

**Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН**

УПРАВЛЕНИЕ БОЛЬШИМИ СИСТЕМАМИ

Выпуск 28

Март 2010

**СБОРНИК
ТРУДОВ**

ISSN 1819-2467

Регистрационный номер Эл №ФС77-27285 от 22.02.2007

Москва – 2010

www.mtas.ru

ИНТЕРНЕТ-сайт теории управления организационными системами

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ ОРГАНИЗАЦИОННЫМИ СИСТЕМАМИ

ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ УПРАВЛЕНИЯ ИМ. В.А. ТРАПЕЗНИКОВА РАН



Целью сайта является предоставление специалистам по теории и практике управления организационными системами (ученым, преподавателям, аспирантам, студентам, а также реальным управленцам) доступа к ресурсам, отражающим современное состояние теории и возможности обмена идеями и результатами.

На сайте имеются разделы:

Теория – с обзором теории управления организационными системами, глоссарием, информацией для аспирантов;

Практика – с обзором результатов внедрения механизмов управления в реальных организациях;

Библиография – около 2500 публикаций по теории управления, снабжена классификатором и аннотациями;

Электронная библиотека – около 700 полнотекстовых монографий, статей и учебных пособий;

а также многое другое.

На сайте работает **форум**, на котором можно обсудить вопросы, относящиеся к математике, экономике, управлению организациями, узнать новости теории управления и ознакомиться с планируемыми конференциями и семинарами.

ubs.mtas.ru

Интернет-сайт электронного периодического
научного издания «Управление большими
системами: сборник трудов»

УПРАВЛЕНИЕ БОЛЬШИМИ СИСТЕМАМИ

ЭЛЕКТРОННЫЙ СБОРНИК НАУЧНЫХ ТРУДОВ
ИНСТИТУТА ПРОБЛЕМ УПРАВЛЕНИЯ ИМ. В.А. ТРАПЕЗНИКОВА РАН

С 1998 года Институт проблем управления РАН выпускает периодический сборник трудов ученых, занимающихся разработкой и исследованием математических моделей управления большими (социально-экономическими, организационными, организационно-техническими и др.) системами. Все статьи, публикуемые в сборнике, проходят рецензирование ведущими специалистами по теории управления.

С 2006 года сборник "Управление большими системами" вместе с ведущим журналом ИПУ РАН "Проблемы управления" – включены в Российский индекс научного цитирования (РИНЦ).

С июля 2007 года Сборник входит в список ВАК (перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертации на соискание ученой степени доктора и кандидата наук):

* по управлению, вычислительной технике и информатике (для докторов наук);

* по электронике, измерительной технике, радиотехнике и связи; по энергетике (для кандидатов наук).

**Уважаемые коллеги! Приглашаем Вас опубликовать
Вашу статью в очередном выпуске сборника
"Управление большими системами"!**

Периодичность сборника - 4 раза в год. Время выхода прошедшей рецензирование статьи - 3-4 месяца. Плата с авторов за публикацию рукописей не взимается.

Редколлегия сборника "Управление большими системами" сотрудничает со многими научными и общественными организациями:

ФГУП НТЦ "Информрегистр" по указанию Правительства РФ осуществляет регистрацию электронных научных изданий, публикация в которых приравнивается ВАКом к опубликованным работам, отражающим основные результаты диссертационной работы. Сборник трудов "Управление большими системами" с 2006 года зарегистрирован НТЦ "Информрегистр".

Научная электронная библиотека eLIBRARY.RU - это крупнейший российский информационный портал в области науки, технологии, медицины и образования, содержащий рефераты и полные тексты более 12 млн научных статей и публикаций. Все выпуски сборника трудов "Управление большими системами" доступны в открытом доступе на платформе eLIBRARY.RU.

Общероссийский математический портал Math-Net - это общероссийский математический портал, предоставляющий российским и зарубежным математикам различные возможности в поиске информации о математической жизни в России. Все выпуски сборника трудов "Управление большими системами" доступны в открытом доступе на платформе MathNet.Ru.

Всероссийский институт научной и технической информации РАН – это крупнейший российский и мировой информационный и аналитический центр. Все выпуски Сборника трудов "Управление большими системами" обрабатываются ВИНИТИ, включаются им в базу данных и реферативный журнал.

Издательство "МАИК Наука" при поддержке Российской академии наук издает более 180 академических журналов на английском языке и совместно с Академиздатцентром Наука – более 200 журналов на русском языке практически по всем направлениям современной науки. С 2010 года Сборник трудов «Управление большими системами» сотрудничает с выпускаемым издательством МАИК Наука журналом «Автоматика и телемеханика», что предполагает опубликование избранных статей Сборника на английском языке в выпускаемом издательством МАИК «Наука» журнале «Automation and Remote Control» (английская версия журнала «Автоматика и телемеханика»).

Подробнее о программах сотрудничества со Сборником УБС – на официальном сайте ubs.mtas.ru

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова

**УПРАВЛЕНИЕ
БОЛЬШИМИ
СИСТЕМАМИ**

СБОРНИК ТРУДОВ

Выпуск 28

Москва – 2010

КООРДИНАЦИОННЫЙ СОВЕТ

Академики РАН: Васильев С.Н., Емельянов С.В., Коровин С.К., Куржанский А.Б., Федосов Е.А., Черноусько Ф.Л.; члены-корреспонденты РАН: Желтов С.Ю., Каляев И.А., Пархоменко П.П., Попков Ю.С.; д-ра техн. наук: Бутковский А.Г., Дорофеев А.А., Кузнецов О.П., Кульба В.В., Кротов В.Ф., Лотоцкий В.А., Павлов Б.В., Поляк Б.Т., Рутковский В.Ю.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор: член-корр. РАН Новиков Д.А. **Отв. секретарь:** к.т.н. Губко М.В. Д-ра техн. наук: проф. Алескеров Ф.Т. (ГУ ВШЭ), проф. Артамонов Е.И. (ИПУ РАН), д-р экон. наук, проф. Архипова М.Ю. (ИПИ РАН), д-ра техн. наук: проф. Афанасьев В.Н. (МИЭМ), проф. Бахтадзе Н.Н. (ИПУ РАН), проф. Бурков В.Н. (ИПУ РАН), проф. Вишневский В.М. (ИППИ РАН), д-р экон. наук, проф. Голиченко О.Г. (ЦЭМИ РАН), д-р физ.-мат. наук, проф. Добровидов А.В. (ИПУ РАН), д-ра техн. наук: проф. Заложнев А.Ю. (ИПУ РАН), проф. Ириков В.А. (МФТИ), проф. Калянов Г.Н. (ИПУ РАН), проф. Касаткин С.И. (ИПУ РАН), проф. Каравай М.Ф. (ИПУ РАН), д-р экон. наук, проф. Ключков В.В. (ИПУ РАН), д-ра техн. наук: проф. Кононенко А.Ф. (ВЦ РАН), проф. Курдюков А.П. (ИПУ РАН), проф. Лебедев В.Г. (ИПУ РАН), к-т техн. наук, доцент Лебедев В.Н. (ИПУ РАН), д-р экон. наук, проф. Ловчиновский Э.В. (ИПУ РАН), д-р техн. наук, проф. Мандель А.С. (ИПУ РАН), д-р экон. наук, проф. Нижегородцев Р.М. (ИПУ РАН), д-ра техн. наук: проф. Новосельцев В.Н. (ИПУ РАН), проф. Орлов А.И. (МВТУ), канд. техн. наук Петрикевич Я.И. (ИПУ РАН), д-р физ.-мат. наук, проф. Рапопорт Л.Б. (ИПУ РАН), д-р техн. наук, проф. Рыков А.С. (МИСИС), д-р экон. наук, проф. Секерин В.Д. (ИПУ РАН), д-ра техн. наук: проф. Сидельников Ю.В. (МАИ), проф. Совлуков А.С. (ИПУ РАН), д-р экон. наук, проф. Сухарев О.С. (Ин-т экономики РАН), д-ра техн. наук: проф. Уткин В.А. (ИПУ РАН), проф. Хоботов Е.Н. (МВТУ), д-ра физ.-мат. наук: доцент Чеботарев П.Ю. (ИПУ РАН), проф. Чхартишвили А.Г. (ИПУ РАН), проф. Щербakov П.С. (ИПУ РАН).

РЕГИОНАЛЬНЫЕ РЕДАКЦИОННЫЕ СОВЕТЫ

Волгоград – д-ра физ.-мат. наук: проф. Воронин А.А., проф. Лосев А.Г. (ВолГУ); **Воронеж** – д-р техн. наук, проф. Баркалов С.А., д-р физ.-мат. наук, проф. Головинский П.А. (ВГАСУ), д-р техн. наук, проф. Подвальный С.Л. (ВГТУ); **Ижевск** – д-р физ.-мат. наук, проф. Непейвода Н.Н., к-т физ.-мат. наук, проф. Родионов В.И. (УдмГУ); **Иркутск** – д-ра физ.-мат. наук: проф. Бычков И.В., проф. Лакеев А.В. (ИДСТУ СО РАН); **Казань** – д-р физ.-мат. наук, проф. Маликов А.И., д-р техн. наук, проф. Сиразетдинов Р.Т. (КГТУ-КАИ); **Липецк** – д-ра техн. наук: проф. Кузнецов Л.А., проф. Погодаев А.К. (ЛГТУ); **Самара** – д-ра экон. наук: проф. Богатырев В.Д., проф. Гераськин М.И., д-р техн. наук, проф. Засканов В.Г. (СГАУ); **Санкт-Петербург** – д-ра физ.-мат. наук: проф. Петросян Л.А. (СПбГУ), проф. Фрадков А.Л. (ИПМ РАН); **Старый Оскол** – д-р техн. наук, проф. Еременко Ю.И. (СТИ); **Тверь** – д-ра техн. наук: проф. Кузнецов В.Н., проф. Палюх Б.В. (ТГТУ).

Адрес редакции: 117997, г. Москва, ул. Профсоюзная, д. 65.

Адрес в Интернет: ubs.mtas.ru.

Номер гос. регистрации электронного научного издания (ЭНИ): 0420900023.

© ИПУ РАН, 2010

СОДЕРЖАНИЕ

Системный анализ

- Горелов М. А.**
Об одной гипотезе в основаниях теории иерархических игр..... 5
- Юдицкий С. А., Владиславлев П. Н., Точ Д. С.**
Триадный подход к моделированию систем сетевидного управления..... 24

Математическая теория управления

- Муравьева О. В.**
Возмущение и коррекция систем линейных неравенств..... 40
- Поздяев В. В.**
Об аналитическом решении систем матричных неравенств, двойственных к системам неравенств Ляпунова..... 58

Анализ и синтез систем управления

- Гуляев С. В., Шубладзе А. М., Малахов В. А., Ольшеванг В. Р., Кротов А. В.**
Адаптивное оптимальное в среднеквадратичном смысле дифференцирование..... 75
- Солнечный Э. М., Черёмушкина Л. А.**
Исследование условий причинности и устойчивости системы управления линейным объектом теплопроводности (особые случаи). Часть I..... 89

Информационные технологии в управлении

Айткулов П. Г.

Обработка символьных массивов 126

Управление в социально-экономических системах

Акинфиев В. К.

Инвестиционные стратегии компаний и цикличность рынков металлопродукции 179

Эйфельд А. А.

Моделирование двухставочного тарифа на электроэнергию с учетом социальной нормы потребления на примере населения г. Волгограда..... 197

Управление техническими системами и технологическими процессами

Гоник М. М., Боевкин В. И.

Повышение точности управления температурным режимом в установках выращивания кристаллов..... 211

Куприянов Б. В.

Моделирование конвейерных бизнес-процессов 230

Программы и системы моделирования объектов, средств и систем управления

Директор Л. Б., Майков И. Л.

Решение задач оптимизации сложных энергетических систем 274

УДК 519.865 + 519.95

ББК 22.165

ОБ ОДНОЙ ГИПОТЕЗЕ В ОСНОВАНИЯХ ТЕОРИИ ИЕРАРХИЧЕСКИХ ИГР

Горелов М. А.¹

(Вычислительный центр РАН, Москва)

При исследовании игр с фиксированным порядком ходов обычно принимается некоторая гипотеза о поведении игрока нижнего уровня, существенно упрощающая как «ответ» в получающейся задаче, так и рассуждения, приводящие к этому ответу. Ниже обсуждается адекватность этой гипотезы. При этом рассматривается простейшая игра двух лиц, на примере которой видны как основные проблемы, так и некоторые подходы к их решению.

Ключевые слова: иерархические игры, максимальный гарантированный результат, устойчивость.

Введение

Пусть имеется игра двух лиц, в которой первый игрок выбирает свои управления из множества U , а второй – из множества V . Будем считать, что цели игроков описываются стремлением к максимизации функций g и h соответственно.

Рассмотрим следующую схему взаимодействия игроков (по традиции носящей имя игры Γ_2 [3]). Предположим, что первый игрок рассчитывает и действительно будет иметь информацию о выборе его партнером управления $v \in V$ до принятия своего окончательного решения. Таким образом, стратегиями первого

¹ Михаил Александрович Горелов, кандидат физико-математических наук, (griever@ccas.ru).

игрока являются всевозможные функции u_* из множества V в множество U (множество всех его стратегий обозначим U_*). При этом будем считать, что игрок 1 первым выбирает свою стратегию $u_* \in U_*$ и сообщает ее партнеру.

Как в этой ситуации следует поступать первому игроку? Для ответа на этот вопрос мы будем пользоваться общими методологическими принципами, изложенными в [4]. В данной работе наиболее существенными будут два из них.

Принцип 1. Эффективность стратегий должна оцениваться на основе получения гарантированной величины выигрыша.

Принцип 2. Исследователь операции должен использовать всю доступную ему информацию.

На основе второго принципа следует использовать информацию о функции выигрыша второго игрока для оценки множества его возможных ответов на стратегию u_* . Как это сделать? Поскольку второй игрок знает выбранную партнером стратегию, его результаты зависят только от его решений. Поэтому естественно было бы считать, что он непременно выберет одну из точек максимума своего критерия $h(u_*(v), v)$. Однако тут возникает как минимум два вопроса.

Вопрос 1. Как описать поведение второго игрока, если максимум функции $h(u_*(v), v)$ не достигается ни в одной точке?

Вопрос 2. Можно ли считать, что второй игрок будет добиваться абсолютно точной реализации максимума своего выигрыша?

Первый вопрос является по преимуществу математическим, а потому решается сравнительно несложно. Второй – скорее содержательный, и для ответа на него требуются более тонкие рассуждения.

Начиная с работы [9] эти проблемы решаются следующим образом. Множество рациональных ответов второго игрока на стратегию u_* определяется одним из следующих условий:

$$(1) \quad B(u_*) = \left\{ v \in V : h(u_*(v), v) = \max_{w \in V} h(u_*(w), w) \right\},$$

если максимум в формуле (1) достигается;

$$(2) \quad B(u_*) = \left\{ v \in V : h(u_*(v), v) \geq \sup_{w \in V} h(u_*(w), w) - d(u_*) \right\}$$

в противном случае. Здесь d – функционал, определенный на множестве U_* и принимающий положительные значения. Игрок с таким поведением будем называть абсолютно рациональным. Тогда стратегия u_* гарантирует первому игроку получение выигрыша

$$r(u_*) = \inf_{v \in B(u_*)} h(u_*(v), v),$$

а его максимальный гарантированный результат равен

$$(3) \quad R = \sup_{u_* \in U_*} \inf_{v \in B(u_*)} h(u_*(v), v).$$

Таким образом, даются ответы на оба поставленных выше вопроса, причем на второй – определенно положительный. Между тем, это явно противоречит первому из приведенных выше методологических принципов. В самом деле, Плюшкин, видимо, сидит в душе каждого человека, но возведение его принципа поведения в абсолют – это определенная идеализация. И оправдана она лишь тогда, когда от этого не сильно меняется найденное решение, по крайней мере, в типичных случаях. К этому могут быть добавлены стандартные рассуждения о том, что функция выигрыша противника не может быть известной абсолютно точно, что при поиске максимума неизбежны ошибки округления и т. д. (см. [1, 11, 12, 15]).

На первый взгляд, обсуждение таких тонкостей может представлять интерес лишь для любителей математической строгости. Однако детальное знакомство с иерархическими играми показывает, что они весьма часто оказываются неустойчивыми к малым изменениям параметров модели (см. [5, 13]), а потому данный вопрос является далеко не праздным.

Добавим, что после работы [9] этот прием использовался многократно. Большое число примеров и далеко не полный список ссылок можно найти в монографиях [5, 10]. Для всех этих случаев вопросы, исследуемые в данной заметке, являются

актуальными. Но рискну предположить, что решать их можно по одной схеме.

1. О достижимости максимума

Обсудим первый из поставленных выше вопросов. Везде в дальнейшем будем предполагать, что множества U и V наделены топологией и компактны, а функции g и h непрерывны.

Примем следующее допущение.

Гипотеза 1. Если $v \in B(u_*)$ и $h(u_*(w), w) > h(u_*(v), v)$, то $w \in B(u_*)$.

По-видимому, это самое слабое предположение, согласующееся с представлением о том, что функция h хоть как-то описывает цели второго игрока.

Эта гипотеза примерно соответствует концепции ограниченной рациональности, предложенной Г. Саймоном в пятидесятых годах прошлого века [16].

Для игры с абсолютно рациональным вторым игроком эта гипотеза выполняется.

Из гипотезы 1 следует существование такого функционала d , определенного на множестве U_* и принимающего неотрицательные значения, что

$$\left\{ v \in V : h(u_*(v), v) > \sup_{w \in V} h(u_*(w), w) - d(u_*) \right\} \subset B(u_*)$$

и

$$B(u_*) \subset \left\{ v \in V : h(u_*(v), v) \geq \sup_{w \in V} h(u_*(w), w) - d(u_*) \right\}.$$

Доказательство этого факта не вызывает труда.

Отказываясь от предположения о том, что второй игрок ведет себя подобно Плюшкину, следует определять множество рациональных ответов второго игрока формулой (2) для всех стратегий u_* . Игрока, поведение которого описывается таким образом, будем называть d -рациональным.

Три важных частных случая функционала d выделены в [13] (один из них совпадает с вводимым ниже понятием k -рациональности). Но можно представить себе и другие, более сложные варианты. Например, очень привлекательно выглядит предположение о том, что значение $d(u_*)$ тем больше, чем сложнее задача, стоящая перед вторым игроком, т. е. чем сложнее найти максимум функции $j(v) = h(u_*(v), v)$.

Можно ожидать, что решение задачи с абсолютно рациональным вторым игроком существенно проще, чем решение аналогичной задачи для игры с d -рациональным противником. Из дальнейшего будет видно, что это ожидание оправдано. Поэтому естественно ставить вопрос о том, насколько корректно можно рассматривать модель с абсолютно рациональным противником как идеализацию (предельный случай) игры с d -рациональным вторым игроком.

Разумеется, та же постановка вопроса правомерна и в том случае, когда максимумы в задаче второго игрока заведомо достигаются (например, в иерархической игре Γ_1). Но в таком случае естественно выглядят предположения о компактности множеств управлений и непрерывности функций выигрыша игроков. А в этих предположениях задача решается стандартными методами математического анализа. В нашем случае задать подходящую топологию на множестве стратегий U_* не удастся (см. по этому поводу [7, 8]), а потому приходится искать обходные пути. А именно, приходится описывать структуру некоторых оптимальных стратегий в терминах множеств U и V , и использовать их топологию.

Аналогичные вопросы поднимались и в [1, 15], но и там рассматриваются модели без обмена информацией о действиях игроков, а потому проблемы решаются стандартным образом.

Не накладывая дополнительных ограничений на функционал d , вычислить значение максимального гарантированного результата первого игрока в игре с d -рациональным противником и найти структуру оптимальных стратегий крайне сложно. Поэтому воспользуемся оценками.

Начнем с рассмотрения частного случая, когда для любой стратегии u_* значение $d(u_*)$ равно одному и тому же числу k . Игрока с таким поведением назовем k -рациональным.

Непосредственно проверяется, что если для всех стратегий u_* выполняется неравенство $d(u_*) < k$, то максимальный гарантированный результат первого игрока в игре с d -рациональным противником не меньше аналогичного результата в игре с k -рациональным вторым игроком.

Для получения обратной оценки потребуется

Лемма 1. В игре с абсолютно рациональным вторым игроком для любой стратегии $w_* \in U_*$ первого игрока найдется такая стратегия u_* , что $r(u_*) \geq r(w_*)$ и верхняя грань $\sup_{v \in V} h(u_*(v), v)$

достигается.

Доказательство. Пусть v^1, v^2, \dots – последовательность точек из множества $B(w_*)$, для которой

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(w_*(v^t), v^t) = \sup_{v \in V} h(w_*(v), v).$$

В силу компактности, не ограничивая общности, можно считать, что последовательности v^1, v^2, \dots и $w_*(v^1), w_*(v^2), \dots$ сходятся к v^0 и u^0 соответственно.

Положим $u_*(v) = w_*(v)$ для $v \neq v^0$ и $u_*(v^0) = u^0$. Тогда верхняя грань $\sup_{v \in V} h(u_*(v), v)$ достигается в точке v^0 и

$$r(u_*) \geq g(u^0, v^0) \geq \lim_{t \rightarrow \infty} g(w_*(v^t), v^t) \geq r(w_*).$$

Заметим, что в случае абсолютно рационального первого игрока его максимальный гарантированный результат не зависит от функционала d . Поэтому справедливо

Следствие. Максимальный гарантированный результат первого игрока в игре с абсолютно рациональным вторым игроком не меньше аналогичного результата в игре с d -рациональным вторым игроком.

Аналогично лемме 1 доказывается

Лемма 2. В игре с k -рациональным вторым игроком для любой стратегии $w_* \in U_*$ первого игрока найдется такая стратегия u_* , что $r(u_*) \geq r(w_*)$ и верхняя грань $\sup_{v \in V} h(u_*(v), v)$ достигается.

Доказанные леммы отчасти отвечают на вопрос 1. Впрочем, нетрудно придумать такой функционал d , что аналог лемм 1 и 2 для соответствующей игры с d -рациональным вторым игроком неверен. Но такие контрпримеры плохо интерпретируются.

Заметим, что в учебнике [2] множество рациональных ответов первого игрока определяется формулой (1), если максимум в ней достигается, и равенством $B(w_*) = V$ во всех остальных случаях. Пожалуй, а priori такое определение является совсем не мотивированным. Лемма 1 ставит все на свои места.

2. Вычисление максимального гарантированного результата

Для игр с абсолютно рациональным и k -рациональным вторым игроком максимальный гарантированный результат (3) может быть выражен в терминах множеств U и V и функций g и h , что и будет сделано в данном разделе. Введем необходимые обозначения. Положим

$$L = \max_{v \in V} \min_{u \in U} h(u, v), \quad D(l) = \{(u, v) \in U \times V: h(u, v) > l\},$$

$$E(l) = \left\{ v \in V : \min_{u \in U} h(u, v) \geq l \right\}, \quad K(l) = \sup_{(u, v) \in D(l)} g(u, v),$$

$$M(l) = \min_{v \in E(l)} \max_{u \in U} g(u, v).$$

Начнем с замечания: если стратегии u_* и w_* таковы, что $B(u_*) \subset B(w_*)$ и $u_*(v) = w_*(v)$ при $v \in B(u_*)$, то $r(u_*) \geq r(w_*)$.

Обратимся к игре с абсолютно рациональным вторым игроком. В силу леммы 1 при поиске оптимальной стратегии первого игрока можно ограничиться рассмотрением таких стратегий, что максимум в определении множества рациональных ответов

противника достигается. Пусть w_* – такая стратегия, $v^0 \in B(w_*)$ и $u^0 = w_*(v^0)$.

Множество $E(L)$ не пусто и выбор любого управления из этого множества гарантирует второму игроку получение выигрыша, большего или равного L . Поэтому $h(u^0, v^0) \geq L$.

Если $h(u^0, v^0) > L$, то стратегию w_* можно подправить так, что в множестве рациональных ответов второго игрока останется одна точка v^0 , отчего гарантированный результат первого игрока может только улучшиться. В самом деле, определим стратегию наказания u_*^p условием

$$h(u_*^p(v), v) = \min_{u \in U} h(u, v),$$

и рассмотрим стратегию u_* такую, что

$$(4) \quad u_*(v) = \begin{cases} u^0, & \text{если } v = v^0, \\ u_*^p(v) & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Эта стратегия гарантирует первому игроку выигрыш $g(u^0, v^0)$, который в силу сделанного замечания не хуже выигрыша, гарантируемого стратегией w_* .

Выбрав подходящим образом точку $(u^0, v^0) \in D(L)$ и используя стратегию вида (4), можно гарантированно получить выигрыш, сколь угодно близкий к $K(L)$.

Пусть теперь стратегия w_* такова, что $h(u^0, v^0) = L$. Тогда во множество $B(w_*)$ входит все множество $E(L)$. Поэтому стратегия w_* не может гарантировать первому игроку выигрыша, большего $M(L)$. Стратегию w_* можно подправить, исключив из множества $B(w_*)$ все другие точки и не ухудшив при этом гарантированного выигрыша. А в точках множества $E(L)$ разумно выбирать управления первого игрока в соответствии с его абсолютно оптимальной стратегией u_*^a , определенной условием

$$g(u_*^a(v), v) = \max_{u \in U} g(u, v).$$

Рассмотрим стратегию

$$u_*(v) = \begin{cases} u_*^a(v), & \text{если } v \in E(L), \\ u_*^p(v) & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Для нее $B(u_*) \subset E(L)$, поэтому она гарантирует первому игроку выигрыш, не меньший чем $M(L)$.

Таким образом, мы установили, что в игре с абсолютно рациональным вторым игроком $R = \max\{K(L), M(L)\}$.

Этот результат получен впервые в [3]. Приведенная схема рассуждений позволяет получить аналогичный результат и для игр с k -рациональным вторым игроком. Обратимся к их исследованию.

Пусть w_* – произвольная стратегия первого игрока, для которой верхняя грань $\sup_{v \in V} h(w_*(v), v)$ достигается в точке v^0 , и $u^0 = w_*(v^0)$. Теперь придется выделить три случая.

1) Если $h(u^0, v^0) > L + k$, то стратегия w_* не может гарантировать выигрыша, большего $K(L + k)$, а стратегия вида (4) при подходящем выборе точки (u^0, v^0) позволяет гарантированно получить результат, сколь угодно близкий к $K(L + k)$.

2) Если $h(u^0, v^0) = L$, то в $B(w_*)$ входит все множество $E(L - k)$, поэтому стратегия w_* позволяет гарантированно получить выигрыш, не больший $M(L - k)$, а стратегия вида

$$u_*(v) = \begin{cases} u_*^a(v), & \text{если } v \in E(L - k), \\ u_*^p(v) & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

позволяет получить именно такой выигрыш.

3) Остается рассмотреть случай $L < h(u^0, v^0) \leq L + k$. Пусть $g(u^0, v^0) = l$. Тогда в множество $B(w_*)$ входят точка v^0 , множество $E(l - k)$ и, возможно, еще какие-то точки. Поэтому такая стратегия w_* не может гарантировать выигрыш больший, чем $N(k)$, где

$$N(k) = \sup_{(u, v) \in F(k)} \min\{g(u, v), M(g(u, v) - k)\},$$

$$F(k) = \{(u, v) \in U \times V: L < g(u, v) \leq L + k\}.$$

Если теперь выбрать произвольную точку (u^0, v^0) из множества $F(k)$ и рассмотреть стратегию

$$u_*(v) = \begin{cases} u^0, & \text{если } v = v^0, \\ u_*^a(v), & \text{если } v \in E(g(u^0, v^0) - k), \text{ но } v \neq v^0, \\ u_*^p & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

то множество $B(u_*)$ будет содержаться в объединении $\{v^0\} \cup E(g(u^0, v^0) - k)$, а потому первый игрок гарантированно получит выигрыш $\min \{g(u^0, v^0), M(g(u^0, v^0) - k)\}$. За счет подходящего выбора точки (u^0, v^0) можно гарантировать получение выигрыша, сколь угодно близкого к $N(k)$.

Таким образом, доказана

Теорема 1. В игре с k -рациональным вторым игроком имеет место равенство $R = \max \{K(L + k), M(L - k), N(k)\}$.

Заметим, что подобные конструкции появлялись в [11] при регуляризации задачи поиска максимального гарантированного результата в игре с абсолютно рациональным вторым игроком. Но игры с k -рациональным вторым игроком там не рассматривались.

3. Предельные соотношения

Естественно поставить вопрос о связи максимального гарантированного результата в игре с абсолютно рациональным вторым игроком и в игре с k -рациональным вторым игроком при малых значениях k . Ответ на него дает

Теорема 2. Максимальный гарантированный результат в игре с k -рациональным вторым игроком стремится к максимальному гарантированному результату в игре с абсолютно рациональным вторым игроком, когда k , убывая, стремится к нулю.

Доказательство. Заметим, прежде всего, что

$$(5) \quad \lim_{k \rightarrow 0^+} K(L + k) = K(L).$$

В самом деле, $D(L + k) \subset D(L)$, а потому $K(L + k) \leq K(L)$ ($L + k \leq K(L)$) при $k \geq 0$. С другой стороны, выберем точку $(u^e, v^e) \in D(L)$ так, что $g(u^e, v^e) > K(L) - \epsilon$. В этой точке

$h(u^e, v^e) > L$, а потому для всех $k < g(u^e, v^e) - L$ точка (u^e, v^e) принадлежит $D(L + k)$. Значит, $K(L + k) \geq g(u^e, v^e) > K(L) - e$. В силу произвольности e отсюда следует равенство (5).

В силу следствия из леммы 1 этим доказывается теорема в случае, когда $\max \{K(L), M(L)\} = K(L)$.

Аналогичным образом, если $\max \{K(L), M(L)\} = M(L)$, то теорема следует из равенства

$$(6) \quad \lim_{k \rightarrow 0+} M(L - k) = M(L).$$

Остается установить его.

Непосредственно из определения следует, что при $k \geq 0$ выполняется неравенство $M(L - k) \leq M(L)$. Поэтому

$$\lim_{k \rightarrow 0+} M(L - k) \leq M(L).$$

Допустим, что

$$\lim_{k \rightarrow 0+} M(L - k) < M(L).$$

Тогда существует такое $e > 0$, что для любого $k > 0$ найдется точка $v^k \in V$, для которой $\min_{u \in U} h(u, v^k) \geq L - k$ и

$$\max_{u \in U} g(u, v^k) \leq M(L) - e.$$

В силу компактности пространства V множество $\{v^k : k = 1/n, n = 1, 2, \dots\}$ содержит предельную точку v^0 . Так как функции $j(v) = \min_{u \in U} h(u, v)$ и $y(v) = \max_{u \in U} g(u, v^k)$ непрерывны, в

этой точке выполняются неравенства $\min_{u \in U} h(u, v^0) \geq L$ и

$\max_{u \in U} g(u, v^0) \leq M(L) - e$. Первое из них означает, что точка v^0

принадлежит множеству $E(L)$, а тогда второе противоречит определению величины $M(L)$.

Полученное противоречие доказывает равенство (6) а с ним и теорему.

Следствие. Для любой игры и любого $e > 0$ найдется такое $k > 0$, что для любого функционала d , ограниченного сверху числом k , максимальные гарантированные результаты первого игрока в играх с абсолютно рациональным и с d -рациональным

вторым игроком отличаются меньше чем на ϵ .

Назовем игру сильно регулярной, если $K(L) \geq M(L)$ и верхняя грань в определении величины $K(L)$ достигается в некоторой точке (u^0, v^0) . Из приведенного доказательства видно, что в сильно регулярных играх при $k < g(u^0, v^0) - L$ максимальные гарантированные результаты первого игрока в играх с абсолютно рациональным и k -рациональным вторым игроком попросту совпадают. В [6] показано, что в некотором естественном смысле сильно регулярные игры типичны.

Разумеется, типичность следует понимать как типичность в некотором фиксированном классе, и предыдущее замечание относится к классу всех игр с фиксированными множествами управлений и произвольными непрерывными функциями выигрыша, близость которых оценивается с помощью равномерной метрики. Если на класс игр накладываются какие-то дополнительные ограничения, что может диктоваться, например, природой моделируемого конфликта, то типичными могут оказаться и игры, не являющиеся сильно регулярными. Поэтому их рассмотрение может представлять значительный интерес. Как показывают примеры следующего раздела, характер стремления максимального гарантированного результата первого игрока в игре с k -рациональным вторым игроком к аналогичному результату в игре с абсолютно рациональным вторым игроком может быть весьма различным.

4. Примеры

Во всех примерах данного раздела будем полагать $U = V = [0, 1]$.

Пример 1. Рассмотрим линейные игры с функциями выигрыша $g(u, v) = au - bv$ и $h(u, v) = cu + dv$, где a, b, c и d – некоторые положительные константы.

Со всякой игрой бывает удобно связать множество

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = g(u, v), y = h(u, v), u \in U, v \in V\}.$$

Для данной игры это множество представляет собой параллелограмм с вершинами $(0, 0)$, (a, c) , $(-b, d)$ и $(a - b, c + d)$.

Если множество C выпукло, то максимальный гарантированный результат первого игрока в игре с абсолютно рациональным вторым игроком равен

$$(7) \quad \max_{(x,y) \in C(L)} x,$$

где $C(l) = \{(x, y) \in C: y \geq l\}$, а L , как и прежде, – максимальный гарантированный результат второго игрока.

В данном примере $L = d$ и характер решения зависит от соотношения параметров.

Если $c > d$, то максимум в формуле (7) достигается в вершине (a, c) , поэтому игра является сильно регулярной и при $k < c - d$ максимальные гарантированные результаты первого игрока в играх с абсолютно рациональным и k -рациональным вторым игроком совпадают.

Если же $c < d$, то максимальный гарантированный результат первого игрока в игре с k -рациональным противником меньше его максимального гарантированного результата в игре с абсолютно рациональным вторым игроком на величину kb/d .

Разумеется, оба случая являются типичными в классе игр с линейными функциями выигрыша.

Пример 2. Рассмотрим игру с функциями выигрыша $g(u, v) = v \cos(2\pi(u + v))$ и $h(u, v) = v \sin(2\pi(u + v))$.

В этой игре максимальный гарантированный результат второго игрока $L = 0$, множество C представляет собой единичный круг с центром в начале координат и потому максимальный гарантированный результат первого игрока в игре с абсолютно рациональным противником равен 1, хотя и не достигается ни на одной из стратегий.

В силу выпуклости круга величина $K(L + k) = K(k)$ равна $\max_{(x,y) \in C(k)} x$. Поэтому величина $K(L + k)$, а значит, и максимальный

гарантированный результат первого игрока в игре с k -рациональным вторым игроком, отличается от такого же

результата в игре с абсолютно рациональным вторым игроком на величину порядка k^2 (при $k \rightarrow 0$).

Пример 3. Пусть функции выигрыша игроков имеют вид $g(u, v) = v \cos(2\pi(u + v))$ и $h(u, v) = v \sin(2\pi(u + v)) - (v \cos(2\pi(u + v)))^2$.

В этой игре, как и прежде, $L = 0$, а множество C представляет собой выпуклую яйцеобразную фигуру, вписанную в квадрат $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$. Максимум в формуле (7)

достигается для этой игры в точке $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, 0\right)$, а потому максимальный гарантированный результат первого игрока в игре с абсолютно рациональным вторым игроком равен $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Угловой коэффициент касательной к границе множества C в точке $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, 0\right)$ равен $I = -(\sqrt{5}-1)\sqrt{\frac{\sqrt{5}+2}{10}}$. Поэтому $K(L+k)$ отличается от $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ на величину порядка Ik .

Если стратегия u_* такова, что $\sup_{v \in V} h(u_*(v), v) \leq k$, то точка $v = 0$ принадлежит множеству $B(u_*)$, а значит, такая стратегия гарантирует первому игроку выигрыш, не больший нуля, что меньше $K(L+k)$. Поэтому в данной игре разница между максимальными гарантированными результатами первого игрока в играх с абсолютно рациональным и k -рациональным вторым игроком составляет величину порядка Ik (при $k \rightarrow 0$).

Пример 4. Пусть n – нечетное число. Рассмотрим игру с функциями выигрыша $g(u, v) = v \cos(2\pi(u + v))$ и $h(u, v) = (v \sin(2\pi(u + v)) - (v \cos(2\pi(u + v)))^2)^n$.

Поскольку функция $f(x) = x^n$ монотонно и непрерывно отображает отрезок $[-1, 1]$ на себя, максимальный гарантированный результат первого игрока в игре с абсолютно рациональ-

ным вторым игроком будет таким же, как в предыдущем примере (это следует из леммы 1).

А вот его максимальный гарантированный результат в игре с k -рациональным противником изменится. Разница результатов в двух рассматриваемых моделях составит величину порядка $(Ik)^{\frac{1}{n}}$.

Более того, при большом значении n множество C в данной игре будет весьма точно аппроксимироваться в Хаусдорфовой метрике объединением отрезков $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0, -1 \leq y \leq 1\}$ и $\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0, -\frac{\sqrt{5}-1}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right\}$. Поэтому при любом

фиксированном значении k можно подобрать настолько большое значение n , что разница между максимальными гарантированными результатами первого игрока в играх с абсолютно рациональным и k -рациональным вторым игроком будет больше, скажем, $1/2$.

Замечание. Качественные эффекты, обнаруженные в рассмотренных примерах, разумеется, не зависят от единиц измерения, в которых выражаются выигрыши игроков. Но количественные характеристики (например, величина I в двух предыдущих примерах) конечно же, зависят от выбора этих единиц. В примерах 2–4 функции выигрыша нормированы условиями

$$\begin{aligned} \max_{(u,v) \in U \times V} g(u,v) &= \max_{(u,v) \in U \times V} h(u,v) = 1, \\ \min_{(u,v) \in U \times V} g(u,v) &= \min_{(u,v) \in U \times V} h(u,v) = -1, \end{aligned}$$

поэтому можно считать, что величина k измерена в естественных безразмерных единицах, а потому и количественные результаты являются осмысленными.

5. Заключение

Попробуем теперь ответить на вопросы, сформулированные во введении. К сожалению, однозначного ответа получить не удастся. Причина этого заключается в следующем.

Традиционно интересы игроков задаются с помощью функций, принимающих действительные значения. Какой смысл вкладывается в эту конструкцию – обычно не оговаривается. Существует по крайней мере три способа ее интерпретировать.

1) Можно использовать только отношение порядка на множестве R для того, чтобы выяснить, какой из двух исходов игры лучше (т. е. функции выигрыша известны с точностью до любого монотонного преобразования).

2) Можно использовать наличие на множестве действительных чисел отношения порядка и согласованной с ним топологии (т. е. критерии известны с точностью до монотонного непрерывного преобразования).

3) А можно использовать еще и согласованность этой топологии с арифметическими операциями, чтобы сделать цель игрока количественной (т. е. функции выигрыша известны с точностью до монотонного аффинного преобразования).

В зависимости от моделируемого конфликта, адекватным может быть каждое из этих пониманий.

Из результатов раздела 3 следует, что при третьем понимании модель с абсолютно рациональным вторым игроком можно считать правильно отражающей реальность. При этом от ответа на первый вопрос по существу ничего не зависит, по крайней мере, если выполняется гипотеза 1.

Примеры 2–4 показывают, что при первом понимании эта модель может оказаться далекой от действительности. В этом случае «функционал скупости» d следует выписывать явно, исходя из анализа моделируемой системы.

Второе понимание занимает промежуточное положение, и в таком случае для ответа на поставленные вопросы следует обращаться к детальному анализу моделируемого конфликта.

Обратим внимание на еще одно обстоятельство. В статье [9] и некоторых более поздних работах рассматриваются более сложные, но аналогичные игры с неопределенными факторами. При исследовании на функционал d приходится накладывать гораздо более жесткие ограничения, и в дальнейшем они используются по существу. Вероятно, это связано с тем, что в этих играх возможны другие типы неустойчивости с более сложной геометрией. В связи с этим исследование вопросов, аналогичных обсуждавшимся выше, становится необходимым, если пытаться использовать эти модели в прикладных исследованиях.

Подведем итоги. Рассмотренная выше классическая модель уже проходила некоторую проверку практикой. Результаты данной работы можно рассматривать как некое математическое обоснование этой модели.

Заметим, что проблемы, аналогичные рассмотренным выше, возникают не только в играх с обменом информацией. Например, в [13] предложена модель, в которой первый игрок управляет ограничениями на область выборов противника, т. е. множество его стратегий есть семейство всех подмножеств некоторого множества (т. е. опять «бесконечномерное» пространство). Самый естественный подход к исследованию этой модели состоит в том, чтобы применить на начальном этапе идею работы [6], а затем проверить корректность этого подхода.

Заметим, кстати, что в работе [13] (в связи с этой моделью), так же как и в работе [3], вопросы достижимости максимумов обходятся молчанием. Это, видимо, вполне оправданно и разумно на этапе постановки новой задачи, но требует уточнения при ее детальном исследовании.

Сделаем пару замечаний о математической стороне дела.

Факт, установленный в лемме 1, известен давно. Но обычно он получается как следствие теоремы Гермейера о структуре оптимального решения в игре Γ_2 . Попытка аналогичным образом решить задачу с k -рациональным вторым игроком довольно неожиданно наталкивается на значительные трудности. Предложенное выше видоизменение классической схемы доказа-

тельства теоремы Гермейера, видимо, имеет определенные методологические и методические преимущества. В частности, именно оно позволяет доказать более общую теорему 2.

При исследовании сложных теоретико-игровых моделей построение примеров, обладающих заданными свойствами, представляет определенные трудности. Используемый при построении примеров 2–4 способ, основанный на подборе подходящего преобразования в «плоскости критериев», представляется достаточно гибким.

Литература

1. ВАСИЛЬЕВ Д. К., ЗАЛОЖНЕВ А. Ю., НОВИКОВ Д. А., ЦВЕТКОВ А. В. *Типовые решения управления проектами*. – М.: ИПУ РАН, 2003.
2. ВАСИН А. А., МОРОЗОВ В. В. *Введение в теорию игр с приложениями к экономике*. – М.: МАКС Пресс, 2005.
3. ГЕРМЕЙЕР Ю. Б. *Об играх двух лиц с фиксированной последовательностью ходов* // ДАН. – 1971. – Т. 198, №5. – С. 1001–1004.
4. ГЕРМЕЙЕР Ю. Б. *Введение в теорию исследования операций*. – М.: Наука, 1971.
5. ГОРЕЛИК В. А., ГОРЕЛОВ М. А., КОНОНЕНКО А. Ф. *Анализ конфликтных ситуаций в системах управления*. – М.: Радио и связь, 1991.
6. ГОРЕЛОВ М. А. *Теоретико-множественная постановка задачи синтеза рациональных процедур обмена информацией в иерархических играх двух лиц* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 2003. – Т. 43, №3. – С. 376–387.
7. ГОРЕЛОВ М. А. *Энтропия иерархических игр* // Автоматика и телемеханика. – 2008. – №12. С. 139–148.
8. ГОРЕЛОВ М. А. *Геометрия информационных расширений* // Автоматика и телемеханика. – 2009. – №8. – С. 145–155.
9. КОНОНЕНКО А. Ф. *Роль информации о функции цели противника в играх двух лиц с фиксированной последова-*

- тельностью ходов // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1973. –Т. 13, №1. – С. 311–317.
10. КОНОНЕНКО А. Ф., ХАЛЕЗОВ А. Д., ЧУМАКОВ В. В. *Принятие решений в условиях неопределенности.* – М.: ВЦ АН СССР, 1991.
 11. МОЛОДЦОВ Д. А. *Устойчивость принципов оптимальности / Современное состояние теории исследования операций.* – М.: Наука, 1979. – С. 236–262.
 12. МОЛОДЦОВ Д. А. *Устойчивость принципов оптимальности.* – М.: Наука, 1987.
 13. НОВИКОВ Д. А. *Институциональное управление организационными системами.* – М.: ИПУ РАН, 2003. – 68 с.
 14. САЙМОН Г. *Науки об искусственном.* – М.: Едиториал УРСС, 2004.
 15. NOVIKOV D. A. *Management of active systems: stability or efficiency // Systems science.* – 2001. – Vol. 26, №2. – P. 85–93.
 16. SIMON H. A. *Model of Man.* – New York, 1956.

ON A HYPOTHESIS IN FOUNDATIONS OF HIERARCHICAL GAMES THEORY

Mikhail Gorelov, Computer Center of RAS, Moscow, Cand.Sc.,
(griever@ccas.ru).

Abstract: In the study of hierarchical games a hypothesis on the behavior of the low-level player is normally accepted. It simplifies sufficiently both the solution of the problem in hand and its reasoning. The adequacy of this hypothesis is discussed below. The simplest two-player game is used to illustrate both the major problems and some approaches to their solution.

Keywords: hierarchical games, maximum guaranteed result, robustness.

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии Д. А. Новиковым*

УДК 007:681.518.2
ББК 22.18 65.23 65.29

ТРИАДНЫЙ ПОДХОД К МОДЕЛИРОВАНИЮ СИСТЕМ СЕТЕЦЕНТРИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Юдицкий С. А.¹, Владиславлев П. Н.², Точ Д. С.³
(Учреждение Российской академии наук
Институт проблем управления РАН, Москва)

Рассмотрен комплексный триадный подход к моделированию и анализу систем сетецентрического управления в различных предметных областях, базирующийся на формальном аппарате целеполагания, логического управления последовательностью действий, взаимовлияния отклонений от нормы показателей деятельности системы. Предлагается человеко-компьютерное взаимодействие при триадном моделировании.

Ключевые слова: сетецентрическое управление, триадная структура, целеполагание, последовательность действий, взаимовлияние отклонений показателей от нормы.

1. Введение

Большие системы в различных предметных областях (бизнес, производство, энергетика, торговля, военная сфера и т. д.) состоят из множества центров (автономных организационных объектов), объединенных в общую сеть. Управление функционированием и развитием сетевых взаимодействий, называемое

¹ Семен Абрамович Юдицкий, доктор технических наук, профессор, тел. (499) 783-20-85.

² Павел Николаевич Владиславлев, кандидат технических наук (vladislavlev@rambler.ru).

³ Дмитрий Сергеевич Точ, кандидат технических наук (dimpale@pochta.ru).

сетевидным управлением (СЦУ), предусматривает выполнение в определенной последовательности совокупности целенаправленных действий, сопровождающихся изменением показателей состояния системы. Для того чтобы организовать СЦУ, необходимо решить следующие задачи:

- сформировать состав и структуру целей, поставленных перед системой, установить причинно-следственные связи на множестве целей (целеполагание [5, 9, 11]);
- задать состав и порядок выполнения действий (логическое управление [3, 10, 12]);
- выбрать наиболее значимые показатели, характеризующие работу системы, определить отношения и способы взаимовлияния между показателями (когнитивный анализ [4, 6, 8]);
- установить связи между действиями, целями и показателями.

Моделирование системы СЦУ реализуется в форме человеко-компьютерного взаимодействия: человек задает предполагаемое формальное описание (модель) системы, компьютерная структура просчитывает модель и формирует данные о достижении целей и тенденциях изменения показателей, человек оценивает эти данные и при необходимости корректирует модель. Далее цикл моделирования повторяется.

В предлагаемой вниманию читателя статье обсуждается комплексная триадная модель СЦУ, состоящая из взаимодействующих между собой сетевых субмоделей:

- целеполагания на основе «древовидных» ациклических сетей Петри;
- логического управления на основе диаграмм действий и диаграмм переходов на множестве действий;
- взаимовлияния отклонений от нормы показателей на основе функциональных когнитивных карт с бинарной пометкой дуг (при этом мы исходим из гипотезы: если все показатели находятся в пределах нормы, т. е. допустимого интервала значений, то их влиянием друг на друга можно пренебречь).

Решение поставленных задач базируется на применении формального аппарата графодинамики – научного направления, введенного в 70-е годы прошлого века М. А. Айзерманом и его учениками, оперирующего переменными в форме графов и отношениями определенными на графах [1].

Сетевые субмодели СЦУ, их взаимодействие и методы анализа в статье иллюстрируются на гипотетическом примере.

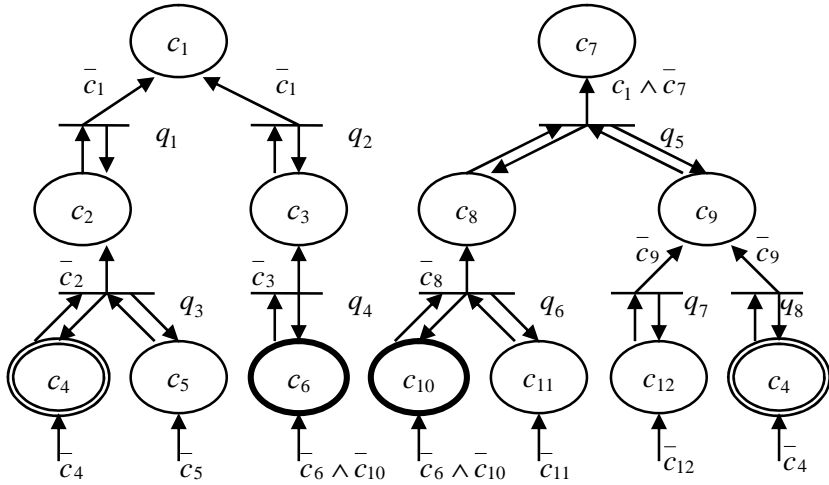
2. Моделирование целеполагания

На множестве целей, определяющих деятельность системы, введем отношение подчиненности «надцель–подцель», где достижение надцели является непосредственным следствием достижения подцелей (подцели детализируют надцель). Надцели, не подчиненные никакой другой цели, назовем конечными, а подцели, которым не подчинены другие цели, – начальными. Конечные цели формируются абстрактно, в общем виде. Последовательность подчиненных целей, вплоть до начальных, дает необходимые уточнения. Если конечных целей несколько, то они достигаются либо в определенной очередности, либо независимо друг от друга.

Целеполагание является предметом интеллектуальной деятельности. Психология целеполагания с акцентом на допускаемые типовые ошибки, приводящие к неудаче, описаны в [2].

В статье формальный аппарат целеполагания базируется на сетях Петри [7], позиции которых сопоставлены целям c_i , $i = 1, \dots, r$. Пример такой сети дан на рис. 1 сверху. Переходы q_j , $j = 1, \dots, s$, связывают надцель c_i с подчинёнными ей подцелями, где каждая подцель соединена с переходом двумя противоположенными стрелками, а переход с надцелью – одной стрелкой, помеченной переменной \bar{c}_i . Каждая позиция c_i либо пуста ($c_i = 0$, цель не достигнута), либо содержит один маркер ($c_i = 1$, цель достигнута). Если в позициях всех подцелей перехода q_j есть по маркеру и позиция надцели c_i пуста, то переход мгновенно срабатывает и вносит маркер в c_i , сохраняя маркирование подцелевых позиций. В резуль-

тате пометка стрелки $(q_j; c_i)$ принимает значения $\bar{c}_i = 0$, что исключает попадание второго маркера в позицию c_i .



τ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
c_1																						
c_2																						
c_3																						
c_4																						
c_5																						
c_6																						
c_7																						
c_8																						
c_9																						
c_{10}																						
c_{11}																						
c_{12}																						

Рис. 1. Пример целевой субмодели

Таким образом, при работе сетевой модели целеполагания маркеры продвигаются «снизу–вверх» по древовидным сетям Петри. При этом могут использоваться два вида отношения «надцель–подцели», при числе подцелей не менее двух: конъюнктивное и альтернативное. При конъюнктивном отношении обязательно выполнение всех подцелей, которые являются составными частями надцели. При альтернативном отношении необходимо и достаточно выполнение только одной подцели (при недетерминированном выборе этой подцели). В примере на рис. 1 конъюнктивными являются отношения: $(c_2 - c_4, c_5)$, $(c_7 - c_8, c_9)$, $(c_8 - c_{10}, c_{11})$, альтернативными: $(c_1 - c_2, c_3)$, $(c_9 - c_4, c_{12})$.

Среди начальных подцелей (позиций) выделим противоречивые (изображаются жирными кружками) и совпадающие (изображаются двойными кружками). Противоречивые начальные позиции c_i, c_j находятся в отношении альтернативности, обеспечиваемом логической функцией $a = \bar{c}_i \wedge \bar{c}_j$, помечающей ведущие в них стрелки. Если первым маркер попадает в одну из противоречивых позиций, например $c_i = 1$, то для c_j $a = 0$ и вход в c_j блокируется. Совпадающие позиции являются экземплярами одной и той же начальной подцели. В примере на рис. 1 противоречивые позиции c_6, c_{10} и совпадают две позиции c_4 .

Результатом моделирования целеполагания является линейный график достижения целей на заданном временном горизонте $[t = 0, t = e]$, пример которого дан на рис. 1 снизу. Интервалы горизонта, на которых цели c_i достигнуты, закрашены. График достижения целей строится непосредственно по целевой сети.

В примере на рис. 1 в момент $t = 4$ достигаются (вследствие внешнего воздействия) оба экземпляра подцели c_4 . Левая подцель не влияет на свою надцель c_2 , правая вызывает в следующий момент $t = 5$ достижение надцели c_9 . Дальнейших переключений (без воздействия на начальные позиции) не происходит, в целевой сети устанавливается равновесие. В момент $t = 6$ маркер заносится в начальную позицию c_5 , срабатывает переход q_3 и в момент $t = 7$ маркер вносится в позицию

c_2 . Далее в момент $t = 8$ срабатывает q_1 и маркер вносится в позицию c_1 , достигнута первая конечная цель. Целевая сеть продолжает функционировать подобным образом. В момент $t = 15$ маркеры находятся в позициях c_8, c_9 и выполняется условие $c_1 \wedge \bar{c}_7 = 1 \wedge 1 = 1$. Это приводит к срабатыванию перехода q_5 и внесению маркера в позицию c_7 . Таким образом, достигнута вторая конечная цель c_7 , причём строго после первой c_1 .

3. Моделирование взаимовлияния показателей

Взаимовлияние показателей деятельности системы принято моделировать «взвешенным» ориентированным графом, предложенным Ф. Робертсом⁴ [8], вершины которого соответствуют показателям, дуги (стрелки) соответствуют влияниям показателя – предшественника на показатель – последователь, причём дуга помечается «весом» – положительным или отрицательным числом, заданным экспертом.

Динамика показателей при этом определяется линейной моделью:

$$(1) \quad p_i(t+1) = p_i(t) + \sum_{k \in I_i} w_{ki}(p_k(t) - p_k(t-1)),$$

где p_i – последователь; p_k – предшественник; w_{ki} – вес дуги ($p_k p_i$); $t = 0, 1, \dots, e$ – дискретное время; I_i – множество номеров показателей, воздействующих на p_i , $i, k = 1, 2, \dots, n$.

Модель (1) характеризуется большой размерностью и разбросом значений показателей, что затрудняет экспертный анализ и принятие решений.

В статье предлагается несколько иная интерпретация графа взаимовлияния показателей, которую назовём функциональной когнитивной картой с бинарной пометкой дуг. Вершины p_i графа трактуются как отклонения показателей от установленной для них нормы (допустимого интервала значений), а дуги ($p_k p_i$)

⁴ Другое название – когнитивная карта.

соответствуют влиянию p_k на p_i и выражаются парой функций $j_{ki}^+(p_k), j_{ki}^-(p_k)$, отображающих преобразование соответственно положительного и отрицательного отклонения от нормы предшественника в отклонение последователя. Введение функциональных когнитивных карт, помимо уменьшения размерности модели, по сравнению с подходом (1), позволяет повысить «мощность моделирования» за счёт разнообразия «дуговых функций».

Влияние отклонения p_k на отклонение p_i в момент t будем выражать функцией:

$$(2) \quad f_{ki}(t) = \begin{cases} f_{ki}^+(p_k(t)), & \text{если } p_k(t) > 0, \\ f_{ki}^-(p_k(t)), & \text{если } p_k(t) < 0, \\ 0, & \text{если } p_k(t) = 0. \end{cases}$$

Пусть в момент t показатель p_i характеризуется множеством $X_i(t)$, состоящим из собственного отклонения $p_i(t)$, отклонений $f_{ki}(t)$, вычисленных для всех его предшественников p_k , $k = 1, \dots, l$, на основе (2), а также отклонения $p_i^*(t)$, инициированного внешним воздействием на показатель (внешнее управление отклонением показателя):

$$(3) \quad X_i(t) = p_i(t) \bigcup \{f_{ki}(t)\} \bigcup p_i^*(t).$$

В множестве $X_i(t)$ удалим все нулевые члены. В результате получим множество $\overline{X}_i(t)$, которое разобьём на два подмножества $\overline{X}_i^+(t), \overline{X}_i^-(t)$, содержащие соответственно все положительные и все отрицательные отклонения показателя p_i (одно из подмножеств может быть пустым):

$$(4) \quad \overline{X}_i(t) = \overline{X}_i^+(t) \bigcup \overline{X}_i^-(t).$$

В этих подмножествах отклонение, наибольшее по абсолютной величине ($\max \overline{X}_i^+(t)$ и $\min \overline{X}_i^-(t)$) перекрывает («поглощает») все остальные отклонения, т. е. имеет место:

$$(5) \quad \overline{X}_i^+(t) = \max \overline{X}_i^+(t), \overline{X}_i^-(t) = \min \overline{X}_i^-(t).$$

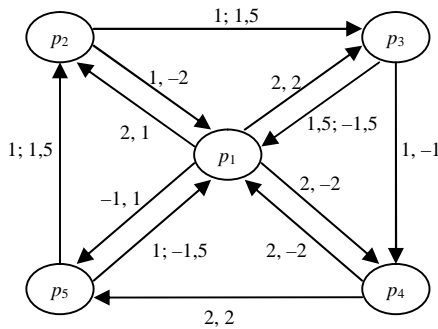
Из соотношений (4), (5) следует уравнение для отклонения от нормы показателя p_i в следующий момент $t + 1$:

$$(6) \quad p_i(t+1) = \max \bar{X}_i^+(t) + \min \bar{X}_i^-(t).$$

Пример функциональной когнитивной карты, в которой для простоты дуговые функции имеют вид:

$$(7) \quad j_{ki}^+(p_k) = a_{ki} \times p_k, \quad j_{ki}^-(p_k) = b_{ki} \times p_k,$$

где a_{ki}, b_{ki} – константы; дуги $(p_k p_i)$ помечены парами (a_{ki}, b_{ki}) , дан на рис. 2 сверху. Матрица связей когнитивной карты (бинарная пометка дуг) показана на рис. 2 снизу.



Матрица связей $\|a_{ki}, b_{ki}\|$

	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5
p_1	0	2; 1	2; 2	2; -2	-1; 1
p_2	1; -2	0	1; 1,5	0	0
p_3	1,5; -1,5	0	0	1; -1	0
p_4	2; -2	0	0	0	2; 2
p_5	1; -1,5	1; 1,5	0	0	0

Рис. 2. Пример субмодели взаимовлияния отклонений показателей от нормы (частный случай функциональной когнитивной карты)

Моделирование взаимовлияния отклонений показателей производится путём построения линейной таблицы (ленты), отображающей динамику вектора отклонений $p(t) = \langle p_1(t), \dots, p_n(t) \rangle$ в моменты времени $t = 0, 1, \dots, e$. При этом последовательно применяется процедура, использующая векторный аппарат.

1. Пусть в момент t система, характеризуемая вектором отклонений $p(t)$, подвергается внешнему воздействию, в результате которого скачкообразно изменяются некоторые компоненты, например $p_1^*(t=1) = 3$, $p_3^*(t=1) = -2$. Формируем вектор $p^*(t) = \langle p_1^*(t), \dots, p_n^*(t) \rangle$ внешнего управления.

2. Транспонированный вектор отклонений $p^{*T}(t=1)$ умножаем на каждый столбец матрицы связей $\|a_{ki}, b_{ki}\|$ согласно правилу (2). В результате получаем матрицу:

$$F(t=1) = \begin{matrix} \begin{matrix} 3 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \times \begin{matrix} \left| \begin{matrix} 0 & 2;1 & 2;2 & 2;-2 & -1;1 \\ 1;-2 & 0 & 1;1,5 & 0 & 0 \\ 1,5;-1,5 & 0 & 0 & 1;-1 & 0 \\ 2;-2 & 0 & 0 & 0 & 2;2 \\ 1;-1,5 & 1;1,5 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right| \end{matrix} = \begin{matrix} \left| \begin{matrix} 0 & 6 & 6 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right| \end{matrix} \end{matrix}.$$

3. Вводим в матрицу $F(t=1)$ две дополнительные нижние строки $p(t=1)$, $p^*(t=1)$ (если они совпадают, то одну строку):

$$\bar{F}(t=1) = \begin{matrix} \left| \begin{matrix} 0 & 6 & 6 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 0 & 0 \end{matrix} \right| \\ p(t=2) = 3 \quad 6 \quad 4 \quad 6 \quad -3 \end{matrix}$$

4. К каждому столбцу p_i матрицы $\bar{F}(t=1)$ применяем преобразования (4), (5), (6), в результате получаем $p_i(t=2)$. Вектор-столбец $p^T(t=2)$ вносим в ленту отклонений и далее продолжаем аналогично для последующих моментов t .

5. Построение ленты отклонений прерываем, если выполняется по меньшей мере одно из условий:

- достигнута граница временного горизонта $[0, e]$;
- внутри горизонта установилось равновесие $p^T(t) = p^T(t+1)$;
- какие-нибудь из отклонений превысили критическую величину (например $p_i^{\max} = 100, p_i^{\min} = -50, i = 1, \dots, 5$).

В рассмотренном примере имеет место третий случай, лента отклонений показателей от нормы:

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8
p_1	0	3	3	12	12	20	48	80	192
p_2	0	0	6	1,5	10	24	22	96	96
p_3	0	-2	4	6	10	24	40	96	160
p_4	0	0	6	6	10	24	40	96	160
p_5	0	0	-3	9	0	8	28	32	112
		↑			↑				
		$p_1^* = 3$			$p_2^* = -14$				
		$p_3^* = -2$			$p_3^* = -14$				
					$p_4^* = -14$				

4. Моделирование последовательности действий

Для моделирования порядка выполнения действий и обусловленного этим порядком управления целями и показателями в триадной структуре применяются диаграммы действий на базе сетей Петри (графов операций [12]) и диаграммы переходов на множестве действий.

Пример диаграммы действий дан на рис. 3 сверху. В любой i -ой позиции находится один маркер, если действие d_i , $i = 1, \dots, m$, выполняется, и позиция пуста, если не выполняется.

Переходы t_j , $j = 1, \dots, g$, срабатывают мгновенно, если во всех входных позициях t_j есть по маркеру, выполняется приписанное переходу внешнее условие v_h , $h = 1, \dots, l$, с момента срабатывания предыдущего перехода прошло не более заданного числа единиц модельного времени. В результате срабатывания перехода из всех его входных позиций удаляются, а во все выходные позиции вносятся маркеры. Таким образом, диаграммы действий и переходов – это динамическая модель.

Диаграмма переходов, изображённая на рис. 3 снизу, детализирует диаграмму действий, а также её связи с диаграммами (субмоделями) целей и взаимовлияния отклонений показателей.

Диаграмма переходов представляет собой ориентированный граф, вершины которого соответствуют переходам, а дуги $(t_i t_j)$ помечены выполняемыми действиями (помещены в квадратные скобки) и временным сдвигом момента срабатывания t_j относительно момента срабатывания t_i , $i, j = 1, \dots, g$ (справа от квадратных скобок). Над вершиной перехода проставляются инициализированные им начальные цели, под вершиной – сформированные переходом новые значения отклонений показателей от нормы. Эти пометки отображают связи между составляющими триадной структуры.

Результаты моделирования СЦУ на основе триадной структуры выражаются итоговой диаграммой, представленной на рис. 4. В верхней строке диаграммы указаны моменты времени, образующие горизонт моделирования. В следующей строке указаны привязанные к определённому моменту переходы, в которые происходит изменение значений индикаторов действий, целей, отклонений показателей. В верхнем ярусе диаграммы даны линейные графики индикаторов действий (d_0, d_k – начальное и конечное «пустые» действия, соответствующие подготовленности к моделированию и его завершению).

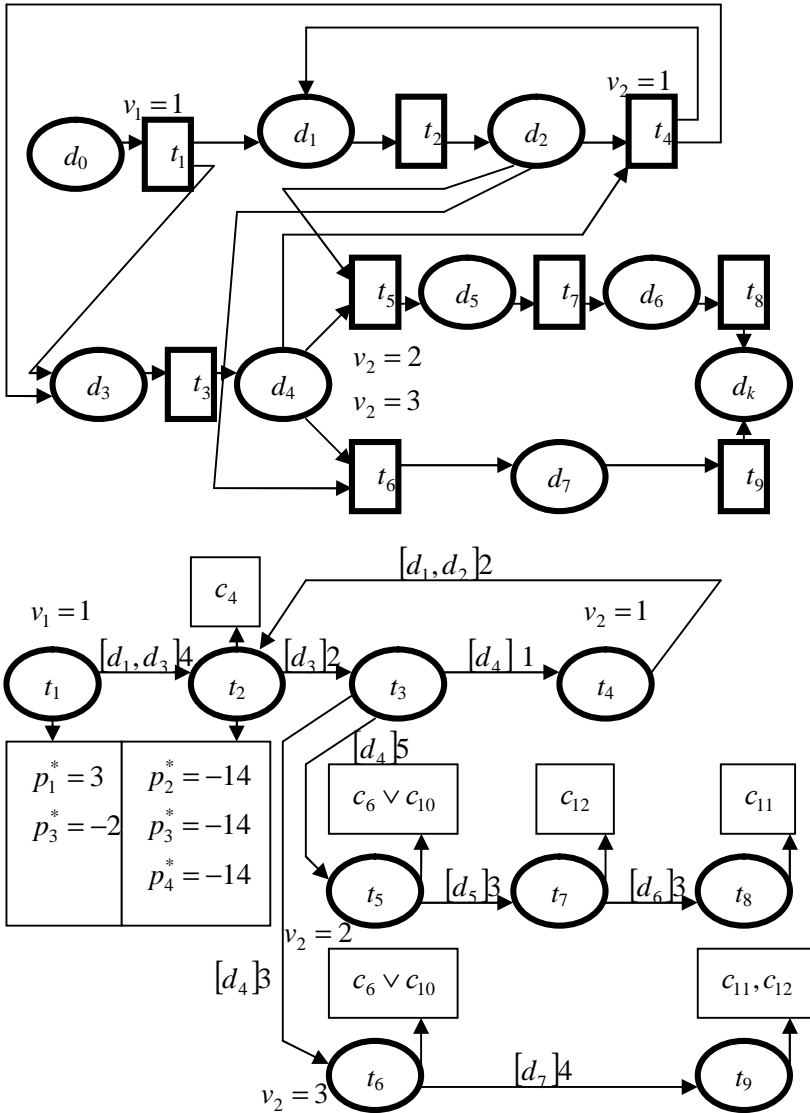


Рис. 3. Диаграмма действий и диаграмма переходов

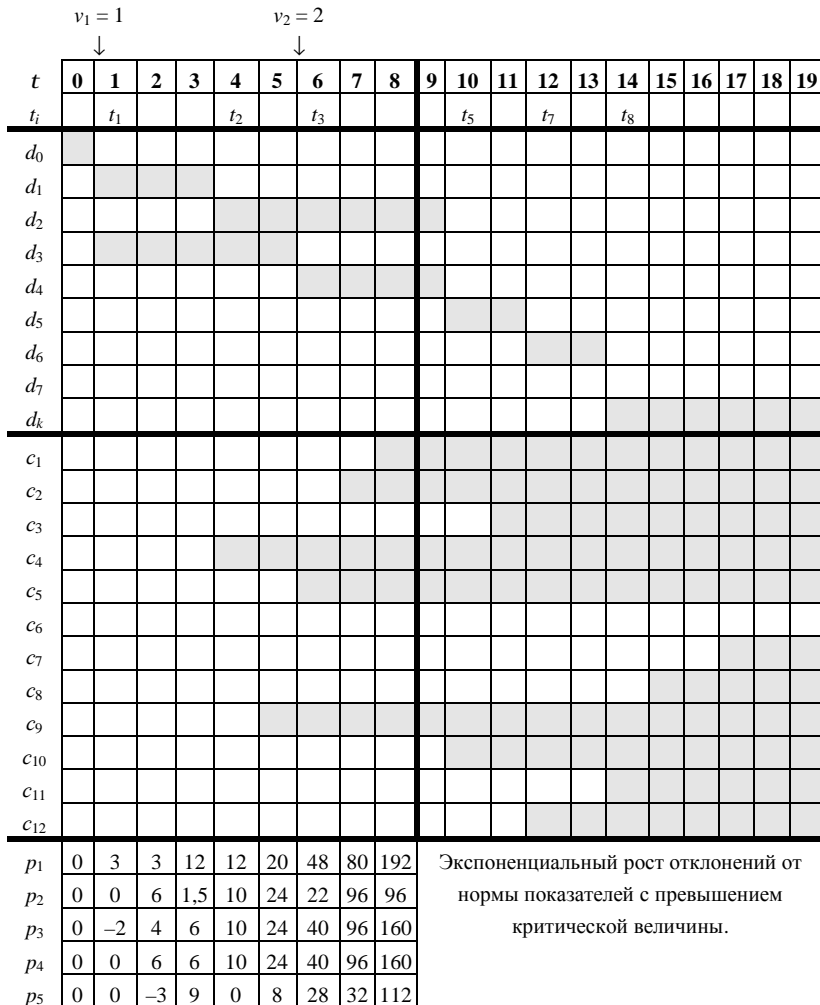


Рис. 4. Итоговая диаграмма моделирования триадной структуры сетцетрического управления

В среднем ярусе представлены линейные графики индикаторов целей, в нижнем дана таблица значений отклонений пока-

зателей от нормы. Вертикальная жирная линия разделяет допустимый и недопустимый интервалы горизонта моделирования.

Итог: при заданной конфигурации триадной структуры полностью выполняются действия d_1, d_3 и лишь частично d_2, d_4 , достигаются цели c_1, c_2, c_4, c_5, c_9 , в момент $t = 8$ отклонения показателей p_1, p_3, p_4, p_5 выходят за критическую отметку $p_i^{\max} = 100$, а отклонение p_2 вплотную приблизилось к ней. Поэтому в момент $t = 8$ эксперимент прекращаем.

5. Заключительные замечания

1. Сетевое управление может быть применено как для реальных, так и виртуальных систем, причём второе имеет место при проектировании, стратегическом планировании, прогнозировании. Виртуальное СЦУ выполняется на уровне моделей, при этом ничего не может «взорваться, сгореть, утонуть». В данной статье обсуждаются методы виртуального СЦУ.

2. Начальная конфигурация триадной структуры СЦУ создаётся экспертами, обладающими большими знаниями и опытом в данной предметной области.

3. При СЦУ повторяется цикл «моделирование триадной структуры – оценка результатов моделирования – коррекция триадной структуры». Коррекция выполняется экспертами и трактуется как собственно акт управления системой.

4. Простейшей формой коррекции является изменение значений числовых параметров модели (пометок дуг на когнитивной карте, временных интервалов между срабатыванием переходов, моментов и величины управляющих воздействий переходов на отклонения показателей и т. д.) методом последовательного подбора.

5. Более радикальная форма коррекции связана с изменением по результатам моделирования конфигурации триадной структуры. Для решения этой проблемы (аналитической коррекции), возможно, потребуется специальный формальный

аппарат, который пока отсутствует. Его создание будет способствовать развитию теории СЦУ.

Литература

1. АЙЗЕРМАН М. А., ГУСЕВ Л. А., ПЕТРОВ С. В., СМИРНОВА И. Н. *Динамический подход к анализу структур, описываемых графами (основы графодинамики)* // I: Автоматика и телемеханика. – 1977. – №7. – С. 135–151. II: Автоматика и телемеханика. – 1977. – №9. – С. 123–136.
2. ДЕРНЕР Д. *Логика неудачи*. – М.: Смысл, 1997.
3. ЗАКРЕВСКИЙ А. Д. *Параллельные алгоритмы логического управления*. – М.: Едиториал УРСС, 2003.
4. КУЗНЕЦОВ О. П., КУЛИНИЧ А. А., МАРКОВСКИЙ А. В. *Анализ влияний при управлении слабоструктурированными ситуациями на основе когнитивных карт* // Человеческий фактор в управлении. / Под ред. Н. А. Абрамовой, К. С. Гинсберга, Д. А. Новикова – М.: КомКнига, 2006. – С. 313–344.
5. ЛАРИЧЕВ О. И. *Теория и методы принятия решений, а также хроника событий в Волшебных Странах*. – М.: Логос, 2000.
6. МАКСИМОВ В. И. *Структурно-целевой анализ развития социально-экономических ситуаций* // Проблемы управления. – 2005. – №3. – С. 30–38.
7. ПИТЕРСОН ДЖ. *Теория сетей Петри и моделирование систем*. – М.: Мир, 1984.
8. РОБЕРТС Ф. С. *Дискретные математические модели с приложениями к социальным, биологическим и экологическим задачам*. – М.: Наука, 1986.
9. СААТИ Т. *Принятие решений. Метод анализа иерархий*. – М.: Радио и связь, 1993.
10. ЮДИЦКИЙ С. А. *Сценарный подход к моделированию поведения бизнес-систем*. – М.: СИНТЕГ, 2001.

11. ЮДИЦКИЙ С. А., ВЛАДИСЛАВЛЕВ П. Н. *Основы предпроектного анализа организационных систем.* – М.: Финансы и статистика, 2005.
12. ЮДИЦКИЙ С. А., МАГЕРГУТ В. З. *Логическое управление дискретными процессами.* – М.: Машиностроение, 1987.

A TRIAD APPROACH TO NETWORK-CENTRIC CONTROL SYSTEMS MODELLING

Semen Yuditskiy, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Doctor of Science, professor (Moscow, Profsoyuznaya st., 65, tel. (499) 783-20-85).

Pavel Vladislavlev, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Cand.Sc., (vladislavlev@rambler.ru).

Dmitri Toch, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Cand.Sc., (dimpale@pochta.ru).

Abstract: We consider a synthetic triad approach to modelling and analyzing network-centric control systems for various subject domains. This approach is based on the formal technique of objectives definition, the sequence of actions logical control, and interference of system activity indicators deviations from the norm. Human-computer interaction for triad modelling is offered.

Keywords: network-centric control, triad structure, logic of the purposes, sequence of actions, interference of indicators deviations.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии В. Г. Лебедевым

УДК 519.82
ББК 22.18

ВОЗМУЩЕНИЕ И КОРРЕКЦИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ

Муравьева О. В.¹

Рассматривается устойчивость свойств совместности и несовместности систем линейных неравенств при коррекции/возмущении всех параметров.

Ключевые слова: матричная коррекция, несовместная система линейных неравенств, устойчивость совместной системы линейных неравенств.

Введение

При изучении математических моделей важную роль играет изучение робастности, или «грубости» модели — сохранения некоторого свойства модели при малых возмущениях параметров. В модели выделяем некоторое свойство и рассматриваем сохранение этого свойства у возмущенной модели. Если у исходной модели свойство выполнялось, то определяем минимальное изменение параметров модели, при котором свойство не выполняется — радиус устойчивости. Если у исходной модели свойство не выполнялось, получаем задачу минимальной коррекции.

В [5] для фиксированного свойства математической модели ω и подсистемы исходных данных S вводится понятие (S, ω) -устойчивости. Математическая модель называется (S, ω) -устойчивой, если свойство ω сохраняется при малых вариациях параметров S .

¹ *Ольга Викторовна Муравьева, кандидат физико-математических наук, доцент (muraveva@mail.ru).*

Для (S, ω) -устойчивых моделей зададим на S критерий $\Phi: S \rightarrow \mathbb{R}_+$. Получим задачу определения радиуса (S, ω) -устойчивости: минимального по критерию Φ изменения параметров S , при котором свойство ω нарушается.

Для системы линейных неравенств $Ax \leq b$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $x \in \mathbb{R}^n$, рассмотрим свойство совместности/несовместности. Считаем, что все параметры модели могут подвергаться случайной или целенаправленной модификации либо быть неточно заданными.

Параметры модели образуют расширенную матрицу ограничений системы $\bar{A} = [-b, A]$. Здесь квадратными скобками $[-b, A]$ обозначена матрица размерности $(m+1) \times n$, полученная приписыванием слева к матрице $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ вектор-столбца $b \in \mathbb{R}^m$ (со знаком минус).

В качестве критерия величины изменения параметров будем рассматривать одну из матричных норм

$$\|\Delta \bar{A}\|_\infty = \max_{i,j} |\Delta \bar{a}_{ij}|,$$

$$\|\Delta \bar{A}\|_e = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \Delta \bar{a}_{ij}^2},$$

$$\|\Delta \bar{A}\|_2 = \max_{\|e\|_2=1} \|\Delta \bar{A}e\|_2.$$

Понятие устойчивой системы линейных неравенств введено С. Н. Черниковым [10, 11].

Неравенство совместной системы линейных неравенств $Ax \leq b$ называется устойчивым, если хотя бы одно из решений системы удовлетворяет строгому неравенству. Неравенство системы называется неустойчивым, если все решения системы удовлетворяют равенству.

Система линейных неравенств называется устойчиво совместной, если совместна соответствующая система со строгими

неравенствами. Система $Ax \leq b$ устойчиво совместна тогда и только тогда, когда все входящие в нее неравенства устойчивы. Вводится также понятие устойчивого решения и меры несовместности системы линейных линейных неравенств, допускающей изменение правой части системы ограничений b [6, 11]. В [5] получены необходимые и достаточные условия устойчивости системы линейных неравенств.

Если исследуется свойство несовместности системы, соответствующая задача (S, ω) -устойчивости формулируется в терминах методов коррекции. Для задачи оптимальной коррекции всех параметров несовместной системы линейных неравенств по ряду линейных и кусочно-линейных критериев оптимальности предлагаются методы решения (сведения к задачам оптимизации с линейными ограничениями) [1, 2, 3, 7].

Большое количество работ, опубликованных за рубежом, посвящено методам определения максимальной совместной подсистемы несовместной системы линейных неравенств [12, 14, 15, 16, 18]. Совместность интервальной системы линейных неравенств рассматривается в [20].

Для исследования совместности и несовместности систем линейных уравнений широко используется обобщенный метод наименьших квадратов [17, 21]. Применение обобщенного метода наименьших квадратов к несовместной системе неравенств рассматривается в [19]. В работе [13] предлагается метод минимальной коррекции всех коэффициентов несовместной системы линейных неравенств, основанный на сингулярном разложении Ланцоша матрицы.

В настоящей статье в п. 1 рассматривается радиус устойчивости решения системы линейных неравенств по квадратичному и минимаксному критерию, в п. 2 — радиус несовместности системы линейных неравенств.

В задачах управления линейные неравенства встречаются как ограничения на управление или состояние. В п. 3 статьи рассматривается дискретный динамический процесс с линейным уравнением движения $x^{(k+1)} = Ax^{(k)}$ и множеством достижимости,

заданным линейным неравенством $(c, x^{(N)}) \geq c_0$ при условии противоречивости. Задача коррекции такого вида характерна также для управляемого процесса с управлением в форме обратной связи по состоянию $x^{(k+1)} = Ax^{(k)} + Bu^{(k)}$, $u^{(k)} = Kx^{(k)}$. К совместности системы линейных неравенств сводится, например, проверка обобщенной сверхустойчивости матрицы и сверхстабилизированности по состоянию и выходу линейной стационарной системы управления с обратной связью [8, 9].

1. Радиус устойчивости решения системы линейных неравенств

Дана совместная система линейных неравенств

$$Ax \leq b, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad b \in \mathbb{R}^m, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n},$$

вектор x^0 — решение этой системы

$$x^0 \in X, \quad X = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}.$$

Определим меру устойчивости решения x^0 как величину минимального возмущения параметров, в результате которого x^0 не является решением системы

$$\Phi(x^0) = \inf_{\Delta A, \Delta b} \{ \| [-\Delta b, \Delta A] \| :$$

$$x^0 \text{ не является решением } (A + \Delta A)x \leq b + \Delta b \}.$$

Рассмотрим сначала критерий в виде евклидовой нормы матрицы

$$\Phi(x^0) = \| [-\Delta b, \Delta A] \|_e^2 = \sum_{i=1}^m \| (-\Delta b_i, \Delta a_i) \|_2^2.$$

Нетрудно видеть, что для граничных точек допустимого множества (т. е. неустойчивых решений) $\Phi(x) = 0$, а для внутренних

точек (устойчивых решений) минимум реализуется при коррекции одного из ограничений $(a_i, x) \leq b_i$:

$$\Phi(x) = \min_i \Phi_i(x),$$

$$\Phi_i(x) = \min_{\Delta a, \Delta b} \{ \|(-\Delta b, \Delta a)\|^2 : (a_i + \Delta a, x) = b_i + \Delta b \}.$$

Лемма 1.

$$\Phi_i(x) = \frac{(b_i - (a_i, x))^2}{\|x\|^2 + 1} = \frac{(\bar{a}_i, y)^2}{\|y\|^2} = \|\text{Pr}_y \bar{a}_i\|^2,$$

где $y = (1, x)$, $\bar{a}_i = (-b_i, a_i)$, $\text{Pr}_y \bar{a}_i$ – проекция \bar{a}_i на y .

Доказательство. Обозначим $h = (-\Delta b_i, \Delta a_i)$, учитывая $\|y\| \neq 0$, получим

$$\Phi_i(x) = \min_h \{ \|h\|^2 :$$

$$(a_i + \Delta a)x = b_i + \Delta b \} = \min_h \{ \|h\|^2 : (h, y) = (\bar{a}_i, y) \}.$$

Откуда очевидным образом следует утверждение леммы.

Предположим, что множество X ограничено, и рассмотрим задачу определения самого устойчивого решения

$$(1) \quad x^* = \arg \max_{x \in X} \Phi(x), \quad \Phi^* = \Phi(x^*).$$

Теорема 1.

$$\Phi^* = \max_{x \in X} \inf_{\Delta A, \Delta b} \{ \|[-\Delta b, \Delta A]\|_e^2 : (A + \Delta A)x \not\leq b + \Delta b \} =$$

$$= \max_{e: \bar{A}e \geq 0, e_0 > 0, \|e\|=1} \min_i (\bar{a}_i, e)^2, \quad \text{где } \bar{A} = [-b, A].$$

Доказательство. Из леммы

$$\Phi^* = \max_{x \in X} \min_i \frac{(b_i - (a_i, x))^2}{\|x\|^2 + 1} = \max_{y: \bar{A}y \geq 0, y_0 = 1} \min_i \frac{(\bar{a}_i, y)^2}{\|y\|^2} = \max_{y: \bar{A}y \geq 0, y_0 > 0} \min_i \|Pr_y \bar{a}_i\|^2.$$

Обозначим $e = y/\|y\|$, получим утверждение теоремы.

Таким образом, требуется найти направление y , для которого минимальная из проекций векторов $\{\bar{a}_i\}$ максимальна. Эту задачу можно также интерпретировать как задачу проектирования на многогранную область. Дискретные минимаксные задачи такого типа рассматриваются, например, в [4], в частности

$$\max_{\|e\|=1} \min_i (a_i, e) = \|z^*\|,$$

где z^* — ближайшая к началу координат точка множества $L = \{z: z = \sum_i \alpha_i a_i, \alpha_i \geq 0, \sum_i \alpha_i = 1\}$. Таким образом, устойчи-

вое по параметрам решение однородной системы линейных неравенств — это ближайшая к началу координат точка выпуклой оболочки строк матрицы ограничений.

Для критерия

$$\|[-\Delta b, \Delta A]\|_\infty = \max_{i,j} |\Delta \bar{a}_{ij}| = \max_i \|\Delta \bar{a}_i\|_\infty$$

также очевидным образом выполняется декомпозиция по строкам матрицы ограничений:

$$\Phi(x) = \min_i \Phi_i(x),$$

$$\Phi_i(x) = \min_{\Delta a, \Delta b} \{ \|[-\Delta b, \Delta a]\|_\infty : (a_i + \Delta a)x = b_i + \Delta b \}.$$

Лемма 2.

$$\min_{\Delta a, \Delta b} \{ \| [-\Delta b, \Delta a] \|_{\infty} : (a + \Delta a)x = b + \Delta b \} = \frac{|b_i - (a_i, x)|}{\sum_j |x_j| + 1}.$$

Доказательство. Обозначим $y = (1, x)$, $h = (-b, a)$. Получим задачу $\|h\|_{\infty} \rightarrow \min$ при условии $(h, y) = b - (a, x)$.

Минимум достигается на векторе h^* , где $|h_j^*| = \frac{|b - (a, x)|}{\sum_j |y_j|}$ и

$\text{sgn } h_j = \text{sgn}(b - (a, x)) \text{sgn } y_j$. Действительно, условие $(h^*, y) =$

$b - (a, x)$ выполняется, $\|h^*\|_{\infty} = \frac{|b - (a, x)|}{\sum_j |y_j|} = \frac{|b - (a, x)|}{\|y\|_1}$. Оптималь-

ность h^* следует из неравенства Гельдера для векторных норм $\|h\|_{\infty} \cdot \|y\|_1 \geq (h, y)$.

Задача определения устойчивого решения принимает вид

$$\Phi(x^*) = \max_{x \in X} \min_i \frac{b_i - (a_i, x)}{\sum_j |x_j| + 1}.$$

Последняя максиминная задача стандартным образом сводится к задаче линейного программирования. Введем новые переменные: $t_j = |x_j|$, $j = 1, \dots, n$ с соответствующими ограничениями $-t_j \leq x_j \leq t_j$. Равенство $y = \sum_j \frac{1}{t_j + 1}$ влечет $y(\sum_j t_j + 1) = 1$, что

после введения еще n переменных $z = (z_1, \dots, z_n)$, $z = yt$ дает

$\sum_j z_j + y = 1$. Обозначим $s = yx \in \mathbb{R}^n$, целевая функция $\frac{b_i - (a_i, x)}{\sum_j |x_j| + 1}$

примет вид $y b_i - (a_i, s)$. Осталось ввести скалярную переменную

$u = \min_i (yb_i - (a_i, s))$. В результате получим задачу линейного программирования

$$(2) \quad \begin{aligned} & \max u, \\ & u \leq yb_i - (a_i, s), \quad i = 1, \dots, m, \\ & -z_j \leq s_j \leq z_j, \quad j = 1, \dots, n, \\ & \sum_j z_j + y = 1, \\ & As \leq by, \quad y \geq 0 \end{aligned}$$

относительно переменных $u, y \in \mathbb{R}$, $s, z \in \mathbb{R}^n$. Для этой задачи выполняется теорема.

Теорема 2. Если u^*, y^*, s^*, z^* – решение задачи (2), то $x^* = \frac{1}{y^*} s^*$ – решение задачи (1) по критерию $\| \cdot \|_\infty$.

2. Радиус несовместности системы линейных неравенств

Пусть дана несовместная система линейных неравенств

$$Ax \leq b, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad b \in \mathbb{R}^m, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}.$$

Определим радиус несовместности этой системы для спектральной $\|[-\Delta b, \Delta A]\|_2$ и евклидовой $\|[-\Delta b, \Delta A]\|_e$ матричных норм.

Лемма 3 (Лемма Тихонова). Система $Hx = d$ при заданных $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, $d \in \mathbb{R}^m$ имеет решение с минимальной матричной нормой (евклидовой или спектральной)

$$H^* = \frac{dx^T}{\|x\|^2}, \quad \|H^*\|_2 = \|H^*\|_e = \frac{\|d\|}{\|x\|} = \|H^* e^*\|, \quad \text{где } e^* = \frac{x}{\|x\|}.$$

Теорема 3.

$$R = \inf_{\Delta b, \Delta A, x} \{ \| [-\Delta b, \Delta A] \|^2 : (A + \Delta A)x \leq b + \Delta b \} = \min_{\hat{B}e^i < 0} \{ \lambda_i(\bar{B}^T \bar{B}) \},$$

где $\bar{B} \in R^{m_1 \times n}$, $\hat{B} \in R^{(m-m_1) \times n}$ — матрицы, составленные из различных строк матрицы $B = [-b, A]$ так, что каждая строка включается в одну из матриц, $\lambda_i(\bar{B}^T \bar{B})$, e^i — минимальное собственное число и соответствующий единичный собственный вектор $\bar{B}^T \bar{B}$, минимум берется по всем подматрицам \bar{B} , \hat{B} , для которых выполняется $\hat{B}e^i < 0$.

Доказательство. Используя дополнительные переменные y , выполняя замену $z = (1, x)$, $B = [-b, A]$ и используя лемму 3 для минимизации по матрице $[-\Delta b, \Delta A]$, можно записать следующие равенства:

$$\begin{aligned} & \inf_{\Delta b, \Delta A, x} \{ \| [-\Delta b, \Delta A] \|^2 : (A + \Delta A)x \leq b + \Delta b \} = \\ & = \inf_{\Delta b, \Delta A, x, y} \{ \| [-\Delta b, \Delta A] \|^2 : (A + \Delta A)x + y = b + \Delta b, y \geq 0 \} = \\ & = \inf_{\Delta b, \Delta A, z, y} \{ \| [-\Delta b, \Delta A] \|^2 : [-\Delta b, \Delta A]z = -Bz - y, y \geq 0 \} = \\ & = \inf_{z, y} \left\{ \frac{\| -Bz - y \|^2}{\|z\|^2} : y \geq 0 \right\} = \\ & = \inf_{z, y} \left\{ \frac{\|Bz + y\|^2}{\|z\|^2} : y \geq 0 \right\}. \end{aligned}$$

Обозначим $\beta = \frac{1}{\|z\|}$, $e = \beta z$ и получим задачу

$$(3) \quad \inf_{e, \beta, y} \{ \|Be + \beta y\|^2 : y \geq 0, \beta > 0, \|e\| = 1 \}.$$

Найдем минимум по переменным e , y , используя функцию Лагранжа:

$$L(e, y, \lambda) = \|Be + \beta y\|^2 - \lambda \|e\|^2.$$

Условия экстремума имеют вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial e^i}(e, y, \lambda) = 0, \quad i = 1, \dots, n+1, \\ \frac{\partial L}{\partial y_i}(e, y, \lambda) \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \\ y_i \frac{\partial L}{\partial y_i}(e, y, \lambda) = 0, \quad i = 1, \dots, m. \end{array} \right.$$

Или, в данном случае,

$$\left\{ \begin{array}{l} B^T B e + \beta B^T y - \lambda e = 0, \\ B e + \beta y \geq 0, \\ y_i (B e + \beta y)_i = 0, \quad i = 1, \dots, m. \end{array} \right.$$

Обозначим $I = \{1, \dots, m\}$, $I' = \{i \in I: y_i = 0\}$ или, как видно из второго неравенства, I' — это множество индексов, для которых $(Be)_i \geq 0$. При этом матрица B разбивается (по строкам) на две подматрицы: \bar{B} — подматрица, состоящая из строк с номерами, принадлежащими I' , \hat{B} , состоящая из остальных строк. Согласованное обозначение для разбиения вектора y : $\bar{y} \in \mathbb{R}^{|I'|}$, $\bar{y}_i = 0$, $\hat{y} \in \mathbb{R}^{m-|I'|}$, $\hat{y}_i > 0$.

Из третьего уравнения

$$\hat{B}e + \beta \hat{y} = 0,$$

$$\hat{B}e = -\beta \hat{y}.$$

Заметим, что $(Be)_i \geq 0$ при $i \notin I$, и подставим выражение для $\beta\hat{y}$ в первое уравнение:

$$B^T B e + \beta \bar{B}^T \bar{y} + \beta \hat{B}^T \hat{y} - \lambda e = 0,$$

$$B^T B e - \hat{B}^T \hat{B} e - \lambda e = 0,$$

$$(B^T B - \hat{B}^T \hat{B})e = \lambda e.$$

Или, что то же самое,

$$\bar{B}^T \bar{B} e = \lambda e.$$

Действительно, элемент матрицы $B^T B - \hat{B}^T \hat{B}$, стоящий на пересечении i -ой строки и j -го столбца, равен соответствующему элементу матрицы $\bar{B}^T \bar{B}$:

$$\begin{aligned} (B^T B - \hat{B}^T \hat{B})_{ij} &= (b^i, b^j) - (\hat{b}^i, \hat{b}^j) = \sum_{k \in I} b_{ki} b_{kj} - \sum_{k \in I \setminus I'} b_{ki} b_{kj} = \\ &= \sum_{k \in I'} b_{ki} b_{kj} = (\bar{b}^i, \bar{b}^j) = (\bar{B}^T \bar{B})_{ij}, \end{aligned}$$

где $b^i, \hat{b}^i, \bar{b}^i$ — столбец соответствующей матрицы B, \hat{B}, \bar{B} .

Итак, из условия минимума функции Лагранжа по вектору e следует, что e является собственным вектором некоторой подматрицы $\bar{B}^T \bar{B}$, при этом выполняется $\bar{B}e \geq 0, \hat{B}e < 0$.

Имеем

$$\|Be + \beta y\|^2 = \|\bar{B}e\|^2 = (\bar{B}^T \bar{B}e, e) = (\lambda e, e) = \lambda,$$

т. е. значение минимизируемой функции задачи (3) равно λ , следовательно, требуется найти минимальное собственное значение матрицы $\bar{B}^T \bar{B}$, удовлетворяющее условиям $\bar{B}e \geq 0, \hat{B}e < 0$.

Условие $\bar{B}e \geq 0$ является условием оптимальности, и если его не проверять, то соответствующее собственное значение не

будет минимальным значением функции. Условие $\hat{B}e < 0$ обеспечивает допустимость решения, если $(\hat{B}e)_i > 0$, то $\hat{y}_i < 0$, так как $\|Be + \beta y\|^2 = \lambda_{\min}(\bar{B})$ при известных \bar{B} , \hat{B} , e влечет $\hat{B}e = -\beta y$.

Геометрически задача (3) минимизации по $y \geq 0$ представляет собой задачу проектирования на неположительный ортант пространства R^m :

$$\begin{aligned} \inf_{y \geq 0} \|Be - (-y)\|^2 &= \|Be - P_{\mathbb{R}_-^m}(Be)\|^2 = \\ &= \|Be - \hat{B}'e\|^2 = \|\bar{B}'e\|^2 = \|\bar{B}'e\|^2. \end{aligned}$$

Здесь, в отличие от \bar{B} , (\hat{B}) , имеющих, возможно, меньшую размерность, чем B , матрицы \bar{B}' (\hat{B}') получены из матрицы B обнулением строк, для которых скалярное произведение на вектор e отрицательное (неотрицательное), т. е. с номерами из множества $I \setminus I'$ (множества I) в соответствии с обозначением, введенным в доказательстве теоремы. Тогда, очевидно, $(\hat{B}e)_i = \min\{0, (Be)_i\}$, $\hat{B}'e = -P_{\mathbb{R}_-^m}(Be)$ и $\|\bar{B}'e\|^2 = \|\bar{B}'e\|^2$.

3. Коррекция линейного динамического процесса с заданным множеством достижимости

Рассмотрим применение методов коррекции системы линейных неравенств к исследованию дискретного динамического процесса.

Пусть динамический процесс в пространстве \mathbb{R}^n определяется уравнением $x^{(k+1)} = Ax^{(k)}$, $k = 0, \dots, N - 1$. Условие достижимости в конце процесса заданного множества имеет вид линейного неравенства $(c, x^{(N)}) \geq c_0$.

Предположим, что для данной начальной точки $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ при заданном количестве шагов N , матрице $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, коэффициентах ограничения $c \in \mathbb{R}^n$, $c_0 \in \mathbb{R}$, условие достижимости не выполняется. Рассмотрим задачу минимальной коррекции

уравнения движения

$$(4) \quad \min_{\Delta A} \{ \|\Delta A\| : x^{(k+1)} = (A + \Delta A)x^{(k)}, \\ k = 0, \dots, N-1, (c, x^{(N)}) \geq c_0 \}.$$

Перепишем задачу в виде:

$$\min \{ \|\Delta A\| : (c, (A + \Delta A)^N x^{(0)}) \geq c_0 \}.$$

Для критерия в виде обобщенной матричной l_∞ -нормы $\|\Delta A\|_\infty$ рассмотрим задачу минимальной коррекции траектории в \mathbb{R}_+^n , т. е. дополнительно предположим, что все элементы матрицы A и векторов x^0 и c неотрицательны.

Из неотрицательности всех параметров задачи следует, что минимальная матрица коррекции состоит из одинаковых элементов $\Delta a_{ij}^* = h^*$, $i, j = 1, \dots, n$. Отметим также, что решение находится на границе допустимой области, т. е. ограничение выполняется как равенство. Обозначим I квадратную матрицу порядка n , все элементы которой равны 1. Получим задачу одномерной оптимизации с одним ограничением-равенством

$$\min \{ h : (c, (A + hI)^N x^{(0)}) = c_0 \}.$$

Ограничение представляет собой уравнение степени N относительно переменной h и может быть решено различными численными методами.

При малых значениях корректирующей матрицы можно найти приближенное значение решения, отбросив слагаемые, содержащие h во второй и более степени.

$$(c, (A^N + h \sum_{k=0}^{N-1} A^k I A^{N-1-k}) x^{(0)}) = c_0,$$

$$h^* = \frac{c_0 - (c, A^N x^{(0)})}{\left(c, \left(\sum_{k=0}^{N-1} A^k I A^{N-1-k} \right) x^{(0)} \right)}.$$

Решение можно уточнять итеративно, решая на следующем шаге задачу коррекции матрицы $\tilde{A} = A + h^* I$, пока не будет выполняться с достаточной точностью $(c, \tilde{A}^N x^{(0)}) = c_0$.

Найдем корректирующую матрицу с минимальной евклидовой нормой $\|\Delta A\|_e$.

Лемма 4. *Минимальной по евклидовой норме матрицей ΔA , коэффициенты которой удовлетворяют уравнению*

$$\sum_{i,j=1}^n \Delta a_{ij} b_{ij} = c,$$

является матрица

$$\Delta A^* = \frac{c}{\|B\|_e^2} B, \quad \|\Delta A^*\|_e = \frac{|c|}{\|B\|_e},$$

где $B = (b_{ij})_{i,j=1}^n$.

Это утверждение следует, например, из свойств скалярного произведения, если представить левую часть уравнения как скалярное произведение двух n^2 -мерных векторов.

Рассмотрим линейное (относительно элементов матрицы ΔA) приближение левой части ограничения $(c, (A + H)^N x^{(0)}) = c_0$.

$$(c, (A + \Delta A)^N x^{(0)}) \approx$$

$$\approx (c, (A^N + A^{N-1} \Delta A + A^{N-2} \Delta A \cdot A + \dots + \Delta A \cdot A^{N-1}) x^{(0)}) =$$

$$= (c, A^N x^{(0)}) + \sum_{k=0}^{N-1} (c, A^{N-k-1} \Delta A \cdot A^k x^{(0)}) =$$

$$= (c, x^{(N)}) + \sum_{k=0}^{N-1} (y^{(k)}, \Delta A x^{(k)}) = (c, x^{(N)}) + \sum_{i,j=1}^n \Delta a_{ij} \sum_{k=0}^{N-1} y_i^{(k)} x_j^{(k)},$$

где $y^{(k)} = (A^{N-k-1})^T c$, $k = 0, \dots, N - 1$.

Удовлетворяющая ограничению

$$(c, x^{(N)}) + \sum_{i,j=1}^n \Delta a_{ij} \sum_{k=0}^{N-1} y_i^{(k)} x_j^{(k)} = c_0$$

матрица коррекции ΔA с минимальной евклидовой нормой имеет вид

$$\Delta A^* = \frac{c_0 - (c, x^{(N)})}{\|B\|_e^2} B, \quad B = \left(\sum_{k=0}^{N-1} y_i^{(k)} x_j^{(k)} \right)_{i,j=1}^n.$$

Обозначим через Y матрицу размера $n \times N$, столбцами которой являются вектора $y^{(0)}, \dots, y^{(N-1)}$, через X матрицу такой же размерности, составленную из столбцов $x^{(0)}, \dots, x^{(N-1)}$, т. е.

$$Y = [y^{(0)}, \dots, y^{(N-1)}] = [(A^{N-1})^T c, (A^{N-2})^T c, \dots, A c, c],$$

$$X = [x^{(0)}, \dots, x^{(N-1)}].$$

Тогда

$$\Delta A^* = \frac{c_0 - (c, x^{(N)})}{\|YX^T\|_e^2} YX^T, \quad \|\Delta A^*\|_e = \frac{c_0 - (c, x^{(N)})}{\|YX^T\|_e}.$$

Матрица ΔA^* является приближенным решением задачи (4), для уточнения решения выполняется коррекция матрицы $A + \Delta A^*$.

Пусть теперь задана управляемая система

$$x^{(k+1)} = Ax^{(k)} + Bu^{(k)},$$

где u — управление в форме обратной связи по состоянию: $u^{(k)} = Kx^{(k)}$. Замкнутая система принимает вид

$$x^{(k+1)} = (A + BK)x^{(k)}.$$

В случае невыполнения условия достижимости рассмотренным выше способом можно выполнить оптимальную коррекцию матрицы $D = A + BK$.

Заключение

Для решения совместной системы линейных неравенств найдена мера устойчивости по критерию в виде евклидовой и l_∞ -нормы возмущения параметров. Задача определения решения с наибольшей мерой устойчивости в случае l_∞ -нормы сведена к задаче линейного программирования.

Задача определения радиуса несовместности системы линейных неравенств сведена к задачам вычисления собственных значений подматриц расширенной матрицы системы. Предложен метод коррекции матрицы для противоречивой модели дискретного динамического процесса, в том числе управляемого.

Литература

1. ВАТОЛИН А. А. *Аппроксимация несобственных задач линейного программирования по критерию евклидовой нормы* // ЖВМиМФ. – 1984. – Т. 24, №12. – С. 1907–1908.
2. ВАТОЛИН А. А. *Коррекция расширенной матрицы несовместной системы линейных неравенств и уравнений* // Математические методы оптимизации в экономико-математическом моделировании. – М.: Наука, 1991. – С. 240–249.
3. ГОРЕЛИК В. А., МУРАВЬЁВА О. В. *Матричная коррекция данных в задачах оптимизации и классификации* // Моделирование, декомпозиция и оптимизация сложных динамических процессов. – М.: ВЦ РАН, 2004. – С. 21–32.

4. ДЕМЬЯНОВ В. Ф., МАЛОЗЕМОВ В. Н. *Введение в мини-макс.* – М: Наука, 1972.
5. ЕРЕМИН И. И. *Общая теория устойчивости в линейном программировании* // Изв. вузов. Матем. – 1999. – №12. – С. 43–52.
6. ЕРЕМИН И. И. *О несовместных системах линейных неравенств* // ДАН ССР. – 1961. – Т. 138, №6. – С. 1280–1283.
7. ЕРЕМИН И. И., МАЗУРОВ В. Д., АСТАФЬЕВ Н. Н. *Несобственные задачи линейного и выпуклого программирования.* – М.: Наука, 1983.
8. ПОЛЯК Б. Т., ЩЕРБАКОВ П. С. *Робастная устойчивость и управление.* – М.: Наука, 2002.
9. ПОЛЯК Б. Т. *Обобщенная сверхустойчивость в теории управления* // Автоматика и телемеханика. – 2004. – №4. – С. 70–80.
10. ЧЕРНИКОВ С. Н. *Системы линейных неравенств* // УМН. – 1953. – Т. 8(54), №2. – С. 7–73.
11. ЧЕРНИКОВ С. Н. *Линейные неравенства.* – М.: Наука, 1968.
12. AMALDI E., PFETSCH M. E., TROTTER L. E. *On the maximum feasible subsystem problem, IISs, and IIS-hypergraphs* // Math.Program. – 2003. – Vol. 95, №3. – P. 533–554.
13. AMARAL P., BARAHONA P. *Connections between the total least squares and the correction of an infeasible system of linear inequalities* // Linear Algebra and its Applications. – 2005. – Vol. 395. – P. 191–210.
14. CHAKRAVARTI N. *Some results concerning post-infeasibility analysis* // EJOR. – 1994. – Vol. 73. – P. 139–143.
15. CHINNECK J. W. *Finding a Useful Subset of Constraints for Analysis in an Infeasible Linear Program* // INFORMS Journal on Computing. – Spring, 1997. – Vol. 9, №2. – P. 164–174.
16. GLEESON J., RYAN J. *Identifying minimally infeasible subsystems of inequalities* // ORSA JOURNAL ON COMPUTING – Winter, 1990. – Vol. 2, №1. – P. 61–63.

17. GOLUB G. H., VAN LOAN C. F. *An analysis of the total least squares problem* // SIAM J.Numer. Anal. – 1980. – Vol. 17. – P. 883–893.
18. GREENBERG H.J. *How to Analyse the Results of Linear Programs* // Part 3: Infeasibility Diagnoses, Interfaces. – 1993. – Vol. 23, №6. – P. 120–139.
19. DE MOOR B. L. R. *Total linear least squares with inequality constraints*. – 1990
20. NOURA A. A., SALJOOGHI F.H. *Determining feasible solution in imprecise linear inequality systems* // Applied Mathematical Sciences. – 2008. – Vol.2, №36. – P. 1789–1797.
21. VAN HUFFEL S., VANDEWALLE J. *The total least squares problem: computational aspects and analysis*. – Philadelphia: SIAM, 1991.

CORRECTION AND PERTURBATION OF SYSTEMS OF LINEAR INEQUALITIES

Olga Muravyova, Moscow Pedagogical State University , Moscow, Cand.Sc., assistant professor (muraveva@mail.ru).

Abstract: The correction of incompatible systems of linear inequalities and the perturbation of compatible systems of linear inequalities are considered.

Keywords: matrix correction, incompatible system of linear inequalities, stability of compatible system of linear inequalities.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии А. П. Курдюковым.

УДК 681.5.011

ББК 32.965

ОБ АНАЛИТИЧЕСКОМ РЕШЕНИИ СИСТЕМ МАТРИЧНЫХ НЕРАВЕНСТВ, ДВОЙСТВЕННЫХ К СИСТЕМАМ НЕРАВЕНСТВ ЛЯПУНОВА ¹

Поздяев В. В. ²

(Арзамасский политехнический институт (филиал)
Нижегородского государственного технического университета,
Арзамас)

Рассмотрены системы неравенств Ляпунова произвольного порядка. Представлен аналитический способ нахождения решений двойственных систем матричных неравенств. Детально рассмотрены некоторые частные случаи, дающие достаточные условия неразрешимости исходных систем неравенств Ляпунова.

Ключевые слова: линейные системы, матричные неравенства, неравенства Ляпунова.

Введение

Системы линейных матричных неравенств (ЛМН) — один из важнейших инструментов современной теории управления. Одна из причин этого — разнообразие задач, сводимых к задачам выпуклой оптимизации с участием ЛМН [4]. Другая — наличие эффективных алгоритмов численного решения последних.

Для практической работы с ЛМН существуют различные программные продукты, как включенные в состав интегрированных сред MATLAB, SCILAB, так и разрабатываемые независимо. Тем не менее, теоретический анализ свойств таких систем

¹ Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (гранты №07-01-92166, №08-01-97036).

² Владимир Васильевич Поздяев, кандидат физико-математических наук, старший преподаватель (vpozduayev@gmail.ru).

неравенств, начинающийся с вопроса об их разрешимости, может представлять для исследователя ничуть не меньший интерес. По этой причине аналитические результаты имеют особую ценность.

Ввиду высокой сложности задача установления разрешимости систем ЛМН аналитическим путем до сих пор не решена даже для кажущегося простым случая систем нескольких неравенств Ляпунова, возникающих, например, в задачах об устойчивости систем случайной структуры с неизвестными вероятностями перехода [8] и систем, описываемых дифференциальными включениями [5]. Результаты в этой области малочисленны и имеют ограниченное применение. Первые результаты были получены Каменецким и Пятницким [5]. В своей работе они связывают разрешимость системы неравенств Ляпунова с существованием седловой точки некоторой функции. Однако явного критерия разрешимости ими предложено не было. Необходимые условия разрешимости приводятся в [6, 7]; необходимые и достаточные критерии разрешимости некоторого ограниченного класса систем ЛМН второго порядка представлены в [9, 10, 11]. (Отметим, что квадратичные функции Ляпунова и ЛМН как средство их нахождения являются не единственным инструментом решения упомянутых задач — особенно при изучении нелинейных систем. Например, в [1] рассматриваются нелинейные переключаемые системы специального вида, и для них приводятся достаточные условия существования и способы построения различных неквадратичных функций Ляпунова.)

Автором был сформирован подход, на основе которого были получены аналитические критерии разрешимости систем неравенств Ляпунова произвольного конечного числа динамических систем второго порядка [2]. Позже он был распространен на линейные матричные неравенства второго порядка произвольного вида [3]. Данный подход и полученные с его помощью результаты могут иметь преимущество перед численными методами в таких задачах, как, например, определение множества значений параметров, для которых линейная система второго порядка с

переключениями, матрицы режимов которой зависят от данных параметров, будет устойчивой или стабилизируемой (с квадратичной общей функцией Ляпунова).

В силу вышеупомянутой сложности общей задачи естественным развитием полученных результатов могут стать аналитические критерии разрешимости для различных конкретных типов систем ЛМН произвольного порядка. В данной работе рассматривается один из базовых типов таких систем, а именно, системы классических неравенств Ляпунова (произвольного порядка). Мы показываем, как аналитически находить различные типы решений двойственных систем ЛМН, получая таким образом достаточные условия неразрешимости исходных систем неравенств Ляпунова.

1. Двойственные системы

Известно [4], что неразрешимость системы

$$(1) \quad P > 0, \quad A_i^T P + P A_i < 0, \quad i = 1, \dots, m,$$

где $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, эквивалентна существованию симметричных матриц Q_0, \dots, Q_m , не всех равных нулю, таких что

$$Q_0 \geq 0, \dots, Q_m \geq 0, \quad Q_0 = \sum_{i=1}^m (Q_i A_i^T + A_i Q_i).$$

Если известно, что все матрицы A_i устойчивы (в последующих параграфах мы будем предполагать, что это условие выполняется), неравенство $P > 0$ в (1) является излишним и его можно исключить или, эквивалентно, положить $Q_0 = 0$. В этом случае неразрешимость (1) эквивалентна разрешимости

$$Q_1 \geq 0, \dots, Q_m \geq 0, \quad \sum_{i=1}^m (Q_i A_i^T + A_i Q_i) = 0.$$

Далее нас будет интересовать нахождение (ненулевых) матриц $Q_i \geq 0$, удовлетворяющих последнему уравнению.

Каждая из матриц $Q_i \geq 0$ может быть представлена в форме $Q_i = q_i q_i^T = q_{i1} q_{i1}^T + \dots + q_{ir_i} q_{ir_i}^T$, $q_i \in \mathbb{R}^{n \times r_i}$, где $r_i = \text{rank } Q_i$ и q_{ij} — j -й столбец q_i . Двойственная система ЛМН тогда сводится к следующему уравнению относительно векторов x_k и y_k :

$$(2) \quad \sum_{i=1}^m (Q_i A_i^T + A_i Q_i) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{r_i} (q_{ij} q_{ij}^T A_i^T + A_i q_{ij} q_{ij}^T) = \\ = \sum_{k=1}^r (x_k y_k^T + y_k x_k^T) = 0,$$

где $r = \sum_{i=1}^m r_i$; векторы x_k , $k = 1, \dots, r$, равны $q_{11}, q_{12}, \dots, q_{1r_1}, q_{21}, \dots, q_{mr_m}$; векторы y_k — соответствующим $A_1 q_{11}, \dots, A_m q_{mr_m}$.

В следующих разделах мы представляем результаты, характеризующие свойства решений данного уравнения, и используем их для определения его разрешимости и нахождения решений при $r = 2$ и $r = 3$. Первый случай дает более конструктивную версию критерия, приведенного в [11]. Второй является существенно новым результатом и представляет собой следующий по сложности этап установления (не)разрешимости системы неравенств Ляпунова.

2. Вспомогательные результаты

Временно забудем о происхождении векторов x_k и y_k и рассмотрим уравнение

$$(3) \quad M \equiv \sum_{k=1}^r (x_k y_k^T + y_k x_k^T) = 0$$

как самостоятельный объект. Следующие результаты составляют основу дальнейших построений.

Лемма 1. Если выполняется равенство (3), то хотя бы один из векторов x_1 и y_1 является линейной комбинацией x_k , $k = 2, \dots, r$.

Доказательство. Пусть z — произвольный вектор, ортогональный x_2, \dots, x_r : $x_k^T z = 0, k = 2, \dots, r$. Тогда

$$(4) \quad z^T M z = \sum_{k=1}^r (z^T x_k y_k^T z + z^T y_k x_k^T z) = \\ = z^T x_1 y_1^T z + z^T y_1 x_1^T z = 2(z^T x_1)(y_1^T z).$$

Поскольку $M = 0$, выполняется хотя бы одно из равенств $x_1^T z = 0$ и $y_1^T z = 0$.

Предположим теперь, что некоторые из таких векторов z ортогональны только x_1 , а некоторые — только y_1 , так что для некоторого z_1 мы имеем $x_1^T z_1 = 0$, но $y_1^T z_1 \neq 0$, а для некоторого z_2 — $x_1^T z_2 \neq 0$, но $y_1^T z_2 = 0$. В этом случае вектор $z = z_1 + z_2$ был бы ортогонален x_2, \dots, x_r , но не x_1 или y_1 : $x_1^T z = x_1^T z_2 \neq 0$ и $y_1^T z = y_1^T z_1 \neq 0$. Поскольку мы только что доказали невозможность этого, необходимо имеем, что все подпространство таких векторов z ортогонально x_1 или y_1 . Или, эквивалентно, что хотя бы один из векторов x_1 и y_1 принадлежит подпространству, натянутому на x_2, \dots, x_r , откуда и следует утверждение леммы.

Лемма 2. *Предположим, что x_2 не является линейной комбинацией x_3, \dots, x_r . Тогда из*

$$\sum_{k=1}^r c_k x_k = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \sum_{k=3}^r c_k x_k = 0,$$

где не все c_k равны нулю, следует

$$-c_2 y_1 + c_1 y_2 + \sum_{k=3}^r c'_k x_k = 0$$

для некоторых $c'_k, k = 3, \dots, r$ (при $r = 2$ дополнительные слагаемые исчезают).

Доказательство. Из изначального предположения следует, что не существует нетривиальной равной нулю линейной комбинации x_2, \dots, x_r , так что $c_1 \neq 0$, и

$$x_1 = \sum_{k=2}^r -\frac{c_k}{c_1} x_k;$$

$$M = \sum_{k=1}^r (x_k y_k^T + y_k x_k^T) = \sum_{k=2}^r \left((x_k (y_k - \frac{c_k}{c_1} y_1))^T + (y_k - \frac{c_k}{c_1} y_1) x_k^T \right).$$

Пусть z — произвольный вектор, ортогональный x_3, \dots, x_r : $x_k^T z = 0$, $k = 3, \dots, n$ (просто произвольный вектор при $r = 2$). Тогда

$$\begin{aligned} (5) \quad z^T M z &= z^T x_2 (y_2 - \frac{c_2}{c_1} y_1)^T z + z^T (y_2 - \frac{c_2}{c_1} y_1) x_2^T z = \\ &= \frac{2}{c_1} (z^T x_2) ((c_1 y_2 - c_2 y_1)^T z). \end{aligned}$$

Поскольку $M = 0$, выполняется хотя бы одно из равенств $x_2^T z = 0$ и $(c_1 y_2 - c_2 y_1)^T z = 0$. Рассмотрим случай $x_2^T z = 0$. Так как x_2 не является линейной комбинацией x_3, \dots, x_r , существует последовательность $z_j \rightarrow z$, такая что $x_2^T z_j \neq 0$, $x_i^T z_j = 0$ для всех $i = 3, \dots, r$, $j = 1, 2, \dots$; следовательно, и в этом случае также $(c_1 y_2 - c_2 y_1)^T z = \lim_{j \rightarrow \infty} (c_1 y_2 - c_2 y_1)^T z_j = 0$. Таким образом, все векторы z рассматриваемого вида ортогональны $c_1 y_2 - c_2 y_1$, или, эквивалентно, $c_1 y_2 - c_2 y_1$ принадлежит подпространству, натянутому на x_3, \dots, x_r , откуда и следует утверждение леммы.

Замечание 1. Вместо x_1, x_2, y_1 и y_2 мы можем рассматривать здесь x_i, x_j, y_i и y_j для произвольных $i, j = 1, \dots, r$, $i \neq j$. Более того, для любого k мы можем поменять местами x_k и y_k и применить данную лемму к новому набору векторов. В целом, данная лемма описывает некоторый трансформирующий оператор, который, будучи применен к нетривиальной нулевой

линейной комбинации векторов u_k (каждый из которых является одним из векторов x_k и y_k), заменяет два из них соответствующими векторами v_k (каждый из которых является другим из пары x_k, y_k), переворачивая коэффициенты при них из (c_i, c_j) в $(-c_j, c_i)$, и заменяет все остальные коэффициенты на некоторые новые неизвестные величины — результатом чего является новая нетривиальная нулевая линейная комбинация нового набора векторов.

Замечание 2. Предположение о линейной независимости в лемме 2 по отношению к проблеме (2) может быть ложным для специально подобранных систем или при $r > n$. Однако в остальных случаях оно выполняется, и далее мы будем считать его истинным в расширенной форме, подразумеваемой предыдущим примечанием.

3. Простейший случай: две пары векторов

Пусть $m = 2$ и (2) имеет решение с $\text{rank } Q_1 = \text{rank } Q_2 = 1$. Обозначим $x_1 = q_{11}$, $y_1 = A_1 q_{11}$; $x_2 = q_{21}$, $y_2 = A_2 q_{21}$. Лемма 1 утверждает, что $c_1 x_1 + c_2 x_2 = 0$ или $c_1 A_1 x_1 + c_2 x_2 = 0$ для некоторых ненулевых c_1 и c_2 . Лемма 2 дополняет эти уравнения равенствами $-c_2 A_1 x_1 + c_1 A_2 x_2 = 0$ и $-c_2 x_1 + c_1 A_2 x_2 = 0$, соответственно. В матричной форме данные варианты могут быть записаны как

$$(6) \quad \begin{bmatrix} c_1 E & c_2 E \\ -c_2 A_1 & c_1 A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

и

$$(7) \quad \begin{bmatrix} c_1 A_1 & c_2 E \\ -c_2 E & c_1 A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0,$$

где E — единичная матрица. Для существования нетривиальных решений данных систем необходима вырожденность соответству-

ющих матриц коэффициентов:

$$(8) \quad \det \begin{bmatrix} c_1 E & c_2 E \\ -c_2 A_1 & c_1 A_2 \end{bmatrix} = \det(c_1^2 A_2 + c_2^2 A_1) = 0$$

в первом случае и

$$(9) \quad \det \begin{bmatrix} c_1 A_1 & c_2 E \\ -c_2 E & c_1 A_2 \end{bmatrix} = \det A_2 \det(c_1^2 A_1 + c_2^2 A_2^{-1}) = 0$$

во втором. Совместное решение (6) и (8), или (7) и (9) дает нам матрицы $Q_1 = x_1 x_1^T$ и $Q_2 = x_2 x_2^T$, из чего вытекает следующий результат.

Теорема 1. Если $m = 2$ и (2) имеет решение с

$\text{rank } Q_1 = \text{rank } Q_2 = 1$, так что $Q_1 = x_1 x_1^T$ и $Q_2 = x_2 x_2^T$, данное решение может быть найдено из (6) и (8), или же из (7) и (9), где $c_1 \neq 0$ и $c_2 \neq 0$. Из существования такого решения следует неразрешимость исходной системы (1).

Уравнение (8) эквивалентно требованию вырожденности пучка матриц³ $\sigma_{\gamma[0;\infty)}[A_1, A_2]$; уравнение (9) — требованию вы-

рожденности пучка матриц $\sigma_{\gamma[0;\infty)}[A_1, A_2^{-1}]$. С учетом этого полученное нами достаточное условие неразрешимости (1) схоже со следующим результатом, приведенным в [11] (теорема 3.1; формулировка незначительно изменена для соответствия контексту).

Теорема 2. Пусть A_1 и A_2 — две гурвицевы матрицы в \mathbb{R}^n

такие, что существует решение $P = P^T \geq 0$ уравнений Ляпу-

³ Здесь мы используем обозначения и термины из [11]. Пучком матриц $\sigma_{\gamma[0;\infty)}[A_1, A_2]$ называется семейство матриц вида $L(\gamma) = A_1 + \gamma A_2$, $\gamma \in [0; \infty)$. Пучок матриц $\sigma_{\gamma[0;\infty)}[A_1, A_2]$ называется невырожденным, если $L(\gamma)$ невырождена для всех $\gamma \in [0; \infty)$, и вырожденным в противном случае. Необходимым и достаточным условием невырожденности $\sigma_{\gamma[0;\infty)}[A_1, A_2]$ является отсутствие у данной пары матриц неположительных вещественных обобщенных собственных значений.

нова

$$A_i^T P + P A_i = -R_i \leq 0, \quad i \in \{1, 2\}$$

для некоторых положительно полуопределенных матриц R_i ранга $n - 1$. Предположим также, что не существует решения $P = P^T > 0$ системы строгих матричных неравенств Ляпунова

$$A_i^T P + P A_i < 0, \quad i \in \{1, 2\}.$$

Тогда хотя бы один из пучков матриц $\sigma_{\gamma(0;\infty)}[A_1, A_2]$ и $\sigma_{\gamma(0;\infty)}[A_1, A_2^{-1}]$ вырожден.

Данная теорема рассматривает один из типов пограничных конфигураций матриц A_1 и A_2 , когда описываемые ими динамические системы не имеют строгой общей функции Ляпунова, но имеют нестрогую с дополнительными ограничениями на правые части соответствующих уравнений Ляпунова ($\text{rank } R_i = n - 1$). Отметим без доказательства, что для пограничных конфигураций введение этих дополнительных условий эквивалентно намерению искать решения системы двойственных матричных неравенств именно того типа, которому посвящен данный параграф. Наиболее существенным преимуществом нового результата (теорема 1) является то, что он применим не только к пограничным конфигурациям и, кроме того, является более конструктивным, позволяя непосредственно находить решения двойственной системы ЛМН.

4. Три пары векторов

Рассмотрим случай $r = 3$ и предположим, что никакие Q_i , $i = 1, \dots, m$, не равны нулю. Тогда имеет место одна из следующих конфигураций:

- $m = 2, \text{rank } Q_1 = 1, \text{rank } Q_2 = 2$:
 $x_1 = q_{11}, y_1 = A_1 q_{11}, x_2 = q_{21}, y_2 = A_2 q_{21},$
 $x_3 = q_{22}, y_3 = A_2 q_{22};$
- $m = 2, \text{rank } Q_1 = 2, \text{rank } Q_2 = 1$:
 $x_1 = q_{11}, y_1 = A_1 q_{11}, x_2 = q_{12}, y_2 = A_1 q_{12},$
 $x_3 = q_{21}, y_3 = A_2 q_{21};$

- $m = 3$, $\text{rank } Q_1 = \text{rank } Q_2 = \text{rank } Q_3 = 1$:
 $x_1 = q_{11}$, $y_1 = A_1 q_{11}$, $x_2 = q_{21}$, $y_2 = A_2 q_{21}$,
 $x_3 = q_{31}$, $y_3 = A_3 q_{31}$.

Первые два варианта можно рассматривать как частные случаи последнего, в которых две из матриц A_i , $i = 1, 2, 3$, совпадают. В данном параграфе мы остановимся на матрицах Q_i ранга 1, а одну из оставшихся конфигураций рассмотрим далее в качестве примера.

Как и ранее, начнем с двух возможностей, предоставляемых леммой 1:

$$(10) \quad c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 = 0$$

или

$$(11) \quad c_1 A_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 = 0,$$

где не все c_i , $i = 1, 2, 3$, равны нулю; из второго примечания к лемме 2 следует, что ни одно из c_i не является нулем. Рассмотрим вариант (10). Применение трансформации, описанной в первом примечании к лемме 2, к слагаемым, содержащим x_1 и x_2 , x_2 и x_3 , x_3 и x_1 , дает три следующие линейные комбинации:

$$(12) \quad -c_2 y_1 + c_1 y_2 + c'_3 x_3 = 0,$$

$$(13) \quad c'_1 x_1 - c_3 y_2 + c_2 y_3 = 0,$$

$$(14) \quad c_3 y_1 + c'_2 x_2 - c_1 y_3 = 0.$$

Возьмем (12) и применим трансформацию снова, на этот раз ко второму и третьему слагаемым (y_2 и x_3):

$$(15) \quad c''_1 y_1 - c'_3 x_2 + c_1 y_3 = 0.$$

В силу второго примечания к лемме 2 все нулевые линейные комбинации каждого конкретного набора x_k и y_k могут отличаться только скалярным множителем. Сравнивая (15) и (14), получаем $c'_3 = c'_2$. Применив трансформацию к y_1 и x_3 в (12), получаем комбинацию

$$-c'_3 x_1 + c''_2 y_2 - c_2 y_3 = 0,$$

которая после сравнения с (13) дает $c'_1 = c'_3$. Учитывая, что $y_k = A_k x_k$, мы можем записать (10) и (12)–(14) в матричном

виде как (здесь $c' = c'_1 = c'_2 = c'_3$)

$$\begin{bmatrix} c_1 E & c_2 E & c_3 E \\ -c_2 A_1 & c_1 A_2 & c' E \\ c' E & -c_3 A_2 & c_2 A_3 \\ c_3 A_1 & c' E & -c_1 A_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0.$$

Умножением строк и столбцов матрицы коэффициентов на подходящие скалярные величины эта система может быть далее приведена к виду

$$\begin{bmatrix} E & E & E \\ -\gamma_1 A_1 & \gamma_2 A_2 & E \\ E & -\gamma_2 A_2 & \gamma_3 A_3 \\ \gamma_1 A_1 & E & -\gamma_3 A_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 x_1 \\ c_2 x_2 \\ c_3 x_3 \end{bmatrix} = 0,$$

где $\gamma_i = c_0/c_i^2$, $c_0 = c_1 c_2 c_3 / c'$. Отметим особо, что все величины γ_i имеют одинаковые знаки. Кроме того, сумма последних трех блочных строк новой матрицы коэффициентов равна первой строке, так что одна из соответствующих линейных комбинаций является излишней. Исключая, например, первую строку, мы получаем матрицу $3n \times 3n$

$$G_1 = \begin{bmatrix} -\gamma_1 A_1 & \gamma_2 A_2 & E \\ E & -\gamma_2 A_2 & \gamma_3 A_3 \\ \gamma_1 A_1 & E & -\gamma_3 A_3 \end{bmatrix},$$

ядро которой нас и интересует. Таким образом, мы приходим к следующей последовательности шагов.

1. Построить матрицу G_1 .

2. Найти ненулевые величины γ_i , $i = 1, 2, 3$, имеющие одинаковые знаки, такие, что G_1 вырождена. Если решение не найдено,

то или двойственная система ЛМН неразрешима или ее решения принадлежат другим конфигурациям (возможно, с другим суммарным рангом r).

3. Найти $c_i x_i$ как соответствующие части нетривиального решения $G_1 z = 0$.

4. Умножить $c_i x_i$ на $\sqrt{|\gamma_i|}$, получив векторы $x'_i = \text{sign } c_i \sqrt{|c_0|} x_i$. Поскольку общие скалярные множители векторов x_i , также как и их знаки, не имеют существенного влияния на соответствующие решения двойственной ЛМН, найденные векторы x'_i являются допустимыми значениями x_i .

5. Положить $Q_i = x'_i x'^T_i$; подставить полученные матрицы в (2) для проверки.

Второй вариант (11) отличается от первого (10) лишь тем, что векторы x_1 и y_1 или, эквивалентно, E и A_1 в первом столбце матрицы G_1 , меняются ролями:

$$G_2 = \begin{bmatrix} -\gamma_1 E & \gamma_2 A_2 & E \\ A_1 & -\gamma_2 A_2 & \gamma_3 A_3 \\ \gamma_1 E & E & -\gamma_3 A_3 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема 3. Если $m = 3$ и (2) имеет решение с

$\text{rank } Q_1 = \text{rank } Q_2 = \text{rank } Q_3 = 1$, так что $Q_1 = x_1 x_1^T$, $Q_2 = x_2 x_2^T$ и $Q_3 = x_3 x_3^T$, данное решение может быть найдено с помощью построения матриц G_1 и/или G_2 и применения к ним указанной выше последовательности шагов. Из существования такого решения следует неразрешимость исходной системы (1).

Замечание 3. Другие конфигурации Q_i из числа указанных в начале параграфа можно свести к данной путем рассмотрения троек матриц (A_1, A_2, A_2) или (A_1, A_1, A_2) вместо (A_1, A_2, A_3) .

5. Пример

Рассмотрим систему неравенств Ляпунова (1) со следующими устойчивыми матрицами:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0,485 & 0,881 & 0,302 \\ 0,309 & -0,805 & 0,008 \\ -0,880 & -0,332 & 0,072 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -0,836 & 0,373 & 0,693 \\ -0,448 & -0,362 & -0,399 \\ -0,039 & 0,160 & -0,326 \end{bmatrix}.$$

Ни один из пучков матриц $[A_1, A_2]$ и $[A_1, A_2^{-1}]$ не является вырожденным, так что критерий, приведенный в параграфе 3, здесь неприменим. Покажем, однако, что существует решение двойственного уравнения (2) с $\text{rank } Q_1 = 2$ и $\text{rank } Q_2 = 1$. В соответствии с параграфом 4, формируем матрицу G_2 из тройки (A_1, A_1, A_2) вместо (A_1, A_2, A_3) :

$$G_2 = \begin{bmatrix} -\gamma_1 E & \gamma_2 A_1 & E \\ A_1 & -\gamma_2 A_1 & \gamma_3 A_2 \\ \gamma_1 E & E & -\gamma_3 A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\gamma_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0,326\gamma_3 \end{bmatrix}.$$

Определитель $\det G_2$ является многочленом шестой степени от трех переменных γ_i , кубическим относительно каждой переменной по отдельности. Уравнение $\det G_2 = 0$ имеет бесконечно много решений, образующих поверхность в пространстве величин γ_i (как отмечалось ранее, нас интересуют только решения в октантах, где все γ_i имеют одинаковые знаки). Мы можем произвольным образом выбрать две из них, например, γ_1 и γ_2 , из

множества, образованного проекцией данной поверхности на соответствующую координатную плоскость, а затем решить уравнение $\det G_2 = 0$, чтобы найти третью. Границы такой проекции могут быть найдены построением неявно заданной поверхности $\det G_2 = 0$ или, более формально, анализом дискриминанта $d(\gamma_1, \gamma_2)$ полинома $\det G_2$ относительно γ_3 (рис. 1).

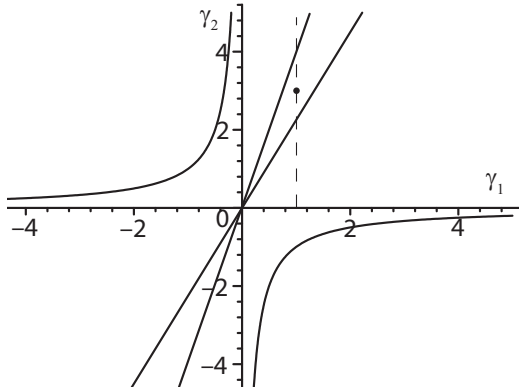


Рис. 1. График $d(\gamma_1, \gamma_2) = 0$

В данном случае допустимые значения γ_1 и γ_2 находятся внутри двойного сектора в первом и третьем квадрантах. Взяв произвольную точку в этом секторе, например, $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = 3$, и решив $\det G_2 = 0$ относительно γ_3 , получаем два положительных корня: 3,827 и 10,544 (рис. 2). Возьмем первый из них, подставим $\gamma = [1 \ 3 \ 3,827]$ в G_2 и найдем любое нетривиальное решение $G_2 z = 0$:

$$z = [0,299 \ 0,428 \ -0,132 \ 0,014 \ -0,042 \ \dots$$

$$0,704 \ -0,206 \ 0,295 \ -0,289]^T.$$

Извлекая векторы x_i , получаем

$$q_{11} = x_1 = \sqrt{|\gamma_1|} [z_1 \ z_2 \ z_3]^T = [0,299 \ 0,428 \ -0,132]^T,$$

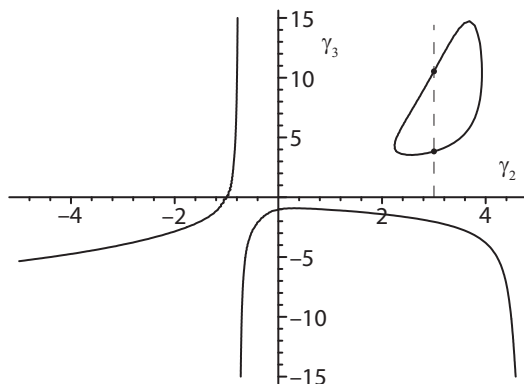


Рис. 2. Сечение $\det G_2 = 0$ плоскостью $\gamma_1 = 1$

$$q_{12} = x_2 = \sqrt{|\gamma_2|} [z_4 \ z_5 \ z_6]^T = [0,024 \ -0,073 \ 1,219]^T,$$

$$q_{21} = x_3 = \sqrt{|\gamma_3|} [z_7 \ z_8 \ z_9]^T = [-0,403 \ 0,577 \ -0,565]^T.$$

Нахождение $Q_1 = q_{11}q_{11}^T + q_{12}q_{12}^T$ и $Q_2 = q_{21}q_{21}^T$ и подстановка результата в (2) показывает, что полученные матрицы действительно являются решениями двойственной системы ЛМН, и, таким образом, исходная система (1) для заданных матриц A_1 и A_2 неразрешима.

6. Заключение

В данной работе показано, как аналитически находить решения системы ЛМН, двойственной к системе неравенств Ляпунова, с суммарным рангом $r = \sum_{i=1}^m \text{rank } Q_i$, не превышающим 3. Случай $r = 2$ дает более конструктивную версию известного ранее критерия; случай $r = 3$ является существенно новым результатом, представляющим собой следующий по сложности этап установления разрешимости системы неравенств Ляпунова. Те же базовые леммы и общий подход, продемонстрированный в параграфе 4, могут быть применены и к поиску решений с более высокими значениями суммарного ранга. Конечно, в этом случае сложность анализируемых полиномов будет существенно выше,

что делает важным структурный анализ матриц коэффициентов и их определителей. Это особенно актуально, когда m невелико, а индивидуальные ранги матриц Q_i превышают единицу.

Литература

1. АЛЕКСАНДРОВ А. Ю., ПЛАТОНОВ А. В. *Об абсолютной устойчивости одного класса нелинейных систем с переключениями* // Автоматика и телемеханика. – 2008. – №7. – С. 3–18.
2. ПАКШИН П. В., ПОЗДЯЕВ В. В. *Критерий существования общей квадратичной функции Ляпунова множества линейных систем второго порядка* // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2005. – №4. – С. 22–27.
3. ПАКШИН П. В., ПОЗДЯЕВ В. В. *Условия разрешимости системы линейных матричных неравенств второго порядка* // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2006. – №5. – С. 5–14.
4. BOYD S., EL GHAOU L., FERON E., BALAKRISHNAN V. *Linear matrix inequalities in system and control theory*. – SIAM, 1994.
5. КАМЕНЕТСКИЙ В. А., ПЯТНИЦКИЙ Е. С. *An iterative method of Lyapunov function construction for differential inclusion* // System and Control Letters. – 1987. – V. 8. – P. 445–451.
6. ООБА Т., FUNAHASHI Y. *Two Conditions Concerning Common Quadratic Lyapunov Functions for Linear Systems* // IEEE Trans. Automat. Contr. – 1997. – V. 42, №5. – P. 719–721.
7. ООБА Т., FUNAHASHI Y. *On a Common Quadratic Lyapunov Function for Widely Distant Systems* // IEEE Trans. Automat. Contr. – 1997. – V. 42, №12. – P. 1697–1699.
8. ПАКШИН П. В. *Robust Stability and Stabilization of the Family of Jumping Stochastic Systems* // Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications. – 1997. – V. 30. – P. 2855–2866.

9. SHORTEN R. N., MASON O., O'CAIRBRE F., CURRAN P. *A unifying framework for the circle criterion and other quadratic stability criteria* // Proceedings of the European Control Conference. – Cambridge, 2003. – P. 1–6 (CD-ROM).
10. SHORTEN R. N., NARENDRA K. *Necessary and sufficient conditions for the existence of a common quadratic Lyapunov function for a finite number of stable second order linear time-invariant systems* // International Journal of Adaptive Control and Signal Processing. – 2002. – V. 16. – P. 709–728.
11. SHORTEN R. N., NARENDRA K. S., MASON O. *A result on common quadratic Lyapunov functions* // IEEE Trans. Automat. Control. – 2003. – V. 48, №1. – P. 110–113.

ON AN ANALYTICAL SOLUTION OF SYSTEMS OF MATRIX INEQUALITIES DUAL TO LYAPUNOV INEQUALITY SYSTEMS

Vladimir Pozdyayev, Arzamas Polytechnical Institute of Nizhny Novgorod State Technical University, Arzamas, Cand.Sc., assistant professor (vpozdyayev@gmail.ru).

Abstract: Systems of Lyapunov inequalities of arbitrary order are considered. A way to analytically find solutions of dual matrix inequality systems is presented. Some particular cases are considered in detail, providing sufficient conditions of original Lyapunov inequality systems' infeasibility.

Keywords: linear systems, matrix inequalities, Lyapunov inequalities.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии Б. Т. Поляком.

УДК 681.518.22
ББК 32.96

АДАПТИВНОЕ ОПТИМАЛЬНОЕ В СРЕДНЕКВАДРАТИЧЕСКОМ СМЫСЛЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

**Гуляев С. В.¹, Шубладзе А. М.²,
Малахов В. А.,³ Ольшванг В. Р.⁴**

*(Учреждение Российской академии наук
Институт проблем управления РАН, Москва)*

Кротов А. В.⁵

(ОАО «Газавтоматика»)

Предлагается метод решения задачи дифференцирования, позволяющий получать оценки производных гауссовских стационарных сигналов, близкие к оптимальным в среднеквадратическом смысле, если спектральные плотности полезного сигнала и помехи известны с точностью до уровня. Решается задача с помощью специальным образом организованных нелинейных динамических систем. Найдено близкое к оптимальному решение задачи дифференцирования, когда для любых фиксированных уровней дробно-рациональных спектральных плотностей полезного сигнала и помехи параметры эквивалентной передаточной функции нелинейного динамического дифференциатора могут быть сделаны близкими к параметрам оптимального винеровского фильтра.

¹ Сергей Викторович Гуляев, кандидат технических наук
(svgul@inbox.ru).

² Александр Михайлович Шубладзе, доктор технических наук, профессор
(shub@ipi.ru).

³ Валерий Александрович Малахов, кандидат технических наук, (тел.
(495) 334-88-81).

⁴ Владимир Рафаилович Ольшванг, кандидат технических наук, (тел.
(495) 334-88-81).

⁵ Александр Васильевич Кротов, начальник управления,
alex_k@gazauto.gazprom.ru

Ключевые слова: дифференцирование, адаптация, оптимальность, гауссовский шум.

1. Введение

При решении задач управления технологическими процессами часто требуется находить производные гауссовских стационарных сигналов в случае, когда интенсивность сигнала и помехи может меняться в широких пределах. Известные методы решения такой задачи, связанные с набором статистики, не всегда могут использоваться для решения практических задач управления, так как темп изменения параметров сигналов может оказаться достаточно высоким. Поэтому представляет интерес разработка таких способов оценки производных, которые могли бы решать задачу для таких случаев.

2. Постановка задачи

Постановка задачи дифференцирования следующая. Наблюдаемый сигнал

$$(1) \quad z(t) = x(t) + \varphi(t),$$

где $x(t)$ – полезный стационарный гауссовский сигнал; $\varphi(t)$ – стационарная гауссовская помеха, некоррелированная с $x(t)$.

Спектральная плотность полезного сигнала

$$(2) \quad f_x(Q, w) = \frac{Q \left(\sum_{j=1}^{m-p} b_j w^{2j} + 1 \right)}{\sum_{j=1}^n a_j w^{2j} + 1},$$

где $m < n$, $m - p > 0$, m , p , n , b_j и a_j – известные параметры, $Q > 0$ – неизвестный параметр. Спектральная плотность помехи

$$(3) \quad f_j(R, w) = \frac{R \sum_{l=1}^e d_l w^{2l}}{\sum_{l=1}^d c_l w^{2l} + 1},$$

где $d < n$, e , d_l , d , c_l – известные параметры; $R > 0$ – неизвестный параметр.

Как следует из работ [1, 3], в этом случае передаточная функция оптимального в среднеквадратическом смысле дифференциатора

$$(4) \quad W_{0,q}(i\omega) = \frac{1}{2p\gamma(i\omega)} \int_0^{\infty} e^{-i\omega t} dt \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(i\omega)^q f_x(w)}{y^*(i\omega)} e^{i\omega t} dw,$$

где q – порядок дифференцирования оптимального фильтра, функции $\psi(i\omega)$ и $\psi^*(i\omega)$ находятся из уравнения

$$(5) \quad \psi(i\omega)\psi^*(i\omega) = \psi(i\omega)\psi(-i\omega) = f_x(\omega) + f_\varphi(\omega),$$

Выражение $W_{0,q}(i\omega)$ (4) можно преобразовать к виду

$$(6) \quad W_{0,q} = \frac{1}{2p\gamma(i\omega)} \left[\frac{(i\omega)^q f_x(w)}{y^*(i\omega)} \right]^+,$$

где $\left[\frac{(i\omega)^q f_x(w)}{y^*(i\omega)} \right]^+$ – сумма вычетов функции $\frac{(i\omega)^q f_x(w)}{y^*(i\omega)}$, распо-

ложенных в верхней полуплоскости комплексной плоскости. Из (5) следует, что

$$(7) \quad \psi(i\omega) = \sqrt{R} F(Q/R, i\omega), \quad \psi^*(i\omega) = \sqrt{R} F(Q/R, -i\omega),$$

где F – дробно-рациональная функция введенных выше параметров.

Имея в виду, что сумма вычетов дробно-рациональной функции также является дробно-рациональной функцией, передаточную функцию (6) можно представить в виде

$$(8) \quad W_{0,q}(Q/R, i\omega) = \frac{\sum_{j=0}^q k_j(Q/R)(i\omega)^j}{\sum_{j=0}^{n-1} \overline{k_j(Q/R)(i\omega)^j} + (i\omega)^n},$$

т. е. параметры передаточной функции $W_{0,q}(Q/R, i\omega)$ (7) являются непрерывной функцией отношения Q/R .

3. Синтез нелинейного дифференциатора

Используем полученную передаточную функцию оптимального дифференциатора для синтеза нелинейного дифференциатора, эквивалентная передаточная функция которого

была бы близка к передаточной функции оптимального дифференциатора при любых значениях отношения Q/R . Близость этих передаточных функций при произвольных Q/R будет гарантировать высокое качество дифференцирования нелинейного дифференциатора, так как известно [1], что среднеквадратическая ошибка дифференцирования любого фильтра с передаточной функцией $W_\phi(i\omega)$ определяется выражением

$$(9) \quad S_d^2 = S_0^2 + \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{\infty} |W_\phi(i\omega) - W_0(i\omega)|^2 f_z(Q, R, \omega) d\omega,$$

где

$$S_0^2 = \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{\infty} (|(i\omega)^q|^2 f_x(Q, \omega) - |W_0(i\omega)|^2 f_z(Q, R, \omega)) d\omega$$

– среднеквадратическая ошибка фильтрации оптимального винеровского дифференциатора.

Нелинейные, близкие к оптимальным дифференциаторы будем синтезировать с помощью симметричных степенных функций, логику работы которых в рассматриваемом случае удобно представить в виде

$$(10) \quad u_\alpha(t) = u_\alpha^*(t) \text{sign}(s(t))$$

где $s(t)$ связано с $z(t)$ передаточной функцией

$$(11) \quad W_{zs}(i\omega) = \frac{(i\omega)^n}{\sum_{j=0}^{n-1} \bar{k}_j(Q/R)(i\omega)^j + (i\omega)^n},$$

$\bar{k}_j(Q/R)$, $j = 0, \dots, n-1$, – параметры знаменателя передаточной функции оптимального дифференциатора, а $u_a^*(t)$ имеет вид

$$(12) \quad u_\alpha^*(t) = k_{q_\alpha} |q(t)|^\alpha |s(t)|^{1-\alpha} > 0,$$

$q(t)$ – линейное преобразование $z(t)$ (1).

Расчет дифференциатора с нелинейным \dot{I}_s^α -элементом (10) наиболее удобно проводить методом статистической линеаризации, который описан в работе [2]. В связи с этим необходимо, прежде всего, найти эквивалентный коэффициент передачи

этого элемента, обеспечивающий минимальную среднеквадратическую ошибку

$$(12) \mathbf{s}^2 = M \left\{ \left[u^1(t) - u_a(t) \right]^2 \right\} = \min,$$

где

$$u^1(t) = k_{j_s^\alpha} s(t).$$

Условие (12) справедливо в предположении, что $q(t)$ и $s(t)$ имеют нулевые математические ожидания. Минимум выражения (12) ищется из условий

$$(13) \frac{\partial \mathbf{s}^2}{\partial k_{j_s^\alpha}} = \frac{\partial M \left\{ \left[k_{j_s^\alpha} s(t) - u_\alpha(t) \right]^2 \right\}}{\partial k_{j_s^\alpha}},$$

$$\frac{\partial \mathbf{s}^2}{\partial k_{j_s^\alpha}} = 0.$$

После дифференцирования (13) получаем

$$(14) k_{j_s^\alpha} = \frac{M \{ u_\alpha(t) s(t) \}}{M \{ s^2(t) \}}.$$

Считая, что $q(t)$ и $s(t)$ – независимые гауссовские сигналы, найдем из (14) $k_{j_s^\alpha}$

$$(15) M \{ u_\alpha(t) s(t) \} = \frac{4}{2ps_s s_q} \int_0^\infty \int_0^\infty k_{q_\alpha} s^{2-\alpha} q^\alpha e^{-\frac{s^2}{2\sigma_s^2} - \frac{q^2}{2\sigma_q^2}} dsdq,$$

где s_s^2 – дисперсия $s(t)$, а s_q^2 – дисперсия $q(t)$. Преобразуя (15), получаем

$$(16) M \{ u_\alpha(t) s(t) \} = \frac{k_{q_\alpha} s_q^\alpha s_s^{2-\alpha}}{2ps_s s_q} \tilde{A} \left(\frac{a+1}{2} \right) \tilde{A} \left(\frac{3-a}{2} \right),$$

где $\tilde{A}(a) = \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} dx$. Знаменатель $k_{j_s^\alpha}$ (14)

$$(17) M \{s^2(t)\} = \frac{2k_{q\alpha} S_q^\alpha S_s^{2-\alpha}}{\sqrt{2pS_s}} \int_0^\infty s^2 e^{-\frac{s^2}{2S_s}} ds = S_s^2,$$

а сам коэффициент, как следует из (14), (16) и (17),

$$(18) k_{j_s^\alpha} = \frac{k_{q\alpha} S_q^\alpha}{pS_s^\alpha} \tilde{A}\left(\frac{a+1}{2}\right) \tilde{A}\left(\frac{3-a}{2}\right).$$

Следовательно, эквивалентный коэффициент передачи $k_{j_s^\alpha}$

(18) \dot{I}_s^α -элемента (10) зависит от отношения дисперсий, характеризующих $s(t)$ и $q(t)$.

Отмеченные свойства оптимального дифференциатора и найденный эквивалентный коэффициент передачи $k_{j_s^\alpha}$ (18) элемента (10) дают возможность синтезировать нелинейный дифференциатор, эквивалентная передаточная функция которого была бы близка при произвольных отношениях Q/R к передаточной функции оптимального дифференциатора, рассчитанного для случая (1)–(3). Такая близость гарантирует, прежде всего, устойчивость нелинейного дифференциатора, что является основным требованием, предъявляемым к любым устройствам. В этой связи наиболее естественно и просто удовлетворить требованию устойчивости, если знаменатель эквивалентной передаточной функции дифференциатора при произвольных отношениях Q/R будет близок к передаточной функции оптимального дифференциатора, так как оптимальный дифференциатор, рассчитанный из условия минимума среднеквадратической ошибки, всегда устойчив.

Рассмотрим линейную систему, знаменатель передаточной функции которой совпадал бы при любых отношениях Q/R со знаменателем $W_{0,q}(Q/R, i\omega)$ (8):

$$(19) z(t) - y^*(t) = s(t), \quad y^*(t) = y_1(t) + y_0(t),$$

$$(20) y_i'(t) = \bar{k}_{n-i}(Q/R)s(t) + y_{i+1}(t), \quad i = 1, \dots, n,$$

$$(21) y_{n-1}'(t) = \bar{k}_1(Q/R)s(t),$$

$$(22) y_0^{(n)}(t) = \bar{k}_0(Q/R)s(t).$$

Нетрудно заметить, что знаменатель передаточной функции системы (19)–(22), например, от $z(t)$ к $y_0(t)$, совпадает со знаменателем $W_{0,q}(Q/R, i\omega)$ (8). Блок-схема дифференциатора, соответствующая этой системе, представлена на рис. 1.

Добиться близости знаменателей эквивалентной передаточной функции нелинейного дифференциатора и $W_{0,q}(Q/R, i\omega)$ (8) можно, заменив в системе (19)–(22) элементы $\bar{k}_j(Q/R)$, $i = 1, \dots, n$, нелинейными элементами (10) так, чтобы их эквивалентные коэффициенты передачи при любом значении отношения Q/R были сколь угодно близки к $\bar{k}_j(Q/R)$.

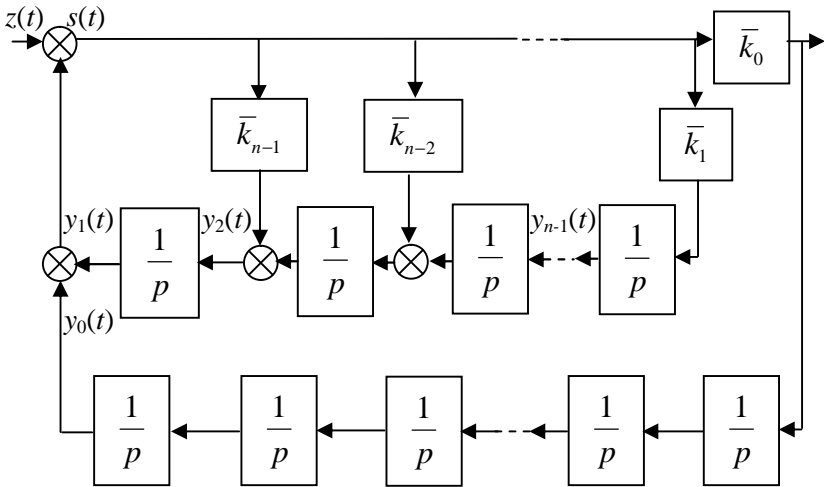


Рис. 1. Блок-схема линейного дифференциатора

Для проведения такой замены установим связь между эквивалентным коэффициентом передачи $k_{j\alpha}$ (18) и отношением Q/R . Пусть одним из входных сигналов элемента (10) является сигнал $s(t)$ (10), (11), дисперсия которого в случае (1)–(3) определяется помехой, т. е.

$$(23) \mathbf{s}_s^2 = \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R \sum_{l=1}^e d_l w^{2l}}{\sum_{l=1}^d c_l w^{2l} + 1} dw = RA.$$

В качестве второго сигнала, входящего в логику элемента (10), возьмем выходной сигнал $q(t)$ низкочастотного линейного фильтра с передаточной функцией $W_{zg}(i\omega)$, на входе которого действует наблюдаемый гауссовский сигнал $z(t)$ (1). В силу того, что фильтр низкочастотный, гауссовский сигнал $q(t)$ будет определяться низкочастотной составляющей сигнала $z(t)$. Дисперсия сигнала $q(t)$, от которой зависит k_{j_s} , на основании (1)–

(3) имеет вид

$$(24) \mathbf{s}_g^2 = \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{\infty} |W_{zg}(i\omega)|^2 f_{zx}(Q, R, \omega) d\omega = QB + RC,$$

где

$$(25) B = \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{\infty} |W_{zg}(i\omega)|^2 \frac{\sum_{j=1}^{m-p} b_j \omega^{2j} + 1}{\sum_{j=1}^d a_j \omega^{2j} + 1} d\omega,$$

$$(26) C = \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{\infty} |W_{zg}(i\omega)|^2 \frac{\sum_{l=1}^e d_l \omega^{2l} + 1}{\sum_{l=1}^d c_l \omega^{2l} + 1} d\omega$$

или

$$\mathbf{s}_g = \sqrt{QB + RC}.$$

Выражения (18), (23) и (24) позволяют определить зависимость эквивалентного коэффициента передачи

$$(27) k_{j_s} = \frac{k_{q_a}}{pA^{0,5a}} \tilde{A}\left(\frac{a+1}{2}\right) \tilde{A}\left(\frac{3-a}{2}\right) B^{0,5a} (Q/R + C/B)^{0,5a}$$

от интересующего нас отношения Q/R для сигналов $s(t)$ и $q(t)$, которые определяются дифференциальными уравнениями

$$s(t) = W_{zs}(p)z(t),$$

где $W_{zs}(i\omega)$ определяется (11), а $p = \frac{d}{dt}$ и

$$g(t) = W_{zg}(p)z(t), \quad p = \frac{d}{dt},$$

где $W_{zg}(p)$ – передаточная функция низкочастотного фильтра, входящая в выражения (24)–(26).

Теперь для совпадения знаменателей эквивалентной передаточной функции нелинейного фильтра и передаточной функции оптимального фильтра $W_{0,q}(Q/R, i\omega)$ (8) достаточно каждый из коэффициентов \bar{k}_j , $i = 0, \dots, n - 1$, (20)–(22) представить с требуемой степенью точности в виде разложения по функциям (28) $(Q/R + C/B)^{0.5\alpha} = (Q/R + D)^\beta$, $\alpha = 2\beta > 0$, которые пропорциональны соответствующим эквивалентным коэффициентам передачи ψ_s^α -элементов.

Разложения

$$(29) \quad \bar{k}_j(Q/R) \approx \sum_{l=1}^{N_j} \bar{k}_{jl}(Q/R + D)^{b_{jl}},$$

где $(Q/R + D)^{b_{jl}}$ при различных β_{jl} – линейно независимые функции, позволяют установить связь между неопределенным пока параметром k_{q_α} (12), входящим в k_{j_s} (27), и коэффициентами разложения \bar{k}_{jl} (29) функции $\bar{k}_j(Q/R)$. Как следует из (27), (28) и (29), при выполнении равенства

$$(30) \quad k_{g_{2b_{jl}}} = \frac{\bar{k}_{jl} p A^{b_{jl}}}{\tilde{A}\left(\frac{2b_{jl} + 1}{2}\right) \tilde{A}\left(\frac{3 - 2b_{jl}}{2}\right) B^{b_{jl}}}$$

коэффициенты разложения \bar{k}_{jl} (29) совпадают с соответствующими коэффициентами перед степенными функциями в $k_{j_s}(Q/R)$ (27). Заменяя в системе (19)–(22) каждый из $\bar{k}_j(Q/R)$ группой элементов (10) с параметрами $\alpha_{jl} = 2\beta_{jl}$ и $k_{g_{b_{jl}}}$ в соответствии с (29), (30) добьемся того, что знаменатель эквивалентной

передаточной функции нелинейного дифференциатора будет с требуемой степенью точности совпадать со знаменателем передаточной функции оптимального дифференциатора при любом отношении Q/R в постановке (1)–(3). Следовательно, степень устойчивости нелинейного дифференциатора сколь угодно близка к степени устойчивости оптимального дифференциатора.

Качество дифференцирования, определяемое величиной среднеквадратической ошибки дифференцирования, будет тем выше, чем меньше $\left|W_{\tilde{y}\tilde{e}}(Q/R, i\omega) - W_{0,q}(Q/R, i\omega)\right|^2$, где $W_{\text{эк}}(Q/R, i\omega)$ – эквивалентная передаточная функция нелинейного дифференциатора. Наибольшая близость передаточных функций $W_{\text{эк}}(Q/R, i\omega)$ и $W_{0,q}(Q/R, i\omega)$ в смысле минимума S_d^2 (9) будет в нелинейном дифференциаторе с элементами (10), описываемом следующей системой уравнений

$$(31) \quad z(t) - \tilde{y}(t) = \tilde{s}(t), \quad \tilde{y}(t) = \tilde{y}_1(t) + \tilde{y}_0(t),$$

$$(32) \quad \tilde{y}'_i(t) = u_{n-i}(t) + \tilde{y}_{i+1}(t), \quad i = 1, \dots, n-1,$$

$$(33) \quad \tilde{y}'_n(t) = k\tilde{s}(t),$$

$$(34) \quad \tilde{y}_0^{(n)}(t) = u_0(t) - k\tilde{s}(t),$$

$$(35) \quad u_j(t) = \sum_{l=1}^{N_j} u_{2b_{jl}}(t),$$

где параметры управления $u_{2b_{jl}}$ (10), (11), такие как β_{jl} и $k_{g_{b_{jl}}}$, находятся соответственно из разложения $\bar{k}_j(Q/R)$ (29) и формулы для $k_{g_{2b_{jl}}}$ (30), коэффициент k является пределом

$$(36) \quad k = \lim_{Q/R \rightarrow 0} \sum_{l=1}^{N_0} k_{0l}(Q/R + D)^{b_{0l}} = \lim_{Q/R \rightarrow 0} \bar{k}_0^i(Q/R).$$

Выходными координатами нелинейного дифференциатора являются $\tilde{y}_0^{(j)}(t)$, $j = 0, \dots, n-1$ (34). Блок-схема нелинейного дифференциатора, соответствующая системе (31)–(35), изображена на рис 2.

Введение в схему нелинейного дифференциатора элемента k (33), (34) и (36) сказалось только на числителе

$$(37) W_{y\bar{e}}(Q/R, iw) = \frac{(iw)^q (\bar{k}_0^i(Q/R) - k)}{\sum_{j=0}^{n-1} \bar{k}_j^i(Q/R)(iw)^j + (iw)^n},$$

где $\bar{k}_j^i = \sum_{l=1}^{N_j} k_{f_s^{2b_{jl}}}^i$, $j = 0, \dots, n-1$.

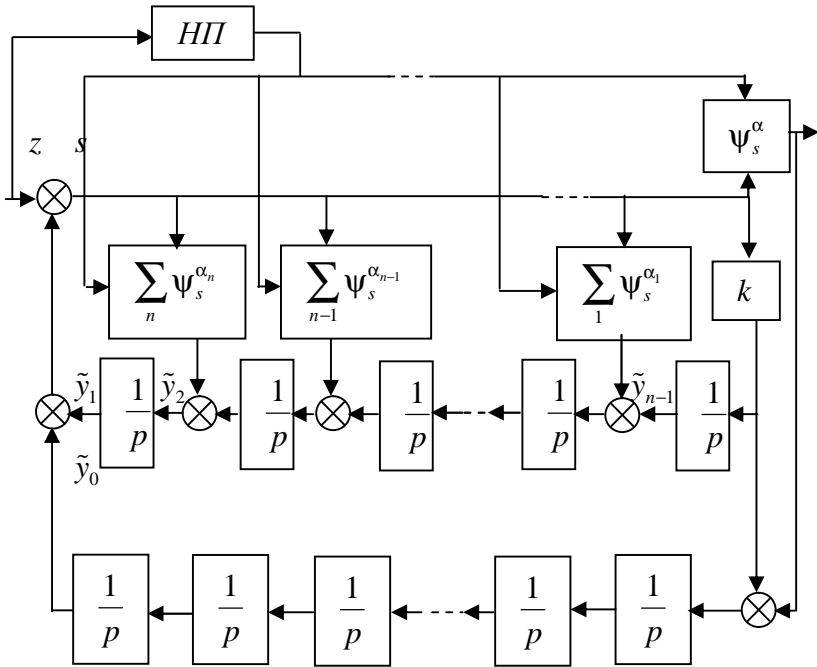


Рис. 2. Блок-схема нелинейного дифференциатора

Как показано в [3], модуль передаточной функции оптимального дифференциатора $|W_{0,q}(Q/R, iw)| \rightarrow |(iw)^q|$, $q = 0, \dots, n-1$, при $Q/R \rightarrow \infty$ и $|W_{0,q}(Q/R, iw)| \rightarrow 0$ при $Q/R \rightarrow 0$. Из первого предельного соотношения на основании (8) следует, что $\bar{k}_j(Q/R) \rightarrow \infty$ и $\bar{k}_j(Q/R)(\bar{k}_{j+1}(Q/R))^{-1} \rightarrow \infty$ при $Q/R \rightarrow \infty$. В этом случае, имея в виду $\bar{k}_j(Q/R) \approx \bar{k}_j^1(Q/R)$, получаем

$W_{эк}(Q/R, i\omega) \rightarrow (i\omega)^q$, $q = 0, \dots, n-1$ при $Q/R \rightarrow \infty$, так как $\bar{k}_j(Q/R)(\bar{k}_{j+1}(Q/R))^{-1} \rightarrow 0$ при $Q/R \rightarrow \infty$. В другом предельном соотношении при $Q/R \rightarrow 0$, как и в оптимальном случае, $W_{эк}(Q/R, i\omega) \rightarrow 0$, так как $\bar{k}_0^i(Q/R) - k \rightarrow 0$. Имеет смысл отметить, что в наиболее интересном диапазоне $0 < Q/R < 1$, когда оптимальный дифференциатор с передаточной функцией (8) обеспечивает достаточно качественные оценки полезного сигнала и его производных, числитель передаточной функции оптимального дифференциатора с высокой степенью точности приближается функцией $(i\omega)^q$. Но в диапазоне $0 < Q/R < 1$ числитель эквивалентной передаточной функции (37) нелинейного дифференциатора (31)–(35) также с высокой степенью точности приближается той же функцией $(i\omega)^q$.

Следовательно, качество дифференцирования нелинейного дифференциатора (31)–(35) близко к качеству дифференцирования оптимального дифференциатора при любом $Q/R < 1$.

4. Заключение

Сравнивая подстраиваемый оптимальный для любого $0 < Q/R$ дифференциатор (8) с нелинейным дифференциатором (31)–(35), можно сказать, что, незначительно проигрывая в качестве дифференцирования, нелинейный дифференциатор, во-первых, реализуется существенно проще подстраиваемого оптимального дифференциатора, где в результате набора статистики определяется отношение Q/R , которое затем по нелинейным законам преобразуется, формируя переменные коэффициенты $\bar{k}_j(Q/R)$ и $k_j(Q/R)$ (8), и, во-вторых, время адаптации к изменяющимся параметрам Q и R (2), (3) в нелинейном дифференциаторе (31)–(35), который не требует набора статистики, существенно меньше времени адаптации в подстраиваемом оптимальном дифференциаторе.

Синтезированные в настоящей работе дифференциаторы в силу нелинейных свойств переключающих элементов адаптируются к неизвестным параметрам полезного сигнала и помехи, делая их практически всегда без получения каких-либо допол-

нительных оценок случайных сигналов близкими к оптимальным в среднеквадратическом смысле. Для получения подобных свойств адаптации в классических оптимальных дифференциаторах необходимо проводить статистические оценки уровней случайных сигналов и с помощью такой статистики корректировать параметры в их передаточных функциях. Очевидно, что такой процесс адаптации и долгий и сложный, поэтому практически он не применяется.

Литература

1. ЕМЕЛЬЯНОВ С. В. и др. *Теория систем с переменной структурой*. – М.: Наука, 1970. – 592 с.
2. КАЗАКОВ И. Е., ДОСТУПОВ Б. Г. *Статистическая динамика нелинейных автоматических систем*. – М.: Физматгиз, 1964. – 332 с.
3. ПУГАЧЕВ В. С. *Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления*. – М.: Физматгиз, 1962. – 883 с.

THE ADAPTIVE OPTIMAL DIFFERENTIATION BY STANDARD DEVIATION CRITERION

Sergey Gulyaev, V.A. Trapeznikov ICS of RAS, Moscow, Cand.Sc., assistant professor (svgul@inbox.ru).

Alexander Shubladze, V.A. Trapeznikov ICS of RAS, Moscow, Doctor of Science, professor (shub@ipu.ru)

Valery Malakhov, V.A. Trapeznikov ICS of RAS, Moscow, Cand.Sc., assistant professor (Moscow, Profsoyuznaya st., 65, (495)334-88-81).

Vladimir Olshvang, V.A. Trapeznikov ICS of RAS, Moscow, Cand.Sc., assistant professor (Moscow, Profsoyuznaya st., 65, (495)334-88-81).

Alexander Krotov, Head of the department of “Gazavtomatika” (Moscow, Savvinskaya em., 25), (499)580-41-22.

Abstract: The method is suggested to solve the differentiation problem. It allows building the estimates for the derivatives of Gaussian stationary signals that are close to the optimal ones by the standard deviation criterion when the spectral density of a useful signal and a noise are known to within level. The problem is solved by the specifically designed nonlinear dynamic systems. A nearly optimal solution of the differentiation problem is found when the equivalent transfer function parameters of nonlinear dynamic differentiator can be made close to the parameters of the optimal Wiener filter for any fixed level of rational spectral density of a useful signal and a noise.

Keywords: differentiation, adaptation, optimality, Gaussian noise.

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии А. С. Манделем*

УДК 517.958

ББК 22.161.5

ИССЛЕДОВАНИЕ УСЛОВИЙ ПРИЧИННОСТИ И УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ЛИНЕЙНЫМ ОБЪЕКТОМ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ (ОСОБЫЕ СЛУЧАИ). ЧАСТЬ I

Солнечный Э. М.¹, Черёмушкина Л. А.²

(Учреждение Российской академии наук

Институт проблем управления РАН, Москва)

Для двух особых видов граничных условий устойчивого одномерного объекта теплопроводности конечной длины получают оценки норм операторов, определяющих зависимость температуры объекта от граничных воздействий. Эти оценки используются для получения достаточного условия причинности и устойчивости системы управления объектом с помощью нелинейной обратной связи.

Ключевые слова: система управления, причинность, устойчивость, распределенные динамические системы, линейный объект теплопроводности, теория функций комплексного переменного.

1. Введение

Настоящая работа является непосредственным продолжением работы [5], где было получено достаточное условие детерминированности, причинности и устойчивости замкнутой системы управления линейным распределённым объектом, охваченным обратной связью от выходной внешней величины у

¹ *Энгель Михайлович Солнечный, доктор физико-математических наук (Москва, ул. Профсоюзная, д. 65, тел. (495) 334-92-29).*

² *Людмила Александровна Черёмушкина (Москва, ул. Профсоюзная, д. 65, тел. (495) 334-92-29).*

объекта к управляющему воздействию u на объект. Предполагается, что динамические свойства объекта и обратной связи описываются соотношениями вида

$$(1.1) \quad y = Y u + Y_n J,$$

$$(1.2) \quad u = F(y, f).$$

Здесь f – внешнее (возмущающее или задающее) воздействие; Y – оператор $u \rightarrow y$, описывающий поведение y при заданном управлении u и нулевом начальном состоянии объекта; Y_n – оператор $J \rightarrow y$, описывающий реакцию на начальное состояние J объекта, F – оператор (вообще говоря, нелинейный) обратной связи.

Под *детерминированностью* системы (1.1), (1.2) здесь понимается существование и единственность решения её системы уравнений при фиксированном f (из заданного пространства Φ), т. е. существование оператора A , переводящего $f \in \Phi$ в элемент y заданного пространства X .

Под *причинностью* этой системы понимается [6, 4] следующее свойство оператора A (когда он существует): из совпадения двух его входных функций f_i ($i = 1, 2$) на полуоси $(-\infty, t)$ следует совпадение соответствующих выходных функций $y_i = A(f_i)$ на той же полуоси (оператор A с таким свойством соответствует физическому принципу неопережения следствием y причины f).

Под *устойчивостью* этой системы по отношению к пространствам Φ и X (предполагаемым нормированными) здесь понимается ограниченность отношения

$$\frac{\|A(f)\|_X}{\|f\|_F},$$

равномерная относительно $f \in \Phi$.

Объект без обратной связи предполагается причинным и устойчивым. Охватывающая его обратная связь может иметь смысл либо регулятора (и тогда вопрос о причинности и устойчивости замкнутой системы должен предшествовать постановке

задачи достижения какой-либо цели синтеза), либо воздействия некоторой внешней среды (и тогда нужно выяснить ту степень интенсивности этой связи, которая еще не может нарушить причинность и устойчивость объекта).

Замечание. Такая постановка задачи имеет некоторую аналогию с постановкой задачи абсолютной устойчивости (см., например, [3]), где ставится вопрос об определении (по достаточности) класса нелинейных регуляторов, обеспечивающих устойчивость заданного линейного объекта.

Как показано в [5], достаточное условие сохранения причинности и устойчивости замкнутой системы «объект + обратная связь» состоит в том, что обратная связь должна удовлетворять условию Липшица

$$(1.3) \quad \| F(y_1, f) - F(y_2, f) \|_{\mathbf{U}} \leq L_F \| y_1 - y_2 \|_{\mathbf{X}},$$

и соотношению

$$(1.4) \quad L_X = L_F \| Y \| < 1,$$

где $L_X = L_F \| Y \|$; y_1, y_2 – два возможных входа обратной связи (т. е. две функции – воздействия на входе обратной связи; $F(y_i, f)$ – выход обратной связи при соответствующем входе y_i ($i = 1, 2$) и внешнем воздействии f ; \mathbf{X} и \mathbf{U} – пространства соответственно входов и выходов обратной связи; L_F – константа, не зависящая от y_i и $f \in \Phi$.

Нужно отметить, что, конечно, условие (1.4) является лишь достаточным, но не необходимым, так как учитывает не направление действия обратной связи, а лишь его интенсивность. Но это условие применимо к широкому классу обратных связей (к линейным и нелинейным, к статическим и динамическим) и накладывает ограничения лишь на интенсивность обратной связи и ее крутизну. В работах [4, 5] это условие уже использовалось для исследования вопроса причинности и устойчивости линейного одномерного объекта теплопроводности, охваченного обратной связью от отклонения ΔT температуры объекта к граничным воздействиям u_i ($i = 1, 2$) на объект.

2. Постановка задачи

Для объекта теплопроводности оператор $Y: u \rightarrow \Delta T$ определяется математической моделью системы передачи тепла за счет теплопроводности; эта модель принимается в том же виде, как и в работах [4, 5]:

$$(2.1) \quad c \frac{\int \Delta T}{\int t} = - \frac{\int \Delta q}{\int x},$$

$$(2.2) \quad \Delta q = -I \frac{\int \Delta T}{\int x},$$

$$(2.3) \quad C_0 y|_{\xi=0} + C_l y|_{\xi=l} = u,$$

$$(2.4) \quad \Delta T|_{t=0} = J,$$

где $y = \begin{pmatrix} \Delta T \\ \Delta q \end{pmatrix}$; t – время ($t \in \mathbf{R}$); x – координата вдоль длины

объекта ($x \in \mathbf{L} = [0, l]$); ΔT , Δq – отклонение соответственно температуры T и потока тепла q (в направлении возрастания x) от их установившихся значений; c – теплоемкость теплопередающей среды на единицу длины; I – коэффициент теплопроводности среды; $C_0 = (c_{0rs})$ и $C_l = (c_{lrs})$, где $r, s = 1, 2$, – заданные числовые квадратные матрицы 2-го порядка.

Замечание. Используемые граничные условия обобщают классические граничные условия 1-го, 2-го и 3-го типа [1].

Обозначим через \mathbf{DO} пространство обобщенных производных всех порядков от функций-оригиналов [2], заданных на множестве действительных чисел \mathbf{R} ; \mathbf{Q} – пространство равномерно ограниченных функций из пространства \mathbf{DO} ; $\mathbf{Q}_{(-i, j)}$ – пространство всех функций $j \in \mathbf{Q}$, имеющих i первообразных в \mathbf{DO} , входящих в \mathbf{Q} , и j обобщенных производных $j^{(n)}$ ($n = 0, \dots, j$), входящих в \mathbf{Q} . Норма в пространстве $\mathbf{Q}_{(-i, j)}$ равна

$$(2.5) \quad \|j\| = \max_{r=0+i, s=0+j} \left(\text{vrai max}_{t \geq 0} |j^{(-r)}(t)| q^{-r}, \text{vrai max}_{t \geq 0} |j^{(s)}(t)| q^s \right),$$

где q – фиксированная константа, имеющая размерность времени.

Как указано в [4, 5], необходимое и достаточное условие невырожденности краевой задачи (2.1)–(2.4) (т. е. существования и единственности ее решения при любом $(u, J) \in \mathbf{DO} \times \mathbf{X}_n$) состоит в отличии от тождественного нуля функции $D(p) = \det(\mathbf{C}_0 + \mathbf{C}_l \Phi_l)$, где $\Phi_l = \Phi(x)|_{x=l}$; $\Phi(x)$ – интегральная матрица системы (2.1)–(2.4), преобразованной по Лапласу в краевую задачу для системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений с независимым переменным $x \in \mathbf{L}$ и комплексным параметром $p \in \mathbf{C}$; \mathbf{C} – комплексная плоскость.

Решение краевой задачи дает следующее выражение для изображения по Лапласу реакции ΔT на воздействие u [5]:

$$(2.6) \quad \overline{Y}u(x) = w_2(x)\overline{u}_1 - w_1(x)\overline{u}_2,$$

где верхнее подчеркивание используется для обозначения изображений соответствующих переменных;

$$(2.7) \quad w_j(x) = c_{0j2}R_{H_x D} + c_{lj2}R_{H_l-x D} + (1/k)(c_{0j1}R_{S_x D} - c_{lj1}R_{S_l-x D}),$$

где $j = 1, 2$; $\xi \in \mathbf{L}$; $\alpha = \sqrt{c/\lambda}$; $R_{H_x D} = \frac{H_x}{D}$; $R_{S_x D} = \frac{S_x}{D}$;

$$H_x = \operatorname{ch}\left(\frac{x}{l}\hat{z}\right); \quad S_x = \frac{al}{\sqrt{qz}}\hat{z}\operatorname{sh}\left(\frac{x}{l}\hat{z}\right); \quad q - \text{фиксированная константа, имеющая размерность времени; } p - \text{комплексное число, } \mathbf{C} - \text{комплексная плоскость; } \hat{z}(p) = al\sqrt{p} - \text{однозначная ветвь функции } z(p) = al\sqrt{p}, \text{ выбранная так, что } \operatorname{Re}\hat{z} = al\operatorname{Re}\sqrt{p} > 0 \text{ для всех } p, \text{ не лежащих на мнимой оси, и } \operatorname{Im}\hat{z} > 0 \text{ для мнимых } p; D - \text{функция аргумента } p, \text{ равная знаменателю выражений для передаточных вектор-функций объекта от граничных воздействий } u_j \text{ (} j = 1, 2 \text{) к } \overline{Y} \text{ [5]:}$$

$$D(p) = a_0 + a_{12}H_l + ka_2Q_l - \frac{a_1}{k}S_l,$$

где $k = \sqrt{cI/q}$, $Q_l = \frac{\hat{z}\sqrt{q}}{al} \operatorname{sh} \hat{z}$; $H_l = \operatorname{ch}(\hat{z})$; $S_l = \frac{al}{qz} \operatorname{sh}(\hat{z})$.

Коэффициенты a_0 , a_1 , a_2 и a_{12} определяются через элементы матриц $\mathbf{C}_0 = (c_{0rs})$, $\mathbf{C}_l = (c_{lrs})$ [5]:

$$a_0 = c_{011}c_{022} - c_{012}c_{021} + c_{l11}c_{l22} - c_{l12}c_{l21}, \quad a_1 = c_{011}c_{l21} - c_{l11}c_{021},$$

$$a_2 = c_{012}c_{l22} - c_{l12}c_{022}, \quad a_{12} = c_{011}c_{l22} - c_{l12}c_{021} - c_{012}c_{l21} + c_{l11}c_{022}.$$

Для объекта теплопроводности обратная связь предполагается имеющей вид (см. (1.2))

$$(2.8) \quad u = F(\Delta T, f),$$

где u – двумерный вектор управляющих воздействий на объект:

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}; \quad f - \text{внешнее (возмущающее или задающее) воздействие, являющееся элементом некоторого банахова пространства } \Phi,$$

а F – причинный (в смысле раздела 1) оператор обратной связи:

$$F = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}, \quad \text{компоненты которого } F_k : \Delta T \rightarrow F_k(\Delta T, f)$$

($k = 1, 2$) являются липшицевыми отображениями пространства \mathbf{X} равномерно ограниченных на отрезке \mathbf{L} функций в пространство $\mathbf{Q}_{(-i,j)}$ с константами Липшица $L_{F_k,(i,j)}$, не зависящими от $f \in \Phi$.

Как показано в [5], для устойчивости замкнутой системы управления по отношению к паре (f, ϑ) и для причинности оператора $A : f \rightarrow \Delta T$, реализуемого замкнутой системой, достаточно, чтобы для некоторой пары (i, j) (где $i, j \geq 0$) константа Липшица L_X оператора $X = Y \circ F$ разомкнутой системы (при фиксированном внешнем воздействии f) была строго меньше 1. Показано также, что константа L_X , входящая в условие (1.4) для объекта (2.1)–(2.4) и обратной связи (2.8) может быть выбрана следующим образом:

$$(2.9) \quad L_X = m_2 L_{F_1,(i,j)} + m_1 L_{F_2,(i,j)},$$

где $m_r = (|c_{0r2}| + |c_{lr2}|)N_{H,(i,j)} + (|c_{0r1}| + |c_{lr1}|)N_{S,(i,j)} / k$, а $N_{H,(i,j)}$ и $N_{S,(i,j)}$ определяются следующими соотношениями:

$$(2.10) \quad N_{H,(i,j)} = \sup_{x \in \mathbf{L}} \| \underline{R}_{H_x D} \|_{\mathbf{B}_{(i,j)}}, \quad N_{S,(i,j)} = \sup_{x \in \mathbf{L}} \| \underline{R}_{S_x D} \|_{\mathbf{B}_{(i,j)}},$$

где через $\mathbf{B}_{(-i,j)}$ обозначено пространство всех ограниченных операторов, отображающих $\mathbf{Q}_{(-i,j)}$ в \mathbf{Q} , а через $\underline{R}_{H_x D}$, $\underline{R}_{S_x D}$ обозначены операторы, действующие в $\mathbf{D}\mathbf{O}$ и имеющие соответственно передаточные функции $R_{H_\xi D} = H_\xi / D$, $R_{S_\xi D} = S_\xi / D$.

Условие $L_X < 1$, где L_X определяется согласно (2.9), выделяет некоторый класс \mathbf{FB} обратных связей, для которых гарантированы существование оператора $A : (f, J) \rightarrow \Delta T$, описывающего поведение замкнутой системы, ограниченность оператора, а также причинность оператора $A_J : f \rightarrow A(f, J)$. Для выявления возможно более широкого класса \mathbf{FB} обратных связей необходимо определить такую пару (i, j) с возможно меньшими значениями i, j ($i, j \geq 0$), для которой операторы $\underline{R}_{H_x D}$, $\underline{R}_{S_x D}$ являются ограниченными, а также возможно точнее оценить нормы этих операторов в пространстве $\mathbf{B}_{(-i,j)}$. Как показали исследования, возможность выбора такой пары (i, j) и оценки норм операторов существенно зависят от предположений относительно коэффициентов a_0, a_1, a_2, a_{12} , входящих в выражение для функции D .

В [4, 5] получены оценки норм операторов с передаточными функциями $\underline{R}_{H_x D}$, $\underline{R}_{S_x D}$ в пространствах $\mathbf{B}_{(-i,j)}$ для всех таких вариантов предположений о коэффициентах a_j , в которых $a_0 = 0$, а также для одного из вариантов, для которых $a_0 \neq 0$; эти оценки вместе с условием $L_X < 1$ позволяют определить класс обратных связей, для которых гарантированы существование и ограниченность оператора A , а также причинность оператора A_0 .

В настоящей работе такое исследование проводится ещё для двух вариантов, в которых $a_0 \neq 0$. Для этих случаев характерна взаимозависимость граничных условий, относящихся к сечениям $x = 0$ и $x = l$, а также возможность наличия у объекта конечного или счётного числа частот собственных колебаний.

В настоящей части I работы рассматривается случай $a_1 = 0$, $a_{12} = 0$, $a_0 \neq 0$, $a_2 \neq 0$. В этом случае

$$(2.11) \quad D(p) = \frac{a_2 l}{l} (b + al\sqrt{p} \operatorname{sh}(al\sqrt{p})) = \frac{a_2 l}{l} \hat{P}(\hat{z}(p)),$$

где $b = \frac{a_0 al}{ka_2 \sqrt{q}} = \frac{a_0}{a_2} \frac{l}{I}$; $P(p) = b + al\sqrt{p} \sin(al\sqrt{p})$,

$$\hat{P}(z) = b + z \operatorname{sh} z; \quad z = s + it \in \mathbf{C}; \quad s, t \in \mathbf{R};$$

$$\hat{z} = al\sqrt{p} \in \hat{\mathbf{C}} = \{s + it : s > 0\} \cup \{it : t \geq 0\}.$$

Исходя из необходимого условия устойчивости объекта, которое состоит в отсутствии у функции D нулей с неотрицательной вещественной частью, далее будем считать b строго положительным числом. Один из простейших примеров граничных условий, удовлетворяющих предположениям этого случая:

$$(2.12) \quad \begin{cases} \Delta q|_{x=0} &= u_1, \\ b\Delta T|_{x=0} + \Delta q|_{x=l} &= u_2, \end{cases}$$

где $b \neq 0$.

3. Исследование нулей функции $\hat{P}(z) = b + z \operatorname{sh} z$

Согласно изложенной в [5] процедуре исследования условий устойчивости объекта первый этап состоит в нахождении нулей функции $\hat{P}(\hat{z}(p))$, так как они определяют полюсы передаточных функций данного объекта управления, где $\hat{z}(p)$ – однозначная ветвь функции $z = al\sqrt{p}$ с областью значений $\hat{\mathbf{C}} = \{s + it : s > 0, -\infty < t < \infty\} \cup \{s + it : s = 0, t \in (0, \infty)\} \subset \mathbf{C}$.

Чтобы найти нули $\hat{P}(z)$ в области $\hat{C} \subset C$, используем вспомогательную функцию $h = t \sin t$ действительного аргумента t . Введем обозначения: \bar{h}_n – максимум функции $h = t \sin t$ на отрезке $L_n = [2\pi(n-1), 2\pi n]$ (n – натуральное число); \bar{t}_n – то значение t , при котором h достигает максимума на отрезке L_n ; N_b – минимальное из тех n , для которых $b \leq \bar{h}_n$; $h^* = \bar{h}_{N_b}$; t^* – то значение t , при котором $h(t^*) = h^*$, т. е.

$$(3.1) \quad \bar{h}_n = h(\bar{t}_n) = \max_{t \in L_n} h(t), \quad N_b = \min_{n \in \{1, 2, \dots\}} \{n : \bar{h}_n \geq b\},$$

$$h(t^*) = h^* = \bar{h}_{N_b}, \quad b \leq h^*.$$

Теорема 1 описывает расположение нулей функции $\hat{P}(z)$ в области \hat{C} в зависимости от величины коэффициента b .

Теорема 1. При $b \in (0, \tilde{b})$, где $\tilde{b} = -2\tilde{S}_1 \operatorname{sh} \tilde{S}_1 \cos \tilde{S}_1$, а \tilde{S}_1 – решение уравнения $\operatorname{tg} \tilde{\sigma}_1 = -\operatorname{th} \tilde{\sigma}_1$ в интервале $I_1 = (\bar{t}_1, p)$ (т. е. $\tilde{b} \approx 17,7985$), у всех нулей функции $\hat{P}(z) = b + z \operatorname{sh} z$, лежащих в области \hat{C} , мнимая часть по абсолютной величине превосходит вещественную и, соответственно, все нули функции $D(p) = (a_2 I / l) \hat{P}(\hat{z}(p))$ имеют отрицательную действительную часть. При этом в зависимости от величины β нули функции $\hat{P}(z) = b + z \operatorname{sh} z$ располагаются в области \hat{C} следующим образом:

а) при любом β функция $\hat{P}(z) = b + z \operatorname{sh} z$ имеет счётное множество пар нулей первого порядка вида it_{n1} и it_{n2} , где $t_{n1} \in M_n = (2p(n-1), \bar{t}_n)$, $t_{n2} \in I_n = (\bar{t}_n, p(2n-1))$, а n – любое из тех натуральных чисел, при которых $b < \bar{h}_n$; этим нулям соответствуют простые нули $p_{nk} = -t_{nk}^2 / (al)^2$ ($k = 1, 2$) функции D ;

б) если при некотором натуральном $n < N_b$ выполняется неравенство $b > \bar{h}_n$ (т. е. $N_b > 1$), то помимо мнимых нулей

функция $\hat{P}(\hat{z})$ имеет в области \hat{C} также $m_b = (N_b - 1)$ пар простых сопряженных комплексных нулей вида $z_{n1}^0 = s_n^0 + it_n^0$, $z_{n2}^0 = s_n^0 - it_n^0$, где $n \in (1, N_b - 1)$, $N_b \leq 4$, $\sigma_n^0 > 0$, $\tau_n^0 \in \mathbf{I}_n$, а именно,

$$(3.2) \quad m_b = \begin{cases} 1 & \text{при } b \in (\bar{h}_1, \bar{h}_2), \quad N_b = 2, \\ 2 & \text{при } b \in (\bar{h}_2, \bar{h}_3), \quad N_b = 3, \\ 3 & \text{при } b \in (\bar{h}_2, \tilde{b}), \quad N_b = 4, \end{cases}$$

(где $\bar{h}_1 \approx 1,8197$, $\tilde{h}_2 \approx 7,9167$, $\bar{h}_3 \approx 14,1724$); при этом каждой паре таких нулей функции $\hat{P}(\hat{z})$ соответствует пара простых сопряженных нулей вида

$$p_{n1}^0 = \frac{(s_n^0)^2 - (t_n^0)^2 + 2is_n^0 t_n^0}{(al)^2}, \quad p_{n2}^0 = \frac{(s_n^0)^2 - (t_n^0)^2 - 2is_n^0 t_n^0}{(al)^2}$$

функции $D(p)$, принадлежащих области $\mathbf{C}^- = \{p \in \mathbf{C} : \text{Re} p < 0\}$;

с) если же $b = h^* = \bar{h}_{N_b}$, то функция $\hat{P}(z)$ также имеет в области \hat{C} один мнимый ноль второго порядка $z_{N_b} = it^*$, которому соответствует отрицательный ноль второго порядка функции $D(p)$: $p^* = -(t^*)^2 / (al)^2$;

д) при $b \geq \tilde{b}$ функция $\hat{P}(z)$ имеет в области $\tilde{\mathbf{Q}}_1 = \{s + it : s \in (0, \infty), t \in \mathbf{I}_1\} \subset \hat{C}$ такой ноль $z_{11}^0 = s_1^0 + it_1^0$, для которого $s_1^0 \geq t_1^0$, что означает наличие у функции $D(p)$ нуля с неотрицательной вещественной частью, т. е. неустойчивость объекта управления.

Доказательство теоремы 1 приведено в Приложении I.

4. Разложение функций $R_{J_x P} = J_x / P$ ($J = H, S$) на рациональные дроби

Чтобы получить оценки норм операторов, имеющих передаточные функции $R_{J_x P}$ ($J = H, S$), представим каждую из функций $R_{J_x P}$ в виде суммы ряда, составленного из главных частей этой функции в ее полюсах, являющихся также нулями функции $P(p)$. Возможность такого представления обосновывается следующей леммой и теоремой Коши [2, п. 71].

Лемма. Значения функций $R_{H_x P}$ и $R_{S_x P}$ на окружностях

$$(4.1) \quad \mathbf{G}_n = \left\{ p \in \mathbf{C} : |p| = \left(\frac{(p/2) + 2pn}{al} \right)^2 \right\},$$

где n – натуральное число, при $n \rightarrow \infty$ стремятся к нулю равномерно по отношению к $\arg p$.

Доказательство леммы приведено в Приложении I.

Теорема 2. На основании теоремы Коши [2, п. 71] каждая из функций $R_{J_x P}$, где $J = H, S$, может быть представлена суммой ряда, составленного из главных частей этой функции в её полюсах, а именно:

$$(4.2) \quad R_{J_x P} = W_{J_M} + W_{J_{N_b}} + \sum_{n=1}^{m(b)} W_{J_{K_n}} + W_J^* ;$$

$$\text{где } W_{J_M} = \sum_{n=N_b+1}^{\infty} \sum_{k=1}^2 \frac{C_{Jnk}}{p - p_{nk}}, \quad W_{J_{N_b}} = \begin{cases} \sum_{k=1}^2 \frac{C_{JN_b k}}{p - p_{N_b k}} & \text{при } b < \bar{h}_{N_b}, \\ 0 & \text{при } b = \bar{h}_{N_b}, \end{cases}$$

$$W_J^* = \begin{cases} 0 & \text{при } b < \bar{h}_{N_b}, \\ \sum_{k=1}^2 \frac{C_{Jk}^*}{(p - p_{N_b k}^*)^k} & \text{при } b = \bar{h}_{N_b} = h^*, \end{cases}$$

$$W_{J_{K_n}}(p) = \frac{C_{Jn}^0}{p - p_{n1}^0} + \frac{\overline{C_{Jn}^0}}{p - p_{n2}^0},$$

и $h^* = \bar{h}_{N_b}$ (см. теорему 1). При этом коэффициенты C_{Jnk} , входящие в функции W_{Jn} и W_{JN_b} ($J=H, S$) равны:

$$(4.3) \quad C_{Hnk} = \frac{2 \cos((x/l)t_{nk}) t_{nk}}{(\alpha l)^2 (\sin t_{nk} + t_{nk} \cos t_{nk})} = \frac{2}{(\alpha l)^2} \frac{\cos((x/l)t_{nk}) t_{nk}^2}{b + s_{nk} t_{nk} \sqrt{t_{nk}^2 - b^2}},$$

$$(4.4) \quad C_{Snk} = \frac{2 \sin((x/l)t_{nk})}{\alpha l \sqrt{q} (\sin t_{nk} + t_{nk} \cos t_{nk})} = \frac{2}{\alpha l \sqrt{q}} \frac{\sin((x/l)t_{nk}) t_{nk}}{b + s_{nk} t_{nk} \sqrt{t_{nk}^2 - b^2}},$$

$$\text{где } k=1,2, \quad s_{n1} = \begin{cases} 1 & \text{при } n \geq N_b + 1, \\ \text{sign}(L_{N_b} - b) & \text{при } n = N_b, \end{cases}$$

$s_{n2} = -1$, $L_{N_b} = 2p(N_b - 1) + p/2$; а коэффициенты, входящие в функции W_J^* , W_{Jkn} ($J=H, S$) равны:

$$(4.5) \quad C_{H2}^* = 8 \frac{\cos((x/l)t^*) (t^*)^2 \sqrt{1+(t^*)^2}}{(\alpha l)^4 (2+(t^*)^2)},$$

$$(4.6) \quad C_{S2}^* = 8 \frac{\sin((\xi/l)\tau^*) \tau^* \sqrt{1+(\tau^*)^2}}{(\alpha l)^3 \sqrt{\theta} (2+(\tau^*)^2)};$$

$$(4.7) \quad C_{H1}^* = \frac{4}{(\alpha l)^2} \frac{\sqrt{1+(\tau^*)^2}}{2+(\tau^*)^2} \left(\frac{\xi}{l} \tau^* \sin\left(\frac{\xi}{l} \tau^*\right) - \frac{2+\frac{(\tau^*)^2}{3}}{2+(\tau^*)^2} \cos\left(\frac{\xi}{l} \tau^*\right) \right),$$

$$(4.8) \quad C_{S1}^* = \frac{4}{\alpha l \sqrt{\theta}} \frac{\sqrt{1+(\tau^*)^2}}{2+(\tau^*)^2} \left(\frac{2}{3} \frac{\tau^*}{2+(\tau^*)^2} \sin\left(\frac{\xi}{l} \tau^*\right) - \frac{\xi}{l} \cos\left(\frac{\xi}{l} \tau^*\right) \right);$$

$$(4.9) \quad C_{Hn}^0 = 2 \frac{\text{ch}((x/l)z_{n1}^0)}{(\alpha l)^2} \frac{z_{n1}^0}{P'(z_{n1}^0)},$$

$$(4.10) \quad C_{Sn}^0 = 2 \frac{\text{sh}((x/l)z_{n1}^0)}{\alpha l \sqrt{q} \hat{P}'(z_{n1}^0)}.$$

Доказательство теоремы 2 приведено в Приложении I.

На основании теоремы 2 можно вычислить или оценить

нормы (в пространстве $\mathbf{B} = \mathbf{B}_{(0,0)}$ сужений на пространстве $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_{(0,0)}$) операторов

$$\underline{W}_{J_M}, \underline{W}_{J_{N_\beta}}, \underline{W}_J^*, \underline{W}_{J_{Kl}} \quad (J = H, S),$$

имеющих передаточными функциями соответствующие слагаемые представления (4.2).

Следствие 1. При $b \leq p/2$ и $x = l$ норма сужения оператора $\|R_{H,P}\|_{\mathbf{B}}$ на пространство \mathbf{Q} как оператора $\mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{Q}$, равна

$$(4.11) \quad \|R_{H,P}\|_{\mathbf{B}} = R_{H,P}(0) = \frac{1}{b},$$

а точное значение нормы оператора $R_{H,D}$ в \mathbf{B} (см. (3.1)):

$$(4.12) \quad \|R_{H,D}\|_{\mathbf{B}} = R_{H,D}(0) = \frac{l}{b l a_2} = \frac{1}{a_0}.$$

Следствие 2. При $\xi \in [0, l)$ и $b \in (0, p/2)$ можно указать сравнительно простые оценки нормы оператора $R_{H_\xi D}$ в пространстве \mathbf{B} , а именно, при $\beta \in (0, \pi/2)$

$$(4.13) \quad \|R_{H_x D}\|_{\mathbf{B}} < \frac{1}{|a_0| \cos t_{11}},$$

а в случае $x \in [0, l)$ и $\beta = \pi/2$

$$(4.14) \quad \|R_{H_x D}\|_{\mathbf{B}} < \frac{2,262}{|a_0|} + \frac{4}{p} \frac{l}{l |a_2|}.$$

Доказательства следствий даны в Приложении.

Заметим, что оценки норм операторов, приводимые для значений $b \in (0, p/2]$ в следствии 2, являются грубыми. Более точные оценки позволяет дать теорема 3.

5. Оценка норм операторов \underline{W}_{J_M} ($J = H, S$)

Теорема 3. Операторы, имеющие передаточными функциями W_{H_M} и W_{S_M} , отображают пространство \mathbf{Q} в себя, и

нормы их сужений на \mathbf{Q} оцениваются сверху следующим образом:

$$(5.1) \quad \left\| \underline{W}_{HM} \right\|_{\mathbf{B}} < \frac{M_H}{\pi^2};$$

$$(5.2) \quad \left\| \underline{W}_{SM} \right\|_{\mathbf{B}} < \frac{al}{p^2 \sqrt{q}} \min \left(\frac{M_S}{2p}, \frac{x}{l} M_H \left(1 + \frac{1}{2N_b} \right) \right),$$

где $M_H = \frac{1}{N_b^2 - a_{N_b}^2} + \frac{1}{2a_{N_b}} \ln \frac{N_b + a_{N_b}}{N_b - a_{N_b}}$; $a_{N_b} = b \frac{\sqrt{4p^2 N_b^2 + 1}}{4p^2 N_b}$;

$$M_S = \frac{1}{N_b(N_b^2 - a_{N_b}^2)} + \frac{1}{a_{N_b}^2} \ln \frac{N_b}{\sqrt{N_b^2 - a_{N_b}^2}}.$$

Доказательство теоремы 3 см. в Приложении I.

6. Оценка норм операторов \underline{W}_{HN_b} и \underline{W}_{SN_b}

Оператор с передаточной функцией

$$(6.1) \quad W_{JN_b} = \sum_{k=1,2} C_{JN_b k} / (p - p_{N_b k}), \quad p_{N_b k} = it_{N_b k},$$

где

$$(6.2) \quad C_{HN_b k} = \frac{2t_{N_b k} \cos\left(\frac{x}{l}\right)}{(al)^2 (\text{sint}_{N_b k} + t_{N_b k} \text{cost}_{N_b k})},$$

$$(6.3) \quad C_{SN_b k} = \frac{2t_{N_b k} \sin\left(\frac{x}{l} t_{N_b}\right)}{al \sqrt{q} (\text{sint}_{N_b k} + t_{N_b k} \text{cost}_{N_b k})},$$

вносит сравнительно весомый вклад в норму суммарного оператора, поэтому его норму полезно оценить отдельно.

Теорема 4. Операторы, имеющие передаточными функциями \underline{W}_{HN_b} и \underline{W}_{SN_b} , отображают пространство \mathbf{Q} в себя, и нормы их сужений на \mathbf{Q} равны

$$\|W_{JN_b}\| = \left| (al)^2 \sum_{k=1,2} \frac{C_{JN_bk}}{t_{N_bk}^2} (1 - 2M_k) \right|,$$

где $J = H, S$, $k = 1, 2$, t_{N_bk} вычисляются путем численного решения уравнения $t \sin t = b$, при этом $t_{N_b1} \in (2p(N_b - 1), t^*)$, $t_{N_b2} \in (t^*, p(2N_b - 1))$, C_{JN_bk} – см. (6.1), $R = C_{JN_b1}/C_{JN_b2}$, и

$$M_k = \begin{cases} \frac{C_{JN_b1}}{C_{JN_b2}} \sqrt{\frac{t_{N_bk}^2}{t_{N_b2}^2 - t_{N_b1}^2}} & \text{при } R \in (-1, 0) \\ 0 & \text{при } R \notin (-1, 0). \end{cases}$$

Доказательство теоремы 4 дано в Приложении I.

7. Вычисление норм операторов \underline{W}_J^* ($J = H, S$)

Теорема 5. Операторы, имеющие передаточными функциями W_H^* и W_S^* , отображают пространство \mathbf{Q} в себя, и нормы их сужений на \mathbf{Q} вычисляются по следующим формулам:

$$(7.1) \quad \|W_J^*\|_{\mathbf{B}} = \begin{cases} |a_{J1}| & \text{при } C_{J2}^* C_{J2}^* \geq 0, \\ |2a_{J2} \exp b_J - a_{J1}| & \text{при } C_{J2}^* C_{J2}^* < 0, \end{cases}$$

где C_{Jk}^* для $J = H, S$ и $k = 1, 2$ – см. (4.5)–(4.8);

$$b_J = \left(\frac{t^*}{al} \right)^2 \frac{C_{J1}^*}{C_{J2}^*}; \quad m = \frac{2 + (t^*)^2}{\sqrt{1 + (t^*)^2}}; \quad a_{H2} = -\frac{8}{m(t^*)^2} \cos\left(\frac{x}{l} t^*\right);$$

$$a_{H1} = \frac{4}{mt^*} \left(\frac{x}{l} \sin\left(\frac{x}{l} t^*\right) + \frac{1}{t^*} \frac{2 + (5/3)(t^*)^2}{2 + (t^*)^2} \cos\left(\frac{x}{l} t^*\right) \right);$$

$$a_{S1} = 4 \frac{al}{m(t^*)^2 \sqrt{q}} \left(\frac{2}{t^*} \frac{2 + (2t^*)/3^2}{2 + (t^*)^2} \sin\left(\frac{x}{l} t^*\right) - \frac{x}{l} \cos\left(\frac{x}{l} t^*\right) \right);$$

$$a_{S2} = -\frac{8al}{m(t^*)^3 \sqrt{q}} \sin\left(\frac{x}{l} t^*\right).$$

Доказательство теоремы 5 см. в Приложении I.

8. Вычисление норм операторов $W_{J_{kn}}$ ($J = H, S$).

Теорема 6. Операторы с передаточными функциями $W_{H_{kn}}$ и $W_{S_{kn}}$, отображают пространство \mathbf{Q} в себя, и нормы их сужений на \mathbf{Q} вычисляются по следующим формулам:

$$(8.1) \quad \left\| \underline{W_{H_{kn}}} \right\|_{\mathbf{B}} = M_{Hn} \left| \operatorname{ch} \left(\frac{x}{l} z_n^0 \right) \right|,$$

$$(8.2) \quad \left\| \underline{W_{S_{kn}}} \right\|_{\mathbf{B}} = M_{Sn} c_S \left| \operatorname{sh} \left(\frac{x}{l} z_n^0 \right) \right|,$$

$$\text{где } M_{Hn} = \frac{4N_{Hn}}{|z_{n1}^0| |\hat{P}'(z_{n1}^0)|}; \quad M_{Sn} = \frac{4N_{Sn}}{|z_{n1}^0|^2 |\hat{P}'(z_{n1}^0)|}; \quad c_S = \frac{al}{\sqrt{q}};$$

$$\hat{P}'(z_{n1}^0) = z_{n1}^0 \operatorname{ch} z_{n1}^0 + \operatorname{sh} z_{n1}^0; \quad j_{Jn} = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} C_{Jn}^0}{\operatorname{Re} C_{Jn}^0};$$

$$g_n = \operatorname{arctg} n_n; \quad n_n = \frac{(t_n^0)^2 - (s_n^0)^2}{2s_n^0 t_n^0}; \quad r_n = \frac{1}{1 - \exp(-n_n p)};$$

$$N_{Jn} = \left| \sin(g_n - j_{Jn}) + 2r_n \operatorname{cosh} g_n \exp(-n_n((p/2) - j_{Jn})) \right|.$$

Доказательство теоремы 6 см. в Приложении I.

В Приложении II в таблицах 1–4 приводятся вычисленные с помощью программы MATLAB для $n = 1 \div 3$ и $b \in [\bar{h}_n, \tilde{b})$ значения нулей z_n^0 функции \hat{P} и параметров $m_{Hn} = M_{Hn} |\operatorname{ch} z_n^0|$, $m_{Sn} = M_{Sn} |\operatorname{sh} z_n^0|$ ($J = H, S$), равных нормам операторов в выражениях (8.1) и (8.2) при $x = l$. На рис. 1–4 приводятся графики функций m_{Jn} ($n = 1, 2, 3$, по оси абсцисс откладывается b , по оси ординат – m_{Jn}).

9. Заключение

Полученные в разделах 4–8 оценки или значения норм операторов

$$\underline{W}_{J_M}, \underline{W}_{J_{N_b}}, \underline{W}_J^*, \underline{W}_{J_{K_n}}, \quad J = H, S,$$

имеющих соответственно передаточные функции $W_{J_M}, W_{J_{N_b}}, W_J^*, W_{J_{K_n}}$ и отображающих пространство \mathbf{Q} в себя, позволяют, в силу (4.2), получить оценки для норм (в пространстве \mathbf{B}) операторов с передаточными функциями $R_{J_x P}$ и $R_{J_x D} = (l / I a_2) R_{J_x P}$ ($J = H, S$), а эти последние оценки дают возможность (см. раздел 1) определить класс \mathbf{FB} обратных связей, для которых гарантированы причинность и устойчивость замкнутой системы по отношению к внешнему воздействию на систему.

Из приведенных в Приложении II таблиц и графиков видно, что величины $m_{J1} = a_{J1} + a_{J2} \exp b_J$ ($J=H, S$) для $b = \bar{h}_1$, вычисленные по формулам (7.1) при $\xi = l$ и определяющие вклад низшей гармоники в общую норму оператора $R_{J_x P}$, неограниченно растут при стремлении b к критическому значению \tilde{b} , что говорит о приближении объекта к потере устойчивости; величины же m_{J2} и m_{J3} , соответствующие второй и третьей гармоникам, весьма малы по сравнению с m_{J1} и слабо изменяются при изменении параметра b .

Авторы благодарны д.т.н. Б. Т. Поляку за его труд по знакомству с работой и за ценные замечания, способствующие улучшению ее изложения.

ПРИЛОЖЕНИЕ I

П1. Доказательство теоремы 1

а) Вещественных нулей функция $\hat{P} = b + z \operatorname{sh} z$ в силу вы-

бора параметра b не имеет. Рассмотрим вопрос о чисто мнимых нулях этой функции. Если $z = it$, где t – действительное, i – мнимая единица, то $\hat{P}(it) = \beta - \tau \sin \tau$. Функция $h(t) = t \sin t$ при $t \geq 0$ на каждом из отрезков $\mathbf{L}_n = [2p(n-1), 2pn]$ (n – натуральное) имеет максимум \bar{h}_n в точке $\bar{\tau}_n$, являющейся решением уравнения $t = -\text{tg}t$, $\bar{\tau}_n \in ((2(n-1) + 0,5)p, (2n-1)p)$. При $n \rightarrow \infty$ величина \bar{h}_n неограниченно возрастает. Если $\bar{h}_n > b$, то на \mathbf{L}_n функция $\hat{P}(z)$ имеет пару нулей первого порядка it_{n1} и it_{n2} , где $t_{n1} \in \mathbf{M}_n = (2p(n-1), \bar{\tau}_n)$, $t_{n2} \in \mathbf{I}_n = (\bar{\tau}_n, p(2n-1))$; если же $\beta = h^*$, где $h^* = \bar{h}_{N_\beta}$, то функция \hat{P} имеет ноль второго порядка вида it^* , где $\tau^* = \bar{\tau}_{N_\beta}$, так как $\hat{P}'(it)|_{t=t^*} = 0$, но $\hat{P}''(it)|_{t=t^*} \neq 0$.

б) Далее, предположим, что $z_{n1}^0 = s_n^0 + it_n^0$, где $\sigma_n^0 > 0$, $t_n^0 \in \mathbf{L}_n$, является нулём функции \hat{P} . Тогда числа s_n^0 , t_n^0 удовлетворяют условиям $\text{Re} \hat{P}(s_n^0 + it_n^0) = 0$ и $\text{Im} \hat{P}(s_n^0 + it_n^0) = 0$, т. е. уравнениям

$$(П1.1) \quad \text{Re}(b + \hat{z} \text{sh} \hat{z}) = \beta + \sigma \text{sh} s \cos t - t \text{ch} s \sin t = 0,$$

$$(П1.2) \quad \text{Im}(b + \hat{z} \text{sh} \hat{z}) = s \text{ch} s \sin t + t \text{sh} s \cos t = 0,$$

и, следовательно, уравнениям

$$(П1.3) \quad b = -(s^2 + t^2) \frac{\text{sh} s}{s} \cos t,$$

$$(П1.4) \quad \frac{\text{th} s}{s} = -\frac{\text{tg} t}{t},$$

откуда следует, что $\cos \tau_n^0 < 0$, $\sin \tau_n^0 > 0$ и $t_n^0 > -\text{tg} t_n^0$; т. е.

$t_n^0 \in \mathbf{I}_n$ ($t_n^0 > \bar{\tau}_n$). Наконец, из (П1.3) получаем:

$$(П1.5) \quad b > (t_n^0)^2 |\cos t_n^0| > (\bar{\tau}_n)^2 |\cos \bar{\tau}_n| = \bar{\tau}_n \sin \bar{\tau}_n = \bar{h}_n.$$

Так как N_b – минимальное из чисел n , для которых $b \leq \bar{h}_n$, из (П1.5) следует, что при $n \geq N_b$ функция \hat{P} не имеет

нулей вида $s_n^0 + it_n^0$, где $2p(n-1) \leq t_n^0 < 2pn$ и $\sigma_n^0 > 0$.

Из четности функции $\operatorname{Re} \hat{P}(s + it)$ по t и нечетности по t функции $\operatorname{Im} \hat{P}(s + it)$ следует, что если $\zeta_{n1}^0 = \sigma_n^0 + it_n^0$ – ноль функции \hat{P} , то и число $\zeta_{n2}^0 = \bar{\zeta}_{n1}^0 = \sigma_n^0 - it_n^0$ – тоже ноль функции $\hat{P}(z)$, поэтому достаточно исследовать лишь нули функции \hat{P} , лежащие в первом квадранте комплексной плоскости \mathbf{C} .

в) Докажем, что для каждого n , при котором $\bar{h}_n < b$, функция $\hat{P}(z)$ имеет в области $\mathbf{C}_n = \{\zeta = s + it \in \mathbf{C} : s > 0, t \in \mathbf{L}_n\} \subset \mathbf{C}$ ровно один ноль. Согласно сказанному выше, если функция \hat{P} имеет ноль $z_n^0 = s_n^0 + it_n^0$ и $t_n^0 \in \mathbf{L}_n$, то $t_n^0 \in \mathbf{I}_n$. Рассмотрим область $\mathbf{Q}_n = \{(s, t) \in \mathbf{R}^2 : s > 0, t \in \mathbf{I}_n\}$ плоскости \mathbf{R}^2 . В этой области уравнение (П1.2) эквивалентно уравнению $G(s, t) = 0$, где

$$(П1.6) \quad G(s, t) = \frac{\operatorname{th} s}{s} + \frac{\operatorname{tg} t}{t}.$$

Частные производные функции G имеют вид

$$(П1.7) \quad G'_\sigma = \frac{\sigma - \operatorname{sh} \sigma \operatorname{ch} \sigma}{(\sigma \operatorname{ch} \sigma)^2};$$

$$(П1.8) \quad G'_\tau = \frac{t - \sin t \cos t}{(t \cos t)^2}.$$

В области \mathbf{Q}_n функция G'_s принимает отрицательные значения, а функция G'_t – положительные. Поэтому уравнение $G(s, t) = 0$ задаёт в этой области функцию $t = v_n(s)$, имеющую положительную производную

$$(П1.9) \quad n'_n(s) = -\frac{G'_s(s, v_n(s))}{G'_t(s, v_n(s))};$$

и, следовательно, монотонно возрастающую с ростом s , стремящуюся при $s \rightarrow \infty$ к $p(2n-1)$, а при $s \rightarrow 0$ – к \bar{t}_n . При любом $s > 0$ число $s + iv_n(s)$ удовлетворяет уравнению (П1.2).

Так как $n_n(s)$ – возрастающая функция, то и функция

$$(П1.10) \quad b_n(s) = -\left(s^2 + n_n^2(s)\right) \frac{\text{sh}s}{s} \cos n_n(s)$$

также монотонно возрастает (от $-(\bar{F}_n)^2 \cos \bar{F}_n = \bar{F}_n \sin \bar{F}_n = \bar{h}_n$ к $+\infty$) с ростом σ , задавая взаимно-однозначное отображение множества $\{s : 0 < s < \infty\}$ на множество $\{b : \bar{h}_n < b < \infty\}$; обратное взаимно-однозначное отображение обозначим $\hat{S}_n(b)$.

Для любого фиксированного значения $b > \bar{h}_n$ число $\zeta_{n1}^0 = \hat{\sigma}_n(b) + in_n(\hat{\sigma}_n(b))$ является нулем функции $\hat{P}(z)$, ибо оно удовлетворяет как уравнению (П1.2), так и (П1.10), а, следовательно, (П1.3) и (П1.1). Этот нуль – единственный в области C_n при данном b в силу единственности функций $s = \hat{S}_n(b)$ и $t = n_n(s)$. z_{n1}^0 – нуль первого порядка, как и нуль $z_{n2}^0 = \bar{z}_{n1}^0$, ибо $\text{Re } \hat{P}'(z) = \text{Re}(\text{sh}z + z \text{ch}z) = \text{sh}s \cos t + s \text{ch}s \cos t - t \text{sh}s \sin t = \text{sh}s(\cos t + s \cos t / \text{th}s - t \sin t)$;

откуда, учитывая (П1.4), получаем для $k = 1, 2$:

$$\begin{aligned} \text{Re } \hat{P}'(\zeta_{nk}^0) &= \text{sh}\sigma_n^0(\cos t_n^0 - \tau_n^0 \cos^2 t_n^0 / \sin t_n^0 - \tau_n^0 \sin t_n^0) = \\ &= (\cos t_n^0 \sin t_n^0 - \tau_n^0) \text{sh} \sigma_n^0 / \sin t_n^0 \end{aligned}$$

Так как $\sigma_n^0 > 0$ и $\tau_n^0 \in \mathbf{I}_n = (\bar{F}_n, (2n-1)p)$, т. е. $t_n^0 > p/2$, то $(\cos t_n^0 \sin t_n^0 - \tau_n^0) \neq 0$ и $\text{Re } \hat{P}'(\zeta_{nk}^0) \neq 0$, поэтому нули ζ_{nk}^0 функции $P(\hat{z})$ первого прядка.

г) Так как из требования устойчивости объекта управления следует, что функция D имеет нули только в C^- , потребуем, чтобы нули $\zeta_{n1}^0 = \sigma_n^0 + it_n^0$ функции \hat{P} , лежащие в области \hat{C} , при всех $n \geq 1$ удовлетворяли условию

$$(П1.11) \quad \sigma_n^0 < \tau_n^0;$$

при выполнении этого условия у каждого из нулей функции \hat{P} модуль вещественной части будет меньше модуля мнимой части и, следовательно, каждый из нулей p_n^0 функции D будет иметь отрицательную вещественную часть.

Из вида (П1.6) функции G следует, что функция v_n удовлетворяет уравнению

$$(П1.12) \frac{v_n(s)}{\sigma} = -\frac{\operatorname{tg} v_n(s)}{\operatorname{th} \sigma}.$$

Так как правая часть (П1.12) в интервале $(0, \infty)$ монотонно убывает с ростом s , стремясь к нулю при $s \rightarrow \infty$, отношение $v_n(s)/s$ также монотонно убывает (от ∞ до нуля) и становится равным 1 при некотором \tilde{S}_n . Согласно (П1.12), \tilde{S}_n удовлетворяет уравнению

$$(П1.13) \operatorname{tg} \tilde{S}_n = -\operatorname{th} \tilde{S}_n.$$

Точка $\tilde{S}_n + i\tilde{S}_n$ является нулём функции \hat{P} при некотором значении b , которое обозначим как $\tilde{\beta}_n$. Из (П1.10) получаем:

$$(П1.14) \tilde{\beta}_n = -2\tilde{S}_n \operatorname{sh} \tilde{\sigma}_n \cos \tilde{S}_n = 2\tilde{S}_n \operatorname{ch} \tilde{S}_n / \sqrt{2+1/\operatorname{sh}^2 \tilde{S}_n}.$$

Величина $\tilde{S}_n = v_n(\tilde{S}_n) \in \mathbf{I}_n$ растёт с ростом n , поэтому из (П1.14) следует, что $\tilde{\beta}_n$ тоже монотонно растёт с ростом n (т. е. $\tilde{\beta}_n < \tilde{\beta}_{n+1}$). Если при некотором b функция $\hat{P} = b + z \operatorname{sh} z$ имеет нули вида $z_{n1}^0 = s_n^0 + it_n^0$, где $s_n^0 > 0$, и $\operatorname{Im} z_{11}^0 > \operatorname{Re} z_{11}^0$, то и для остальных нулей этой функции, имеющих вид $z_{n1}^0 = s_n^0 + it_n^0$ при $n > 1$, неравенство (П1.11) будет выполняться. Действительно, если $s_1^0 < t_1^0$, то $b < \tilde{\beta}_1 < \tilde{\beta}_n$, следовательно, $t_n^0 > s_n^0$.

Таким образом, если $b < \tilde{\beta}_1$, то условие (П1.11) выполняется для всех нулей функции \hat{P} . Но при $b \geq \tilde{\beta}_1$ функция \hat{P} имеет такой ноль $z_{11}^0 = s_1^0 + it_1^0$, что $s_1^0 \geq t_1^0 \in (0, p)$, а функция $D(p)$ имеет ноль с неотрицательной вещественной частью. Далее будем обозначать $\tilde{\beta}_1$ как \tilde{b} : $\tilde{b} = \tilde{\beta}_1 = -2\tilde{S}_1 \operatorname{sh} \tilde{S}_1 \cos \tilde{S}_1$, где $\tilde{S}_1 \in \mathbf{I}_1$ и $\operatorname{tg} \tilde{\sigma}_1 = -\operatorname{th} \tilde{\sigma}_1$.

Для вычисления значения \tilde{b} используем уравнение (П1.13): решая его при $n=1$ (т. е. $\tilde{S}_1 \in \mathbf{I}_1$), находим $\tilde{S}_1 \approx 2,365$.

Из соотношения (П1.14) следует, что $\tilde{b} = \tilde{b}_1 \approx 17,7985$.

Для $n = 1 \div 4$ определим максимумы $\bar{h}_n = \bar{\epsilon}_n^2 / \sqrt{1 + \bar{\epsilon}_n^2}$ функции h , решив в интервалах $(2(n-1)\pi, (2n-1)\pi)$ уравнения $\bar{\epsilon}_n = -\text{tg } \bar{\epsilon}_n$: $\bar{h}_1 \approx 1,8197$ ($\bar{\epsilon}_1 \approx 2,0287$), $\bar{h}_2 \approx 7,9167$ ($\bar{\epsilon}_2 \approx 7,9789$), $\bar{h}_3 \approx 14,1724$ ($\bar{\epsilon}_3 \approx 14,2075$) и $\bar{h}_4 \approx 20,445$ ($\bar{\epsilon}_4 \approx 20,469$).

Сравнив найденные максимумы с $\tilde{b} \approx 17,7985$, заключаем, что если все нули функции $\hat{P}(\zeta)$ удовлетворяют условию $|\text{Im} z_{nk}^0| > \text{Re} z_{nk}^0$ ($k = 1, 2$), то при $\beta \in (0, \tilde{\beta})$ функция $\hat{P}(\zeta)$ может иметь в области \hat{C} не более трёх пар нулей вида $z_{nk}^0 = s_n^0 \pm i t_n^0$ с положительной действительной частью, так как из неравенства $t_n^0 > s_n^0 > 0$ следует, что $\bar{h}_n < b < \tilde{\beta} < \bar{h}_4$.

Таким образом, при $b \in (\bar{h}_1, \tilde{b})$ в области \hat{C} функция $\hat{P}(z)$ имеет $m_b = N_b - 1$ пар сопряженных комплексных нулей первого порядка вида $\zeta_{nk}^0 = \sigma_n^0 \pm i \tau_n^0$ ($k = 1, 2$), где $\sigma_n^0 > 0$, $\tau_n^0 \in \mathbf{I}_n$. При этом

$$m_\beta = \begin{cases} 1 & \text{при } \beta \in (\bar{h}_1, \bar{h}_2), \\ 2 & \text{при } \beta \in (\bar{h}_2, \bar{h}_3), \\ 3 & \text{при } \beta \in (\bar{h}_3, \tilde{\beta}). \end{cases}$$

Так как любой из этих нулей функции $\hat{P}(\zeta)$ удовлетворяет условию (П1.11), соответствующие им нули

$$p_{n1}^0 = \frac{(\sigma_n^0)^2 - (\tau_n^0)^2 + 2i \sigma_n^0 \tau_n^0}{(\alpha l)^2}, \quad p_{n2}^0 = \frac{(\sigma_n^0)^2 - (\tau_n^0)^2 - 2i \sigma_n^0 \tau_n^0}{(\alpha l)^2}$$

функции $D(p)$ лежат в области C^- . Теорема 1 доказана.

П2. Доказательство леммы

Функции $R_{H_x, P} = H_x / P$ и $R_{S_x, P} = S_x / P$ оцениваются по модулю сверху следующим образом:

$$(П2.1) \quad \left| R_{H_x P}(p) \right| \leq \frac{\text{chs}}{\left| z \left| \frac{b}{z} + \text{sh} z \right| \right|} \leq \frac{1}{\left| z \left| \frac{b}{|z| \text{chs}} - j(s, t) \right| \right|},$$

$$(П2.2) \quad \left| R_{S_x P}(p) \right| \leq \frac{al \text{chs}}{\sqrt{q} |z|^2 \left| \frac{b}{x} + \text{sh} z \right|} \leq \frac{al}{\sqrt{q} |z|^2 \left| \frac{b}{|z| \text{chs}} - j(s, t) \right|},$$

где $z = al \sqrt{p} = s + it \in \mathbf{C}$, $\sigma, \tau \in \mathbf{R}$,

$$j(s, t) = |\text{sh } \zeta| / \text{ch } s = \sqrt{(\text{th} \sigma \cos \tau)^2 + \sin^2 \tau} = \sqrt{1 - (1 - \text{th}^2 \sigma) \cos^2 \tau}.$$

Функция ϕ на дуге $\Gamma_n = \{p \in \mathbf{G}_n : |t| \in [2pn + [p/3, p/2]]\}$ принимает значения, не меньшие $\sin(p/3) = \sqrt{3}/2$. На множестве же $\mathbf{B}_n = \{p \in \mathbf{G}_n : |t| \in [0, 2pn + p/3]\}$ величина $|\sigma|$ оценивается снизу следующим образом:

$$|\sigma| \geq \sqrt{(2pn + p/2)^2 - (2pn + p/3)^2} = p \sqrt{(2n + 5/12)/3},$$

т. е. минимальное на \mathbf{B}_n значение $|\sigma|$ неограниченно возрастает при $n \rightarrow \infty$, а значения функции $j(s, t) = \sqrt{1 - (1 - \text{th}^2 s) \cos^2 t}$ на \mathbf{B}_n при достаточно большом n становятся больше $\sqrt{3}/2$. Так как $|\zeta|$ на \mathbf{G}_n неограниченно возрастает при $n \rightarrow \infty$, из (П2.1) следует, что значения функций $R_{H_x P}$ и $R_{S_x P}$ на \mathbf{G}_n стремятся к нулю при $n \rightarrow \infty$ (равномерно по отношению к $\arg p$). Лемма доказана.

П3. Доказательство теоремы 2

В силу доказанного в лемме 3 стремления значений функций $R_{J_x P}$ ($J = H, S$) на \mathbf{G}_n к нулю при $n \rightarrow \infty$ эти функции могут быть представлены [2, п. 71] как суммы рядов, составленных из главных частей в их полюсах:

$$R_{J_x P} = W_{J_M} + W_{J_{N_b}} + \sum_{n=1}^{m(b)} W_{J_{Kn}} + W_J^*.$$

Определим коэффициенты, стоящие в числителях дробей – членов этих рядов.

а) При $n > N_b + 1$ и в случае $n = N_b$ и $b < h^* = h_{N_b}$, нули $p_{nk} = -t_{nk}^2 / (al)^2$ функции D являются полюсами первого порядка функций

$$W_{J_M}(p) = \sum_{n=N_b+1}^{\infty} \sum_{k=1}^2 \frac{C_{Jnk}}{p - p_{nk}},$$

$$\text{где } C_{Jnk} = \operatorname{res}_{p_{nk}} R_{J_x P} = \frac{J_x(p_{nk})}{\hat{P}'(\hat{z}_{nk}) \hat{z}'(p_{nk})} = \frac{1}{(al)^2} \frac{2J_x(p_{nk}) t_{nk}^2}{b + s_{nk} t_{nk} \sqrt{t_{nk}^2 - b^2}}.$$

Здесь $k \in \{1, 2\}$, $s_{n2} = -1$ (так как $t_{n2} > 2(n-1)p + p/2$ для любого $n \geq N_b$, т. е. $\cos t_{n2} < 0$), и $s_{n1} = 1$ (так как соотношения $b \leq \bar{h}_{n-1} < \bar{t}_{n-1} < p(2n-3) < 2p(n-1) + p/2 = L_n$ выполняются для любого $n \geq N_b + 1$; см. обозначения теоремы 1).

Если же $n = N_b$ и $b < h^*$, то $s_{n1} = \operatorname{sign}(L_{N_b} - b)$, где $L_{N_b} = 2(N_b - 1)p + p/2$, так как если $h(L_{N_b}) = L_{N_b} < b < h^*$, то $L_{N_b} = 2(N_b - 1)p + p/2 < t_{n1}$ и $\cos t_{n1} < 0$.

Таким образом,

$$C_{Hnk} = \frac{2t_{nk} \cos\left(\frac{x}{l} t_{nk}\right)}{(al)^2 h'(t_{nk})} = \frac{2t_{nk} \cos\left(\frac{x}{l} t_{nk}\right)}{(al)^2 (\sin t_{nk} + t_{nk} \cos t_{nk})} =$$

$$= \frac{2 \cos\left(\frac{x}{l} t_{nk}\right)}{(al)^2} \frac{t_{nk}^2}{b + s_{nk} t_{nk} \sqrt{t_{nk}^2 - b^2}},$$

$$C_{S_{nk}} = \frac{2 \sin\left(\frac{x}{l} t_{nk}\right)}{al \sqrt{qh'}(t_{nk})} = \frac{2 \sin\left(\frac{x}{l} t_{nk}\right)}{al \sqrt{q}} \frac{t_{nk}}{b + s_{nk} t_{nk} \sqrt{t_{nk}^2 - b^2}};$$

б) В том случае, когда $b = h^*$, функции W_J^* ($J=H,S$) имеют при $p^* = -t^*/(al)^2$ (см. обозначения теоремы 1) полюс 2-го порядка, поэтому

$$W_J^* = \begin{cases} 0 & \text{при } b < \bar{h}_{N_b}, \\ \sum_{k=1}^2 \frac{C_{Jk}^*}{(p-p^*)^k} & \text{при } b = \bar{h}_{N_b} = h^*, \end{cases}$$

Входящие в функции W_J^* ($J=H,S$) коэффициенты равны:

$$C_{J2}^* = \lim_{p \rightarrow p^*} (R_{J_x p} (p-p^*)^2) = 8 \frac{J_x(p^*)}{(al)^4} (t^*)^2 \frac{\sqrt{1+(t^*)^2}}{2+(t^*)^2},$$

$$\begin{aligned} C_{J1}^* &= \operatorname{res}_{p \rightarrow p^*} R_{J_x p} = \lim_{p \rightarrow p^*} \frac{d}{dp} (R_{J_x p} (p-p^*)^2) = \\ &= \frac{2J'_x(p^*)}{P''(p^*)} - \frac{2J_x(p^*)P'''(p^*)}{3(P''(p^*))^2}. \end{aligned}$$

Отсюда, используя выражения $P(p) = b + al\sqrt{p} \sin(al\sqrt{p})$ и $p^* = -(t^*)^2/(al)^2$, получаем формулы (4.5)–(4.8).

в) Если $b \in (\bar{h}_1, \tilde{b})$ (см. теорему 1), то функция $W_{J_{kn}}$ ($n=1,2,3$), входящая как слагаемое в функцию $R_{J_x p}$, имеет два сопряженных полюса $p_{n1} = (z_{n1}^0)^2/(al)^2$ и $p_{n2}^0 = \bar{p}_{n1}^0$ первого порядка, где $z_{n1}^0 > 0$. В этом случае

$$W_{J_{kn}}(p) = \frac{C_{Jn}^0}{p-p_{n1}^0} + \frac{\overline{C_{Jn}^0}}{p-p_{n2}^0},$$

где $C_{Jn}^0 = \operatorname{res}_{p_{n1}^0} R_{J_x p} = 2 \frac{J_x(p_{n1}^0)}{(al)^2} Z_n^0(p_{n1}^0)$ и

$$Z_n^0 = \frac{z_{n1}^0}{\hat{P}'(z_{n1}^0)} = \frac{z_{n1}^0}{\operatorname{sh} z_{n1}^0 + z_n^0 \operatorname{ch} z_{n1}^0},$$

т. е. $C_{Hn}^0 = 2 \frac{\operatorname{ch}((x/l)z_{n1}^0)}{(al)^2} Z_n^0$, $C_{Sn}^0 = 2 \frac{\operatorname{sh}((x/l)z_{n1}^0)}{al\sqrt{q} \hat{P}'(z_{n1}^0)}$.

П4. Доказательство следствий 1 и 2

Если $b \leq p/2$, то $N_b = 1$, и все входящие в $R_{J,p}$ слагаемые, кроме W_{J1} и W_{JM} , равны нулю.

Оригиналы j_{Jn} функций $C_{Jn1}/(p-p_{n1}) + C_{Jn2}/(p-p_{n2})$ ($J = H, S$), входящих в выражение для функций W_{J1} и W_{JM} , имеют вид:

$$(П4.1) \quad j_{Jn}(x, t) = s(t)(C_{Jn1} \exp(p_{n1}t) + C_{Jn2} \exp(p_{n2}t)),$$

где $J \in \{H, S\}$, $n \geq N_b + 1$.

Если $b \leq p/2$, а $x = l$, то при всех $n \geq 1$ $\text{cost}_{nk}/h'(t_{nk}) \geq 0$, где $k = 1, 2$, т. е. $C_{Hnk} \geq 0$, и все оригиналы $\varphi_{Hn}(\xi, t)$ в формуле (П4.1) неотрицательны при любом t . Поэтому оцениваемая норма оператора с передаточной функцией $R_{H,p}$ равна значению этой функции при $p = 0$, т. е. $1/\beta$. Следствие 1 доказано.

Для доказательства следствия 2 нужно учесть, что $t_{nk} \sin t_{nk} = b$ и t_{11} – минимальное из всех возможных значений t_{nk} , поэтому $|\cos((x/l)t_{nk})| \leq 1 \leq |\text{cost}_{nk}|/\text{cost}_{11}$ при любых n, k . Учитывая, что $\text{cost}_{nk}/h'(t_{nk}) > 0$ при $b \leq p/2$, получаем, что

$$|C_{Hnk}| = \frac{2t_{nk}}{(al)^2} \left| \frac{\cos\left(\frac{x}{l}t_{nk}\right)}{h'(t_{nk})} \right| \leq \frac{2t_{nk}}{(al)^2} \left| \frac{1}{h'(t_{nk})} \right| \leq \frac{2t_{nk}}{(al)^2} \frac{1}{h'(t_{nk})} \frac{\text{cost}_{nk}}{\text{cost}_{11}},$$

поэтому

$$\|j_{Jn}(x, \bullet)\|_{L^1(\mathbb{R}^+)} \leq \frac{1}{\text{cost}_{11}} \|j_{Jn}(l, \bullet)\|_{L^1(\mathbb{R}^+)}.$$

Из этой оценки и следствия 1 вытекает неравенство (4.13) следствия 2. В случае $b = p/2$, учитывая, что $t_{11} = p/2$, $h'(p/2) = 1$, $|\text{cost}_{nk}| > |\text{cost}_{12}| > |\text{cost}_{11}| = 1/\sqrt{(\bar{E}_1)^2 + 1} \approx 0,4421$, и

$$\|W_{H_{M1}}\|_{\mathbf{B}} = \left| \frac{C_{H11}}{p_{11}} \right| = 2 \cos \left(\frac{x}{l} t_{11} \right) \frac{1}{t_{11} h'(t_{11})} < \frac{4}{p},$$

где $W_{H_{M1}}$ – оператор с передаточной функцией $C_{H11}/(p - p_{11})$, получаем оценку (4.14).

П5. Доказательство теоремы 3

Оригиналы j_{J_n} функций $C_{J_{n1}}/(p - p_{n1}) + C_{J_{n2}}/(p - p_{n2})$ ($J = H, S$), входящих в выражение для W_{J_M} , при $n \geq N_b + 1$ имеют вид:

$$(П5.1) \quad j_{J_n}(x, t) = s(t)(C_{J_{n1}} \exp(p_{n1}t) + C_{J_{n2}} \exp(p_{n2}t)),$$

$$C_{H_{nk}} = \frac{2t_{nk} \cos\left(\frac{x}{l} t_{nk}\right)}{(al)^2 h'(t_{nk})} = \frac{2t_{nk} \cos\left(\frac{x}{l} t_{nk}\right)}{(al)^2 (\sin t_{nk} + t_{nk} \cos t_{nk})},$$

$$C_{S_{nk}} = \frac{2 \sin\left(\frac{x}{l} t_{nk}\right)}{al \sqrt{q} h'(t_{nk})} = \frac{2 \sin\left(\frac{x}{l} t_{nk}\right)}{al \sqrt{q}} \frac{t_{nk}}{b + s_{nk} t_{nk} \sqrt{t_{nk}^2 - b^2}};$$

$$s(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ 1 & \text{при } t \geq 0. \end{cases}$$

Оценим норму каждой такой функции в пространстве $L^1(\mathbf{R}^+)$:

$$(П5.2) \quad \|j_{J_n}(x, \bullet)\|_{L^1(\mathbf{R}^+)} \leq \sum_{k=1}^2 \left| \frac{C_{J_{nk}}}{P_{nk}} \right|.$$

Из (4.3) и (4.4) при $n \geq N_b + 1$ с учётом соотношений $h'(t_{n1}) > 0$, $h'(t_{n2}) < 0$, $\beta < \bar{h}_{N_b} < \bar{t}_{N_b} < \pi(2N_b - 1) \leq \pi(2n - 3)$ получаем:

$$(П5.3) \quad \|j_{H_n}(x, \bullet)\|_{L^1(\mathbf{R}^+)} \leq 2s_n < \frac{1}{p^2 [(n-1)^2 - a_{N_b}^2]},$$

$$(П5.4) \quad \|j_{S_n}(x, \bullet)\|_{L^1(\mathbf{R}^+)} \leq \frac{2}{t_{n1}} \frac{al}{\sqrt{q}} s_n m \left(\frac{x}{l} t_{n2} \right) <$$

$$< \frac{al}{[(n-1)^2 - a_{N_b}^2] \sqrt{q}} \min \left(\frac{1}{2p(n-1)}, \frac{x}{l} \left(1 + \frac{1}{2N_b} \right) \right).$$

Здесь $s_n = \frac{1}{t_{n1} \sqrt{t_{n1}^2 - b^2} + b} + \frac{1}{t_{n2} \sqrt{t_{n2}^2 - b^2} - b},$

$$a_{N_b} = b \sqrt{4p^2 N_b^2 + 1} / (4p^2 N_b), \quad m(x) = \min(1, x).$$

Из (П5.3) и (П5.4) видно, что ряды

$$\sum_{n=N_b+1}^{\infty} j_{J_n}(x, \bullet)$$

сходятся в пространстве $L^1(\mathbf{R}^+)$ и что их суммы оцениваются по норме этого пространства следующим образом:

$$(П5.5) \quad \left\| \sum_{n=N_b+1}^{\infty} j_{H_n}(x, \bullet) \right\|_{L^1(\mathbf{R}^+)} < \frac{\Phi_H}{p^2};$$

$$(П5.6) \quad \left\| \sum_{n=N_b+1}^{\infty} j_{S_n}(x, \bullet) \right\|_{L^1(\mathbf{R}^+)} < \frac{al}{p^2 \sqrt{q}} \min \left(\frac{\Phi_S}{2p}, \frac{x}{l} \left(1 + \frac{1}{2N_b} \right) \Phi_H \right).$$

Здесь

$$\Phi_H = \frac{1}{N_b^2 - a_{N_b}^2} + \int_{N_b}^{\infty} \frac{dx}{x^2 - a_{N_b}^2} = \frac{1}{N_b^2 - a_{N_b}^2} + \frac{1}{2a_{N_b}} \ln \frac{a_{N_b} + N_b}{a_{N_b} - N_b},$$

$$\begin{aligned} \Phi_S &= \frac{1}{N_b(N_b^2 - a_{N_b}^2)} + \int_{N_b}^{\infty} \frac{dx}{x(x^2 - a_{N_b}^2)} = \\ &= \frac{1}{N_b(N_b^2 - a_{N_b}^2)} + \frac{1}{a_{N_b}^2} \ln \frac{N_b}{\sqrt{N_b^2 - a_{N_b}^2}}. \end{aligned}$$

Теорема 3 доказана.

П6. Доказательство теоремы 4

$$\|W_{JN_b}\| = \int_0^{\infty} |j_{JN_b}| dt = \int_0^{\infty} \left| \sum_{k=1,2} C_{JN_bk} e^{-\frac{t_{N_bk}^2}{(al)^2} t} \right| dt, \quad J = H, S;$$

поэтому в тех случаях, когда $C_{JN_b1}C_{JN_b2} \geq 0$ или $C_{JN_b1}C_{JN_b2} < 0$, но $|C_{JN_b2}| \leq |C_{JN_b1}|$, т. е. когда функция $j_{JN_b} \neq 0$ при $t > 0$,

$$\|W_{JN_b}\| = (al)^2 \left| \sum_{k=1,2} C_{JN_bk} / t_{N_bk}^2 \right|.$$

При $C_{JN_b2}/C_{JN_b1} \in (-\infty, -1)$ функция $j_{JN_b}(t)$ меняет знак в точке

$$t_{0J} = \frac{(al)^2}{t_{N_b2}^2 - t_{N_b1}^2} \ln \left| \frac{C_{JN_b2}}{C_{JN_b1}} \right|.$$

В этом случае норма оператора равна

$$\begin{aligned} \|W_{JN_b}\| &= \left| \sum_{k=1,2} \int_0^{t_{0J}} C_{JN_bk} e^{-\frac{t_{N_bk}^2}{(al)^2} t} dt \right| + \left| \sum_{k=1,2} \int_{t_{0J}}^{\infty} C_{JN_bk} e^{-\frac{t_{N_bk}^2}{(al)^2} t} dt \right| = \\ &= (al)^2 \left| \sum_{k=1}^2 \frac{C_{JN_bk}}{t_{N_bk}^2} \left(1 - 2 \exp \left(\frac{-t_{N_bk}^2}{t_{N_b2}^2 - t_{N_b1}^2} \ln \left| \frac{C_{JN_b2}}{C_{JN_b1}} \right| \right) \right) \right| = \\ &= \left| \sum_{k=1}^2 \frac{(al)^2 C_{JN_bk}}{t_{N_bk}^2} \left(1 - 2 \left| \frac{C_{JN_b1}}{C_{JN_b2}} \right|^{\frac{t_{N_bk}^2}{t_{N_b2}^2 - t_{N_b1}^2}} \right) \right|. \end{aligned}$$

Теорема 4 доказана.

П7. Доказательство теоремы 5

Импульсная переходная функция оператора \underline{W}_J^* равна

$$(П7.1) \quad w_J^*(x, t) = s(t) j(x, t),$$

где $j(t) = (C_{J1}^* + C_{J2}^* t) \exp(p^* t)$, $J = H, S$ (см. раздел 3). При

$C_{J_1}^* C_{J_2}^* \geq 0$ функция $j(t)$ сохраняет знак при $t > 0$, и норма оператора в пространстве \mathbf{B} равна:

$$\| \underline{W}_J^* \|_{\mathbf{B}} = \left| \int_0^{\infty} j(x, t) dt \right| = |a_{J_1}|,$$

Если же $C_{J_1}^* C_{J_2}^* < 0$, то $j(t_{0J}) = 0$ при $t_{0J} = -C_{J_1}^* / C_{J_2}^*$ и

$$\| \underline{W}_J^* \|_{\mathbf{B}} = \left| \int_0^{t_{0J}} j(x, t) dt - \int_{t_{0J}}^{\infty} j(x, t) dt \right| = |-a_{J_1} + 2a_{J_2} \exp b_J|,$$

где $b_J = t_{0J} p^* = -p^* C_{J_1}^* / C_{J_2}^*$,

$$a_{J_1} = \frac{C_{J_1}^*}{p^*} - \frac{C_{J_2}^*}{(p^*)^2}, \quad a_{J_2} = \left[\frac{C_{J_1}^*}{p^*} + C_{J_2}^* \left(\frac{t_{0J}}{p^*} - \frac{1}{(p^*)^2} \right) \right] = -\frac{C_{J_2}^*}{(p^*)^2}.$$

Используя выражения (4.5)-(4.8) для $C_{J_k}^*$ ($k=1,2$), приходим к формулам (7.1) теоремы 5. Теорема 5 доказана.

П8. Доказательство теоремы 6

Импульсная переходная функция оператора $\overline{W}_{J_{kn}}$ имеет вид

$$(П8.1) \quad w(\overline{W}_{J_{kn}})(t) = s(t) \left(C_{J_n}^0 \exp(p_{n1}^0 t) + \overline{C_{J_n}^0} \exp(p_{n2}^0 t) \right) = \\ = 2 \left| C_{J_n}^0 \right| s(t) \exp(-m_n t) \cos(w_n t + \tilde{j}_{J_n}),$$

где $p_{n1}^0 = (z_{n1}^0)^2 / (al)^2$; $z_{n1}^0 = s_n^0 + i t_n^0$; $p_{n2}^0 = \overline{p_{n1}^0}$,

$$J_n = (t_n^0)^2 - (s_n^0)^2, \quad m_n = J_n / (al)^2;$$

$$\tilde{j}_{J_n} = j_{J_n} + \alpha p; \quad j_{J_n} = \arctg(\text{Im} C_{J_n}^0 / \text{Re} C_{J_n}^0);$$

$$\alpha = \begin{cases} 0 & \text{при } \text{Re} C_{J_n}^0 > 0, \\ 1 & \text{при } \text{Re} C_{J_n}^0 < 0. \end{cases}, \quad w_n = 2 \frac{s_n^0 t_n^0}{(al)^2}.$$

Норма функции $y_{J_n}(t) = s(t) \exp(-m_n t) \cos(w_n t + j_{J_n})$ в пространстве $\mathbf{L}^1(\mathbf{R}^+)$ вычисляется следующим образом:

$$\begin{aligned}
 (\text{П8.2}) \quad \|Y_{J_n}\|_{L^1(\mathbf{R}^+)} &= \int_0^\infty \exp(-m_n t) |\cos(w_n t + j_{J_n})| dt = \\
 &= \sum_{k=0}^\infty \int_{kp/w}^{(k+1)p/w} \exp(-m_n t) |\cos(w_n t + j_{J_n})| dt = \\
 &= r_n \left| \int_0^{t_{J_n}} e^{-m_n t} \cos(w_n t + j_{J_n}) dt - \int_{t_{J_n}}^{p/w_n} e^{-m_n t} \cos(w_n t + j_{J_n}) dt \right| = \frac{N_{J_n}}{|P_n^0|},
 \end{aligned}$$

где $N_{J_n} = |\sin(g_n - j_{J_n}) + 2r_n \cos g_n \exp(-n_n((p/2) - j_{J_n}))|$;

$$g_n = \arctg n_n; \quad n_n = \frac{J_n}{2S_n^0 t_n^0}; \quad r_n = \frac{1}{1 - \exp(-n_n p)}; \quad t_{J_n} = \frac{(p/2) - j_{J_n}}{w_n}.$$

Используя выражения (4.9) и (4.10) для $C_{J_n}^0$, получаем:

$$(\text{П8.3}) \quad \|W_{J_{kn}}\|_{\mathbf{B}} = \|w(W_{J_{kn}})\|_{L^1(\mathbf{R}^+)} = 2N_{J_n} \left| \frac{C_{Jn1}^0}{P_{n1}^0} \right| = 4N_{J_n} \left| \frac{J_x(p_{n1}^0)}{z_{n1}^0 \hat{P}'(z_{n1}^0)} \right|,$$

где $\hat{P}'(z_{n1}^0) = z_{n1}^0 \operatorname{ch} z_{n1}^0 + \operatorname{sh} z_{n1}^0$.

На основании (П8.3) получаем выражения (8.1) и (8.2) для норм операторов $\underline{W}_{J_{kn}}$ (в пространстве \mathbf{B}). Теорема 6 доказана.

ПРИЛОЖЕНИЕ II

Таблицы и графики

Замечание. Значения $m_{J_n} = a_{J_1} + a_{J_2} \exp b_J$ для $b = \bar{h}_n$ вычислены по формулам (7.1) при $\xi = l$ ($J=H, S$), $a = 1$, $l = 1$. При $\beta \rightarrow \bar{h}_n$ (при $S_n^0 \rightarrow 0$) значения импульсной переходной функции оператора $\underline{W}_{J_{kn}}$ (П8.1) стремятся к значениям функции (П7.1) оператора \underline{W}_J^* , а $\|W_{J_{kn}}\|_{\mathbf{B}}$ стремится к $\|W_J^*\|_{\mathbf{B}}$. На рис.1–4 приведены графики функций m_{Hn} и m_{Sn} для $n=1 \div 3$, $q=1$ (см. 8.1, 8.2): по оси абсцисс – b , по оси ординат –

$$m_{Hn} = M_{Hn} \left| \operatorname{ch}(xz_n^0/l) \right| \text{ и } m_{Sn} = M_{Sn} c_S \left| \operatorname{sh}(xz_n^0/l) \right|, c_S = al/\sqrt{q} = 1.$$

Таблица 1. Значения m_{Hn} и m_{Sn} для $b = \bar{h}_n$ ($z_n^0 = it_n^*$)

n	$b = \bar{h}_n$	s_n^0	$t_n^0 = \bar{t}_n$	m_{Hn}	m_{Sn}
1.	1,8196	0	2,029	0,4855	0,5481
2.	7,9171	0	7,979	0,0593	0,0035
3.	14,172	0	14,207	0,0195	3,5585e-004

Таблица 2. Зависимость параметров m_{H1} и m_{S1} от b

b	s_1^0	t_1^0	M_{H1}	m_{H1}	M_{S1}	m_{S1}
2,0	0,361	2,043	0,8466	0,4958	0,6985	0,6734
3,0	0,878	2,105	0,4821	0,5389	0,4954	0,6519
4,0	1,147	2,149	0,3932	0,5967	0,2797	0,4599
5,0	1,337	2,184	0,3564	0,6642	0,2050	0,4002
6,0	1,489	2,211	0,3404	0,7444	0,1698	0,3822
7,0	1,615	2,235	0,3365	0,8385	0,1516	0,3850
8,0	1,723	2,254	0,3416	0,9510	0,1424	0,4017
9,0	1,818	2,272	0,3548	1,0884	0,1392	0,4306
10,0	1,902	2,287	0,3766	1,2577	0,1405	0,4722
11,0	1,978	2,300	0,4092	1,4758	0,1464	0,5303
12,0	2,048	2,312	0,4576	1,7715	0,1579	0,6130
13,0	2,113	2,323	0,5312	2,1956	0,1775	0,7351
14,0	2,172	2,333	0,6443	2,8256	0,2094	0,9195
15,0	2,228	2,343	0,8448	3,9176	0,2678	1,2426
16,0	2,279	2,351	1,2658	6,1813	0,3923	1,9162
17,0	2,328	2,359	2,7711	14,2136	0,8413	4,3145
17,5	2,352	2,363	7,4155	38,9427	2,2295	11,7052
17,6	2,356	2,364	11,1129	58,6233	3,3349	17,5877
17,7	2,361	2,364	21,8156	115,6028	6,5346	34,6175
17,79	2,365	2,365	824,6516	4,3892 e+003	246,571	1,3120 e+003

Таблица 3. Зависимость параметров m_{H2} и m_{S2} от b

b	s_2^0	t_2^0	M_{H2}	m_{H2}	M_{S2}	m_{S2}
8,00	0,1426	7,9795	0,3117	0,0593	0,0035	0,0035
9,00	0,5086	7,9892	0,1063	0,0582	0,0033	0,0037
10,00	0,6986	7,9978	0,0744	0,0573	0,0031	0,0038
11,00	0,8409	8,0058	0,0591	0,0565	0,0029	0,0040
12,00	0,9583	8,0135	0,0496	0,0557	0,0028	0,0041
13,00	1,0592	8,0207	0,0430	0,0550	0,0026	0,0042
14,00	1,1500	8,0272	0,0380	0,0544	0,0025	0,0043
15,00	1,2285	8,0337	0,0342	0,0538	0,0024	0,0044
16,00	1,3019	8,0409	0,0311	0,0533	0,0023	0,0044
17,00	1,3684	8,0453	0,0286	0,0528	0,0022	0,0045
17,50	1,4000	8,0480	0,0275	0,0526	0,0021	0,0045
17,79	1,4200	8,0489	0,0268	0,0525	0,0021	0,0046

Таблица 4. Зависимость параметров m_{H3} и m_{S3} от b

b	s_3^0	t_3^0	M_{H3}	m_{H3}	M_{S3}	m_{S3}
14,4	0,180	14,208	0,1000	0,0194	3.5364 e-004	3.5851 e-004
15,0	0,340	14,210	0,0548	0,0194	3.4779 e-004	3.6721 e-004
16,0	0,500	14,213	0,0367	0,0193	3.3847 e-004	3.8081 e-004
17,0	0,620	14,216	0,0290	0,0193	3.2834 e-004	3.9264 e-004
17,7 9	0,700	14,218	0,0252	0,0192	3.2128 e-004	4.0242 e-004

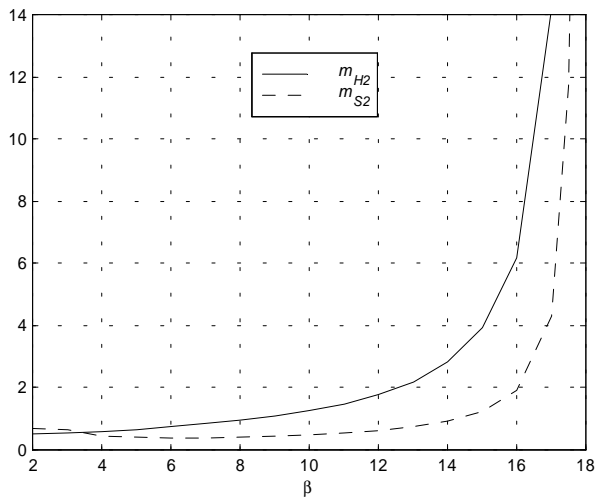


Рис. 1. Зависимость m_{H1} и m_{S1} от b

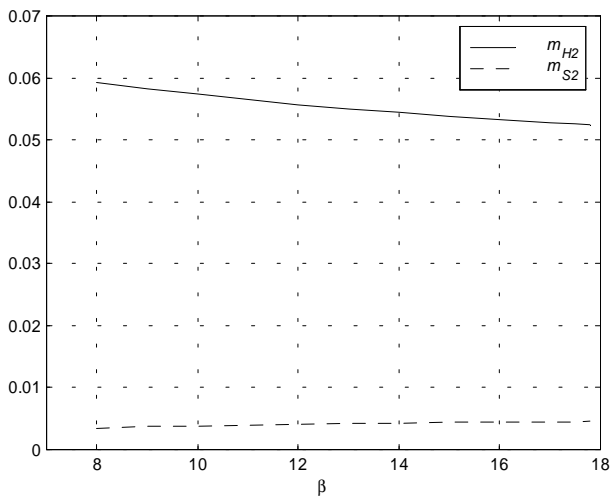


Рис.2. Зависимость m_{H2} и m_{S2} от b

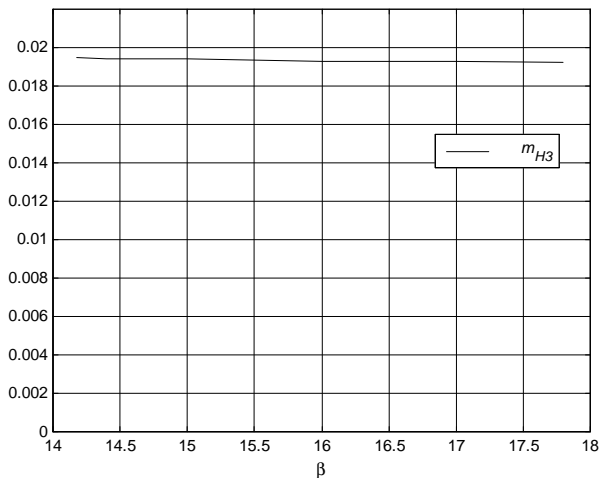


Рис. 3. Зависимость m_{H3} от b

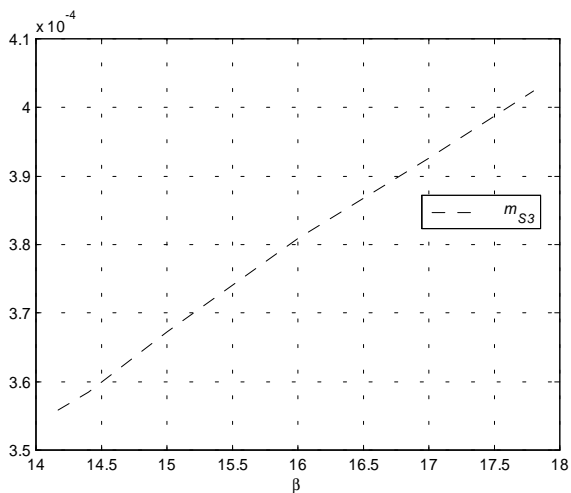


Рис. 4. Зависимость m_{S3} от b

Литература

1. БАБИЧ В. М., КАПИЛЕВИЧ М. Б., МИХЛИН С. Г., НАТАНСОН Г. И., РИЗ П. М., СЛОБОДЕЦКИЙ Л. Н., СМИРНОВ М. М. *Линейные уравнения математической физики. СМБ.* – М.: Наука, 1964.
2. ЛАВРЕНТЬЕВ М. А., ШАБАТ Б. В. *Методы теории функций комплексного переменного.* – М., Физматгиз, 1958.
3. ПЕРВОЗВАНСКИЙ А. А. *Курс теории автоматического управления.* – М.: Наука, 1986.
4. СОЛНЕЧНЫЙ Э. М. *О причинности системы теплопроводности с нелинейной обратной связью по граничным условиям // Автоматика и телемеханика.* – 2002. – №9. – С. 15–26.
5. СОЛНЕЧНЫЙ Э. М. *Исследование условий причинности и устойчивости системы управления линейным распределённым объектом // Автоматика и телемеханика.* – 2006. – №4. – С. 53–85.
6. GAJEWSKI H., GRÖGER K., ZACHARIAS K. *Nichtlineare Operatorgleichungen und Operator-differentialgleichungen.* – Berlin, Akademie-Verlag, 1974.

INVESTIGATION OF CAUSALITY AND STABILITY CONDITIONS OF A LINEAR HEAT-CONDUCTIVITY OBJECT CONTROL SYSTEM (SPECIAL CASES). PART I

Engel Solnechnyi, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Doctor of Science (solnechn@ipu.ru).

Ludmila Cheryomushkina, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Cand.Sc. (l.a.cherem@yandex.ru).

Abstract: We obtain the estimates of the norms of the boundary influences-to-temperature operators for two special cases of boundary conditions for the stable one-dimensional finite-length object of heat

conductivity. These estimates are used to find the sufficient condition of causality and stability for the non-linear feedback control system.

Keywords: closed-loop system, causality, stability, distributed dynamic systems, a linear heat conduction object, complex variable theory.

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии А. Г. Бутковским*

УДК 004.042

ББК 32.973.26-018.2

ОБРАБОТКА СИМВОЛЬНЫХ МАССИВОВ

Айткулов П. Г.¹

(Удмуртский государственный университет, Ижевск)

Суффиксный массив для строки представляет собой структуру данных, которая позволяет искать все вхождения образца за линейное время от длины образца. Построены алгоритмы модификации суффиксного массива при добавлении одного символа, при добавлении блока к исходной строке и удалении блока из строки. Найдено применение построенных алгоритмов к индексации текстовых записей в базах данных и имен файлов в файловой системе. Построен алгоритм поиска наибольшей общей подстроки для k -строк для динамического случая.

Ключевые слова: алгоритмы на строках, суффиксный массив, наибольшая общая подстрока.

Введение

Работа в текстовом редакторе, поисковые запросы в базе данных, задачи в биоинформатике, лексический анализ программ требуют эффективных алгоритмов работы со строками.

Задачи поиска образца в тексте используются в криптографии, различных разделах физики, сжатии данных, распознавании речи.

В конце 1970-х годов на стыке генетики и информатики появилась биоинформатика (или вычислительная биология). Длина гено типа человека составляет 3,2 миллиарда символов (нуклеотидов). Для обработки таких больших данных требуются эффективные алгоритмы вычислений на строках.

¹ Павел Григорьевич Айткулов, аспирант (ajtkulov@gmail.com).

Существует два подхода в алгоритмах поиска образца: преобразование образца и суффиксные структуры данных.

В первом подходе образец является статичным, а исходный текст динамичен. Для каждого поискового запроса требуется прочитать исходный текст заново.

Если исходный текст является статичным, то стоит воспользоваться суффиксными структурами данных. Поисковый запрос к таким структурам требует линейных от длины образца ресурсов (количество операций и память).

К недостаткам существующих алгоритмов построения суффиксных структур данных относится то, что для построения структуры требуется вся строка целиком. Это ограничивает использование суффиксных структур данных с потоковыми данными. К настоящему времени нет алгоритмов модификации суффиксных структур данных при изменении исходной строки.

В работе построены алгоритмы модификации такой суффиксной структуры данных, как суффиксный массив. Построено практическое применение для индексации строковых полей в базе данных и имен файлов в файловой системе. Построенные алгоритмы позволяют решать задачу о наибольшей общей подстроке для динамического случая для одной, двух и k -строк.

1. Обзор

БАЗОВЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Алфавит Σ — конечное множество символов.

Строка s — это упорядоченный список символов. Рассматриваются конечные строки.

Подстрока $s[i..j]$ — строка, начинающаяся в позиции i и заканчивающаяся в позиции j строки s .

Префиксом строки s называется подстрока $s[1..i]$ для некоторого i .

Суффиксом строки s называется подстрока $s[i..|s|]$ для некоторого i .

1.1. АЛГОРИТМЫ РАБОТЫ СО СТРОКАМИ

В работе рассматриваются в основном задачи точного поиска подстроки. В противоположность таким задачам есть задачи нечеткого поиска, где допускается некоторое число ошибок при сравнении строк. Также существуют задачи нахождения минимального редакционного расстояния, где требуется найти минимальное число изменений (замена, вставка и удаление символа) необходимых для преобразования из одной строки в другую.

В этой главе число n обозначает длину исходного текста s , m — длина образца t .

1.1.1. BRUTE-FORCE

Самый простой и очевидный алгоритм. Пробуем сопоставить образец с позиции 1. Если сопоставление прошло неудачно, то пытаемся сопоставить образец с позиции на единицу больше предыдущего. Асимптотика наихудшего случая — $O(nm)$ (пример, $s = 'aa..aa'$, $t = 'aa..ab'$). Затраты по памяти — $O(1)$.

1.1.2. ПОСТРОЕНИЕ КОНЕЧНОГО АВТОМАТА

Строится детерминированный конечный автомат (распознающий образец t) за $O(m)$ операций. Далее за $O(n)$ проверяем, достигает ли автомат заключительного состояния. Итоговая (для наихудшего и наилучшего случая) асимптотика — $O(n + m)$. Замечание: если учитывать размерность алфавита Σ , то на построение автомата потребуется $O(m|\Sigma|)$ операций, на хранение — $O(m|\Sigma|)$ памяти. Общая асимптотика составит $O(n + m|\Sigma|)$.

1.1.3. АЛГОРИТМ КНУТА-МОРРИСА-ПРАТТА

В 1977 году была опубликована работа [24]², где устранялись недостатки поиска при помощи конечного автомата (зависимости от мощности алфавита Σ).

² Алгоритм был открыт Кнудом, Праттом и, независимо от них, Моррисом.

Вместо построения детерминированного конечного автомата строится префикс-функция π для образца t . Значение префикс-функции $\pi(q)$ определяет длину наибольшего префикса t , являющегося собственным суффиксом $t[1..q]$. Префикс-функция π по образцу t строится на линейное время $O(m)$, и с точки зрения алгоритма поиска с использованием конечного автомата, новое состояние автомата определяется при помощи префикс функции за амортизированную $O(1)$.

Общее время работы алгоритма составляет $O(n + m)$ при линейных затратах памяти $O(m)$ (где, в отличие от алгоритма поиска с конечным автоматом, сложность алгоритма и затраты на память точно не зависят от размерности алфавита).

1.1.4. АЛГОРИТМ РАБИНА-КАРПА

Идея этого алгоритма состоит в вычислении хеш-функции от образца и вычислений хеш-функции от части сопоставляемой исходной строки. Если значения хеш-функций не равны, то сопоставления явно будет неудачным, при равенстве значений необходимо линейное сопоставление. Предлагается использовать элементы динамического программирования. Например, в качестве хеш-функции можно выбрать сумму символов. Тогда для перехода к следующему символу из текущего значения хеш-функции необходимо вычесть первый символ и добавить новый. Для такой хеш-функции строки состоящие из одних символов получают одинаковый результат ($f('ab') = f('ba')$).

Рабин и Карп предложили в качестве хеш-функции использовать

$$a_1 \cdot 2^{m-1} + a_2 \cdot 2^{m-2} + \dots + a_m$$

в кольце вычетов. Тогда переход к следующему символу состоит в

$$f_{new} = 2(f_{old} - a_1 \cdot 2^{m-1}) + a_{m+1} \pmod p$$

(вычитании из предыдущего значения хеш-функции первого элемента, сдвиг вправо, добавление нового элемента). Переход к следующему символу осуществляется за $O(1)$). Такая функция имеет

большую область значений. Асимптотика для среднего случая – $O(n + m)$.

Данный метод также используется для поиска образцов в двумерной карте.

1.1.5. АЛГОРИТМ БОЙЕРА-МУРА

В 1977 году Бойер и Мур в совместной работе [13] опубликовали наиболее эффективный в настоящее время алгоритм поиска строки.

В алгоритме используется две эвристики (стоп-символ, безопасный суффикс), каждая из которых, примененная в отдельности, не дает нужной асимптотики. При сопоставлении строки сравниваются с конца.

Асимптотика наилучшего случая является сублинейной ($O(n/m)$), для наихудшего случая – линейная $O(n + m)$.

Доказательство для асимптотики для наихудшего случая имеет запутанную историю ([3], препроцессинг для сильного правила изложен в [24] некорректно и исправлен в работе [29] без пояснений). В работе Баасе [12], основанной на [29], приведен код без доступного объяснения. Печатных источников, где бы пытались объяснить метод, к настоящему времени не существует ([3]).

1.2. АХО-КОРАСИКА

Производится поиск вхождения k строк. Вместо поиска вхождения для каждой строки $O(kf(n, m))$ (где $f(n, m)$ – сложность поиска образца размером m в тексте размером n) строится конечный детерминированный автомат за $O(km)$ ([11]). Поиск осуществляется за $O(n)$.

Стоит различать задачу поиска первого вхождения, поиска всех вхождений, поиска всех вхождений без пересечений. Различие между второй и третьей задачей можно показать на примере. Для строки 'ababababa' строка 'aba' входит в 1, 3, 5, 7 позиции, но в задаче поиска всех вхождений без пересечений правильным ответом считается вхождение в 1, 5 позиции (так как вхождение в 1 и 3 позиции пересекается в позиции 3).

Все описанные алгоритмы объединяет то, что мы преобразуем образец поиска. При этом исходный текст остается без преобразований. Это позволяет заранее произвести вычисления для образца и искать его в любом тексте.

Во многих задачах текст является статичным (например, биоинформатика), а образец от запроса к запросу изменяется (поиск различных белков в ДНК).

1.3. ОБЗОР СУФФИКСНЫХ СТРУКТУР ДАННЫХ

1.3.1. БОР

Бор (trie, луч, нагруженное дерево [25]) представляет собой дерево, хранящее все суффиксы строки (каждый путь в дереве представляет собой некоторый суффикс, длина пути в точности равна длине суффикса, каждая вершина хранит символ).

Хотя время поиска подстроки является линейным, для построения бора требуется $O(n^2)$ операций, а для хранения – $O(n^2)$ памяти, что сильно ограничивает его практическое использование.

1.3.2. СУФФИКСНЫЙ АВТОМАТ

Суффиксный автомат строки s строится за линейное время [14] и допускает все суффиксы s и только их. Эта структура данных не очень распространена, так как практическое применение весьма ограничено.

1.3.3. СУФФИКСНОЕ ДЕРЕВО

Еще в [25] было замечены недостатки бора и возможность хранения с использованием $O(n)$ памяти и поиска за линейное время на производной от бора структуре данных.

В 1973 и 1976 годах Вайнером и МакКрейгом были созданы два алгоритма построения суффиксного дерева за линейное время [27, 33]. Эти алгоритмы довольно трудны для понимания и в литературе рассматриваются лишь вскользь.

В 1995 году Эско Укконен ([32]) изобретает *online*-алгоритм построения суффиксного дерева. Это означает, что добавление одного символа требует амортизированную $O(1)$ для изменения текущего суффиксного дерева.

1.3.4. СУФФИКСНЫЙ МАССИВ

Суффиксный массив строки определяется как перестановка, выражающая лексикографический порядок всех суффиксов строки. Элемент перестановки с индексом i выражает индекс суффикса, который будет i -ым в лексикографическом порядке среди всех суффиксов. Например, первый элемент суффиксного массива показывает индекс лексикографически наименьшего суффикса.

Суффиксный массив представляет собой компактное представление суффиксного дерева. Суффиксные массивы имеют массу приложений в задачах поиска образца в строке, биоинформатике [3], сжатии данных [20]. Имеются алгоритмы построения суффиксного массива за $O(n)$ [19], распределенные алгоритмы, [28].

Для существующих алгоритмов построения суффиксных массивов требуется наличие всей входной строки. Это ограничивает использование суффиксных массивов в задачах с потоковыми данными.

1.4. ОБЗОР АЛГОРИТМОВ ПОСТРОЕНИЯ СУФФИКСНЫХ МАССИВОВ

До начала 1990-х годов суффиксный массив строился из суффиксного дерева посредством обхода в глубину. Это не имело практического смысла, так как затраты памяти на построение суффиксного дерева значительно больше затрат для хранения суффиксных массивов, и область задач решаемых при помощи суффиксных деревьев больше чем у суффиксных массивов. То есть преобразование из суффиксного дерева в суффиксный массив необходимо только для экономии памяти для более узкого класса задач.

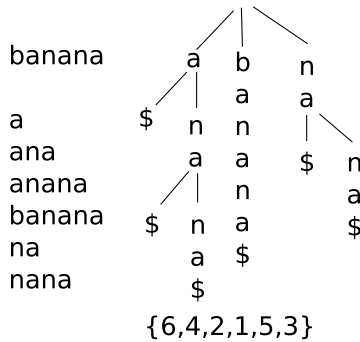


Рис. 1. Создание суффиксного массива из суффиксного дерева при помощи обхода в глубину

В 1993 году Манбер и Майерс в работе [26] построили алгоритм построения суффиксного массива за $O(n \log(n))$ операций. Предложенный метод (техника удвоения) используется в нескольких модификациях алгоритма Манбера и Майераса.

1.4.1. ТЕХНИКА УДВОЕНИЯ

Пусть все суффиксы отсортированы по первым k символам (для начала работы алгоритма достаточно отсортировать по первому символу при помощи цифровой сортировки). Суффиксы, которые совпадают по первым k символам, принадлежат одному фактор-классу³. Нас интересуют фактор-классы, состоящие из более чем одного элемента (если таковых не имеется, значит построение суффиксного массива закончено).

Возьмем два суффикса s_1 и s_2 из одного фактор-класса. Первые k символов этих суффиксов совпадают. Рассмотрим следующие k символов в этих суффиксах. Это тоже некоторые суффиксы исходной строки s'_1 и s'_2 . Определяем, принадлежат ли эти суффиксы s'_1 и s'_2 одному фактор-классу. Если ответ отрицателен, то суффиксы s_1 и s_2 текущего фактор-класса разбиваются на более

³ В работе [26] используется термин «корзина».

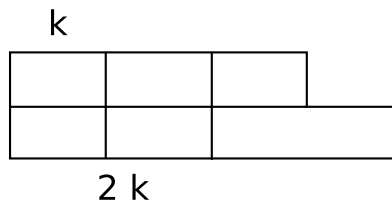


Рис. 2. Техника удвоения при создании суффиксного массива

мелкие классы. Иначе s_1 и s_2 обладают общим префиксом из $2k$ символов. Рассмотрев все фактор-классы из более чем одного элемента, получим суффиксный массив, элементы которого отсортированы по первым $2k$ символам.

1.4.2. ДРУГИЕ МЕТОДЫ

Имеются работы по распределенному и параллельному построению суффиксных массивов [28].

Также есть возможность построить суффиксное дерево по суффиксному массиву [15, 16, 17].

1.5. АНАЛОГИЯ С ОТСОРТИРОВАННОЙ КОЛЛЕКЦИЕЙ

Предположим, вы пришли в бухгалтерию за некоторой справкой. Справка уже напечатана и лежит в общей куче. Необходимо найти нужную справку.

Если стопка справок не отсортирована по фамилии, то чтобы найти нужную, необходимо просмотреть всю стопку или затратить $O(n)$ операций. Если же справки отсортированы по фамилии, то поиск можно осуществить за $O(\log(n))$ операций при помощи бинарного поиска⁴. Также можно легко подсчитать количество справок с фамилией с первой буквой «Н» за $O(\log(n))$ операций. Для суффиксных массивов это означает поиск количества и всех вхождений заданной подстроки в тексте за $O(\log(n))$.

⁴ Алгоритмы хеширования не рассматриваются

Проблемы начинаются при добавлении новых объектов. Найти место для вставки можно за $O(\log(n))$ операций, но сама операция вставки для линейного массива займет $O(n)$ (для небольшой стопки бумаг вставка требует константного времени. В памяти раздвинуть элементы просто так нельзя. Приведем аналогию с сортировкой тяжелых металлических пластин: чтение является простой задачей, а перемещение объекта – тяжелой в прямом и переносном смысле).

Для чисел (и других не очень сложных объектов) имеются способы хранения в сбалансированных деревьях, где операции поиска, изменения, вставки и удаления объекта занимают $O(\log(n))$ операций. Сложность для строк заключается в том, что определение отношения порядка занимает линейное от длины строки время, а для чисел отношение порядка определяется за $O(1)$. Заметим, что для *lcp*-естественных строк определение лексикографического порядка в среднем занимает $O(\max_{lcp})$ (что можно считать как $O(1)$, так как \max_{lcp} является константой; с практической точки зрения такой переход не является чистым). Имеются методы построения суффиксного массива, основанные на быстрой сортировке ([22]) с некоторыми ограничениями на структуры строк.

1.6. ЗАМЕЧАНИЕ ПО ИСПОЛЬЗУЕМЫМ СТРУКТУРАМ ДАННЫМ

Далее в работе будут строиться алгоритмы динамического построения суффиксных массивов. В строку будут вноситься изменения: добавление символа, добавление строки, удаление подстроки. Необходимо поддерживать суффиксный массив.

Необходим доступ по индексу (как к обыкновенному линейному массиву), так и эффективная реализация операций вставки и удаления элемента. В [5] рассматривается структура данных (*динамические порядковые статистики*), позволяющая производить все требуемые операции (индексный доступ к элементу, изменение элемента, удаление и вставка элемента) за $O(\log(n))$ операций.

Динамические порядковые статистики основываются на би-

нарном сбалансированном дереве, где кроме значения элемента в вершине дерева хранится количество элементов в левом и правом поддеревьях (в [5] рассматривается реализация с красно-черным деревом: в вершине хранится сумма вершин в левом и правом поддереве плюс сама вершина). Сортировка в дереве идет по индексу. При операциях вставки или удалении производится балансировка дерева, в процессе которой поддерживается информация о количестве элементов в поддеревьях. Индексный доступ реализуется аналогично классическому поиску в бинарном дереве, зная количество элементов в поддеревьях производится рекурсивное углубление в какое-то из поддеревьев.

Таким образом, у нас имеется структура данных, объединяющая индексный доступ к элементу, а также возможность эффективной вставки и удаления элемента. Далее в работе при доказательстве асимптотических сложностей алгоритмов будет учитываться дополнительный $O(\log(n))$ член.

Объем занимаемой памяти для такой структуры составляет $O(n)$ [5].

1.7. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Пусть дана строка s . Суффиксный массив строки s обозначим как sa . К строке s мы добавляем новый блок ns . Необходимо получить суффиксный массив для объединенной строки $s ++ ns$. Здесь и далее символ «++» означает конкатенацию строк, а символ «+» будет использоваться только в арифметическом смысле. Введем обозначение $n = |s|$, $k = |ns|$, где $|s|$ — длина строки s . Запись $s[i..j]$ обозначает подстроку s , начинающуюся с символа с индексом i по символ с индексом j . Запись $s[i..]$ является сокращением для суффикса $s[i..|s|]$.

1.8. СРАВНЕНИЕ СУЩЕСТВУЮЩИХ АЛГОРИТМОВ ДИНАМИЧЕСКОГО ИЗМЕНЕНИЯ СУФФИКСНЫХ МАССИВОВ

К настоящему времени существует только одна работа в данном направлении. В 2009 году вышла работа Салсона [30], в которой также рассматриваются алгоритмы динамического изменения

суффиксных массивов. В этой работе решены схожие задачи: изменение суффиксного массива при вставке символа и строки в середину существующей и при удалении подстроки.

Работа основана на динамическом преобразовании Барроуза-Уилера.

1.8.1. АЛГОРИТМ СЛИСЕНКО

В 1981 году опубликована работа О. А. Слисенко⁵ «Поиск периодичностей подслов в реальное время». В работе рассмотрены задачи поиска вхождения в реальное время, т. е. во входной поток поступают символы текста, затем следует разделитель \$, после чего во входной поток поступают символы образца. При получении нового символа образца алгоритм дает ответ, входит ли образец в текст в реальное время (т. е. требуется константное число шагов⁶)

В работах О. А. Слисенко ([7, 9]) строятся также алгоритм проверки симметричности в реальное время и поиск периодичностей (поиск самых длинных повторений) в реальное время.

1.9. О LCP И ПОИСКЕ МИНИМУМА НА ОТРЕЗКЕ

Одно из основных свойств lcp состоит в $lcp(i, j) = \min_{k \in [i..j-1]} lcp_k$. Нам необходимо уметь эффективно решать эту задачу.

Тривиальный алгоритм поиска минимума на отрезке нам не подходит, ввиду линейной сложности.

В [6] задача поиска минимума на отрезке для статических массивов решается за $O(\log(n))$ операций при помощи дерева отрезков. Для построения дерева отрезков требуется $O(n \log(n))$ операций.

Есть производные структуры данных, основанные на дереве отрезков, которые позволяют искать минимум на отрезке за $O(\log(n))$ операций и модифицировать элементы за $O(\log(n))$.

⁵ Результаты получены ранее.

⁶ Не путать с амортизированной единицей $O(1)$. Здесь константа задана и не зависит от входных данных.

Но эти структуры данных не позволяют добавлять или удалять элементы массива. Построение таких структур данных также занимает $O(n \log(n))$ операций.

В [31] представлена структура данных, основанная на сбалансированном дереве, позволяющая искать минимум на произвольном отрезке за $O(\log(n))$ операций, а также изменять значение элемента, удалять и вставлять элемент за $O(\log(n))$ операций.

При каждом изменении массива lcp (изменение значения элемента, удаление и вставка элемента) будем производить аналогичное действие над структурой данной для поиска минимума на отрезке.

Все структуры данных, рассмотренные в этом параграфе используют $O(n)$ памяти [5, 6, 31].

1.9.1. О LCP , LCA И ПОИСКЕ МИНИМУМА НА ОТРЕЗКЕ

Массив lcp выражает длину наибольшего общего префикса для соседних суффиксов в суффиксном массива. Чтобы найти наибольший общий префикс двух некоторых суффиксов в суффиксном дереве необходимо найти наименьшего общего родителя (lca , *least common ancestor*) для двух листьев, соответствующего этим суффиксам.

Очевидный алгоритм поиска наименьшего общего предка состоит в продвижении от каждого листа вверх к корню, помечая все узлы на своем пути. Найдя первый уже помеченный узел, мы тем самым найдем наименьшего общего предка. Как видно, сложность алгоритма линейная.

В [3, 10] рассмотрено несколько алгоритмов поиска наименьшего общего предка. Наилучшим является алгоритм с пропуском за линейное время и с константным временем запроса (поиск наименьшего общего предка на полном двоичном дереве не является сложной задачей (достаточно «поиграть» с битовым представлением вершин), строится биективное отображение между суффиксным деревом и частью полного бинарного дерева).

Покажем связь между поиском наименьшего общего предка и задачей поиска минимума на отрезке.

Рассмотрим дерево (необязательно суффиксное) и две выделенные вершины (необязательно листья). Произведем поиск в глубину с левым обходом начиная с корня, записывая порядок посещения вершины в список L . При такой нумерации число, соответствующее некоторой вершине, меньше чисел сопоставляемых ее потомкам.

Для вычисления наименьшего общего предка для вершин i и j найдем любые вхождения элементов i, j в L (например, первые). Эти элементы ограничат некоторый интервал. Найдя минимум на этом интервале мы получим $lca(i, j)$. Заметим, что длина списка

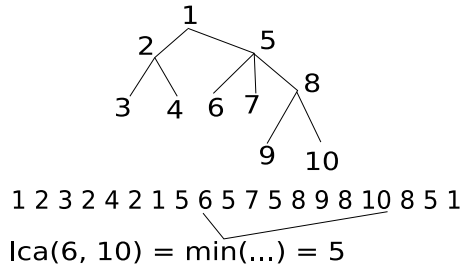


Рис. 3. Связь lca и поиска минимума на отрезке

L есть $O(n)$ (или $2n - 1$), так как каждое ребро дерева участвует дважды. То есть препроцессинг состоит в построении структуры данных для поиска минимума на отрезке за $O(n \log(n))$ операций, а сам запрос lca для произвольных вершин производится за $O(\log(n))$ операций (как поиск минимума на отрезке).

2. Полученные результаты

2.1. АЛГОРИТМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО ПОСТРОЕНИЯ СУФФИКСНОГО МАССИВА

Рассмотрим следующую задачу.

Имеется строка s и суффиксный массив sa для строки s . К строке s приписывается новый символ sym . Необходимо получить суффиксный массив для строки $sa ++sym$.

Конечно, можно построить суффиксный массив для строки $sa ++ sym$ «с нуля». Нас интересует построение алгоритма, который может изменить существующий суффиксный массив за меньшее время, чем построение суффиксного массива заново.

Лемма 1 О наихудшем случае. При добавление одного символа к строке может потребоваться не менее $O(n)$ операций для изменения суффиксного массива.

Доказательство. Если строке $aa..a$ приписать символ b , то это приведет к обращению суффиксного массива. Это требует не менее $O(n)$ операций.

Высокоуровневый алгоритм последовательного построения суффиксного массива можно записать следующим образом:

- 1) Ко всем суффиксам приписать новый символ sym , поддерживая корректность суффиксного массива.
- 2) Добавить в суффиксный массив sym .

В таком виде этот алгоритм нас не устраивает, так как в первой части алгоритма требуется обработка всех суффиксов, что потребует не менее $O(n)$ операций.

Посредством следующей леммы покажем, что необходимо обрабатывать не все суффиксы.

Лемма 2 О граничных суффиксах. Пусть дан суффиксный массив sa . При приписывании новой строки ns ко всем суффиксам суффиксного массива sa , свое местоположение могут поменять только суффиксы, для которых выполнено $lcp_i = |sa_i|$.

Доказательство. Утверждение $lcp_i < |sa_i|$ означает, что $sa_i < sa_{i+1}$, поэтому добавление строки ns не изменит лексикографический порядок sa_i и sa_{i+1} суффиксов.

Утверждение $lcp_i = |sa_i|$ также означает, что $|sa_i| < |sa_{i+1}|$ и весь суффикс sa_i является префиксом для sa_{i+1} суффикса. В зависимости от добавляемой строки ns можно получить $sa_i ++ ns > sa_{i+1} ++ ns$, $sa_i ++ ns < sa_{i+1} ++ ns$ и $sa_i ++ ns = sa_{i+1}[1..|sa_i| + |ns|]$ (в зависимости от отношения ns и $sa_{i+1}[|sa_i| + 1..]$). Лемма сформулирована и доказана для

случая добавления строки, что пригодится нам позже.

abcd?	abc?	abcd?
abcdef?	z?	abczzz?
$lcp[i] = sa[i] \quad lcp[i] < sa[i] \quad lcp[i] < sa[i] $		

Рис. 4. Добавление новой строки изменяет положение суффиксов только если $lcp_i = |sa_i|$

Рассмотрим суффикс sa_i , для которого верно $lcp_i = |sa_i|$. При приписывании символа sym к суффиксу sa_i и сравнении $sa_i ++sym$ с sa_{i+1} -суффиксом возможны следующие варианты:

- $sym < s[sa_{i+1} + lcp_i]$. Тогда sa_i -суффикс будем лексикографически меньше sa_{i+1} -суффикса вне зависимости от очередных добавляемых символов. Необходимо снять пометку bo_i .
- $sym = s[sa_{i+1} + lcp_i]$. Тогда необходимо увеличить lcp_i на единицу и сохранить пометку bo_i . Следующий добавляемый символ может повлиять на порядок sa_i -суффикса относительно sa_{i+1} .
- $sym > s[sa_{i+1} + lcp_i]$. То есть sa_i -суффикс лексикографически больше sa_{i+1} -суффикса. Необходимо переместить sa_i -суффикс и модифицировать некоторые значения lcp . Значение bo_i определится в результате перемещения суффикса.

Первые два случая являются тривиальными.

Рассмотрим третий вариант. Здесь мы получили, что $sa_i ++sym > sa_{i+1}$. То есть необходимо перемещение суффикса на новое место и обновление дополнительных структур данных.

Докажем несколько полезных лемм.

Лемма 3 Об удалении. При удалении sa_i -суффикса необходимо обновить значение $lcp_{i-1} \leftarrow \min(lcp_{i-1}, lcp_i)$.

Доказательство. Исходя из свойств lcp [26] имеет место $lcp(i, j) = \min_{k \in [i..j-1]} lcp_k$. В частности, $lcp(i-1, i+1) = \min(lcp_{i-1}, lcp_i)$. Теперь мы можем удалить суффикс. При помо-

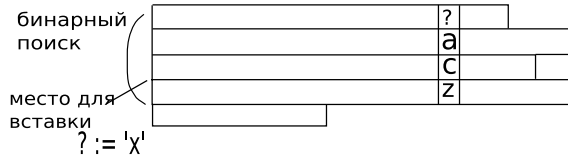


Рис. 5. Перемещение суффикса на новое местоположение

щи следующего алгоритма мы сможем определить новое местоположение и вставить $sa_i ++sym$.

Мы имеем текущее значение lcp_i и $sa_i ++sym > sa_{i+1}$. Найдем $r = \min\{k | k > i \wedge lcp_k < lcp_i\}$. Позиция r означает, что на диапазоне $k \in [i..r]$ имеет место $lcp_k \geq lcp_i$. То есть на отрезке $[i + 1..r]$ имеется общий префикс для sa_i , и искомое местоположение находится на этом интервале. Найти требуемое местоположение можно посредством бинарного поиска на интервале $[i + 1..r]$, сравнивая новый символ sym с соответствующим символом sa_{med} суффикса (med представляет собой вспомогательную переменную для бинарного поиска). Найдя требуемое местоположение pos , необходимо обновить соседние значения массива lcp следующим образом: $lcp_{pos-1} = lcp_i$ (так как $sa_{pos-1} < sa_i ++sym$), а значение $lcp_{pos} = lcp_i \vee lcp_{pos} = lcp_i + 1$ в зависимости от символа sym и соответствующего символа sa_{pos+1} суффикса.

Теперь мы можем перемещать (как операции удаления и вставки на новое место) суффикс.

Рассмотрим задачу поиска правой границы. Если абстрагироваться от суффиксных структур данных, необходимо для каждого элемента массива знать ближайший элемент с большим индексом, значение которого меньше элемента.

Нас не устраивает очевидная реализация (для каждого элемента линейный проход вправо и поиск первого элемента меньше заданного) ввиду ограничений на сложность алгоритма.

Помимо этого интересует задача препроцессинга. То есть на основе суффиксного массива, построенного при помощи других

алгоритмов, достроить все дополнительные структуры данных, так чтобы можно было продолжить построение суффиксного массива.

Рассмотрим вариант, когда для каждого элемента будем хранить ссылку на следующий элемент, меньше данного. Обозначим массив как $link[]$. Покажем как построить массив $link$ на фазе препроцессинга за линейное время. Очевидная реализация имеет сложность $O(n^2)$.

```

for i ∈ 1 to n do
  while (stack.size > 0) ∧ (stack.peek > lcp[i]) do
    link[stack.top.ind] ← i;
  stack.pop();
  stack.push(val = lca[i], ind = i);

```

В стеке хранится возрастающая последовательность элементов (как дополнительный атрибут – индекс элемента). Произойдет линейный проход (по возрастанию индекса). Для всех значений, хранящихся в стеке (для которых пока не известен ближайший меньший элемент) и больших текущего элемента, мы устанавливаем ссылку на этот элемент и извлекаем эти значения из стека. Текущий элемент заносится в стек. Сложность алгоритма есть $O(n)$, так как каждый элемент максимум один раз заносится и извлекается из стека.

Заметим, что ссылка $link_i$ необходима только для тех суффиксов, у которых bo_i истина.

Имеются трудности с поддержкой $link$ в процессе работы алгоритма. В процессе перемещения суффиксов и изменения значений массива lcp необходимо поддерживать в корректном состоянии значения $link$. Эта проблема решается, но мы не будем углубляться в этом направлении. Предложим более универсальное решение, которое пригодится нам в будущем.

Воспользуемся подзадачей поиска значения $lcp(i, j)$, где i, j – несмежные суффиксы. Как известно из свойств lcp (например, [26]) $lcp(i, j) = \min_{k \in [i..j-1]} lcp_k$. В главе 1.9 показано, как

считать значение $lcp(i, j)$ для любых значений аргументов за $O(\log(n))$ операций при помощи вычисления минимума на отрезке.

Тогда задачу поиска первого значения меньше текущего решим посредством бинарного поиска и поиска минимума на отрезке. Для вычисления $\min\{k | k > i \wedge lcp_k < lcp_i\}$ будем искать минимум на отрезке $[i, x]$ (x – переменная в бинарном поиске, левая граница равна $i + 1$, правая – n) и считать характеристическую функцию $\min_{k \in [i, x]} lcp_k < x$ (которая является монотонной относительно x).

Итого, мы можем искать правую границу для поиска за $O(\log^2(n))$ операций.

Запишем более детализированную версию алгоритма последовательного построения суффиксного массива.

```

1  procedure Preprocessing()
2      Создать  $lcp$ 
3      Создать  $DRMQ$ 
4      Создать  $bo$ 
5  end procedure Preprocessing
6  procedure SequentialSuffixArrayConstructingGenerate(char sym)
7      Для всех суффиксов  $sa_i$ , помеченных  $bo_i$ ,
8          Если  $sym < s[sa_{i+1} + lcp_i]$ , то
9               $bo_i \leftarrow false$ 
10             Иначе Если  $sym = s[sa_{i+1} + lcp_i]$ , то
11                  $lcp_i \leftarrow lcp_i + 1$ 
12             Иначе
13                 Найти правую границу бинарного поиска
14                 Найти место для вставки  $sa_i$  (бинарный поиск)
15                 Переместить  $sa_i$  на новое место
16                 Обновить  $lcp$ 
17                 Обновить  $bo$ 
18             Добавить в суффиксный массив  $sym$ 
19             Обновить  $lcp$ 
20             Обновить  $bo$ 

```

2.1.1. ОЦЕНКА АЛГОРИТМИЧЕСКОЙ СЛОЖНОСТИ И ЗАТРАТ ПАМЯТИ

Оценим алгоритмическую сложность построенного алгоритма.

Сначала оценим сложность процедуры препроцессинга. Необходимо создать все дополнительные структуры данных для работы алгоритма только на основе суффиксного массива sa и самой строки s . Построение массива lcp требует $O(n)$ операций [21], но с учетом структуры хранения нам потребуется $O(n \log(n))$ операций. Структура данных для эффективного поиска минимума значения на отрезке в строке 3 требует $O(n \log(n))$ операций. Массив bo строится по определению за линейное время, но из-за структуры данных на его построение нам потребуется $O(n \log(n))$ операций.

Итоговое время препроцессинга – $O(n \log(n))$ операций.

Перейдем к оценке самого алгоритма.

На строках 7–17 имеется внешний цикл по всем суффиксам для которых верно $lcp_i = |sa_i|$. Количество итераций цикла может составлять $O(n)$ (для lcp -регулярных строк. Для lcp -естественных строк количество ограничено константой). Проверка условий и выполнение действий на строках 8–11 требует $O(\log(n))$ операций. Для варианта с перемещением суффикса (строки 13–17) потребуется $O(\log^2(n))$ операций. Для определения границы (строка 13) требуется $O(\log^2(n))$ операций (бинарный поиск и поиск минимума на отрезке посредством $DRMQ$). Собственно сам бинарный поиск (строка 14) занимает так же $O(\log^2(n))$ операций, так как имеются дополнительные затраты на структуры данных. Операция по перемещению суффикса рассматривается как операция удаления и вставки. По лемме об удалении на поддержку значений lcp нам потребуется $O(\log(n))$ операций. При вставке и поддержке значений lcp и bo потребуется $O(\log(n))$ операций. Итого весь цикл (строки 7–17) занимает $O(n \log^2(n))$ операций для lcp -регулярных языков и $O(\log^2(n))$ для lcp -естественных языков.

Для вставки нового символа sym в суффиксный массив sa

требуется $O(\log^2(n))$ операций (как бинарный поиск по суффиксному массиву). Для конечных и небольших алфавитов можно вставить новый символ за $O(\log(n))$ (храня дополнительную информацию о том, где начинаются суффиксы для каждого символа алфавита), но здесь оптимизация не скажется на общей асимптотике алгоритма. Поддержка дополнительных структур данных *lcp* и *bo* потребует $O(\log(n))$ операций.

В результате мы получили, что сложность алгоритма последовательного построения суффиксного массива составляет $O(n \log^2(n))$ операций для *lcp*-регулярных строк и $O(\log^2(n))$ для *lcp*-естественных строк.

Для хранения всех дополнительных структур данных требуется $O(n)$ памяти [2, 5, 31].

2.1.2. ПРЕИМУЩЕСТВА АЛГОРИТМА И НЕДОСТАТКИ АЛГОРИТМА

Рассмотрим преимущества алгоритма.

Алгоритм работает с потоковыми данными. При поступлении информации о новых символах строки мы достраиваем существующий суффиксный массив, а не строим заново для полученной строки.

Имеется возможность препроцессинга. То есть для существующего суффиксного массива, построенного при помощи любого алгоритма, и строки построить все необходимые дополнительные структуры данных и продолжить построение суффиксного массива.

Также построенный алгоритм можно использовать для создания суффиксного массива «с нуля», добавляя по одному символу к пустому суффиксному массиву.

На каждом шаге поддерживается массив наибольших общих префиксов *lcp*.

Для *lcp*-естественных языков сложность добавления одного символа составляет $O(\log^2(n))$ операций, а для построения суффиксного массива «с нуля» потребуется $O(n \log^2(n))$ (что близко

к асимптотике построения суффиксного массива для полностью заданной строки).

Перейдем к недостаткам алгоритма.

Для *lcp*-регулярных строк добавление одного символа потребует $O(n \log^2(n))$ операций. В лемме о наихудшем случае утверждается о не менее чем $O(n)$ операций.

Как видно из алгоритма, количество суффиксов, помеченных меткой bo_i , не обязательно уменьшается на каждой итерации.

Для создания суффиксного массива алгоритмом последовательного построения для строки $'aa..a'$ потребуется $O(n^2 \log^2(n))$ операций, так как на каждой итерации количество суффиксов sa_i для которых выполнено $lcp_i = |sa_i|$ будет равняться в точности длине текущей строки.

Наихудшим случаем будет также построение суффиксного массива «с нуля» для двойной копии большой строки. В процессе построения для второй копии количество помеченных bo_i суффиксов будет только увеличиваться, что приведет к асимптотике в $O(n^2 \log^2(n))$ операций.

2.2. АЛГОРИТМ БЛОЧНОГО ПОСТРОЕНИЯ СУФФИКСНОГО МАССИВА

К недостаткам алгоритма последовательного построения суффиксного массива относится то, что для *lcp*-регулярных строк на каждой итерации алгоритма может возрастать количество граничных суффиксов. Это приводит к квадратичному времени работы.

Этот недостаток мы устраним в алгоритме блочного построения суффиксного массива. Вместо добавления одного символа будем добавлять строку и покажем, что это можно сделать эффективнее, чем добавление по одному символу.

Будем добавлять не произвольной длины строку, а минимальную строку ns , не входящую в текущий суффиксный массив. То есть подстрока $ns[1..|ns| - 1]$ является подстрокой s . Как выбрать такую строку ns будет показано ниже.

2.2.1. ПОСТРОЕНИЕ АЛГОРИТМА

Рассмотрим, что происходит при добавлении строки ns к существующему суффиксному массиву sa строки s . Ко всем суффиксам приписываем строку ns . Некоторые суффиксы могут изменить свое положение относительно существующих. Необходимо также добавить в суффиксный массив sa все суффиксы строки ns .

- Шаг 1. Ко всем суффиксам приписать строку ns . Поддерживать отсортированный порядок в суффиксном массиве.
- Шаг 2. В суффиксный массив добавить все суффиксы строки ns .

Наша задача состоит в реализации алгоритма со сложностью меньше квадратичной. Очевидная реализация первой части алгоритма (прямое приписывание строки ns , попарное сравнение суффиксов, сравнение двух суффиксов за линейное время, перемещение одного суффикса за линейное время) не удовлетворяет требованиям сложности. Покажем, как можно эффективно реализовать эту часть алгоритма.

По Лемме о граничных суффиксах для работы первой части алгоритма достаточно обрабатывать суффиксы, для которых верно $lcp_i = |sa_i|$.

Покажем, как определить отношение порядка для суффикса, для которого верно $lcp_i = |sa_i|$, со следующим (sa_{i+1}) после приписывания к обоим суффиксам строки ns .

Вместо сравнения за линейное время предложим следующее. Сравнение можно разбить на следующие две части: сравнение между $ns[1..|sa_{i+1}| - |sa_i|]$ и $sa_{i+1}[|sa_i| + 1..]$, а так же $ns[|sa_{i+1}| - |sa_i| + 1..]$ и ns .

Первое сравнение $ns[1..|sa_{i+1}| - |sa_i|]$ и $sa_{i+1}[|sa_i| + 1..]$ (обозначим как $\delta_{i,i+1}$) есть лексикографическое сравнение префикса ns и $\delta_{i,i+1}$. Так как во второй части алгоритма потребуется вставлять все суффиксы строки ns в суффиксный массив (и саму стро-

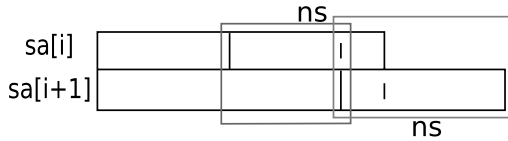


Рис. 6. Сравнение суффиксов разбивается на два сравнения

ку ns тоже), то вставим в суффиксный массив строку ns (так же поддерживаем значение lcp -массива). Тогда указанное сравнение сводится к поиску местоположения суффикса $\delta_{i,i+1}$ и сравнению местоположения ns .

Если $\delta_{i,i+1}$ совпадает с префиксом ns , то необходимо выполнить оставшуюся проверку $ns[|sa_{i+1}| - |sa_i| + 1..]$ и ns , что равносильно задаче о сравнении строки с собственным суффиксом. Такое сравнение потребуется для различных суффиксов строки ns , поэтому построим для строки ns суффиксный массив за линейное время [19]. Тогда задача сводится к сравнению местоположений суффикса строки ns и самой строки ns в суффиксном массиве для строки ns .

То есть мы можем сравнивать два суффикса без полного сравнения строк. Точные оценки алгоритмической сложности приводятся ниже.

Заметим, что аналогичным образом мы можем сравнивать любые суффиксы, а не только соседние. При сравнении $sa_i ++ ns$ и $sa_j ++ ns$ необходимо проверить, что $lcp(i, j) = |sa_i|$, иначе сравнение не имеет смысла, так как отношение порядка заведомо определено и не зависит от ns .

Если $sa_i ++ ns > sa_{i+1} ++ ns$, то необходимо переместить суффикс $sa_i ++ ns$ на новое место. Для определения нового местоположения суффикса $sa_i ++ ns$ воспользуемся бинарным поиском, так как мы можем эффективно сравнивать $sa_i ++ ns$ с $sa_j ++ ns$.

2.2.2. ВТОРАЯ ЧАСТЬ АЛГОРИТМА

Перейдем ко второй части алгоритма – вставке в суффиксный массив всех суффиксов добавляемой строки ns . Очевидная реализация (для каждого суффикса строки ns найти местоположение в текущий суффиксный массив за $O(k + \log(n))$ [26]) данной части алгоритма приводит к квадратичной сложности.

Строка ns уже была добавлена в суффиксный массив на предыдущем шаге. Осталось добавить все собственные суффиксы строки ns . Напомним, что мы выбрали ns так, чтобы строка была минимальной еще не входящей в суффиксный массив sa . Это означает, что строка $ns[1..|ns| - 1]$ присутствует в суффиксном массиве. Это означает, что для всех суффиксов строки ns после вставки в суффиксный массив будет выполнено $lcp(ns_{suffix}) = |ns_{suffix}| \vee lcp(ns_{suffix}) = |ns_{suffix}| - 1$ (так как, за исключением последнего символа, подсуффикс уже содержится в суффиксном массиве).

a		2	ananañaz
ana	az	4	anañaz
anana		6	añaz
banana		1	bananañaz
na	naz	3	nanañaz
nana		5	nañaz

$$ns = 'naz' \quad inv = \{4, 1, 5, 2, 6, 3\}$$

Рис. 7. К суффиксному массиву для слова 'banana' добавляем строку 'naz'

Найдем наименьшее положение суффикса, префикс которого совпадает с $ns[2..|ns| - 1]$. Обозначим местоположение такого суффикса как $pos_{ns,2}$. Для вставки $ns[2..]$ воспользуемся идеей из алгоритма последовательного построения суффиксного массива. Применим бинарный поиск по последнему символу $ns[|ns|]$

a	aa	6 aṅaa
ana		4 anaṅaa
anana		2 ananaṅaa
banana		1 bananaṅaa
na	naa	5 naṅaa
nana		3 nanaṅaa

ns = 'naa' inv = {4,3,6,2,5,1}

Рис. 8. К суффиксному массиву для слова 'banana' добавляем строку 'naa'

на интервале от $pos_{ns,2} - 1$ до $min k | k > pos_{ns,2} \wedge lcp_k < |ns| - 1$. Для перехода к $ns[3..]$ можно не искать местоположение как на предыдущей итерации. Достаточно перейти к суффиксу, чья длина на 1 меньше суффикса $sa_{pos_{ns,2}}$, и произвести аналогичные операции.

Для перехода к суффиксам нужной длины будем поддерживать массив (обозначим как inv_{sa}), являющийся обратной перестановкой к суффиксному массиву sa (при любой операции вставки, удаления из sa производим аналогичную над inv_{sa}). Элемент обратной перестановки $inv_{sa}[i]$ будет показывать положение в суффиксном массиве суффикса с длиной $|s| - i + 1$.

Теперь осталось только добавить в суффиксный массив еще один суффикс, а именно, $ns[|ns|]$.

2.2.3. ПОДРОБНАЯ ВЕРСИЯ АЛГОРИТМА

Запишем алгоритм более подробно.

```
a          sa = {6,4,2,1,5,3}
ana        inv = {4,3,6,2,5,1}
anana
banana    inv[1] = 4
na        pos('banana') = 4
nana      inv[3] = 6
          pos('nana') = 6

          pos(|s| - i + 1) = inv[i]
```

Рис. 9. Определение положения суффикса по его длине

```
1  procedure Preprocessing
2      Создание lcp.
3      Создание bo.
4      Создание RMQ.
5      Создание  $inv_{sa}$ .
end procedure
procedure AddString(string ns)
6      Построение суффиксного массива для  $ns$  ( $sa_{ns}$ )
7      Вставка в суффиксный массив  $sa$  строку  $ns$ .
8      Обновление lcp.
9      Для всех суффиксов  $sa_i$ , помеченных  $bo_i$ 
10         Сравнение  $sa_i ++ns$  и  $sa_{i+1} ++ns$ .
11         Если  $sa_i ++ns > sa_{i+1} ++ns$ , то
12             перемещение  $sa_i ++ns$ ,
13             обновление значения lcp, bo
14         иначе
15             обновление значений lcp, bo.
16
17     Поиск местоположения суффикса, префикс
           которого совпадает с  $ns[2..|ns| - 1]$ 
18     For  $i$  in  $|ns| - 1$  downTo 2 do
19         Вставка суффикса  $ns[|ns| - i + 1..]$ 
20         Обновление lcp
21         Обновление bo
```

- 22 Вставка $ns[[ns]]$
 - 23 Обновление lcp
 - 24 Обновление bo
- end procedure**

Следствие 1. В процессе сравнения $sa_i ++ns$ с $sa_j ++ns$ можно вычислить $lcp(sa_i ++ns, sa_j ++ns)$ за $O(\log(n))$ операций.

Доказательство. Сравнение $sa_i ++ns$ и $sa_j ++ns$, как было показано выше, разбивается на два подсравнения. Первое подсравнение состоит в сравнении ns и некоторого суффикса. Так как мы уже добавили ns в суффиксный массив, то определяем значение lcp стандартным способом за $O(\log(n))$ операций. Если потребуется второе подсравнение (некоторый суффикс ns и строка ns), то это производится запрос к суффиксному массиву для строки ns за $O(\log(k))$ операций.

Так как $k \leq n$, то общее время вычисления $lcp(sa_i ++ns, sa_j ++ns)$ составляет $O(\log(n))$.

2.2.4. ОЦЕНКА АЛГОРИТМИЧЕСКОЙ СЛОЖНОСТИ АЛГОРИТМА И ЗАТРАТЫ ПАМЯТИ

Строка 6 (Построение суффиксного массива для строки ns) – потребуется $O(k)$ операций [19].

На строке 7 (Вставка в суффиксный массив sa строку ns) требуется $O(k + \log(n))$ на вставку [26]. Строка 8 затратит $O(n)$ операций (линейный подсчет lcp для вставленного и предыдущего элемента. Можно быстрее, но ускорение на данном шаге не улучшит общую асимптотику алгоритма).

Сравнение и вычисление lcp (10–11 строки) разбивается на два подсравнения. Оба сравнения вычисление lcp происходит за $O(\log(n))$ (сравнение индексов в соответствующих суффиксных массивах, вычисление lcp как запрос к структуре RMQ) [26, 31].

В случае перемещения sa_i суффикса (строки 12–13) для поиска нового положения воспользуемся бинарным поиском. Тогда поиск нового положения суффикса займет $O(\log^2(n))$ (бинарный поиск и вычисление lcp).

Обновление значений lcp на строках 13, 15 занимает $O(\log(n))$.

Так как число суффиксов, помеченных bo , может достигать $O(n)$, то блок 9–15 строки выполняется за $O(n \log^2(n))$.

Вставка всех суффиксов строки ns занимает $O(k \log^2(n))$. Так как поиск первоначального места (строка 17) требует $O(k + \log(n))$ ([26]), тело цикла (строки 19–21) выполняется за $O(\log^2(n))$, а количество итераций цикла составляет $O(k)$. Вставка последнего символа строки ns занимает $O(\log(n))$ операций.

Сложность всего алгоритма составляет $O(n \log^2(n))$.

В процессе работы алгоритма используются только структуры данных с объемом памяти $O(n)$ (lcp , bo , inv_{sa} , RMQ , суффиксный массив, [5, 26, 31]).

2.2.5. ПРЕПРОЦЕССИНГ

Алгоритм можно использовать для модификации суффиксных массивов, уже построенных другими алгоритмами. Для этого на шаге препроцессинга (строки 1–5) достаточно создать все необходимые дополнительные структуры данных.

Оценим алгоритмическую сложность шага препроцессинга.

Массив lcp строится за $O(n)$ [21].

Массив bo так же строится за $O(n)$, линейный проход по всем суффиксам $bo_i = (lcp_i == \text{length}(sa_i))$. Заметим, что число помеченных суффиксов может составлять $O(n)$.

Структура RMQ нам требуется при основной работе алгоритма. Построение занимает $O(n \log(n))$ операций [31]. При каждом изменении суффиксного массива sa (вставка или удаление элемента) или массива lcp (изменение значения) необходимо модифицировать структуру RMQ . Это требует $O(\log(n))$ операций [31].

Обратная перестановка для суффиксного массива inv_{sa} строится за линейное время. При каждом изменении суффиксного массива (вставка или удаление элемента) производим аналогичное действие над inv_{sa} .

Общая асимптотика препроцессинга составляет $O(n \log(n))$ операций.

2.2.6. ВЫБОР БЛОКА

Покажем, как выбрать минимальную подстроку, не входящую в текущий суффиксный массив.

Так как мы работаем с потоковыми данными, то считаем, что в качестве входа имеется новый блок данных D . Бинарным поиском по длине определяем минимальную строку (префикс D), не входящую в качестве подстроки в s . В процессе поиска возможны два варианта.

Мы нашли требуемую строку ns . Тогда применяем алгоритм блочного построения суффиксного массива и удаляем префикс в блоке данных D размером $|ns|$.

Весь блок D является подстрокой s . Тогда возможны следующие варианты.

- Продолжим ожидание данных.
- Продолжим построение суффиксного массива при помощи алгоритма последовательного построения.
- Принудительно к блоку D припишем стоп-символ $\$$ вне алфавита. Тогда $D ++\$$ будем искомой строкой. Все поисковые запросы к суффиксному массиву будут работать корректно. Для продолжения построения суффиксного массива при получении нового блока данных необходимо удалить стоп-символ из суффиксного массива. Алгоритм удаления строится в следующей главе.

2.2.7. ПРЕИМУЩЕСТВА И НЕДОСТАТКИ АЛГОРИТМА

Рассмотрим преимущества алгоритма.

Для работы алгоритма не обязательно иметь исходную строку целиком. Это позволяет использовать предложенный алгоритм в задачах с потоковыми данными.

В отличие от алгоритма последовательного построения суффиксного массива, мы добавляем к суффиксному массиву не один символ, а строку. Это позволяет уменьшить асимптотику от квадратичной до $O(n \log^2(n))$ для наихудшего случая (по следствию леммы об удалении граничных суффиксов, если на некоторой итерации алгоритма суффикс будет помечен меткой bo , то на следующей итерации метка обязательно будет снята).

Для суффиксного массива (созданный любым другим алгоритмом) можно за время $O(n \log(n))$ построить дополнительные структуры данных lcp , $bool$, RMQ [21, 31] и продолжить его построение предложенным методом.

На каждой итерации алгоритма поддерживается массив lcp . Это можно использовать, например, для поиска наибольшей подстроки. Достаточно хранить значения массива lcp в структуре данных для поддержки максимального значения (например, двоичная куча, сбалансированное дерево [5]).

Перейдем к недостаткам алгоритма.

Вследствие того, что ns является минимальной строкой, не входящей в текущий суффиксный массив, может показаться что в результате работы одной итерации алгоритма все метки bo у существующих суффиксов снимаются.

При обработке суффиксов сравнение разбивается на два подсравнения с возможным вырожденным вторым подсравнением. Если второе подсравнение вырождено, то гарантируется, что метка bo будет снята для этого суффикса ввиду выбора строки ns . Иначе, если для определения отношения лексикографического порядка строк $sa_i ++ns$ и $sa_{i+1} ++ns$ потребовалось второе подсравнение, то метка bo_i останется, если суффикс ns является префиксом ns .

Для слова $'banana'$ добавление слова $'nanan'$ не удаляет ни одного граничного суффикса. И так далее, добавление строк $'ana..ana'$ ($(an) * a$) и $'nana..an'$ ($(na) * n$) не удалит ни одного граничного суффикса.

Это не приводит к квадратичному времени работы (для этого примера), так как длина добавляемой строки с каждым шагом

удваивается. Для того чтобы алгоритм имел квадратичную сложность, необходимо, чтобы количество граничных суффиксов на каждой итерации алгоритма было $O(n)$ и добавление на каждой итерации строки ns ограниченной длины сохраняло бы количество граничных суффиксов на уровне $O(n)$. Конструктивных примеров пока не известно.

Для добавления одного символа может потребоваться $O(n \log^2(n))$ операций (в случае, если число суффиксов, помеченных bo составляет $O(n)$). То есть использование линейного алгоритма построения суффиксного массива (например, [19]) заново для всей строки асимптотически окажется лучше, чем модификация существующего суффиксного массива алгоритмом блочного построения суффиксного массива.

Лемма о наихудшем случае работает и здесь.

2.3. УДАЛЕНИЕ ПОДСТРОКИ

Рассмотрим следующую задачу. Из суффиксного массива sa для строки s необходимо удалить подстроку sd и получить модифицированный суффиксный массив для измененной строки. Положение удаляемой подстроки sd ничем не ограничено (в начале, в середине, в конце). Без ограничений общности будем считать, что удаляемая подстрока sd находится внутри строки s . Позиция подстроки sd задается началом sd_{begin} и концом sd_{end} .

Лемма 4 О наихудшем случае при удалении. При удалении одного символа из строки на модификацию суффиксного массива может потребоваться не менее $O(n)$ операций.

Доказательство. Пример, для которого потребуется не менее $O(n)$ операций на изменение суффиксного массива при удалении одного символа из строки, противоположен примеру из Леммы о наихудшем случае.

Удаление из строки $aaa...aab$ последнего символа $'b'$ приведет к «развороту» суффиксного массива, что потребует не менее $O(n)$ операций.

Высокоуровневый алгоритм удаления подстроки из суффиксного массива состоит из двух частей:

Удалить все суффиксы, начинающиеся с
позиции из $\text{\in [sd_begin, sd_end]}$.

Переместить суффиксы, на которые повлияет
удаление sd .

Считаем, что у нас есть все дополнительные структуры данных, используемые в алгоритма блочного построения суффиксного массива (а именно, lcp, bo, inv_{sa}, RMQ).

Тогда для реализации первой части алгоритма достаточно пробежаться по суффиксам нужной длины $inv_{sa}[i] | i \in [sd_{begin}, sd_{end}]$ и удалить их. По Лемме об удалении, при удалении sa_i суффикса изменяем $lcp_{i-1} \leftarrow \min(lcp_{i-1}, lcp_i)$ [26].

Перейдем ко второй части алгоритма.

Заметим, что суффиксы, находящиеся справа от удаляемой подстроки sd , не изменят своего положения. То есть рассматривать стоит только суффиксы, для которых $sa_i < sd_{begin}$.

При удалении подстроки, суффиксы могут переместиться «вверх», в отличие от алгоритма блочного построения суффиксного массива (где суффиксы перемещаются только «вниз»).

Суффикс sa_i в результате удаления подстроки sd может переместиться вниз только при условии, что $sa_i + lcp_i > sd_{begin} \wedge sa_i < sd_{begin}$. Условие с lcp показывает, что позиция, в которой sa_i отличается от sa_{i+1} , находится правее начала удаляемой подстроки, что может изменить положение sa_i суффикса. Аналогично, необходимо выполнение условия $sa_i + lcp_{i-1} > sd_{begin} \wedge sa_i < sd_{begin}$ для того чтобы суффикс sa_i переместился вверх в результате удаления подстроки sd .

То есть нам необходимо обработать все суффиксы, для которых $sa_i < sd_{begin} \wedge (sa_i + lcp_i > sd_{begin} \vee sa_i + lcp_{i-1} > sd_{begin})$.

Покажем, как обработать такой суффикс.

После удалении подстроки sd из sa_i суффикса произведем сравнение sa_i^{-sd} с соседними суффиксами sa_{i+1} и sa_{i-1} . Это надо сделать эффективно, так как очевидное сравнение за линейный проход в итоге приведет к квадратичному времени.

Сначала рассмотрим сравнение sa_i^{-sd} и sa_{i+1} суффиксов. При удалении строки sd из sa_i суффикса происходит сдвиг $s[sd_{end} + 1..]$ на $|sd|$ влево.

Возможны три варианта:

- В sa_{i+1} суффиксе подстрока sd еще не удалена или отсутствует (т. е. $sa_{i+1} > sd_{end}$). Тогда необходимо $s[sd_{end} + 1..]$ сравнить с соответствующим sa_{i+1} подсуффиксом, а именно, с $sa_{i+1}[sa_i - 1 + sd_{begin}]$.
- В sa_{i+1} суффиксе подстрока sd уже удалена, и в sa_{i+1} строка sd находилась правее, чем в sa_i (т. е. $sa_i < sa_{i+1}$). Тогда сравнение разбивается на два. Рассмотрим этот вариант ниже.
- В sa_{i+1} суффиксе подстрока sd уже удалена, и в sa_{i+1} строка sd находилась левее, чем в sa_i (т. е. $sa_i > sa_{i+1} + 1$). Тогда необходимо сравнить $s[sd_{end} + 1..]$ с соответствующим sa_{i+1} подсуффиксом с учетом того, что в sa_{i+1} подстрока sd уже удалена, а именно, $sa_{i+1}[sa_i - 1 + sd_{end}]$.

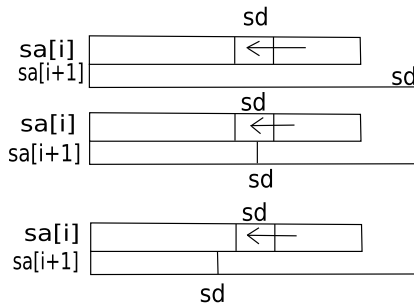


Рис. 10. Разбор случаев при сравнении sa_i^{sd} с sa_{i+1} суффиксом

Первый и третий вариант похожи: необходимо сравнить остаток $s[sd_{end} + 1..]$ с соответствующим подсуффиксом sa_{i+1} (в последнем варианте – учитывая, что из sa_{i+1} подстрока sd уже удалена).

Второй вариант осложнен тем, что сравнение разбивается на два подсравнения. Сначала надо сравнить $s[sd_{end}+1..sa_i - sa_{i+1} + sa_{end} + 1]$ с $s[sd_{begin} - 1 - sa_i + sa_{i+1}..sd_{begin} - 1]$. Затем, в случае равенства, перейти ко второму сравнению, $s[sa_i - sa_{i+1} + sa_{end} + 2..]$ с $s[sd_{end} + 1..]$.

При сравнении sa_i^{-sd} и sa_{i+1} суффиксов вычислим значение lcp_i . Значение lcp_i определяется в процессе сравнения строк (это осуществимо, так как все сравнения производятся над текущими суффиксами).

Получив значение lcp_i , и в случае, если $sa_i^{-sd} > sa_{i+1}$, необходимо переместить sa_i^{-sd} суффикс. Как и в алгоритме блочного построения суффиксного массива, зная lcp_i , находим новое местоположение для суффикса, воспользуемся бинарным поиском.

Если в результате сравнения имеет место $sa_i^{-sd} < sa_{i+1}$, то производим сравнение sa_i^{-sd} с sa_{i-1} суффиксом. Рассуждения аналогичны для сравнения sa_i^{-sd} с sa_{i+1} суффиксом.

Запишем алгоритм удаления подстроки из суффиксного массива и оценим его алгоритмическую сложность.

```

1  procedure Remove(string sd)
2  Для всех суффиксов из  $i \in sd_{begin}..sd_{end}$ 
3      Удалить  $sa_i$  суффикс
4      Обновить  $lcp$ 
5
6  Для всех суффиксов  $i$ , для которых верно
7   $sa_i < sd_{begin} \wedge (sa_i + lcp_i > sd_{begin} \vee sa_i + lcp_{i-1} > sd_{begin})$ 
8       $compare_{i,i+1} \leftarrow$  Сравнить  $sa_i^{-sd}$  и  $sa_{i+1}$ 
9      Вычислить  $lcp_i$ 
10     Если  $compare_{i,i+1}$ 
11         Переместить  $sa_i^{-sd}$ 
12         Обновить  $lcp$ 
13     Иначе
14          $compare_{i,i-1} \leftarrow$  Сравнить  $sa_i^{-sd}$  и  $sa_{i-1}$ 
15         Вычислить  $lcp_{i-1}$ 
16         Если  $compare_{i,i-1}$ 
17             Переместить  $sa_i^{-sd}$ 
160

```

18 Обновить lcp 19 **end procedure**

Перейдем к сложностной оценке алгоритма. Обозначим длину $|sd|$ как k .

На фазу удаления суффиксов (строки 2–4) потребуется $O(k \log(n))$ операций, так как необходимо удалить k суффиксов. На обработку одного суффикса требуется $O(\log(n))$ операций: удаление из структуры данных занимает $O(\log(n))$, обновление lcp так же требует $O(\log(n))$ операций (по лемме об удалении).

Количество итераций для цикла ограничено сверху максимальным значением lcp . Для lcp -регулярных строк это значение есть $O(n)$, для lcp -естественных – ограничено константой.

Операция сравнения двух суффиксов требует $O(\log(n))$ операций (при сравнении производится вычисление значения lcp и поиск положения суффикса по его длине).

Для поиска нового местоположения суффикса при перемещении воспользуемся бинарным поиском. Для этого потребуется $O(\log^2(n))$ операций, так как на сравнение требуется $O(\log(n))$ операций.

Итоговая сложность алгоритма составляет $O(n \log^2(n))$ операция для lcp -регулярных строк и $O(\log^2(n))$ операций для lcp -естественных строк.

2.3.1. ПРЕПРОЦЕССИНГ

Для работы алгоритмы достаточно иметь все структуры данных при препроцессинге в алгоритме блочного построения суффиксного массива. Сложность препроцессинга составляет $O(n \log(n))$ операций.

2.3.2. ОЦЕНКА ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ПАМЯТИ

Для работы алгоритма требуется $O(n)$ памяти, так как в процессе работы используются только структуры данных из алгоритма блочного построения суффиксного массива. Такая проверка и

обновление информации потребует $O(\log(n))$ операций, что никак не влияет на общую асимптотику алгоритма.

2.3.3. ПОДДЕРЖКА ИНФОРМАЦИИ О ГРАНИЧНЫХ СУФФИКСАХ

В процессе работы алгоритма удаления блока из суффиксного массива мы не используем информацию о граничных суффиксах (суффиксы, для которых верно $lcp_i = |sa_i|$). Такая информация необходима для алгоритма блочного построения суффиксного массива.

Будем поддерживать информацию о граничных суффиксах в процессе работы алгоритма. Для этого достаточно проверять условие граничности суффикса при сравнении и перемещении суффиксов.

2.3.4. НАИХУДШИЙ СЛУЧАЙ

Как доказано в Лемме (о наихудшем случае при удалении), удаление одного символа может потребовать не менее $O(n)$ операций. Для указанного в Лемме примере (из строки $'aaa..aab'$ удаляется последний символ $'b'$) для алгоритма удаления блока из суффиксного массива потребуется $O(n \log^2(n))$ операций (так как строка $'aaa..aab'$ является lcp -регулярной).

3. Приложения построенных алгоритмов

В этом разделе мы будем рассматривать приложения алгоритмов последовательного и блочного построения суффиксного массива и блочного удаления. Здесь мы не будем обсуждать преимущества и недостатки построенных алгоритмов, так как это рассматривалось в конце каждой главы для соответствующего алгоритма.

Алгоритм последовательного построения суффиксного массива является частным случаем блочного построения как по постановке задачи, так и частично по методу решения. Так

же алгоритм блочного построения является более эффективным чем алгоритм последовательного построения (наихудший случай $O(n \log^2(n))$ против $O(n^2 \log^2(n))$) для построения с нуля для *lscr*-регулярных строк).

Поэтому в основном будет рассматриваться связка алгоритмов блочного построения и блочного удаления.

Алгоритм последовательного построения суффиксного массива можно использовать на практике для

- более простой технической реализации;
- для узконаправленной задачи (посимвольное добавление);
- для более экономичного использования памяти.

В остальных случаях рекомендуется использовать алгоритм блочного построения суффиксного массива.

Существующие алгоритмы построения суффиксных массивов ([19, 22, 26] требуют наличие всей строки. Предложенные алгоритмы позволяют динамически строить и изменять суффиксный массив.

3.1. ПРИЛОЖЕНИЕ ДЛЯ БАЗ ДАННЫХ И ФАЙЛОВЫХ СИСТЕМ

Покажем, как можно использовать предложенные алгоритмы при реализации дополнительных индексных структур в базах данных и файловой системе. В этих предметных областях имеется довольно большое число строковых объектов (поле записи в базе данных, имя файла в файловой системе), для которых необходима эффективная реализация функции поиска.

Для большинства файловых систем поиск файла по имени происходит рекурсивным перебором всех файлов в дереве из директорий и проверкой того, что имя файла удовлетворяет шаблону.

В базах данных при выборке записей по некоторому шаблону происходит проверка всех записей на удовлетворение поля шаблону.

Если хранить все объекты в одной общей строке и поддерживать суффиксный массив при изменении строки, то запрос на поиск подстроки можно выполнять за $O(m + \log(n))$ операций [3].

В общем виде, простая конкатенация всех объектов в одну общую строку приводит к *lcp*-регулярным строкам (ничто не запрещает поместить в базу данных миллион слов '*banana*' или создавать только файлы '*readme.txt*'), так как размер имени файла обычно ограничен некоторой небольшой константой (порядка 300) и в базе данных есть естественные ограничения на размер записи. Хотя физических ограничений нет, данные больших объемов, подверженные изменениям, часто можно разбить на более мелкие части. Например, большие романы (такие как «Война и мир» Л. Н. Толстого) состоят из нескольких томов, каждый том состоит из нескольких частей, глав. Не имеется практического смысла искать подстроку, являющуюся суффиксом третьего тома и содержащую префикс четвертого тома.

Преобразуем *lcp*-регулярную строку в *lcp*-естественную (с условием, что размер объекта небольшой). В общую строку будем приписывать не просто объекты (имя файла или поле записи), а объекты, разделенные уникальными метаданными и стоп-символами. То есть общая строка будет выглядеть как

$$data_1\$metaData_1\$data_2\$metaData_2\$data_3\$metaData_3\$$$

В качестве метаданных для баз данных предлагается использовать уникальный идентификатор записи (уникальный ключ), а для файловой системы – уникальные данные для файла (ссылка на хранение дополнительной метаинформации файла, адрес смещения относительно начала диска). Так как уникальная метаинформация, разделенная стоп-символами \$, нигде более в строке не встречается, то максимальное значение *lcp* для такой строки ограничено максимальным размером $data_i$, что ограничено константой. Таким образом, мы свели задачу к *lcp*-естественным строкам.

Добавление нового объекта происходит в конец строки при помощи алгоритма блочного построения суффиксного массива.

Удаление объекта производится алгоритмом блочного удаления из суффиксного массива. Изменение объекта производится как операция удаления объекта и добавления изменений в конец строки. Все эти операции производятся за $O(k \log^2(n))$ операций.

Предлагаемое решение для индексации имен файлов в файловой системе имеет некоторые пока не решенные задачи. Например, задача о сужении поиска (когда производится поиск файла по имени в заданной поддиректории). Необходимо из всего индекса имен файлов (суффиксного массива) в процессе поиска выделить только имена файлов, принадлежащие конкретной директории.

3.2. ПОИСК НАИБОЛЬШЕЙ ОБЩЕЙ ПОДСТРОКИ

Задача поиска наибольшей общей подстроки в тексте на практике используется в системах класса *CPD* (*copy paste detector*) или *DCD* (*Duplicate Code Detection*) (примеры систем *PMD*, *Simian*). При реализации больших проектов программист может не воспользоваться повторно-используемым кодом, а продублировать логику программы в другом месте (просто скопировав часть программы). Такое приложение теряет гибкость, так как при изменении необходимо поддерживать код в более чем одном месте. Системы *CPD* позволяют искать скопированные участки программного кода.

Постановка задачи: дана строка. Найти два суффикса, общий префикс которых максимален.

Самое очевидное решение имеет сложность $O(n^5)$ (за квадрат перебираем первый суффикс, еще за квадрат – второй суффикс, и еще линия на поиск общего префикса).

Следующее по очевидности решение имеет сложность $O(n^3)$ (перебираем начало первого суффикса за линейное время, затем перебираем начало второго суффикса, линейный проход на поиск общего префикса).

В качестве несложной реализации предлагается использовать бинарный поиск по длине результата, вычисление хеш-функций для всех подстрок заданной длины (при помощи алгоритма Рабина-Карпа), при одинаковых значениях хеш-функции производится посимвольное сравнение строк. Такое решение тре-

бует $O(n \log(n))$ операций: ($O(\log(n))$) требуется на бинарный поиск, $O(n)$ – на алгоритма Рабина-Карпа, для хранения значений хеш-функции от подстрок будем использовать хеш-таблицу с доступом в $O(1)$).

Теперь перейдем к решениям задачи о наибольшей подстроки в терминах суффиксных структур данных.

В результате построения суффиксного дерева для строки задача поиска наибольшей общей подстроки сводится к поиску самого глубокого узла (вершина, в которой происходит «раздвоение») в суффиксном дереве. То есть поиск двух листов, высота lca которых будет максимальна. Для этого требуется $O(n)$ операций: ($O(n)$ операций на построение суффиксного дерева, $O(n)$ операций на проход по суффиксному дереву).

После построения суффиксного массива для строки задача поиска наибольшей общей подстроки сводится к поиску максимального значения в массиве lcp . Здесь требуется тоже $O(n)$ операций: ($O(n)$ – на построение суффиксного массива, $O(n)$ – на построение lcp по суффиксному массиву, $O(n)$ – на поиск максимума в lcp).

Все эти предложенные решения статичны, т. е. требуют наличия всей строки. Используя алгоритмы блочного построения суффиксного массива и удаления блока из суффиксного массива мы сможем решать задачу поиска наибольшей общей строки динамически, т. е. имеется возможность изменять строку и в любой момент произвести запрос на поиск наибольшей подстроки.

Для этого достаточно хранить все значения lcp в структуре данных для поиска максимума (например, двоичная куча, или бинарное сбалансированное дерево) и производить изменения с этой структурой синхронно с изменениями в массиве lcp . При изменении массива lcp изменение в структуре данных для поддержки максимума производится за $O(\log(n))$ операций (для двоичной кучи и сбалансированного дерева [5]), что не сказывается на общей асимптотике алгоритмов блочного построения и удаления из суффиксного массива.

В любой момент можно запросить максимальное значение

lcr (для двоичной кучи поиск максимума есть $O(1)$, для сбалансированного дерева – $O(\log(n))$).

3.3. ПОИСК НАИБОЛЬШЕЙ ОБЩЕЙ ПОДСТРОКИ ДЛЯ ДВУХ СТРОК

Модифицируем задачу о поиске наибольшей подстроки. Дано две строки s_1 и s_2 . Необходимо выделить в каждой строке по суффиксу так, чтобы их общий префикс был максимален.

Здесь применимы два очевидных решения: за $O(n^5)$ и $O(n^3)$, как и в задаче о наибольшей общей подстроки.

При помощи динамического программирования эту задачу можно решить за $O(n^2)$. В двумерной таблице элемент $a_{i,j}$ равен длине наибольшей подстроки, заканчивающейся в $s_1[i]$, $s_2[j]$ символах соответственно.

Имеется переход:

$$a_{i,j} = \begin{cases} a_{i-1,j-1} + 1, & \text{если } s_1[i] = s_2[j], \\ 0, & \text{если } s_1[i] \neq s_2[j]. \end{cases}$$

Максимальное значение в матрице определяет наибольшую общую подстроку для двух строк. К недостаткам этого алгоритма относится квадратичное требование по памяти. Все рассмотренные до этого решения имели линейные затраты по памяти.

Решение динамическим программированием применимо и к первоначальной задаче о поиска наибольшей общей подстроки для одной строки. Необходимо запретить использовать суффиксы, которые начинаются в одной позиции. Тогда переход записывается следующим образом:

$$a_{i,j} = \begin{cases} 0, & \text{если } i = j, \\ a_{i-1,j-1} + 1, & \text{если } s_1[i] = s_2[j], \\ 0, & \text{если } s_1[i] \neq s_2[j]. \end{cases}$$

Для этой задачи применимо решение посредством бинарного поиска по длине результирующей строки и вычисления хеш-функции для подстрок этой длины. Необходимо объединить обе строки s_1 и s_2 в общую, разделив их стоп-символом $\$$. Оценка сложности алгоритма остается неизменной – $O(n \log(n))$.

Формулируя задачу для суффиксных массивов, необходимо для строки $str = s_1\$s_2$ построить суффиксный массив и найти суффикс sa_i такой, что он принадлежит одной строке, sa_{i+1} принадлежит, соответственно, другой строке, а lcp_i – максимален. Для такого решения требуется $O(n)$ операций ($O(n)$ на построение суффиксного массива для строки str , $O(n)$ на построение lcp , $O(n)$ на поиск максимума).

Построив суффиксные деревья для строк s_1 и s_2 за $O(n)$, объединим их в одну структуру. Тогда, используя динамическое программирование, поднимаясь с листьев, будем проставлять в вершинах индекс строки (т.е. информацию о том, к какой строке s_1 или s_2 принадлежит данный суффикс). Тогда для решения задачи о поиске наибольшей общей подстроки необходимо найти вершину с наибольшей высотой, для которой в построенном множестве есть два числа $\{1, 2\}$, что можно сделать за $O(n)$ операций. Для построения таких множеств во всех вершинах методом динамического программирования потребуется $O(n)$ операций. Итоговая сложность алгоритма составляет $O(n)$ операций.

Используя алгоритм блочного построения суффиксного массива и алгоритм удаления подстроки, задачу о поиске наибольшей общей подстроки для k строк мы сможем решать динамически. Для этого необходимо, как и для предыдущей задачи, строить суффиксный массив для строки $s_1\$s_2$ и поддерживать значения lcp в структуре данных для быстрого поиска максимума только для тех суффиксов sa_i , для которых sa_{i+1} принадлежит противоположной строке (при перемещениях суффиксов такая проверка осуществляется за $O(\log(n))$ операций, что никак не сказывается на общей асимптотике алгоритмов работы с суффиксным массивом).

В любой момент можно произвести запрос на получение наи-

большей общей подстроки для двух строк и за $O(1)$ получить ответ.

3.4. ПОИСК НАИБОЛЬШЕЙ ОБЩЕЙ ПОДСТРОКИ ДЛЯ k СТРОК

Обобщим задачу на k строк⁷. Пусть даны строки $s_1, s_2 \dots s_k$. Необходимо в каждой строке выбрать по одному суффиксу так, чтобы общий префикс всех этих суффиксов был максимален.

Отметим, что «жадное» решение здесь неприменимо. Решение с поиском наибольшей общей подстроки для $r = \text{substring}_{max}(s_1, s_2)$, а затем решение задачи для строк r, s_3, s_4, \dots, s_k является неверным. Контрпример прост: 'abcbb', 'abcabb', 'bb'.

Тривиальные полиномиальные решения имеют сложность $O(n^{2k+1})$ или $O(n^{k+1})$. Практической ценности, как и для частных случаев ($k = 2$), они не имеют.

Решение динамическим программированием также не имеет практической ценности, так как потребуется k -мерная матрица.

Решение с помощью алгоритма Рабина-Карпа применимо и для k строк. Сложность алгоритма осталась без изменений $O(n \log(n))$.

Решение с использованием суффиксных деревьев имеет линейные затраты по времени. Строим суффиксное дерево для каждой строки s_i за $O(n)$. Объединяем все суффиксные деревья в одну структуру за $O(n)$. При помощи динамического программирования проставляем для всех вершин метку о том, что данная вершина содержит суффикс из s_j строки. Вершина с наибольшей высотой, в которой проставлены все метки $\{1, 2, \dots, k\}$ и будет решением (точнее, строка от корня до этой вершины, наибольший общий префикс для всех строк).

3.5. ДИНАМИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СУФФИКСНЫХ МАССИВОВ

Построим суффиксный массив для общей строки $s_1s_2s_3 \dots s_{k-1}s_k$ и создадим lcp для суффиксного массива

⁷ «Две строки хорошо, а четыре лучше» [3].

ва. В данном случае все разделители $\$i$ должны быть различны и не принадлежать алфавиту Σ .

Для решения задачи о поиске наибольшей общей подстроки для k строк необходимо найти интервал в массиве lcp , такой что на нем присутствуют суффиксы всех строк и значение минимума на этом интервале максимально.

Покажем, как искать это значение динамически при изменении любой строки.

Для каждой строки s_i будем хранить в отсортированной структуре pos_i (основанной, например, на бинарном сбалансированном дереве) позиции вхождения суффиксов s_i строки в общую строку s . При перемещении любого суффикса в строке s производим аналогичную операцию для соответствующей структуры pos_i за $O(\log(n))$ операций.

Утверждение 1. *Значение минимума на интервале меньше либо равно значению минимума на надынтервале.*

Поэтому мы не будем рассматривать интервалы, у которых на границах имеются суффиксы из одной строки s_i (например, интервалы $[2, 2, 3, 1]$, $[1, 2, 3, 3]$ нас не интересуют).

В процессе работы алгоритмов блочного построения суффиксного массива и удаления блока из суффиксного массива производятся следующие изменения над массивом lcp : изменение значения элемента, удаление элемента, вставка элемента.

При каждом изменении lcp будем искать интервалы (содержащие суффиксы всех строк s_i), значение которых может измениться.

Пусть производится изменение над элементом lcp_i .

Для каждой строки s_l ($l \in [1..k]$) найдем максимальное значение в массиве pos_l такое, что $pos_l[left_{idx}] \leq i$. Это значение будет левой границей интервала, начало которого принадлежит строке s_l . Для нахождения правой границы интервала для каждой строки s_p $p \in [1..k]$ найдем в массиве pos_p минимальное значение, которое больше или равно $left$. Среди этих значений выберем максимальное. Это и будет правой границей интервала. Как видно из построения, на этом интервале присутствуют суф-

фиксы всех строк s_i $i \in [1..k]$, и интервал является минимальным (в том смысле, что ни один его подынтервал не будет содержать суффиксы всех строк).

Поиск интервалов при изменении элемента lcp занимает $k \log(n)$, так как поиск левой и правой границы для одного интервала требует $\log(n)$ операций (бинарный поиск по соответствующей структуре pos_i), количество интервалов не более k (левая граница определяется по индексу строки s_i).

Удаление элемента lcp состоит из следующих фаз:

- создание всех интервалов;
- удаление интервалов из структуры данных по поддержанию максимума;
- собственно удаление элемента lcp ;
- создание всех интервалов на модифицированном массиве lcp ;
- поиск минимума на всех полученных интервалах и добавление этой информации в структуру для поддержания максимума.

При вставке элемента в массив lcp производятся аналогичные действия. При изменении значения элемента lcp производится поиск всех интервалов и обновление значений минимумов в структуре данных по поддержанию максимума.

Искать значение минимума на интервале мы уже умеем за $O(\log(n))$.

Итоговая сложность алгоритма составляет $O(k \log(n))$ операций на каждое изменение массива lcp .

3.6. ЗАМЕЧАНИЕ ДЛЯ АЛГОРИТМА РАБИНА-КАРПА

Стоит отличать задачи поиска первого вхождения от задачи поиска всех вхождений. Асимптотическая сложность алгоритма

Рабина-Карпа для задачи поиска первого вхождения составляет $O(n)$ операций, но для задачи поиска всех вхождений в худшем случае может потребоваться $O(n^2)$ операций. Например, для строки $'aa...aa'$ (длины $2n$ символов) найти все вхождения строки $'aa...aa'$ (длины n символов). Хотя переход к следующему значению хеш-функции и будет осуществляться за $O(1)$ операций, но так как имеется порядка $O(n)$ вхождений образца в текст, то для каждого вхождения потребуется посимвольное сравнение за $O(n)$ операций, что и приведет к квадратичному времени.

Поэтому для рассмотренных задач поиска наибольшей общей подстроки решение с помощью бинарного поиска и алгоритма Рабина-Карпа в худшем случае может потребовать $O(n^2 \log(n))$ операций.

3.7. ПРАКТИЧЕСКОЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЗАДАЧИ ПОИСКА НАИБОЛЬШЕЙ ОБЩЕЙ ПОДСТРОКИ

Как уже было отмечено, задача поиска наибольшей общей подстроки используется для обнаружения дублирующего кода в программных проектах.

Задача поиска наибольшей общей подстроки для двух строк может также использоваться для поиска копирования (плагиата) на уровне исходных кодов и текстовых работ.

Для поиска плагиата в тексте в качестве первой входной строки выступает сама работа (реферат, дипломная работа), вторая строка представляет собой соединенные в одну строку все известные печатные работы. Находим наибольшую общую подстроку s_{max} . Если s_{max} не заключена в кавычки (т. е. не является цитатой) и $|s_{max}|$ больше некоторой константы (например, 100 символов или 2 предложения), то это является потенциальным плагиатом. Иначе удаляем s_{max} из первой строки и рекурсивно продолжаем искать для работы с удаленной цитатой. Таким образом мы гарантируем, что все совпадающие части будут заключены в кавычки (оформлены как цитаты) или что размер наибольшего совпадения с существующими работами не более заданной

константы⁸.

Задача поиска наибольшей общей подстроки для k строк имеет массу приложений в биоинформатике [3], задача для частных случаев $k = 1$ или $k = 2$ биоинформатикам менее интересны. А. Леск [18] пишет: «Одна или две гомологические последовательности шепчут ... полное множественное выравнивание кричит во весь голос».

3.8. ПОИСК ДУБЛИРУЮЩЕГО КОДА НА ОСНОВЕ ИЗОМОРФИЗМА ДЕРЕВЬЕВ

Поиск дублирующего кода не справляется с переименованиями (переменных, функций, методов), так как исходный код программы рассматривается как простая строка.

Имеются более интеллектуальные методы поиска дублирующего кода.

При синтаксическом анализе программы строится абстрактное синтаксическое дерево (*AST*, *abstract syntax tree*). Задача обнаружения дублирования программной логики сводится к поиску изоморфизма поддеревьев.

Задача изоформизма подграфу является *NP*-трудной [4]. Определение сложностного класса задачи изоморфизма графов является открытой проблемой.

Изоморфизм деревьев с выделенным корнем строится за линейное время [1], без выделенного корня – за $O(n^2)$ (подвешиваем первое дерево за любую вершину, для второго дерева перебираем корень). Задача изоморфизма поддереву решается в качестве подзадачи при поиске изоморфизма деревьев и так же имеет линейную асимптотику.

Подход к поиску дублирующего кода на основе изоморфизма деревьев используется в системе *Conqat*.

⁸ Известен анекдотический случай, когда студент заменил все символы 'o' (в русской раскладке) на 'o' (в английской раскладке), что позволило пройти тест на списывание.

3.9. ИТОГИ

В этой главе мы нашли применение построенных алгоритмов для индексации имен файлов в файловой системе, строковых записей в базе данных (имеется возможность удалять, изменять и добавлять объекты).

Решили задачу поиска наибольшей общей подстроки как для частных случаев (наибольшая общая подстрока, наибольшая общая подстрока для двух строк), так и для k строк. Эти задачи решены для динамического случая, т. е. в процессе изменения строк производится запрос на поиск наибольшей общей подстроки. Ответ на запрос происходит гораздо быстрее, чем решение задачи для статического варианта задачи.

4. Заключение

В работе построены алгоритмы последовательного построения суффиксного массива, блочного построения суффиксного массива, удаления блока из суффиксного массива.

В алгоритме последовательного построения суффиксного массива производится модификация суффиксного массива при добавлении одного символа к текущей строке. Асимптотика алгоритма составляет для *lcp*-естественных языков $O(\log^2(n))$, для *lcp*-регулярных – $O(n \log^2(n))$. Последовательное добавление m символов для *lcp*-регулярных строк в худшем случае требует $O(m^2 \log^2(n))$ операций.

В алгоритме блочного построения суффиксного массива производится модификация суффиксного массива при добавлении строки. Добавление строки размером m требует $O(m \log^2(n))$ операций.

В алгоритме удаления блока из суффиксного массива производится модификация суффиксного массива при удалении подстроки. Удаление подстроки размером m требует $O(m \log^2(n))$ операций.

Во всех построенных алгоритмах затраты на память составляют $O(n)$.

Построенные алгоритмы позволяют работать с потоковыми данными.

Для всех построенных алгоритмов имеется возможность пре-процессинга.

При каждом изменении строки мы поддерживаем массив наибольших префиксов *lcp*.

В работе решена задача о наибольшей общей подстроке (для одной строки, для двух строк и общая задача для k строк) для динамического случая.

Построено практическое применение для индексации имен файлов в файловой системе и текстовых записей в базах данных.

Литература

1. АХО А., ХОПКРОФТ Д., УЛЬМАН Д.. *Структуры данных и алгоритмы*. – Вильямс, 2003.
2. ВИРТ Н. *Алгоритмы и структуры данных*. – СПб.: Невский диалект, 2008.
3. ГАСФИЛД Д. *Строки, деревья, последовательности в алгоритмах*. – СПб.: Невский Диалект; БХВ-Петербург, 2003.
4. КАСЬЯНОВ В. Н., ЕВСТИГНЕЕВ В. А.. *Графы в программировании: обработка, визуализация и применение*. – СПб.: БХВ-Петербург, 2003.
5. КОРМЕН Т., ЛЕЙЗЕРСОН Ч., РИВЕСТ Р. *Алгоритмы: построение и анализ*. – М.: МЦНМО, 1999.
6. ПРЕПАРАТА Ф., ШЕЙМОС М. *Вычислительная геометрия: введение*. – М.: Мир, 1989.
7. СЛИСЕНКО А. О. *Нахождение в реальное время всех периодичностей в слове* // Доклады АН СССР. – 1980. – Т. 251. – С. 48–51.
8. СЛИСЕНКО А. О. *Поиск периодичностей и идентификация подслов в реальное время* // Зап. научн. сем. ЛОМИ. – 1981. – Т. 5. – С. 62–173.

9. СЛИСЕНКО А. О. *Распознавание предиката симметрии многоголовчатыми машинами Тьюринга со входом* // Труды Мат. института АН СССР. – 1973. – Т. 129. – С. 30–202.
10. СМИТ Б. *Методы и алгоритмы вычислений на строках.* – Вильямс, 2006.
11. АНО А., CORASICK M. *Efficient string matching: an aid to bibliographic search* // Comm. ACM. – 1975. – Vol. 18. – P. 333–340.
12. BAASE S. *Computer Algorithms. 2nd ed.* – Reading, MA: Addison-Wesley, 1988.
13. BOYER R. S., MOORE J. S. *A fast string searching algorithm* // Comm. ACM. – 1977. – Vol. 20. – P. 762–772.
14. CHARRAS C., LECROQ T. *Handbook of Exact String-Matching Algorithms*, 2004.
15. FARACH M. *Optimal suffix tree construction with large alphabets* // In Proc. IEEE 38th Annual Symposium on Foundations of Computer Science. – 1997. – P. 137–143.
16. FARACH M., MUTHUKRISHNAN S. *Optimal logarithmic time randomized suffix tree construction* // In Proc. IEEE 23th International Conference on Automata, Languages and Programming. – 1996. – P. 550–561.
17. FARACH M., FERRAGINA P., MUTHUKRISHNAN S. *On the sorting-complexity of suffix tree construction* // J. ACM. – 2000. – Vol. 47(6). – P. 987–1011.
18. HUBBARD T. J. P., LEST A. M., TRAMONTANE A. *Gathering item into the fold* // Nature Structural Biology. – April, 1996. – Vol. 4. – P. 313.
19. KARKKAINEN J., SANDERS P., *Simple Linear Work Suffix Array Construction* // Proceedings of the 30th International Colloquium on Automata, Languages and Programming, LNCS 2719, Springer, 2003. – P. 943–955.
20. KARKKAINEN J., *Fast BWT in Small Space by Blockwise Suffix Sorting* // Theoretical Computer Science, 2006.
21. KASAI T., LEE G., ARIMURA H., ARIKAWA S., PARK K. *Linear-Time Longest-Common-Prefix Computation in Suffix*

- Arrays and Its Applications* // CPM. – 2001. – P. 181–192.
22. KITAJIMA J. P., NAVARRO G., RIBEIRO B., ZIVIANI N. *Distributed Generation of Suffix Arrays: a Quicksort-Based Approach* // Proceedings of the 4th South American Workshop on String Processing, Valparaiso, Chile, 1997. – P. 53–59.
 23. KARP R., RABIN M. *Efficient randomized pattern matching algorithms* // IBM J. Res. Development. – 1987. – Vol. 31. – P. 246–260.
 24. KNUTH D. E., MORRIS J. H., PRATT V. B. *Fast pattern matching in strings* // SIAM Journal on Computing. – 1977. – Vol. 6. – P. 323–350.
 25. KNUTH D. E. *The Art of Computer Programming, Volume 2: Sorting and Searching, Second Edition*. Addison-Wesley, 1997.
 26. MANBER U., MAYERS G.. *Suffix arrays: a new method for on-line string searches* // SIAM Journal on Computing. – 1993. – №22. – P. 953–948.
 27. MCCREIGHT E. M.. *A Space-Economical Suffix Tree Construction Algorithm* // Journal of the ACM. – 1976. – Vol. 23(2). – P. 262–272.
 28. NAVARRO G., KITAJIMA J. P., RIBEIRO B., ZIVIANI N., *Distributed Generation of Suffix Arrays* // Proceedings of the 8th Annual Symposium on Combinatorial Pattern Matching, LNCS 1264. - 1997. – P. 102–115.
 29. RYTTER W. *A correct preprocessing algorithm for Boyer-Moore string searching* // SIAM J. Comput. – 1980. – Vol. 9. – P. 509–512.
 30. SALSON M., LECROQ T., LEONARD M., MOUCHARD L. *Dynamic extended suffix arrays* // Journal of Discrete Algorithms. – 2010. – Vol. 8. – P.241-257.
 31. SHIBUYA T., KUROCHKIN I. *Match chaining algorithm for cDNA Mapping* // Algorithms in Bioinformatics: Third International Workshop, Budapest, WABI, 2003.
 32. UKKONEN E. *On-line construction of suffix trees* // Algorithmica. – 1995. – Vol. 14(3). – P. 249–260.

33. WEINER P. *Linear pattern matching algorithm* // 14th Annual IEEE Symposium on Switching and Automata Theory. – 1973. – P. 1–11.

SYMBOL ARRAY PROCESSING

Pavel Ajtkulov, Udmurt State University, Izhevsk, postgraduate (ajtkulov@gmail.com).

Abstract: A suffix array for a string is a data structure, which allows searching all occurrences of the sample in linear time on the sample length. We build the algorithms for modifying a suffix array by adding one character, by adding blocks to the original string, and by removing the block from the string. We suggest applying these algorithms to index text entries in databases and file names in a file system. We also develop the algorithm for online search of the longest common substring in k -strings.

Keywords: string matching, suffix array, longest common substring .

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии В. Г. Лебедевым*

УДК 339.13
ББК 78.34

ИНВЕСТИЦИОННЫЕ СТРАТЕГИИ КОМПАНИЙ И ЦИКЛИЧНОСТЬ РЫНКОВ МЕТАЛЛОПРОДУКЦИИ

Акинфиев В. К.¹,

*(Учреждение Российской академии наук
Институт проблем управления РАН, Москва)*

Предложена математическая модель, позволяющая исследовать механизмы влияния инвестиционных стратегий компаний на динамику рынков металлопродукции. Показано, что «чрезмерная инвестиционная активность» компаний способствует, в числе прочих факторов, цикличности рынков металлопродукции, которая оказывает негативное влияние на эффективность их бизнеса.

Ключевые слова: моделирование, инвестиционные стратегии, динамика рынков.

1. Введение

Традиционный подход к оценке эффективности и выбору инвестиционных стратегий развития компаний основан на методах моделирования дисконтированных денежных потоков (*DCF*) компании, в которых прогноз динамики цен и спроса на продукцию компании являются экзогенными переменными [2]. Следует отметить, что достоверность оценок эффективности вариантов инвестиционных стратегий и обоснованность выбора наилучшей из них существенным образом зависит от достоверности и обоснованности этих прогнозов.

¹ Валерий Константинович Акинфиев, доктор технических наук, ведущий научный сотрудник (akinf@ipu.ru).

Построение прогнозов динамики цен и спроса на продукцию компании на долгосрочную перспективу является достаточно сложной задачей. Поэтому часто при формировании и оценки инвестиционных стратегий развития компаний принимается допущение (иногда не явно) о том, что цены на протяжении жизненного цикла инвестиций изменяются только под действием инфляции. Такой подход, как правило, приводит к принятию неверных и неэффективных инвестиционных решений.

Традиционная методология оценки инвестиционных проектов, направленных на реконструкцию существующих и строительство новых производственных активов, основана на следующих предположениях:

а) реализация инвестиционных проектов, связанных с увеличением производства продукции компании, не оказывает существенного влияния на рынок. То есть предполагается, что весь объем дополнительно произведенной продукции будет реализован по прогнозируемой рыночной цене;

б) при оценке инвестиционных проектов, как правило, не учитываются возможные аналогичные действия компаний-конкурентов, которые могут своими активными действиями усиливать влияние инвестиционных решений на динамику рынка.

Такой подход правомерен в условиях рынка совершенной конкуренции, где доля каждой компании относительно мала и даже существенное увеличение объема производства одной из компаний не может оказать заметного влияния на динамику баланса спроса и предложения на рынке [3].

На рынках типа олигополия, к которому принадлежит металлургический рынок России, предположения а) и б) не выполняются. Поэтому традиционный подход к оценке инвестиционных стратегий должен быть дополнен *исследованием вопросов о взаимовлиянии инвестиционных стратегий компаний и динамики рынков металлопродукции* (спрос, предложение, цена).

В настоящее время металлургический рынок России представляет собой рынок несоординированной олигополии с элементами картельного взаимодействия игроков (установлены негласные правила типа «не использовать в конкурентной борьбе "ценовые войны"»). На рынке представлены девять наиболее значимых компаний (Северсталь, ММК, НЛМК, Евразхолдинг и др.).

Следует заметить, что основной продукцией российских металлургических компаний является готовый прокат, который, в свою очередь, делится на плоский прокат, включая горячекатаный лист, холоднокатаный лист, толстый лист и прокат с покрытиями, а также сортовой прокат, включая арматуру, профиль, катанку и пр. Рынок разделен на сектора, в каждом секторе присутствует меньшее число крупных игроков, например, в секторе плоского проката их три.

Объем экспорта в производстве готового проката российских металлургических компаний последние годы достаточно стабилен и оставляет величину 28,5–29,0 млн. тонн в год. Остальная часть продукции (порядка 50% производства) поставляется на внутренний рынок, который является основным «драйвером» роста объемов производства и стимулирует реализацию инвестиционных программ развития производственных мощностей компаний. Следует заметить, что темпы роста потребления стального проката на внутреннем рынке в период с 2004 г. по 2007 г. составляли 10–15% в год.

В последние докризисные годы на российском металлургическом рынке наблюдалась устойчивая тенденция, которая заключалась в следующем: суммарные объявленные инвестиционные планы прироста мощностей компаний, как правило, превосходили величину, «необходимую рынку». Последствия данной тенденции – инвестиционный перегрев рынка, потеря эффективности и рентабельности инвестиций в техпереворужение и развитие компаний.

Известно, что рынки металлопродукции имеют циклический характер [3]. Это свойство проявляется в смене тренда

динамики цен на продукцию отрасли, повторяющейся с различной периодичностью и обусловленную, в том числе, динамикой баланса спроса и предложения металлопродукции на рынках, зависящего от инвестиционных стратегий игроков рынка. Эти процессы оказывают существенное влияние на эффективность отраслевого бизнеса и должны учитываться при разработке стратегии развития компаний и прогнозировании их финансовых результатов.

Вместе с тем при прогнозировании развития отрасли, например в документе «Стратегия развития металлургической промышленности РФ на период до 2015 г.», разработанном Минпромэнерго России (№177 от 29.05.2007 г.), свойство цикличности рынков не учитывается. Это существенно снижает качество таких прогнозов.

В работе исследуется проблема оценки влияния инвестиционных стратегий металлургических компаний на динамику рынка металлопродукции. Показано, что «чрезмерная инвестиционная активность» металлургических компаний способствует, в числе прочих факторов, цикличности рынков металлопродукции, оказывающей негативное влияние на эффективность их бизнеса. Автором предложена агрегированная макроэкономическая модель, которая позволяет исследовать механизмы влияния инвестиционных стратегий развития металлургических компаний на динамику рынков металлопродукции и, соответственно, эффективность инвестиционных стратегий развития.

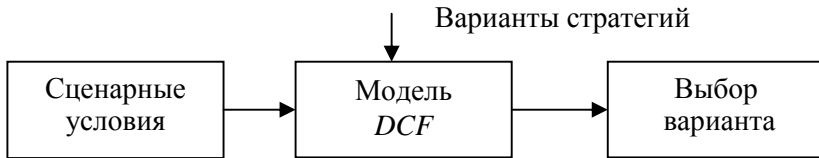
2. Описание модели

В данной работе предпринята попытка построения макроэкономической модели, позволяющей описать и объяснить цикличность рынков металлопродукции.

В отличие от традиционной схемы анализа инвестиционных проектов (рис. 1), подход, предлагаемый в данной работе, сводится к совместному исследованию моделей компаний и модели рынка и позволяет учесть влияние выбора инвестицион-

ных стратегий развития компаний на рыночные сценарные условия функционирования бизнеса.

I. Традиционная схема анализа



II. Предлагаемая схема анализа

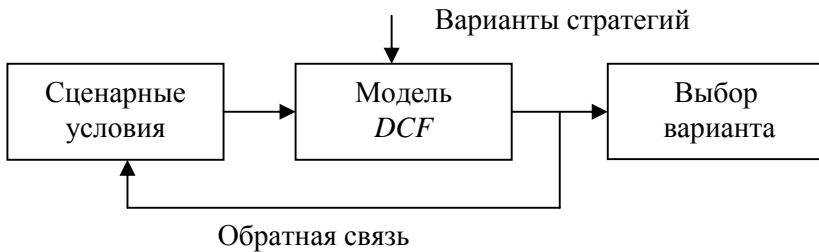


Рис 1. Схемы анализа инвестиционных проектов

Здесь:

- блок «Сценарные условия» задает прогнозную динамику экзогенных параметров (цены, спрос и пр.) для Модели *DCF*;
- блок «Модель *DCF*» представляет собой производственно-финансовую модель компании, которая позволяет оценить дополнительный дисконтированный свободный денежный поток, связанный с реализацией того или иного варианта инвестиционной стратегии. Заметим, что производственно-финансовые модели компании позволяют формировать прогнозы укрупненной финансовой отчетности компаний (отчет о движении денежных средств, баланс и отчет о прибылях и убытках) в зависимости от анализируемого варианта инвестиционной программы. При этом учитываются различные сцена-

рии изменения внешних условий хозяйственной деятельности компании (инфляция, изменения валютных курсов, изменения цен и спроса на товарную продукцию и т. д.).

Производственно-финансовые модели компании реализуются разработчиками либо с использованием специализированных программных продуктов, имеющих на рынке (ТЭО-ИНВЕСТ, *Project Expert* и др.), либо в среде *MS Excel*. Как правило, производственно-финансовые модели компании учитывают технологическую и логистическую структуру производственных процессов компании и предназначены для проведения аналитических расчетов в режиме «имитационной модели». Это позволяет, изменяя на входе модели параметры инвестиционной программы, производственной программы и макроэкономические сценарии, прогнозировать производственно-финансовые результаты деятельности компании. Принципы и методы построения производственно-финансовых моделей компаний детально изложены в [4].

– блок «Выбор варианта» задает процедуру выбора инвестиционной стратегии компании на основе расчета показателей ее эффективности.

Рассмотрим важные замечания и предположения, используемые при построении макроэкономической модели рынка металлопродукции:

Низкая эластичность спроса на металлопродукцию к изменению ее цены.

Спрос на продукцию металлургических компаний формируется в отраслях, для которых металлопродукция является значимым фактором производства (строительная отрасль, инфраструктура, машиностроение, автомобилестроение и прочие). Спрос на металлопродукцию определяется потребностью этих отраслей (по межотраслевой цепочке создания стоимости), вплоть до продукции конечного потребления. При этом отраслепотребители металлопродукции не готовы (особенно на растущем рынке) сокращать объем производства при относительно небольшом изменении цены на металл. Снижение же металло-

емкости продукции требует инвестиций и времени (инерционный процесс).

Этим объясняется низкая эластичность спроса на металлопродукцию по отношению к изменению ее цены. Заметное снижение спроса на металлопродукцию «по ценовым соображениям» возникает лишь при существенном изменении цены.

По этим же соображениям на рынке наблюдается высокая эластичность цены по отношению к спросу, особенно при возникновении дефицита металлопродукции (положительный баланс спроса и предложения).

Механизм изменения цены при изменении небаланса спроса и предложения на металлопродукцию.

При снижении спроса при неизменном предложении рыночная цена на металлопродукцию снижается. В этой ситуации происходит следующее: компании уменьшают объем производства (загрузку оборудования), уменьшая давление на рынок. Это замедляет снижение цены. Эластичность цены в зоне отрицательного баланса спроса и предложения ниже, чем в зоне положительного баланса. Это объясняется возможностью металлургических компаний снизить уровень производства и привести его в соответствие с изменившимся спросом. Заметим, что цена не может значительно снизиться по отношению к уровню среднеотраслевой себестоимости производства.

При существенном снижении спроса большую роль играет уровень эффективности производственной цепочки металлургической компании, который определяется уровнем затрат основных факторов производства на выпуск единицы продукции (сырье, ТЭР, труд) и уровнем постоянных (накладных) расходов[1].

При этом менее эффективные компании, имеющие высокую точку безубыточности, при снижении наклона линии объема продаж (снижение цены) и уменьшения загрузки оборудования раньше попадут в «зону убыточности» и будут вынуждены остановить производство, чтобы не накапливать убытки.

Это, в свою очередь, снижает давление на рынок и стимулирует замедление снижения цены и достижение равновесия. Более эффективные компании займут освободившиеся ниши на рынке. Это позволит им улучшить свое финансовое положение (увеличение загрузки приведет к смещению вправо на графике точки безубыточности).

Общая структура модели приведена на рис 2.

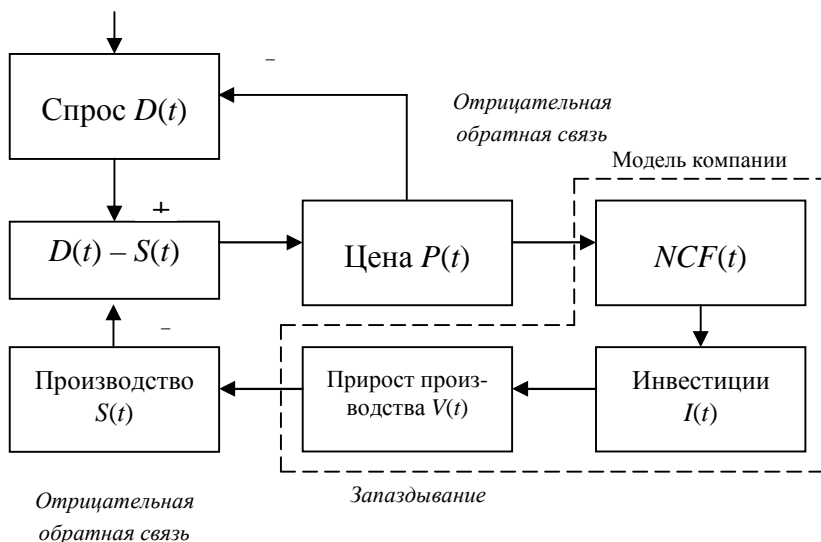


Рис 2. Структура модели

Предположения модели и переменные:

1. $D(t)$ – динамика спроса на металлопродукцию (потребление), это экзогенная переменная модели, график изменения которой считается заданным для различных внешних по отношению к модели макроэкономических сценариев.

2. $P(t)$ – рыночная цена на металлопродукцию (долларов за тонну) в период t . В каждый период времени цена формируется на основе соотношения спроса и предложения, которое опреде-

ляется в каждый период t как разность между платежеспособным спросом на металлопродукцию и уровнем производственных мощностей предприятий отрасли, который определяется в результате расчетов в модели.

Пусть $D(t)$ – спрос на продукцию в период t ; $S(t)$ – предложение (производство) в период t .

Тогда $P(t) = P(0) + g_1(D(t) - S(t))$, где параметр g_1 – эластичность цены по величине превышения спроса над предложением. Значение параметра g_1 задается нелинейной функцией от величины $D(t) - S(t)$, что легко может быть учтено при моделировании.

Следует отметить, что, в свою очередь, $D(t)$ также зависит от динамики цены $P(t)$. Увеличение $P(t)$ может приводить к снижению $D(t)$, что учитывается введением отрицательной обратной связи в модель. Степень влияния цены на спрос задается через параметр эластичности спроса по отношению изменения рыночной цены на металлопродукцию.

3. Далее предполагается, что стратегия развития компаний отрасли заключается в инвестировании части свободных финансовых средств в наращивание производственных мощностей.

Пусть $NCF(t)$ – прирост (сокращение) свободного денежного потока компаний отрасли в период t по сравнению с денежным потоком в начальный период времени. Для простоты предположим, что его величина определяется как доля g_2 от величины прироста выручки предприятий отрасли и вычисляется по формуле:

$NCF(t) = g_2(B(t)P(t) - B(0)P(0))$, где $B(t)$ – объем продаж металлопродукции в период t , $B(t) = \min \{D(t), S(t)\}$.

Пусть, далее, если $NCF(t) - NCF(t-1) > 0$ (что сигнализирует компании о повышательном тренде на рынке), то часть $NCF(t)$ в доле, равной величине g_3 , направляется на инвестирование в развитие компаний – $I(t)$. Величина g_3 определяет **инвестиционную активность** предприятий отрасли. Чем больше величина g_3 (доля), тем выше инвестиционная активность отрасли. Таким образом, $I(t) = g_3 NCF(t)$.

4. Предположим, что существует временной лаг t между периодом начала инвестирования и периодом соответствующего прироста производственных мощностей компаний отрасли – $V(t)$. Пусть, также, величина g_4 характеризует прирост производственных мощностей на единицу инвестиционных вложений. Тогда $V(t) = g_4 I(t - t)$. Соответственно, $S(t) = S(t - 1) + V(t)$.

5. Начальные условия. Предполагается, что в период $t = 0$ спрос и предложение на рынке сбалансированы, т. е. $B(0) = D(0) = S(0)$ и $P(0)$ – равновесная рыночная цена на металлопродукцию.

Рассмотрим возможность применения предложенного подхода на иллюстративном примере. В расчетах, результаты которых приведены в следующем разделе работы, использованы следующие параметры модели.

Параметр эластичности цены по величине небаланса спроса и предложения задан следующей нелинейной функцией: $g_1 = 30$ долларов за тысячу тонн при положительной величине небаланса и $g_1 = 10$ долларов за тысячу тонн при отрицательной величине небаланса; $g_2 = 0,5$, т. е. предполагается, что половина прироста выручки переходит в свободный денежный поток компании; $g_3 = 0,3$ показывает, что 30% прироста свободного денежного потока компании инвестируется в увеличение производственных мощностей; $g_4 = 0,01$, т. е. при инвестировании 1 млн. долларов происходит прирост производственных мощностей компании на величину 10 тыс. т за период (год); величина t в расчетах принята равной 2 годам, что соответствует средней продолжительности реализации инвестиционных проектов в металлургии, направленных на увеличение производственных мощностей компаний.

В расчетах, для простоты изложения, рассматривается однопродуктовая модель рынка, исходные данные и результаты носят иллюстративный характер. В качестве базового сценария в расчетах (сценарий 1) принят сценарий равномерного роста потребления металлопродукции на внутреннем рынке в прогнозном периоде до 2020 г. на уровне 5% в год. Темп роста

потребления за период 2005–2007 гг. принят на уровне 12% в год, что соответствует реальным фактическим данным развития рынка.

3. Результаты моделирования. Анализ стратегий

Результаты моделирования представлены на рисунках 3–8.

Сценарий 1. Равномерный рост спроса на металлопродукцию $D(t)$.

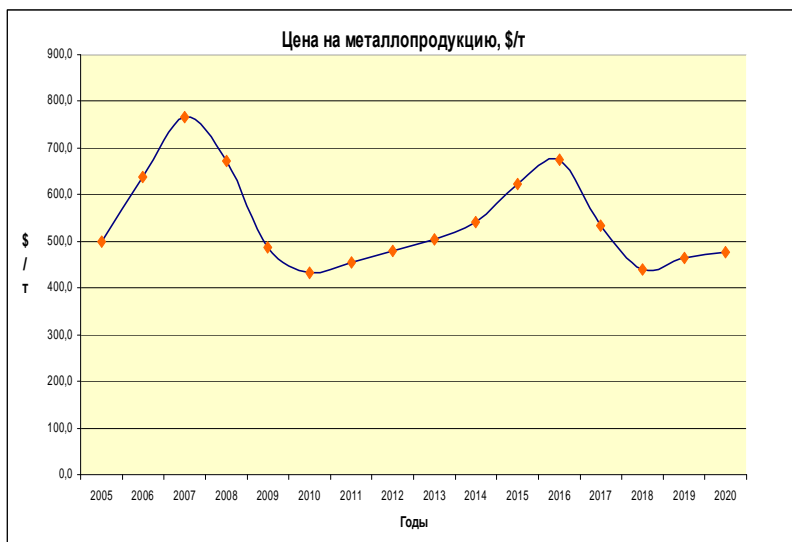


Рис 3. Прогноз цен на металлопродукцию (сценарий 1)

Модель показывает, что даже при условии **равномерного роста спроса на металлопродукцию $D(t)$ (сценарий 1)** наблюдается **циклическая динамика** рыночной цены. Это объясняется влиянием инвестиционной активности компаний, которые при появлении (или прогнозировании) дефицита в том или ином сегменте рынка металлопродукции стремятся в перспективе расширить свою долю на рынке (увеличить объем продаж), в

том числе и за счет инвестирования в увеличение соответствующих производственных мощностей.

Поскольку стратегии и инвестиционные программы компаний никем не координируются, то это, как правило, приводит к отраслевому кризису перепроизводства и смене тренда на рынке.

На самом деле сценарий 1 в реальной экономике встречается редко. Как правило, на динамику $D(t)$ оказывает влияние динамика развития отраслей – потребителей металлопродукции, а также динамика деловой активности мировой экономики.

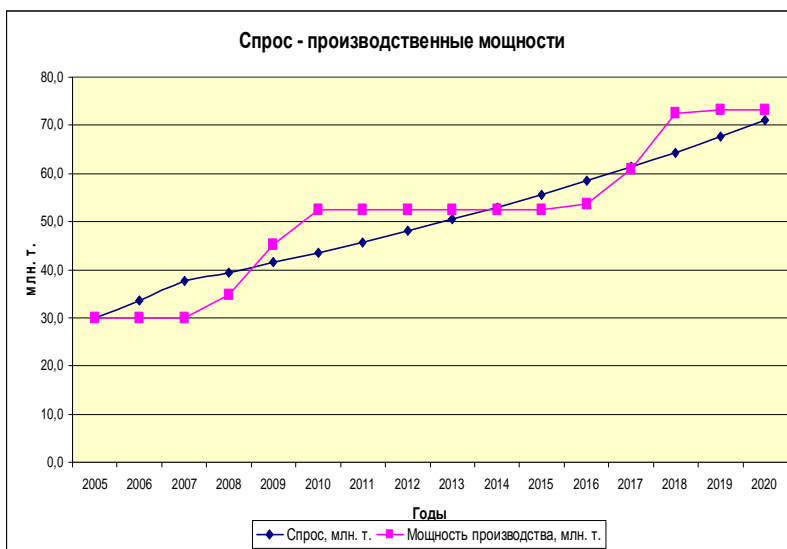


Рис 4. Прогноз баланса спроса и предложения на рынке (сценарий 1)

Сценарий 2 описывает ситуацию, когда на сценарий равномерного роста спроса (сценарий 1) наложено возмущение типа «**мировой финансовый кризис**». Предполагается, что в 2008 г. падение спроса составит 10% по сравнению с 2007 г. и, соответственно, в 2009 г. – 20% по сравнению с 2008 г. С 2010 г.

начнется восстановление спроса на металлопродукцию с темпом 10–15% в течение ближайших трех лет.

Результаты моделирования представлены на рис. 5 и 6.

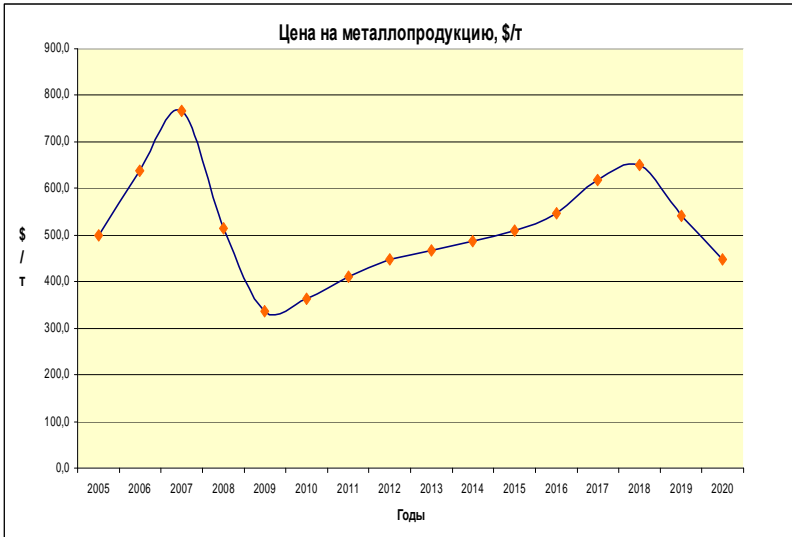


Рис 5. Прогноз цен на металлопродукцию (сценарий 2)

В приведенных результатах расчетов в модели учтен вариант стратегии, состоящий в том, что компании начинают реализацию инвестиционных программ в периоды, когда у них появляются свободные финансовые средства в результате повышательного тренда на рынке, т. е. инвестиционные затраты финансируются из собственных источников ($NCF(t)$).

Данная стратегия не является наилучшей, так как не использует потенциал прогноза и работы на опережение. Представляет интерес анализ стратегии, состоящей в упреждающем инвестировании в развитие за счет привлечения заемных средств (кредитов) в периоды, предшествующие подъему спроса. В модели эта стратегия учитывается с помощью введения сдвига влево начала процесса инвестирования в развитие ком-

пании. Данная стратегия предусматривает также окончание инвестирования в развитие в периоды, предшествующие спаду спроса. Назовем данную стратегию **дальновидной**.

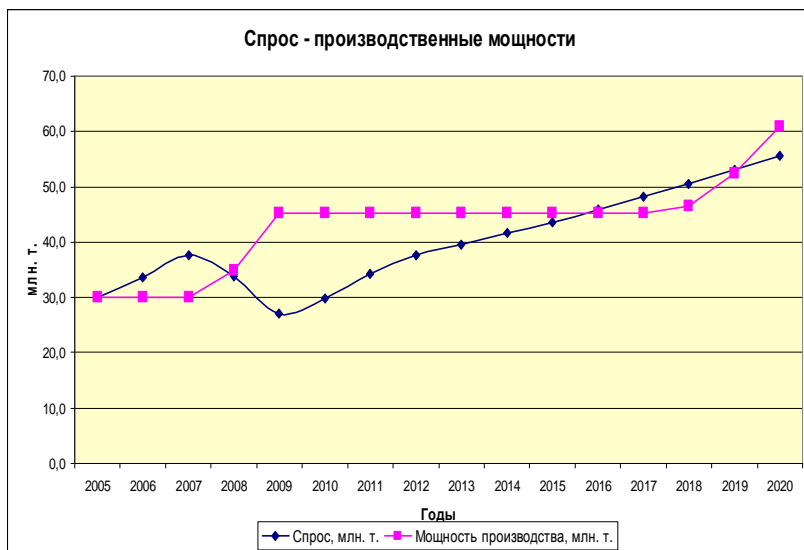


Рис 6. Прогноз баланса спроса и предложения на рынке (сценарий 2)

В основу данной стратегии развития положен принцип **«В период подъема рынка готовься к кризису, а в период кризиса – к подъему»**. Следует заметить, что эффективная реализация данной стратегии возможна лишь при наличии у компании надежных прогнозов относительно периодов смены тренда деловой активности на рынках металлопродукции. Это требует от компаний определенных финансовых вложений в организацию аналитических служб по сбору и анализу информации и прогнозированию рынков. Тем не менее, не вызывает сомнений, что выбор эффективной стратегии развития компании определяется прежде всего способностью топ-менеджеров компании стратегически мыслить и принимать верные решения.

Результаты расчетов, в которых моделируется дальновидная стратегия развития компании для сценариев 1 и 2, представлены на рис. 7–8.

Сценарий 1. Равномерный рост потребления металлопродукции $D(t)$.

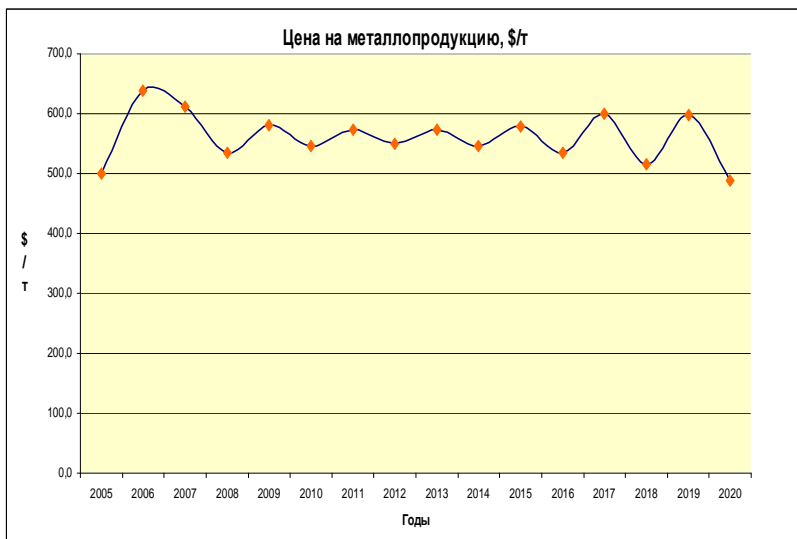


Рис 7. Прогноз цен на металлопродукцию (сценарий 1, дальновидная стратегия)

Модель показывает, что при условии равномерного роста спроса на металлопродукцию $D(t)$ (сценарий 1) **амплитуда колебаний** рыночной цены на металлопродукцию существенно снижается (рис. 7), при этом повышается ее предсказуемость.

Соответственно, на рис. 8 представлены результаты моделирования для сценария 2. Расчеты показали, что даже при наличии серьезных кризисных явлений на рынках рыночная цена на продукцию опускает до уровня 400 долларов за тонну. Для сравнения, в случае использования обычной стратегии в тех

же рыночных условия рыночная цена на продукцию опускает до уровня 300 долларов за тонну (рис. 5).

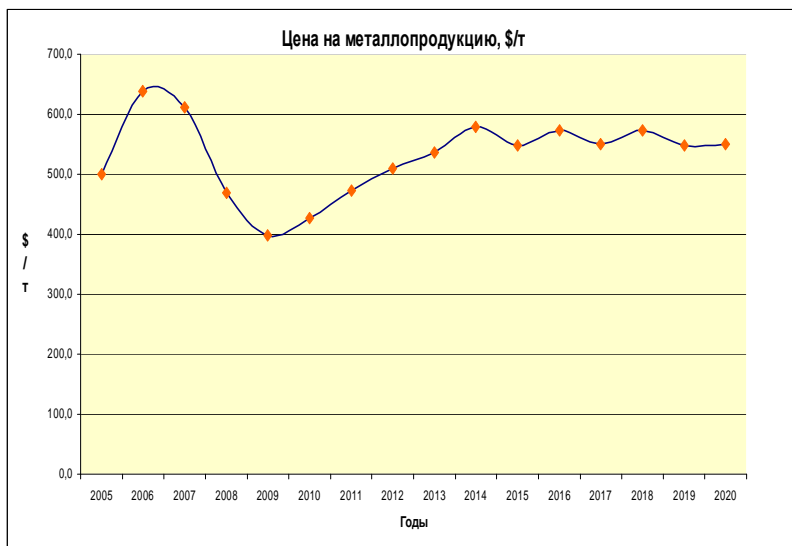


Рис 8. Прогноз цен на металлопродукцию (сценарий 2, дальновидная стратегия)

Проведенный анализ показывает, что за счет выбора стратегии инвестирования и финансирования развития компании в состоянии уменьшить негативное влияние цикличности рынков на эффективность бизнеса

4. Заключение

Приведенные в работе результаты показывают, что предложенный автором подход позволяет проводить анализ различных вариантов инвестиционной стратегии металлургических компаний с точки зрения их эффективности и влияния на динамику рынков металлопродукции. Данный подход позволяет также проводить анализ и выбор оптимального уровня инвестиционной активности компаний (параметр модели g_3) для раз-

личных вариантов стратегии развития с позиции повышения эффективности бизнеса компаний.

Проведенные исследования позволяют сделать ряд выводов:

1. Необходим координирующий отраслевой орган, который в «мягкой форме» позволил бы согласовывать стратегии развития металлургических компаний в зависимости от того или иного прогноза динамики рыночной конъюнктуры.

2. Показано, что стратегии развития, обладающие свойством дальновидности, позволяют повысить эффективность бизнеса металлургических компаний за счет гармонизации спроса и предложения на рынках. Для реализации таких стратегий необходима разработка и практическое использование динамических макроэкономических моделей, позволяющих прогнозировать динамику деловой активности на рынках металлопродукции.

3. Построенная агрегированная макроэкономическая модель позволяет проследить функциональную связь между стратегией развития компаний отрасли и уровнем цикличности рынков металлопродукции.

Литература

1. АКИНФИЕВ В. К. *Системный анализ и методы управления стоимостью вертикально-интегрированных компаний (на примере металлургии)* // Вторая Международная конференция «Системный анализ и информационные технологии» САИТ–2007 (сентябрь 2007, Обнинск, Россия): Труды конференции. Т. 2. – Стр. 86–90.
2. ВИЛЕНСКИЙ П. Л., ЛИВШИЦ В. И., СМОЛЯК С. А. *Оценка эффективности инвестиционных проектов: теория и практика.* – М.: Дело, 2001. – 687 с.
3. ЭНДРЮ АБЕЛЬ, БЕН БЕРНАНКЕ. *Макроэкономика.* – ООО «Питер Пресс», 2008. – 762 с.
4. ЦВИРКУН А. Д., АКИНФИЕВ В. К. *Бизнес-план. Анализ инвестиций. Методы и инструментальные средства.* – М.: Осъ-89, 2009. – 320 с.

INVESTMENT STRATEGIES OF COMPANIES AND STEEL MARKET CYCLES

Valeri Akinfiyev, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow,
(akinfi@ipu.ru).

Abstract: *This paper gives the mathematical model of the mechanisms of influence of investment strategies of companies on steel market dynamics. We show that the “excessive investment activity” of companies boosts, among the other factors, the cycles of steel markets, which adversely affect the efficiency of their business.*

Keywords: simulation, investment strategies, steel market dynamics.

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии Р. М. Нижегородцевым*

УДК 338.5
ББК 65.23

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВУХСТАВОЧНОГО ТАРИФА НА ЭЛЕКТРОЭНЕРГИЮ С УЧЕТОМ СОЦИАЛЬНОЙ НОРМЫ ПОТРЕБЛЕНИЯ НА ПРИМЕРЕ НАСЕЛЕНИЯ Г. ВОЛГОГРАДА

Эйсфельд А. А.¹

(Волгоградский государственный университет, Волгоград)

Статья посвящена актуальным процессам либерализации, происходящим в электроэнергетике России. К 2011 году, согласно планам правительства России, по свободным ценам будет продаваться 100% электроэнергии на оптовом рынке. И эта свободная цена будет транслироваться на розничные рынки электроэнергии. В связи с завершением процесса реформирования ОАО РАО «ЕЭС России» особенно актуальным становится вопрос защиты интересов потребителей и прежде всего – населения. В данной работе предложена математическая модель тарифа на электроэнергию, позволяющая потребителю оплачивать потребленные киловатт-часы в пределах установленной социальной нормы по сниженному тарифу, а сверх неё – по экономически обоснованной цене. А также приведен пример такого тарифа применительно к розничному рынку электроэнергии г. Волгограда.

Ключевые слова: электроэнергетика, тарифы на электроэнергию, математическое моделирование тарифов.

Начавшийся в 1992 году переход России к рыночной экономике обусловил необходимость проведения структурных реформ в электроэнергетике России. Основные направления

¹ Анастасия Александровна Эйсфельд, аспирант (aeisfeld@yandex.ru).

реформирования электроэнергетики Российской Федерации были изложены в Постановлении Правительства РФ №526 от 11 июля 2001 г..

В процессе либерализации отрасли должны были решиться следующие первоочередные задачи:

- создание конкурентных рынков электроэнергии;
- уменьшение доли государственного регулирования в управлении электроэнергетикой;
- разграничение монопольных и потенциально конкурентных видов деятельности в электроэнергетике;
- ликвидация перекрестного субсидирования.

Важным звеном всей реформы электроэнергетики стала реорганизация РАО «ЕЭС России», которая с 1 июля 2008 г. прекратила свое существование.

Базовым механизмом реорганизации явилось выделение из состава РАО «ЕЭС России» самостоятельно функционирующих профильных компаний путем дифференциации по видам деятельности. В результате на основе РАО «ЕЭС России» были созданы следующие субъекты и группы субъектов:

- генерирующие компании, в которых объединены (производственные) генерирующие активы;
- энергосбытовые компании, занимающиеся продажей электроэнергии потребителям;
- сетевые компании, объединяющие магистральные и региональные распределительные электрические сети;
- субъекты оперативно-диспетчерского управления;
- коммерческая инфраструктура оптового рынка.

Рынок электроэнергии Волгоградской области организован следующим образом (рис. 1). Закупкой электроэнергии на оптовом рынке занимаются такие категории потребителей, как энергосбытовые организации, гарантирующие поставщики и крупные потребители электроэнергии. На территории Волгоградской области в настоящее время действуют пять гарантирующих поставщиков электрической энергии, услуги которых

подлежат государственному регулированию, а также четыре сбытовые компании (в том числе крупные потребители).

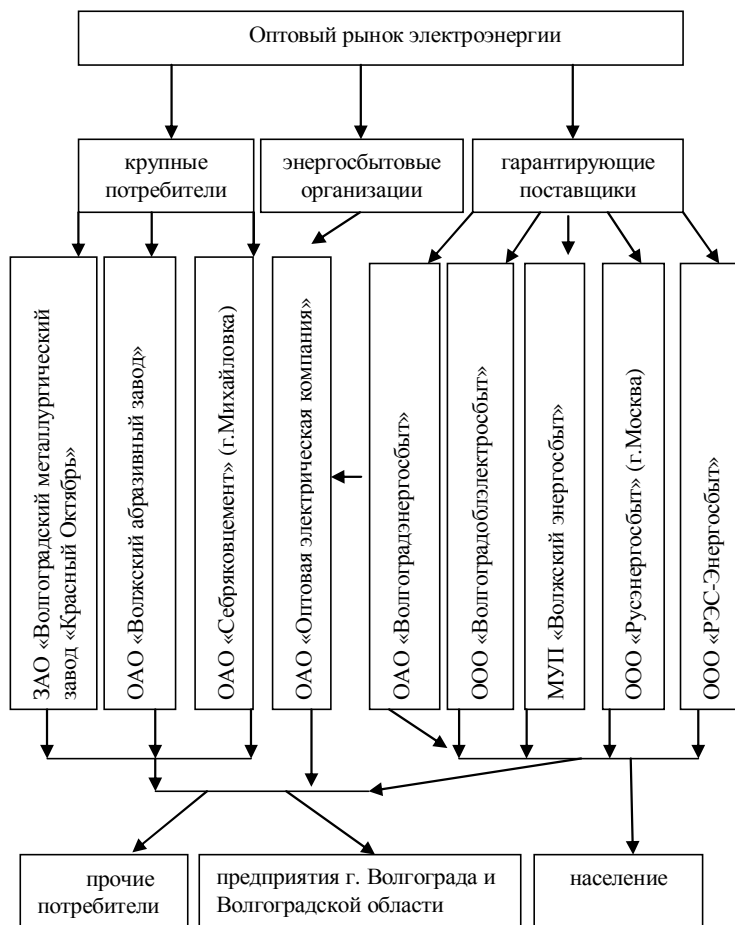


Рис. 1. Структура рынка электроэнергии г. Волгограда и Волгоградской области¹

¹ Источник: составлено автором на основе данных www.np-ats.ru.

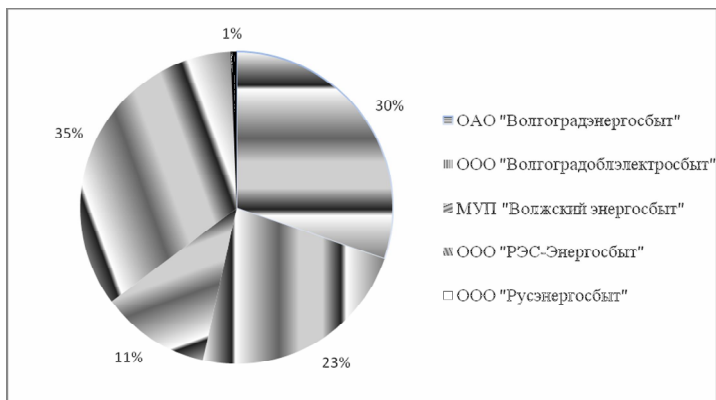


Рис. 2. Распределение доли поставки электроэнергии населению Волгоградской области по данным за 2009 г.

По данным рис. 2 наиболее крупными поставщиками электроэнергии населению в Волгоградской области являются ОАО «Волгоградэнергобыт» и ООО «РЭС-Энергосбыт» (30% и 35% соответственно).

Ценообразование на электрическую энергию схематично можно разбить на два рынка:

- ценообразование на оптовом рынке;
- ценообразование на розничном рынке.

Ценообразование на розничных рынках напрямую зависит от формирования цены на оптовом рынке электроэнергии. Потребители на розничных рынках оплачивают часть покупаемой электроэнергии по регулируемой цене, а часть – по свободной. В настоящее время тариф на электроэнергию в виде предельных минимальных и максимальных значений тарифа для населения подлежит государственному регулированию. Федеральной службой по тарифам данные параметры устанавливаются ежегодно для всех субъектов Российской Федерации.

Основной особенностью новой системы ценообразования на розничном рынке является синхронизация с процессом либерализации на оптовом рынке. Это предполагает поставку части объемов по регулируемой цене, а части – по цене, отражающей

стоимость электрической энергии на конкурентном оптовом рынке электрической энергии в рамках предельного уровня нерегулируемых цен. К 2011 году, согласно планам правительства России, по свободным ценам будет продаваться 100% электроэнергии на оптовом рынке, и эта свободная цена будет транслироваться на розничные рынки электроэнергии.

В связи с завершением процесса реформирования ОАО РАО «ЕЭС России» и постепенной либерализацией электроэнергетического рынка в соответствии с планами Правительства РФ особенно актуальным становится вопрос защиты интересов потребителей, и прежде всего – населения.

В конце 2007 года было принято принципиальное решение о сохранении регулирования розничных рынков электроэнергии для населения и приравненных к нему групп потребителей вплоть до 2014 года. После этого периода розничные цены попадут в прямую зависимость от оптовых. Таким образом, для населения на переходный период гарантируется поставка всего фактического объема по регулируемым ценам.

Рост тарифов для населения в год составляет порядка 10-15%. Учитывая, что рост тарифов естественных монополий в обозримом будущем продолжится, очень важно разработать меры социальной защиты наименее обеспеченных групп населения. Большие возможности для этого предоставляют многоставочные тарифы, дифференцированные по объему потребления.

Многоставочные тарифы на электроэнергию рассматривались разными авторами [2, 3, 4, 7]. Например, в [3] предложены оптимизационные модели двухставочного и многоставочного тарифов на электроэнергию. Критерием оптимизации является максимум функции общественного благосостояния при условии заданного уровня прибыли энергокомпании, т. е. по принципу эффективного ценообразования. Тарифы имеют ставки, снижающиеся по мере роста объема потребления электроэнергии. На высоких уровнях потребления ставки близки к предельным издержкам. Подобные тарифы используются во многих странах.

Однако, в условиях, когда дифференциация населения по доходам велика, многие домохозяйства находятся за чертой бедности, тарифы с высокими ставками на низких уровнях потребления неприемлемы. Поэтому в модели, рассматриваемой в данной работе, целью построения двухставочного тарифа является не максимизация общественного благосостояния, а социальная защита наименее обеспеченных групп населения. Первая ставка за объем потребления, равный социальной норме, низкая. Вторая ставка выбирается из условия безубыточности энергокомпании. Такой тариф перекладывает нагрузку по оплате электроэнергии на группу населения с высоким уровнем электропотребления, который, при прочих равных условиях, свидетельствует о высоком уровне доходов. Возможность применения такого подхода подкрепляется тем, что в 2008 г. денежные доходы 10% самых богатых россиян превосходили доходы такого же количества самых бедных, по данным Федеральной службы государственной статистики, почти в 6 раз. Представленная модель тарифа на электроэнергию поможет решить проблему социальной защиты малообеспеченных слоев населения без привлечения бюджетных средств.

Будем предполагать, что спрос потребителя на электроэнергию зависит от цены, дохода и, возможно, ряда других факторов. Для построения двухставочного тарифа существенны только факторы цены и дохода, поэтому для функции спроса будем использовать обозначение $Q = Q(P, I)$.

Пусть минимальный среднедушевой доход составляет I^{min} , тогда $Q = Q(P, I^{min})$ – функция спроса потребителей с минимальным среднедушевым доходом. Будем считать, что значение социальной нормы потребления $Q_{соц}$ задано. Тогда определим социальный тариф как $P_{соц} = P(Q_{соц}, I^{min})$, где $P(Q, I^{min})$ – обратная функция спроса для потребителя с минимальным доходом.

Обозначим вторую ставку тарифа через $P_1 > P_{соц}$. Эту ставку будем выбирать из условия безубыточности энергокомпании. Самые «бедные» потребители останутся на уровне потребления $Q_{соц}$. Это потребители с доходом ниже, чем предельный

доход $I^{\text{пред}}$, обозначенном на рис. 3. Значение $I^{\text{пред}}$ определяется как корень уравнения (1):

$$(1) \quad Q(P_1, I^{\text{пред}}) = Q_{\text{соц}}$$

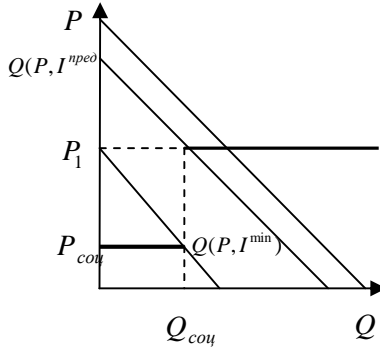


Рис. 3. Двухставочный тариф на электроэнергию и функции спроса потребителей с различным уровнем дохода

Как показано на рис. 3, потребители с доходом $I > I^{\text{пред}}$ будут покупать электроэнергию в количестве больше $Q_{\text{соц}}$, остальные — $Q_{\text{соц}}$.

Вычислим прибыль энергокомпании при двухставочном тарифе $(P_{\text{соц}}, P_1)$. Предположим, что предельные издержки энергокомпании составляют c рублей (при производстве каждой дополнительной единицы продукции), а постоянные издержки — F рублей (в расчете на одного потребителя).

Доход будем рассматривать как случайную величину с известной функцией распределения $F(x)$ и плотностью распределения $f(x)$. Тогда доля потребителей, имеющих доход меньше чем x , равна $F(x)$, а доля потребителей, имеющих доход в интервале $[x, x + Dx]$, приблизительно равна $f(x) \cdot Dx$.

Все потребители приобретут по крайней мере $Q_{\text{соц}}$ кВт-ч электроэнергии. Прибыль энергокомпании от продажи этих

$Q_{\text{соц}}$ кВт-ч в расчете на одного потребителя составит $Q_{\text{соц}}(P_{\text{соц}} - c)$.

Потребители с доходом $I > I^{\text{пред}}$ приобретут часть электроэнергии (а именно, $Q(P_1, I) - Q_{\text{соц}}$) по цене P_1 и принесут энергокомпаниям дополнительную прибыль в размере

$$(2) \quad \int_{I^{\text{пред}}}^{\infty} (P_1 - c) \cdot (Q(P_1, I) - Q_{\text{соц}}) \cdot f_x(I) dI = \\ = (P_1 - c) \int_{I^{\text{пред}}}^{\infty} (Q(P_1, I) - Q_{\text{соц}}) \cdot f_x(I) dI.$$

Общая прибыль энергокомпании составит:

$$(3) \quad \Pi(P_1) = Q_{\text{соц}}(P_{\text{соц}} - c) + (P_1 - c) \int_{I^{\text{пред}}}^{\infty} (Q(P_1, I) - Q_{\text{соц}}) \cdot f_x(I) dI.$$

Приравняем прибыль к постоянным издержкам:

$$(4) \quad \Pi(P_1) = Q_{\text{соц}}(P_{\text{соц}} - c) + (P_1 - c) \int_{I^{\text{пред}}}^{\infty} (Q(P_1, I) - Q_{\text{соц}}) \cdot f_x(I) dI = F.$$

Решив систему уравнений

$$(5) \quad \begin{cases} Q(P_1, I^{\text{пред}}) = Q_{\text{соц}}, \\ Q_{\text{соц}}(P_{\text{соц}} - c) + (P_1 - c) \int_{I^{\text{пред}}}^{\infty} (Q(P_1, I) - Q_{\text{соц}}) \cdot f_x(I) dI = F, \end{cases}$$

найдем P_1 и $I^{\text{пред}}$.

Приведем пример построения предложенного двухставочного тарифа применительно к розничному рынку электроэнергии г. Волгограда.

Пусть спрос на электроэнергию со стороны населения Q зависит от цены на электроэнергию P , среднедушевого дохода потребителей I и спроса в предшествующий период времени: $Q = Q(P, I, Q_{t-1})$.

Для оценки функции спроса на электроэнергию была использована модель степенной множественной регрессии.

Для построения модели спроса на электроэнергию использовались помесячные статистические данные за период с января 2007 года по декабрь 2009 года [5, 6]:

Q_t – количество электроэнергии, отпущенной населению г. Волгограда гарантирующими поставщиками (мегаватт-час);

P_t – цена на электроэнергию для этой группы потребителей (руб./мегаватт-час);

I_t – личный располагаемый доход населения (руб.);

IPC_t – индекс потребительских цен.

Исходные значения помесячных цен P_t и доходов I_t перед построением уравнения регрессии были скорректированы на IPC_t соответствующего месяца. Это было сделано для того чтобы исключить влияние инфляции на параметры модели. Данные о потреблении электроэнергии были скорректированы на количество жителей г. Волгограда и Волгоградской области. Таким образом, исходные данные были подготовлены для построения индивидуальной функции потребления электроэнергии (т. е. одним человеком).

Уравнение спроса на электроэнергию представляет собой степенную множественную регрессию, где в качестве объясняемой переменной выступает количество потребленной электроэнергии в расчете на одного жителя г. Волгограда, а в качестве регрессоров приняты цена на электроэнергию, среднедушевой среднемесячный денежный доход потребителя и индивидуальное потребление электроэнергии в предшествующий период времени:

$$(6) \quad Q_t = \left(\frac{P_t}{IPC_t} \right)^{a_1} \cdot \left(\frac{I_t}{IPC_t} \right)^{a_2} \cdot (Q_{t-1})^{a_3} \cdot e^{a_4}.$$

С помощью метода наименьших квадратов, реализованного в пакете прикладных программ «*STATISTICA*», было построено регрессионное уравнение спроса на электроэнергию:

$$(7) \quad Q_t = \left(\frac{P_t}{IPC_t} \right)^{-0,05} \cdot \left(\frac{I_t}{IPC_t} \right)^{0,39} \cdot (Q_{t-1})^{0,5} \cdot e^{-1,7}.$$

Используя свойства степенной функции, можно сделать вывод о том, что краткосрочные эластичности спроса на электроэнергию по цене и по доходу составляют $E_p^{kp}(Q) = -0,05$ и $E_I^{kp}(Q) = 0,39$, а долгосрочные эластичности равны $E_p^{дол}(Q) = \frac{-0,05}{1-0,5} = -0,1$ и $E_I^{дол}(Q) = \frac{0,39}{1-0,5} = 0,8$, соответственно.

Если число случайных факторов достаточно велико, воздействие каждого из них незначительно и имеет мультипликативный характер, то результат будет иметь так называемое логнормальное распределение. Эти рассуждения были использованы для построения функции плотности распределения населения по среднедушевому среднемесячному денежному доходу с параметрами m и s^2 . Плотность распределения для логарифмически нормального закона распределения имеет вид:

$$(8) \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot p \cdot s \cdot x}} \cdot \exp\left(-\frac{(\ln x - \ln m)^2}{2 \cdot s^2}\right), \quad x > 0,$$

где x – случайная величина (среднедушевой среднемесячный денежный доход), а параметры m и s^2 есть соответственно математическое ожидание и дисперсия нормального закона распределения случайной величины $\ln x$. Параметры m и s^2 , определяющие плотность распределения населения по уровню среднедушевого дохода, вычисляются с помощью двух параметров q_{cp} и q_{mod} :

$$s^2 = \frac{2}{3} \cdot \ln\left(\frac{q_{cp}}{q_{mod}}\right), \quad m = q_{mod} \cdot \exp(s^2),$$

где q_{cp} – математическое ожидание, q_{mod} – модальное значение среднедушевого среднемесячного денежного дохода в генеральной совокупности, которое соответствует доходам наиболее многочисленной группы населения.

На основе имеющихся данных о распределении населения России по величине среднедушевых среднемесячных денежных доходов за 2008 г. была построена функция распределения. Выборочное среднее, рассчитанное по данным таблицы, составляет $q_{cp} = 12981,50$ рублей. В качестве оценки модального зна-

чения выбрана середина интервала, на который приходится наибольшее число наблюдений, $q_{\text{мод}} = 12500,00$ рублей. Параметры логнормального распределения m и s^2 составляют $m = 12818,97$, $s^2 = 0,0252^1$.

По имеющимся парам параметров была рассчитана $f(x)$ – плотность распределения населения по уровню среднедушевого среднемесячного дохода:

$$(9) \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot p} \cdot 0,16 \cdot x} \cdot \exp\left(-\frac{(\ln x - 9,46)^2}{0,05}\right), \quad x > 0.$$

Для построения функции издержек были использованы данные, источником которых послужили отчеты для ФСФР РФ ОАО «Волгоградэнергообл» 2007-2009 гг. Функция издержек представлена в виде модели парной линейной регрессии: $C = c \cdot Q + F$, где Q – объем полезного отпуска электроэнергии, кВт-ч; C – валовые издержки, тыс. руб.; c – предельные издержки, тыс. руб. за кВт-ч; F – постоянные издержки, тыс. руб.

Поскольку для данной работы была предоставлена информация о совокупных издержках только одного гарантирующего поставщика в лице ОАО «Волгоградэнергообл» без диверсификации их по отдельным группам потребителей, была принята гипотеза о том, что предельные издержки у всех ГП Волгоградской области по всем группам потребителей одинаковы. Постоянные издержки скорректируем на долю потребления электроэнергии, приходящейся на население по отношению к общему отпуску электроэнергии, на число месяцев в каждом наблюдаемом периоде и на численность потребителей ОАО «Волгоградэнергообл». Удельный вес населения в объеме отпуска электроэнергии предприятиями коммунальной энергетики Волгоградской области составляет около 35%². ОАО «Волго-

¹ Параметры распределения m и s^2 были рассчитаны при помощи пакета прикладных программ Maple.

² Богачкова Л.Ю., Москичев Е.А. «Реструктуризация и реинтеграция производства в современной Российской электроэнергетике».

градэнергосбыт» осуществляет услуги по сбыту электрической энергии на территории Волгоградской области, обслуживает 8003 юридических лица и предпринимателей без образования юридического лица, а также 290159 физических лиц (население)¹.

В результате вычислений в пакете «*STATISTICA*» получается функция издержек следующего вида:

$$(10) C = 0,0007 \cdot Q + 0,052,$$

где $c = 0,7$ руб./кВт-ч; $F = 52,0$ рублей в месяц в расчёте на одного жителя г. Волгограда в месяц. Значит, увеличение объема выпуска электроэнергии на 1 кВт-ч в краткосрочном периоде обойдется компании в 70 копеек. Кроме того, независимо от объема выпуска компания тратит на поддержание мощностей в рабочем состоянии в расчете на одного человека 52 рубля в месяц.

Результатом решения системы уравнений (5)² с заданными параметрами $Q_{\text{соц}} = 35$ кВт-ч и $P_{\text{соц}} = 1,5$ руб./кВт-ч является следующий двухставочный тариф на электроэнергию:

$$\begin{cases} P_{\text{соц}} = 1,5 & \text{за первые } Q \leq 35, \\ P_1 = 3,11 & \text{за остальные } Q > 35. \end{cases}$$

Действующий в 2010 году тариф на электроэнергию составляет 2,30 руб./кВт-час. В данном тарифообразовании будут участвовать все потребители, относящиеся к категории «население», при этом расходы на оплату электроэнергии увеличатся примерно только у 18% потребителей, имеющих доход выше 20132,66 рублей.

¹ *Ежеквартальный отчет эмитента ОАО «Волгоградэнергосбыт» за 1 кв. 2009 г.*

² *Система уравнений была решена численными методами, реализованными на языке Си.*

Представляется, что социальная норма потребления поможет не только справиться с проблемой перекрестного субсидирования населения промышленностью, но и заставит абонентов задуматься об экономии электроэнергии. Благополучие растёт, и граждане могут покупать себе различные электроприборы. На этом фоне существенно возрастает электропотребление. Это приводит не только к увеличению нагрузок на сетевое хозяйство, но и к неблагоприятным экологическим последствиям. К тому же складывается ситуация, которую многие эксперты считают несправедливой: малообеспеченные граждане расходуют электроэнергию максимально экономно, а состоятельные – не задумываясь о расходах на свет. Но платят обе категории по одинаковому тарифу. Предложенный в работе тариф позволит исправить сложившуюся ситуацию.

Литература

1. АЙВАЗЯН С. А., МХИТАРЯН В. С. *Прикладная статистика и основы эконометрики*. – М.: «Юнити», 1998.
2. ЗАБЕЛЛО Е. П. *О тарифной политике в электроэнергетике на современном этапе и на ближайшую перспективу* // Промышленная энергетика. – 2005. – №11. – С. 2–6.
3. ЗАЙЦЕВА Ю. В. *Оптимизационные модели многоставочных тарифов на электроэнергию* // Управление большими системами. – 2008. – Выпуск 20. – С. 33–45.
4. ОРЛОВ В. С., ПАПКОВ Б. В., ЕРШОВ Е. П., Копалов Л. Н. *Анализ электропотребления и тарифов для бытовых потребителей* // Промышленная энергетика. – 1997. – №6. – С. 8–10.
5. *Официальный сайт ОАО «Волгоградэнергосбыт»*. – URL: www.energосale34.ru.
6. *Официальный сайт Федеральной службы государственной статистики*. – URL: www.gks.ru.
7. ШАГОВ А. В., КОЛБИН В. В. *О некоторых подходах к управлению тарифной политикой в топливно-*

энергетическом комплексе региона // Экономика и математические методы. – 2005. – Том 41, №1. – С. 54–64.

MODELLING THE TWO-RATE ELECTRIC POWER TARIFF TAKING INTO ACCOUNT THE SOCIAL CONSUMPTION NORM: THE CASE OF VOLGOGRAD CITY

Anastasia Eisfeld, Volgograd State University, Volgograd, PHD student (aeisfeld@yandex.ru).

Abstract: This article describes the current processes of liberalization of the electric power industry in Russia. By 2011, according to Russian government plan, 100% of electric power in the wholesale market will be sold at open prices. These open prices will be propagated to retail markets of electric power. In the context of completion of “RAO UES of Russia” reengineering the problem of consumers (first of all, citizens) interests’ protection becomes topical. In this paper we suggest a mathematical model of the electric power tariff. Given this tariff consumers buy energy within the established social norm at lower price, and over it – at higher, economically reasonable, price. We provide an example of the suggested tariff for the case of Volgograd electric power retail market.

Keywords: electric power industry, electricity tariffs, mathematical models of tariffs.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии В. Д. Секериным

УДК 021.8 + 025.1
ББК 78.34

ПОВЫШЕНИЕ ТОЧНОСТИ УПРАВЛЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРНЫМ РЕЖИМОМ В УСТАНОВКАХ ВЫРАЩИВАНИЯ КРИСТАЛЛОВ

Гоник М. М.¹, Боевкин В. И.²

*(Московский государственный технический
университет им. Н. Э. Баумана, Москва)*

Рассматривается многосвязная система автоматического управления температурным режимом в установках выращивания кристаллов, позволившая обеспечить регулирование температуры вокруг растущего кристалла с точностью 0,05–0,1 градусов на протяжении всего ростового цикла. Проектирование системы управления основано на предварительном исследовании и выборе информационной структуры многосвязной системы с целью уменьшения взаимного влияния каналов в объекте управления и изменения его параметров в процессе роста кристалла. Исследование системы и определение стратегии управления проводится на базе динамической численной двумерной модели тепломассопереноса при кристаллизации. Управление многомерным объектом осуществляется с помощью отдельных ПИД-регуляторов.

Ключевые слова: управление температурным режимом, многосвязная система, исследование информационной структуры.

¹ Гоник Марк Михайлович, аспирант (mark_tg@inbox.ru).

² Боевкин Виктор Иванович, доктор технических наук, профессор.

1. Введение

Выращивание кристаллов из расплавов представляет собой процесс управляемой кристаллизации [7]. Горячий расплав перемещается в холодную зону в строго определенных тепловых условиях, которые создаются и поддерживаются системой управления. Автоматическая система должна обеспечивать заданную скорость кристаллизации, форму фронта, осевой и радиальный градиенты температур вблизи него. Точность поддержания этих параметров определяет качество растущего кристалла. На сегодняшний день требование к точности управления температурой внутри зоны (вблизи фронта) кристаллизации (рис. 1) составляет $0,1\text{ }^{\circ}\text{C}$ на протяжении всего ростового цикла [9]. Однако при выращивании кристаллов традиционными методами такое качество управления не всегда обеспечивается. Одна из причин заключается в том, что температура внутри зоны кристаллизации не измеряется прямым способом и не регулируется системой управления. Конструкция ростовой установки позволяет размещать термодатчики и управляющие нагреватели лишь на удалении от непосредственного объекта. В результате приходится определять оптимальную программу или стратегию управления температурами на удалении от зоны кристаллизации (такими как T_{11} , T_{12} , T_{13} , T_{14}), которая обеспечивала бы необходимый температурный режим внутри неё [2, 17]. Точность решения такой задачи во многом зависит от применяемых моделей теплопереноса и на сегодняшний день в лучшем случае составляет $1\text{--}2$ градуса [18]. В процессе эксперимента нестационарные тепловые процессы в зоне кристаллизации остаются неизвестными. Точность управления температурным режимом оценивается уже после ростового цикла по качеству выращенного кристалла.

В настоящей работе рассматривается система управления, которая позволяет регулировать температуру не на удалении от растущего кристалла, а вблизи него, причем с требуемой точностью. Измерительные датчики размещаются вокруг зоны кри-

сталлизации; дополнительно используется нагреватель, погруженный в расплав и приближенный к фронту кристаллизации (рис. 1).

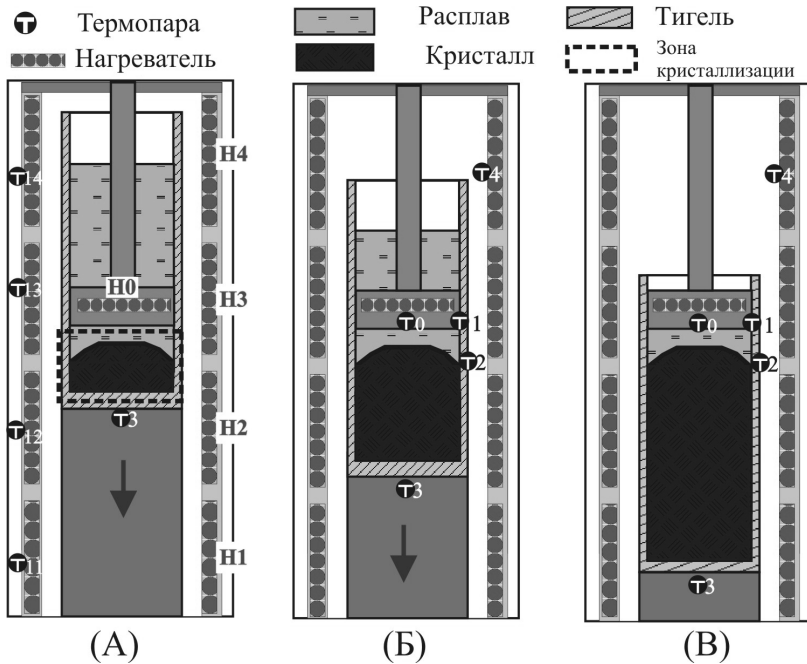


Рис. 1. Схема установки кристаллизации на (А) – начальном, (Б) – среднем, (В) – конечном этапах ростового цикла

Такая структура позволяет повысить точность определения стратегии управления. Обратная тепловая задача имеет более простое и корректное решение для температуры на границах зоны кристаллизации, чем на удалении от нее. Однако при этом усложняется задача регулирования. Приближение термопар к кристаллу и друг к другу с одновременным удалением от нагревателей приводит к увеличению инерционности и взаимного влияния каналов в таком многомерном объекте управления. Применение традиционных ПИД регуляторов для такой систе-

мы становится проблематичным. Достижение высокого качества регулирования требует специальной информационной структуры системы управления [8, 11]. В настоящей работе авторами предлагается методика исследования и выбора такой структуры с целью уменьшения взаимного влияния каналов в объекте управления и изменения его параметров в процессе роста кристалла. Исследование структуры системы управления, а также определение стратегии управления, производится на базе численной динамической модели теплопереноса при кристаллизации. Производится синтез и натурные испытания многосвязной системы регулирования на базе отдельных ПИД-регуляторов с постоянными коэффициентами.

2. Проектирование многосвязной системы управления температурным режимом

2.1. ИССЛЕДОВАНИЕ МНОГОСВЯЗНОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

Многосвязная система автоматического управления (далее МСАУ) состоит из пяти нагревателей: четырех цилиндрических «фоновых», удаленных от кристалла, и одного плоского, погруженного в расплав (рис. 1) [4]. МСАУ должна поддерживать температуру в зоне роста так, чтобы при опускании с постоянной скоростью тигля с расплавом и кристаллом выполнялись требования к параметрам кристаллизации. Задача управления осложняется нестационарным характером объекта управления вследствие перераспределения в объеме материалов с разными теплофизическими свойствами в процессе роста кристалла. Осевой градиент температуры контролируется и регулируется по показаниям термопар, размещенных на оси установки в погруженном нагревателе T_0 и доньшке тигля T_3 . При этом доньшко тигля вместе с термопарой перемещается вниз относительно неподвижных нагревателей, что также определяет нестационарность объекта в канале управления температурой T_3 . Прежняя структура системы управления [4] обеспечивала регу-

лирование этих температур с помощью фоновых нагревателей Н2 и Н3. Стратегия управления определялась по одномерной модели и представляла константу для T_0 и линейный сигнал для T_3 . Остальные фоновые нагреватели поддерживали постоянными рядом с собой температуры (T_{11} и T_{14}). Погруженный нагреватель в управлении не участвовал, выделяя постоянную мощность. Точность управления температурами на оси T_0 и T_3 с помощью ПИД-регуляторов в предыдущей системе в процессе роста кристалла варьировалась от 0,5 до 1,5 градусов. Качество управления заметно ухудшалось при увеличении размера кристалла.

Для исследования многосвязной системы управления было разработано специализированное программное обеспечение (далее ПО) [5]. Численная динамическая двумерная модель теплопереноса [3, 13] была совмещена с дискретной системой управления. Модель основана на решении уравнения теплопроводности с учетом фазового перехода (задача Стефана) при наличии внутренних источников тепла:

$$(1) \quad r(T) \frac{\partial e(T)}{\partial t} = \nabla(k(T)\nabla T) + Q(t),$$
$$r(T) = \begin{cases} r_1, & T < T_\varepsilon, \\ r_2, & T > T_\varepsilon; \end{cases} \quad k(T) = \begin{cases} k_1(T), & T < T_\varepsilon, \\ k_2, & T > T_\varepsilon; \end{cases}$$
$$e(T) = \begin{cases} e(T_0) + c_1(T)T, & T < T_\varepsilon, \\ e(T_\varepsilon) + q_\varepsilon + c_2(T)(T - T_\varepsilon), & T > T_\varepsilon; \end{cases}$$

где T_κ – температура кристаллизации; ε – удельная энтальпия; q_κ – удельная теплота кристаллизации. Теплопроводность k , теплоемкость c , плотность ρ материалов являются функциями температур и имеют разрыв при фазовом переходе. При численном решении функции заменяются кусочно-линейными.

Расчетная область (рис. 2) включает кристаллизуемый материал (германий, кремний, висмут) и элементы конструкции из кварца, графита, молибдена, алунда, графитового войлока. Для решения уравнений применяется метод конечных элементов; форма ячейки сетки – треугольная. Задача рассматривается как

осесимметричная. Граничные условия на верхней, нижней и боковой поверхностях задаются 3 рода – конвективный теплообмен между поверхностью и внешней средой. В случае, когда модель включает область конструкции установки с водяным охлаждением, граничное условие на нижней поверхности задается 1 рода (постоянная температура). В качестве начальных условий используется решение стационарной тепловой задачи, которое находится с помощью той же модели.

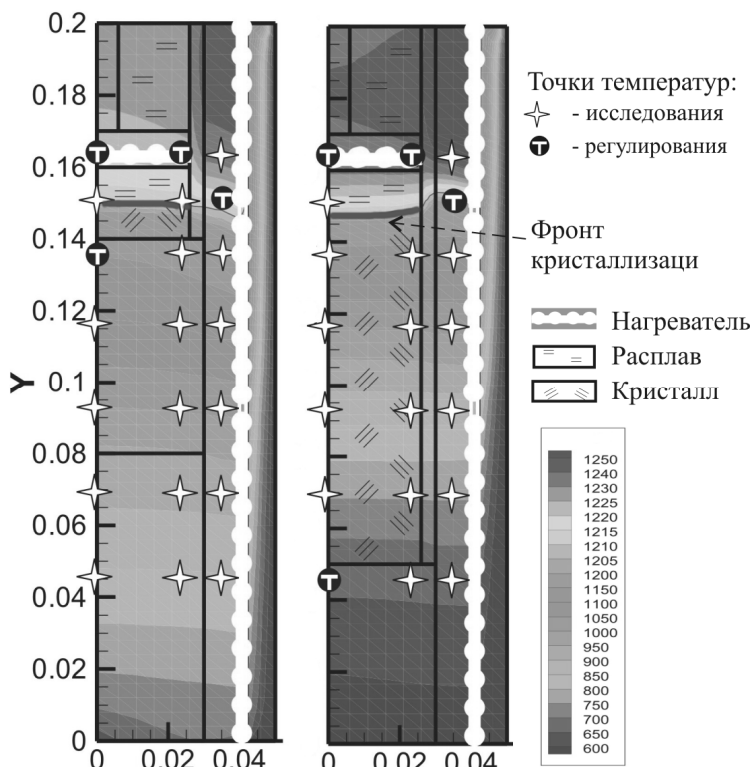


Рис. 2. Расчетная область для 2D модели теплового поля в ростовой установке на начальной (А) и конечной (В) стадиях кристаллизации

Внутренние источники тепла Q могут размещаться в любой ячейке сетки модели. Источники объединяются в рамках нагревателей, мощности которых являются управляющими воздействиями в автоматической системе. Значения мощностей могут изменяться и в ручном режиме, что использовалось для проведения идентификаций объекта и исследования многосвязной системы управления. Дополнительно в модель введен источник тепла, распределенный вдоль фазовой границы. Тепловыделение на поверхности фронта кристаллизации позволяет исследовать влияние скрытой теплоты кристаллизации на процесс управления температурой в квазистационарном режиме кристаллизации. В качестве управляемых значений могут выбираться температуры в любом узле сетки модели, в том числе внутри исследуемой зоны кристаллизации.

Существующие модели [15, 16], аналогичные рассматриваемой, используют в качестве управляющих воздействий изменения граничных условий 2 рода (внешний поток) на боковой стенке. Такой подход не позволяет адекватно моделировать многомерную систему управления, особенно в нашем случае, когда используется погруженный в расплав нагреватель Н0. Другим преимуществом рассматриваемой модели является возможность проведения расчетов в масштабе реального времени. Так, при разбиении сетки на ячейки с шагом 1 мм (при размере всей области 200×45 мм) массив температур во всех ее узлах рассчитывается в несколько раз быстрее шага дискретизации системы. Такая возможность обусловлена тем, что модель не учитывает конвекцию в расплаве, которая существенно подавлена в тонком слое расплава под погруженным нагревателем и не влияет на теплоперенос.

С помощью ПО нами было проведено более 1000 идентификаций пар управления «нагреватель – температура» в разных точках исследуемого объекта с распределенными параметрами, на разных стадиях технологического процесса (рис. 2) для разных вариантов конструкции установки и геометрии фоновых нагревателей. Информационная структура системы управления

выбиралась в результате компромисса при решении в принципе противоположных задач. С одной стороны точки регулирования должны располагаться как можно ближе к фронту кристаллизации и, следовательно, друг к другу для того, чтобы в большей степени определять его положение и форму, а также градиент температур. С другой стороны эти точки должны быть как можно дальше разнесены друг от друга для того, чтобы минимизировать взаимное влияние между каналами в объекте управления и обеспечить высокую точность управления с помощью сепаратных ПИД регуляторов. При этом изменение матричной передаточной функции объекта управления должно быть в допустимом диапазоне, который позволял бы успешно использовать регуляторы с постоянными коэффициентами.

Анализ степени связности в многомерном объекте производился с помощью матрицы Бристоля Λ [10], которая характеризует изменения коэффициентов усиления в сепаратных разомкнутых контурах при замыкании всех остальных контуров в многосвязной системе. При этом элемент λ_{ij} матрицы Λ определяется следующим образом:

$$(2) \quad \lambda_{ij} = \frac{\left(\frac{\partial y_i}{\partial u_i} \right)_{\text{все контуры разомкнуты}}}{\left(\frac{\partial y_i}{\partial u_i} \right)_{\text{все контуры кроме } u_i \text{ замкнуты}}}, \quad i, j = 1, 2, \dots, m,$$

где y – выход разомкнутой системы, а u – управляющий сигнал. При уменьшении взаимного влияния в объекте диагональные элементы λ_{ii} матрицы Бристоля стремятся к единице, а недиагональные λ_{ij} – к нулю. Единичная матрица соответствует автономной системе управления. Сумма элементов любой строки матрицы Бристоля или любого столбца равна единице [10]. На рис. 3 приведены матрицы Бристоля для четырех разных объектов управления, отличающихся степенями связности каналов.

Для выбранной таким образом информационной структуры системы управления с помощью модели изучены особенности дискретно-непрерывной системы с ПИД-регуляторами, исследовано явление выделения теплоты кристаллизации как внеш-

него возмущения для системы управления, выявлены проблемы регулирования в многосвязной системе.



Рис. 3. Передаточные функции объекта и матрицы Бристоля для двух информационных структур системы управления, отличающихся геометрией нагревателей, на начальной (А) и конечной (В) стадиях кристаллизации

Так же на модели определена стратегия управления температурами в точках, выбранных для регулирования в реальной установке. Стратегия определялась по результатам оптимизации теплового поля на модели установки для нескольких стадий ростового цикла. На рис. 2а изображено «правильное» тепловое поле на начальной стадии роста кристалла, при котором фронт кристаллизации имеет заданное положение и форму при требуемой величине градиента температур. На рис. 2б изображено поле температур на последней стадии кристаллизации, при

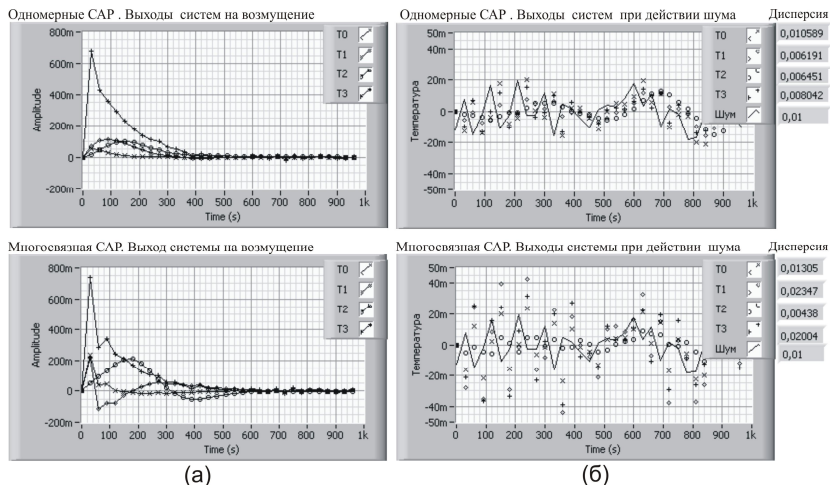
котором фронт имеет нежелательную (вогнутую) форму при правильном положении и градиенте температур. Оптимизации поля проводилась несколькими способами. Первый способ представлял собой вариации мощностей нагревателей в ручном режиме. Второй – подбор стратегии управления при активизированной системе регулирования температур вокруг зоны кристаллизации. Третий способ заключался в том, что система регулирования настраивалась на температуры в точках внутри зоны кристаллизации, через которые должен проходить фронт кристаллизации и соседние изотермы, определяющие градиент температур. При подаче соответствующих входных сигналов, установившееся состояние такой системы определяло заданный температурный режим в установке в целом и необходимые температуры в исследуемых точках в частности.

2.2. СИНТЕЗ МНОГОСВЯЗНОЙ СИСТЕМЫ РЕГУЛИРОВАНИЯ

Синтез многосвязной системы автоматического регулирования (далее МСАР) проводился с помощью созданного нами программного обеспечения [5] в среде *Labview*, использующего специализированные библиотеки проектирования систем управления *Control*, *Identification*, *Simulation* [14]. Синтез основан на определении коэффициентов дискретных ПИД-регуляторов для отдельных систем и последующей их корректировки по результатам моделирования многосвязной системы управления. Дискретный регулятор проектируется по аналоговому прототипу, так как в процессе экспериментов шаг дискретизации варьируется оператором от 10 до 30 секунд, и удобно использовать неизменяемые коэффициенты аналогового регулятора. Учитывая рекомендации специалистов [12] о том, что значение частоты дискретизации должно быть в 10 раз больше, чем значение полосы пропускания системы, определяется требование к длительности переходного процесса в замкнутой системе в пределах 400–600 с.

Точность регулирования складывается из точности слежения за входным сигналом при действии внешних возмущений и результата прохождения случайных сигналов через систему. Линейный входной сигнал для температуры T_3 на нижней границе кристалла определяет в системе с ПИД регуляторами наличие астатизма, которое зависит от коэффициента интегрального члена регулятора. Внешними возмущениями для рассматриваемой системы являются выделение теплоты кристаллизации, скачки напряжения в электросети, изменение температуры и давления в системе охлаждения установки, турбулентные потоки газа в рабочей камере. Синтез МСАР проводился именно с целью компенсации таких возмущений (рис. 4а). Выявлен недостаток проектирования предыдущей МСАР, заключавшийся в том, что выбор коэффициентов регуляторов в сепаратных системах осуществлялся по виду переходных процессов только при изменении входных сигналов. Это приводило к известной проблеме сокращения полюсов объекта нулями регулятора. В результате характеристическое уравнение замкнутой системы содержало малые по модулю корни, что приводило к плохому качеству компенсации внешних возмущений и воздействий других сепаратных контуров управления. Случайные сигналы в системе присутствуют вследствие шума при измерении температуры. Дисперсия случайного сигнала на выходе системы пропорциональна дисперсии входного сигнала, шагу дискретизации и эквивалентной полосе пропускания системы [1]. Более того, как показало моделирование в многосвязной системе, дисперсия сигнала на выходе может существенно возрастать в зависимости от перекрестных связей в объекте управления (рис. 4б). Шум при измерении управляемого сигнала приводит к флуктуациям управляющего сигнала, что является крайне нежелательным при выращивании кристаллов. Для решения этой проблемы предложена методика проектирования цифрового фильтра для обработки управляемого сигнала. Методика основана на выборе частоты среза, при которой система регулирования сохраняет свои динамические свойства [6].

Предложено также применять предварительную фильтрацию входного сигнала для уменьшения резких скачков управляющего сигнала.



(а)

(б)

Рис. 4. Регулирование в одномерной и многовязной системах.

Стабилизация выходного сигнала при действии единичных возмущений на объект (а) и в условиях прохождения шума через систему (б). Шаг дискретизации – 30 с

Коэффициенты регуляторов выбирались по совокупности предъявляемых к системе требований. Шаг дискретизации применяли наименьшим возможным, несмотря на повышение износа измерительного оборудования. Программно-аппаратными средствами обеспечена высокая точность относительных измерений температур 0,01 °С и формирования напряжения на нагревателях 0,01 В [5]. Предложены решения по уменьшению времени между измерением и подачей управляющего сигнала в контурах регулирования. Методика синтеза МСАР и соответствующее программное обеспечение испытывались на созданной численной динамической модели.

Натурные испытания системы управления проводились на исследовательской установке выращивания кристаллов, сконст-
222

руированной с учетом предложенной новой информационной структуры системы управления. Эксперименты проводились по выращиванию кристалла висмута. Скорость кристаллизации и опускания тигля с расплавом и кристаллом была выбрана 20 мм в час. Темп охлаждения температуры T_5 около нижней границы кристалла составил 23 градуса в час.

3. Результаты проектирования и испытаний многосвязной системы управления температурным режимом

Новая информационная структура МСАУ выбрана так, что дополнительно к температурам T_0 и T_3 на оси кристалла регулируются еще T_1 и T_2 возле его боковой поверхности (рис. 1). Внесены изменения в геометрию нагревателей относительно предыдущей конструкции установки. Предложены новые пары управления между нагревателями и термопарами. Новая структура обеспечивает меньшую взаимосвязь в каналах объекта управления и изменение его параметров в процессе роста кристалла, чем структура, основанная на предыдущей конструкции ростовой установки. На рис. 3 приведены передаточные функции и соответствующие им матрицы Бристоля для двух таких структур. Почти все элементы в матрице Бристоля для новой структуры (структура 2) на порядок меньше аналогичных элементов для предыдущей (структура 1). Диагональные элементы ближе к единицам, а недиагональные к нулям. Изменения параметров передаточной функции объекта в процессе роста кристалла находятся в пределах 20–30%, что позволяет успешно применять ПИД-регуляторы с постоянными коэффициентами.

Определена стратегия управления температурами для такой МСАУ. Получены теоретически ожидаемые результаты: все температуры вокруг зоны кристаллизации должны быть постоянными в течение ростового цикла. Определены их конкретные значения для выращивания кристалла германия. Также на двумерной модели получено подтверждение результата, опреде-

ленного ранее на одномерной модели, что температуры T_3 должна уменьшаться по линейной функции. Однако выявлено, что углы наклона этих функций отличаются (рис. 5). Более того, отличаются результаты, получаемые на двумерной модели для различных структур системы управления, особенно на стадиях роста большого по высоте кристалла. Следовательно, одномерное приближение решаемой задачи не позволяет корректно определить и обеспечить заданный режим кристаллизации, – необходимо использовать двумерную модель.

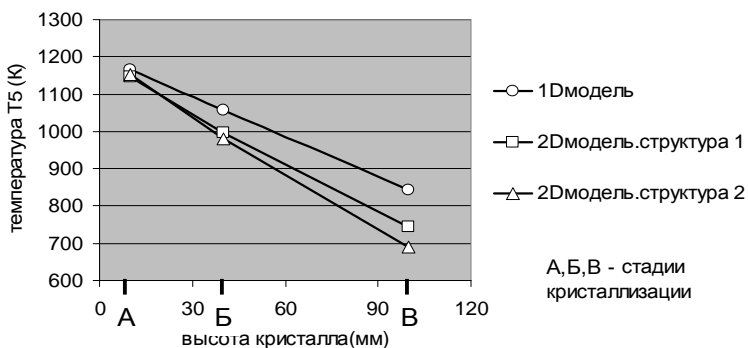


Рис. 5. Стратегии управления температурой T_3 , определенные на 1D и 2D моделях

Передаточная функция многомерного диагонального регулятора R для системы управления с новой информационной структурой составила:

$$R = \begin{bmatrix} R_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_3 \end{bmatrix},$$

$$R_0(s) = 1 + \frac{1}{100s}, \quad R_2(s) = 4 + \frac{4}{100s},$$
$$R_1(s) = 3 + \frac{3}{100s}, \quad R_3(s) = 6 + \frac{6}{200s} + \frac{60s}{0.1s + 1};$$

где R_0, R_1, R_2, R_3 – отдельные регуляторы в каналах управления температурами T_0, T_1, T_2, T_3 .

Во всех каналах, кроме одного, используются ПИ-регуляторы. ПИД-алгоритм применяется только для регулирования температуры в доньшке тигля T_3 . Регулятор R обеспечивает заданное качество управления для всего диапазона изменения параметров объекта в процессе роста кристалла. Теоретические расчеты и моделирование показали (рис. 4), что время переходных процессов в многосвязной системе составляет желаемые 300–500 с, внешние возмущения не приводят к колебаниям в системе, величина ошибки за счёт неточности астатизма при управлении температурой T_3 не превышает 0,05 °С. При этом флуктуации управляемых сигналов, вызванные шумом при измерении, даже при шаге дискретизации 30 с, находятся в диапазоне 0,05 °С.

Проведенные натурные испытания МСАР подтвердили теоретические результаты. Точность стабилизации температур вокруг зоны кристаллизации и слежения за линейной уставкой температуры T_3 составила 0,05–0,1 градусов. Длительность переходных процессов находилась в диапазоне 500–600 с. На рис. 6 приведены графики измерения температур T_0 и T_3 на оси кристалла в процессе его роста. Всплески Б1 и Б2 температур на графике T_0 соответствуют тестовым воздействиям на систему потоком воздуха через щели в конструкции исследовательской установки. Система демонстрирует хорошее качество подавления таких возмущений. Графики других трех температур (T_1, T_2, T_4), поддерживаемых постоянными, имеют подобный вид. Переходные процессы А и В относятся к началу и окончанию кристаллизации, когда меняется характер входного сигнала для температуры на доньшке T_3 . Сигнал уставки изменяется плавно с целью уменьшения флуктуаций при этом управляющего на-

пряжения. В процессе экспериментов выявилась проблема выхода управляющих сигналов МСАР из рабочего диапазона напряжений нагревателей. Для предотвращения такой ситуации было определено начальное состояние системы управления, которое обеспечило нахождение напряжений нагревателей в линейном диапазоне на протяжении всего процесса роста кристалла.

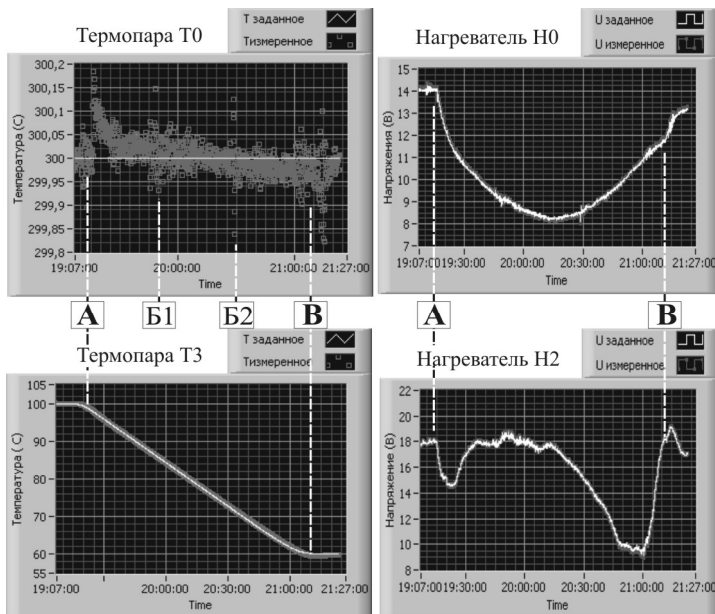


Рис. 6. Графики управляемых температур на оси кристалла T_0 , T_3 и управляющих напряжений на нагревателях в процессе ростового эксперимента.

А, B1, B2, B – стадии кристаллизации

4. Заключение

Разработанная многосвязная система управления используется при выращивании кристаллов и исследовании процессов кристаллизации методом ОТФ (Осевого Теплового потока вблизи Фронта кристаллизации [4]). Одной из сильных сторон системы с практической и экономической точек зрения является то, что она обеспечивает высокую точность управления температурным режимом с помощью обычных ПИД-регуляторов. Относительная простота такого регулирования определяется информационной структурой системы управления, которая исследуется и выбирается на стадии проектирования конструкции ростовой установки. Продолжением данной работы авторы видят построение системы управления неизменяемыми параметрами кристаллизации в процессе ростового эксперимента с помощью созданной модели, работающей в масштабе реального времени.

Литература

1. БЕССЕКЕРСКИЙ В. А. *Цифровые автоматические системы*. – М: Наука, 1976. – 575 с.
2. БУТКОВСКИЙ А. Г. *Методы управления системами с распределенными параметрами*. – М: Наука, 1975. – 568 с.
3. ГАЛАНИН М. П., ГУЗЕВ М. А., НИЗКАЯ Т. В. *Разработка и реализация вычислительного алгоритма для расчета температурных напряжений, возникающих при нагреве металла, с учетом фазовых переходов*. – Препринт ИПМ им. Келдыша РАН. – №139. – Москва, 2005.
4. ГОЛЫШЕВ В. Д., ГОНИК М. А., ЦВЕТОВСКИЙ В. Б., ЛЮБЧЕНКО В. С. *Компьютерное управление выращиванием кристаллов методом ОТФ // Поверхность, рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования*. – 2002. – №5. – С. 49–55.

5. ГОНИК М. М., БОЕВКИН В. И., НИЗКАЯ Т. В. *Программно-технические средства для исследования и управления процессами теплопереноса при росте кристаллов* // Труды конференции «Технические и программные средства систем управления, контроля и измерения» ИПУ РАН, Москва, 10-12 ноября 2008 г. – С. 372–379.
6. ИЗЕРМАН Р. *Цифровые системы управления*. – М: Мир. 1984. – 541 с.
7. ЛОДИЗ Р., ПАРКЕР Р. *Рост монокристаллов*. – М: Мир, 1974. – 540 с.
8. МЕЕРОВ М. В. *Исследование и оптимизация многосвязных систем управления*. – М: Наука, 1986. – 231 с.
9. ПАНОВ П. И. *Построение систем управления и информационно-измерительных модулей высокопроизводительного оборудования для выращивания монокристаллического кремния*: Дис. канд. техн. наук. – Красноярск, 2004. – 195 с.
10. РЭЙ У.. *Методы управления технологическими процессами*. – М.: Мир, 1983. – 368 с.
11. СОБОЛЕВ О. С. *Методы исследования линейных многосвязных систем*. – М.: Энергоатомиздат, 1985. – 120 с.
12. СОЛОДОВНИКОВ В. В., ПЛОТНИКОВ В. Н., ЯКОВЛЕВ А. В. *Теория автоматического управления техническими системами*. – М.: МГТУим. Баумана, 1993. – 492 с
13. GONIK M. A. et al. *Development of a model for on-line control of crystal growth by the AHP method* // Journal of Crystal Growth. – 2007. – Vol. 303, №1. – P. 180–186.
14. *Labview Control Design Toolkit User Manual*. – National Instruments, 2006. – 211 p.
15. LUN L., YECKEL A., DERBY J., DAOUTIDIS P. *Control of interface shape of cadmium zinc telluride grown via an electrodynamic gradient freeze furnace* // Proceedings of the IEEE 2007 Mediterranean Conference on Control and Automation (MED2007), Athens, Greece, June 27-29, 2007.
16. MARGULIES M., WITOMSKI P., DUFFAR T., *Optimization of the bridgman crystal growth process* // J. Cryst. Growth.

2004. – Vol. 266, №1–3. – P. 175–181.

17. METZGER M. *Optimal control of crystal growth process* // Journal of Crystal Growth. – 2001. – Vol. 230, №1. – P. 210–216.
18. REED M. D. et. al. *Computational modeling of heat transport in a multi-zone high-pressure vertical electro-dynamic gradient CdZnTe furnace* / Journal of Crystal Growth. – 2006. – Vol. 289, №2. – P. 494–501.

INCREASING THE CONTROL ACCURACY OF TEMPERATURE CONDITION IN CRYSTAL GROWTH PLANT

Mark Gonik, Bauman Moscow State Technical University, Ph.D. student (mark_mg@inbox.ru).

Victor Boevkin, Bauman Moscow State Technical University, Doctor of Science, professor

Abstract: We consider a multidimensional (MIMO) temperature control system for the crystal growth plant. The control system regulates the temperature around the growing crystal with accuracy of 0.05-0.1 °C during the whole growth process. Design of the control system is based on the preliminary investigation and choice of the information structure of MIMO system to decrease plant parameters changes and channels interconnection during the crystal growth. The analysis of the system and the solution of the control problem are performed with the aid of the dynamic computational 2D model of heat and mass transfer in the process of crystallization. Separated PID regulators are used for MIMO plant control.

Keywords: temperature condition control, multidimensional (MIMO) system, investigation of information structure.

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии Н. Н. Бахтадзе*

УДК 519.86
ББК 22.18

МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНВЕЙЕРНЫХ БИЗНЕС-ПРОЦЕССОВ

Куприянов Б. В.¹

(Учреждение Российской академии наук
Институт проблем управления РАН, Москва)

В статье предлагается определение конвейерного бизнес-процесса и модель, позволяющая получать вычислимые характеристики конвейера. К таким характеристикам относятся: производительность конвейера; время выхода в стационарный режим работы; нахождение конвейерной операции, определяющей производительность конвейера. Описан алгоритм вычисления характеристик. Проведен структурный анализ работы конвейера. Показано, что поведение конвейера определяется набором производных от него линейных конвейеров. Доказывается соответствующая теорема. Приводятся графики и диаграммы, описывающие работу конвейеров.

Ключевые слова: бизнес-процесс, модель, конвейер, производительность, диаграмма, граф, рекурсия.

1. Введение

В настоящее время значительное распространение получило моделирование бизнес-процессов. Существует множество видов моделей и систем моделирования. Среди наиболее известных BPwin (IDEF0, IDEF3, DFD – модели), ARIS и другие. Основной целью систем моделирования является предоставить инструмент для полного и формального описания процесса. Степень формализации и детализации модели зависит от по-

¹ Куприянов Борис Васильевич, кандидат технических наук, доцент (Москва, ул. Профсоюзная, д. 65, kuprianovb@mail.ru, тел. (495) 334-89-70).

требностей клиента и возможностей инструмента. Второй задачей моделирования является возможность использования модели для изучения поведения и получения числовых характеристик процесса. Так, например, VRwin [4] позволяет осуществлять функционально-стоимостное моделирование. Оно основывается на постатейном распределении параметризованных (оцифрованных) затрат времени и финансовых ресурсов, связанных с осуществлением тех или иных функций. Функционально-стоимостное моделирование осуществляется и в системе моделирования ARIS. Разрешимость задачи получения той или иной числовой оценки бизнес-процесса вступает в естественное противоречие с общностью модели. Чем более обобщенная модель бизнес-процесса, тем меньше можно получить результатов в численном виде. Естественным путем решения данной проблемы является определение суженных классов бизнес-процессов, для которых возможно получение существенных числовых характеристик по описанию модели. В настоящей статье предлагается такой класс бизнес-процессов, названный «конвейерные бизнес-процессы» [3, 5].



Рис. 1. Конвейерный процесс производства табуреток

Рассмотрим пример простейшего конвейерного процесса – производство табуреток. Данное производство представляет собой последовательность фиксированного набора следующих операций: строгание заготовок, распиловка заготовок, сколачивание табуретки, покраска табуретки, контроль качества. Последовательность операций отражена на рис. 1.

Характерной особенностью данного процесса является следующее:

1. Каждая операция осуществляется отдельным рабочим (собственным «механизмом реализации»).
2. Каждая операция начинается после того как завершается

предыдущая (обработал один комплект заготовок – приступил к следующему).

3. Каждая операция начинается после того как завершится обработка текущего комплекта и поступит комплект от предыдущего рабочего (спусковая функция).

Более формально конвейерный процесс можно представить как конечный ориентированный ациклический граф. Вершина графа имеет структуру, представленную на рис. 2.

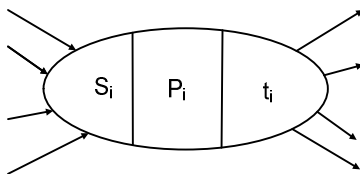


Рис. 2. Вершина ациклического графа, определяющего конвейер

Здесь P_i – идентификатор некоторой операции; t_i – время выполнения операции и S_i – некоторая вычислимая спусковая функция, определяющая время начала выполнения операции. Каждая операция реализуется своим исполнительным механизмом. Дуги графа определяют отношения предшествования операций. Граф может иметь в общем случае несколько входных и выходных вершин. Каждая операция, определяемая вершиной графа, функционирует в конвейерном режиме следующим образом: на основании отношений предшествования, определяемых входными дугами и спусковой функцией, определяется момент времени запуска операции. Далее после выполнения операции через время t_i снова вычисляется спусковая функция и снова запускается выполнение операции, и так до бесконечности. Конкретное определение спусковой функции зависит от типа конвейера и будет рассмотрено ниже.

Конвейерные бизнес-процессы в том их определении, как это сделано, являются широко распространенными. Такие бизнес-процессы выполняются многократно и продолжительное время. Это соответствует той реальности, что предприятие, будучи созданным изначально для производства определенной продукции, ежедневно годами осуществляет некоторый бизнес-

процесс, связанный с производством этой продукции. Схематично работу предприятия можно представить следующим образом рис. 3.

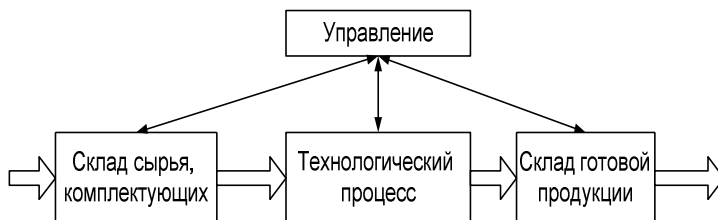


Рис. 3. Схема производственного предприятия

Если входной склад осуществляет бесперебойную поставку сырья и/или комплектующих, а выходной склад – бесперебойный прием готовой продукции, то в этом случае достаточно сложный технологический процесс при некоторых допущениях функционирует как конвейерный.

2. Модель конвейера

Рассмотрим конечный ориентированный ациклический граф $G = (A, E)$ с несколькими начальными вершинами и одной конечной. $A = \{a_1, a_1, \dots, a_n\}$ – множество вершин графа, а E – множество дуг, т. е. пар (a_i, a_j) , определяющих отношение инцидентности вершин графа. Вершина a_j называется начальной, если не существует вершина $a_i \in A$ такая, что $(a_i, a_j) \in E$. Вершина a_j называется конечной, если не существует вершина $a_i \in A$ такая, что $(a_j, a_i) \in E$. Без ограничения общности будем считать, что $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ – множество начальных вершин, а a_n – конечная вершина. Будем считать граф связным в том смысле, что в любую вершину существует путь из некоторой начальной вершины и из любой вершины графа существует путь в конечную вершину. Далее везде по тексту статьи, если не оговорено противное, под словом «граф» будет подразумеваться граф с определенными выше свойствами.

Предположим, что каждой вершине графа соответствует некоторая операция a_i и множество E дуг графа определяют отношение предшествования операций. Если операция имеет несколько предшествующих ей операций, то начало выполнения операции определяется спусковой функцией.

Для описанного выше графа $G = (A, E)$ определим конвейер $K = (G, M, T)$ следующим образом: $M = \{m_1, m_2, \dots, m_n\}$ – множество меток вершин графа, определяющих тип вершины. Вершины графа могут быть трех типов.

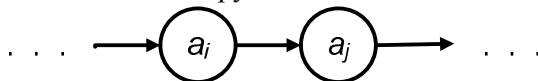
$$m_i = \begin{cases} S - \text{определяет тип вершины "линейная операция";} \\ AND - \text{определяет тип вершины "операция} \\ \qquad \qquad \qquad \text{со спусковой функцией } AND"; \\ OR - \text{определяет тип вершины "операция} \\ \qquad \qquad \qquad \text{со спусковой функцией } OR". \end{cases}$$

Каждый тип определяет свое поведение. $T = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$, $t_i \geq 0$, – множество неотрицательных вещественных чисел, t_i определяет время выполнения операции a_i .

Вершина типа S имеет графическое изображение в виде круга



и определяет некоторую содержательную операцию бизнес-процесса. Время выполнения операции $a_i \in A$ равно $t_i \in T$. Вершине типа S может предшествовать только одна вершина любого типа. Если имеется конструкция вида



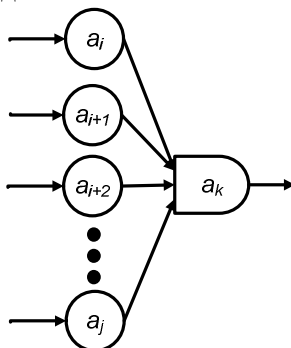
где a_i, a_j – вершины типа S , то операция a_j выполняется циклически после того как завершилось ее выполнение в предыдущем цикле (освобождение механизма реализации) и завершилось выполнение предшествующей ей операции в текущем цикле. Если операция принадлежит множеству начальных операций $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$, то она начинает выполняться в момент времени, равный нулю, и далее выполняется циклически сразу после сво-

его завершения.

Если вершина графа типа *AND* или *OR*, то такой вершине могут предшествовать две и более вершины. Спусковая функция *AND* изображается следующей фигурой



Конструкция вида

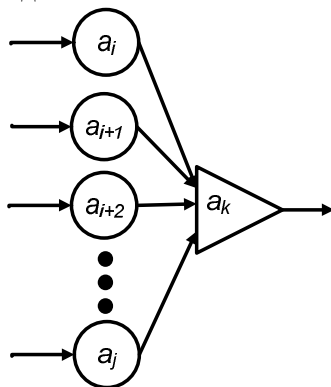


обозначает, что операция a_k начнет выполняться после того как завершится выполнение операций $a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, \dots, a_j$.

Спусковая функция *OR* изображается следующей фигурой



Конструкция вида



обозначает, что операция a_k начнет выполняться после того как завершится выполнение хотя бы одной из операций $a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, \dots, a_j$.

Определение 1. Назовем *конвейером* такую структуру, определяемую ациклическим графом с метками вершин, временами выполнения операций и способом функционирования.

Определение 2. Выполнение последовательности из n операций конвейера в соответствии с отношениями предшествования назовем *циклом конвейера*.

Для упрощения аналитических выкладок воспользуемся некоторыми свойствами конвейера.

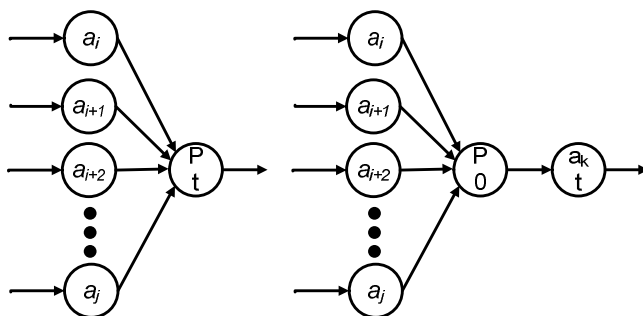


Рис. 4. Выражение операции AND или OR длины t через операцию нулевой длины

Операция типа AND или OR ненулевой длины может быть выражена через операцию нулевой длины так, как это показано на рис. 4. Здесь слева операция P с временем выполнения t заменяется справа на операцию P нулевой длины и операцию a_k длины t . В свою очередь, n -арное определение операции AND или OR можно выразить через бинарное (рис. 5). В дальнейшем мы будем рассматривать операции AND и OR как бинарные нулевой длины, если не оговорено противное.

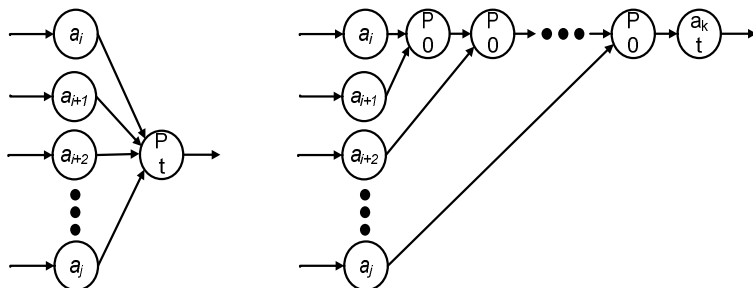


Рис. 5. Выражение n -арной операции (слева) через бинарную (справа). P – операция типа AND или OR

Функционирование конвейера принято описывать диаграммами. Рассмотрим пример приведенного на рис. 6. конвейера и его диаграмму. Граф конвейера состоит из пяти вершин.

Справа от графа в прямоугольниках указаны через тире номера операций и их продолжительности в условных единицах времени. Ширина прямоугольников пропорциональна длительности операций.

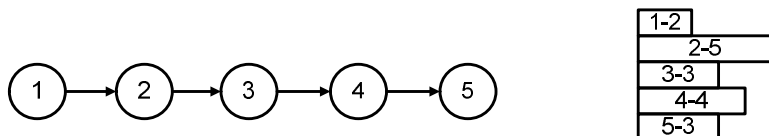


Рис. 6. Пример графа конвейера

Функционирование конвейера может описываться с помощью диаграмм в системе координат (время, цикл) или диаграмм в системе координат (время, операция) [3]. В первом случае диаграмма рисуется в следующей системе координат: по оси x отложено время, а по оси y – номер цикла функционирования конвейера. Считаем, что функционирование конвейера начинается в момент времени, равный 0, и нумерация циклов начинается с нуля. Каждое выполнение операции отражается на такой диаграмме соответствующим прямоугольником с номером операции. Пример временной диаграммы такого конвейерного процесса представлен на рис. 7. На диаграмме отражено 7 конвей-

ерных циклов. Каждый цикл начинается в момент начала выполнения первой операции и заканчивается в момент окончания последней операции (в нашем примере – 5-ой операции). Нулевой цикл – нижний – начинается в момент времени равный нулю и имеет номер 0. Последний рассматриваемый цикл – верхний.

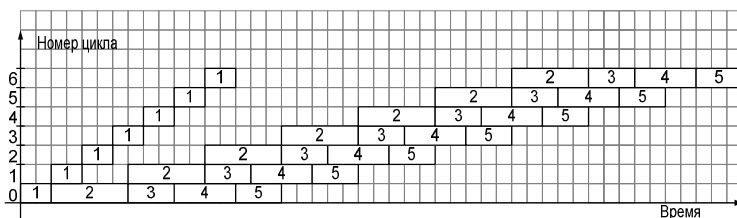


Рис. 7. Пример диаграммы конвейера из семи циклов

Второй вид диаграммы представляется в системе координат: время, операция – вершина графа, т. е. по оси x отложено время, а по оси y – номер операции. На этой диаграмме отмечены те отрезки времени для каждой операции, в которые она выполняется. Например, для описанного выше конвейера диаграмма выглядит так, как представлено на рис. 8.

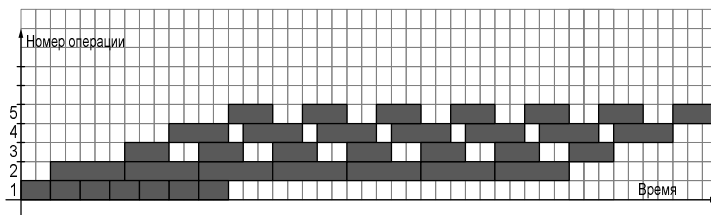


Рис. 8. Диаграмма работы конвейера

В данном случае использование нумерации операций в самой диаграмме необязательно. Исходя из системы координат понятно, какой вид диаграммы используется.

Введем ряд определений.

Определение 3. Диаграмма A является поддиаграммой диа-

граммы B , если время начала и конца исполнения каждой операции в диаграмме A в точности совпадает с временем начала и конца выполнения этой операции в диаграмме B .

Пусть дан конвейер $K = (G, M, T)$.

Определение 4. Будем считать, что фаза начала a_i -ой операции k -го цикла конвейера K есть время начала выполнения a_i -ой операции k -го цикла конвейера K и будет обозначаться как $h_{a_i}^k(K)$, где $1 \leq i \leq n$ и $k \geq 0$.

Определение 5. Будем считать, что фаза окончания (или просто фаза) a_i -ой операции k -го цикла конвейера K есть время окончания выполнения a_i -ой операции k -го цикла конвейера K и обозначим ее как $f_{a_i}^k(K)$, где $1 \leq i \leq n$ и $k \geq 0$.

$$(1) \quad f_{a_i}^k(K) = h_{a_i}^k(K) + t_i.$$

Определение 6. Фазой k -го цикла конвейера K назовем $F^k(K)$ – время окончания выполнения последней операции k -го цикла конвейера, т. е. фазой k -го цикла является

$$F^k(K) = f_{a_n}^k(K).$$

В нашем примере это время окончания 5-ой операции конвейера.

Определение 7. Интервалом a_i -ой операции k -го цикла $d_{a_i}^k(K)$ (для $k \geq 1$) назовем продолжительность времени между моментами окончаний a_i -й операции в k -ом и $(k - 1)$ -ом циклах:

$$d_{a_i}^k(K) = f_{a_i}^k(K) - f_{a_i}^{k-1}(K).$$

Интервал операции определяется как разность фаз операции в соседних циклах.

Определение 8. Интервалом конвейера $D^k(K)$ k -го цикла (для $k \geq 1$) назовем продолжительность времени между моментами окончаний последних операций конвейера в k -ом и $(k - 1)$ -ом циклах:

$$D^k(K) = d_{a_n}^k(K) = f_{a_n}^k(K) - f_{a_n}^{k-1}(K).$$

Интервалом конвейера является разность фаз конвейера в k -ом и $(k - 1)$ -ом циклах. В нашем примере это интервал времени между окончаниями операции №5 в соседних циклах.

Если с выполнением последней операции конвейера ассоциировать выход готовой продукции конвейера, то интервал конвейера является показателем производительности конвейера (обратной величиной). Чем меньше интервал конвейера, тем больше производительность конвейера.

Если не возникает неоднозначностей, то для простоты не будем писать в формулах имя конвейера или использовать вместо имени операции ее номер, т. е. будем использовать записи вида: $f_i^k(K)$, f_a^k , d_i^k , F^k и т. п.

Определим функцию $pred(a)$ для $a \in A$, вычисляющую множество вершин графа, непосредственно предшествующих вершине a , т.е.

$$pred(a_i) = \{a_j \mid (a_j, a_i) \in E\}.$$

В этом случае функционирование конвейера $K = (G, M, T)$ определяется следующими рекуррентными соотношениями.

Для вершины графа типа S :

$$h_i^0 = 0 \quad \text{для } 1 \leq i \leq m,$$

$$f_i^0 = t_i \quad \text{для } 1 \leq i \leq m,$$

$$f_i^0 = f_j^0 + t_i \quad \text{для } i > m \text{ и } a_j \in pred(a_i),$$

$$f_i^k = f_i^{k-1} + t_i \quad \text{для } 1 \leq i \leq m \text{ и } k \geq 1,$$

$$f_i^k = \max(f_i^{k-1}, f_j^k) + t_i \quad \text{для } i > m \text{ и } k \geq 1.$$

Для бинарной вершины графа типа AND :

$$f_i^0 = \max(f_p^0, f_q^0) + t_i \quad \text{для } i > m \text{ и } a_p, a_q \in pred(a_i),$$

$$f_i^k = \max(f_i^{k-1}, f_p^k, f_q^k) + t_i$$

$$\text{для } i > m, k \geq 1 \text{ и } a_p, a_q \in pred(a_i).$$

Для бинарной вершины типа OR :

$$f_i^0 = \min(f_p^0, f_q^0) + t_i \quad \text{для } i \geq m \text{ и } a_p, a_q \in pred(a_i),$$

$$f_i^k = \max(f_i^{k-1}, \min(f_p^k, f_q^k)) + t_i$$

$$\text{для } i > m, k \geq 1 \text{ и } a_p, a_q \in pred(a_i).$$

Пример конвейера

На рис. 9 приведен пример конвейера по производству табуреток с совмещением некоторых операций. В модели не определены длины операций. Они условны и могут иметь умозрительные значения. Все содержательные вершины-операции представлены в виде прямоугольников составных операций, допускающих их последующую детализацию вплоть до неделимых операций.

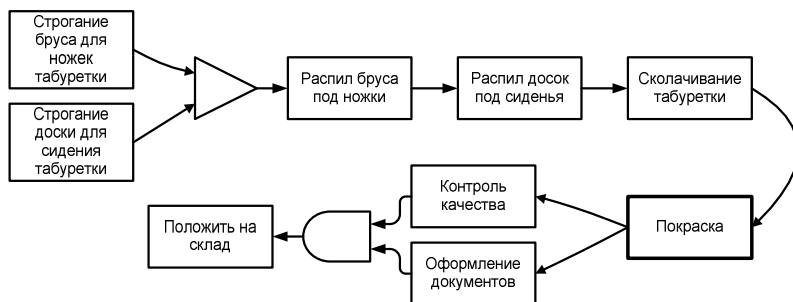


Рис. 9. Пример графа конвейера по производству табуреток

3. Переходный процесс

Рассмотрим пример графа конвейера, представленный на рис. 10. Длительность самой продолжительной операции №2 равна 10 единиц.

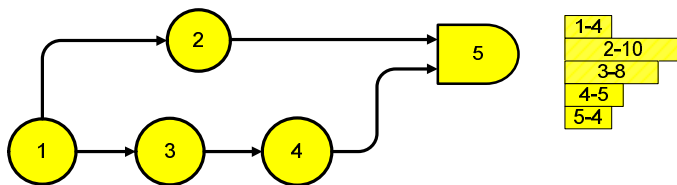


Рис. 10. Пример графа конвейера с операцией AND

На рис. 11 построена временная диаграмма в несколько циклов. Мы увидим, что первый цикл имеет интервал, равный 8,

потом интервал цикла равен 9, а потом становится равным 10. Из диаграммы видно, что интервал конвейера увеличивается от цикла к циклу до некоторого значения и потом становится постоянным.

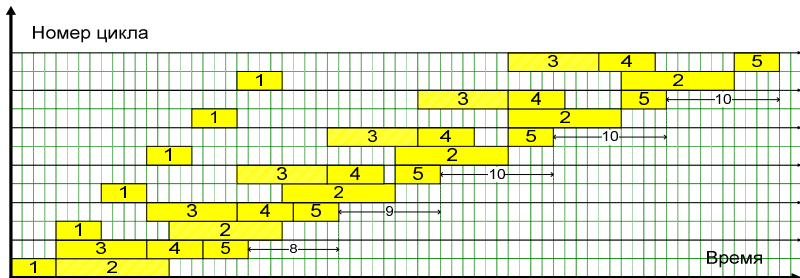


Рис. 11. Диаграмма работы конвейера с увеличивающимся интервалом

Рассмотрим конвейер на примере другого графа, представленного на рис. 12.

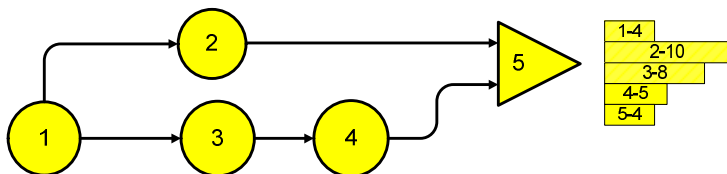


Рис. 12. Пример графа конвейера с операцией OR

На рис. 13 построена временная диаграмма в несколько циклов. Первый цикл имеет интервал, равный 10, потом интервал цикла равен 9, а потом становится равным 8.

Более глубокие исследования приводят к следующему общему выводу: на некотором начальном этапе функционирования интервал конвейера может изменяться как в сторону увеличения, так и в сторону уменьшения, однако впоследствии он становится постоянным, равным некоторому значению. Пусть k^s определяет номер цикла, начиная с которого интервал конвейера

ра становится постоянным. В этом случае назовем режим работы конвейера до цикла k^s *переходным*, а начиная с номера k^s – *стационарным*.

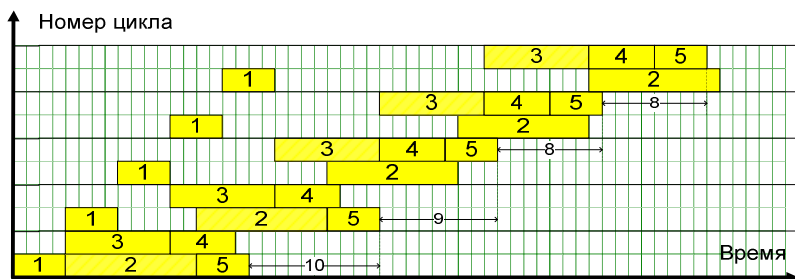


Рис. 13. Диаграмма работы конвейера с убывающим интервалом

4. Линейный конвейер

Рассмотрим частный случай конвейера – *линейный конвейер*.

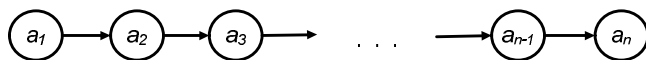


Рис. 14. Граф линейного конвейера

Граф, определяющий такой конвейер, представлен на рис. 14, состоит из вершин типа S и является элементарным путем. Примером линейного конвейера является рассмотренное выше производство табуреток.

Теорема о линейном конвейере. Пусть имеется линейный конвейер $K = (G, M, T)$, содержащий последовательность из n операций a_1, a_2, \dots, a_n . Пусть время выполнения i -ой операции равно t_i , $1 \leq i \leq n$. В этом случае интервал $d_j^k(K)$ j -ой операции линейного конвейера ($1 \leq j \leq n$) не зависит от k (для $k \geq 1$) и равен

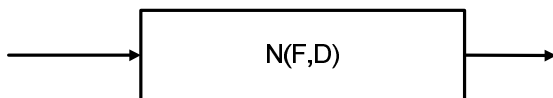
$$(2) \quad d_j^k(K) = \max(t_1, t_2, \dots, t_j).$$

Соответственно, интервал линейного конвейера равен

$$(3) \quad D^k(K) = \max(t_1, t_2, \dots, t_n).$$

То есть интервал линейного конвейера не зависит от номера цикла и равен длительности самой продолжительной операции конвейера.

Введем для линейного конвейера специальное обозначение



Здесь N – номер операции; F – нулевая фаза конвейера и D – интервал конвейера.

5. Свойства конвейера

Введем определение. Пусть имеется конвейер $K = (G, M, T)$ и соответствующий ему ациклический граф $G = (A, E)$, состоящий из n вершин $a_1, a_2, \dots, a_n, n > 1$. Построим множество всех путей графа G из начальных вершин в конечную. Это будут элементарные пути, g – количество путей. Каждый путь \mathbf{L}_i является графом $\mathbf{L}_i = (A_i, E_i), 1 \leq i \leq g$. Поскольку все пути в графе G элементарные, то мы будем далее использовать термин «путь» в смысле «элементарный путь».

Для каждого графа $\mathbf{L} \in \Sigma$ определим линейный конвейер L следующим образом. Пусть $\mathbf{L} = (A_L, E_L)$ – граф-путь, где $A_L \subset A$ и $E_L \subset E$. Тогда $L = (\mathbf{L}, M_L, T_L)$ – линейный конвейер, где $T_L \subset T$ и $T_L = \{t_i \mid \text{если } a_i \in A_L, \text{ то } t_i \in T_L\}$, а $M_L = \{S \mid \text{для } a \in A_L\}$.

Назовем множество линейных конвейеров $\Sigma = \{L_i\}, 1 \leq i \leq g$, индуцированным конвейером K .

Теорема. Пусть дан конвейер $K = (G, M, T)$, где $G = (A, E)$. Пусть $\Sigma = \{L_i\}, 1 \leq i \leq g$, – множество линейных конвейеров, индуцированных конвейером K . В этом случае для любого цикла конвейера K с номером k существует линейный конвейер $L_i \in \Sigma$ такой, что его диаграмма k -го цикла является поддиаграммой диаграммы k -го цикла конвейера K . Или для $\forall k \geq 0 \exists L \in \Sigma$ такой, что для $\forall a \in A_L \Rightarrow f_a^k(L) = f_a^k(K)$.

Сущность этой теоремы состоит в следующем. Она доказывает, что на любом цикле работы конвейера его фаза изменяется по закону некоторого индуцированного им линейного конвейера.

Доказательство.

Доказательство осуществим методом описания алгоритма построения множества путей, диаграммы которых являются поддиаграммами k -го цикла ($k \geq 0$) исходного конвейера. Перед этим дадим ряд определений. Пусть L есть некоторый граф-путь графа G . Определим *положение* l , соответствующее этому пути, как конструкцию вида $l = [a_1, a_2, \dots, a_j \nabla a_{j+1}, \dots, a_n]$, где метасимвол-маркер ∇ отделяет пройденную часть пути от непройденной.

Начальное положение имеет вид $l = [\nabla a_1, a_2, \dots, a_j, a_{j+1}, \dots, a_n]$, а конечное $l = [a_1, a_2, \dots, a_j, a_{j+1}, \dots, a_n \nabla]$, остальные положения вида $l = [a_1, a_2, \dots, a_j \nabla a_{j+1}, \dots, a_n]$ – промежуточные.

Определим состояние значением двух множеств (H_i, P_i) : H_i – множество вершин графа G и P_i – множество положений.

Начальное состояние (H_0, P_0) определим следующим образом: $H_0 = \{\}$; P_0 – содержит начальные положения для всех путей графа G .

Правило перехода. Пусть (H_p, P_p) – значения множеств некоторого промежуточного состояния. Выберем любую операцию $a \in A$ и $a \notin H_p$ такую, что $pred(a) = \{\}$ или $pred(a) \subset H_p$. Положим $H_{p+1} = H_p \cup \{a\}$. Далее положим $P_{p+1} = P_p$, и для каждого положения $l \in P_{p+1}$ такого, что $l = [a_1, a_2, \dots, a_j \nabla a_{j+1}, \dots, a_n]$, $a = a_{j+1}$ и $f_a^k(K) = f_a^k(L)$ заменим данное положение на положение вида $l = [a_1, a_2, \dots, a_j, a_{j+1} \nabla a_{j+2}, \dots, a_n]$. Если же $a = a_{j+1}$ и $f_a^k(K) \neq f_a^k(L)$, то исключим данное положение из множества P_{p+1} .

Конечное состояние (H_n, P_n) такое, что $H_n = A$, а P_n состоит из конечных положений тех путей, диаграммы k -ых циклов которых являются поддиаграммами конвейера K . Это следует из правила переходов алгоритма.

Алгоритм заключается в том, что начав с начального состояния (H_0, P_0) , последовательно n раз применяется правило перехода

$$(H_0, P_0) \rightarrow (H_1, P_1) \rightarrow (H_2, P_2) \rightarrow \dots \rightarrow (H_n, P_n)$$

до перехода в конечное состояние. Отсюда временная сложность алгоритма есть $O(n)$, где n – количество вершин графа конвейера.

Доказательство.

Доказательство корректности алгоритма осуществим методом математической индукции. Сначала докажем корректность для $k=0$. Далее предположим, что свойство выполняется для некоторого произвольного цикла $k > 0$ и докажем, что в этом случае оно выполняется и для цикла с номером $k+1$.

Шаг 1. Пусть $k=0$. Начальное состояние (H_0, P_0) такое, что $H_0 = \{\}$, а P_0 содержит множество начальных положений вида $[\nabla a_i a]$, где $1 \leq i \leq m$ и $a \in A^+$. Доказательство для $k=0$ также осуществим методом математической индукции. Сначала докажем, что свойство выполняется для произвольной начальной операции. Потом предположим, что свойство выполняется для всех операций $a_i \in H$, $1 \leq i \leq n$, и докажем, что условие выполняется для произвольной операции $a \notin H$ такой, что $pred(a) \subset H$. Для произвольной начальной операции свойство выполняется, так как для любого a_i , $1 \leq i \leq m$, $f_{a_i}^0(K) = t_i$ в соответствии с (1), а с другой стороны, существует путь \mathbf{L} и соответствующее ему начальное положение $l = [\nabla a_i a]$ такое, что $f_{a_i}^0(L) = t_i$. Таким образом, существует L такой, что $f_{a_i}^0(K) = f_{a_i}^0(L)$ для $1 \leq i \leq m$.

Положим, что мы находимся в состоянии (H_p, P_p) , $p > m$, т. е. H_p содержит p вершин, а P_p – некоторое множество промежуточных положений. Выберем из A вершину a такую, что $pred(a) \subset H_p$. Поскольку вершина может быть трех типов – S , AND или OR , рассмотрим три варианта.

Вариант 1. Пусть a – вершина типа S . Для a существует хотя бы один путь \mathbf{L} и соответствующее ему положение такое, что $l = [ac \nabla ab]$, где $a, b \in A^*$ и $pred(a) = \{c\}$. По определению $f_a^0(K) = f_c^0(K) + t_a$. С другой стороны, $f_a^0(L) = f_c^0(L) + t_a$. Поскольку $c \in H$, то $f_c^0(K) = f_c^0(L)$. Следовательно,

$$f_a^0(K) = f_a^0(L).$$

Вариант 2. Пусть a – вершина типа *AND* и $pred(a) = \{c, b\}$, где c и b – некоторые вершины, принадлежащие H_p . Пусть для c выполняется свойство $f_c^0(K) = \max(f_c^0(K), f_b^0(K))$. По предположению математической индукции для c существует \mathbf{L} такой, что

$$(4) \quad f_c^0(K) = f_c^0(L),$$

в то же время $f_a^0(K) = f_c^0(K) + t_a$. С другой стороны, в P_p существует положение $l = [ac\nabla ab]$, где $a, b \in A^*$ и $f_a^0(L) = f_c^0(L) + t_a$. Следовательно, $f_a^0(K) = f_a^0(L)$.

Вариант 3. Пусть a – вершина типа *OR*. В этом случае $pred(a) = \{a, b\}$, где c и b – некоторые вершины, принадлежащие H_p . Пусть для c выполняется свойство $f_c^0(K) = \max(f_c^0(K), f_b^0(K))$. По предположению математической индукции для c существует \mathbf{L} такой, что

$$(5) \quad f_c^0(K) = f_c^0(L),$$

в то же время $f_a^0(K) = f_c^0(K) + t_a$. С другой стороны, в P_p существует положение $l = [ac\nabla ab]$, где $a, b \in A^*$ и $f_a^0(L) = f_c^0(L) + t_a$. Следовательно, $f_a^0(K) = f_a^0(L)$.

Шаг 2. Пусть свойство выполняется для всех $a \in A$ в k -ом цикле, $k > 0$, т. е. для любого a существует путь \mathbf{L} такой, что $f_a^k(K) = f_a^k(L)$.

Шаг 3. Докажем, что в этом случае свойство выполняется для $(k + 1)$ -го цикла.

Для начальной вершины a_i , $1 \leq i \leq m$, очевидно, что существует \mathbf{L} такой, что $l = [\nabla a_i a]$, $a \in A^+$ и $f_{a_i}^{k+1}(K) = f_{a_i}^k(K) + t_{a_i} = f_{a_i}^k(L) + t_{a_i}$.

Положим, что мы находимся в состоянии (H_p, P_p) , $p > m$, т. е. H_p содержит p вершин, а P_p есть некоторое множество промежуточных положений. Выберем из A вершину a такую, что $pred(a) \subset H_p$ и $a \notin H_p$. Поскольку вершина может быть трех ти-

пов S , AND или OR , рассмотрим три варианта.

Вариант 1. Пусть a – вершина типа S . Для a существует хотя бы один путь L и соответствующее ему положение такое, что $l = [ac\nabla ab]$, где $a, b \in A^*$ и $pred(a) = \{c\}$. По определению $f_a^{k+1}(K) = \max(f_a^k(K), f_c^{k+1}(K)) + t_a$. С другой стороны, по предположению метода индукции $f_a^k(K) = f_a^k(L)$ и $f_c^{k+1}(K) = f_c^{k+1}(L)$, поскольку $c \in H_p$, следовательно, $f_a^{k+1}(K) = f_a^{k+1}(L)$.

Вариант 2. Пусть a – вершина типа AND . В этом случае $pred(a) = \{c, b\}$, где c и b – некоторые вершины, принадлежащие H_p . По определению

$$f_a^{k+1}(K) = \max(f_a^k(K), f_c^{k+1}(K), f_b^{k+1}(K)) + t_a.$$

В силу условий метода индукции $f_a^k(K) = f_a^k(L)$, $f_c^{k+1}(K) = f_c^{k+1}(L)$, $f_b^{k+1}(K) = f_b^{k+1}(L)$. Пусть для c выполняется свойство $f_c^{k+1}(K) = \max(f_c^{k+1}(K), f_b^{k+1}(K))$. В P существует положение $l = [ac\nabla ab]$, где $a, b \in A^*$, и, следовательно, $f_a^{k+1}(K) = \max(f_a^k(K), f_c^{k+1}(K)) + t_a$; подставим значения $f_a^{k+1}(K) = \max(f_a^k(L), f_c^{k+1}(L)) + t_a$. Правая часть является определением фазы для линейного конвейера и, следовательно, $f_a^{k+1}(K) = f_a^{k+1}(L)$.

Вариант 3. Пусть a – вершина типа OR . В этом случае $pred(a) = \{c, b\}$, где c и b – некоторые вершины, принадлежащие H_p . По определению

$f_a^{k+1}(K) = \max(f_a^k(K), \min(f_c^{k+1}(K), f_b^{k+1}(K))) + t_a$. В силу условий метода индукции $f_a^k(K) = f_a^k(L)$, $f_c^{k+1}(K) = f_c^{k+1}(L)$, $f_b^{k+1}(K) = f_b^{k+1}(L)$. Пусть для c выполняется свойство $f_c^{k+1}(K) = \min(f_c^{k+1}(K), f_b^{k+1}(K))$. В P существует положение $l = [ac\nabla ab]$, где $a, b \in A^*$ и, следовательно, $f_a^{k+1}(K) = \max(f_a^k(K), f_c^{k+1}(K)) + t_a$; подставим значения

$f_a^{k+1}(K) = \max(f_a^k(L), f_c^{k+1}(L)) + t_a$. Правая часть является определением фазы для линейного конвейера и, следовательно, $f_a^{k+1}(K) = f_a^{k+1}(L)$. Теорема доказана.

6. Синтез конвейеров

Рассмотрим конвейер, который содержит операции типа *AND* и *OR*, связующие между собой линейные конвейеры. Чтобы описать его поведение рассмотрим детально некоторые конструкции.

Первая конструкция вида «линейный конвейер».

$$f^0(L), d(L)$$

Графики изменения фазы и интервала в зависимости от номера цикла представлены на рис. 15.

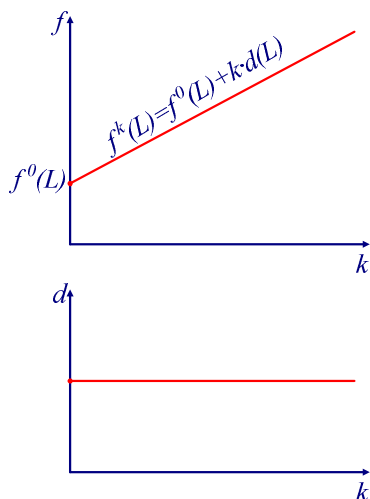
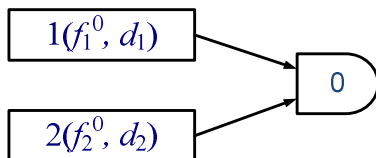


Рис. 15. Графики изменения фазы и интервала линейного конвейера

Графиком фазы является прямая, наклон которой определяется величиной интервала цикла, а интервал является постоянной, не зависящей от номера цикла. Реальные значения фазы являются дискретными точками, лежащими на данной прямой.

Рассмотрим конструкцию AND вида



Графики изменения фазы и интервала в зависимости от номера цикла представлены на рис. 16.

На рисунке а) представлен случай, когда $f_1^0 \geq f_2^0$ и $d_1 \geq d_2$, – на графике эти функции представлены черными линиями. В этом случае фаза и интервал конструкции будут равны фазе и интервалу 1-го линейного конвейера, так как всегда будет выполняться условие $f_1^k \geq f_2^k$. На рисунке б) представлен случай, когда $f_1^0 > f_2^0$ и $d_1 < d_2$. В этом случае до цикла с номером k^s будет выполняться условие $f_1^k \geq f_2^k$ и 1-ый конвейер будет определять фазу и интервал конструкции, а после цикла с номером k^s будет выполняться условие $f_1^k \leq f_2^k$ и 2-ой конвейер будет определять фазу и интервал конструкции. В результате график изменения фазы и интервала конструкции будет выглядеть так, как он представлен на графике двойной линией. Номер цикла k^s вычисляется из системы уравнений, определяющих точку пересечения прямых:

$$\begin{cases} f_0^s = f_1^0 + k^s \cdot d_1, \\ f_0^s = f_2^0 + k^s \cdot d_2; \end{cases}$$

откуда получаем, с учетом того, что k^s целое число:

$$k^s = \left\lfloor \frac{f_1^0 - f_2^0}{d_2 - d_1} \right\rfloor + 1$$

где $\lfloor x \rfloor$ обозначает нижнее целое значения x .

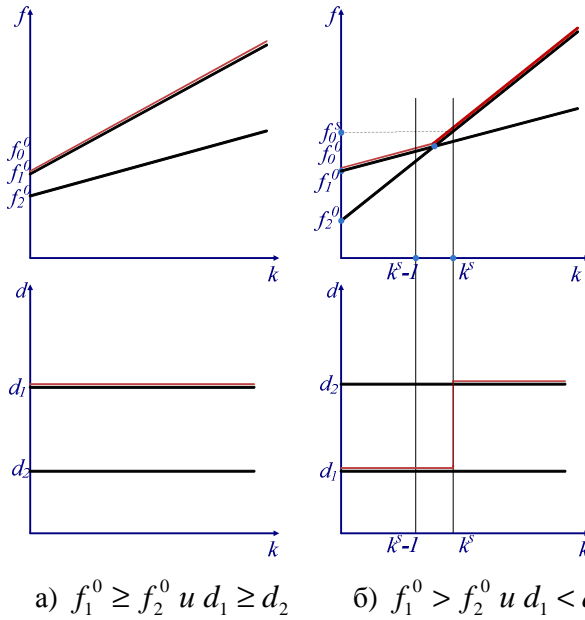
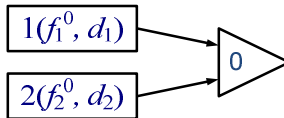


Рис. 16. Графики изменения фазы и интервала операции AND

Третий вариант – конструкция OR вида



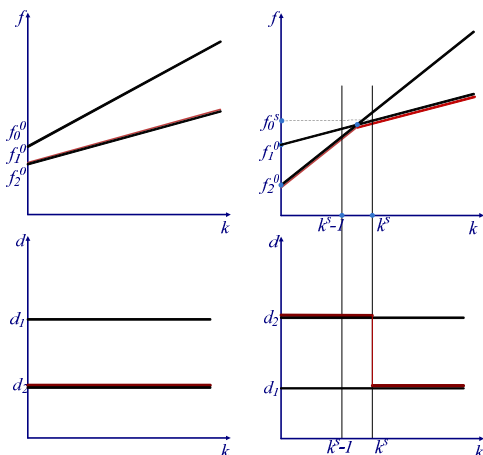
Графики изменения фазы и интервала в зависимости от номера цикла представлены на рис. 17. Данный случай симметричен предыдущему, а k^s вычисляется так же, как и в предыдущем варианте.

Чтобы иметь представление об общей картине процесса, рассмотрим еще одну конструкцию на рис. 18.

Соответствующие графики для фазы и интервала представлены на рис. 19.

Из анализа данной конструкции можно сделать вывод, что интервал цикла и связанная с ним скорость изменения фазы меняются до некоторого значения k^s , а потом устанавливается некоторое постоянное значение интервала.

Работа конвейера до цикла k^s осуществляется в переходном режиме, а после k^s – в стационарном.



а) $f_1^0 \geq f_2^0$ и $d_1 \geq d_2$

б) $f_1^0 > f_2^0$ и $d_1 < d_2$

Рис. 17. Графики изменения фазы и интервала операции OR

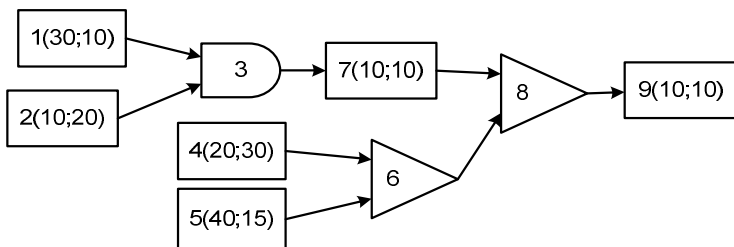


Рис. 18. Пример графа конвейера

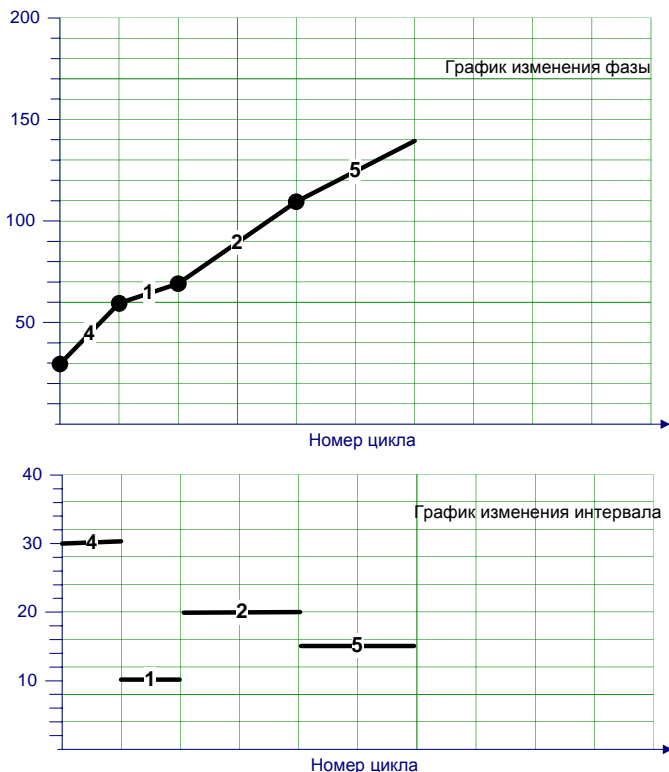
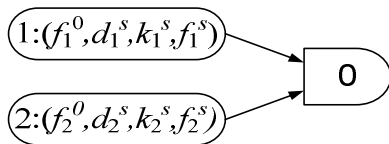


Рис. 19. Пример изменения фазы и интервала конвейера

Опишем конвейер набором характеристик (f^0, d^s, k^s, f^s) , где f^0 – начальная фаза конвейера; d^s – интервал конвейера в стационарном режиме; k^s – номер цикла начала стационарного режима; f^s – фаза начала стационарного режима.

Рассмотрим случай объединения двух конвейеров с помощью операции со спусковой функцией *AND*, т. е. рассмотрим конвейер вида



и вычислим его характеристики: $(f_0^0, d_0^s, k_0^s, f_0^s)$.

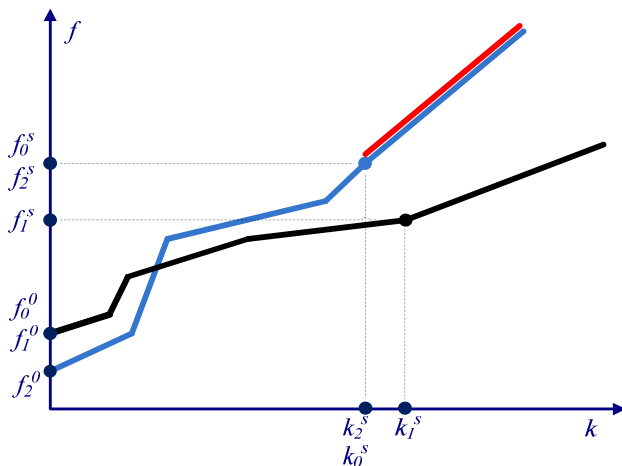


Рис. 20. Графики изменения фазы. Вариант 1

При любых комбинациях параметров очевидно, что $f_0^0 = \max(f_1^0, f_2^0)$; $d_0^s = \max(d_1^s, d_2^s)$;

Возможны два существенно различающихся варианта.

Первый вариант определяется параметрами

$$f_1^s \leq f_2^s \quad \text{и} \quad d_1^s \leq d_2^s$$

Пример такой ситуации приведен на рис. 20. В этом случае остальные характеристики данного конвейера вычисляются по следующим формулам

$$k_0^s = k_2^s; \quad f_0^s = f_2^s.$$

Второй вариант определяется отношениями

$$f_1^s > f_2^s \quad \text{и} \quad d_1^s < d_2^s.$$

Пример такой ситуации приведен на рис. 21.

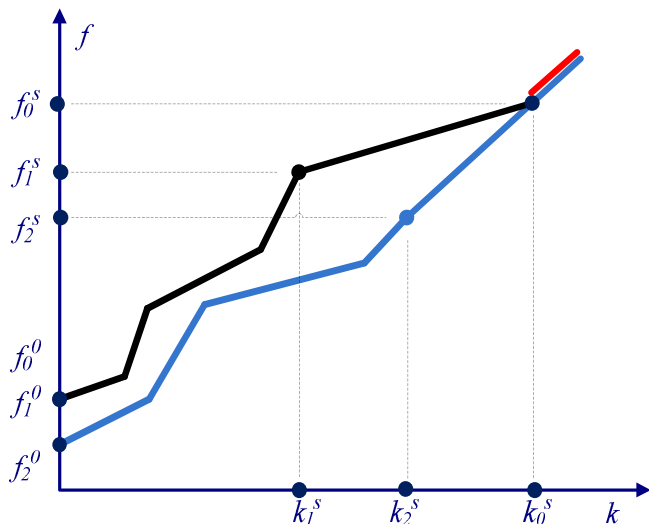


Рис. 21. Пример изменения фазы конвейера. Вариант 2

В этом случае характеристики данного конвейера вычисляются по следующим формулам:

$$k_0^s = \left\lfloor \frac{f_1^s - f_2^s + k_2^s \cdot d_2 - k_1^s \cdot d_1}{d_2 - d_1} \right\rfloor + 1; \quad f_0^s = f_2^s + (k_0^s - k_2^s) \cdot d_2,$$

где $\lfloor x \rfloor$ обозначает нижнее целое x .

При анализе следует иметь в виду, что фаза является строго монотонной функцией, и если $f_1^s > f_2^s$, то $f_1^k > f_2^k$ для любого $k \leq s$.

Чтобы точно описать вычисление параметров $(f_0^0, d_0^s, k_0^s, f_0^s)$, опишем, в каких областях первой четверти по каким формулам вычисляются эти характеристики.

Рассмотрим случай, когда $d_1^s \leq d_2^s$. Для того чтобы определить координаты точки (f_0^s, k_0^s) , разобьем первую четверть

плоскости одним лучом и двумя отрезками на 3 множества. Обозначим их как O_1 , O_2 , O_3 . В каждом из этих множеств координаты точки (f_0^s, k_0^s) вычисляются по своим формулам. Разбиение на области показано на рис. 22.

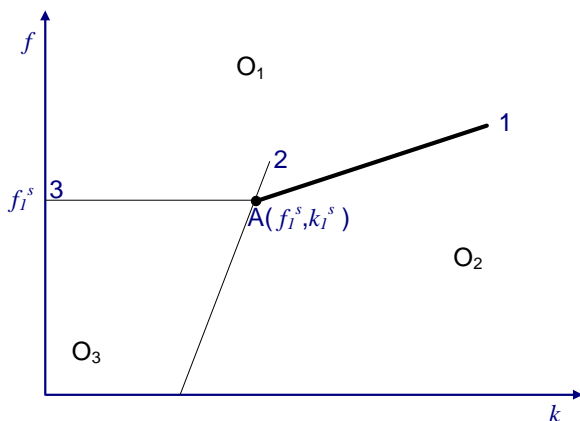


Рис. 22. Разбиение первой четверти на три области

Луч 1 определяется уравнением изменения фазы первого конвейера в стационарном режиме, начиная с точки $A(f_1^s, k_1^s)$:

$$f = f_1^s + (k - k_0^s) \cdot d_1^s.$$

Отрезок 2 (как часть прямой) определяется уравнением изменения фазы второго конвейера, смещенная так, чтобы она проходила через точку $A(f_1^s, k_1^s)$, т. е. уравнением

$$f = f_1^s + (k - k_0^s) \cdot d_2^s.$$

Отрезок 3 определяется уравнением

$$f = f_1^s.$$

Множество O_1 определяется системой неравенств

$$\begin{cases} f \geq f_1^s + (k - k_0^s) \cdot d_1^s, \\ f \geq f_1^s, \\ k \geq 0. \end{cases}$$

Множество O_2 определяется системой неравенств

$$\begin{cases} f < f_1^s + (k - k_0^s) \cdot d_1^s, \\ f < f_1^s + (k - k_0^s) \cdot d_2^s, \\ f > 0, \\ k \geq 0. \end{cases}$$

Множество O_3 определяется системой неравенств

$$\begin{cases} f < f_1^s, \\ f \geq f_1^s + (k - k_0^s) \cdot d_2^s, \\ f > 0, \\ k \geq 0. \end{cases}$$

Если точка (f_2^s, k_2^s) принадлежит множеству O_1 (см. рис. 23), то координаты точки (f_0^s, k_0^s) вычисляются по формулам

$$\begin{cases} f_0^s = f_2^s, \\ k_0^s = k_2^s. \end{cases}$$

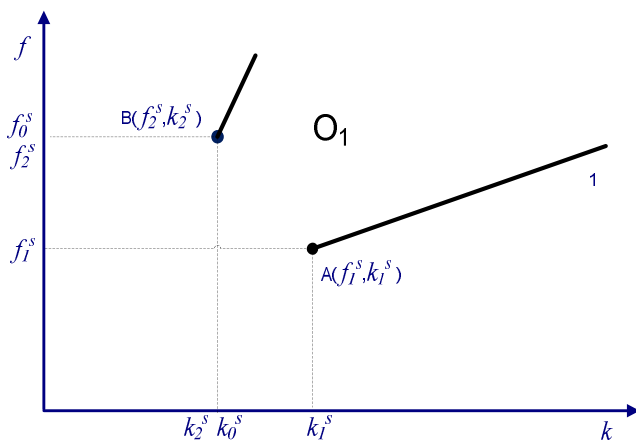


Рис. 23. Вариант, когда точка (f_2^s, k_2^s) в области O_1

Это обусловлено тем, что если $f_2^s > f_1^s$, то в силу монотонности функции f , для любого k такого, что $k_2^s \leq k$, следует $f_2^s > f_1^k$, следовательно, стационарный процесс начнется с цикла k_2^s .

Если точка (f_2^s, k_2^s) принадлежит множеству O_2 и $d_1^s < d_2^s$ (см. рис. 24), то координаты точки $C(f_0^s, k_0^s)$ вычисляются как координаты точки пересечения прямых по формулам

$$\begin{cases} f_0^s = f_1^s + (k_0^s - k_1^s) \cdot d_1^s, \\ f_0^s = f_2^s + (k_0^s - k_2^s) \cdot d_2^s. \end{cases}$$

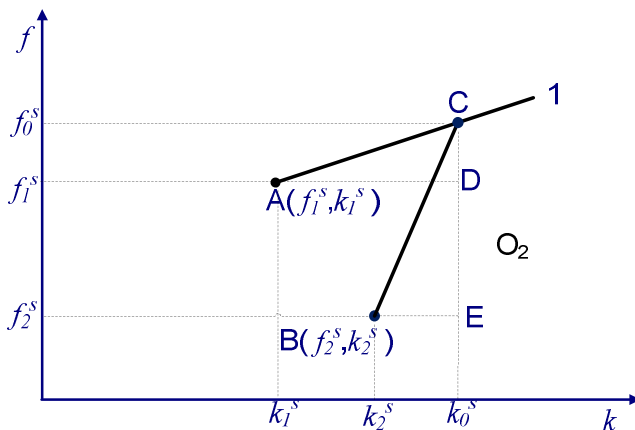


Рис. 24. Вариант, когда точка (f_2^s, k_2^s) в области O_2

Откуда следует

$$k_0^s = \left\lceil \frac{f_1^s - f_2^s - k_1^s \cdot d_1^s + k_2^s \cdot d_2^s}{d_2^s - d_1^s} \right\rceil + 1,$$

$$f_0^s = f_2^s + (k_0^s - k_2^s) \cdot d_2^s.$$

Следует отметить, что использовать для вычисления фазы f_0^s уравнение прямой 1

$$f_0^s = f_1^s + (k_0^s - k_1^s) \cdot d_1^s$$

неправильно, так как точка (f_0^s, k_0^s) лежит на прямой, соответствующей второму конвейеру.

Если $d_1^s = d_2^s$, то

$$\begin{cases} f_0^s = f_1^s, \\ k_0^s = k_1^s. \end{cases}$$

Если точка (f_2^s, k_2^s) принадлежит множеству O_3 (см. рис. 25),

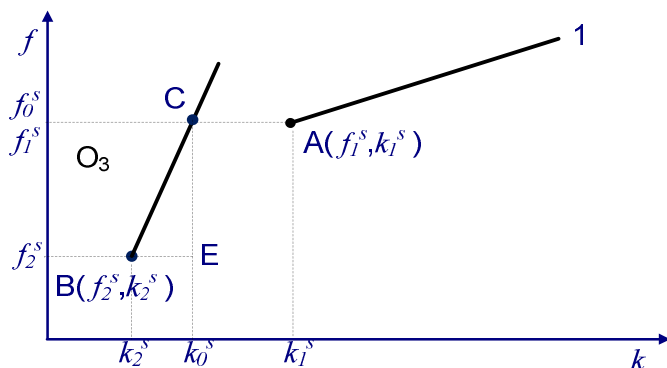


Рис. 25. Вариант, когда точка (f_2^s, k_2^s) в области O_3

то координаты точки (f_0^s, k_0^s) вычисляются как координаты точки пересечения прямых по формулам

$$\begin{cases} f = f_1^s, \\ f = f_2^s + (k - k_2^s) \cdot d_2^s. \end{cases}$$

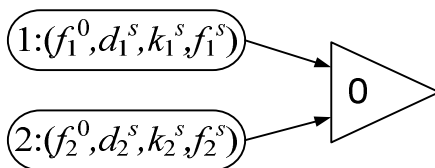
Или

$$\begin{cases} f_0^s = f_1^s, \\ f_1^s - f_2^s = (k_0^s - k_2^s) \cdot d_2^s. \end{cases}$$

Откуда

$$\begin{cases} f_0^s = f_1^s, \\ k_0^s = \left\lfloor \frac{f_1^s - f_2^s + k_2^s \cdot d_2^s}{d_2^s} \right\rfloor + 1. \end{cases}$$

Рассмотрим случай объединения двух полных конвейеров с помощью операции со спусковой функцией OR , т. е. рассмотрим конвейер вида



и вычислим его характеристики: $(f_0^0, d_0^s, k_0^s, f_0^s)$.

При любых комбинациях параметров очевидно, что

$$f_0^0 = \min(f_1^0, f_2^0); \quad d_0^s = \min(d_1^s, d_2^s);$$

Далее возможны два существенно различающихся варианта. Первый вариант определяется параметрами

$$f_1^s \leq f_2^s \quad \text{и} \quad d_1 \leq d_2.$$

Пример такой ситуации приведен на рис. 26. В этом случае остальные характеристики данного конвейера вычисляются по следующим формулам

$$k_0^s = k_1^s; \quad f_0^s = f_1^s.$$

Второй вариант определяется отношениями $f_1^s > f_2^s$ и $d_1 < d_2$.

Пример такой ситуации приведен на рис. 27.

В этом случае характеристики данного конвейера вычисляются по следующим формулам

$$k_0^s = \left\lfloor \frac{f_1^s - f_2^s + k_2^s \cdot d_2 - k_1^s \cdot d_1}{d_2 - d_1} \right\rfloor + 1; \quad f_0^s = f_1^s + (k_0^s - k_1^s) \cdot d_1.$$

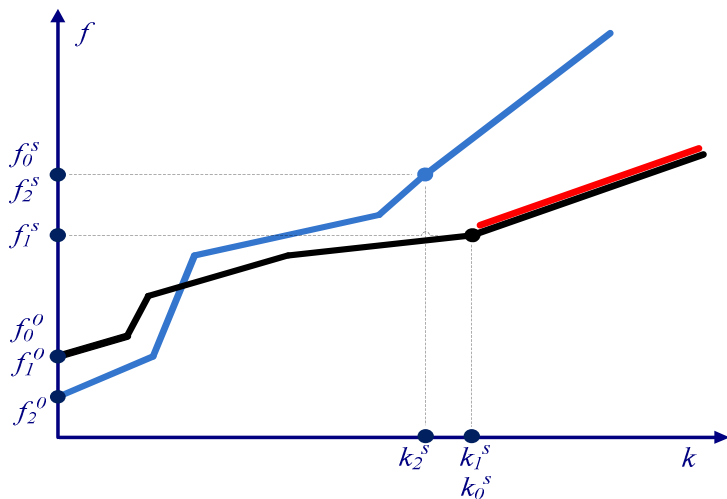


Рис. 26. График изменения фазы конвейера

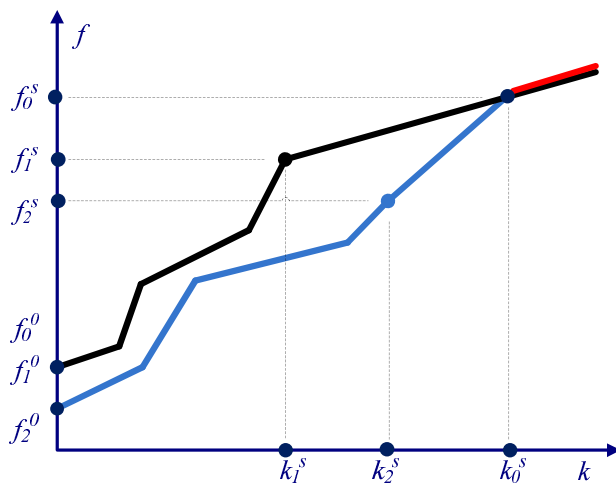


Рис. 27. График изменения фазы конвейера

Для рассмотрения всех возможных вариантов осуществим разбиение первой четверти системы координат на области тремя

лучами, исходящими из точки $A(f_1^s, k_1^s)$.

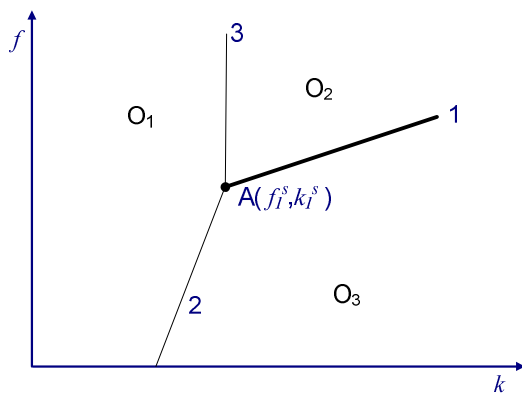


Рис. 28. Разбиение первой четверти на три области

Эти лучи определяются следующими уравнениями прямых:

$$f = f_1^s + (k - k_1^s) \cdot d_1^s;$$

$$f = f_1^s + (k - k_1^s) \cdot d_2^s;$$

$$k = k_1^s.$$

Область O_1 определяется системой

$$\begin{cases} f \geq f_1^s + (k - k_1^s) \cdot d_2^s; \\ k \leq k_1^s; \\ f > 0; \\ k \geq 0. \end{cases}$$

Область O_2 определяется системой

$$\begin{cases} f \geq f_1^s + (k - k_1^s) \cdot d_1^s; \\ k > k_1^s. \end{cases}$$

Область O_3 определяется системой

$$\begin{cases} f < f_1^s + (k - k_1^s) \cdot d_1^s; \\ f < f_1^s + (k - k_1^s) \cdot d_2^s; \\ f > 0. \end{cases}$$

Исходя из предположения, что $d_2^s \geq d_1^s$, выпишем формулы для трех областей.

Если точка (f_2^s, k_2^s) принадлежит множеству O_1 , то координаты точки (f_0^s, k_0^s) вычисляются по формулам

$$\begin{cases} f_0^s = f_1^s, \\ k_0^s = k_1^s. \end{cases}$$

Если точка (f_2^s, k_2^s) принадлежит множеству O_2 , то координаты точки (f_0^s, k_0^s) вычисляются как координаты точки пересечения прямых по формулам

$$\begin{cases} f = f_1^s + (k - k_1^s) \cdot d_1^s, \\ k = k_2^s; \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} f_0^s = f_1^s + (k_0^s - k_1^s) \cdot d_1^s, \\ k_0^s = k_2^s. \end{cases}$$

Если точка (f_2^s, k_2^s) принадлежит множеству O_3 и $d_1^s < d_2^s$, то координаты точки (f_0^s, k_0^s) вычисляются как координаты точки пересечения прямых по формулам

$$\begin{cases} f_0^s = f_1^s + (k_0^s - k_1^s) \cdot d_1^s, \\ f_0^s = f_2^s + (k_0^s - k_2^s) \cdot d_2^s; \end{cases}$$

откуда следует

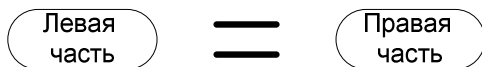
$$\begin{cases} f_0^s = f_1^s + (k_0^s - k_1^s) \cdot d_1^s, \\ k_0^s = \left\lfloor \frac{f_1^s - f_2^s - k_1^s \cdot d_1^s + k_2^s \cdot d_2^s}{d_2^s - d_1^s} \right\rfloor + 1. \end{cases}$$

Если $d_1^s = d_2^s$, то

$$\begin{cases} f_0^s = f_2^s + (k_0^s - k_2^s) \cdot d_1^s, \\ k_0^s = \max(k_1^s, k_2^s). \end{cases}$$

Варианты, когда $d_2^s < d_1^s$, симметричны рассмотренным и сводятся к перестановке индексов.

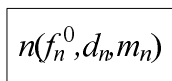
Мы рассмотрели для понимания процесса элементы синтеза конвейеров, однако нас интересует вычисление характеристик (f^0, d^s, k^s, f^s) некоторых существующих конвейеров. Для решения этой задачи используем метод структурного анализа [7] – структурной редукции конвейера на основании правил редукции.



Правило редукции состоит из левой и правой части. В левой части исходная конструкция и ее характеристики, а в правой части – результирующая конструкция и ее характеристики. Каждое правило сопровождается набором формул вычисления результирующих характеристик на основании исходных. Для описания конструкций используем следующие примитивы:



– данная конструкция обозначает простую неделимую операцию, характеризующуюся своим номером n и продолжительностью t_n .



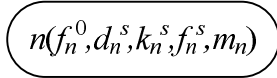
– данная конструкция обозначает линейный конвейер, характеризующийся своим номером n , нулевой фазой f_n^0 , интервалом d_n . Для последующего вычисления номера операции, определяющей d^s конвейера, введем номер операции m_n , определяющей d_n конвейера.



– данная конструкция обозначает спусковую функцию, характеризующуюся маркером *AND*, и имеет нулевую длину.

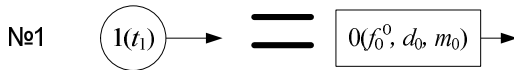


– данная конструкция обозначает спусковую функцию, характеризующуюся маркером *OR*, и имеет нулевую длину.

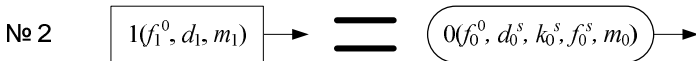


– данная конструкция обозначает конвейер, характеризующийся своим номером n и полным набором параметров, где m_n – номер операции, определяющий d_n^s .

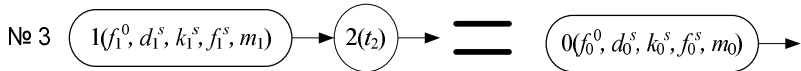
После того, как мы дали описания конструкций, рассмотрим правила редукции для конвейера. Правило будет состоять из редукции и набора формул, вычисляющих параметры для данной редукции.



$$f_0^0 = t_1; \quad d_0 = t_1; \quad m_0 = 1$$

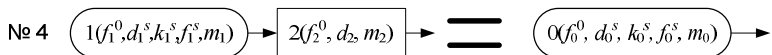


$$f_0^0 = f_1^0; \quad d_0^s = d_1; \quad k_0^s = 0; \quad f_0^s = f_1^0; \quad m_0 = m_1$$



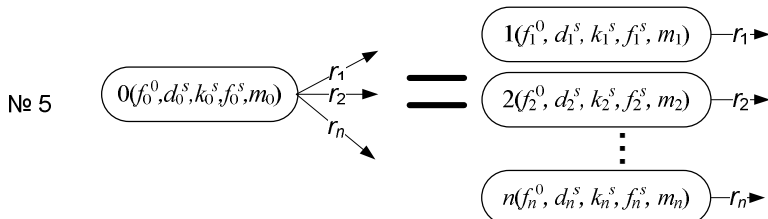
$$f_0^0 = f_1^0 + t_2; \quad d_0^s = \max(d_1^s, t_2); \quad k_0^s = k_1^s \quad f_0^s = f_1^s + t_2;$$

если $t_2 > d_1^s$, то $m_0 = n_2$, иначе $m_0 = m_1$;

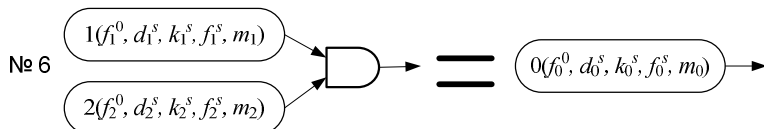


$$f_0^0 = f_1^0 + f_2^0; \quad d_0^s = \max(d_1^s, d_2); \quad k_0^s = k_1^s \quad f_0^s = f_1^s + f_2^0;$$

если $d_2 > d_1^s$, то $m_0 = m_2$, иначе $m_0 = m_1$;



$$\begin{aligned} f_1^0 &= f_0^0; & f_2^0 &= f_0^0; & f_3^0 &= f_0^0; & \dots & f_n^0 &= f_0^0; \\ d_1^s &= d_0^s; & d_2^s &= d_0^s; & d_3^s &= d_0^s; & \dots & d_n^s &= d_0^s; \\ k_1^s &= k_0^s; & k_2^s &= k_0^s; & k_3^s &= k_0^s; & \dots & k_n^s &= k_0^s; \\ f_1^s &= f_0^s; & f_2^s &= f_0^s; & f_3^s &= f_0^s; & \dots & f_n^s &= f_0^s; \\ m_1 &= m_0; & m_2 &= m_0; & m_3 &= m_0; & \dots & m_n &= m_0; \end{aligned}$$

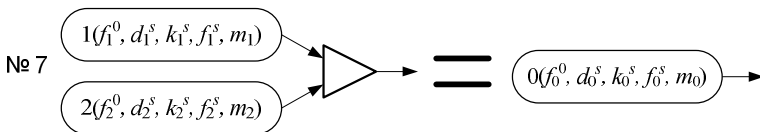


$$f_0^0 = \max(f_1^0, f_2^0); \quad d_0^s = \max(d_1^s, d_2^s);$$

если $d_1^s \geq d_2^s$, то $m_0 = m_1$, иначе $m_0 = m_2$;

$$\begin{array}{l}
 \text{если } d_1^s \leq d_2^s, \text{ то} \\
 \text{если } (f_2^s, k_2^s) \in O_1, \text{ то } \begin{cases} k_0^s = k_2^s; \\ f_0^s = f_2^s; \end{cases} \\
 \text{если } (f_2^s, k_2^s) \in O_2, \text{ то если } \begin{cases} d_1^s < d_2^s, & \begin{cases} k_0^s = \left\lfloor \frac{f_1^s - f_2^s - k_1^s \cdot d_1^s + k_2^s \cdot d_2^s}{d_2^s - d_1^s} \right\rfloor + 1, \\ f_0^s = f_2^s + (k_0^s - k_2^s) \cdot d_2^s; \end{cases} \\ d_1^s = d_2^s, & \begin{cases} k_0^s = k_1^s; \\ f_0^s = f_1^s; \end{cases} \end{cases} \\
 \text{если } (f_2^s, k_2^s) \in O_3, \text{ то } \begin{cases} k_0^s = \left\lfloor \frac{f_1^s - f_2^s + k_2^s \cdot d_2^s}{d_2^s} \right\rfloor + 1; \\ f_0^s = f_1^s; \end{cases}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{если } d_1^s > d_2^s, \text{ то} \\
 (f_1^s, k_1^s) \in O_1, \text{ то } \begin{cases} k_0^s = k_1^s; \\ f_0^s = f_1^s; \end{cases} \\
 (f_1^s, k_1^s) \in O_2, \text{ то } \begin{cases} k_0^s = \left\lfloor \frac{f_2^s - f_1^s - k_2^s \cdot d_2^s + k_1^s \cdot d_1^s}{d_1^s - d_2^s} \right\rfloor + 1, \\ f_0^s = f_1^s + (k_0^s - k_1^s) \cdot d_1^s; \end{cases} \\
 (f_1^s, k_1^s) \in O_3, \text{ то } \begin{cases} k_0^s = \left\lfloor \frac{f_2^s - f_1^s + k_1^s \cdot d_1^s}{d_1^s} \right\rfloor + 1; \\ f_0^s = f_2^s; \end{cases}
 \end{array}$$



$$f_0^0 = \min(f_1^0, f_2^0); \quad d_0^s = \min(d_1^s, d_2^s);$$

если $d_1^s \leq d_2^s$, то $m_0 = m_1$, иначе $m_0 = m_2$;

если $d_1^s \leq d_2^s$, то

если $(f_2^s, k_2^s) \in O_1$, то $\begin{cases} k_0^s = k_1^s; \\ f_0^s = f_1^s; \end{cases}$

если $(f_2^s, k_2^s) \in O_2$, то $\begin{cases} k_0^s = k_2^s, \\ f_0^s = f_1^s + (k_0^s - k_1^s) \cdot d_1^s; \end{cases}$

если $(f_2^s, k_2^s) \in O_3$, то если $d_1^s < d_2^s$, то $\begin{cases} k_0^s = \left\lfloor \frac{f_1^s - f_2^s - k_1^s \cdot d_1^s + k_2^s \cdot d_2^s}{d_2^s - d_1^s} \right\rfloor + 1, \\ f_0^s = f_1^s + (k_0^s - k_1^s) \cdot d_1^s; \end{cases}$

то если $d_1^s = d_2^s$, то $\begin{cases} k_0^s = \max(k_1^s, k_2^s); \\ f_0^s = f_2^s + (k_0^s - k_2^s) \cdot d_1^s; \end{cases}$

если $d_1^s > d_2^s$, то

если $(f_1^s, k_1^s) \in O_1$, то $\begin{cases} k_0^s = k_2^s; \\ f_0^s = f_2^s; \end{cases}$

если $(f_1^s, k_1^s) \in O_2$, то $\begin{cases} k_0^s = k_1^s; \\ f_0^s = f_2^s + (k_0^s - k_2^s) \cdot d_2^s; \end{cases}$

если $(f_1^s, k_1^s) \in O_3$, то $\begin{cases} k_0^s = \left\lfloor \frac{f_2^s - f_1^s - k_2^s \cdot d_2^s + k_1^s \cdot d_1^s}{d_1^s - d_2^s} \right\rfloor + 1; \\ f_0^s = f_2^s + (k_0^s - k_2^s) \cdot d_2^s. \end{cases}$

Рассмотренные правила редукции позволяют вычислять характеристики конвейера.

7. Пример

Рассмотрим пример анализа конвейера, представленного на рис. 18.

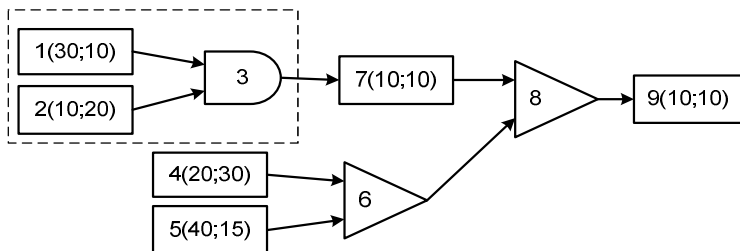


Рис. 29. Граф конвейера с выделенной 1-ой основой

Пунктирным прямоугольником будем выделять основы правил и применять к ним правила соответствующего номера с вычислением атрибутов. К 1-ой выделенной основе на рис. 29 применим правила 2, 2 и 6, после чего получим граф вида, представленного на рис. 30.

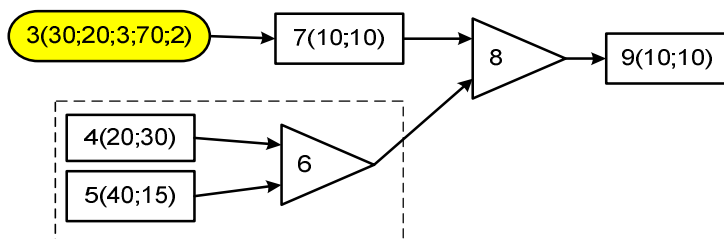


Рис. 30. Граф конвейера с выделенной 2-ой основой

Выделим в нем основу и применим правила 2, 2 и 7, после чего получим граф, представленный на рис. 31.

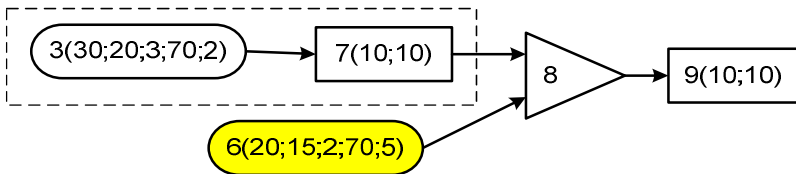


Рис. 31. Граф конвейера с выделенной 3-ей основой

Выделим в нем основу и применим к ней правило №4. Получим граф, представленный на рис. 32.

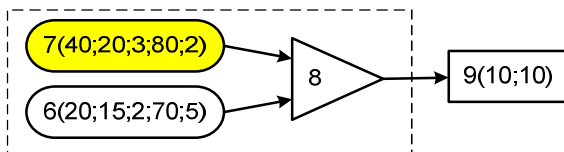


Рис. 32. Граф конвейера с выделенной 4-ой основой

К выделенной основе применим правило №7. В результате получим граф, представленный на рис. 33.

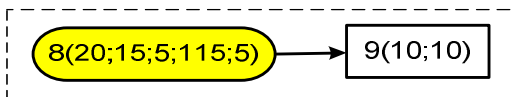


Рис. 33. Граф конвейера с выделенной 5-ой основой

Применив к последней основе правило №4, получим вычисленные характеристики конвейера.

$$9(30;15;5;125;5)$$

После полного анализа графа в заключительной вершине получаем характеристики конвейера. В данном случае анализ показывает, что конвейер имеет следующие характеристики.

$$f_9^0 = 30; \quad d_9^s = 15; \quad k_9^s = 5; \quad f_9^s = 125.$$

Вычисленные характеристики полностью соответствуют

полученным путем геометрических построений на рис. 19.

Автором написана и отлажена программа вычисления характеристик конвейера и построение заданного количества циклов временной диаграммы. Для данного конвейера вычисленная диаграмма представлена на рис. 34. На диаграмме видно, что конвейер 3 раза меняет интервал на тех циклах, которые вычислены. Все характеристики конвейера в диаграмме соответствуют вычисленным.

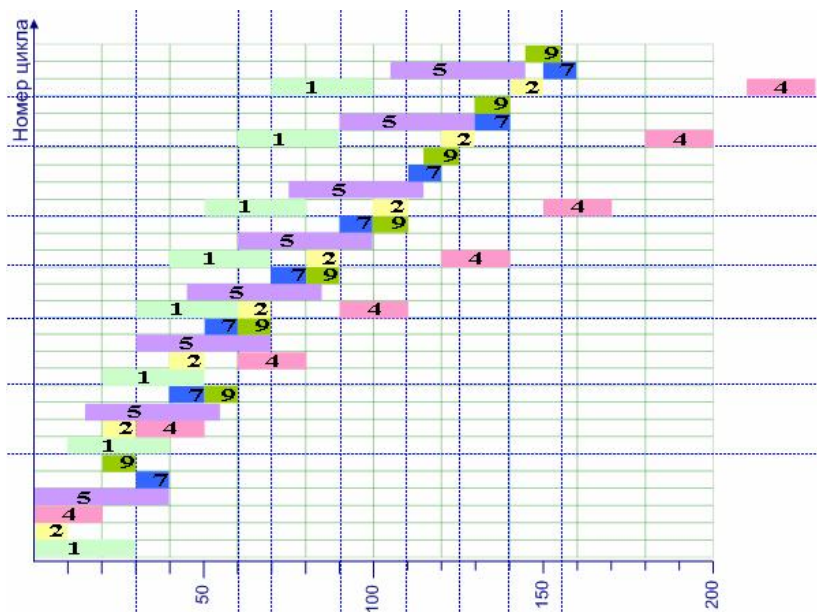


Рис. 34. 8 циклов диаграммы работы конвейера

8. Заключение

В заключение следует отметить два аспекта. Первый заключается в том, что предложенная модель является ограниченной для полноценного описания реальных конвейеров. Но автор имеет основания предполагать, что она допускает существенное расширение с сохранением свойства вычислимости характери-

стик и надеется описать методы в дальнейших статьях. Однако даже эта модель, по мнению автора, помогает понять суть функционирования конвейера и некоторые его свойства. Из-за ограниченности объема статьи здесь не изложено решение таких задач как вычисление очередей, балансировка конвейера и т. п.

Второй аспект заключается в том, что предложенную модель следует сравнить с методом имитационного моделирования. Можно показать, что отсутствует признак остановки процесса моделирования. Имитационное моделирование не позволит вычислить такие характеристики, как стационарный интервал конвейера, номер цикла начала стационарного процесса, фаза начала стационарного процесса, определение операции, определяющей стационарные характеристики конвейера.

Литература

1. АХО А, ХОПКРОФТ ДЖ., УЛЬМАН ДЖ. *Построение и анализ вычислительных алгоритмов.* – М.: Мир, 1979. – 536 с.
2. БУРКОВ В. Н., ЗАЛОЖНЕВ А. Ю., НОВИКОВ Д. А. *Теория графов в управлении организационными системами.* – М.: СИНТЕГ, 2001. – 117 с.
3. КОУГИ П. М. *Архитектура конвейерных ЭВМ.* – М.: Радио и связь, 1985. – С. 9–30.
4. МАКЛАКОВ С. В. *Моделирование бизнес-процессов с All-Fusion PM.* – М.: ДИАЛОГ-МИФИ, 2007. – 224 с.
5. УАЙТХАУС Х., ГУН С., КАЙЛАТ Т. *Сверхбольшие интегральные схемы и современная обработка сигналов.* – М.: Радио и связь, 1989. – С. 257–273.
6. ФОРД Л. Р., ФАЛКЕРСОН Д. Р. *Потоки в сетях.* – М.: Мир, 1966.
7. ФУ К. С. *Структурные методы в распознавании образов.* – М.: Мир, 1977.

MODELLING PIPELINED BUSINESS PROCESSES

Boris Kuprianov, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Cand. Sc., assistant professor (kuprianovb@mail.ru).

Abstract: We propose a definition of a pipelined business process and a model that allows computing the attributes of the pipeline. These attributes include: pipeline performance; build-up time, critical operation that restrains performance. We develop the algorithm for pipeline attributes calculation, and perform structural analysis of a pipeline. We show that the behavior of complex is determined by the set of derivative linear pipelines, and prove the corresponding theorem. The operation of pipeline is illustrated by graphs and charts.

Keywords: business process, model, conveyor, performance, chart, graph, recursion.

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии Г. Н. Каляновым*

УДК 536.7 + 519.85
ББК 78.34

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ СЛОЖНЫХ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Директор Л. Б.¹, Майков И. Л.²

(Учреждение Российской академии наук
Объединенный Институт высоких температур РАН,
Москва)

Разработаны математическая модель обобщенной схемы энергокомплекса, численный метод для анализа и оптимизации схемных решений и программное обеспечение, позволяющие решать задачи оптимизации с большими горизонтами расчетов и максимально точно учитывать графики изменения нагрузок потребителя. Минимизация целевой функции, коэффициенты которой определяются выбранным критерием оптимизации (стоимость, потребление первичных энергоносителей, экология), обеспечивается в итерационном процессе с использованием численной процедуры – симплекс-метода с искусственным базисом. В связи с большой размерностью оптимизационной задачи используется метод декомпозиции.

Ключевые слова: математическое моделирование, оптимизация, численные методы, энергокомплекс, линейное программирование.

¹ Леонид Бенцианович Директор, доктор технических наук, в.н.с. (director@oivtran.ru).

² Игорь Леонидович Майков, доктор физико-математических наук, в.н.с. (maikov_i@mail.ru).

1. Введение

В последнее десятилетие в малую энергетику активно внедряются энергоустановки, использующие в качестве первичного источника энергии газопоршневые двигатели [5, 6, 8]. Выбор установки и режимы ее эксплуатации во многом определяются особенностями конкретного потребителя: суточными, недельными и сезонными графиками электрической и тепловой нагрузок, структурой и оборудованием существующих систем энергоснабжения, технической возможностью подключения к централизованным сетям. Кроме того, при выборе схемных решений необходимо учитывать характеристики собственно энергетической установки и других элементов схемы, климатические условия региона, возможности резервирования электрической мощности и многое другое.

Вопросам математического и технико-экономического анализа эффективности комбинированных технологий, прежде всего, в энергетике, сегодня уделяется особое внимание. Разработка подходов к моделированию подобных технологий, методов оптимизации и соответствующего программного обеспечения позволит выбирать эффективные схемные решения, соответствующее оборудование, оптимальные тарифы на продукты комбинированных технологий [4].

В настоящей работе представлен метод решения одной из практически важных задач, связанных с эффективным энергоснабжением, прежде всего, обособленных потребителей с учетом реальных графиков энергетических нагрузок и взаимосвязи всех возможных компонентов схемы: потребителя энергии, внешних по отношению к автономному энергетическому комплексу источников электрической и тепловой энергии, газопоршневой когенерационной установки, традиционных источников теплоснабжения (водогрейной котельной) и вспомогательных элементов схемы.

Разработаны математическая модель обобщенной схемы энергокомплекса, численный метод для анализа и оптимизации

схемных решений и программное обеспечение, позволяющие решать задачи оптимизации с большими горизонтами расчетов и максимально точно учитывать графики изменения нагрузок потребителя.

2. Математическая модель

Рассмотрим обобщенную схему энергокомплекса, в состав которой входят: газопоршневая мини-ТЭЦ (ГПУ), электродвигатель (ЭК), водогрейная котельная (ВК), аккумулятор тепловой энергии (АК), электрическая (ВЭС) и тепловая (ВТС) внешние сети, потребитель электрической (ПЭЭ) и тепловой (ПТЭ) энергии (рис. 1). Математическая модель строится из условий баланса потоков электрической (z_i) и тепловой (y_i) энергии.

Электрический баланс энергокомплекса

$$z_1 + z_3 = N_p,$$

$$(1) \quad z_3 + z_4 \leq N_c,$$

$$z_1 + z_2 \leq N^{nom},$$

где N_p – электрическая мощность потребителя; N_c – предельная мощность, которую можно отобрать от сети; N^{nom} – номинальная электрическая мощность ГПУ.

Тепловой баланс энергокомплекса:

$$(2) \quad y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = W_p,$$

$$y_5 \leq W_c,$$

где W_p – тепловая мощность потребителя; W_c – предельная мощность, которую можно отобрать от внешнего источника теплоснабжения.

Дополнительные соотношения:

$$(3) \quad y_1 = f(z_1 + z_2),$$

$$y_2 = k_{ek}(z_2 + z_4).$$

где k_{ek} – КПД электродвигателя.

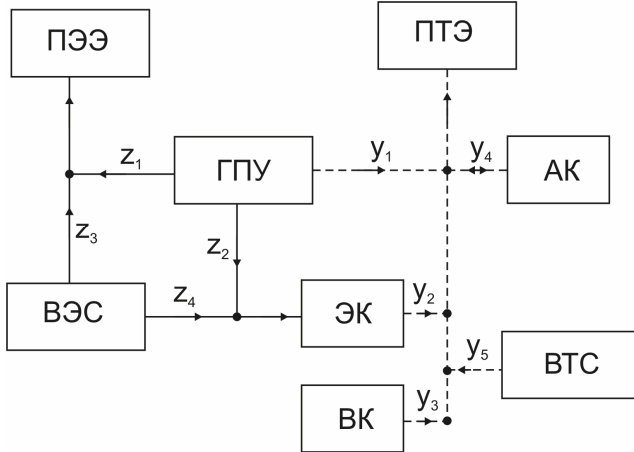


Рис. 1. Обобщенная схема электро- и теплоснабжения:
 $z_1 \dots z_4$ – потоки электрической энергии;
 $y_1 \dots y_5$ – потоки тепловой энергии

Система уравнений (1)–(3) представляет собой баланс электрической и тепловой энергии за промежуток времени Δt_i , в течение которого можно считать $N_p(t) = \text{const}$ и $W_p(t) = \text{const}$. Предполагается, что все $z_j \geq 0$ и $y_j \geq 0$. Поток y_4 представляет собой поток тепловой энергии к аккумулятору тепловой энергии или от аккумулятора (зарядка или разрядка аккумулятора) и может быть как положительным, так и отрицательным.

Для каждого промежутка времени Δt_i можно записать систему уравнений (1)–(3) и дополнить ее балансом тепла бака-аккумулятора

$$(4) \quad \sum_i^N \Delta t_i y_4 = 0,$$

где N – количество интервалов времени с постоянной нагрузкой.

Введем целевую функцию

$$(5) \quad F = \sum_i^N \sum_j^4 \Delta t_i a_j z_j^i + \sum_i^N \sum_j^4 \Delta t_i b_j y_j^i,$$

где α_j и β_j – коэффициенты целевой функции (в случае оптимизации по критерию минимальной стоимости энергоресурсов – тарифы (себестоимость) на электрическую и тепловую энергии, производимыми j -ми источниками энергокомплекса).

Решение системы уравнений (1)–(4), при котором целевая функция (5) принимает минимальное значение, определяет оптимальные режимы работы энергокомплекса в каждый промежуток времени Δt_i .

3. Численные методы

ЛИНЕЙНАЯ МОДЕЛЬ

Для решения подобных оптимизационных задач достаточно эффективными являются методы линейной оптимизации [2].

Для линеаризации системы уравнений (1)–(5) уравнение для теплового потока от мини-ТЭЦ y_1^i представим в виде

$$(6) \quad y_1^i = k_t (z_1^i + z_2^i),$$

где k_t – коэффициент, определяющий для ГПУ отношение тепловой мощности к электрической мощности.

Введем новые переменные (таблица 1). Переменная y_4 может принимать отрицательные значения. Так как в начале процедуры решения задачи знак y_4 не определен (он определяется в процессе решения), представим переменную y_4 в виде $y_4 = x_6 - x_8$, причем $x_6 \geq 0$ и $x_8 \geq 0$.

Таблица 1. Замена переменных в системе уравнений (1)–(4)

Новая переменная	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6-x_8	x_7
Старая переменная	z_1	z_2	z_3	z_4	y_3	y_4	y_5

После замены переменных система уравнений (1)–(4) запишется в виде

$$\begin{aligned}
 & x_3^i + x_4^i \leq N_c, \\
 & x_1^i + x_3^i = N_p^i(\Delta t_i), \\
 & x_1^i + x_2^i \leq N^{nom}, \\
 (7) \quad & k_t x_1^i + (k_{ek} + k_t) x_2^i + k_{ek} x_4^i + x_5^i + x_6^i + x_7^i - x_8^i = W_p^i(\Delta t_i), \\
 & x_7^i \leq W_c, \\
 & \text{где } i = 1, \dots, N, \\
 & \sum_i^N \Delta t_i (x_6^i - x_8^i) \leq 0.
 \end{aligned}$$

В отличие от системы уравнений (1)–(4), система (7) линейная, все переменные и правые части в ней неотрицательны. Последнее равенство системы уравнений (1)–(4) заменено неравенством для того, чтобы система уравнений (7) была совместна и имела решение. Физически это условие означает сброс излишней тепловой энергии мини-ТЭЦ.

Целевая функция (5) для новых переменных принимает вид

$$(8) \quad F = \sum_i^N \sum_j^8 \Delta t_i c_j x_j^i,$$

где c_j – коэффициенты целевой функции. Выбор конкретных значений c_j определяется принятым критерием оптимизации: по стоимости энергоресурсов, потреблению первичных энергоносителей всеми источниками энергии или экологическим критерием. В данной постановке задачи полагается, что $c_j = \text{const}$ в заданном промежутке времени Δt_i .

Полную систему уравнений (неравенств) (7) в векторно-матричном виде можно записать как

$$(9) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} A_1 & 0 & 0 & X_1 \\ 0 & A_i & 0 & X_i \\ 0 & 0 & A_N & X_N \\ B_1 & B_i & B_N & \end{array} \right) \text{ (ограничения) } \left(\begin{array}{c} D_1 \\ D_i \\ D_N \\ 0 \end{array} \right),$$

где матрица коэффициентов

$$(10) A_i = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_t & k_{ek} + k_t & 0 & k_{ek} & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix},$$

вектор правых частей

$$(11) D_i = \begin{vmatrix} N_c & N_p^i(\Delta t_i) & N^{nom} & W_p^i(\Delta t_i) & W_c \end{vmatrix}^T,$$

вектор неизвестных

$$(12) X_i = \begin{vmatrix} x_1^i & x_2^i & x_3^i & x_4^i & x_5^i & x_6^i & x_7^i & x_8^i \end{vmatrix}^T.$$

Последнее уравнение системы (7) (член с индексом i) представим в виде

$$(13) B_i = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Delta t_i & 0 & -\Delta t_i \end{vmatrix}.$$

Полученная система уравнений (9) может быть решена симплекс-методом с искусственным базисом [1], при этом решение будет оптимальным по отношению к целевой функции (8) (значение целевой функции – минимально).

НЕЛИНЕЙНАЯ МОДЕЛЬ (УЧЕТ НЕЛИНЕЙНОСТЕЙ)

Построенная выше модель опиралась на предположение, что все коэффициенты целевой функции $c_j = \text{const}$. В ряде случаев такое приближение может оказаться очень грубым. Оно справедливо в том случае, когда нагрузки потребителя постоянны во времени и близки к номинальным нагрузкам источников энергии (мини-ТЭЦ, котельной). Для большинства же потребителей, прежде всего, автономных, энергетические нагрузки переменны как в течение суток, так и в течение недели, месяца, года. В этом случае удельные характеристики источника энергии (себестоимость энергии, удельный расход топлива, экологические характеристики) будут зависеть от коэффициента мощности или КПД установки.

Вклад ГПУ в целевую функцию за промежуток времени Δt_i можно записать в виде

$$(14) F_G^i = \Delta t_i (c_1^i x_1^i + c_2^i x_2^i) = \Delta t_i c^i (x_1^i + x_2^i) = \Delta t_i c^i x^i.$$

Здесь учитывалось, что $c_1^i = c_2^i = c^i$, а x^i – полный поток электрической энергии от ГПУ, причем $c^i = c^i (x^i)^j$ [3].

Проведем разбиение функции $F_G^i : x^{ik} = a_{ik}$, $k = 0, \dots, K$. Тогда кусочно-линейную аппроксимацию функции F_G^i можно записать в виде

$$(15) F_G^i = \sum_{k=1}^K r_{ik} x^{ik} + F_G^i(a_{i0}),$$

где $x^i = a_{i0} + \sum_{k=1}^K x^{ik}$, $r_{ik} = \frac{F_G^{ik}(a_{ik}) - F_G^{ik-1}(a_{ik-1})}{a_{ik} - a_{ik-1}}$.

Новые переменные x^{ik} удовлетворяют ограничениям

$$(16) 0 \leq x^{ik} \leq a_{ik} - a_{ik-1}.$$

Таким образом, система уравнений (7) переходит в систему

$$x_3^i + x_4^i \leq N_c,$$

$$x_1^i + x_3^i = N_p^i(\Delta t_i),$$

$$x_1^i + x_2^i \leq N^{nom},$$

$$x_1^i + x_2^i = a_{i0} + \sum_{k=1}^K (x_1^{ik} + x_2^{ik}),$$

$$(17) x_1^{ik} + x_2^{ik} \leq a_{ik} - a_{ik-1},$$

где $k = 1, \dots, K$,

$$k_t x_1^i + (k_{ek} + k_t) x_2^i + k_{ek} x_4^i + x_5^i + x_6^i + x_7^i - x_8^i = W_p^i(\Delta t_i),$$

$$x_7^i \leq W_c,$$

где $i = 1, \dots, N$,

$$\sum_i^N \Delta t_i (x_6^i - x_8^i) \leq 0.$$

Целевая функция имеет вид

$$(18) F = \sum_i^N \left(\Delta t_i \left(\sum_{k=1}^K r_{ik} (x_1^{ik} + x_2^{ik}) + F_G^i(a_{i0}) + \sum_{j=2}^8 c_j x_j^i \right) \right).$$

Оценим минимальные требования к ресурсам компьютера для решения линейной и нелинейной задачи при условии, что в качестве метода решения используется симплекс-метод. Предполагаем, что имеются почасовые энергетические нагрузки потребителя за промежуток времени $T = \sum_i^N \Delta t_i$ (сутки, неделя, месяц, год).

Исходная матрица коэффициентов \mathbf{A} для линейной задачи имеет размерность $8N(5N + 1)$. При решении симплекс-методом формируется расширенная матрица \mathbf{A} с размерностью $(8N + 2(5N + 1))(5N + 1) \approx 90N^2 + 10N$ (произведение максимально допустимого общего числа переменных и максимально допустимого числа уравнений). Предполагая, что для хранения чисел используется формат двойной точности *double* (число занимает 8 байт), необходимый объем оперативной памяти составляет

$$(19) P = 80N(9N + 1).$$

Для нелинейной задачи исходная матрица коэффициентов \mathbf{A} имеет размерность $N(9 + K)((6 + K)N + 1)$, и расширенная матрица \mathbf{A} имеет размерность $((9 + K)N + 2((6 + K)N + 1)) \times ((6 + K)N + 1) \approx N^2(126 + 39K + 3K^2) + N(5K + 33)$. Необходимый объем оперативной памяти составляет

$$(20) P = 8(N^2(126 + 39K + 3K^2) + N(5K + 33)).$$

Зависимость объема оперативной памяти P от количества промежутков времени N при различных K представлена на рис. 2.

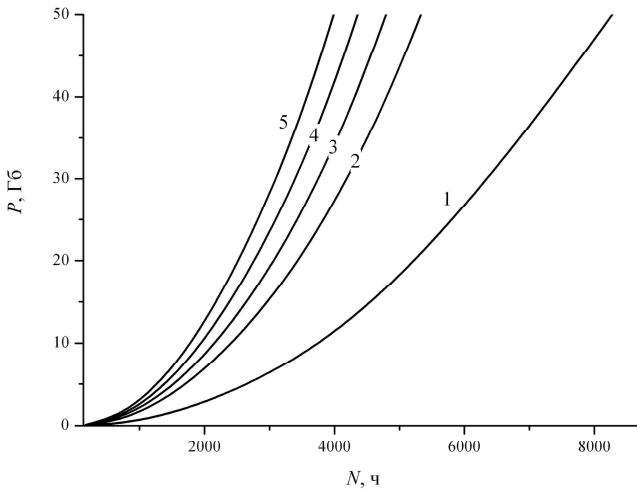


Рис. 2. Зависимость объема оперативной памяти от количества промежутков времени Δt_i : 1 – линейная задача; нелинейная задача: 2 – $K=2$, 3 – $K=3$, 4 – $K=4$, 5 – $K=5$

Специфика рассматриваемых задач такова, что горизонт расчетов должен составлять календарный год. Кроме того, для максимально точного учета изменения реальных нагрузок потребителя интервалы времени с постоянной нагрузкой должны быть не меньше 1 ч.

Приведенные выше оценки показывают принципиальную возможность проведения подобных расчетов на современных суперкомпьютерах, обладающих необходимыми ресурсами памяти и быстродействием. Однако при использовании персональных компьютеров (объем оперативной памяти несколько гигабайт и быстродействие в десятки гигафлопс) необходима разработка специальных методов расчета. Так, при $N \approx 3000$ (горизонт расчета около 4 месяцев при $\Delta t_i = 1$ ч) минимальный объем оперативной памяти для хранения расширенной матрицы A для линейной задачи составляет более 5 Гб (рис. 2). Для нелинейной задачи при том же объеме оперативной памяти и $K = 4$

горизонт расчета составляет около 2 месяцев при $\Delta t_i = 1$ ч. С учетом выделения памяти для дополнительных переменных, операционной системы и т.д. объем необходимой оперативной памяти будет существенно выше, что делает невозможным непосредственное применение симплекс-метода к решению задачи при больших N . Таким образом, имеется возможность проведения расчетов только при значительном увеличении промежутка Δt_i (или уменьшении N и K). Такое разбиение может оказаться очень грубым приближением.

Из сказанного следует, что для решения задач с горизонтом расчета в 1 год и $\Delta t_i = 1$ ч для получения результатов с приемлемой точностью необходима разработка специальных численных методов. При этом, как видно из рис. 2, необходимые ресурсы для нелинейной модели могут оказаться существенно выше, чем для линейной.

МЕТОД ДЕКОМПОЗИЦИИ

Системы уравнений (7) и (17) имеют общую структуру (9) со своими матрицами коэффициентов, векторами переменных и правых частей.

Для решения системы ограничений (уравнений) (9) применим метод декомпозиции [7]. Системы ограничений (уравнений) (9) включают в себя ограничения (уравнения) \mathbf{B} (B_1, B_2, \dots, B_N), которые содержат все переменные X_1, X_2, \dots, X_N (эти ограничения (уравнения) образуют блок-связку) и ограничения (уравнения) A_i , содержащие только часть переменных X_i (эти ограничения образуют блоки). Задача (9) имеет блочную структуру, и метод декомпозиции позволяет свести решение задачи (9), содержащей N блоков, к решению отдельных N подзадач, соответствующим образом связанных между собой через коэффициенты ограничения \mathbf{B} . При этом число блоков определяет количество подзадач, решаемых на каждой итерации при решении главной задачи системы ограничений (уравнений) (9).

Построим главную задачу для системы (9) с минимизацией целевой функции

$$(21) F = \sum_i^N C_i X_i .$$

Будем считать, что в общем случае минимальный временной интервал с постоянной нагрузкой соответствует 1 ч и количество блоков $N = 8760$ (горизонт расчета – 1 год). Все блоки связаны через уравнение \mathbf{B} с коэффициентами B_i (13).

Систему ограничений (9) можно представить в виде

$$(22) \begin{array}{rcl} A_1 X_1 & = & D_1, \\ & A_2 X_2 & = D_2, \\ & \ddots & \vdots \\ & A_N X_N & = D_N, \\ B_1 X_1 + B_2 X_2 + \dots + B_N X_N & = & 0. \end{array}$$

Введением дополнительных переменных в систему ограничений (уравнений) (9) все неравенства сведены к равенствам.

Тогда можно записать

$$(23) X_j = \sum_{k=1}^{K_1} b_{jk} Y_j ,$$

где Y_{jk} – крайние точки множества X_j , $k = 1, \dots, K_j$, $b_{jk} \geq 0$ для всех j и k , причем $\sum_{k=1}^{K_1} b_{jk} = 1$.

Главная задача (16) заключается в минимизации целевой функции

$$(24) F = \sum_{k=1}^{K_1} b_{1k} C_1 Y_{1k} + \sum_{k=1}^{K_2} b_{2k} C_2 Y_{2k} + \dots + \sum_{k=1}^{K_N} b_{Nk} C_N Y_{Nk}$$

при ограничениях

(25)

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{K_1} b_{1k} &= 1, \\
 \sum_{k=1}^{K_2} b_{2k} &= 1, \\
 &\vdots \\
 \sum_{k=1}^{K_N} b_{Nk} &= 1, \\
 \sum_{k=1}^{K_1} b_{1k} B_1 Y_{1k} + \sum_{k=1}^{K_2} b_{2k} B_2 Y_{2k} + \dots + \sum_{k=1}^{K_N} b_{Nk} B_N Y_{Nk} &= 0.
 \end{aligned}$$

В главной задаче новыми переменными являются β_{jk} . После того как будет найдено оптимальное решение b_{jk}^* задачи (24)–(25), оптимальное решение исходной задачи вычисляется по формуле

$$(26) \quad X_j = \sum_{k=1}^{K_1} b_{jk}^* Y_j.$$

Структура матрицы (9) остается блочно-диагональной, если объединить несколько матриц A_i . Введем новые матрицы A_i^{new} , которые определяются следующим образом

$$(27) \quad A_i^{new} = \underbrace{\begin{bmatrix} \ddots & 0 & 0 \\ 0 & A_k & 0 \\ 0 & 0 & \ddots \end{bmatrix}}_L \Bigg\} L,$$

где $k = j + L(i-1)$, $j = 1, \dots, L$.

Аналогичным образом изменятся векторы неизвестных, векторы правых частей и строка \mathbf{B} . Новая система ограничений будет иметь вид

$$(28) \begin{array}{ccc|c|c} A_1^{new} & 0 & 0 & X_1^{new} & D_1^{new} \\ 0 & A_i^{new} & 0 & X_i^{new} & D_i^{new} \\ 0 & 0 & A_M^{new} & X_M^{new} & D_M^{new} \\ B_1^{new} & B_i^{new} & B_M^{new} & & 0 \end{array} \quad \left(\begin{array}{c} \text{ограничения} \end{array} \right).$$

В частности, если $L = 24$ (блок состоит из 24 часов), $M = 365$, т. е. в такой постановке задача содержит 365 блоков (или подзадач), а один блок соответствует одному дню. Зависимости времени счета от величины блока представлены на рис. 3.

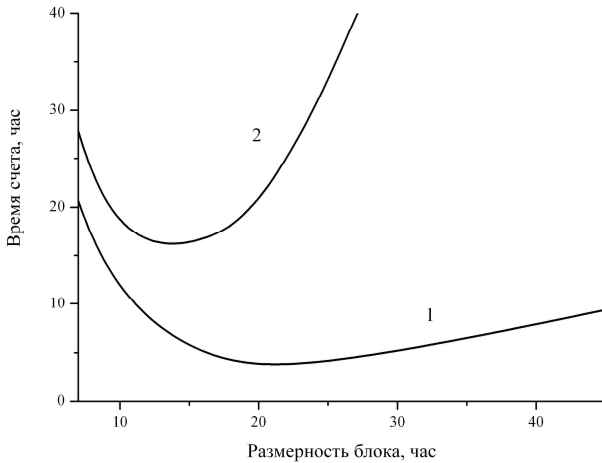


Рис. 3. Зависимость времени счета от величины блока:

1 – линейная задача, 2 – нелинейная задача ($K = 5$)

Минимальное время счета для линейной задачи составляет 3,5 ч, для нелинейной задачи – 16,2 ч. Причем оптимальный размер блока для линейной задачи соответствует 24 часам, для нелинейной ($K = 4$) – 12 ч. Время счета оценивалось для компьютера с двухядерным процессором *Core 2 Duo* с тактовой частотой 2,4 ГГц и производительностью 19,2 гигафлопс.

В реальной ситуации величина интервалов времени с постоянной нагрузкой неравномерна. В частности, на объектах ЖКХ в ночные часы и электрическая, и тепловая нагрузки практически постоянны. Относительно постоянные часовые нагрузки и на предприятиях с трехменным режимом работы. Уменьшение числа интервалов времени N с постоянной нагрузкой в два раза (среднее значение $\Delta t_i = 2$ ч) приводит к уменьшению времени счета приблизительно в 4 раза, и для линейной модели составит 0,8 ч, а для нелинейной – 4 ч. Таким образом, при соответствующей подготовке исходных данных можно существенно уменьшить время счета, не теряя при этом точности вычислений.

4. Результаты

Результатами расчетов являются номинальная электрическая мощность газопоршневой мини-ТЭЦ, номинальная мощность электродогревателя и энергетическая емкость бака-аккумулятора тепловой энергии. Кроме того, определяются оптимальные режимы работы каждого элемента схемы энергокомплекса (режимные карты) и стоимость энергоресурсов для оптимизированной схемы.

Для демонстрации возможностей разработанной модели и эффективности алгоритмов оптимизации схемы энергокомплекса (рис. 1) проведены предварительные тестовые расчеты. Значения выбранных параметров не являются характеристиками конкретного объекта, а задаются как некие средние величины. Для наглядности в качестве горизонта расчетов принято двое суток (48 ч) – характерный график потребителя в рабочий и выходной дни. Графики изменения относительных электрической и тепловой нагрузок потребителя приведены на рис. 4а.

В качестве исходных данных для коэффициентов целевой функции C_i (например, удельная стоимость или тариф в относительных единицах) заданы следующие значения: внешняя электрическая сеть – 3; внешняя тепловая сеть – 3; водогрейная

котельная – 1; ГПУ (линейная модель) – 1,25; ГПУ (нелинейная модель) – с учетом функциональной зависимости C_i от мощности (кпд) ГПУ [3].

Матрица \mathbf{A} имеет размерность 384×281 для линейной модели и 672×677 для нелинейной модели.

Результаты расчетов представлены на графиках (рис. 4б–4е). Относительная стоимость энергоресурсов при расчете по линейной модели составила 37,76 относительных единиц, по нелинейной модели – 34,42 относительных единиц.

Учет нелинейностей приводит также к изменению режимов работы элементов энергокомплекса: газопоршневой мини-ТЭЦ (рис. 4б и 4в), электродкотла (рис. 4г), бака-аккумулятора (рис. 4д) и водогрейной котельной (рис. 4е).

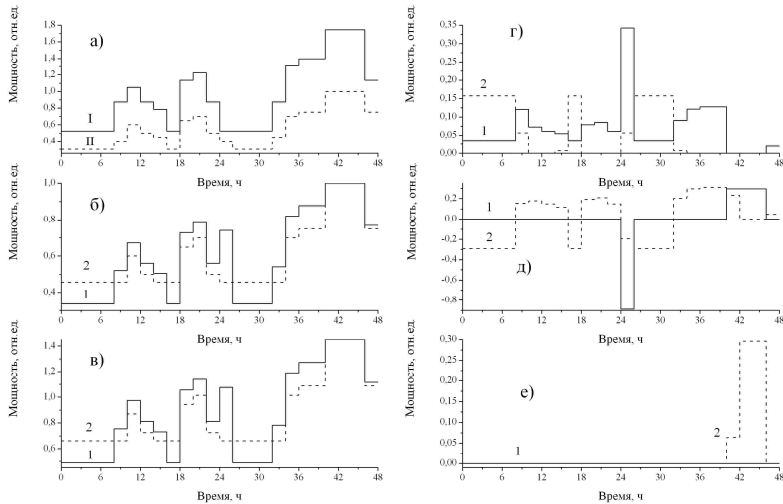


Рис. 4. Суточные графики изменения электрической (I) и тепловой (II) нагрузок – а). Результаты оптимизации энергокомплекса по критерию минимальной стоимости энергоресурсов (1 – линейная модель, 2 – нелинейная модель): б) ГПУ (электрическая энергия); в) ГПУ (тепловая энергия); г) ЭК; д) аккумулятор; е) ВК

Таким образом, для получения корректных результатов при моделировании работы энергокомплекса на резко переменные нагрузки потребителя необходимо учитывать нелинейные эффекты, в частности, зависимости коэффициентов целевой функции от коэффициента мощности.

Можно предложить следующий алгоритм расчетов по предложенным моделям. На первом этапе рассчитывается обобщенная схема энергокомплекса. В результате определяются те элементы схемы, для которых коэффициент использования мощности незначителен и затраты на их установку экономически не оправданы. После их исключения из обобщенной схемы снова решается оптимизационная задача, в результате чего определяются номинальные параметры устройств, входящих в энергокомплекс (мощность мини-ТЭЦ, электрокотла, емкость бака-аккумулятора, мощность водогрейной котельной), и режимные карты энергокомплекса.

5. Выводы

Представленные результаты показывают возможность проведения оптимизационных расчетов с учетом всех особенностей схемы энергоснабжения, включая нелинейные эффекты, за разумные времена. Разработанные модели могут найти применение при модернизации и проектировании энергокомплексов, выборе оптимальных схемных решений, являются основой для проектирования системы автоматического управления системой энергоснабжения.

Предложенные подходы к созданию математических моделей и эффективные численные методы оптимизационных расчетов могут использоваться для решения и других задач, связанных с комбинированными технологиями, максимально учитывая изменение потребности в том или ином продукте в течение принятого временного горизонта расчетов.

Представленная работа выполнялась в соответствии с заданием государственного контракта с Федеральным агентством по науке и инновациям №02.516.11.6198.

Литература

1. АКУЛИЧ И. Л. *Математическое программирование в примерах и задачах.* – М.: Высшая школа, 1986. – 319 с.
2. БОГЛАЕВ Ю. П. *Вычислительная математика и программирование.* – М.: Высшая школа, 1990. – 544 с.
3. ДЖУЛИЙ А. В., ДИРЕКТОР Л. Б., ЗАЙЧЕНКО В. М., МАРКОВ А. В. *Теплоутилизационный блок мини-ТЭЦ на базе ДВС // Теплоэнергетика.* – 2010. – №1. – С. 61–65.
4. КАГАНОВИЧ Б. М., ФИЛИППОВ С. П. *Теоретические основы анализа эффективности комбинированных технологий // Изв. РАН. Энергетика.* – 2008. – №6. – С. 116–126.
5. КОТЛЕР В. Р. *Мини-ТЭЦ: зарубежный опыт // Теплоэнергетика.* – 2006. – №8. – С. 69–71.
6. ФИЛИППОВ С. П. *Малая энергетика в России // Теплоэнергетика.* – 2009. – №8. – С. 38–44.
7. ХЕМДИ А. ТАХА. *Ведение в исследование операций.* – 7-е издание. – М.: Издательский дом Вильямс, 2005. – 912 с.
8. ХРИЛЕВ Л. С. *Основные направления и эффективность развития теплофикации // Теплоэнергетика.* – 1998. – №4. – С. 2–15.

SOLVING THE PROBLEMS OF COMPLEX POWER SYSTEMS OPTIMIZATION

Leonid Director, Joint Institute for High Temperatures of RAS, Moscow, professor (director@oivtran.ru).

Igor Maikov, Joint Institute for High Temperatures of RAS, Moscow, professor (maikov_i@mail.ru).

Abstract: We propose a general model of a power-supply unit, a computational routine for circuit design analysis and optimization, and software that accurately accounts for the changes in the consumption schedule and solves the optimization problems for long time horizon. Simplex method with artificial basis is used in an iterative process to minimize the goal function that depends on the criterion chosen (costs, primary resources consumption, or environment). Decomposition method is employed due to high dimensionality of the problem.

Keywords: mathematical modeling, optimization, numerical methods, power-generating unit, linear programming.

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии Н. Н. Бахтадзе*