ и $w_-^{(n)}$ являются базисными состояниями.

Таким образом, в конечной социальной сети наиболее вероятно, что все агенты действуют в соответствии с мнением центра (его управлением). Когда управление отсутствует, нельзя предсказать, какое из базисных состояний будет наиболее вероятным.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5.

(45) $P_{n,t,u} \xrightarrow{W} c_{w_+},\ n \to +0,\ u > 0;$

(46) $P_{n,t,u} \xrightarrow{W} c_{w_-},\ n \to +0,\ u < 0.$

Таким образом, при нулевой цене автономности, очевидно, исчезают любые независимые действия, и агенты действуют в соответствии с мнением центра u.

Назовем (общим) *действием социальной сети* $\sum_{i=1}^{n} w_i$ сумму действий всех агентов. Математическое ожидание действия социальной сети назовем *средним действием сети*, которое определим следующим образом:

$$(47)\quad M_n(n,u) = \mathrm{Z}^{-1} 2^{-n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{w^{(n)} \in \Omega_n} w_i e^{\frac{H_{t,u}\left(w^{(n)}\right)}{n}}.$$

Для среднего действия социальной сети (47) справедливо следующее утверждение, которое доказывается в [12] (IV.3.4).

УТВЕРЖДЕНИЕ 6.

1. Для любого $n > 0$ $M_n(n, 0) = 0$.
2. $M_n(n, u)$ является неотрицательной вогнутой функцией от $u \geq 0$ и неубывающей функцией от $u \in \mathrm{R}$.
3. $M_n(n, -u) = -M_n(n, u)$ и $|M_n(n, u)| \leq n$.
4. Если $u \geq 0$, то $M_n(n, u)$ – неотрицательная, невозрастающая функция от $n > 0$.

Свойство 1 утверждения 6 показывает, что при отсутствии влияния центра среднее действие агентов социальной сети равно нулю (что условно можно считать бездействием агентов).

Свойство 2 и 3 утверждения 6 позволяют решить задачу управления [6] для социальной сети. Действительно, величину $K_n(u) = M_n(n, u) - n\,u$ можно интерпретировать как эффективность управления (целевую функцию центра – как ценность сети для него), считая что $M_n(n, u)$ – выигрыш центра (среднее действие сети осуществляется в соответствии с мнением цента), u – затраты центра на «управление» одним агентом. В силу свойства 3 утверждения 6 можно ограничиться неотрицательным управлением $u \geq 0$. В силу свойства 2 эффективность управления $K_n(u)$ является вогнутой функцией, поэтому можно найти ее максимум, т. е. оптимальное управление.

Свойство 4 утверждения 6 показывает, что при увеличении цены автономности $n > 0$ среднее действие не возрастает, а значит, так же ведет себя и эффективность управления $K_n(u)$. Таким образом, ценность социальной сети с точки зрения центра снижается. Это совпадает с таким очевидным фактом, что более автономными агентами управлять сложнее.

5. Двоичная невырожденная бесконечная социальная сеть

Рассмотрим модель социальной сети, в которой каждый агент влияет на другого в одинаковой степени, и это влияние убывает с увеличением числа агентов n:

(48) $t_{ij} = \frac{t}{n}, \; t > 0.$

Полезность сети для агента i запишем в виде следующей функции:

(49) $\sum_{j=1}^{n} t_{ij} w_i w_j = \frac{t}{2n} \sum_{j=1}^{n} w_i w_j .$

Коэффициент 1/2 в выражении (49) учитывает симметричность полезностей для агентов i и j. Полезность всей социальной сети для состояния $w^{(n)}$ определим, как и в выражении (24), через сумму индивидуальных полезностей агентов:

(50) $H_{t,u}\left(w^{(n)}\right) = \frac{t}{2n} \sum_{i,j=1}^{n} w_i w_j + u \sum_{i=1}^{n} w_i .$

Определим среднее действие бесконечной социальной сети через следующий предел:

(51) $m(n,u) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} M_n(n,u),$

где $M_n(n, u)$ определяется (47). Изучим поведение этой величины. Для этого сначала запишем целевую функцию $H_{t,u}$ в следующем виде:

(52)
$$H_{t,u}\left(w^{(n)}\right)=n\left[\frac{t}{2}\left(\frac{\sum_{j=1}^{n}w_j}{n}\right)^2+u\frac{\sum_{i=1}^{n}w_i}{n}-\frac{t}{2}\right]=$$
$$=n\left[\frac{t}{2}\left(\frac{S_n(w)}{n}\right)^2+u\frac{S_n(w)}{n}-\frac{t}{2}\right].$$

По определению среднего действия сети (47) можно записать:

(53)
$$m(n,u)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}M_n(n,u)=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\mathrm{Z}^{-1}\int_{\Omega_n}s_n\left(w^{(n)}\right)e^{n\left[\frac{t}{2n}\left(s_n\left(w^{(n)}\right)\right)^2+\frac{u}{n}s_n\left(w^{(n)}\right)-\frac{t}{2}\right]}\Pi_n\left\{dw^{(n)}\right\}.$$

Введем новую меру на отрезке [–1, 1]:

(54) $Q_n(A)=\Pi_n\left\{w^{(n)}\in\Omega_n : s_n\left(w^{(n)}\right)\in A\right\},\ A\in$ [–1, 1].

Сделав замену переменной в выражении (53), получим:

(55) $$m(n,u)=\lim_{n\to\infty}\mathrm{Z}^{-1}\int_{-1}^{1}xe^{n\left[\frac{t}{2n}x^2+\frac{u}{n}x-\frac{t}{2}\right]}Q_n\{dx\},$$

где статистическая сумма равна

(56) $$\mathrm{Z}=\int_{-1}^{1}e^{n\left[\frac{t}{2n}x^2+\frac{u}{n}x-\frac{t}{2}\right]}Q_n\{dx\}.$$

Величину $Q_n\{dx\}$ для достаточно большого n можно выразить следующим образом:

(57) $Q_n\{dx\}\approx e^{-nI(x)}dx,$

где $I(x)$ определяется зависимостью агентов (21). Строго это доказывается в [12] (II.7.2 (b)).

Поэтому среднее действие сети можно переписать в следующем виде:

(58) $$m(n,u)\approx\frac{1}{\int_{-1}^{1}e^{nf_{n,u}(x)}dx}\int_{-1}^{1}xe^{nf_{n,u}(x)}dx,$$

где $f_{n,u}(x) = \left(\frac{t}{2n} x^2 + \frac{u}{n} x - \frac{t}{2} \right) - I(x)$. Согласно выражению (58) среднее действие социальной сети (51) определяется теми точками x, в которых функция $f_{n,u}(x)$ достигает своего максимума. Точки максимума этой функции должны удовлетворять уравнению:

(59) $\frac{df_{n,u}(x)}{dx} = 0$ èëè $\frac{t}{n} x + \frac{u}{n} = I_r{}'(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}.$

Рассмотрим графическое решение этого уравнения с различными параметрами n, u, t (рис. 2).

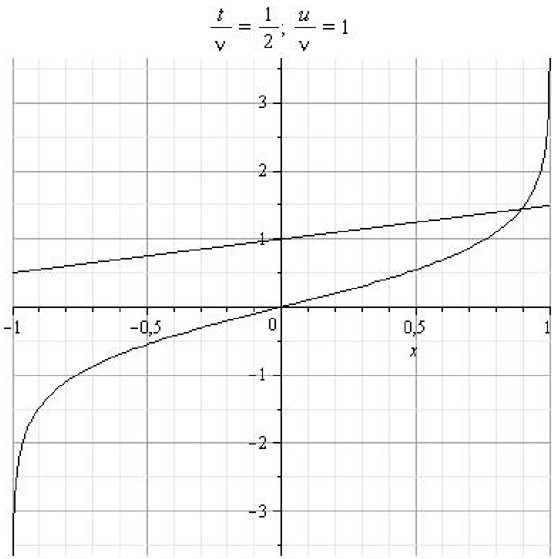

Рис. 2 Среднее действие при большой автономности

При условии, что коэффициент социального влияния меньше цены автономности агентов социальной сети, т. е. $t < n$, наклон прямой $\frac{t}{n} x + \frac{u}{n}$ будет меньше 1, и эта прямая будет пересекать график $I_r{}'(x)$ один раз, так как производная функции

$I_r{}'(x)$ в точке 0 равна 1 (см. рис. 2). Точка пересечения $x(n, u)$ будет являться точкой минимума функции $f_{n,u}$. В данном случае не происходит «фазового перехода» и среднее действие социальной сети непрерывно зависит от управления u.

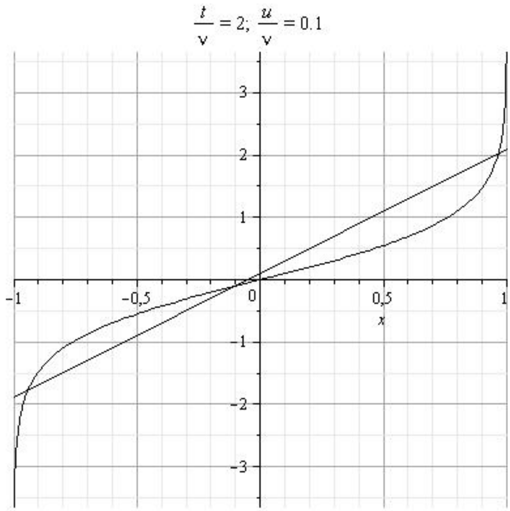

Рис. 3 Среднее действие при малой автономности и малом положительном управлении

Если справедливо обратное неравенство $t > n$, то при достаточно малых $u \approx 0$ будут существовать две точки экстремума, как показано на рис. 3 и рис. 4. При $u > 0$ точкой минимума функции $f_{n,u}$ будет правая точка $x(n, u)$ (рис. 3), а при $u < 0$ – левая $x(n, u)$ (рис. 4). Таким образом, если агенты ценят фактор социальной зависимости выше, чем цену автономности, центр может этим воспользоваться и с минимальными затратами на управление u повлиять на социальную сеть так сильно, что подавляющее большинство агентов будет выбирать действие, желательное центру.

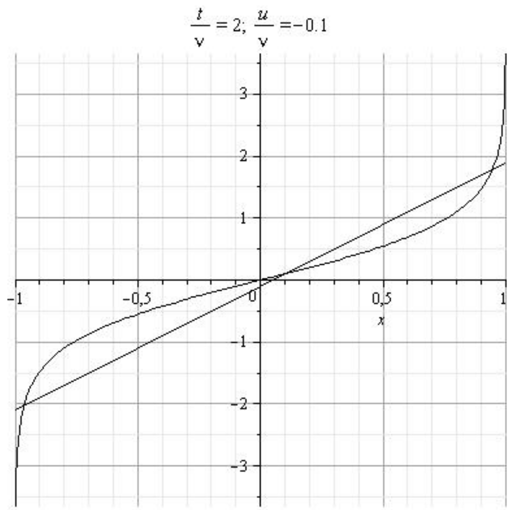

Рис. 4 Среднее действие при малой автономности и малом отрицательном управлении

Можно строго показать [12] (IV.4.1 а), что эти точки $x(n, u)$ будут предельными значениями в выражении (53), причем при $t > n$ и малом u ($u \to \pm 0$) значение предела будет зависеть от того, с какой стороны u приближается к нулю:

(60) $$m(n,\pm) = \lim_{u\to\pm 0} m(n,u) = \lim_{u\to\pm 0}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}M_n(n,u) = x(n,\pm) \neq 0$$.

Как и в предыдущем разделе, рассмотрим эффективность управления $k_n(u) = m(n, u) - u$. Как видно из рис. 2-4, $k_n(u)$ является вогнутой функцией, следовательно, оптимальное управление существует и единственно. Эффективность снижается с повышением цены автономности агентов, причем за счет двух факторов – уменьшения наклона прямой и ее точки пересечения с осью ординат. В бесконечной социальной сети возникает дополнительный эффект: среднее действие сети $m(n, \pm)$ оказывается ненулевым при бесконечно малом управлении u. Этот эффект делает большую (бесконечную) социальную сеть более ценной с точки зрения центра.

6. Заключение

В настоящей статье рассматриваются математические модели, построенные исходя из базовых принципов поведения агента в социальной сети. Эти принципы выражаются во влиянии на поведение агента трех основных факторов: индивидуального, социального и управленческого. Стохастический подход к описанию поведения социальных сетей позволяет использовать математические модели, которые разработаны в статистической физике, теории вероятностей и теории информации. Такие введенные понятия, как: зависимость поведения, цена автономности, цена взаимовлияния, потенциальная ценность социальной сети – имеют прямые аналогии в статистической физике и теории информации. С другой стороны, эти понятия имеют содержательные интерпретации в терминах социальных сетей и приводят к возможности формализации эффектов, происходящих в них.

Представляется перспективным, используя этот аппарат и введя новые содержательные интерпретации, рассмотреть другие разработанные в статистической физике модели, например модель Изинга и прочие модели взаимодействия частиц с конечным радиусом действия.

Кроме того, поведение агентов в социальных сетях с порогами [13] приводит к эффектам, которые, по-видимому, не разработаны в статистической физике и требуют разработки независимых методов, что представляется одним из перспективных направлений дальнейших исследований.

7. Приложение

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 1.

Частичное действие социальной сети $S_n = \sum_{i=1}^{n} w_i$ для $w_i \in \{-1, 1\}$ может принимать значения $2k - n$, где $k = \overline{0, n}$. Кроме того, k обозначает количество единиц в множестве из n элементов w_i. Частичное среднее действие $s_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} w_i$, соответственно, может принимать значения $2k/n - 1$, где $k = \overline{0,n}$. Введем обозначение $A_n = \left\{ k \in \{0, 1, ..., n\} : \left| \frac{2k}{n} - 1 \right| \geq e \right\}$. Тогда справедливо следующее равенство:

$$(61)\ \{w \in \Omega : |s_n| \geq e\} = \bigcup_{k=1}^{n} \left\{ w : s_n = \frac{2k}{n} - 1, k \in A_n \right\},$$

причем множества в правой части равенства (61) не пересекаются. Количество состояний с k единицами в первых n действиях $\{w_1, \ldots, w_n\}$ равно числу сочетаний из n по k C_n^k. В силу вырожденности сети каждое состояние появляется с вероятностью $1/2^n$. Из выражения (61) и приведенных комбинаторных рассуждений следует:

$$(62)\ \Pi\{w \in \Omega : |s_n| \geq e\} = \sum_{k \in A_n} \Pi\left\{ w \in \Omega : s_n = \frac{2k}{n} - 1 \right\} = \sum_{k \in A_n} \frac{C_n^k}{2^n}.$$

Так как в правой сумме выражения (62) может быть не более $n + 1$ слагаемых, то справедливо следующее выражение:

$$(63)\ \max_{k \in A_n} \frac{C_n^k}{2^n} \leq \Pi\{w \in \Omega : |s_n| \geq e\} \leq (n+1) \max_{k \in A_n} \frac{C_n^k}{2^n}.$$

Логарифмируя все части неравенств (63), получим следующее соотношение:

$$(64)\ \begin{aligned} &\max_{k \in A_n}\left[\frac{1}{n}\ln\frac{C_n^k}{2^n}\right] \leq \frac{1}{n}\ln \Pi\{w \in \Omega : |s_n| \geq e\} \leq \\ &\leq \frac{1}{n}\ln(n+1) + \max_{k \in A_n}\left[\frac{1}{n}\ln\frac{C_n^k}{2^n}\right]. \end{aligned}$$

Пользуясь формулой Стирлинга [7, 9, 12], можно показать, что справедливо следующее выражение:

$$(65)\ \frac{1}{n}\log\frac{C_n^k}{2^n} = -\left[\ln 2 + \frac{k}{n}\ln\frac{k}{n} + \left(1 - \frac{k}{n}\right)\ln\left(1 - \frac{k}{n}\right)\right] + O\left(\frac{\ln n}{n}\right).$$

С другой стороны, используя выражение (21), легко показать, что значение функции зависимости в точке $2k/n - 1$ будет равно

$$(66)\quad I\left(\frac{2k}{n}-1\right)=\ln 2+\frac{k}{n}\ln\frac{k}{n}+\left(1-\frac{k}{n}\right)\ln\left(1-\frac{k}{n}\right).$$

Из выражений (64), (65) и (66) следует, что

$$(67)\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\left[\Pi\left\{w\in\Omega:\left|s_n\right|\geq e\right\}\right]=-\lim_{n\to\infty}\min_{k\in A_n} I\left(\frac{2k}{n}-1\right).$$

В силу определения множества A_n очевидно следующее неравенство

$$(68)\quad \min_{1\geq|x|\geq e} I(x)\leq\min_{k\in A_n} I\left(\frac{2k}{n}-1\right)$$

По определению точной нижней грани $\forall d > 0$ $\exists x_d : 1 \geq |x_d| \geq e$, что

$$(69)\quad \min_{1\geq|x|\geq e} I(x)> I(x_d)-\frac{d}{2},$$

и в силу непрерывности функции зависимости I существует окрестность точки x_d такая, что для всех точек x, принадлежащих этой окрестности U_d, справедливо следующее неравенство:

$$(70)\quad I(x_d)> I(x)-\frac{d}{2}$$

Для достаточно больших n можно подобрать такое $k \in A_n$, что число $2k/n - 1$ будет лежать внутри окрестности U_d. Из неравенств (69) и (70) следует, что для достаточно больших n

$$(71)\quad \min_{1\geq|x|\geq e} I(x)> I\left(\frac{2k}{n}-1\right)-d\geq\min_{k\in A_n} I\left(\frac{2k}{n}-1\right)-d\ .$$

Учитывая неравенства (68) и (71), получим следующее выражение:

$$(72)\quad \lim_{n\to\infty}\min_{k\in A_n} I\left(\frac{2k}{n}-1\right)=\min_{1\geq|x|\geq e} I(x)$$

Из выражений (67) и (72) следует доказываемое утверждение (22).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 2.

Согласно формуле (36)

(73) $$\frac{dG}{dn} = (n \ln Z)' = \ln Z + \frac{n}{Z}\frac{dZ}{dn} = \ln Z - \frac{1}{n} R,$$

где $R = R(n) = \mathrm{E}H_{ut}(P_G)$. Далее справедливость утверждения 2 следует из определения потенциальной ценности сети (29).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 3.

Пусть $f : \Omega_n \to \mathrm{R}$ – произвольная функция. Для нее справедлив следующий предел:

(74) $$\lim_{n \to \infty} \sum_{w \in \Omega_n} f\left(w^{(n)}\right) e^{\frac{H_{t,u}\left(w^{(n)}\right)}{n}} \Pi_n\left\{w^{(n)}\right\} = \sum_{w \in \Omega_n} f\left(w^{(n)}\right) \Pi_n\left\{w^{(n)}\right\}.$$

Поэтому, исходя из определения слабой сходимости вероятностных мер [1], утверждение доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 4.

Исходя из определения полезности всей сети (42), видно, что ее первый член $\sum_{i,j=1}^{n} t_{ij} w_i w_j$ максимален в случае, когда действия агентов имеют одинаковый знак. Поэтому справедлив п. 3. Если управление не равно нулю, то максимум будет определяться вторым членом $u\sum_{i=1}^{n} w_i$. Отсюда вытекает справедливость пп. 1, 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 5.

Пусть для определенности $u > 0$ и пусть $f : \Omega_n \to \mathrm{R}$ – произвольная функция.

В силу Утверждения 4 $\forall w^{(n)} \in \Omega_2^n$, $w^{(n)} \neq w_+^{(n)}$, справедливо строгое неравенство $H_{t,u}\left(w^{(n)}\right) < H_{t,u}\left(w_+^{(n)}\right)$. Поэтому

(75) $$\lim_{n \to +0} e^{\frac{H_{t,u}\left(w^{(n)}\right) - H_{t,u}\left(w_+^{(n)}\right)}{n}} = 0.$$

Поэтому для достаточно малого n можно выделить мажорирующее слагаемое:

(76)
$$\sum_{w\in\Omega_n} f\left(w^{(n)}\right) e^{\frac{H_{t,u}\left(w^{(n)}\right)}{n}} \Pi_n\left\{w^{(n)}\right\} = = 2^{-n} f\left(w_+^{(n)}\right) e^{\frac{H_{t,u}\left(w_+^{(n)}\right)}{n}} + o\left(e^{\frac{H_{t,u}\left(w_+^{(n)}\right)}{n}}\right).$$

В силу выражения (76) математическое ожидание f по мере Гиббса можно записать в следующем виде

(77)
$$\mathrm{E}_G f = \frac{2^{-n} f\left(w_+^{(n)}\right) e^{\frac{H_{t,u}\left(w_+^{(n)}\right)}{n}} + o\left(e^{\frac{H_{t,u}\left(w_+^{(n)}\right)}{n}}\right)}{2^{-n} e^{\frac{H_{t,u}\left(w_+^{(n)}\right)}{n}} + o\left(e^{\frac{H_{t,u}\left(w_+^{(n)}\right)}{n}}\right)}.$$

Справедливость утверждения следует из перехода к пределу по n в выражении (77). Для $u < 0$ доказательство производится аналогично.

Литература

1. БИЛЛИНГСЛИ П. *Сходимость вероятностных мер*. – М.: Наука, 1977.
2. БИЛЛИНГСЛЕЙ П. *Эргодическая теория и информация*. – М.: Мир, 1969.
3. БРЕЕР В. В., ГУЛИНСКИЙ О. В. *Большие уклонения в бесконечномерном векторном пространстве*. – М.: МФТИ, 1996.
4. ГУБАНОВ Д. А., НОВИКОВ Д. А., ЧХАРТИШВИЛИ А. Г. *Модели влияния в социальных сетях* (*обзор*) // Управление большими системами. – 2009. – №27.
5. ГУБКО М. В., НОВИКОВ Д. А. *Теория игр в управлении организационными системами*. – М.: Синтег, 2002.

6. НОВИКОВ Д. А. *Теория управления организационными системами*. – М.: Физматлит, 2007.
7. РУМЕР Ю. Б., РЫВКИН М. Ш. *Термодинамика, статистическая физика и кинетика*. – М.: Наука, 1972.
8. СТРАТОНОВИЧ Р. Л. *Теория информации*. – М.: Сов. Радио, 1975.
9. ШИРЯЕВ А. Н. *Вероятность*. Учеб. пособ. для вузов, – М: Наука, 1989.
10. ЯГЛОМ А. М. ЯГЛОМ И. М. *Вероятность и информация*. – М.: Наука, 1973.
11. BRISCOE B., ODLYZKO A., TILLY B. *Metcalfe's Law is Wrong*. – 2006. – URL: http://spectrum.ieee.org/computing/networks/metcalfes-law-is-wrong/1.
12. ELLIS R. *Entropy, Large Deviations and Stochastical Mechanics*. – Springer, New York, 1985.
13. GRANOVETTER M. *Threshold Models of Collective Behavior* // AJS. – 1978. – Vol. 83, №6. – P. 1420-1443.
14. REED DAVID P. *That Sneaky Exponential—Beyond Metcalfe's Law to the Power of Community Building*. – 1999. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.reed.com/gfn/docs/reedslaw.html
15. O'REILLY T. *Design Patterns and Business Models for the Next Generation of Software*. – 2005. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://oreilly.com/pub/a/web2/archive/what-is-web-20.html?page=1
16. SIMEONOV S. *Metcalfe's Law: more misunderstood than wrong?* – 2006. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://blog.simeonov.com/2006/07/26/metcalfes-law-more-misunderstood-than-wrong/

STOCHASTIC MODELS OF SOCIAL NETWORKS

Vladimir Breer, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow (breer@live.ru)

Abstract: Stochastic models of agents' behavior in social networks are considered. Basing on these models the value of a network is evaluated for agents and for the control center – the principal. Social networks are classified on the basis of the factors influencing the behavior of agents in a social network. Equilibrium states of social networks are described along with their fluctuations. Various interpretations are studied in the limit when agents' number grows to infinity; the influence of other micro characteristics of social networks is also investigated.

Keywords: social networks, entropy, information, fluctuations, statistical physics, Gibbs measure, control science, phase transition.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии А.Г. Чхартишвили