

**Институт проблем управления  
им. В.А. Трапезникова РАН**

# **УПРАВЛЕНИЕ БОЛЬШИМИ СИСТЕМАМИ**

***Выпуск 30***

**Сентябрь 2010**

**СБОРНИК  
ТРУДОВ**

ISSN 1819-2467

Регистрационный номер Эл №ФС77-27285 от 22.02.2007

**Москва – 2010**

# www.mtas.ru

## ИНТЕРНЕТ-сайт теории управления организационными системами

**ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ ОРГАНИЗАЦИОННЫМИ СИСТЕМАМИ**

ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ УПРАВЛЕНИЯ ИМ. В.А. ТРАПЕЗНИКОВА РАН



**Целью сайта** является предоставление специалистам по теории и практике управления организационными системами (ученым, преподавателям, аспирантам, студентам, а также реальным управленцам) доступа к ресурсам, отражающим современное состояние теории и возможности обмена идеями и результатами.

**На сайте имеются разделы:**

**Теория** – с обзором теории управления организационными системами, глоссарием, информацией для аспирантов;

**Практика** – с обзором результатов внедрения механизмов управления в реальных организациях;

**Библиография** – около 2500 публикаций по теории управления, снабжена классификатором и аннотациями;

**Электронная библиотека** – около 700 полнотекстовых монографий, статей и учебных пособий;

**а также многое другое.**

На сайте работает **форум**, на котором можно обсудить вопросы, относящиеся к математике, экономике, управлению организациями, узнать новости теории управления и ознакомиться с планируемыми конференциями и семинарами.

# ubs.mtas.ru

Интернет-сайт электронного периодического  
научного издания «Управление большими  
системами: сборник трудов»

## УПРАВЛЕНИЕ БОЛЬШИМИ СИСТЕМАМИ

ЭЛЕКТРОННЫЙ СБОРНИК НАУЧНЫХ ТРУДОВ  
ИНСТИТУТА ПРОБЛЕМ УПРАВЛЕНИЯ ИМ. В.А. ТРАПЕЗНИКОВА РАН

С 1998 года Институт проблем управления РАН выпускает периодический сборник трудов ученых, занимающихся разработкой и исследованием математических моделей управления большими (социально-экономическими, организационными, организационно-техническими и др.) системами. Все статьи, публикуемые в сборнике, проходят рецензирование ведущими специалистами по теории управления.

С 2006 года сборник "Управление большими системами" вместе с ведущим журналом ИПУ РАН "Проблемы управления" – включены в Российский индекс научного цитирования (РИНЦ).

С июля 2007 года Сборник входит в список ВАК (перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертации на соискание ученой степени доктора и кандидата наук):

\* по управлению, вычислительной технике и информатике (для докторов наук);

\* по электронике, измерительной технике, радиотехнике и связи; по энергетике (для кандидатов наук).

**Уважаемые коллеги! Приглашаем Вас опубликовать  
Вашу статью в очередном выпуске сборника  
"Управление большими системами"!**

Периодичность сборника - 4 раза в год. Время выхода прошедшей рецензирование статьи - 3-4 месяца. Плата с авторов за публикацию рукописей не взимается.

**Редколлегия сборника "Управление большими системами" сотрудничает со многими научными и общественными организациями:**

**ФГУП НТЦ "Информрегистр"** по указанию Правительства РФ осуществляет регистрацию электронных научных изданий, публикация в которых приравнивается ВАКом к опубликованным работам, отражающим основные результаты диссертационной работы. Сборник трудов "Управление большими системами" с 2006 года зарегистрирован НТЦ "Информрегистр".

**Научная электронная библиотека eLIBRARY.RU** - это крупнейший российский информационный портал в области науки, технологии, медицины и образования, содержащий рефераты и полные тексты более 12 млн научных статей и публикаций. Все выпуски сборника трудов "Управление большими системами" доступны в открытом доступе на платформе eLIBRARY.RU.

**Общероссийский математический портал Math-Net** - это общероссийский математический портал, предоставляющий российским и зарубежным математикам различные возможности в поиске информации о математической жизни в России. Все выпуски сборника трудов "Управление большими системами" доступны в открытом доступе на платформе MathNet.Ru.

**Всероссийский институт научной и технической информации РАН** – это крупнейший российский и мировой информационный и аналитический центр. Все выпуски Сборника трудов "Управление большими системами" обрабатываются ВИНИТИ, включаются им в базу данных и реферативный журнал.

**Издательство "МАИК Наука"** при поддержке Российской академии наук издает более 180 академических журналов на английском языке и совместно с Академиздатцентром Наука – более 200 журналов на русском языке практически по всем направлениям современной науки. С 2010 года Сборник трудов «Управление большими системами» сотрудничает с выпускаемым издательством МАИК Наука журналом «Автоматика и телемеханика», что предполагает опубликование избранных статей Сборника на английском языке в выпускаемом издательством МАИК «Наука» журнале «Automation and Remote Control» (английская версия журнала «Автоматика и телемеханика»).

**Подробнее о программах сотрудничества со Сборником УБС – на официальном сайте [ubs.mtas.ru](http://ubs.mtas.ru)**

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
*Институт проблем управления*  
*им. В.А. Трапезникова*

**УПРАВЛЕНИЕ  
БОЛЬШИМИ  
СИСТЕМАМИ**

**СБОРНИК ТРУДОВ**

*Выпуск 30*

**Москва – 2010**

### КООРДИНАЦИОННЫЙ СОВЕТ

Академики РАН: Васильев С.Н., Емельянов С.В., Коровин С.К., Куржанский А.Б., Федосов Е.А., Черноусько Ф.Л.; члены-корреспонденты РАН: Желтов С.Ю., Каляев И.А., Пархоменко П.П., Попков Ю.С.; д-ра техн. наук: Бутковский А.Г., Дорофеюк А.А., Кузнецов О.П., Кульба В.В., Кротов В.Ф., Лотоцкий В.А., Павлов Б.В., Поляк Б.Т., Рутковский В.Ю.

### РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

**Главный редактор:** член-корр. РАН Новиков Д.А. **Отв. секретарь:** к.т.н. Губко М.В. Д-ра техн. наук: проф. Алескеров Ф.Т. (ГУ ВШЭ), проф. Артамонов Е.И. (ИПУ РАН), д-р экон. наук, проф. Архипова М.Ю. (ИПИ РАН), д-ра техн. наук: проф. Афанасьев В.Н. (МИЭМ), проф. Бахтадзе Н.Н. (ИПУ РАН), проф. Бурков В.Н. (ИПУ РАН), проф. Вишневский В.М. (ИППИ РАН), д-р экон. наук, проф. Голиченко О.Г. (ЦЭМИ РАН), д-р физ.-мат. наук, проф. Добровидов А.В. (ИПУ РАН), д-ра техн. наук: проф. Заложнев А.Ю. (ИПУ РАН), проф. Ириков В.А. (МФТИ), проф. Калянов Г.Н. (ИПУ РАН), проф. Касаткин С.И. (ИПУ РАН), проф. Каравай М.Ф. (ИПУ РАН), д-р экон. наук, проф. Ключков В.В. (ИПУ РАН), д-ра техн. наук: проф. Кононенко А.Ф. (ВЦ РАН), проф. Курдюков А.П. (ИПУ РАН), проф. Лебедев В.Г. (ИПУ РАН), к-т техн. наук, доцент Лебедев В.Н. (ИПУ РАН), д-р экон. наук, проф. Ловчиновский Э.В. (ИПУ РАН), д-р техн. наук, проф. Мандель А.С. (ИПУ РАН), д-р экон. наук, проф. Нижегородцев Р.М. (ИПУ РАН), д-ра техн. наук: проф. Новосельцев В.Н. (ИПУ РАН), проф. Орлов А.И. (МВТУ), канд. техн. наук Петрикевич Я.И. (ИПУ РАН), д-р физ.-мат. наук, проф. Рапопорт Л.Б. (ИПУ РАН), д-р техн. наук, проф. Рыков А.С. (МИСИС), д-р экон. наук, проф. Секерин В.Д. (ИПУ РАН), д-ра техн. наук: проф. Сидельников Ю.В. (МАИ), проф. Совлуков А.С. (ИПУ РАН), д-р экон. наук, проф. Сухарев О.С. (Ин-т экономики РАН), д-ра техн. наук: проф. Уткин В.А. (ИПУ РАН), проф. Хоботов Е.Н. (МВТУ), д-ра физ.-мат. наук: доцент Чеботарев П.Ю. (ИПУ РАН), проф. Чхартишвили А.Г. (ИПУ РАН), проф. Щербakov П.С. (ИПУ РАН).

### РЕГИОНАЛЬНЫЕ РЕДАКЦИОННЫЕ СОВЕТЫ

**Волгоград** – д-ра физ.-мат. наук: проф. Воронин А.А., проф. Лосев А.Г. (ВолГУ); **Воронеж** – д-р техн. наук, проф. Баркалов С.А., д-р физ.-мат. наук, проф. Головинский П.А. (ВГАСУ), д-р техн. наук, проф. Подвальный С.Л. (ВГТУ); **Ижевск** – д-р физ.-мат. наук, проф. Непейвода Н.Н., к-т физ.-мат. наук, проф. Родионов В.И. (УдмГУ); **Иркутск** – д-ра физ.-мат. наук: проф. Бычков И.В., проф. Лакеев А.В. (ИДСТУ СО РАН); **Казань** – д-р физ.-мат. наук, проф. Маликов А.И., д-р техн. наук, проф. Сиразетдинов Р.Т. (КГТУ-КАИ); **Липецк** – д-ра техн. наук: проф. Кузнецов Л.А., проф. Погодаев А.К. (ЛГТУ); **Самара** – д-ра экон. наук: проф. Богатырев В.Д., проф. Гераськин М.И., д-р техн. наук, проф. Засканов В.Г. (СГАУ); **Санкт-Петербург** – д-ра физ.-мат. наук: проф. Петросян Л.А. (СПбГУ), проф. Фрадков А.Л. (ИПМ РАН); **Старый Оскол** – д-р техн. наук, проф. Еременко Ю.И. (СТИ); **Тверь** – д-ра техн. наук: проф. Кузнецов В.Н., проф. Палюх Б.В. (ТГТУ).

**Адрес редакции:** 117997, г. Москва, ул. Профсоюзная, д. 65.

**Адрес в Интернет:** [ubs.mtas.ru](http://ubs.mtas.ru).

Номер гос. регистрации электронного научного издания (ЭНИ): 0420900023.

© ИПУ РАН, 2010

## СОДЕРЖАНИЕ

### *Системный анализ*

---

**Блюмин С. Л.**

*Полные гиперграфы. Спектры лапласианов. Мультиагентные системы.....* 5

**Сараев П. В.**

*Нелинейный метод наименьших квадратов и блочные рекуррентно-итерационные процедуры в обучении нейронных сетей.....* 24

**Сидельников Ю. В., Салтыков С. А.**

*Процедура отбора наиболее приемлемых разновидностей экспертных методов.....* 35

**Юдицкий С. А., Точ Д. С.**

*Временной анализ систем с сетевым управлением на основе непрерывно-дискретной модели.....* 67

### *Математическая теория управления*

---

**Дорофеюк Ю. А.**

*Структурная идентификация сложных объектов управления на базе методов кусочной аппроксимации.....* 79

### *Информационные технологии в управлении*

---

**Андрienко А. Я., Чадаев А. И.**

*Модельная версия бортового алгоритма оперативного распознавания объектов.....* 89

**Управление в социально-экономических системах**

**Абдуллаева Н. А.**

*Нечеткий подход к прогнозированию уровня бедности.....* 98

**Горшкова И. В., Клочков В. В.**

*Экономические проблемы управления развитием авиатранспортной сети в малонаселенных районах России.....* 115

**Гришин А. В.**

*Динамическое математическое моделирование деятельности инновационного предприятия в условиях венчурного финансирования.....* 135

**Ларионова И. А., Жагловская А. В., Бойков А. А., Рожков И. М., Марков С. В.**

*Комплексное управление оборотными средствами и источниками их финансирования на базе измерения используемой стратегии.....* 150

**Управление техническими системами  
и технологическими процессами**

**Вожаков А. В., Гитман М. Б., Федосеев С. А.**

*Комплексное оценивание при выборе оптимального плана производства на тактическом уровне с учетом нечетких критериев и ограничений.....* 164

**Программные и технические средства управления**

**Петров Д. Л.**

*Оптимальный алгоритм миграции данных в масштабируемых облачных хранилищах.....* 180



УДК 519.179.1

ББК 22.176

# ПОЛНЫЕ ГИПЕРГРАФЫ. СПЕКТРЫ ЛАПЛАСИАНОВ. МУЛЬТИАГЕНТНЫЕ СИСТЕМЫ <sup>1</sup>

Блюмин С.Л.<sup>2</sup>

(Липецкий государственный технический университет,  
Липецк)

*Рассмотрено вычисление спектров лапласианов полных и полных однородных неориентированных и ориентированных гиперграфов, лапласианы которых являются циркулянтами. Используются стандартные методы вычисления спектров циркулянтов. Обсуждаются возможности приложения к проблемам согласия в мультиагентных системах с учетом групповых взаимодействий агентов.*

Ключевые слова: полные и полные однородные неориентированные и ориентированные гиперграфы, лапласианы, циркулянты, спектры, мультиагентные системы, проблемы согласия, групповые взаимодействия агентов.

## **Введение**

Лапласианы орграфов, а также их спектры играют важную роль в теории и приложениях (см., например, [1, 5, 6, 8, 10]). В [2] предложено формирование матриц инцидентности, валентности, смежности и лапласианов оргиперграфов с использованием комплексных корней из единицы подходящих степеней. В данной работе рассмотрено вычисление спектров так сформированных оргиперграфов, а также их спектры.

---

<sup>1</sup> Работа поддержана РФФИ, проект №09-07-00220-а.

<sup>2</sup> Семен Львович Блюмин, доктор физико-математических наук, профессор (slb@stu.lipetsk.ru).

рованных лапласианов полных оргиперграфов, лапласианы которых являются циркулянтами [3]. Обсуждены возможности приложения к проблемам согласия в мультиагентных системах с учетом групповых взаимодействий агентов.

## 1. Циркулянты и их спектры

Циркулянты являются частными случаями теплицевых матриц и занимают особое место в областях математики, связанных с разработкой эффективных алгоритмов [3]. Стандартными общими методами вычисления спектров циркулянтов являются [3] применение дискретного преобразования Фурье или использование представления циркулянта многочленом от матрицы циклического сдвига; в ряде частных случаев применимы и более простые способы. Все они могут быть использованы для вычисления спектров лапласианов гиперграфов в тех случаях, когда лапласианы оказываются циркулянтами, что имеет место для полных гиперграфов.

Для целей данной работы удобно определение циркулянта [3], основанное именно на применении дискретного преобразования Фурье, задаваемого матрицей

$$F_m = \begin{bmatrix} \varepsilon_m^{0,0} & \varepsilon_m^{0,1} & \dots & \varepsilon_m^{0,(m-1)} \\ \varepsilon_m^{1,0} & \varepsilon_m^{1,1} & \dots & \varepsilon_m^{1,(m-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varepsilon_m^{(m-1),0} & \varepsilon_m^{(m-1),1} & \dots & \varepsilon_m^{(m-1),(m-1)} \end{bmatrix}, \varepsilon_m = \exp\left(\frac{2\pi i}{m}\right).$$

Обратное дискретное преобразование Фурье задается матрицей  $F_m^{-1} = m^{-1} \cdot F_m^* = m^{-1} \cdot \bar{F}^T$ , где  $F_m^*$  – сопряженная матрица.

Для квадратной (вообще говоря, комплексной) матрицы  $A$  порядка  $m$  через  $\Delta(A)$  обозначается диагональная матрица, на диагонали которой расположен спектр матрицы  $A$ , т. е. ее собственные значения:

$$\Delta(A) = \begin{bmatrix} \delta_1(A) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \delta_2(A) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \delta_m(A) \end{bmatrix}.$$

Матрица  $C$  является циркулянтном тогда и только тогда, когда справедливо соотношение

$$\Delta(C) = F_m \cdot C \cdot F_m^{-1} = m^{-1} \cdot F_m \cdot C \cdot F_m^*.$$

Такое определение удобно как для выяснения циркулянтности матрицы (если  $F_m \cdot A \cdot F_m^{-1}$  не диагональна, то  $A$  не циркулянтна), так и, в случае ее циркулянтности, для вычисления ее спектра. Впрочем, циркулянтность матрицы может быть выяснена и непосредственно, чисто визуально [3]: каждый ее столбец (строка), кроме первых, получается из предыдущих путем циклического сдвига вниз (вправо) на одну позицию; в соответствии с этим циркулянт порядка  $m$  может быть записан в виде

$$C = \begin{bmatrix} c_0 & c_{m-1} & \dots & c_1 \\ c_1 & c_0 & \dots & c_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m-1} & c_{m-2} & \dots & c_0 \end{bmatrix}.$$

Наряду с применением дискретного преобразования Фурье спектр циркулянта может быть вычислен следующим способом [3]: каждый циркулянт может быть представлен в виде  $C = \sum_{t=0}^{m-1} c_t P^t$ , где  $P$  – матрица циклического сдвига – основная циркулянтная матрица перестановок с первой строкой  $(0, \dots, 1)$ , собственные значения которой равны  $\varepsilon_m^j$ ; тогда

$$\delta_j(C) = \sum_{t=0}^{m-1} c_t (\varepsilon_m^j)^t, \quad j = 1, \dots, m.$$

Суммы и произведения (в частности, степени) циркулянтов, а также произведения циркулянтов на числа, являются циркулянтами. Поэтому линейная комбинация циркулянтов и много-

член от циркулянта являются циркулянтами. В то же время эти операции над нециркулянтами могут дать циркулянты. Для диагональной матрицы  $D$  матрица  $F_m \cdot D \cdot F_m^{-1}$  является циркулянтом. Все это используется при вычислении спектров лапласианов полных и полных однородных неориентированных и ориентированных гиперграфов, лапласианы которых являются циркулянтами.

## **2. Полные и полные однородные гиперграфы: матрицы инцидентности, лапласианы и их спектры**

Пусть  $V$  – конечное множество,  $|V| = m$ . Пусть элементы  $v \in V$  этого множества каким-либо (произвольным, но фиксированным на протяжении всего рассмотрения) образом помечены, упорядочены, пронумерованы, например,  $V = \{v_1, \dots, v_m\}$ .

Пусть  $B$  – булеан этого множества, т. е. полное множество всех его различных подмножеств, состоящих из различных элементов,  $|B| = 2^m$ . Пусть  $B[k] \subset B$  –  $k$ -однородный булеан – полное множество всех различных  $k$ -элементных подмножеств, состоящих из различных элементов, множества  $V$ , так что

$$B[k] \cap B[\ell] = \emptyset, k \neq \ell, |B[k]| = C_m^k, k = 0, 1, \dots, m,$$

и имеет место разложение

$$B = \bigcup_{k=0}^m B[k], 2^m = \sum_{k=0}^m C_m^k.$$

Гиперграф, или система множеств [7], определяется как пара  $H = (V, HE)$ , где  $HE \subseteq B$  – некоторый набор гиперребер – различных подмножеств, состоящих из различных элементов, множества  $V$ ,  $|HE| = n \leq 2^m$ . Гиперребра также предполагаются каким-либо (произвольным, но фиксированным на протяжении всего рассмотрения) образом помеченными, упорядоченными, пронумерованными, например,  $HE = \{he_1, \dots, he_n\}$ .

Матрица инцидентности  $I(H) = I(V, HE)$  определяется как  $(0, 1)$ -матрица размера  $m \times n$ , строки которой помечены вершинами, столбцы – гиперребрами гиперграфа, а на месте  $(v, he)$  находится 1 тогда и только тогда, когда  $v \in he$ . Иначе говоря,

столбец матрицы инцидентности, помеченный некоторым гиперребром, является характеристическим вектором этого гиперребра как подмножества множества вершин гиперграфа.

Лапласиан  $L(H) = L(V, HE)$  определяется как квадратная матрица порядка  $m$ , строки и столбцы которой помечены вершинами гиперграфа, по формуле

$$L(H) = I(H) \cdot (I(H))^T.$$

Применение термина «лапласиан» здесь и далее может быть оправдано тем, что он используется, в соответствии с [2], как единое название для произведения матрицы инцидентности на ее транспонированную (в следующем разделе – на сопряженную). В частном случае графа  $G$  применение этого термина не соответствует традиционному, так как приводит к соотношению  $L(G) = D(G) + A(G)$  (где  $D(G)$  – матрица валентности,  $A(G)$  – матрица смежности), тогда как классический лапласиан равен  $D(G) - A(G)$  (определение лапласиана, использованное в следующем разделе, в частном случае графа приводит к классическому определению лапласиана). Матрица типа  $D(G) + A(G)$  встречается в теории графов (например, она допускает интерпретацию в связи с реберными графами), но специального названия не имеет. В предлагаемом контексте она может быть названа «лапласианом без учета ориентации», тогда как классический лапласиан – «лапласианом с учетом ориентации».

Полный гиперграф определяется как пара  $H = (V, B)$  и обозначается  $H(m)$ , а полный однородный ( $k$ -однородный) гиперграф – как пара  $H = (V, B[k])$  и обозначается  $H(m; [k])$ . Их матрицы инцидентности и лапласианы обозначаются:

$$I(H(m)) = I(m), \quad L(H(m)) = L(m),$$

$$I(H(m; [k])) = I(m; [k]), \quad L(H(m; [k])) = L(m; [k]).$$

При этом матрица  $I(m)$  состоит из матриц  $I(m; [k])$  как из блоков, а лапласианы связаны соотношением

$$L(m) = \sum_{k=0}^m L(m; [k])$$

и имеют следующую специальную структуру:

$$L(m) = \begin{bmatrix} 2^{m-1} & 2^{m-2} & \dots & 2^{m-2} \\ 2^{m-2} & 2^{m-1} & \dots & 2^{m-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2^{m-2} & 2^{m-2} & \dots & 2^{m-1} \end{bmatrix},$$

$$L(m; [k]) = \begin{bmatrix} C_{m-1}^{k-1} & C_{m-2}^{k-2} & \dots & C_{m-2}^{k-2} \\ C_{m-2}^{k-2} & C_{m-1}^{k-1} & \dots & C_{m-2}^{k-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{m-2}^{k-2} & C_{m-2}^{k-2} & \dots & C_{m-1}^{k-1} \end{bmatrix}.$$

Эти матрицы являются циркулянтами весьма частного вида: их диагональные элементы совпадают между собой, а внедиагональные, в свою очередь, между собой. Пример, используемый для сравнения в дальнейшем:

$$I(4) = \begin{bmatrix} [0] & [1 \ 0 \ 0 \ 0] & [1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0] & [1 \ 1 \ 1 \ 0] & [1] \\ [0] & [0 \ 1 \ 0 \ 0] & [1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0] & [1 \ 1 \ 0 \ 1] & [1] \\ [0] & [0 \ 0 \ 1 \ 0] & [0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1] & [1 \ 0 \ 1 \ 1] & [1] \\ [0] & [0 \ 0 \ 0 \ 1] & [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1] & [0 \ 1 \ 1 \ 1] & [1] \end{bmatrix}$$

$I(4; [k]), k = 0, 1, 2, 3, 4:$

$$[0] \quad [1] \quad [2] \quad [3] \quad [4]$$

$$L(4) = \begin{bmatrix} 8 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 8 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 8 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} +$$

$L(4; [k]), k = 0, 1, 2, 3, 4:$  [0] [1]

$$+ \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[2] \quad [3] \quad [4]$$

Собственные значения этих лапласианов обозначаются далее через  $\lambda_j(m)$ ,  $\lambda_j(m; [k])$ ,  $j = 1, \dots, m$ ,  $k = 0, 1, \dots, m$ . Очевидно, что

$$\lambda_j(m; [0]) = 0, \quad \lambda_j(m; [1]) = 1, \quad j = 1, \dots, m.$$

Спектры лапласианов  $L(m)$ ,  $L(m; [k])$  как циркулянтов могут быть вычислены описанными выше стандартными методами. Однако их частный вид  $A = (a - b)I + bJ$ , где  $I$  – единичная матрица,  $J$  – матрица из единиц, имеющая собственные значения  $m$  кратности 1 и 0 кратности  $m - 1$ , с учетом того, что  $\lambda_j(A)$  вычисляются двучленом  $(a - b) + b\lambda_j(J)$ , позволяет заключить, что  $A$  имеет собственные значения  $a - b + mb$  кратности 1 и  $a - b$  кратности  $m - 1$ .

Это приводит к следующим наборам собственных значений лапласианов:

$$\lambda_1(m) = (m + 1)2^{m-2}, \quad \lambda_j(m) = 2^{m-2}, \quad j = 2, \dots, m;$$

$$\lambda_1(m; [k]) = C_{m-1}^{k-1} + (m - 1)C_{m-2}^{k-2},$$

$$\lambda_j(m; [k]) = C_{m-1}^{k-1} - C_{m-2}^{k-2}, \quad j = 2, \dots, m.$$

Они связаны соотношениями

$$\lambda_j(m) = \sum_{k=0}^m \lambda_j(m; [k]), \quad j = 1, \dots, m.$$

Представляют интерес суммы

$$\sigma(m) = \sum_{j=1}^m \lambda_j(m) = m2^{m-1}, \quad \sigma(m; [k]) = \sum_{j=1}^m \lambda_j(m; [k]) = mC_{m-1}^{k-1},$$

связанные соотношением

$$\sigma(m) = \sum_{k=0}^m \sigma(m; [k]).$$

Указанные соотношения могут служить для контроля вычисления спектров.

### **3. Полные и полные однородные оргиперграфы: матрицы инцидентности, лапласианы и их спектры**

В случае полного  $k$ -однородного гиперграфа  $H(m; [k])$ , в соответствии с предложенным в [2] способом перехода от него к полному  $k$ -однородному оргиперграфу  $OH(m; [k])$ , переход от

гиперребер  $he$  к гипердугам  $ha$  отражается в матрице инцидентности  $I(OH(m; [k])) = OI(m; [k])$  следующим образом: в столбце, отвечающем гипердуге  $ha$ , единицы заменяются, вообще говоря, комплексными корнями степени  $k$  из единицы

$$+1 = \varepsilon_k^0, \quad \varepsilon_k = \varepsilon_k^1 = \exp\left(\frac{2\pi i}{k}\right), \quad \varepsilon_k^2, \dots, \varepsilon_k^{k-1},$$

имеющими нулевую сумму. Лапласиан

$$OL(m; [k]) = OI(m; [k]) \cdot (OI(m; [k]))^*$$

оказывается при этом эрмитовой циркулянтной матрицей, элементы которой формируются из указанных корней из единицы. Лапласиан  $OL(m)$ , как сумма таких циркулянтов, также оказывается циркулянтом. Пример, допускающий сравнение с предыдущим и используемый в дальнейшем:

$$OI(4) =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 & 1 \\ \bar{\varepsilon} & 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ 0 & \bar{\varepsilon} & \bar{\varepsilon} & \bar{\varepsilon} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ -i \end{bmatrix}$$

$$OI(4; [k]), \quad k=0, 1, 2, 3, 4:$$

$$[0]$$

$$[1]$$

$$[2]$$

$$[3]$$

$$[4]$$

$$OL(4) = \begin{bmatrix} 8 & -1+2\bar{\varepsilon}-i & -3 & -1+2\varepsilon+i \\ -1+2\varepsilon+i & 8 & -1+2\bar{\varepsilon}-i & -3 \\ -3 & -1+2\varepsilon+i & 8 & -1+2\bar{\varepsilon}-i \\ -1+2\bar{\varepsilon}-i & -3 & -1+2\varepsilon+i & 8 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} +$$

$$OL(4; [k]), \quad k=0,1,2,3,4:$$

$$[0]$$

$$[1]$$

$$[2]$$



$$+ \begin{bmatrix} 3 & 2\bar{\varepsilon} & \varepsilon + \bar{\varepsilon} & 2\varepsilon \\ 2\varepsilon & 3 & 2\bar{\varepsilon} & \varepsilon + \bar{\varepsilon} \\ \varepsilon + \bar{\varepsilon} & 2\varepsilon & 3 & 2\bar{\varepsilon} \\ 2\bar{\varepsilon} & \varepsilon + \bar{\varepsilon} & 2\varepsilon & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -i & -1 & i \\ i & 1 & -i & -1 \\ -1 & i & 1 & -i \\ -i & -1 & i & 1 \end{bmatrix},$$

[3]
[4]

где

$$\varepsilon = \varepsilon_3 = \varepsilon_3^1 = \exp\left(\frac{2\pi i}{3}\right), \bar{\varepsilon} = \varepsilon_3^2, 1 = \varepsilon_3^0 = \varepsilon_3^3.$$

Собственные значения этих лапласианов обозначаются далее через  $\mu_j(m)$ ,  $\mu_j(m; [k])$ ,  $j = 1, \dots, m$ ,  $k = 0, 1, \dots, m$ . Очевидно, что

$$\mu_j(m; [0]) = 0, \mu_j(m; [1]) = 1, j = 1, \dots, m.$$

Собственные значения связаны соотношениями

$$\mu_j(m) = \sum_{k=0}^m \mu_j(m; [k]), j = 1, \dots, m.$$

Представляют интерес суммы

$$\alpha(m) = \sum_{j=1}^m \mu_j(m), \tau(m; [k]) = \sum_{j=1}^m \mu_j(m; [k]),$$

связанные соотношением  $\alpha(m) = \sum_{k=0}^m \tau(m; [k])$ .

Кроме того, справедливы соотношения

$$\alpha(m) = \alpha(m), \alpha(m; [k]) = \alpha(m; [k]).$$

Указанные соотношения могут служить для контроля вычисления спектров.

Для вычисления спектров так сформированных лапласианов оргиперграфов могут быть применены описанные выше стандартные методы вычисления спектров циркулянтов.

В работах [8, 10] приведены обширные таблицы спектров лапласианов графов различной структуры. В следующем разделе приведены вычисленные описанными методами спектры лапласианов полных и полных однородных неориентированных и ориентированных гиперграфов для  $1 \leq m \leq 5$ . Проиллюстрированы указанные выше соотношения между собственными значениями и их суммами.

**4. Таблица спектров лапласианов полных и полных однородных гиперграфов и оргигерграфов:  $m=1, \dots, 5$**

**$m = 1$**

$\lambda_1(1; [0]) = 0$	$\sigma(1; [0]) = 0$
$\lambda_1(1; [1]) = 1$	$\sigma(1; [1]) = 1$
<b><math>\lambda_1(1) = 1</math></b>	<b><math>\sigma(1) = 1</math></b>
$\mu_1(1; [0]) = 0$	$\tau(1; [0]) = 0$
$\mu_1(1; [1]) = 1$	$\tau(1; [1]) = 1$
<b><math>\mu_1(1) = 1</math></b>	<b><math>\tau(1) = 1</math></b>

**$m = 2$**

$\lambda_1(2; [0]) = \lambda_2(2; [0]) = 0$	$\sigma(2; [0]) = 0$
$\lambda_1(2; [1]) = \lambda_2(2; [1]) = 1$	$\sigma(2; [1]) = 2$
$\lambda_1(2; [2]) = 2, \lambda_2(2; [2]) = 0$	$\sigma(2; [2]) = 2$
<b><math>\lambda_1(2) = 1, \lambda_2(2) = 3</math></b>	<b><math>\sigma(2) = 4</math></b>
$\mu_1(2; [0]) = \mu_2(2; [0]) = 0$	$\tau(2; [0]) = 0$
$\mu_1(2; [1]) = \mu_2(2; [1]) = 1$	$\tau(2; [1]) = 2$
$\mu_1(2; [2]) = 0, \mu_2(2; [2]) = 2$	$\tau(2; [2]) = 2$
<b><math>\mu_1(2) = 1, \mu_2(2) = 3</math></b>	<b><math>\tau(2) = 4</math></b>

**$m = 3$**

$\lambda_1(3; [0]) = \dots = \lambda_3(3; [0]) = 0$	$\sigma(3; [0]) = 0$
$\lambda_1(3; [1]) = \dots = \lambda_3(3; [1]) = 1$	$\sigma(3; [1]) = 3$
$\lambda_1(3; [2]) = 4, \lambda_2(3; [2]) = \lambda_3(3; [2]) = 1$	$\sigma(3; [2]) = 6$
$\lambda_1(3; [3]) = 3, \lambda_2(3; [3]) = \lambda_3(3; [3]) = 0$	$\sigma(3; [3]) = 3$
<b><math>\lambda_1(3) = \lambda_2(3) = 2, \lambda_3(3) = 8</math></b>	<b><math>\sigma(3) = 12</math></b>
$\mu_1(3; [0]) = \dots = \mu_3(3; [0]) = 0$	$\tau(3; [0]) = 0$
$\mu_1(3; [1]) = \dots = \mu_3(3; [1]) = 1$	$\tau(3; [1]) = 3$
$\mu_1(3; [2]) = 0, \mu_2(3; [2]) = \mu_3(3; [2]) = 3$	$\tau(3; [2]) = 6$
$\mu_1(3; [3]) = \mu_2(3; [3]) = 0, \mu_3(3; [3]) = 3$	$\tau(3; [3]) = 3$
<b><math>\mu_1(3) = 1, \mu_2(3) = 4, \mu_3(3) = 7</math></b>	<b><math>\tau(3) = 12</math></b>

**$m = 4$**

$\lambda_1(4; [0]) = \dots = \lambda_4(4; [0]) = 0$	$\sigma(4; [0]) = 0$
$\lambda_1(4; [1]) = \dots = \lambda_4(4; [1]) = 1$	$\sigma(4; [1]) = 4$
$\lambda_1(4; [2]) = 6, \lambda_2(4; [2]) = \dots = \lambda_4(4; [2]) = 2$	$\sigma(4; [2]) = 12$
$\lambda_1(4; [3]) = 9, \lambda_2(4; [3]) = \dots = \lambda_4(4; [3]) = 1$	$\sigma(4; [3]) = 12$
$\lambda_1(4; [4]) = 4, \lambda_2(4; [4]) = \dots = \lambda_4(4; [4]) = 0$	$\sigma(4; [4]) = 4$
<b><math>\lambda_1(4) = \dots = \lambda_3(4) = 4, \lambda_4(4) = 20</math></b>	<b><math>\sigma(4) = 32</math></b>
$\mu_1(4; [0]) = \dots = \mu_4(4; [0]) = 0$	$\tau(4; [0]) = 0$
$\mu_1(4; [1]) = \dots = \mu_4(4; [1]) = 1$	$\tau(4; [1]) = 4$
$\mu_1(4; [2]) = 0, \mu_2(4; [2]) = \dots = \mu_4(4; [2]) = 4$	$\tau(4; [2]) = 12$
$\mu_1(4; [3]) = 0, \mu_2(4; [3]) = 4 - 2\sqrt{3}, \mu_3(4; [3]) = 4,$ $\mu_4(4; [3]) = 4 + 2\sqrt{3}$	$\tau(4; [3]) = 12$
$\mu_1(4; [4]) = \dots = \mu_3(4; [4]) = 0, \mu_4(4; [4]) = 4$	$\tau(4; [4]) = 4$
<b><math>\mu_1(4) = 1, \mu_2(4) = 9 - 2\sqrt{3}, \mu_3(4) = 9,</math></b> <b><math>\mu_4(4) = 13 + 2\sqrt{3}</math></b>	<b><math>\tau(4) = 32</math></b>

**$m = 5$**

$\lambda_1(5; [0]) = \dots = \lambda_5(5; [0]) = 0$	$\sigma(5; [0]) = 0$
$\lambda_1(5; [1]) = \dots = \lambda_5(5; [1]) = 1$	$\sigma(5; [1]) = 5$
$\lambda_1(5; [2]) = 8, \lambda_2(5; [2]) = \dots = \lambda_5(5; [2]) = 3$	$\sigma(5; [2]) = 20$
$\lambda_1(5; [3]) = 18, \lambda_2(5; [3]) = \dots = \lambda_5(5; [3]) = 3$	$\sigma(5; [3]) = 30$
$\lambda_1(5; [4]) = 16, \lambda_2(5; [4]) = \dots = \lambda_5(5; [4]) = 1$	$\sigma(5; [4]) = 20$
$\lambda_1(5; [5]) = 5, \lambda_2(5; [5]) = \dots = \lambda_5(5; [5]) = 0$	$\sigma(5; [5]) = 5$
<b><math>\lambda_1(5) = \dots = \lambda_4(5) = 8, \lambda_5(5) = 48</math></b>	<b><math>\sigma(5) = 80</math></b>
$\mu_1(5; [0]) = \dots = \mu_5(5; [0]) = 0$	$\tau(5; [0]) = 0$
$\mu_1(5; [1]) = \dots = \mu_5(5; [1]) = 1$	$\tau(5; [1]) = 5$
$\mu_1(5; [2]) = 0, \mu_2(5; [2]) = \dots = \mu_5(5; [2]) = 5$	$\tau(5; [2]) = 20$

$\mu_1(5; [3]) = 0, \mu_2(5; [3]) = \frac{15}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} \alpha,$ $\mu_3(5; [3]) = \frac{15}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} \beta, \mu_4(5; [3]) = \frac{15}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} \beta,$ $\mu_5(5; 3) = \frac{15}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} \alpha$	$\tau(5; [3]) = 30$
$\mu_1(5; [4]) = 0, \mu_2(5; [4]) = 5 + \sqrt{5} - \frac{1}{2} \alpha,$ $\mu_3(5; [4]) = 5 - \sqrt{5} + \frac{1}{2} \beta, \mu_4(5; [4]) = 5 - \sqrt{5} - \frac{1}{2} \beta,$ $\mu_5(5; [4]) = 5 + \sqrt{5} + \frac{1}{2} \alpha$	$\tau(5; [4]) = 20$
$\mu_1(5; [5]) = \dots = \mu_4(5; [5]) = 0, \mu_5(5; [5]) = 5$	$\tau(5; [5]) = 5$
$\mu_1(\mathbf{5}) = 1, \mu_2(\mathbf{5}) = \frac{37}{2} + \sqrt{5} - \frac{\sqrt{3}+2}{4} \alpha,$ $\mu_3(\mathbf{5}) = \frac{37}{2} - \sqrt{5} + \frac{\sqrt{3}+2}{4} \beta, \mu_4(\mathbf{5}) = \frac{37}{2} - \sqrt{5} - \frac{\sqrt{3}+2}{4} \beta,$ $\mu_5(\mathbf{5}) = \frac{47}{2} + \sqrt{5} + \frac{\sqrt{3}+2}{4} \alpha$	$\tau(\mathbf{5}) = 80$

где  $\alpha = 3\sqrt{10+2\sqrt{5}} + \sqrt{10-2\sqrt{5}}$ ,  $\beta = \sqrt{10+2\sqrt{5}} - 3\sqrt{10-2\sqrt{5}}$ .

### 5. Мультиагентные системы: проблемы согласия

В данном разделе на простых примерах обсуждаются некоторые предварительные соображения о возможностях применения оргиперграфов к проблемам согласия в мультиагентных системах с учетом групповых взаимодействий агентов.

Решение проблем согласия в мультиагентных системах с учетом парных взаимодействий агентов использует спектр лапласиана взвешенного орграфа, ассоциированного с системой [5]. Пусть мультиагентная система состоит из  $m$  агентов,  $x_i(t)$  –

состояние  $i$ -го агента,  $i = 1, \dots, m$ . В модели достижения консенсуса (согласия) с учетом парных взаимодействий агентов [5]

$$\dot{x}_i(t) = -\sum_{j=1}^m a_{ij}(t) \cdot [x_i(t) - x_j(t)], i = 1, \dots, m,$$

число  $a_{ij}(t) \geq 0$  означает вес, с которым  $i$ -ый агент учитывает парное бинарное расхождение значения своего состояния со значением состояния  $j$ -го агента, определяемое как разность этих значений, т. е. как их сумма с коэффициентами  $\pm 1$  или

$$\varepsilon_2^k = \exp\left(\frac{2\pi i}{2} k\right) = \exp(\pi i k), k = 1, 2,$$

– корнями степени 2 из 1, имеющими нулевую сумму:

$$\begin{aligned} \Delta(x_i(t); x_j(t)) &= x_i(t) - x_j(t) = (+1) \cdot x_i(t) + (-1) \cdot x_j(t) = \\ &= \varepsilon_2^2 \cdot x_i(t) + \varepsilon_2^1 \cdot x_j(t). \end{aligned}$$

Лапласиан  $L(t)$  упомянутого взвешенного орграфа – взвешенный лапласиан указанной модели [5], с использованием которого она записывается в матричной форме

$$\dot{x}(t) = -L(t)x(t),$$

по определению, имеет нулевые строчные суммы, а потому сингулярен и его собственному значению 0 отвечает собственный вектор из единиц  $\mathbf{1} = [1, \dots, 1]^T$ . Если 0 – простое собственное значение, то соответствующее собственное подпространство одномерно и вектор  $\mathbf{1}$  является единственным с точностью до некоторой константы  $c$ , что и означает полное согласование состояний всех агентов с учетом их парных взаимодействий.

Учет групповых взаимодействий агентов группами, содержащими по  $2 \leq k \leq m$  из общего числа  $m$  агентов – так что каждый агент непосредственно взаимодействует с  $k - 1$  агентами – осуществляется следующим образом.

Групповое  $k$ -арное расхождение значения состояния  $i$ -го агента со значениями состояний всех остальных агентов, входящих в группу, определяется как сумма этих значений с коэффициентами  $\varepsilon_k^j$ ,  $j = 1, \dots, k$ , – корнями степени  $k$  из 1, имеющими нулевую сумму. Иллюстрирующим это примером аналога

приведенной выше модели достижения консенсуса для случая  $m = 4, k = 3$  является следующая модель, в записи которой время  $t$  опущено, а для весов, с которыми каждый агент учитывает групповое расхождение значения своего состояния со значениями состояний остальных агентов группы, использованы упрощенные обозначения:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -\{a_1(x_1 + \bar{\varepsilon}x_2 + \varepsilon x_3) + a_2(x_1 + \bar{\varepsilon}x_2 + \varepsilon x_4) + a_3(x_1 + \bar{\varepsilon}x_3 + \varepsilon x_4)\}, \\ \dot{x}_2 &= -\{b_1(x_2 + \bar{\varepsilon}x_3 + \varepsilon x_4) + b_2(x_2 + \bar{\varepsilon}x_3 + \varepsilon x_1) + b_3(x_2 + \bar{\varepsilon}x_4 + \varepsilon x_1)\}, \\ \dot{x}_3 &= -\{c_1(x_3 + \bar{\varepsilon}x_4 + \varepsilon x_1) + c_2(x_3 + \bar{\varepsilon}x_4 + \varepsilon x_2) + c_3(x_3 + \bar{\varepsilon}x_1 + \varepsilon x_2)\}, \\ \dot{x}_4 &= -\{d_1(x_4 + \bar{\varepsilon}x_1 + \varepsilon x_2) + d_2(x_4 + \bar{\varepsilon}x_1 + \varepsilon x_3) + d_3(x_4 + \bar{\varepsilon}x_2 + \varepsilon x_3)\}.\end{aligned}$$

В матричной форме эта модель принимает вид

$$\dot{x} = -\tilde{L}(4;[3])x,$$

где использован взвешенный лапласиан данной модели

$$\tilde{L}(4;[3]) = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 + a_3 & \bar{\varepsilon}(a_1 + a_2) & \varepsilon a_1 + \bar{\varepsilon} a_3 & \varepsilon(a_2 + a_3) \\ \varepsilon(b_2 + b_3) & b_1 + b_2 + b_3 & \bar{\varepsilon}(b_1 + b_2) & \varepsilon b_1 + \bar{\varepsilon} b_3 \\ \varepsilon c_1 + \bar{\varepsilon} c_3 & \varepsilon(c_2 + c_3) & c_1 + c_2 + c_3 & \bar{\varepsilon}(c_1 + c_2) \\ \bar{\varepsilon}(d_1 + d_2) & \varepsilon d_1 + \bar{\varepsilon} d_3 & \varepsilon(d_2 + d_3) & d_1 + d_2 + d_3 \end{bmatrix}.$$

Как и взвешенный лапласиан  $L(t)$  выше, взвешенный лапласиан  $\tilde{L}(4;[3])$ , очевидно, имеет нулевые строчные суммы, а потому сингулярен и его собственному значению 0 отвечает собственный вектор из единиц  $\mathbf{1} = [1, \dots, 1]^T$ . Если 0 – простое собственное значение, то соответствующее собственное подпространство одномерно и вектор  $\mathbf{1}$  является единственным с точностью до некоторой константы  $c$ , что и означает полное согласование состояний всех агентов с учетом их групповых взаимодействий.

Сказанное выполняется в простейшем случае, когда все веса равны единице: в этом случае взвешенный лапласиан  $\tilde{L}(4;[3])$  совпадает с лапласианом  $OL(4; [3])$  соответствующего оргиперграфа, приведенным в разделе 3, спектр которого, приведенный в разделе 4, имеет простое собственное число 0 и,

следовательно, в этом случае обоснование достижения консенсуса выполняется так же, как в случае парных взаимодействий.

Частным случаем групповых взаимодействий агентов (наряду с парными, когда  $k = 2$ ) являются их совокупные взаимодействия, когда  $k = m$ . В этом случае рассмотрение, подобное проведенному выше, приводит к лапласианам  $OL(m; [m])$  соответствующих оргиперграфов. Как показывают примеры их спектров, приведенные в разделе 4, собственное число 0 в этих случаях не является простым, соответствующие собственные подпространства не являются одномерными и обоснование достижения консенсуса, вообще говоря, непосредственно выполнено быть не может.

Примером, когда достижение консенсуса можно обосновать и в подобных ситуациях, может служить модель достижения консенсуса с учетом совокупного взаимодействия агентов для случая  $m = k = 3$ :

$$\dot{x}_1 = -a \cdot (x_1 + \bar{\varepsilon} \cdot x_2 + \varepsilon \cdot x_3),$$

$$\dot{x}_2 = -b \cdot (x_2 + \bar{\varepsilon} \cdot x_3 + \varepsilon \cdot x_1),$$

$$\dot{x}_3 = -c \cdot (x_3 + \bar{\varepsilon} \cdot x_1 + \varepsilon \cdot x_2),$$

которая в матричной форме использует соответствующий взвешенный лапласиан:

$$\dot{x} = -\tilde{L}(3; [3])x = - \begin{bmatrix} a & \bar{\varepsilon} \cdot a & \varepsilon \cdot a \\ \varepsilon \cdot b & b & \bar{\varepsilon} \cdot b \\ \bar{\varepsilon} \cdot c & \varepsilon \cdot c & c \end{bmatrix} x.$$

В простейшем случае, когда все веса равны единице, этот взвешенный лапласиан  $\tilde{L}(3; [3])$  совпадает с лапласианом  $OL(3; [3])$  соответствующего оргиперграфа, спектр которого, приведенный в разделе 4, имеет двукратное собственное значение 0, так что соответствующее собственное подпространство является двумерным. Оно описывается соотношением

$$x_1 + \bar{\varepsilon} \cdot x_2 + \varepsilon \cdot x_3 = 0,$$

или

$$x_1 + \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot x_2 + \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot x_3 = 0,$$

или

$$x_1 - \frac{1}{2}(x_2 + x_3) + i\frac{\sqrt{3}}{2}(x_3 - x_2) = 0,$$

что возможно лишь при условии  $x_3 = x_2 = c$ , а потому и  $x_1 = c$ , что и означает полное согласование состояний всех агентов с учетом их совокупного взаимодействия.

Приведенные примеры позволяют предположить, что достижение консенсуса при учете групповых взаимодействий агентов может быть обосновано с использованием спектров оргиперграфов в случаях  $2 \leq k \leq m - 1$ , тогда как в случае  $k = m$ , возможно, потребуется принимать какие-либо дополнительные меры.

Полное исследование возможностей применения оргиперграфов к проблемам согласия в мультиагентных системах с учетом групповых взаимодействий агентов требует отдельного рассмотрения.

В частности, представляет интерес установление взаимосвязи как между лапласианами невзвешенного и взвешенного оргиперграфов, так и между их спектрами. Примером может служить случай  $k = m$ , когда

$$\tilde{L}(m; [m]) = A \cdot OL(m; [m]),$$

где  $A = \text{diag} \{a, b, c, \dots, d\}$  – диагональная матрица весов модели. Так как матрица  $OL(m; [m])$  имеет, по определению, единичный ранг и спектр  $0, \dots, 0, m$ , а при умножении диагональной матрицы  $A$  слева на матрицу единичного ранга ранг последней не увеличивается, а ее  $i$ -ая строка умножается на  $i$ -ый диагональный элемент матрицы  $A$ , то матрица  $\tilde{L}(m; [m])$  имеет собственные значения  $0$  кратности  $m - 1$  и  $a + b + c + \dots + d$  кратности  $1$ .

В исследовании мультиагентных систем важную роль играют обобщения [5] матричной теоремы Кирхгофа из теории



графов [4]. В ее основе лежит лемма о равенстве между собой алгебраических дополнений всех элементов матрицы с нулевыми суммами строк и столбцов [4]. Использование комплексных корней из единицы при формировании матриц инцидентности оргиперграфов и их лапласианов обеспечивает последним это ключевое свойство. Представляет интерес получение и интерпретация подобной теоремы в контексте гиперграфов.

### **Заключение**

Лапласианы произвольных, не обязательно полных или полных однородных, гиперграфов, неориентированных или ориентированных, вообще говоря, не являются циркулянтами. Тем не менее, использованные выше методы вычисления спектров в некоторых случаях могут быть применены с надлежащими модификациями, основанными на матричных представлениях лапласианов, предложенных в [2].

Возможна связь использованных выше  $k$ -арных, в частности, тернарных групповых расхождений состояний агентов с  $k$ -арными, в частности, тернарными числами, на основе которых строится тернарный комплексный анализ, находящий приложения в различных областях [9].

### **Литература**

1. БЛЮМИН С.Л. *Мультиагентные системы: проблемы и протоколы согласия, псевдообращение лапласианов графов* // Системы управления и информационные технологии. – 2007. – №2(28). – С. 4–9.
2. БЛЮМИН С.Л. *Оргиперграфы: матричные представления* [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://ubs.mtas.ru/forum>. – Сетевые модели в управлении. – /2009/10/17/– 19 с.
3. ВОЕВОДИН В.В., ТЫРТЫШНИКОВ Е.Е. *Вычислительные процессы с теплицевыми*. – М.: Наука, 1987. – 230 с.

4. ЕМЕЛИЧЕВ В.А., МЕЛЬНИКОВ О.И., САРВАНОВ В.И., ТЫШКЕВИЧ Р.И. *Лекции по теории графов.* – М.: Наука, 1990. – 384 с.
5. ЧЕБОТАРЕВ П.Ю., АГАЕВ Р.П. *Согласование характеристик в многоагентных системах и спектры лапласовских матриц орграфов* // Автоматика и телемеханика. – 2009. – №3. – С. 136–151.
6. BIYIKOGLU T., LEYDOLD J., STADLER P. *Laplacian Eigenvectors of Graphs. Perron-Frobenius and Faber-Krahn Type Theorems.* – Berlin: Springer, 2007. – 115 p.
7. BOLLOBAS B. *Combinatorics: Set Systems, Hypergraphs, Families of Vectors and Combinatorial Probability.* – Cambridge: Cambridge University Press, 1986. – 178 p.
8. CVETKOVIC D., DOOB M., SACHS H.. *Spectra of Graphs: Theory and Applications.* 3<sup>rd</sup> Ed. – Leipzig: Johan Ambrosius Bart Verlag, 1995. – 368 p.
9. LIPATOV L., RAUSCH DE TRAUBENBERG M., VOLKOV G. *On the Ternary Complex Analysis and its Applications* [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://arxiv.org/0711.0809v1>. – 28 p.
10. NEWMAN M. *The Laplacian Spectrum of Graphs: Master Thesis.* – Winnipeg: University of Manitoba, 2000. – 126 p.

## COMPLETE HYPERGRAPHS. LAPLACIAN SPECTRA. MULTI-AGENT SYSTEMS

**Sam L. Blyumin**, Lipetsk State Technical University, Lipetsk, Dr. Sc. in Math. & Phys., professor (slb@stu.lipetsk.ru).

*Abstract: Computation of Laplacian spectra is considered for complete and complete uniform undirected and directed hypergraphs which Laplacians are circulants. Standard methods are used for computation of circulant spectra. Applications are discussed to*

*consensus problems in multi-agent systems taking account of agents' group interactions.*

Keywords: complete and complete uniform undirected and directed hypergraphs, Laplacians, circulants, spectra, multi-agent systems, consensus problems, agents' group interactions.

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии А. К. Погодаевым*

УДК 519.7  
ББК 22.19

## **НЕЛИНЕЙНЫЙ МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ И БЛОЧНЫЕ РЕКУРРЕНТНО-ИТЕРАЦИОННЫЕ ПРОЦЕДУРЫ В ОБУЧЕНИИ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ<sup>1</sup>**

**Сараев П. В.<sup>2</sup>**

*(Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Липецкий государственный технический университет», Липецк)*

*Работа посвящена развитию алгоритмов обучения нейронных сетей прямого распространения на основе нелинейного метода наименьших квадратов с псевдообращением. Рассматривается возможность применения формулы блочного псевдообращения матриц Клайна в алгоритмах обучения на основе декомпозиции вектора весов. Данный подход позволяет снизить вычислительные затраты за счет псевдообращения матриц малых размеров.*

Ключевые слова: обучение нейронных сетей, нелинейный метод наименьших квадратов, блочное псевдообращение, блочные рекуррентно-итерационные процедуры.

### **Введение**

Эффективным инструментом моделирования сложных систем, о функционировании которых отсутствует априорные знания, является нейростевоое моделирование, основанное на построении зависимостей между входными и выходными переменными с помощью нейронных сетей (НС). Одним из этапов построения НС является обучение, которое фактически оказывается нелинейной задачей о наименьших квадратах. Наиболее часто для ее ре-

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 09-07-97531-р\_центр\_а.

<sup>2</sup> Павел Викторович Сараев, кандидат технических наук, декан, (psaraev@yandex.ru).

шения применяются алгоритмы, основанные на методе Ньютона, в частности, метод Гаусса-Ньютона. Для возможности корректного применения данного метода при нахождении направления минимизации целевой функции необходимо использовать операцию псевдообращения матриц, обобщающую обычное обращение. В данной работе рассматривается повышение эффективности применения метода Гаусса-Ньютона с псевдообращением для обучения НС на основе формулы блочного псевдообращения матриц Клайна, предлагается алгоритм для обучения НС на основе указанной формулы.

### **1. Обучение нейронных сетей с помощью нелинейного метода наименьших квадратах**

Наиболее распространенным классом НС являются сети прямого распространения (НС ПР) [3]. В НС ПР нейроны разделяются на несколько групп, называемых слоями. Нейроны, составляющие слой, не связаны друг с другом; на их входы подаются выходные значения нейронов предыдущего слоя.

Функционирование одновыходной  $m$ -слойной НС при единичной функции активации в выходных нейронах представляется в форме

$$(1) \quad y = W^{(m)} \sigma \left( \dots \left( W^{(2)} \sigma \left( W^{(1)} x \right) \right) \dots \right).$$

где  $x \in \mathbb{R}^n$  – вектор входов НС;  $y \in \mathbb{R}$  – выход НС;  $\sigma$  – нелинейная функция активации;  $W^{(l)} \in \mathbb{R}^{N_l \times (N_{l-1} + 1)}$  – веса нейронов слоя  $l$  (учитывается также фиктивный единичный входной сигнал каждого нейрона),  $l = 1, \dots, m$ ;  $N_l$  – число нейронов в слое  $l$ . Из (1) видно, что работу  $l$ -го слоя НС ПР в векторно-матричной форме можно представить как

$$y^{(l)} = \sigma \left( W^{(l)} y^{(l-1)} \right),$$

где  $y^{(l)} \in \mathbb{R}^{N_l}$  – выходы нейронов слоя  $l$ ;  $y^{(0)} = x$  – вектор входов НС. Функция (1) имеет суперпозиционный характер, лежащий в основе многих алгоритмов эффективного использования НС

ПР. Важным обстоятельством является возможность дифференцирования выходов сети по весовым коэффициентам и входным переменным НС.

Важным этапом построения НС ПР является обучение – параметрическая идентификация нейросетевой модели на основе массива известных данных

$$\{\tilde{x}_i, \tilde{y}_i\}, i = 1, \dots, k.$$

Степень близости вектора выходов сети на  $i$ -ом примере  $y_i$  и указаний учителя  $\tilde{y}_i$  при текущем векторе весов НС  $w \in \mathbb{R}^s$  характеризуется мгновенным функционалом качества, который обычно представляет собой евклидову норму вектора отклонений:

$$(2) \quad Q_i(\varepsilon(w)) = (y_i(w) - \tilde{y}_i)^T (y_i(w) - \tilde{y}_i) = \sum_{j=1}^r (y_{ij}(w) - \tilde{y}_{ij})^2.$$

Интегральная степень соответствия нейросетевой модели данным из обучающего множества задается функционалом

$$(3) \quad J(w) = \sum_{i=1}^k Q_i(w) = \sum_{i=1}^k (y_i(w) - \tilde{y}_i)^2.$$

Цель обучения – определение такого вектора весов  $w^*$ , чтобы функционал (3) принимал минимальное значение:

$$(4) \quad w^* = \arg \min_{w \in \mathbb{R}^s} J(w).$$

По сути, требуется решить нелинейную задачу о наименьших квадратах (НЗНК). Метод решения НЗНК называется нелинейным методом наименьших квадратов (НМНК).

Учет квадратичности (3) приводит к разработке алгоритмов, ориентированных на решение НЗНК. Аппроксимируем (3) в окрестности текущего вектора весов  $w_t$  квадратичной моделью

$$(5) \quad J(w) \approx J(w_t) + \nabla_w J(w_t)(w - w_t) + \frac{1}{2}(w - w_t)^T \nabla_w^2 J(w_t)(w - w_t)$$

Применяя к (5) необходимое условие оптимума функции, приходим к уравнению

$$\nabla J(w_t) + \nabla^2 J(w_t)(w - w_t) = 0.$$

Из псевдорешения этого уравнения получается метод Ньютона для решения НЗНК с псевдообращением

$$(6) \quad \Delta w_t = w - w_t = - [\nabla^2 J(w_t)]^+ \nabla J(w_t),$$

где  $[\nabla^2 J(w_t)]^+$  – псевдообратная матрица к исходной (матрица Мура–Пенроуза), являющаяся обобщением обратной матрицы на случай вырожденных и прямоугольных матриц. Использование псевдообращения позволяет не заботиться о невырожденности и даже квадратности матрицы Гессе оптимизируемой функции. Минимизируемый функционал (3) для НЗНК можно представить в форме

$$(7) \quad J(w) = \frac{1}{2} R(w)^T R(w),$$

где  $R(w) = y(w) - \tilde{y}$  – вектор невязок;  $y(w)$  – вектор выходов НС ПР, составленный на примерах обучающего множества;  $\tilde{y}$  – вектор указаний учителя (множитель  $1/2$  не влияет на решение задачи (4)). Будут справедливы формулы:

$$(8) \quad \nabla J(w) = R^T(w) R(w),$$

где  $R^T(w)$  – матрица Якоби вектора невязок, и

$$(9) \quad \nabla^2 J(w) = R^T(w) R'(w) + G(w),$$

где  $G(w)$  – матрица, содержащая информацию о вторых частных производных элементов вектора  $R(w)$ . Подставляя (8) и (9) в (6), получаем ньютоновское направление минимизации с псевдообращением:

$$(10) \quad \Delta w_t = - [R^T(w_t) R'(w_t) + Q(w_t)]^+ R^T(w_t) R(w_t).$$

Матрица  $Q(w_t)$  сложно рассчитывается, поэтому (10) в чистом виде не применяется.

В основе большинства алгоритмов НМНК лежит предположение о том, что с каждой итерацией слагаемое  $R^T(w_t) R'(w_t)$  становится все более значимым по сравнению с  $Q(w_t)$ . Действительно, при  $\|J(w_t)\|_{t \rightarrow \infty} \rightarrow 0$  матрица  $Q(w_t)$  стремится к нулевой. В методе Гаусса–Ньютона с псевдообращением полагается, что  $G(w) = 0$ :

$$(11) \quad \Delta w_t = - [R^T(w_t) R'(w_t)]^+ R^T(w_t) R(w_t) = - [R'(w_t)]^+ R(w_t).$$

Матрица Якоби  $R^T(w)$  для НС ПР может быть рассчитана на основе алгоритма, аналогичного процедуре обратного распространения ошибки.

## 2. Блочные рекуррентно-итерационные процедуры в обучении

В работе [2] для решения НЗНК было предложено использовать блочные рекуррентно-итерационные процедуры (БРИП). В данной работе предлагается их применение к обучению НС ПР. Суть БРИП состоит в том, что направление для минимизации НЗНК на некотором шаге итерационного процесса, определяемое с помощью метода Гаусса-Ньютона с псевдообращением, не следует вычислять непосредственно по формуле (11). Вместо это предлагается воспользоваться формулой Клайна для псевдообращения блочных матриц [1]:

$$(12) \quad [A \ B]^+ = \begin{bmatrix} A^+(I - BL) \\ L \end{bmatrix},$$

где

$$(13) \quad L = C^+ + (I - C^+C)KB^T(A^+)^T A^+(I - BC^+),$$

$$C = (I - AA^+)B, \quad K = (I + M^T M)^{-1}, \quad M = A^+B(I - C^+C).$$

Данный способ обосновывается преимуществами вычислительного характера, имеющими место при псевдообращения матриц небольших размеров. Формула Клайна позволяет реализовать рекуррентную процедуру псевдообращения матрицы, состоящей из нескольких блоков.

БРИП основываются на разбиении исходного вектора параметров  $w$  на произвольное количество подвекторов  $w^i, i = 1, \dots, n$ . На каждой итерации на основе рекуррентного алгоритма Клайна определяется направление минимизации вдоль каждой группы весов  $\Delta w^i$ .

Рассмотрим ситуацию, когда вектор  $w$  разбивается на две части:  $w^1$  и  $w^2$ . Алгоритм Гаусса-Ньютона в соответствии с (12) для модели с скалярным выходом можно записать как

$$(14) \quad \begin{bmatrix} \Delta w^1 \\ \Delta w^2 \end{bmatrix} = [\nabla_{w^1}^T y \quad \nabla_{w^2}^T y]^+ (y - \tilde{y}) = \\ = \begin{bmatrix} (\nabla_{w^1}^T y)^+ (I - \nabla_{w^2}^T y L) \\ L \end{bmatrix} (y - \tilde{y}).$$



Это позволяет определить сначала один вектор

$$\Delta w^2 = L(y - \tilde{y}),$$

затем на основе этого вычислить и другой:

$$\begin{aligned} \Delta w^1 &= (\nabla_{w^1}^T y)^+ (I - \nabla_{w^2}^T y L) (y - \tilde{y}) = \\ &= (\nabla_{w^1}^T y)^+ (y - \tilde{y} - \nabla_{w^2}^T y \Delta w^2). \end{aligned}$$

БРИП могут быть применены для обучения НС ПР; при этом разбиение вектора весов становится естественным, вытекающим из самой структуры сети [4]. В отдельную часть могут быть выделены как всего слоя, так и отдельных нейронов; другие разбиения содержательного смысла не имеют. Рассмотрим НС ПР стандартной структуры. Пусть  $u$  – вектор линейно входящих (веса нейрона выходного слоя), а  $v$  – вектор нелинейно входящих в НС параметров (веса нейронов скрытых слоев). Так как порядок составления вектора  $w$  ( $[u^T \ v^T]^T$  или  $[v^T \ u^T]^T$ ) может быть выбран произвольным, алгоритм определения направления минимизации на основе (14) запишем в виде

$$\Delta v = L(y - \tilde{y}),$$

$$\Delta u = (\nabla_u^T y)^+ (y - \tilde{y} - \nabla_v^T y \Delta v).$$

Вследствие того, что параметры  $u$  входят в НС линейно, справедливо, что

$$\nabla_u^T y = \Psi,$$

где  $\Psi = \Psi(v) \in \mathbb{R}^{k \times q}$  – простым способом вычисляемая матрица, составленная из значений нелинейных функций  $\psi_i(v, x)$ ,  $i = 1, \dots, q$ , на примерах обучающего множества:

$$\Psi = \begin{bmatrix} \psi_1(v, x_1) & \psi_2(v, x_1) & \dots & \psi_q(v, x_1) \\ \psi_1(v, x_2) & \psi_2(v, x_2) & \dots & \psi_q(v, x_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \psi_1(v, x_k) & \psi_2(v, x_k) & \dots & \psi_q(v, x_k) \end{bmatrix}.$$

Итак, получили следующую формулу определения направления минимизации вдоль линейно входящих весов стандартной НС ПР:

$$\Delta u = \Psi^+ (y - \tilde{y} - \nabla_v^T y \Delta v),$$

где матрица Якоби  $\nabla_v^T y$  может быть вычислена аналогично алгоритму обратного распространения ошибки (ОРО) с учетом суперпозиционной структуры нейросетевой модели.

БРИП для параметрической идентификации НСМ могут быть распространены на многослойные сети. Пусть  $A = [A_1 \ A_2 \ \dots \ A_n]$  и  $A_{1..j} = [A_1 \ A_2 \ \dots \ A_j]$ , тогда рекуррентный алгоритм блочного псевдообращения может быть представлен в следующем виде:

$$\begin{aligned} A^+ &= \begin{bmatrix} A_{1..n-1}^+ (I - A_n L_{1..n-1}) \\ L_{1..n-1} \end{bmatrix}, \\ A_{1..n-1}^+ &= \begin{bmatrix} A_{1..n-2}^+ (I - A_{n-1} L_{1..n-2}) \\ L_{1..n-2} \end{bmatrix}, \\ &\vdots \\ A_{1..2}^+ &= [A_1 \ A_2]^+ = \begin{bmatrix} A_1^+ (I - A_2 L_1) \\ L_1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Таким образом, определив матрицу  $A_1^+$ , можно рекуррентно посчитать другие части псевдообратной блочной матрицы. Выпишем формулу для нахождения псевдообратной матрицы  $A_{1..i}^+$ :

$$(15) \quad A_{1..i}^+ = \begin{bmatrix} A_{1..i-1}^+ (I - A_i L_{1..i-1}) \\ L_{1..i-1} \end{bmatrix},$$

где матрица  $L_{1..i}$  строится на основе  $A_{1..i-1}^+$  и  $A_i$ .

Теперь применим данные формулы для вычисления направлений минимизации. Введя обозначение  $\Delta w^{1..i} = [\Delta w^1{}^T \ \Delta w^2{}^T \ \dots \ \Delta w^i{}^T]^T$ , получим:

$$\Delta w^n = L_{1..n-1} (y - \tilde{y}),$$

$$\Delta w^{1..n-1} = A_{1..n-1}^+ (I - A_n L_{1..n-1}) (y - \tilde{y}) = A_{1..n-1}^+ (y - \tilde{y} - A_n \Delta w^n),$$

$$\begin{aligned} \Delta w^{n-1} &= L_{1..n-2}(y - \tilde{y} - A_n \Delta w^n), \\ \Delta w^{1..n-2} &= A_{1..n-2}^+(I - A_{n-1}L_{1..n-2})(y - \tilde{y} - A_n \Delta w^n) = \\ &= A_{1..n-2}^+(y - \tilde{y} - A_n \Delta w^n - A_{n-1} \Delta w^{n-1}), \\ &\quad \vdots \\ \Delta w^2 &= L_1(y - \tilde{y} - A_n \Delta w^n - A_{n-1} \Delta w^{n-1} - \dots - A_3 \Delta w^3), \\ \Delta w^1 &= A_1^+(I - A_2 L_1)(y - \tilde{y} - A_n \Delta w^n - A_{n-1} \Delta w^{n-1} - \dots - A_2 \Delta w^2) = \\ &= A_1^+(y - \tilde{y} - A_n \Delta w^n - A_{n-1} \Delta w^{n-1} - \dots - A_2 \Delta w^2). \end{aligned}$$

Видно, что рекуррентная формула для вычисления направления оптимизации  $i$ -го подвектора весов ( $i = n, \dots, 2$ ) записывается как

$$(16) \quad \Delta w^i = L_{1..i-1} \left( y - \tilde{y} - \sum_{j=i+1}^n A_j \Delta w^j \right),$$

и для подвектора  $\Delta w^1$ :

$$(17) \quad \Delta w^1 = A_1^+ \left( y - \tilde{y} - \sum_{j=2}^n A_j \Delta w^j \right).$$

При  $n = 2$  получается в точности (14). Для алгоритма Гаусса-Ньютона  $A_j = \nabla_{w^j} y$  - находится с учетом суперпозиционной структуры на основе процедуры, аналогичной ОРО. Далее приведен предлагаемый алгоритм 1 использования БРИП в обучении НС.

**Алгоритм 1.** Применение БРИП в обучении НС ПР

- 1) Вычисление  $A_1^+$ ,  $D := A_1^+$ .
- 2) Вычисление поблочно псевдообратной матрицы  $A^+$ .
  - а)  $i := 2$ .
  - б) Вычисление  $L_{1..i-1}$  на основе  $D$  и  $A_i$ .
  - в) Вычисление  $A_{1..i}^+$ ,  $D := A_{1..i}^+$ .
  - г)  $i := i + 1$ .

- д) Если  $i < n$ , возврат на шаг 2б.
- 3)  $z := y - \tilde{y}$ .
- 4) Определение подвекторов  $\Delta w^i$ .
  - а)  $i := n$ .
  - б)  $\Delta w^i := L_{1..i-1}z$ .
  - в)  $i := i - 1$ .
  - г)  $z := z - A_{i+1}\Delta w^{i+1}$ .
  - д) Если  $i > 2$ , возврат на шаг 4б.
  - е)  $\Delta w^1 := A_1^+z$ .

Заметим, что нет необходимости хранить все матрицы  $A_{1..i}$  – достаточно знать эту матрицу на текущем шаге рекуррентного процесса. Кроме того, саму матрицу  $A^+$  также нет надобности вычислять. При нахождении подвекторов для увеличения эффективности используется рекуррентно рассчитываемый вектор  $z$ .

Можно найти некоторую аналогию предлагаемого алгоритма 1 с процедурой обратного распространения ошибки, которая послойно находит градиент функционала качества по вектору весов НС. Алгоритм 1 обладает большей гибкостью, поскольку позволяет находить направление изменения значений весов в любом порядке – как от последнего слоя к первому, так от первого слоя к последнему, и даже в произвольном порядке.

Данный алгоритм, как и БРИП вообще, могут основываться не только на базе метода Гаусса-Ньютона, но и на базе других методов ньютоновского типа с псевдообращением, определяющих направление минимизации по (10):

$$\Delta w_t = - [R'^T(w_t)R'(w_t) + Q(w_t)]^+ R'^T(w_t)R(w_t).$$

Это связано с тем, что общая схема формирования направления описывается формулой  $\Delta w = \hat{R}^+\hat{y}$ , где  $\hat{R}$  – аппроксимация матрицы Гессе (своя для каждого метода);  $\hat{y}$  – вектор, содержащий информацию об указаниях учителя (в методе Гаусса-Ньютона  $\hat{y} = R(w) = y(w) - \tilde{y}$ ).

## **Заключение**

Данная работа обобщает результаты, полученные в [2], с учетом специфики задачи обучения НС ПР. Предложенный алгоритм на основе БРИП позволяет усовершенствовать процедуры обучения НС ПР, основанных на применении НМНК, в частности, метода Гаусса-Ньютона. Данный алгоритм устанавливает также связь между направлениями минимизации для подвекторов вектора весов НС ПР.

## **Литература**

1. АЛБЕРТ А. *Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание*. – М.: Наука, 1977. – 224 с.
2. БЛЮМИН С. Л., ПОГОДАЕВ А. К. *Блочные рекуррентно-итерационные процедуры решения нелинейной задачи о наименьших квадратах* // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1992. – Т. 32, №8. – С. 1180–1186.
3. ОСОВСКИЙ С. *Нейронные сети для обработки информации*. – М.: Финансы и статистика, 2002. – 344 с.
4. САРАЕВ П. В. *Использование псевдообращения в задачах обучения искусственных нейронных сетей* // Электронный журнал «Исследовано в России». – 2001. – №29. – С. 308–317.

## **NONLINEAR LEAST SQUARES METHOD AND BLOCK RECURRENT AND ITERATIVE PROCEDURES IN NEURAL NETWORKS TEACHING**

**Pavel Saraev**, Lipetsk State Technical University, Lipetsk, Cand.Sc.,  
dean (psaraev@yandex.ru).

*Abstract: The article is devoted to the development of the feedforward neural networks teaching algorithms based on nonlinear least squares method with pseudo-inversion. Application of Cline block pseudo-inversion formula to teaching algorithms based on weights vector decomposition is considered. This approach allows to decrease computational costs by virtue of pseudo-inversion of matrices of small size.*

**Keywords:** neural networks teaching, nonlinear least squares method, block pseudo-inversion, block recurrent and iterative procedures.

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии Б. Т. Поляком*

УДК 303.43

ББК 65в6

## ПРОЦЕДУРА ОТБОРА НАИБОЛЕЕ ПРИЕМЛЕМЫХ РАЗНОВИДНОСТЕЙ ЭКСПЕРТНЫХ МЕТОДОВ

Сидельников Ю. В.<sup>1</sup>, Салтыков С. А.<sup>2</sup>

(Учреждение Российской академии наук  
Институт проблем управления РАН, Москва)

*В статье впервые разработана и обоснована процедура отбора наиболее приемлемых разновидностей экспертных методов для решения заданной прогнозной оценочной задачи, даны рекомендации по отбору конкретных экспертных методов для задач данного уровня сложности и обширности.*

Ключевые слова: процедура отбора экспертного метода, сложность задачи, обширность задачи.

### **1. Введение исходных понятий и цель исследования**

Многообразие объектов, эволюцию которых нужно прогнозировать с помощью экспертов, а также видов и типов прогнозных задач, которые можно сформулировать, относительно одного и того же объекта, очень велико. Именно поэтому, возникает вопрос относительно эффективного отбора разновидности экспертного метода.

Цель нашего исследования в рамках данной статьи – разработать и обосновать процедуру отбора наиболее приемлемых разновидностей экспертных методов для решения заданной прогнозной оценочной задачи, обосновать ее эффективность и дать рекомендации по отбору экспертного метода.

---

<sup>1</sup> Сидельников Юрий Валентинович, доктор технических наук, профессор (sidelnikovu@mail.ru).

<sup>2</sup> Салтыков Сергей Анатольевич, младший научный сотрудник (ssaltykov@mail.ru).

Для того чтобы реализовать указанную цель, необходимо как минимум операционально задать понятия экспертного метода и прогнозной оценочной задачи, а также указать, что нужно учитывать при отборе.

Мы полагаем, что в общем случае, при отборе необходимо учитывать:

1. Критерии, понимаемые нами либо в узком толковании, как, например, в многокритериальном анализе, либо широком толковании, рассмотренном в четырехтомном словаре русского языка [11].

2. Специфику ситуации, контекстно связанной с решением прогнозной оценочной задачи. В данной статье приняты следующие базовые допущения относительно этой специфики ситуации:

- мы считаем, что мы можем найти любое нужное нам число экспертов и сформировать из них группу;
- мы исходим из того, что постановка прогнозной оценочной задачи уже не уточняется и не изменяется, а ЛПР имеет достаточно времени для принятия обоснованного решения;
- мы находимся в ситуации, когда нужно использовать именно экспертные методы прогнозирования, а не, скажем, модели и/или статистические методы.

3. Свойства прогнозной оценочной задачи, решаемой с помощью экспертов, и результата ее решения.

Пояснения к пункту 1.

Мы исходим из того, что отбор метода надо произвести на основе некоторых критериев, понимаемых нами в толковании словаря русского языка, где понятие «критерий» трактуется как «признак, на основании которого производится оценка, определение или классификация чего-либо; мерило» [11]. По аналогии с вышеуказанной трактовкой, в данной статье под критерием мы будем подразумевать признак объекта, на основании которого производится определение каким-либо образом того, что следует отобрать именно данный вариант (объект отбора), а не иной. Следует отметить, что в многокритериальном анализе часто используется существенно более узкая трактовка, являющаяся частным случаем вышеприведенной. Следуя ей, критерий – при-



знак объекта, на основании которого производится определение того, насколько объект соответствует заданной цели, то есть, определение ценности объекта путем введения монотонной функции определенного вида [7]. Именно такие критерии используются, скажем, в теории важности критериев. Говоря о таких критериях, будем их называть критериями в узком смысле. И вполне естественно возникает вопрос: какие критерии необходимо использовать? Мы не можем строго формально обосновать, почему мы используем именно нижеуказанный перечень критериев, но кратко поясним, как мы пришли к такому выводу.

Мы искали критерии, которые, во-первых, характеризуют непосредственно задачу, и, во-вторых, связаны с познавательными способностями ученых, занимающихся прогнозированием.

Сначала мы нашли и использовали один такой критерий, напрямую связанный с когнитивными процессами в ситуации оценивания, – сложность задачи [13]. Затем, был найден и использован второй такой критерий – обширность задачи [9]. Нам представляется, что эти два критерия – сложность и обширность – качественно отличны. Других таких критериев нами не найдено, но мы не исключаем, что они существуют.

Пояснения к пункту 3.

I. Результатом решения такой задачи является оценка (оценки) значения параметра или характеристики объекта (процесса) в будущем.

II. Задача, которую мы решаем, обладает следующими шестью свойствами:

- 1) Корректно сформулирована.
- 2) Внутренне непротиворечива.
- 3) Не является риторическим вопросом.
- 4) Выражена в дискурсе, понятном для ученых, занимающихся прогнозированием.
- 5) Сформулирована на языке, понятном для существенной части ученых, занимающихся прогнозированием, и письменно зафиксирована.
- 6) По объему текста, предназначенного для ее описания, не превосходит усредненных познавательных способностей

ученых, занимающихся прогнозированием.

Зафиксируем нижеследующее допущение относительно прогнозной оценочной задачи: наличие совокупности шести вышеуказанных свойств задачи, как единого целого, вероятно-стно воспроизводимо определяется научным сообществом, занимающимся прогнозированием.

Возвращаясь к плану реализации цели статьи, операционально зададим понятие экспертного метода. Но прежде чем ввести понятие экспертного метода, необходимо рассмотреть нижеследующие понятия.

Базовый механизм получения новой информации (МПНИ) – это любая системно организованная совокупность правил, приемов и способов получения новой информации от человека, которая:

1. Предназначена для инициации процесса решения задачи конкретного уровня сложности<sup>1</sup>.

2. Позволяет осуществить «переход» от условий задачи к ее решению.

3. И, кроме того, применение которой не связано с использованием предметно-зависимых предположений (то есть, предположений, обусловленных спецификой предметной области).

Отметим, что можно получить новую информацию и без МПНИ, например, с помощью таблицы интегралов, соответствующих преобразований и расчетов, определив площадь под кривой, заданной в виде непрерывной функции.

Укажем в нижеследующей таблице соответствие между уровнями сложности прогнозной задачи и видами базовых механизмов.

---

<sup>1</sup> Свойство задачи, отражающее уровень «креативности», необходимой для её решения, степень её «нетривиальности», которая определяется алгоритмом, описанным в [13].

Таблица 1. Соответствие между уровнями сложности прогнозной задачи и видами базовых механизмов

№	Градации уровней сложности	Названия базовых МПНИ
2	II	Систематизация перебора
3	III	Хаотизация перебора
4	IV	Методологическая рефлексия
5	V	Механизм базируется на интуиции и/или озарении
1	I	Простейший <sup>1</sup>

Такое соответствие имеет место, прежде всего потому, что в статье [13], где впервые были введены уровни сложности прогнозной задачи, они формулировались через неявное представление о тех механизмах, которые инициируют решение задачи соответствующего уровня сложности.

Теперь перейдем к определению понятия реального механизма получения новой информации как элемента множества комбинаций базовых механизмов, который на наш взгляд осмыслен. Максимально возможное число таких комбинаций 31 ( $2^5 - 1$ ). Перебирая все эти комбинации, полагаем, что лишь шесть комбинаций МПНИ осмыслены, которые мы и назовем реальными МПНИ:

1. Простейший.
2. Систематизация перебора.
3. Итеративный (включает наличие обратной связи, без непосредственного взаимодействия всех участников). Комбинация базовых механизмов: систематизация и хаотизация перебора.
4. Хаотизация перебора.
5. Методологическая рефлексия.
6. Механизм базируется на интуиции и/или озарении.

---

<sup>1</sup> Простейший базовый механизм предполагает только лишь взаимное информирование участников встречи и обмен широко известными идеями.

Рассмотрим следующее понятие разновидности экспертного метода как системно организованной совокупности правил, приемов и/или способов, предназначенной для инициации процесса решения оценочных задач с помощью людей, которая, во-первых, удовлетворяет следующим условиям:

1. Процесс и, возможно, результат оценивания значения параметра (характеристики) объекта должен быть воспроизводим другим человеком и/или коллективным субъектом и/или научным сообществом либо всегда, либо с высокой вероятностью (при этом вероятность трактуется либо как объективная числовая величина в аксиоматике Колмогорова, либо как субъективная, в том числе нечисловая).

2. Все условия задачи, исходные данные, предположения, допущения и оценки представляются в наглядной форме и доступны для проверки.

3. Правила и приемы должны быть экономными, способными давать результат с наименьшими затратами средств и времени<sup>1</sup>,

Во-вторых, содержит один реальный МПНИ.

И, в-третьих, может иметь нижеследующие составные части:

1. «Императив», с помощью которого определяется, приближаемся ли мы к решению задачи или нет. Аналог, метафора – компас. По-видимому, для V уровня сложности такими «императивами» являются так называемое «внутреннее да – нет», «полетит – не полетит». Так называемое «лезвие Оккама» является «императивом» исследователя преимущественно для задачи IV уровня сложности. Для III уровня сложности «императивом» является самовопрос исследователя «достаточно ли сумасшедшая эта идея?». Для II и I уровней сложности нам не известен такой «императив», возможно, там он и не нужен.

2. «Дополнительное требование», соблюдение которого обеспечивает возможность работы реального МПНИ и (или) повышает его эффективность. Например, мы полагаем, что для V уровня сложности «дополнительным требованием» является

---

<sup>1</sup> При формулировании этих трех условий мы базировались на подходе Квейда к определению методики [2].

наличие достаточного времени для созерцания. Таким же «дополнительным требованием» для задачи IV уровня сложности является 11-ое правило Т. Эйлоарта [18]: «Спать с проблемой, идти на работу, гулять, принимать душ, ехать, пить, есть, играть в теннис — все о ней». Для III уровня сложности «дополнительным требованием» будет – разделение фаз генерации идей и анализа, используемое, например, в мозговой атаке. Для II и I уровней сложности нам не известны «дополнительные требования», возможно, там они и не нужны.

Следуя исторически сложившейся традиции использования понятия «экспертный метод», мы определяем это размытое понятие как совокупность разновидностей экспертных методов в вышеуказанном определении, объединенных только лишь традицией их употребления. Например, даже в самой узкой трактовке метод Дельфи понимается как совокупность разновидностей итеративного метода Дельфи I с двумя различными правилами остановки. (Во-первых, когда совпадут значения медиан числовых рядов экспертных оценок на двух последовательных итерациях и, во-вторых, когда группа экспертов и (или) респондентов придет к консенсусу [12]).

Введем понятие «М-группы экспертных методов». Под М-группой экспертных методов  $\{A_i\}$  мы понимаем такую совокупность разновидностей экспертных методов, элементы которой имеют одинаковый реальный МПНИ.

Для реализации заявленной цели в этой статье предлагается процедура, состоящая из четырех этапов.

## **2. Рекомендации по отбору М-группы экспертных методов для данной задачи (этап №1)**

Общая процедура установления соответствия между прогнозной оценочной задачей и разновидностью экспертного метода, которую мы рекомендуем для решения этой задачи, включает следующие этапы:

1. Нахождение одной или двух М-групп экспертных методов, из которых мы будем рекомендовать метод для решения данной задачи.

2. Выбор одной из трех возможностей решения многокритериальной задачи: на основании метода взвешенной суммы, теории полезности и теории важности критериев (мы исходим из того, что отбор экспертного метода необходимо проводить на основе учета нескольких критериев).
3. Выбор из М-группы экспертных методов того, который мы рекомендуем для решения данной задачи.
4. Нахождение разновидности экспертного метода, которую мы рекомендуем для решения данной задачи.

При отборе М-группы методов на первом этапе процедуры мы используем лишь понятие сложности задачи и информацию об уровне этой сложности. Для этого на основе таблицы 1 и информации о том, из каких базовых МПНИ состоит данный реальный МПНИ, рассмотрим наличие самой возможности использовать данный вид реального МПНИ для решения задачи заданного уровня сложности.

Таблица 2. Возможность использования реальных МПНИ для решения прогнозной задачи

		Виды реальных механизмов получения новой информации от экспертов				
Градации уровня сложности задачи	Простейший	Систематизация перебора	Итеративный (Обратная связь, без непосредственного взаимодействия)	Хаотизации перебора	Методологическая рефлексия	Механизм базируется на интуиции и/или озарении
V	–	–	–	–	–	+
IV	–	–	–	–	+	–
III	–	–	+	+	–	–
II	–	+	+	–	–	–
I	+	–	–	–	–	–

Пояснение к таблице 2. Наличие знака плюс означает возможность использования реального МПНИ для решения прогнозной задачи данного уровня сложности.

На основании вышеприведенной таблицы можно рекомендовать к использованию для задачи данного уровня сложности максимум две М-группы экспертных методов, так как вид реального механизма однозначно определяет такую группу.

Перейдем к рассмотрению **этапа №2**.

Мы исходим из того, что существует три основных возможности решения многокритериальной задачи: на основании метода взвешенной суммы, теории полезности [3] и теории важности критериев [7]. В работе [10] было показано, что из этих трех инструментов целесообразно использовать теорию важности критериев в случае, если времени на принятие качественного решения достаточно, и метод взвешенной суммы в противном случае (было показано, что в целом последний дает результат более хороший, чем просто случайный равномерный отбор из набора альтернатив). Будем считать, что в нашем случае ЛПР имеет достаточно времени для принятия обоснованного решения, поэтому на втором этапе мы рекомендуем использовать теорию важности критериев в качестве инструмента отбора.

### **3. Рекомендации по отбору из М-группы наиболее приемлемого экспертного метода для данной задачи (этап №3)**

Каждому из шести реальных механизмов соответствуют шесть М-групп экспертных методов и для каждой М-группы в таблице 4 укажем экспертные методы. В этой же таблице экспертным путем оценим в баллах уровень возможности использования таких методов для решения задачи фиксированного уровня сложности. При этом общее количество используемых балльных градаций – пять, а их значения занумерованы в порядке возрастания этого уровня возможности.

С целью повышения межэкспертной воспроизводимости для каждой из балльных градаций возможности применения метода укажем соответствующую содержательную интерпретацию.

Таблица 3. Балльные градации критерия «возможность решить данную задачу данным методом»

Балльные градации возможности решить прогнозную задачу методом из данной группы	Содержательная интерпретация градаций
1	Метод бесполезно использовать для решения задачи.
2	Скорее всего, задача не будет решена, но, возможно, в рамках ее решения станет понятно, что сформулированная задача плохо поставлена.
3	Возможно, задача и будет решена, но, по сути, это будет «стрельба из пушки по воробьям».
4	Возможно, задача будет решена.
5	Скорее всего, задача будет решена.

Полагаем, что первые три градации в целом неприемлемы для того, чтобы рекомендовать этот метод для решения поставленной задачи. Градации «4» и «5» будем считать приемлемыми.

На основе информации, полученной из таблиц 1÷3, и понятия М-группы сформируем таблицу 4 с учетом того, что мы будем рассматривать лишь шесть недекомпозируемых экспертных методов. (Использование лишь шести методов связано с тем, что из 13 недекомпозируемых экспертных методов, упомянутых в Малой Российской энциклопедии Прогностики, лишь шесть апробированы прогностической практикой [4]).

Для обеспечения межэкспертной воспроизводимости представления соответствующих балльных оценок в таблице 4 их процедуру назначения проведем в два этапа.

На первом этапе выделим цветом те клетки таблицы, балльные значения в которых мы считаем приемлемыми, чтобы соответствующие методы можно было рекомендовать для решения задач данного уровня сложности. (То есть балльные градации «4» и «5»).



На основании таблицы 2 для V уровня сложности может быть приемлем лишь один метод, чей механизм базируется в первую очередь на интуиции и/или озарении. Таким образом, мы выделяем цветом лишь одну клетку на пересечении столбца с заголовком названия этого механизма и строки с заголовком «V уровень сложности» (крайняя правая клетка).

Аналогично, для IV уровня сложности также приемлем лишь один метод, основывающийся на методологической рефлексии, и, значит, цветом выделяем лишь одну клетку на пересечении столбца с заголовком названия этого механизма и строки с заголовком «IV уровень сложности»

На том же основании, для III уровня сложности приемлемы два метода, один из которых основывается на реальном механизме хаотизации перебора, а второй – на реальном механизме с обратной связью, и, значит, цветом выделяем две клетки на пересечении столбцов с заголовками названия этих же механизмов и строки с заголовком «III уровень сложности».

Аналогично, для II и I уровней сложности.

На втором этапе проводим более детальную оценку. И для клеток, выделенных цветом, указываем балльные значения либо «4», либо «5». Соответствующие различия в значениях балльных оценок могут более обосновано помочь нам рекомендовать экспертный метод.

Для тех же клеток, которые не отмечены цветом, указываем один из трех вариантов: либо «1», либо «2», либо «3». Причем балльную градацию «3», чья содержательная интерпретация трактуется как «возможно, задача и будет решена, но, по сути, это будет «стрельба из пушки по воробьям» назначают для тех методов, чей вид реального МПНИ будет выше по иерархии, чем указанный в строчке уровень сложности, и применяемый реальный механизм не задействует методологическую рефлексия. Если же применяется методологическая рефлексия для решения задач ниже четвертого уровня сложности, то ставим балльную градацию «2»: «скорее всего, задача не будет решена, но, возможно, в рамках ее решения станет понятно, что сформулированная задачи плохо поставлена».

Таблица 4. Оценки уровня возможности применения метода к решению задачи заданного уровня сложности

Виды реальных МПНИ							
Уровни сложности	Простейший	Систематизация перебора	Итеративный. (Обратная связь, без непосредственного взаимодействия)	Хаотизация перебора	Методологическая рефлексия	Механизм базируется на интуиции и/или озарении	
	Соответствующие методы получения новой информации от экспертов						
	метод «лицом к лицу»	метод комиссий	морфологический анализ	метод Дельфи	мозговая атака	методы с элементами рефлексии	метод нам не известен,
V	1	1	1	1	1	1	но использовать МПНИ возможно
IV	1	1	1	1	1	<u>5</u>	3
III	1	1	1	<u>4</u>	<u>5</u>	2	3
II	1	1	<u>5</u>	<u>4</u>	3	2	3
I	<u>4</u>	<u>4</u>	3	3	3	2	3

Градации «1», «2», «3» хотя и не используются в дальнейшем расчете, полезны для того, чтобы показать, что метод может быть неприемлем для решения задачи данного уровня сложности, по крайней мере, по трем качественно различным причинам.

Для задач I–III уровней сложности существуют, согласно таблице 4, более чем один приемлемый экспертный метод. Так, например, исходя из данных этой таблицы, для решения задачи I уровня сложности, целесообразно использовать метод «лицом к лицу» либо метод комиссий. Мы исходим из допущения, что при наличии более одного экспертного метода решения прогнозной задачи необходимо, по крайней мере, сначала, использовать только один из них. Отсюда вытекает необходимость более детального отбора. И одним из оснований для отбора является обоснованное различие, выраженное в баллах, уровня возможности применения метода к решению задачи заданного уровня сложности.

С учетом вышесказанного, приведем обоснование целесообразности применения уже конкретного экспертного метода для решения задачи указанных уровней сложности и обширности.

Таким образом, если на I этапе процедуры мы использовали лишь понятие сложности задачи, то на III-м этапе – будем использовать сложность и обширность задачи как критерии в широком толковании. Но так как напрямую такие критерии в многокритериальном анализе не всегда можно использовать, то будем использовать следующие критерии в узком толковании (т. е. как в многокритериальном анализе): «возможность применения данного метода к задаче данного уровня сложности» и «быстрота решения задачи данным методом», а их значения найдем, базируясь на сложности и обширности.

Для того чтобы порекомендовать экспертный метод для решения задачи данного уровня сложности и обширности решим задачу многокритериального отбора приемлемого метода, используя теорию важности критериев (базируясь на результатах II-го этапа).

Итак, мы выявили балльные оценки возможности применения метода к решению задачи заданного уровня сложности (таблица 4), и теперь:

- последовательно рассмотрим и используем такую характеристику кортежа задача-метод как быстрота решения задач I, II и III уровней сложности указанным методом;

- выявим балльные оценки быстроты решения задачи, данных уровней сложности и обширности (таблицы 7–9).

Поясним, почему мы считаем, что в первом приближении эта быстрота (длительность) зависит от используемого метода, сложности и обширности задачи.

Для нас, очевидно, что длительность решения задачи зависит от метода ее решения.

Для того чтобы показать, что длительность решения задачи зависит и от сложности, а также от обширности задачи, рассмотрим некоторые этапы процесса решения прогнозной оценочной задачи I–III уровней сложности.

Из определений I–III уровней сложности прогнозной оценочной задачи [13] следует, что процесс решения такой задачи состоит, в том числе из:

1. Конструирования множества вариантов развития прогнозных событий, которые могут произойти с объектом прогнозирования. Но длительность конструирования множества вариантов в первую очередь зависит от уровня сложности решаемой задачи.

2. Проработки сконструированных вариантов и их ранжировки по степени вероятности осуществления. Получение дополнительной информации способствует наполнению содержанием деталей вариантов развития прогнозных событий. (Полагаем, что длительность этого этапа в первую очередь зависит от уровня обширности задачи, так как мы каждый раз ищем дополнительную информацию из разных источников с тем, чтобы выявить приоритетность варианта).

Таким образом, мы показали, что быстрота решения задачи зависит от сложности и обширности задачи и метода ее решения.

Для повышения межэкспертной воспроизводимости проставления экспертами балльных градаций быстроты решения задач I–III уровней сложности указанным методом рассмотрим содержательную интерпретацию балльных градаций быстроты решения задач I–III уровней сложности и представим ее в таблице 5.

Таблица 5. Содержательная интерпретация балльных градаций быстроты решения задач I–III уровней сложности указанным экспертным методом

Балльные градации	Содержательная интерпретация быстроты решения задач
5	Очень быстро, («не снимая пиджака»)
4	Типично быстро («сняв пиджак, но без чая»)
3	Не долго, но и не быстро («с чаепитием, но без ночевки»)
2	Долго («с ночевкой, но без зимовки»)
1	Очень долго, («с зимовкой»)
0	неприемлемо долго или невозможно

Примечание. Дополнительное образное задание шкальных градаций повышает воспроизводимость их употребления экспертами по сравнению с «обычным» заданием – «очень быстро», «быстро», «медленно» и тому подобное. Об использовании для этой цели лексики и речевых оборотов, обычно не свойственных научному дискурсу, писал еще Г.С. Альтшуллер, но как тогда, так и сейчас это воспринимается несколько настороженно: «Когда на доске слово “ледокол” было заменено “штуковиной” ... моряк лишился дара речи» [1, с. 135]. Можно более подробно и более глубоко раскрыть необходимость употребления слов, устойчиво порождающих большое количество продуктивных ассоциаций (или, наоборот, не порождающих уводящих в сторону ассоциаций), для «запуска» познавательных процессов, нацеленных на получение новой информации от человека, но это выходит за рамки тематики данной статьи.

Таблица 6. Примеры различных типовых задач конкретных уровней сложности и обширности

Уровень сложности задачи	Уровень обширности задачи		
	I	II	III
IV	Определить формальную научную продуктивность ИПУ РАН через 50–60 лет	Определить перспективность имеющихся научных направлений через 50–60 лет	
III	Определить формальную научную продуктивность ИПУ РАН через 4–5 лет	Определить перспективность имеющихся научных направлений через 4–5 лет	Какое влияние на прикладную науку в ближайшие год - два окажет готовящаяся программа «инновационный прорыв»?
II	Определить формальную научную продуктивность ИПУ РАН через 1–2 года	Определить перспективность имеющихся научных направлений через 1–2 года Какое влияние на прикладную науку в ближайшие 3–5 лет окажет готовящаяся программа «инновационный прорыв»?	
I	Определить формальную научную продуктивность давно работающего сотрудника ИПУ РАН в следующем году		

На основании определения уровней обширности задачи экспертным путем выявим и укажем в таблицах 7–9 значения градаций быстроты решения указанными методами задач соответствующих уровней сложности.

Частично присвоение градаций быстроты базируется на мысленном эксперименте, проводимом на основе примеров решения типовых задач различных уровней сложности и обширности, сформулированных для какой-либо конкретной области. Это делается для повышения межэкспертной воспроизводимости. (В данном случае используются различные подзадачи, получающиеся при декомпозиции задачи разработки прогноза развития теории управления социально-экономическими системами).

Из-за ограниченного объема статьи мы не можем глубоко обосновать наполнение вышеприведенной таблицы. Отметим лишь, что оно полностью основывается на понятиях сложности и обширности прогнозной оценочной задачи, а пытливого читателя отсылаем к соответствующей статье [13].

Для корректного назначения балльных оценок быстроты решения задачи I, II и III уровней сложности при соответствующих уровнях обширности заданными методами (таблица 7) и с целью повышения их межэкспертной воспроизводимости полезно будет использовать информацию, структурированную в пять нижеследующих блоков:

1. Содержательная интерпретация балльных градаций быстроты решения задач (таблица 5).

2. Мысленный эксперимент, проводимый на основе примеров задач различных уровней сложности и обширности, сформулированных для какой-либо конкретной области (таблица 6).

3. Определения уровней обширности.

4. Определение I, II и III уровней сложности прогнозной оценочной задачи.

5. Информация о достоинствах и недостатках методов. (Так, для I уровня сложности прогнозной оценочной задачи, необходимо выявить ключевые отличия между методами «лицом к лицу» и «комиссий», с тем чтобы обосновано присвоить различ-

ные балльные оценки для этих близких методов).

Поясним блок №3. Определяющими свойствами прогнозной оценочной задачи для:

- I уровня обширности является наличие информации, которая поможет ее решить и которую можно получить из автоматизированных источников;
- II уровня обширности является наличие информации, которая поможет ее решить и которую можно получить из печатных источников или от исследователей;
- III уровня обширности является наличие информации, которая поможет ее решить и которую можно получить лишь из непосредственных экспериментов [13].

Поясним блок №4 на примере I уровня сложности. Определяющим свойством прогнозной оценочной задачи I уровня сложности является наличие уже известного способа ее решения.

Поясним блок №5 на примере I уровня сложности. Ключевыми отличиями между методами «лицом к лицу» и «комиссий», позволяющими нам присваивать различные балльные оценки для этих близких методов являются [12]:

- простота реализации метода «лицом к лицу» и быстрота решения им простейших задач;
- необходимость обучать организаторов метода «комиссий» и экспертов, участвующих в ее работе;
- группа экспертов, участвующих в работе «комиссий», многократно собирается для обсуждения одного и того же вопроса;
- при использовании метода «комиссий» предварительно разрабатывается программа обсуждения.

Исходя из вышесказанного, мы полагаем, что метод «лицом к лицу» может часто решить задачу первого уровня сложности о формальной научной продуктивности сотрудника настолько быстро, что вошедшему эксперту будет, образно говоря, даже лень снимать пиджак для столь короткого разговора.

Используя второй из пяти вышеуказанных блоков информации (эксперимент, проводимый на основе примеров задач, описанных в таблице 6) можно провести такой мысленный экс-



перимент. Когда руководитель института вызовет заведующего лабораторией, чтобы узнать примерное число работ, которые напишет в следующем году сотрудник этой лаборатории ИПУ РАН, то размышление его как эксперта не будет долгим. И не надо тратить время на формирование комиссии экспертов и разработку программы обсуждений. Поэтому, для данного примера, балльная градация «5» будет вполне уместна.

Конечно, вышерассмотренные рассуждения не являются формальным обоснованием, и, тем более, доказательством, но четко указывают направление, в котором необходимо проводить формальные обоснования.

На основе вышерассмотренных рассуждений, укажем на пересечении строк и столбцов таблицы 7 оценки в баллах быстроты решения задачи I-го уровня сложности заявленным методом при соответствующем уровне обширности.

*Таблица 7. Оценки быстроты решения задачи I уровня сложности (в баллах)*

	Уровни обширности		
Методы	I	II	III
лицом к лицу	5	0	0
комиссий	4	4	3

Аналогичным образом, используя пяти блоковую структуру информации, необходимую для обоснования балльных оценок, оценим быстроту решения задачи для II уровня сложности и составим таблицу 8.

*Таблица 8. Оценки быстроты решения задачи II уровня сложности (в баллах)*

	Уровни обширности		
Методы	I	II	III
Морфологический анализ	3	2	1
Дельфи	4	4	3

Значения балльных градаций быстроты решения задачи III уровня сложности определены в таблице 9 аналогично предыдущему случаю.

Таблица 9. Оценки быстроты решения задачи III уровня сложности (в баллах)

	Уровни обширности		
Методы	I	II	III
Дельфи	4	4	3
Мозговая атака	3	2	1

Подход к назначению балльных оценок в рамках процедуры, скорее всего, останется неизменным, даже если изменится соответствие кортежа <сложность, обширность, метод> конкретным балльным градациям. Например, сейчас мы полагаем, что (см. таблицу 7) кортежу <метод «лицом к лицу», I уровень сложности, I уровень обширности> соответствует балльная градация «5», но маловероятно, при любом другом обосновании этого соответствия могут быть присвоены градации «2», «1» или «0», хотя близкие возможны.

Кроме того, мы полагаем, что рекомендации, приведенные в разделе, являются «устойчивыми» в том смысле, что даже если изменятся балльные градации возможности решения задачи данного уровня сложности и обширности данным методом и быстроты ее решения, то рекомендации по применению экспертного метода практически не изменятся. Но даже если изменятся, то будет рекомендован «близкий» метод (например, «лицом к лицу» вместо метода комиссий или наоборот, но не Дельфи или синектика). По крайней мере, эти экспертные методы будут из одной М-группы.

После того, как мы определились со значениями таких критериев, как быстрота и возможность решения, необходимо привести их к общей балльной шкале, чтобы иметь возможность воспользоваться теорией важности критериев, так как вышеуказанные критерии не являются однородными [7].

Для этой цели вышеуказанную общую шкалу, в которую будем переводить балльные значения возможности решения и быстроты, определим по аналогии со знакомым большинству ЛПР «школьным» способом проставления оценок в журналах учителей.

Таблица 10. Содержательная интерпретация балльных градаций общей шкалы<sup>1</sup>

Балльные градации	Содержательная интерпретация
12	«5+»
11	«5»
10	«5-»
9	«4+»
8	«4»
7	«4-»
6	«3+»
5	«3»
4	«3-»
3	«2+»
2	«2»
1	«2-»
0	«неприемлемо», «кол»

Содержательная интерпретация балльных градаций общей шкалы базируется на древовидном упорядочении, то есть сначала эксперт определяет балльную оценку, а затем дополнительно указывает наличие «плюса» или «минуса».

Рассмотрим сведение шкалы возможности решения к общей шкале.

<sup>1</sup> Таблица привычна для российских исследователей, но мы понимаем, что она не будет так легко восприниматься, например, представителями англоязычной системы образования со 100-балльной шкалой.

*Таблица 11. Соответствие между градациями возможности применения метода к решению задачи заданного уровня сложности и градациями общей шкалы*

Градации возможности решения	Градации общей шкалы
5	10
4	5

Другие градации критерия «возможность решения задачи данного уровня сложности данным методом» мы не рассматриваем (так как их считаем неприемлемыми для того, чтобы метод, имеющий такие градации, можно было рекомендовать к использованию для решения соответствующей задачи).

Рассмотрим сведение шкалы скорости к общей шкале.

*Таблица 12. Соответствие между градациями скорости решения задачи данных уровней сложности и обширности данным методом и градациями общей шкалы*

Градации скорости	Градации общей шкалы
5	11
4	8
3	5
2	2
1	0

Градацию скорости решения задачи данных уровней сложности и обширности данным методом «0» мы не рассматриваем (так как считаем ее неприемлемой для того, чтобы метод, имеющий такую градацию, можно было рекомендовать к использованию для решения соответствующей задачи).

После того как мы свели градации скорости и возможности решения к общей шкале и тем самым перешли к однородным критериям [7], найдем наиболее подходящий метод для решения задачи II уровня сложности и I уровня обширности. Значения балльных градаций второго столбца получены из таблицы 4, а значения 3-го – из таблицы 8.

Таблица 13. Задача для II уровня сложности и I уровня обширности

Варианты методов	Неоднородные критерии	
	Балльные значения возможности решения	Балльные значения быстроты
Морфологический анализ	5	3
Дельфи	4	4

На основании таблиц 11–12 после приведения к однородным критериям имеем:

Таблица 14. Задача для II уровня сложности и I уровня обширности

Варианты методов	Однородные критерии	
	Балльные значения возможности решения	Балльные значения быстроты
Морфологический анализ	10	5
Дельфи	5	8

Разберемся с важностью критериев (возможности решения и быстроты) [7]. Будем считать их примерно равноважными, то есть, допустим, что отношение их важностей лежит в отрезке  $(0,95; 1,05)$ .

Полагаем, что скорость роста предпочтений ЛППР при движении вдоль шкалы от меньших градаций к большим убывает («информация  $D$ » в трактовке В.В Подиновского [7]).

Попробуем продвинуться дальше и зададимся вопросом, если предпочтения ЛППР растут замедленно, то как велика эта величина «замедления». Что-то определенное на этот счет сказать сложно, можно лишь констатировать, что любые цифры, какими бы мы ни характеризовали это замедление роста менее

надежны, чем просто информация, что они растут замедленно. Допустим, что рост предпочтений замедляется примерно на 5 – 10% на каждой шкальной градации в случае, если таких градаций порядка 10–14.

Теперь мы готовы приступить к решению нашей первой (из девяти) многокритериальной задачи. Пусть вариант «морфологический анализ» –  $v_1$ , а вариант «метод Дельфи» –  $v_2$ . Из таблицы 14, имеем  $v_1 = (10; 5)$ ,  $v_2 = (5; 8)$ . Они не сравнимы по Парето. Но вариант  $v_1$  «морфологический анализ» «выигрывает» по качественной важности в предположении, что критерии равноважны.

Проверим с помощью системы DASS [8], останется ли вариант  $v_1$  «морфологический анализ» «победителем», если мы учтем, критерии не строго равноважны, а лишь «примерно равноважны». Нет, не останется! Оказывается, что решение не является устойчивым.

Аналогично можно показать, что они будут не сопоставимы с привлечением «информации  $D$ », если учесть, что они «примерно равноважны».

Посмотрим, можно ли их сопоставить, привлекая информацию о конкретных интервалах разности ценности шкальных градаций. В результате, согласно программному продукту DASS, вариант  $v_1$  «морфологический анализ» все же «выигрывает».

Теперь найдем наиболее подходящий метод для решения задачи II уровня сложности и II уровня обширности.

Таблица 15. Задача для II уровня сложности и II уровня обширности

Варианты методов	Неоднородные критерии	
	Балльные значения возможности решения	Балльные значения быстроты
Морфологический анализ	5	2
Дельфи	4	4

После приведения к однородным критериям имеем:

Таблица 16. Задача для II уровня сложности и II уровня обширности

Варианты методов	Однородные критерии	
	Балльные значения возможности решения	Балльные значения быстроты
Морфологический анализ	10	2
Дельфи	5	8

Смотрим аналогично. Варианты не сравнимы по Парето. Покажем, что они не сравнимы по количественной важности. Для этого компоненты векторов, составляющих варианты отбора, упорядочим по убыванию:  $v_{01} = (2; 10)$ ,  $v_{02} = (5, 8)$ . Эти варианты не сравнимы по Парето, следовательно, исходные варианты не сравнимы по количественной важности в предположении, что они равноважны [7]. Если они не сравнимы хотя в одной точке интервала важности, то они не сопоставимы и для всего интервала. Следовательно, они не сопоставимы по количественной важности. А вот с привлечением так называемой «информации  $D$ » вариант «метод Дельфи» «выигрывает» в предположении равноважности критериев [6]. С помощью системы *DASS* проверим, останется ли этот вариант победителем при «примерной равноважности». Да, останется.

Теперь найдем наиболее подходящий метод для решения задачи II уровня сложности и III уровня обширности.

Таблица 17. Задача для II уровня сложности и III уровня обширности

Варианты методов	Неоднородные критерии	
	Балльные значения возможности решения	Балльные значения быстроты
Морфологический анализ	5	1
Дельфи	4	3

После приведения к однородным критериям имеем:

Таблица 18. Задача для II уровня сложности и III уровня обширности

Варианты методов	Однородные критерии	
	Балльные значения возможности решения	Балльные значения быстроты
Морфологический анализ	10	0
Дельфи	5	5

Критерий «быстрота» имеет значение «0» для варианта «метод морфологического анализа». Это означает, что данный экспертный метод настолько неприемлем по критерию быстроты для задачи вышеуказанных уровней сложности и обширности, что его не имеет смысл сравнивать с другими методами для решения данной задачи, следовательно, вариант «метод Дельфи» «выигрывает», т.е. именно этот вариант нужно отобрать.

Легко убедиться, что значения критериев для задач II и III уровней сложности в нашем случае совпадают, то есть с математической точки зрения решение трех многокритериальных задач для определения приемлемых методов как для II уровня



сложности, так и для III уровня сложности эквивалентно тем трем многокритериальным задачам, которые были решены выше. Получается, что для этого уровня сложности и I, II и III уровня обширности «выигрывают» соответственно «мозговая атака», Дельфи и снова Дельфи.

Для первого уровня сложности нет необходимости применять какие-либо специализированные приемы и алгоритмы многокритериального анализа, так как недоминируемый вариант определяется почти очевидно – или по отношению Парето, или когда у всех вариантов, кроме одного, есть хотя бы одно такое значения какого-либо критерия, которое делает неприемлемым этот вариант для того, чтобы его рекомендовать к использованию (как в вышеприведенном случае).

Таким образом, мы просмотрели все возможные варианты, то есть решения 9-ти многокритериальных задач.

В результате решения этих многокритериальных задач мы нашли наиболее приемлемые экспертные методы для задачи каждого уровня сложности и обширности. Результаты решения этих задач рассмотрим в таблице 19.

Таким образом, в таблице 19 даны рекомендации по отбору наиболее приемлемого экспертного метода для данной задачи.

#### ***4. Рекомендации по отбору наиболее приемлемой разновидности экспертного метода для данной задачи***

При переходе к обоснованию рекомендаций по отбору разновидностей экспертных методов качественно меняется логика обоснования этих рекомендаций. Если на третьем этапе процедуры мы основываемся на свойствах самого метода, то на четвертом этапе надо основываться на сопоставлении различных разновидностей одного и того же метода. И, следовательно, в первом случае мы используем непараметрическую теорию важности критериев [7], то во втором мы вынуждены использовать параметрическую теорию важности критериев [7].

Таблица 19. Наиболее приемлемые экспертные методы для решения задачи данных уровней сложности и обширности

Уровень сложности задачи	Уровень обширности задачи		
	I	II	III
V	Метод не известен, но используется интуиция (озарение) исследователя	Метод не известен, но используется интуиция (озарение) исследователя	Метод не известен, но используется интуиция (озарение) исследователя
IV	Метод с элементами рефлексии – вариант МКВ (например, список Т. Эйлоарта)	Метод с элементами рефлексии – вариант МКВ (например, список Т. Эйлоарта)	Метод с элементами рефлексии – вариант МКВ (например, список Т. Эйлоарта)
III	Мозговая атака	Дельфи <sup>1</sup>	Дельфи
II	Морфологический анализ	Дельфи	Дельфи
I	Метод «Лицом к лицу»	Метод комиссий	Метод комиссий

В данной работе мы строго и формально этот вопрос рассматривать не будем, укажем лишь те критерии, которые можно применить на четвертом этапе: стоимость решения данной задачи данным методом и наличие программного продукта.

Мы считаем, что наше эмпирическое знание о специфике применения конкретных разновидностей экспертных методов к различным задачам еще слишком мало, чтобы можно было бы сделать какие-то существенные выводы по данному вопросу. Однако, мы полагаем, что общая схема решения этого вопроса такая же, как и в III-м этапе нашей процедуры: определяются конкретные значения критериев и решаются многокритериальные задачи. Проблема в том, что сейчас, как нам кажется, научным сообществом накоплено еще мало информации, чтобы сделать первый шаг

<sup>1</sup> Мы не исключаем, что впоследствии эту «клеточку» может занять метод фокальных объектов, если получит достаточную апробацию прогностической практикой [14].

– проставить конкретные значения критериев. Но мы выражаем уверенность, что со временем ситуация улучшится, и рекомендации по отбору наиболее приемлемой разновидности экспертного метода для данной задачи получатся строго обосновать.

Необходимо обратить внимание читателя на то, что практически во всех экспертных методах, используемых нами, кроме тех, что предназначены для решения задач I уровня сложности, отсутствует использование таких простейших видов оценок, как баллы, ранжировки, парные и множественные сравнения. То есть по результатам такого экспертного метода, как совещание может быть предложена ранжировка, а в результате использования процедуры Дельфи – нет. Тогда как специалистам хорошо известно, что для вышеуказанных видов оценок (кроме баллов) существует хорошо проработанный математический аппарат, и использование их достаточно перспективно. И эти теоретические результаты, и практический опыт необходимо использовать. Тем более что сама процедура попарных сравнений впервые была предложена еще в 1860 году для оценки сравнительной предпочтительности альтернатив в работе [21]. И сейчас методы анализа и обработки парных сравнений продолжают быть популярны [20]. Интересное экспериментальное и теоретическое исследование оценок, полученных методом множественных сравнений, содержится в работе [16]. Наиболее известными и разработанными среди оценок этого вида являются оценки в виде упорядоченных троек. Метод тройных сравнений подробно рассмотрен в работах [15, 19], а общий обзор представлен в работе [17]. Балльные оценки рассматриваются в работах [5, 12].

Широкое использование указанных выше экспертных оценок открывает дополнительные возможности по созданию новых методов, предназначенных для решения задач II и III уровней сложности.

## **5. Заключение**

В данной статье впервые:

1. Предложена процедура отбора наиболее приемлемых разновидностей экспертных методов. (Стоит отметить, что послед-

ний этап процедуры проработан пока лишь эскизно).

2. Даны рекомендации по отбору наиболее приемлемых экспертных методов.

### **Литература**

1. АЛЬТШУЛЛЕР Г.С. *Найти идею. Введение в теорию решения изобретательских задач*. – Новосибирск: Наука, 1986.
2. КВЕЙД Э. *Анализ сложных систем*. – М.: 1969.
3. КИНИ Р.Д., РАЙФА Х. *Принятие решений по многим критериям: предпочтения*. — М.: Радио и связь, 1981.
4. *Малая Российская энциклопедия Прогностики*. – М.: Изд-во ИНЭС, 2006.
5. МИРКИН Б.Г. *Проблема группового выбора*. – М.: Наука, 1974.
6. ПОДИНОВСКИЙ В.В. *Количественная важность критериев с дискретной шкалой первой порядковой метрики* // *АиТ*. – 2004. – №8. – С. 196–203.
7. ПОДИНОВСКИЙ В.В. *Введение в теорию важности критериев в многокритериальных задачах принятия решений*. – М.: Физматлит, 2007. – 64 с.
8. ПОДИНОВСКИЙ В.В. *Анализ задач многокритериального выбора методами теории важности критериев при помощи компьютерных систем поддержки принятия решений* // *Изв. АН. Теория и системы управления*. – 2008. – №2. – С. 64–68.
9. САЛТЫКОВ С.А. *Обширность задачи как один из ключевых факторов выбора наиболее эффективного экспертного метода* // *Материалы XXXV Международной конференции «Информационные технологии в науке, социологии, экономике и бизнесе»*. – Ялта, Гурзуф, май 2008. – С. 360–361.
10. САЛТЫКОВ С.А. *Экспериментальное сопоставление различных многокритериальных подходов* // *Материалы XXXVI Международной конференции «Информационные технологии в науке, социологии, экономике и бизнесе»* (Ялта, Гурзуф, май 2009 г.). Приложение к журналу «Открытое образование». – С. 315–317.

11. *Словарь русского языка в четырех томах*. Том 2. – М.: Государственное издательство иностранных и национальных словарей, 1958.
12. СИДЕЛЬНИКОВ Ю.В. *Системный анализ технологии экспертного прогнозирования*. — М.: Из-во МАИ-Принт «МАИ», 2007. — 348 с.
13. СИДЕЛЬНИКОВ Ю.В., САЛТЫКОВ С.А. *Процедура установления соответствия между задачей и методом // Экономические стратегии*. – 2008. – №7. – С. 102–109.
14. СИДЕЛЬНИКОВ Ю.В., САЛТЫКОВ С.А. *Отбор наиболее эффективного экспертного метода для задачи III уровня сложности и II уровня обширности // Материалы третьей международной конференции «Управление развитием крупномасштабных систем», MLSD`2009, 5–7 октября 2009 г., Москва*. – Том 1. – С. 212–215.
15. *Статистическое измерение качественных характеристик*. – М.: Статистика, 1972.
16. ТЮРИН Ю.Н., ВАСИЛЕВИЧ А.П., АНДРУКОВИЧ П.Ф. *Статистические модели ранжирования. Статистические методы анализа экспертных оценок*. – М.: Наука, 1977. – С. 30–58.
17. ШМЕРЛИНГ Д.С., ДУБРОВСКИЙ С.А., АРЖАНОВА Т.Д. и др. *Экспертные оценки. Методы и применение: Обзор // Статистические методы анализа экспертных оценок*. – М.: Наука, 1977. – С. 290–382.
18. ЭЙЛОАРТ Т. *Приемы настройки творческого инженерного коллектива // Изобретатель и рационализатор*. – 1970. – №5. С. 28–40.
19. СЕВОТАРЕВ P.YU. *Aggregation of preferences by the generalised row sum method // Mathematical Social Sciences*. –1994. – Vol. 27. – P. 293–320.
20. DAVID H.A. *The method of paired comparisons*. –London: Griffin, 2d, 1969. – 124 p.
21. FECHNER G.T. *Elemente der psychophysik*. – Leipzig: Breitkopf und Hartel, 1860.

## **PROCEDURE FOR SELECTION OF THE MOST ELIGIBLE VARIETIES OF THE EXPERT METHODS**

**Jury Sidelnikov**, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Doctor of Science, professor (sidelnikovy@mail.ru).

**Sergey Saltykov**, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, junior researcher (ssaltykov@mail.ru).

*Abstract: In this article the procedure is first developed and justified for selection of the most suitable varieties of expert methods for solving forecasting evaluation tasks, expert method selection recommendations are given for problems of different levels of complexity and extensiveness.*

**Keywords:** procedure for selection of the expert method, the complexity of the problem, the extensiveness of the problem.

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии В. Н. Бурковым*

УДК 007:681.518.2  
ББК 22.18 65.23 65.29

## **ВРЕМЕННОЙ АНАЛИЗ СИСТЕМ С СЕТЕЦЕНТРИЧЕСКИМ УПРАВЛЕНИЕМ НА ОСНОВЕ НЕПРЕРЫВНО-ДИСКРЕТНОЙ МОДЕЛИ**

**Юдицкий С. А.<sup>1</sup>, Точ Д. С.<sup>2</sup>**

*(Учреждение Российской академии наук  
Институт проблем управления РАН, Москва)*

*Рассмотрена комплексная модель развития больших систем в виде взаимодействующих между собой сетевых динамических субмоделей: графа показателей и графа действий, в которой динамика показателей моделируется в непрерывном времени, а динамика действий – в дискретном. Такое сочетание позволяет повысить уровень адекватности реальным системам по сравнению с чисто дискретной моделью. Зависимость показателей от времени выражается с помощью многочленов, в терминах которых описано взаимовлияние показателей. Усовершенствован механизм функционирования графов действий. Предложен графический метод временного анализа динамики непрерывно-дискретной модели, расширяющей возможности имитационного моделирования больших систем.*

Ключевые слова: графодинамика, непрерывно-дискретная модель, показатель, действие, логическое условие срабатывания перехода графа действий, внешнее и внутреннее событие, индикаторная логика, временной анализ.

---

<sup>1</sup> Семен Абрамович Юдицкий, д.т.н., профессор (seabyu@mail.ru).

<sup>2</sup> Дмитрий Сергеевич Точ, канд. технич. наук (dmtotch@gmail.com).

## **1. Введение**

Системы с сетецентрическим управлением (СЦУ) характеризуются большим числом компонентов и причинно-следственных связей между компонентами. С полным основанием их можно отнести к категории больших систем. В предыдущей работе авторов [3] обсуждалась комплексная триадная модель СЦУ, состоящая из взаимодействующих между собой сетевых субмоделей целеполагания, логического управления действиями и взаимовлияния показателей процесса в системе. Субмодели названы соответственно графом целей, графом действий (операций), графом показателей.

Триадная модель определена на заданной дискретной шкале времени с равными промежутками между тактовыми моментами. Предполагается, что любое событие в триадной модели (внешнее воздействие, достижение цели, инициирование и завершение действий, «скачкообразное» изменение показателей) происходит только в тактовые моменты, которые сопоставляются с переходами в графе действий. В этом смысле дискретная триадная модель является несколько «загрубленной», хотя и достаточно простой, удобной для восприятия. В реальной системе с СЦУ события могут происходить внутри промежутков между заданными тактовыми моментами. В дискретной модели в ущерб ее адекватности такие события смещают во времени и переносят в ближайший тактовый момент.

В данной работе, которая является продолжением и развитием [3], предлагается непрерывно-дискретная модель с СЦУ с отображением динамики показателей на непрерывной временной шкале, а динамики действий – на дискретной. Тактовые моменты не задаются, а вычисляются с применением формального аппарата индикаторной логики [4]. Динамика показателей с учетом их взаимовлияния описывается многочленными функциями с областью определения на числовой оси.



Предложенная модель дает более полную (а тем самым и более адекватную) картину функционирования системы по сравнению с [3].

## 2. Моделирование динамики показателей

Пусть процесс, реализуемый в системе, характеризуется показателями  $p_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Каждому показателю поставим в соответствие «собственную» переменную  $x_i$ , являющуюся функцией непрерывного времени  $\tau$ :

$$(1) \quad x_i(\tau) = a_{i0} + a_{i1}\tau + \dots + a_{ik}\tau^k,$$

где  $a_{il}$  – константы,  $l = 0, 1, \dots, k$ .

С течением времени все показатели изменяются параллельно, причем на  $p_i$  могут влиять другие показатели  $p_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ ,  $i \neq j$ :

$$(2) \quad p_i(\tau) = x_i(\tau) + \sum_j b_{ji} \times x_j(\tau),$$

$b_{ji}$  – коэффициент, определяющий влияние  $p_j$  на  $p_i$ . Значения  $a_{il}$ ,  $b_{ji}$  могут быть как положительными, так и отрицательными.

В графе показателей вершины соответствуют показателям  $p_i$ , дуги  $(p_{i1}, p_{i2})$ ,  $i1, i2 = 1, \dots, n$ ,  $i1 \neq i2$ , «нагруженные» коэффициентами  $b_{i1,i2}$ , соответствуют влиянию  $p_{i1}$  на  $p_{i2}$ .

Пример графа показателей дан на рис. 1.

Примем, что все собственные функции согласно (1) являются линейными ( $k = 1$ ) и в примере имеет место:

$$x_1(\tau) = 2 + 0,5\tau,$$

$$(3) \quad x_2(\tau) = 2 - 0,5\tau,$$

$$x_3(\tau) = 3 + 0,3\tau.$$

Применив к графу на рис. 1 соотношения (2), (3), получим:

$$p_1(\tau) = 2 + 0,5\tau + 0,2(2 - 0,5\tau) = 2,4 + 0,4\tau,$$

$$(4) \quad p_2(\tau) = 2 - 0,5\tau + 0,1(2 + 0,5\tau) = 2,2 - 0,45\tau,$$

$$p_3(\tau) = 3 + 0,3\tau - 0,1(2 + 0,5\tau) + 0,1(2 - 0,5\tau) = 3 + 0,2\tau.$$

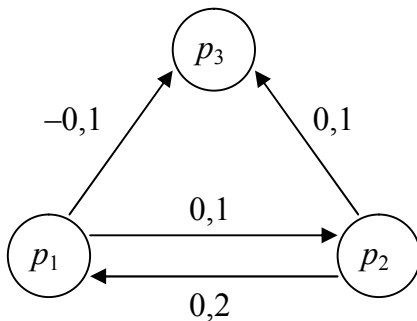


Рис. 1. Пример графа показателей

Поскольку показатели в реальной системе могут измеряться в разных единицах (иметь разную физическую природу), будем использовать для них единую лингвистическо-балльную шкалу, например данную в таблице 1.

Таблица 1. Лингвистическо-балльные значения показателей

Лингвистическая оценка значения	Балльная оценка
Очень низкое	$2 > p_i > 0$
Низкое	$4 > p_i \geq 2$
Среднее	$8 > p_i \geq 4$
Высокое	$12 > p_i \geq 8$
Очень высокое	$15 > p_i \geq 12$
Сверхвысокое	$p_i \geq 15$

### 3. Моделирование динамики действий

Прежде чем определить граф действий, напомним основные положения индикаторной логики [4], являющейся подклассом булевой алгебры. Индикатором сравнения называется булева переменная вида  $(p_i \# q)$ , где  $p_i$  – числовая переменная,  $q$  –

числовая переменная или константа,  $\# \in \{=, \neq, >, \geq, <, \leq\}$  – знак бинарного отношения.  $(p_i \# q)$  принимает значение:

$$(p \# q) = \begin{cases} 1, & \text{если выполняется отношение } \#, \\ 0, & \text{если не выполняется.} \end{cases}$$

Индикаторной логической формулой (ИЛФ) называется выражение, полученное путем применения конечное число раз к индикаторам сравнения логических операций дизъюнкции, конъюнкции, отрицания ( $\wedge, \vee, \neg$ ). Над ИЛФ выполняются эквивалентные преобразования на основе классических тождеств (приведены, например, в [1]) и дополнительных соотношений согласно таблице 2 (буква  $e$  означает константу).

Таблица 2. Эквивалентные преобразования над ИЛФ

Наименование	Формальное описание
Поглощение	$(p > e_1) \wedge (p > e_2) = (p > \max(e_1, e_2))$ $(p < e_1) \wedge (p < e_2) = (p < \min(e_1, e_2))$ $(p > e_1) \vee (p > e_2) = (p > \min(e_1, e_2))$ $(p < e_1) \vee (p < e_2) = (p < \max(e_1, e_2))$
Дополнение	$(p \geq e) \wedge (p < e) = 0$ $(p > e) \wedge (p \leq e) = 0$ $(p \geq e) \vee (p < e) = 1$ $(p > e) \vee (p \leq e) = 1$
Отрицание	$\overline{(p > e)} = (p \leq e)$ $\overline{(p \geq e)} = (p < e)$ $\overline{(p < e)} = (p \geq e)$ $\overline{(p \leq e)} = (p > e)$

Таблица 3. Логические условия срабатывания переходов

Переход	Задержка срабатывания	Внешнее событие	Внутреннее событие (функция показателей)
$t_1$	$\theta_1 = 2$	$v_1 = 1$	$(p_1 < 2) \wedge (p_2 = 0) \wedge (p_3 = 0)$
$t_2$	$\theta_2 = 1$	–	$(p_1 \geq 2) \wedge (p_1 < 3) \wedge ((p_2 > 0) \vee (p_3 > 0))$
$t_3$	$\theta_3 = 1$	–	$(p_1 \geq 2) \wedge (p_1 < 3) \wedge (p_2 > 0) \wedge (p_3 > 0)$
$t_4$	$\theta_4 = 2$	$v_2 = 1$	$(p_1 \geq 3) \wedge (p_1 < 4) \wedge (p_2 > 1) \wedge (p_3 > 1)$
$t_5$	$\theta_5 = 2$	$v_2 = 2$	$(p_1 \geq 3) \wedge (p_1 < 4) \wedge (((p_2 \geq 3) \wedge (p_2 < 5)) \vee (p_3 > 2))$
$t_6$	$\theta_6 = 2$	$v_2 = 3$	$(p_1 \geq 3) \wedge (p_1 < 4) \wedge (p_2 \geq 3) \wedge (p_2 < 5) \wedge (p_3 > 2)$
$t_7$	$\theta_7 = 1$	–	$(p_1 \geq 4) \wedge (p_1 < 6) \wedge (((p_2 \geq 5) \wedge (p_2 < 7)) \vee (p_3 > 4))$
$t_8$	$\theta_8 = 1$	–	$(p_1 \geq 6) \wedge (p_1 < 9) \wedge (p_2 \geq 7) \wedge (p_2 \leq 10) \wedge (p_3 > 8) \wedge (p_3 \leq 10)$
$t_9$	$\theta_9 = 1$	–	$(p_1 \geq 6) \wedge (p_1 \leq 10) \wedge (p_2 \geq 5) \wedge (p_2 \leq 10) \wedge (p_3 > 5) \wedge (p_3 \leq 10)$

Вернемся к графу действий. На рис. 2 дан пример сети Петри [2], положенной в основу графа действий, в таблице 3 приведены логические условия, определяющие срабатывание переходов этой сети. Позиции  $d_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , сети Петри соответствуют действиям, переходы  $t_j$ ,  $j = 1, \dots, g$ , – событиям, характеризующим запуском и/или завершением действий. Выполнение действия моделируется нахождением маркера в соответствующей позиции. Переход активирован, если во всех его входных позициях есть по маркеру, и срабатывает, если он активирован и кроме того выполняется соотнесенное переходу логическое условие (см. таблицу 3). При срабатывании перехода из его входных позиций удаляются маркеры, а в выходные позиции маркеры вносятся.

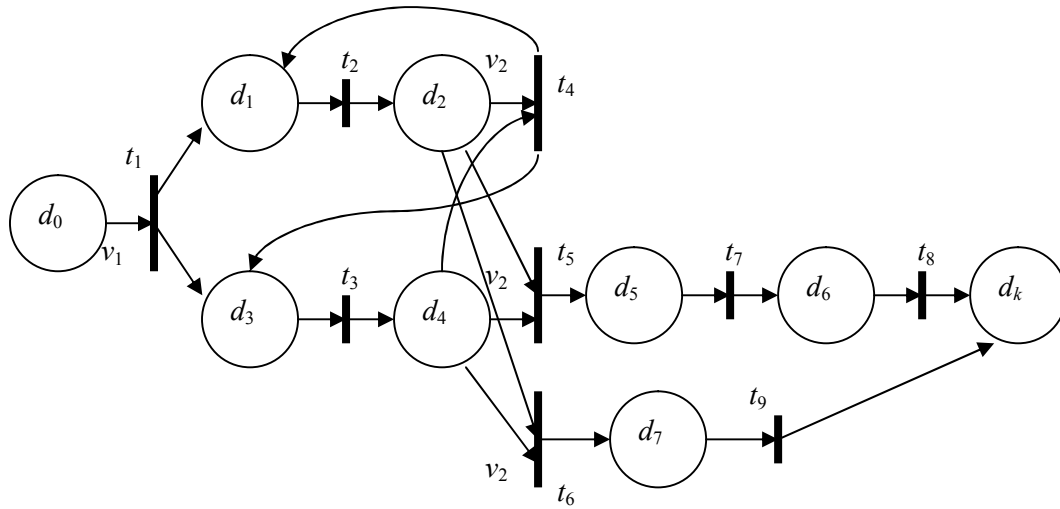


Рис. 2. Сеть Петри – основа графа действий

Логическое условие перехода  $t_j$  представляет собой конъюнкцию трех ИЛФ:

- задержки от момента активирования перехода  $t_j$  до некоторого заданного момента, выражаемой индикатором  $(\theta_j = e_j)$ , где  $e_j$  – число единиц непрерывного времени;
- внешнего события  $(v_\omega = e_\omega)$ , соответствующего воздействию среды на моделируемую систему;
- внутреннего события, определяемого значениями показателей системы.

Все три составляющие логического условия перехода задаются экспертом.

При работе графа действий применяется следующий механизм. Каждому переходу  $t_j$  соотносится условный счетчик времени (таймер)  $\theta_j$ , который настраивается на число  $e_j$ . Таймер запускается при активации  $t_j$  и останавливается при достижении  $e_j$ . С этого момента граф «ожидает» наступления внешнего и внутреннего события. При наступлении того и другого срабатывает переход  $t_j$  и «обнуляется» таймер.

Момент наступления внешнего события непредсказуем, момент наступления внутреннего события рассчитывается по процедуре, описанной в разделе 4.

#### **4. Временной анализ условий срабатывания переходов на графе действий**

Пусть задан интервал моделирования системы как участок оси  $\tau$ , на котором выделим единицы времени  $\tau = 0, \dots, s$ . Для каждого внутреннего события (таблица 3) определим отрезок внутри этого интервала, характеризующий продолжительность события. Применим процедуру:

1. В ИЛФ внутреннего события вместо показателей  $p_i$  подставим их выражение в виде многочлена (4).
2. Для каждого индикатора формулы решим неравенство (или уравнение) относительно  $\tau$  и представим это решение отрезком (точкой) на интервале моделирования.

3. В соответствии с порядком логических операций  $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\neg$ , зафиксированном в ИЛФ, выполним соответствующие им теоретико-множественные операции над отрезками – пересечение  $\cap$ , объединение  $\cup$ , дополнение  $\setminus$ .

Проиллюстрируем описанную процедуру на примере ИЛФ  $(p_1 \geq 3) \wedge (p_1 < 4) \wedge ((p_2 \geq 3) \wedge (p_2 < 5)) \vee (p_3 > 2)$  для перехода  $t_5$ .

После шага 1 получим

$$(5) \quad (2,4 + 0,4\tau \geq 3) \wedge (2,4 + 0,4\tau < 4) \wedge (((2,2 - 0,45\tau \geq 3) \wedge (2,2 - 0,45\tau < 5)) \vee (3 + 0,2\tau > 2)).$$

Решив линейные неравенства во внутренних скобках, придем к выражению:

$$(6) \quad (\tau \geq 1,5) \wedge (\tau < 4) \wedge (((\tau \leq -1,8) \wedge (\tau > -6,2)) \vee (\tau > -5)).$$

Перейдем к графическому представлению на временной шкале (рис. 3). Здесь отрицательные моменты соответствуют «прошлому», т. е. времени  $-\tau$  до начала моделирования. Из диаграммы на рис. 3 следует, что при принятых нами параметрах модели (рис. 2, таблица 3) срабатывание перехода  $t_5$  графа действий возможно, если еще до начала имитационного эксперимента показатели системы будут удовлетворять условию, указанному в таблице 3. Если это неприемлемо, то следует изменить индикаторные логические формулы для внутренних событий.

## 5. Заключение

В работе, которая является продолжением и развитием [3], отражены следующие результаты.

1. Предложена комплексная модель развития систем с сетцентрическим управлением, согласно которой динамика показателей моделируется в непрерывном времени, а динамика действий – в дискретном. Это позволяет повысить уровень адекватности модели реальным большим системам.

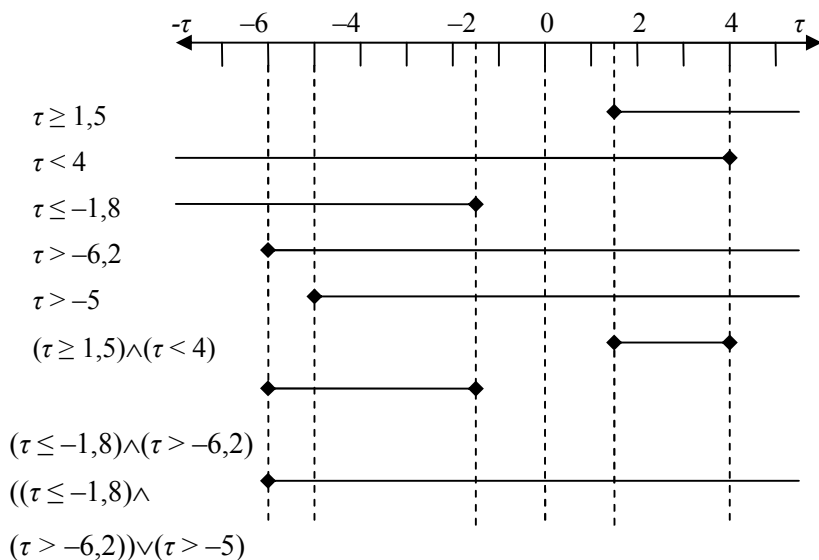


Рис. 3. Временная диаграмма ИЛФ внутреннего события

2. Усовершенствован механизм функционирования графа действий путем использования трех составляющих логического условия срабатывания переходов графа – временной задержки, внешнего и внутреннего события.

3. Предлагается графический метод временного анализа динамики модели, который, в частности, позволяет:

- определять на интервале моделирования отрезки времени, на которых наступление внешнего события может повлиять на срабатывание перехода графа действий;
- учитывать внутренние события, которые не только происходят на интервале моделирования, но и происходили «в прошлом» – до проведения имитационного эксперимента.

Можно предположить, что введенный в работе метод временного анализа расширит возможности имитационного моделирования больших систем.



## Литература

1. ГЛУШКОВ В.М. *Синтез цифровых автоматов.* – М.: Физматгиз, 1962.
2. ПИТЕРСОН ДЖ. *Теория сетей Петри и моделирование систем* – М.: Мир, 1984.
3. ЮДИЦКИЙ С.А., ВЛАДИСЛАВЛЕВ П.Н., ТОЧ Д.С. *Триадный подход к моделированию систем сетецентрического управления* // Управление большими системами. – Вып. 28. – М.: ИПУ РАН, 2010. – URL: [http://ubs.mtas.ru/archive/search\\_results\\_new.php?publication\\_id=17933](http://ubs.mtas.ru/archive/search_results_new.php?publication_id=17933).
4. ЮДИЦКИЙ С.А., РАДЧЕНКО Е.Г. *Алгебра потокособытий и сети Петри – язык потокового моделирования многоагентных иерархических систем* // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. – 2004. – №9. – С. 61–66.

## DISCRETE-CONTINUOUS MODEL FOR TEMPORAL ANALYSIS OF NETWORK-CENTRIC CONTROL SYSTEMS

**Semen Yuditskiy**, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Doctor of Science, professor (Moscow, Profsoyuznaya st., 65, tel. (495) 339-59-10).

**Dmitry Totch**, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Cand.Sc., ([dmtotch@gmail.com](mailto:dmtotch@gmail.com)).

*An integrated model of large systems evolution is suggested. The model consists of two interoperating dynamic network-based sub-models: the factors graph with continuous-time factors dynamics, and the actions graph with discrete-time actions dynamics. This combination allows improving the level of adequacy to the real systems compared to the purely discrete model. Time dependency of factors is described in terms of polynomial functions which reveal the interrelation of factors. Action graphs functioning mechanism is*

*improved. A graphical method for the temporal analysis of dynamics in discrete-continuous models is proposed which contributes to the tools for large systems simulation.*

Keywords: graph dynamics, discrete-continuous model, factor, action, logical condition for transaction triggering of action graph, external and internal event, indicator logics, time analysis.

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии Ю. В. Сидельниковым*

УДК 519.254 + 004.93'14

ББК 3.32.965.32.965.9

## **СТРУКТУРНАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ СЛОЖНЫХ ОБЪЕКТОВ УПРАВЛЕНИЯ НА БАЗЕ МЕТОДОВ КУСОЧНОЙ АППРОКСИМАЦИИ <sup>1</sup>**

**Дорофеев Ю. А.<sup>2</sup>**

*(Учреждение Российской академии наук  
Институт проблем управления РАН, Москва)*

*Решается задача построения модели функционирования сложного объекта с помощью алгоритмов структурно-классификационного анализа и кусочной аппроксимации. Предлагается два подхода к решению этой задачи – при помощи итерационных алгоритмов, реализующих вариационный подход к задачам кусочной аппроксимации, и двухэтапных алгоритмов, в которых процессы структуризации пространства входных параметров и построения локальных регрессионных моделей разделены.*

Ключевые слова: классификационный анализ данных, структурная идентификация, кусочная аппроксимация сложных зависимостей, статистика Фишера-Чоу.

### **1. Постановка задачи**

В работе для простоты рассматривается статическая модель функционирования сложного объекта как модель зависимости выходного показателя  $y$  от вектора входных показателей

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, проекты №08-07-00347-а, №10-07-00210-а.

<sup>2</sup> Юлия Александровна Дорофеев, научный сотрудник (dorofeyuk\_julia@mail.ru).

$$(1) \quad y = F(x), \quad x = (x^{(1)}, \dots, x^{(k)}) \in X \subseteq R^k.$$

Такая модель строится по выборке из  $N$  векторов размерности  $(k + 1)$

$$(2) \quad (y_t, x_t) = (y_t, x_t^{(1)}, \dots, x_t^{(k)}) \in \tilde{X} = \mathbf{R}^{k+1}, \quad t = 1, \dots, N,$$

получаемых в режиме нормальной эксплуатации идентифицируемого объекта. Без особого труда можно показать, что предлагаемый далее подход может использоваться также для идентификации динамической модели достаточно общего вида

$$(3) \quad y(t) = F[x(t), x(t-1), x(t-2), \dots, x(t-m)],$$

где  $m$  – «глубина памяти» динамической модели. Другими словами, различие моделей (1) и (3) состоит только в размерности пространства входов  $X$ , которая увеличивается для (3) до  $km$ .

За критерий качества идентификации, как обычно, принимается среднеквадратичное отклонение выходного параметра у от аппроксимационной модели (функции аппроксимации):

$$(4) \quad J = \int_X [y - \tilde{F}(x)]^2 p(x) dx,$$

где  $p(x)$  – функция плотности распределения вероятности в пространстве  $X$ . Поставленная задача может быть решена при помощи классических статистических методов только в простых случаях. Например, если известно, что  $F(x)$  принадлежит некоторому параметрическому классу функций  $F(x, \alpha)$ , то соответствующая модель  $\tilde{F}(x)$  также может быть выбрана в этом классе  $\tilde{F}(x, \alpha)$ . В этом случае задача сводится к оценке вектора  $\alpha$  по имеющейся выборке наблюдений (2).

Однако в прикладных задачах информация подобного типа часто отсутствует. Более того, сложность функции  $F(x)$  не позволяет использовать классические методы математической статистики. Тем не менее, было замечено, что сложная во всем пространстве  $X$  функция  $F(x)$  может быть представлена в виде совокупности более простых «кусков», определённых на областях  $B_j$ . А именно, предлагается функциональный преобразователь  $F(x)$  (идентифицируемую модель) представлять в виде:

$$(5) \quad F(x) = \sum_{j=1}^r \varepsilon_j(x) F_j(x), \quad \varepsilon_j(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in B_j, \\ 0, & \text{если } x \notin B_j; \end{cases}$$

где  $r$  – число областей (классов);  $\varepsilon_j(x)$  – характеристические функции областей разбиения (классификации)

$$(6) \quad H = \{B_j \in X, \bigcup_{j=1}^r B_j = X\}.$$

Такое представление модели является основой метода кусочной аппроксимации. В этом случае аппроксимационная модель может быть представлена в виде

$$(7) \quad \tilde{F}(x) = \sum_{j=1}^r \varepsilon_j(x) \tilde{F}_j(x, \alpha_j),$$

где  $\tilde{F}_j(x, \alpha_j)$  – локальные функции аппроксимации в областях  $B_j$  из выбранного параметрического класса функций. В этом случае функционал (4), соответствующий идентифицируемой модели (7), записывается следующим образом:

$$(8) \quad J = \sum_{j=1}^r \int_{B_j} [y - \tilde{F}_j(x, \alpha_j)]^2 p(x) dx.$$

Тогда задача кусочной аппроксимации идентифицируемой модели состоит в нахождении такого разбиения на классы, для которого сумма квадратов невязок оценок локальных моделей всех классов была бы минимальна. Другими словами, необходимо найти такую классификацию (6) и такие значения векторных параметров  $\alpha_j$ , для которых функционал (8) принимал бы минимальное значение. Вообще говоря, параметр  $r$  (число областей  $B_j$ ) также должен участвовать в минимизации критерия (8). Однако для критерия в форме (8) такая минимизация даёт тривиальный результат – максимально возможное с точки зрения достоверной оценки коэффициентов регрессии  $\alpha_j$ . Очевидно, что это не соответствует интуитивному представлению об «оптимальном» числе областей.

## 2. Методы решения задачи структурной идентификации

Существует два подхода для решения поставленной задачи. Первый подход состоит в формальном рассмотрении функционала (8) и применении некоторого алгоритма его минимизации. Во втором подходе для нахождения областей разбиения (6) и локальных функций аппроксимации  $\tilde{F}_j(x, \alpha_j)$  используются методы распознавания образов и кластеризации.

### 2.1. ВАРИАЦИОННЫЙ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ СТРУКТУРНОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ

Для разработки алгоритма кусочной аппроксимации в соответствии с первым подходом необходимо рассмотреть первую вариацию функционала (8)  $\delta J$  и разработать алгоритм, обеспечивающий выполнение необходимого условия экстремума функционала  $J$ :  $\delta J = 0$ . Параметр  $r$  не участвует в минимизации функционала, т. е. число областей  $B_j$  задаётся заранее (например, экспертным путём).

Вариация  $\delta J$  разбивается на две независимые части:  $\delta J = \delta_1 J + \delta_2 J$ , где  $\delta_1 J$  – вариация по параметрам  $\alpha_j$  локальных регрессий;  $\delta_2 J$  – вариация по разбиению  $H$ , т. е. по границам областей  $B_j$ . В связи с тем, что вариации  $\delta_1 J$  и  $\delta_2 J$  берутся независимо, необходимое условие экстремума функционала  $J$  может быть переписано в следующей форме:  $\delta_1 J = 0 \cup \delta_2 J = 0$ .

Без ограничения общности, для более компактного формульного представления необходимые условия минимизации функционала далее будем рассматривать для  $r = 2$ .

$$(9) \int_{B_j} [y - \tilde{F}_j(x, \alpha_j)]^2 \nabla_{\alpha_j} \tilde{F}_j(x, \alpha_j) p(x) dx = 0, \quad j = 1, 2,$$

$$(10) \Phi(x, y) = [y - \tilde{F}_1(x, \alpha_1)]^2 - [y - \tilde{F}_2(x, \alpha_2)]^2 = 0, \quad x \in \Lambda,$$

где  $\nabla$  – градиентный оператор,  $\Lambda$  – кусочно-гладкая граница поверхности, разделяющей области  $B_1$  и  $B_2$ ,  $\Phi(x, y)$  – дискриминантная функция.

Для решения системы уравнений (9), (10) предлагается использовать итеративную процедуру типа стохастической аппроксимации [2]:

$$(11a) \quad \alpha_j(n+1) = \alpha_j(n) - \text{sign} \Phi[x(n+1), y(n+1)] \gamma_j(n+1) * \\ * \{y(n+1) - F_j[x(n+1), \alpha_j(n)]\} \nabla_{\alpha_j} \tilde{F}_j[x(n+1), \alpha_j(n)],$$

$$(11б) \quad \Phi[x(n+1), y(n+1)] = \{y(n+1) - \tilde{F}_1[x(n+1), \alpha_1(n)]\}^2 - \\ - \{y(n+1) - \tilde{F}_2[x(n+1), \alpha_2(n)]\}^2, \quad j = 1, 2.$$

Так как выражение (10) для дискриминантной функции  $\Phi(x, y)$  содержит выходной параметр  $y$ , который известен только для данной выборки наблюдений, это решающее правило не может быть использовано для прогнозирования. По этой причине дискриминантная функция должна быть построена как функция  $f(x)$ , зависящая только от входных параметров.

Для того чтобы построить аппроксимацию функции  $f(x)$ , можно использовать обычные алгоритмы распознавания образов с учителем [1]. В этом случае наблюдения (2) используются как обучающая выборка, а значения  $\text{sign} \Phi(x, y)$  рассматриваются как обучающие сигналы, содержащие информацию о том, где расположена точка  $x$ : в  $B_1$  (если  $\text{sign} \Phi(x, y) = 1$ ) или в  $B_2$  (если  $\text{sign} \Phi(x, y) = -1$ ).

Для аппроксимации функции  $f(x)$  можно использовать итерационный алгоритм, основанный на методе потенциальных функций [1, 3]. Этот алгоритм и уравнение (11a) фактически составляют адаптивный алгоритм кусочной аппроксимации.

## 2.2. ДВУХЭТАПНАЯ СХЕМА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ СТРУКТУРНОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ

Как уже говорилось выше, при решении прикладных задач идентификации было замечено, что многие сложные объекты могут работать в нескольких технологических режимах, суще-

ственно различающихся своими моделями  $y = F_j(x)$ , где  $j$  – индекс режима [4]. При этом  $j$ -му режиму соответствует определённая область  $B_j$  в пространстве входных параметров  $X$ . В [5] для идентификации такого рода объектов впервые было предложено использовать методы кусочной аппроксимации. Обычно в качестве оценок локальных моделей  $\tilde{F}_j(x, \alpha_j)$  используются достаточно простые функции – линейные или даже константы.

В этом случае процедура кусочной аппроксимации состоит из двух этапов.

На первом этапе, используя выборку  $x_1, \dots, x_N$ , пространство  $X$  разбивается на  $r$  областей  $B_j$ , каждая из которых содержит только «близкие» наблюдения  $x_j$  (в соответствии с выбранным критерием близости). В качестве критерия близости обычно используется среднеквадратичное отклонение точек в области  $B_j$  [2, 6]:

$$(12) J = \sum_{j=1}^r \int_{B_j} (x - b_j)^2 p(x) dx,$$

где  $b_j$  – модель (эталон) области  $B_j$ . Для разбиения пространства  $X$  на области  $B_j$  обычно используются алгоритмы автоматической классификации (кластеризации) [4, 6].

На втором этапе по выборке (2) строятся локальные регрессионные модели  $\tilde{F}_j(x, \alpha_j)$ .

Особенность данного подхода состоит в том, что на первом этапе процедуры кусочной аппроксимации используется только информация о входных параметрах. Для большинства сложных объектов частота измерения входных параметров намного выше, чем выходных, поэтому количество входных параметров значительно превышает количество выходных. Классические алгоритмы идентификации, основанные на первом подходе к решению задачи кусочной аппроксимации, могут рассматривать только пары наблюдений  $(x_1, y_1), \dots, (x_N, y_N)$ , в то время как дополнительная информация о входных параметрах в этом случае не используется. В рамках же второго подхода был



разработан алгоритм, который позволяет использовать информацию о выходном параметре  $y$  уже после того, как получено разбиение  $\{B_j, j = 1, \dots, r\}$ . Основная идея этого алгоритма состоит в следующем.

Сначала пространство  $X$  разделяется на области  $B_j$ ,  $j = 1, \dots, l$ , где число  $l$  значительно больше, чем «реальное» число областей  $r$ . Для этой цели в работе использовался комплекс алгоритмов структурно-классификационного анализа [6], включающий алгоритмы:  $m$ -локальной оптимизации заданного критерия, выбора информативных параметров, выбора начального разбиения, выбора в определённом смысле «оптимально» числа классов, заполнения пропущенных наблюдений.

Далее производится пошаговое объединение областей  $B_j$  следующим образом. На каждом шаге находится ближайшая пара областей  $B_i$  и  $B_j$  – кандидатов на объединение. Затем проверяется гипотеза: «локальные модели аппроксимации  $\tilde{F}_i(x, \alpha_i)$  и  $\tilde{F}_j(x, \alpha_j)$  в областях  $B_i$  и  $B_j$  статистически неразличимы». Для этого вводится мера близости  $K(B_i, B_j)$  областей  $B_i$  и  $B_j$  [6] и применяется специальная процедура верификации этой гипотезы. В качестве оценок локальных моделей  $\tilde{F}_j(x, \alpha_j)$  обычно используются линейные функции. По этой причине далее рассматривается только кусочно-линейная модель (аппроксимация). В этом случае для верификации гипотезы использовалась статистика Фишера-Чоу [7]

$$F(k, N_i + N_j - 2k) = \frac{\sum_{s=1}^{N_i+N_j} \delta_s^2 + \sum_{p=1}^{N_i} \delta_p^2 + \sum_{l=1}^{N_j} \delta_l^2}{(N_i + N_j - 2k)^{-1} k \left[ \sum_{p=1}^{N_i} \delta_p^2 + \sum_{l=1}^{N_j} \delta_l^2 \right]},$$

$$(13) \quad \delta_p = [y(x_p) - \tilde{F}(x_p)], \quad x_p \in B_i, \quad \delta_l = [y(x_l) - \tilde{F}_j(x_l)], \quad x_l \in B_j, \\ \delta_s = [y(x_s) - \tilde{F}_{ij}(x_s)], \quad x_s \in B_i \cup B_j,$$

где  $k$  – размерность пространства  $X$ ;  $N_i$  и  $N_j$  – число наблюдений, попавшие в области  $B_i$  и  $B_j$  соответственно;  $\tilde{F}_{ij}(x)$  – локальная модель аппроксимации в объединенной области  $B_i \cup B_j$ . Таким образом,  $\delta$  – это разница между реальными и прогнозируемыми значениями выходного параметра  $y$  при условии, что  $x$  принадлежит к соответствующей области.

Если  $F \leq F_0$ , тогда гипотеза верна, где  $F_0$  – уровень значимости, в противном случае гипотеза отвергается, т. е. области  $B_i$  и  $B_j$  не объединяются.

Таким образом, алгоритм кусочно-линейной аппроксимации (идентификации) состоит в последовательном повторении следующей процедуры. На каждом шаге объединения необходимо найти ближайшую в определённом смысле пару областей  $B_i$  и  $B_j$ , для которых

$$(14) K(B_i, B_j) = \max_{l, p \neq l} K(B_l, B_p).$$

Найденные с помощью (14) области объединяются в новую область  $\hat{B}_i = B_i \cup B_j$ , если  $F \leq F_0$ , т. е. гипотеза «локальные модели аппроксимации  $\tilde{F}_i(x, \alpha_i)$  и  $\tilde{F}_j(x, \alpha_j)$  в областях  $B_i$  и  $B_j$  статистически эквивалентны» верна. Новая локальная модель аппроксимации в объединённой области  $\hat{B}_i$  обозначается как  $\tilde{F}_i^*(x) = \tilde{F}_{ij}(x)$ . Эта процедура повторяется для всех областей  $B_i$  и  $B_j$  (или  $B_i$  и  $\hat{B}_i$ ). В результате, возможно, получатся новые области  $\hat{B}_i$  и, соответственно, новые локальные модели аппроксимации  $\tilde{F}_i^*(x)$ , которые в совокупности дадут оценку итоговой кусочно-линейной модели идентифицируемого объекта, как только закончится процесс объединения областей.

Описанная процедура позволяет построить кусочно-линейную аппроксимацию неизвестной модели идентифицируемого объекта, учитывая геометрическую близость областей  $B_j$  в пространстве  $X$ , а также статистическую различимость

локальных регрессионных функций различных областей. Важное преимущество разработанной процедуры состоит в том, что число областей  $r$  при разбиении пространства  $X$  получается автоматически и оптимальным образом.

### 3. Заключение

Описанные алгоритмы кусочно-линейной аппроксимации были успешно использованы для идентификации сложных объектов управления во многих прикладных задачах. Во всех случаях разработанные алгоритмы показали свою высокую эффективность.

### Литература

1. АЙЗЕРМАН М.А., БРАВЕРМАН Э.М., РОЗОНОЭР Л.И. *Метод потенциалных функций в теории обучения машин.* – М.: «Наука», 1970. – 495 с.
2. БАУМАН Е.В., ДОРОФЕЮК А.А., ДОРОФЕЮК Ю.А. *Методы структурно-классификационного анализа, базирующиеся на процедурах стохастической аппроксимации* // Труды Второй международной конференции Управление развитием крупномасштабных систем (MLSD'2008). – М.: ИПУ РАН, 2008. – С. 192–200.
3. БРАВЕРМАН Э.М., МУЧНИК И.Б. *Структурные методы обработки эмпирических данных.* – М.: Наука, 1983. – 430 с.
4. ДОРОФЕЮК А.А., КАСАВИН А.Д., ТОРГОВИЦКИЙ И.Ш. *Применение методов автоматической классификации для построения статической модели объекта* // Автоматика и телемеханика. – 1970. – №2. – С. 34–40.
5. ДОРОФЕЮК А.А., ТОРГОВИЦКИЙ И.Ш. *Применение методов автоматической классификации данных в задаче контроля качества изделий* // Стандарты и качество. – 1967. – №4. – С. 25–30.

6. ДОРОФЕЮК Ю.А. *Комплекс алгоритмов структурно-классификационного анализа и его использование в задачах анализа и совершенствования крупномасштабных систем управления* // Труды Второй международной конференции Управление развитием крупномасштабных систем (MLSD'2008). Том I. – М.: ИПУ РАН, 2008. – С. 35–38.
7. CHOW G.C. *Tests of Equality between Sets of Coefficients in Two Linear Regressions* // *Econometrica*. – 1960. – Vol. 28, №3. – P. 79–86.

## COMPLEX CONTROL OBJECTS IDENTIFICATION ON THE BASE OF PIECEWISE APPROXIMATION METHODS

**Julia Dorofeyuk**, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, research assistant (dorofeyuk\_julia@mail.ru).

*Abstract: The problem of complex object functioning model development is solved with the aid of algorithms of structure-ranging analysis and piecewise approximation. Two approaches to the solution are considered – the first employs iterative algorithms which implement variational approach to piecewise approximation, while the second uses two-phase algorithms where the processes of input parameter space structuring and local regression model development are separated.*

Keywords: ranging data analysis, structure identification, piecewise approximation of complex dependence, Fisher-Chow statistic.

*Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии А. С. Манделем*

УДК 629.7.017

ББК 39.62

## **МОДЕЛЬНАЯ ВЕРСИЯ БОРТОВОГО АЛГОРИТМА ОПЕРАТИВНОГО РАСПОЗНАВАНИЯ ОБЪЕКТОВ**

**Андриенко А. Я.<sup>1</sup>, Чадаев А. И.<sup>2</sup>**

*(Учреждение Российской академии наук*

*Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова  
РАН, Москва)*

*В рамках, определяемых модельным представлением бортовых алгоритмов, обсуждается специфика процесса распознавания – на борту беспилотного летательного аппарата – наземных (стационарных и подвижных) объектов.*

Ключевые слова: распознавание наземных объектов, алгоритм оперативного распознавания.

### **1. Введение**

Распознавание зрительных объектов остается наиболее трудной задачей в общей проблеме автоматизированной классификации [1]. И до сих пор не существует алгоритма распознавания объектов, сопоставимого по точности, универсальности, а главное, по быстродействию с механизмом формирования зрительных образов в сознании человека, да и любого представителя животного мира, обладающего хоть какими-нибудь зачатками интеллекта.

А между тем, применительно к рассматриваемой в статье задаче оперативного распознавания наземных подвижных (не обязательно движущихся) и стационарных объектов, исполняемого на борту беспилотного летательного аппарата (ЛА), было бы заманчиво воспроизвести эти природные свойства человече-

---

<sup>1</sup> Анатолий Яковлевич Андриенко, заведующий лабораторией, доктор технических наук, профессор (vladguc@ipu.rssi.ru).

<sup>2</sup> Александр Иванович Чадаев, старший научный сотрудник, кандидат технических наук (тел. (495) 334-88-71).

ского восприятия зрительных объектов. Однако за миллионы лет эволюционного развития «механизм» этого восприятия настолько совершенно приспособился к нуждам рутинного использования, что принципы действия его до сих пор остаются неразгаданными, несмотря на многочисленные исследования, проводимые на всевозможных уровнях – от клеточно-нейронного до общесистемного (синтаксического и семантического).

Для пояснения специфики представляемого алгоритма распознавания наземных объектов приведём «бытовой» пример реакции неискушённых зрителей на наиболее колоритные картины импрессионистов и пуантилистов, где непривычно изображены обыденные предметы в виде совокупности точек-мазков ограниченного набора (спектрально чистых) цветов. В поведении зрителя, пытающегося по названию картины («Стог сена», «Клумба» и проч.) распознать её объект, доминирует одна из двух стратегий: либо произвольное сканирование взглядом по поверхности картины при мысленном прикладывании (к определённым её фрагментам) детерминированного эталона предмета, либо специфически рассеянный взгляд на картину при мысленном охвате её некоторым размытым эталоном предмета, который «вдруг» свёртывается в экспрессивно красочное изображение объекта. В статье рассматривается алгоритм распознавания объектов преимущественно на основе воспроизведения второй из этих стратегий.

## **2. Постановка задачи распознавания наземных подвижных объектов**

Считается, что на борту беспилотного ЛА имеется набор из  $S$  датчиков – оптических и радиолокационных; каждый  $s$ -ый датчик ( $s = 1, 2, \dots, S$ ) формирует в дискретные моменты времени полёта  $t = 1, 2, \dots$  кадры – изображения информационного поля  $\ell_t^{(s)}(x, y)$ ,  $x \in X^{(s)}$ ,  $y \in Y^{(s)}$ , где  $x, y$  – значения координат поля в бортовой системе координат ЛА. Размеры кадра  $X^{(s)} \times Y^{(s)} = X \times Y$  будем считать (для простоты изложения) одинаковыми для всех датчиков.

В поле  $(x, y)$ ,  $x \in X$ ,  $y \in Y$ , могут находиться несколько объектов  $O_z$ ,  $z = 1, 2, \dots, Z$ , каждый из которых принадлежит какому-либо из известных типов  $q = 1, 2, \dots, Q$ . Тип  $q$  объекта («автомобили», «мосты» и т. д.) характеризуется определённым набором признаков – признаковым вектором  $\Pi_q$  случайной природы, обладающим по крайней мере двумя свойствами:

1) оцениваемостью в том смысле, что каждый из векторов  $\Pi_q$  известным образом по некоторому соотношению  $L_q = F_q(\Pi_q, V, x_q, y_q)$  отображается в  $S$ -мерный вектор  $L_q$ , входящий в состав информационного вектора  $\ell_t = (\ell_t^{(1)}, \ell_t^{(2)}, \dots, \ell_t^{(S)})$ ; здесь  $V = (V_I, V_{II})$  – вектор случайных факторов, причём  $V_I$  характеризует случайные условия отображения (метеорологические, полётные, освещения и др.), которые могут быть определены и полностью учтены при анализе изображения;  $V_{II}$  есть случайные ошибки – помехи в формировании измеряемой информации  $L_q$ , которые могут быть учтены лишь частично;  $x_q, y_q$  – координаты центра объекта типа  $q$  в поле  $(x, y)$ ;

2) устойчивостью и различимостью в том смысле, что векторы  $L_q$  ни при каких значениях возможных отклонений признаков от их математических ожиданий и ни при каких условиях отображения не совпадают для разных типов  $q$  объектов, а главное, отличаются от отображений других технических и природных объектов в информационном векторе  $\ell_t$ .

Таким образом, каждый объект  $O_z$ ,  $z = 1, 2, \dots, Z$ , характеризуется своим типом  $q$ , реализацией  $\Pi_{qz}$  признакового вектора  $\Pi_q$  и, наконец, координатами  $x_{zt}, y_{zt}$  центра объекта в поле  $(x, y)$  в дискретный момент времени  $t$ , так что его отображение в информационном векторе  $\ell_t$  имеет вид  $L_{zt} = F_q(\Pi_{qz}, V, x_{zt}, y_{zt})$ . Задача состоит в том, чтобы по текущим векторным информационным данным  $\ell_t(x, y)$ , априорным данным об условиях  $V$  отображения и известным зависимостям  $L_{zt} = F_q(\Pi_{qz}, V, x_{zt}, y_{zt})$ ,  $q = 1, 2, \dots, Q$ , построить в  $t$ -ый момент времени ( $t = 1, 2, \dots$ )

оценки  $\hat{x}_{zt}, \hat{y}_{zt}$  координат  $x_{zt}, y_{zt}$  объектов, а также оценки  $\hat{\Pi}_{qz}$  признаков векторов объектов  $O_z, z = 1, 2, \dots, Z$ , – с учётом значений таких же оценок, составленных ранее, в  $(t-1)$ -ый момент времени полёта.

### 3. Принципы решения задачи

Распознавание объектов производится на основе вполне известных принципов, исходящих из декомпозиции исходной задачи на ряд частных задач.

1. Разработка алгоритмов фильтрации телеизображений с сопутствующим удалением из сцены наблюдения заведомо посторонних объектов.

2. Выявление наиболее информационно существенных и характерных признаков  $\Pi_q$  объекта – с учетом практического опыта автоматической классификации объектов, из которого следует, что распознавание происходит тем успешнее, чем меньше размерность вектора  $\Pi_q$ . В процессе построения  $\Pi_q$  естественным образом устанавливается и эталонная зависимость  $\ell_q^* = F_q^*(\Pi_q, x_q, y_q)$ , приведенная к условиям отображения, принимаемых в качестве номинальных.

3. Формирование составного скалярного критерия

$$(1) \quad J_t = \sum_{z=1}^Z J_{zt}(\ell_t, \ell_{zt}^*, J_{z(t-1)})$$

распознавания, такого, что каждый парциальный критерий  $J_{zt}$  имеет смысл, близкий к достоверности обнаружения объекта с признаками  $\Pi_{qz}$  в точке  $x_{zt}, y_{zt}$ . Трудности формирования критерия  $J_t$  связаны, в основном, с обоснованием свертки в критерий  $J_{zt}$  информационных данных, поставляемых различными датчиками: ценность этих данных для распознавания объектов в общем случае весьма неравнозначна.

4. Построение оператора  $P$  проективного совмещения кадров  $\ell_t$  и  $\ell_{t-1}$ . Он позволяет, в частности, выполнять прогнозирование  $(x_{zt}, y_{zt}) = P[(x_{z(t-1)}, y_{z(t-1)}), u_{t-1}]$  координат объектов в  $t$ -ый момент времени с учётом: 1) их значений в  $(t-1)$ -ый момент функцио-



нирования этих объектов и 2) управления  $u_{t-1}$  ориентацией линий визирования объектов относительно бортовой системы координат ЛА.

#### 4. Алгоритм распознавания объектов

1. Описание алгоритма начнём с рассмотрения случая, когда в информационном поле находится один объект ( $z = Z = 1$ ) известного типа  $q$  и необходимо распознать и локализовать его на фоне других объектов, отображенных в  $\ell_t(x, y)$ .

В алгоритме истинный объект отождествляется с  $R$ -мерным вектором  $\pi$ , составленным из признакового вектора и координат объекта; соответственно, вектор  $\hat{\pi}_t = (\hat{\Pi}_{qz}, \hat{x}_{zt}, \hat{y}_{zt})$  интерпретируется как образ объекта, построенный в  $t$ -ый дискретный момент времени (индекс  $z$  образа объекта в дальнейшем опускается).

Физическая суть действия алгоритма заключается в отображении (по процедуре, вытекающей из  $F_q^*$ , см. раздел 3, п.2) на откорректированный (см. раздел 3, п.1) векторный кадр-изображение  $\ell_t(x, y)$  размытого образа  $\tilde{\pi}_t$ , образуемого «расфокусированием» образа  $\hat{\pi}_{t-1}$  посредством замены каждого  $r$ -го компонента ( $r = 1, 2, \dots, R$ ) вектора  $\hat{\pi}_{t-1} = P\pi_{t-1}$  (см. раздел 3, п.4) на множество  $\Omega_t^{(r)}$  значений этого компонента с центром в  $\hat{\pi}_{t-1}^{(r)}$ ; здесь множества  $\Omega_t^{(r)}$ ,  $r = 1, 2, \dots, R$ , задаются так, что размеры их тем больше, чем меньше достоверность  $J_{z(t-1)}$  (см. раздел 3, п.3) распознавания объекта в  $(t-1)$ -ый момент – с тем чтобы реальный объект  $\pi$  охватывался образом  $\tilde{\pi}_t$ .

Действие же алгоритма в  $t$ -ый момент времени проявляется в том, чтобы сфокусировать размытый образ  $\tilde{\pi}_t$  в детерминированный  $\hat{\pi}_t$ , такой, что

$$(2) \quad J_t(\hat{\pi}_t) = \sup J_t(\tilde{\pi}_t) > J_{t-1}(\hat{\pi}_{t-1}).$$

Разъясним это положение несколько детальнее.

Размытое множество  $\tilde{\pi}_t$  представляется как «рой»  $\{\pi_{tw}, w = 1, 2, \dots\}$  потенциальных образов, каждому из которых соответствует значение критерия  $J_t$  – см. (1). В результате образуется некоторое критериальное поле  $J_t(\tilde{\pi}_t)$ , на основе анализа которого алгоритм «сжимает» рой потенциальных образов – из условия (2). И, конечно же, представляется совершенно бесперспективным использование здесь традиционных методов поиска (детерминированного или случайного) глобального экстремума  $J_t(\tilde{\pi}_t)$  в силу низкой (для данной задачи) скорости их действия, сводящегося к отысканию и перебору локальных экстремумов. Необходимое быстрое действие может быть достигнуто на основе анализа не локальных, а обобщённых характеристик критериального поля  $J_t(\tilde{\pi}_t)$ .

Разработанный специально для данной задачи метод быстрого решения (2) предусматривает:

1) формирование конечного роя  $\{\pi_{tw}, w = 1, 2, \dots, W\}$  образов объекта из условия ортогонализации этих образов и равномерного покрытия ими многомерной области критериального поля;

2) выявление обобщённых характеристик критериального поля в виде аналога оценок ковариационных моментов  $J_t(\tilde{\pi}_t)$  и  $\pi_{tw}, w = 1, 2, \dots, W$ , а также условных математических ожиданий  $J_t(\tilde{\pi}_t)$ ;

3) вычисление вектора  $\hat{\pi}_t$ , доставляющего решение (2) на основе аппроксимации поля  $J_t(\tilde{\pi}_t)$  сглаживающим  $R$ -мерным полиномом второго порядка, параметры которого определяются из условия точного воспроизведения этим полиномом основных характеристик (см. п.2)) исходного критериального поля.

2. В случае, если в информационном поле находятся несколько объектов одного (известного) типа и для каждого из них в  $(t - 1)$ -ый момент времени полёта имеются оценки координат и признакового вектора, определение образов  $\hat{\pi}_t$  объектов в  $t$ -ый момент не вызывает затруднений: для каждого объекта строится размытый образ и решается (2); однако при пересечении размытых образов различных объектов (например, из-за близкого

расстояния между ними) необходимо при анализе одного объекта исключать из кадра  $\ell_t$  изображение оценки признакового вектора другого объекта.

3. Обобщение алгоритма на случай распознавания объектов нескольких типов в принципе не вызывает затруднений – если априори (при введении полётного задания) правильно будут перечислены типы объектов, которые могут находиться в информационном поле.

### 5. Пример фрагмента алгоритма распознавания

Конкретизация алгоритма распознавания единичного объекта, проведённая в предположении, что размерность вектора параметров этого объекта не превосходит 7, сводится к исполнению следующих операций.

1. Формирование конечного ряда  $\{\pi_{tw}, w = 1, 2, \dots, 25\}$  из 25 виртуальных образов объекта по правилу

$$\pi_{tw}^{(n)} = \pi_{t-1}^{(n)} + \Delta\pi_{tw}^{(n)}, \quad n = 1, 2, \dots, 8,$$

$$\Delta\pi_{tw}^{(n)} = \begin{cases} \alpha_{wn} \omega_{t-1}^{(n)}, & \omega = 1, 2, \dots, 8, \\ \delta_{wn}^{(8)} \omega_{t-1}^{(n)}, & \omega = 9, 10, \dots, 16, \\ -\delta_{wn}^{(16)} \omega_{t-1}^{(n)}, & \omega = 17, 18, \dots, 24, \\ 0, & \omega = 25. \end{cases}$$

Здесь  $\pi_{t-1}^{(n)}$ ,  $\pi_{tw}^{(n)}$  –  $n$ -ые компоненты векторов  $\pi_{t-1}$ ,  $\pi_{tw}$ ;  $\omega_{t-1}^{(n)} = \Omega_1^{(n)} / J_{t-1}$ , где  $\Omega_1^{(n)}$  – предельно возможное отклонение по модулю (от априорного значения)  $n$ -ой компоненты признакового вектора  $\pi_1$ ;  $J_{t-1} = J_{t-1}(\tilde{\pi}_{t-1})$ ;  $\alpha_{wn}$  – элемент формируемой по алгоритму [2] ортогональной по столбцам (и строкам) матрицы  $\|\alpha_{wn}\|$  Адамара размера  $8 \times 8$ , составленной из +1 и -1 (последний столбец этой матрицы не используется):

$$(3) \quad \|\alpha_{wn}\| = \begin{vmatrix} + & + & + & + & + & + & + & + \\ + & - & - & - & + & - & + & + \\ + & - & + & + & - & - & - & + \\ + & + & - & - & - & + & - & + \\ - & - & - & + & - & + & + & + \\ - & + & + & - & - & - & + & + \\ - & + & - & + & + & - & - & + \\ - & - & + & - & + & + & - & + \end{vmatrix},$$

единицы в матрице (3) опущены;  $\delta_{wn}^{(\Delta)}$  – аналог смещённой функции Дирака, определяемый соотношением

$$\delta_{wn}^{(\Delta)} = \begin{cases} 1 & \text{при } w - n = \Delta, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

2. Вычисление значений  $J_{tw} = J_t(\pi_{tw})$ ,  $w = 1, 2, \dots, 25$ , критерияльного поля.

3. Вычисление координат оптимального в смысле (2) образа объекта по формуле

$$\hat{\pi}_t^{(n)} = \hat{\pi}_{t-1}^{(n)} + \frac{\sum_{w=1}^8 (J_{tw} \alpha_{wn}) \omega_{t-1}^{(n)} / 8}{2J_{t(25)} - J_{t(n+8)} - J_{t(n+16)}}, \quad n = 1, 2, \dots, 7.$$

Замечание. Обобщение алгоритма типа 1–3 на случай распознавания и локализации разнородных объектов в одном информационном поле в принципе не вызывает затруднений – если априори (при введении полётного задания) правильно перечислены классы объектов, находящихся в информационном поле.

## 6. Заключение

Практическая реализуемость представленной версии бортового алгоритма распознавания наземных объектов определяется в основном эффективностью проектно-технических решений смежных проблем (повышения контрастности и топологической

отделимости телеизображений наблюдаемых объектов, обеспечения устойчивости действия бортовой аппаратуры к сбоям и пропускам в поступающей информации и т.д.). Но обсуждение этих проблем уже не входит в компетенцию авторов данной публикации.

### **Литература**

1. БОНГАРД М.М. *Проблема узнавания*. – М.: Наука, 1967.
2. ЛЕВЕНШТЕЙН В.И. *Применение матриц Адамара к одной задаче кодирования* // Проблемы кибернетики. – 1961. – Вып. 5 – С. 22–29.

### **PILOT VERSION OF ON-BOARD ALGORITHM FOR ON-THE-FLY RECOGNITION OF OBJECTS**

**Anatolii Andrienko**, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Laboratory Head, Doctor of Science, professor (Moscow, Prof-soyuznaya st., 65, (495) 334-88-71, vladguc@ipu.rssi.ru).

**Alexander Chadaev**, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Cand. Sc., Senior scientific researcher, (495) 334-88-71, vladguc@ipu.rssi.ru

*Abstract: Particular characteristics of the process of stationary and mobile ground targets recognition from the board of pilotless vehicle are considered in reference to onboard recognition algorithms.*

Keywords: recognition of ground targets, algorithm for on-the-fly recognition.

*Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии А. А. Ворониным*

УДК 519.8 + 330.4  
ББК 65.6

## НЕЧЕТКИЙ ПОДХОД К ПРОГНОЗИРОВАНИЮ УРОВНЯ БЕДНОСТИ

Абдуллаева Н. А.<sup>1</sup>

(Учреждение Азербайджанской академии наук  
Институт кибернетики АНАН, Баку)

*Исследуется уровень бедности в Азербайджане в зависимости от доходов населения, коэффициента безработицы, уровня инфляции и прожиточного минимума, а также дается прогноз уровня бедности на следующие три года. До настоящего времени задачи такого прогнозирования решались с помощью классических уравнений линейной регрессии. В данной статье для прогноза уровня бедности предлагается нечеткая регрессионная модель.*

Ключевые слова: уровень бедности, доходы населения, коэффициент безработицы, уровень инфляции, прожиточный минимум, нечеткая регрессионная модель.

### 1. Введение

Проблема бедности активно исследуется и имеет много сходных черт во всем мире. Тем не менее, несмотря на накопленный научный опыт изучения проблем бедности, многочисленные попытки оценить масштабы ее распространения, в том числе и в Азербайджане, представляют несколько неточную картину.

В работе [4], посвященной аналитическому обзору содержания и структуры 250 статей о бедности, опубликованных в России в 1992–2006 гг., Локшин приходит к выводу, что используемые для анализа бедности эмпирические методы и подходы

---

<sup>1</sup> Нигяр Акрамовна Абдуллаева, аспирант (nigyar.a@gmail.com)

устарели, описанию данных недостает точности. Там же сказано об отсутствии критических обзоров, метаанализа и синтеза результатов исследований бедности, опубликованных в России на протяжении 15 лет. Нельзя, однако, не отметить качественные исследования бедности А.Ю. Шевякова и А.Я. Кируты, Н.М. Римашевской, Л.Н. Овчаровой, Т.И. Богомоловой. Тем не менее, среди работ российских ученых не удалось найти подхода к оценке и прогнозу уровня бедности, учитывающего неопределенность.

В настоящее время в моделях выражения неопределенности широко применяются нечеткие величины [5, 6]. Так, нечеткий многомерный подход к анализу бедности предложен в работах Сериоли и Зани [15], Чели и Лемми [16], Дагум [17], Мартинетти [19].

Известно, что проблема учета неопределенности [5], неполноты и противоречивости данных занимает ключевое место в измерении социально-экономических показателей, в том числе и в оценке уровня бедности. Наиболее распространенным методом оценки уровня бедности является регрессионный анализ. Однако для получения качественной регрессионной модели необходима точная числовая статистическая информация. При анализе зависимости уровня бедности от воздействующих факторов зачастую приходится иметь дело с важной информацией, которая не может быть задана точно. Для таких данных аппаратом формализации служит теория нечетких множеств Заде.

Поэтому в данной работе для оценки и прогноза уровня бедности предлагается нечеткая модель. Также предложено исследование уровня бедности в зависимости от доходов населения, коэффициента безработицы, уровня инфляции, прожиточного минимума, и прогноз уровня бедности на 3 года с применением нечеткой интервальной регрессии. Основная цель применения метода нечеткой регрессии состоит в том, чтобы получить более точный и достоверный прогноз по экономическим показателям на следующие три года на основе имеющихся статистических данных с 2000 по 2009 год.

## 2. Постановка задачи

С целью описания общей постановки задачи условно обозначим следующие экономические показатели:

- 1) уровень бедности (процент бедных от всего населения) – УБ;
- 2) доходы населения (всего, млн. манат) – ДН;
- 3) коэффициент безработицы (процент официально зарегистрированных безработных от экономически активного населения) – КБ;
- 4) уровень инфляции (процент) – УИ;
- 5) прожиточный минимум (манат) – ПМ.

В качестве исходных данных взяты годовые значения показателя уровня бедности и вышеперечисленных четырех показателей по информации Государственного статистического комитета Азербайджана за период с 2000 по 2009 год (таблица 1).

Таблица 1. Статистические данные по показателям в Азербайджане с 2000 по 2009 год

Год	Уровень бедности % УБ	Доходы населения млн. манат ДН	Коэффициент безработицы % КБ	Уровень инфляции % УИ	Прожиточный минимум манат ПМ
2000	68,1	3511,4	1,17	1,8	23,2
2001	49,0	3802,0	1,29	1,5	24,0
2002	46,7	4244,1	1,35	2,8	35,0
2003	44,7	4978,9	1,31	2,2	35,8
2004	40,2	6135,3	1,35	6,7	38,8
2005	29,3	7792,3	1,35	9,6	42,6
2006	20,8	9949,8	1,26	8,3	58,0
2007	15,8	14305,6	1,18	16,7	64,0
2008	13,2	20058,2	1,03	20,8	70,0
2009	11,0	22396,1	1,00	1,5	84,0

В Азербайджане явление бедности представляет особый интерес для исследования, так как не подчиняется многим



тенденциям, характерным для других стран. Из динамики показателей, представленной в таблице 1, видно, что снижение уровня бедности обусловлено высокими темпами роста доходов, несмотря на рост инфляции и незначительное увеличение официально зарегистрированной безработицы. Рост доходов, в свою очередь, обеспечен своевременной индексацией доходов, повышением зарплат, пенсий, социальных пособий, увеличением размера адресной социальной помощи, выдаваемой неимущим слоям населения. Однако, значение показателя уровня бедности довольно высокое, притом, что уровень официально зарегистрированных безработных чуть больше одного процента. Из теории известно, что невысокий уровень безработицы позволяет поддерживать заниженная заработная плата. Действительно, несмотря на неоднократное повышение минимальной заработной платы (МЗП) и ежегодное увеличение размера прожиточного минимума (ПМ), уровень МЗП и ПМ далеки от рекомендованных Европейской Социальной Хартией норм в 60% и 50% от средней зарплаты<sup>1</sup> (прожиточный минимум лишь в 2000 г. и 2002 г. составлял соответственно 52,4% и 55,5% от средней зарплаты, с 2007 г. годовой размер ПМ официально утверждается), минимальная оплата труда не дотягивает и до прожиточного минимума. В тоже время, обследования Международной организации труда показали более высокие оценки безработицы в стране. При этом необходимо учитывать, что наличие материальных благ, не являющихся результатом трудовой деятельности человека, к примеру, высокая заработная плата других членов семьи или доход от сдачи в аренду имущества, оказывает влияние на

---

<sup>1</sup> *В целях недопущения значительной дифференциации доходов в соответствии с установкой Европейского комитета по социальным правам минимальный уровень заработной платы должен составлять 60% от средней заработной платы по национальной экономике. В тоже время соответствующая величина может снижаться в сторону 50%, если государства докажут, что при этом может обеспечиваться достойный уровень жизни.*

принятие человеком решения о необходимости работать. Кроме того, в Азербайджане фактически сложилась ситуация, при которой большинство людей, считающих себя безработными, имеют доход, работая в неформальном секторе экономики без договора и трудовой книжки. По оценкам международных экспертов объемы неформальной экономики довольно высоки (см. таблицу 2).

Таблица 2. Справочные данные по экономическим показателям в Азербайджане

Показатели	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
Средняя заработная плата (СЗП), манат	44,3	52,0	63,1	77,4	99,4	123,6	149,0	215,8	274,4	298,0
Минимальная заработная плата (МЗП), манат	1,1	5,5	5,5	9,0	20,0	25,0	30,0	50,0	60,0	75,0
Соотношение МЗП к СЗП, %	<b>2,5</b>	<b>10,6</b>	<b>8,7</b>	<b>11,6</b>	<b>20,1</b>	<b>20,2</b>	<b>20,1</b>	<b>23,2</b>	<b>21,9</b>	<b>25,2</b>
Прожиточный минимум (ПМ), манат	23,2	24,0	35,0	35,8	38,8	42,6	58,0	64,0	70,0	84,0
Соотношение ПМ к СЗП, %	<b>52,4</b>	<b>46,2</b>	<b>55,5</b>	<b>46,3</b>	<b>39,0</b>	<b>34,5</b>	<b>39,0</b>	<b>29,7</b>	<b>25,5</b>	<b>28,2</b>
Уровень безработицы (по оценкам МОТ), %	-	-	-	10,7	8,4	7,6	6,8	6,5	6,1	6,0
Объемы неформальной экономики % от ВВП <sup>1</sup>	60,6	61,1	61,3	61,3	60,8	59,4	-	-	-	-

<sup>1</sup> Schneider F. *Shadow Economies and Corruption All Over the World: New Estimates for 145 Countries // Economics. – 2007. – № 9.*

### 3. Методика построения классической регрессионной модели

Одним из самых распространенных методов прогнозирования является традиционный метод линейной регрессии, который для нашей задачи будет иметь следующий вид:

$$(1) \text{УБ(ДН,КБ,УИ,ПМ)} = a_0 + a_1 \cdot \text{ДН} + a_2 \cdot \text{КБ} + a_3 \cdot \text{УИ} + a_4 \cdot \text{ПМ} + \varepsilon,$$

где коэффициенты  $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4$  определяются методом наименьших квадратов;  $\varepsilon$  – ошибка наблюдения.

Оценка проведена с помощью программы *Eviews* методом наименьших квадратов, и получена следующая классическая модель множественной линейной регрессии:

$$(2) \text{УБ(ДН,КБ,УИ,ПМ)} = 177,9430 - 0,001825 \cdot \text{ДН} - 78,64723 \cdot \text{КБ} - 0,392123 \cdot \text{УИ} - 0,564792 \cdot \text{ПМ},$$

$$R^2 = 0,970899, \text{DW} = 2,717832, F\text{-statistic} = 41,70325,$$

$$\text{Prob}(F\text{-statistic}) = 0,000495.$$

Коэффициент детерминации  $R^2$ , определяющий тесноту связи между факторами и зависимой переменной равен 0,97, что является очень высоким показателем.  $F$ -статистика показывает, что регрессия в целом значима ( $\text{Prob} = 0,0005$ ). Автокорреляция отсутствует, так как статистика Дарбина-Уотсона равна 2,71.

Однако недостатком модели являются неверные знаки коэффициентов при переменных КБ, УИ, ПМ. Из законов экономики известно, что рост безработицы, инфляции, увеличение прожиточного минимума отрицательным образом влияют на уровень бедности, поэтому модель имеет противоречивую с точки зрения экономической теории интерпретацию и не может быть использована для прогнозов. Эта проблема связана с наличием мультиколлинеарности, приводящей к увеличению стандартных ошибок и искажающей истинные зависимости между переменными. В этом случае оценка методом наименьших квадратов обладает «плохими» свойствами. Для устранения мультиколлинеарности можно исключить какую-либо из переменных, но это значительно отразится на содержательном смысле модели и приведет к смещению коэффициентов модели.

Для отбора качественной модели можно также провести преобразования исходных данных, что чревато построением большого количества моделей и делает задачу трудоемкой (если над каждым из 4 показателей сделать 9 преобразований, то общее количество возможных регрессионных моделей будет равно  $9^4 = 6561$ ).

Классическое регрессионное уравнение считается пригодным для прогнозирования, но в сравнении с современным нечетким методом решения оно не обладает подобной точностью. Сказанное, в первую очередь, можно обосновать на основе данных по годам. Так, годовые данные, взятые из статистики, усреднены и не могут считаться точными числами. Числа, принятые в нечетких задачах, являются нечеткими и состоят из полноценно рассчитанных интервалов с учетом погрешности на каждом  $\alpha$ -уровне. Кроме того, в классической регрессии операции проводятся над реальными числами, в результате чего получаются реальные числа. Значит, как и первичные показатели, результаты могут не отражать полную реальность, так как используемые числа были усредненными. В нечетких расчетах результат получается как нечеткое число. Это, как правило, обеспечивает получение результатов в достоверных интервалах по  $\alpha$ -уровням с учетом погрешностей [18].

Методы классической регрессии имеют и другие недостатки:

- недостаточная устойчивость к изменениям входной информации;
- мультиколлинеарность, т. е. проблема зависимости переменных между собой. Хотя классический регрессионный анализ предполагает, что переменные независимы друг от друга, в любых реальных приложениях оказывается, как правило, что между ними есть корреляция, и часто достаточно высокая [7];
- сведение формы математической зависимости к линейной, что приводит к достаточно большой погрешности и искаженности [21];

- трудности в изучении распределения погрешностей измерений, которые в большинстве случаев имеют распределения, отличные от нормальных [10];
- недостаточное число наблюдений (малый набор данных);
- неэффективность классических регрессионных моделей при описании процессов, действующих в нестационарной системе с ярко выраженной динамикой структурного развития [8];
- результаты измерения всегда имеют погрешность, т. е. фактически являются не точными числами, а интервалами или нечеткими множествами [10, 11].

В настоящее время альтернативой классическим методам выступают нечеткие регрессионные методы [21], которые значительно расширили границы применения регрессионного анализа, так как понятие нечеткого множества является расширением понятия обычного, четкого множества [3].

#### **4. Методика построения нечеткой регрессионной модели**

В задачах нечеткой регрессии, как и в классической регрессии, необходимо определить функцию зависимости между входными и выходными данными. В первую очередь напомним функцию зависимости в общем виде:

$$(3) \text{ УБ} = \tilde{f}(\text{ДН}, \text{КБ}, \text{УИ}, \text{ПМ}).$$

Все пять показателей, участвующие в решении задачи, принимаются как нечеткие числа.

Решение нечеткой задачи линейной регрессии состоит из выявления произвольного члена и коэффициентов, заданных на интервале [1]:

$$(4) \text{ УБ}(\text{ДН}, \text{КБ}, \text{УИ}, \text{ПМ}) = \tilde{A}_0 + \tilde{A}_1 \cdot \text{ДН} + \tilde{A}_2 \cdot \text{КБ} + \tilde{A}_3 \cdot \text{УИ} + \tilde{A}_4 \cdot \text{ПМ}.$$

В данном уравнении показатели УБ, ДН, КБ, УИ, ПМ и коэффициенты  $A_0, A_1, A_2, A_3, A_4$  представим треугольными нечеткими числами с центром  $c$  и шириной  $w$ .

Другими словами, показатели УБ, ДН, КБ, УИ, ПМ и коэффициенты  $A_0, A_1, A_2, A_3, A_4$  – это нечеткие множества, функции

принадлежности которых имеют вид равнобедренного треугольника единичной высоты [18]:

$$(5) \quad \begin{aligned} \text{УБ} &= (\text{УБ}_c, \text{УБ}_w), \text{ДН} = (\text{ДН}_c, \text{ДН}_w), \text{КБ} = (\text{КБ}_c, \text{КБ}_w), \\ \text{УИ} &= (\text{УИ}_c, \text{УИ}_w), \text{ПМ} = (\text{ПМ}_c, \text{ПМ}_w). \end{aligned}$$

Линейная интервальная регрессионная форма нечеткого уравнения по каждому  $\alpha$ -уровню нижеследующая:

$$(6) \quad \text{УБ}^\alpha(\text{ДН}^\alpha, \text{КБ}^\alpha, \text{УИ}^\alpha, \text{ПМ}^\alpha) = A_0^\alpha + A_1^\alpha \cdot \text{ДН}^\alpha + A_2^\alpha \cdot \text{КБ}^\alpha + A_3^\alpha \cdot \text{УИ}^\alpha + A_4^\alpha \cdot \text{ПМ}^\alpha,$$

т. е.

$$\begin{aligned} \text{УБ}^\alpha(\text{ДН}^\alpha, \text{КБ}^\alpha, \text{УИ}^\alpha, \text{ПМ}^\alpha) &= (\text{УБ}_c^\alpha(\text{ДН}^\alpha, \text{КБ}^\alpha, \text{УИ}^\alpha, \text{ПМ}^\alpha), \text{УБ}_w^\alpha(\text{ДН}^\alpha, \text{КБ}^\alpha, \text{УИ}^\alpha, \text{ПМ}^\alpha)), \\ \text{ДН}^\alpha &= (\text{ДН}_c^\alpha, \text{ДН}_w^\alpha), \text{КБ}^\alpha = (\text{КБ}_c^\alpha, \text{КБ}_w^\alpha), \text{УИ}^\alpha = (\text{УИ}_c^\alpha, \text{УИ}_w^\alpha), \text{ПМ}^\alpha = (\text{ПМ}_c^\alpha, \text{ПМ}_w^\alpha), \\ A_0^\alpha &= (A_{0c}^\alpha, A_{0w}^\alpha), A_1^\alpha = (A_{1c}^\alpha, A_{1w}^\alpha), A_2^\alpha = (A_{2c}^\alpha, A_{2w}^\alpha), A_3^\alpha = (A_{3c}^\alpha, A_{3w}^\alpha), A_4^\alpha = (A_{4c}^\alpha, A_{4w}^\alpha). \end{aligned}$$

Если расширить вышеуказанные выражения, то сможем написать как:

$$(7) \quad \text{УБ}_c(\text{ДН}, \text{КБ}, \text{УИ}, \text{ПМ}) = a_{0c} + a_{1c} \cdot \text{ДН}_c + a_{2c} \cdot \text{КБ}_c + a_{3c} \cdot \text{УИ}_c + a_{4c} \cdot \text{ПМ}_c,$$

$$(8) \quad \begin{aligned} \text{УБ}_w(\text{ДН}, \text{КБ}, \text{УИ}, \text{ПМ}) &= a_{0w} + a_{1c} \cdot \text{ДН}_w + a_{1w} \cdot \text{ДН}_c + a_{2c} \cdot \text{КБ}_w + \\ &+ a_{2w} \cdot \text{КБ}_c + a_{3c} \cdot \text{УИ}_w + a_{3w} \cdot \text{УИ}_c + a_{4c} \cdot \text{ПМ}_w + a_{4w} \cdot \text{ПМ}_c. \end{aligned}$$

Подобные уравнения в таком же порядке можно применять по всем  $\alpha$ -уровням. Минимизация уравнения нечеткой регрессии для каждого  $\alpha$ -уровня делает необходимым решение нижеуказанной задачи линейного программирования [18]:

$$(9) \quad \begin{aligned} \sum \text{УБ}_w &= 10 \cdot a_{0w} + \left( \sum_{i=1}^{10} \text{ДН}_w w_i \right) \cdot a_{1c} + \left( \sum_{i=1}^{10} \text{ДН}_c c_i \right) \cdot a_{1w} + \\ &+ \left( \sum_{i=1}^{10} \text{КБ}_w w_i \right) \cdot a_{2c} + \left( \sum_{i=1}^{10} \text{КБ}_c c_i \right) \cdot a_{2w} + \left( \sum_{i=1}^{10} \text{УИ}_w w_i \right) \cdot a_{3c} + \\ &+ \left( \sum_{i=1}^{10} \text{УИ}_c c_i \right) \cdot a_{3w} + \left( \sum_{i=1}^{10} \text{ПМ}_w w_i \right) \cdot a_{4c} + \left( \sum_{i=1}^{10} \text{ПМ}_c c_i \right) \cdot a_{4w} \longrightarrow \min, \end{aligned}$$

где условия ограничений:

$$(10) \quad \begin{aligned} & a_{0c} - a_{0w} + (\text{ДН}c_i - \text{ДН}w_i) \cdot a_{1c} - \text{ДН}c_i \cdot a_{1w} + \\ & + (\text{КБ}c_i - \text{КБ}w_i) \cdot a_{2c} - \text{КБ}c_i \cdot a_{2w} + (\text{УИ}c_i - \text{УИ}w_i) \cdot a_{3c} - \\ & - \text{УИ}c_i \cdot a_{3w} + (\text{ПМ}c_i - \text{ПМ}w_i) \cdot a_{4c} - \text{ПМ}c_i \cdot a_{4w} \leq \text{УБ}c_i - \text{УБ}w_i, \\ & i = \overline{1,10}, \end{aligned}$$

$$(11) \quad \begin{aligned} & -a_{0c} - a_{0w} - (\text{ДН}c_i + \text{ДН}w_i) \cdot a_{1c} - \text{ДН}c_i \cdot a_{1w} - \\ & - (\text{КБ}c_i + \text{КБ}w_i) \cdot a_{2c} - \text{КБ}c_i \cdot a_{2w} - (\text{УИ}c_i + \text{УИ}w_i) \cdot a_{3c} - \\ & - \text{УИ}c_i \cdot a_{3w} - (\text{ПМ}c_i + \text{ПМ}w_i) \cdot a_{4c} - \text{ПМ}c_i \cdot a_{4w} \leq -\text{УБ}c_i - \text{УБ}w_i, \\ & i = \overline{1,10}, \end{aligned}$$

$$(12) \quad a_{0w}, a_{1w}, a_{2w}, a_{3w}, a_{4w} \geq 0, i = \overline{1,10}.$$

Путем решения этой проблемы линейного программирования с целевой функцией (9) и ограничивающими условиями (10), (11), (12) получаем оценочные интервальные коэффициенты  $A_0, A_1, A_2, A_3, A_4$ , исследуемые по каждому  $\alpha$ -уровню, которые указаны в таблице 3.

## 5. Прогнозирование уровня бедности

С целью прогнозирования показателя УБ (уровень бедности) на 2010–2012 гг. используются 3 сценария, ориентированные на различные варианты развития ситуации (средний, оптимистический и пессимистический). Метод среднего сценария является одним из наиболее употребляемых среди всех методов прогнозирования на будущее и позволяет получить достоверные результаты при стабильном развитии. Метод оптимистического сценария дает верные результаты при таком развитии, когда темпы роста стремительно меняются, а метод пессимистического сценария прогнозирования – при развитии, когда темп спада ускоренно меняется:

Таблица 3. Коэффициенты по  $\alpha$  уровням, полученные в результате решения уравнения нечеткой линейной регрессии

Коэффициенты		$\alpha$ -уровни					
		0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$A_0$	$a_{0c}$	14,7031	13,5618	12,4387	11,3330	12,9319	8,7346
	$a_{0w}$	30,6594	29,7480	28,8438	27,9463	26,5266	26,1023
$A_1$	$a_{1c}$	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	$a_{1w}$	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0000
$A_2$	$a_{2c}$	26,2500	26,6258	26,9880	27,3373	25,6839	28,3984
	$a_{2w}$	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
$A_3$	$a_{3c}$	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	$a_{3w}$	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0205
$A_4$	$a_{4c}$	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	$a_{4w}$	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Средний сценарий – выводя корни из суммы квадратов темпов роста среди показателей в таблице 1, приплюсовывают их к показателям последнего 2009 года и получают показатели для прогнозирования на последующие годы.

Оптимистический сценарий – найдя наибольшую разницу темпа роста среди показателей в таблице 1, приплюсовывают ее к показателям последнего 2009 года и получают показатели для прогнозирования на последующие годы.

Пессимистический сценарий – найдя наименьшую разницу с темпом роста среди показателей в таблице 1, приплюсовывают ее к показателям последнего 2009 года и получают показатели для прогнозирования на последующие годы.



Таблица 4. Среднеквадратичные значения, рассчитанные по показателям

Вар.	Средний			Оптимистический			Пессимистический		
	2010	2011	2012	2010	2011	2012	2010	2011	2012
Годы	2010	2011	2012	2010	2011	2012	2010	2011	2012
УБ <sub>С</sub>	9,0	7,3	6,0	7,8	5,5	3,9	10,5	10,1	9,6
УБ <sub>И</sub>	0,9	0,7	0,5	0,1	0,02	0,002	2,5	5,6	2,5
ДН <sub>С</sub>	27516	33806	41534	24250	26257	28429	32201	46297	66565
ДН <sub>И</sub>	1474	1858	2342	627	337	181	2360	4765	9619
КБ <sub>С</sub>	0,98	0,96	0,95	0,8	0,7	0,6	1,1	1,2	1,3
КБ <sub>И</sub>	0,013	0,011	0,001	0,003	0,0006	0,0001	0,14	0,22	0,94
УИ <sub>С</sub>	1,5	1,44	1,41	1,2	1,1	1,0	4,6	13,9	22,3
УИ <sub>И</sub>	1,5	1,4	0,8	0,3	0,9	0,9	4,6	2,25	10,9
ПМ <sub>С</sub>	96,9	111,8	128,9	85,9	87,8	89,9	122,5	178,6	260,5
ПМ <sub>И</sub>	9,6	13,2	18,2	7,0	7,0	7,0	26,3	98,4	36,9

Затем находится прогнозное значение функции с помощью выявленных входных значений на 2010–2012 гг. в таблице 4.

Для этого, вставив входные значения в формулах (7) и (8) по каждому  $\alpha$ -уровню, производятся расчеты. Расчеты осуществляются в отдельности для каждого – среднего, оптимистического и пессимистического сценариев.

Центр и расширения, полученные по  $\alpha$ -уровням, являются центром, левым и правым отрезком основания равнобедренного треугольника [18, 21]. В результате мы получаем центральное, левое и правое значения уровня бедности, доходов населения, коэффициента безработицы, уровня инфляции, прожиточного минимума по исследуемым 2010–2012 гг., которые указаны в таблице 5.

Указанный в таблице 5 прогноз по трем сценариям отражает в себе центральное, левое и правое значения прогноза. При необходимости полученные нечеткие результаты можно указать точными числами, что называется дефаззификацией и осуществляется многочисленными методами. Одним из этих методов является формула, рассчитываемая как соотношение суммы произведения значений нечеткой функции, найденных в соответствующих  $\alpha$ -уровнях, к сумме этих же  $\alpha$ -уровней.

$$(13) \text{ УБ} = \frac{\sum_{r=1}^R \text{УБ}_r \alpha_r}{\sum_{r=1}^R \alpha_r}.$$

Так, после вычислений получают следующие результаты, преобразованные в действительные числа путем дефаззификации:

- по среднему сценарию прогнозное значение уровня бедности составит в 2010 г. – 9,0 %, в 2011 г. – 7,3 %, в 2012 г. – 6,0 %;
- по оптимистическому сценарию уровень бедности снизится с прогнозируемых на 2010 г. 7,8 % до 5,5 % в 2011 г. и до 3,9 % в 2012 г.;
- по пессимистическому сценарию прогноз уровня бедности на 2010 г. составит 10,5 %, 2011г. – 10,1 %, 2012 г. – 9,6 %.

Таблица 5. Прогноз на 2010–2012 годы

Пессимистический			Оптимистический			Средний			Вар.
2012	2011	2010	2012	2011	2010	2012	2011	2010	Годы
9,6	10,1	10,5	3,9	5,5	7,8	6,0	7,3	9,0	УБ
7,1	4,5	8,0	3,898	5,48	7,7	5,5	6,6	8,1	УБ <sub>L</sub>
12,1	15,7	13,0	3,902	5,52	7,9	6,5	8,0	9,9	УБ <sub>R</sub>
66565	46297	32201	28429	26257	24250	41534	33806	27516	ДН
56946	41622	29841	28248	25920	23623	39192	31948	26042	ДН <sub>L</sub>
76184	50972	34561	28610	26594	24827	43876	35664	28990	ДН <sub>R</sub>
1,3	1,2	1,1	0,6	0,7	0,8	0,95	0,96	0,98	КБ
0,36	0,98	0,96	0,5999	0,6994	0,797	0,949	0,949	0,967	КБ <sub>L</sub>
2,24	1,42	1,24	0,6001	0,7006	0,803	0,951	0,971	0,993	КБ <sub>R</sub>
22,3	13,9	4,6	1,0	1,1	1,2	1,41	1,44	1,5	УИ
11,4	11,65	0,0	0,1	0,2	0,9	0,61	0,04	0,0	УИ <sub>L</sub>
33,2	16,15	9,2	1,9	2,0	1,5	2,21	2,84	3,0	УИ <sub>R</sub>
260,5	178,6	122,5	89,9	87,8	85,9	128,9	111,8	96,9	ПМ
223,6	80,2	96,2	82,9	80,8	78,9	110,7	98,6	87,3	ПМ <sub>L</sub>
260,5	277	148,8	96,9	94,8	92,9	147,1	125	106,5	ПМ <sub>R</sub>

## 6. Заключение

Для прогнозирования уровня бедности целесообразнее использовать нечеткое регрессионное моделирование, так как оно обеспечивает большую точность результатов.

### Литература

1. АСАИ К., ВАТАДА Д., ИВАИ С. и др. *Прикладные нечеткие системы*. Пер. с япон. – М.: Мир, 1993
2. БОГОМОЛОВА Т.Ю., ТОПИЛИНА В.С. *Бедность в современной России: измерение и анализ* // Экономическая наука современной России. – 2005. – №1. – С. 93–106.
3. ДОМРАЧЕВ В.Г., ПОЛЕЩУК О.М. *О построении регрессионной модели при нечетких исходных данных* // Автоматика и телемеханика. – 2003. – №11. – С. 74–83.
4. ЛОКШИН М. *Использование научного метода в российских исследованиях в области бедности* // Вопросы экономики. – 2008. – №6. – С. 44–60.
5. КЛЕЙНЕР Г.Б. *К спору о методе: исследование бедности или бедность исследования* // Вопросы экономики. – 2008. – №6. – С. 61–70.
6. КЛЕЙНЕР Г.Б., СМОЛЯК С.А. *Эконометрические зависимости: принципы и методы построения*. – М.: Наука, 2000.
7. КРЫШТАНОВСКИЙ А.О. *Ограничения метода регрессионного анализа* // Социология: методология, методы, математические модели. – 2000. – №12. – С. 96–112.
8. КУЗЬМИНОВА Т.В. *Моделирование динамики безработицы* // Социология: 4 М. – 2003. – №16. – С. 100–113.
9. ОВЧАРОВА Л.Н. *Бедность и экономический рост в России* // Уровень жизни населения регионов России. – 2008. – №11–12. – С. 47–60.
10. ОРЛОВ А.И. *Организационно-экономическое моделирование: Учебник в 3 ч. Часть 1: Нечисловая статистика*. – М.: Изд-во МГТУ им. Баумана, 2009. – 541 с.
11. ОРЛОВ А.И. *Эконометрика*. – М.: «Экзамен», 2002.

12. ШЕВЯКОВ А.Ю., КИРУТА А.Я. *Измерение экономического неравенства*. – М.: «Лето», 2002.
13. ШУРЫГИН А.М. *Регрессия: выбор вида зависимости, эффективность и устойчивость оценок* // Автоматика и телемеханика. – 1996. – №6. – С. 90–101.
14. BARDOSSY A. *Note on fuzzy regression* // Fuzzy Sets and Systems. – 1990. – No.37. – P. 66–75.
15. CERIOLI A., ZANI S. *A fuzzy approach to the measurement of poverty*. In Dagum C. and Zenga M. (eds.), *Income and Wealth Distribution, Inequality and Poverty*. – Springer-Verlag, Berlin, 1990. – P. 272–284.
16. CHELI B., LEMMI A. *A totally fuzzy and relative approach to the multidimensional analysis of poverty* // Economic Notes by Monte dei Paschi di Siena. – 1995. – No.24(1). – P. 115–134.
17. DAGUM C., GAMBASSI R., LEMMI A. *New approaches to the measurement of poverty. Poverty Measurement for Economies in Transition in Eastern European Countries*. – Polish Statistical Association and Central Statistical Office, Warsaw, 1992. – P. 201–225.
18. ISHIBUCHI H. *Fuzzy regression analysis* // Japanese journal of Fuzzy Theory and Systems. – 1992. – Vol. 4, No.1. – P. 137–148.
19. MARTINETTI C.E. *A new approach to the evaluation of well-being and poverty by fuzzy set theory* // Giornale Degli Economisti e Annali di Economia. – 1994. – No.53. – P. 367–388.
20. SABIC D.A., PEDRYC W. *Evaluation on fuzzy linear regression models* // Fuzzy Sets and Systems. – 1991. – No.23. – P. 51–63.
21. SHAPIRO A. F. *Fuzzy regression models*. – ACM, Penn State University, 2005.

## FUZZY APPROACH TO POVERTY LEVEL FORECASTING

**Nigar Abdullayeva**, Institute of Cybernetics of ANAS, Baku, post-graduate student (nigyar.a@gmail.com)

*Abstract: Poverty level in Azerbaijan is studied as a function of personal income, unemployment coefficient, inflation rate, living wage and is forecasted to the next three years. So far forecasting problems of this sort were solved with the aim of classical linear regressions. In this article the fuzzy regression model was offered for poverty level forecasting.*

Keywords: poverty level, personal income, unemployment coefficient, inflation rate, living wage, fuzzy regression model.

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии А. И. Орловым*

УДК 629.7: 656.7

ББК 39.51

## **ЭКОНОМИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ РАЗВИТИЕМ АВИАТРАНСПОРТНОЙ СЕТИ В МАЛОНАСЕЛЕННЫХ РЕГИОНАХ РОССИИ**

**Горшкова И. В.<sup>1</sup>**

*(Московский физико-технический институт, Москва)*

**Клочков В. В.<sup>2</sup>**

*(Учреждение Российской академии наук  
Институт проблем управления РАН, Москва)*

*Работа посвящена специфическим проблемам развития авиатранспортной сети в регионах с низкой плотностью населения. Исследовано влияние низкой плотности населения на длительность и стоимость поездки на воздушном транспорте. Предложен комплекс организационных, технологических решений и мер государственной поддержки, нацеленных на повышение доступности авиатранспорта для населения малонаселенных регионов.*

Ключевые слова: аэродромная сеть, плотность населения, подвозящий транспорт, доступность воздушного транспорта, субсидирование авиаперевозок.

### **1. Введение**

Как известно, большая часть территории России характеризуется низкой плотностью населения. За Уралом, в Сибирском и Дальневосточном федеральных округах, занимающих 66% территории страны, проживает лишь 18% населения [8]. При этом не только в указанных регионах, но даже в Европейской части России развитие сети автомобильных и железных дорог

---

<sup>1</sup> Ирина Владимировна Горшкова, студент ([map1000@progtech.ru](mailto:map1000@progtech.ru)).

<sup>2</sup> Владислав Валерьевич Клочков, доктор экономических наук (Москва, ул. Профсоюзная, д. 65, [vlad\\_klochkov@mail.ru](mailto:vlad_klochkov@mail.ru)).

существенно слабее, чем в развитых странах мира. По данным Минтранса РФ, более 30% населенных пунктов, в которых проживает 8% населения России, не имеют круглогодичной связи с дорожной сетью страны [6]. Традиционно принято считать, что характерные для значительной части территории России большие расстояния и слабо развитая наземная инфраструктура способствуют развитию воздушного транспорта. Однако, как показывает практика и как будет обосновано в данной работе, эти экономико-географические особенности сказываются на доступности авиаперевозок как раз отрицательно, и чрезвычайно сильно. Успешное развитие авиатранспорта в условиях низкой плотности населения и слабо развитой наземной инфраструктуры требует особых решений – экономических, технических, организационных.

Описанная проблема актуальна не только для транспортной отрасли и органов власти, регулирующих региональное развитие. Как показано в работе [4], российская авиапромышленность остро нуждается в новых рыночных нишах, позволяющих достичь массового выпуска наукоемкой продукции, не вступая в непродуктивную и рискованную конкуренцию с лидерами мирового гражданского авиастроения. В то же время инновационное развитие отрасли должно решать насущные социально-экономические проблемы страны. То есть вполне возможно, что будет целесообразным создание специфической «авиации для России», точнее, для Сибири, Крайнего Севера и Дальнего Востока.

В данной работе не ставится задачи разработать методы детальной оптимизации транспортных систем конкретных регионов, методы рационального формирования маршрутных сетей и т.п. Этим проблемам посвящены работы известных отечественных и зарубежных ученых, см., например, [1]. Здесь предлагается система упрощенных экономико-математических моделей, позволяющих делать приближенные оценки по порядку величины. Предполагается получить ответы на следующие вопросы:

1. Насколько сильно малая плотность населения влияет на стоимость и длительность поездок на воздушном транспорте?



Какую роль играют та или иная схема расселения, организация местных перевозок, и т.п.?

2. Какие типы воздушных судов наиболее эффективны в малонаселенных регионах России и мира? Какие требования следует предъявлять к перспективной «авиатехнике для России»?

3. Целесообразна ли государственная поддержка развития авиатранспорта в малонаселенных регионах? В какой форме ее предпочтительнее оказывать и какой объем расходов потребуются для достижения поставленных целей?

4. Какова эффективность внедрения новых видов транспортных средств в местном сообщении? Каков потенциальный спрос на эти транспортные средства?

## **2. Упрощенные модели влияния плотности аэродромной сети на стоимость и эффективность авиаперевозок**

Как уже отмечалось ранее, значительная часть территории России и некоторых других стран характеризуется низкой плотностью населения. В этих условиях может быть нецелесообразным развитие наземного транспорта, требующего дорогостоящей наземной инфраструктуры. В таких регионах воздушный транспорт нередко становится безальтернативным. Однако и развитие традиционного воздушного транспорта в малонаселенных регионах может быть затруднено, поскольку для эксплуатации магистральных воздушных судов (далее ВС) требуется сооружение дорогостоящих аэропортов высокого класса [2]. Какова оптимальная густота аэродромной сети, как она зависит от географических и социально-экономических факторов? Для ответа на эти вопросы построим следующие упрощенные экономико-математические модели, см. [3]:

1) модель среднего времени поездки до аэропорта отправления и из аэропорта прибытия до пункта назначения на так называемом *подвозящем транспорте* [1] и среднего времени ожидания рейса;

2) модель затрат на услуги подвозящего транспорта и на аэродромную инфраструктуру в расчете на один полет ВС или на одного пассажира.

При малой плотности населения эти величины могут составлять существенную долю общей стоимости и длительности поездки, которые, в свою очередь, являются основными факторами, определяющими спрос на авиаперевозки, их социально-экономическую эффективность.

Модели строятся, исходя из следующих предпосылок. Предположим, что на рассматриваемой территории население размещено равномерно. Обозначим плотность населения  $\rho$  человек на квадратный километр. Пусть аэродромы также размещены равномерно в узлах прямоугольной сети со стороной ячейки, равной  $r$  километров, см. рис. 1.

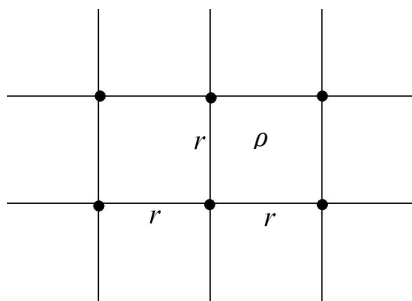


Рис. 1. Упрощенная модель структуры авиатранспортной сети и системы расселения

Предположим, что коэффициент подвижности населения известен и составляет в среднем  $\gamma$  полетов на одного человека в год. Пусть  $m$  – пассажироместимость ВС (для простоты выкладок предположим, что кресла заполняются на 100%). Тогда с каждого аэродрома совершается

$$(1) \quad \lambda = \frac{r^2 \rho \gamma}{m}$$

рейсов ВС в год, и среднее время ожидания рейса  $T_{\text{ож}}$  равно

$$(2) \quad T_{\text{ож}} = \frac{1}{2} T_{\text{мп}} = \frac{365 \cdot 24}{2\lambda} = \frac{365 \cdot 24m}{2r^2 \rho \gamma},$$

где  $m$  – вместимость одного ВС;  $T_{\text{мп}}$  – межрейсовый интервал.

При этом характерное время поездок пассажира от места жительства до аэропорта на подвозящем транспорте будет определяться следующей формулой:

$$(3) \quad T_{\text{п}} = \frac{r}{\bar{v}_{\text{п}}},$$

где  $\bar{v}_{\text{п}}$  – средняя скорость подвозящего транспорта.

Общая длительность поездки  $T$  определяется суммой характерных времен, а именно, временем поездок пассажира от места жительства до аэропорта и обратно на подвозящем транспорте  $T_{\text{п}}$ , средним временем ожидания рейса  $T_{\text{ож}}$ , продолжительностью начально-конечных операций в аэропорту  $T_{\text{НК}}$ , постоянной составляющей продолжительности полета  $T_{\text{пост}}$  и продолжительностью крейсерского полета  $T_{\text{кр}}$ . Таким образом

$$(4) \quad T = T_{\text{п}} + T_{\text{ож}} + T_{\text{НК}} + T_{\text{пост}} + T_{\text{кр}},$$

$$(5) \quad T_{\text{кр}} = \frac{L}{v_{\text{кр}}},$$

где  $L$  – средняя дальность полета;  $v_{\text{кр}}$  – крейсерская скорость полета,  $T_{\text{НК}}$  и  $T_{\text{пост}}$  – постоянные величины.

Далее построим модель затрат на услуги подвозящего транспорта и на аэродромную инфраструктуру. Суммарные затраты на содержание аэродромной сети в расчете на одного пассажира определяются следующим образом:

$$(6) \quad C_{\text{аэроп}\Sigma} = \frac{R}{m\lambda} = \frac{1+\pi}{m\lambda} \cdot TC = \frac{1+\pi}{m\lambda} (FC + \lambda \cdot C_{\text{в-п}}) = \\ = \underbrace{\frac{1+\pi}{r^2 \rho \gamma} \cdot FC}_{C_{\text{аэроп}}} + \frac{1+\pi}{m} \cdot C_{\text{в-п}},$$

где  $R$  – годовая выручка аэропорта;  $\pi$  – норма прибыли;  $TC$  – годовые издержки аэропорта;  $FC$  – постоянная составляющая издержек,  $C_{\text{в-п}}$  – затраты на взлет и посадку одного ВС. По-

скольку тарифы на услуги аэропортов обычно регулируются государством, здесь принята модель ценообразования «затраты плюс».

В свою очередь затраты пассажира на услуги подвозящего транспорта равны

$$(7) \quad C_{\text{п}} = r \cdot k,$$

где  $k$  – средний тариф на подвозящем транспорте, ден. ед. за километр.

Общая стоимость поездки включает в себя затраты на услуги подвозящего транспорта  $C_{\text{п}}$ , затраты на техническое обслуживание и ремонт (ТОиР), амортизацию ВС и т.п., сборы за взлет и посадку, затраты на авиатопливо, прочие постоянные затраты на рейс  $C_{\text{пост}}$  и затраты на содержание аэропортов в расчете на одного пассажира. Таким образом, прямые денежные затраты пассажира равны

$$(8) \quad P = C_{\text{п}} + \frac{1}{m} (C_{\text{пост}} + C_{\text{ТОиР}} + C_{\text{топ}} + (1 + \pi) \cdot C_{\text{в-п}}) + C_{\text{аэроп}},$$

$$(9) \quad C_{\text{ТОиР}} = \bar{c}_{\text{ТОиР}} (T_{\text{кр}} + T_{\text{пост}}),$$

$$(10) \quad C_{\text{топ}} = \bar{c}_{\text{топ}} (g \cdot T_{\text{кр}} + g_{\text{пост}}),$$

где  $\bar{c}_{\text{ТОиР}}$  – затраты на ТОиР, амортизацию и т.п., ден. ед. за лётный час;  $\bar{c}_{\text{топ}}$  – цена авиатоплива, ден. ед. за тонну;  $g$  – средний расход топлива в крейсерском полете, тонн за лётный час;  $g_{\text{пост}}$  – постоянные, т.е. слабо зависящие от дальности поездки, затраты топлива на рейс (на взлет, набор высоты, снижение и посадку), в тоннах на рейс.

Задача принятия решения о поездке всегда является многокритериальной. Помимо прямых денежных затрат, потенциальный пассажир учитывает еще целый ряд факторов – прежде всего, время в пути. В экономике транспорта нередко прибегают к свертке времени и стоимости поездки в один обобщающий показатель с помощью так называемой *стоимости времени пассажира* [5], отражающей упущенную выгоду последнего от пребывания в пути. Если стоимость времени пассажира обозначена  $z$ , упущенная выгода за время поездки составит  $z \cdot T$  денежных единиц. В то же время сумма прямых денежных затрат

120

составит  $P$  денежных единиц. Таким образом, суммарные затраты и потери пассажира, связанные с данной поездкой, выражаются следующей формулой:

$$(11) C_{\Sigma} = P + z \cdot T = \tilde{P} + C_{\Pi} + C_{\text{аэроп}} + z(\tilde{T} + T_{\text{ож}} + T_{\Pi}) = \\ = \tilde{C} + r \cdot k + \frac{1 + \pi}{r^2 \rho \gamma} \cdot FC + z \left( \frac{365 \cdot 24m}{2r^2 \rho \gamma} + \frac{r}{\bar{v}_{\Pi}} \right),$$

$$(12) \tilde{C} = \tilde{P} + z \cdot \tilde{T} + \frac{1 + \pi}{m} \cdot C_{\text{в-п}},$$

где составляющая  $\tilde{C}$  не зависит от переменной  $r$ , т.е. от плотности аэродромной сети.

Разумеется, в сфере моделирования стоимости и эффективности перевозок известны более корректные подходы, чем используемая здесь концепция стоимости времени пассажира – см., например, [5]. Однако простейшие модели, предлагаемые здесь, по нашему мнению, достаточно адекватно отражают качественную суть проблемы.

Минимизируя суммарные затраты и потери пассажира по переменной  $r$ , получаем, что оптимальное расстояние между аэродромами  $r^*$  зависит от плотности населения и его подвижности следующим образом:

$$(13) r^* \sim (\rho \gamma)^{-1/3}.$$

Следовательно, после оптимизации плотности аэродромной сети сами суммарные затраты и потери пассажира зависят от этих параметров следующим образом:

$$(14) C^* \sim (\rho \gamma)^{-1/3}.$$

При помощи построенных моделей были проведены расчеты длительности поездки и денежных затрат пассажира при полете на среднемагистральном самолете Ту-204 с учетом изменения показателя плотности населения и коэффициента авиационной подвижности в широком диапазоне значений. Исходные данные представлены в таблице 1, а результаты приведены на рис. 2, 3 в графическом виде. На графиках приведены именно те составляющие длительности и стоимости авиaperевозок, которые непосредственно зависят от параметров авиатранспортной сети.

Таблица 1. Исходные данные для расчета длительности и стоимости поездки

Тип летательного аппарата	<b>Ту-204</b>
Пассажировместимость	180
Максимальная дальность полета, км	6500
Крейсерская скорость полета, км/ч	830
Средний расход топлива в крейсерском полете, т/л.ч.	2,7
Постоянные затраты топлива на рейс, т	3
Постоянная составляющая продолжительности полета, ч.	0,8
Продолжительность начально-конечных операций, ч.	2
Затраты на ТОиР, амортизацию и т.п., руб./л.ч.	27000
Постоянные затраты на рейс, руб.	15000
Сборы за взлет и посадку, руб.	3000
Постоянные затраты на 1 аэропорт, млн. руб./г	1000
Средняя дальность полета, км	3000
Цена авиатоплива, руб./г	30000
Средний тариф на подвозящем транспорте, руб./км	10
Средняя скорость подвозящего транспорта, км/ч	50
Стоимость часа времени пассажира, руб./ч	300
Плотность населения, чел./кв. км.	10
Подвижность населения, полетов/г	0,25

Приближенные численные оценки показывают, что очень низкая плотность населения существенно увеличивает общую стоимость и длительность поездки. Согласно полученным зависимостям, составляющие затрат и потерь пассажира, связанные с авиатранспортной инфраструктурой, в Восточной Сибири и на Дальнем Востоке будут примерно в 20 раз выше, чем в центральном регионе России, а оптимальное расстояние между аэродромами – в 20 раз больше. При том что приросты денежных и временных затрат сильно меняются при изменении произведения подвижности и плотности населения, см. рис. 1, 2, они слабо зависят от изменения других – весьма неопределенных – параметров модели (таких как стоимость времени пассажира и др.). Это повышает достоверность качественных выво-

дов и численных оценок, сделанных в условиях неопределенности ряда исходных данных, приведенных в таблице 1.

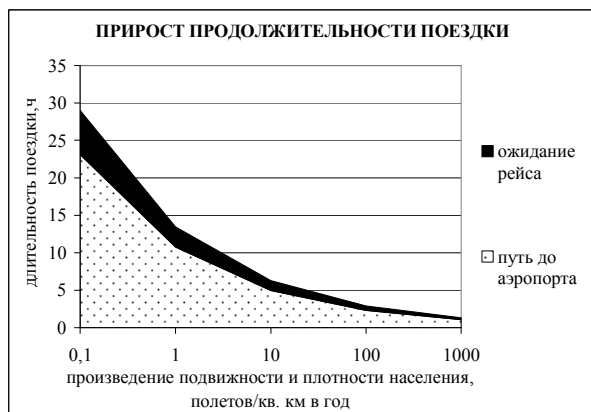


Рис. 2. Зависимость прироста длительности поездки от коэффициента подвижности и плотности населения



Рис. 3. Зависимость прироста суммарных денежных затрат пассажира от коэффициента подвижности и плотности населения

В предлагаемых моделях предполагалось равномерное распределение населения по территории региона. На практике такой принцип расселения приближенно соответствует раз-

что хуторскому хозяйству, характерному для некоторых регионов мира – например, для Прибалтики, Скандинавии, ряда штатов США и Канады. Причем для этих регионов, в отличие от рассматриваемых в данной работе, как раз характерны хорошее развитие дорожной сети и сравнительно высокий уровень доходов населения. В большинстве малонаселенных регионов российского Севера и Дальнего Востока, а также в аналогичных регионах за рубежом, в силу объективных причин (необходимость устойчивого и экономичного жизнеобеспечения в экстремальных климатических условиях, занятость на крупных предприятиях добывающих отраслей, и т.п.) наблюдается иной принцип расселения. Население проживает компактно в поселках, насчитывающих несколько сотен или тысяч жителей. Остаются ли в силе качественные выводы, получаемые из вышеприведенных моделей, с учетом реальной картины расселения? Точечное, а не дисперсное расположение населения практически не оказывает влияния на результаты моделирования, если оптимальное расстояние между магистральными аэропортами, определяемое с помощью этих моделей, существенно превышает среднее расстояние между поселками. В реальности во многих регионах с низкими значениями средней плотности населения населенные пункты тяготеют к региональным центрам, рекам, побережьям и т.п., образуя сравнительно компактные кластеры, в которых расположены в том числе и магистральные аэропорты. При этом большая часть территории региона остается практически безлюдной. Поэтому полученные оценки можно считать пессимистическими.

### **3. Совместная оптимизация аэродромной сети и параметров воздушных судов для малонаселенных регионов**

Для того чтобы снизить длительность и стоимость поездки и повысить доступность авиаперевозок, в условиях низкой плотности населения могут быть целесообразными следующие организационно-технические решения:

- использование на регулярных местных воздушных линиях



летательных аппаратов (ЛА) различных типов, в том числе малой пассажировместимости, возможно – относительно тихих (например, с турбовинтовыми двигателями), но обладающих улучшенными *взлетно-посадочными характеристиками* (ВПХ) и потому менее требовательными к качеству аэродромной инфраструктуры;

- развитие персонального авиатранспорта на основе ЛА с улучшенными ВПХ или безаэродромного базирования.

При этом, наряду с полученными выше зависимостями, необходимо учитывать следующие факторы:

- улучшение ВПХ может быть сопряжено с ухудшением характеристик ЛА в крейсерском полете: часового расхода топлива, крейсерской скорости и др.;

- по топливной экономичности (в расчете на одного пассажира) ВС малой пассажировместимости, и, тем более, персональные ЛА могут существенно уступать магистральным самолетам средней пассажировместимости.

Обоснованный выбор можно сделать, поставив задачу совместной оптимизации параметров ЛА (ВПХ, пассажировместимости, дальности, крейсерской скорости) и аэродромной сети в малонаселенных местностях.

Помимо сравнения различных типов магистральных и региональных ВС, с помощью предлагаемого методического аппарата можно прогнозировать эффективность внедрения альтернативных видов подвозящего транспорта (и вообще, транспорта местного сообщения). Так как оптимальные расстояния между магистральными аэропортами в малонаселенных регионах довольно велики и требуются значительные затраты денежных средств и времени на их преодоление, характеристики подвозящего транспорта оказывают решающее влияние на эффективность транспортной системы региона в целом.

Во многих рассматриваемых регионах, несмотря на сложность и дороговизну строительства наземной дорожной инфраструктуры, существуют обширные возможности организации движения по акваториям различных водоемов – рек, озер, прибрежным участкам морей и т.п. В этих условиях значителен потенциал развития водного транспорта, в том числе и в мест-

ном сообщении. Существенно повысить скорость местных перевозок при обеспечении сравнительно низких затрат можно, как ожидается, при внедрении таких видов летательных аппаратов<sup>1</sup>, как *экранопланы* и *экранолеты* (последние способны также совершать полет на большей высоте, без влияния экрана, что обеспечивает возможность их круглогодичного применения, а также использования вне акваторий водоемов). В их разработке и производстве отечественная промышленность имела существенные конкурентные преимущества. Фактически, нашей стране принадлежит приоритет в создании большинства классов этих аппаратов, в том числе наиболее крупных реально летавших экранопланов в мире – КМ («корабль-макет»). Проект КМ был разработан нижегородским СКБ по СПК под руководством Р.А. Алексеева и имел взлетную массу свыше 550 т, что сравнимо с взлетной массой наиболее тяжелого самолета в мире – Ан-225 «Мрія», созданного существенно позже. Причем показатели массы и грузоподъемности, достигнутые в проекте КМ, не являются максимально достижимыми для данного вида изделий даже при нынешнем уровне развития технологий. На ряде направлений экранопланы могут использоваться и в качестве магистрального вида транспорта, однако здесь рассматривается лишь их применение на местных маршрутах, причем, лишь в качестве подвозящего транспорта. С технико-экономической точки зрения, внедрение экранопланов позволит, как ожидается, снизить себестоимость перевозок по сравнению с традиционными самолетами для *местных воздушных линий* (МВЛ) в несколько раз. При этом, в отличие от автомобильного транспорта, экранопланам практически не требуется дорогостоящая наземная инфраструктура, и, соответственно, уровень постоянных затрат будет невелик.

---

<sup>1</sup> *Строго говоря, до сих пор нет единого мнения по вопросу отнесения экранопланов к летательным аппаратам или к судам. Эта неопределенность создает, в том числе, и практические трудности – в сфере регистрации таких транспортных средств, их сертификации, лицензирования эксплуатации и т.п. Однако в данной работе экранопланы и экранолеты однозначно рассматриваются как перспективная ниша рынка продукции гражданского авиастроения.*

Предлагаемый в данной работе инструментарий можно использовать для прогнозирования эффективности использования экранопланов и потенциального спроса на них. В качестве критерия экономической эффективности внедрения экранопланов вместо традиционных видов подвозящего транспорта предлагается принять разность суммарных затрат пассажира на поездку при использовании традиционных видов подвозящего транспорта и при использовании экранопланов. Важно подчеркнуть, что эти суммарные затраты рассматриваются после оптимизации расстояния между магистральными аэропортами, а возможность повышения скорости перевозок на подвозящем транспорте при сравнительно небольших затратах изменит (см. формулу (11)) оптимальное значение в сторону увеличения, при сохранении приемлемой длительности поездки на подвозящем транспорте. При этом увеличивается площадь территории, обслуживаемой одним магистральным аэропортом, и, как следствие, сокращаются постоянные затраты на содержание аэропортовой сети, приходящиеся на одного жителя, сокращаются средние интервалы между рейсами магистральных ВС. Был рассмотрен следующий пример, основанный на приведенных в таблице данных для расчета длительности поездки и денежных затрат пассажира при полете на среднемагистральном самолете Ту-204. Только, в отличие от упомянутого примера, в качестве подвозящего транспорта рассматриваются экранопланы модели «Иволга» ЭК-12, обеспечивающие среднюю скорость 180 км/ч и стоимость пассажира-километра на уровне 2 руб. (рассчитано на основе данных производителя [7]). Такие показатели многократно лучше показателей дорожного транспорта, соответственно и результаты при прочих равных условиях в несколько раз лучше. Численные оценки показывают, что при использовании в качестве подвозящего транспорта экраноплана с такими характеристиками прирост длительности поездки, обусловленный малой плотностью аэродромной сети, сокращается приблизительно в 2 раза, а прирост денежных затрат – в 3 раза.

#### **4. Анализ целесообразности и потребного объема государственной поддержки развития авиатранспортной сети в малонаселенных регионах**

Полученные в п. 2 оценки дополнительных затрат времени и средств, связанных с малой плотностью населения, относятся к свободному, нерегулируемому рынку авиаперевозок. На таком рынке услуги воздушного транспорта неизбежно оказываются для жителей регионов с малой плотностью и подвижностью населения дорогими и малоэффективными по причине большой суммарной длительности и стоимости поездки. Это подтверждается фактически имеющей место деградацией авиатранспортных систем в малонаселенных регионах России, разрушением системы местных воздушных линий при переходе к рыночной экономике.

Многие субъекты Российской Федерации практически полностью лишились как сети местных авиалиний, так и аэродромов местных воздушных линий. С 1992 года резко сократилось количество аэродромов на территории России (с 1302 до 330). Без участия местных властей и бюджетов в процессе управления местными социальными авиаперевозками и аэродромной сетью местных воздушных линий не представляется возможным их развитие и даже поддержание в рабочем состоянии [6].

Таким образом, необходимо активное управление развитием транспортной сети в таких регионах, государственное вмешательство – прежде всего, в форме субсидирования воздушного транспорта. Разумеется, оказанию государственной помощи должна предшествовать оптимизация технико-экономических параметров авиатранспортной системы, исключение заведомо нерациональных решений. Прежде всего, как показано выше, в регионах с низкими значениями плотности и подвижности населения неэффективно использование ВС большой пассажироместимости. В дальнейших расчетах, в отличие от данных таблицы 1, предполагается использование ВС пассажироместимостью 50 мест, причем не на МВЛ, а на региональных и среднемагистральных маршрутах.

С помощью предложенных моделей проведен сравнительный анализ двух форм государственной поддержки:

- субсидирования строительства и содержания аэродромной сети;
- непосредственного субсидирования полетов жителей в малонаселенных регионах.

В первом случае субсидирования прямые затраты пассажира уменьшаются за счет сокращения постоянных затрат на содержание аэропорта:

$$(14) \quad C_{\text{аэроп}}^{\text{дот}} = C_{\text{аэроп}} \cdot (1 - 100 \cdot q),$$

где  $q$  – процент расходов на строительство и содержание аэродромной сети, финансируемый за счет государственных дотаций.

Во втором же случае, при субсидировании полета, повышается показатель подвижности населения:

$$(15) \quad \gamma^{\text{дот}} = \frac{\gamma}{1 - 100 \cdot p},$$

где  $p$  – процент расходов пассажира на полет, финансируемый за счет государственных дотаций.

Теперь для каждого варианта субсидирования можно построить зависимость приростов денежных и временных затрат пассажира от уровня дотаций. Субсидирование строительства и содержания аэродромов способствует повышению плотности аэродромной сети, но охват территории и населения одним аэропортом при этом сокращается, что при неизменной подвижности населения приводит к увеличению межрейсовых интервалов и времени ожидания поездки, см. рис. 4.

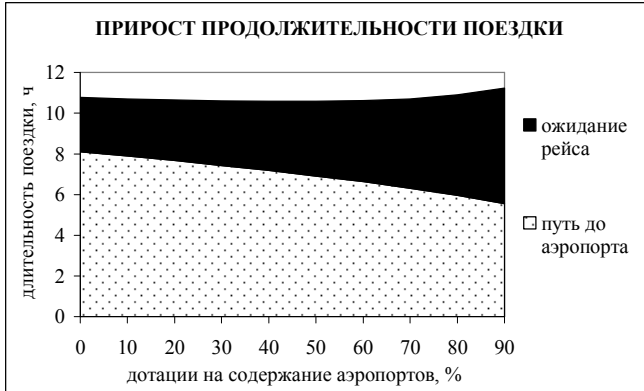


Рис. 4. Зависимость длительности поездки от величины дотаций на содержание аэродромной сети

Непосредственное субсидирование авиаперевозок свободно от этого недостатка, см. рис. 5.

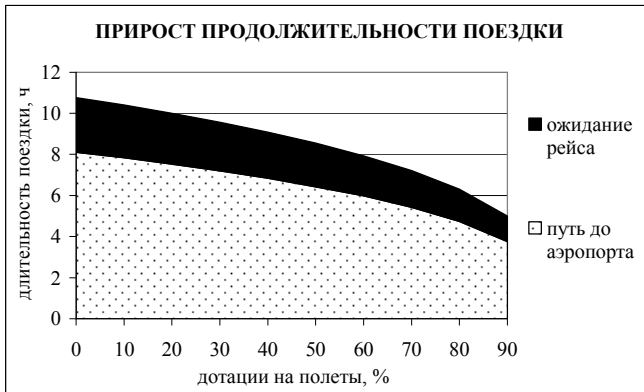


Рис. 5. Зависимость длительности поездки от величины дотаций на полеты

Также можно оценить потребные затраты бюджетных средств на доведение показателей качества транспортного обслуживания (прежде всего, суммарного времени в пути) до уровня, сравнимого с показателями, достижимыми в густонасе-

ленных регионах. Для этого необходимо рассчитать зависимость требуемого уровня дотаций от плотности населения, см. рис. 6. Агрегирование полученных оценок по регионам России позволяет приблизительно оценить объем государственных дотаций, необходимый для обеспечения социально приемлемых качества и доступности авиаперевозок в отдаленных и малонаселенных регионах страны.

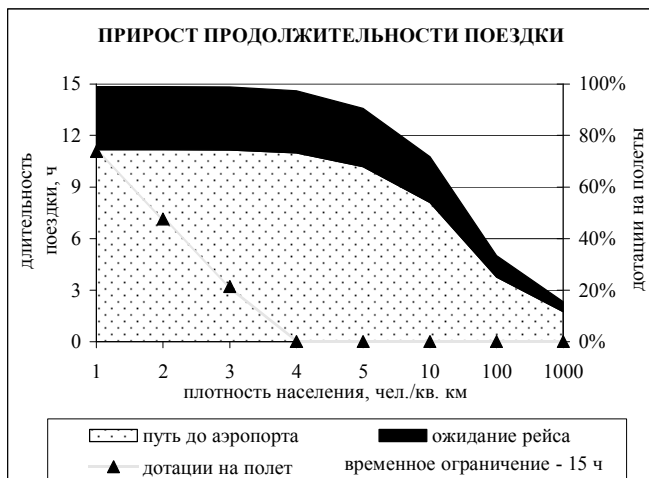


Рис. 6. Структура длительности поездки и зависимость величины дотаций на полеты от показателя плотности населения при временном ограничении

Следует подчеркнуть, что в предлагаемых упрощенных моделях такие важнейшие параметры, как плотность и подвижность населения, считаются экзогенными, хотя в реальности они тесно связаны с обсуждаемыми здесь показателями эффективности и доступности транспортных услуг. По мере улучшения этих показателей, вероятнее всего, можно ожидать повышения подвижности населения даже при нынешнем уровне доходов и хозяйственной активности. В более долгосрочной перспективе можно ожидать следующих позитивных изменений:

1) Обеспеченность современными транспортными услугами, как важная составляющая качества жизни, может способствовать притоку населения в малонаселенные ныне регионы (при условии их пригодности для проживания по другим критериям – климатическим, экологическим, экономическим и др.). Такое развитие событий весьма желательно с точки зрения устранения дисбалансов социально-экономического развития регионов России, обеспечения ее территориальной целостности и национальной безопасности.

2) Улучшение транспортного обслуживания позитивно скажется на экономической активности населения, уровне его доходов, а также приведет к дальнейшему повышению подвижности.

Прогнозирование долгосрочных перспектив развития транспортных систем малонаселенных в настоящее время регионов с учетом указанных эффектов требует дальнейшего развития моделей и подходов, представленных в данной работе.

## **5. Заключение**

На основании анализа предложенной системы экономико-математических моделей можно сделать следующие выводы.

1. В регионах с низкой плотностью населения оптимальная плотность аэродромной сети также является низкой. В результате возрастают до неприемлемо высокого уровня время и стоимость проезда на подвозящем транспорте до и от аэропорта, время ожидания рейса и затраты на содержание аэродромной инфраструктуры, приходящиеся на одного жителя.

2. Для малонаселенных регионов России целесообразно разрабатывать специализированные воздушные суда малой вместимости с улучшенными взлетно-посадочными характеристиками.

3. Использование в малонаселенных регионах новых видов подвозящего транспорта, в том числе экранопланов, по предварительным расчетам позволяет существенно повысить эффективность авиатранспортной системы в целом.

4. В регионах с крайне низкой плотностью населения необ-



ходима государственная поддержка развития воздушного транспорта. Наиболее эффективно непосредственное субсидирование полетов, а не выделение дотаций на содержание аэродромной сети.

### Литература

1. АКСЕНОВ И.Я. *Единая транспортная система*. – М.: Высшая школа, 1991. – 383 с.
2. АШФОРД Н., РАЙТ П.Х. *Проектирование аэропортов*. – М.: Транспорт, 1988.
3. ГОРШКОВА И.В., КЛОЧКОВ В.В. *Упрощенные модели влияния географических и социально-экономических факторов на доступность воздушного транспорта* // Труды 51-ой научной конференции МФТИ «Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук». – 2008. – Т. 6. – С. 116–119.
4. КЛОЧКОВ В.В. *Управление инновационным развитием гражданского авиастроения*. – М.: ГОУ ВПО МГУЛ, 2009. – 280 с.
5. ПОЗАМАНТИР Э.И. *Модели спроса на перевозки* // Экономико-математический энциклопедический словарь. – М.: Большая Российская Энциклопедия, 2003. – С. 506–508.
6. *Федеральная целевая программа «Развитие транспортной системы России (2010–2015 гг.)»* – Режим доступа: <http://www.mintrans.ru/> (дата обращения: 12.03.2010).
7. *Экраноплан «Иволга» ЭК-12*. – URL: <http://ipfg.ru/produkciya> (дата обращения 20.03.2010).
8. *Энциклопедия «Лучшие люди России»*. – 2001–2005. – URL: [http://www.llr.ru/razdel4.php?id\\_r3=67&id\\_r4=2221&simb=%C4](http://www.llr.ru/razdel4.php?id_r3=67&id_r4=2221&simb=%C4) (дата обращения 11.01.2010).

## ECONOMIC PROBLEMS OF AIR TRANSPORTATION NETWORK DEVELOPMENT IN UNDER-POPULATED RUSSIAN REGIONS

**Irina Gorshkova**, Moscow Institute of Physics and Technology, Moscow, student (map1000@progtech.ru).

**Vladislav Klochkov**, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Doctor of Science (Moscow, Profsoyuznaya st., 65, vlad\_klochkov@mail.ru).

*Abstract: The paper is devoted to specific problems of air transportation network development in regions with low density of population. The influence of low population density on the duration and the cost of air transportation is studied. A complex of organizational, technological decisions and government support decisions aimed at raise of air transportation affordability for under-populated regions' population is suggested.*

Keywords: airfield network, density of population, local transfer transport, air transport affordability, air transportation subsidizing.

*Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии Р. М. Нижегородцевым*

УДК 519.876.5

ББК 65в6

## **ДИНАМИЧЕСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ИННОВАЦИОННОГО ПРЕДПРИЯТИЯ В УСЛОВИЯХ ВЕНЧУРНОГО ФИНАНСИРОВАНИЯ**

**Гришин А. В.<sup>1</sup>**

*(Казанский Государственный технический университет  
им. А.Н. Туполева, Казань)*

*Строится дискретная математическая модель финансовых и материальных потоков предприятия на стадии производства и реализации инновационной продукции, учитывающая различные варианты финансирования – как по схеме лизинга, так и по схеме банковского кредита. Предлагаемая модель позволяет достаточно подробно учитывать процессы функционирования инновационного предприятия, включая материальные, финансовые и информационные потоки (даты завоза сырья и материалов, даты кредитных и лизинговых платежей, выплаты налогов и т. д.), и, по сравнению с имеющимися аналогичными моделями, дает возможность оценки влияния большого набора факторов на финансовый результат предприятия при различных вариантах венчурного финансирования.*

Ключевые слова: динамическая модель, математическое моделирование, инновационное предприятие, лизинг, кредитование, банкротство, венчурное финансирование.

### **Введение**

В последнее время в нашей стране, так же как и во всем мире, все большее внимание уделяется проблеме инновационного развития экономики. Государство начинает поворачиваться

---

<sup>1</sup> Андрей Владимирович Гришин, аспирант (тел.(903) 313-83-20, [grik40@mail.ru](mailto:grik40@mail.ru)).

лицом к ученым, инженерам, разрабатывающим новые технологии, новые виды продукции, и к предпринимателям, пытающимся коммерциализировать эти идеи и организовывать выпуск новой продукции. В связи с этим все больше открывается так называемых инновационных предприятий, т. е. малых предприятий, начинающих производить какую-либо новую продукцию. Однако инновационные предприятия сталкиваются с проблемой первоначального финансирования ввиду высокой степени риска данного вида бизнеса.

В данной работе рассматривается моделирование предприятия, открытого для производства инновационной продукции в соответствии с конкретным инновационным проектом [3, 4]. Производство на предприятии основано на инновациях, и результатом деятельности предприятия является выпуск и реализация нового вида товара.

Развитие инновационного проекта обычно требует серьезных первоначальных вложений. Для решения этой проблемы используются венчурные инвестиции, а также заемные средства, банковские кредиты и пр. Инвесторы идут на финансирование инновационного проекта, несмотря на высокие риски, предполагая в дальнейшем получение достаточно высоких доходов. Однако банки для снижения рисков устанавливают высокие процентные ставки либо требуют дополнительные гарантии, такие как поручительство, залог и т.п.

В данной работе в качестве альтернативного варианта финансирования инновационного проекта также рассматривается финансовая аренда или лизинг [1]. Лизинг, как аренда с правом выкупа, позволяет предприятию воспользоваться заемными средствами для приобретения объектов недвижимости, оборудования и автотранспорта. Лизинговая компания покупает для предприятия объект лизинга и передает его предприятию, за что получает лизинговые платежи.

В связи с тем, что лизинг позволяет получить лишь определенное оборудование, недвижимость и транспорт, предприниматель всё равно вынужден использовать кредит для пополнения своих оборотных средств. Для оценки влияния внешних факторов и внутренних параметров на процесс выполнения и

общую эффективность инновационного проекта, а также для выбора наиболее эффективного варианта финансирования проекта, необходимо моделировать процессы функционирования инновационного предприятия во взаимодействии с лизинговыми и кредитными организациями.

Сегодня на российском рынке существует около десятка как отечественных, так и зарубежных компьютерных программ для расчета и сравнительного анализа инвестиционных и инновационных проектов: *Project Expert*, Аналитик, Альт-Инвест, *COMFAR* и др. Но все они обладают определенными недостатками, не позволяющими произвести оценку влияния большого числа внешних факторов и внутренних параметров на финансовый результат инновационного проекта при минимальной длительности интервалов планирования. Так, например, минимальный шаг расчета в *Project Expert*, Аналитик и *COMFAR* составляет 1 месяц, в течение которого может произойти множество событий, влекущих различные риски; модель налоговой системы, заложенная в *COMFAR*, не соответствует российскому законодательству; в *Project Expert* и Альт-Инвест отсутствуют материальные потоки.

Предлагаемая математическая модель может лечь в основу разработки новых систем, лишенных этих недостатков.

### **1. Математическая модель динамики инновационного предприятия**

В работе [2] автором предложена структурная модель функционирования предприятия и его взаимодействия с лизинговой и кредитной организациями в нотации *IDEFO* (см. рис. 1). Здесь блоки соответствуют выполняемым процессам, а стрелки, соответственно, входам, выходам, механизмам и управлению. Чтобы не загромождать рисунок, обозначения стрелок не приводятся. Описание наиболее значимых из них приведено ниже в математической модели.

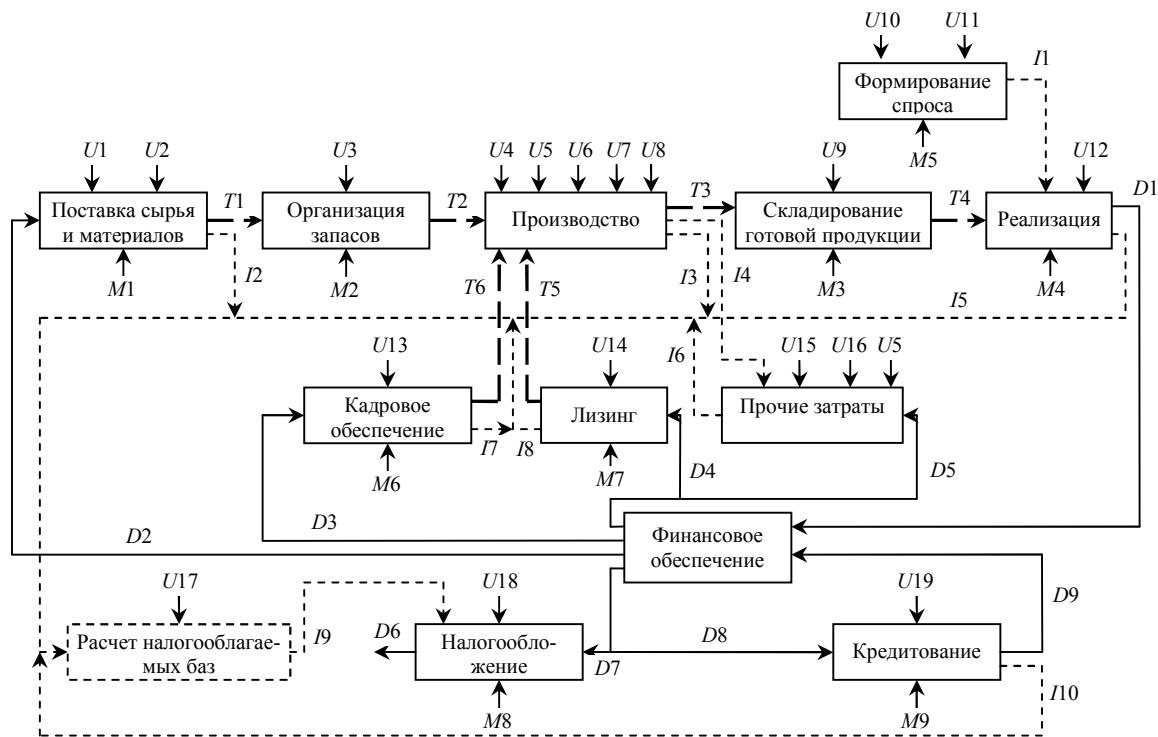


Рис. 1. Модель предприятия в нотации IDEF0

В данной статье на основе этой структурной модели строится дискретная динамическая математическая модель функционирования инновационного предприятия. Кратко функционирование предприятия описывается следующим образом:

- в зависимости от величины спроса на продукцию и объема продукции на складе реализуется готовая продукция, от которой денежные средства поступают на расчетный счет предприятия;
- на склад готовая продукция поступает из производства, где в зависимости от мощности производства и программы выпуска продукции производится определенный объем продукции;
- для производства продукции требуются сырье и материалы, которые поступают со склада в объемах, необходимых для производства заданного объема продукции;
- сырье и материалы на склад поставляются поставщиками, оплата которым производится с расчетного счета;
- в процессе производства и реализации продукции у предприятия возникают различные дополнительные расходы (заработная плата, кредитные и лизинговые платежи, налоговые платежи, прочие расходы и т.п.), которые оплачиваются с расчетного счета предприятия.

При построении математической модели приняты следующие допущения:

1. Строится дискретная модель с постоянным периодом дискретности по времени, в качестве которого могут быть приняты, например, сутки, неделя, месяц, квартал, год и т.д.
2. Задержки при переводе денежных средств между получателем и отправителем отсутствуют, т.е. безналичный расчет происходит моментально.
3. Время, необходимое на получение кредита в банке или кредитном учреждении и на получение оборудования по схеме лизинга не учитывается.
4. В качестве метода организации запасов предприятия принимается следующий: при достижении определенного минимума отдельным видом запаса происходит его закупка в определенном объеме денежных средств.

5. Спрос и цена инновационной продукции считаются заданными функциями времени.

6. Учитываются три вида налогов: налог на прибыль, налог на имущество и единый социальный налог. При этом принимаются следующие методики расчета налогооблагаемых баз для этих видов налога:

– для налога на прибыль налогооблагаемой базой служат доходы за вычетом расходов за налогооблагаемый период;

– для налога на имущество – среднее значение остаточной стоимости основных средств за последние два периода дискретности;

– для единого социального налога – фонд оплаты труда за налогооблагаемый период.

В случае образования отрицательной налогооблагаемой базы к моменту оплаты налога принимается, что налоговые органы возмещают предприятию соответствующую рассчитанную величину налога.

7. Предполагается небольшой цикл производства, поэтому сумма налога на добавленную стоимость (НДС) и сумма налоговых вычетов по НДС рассчитываются в рамках одного налогового периода, по этой причине все потоки в модели строятся без учета налога на добавленную стоимость.

8. Другие виды налогов не учитываются по причинам своей незначительности либо в связи с косвенным присутствием в других моделируемых потоках (например, налог на доходы физических лиц, уплачиваемый с заработной платы содержится в фонде оплаты труда).

9. Применяется линейный метод начисления амортизации.

10. Налоговые льготы и санкции не учитываются в денежных потоках по причине своей незначительности.

В целом математическая модель представляет собой рекуррентные соотношения, позволяющие по заданным начальному состоянию и управляющим и возмущающим воздействиям определять состояние предприятия в любой последующий момент времени. Для вычисления некоторых величин разработаны алгоритмы, выполняемые в ходе моделирования деятель-



ности предприятия. Это алгоритмы функционирования процесса организации запасов  $\Phi^z$ , вычисления потребности процесса производства в сырье  $\Phi$ , вычисления единого социального налога  $\Phi^{\text{сн}}$ , налога на имущество  $\Phi^{\text{им}}$  и налога на прибыль  $\Phi^{\text{нп}}$ . В данной статье для краткости изложения эти алгоритмы подробно не приводятся. Результатом выполнения этих алгоритмов на каждом шаге моделирования являются кортежи соответствующих величин.

Экономико-математическая модель функционирования предприятия имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
 (P_{j_i}, \text{ind}_{j_i}) &= \Phi^z(j, \alpha_{j_i}, P_{j_i}^n, z_{j_i}^{\min}, z_{j_{i-1}}, \text{ind}_{j_{i-1}}); \\
 P_{j_i}^{\text{ввых}} &= \sum_{m=1}^{i-1} k P_{j_m}^c / P_{j_m}^c, k = \begin{cases} 1, \text{если } \_m + \alpha_{j_m} = i, \\ 0, \text{если } \_m + \alpha_{j_m} \neq i; \end{cases} \\
 x_{j_i} &= \Phi(\bar{j}, x_{p_i}, v_i, \bar{x}_j^k, \overline{P_{j_i}^{\text{ввых}}}, z_{j_{i-1}}, G_{i-1}, G_i^{\max}), \\
 x_{\text{ввых}_i} &= \sum_{m=1}^{i-1} k x_{1_m}^k / x_{1_m}^k, k = \begin{cases} 1, \text{если } \_m + c_m = i, \\ 0, \text{если } \_m + c_m \neq i; \end{cases} \\
 z_{j_i} &= z_{j_{i-1}} + P_{j_i}^{\text{ввых}} - x_{j_i}; \\
 S_{\text{вх}_i} &= \min(S_{s_i}, G_{i-1} + x_{\text{ввых}_i}); \\
 S_{\text{ввых}_i} &= \sum_{m=1}^{i-1} k S_{\text{вх}_m} S_{c_m}, k = \begin{cases} 1, \text{если } \_m + \beta_m = i, \\ 0, \text{если } \_m + \beta_m \neq i; \end{cases} \\
 G_i &= G_{i-1} + x_{\text{ввых}_i} - S_{\text{вх}_i}; \\
 D_{\text{пр}_i} &= D_{\text{пер}_i}^k x_{\text{ввых}_i} + D_{\text{пт}_i}^k x_{p_i}; \\
 C_i &= C_{i-1} - D_{\text{ам}_{i-1}}^k * C_{i-1}; \\
 (B_{\text{сч}_i}, Z_i) &= \Phi^{\text{сч}}(Z_{\text{вх}_i}, Z_{i-1}, p^{\text{сч}}); \\
 (H_i^{\text{нм}}, H_i^{\text{нп}}) &= \Phi^{\text{нм}}(H_{i-1}^{\text{нп}}, C_{i-1}, C_i, N_i^{\text{нм}}, p^{\text{нм}}, r); \\
 (B_{\text{нп}_i}, D_i, R_i) &= \Phi^{\text{нп}}(S_{\text{ввых}_i}, K_{\text{вх}_i}^{\text{нп}}, Z_{\text{вх}_i}, L_{\text{вх}_i}, D_{\text{пр}_i}, \overline{P_{j_i}}, \overline{j}, \\
 D_{i-1}, R_{i-1}, D_{\text{ам}_{i-1}}^k, C_{i-1}, p^{\text{нп}});
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H_{\text{вх}_i} &= N_i^{\text{есн}} B_{\text{есн}_i} + H_i^{\text{им}} + N_i^{\text{нп}} B_{\text{нп}_i}; \\
 F_i &= F_{i-1} + S_{\text{вых}_i} + K_{\text{вых}_i} - K_{\text{вх}_i}^{\text{пц}} - K_{\text{вх}_i}^{\text{тело}} - H_{\text{вх}_i} - Z_{\text{вх}_i} - \\
 &- L_{\text{вх}_i} - D_{\text{пр}_i} - \sum_{j=1}^m P_j.
 \end{aligned}$$

В представленной модели используются следующие величины:

$i$  – номер шага дискретности;

$j$  – номер вида сырья;

$P_j^c$  – цена  $j$ -го вида сырья, руб.;

$\alpha_j$  – задержка поставки  $j$ -го вида сырья, кол-во шагов дискретности;

$z_j^{\min}$  – минимальный уровень  $j$ -го вида сырья на конец периода, при достижении которого происходит закупка  $j$ -го вида сырья, ед.;

$P_j^n$  – норма объема денежных средств, направляемых на закупку  $j$ -го вида сырья, руб.;

$x_j^k$  – количество  $j$ -го вида сырья, требуемого для изготовления единицы готовой продукции, ед.;

$x_p$  – мощность производства готовой продукции, ед. за шаг дискретности;

$c$  – цикл производства, кол-во шагов дискретности;

$v$  – программа выпуска, ед.;

$D_{\text{ам}}^k$  – нормы амортизации;

$G^{\text{max}}$  – вместимость склада готовой продукции, ед.;

$S_c$  – цена реализации за ед. готовой продукции, руб.;

$\beta$  – задержка покупателей в оплате за готовую продукцию, кол-во шагов дискретности;

$D_{\text{пт}}^k$  – норма постоянных затрат на единицу мощности, руб.;

$D_{\text{пер}}^k$  – норма переменных затрат на единицу готовой продукции, руб.;

$N^{\text{есн}}$  – величина налоговой ставки по ЕСН, %;

$N^{\text{им}}$  – величина налоговой ставки по налогу на имущество, %;

$N^{\text{нп}}$  – величина налоговой ставки по налогу на прибыль, %;

$B_{\text{есн}}$  – величина налогооблагаемой базы по ЕСН, руб.;

- $B_{\text{нп}}$  – величина налогооблагаемой базы по налогу на прибыль, руб.;
- $p^{\text{есн}}$  – периодичность оплаты ЕСН, кол-во шагов дискретности;
- $p^{\text{им}}$  – периодичность оплаты налога на имущество, кол-во шагов дискретности;
- $p^{\text{нп}}$  – периодичность оплаты налога на прибыль, кол-во шагов дискретности;
- $C$  – объем собственных основных средств, руб.;
- $P_j^{\text{вых}}$  – объем  $j$ -го вида сырья, поставляемого поставщиком на склад сырья и материалов, ед.;
- $x_j$  – объем  $j$ -го вида сырья, направляемого со склада сырья и материалов в производство, ед.;
- $x_{\text{вых}}$  – объем произведенной готовой продукции, направляемый на склад готовой продукции, ед.;
- $S_{\text{вх}}$  – объем продукции, поступающей на реализацию, ед.;
- $S_{\text{вых}}$  – доход от реализации продукции, руб.;
- $Z_{\text{вх}}$  – фонд оплаты труда, руб.;
- $L_{\text{вх}}$  – размер лизинговых платежей, руб.;
- $D_{\text{пр}}$  – объем прочих затрат, руб.;
- $P_j$  – объем денежных средств, направляемых на закупку  $j$ -го вида сырья, руб.;
- $H_{\text{вх}}$  – размер налоговых платежей, руб.;
- $K_{\text{вх}}^{\text{тело}}$  – размер кредитных платежей в погашение тела кредита, руб.;
- $K_{\text{вх}}^{\text{шт}}$  – размер кредитных платежей в погашение процентов по кредиту, руб.;
- $K_{\text{вых}}$  – размер полученных кредитов от банка или иного кредитного учреждения, руб.;
- $G$  – остаток готовой продукции на конец периода, ед.;
- $F$  – остаток денежных средств на конец периода, руб.;
- $z_j$  – остаток  $j$ -го вида сырья на конец периода, ед.;
- $\text{ind}_j$  – индикатор заказа  $j$ -го сырья;
- $Z$  – накапливаемая налогооблагаемая база ЕСН, руб.;
- $D$  – объем накапливаемых доходов, руб.;
- $R$  – объем накапливаемых расходов, руб.;
- $H^{\text{нп}}$  – накапливаемый объем налога на имущество, руб.;

$H^{IM}$  – налог на имущество к оплате, руб.;

$r$  – число дней в единице периода;

$S_s$  – спрос на продукцию в единицу периода, ед.

Приведенная совокупность уравнений, представляющая собой дискретную математическую модель работы предприятия по производству и реализации инновационного продукта с возможностью привлечения заемных средств по схеме лизинга и банковского кредита, реализована на алгоритмическом языке *VBA* и проведен ряд расчетов, показывающих работоспособность предложенной модели.

## **2. Пример моделирования инновационного предприятия**

Рассматривается пример, в котором предприятие планирует заняться производством и реализацией некоторого вида инновационной продукции. Период прогнозирования составляет 4 года с периодом дискретности 1 неделя. Для организации производства необходимо приобрести оборудование стоимостью 2 000 000 рублей. Рассматриваются два возможных варианта приобретения этого оборудования: за счет банковского кредита сроком 3 года с равномерной оплатой тела кредита и по схеме лизинга на срок 3 года с убывающими платежами.

Одним из важнейших факторов, определяющих успешность функционирования инновационного предприятия, является величина спроса, которая обладает большой степенью неопределенности для инновационной продукции. Поэтому представляет интерес оценить допустимые значения спроса на готовую продукцию, при которых предприятие будет находиться в безубыточном состоянии и предприятие в состоянии полностью погасить лизинговые и кредитные платежи, а также период, по истечении которого предприятие при заданном спросе становится банкротом. Эта оценка проводится по состоянию расчетного счета предприятия. Так, банкротство предприятия наступает, когда денежные средства на расчетном счете становятся отрицательными.

Результаты расчетов, отражающих состояние расчетного счета в зависимости от величины спроса на продукцию, приведены в таблицах 1 и 2. Графики динамики денежных средств на расчетном счете предприятия при различных значениях спроса приведены на рис. 2 и 3.

Таблица 1. Средства на расчетном счете при финансировании по схеме кредитования, тыс.руб.

Спрос\период ед. мес.	0	6	12	18	24	30	36	42	48
500	3000	2552	2581	2608	2675	2752	2854	3304	3782
450	3000	2404	2264	2122	2022	2099	2060	2484	2810
350	3000	2034	1787	1564	1240	1067	750	978	1152
275	3000	1928	1534	1039	681	209	-85	-199	-143
200	3000	1821	1155	599	109	-524	-963	-1181	-1439

Таблица 2. Средства на расчетном счете при финансировании по схеме лизинга, тыс.руб.

Спрос\период ед. мес.	0	6	12	18	24	30	36	42	48
500	2400	2050	2190	2328	2503	2687	2894	3334	3799
450	2400	1902	1872	1841	1849	2034	2100	2514	2827
350	2400	1532	1396	1283	1067	1001	790	1007	1169
275	2400	1426	1142	759	508	143	-45	-170	-126
200	2400	1319	764	318	-62	-589	-923	-1152	-1422

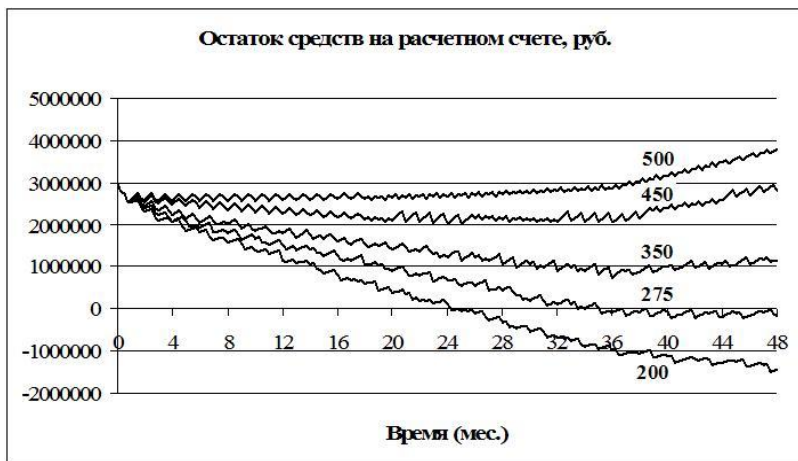


Рис. 2. Использование кредитования

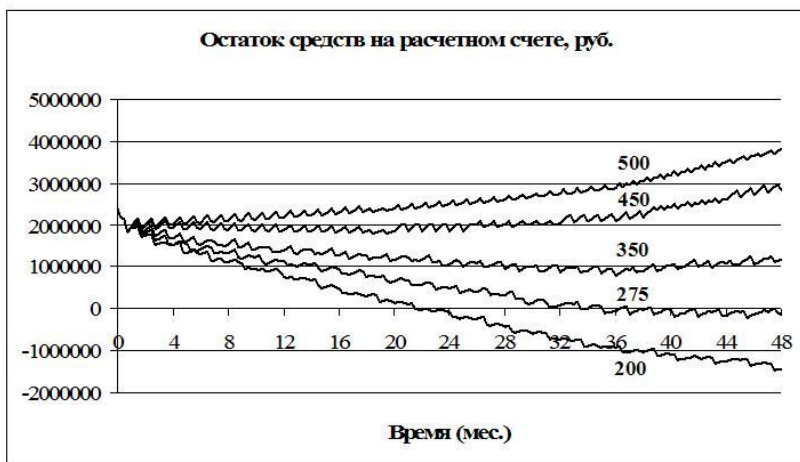


Рис. 3. Использование лизинга

Расчеты показывают, что значения спроса, при котором предприятие по истечении трех лет обанкротится, при финансировании по схеме кредита и лизинга, совпадают и равны примерно 275 единицам в неделю, несмотря на различные первона-

чальные условия этих схем финансирования – при кредите объем начальных средств равен 3 млн. руб., при лизинге – 2,4 млн. руб., что связано с необходимостью оплаты аванса при финансировании по схеме лизинга. При этом значения спроса, при котором предприятие находится в безубыточном состоянии, для этих схем финансирования различается: при финансировании по схеме лизинга более низкое значение безубыточного спроса (около 450 ед. в неделю), нежели при финансировании по схеме кредитования (480–490 ед. в неделю).

Из графиков видно, что при кредитовании средства на расчетном счете расходуются в большем объеме, чем при лизинге (графики носят более крутой характер), но при этом следует отметить тот факт, что при низком значении спроса, в частности 200 ед. в неделю, предприятие быстрее обанкротится при финансировании именно по схеме лизинга (в течение 22–23 мес.), чем по схеме кредитования (в течение 24–25 мес.).

Таким образом, риск банкротства предприятия в течение определенного периода времени связан с возможностью того, что спрос примет те или иные неблагоприятные для предприятия значения. Приведенные расчеты показывают, что предлагаемая в данной работе динамическая математическая модель позволяет исследовать последствия изменения спроса, а также других факторов, на деятельность инновационного предприятия при разных схемах финансирования.

### **3. Выводы**

Предложенная в данной работе динамическая экономико-математическая модель функционирования инновационного предприятия позволяет прогнозировать деятельность предприятия во взаимодействии с лизинговыми и кредитными организациями, исследовать различные варианты финансирования, выбирать наиболее приемлемые параметры, в том числе объемы лизинга и кредитования, ставки лизинговых отчислений и кредитов. Модель позволяет рассчитывать различные сценарии взаимодействия предприятия и лизинговой организации и банка,

в том числе и в условиях кризиса, что дает возможность ее использования для оценки влияния различных негативных факторов на работу предприятия.

### ***Литература***

1. ГОРЕМЫКИН В.А. Лизинг. – М.: Филинь, 2006. – 944 с.
2. ГРИШИН А.В. *Экономико-математическая модель динамики функционирования инновационного предприятия* // Сборник трудов VI Всероссийской школы-семинара молодых ученых «Управление большими системами». Том 2. – Ижевск: ООО Информационно-издательский центр «Бон Анца», 2009. – С. 134–140.
3. Проблемы инновационной экономики и инфокоммуникационных технологий // Под научным руководством и редакцией Сиразетдинова Т.К. – Москва-Казань: Изд-во Института проблем риска, 2005. – 412 с.
4. СИРАЗЕТДИНОВ Т.К., РОДИОНОВ В.В., СИРАЗЕТДИНОВ Р.Т. Динамическое моделирование экономики региона – Казань: Изд-во «Фэн» Академии наук РТ, 2005. – 320 с.

### **DYNAMIC MATHEMATICAL MODELLING OF INNOVATIVE ENTERPRISE IN CONDITIONS OF VENTURE FINANCING**

**Andrej Grishin**, Kazan State Technical University names after A.N.Tupolev, Kazan, graduate student (grik40@mail.ru, (903)313-83-20).

*We construct a discrete mathematical model of financial and material flows of the company at the stage of production and marketing of innovative products, taking into account various financing options that include leasing and bank credit. The proposed model allows to take into account the processes of functioning of innovative enterprises in sufficient detail, including material, financial, and informa-*



*tion flows (the date of raw materials shipment, the date of credit and leasing payments, taxes, etc.), and, compared to similar existing models, allows estimating the impact of a wide range of factors on the financial results of the enterprise under different venture financing options.*

Keywords: dynamic model, mathematical modelling, innovative enterprise, leasing, crediting, bankruptcy, venture financing.

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии В. В. Клочковым*

УДК 338.242.2 + 338.001.36

ББК 65.05.3

**КОМПЛЕКСНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ОБОРОТНЫМИ  
СРЕДСТВАМИ И ИСТОЧНИКАМИ ИХ  
ФИНАНСИРОВАНИЯ НА БАЗЕ ИЗМЕРЕНИЯ  
ИСПОЛЬЗУЕМОЙ СТРАТЕГИИ**

**Ларионова И. А.<sup>1</sup>, Жагловская А. В.<sup>2</sup>, Бойков А. А.<sup>3</sup>,  
Рожков И. М.<sup>4</sup>, Марков С. В.<sup>5</sup>**  
(ФГОУ ВПО НИТУ «МИСиС»)

*Решается задача измерения и выбора рационального способа управления оборотными средствами предприятия и источниками их финансирования. На базе сведений о результатах работы предприятий отрасли осуществляется выбор критерия управления (интегральной оценки экономического положения), и на основе данных о величинах относительных объемов оборотных средств и краткосрочных источников финансирования разрабатываются «средства измерения» стратегии этого процесса. С учетом указанных разработок показаны оптимальные параметры системы управления, позволяющие максимизировать выбранный критерий.*

Ключевые слова: автоматизированные системы управления, оборотные средства, источники финансирования, интегральный показатель, финансовые коэффициенты, добавленная стоимость.

---

<sup>1</sup> Ларионова Ирина Александровна, кандидат экономических наук, профессор (тел. +7(495) 955-00-37).

<sup>2</sup> Жагловская Анна Валерьевна, кандидат экономических наук, доцент (тел. +7(495) 955-01-30 доб. 138).

<sup>3</sup> Бойков Александр Анатольевич, ассистент (+7(495) 236-52-33 доб. 121).

<sup>4</sup> Рожков Игорь Михайлович, доктор технических наук, профессор (тел. +7(495) 955-00-37)

<sup>5</sup> Марков Сергей Викторович, ассистент (markov\_s\_v@mail.ru).

Данное исследование направлено на разработку автоматизированных систем управления экономикой предприятия. На примере комбинатов черной металлургии РФ рассматривается задача измерения и выбора рационального способа (стратегии) управления оборотными средствами (ОС) предприятия и источниками их финансирования. Термин «стратегия» относится к управлению ОС в долгосрочном периоде.

Предлагаемая методика сводится к следующему. В качестве показателя эффективности будем использовать линейную интегральную оценку экономического положения предприятия, ориентированную на показатели добавленной стоимости (ДС) [1]. В основу этой оценки положен линейный интегральный показатель, предложенный Р.С. Сайфулиным и Г.Г. Кадыковым [4].

В отличие от показателя Сайфулина и Кадыкова, оценка, применяемая в настоящей работе, адаптирована к условиям черной металлургии РФ и ориентирована на показатели добавленной стоимости производимой предприятием продукции.

Добавленная стоимость определяется как сумма четырех величин:

$$ДС_{\text{ввп}} = \Pi + S_{3.п.} + А_{\text{м}} + \text{Нл} ,$$

где  $\Pi$  – операционная прибыль и все налоги, относимые на финансовый результат;  $S_{3.п.}$  – суммарные затраты на оплату труда персонала за отчетный период, включая страховые взносы;  $A_{\text{м}}$  – суммарные амортизационные отчисления;  $\text{Нл}$  – сумма налогов, включаемых в себестоимость.

Для уменьшения влияния инфляции на качество разрабатываемых математических моделей применяются отношения добавленной стоимости к активам  $ДС/А$ ; к себестоимости  $ДС/С$  и к выручке  $ДС/Вр$ .

В процессе конструирования интегральной оценки финансово-экономического положения предприятия кроме трех указанных выше показателей добавленной стоимости использовались, в соответствии с работой [3], 33 финансовых коэффициента, объединенные в 5 групп: рентабельности, эф-

фактивности управления, деловой активности, финансовой устойчивости, ликвидности и платежеспособности.

Для этих показателей по данным комбинатов черной металлургии РФ (77 балансов предприятий) была рассчитана корреляционная матрица. Из финансовых коэффициентов при конструировании интегральной оценки финансово-экономического положения предприятия были использованы четыре коэффициента, которые оказались наиболее коррелированными с показателями добавленной стоимости и наименее коррелированными между собой.

$$R_{k2} = \frac{\Pi_{\text{чист}}}{(B_1 + B_2) \cdot 0,5} \cdot \left( \frac{365}{T} \right),$$

где  $\Pi_{\text{чист}}$  – чистая прибыль;  $B_1, B_2$  – валюта баланса на начало и конец рассматриваемого периода;  $T$  – продолжительность периода.

$$A_{k3} = \frac{\text{ВР}_p^{\text{нетто}}}{(Z_1 + Z_2) \cdot 0,5} \cdot \left( \frac{365}{T} \right),$$

где  $\text{ВР}_p^{\text{нетто}}$  – чистая выручка;  $Z_1$  и  $Z_2$  – материальные запасы на начало и конец периода.

$$F_{k9} = \frac{K_T}{K_T + K_t + R_p},$$

где  $K_T$  – долгосрочные заемные средства;  $K_t$  – краткосрочные заемные средства;  $R_p$  – кредиторская задолженность.

$$L_{k7} = \frac{S_{\text{oc}}}{K_t + R_p},$$

где  $S_{\text{oc}}$  – объем оборотных средств.

Для комбинатов черной металлургии интегральная оценка имеет следующий вид:

$$R_J^{DC} (\text{ЧМ}) = \frac{1}{4} \left[ \frac{R_{K2}}{0,217} + \frac{A_{K3}}{10,400} + \frac{F_{K9}}{0,477} + \frac{L_{K7}}{4,073} \right].$$

В качестве норм финансовых коэффициентов в формуле интегральной оценки были взяты средневзвешенные по выручке значения коэффициентов.

Переход от одного способа управления к другому в настоящее время в основном характеризуется качественно: мало оборотных средств или долгосрочных источников – модель, используемая при управлении, агрессивная; количество средств или долгосрочных источников находится на среднем уровне – модель умеренная, большой объем средств и долгосрочных источников характерен для консервативной модели [5, 6]. Однако имеются работы, в которых делается попытка количественного измерения способов управления ОС. Количественные характеристики комплексной модели (способа) управления объемами оборотных средств и источниками их финансирования приведены в работе [5].

Под такими характеристиками понимаются конкретные значения показателей мер способа управления, с помощью которых получен ответ на вопрос, «мало» или «много» средств и краткосрочных источников их финансирования используется предприятием. В работе [5] в качестве таких средств измерения способов управления ОС используются следующие два показателя:

$$\pi_1 = \frac{S_{oc}}{B},$$

где  $S_{oc}$  – величина оборотных средств;  $B$  – валюта баланса;

$$\pi_2 = \frac{B - (I_c + K_T)}{S_{oc}} = \frac{(K_i + R_p)}{S_{oc}} = \frac{1}{K_1},$$

где  $I_c$  – собственные средства и резервы предприятия;  $K_T$  – долгосрочные заемные средства;  $K_i$  – краткосрочные заемные средства;  $R_p$  – кредиторская задолженность;  $K_1$  – общий коэффициент покрытия.

Связь этих показателей с типом применяемой предприятием модели управления, а также объемами оборотных средств и источниками их финансирования, очевидна. Действительно, чем

меньше оборотных средств имеет предприятие (чем меньше показатель  $\pi_1$ ), тем ближе используемая модель управления объемом текущих активов к агрессивной. Чем больше предприятие обеспечено собственными и долгосрочными заемными средствами (чем меньше показатель  $\pi_2$ ), тем ближе применяемая модель управления источниками покрытия текущих активов к консервативной.

Расчет коэффициентов  $\pi_1$  и  $\pi_2$  позволяет осуществить статистическую обработку данных о функционировании предприятий с целью введения упомянутой выше «сетки способов управления», каждой ячейке которой приписывается вполне определенный способ управления. Отметим, что сеткой способов управления покрывается поле точек значений интегрального показателя предприятий в координатах величин показателей «средств измерения (мер) способов управления».

Теперь для идентификации типа используемого способа управления достаточно установить ячейку, в которой оказались фактические значения коэффициентов  $\pi_1$  и  $\pi_2$ . Таким образом, количественное измерение включает не только нахождение значений средств измерений способа управления ОС, но и ее типа. Указанная процедура осуществляется следующим образом [5]. Прямоугольник со сторонами  $\pi_1^{\min}$ ,  $\pi_1^{\max}$ ,  $\pi_2^{\min}$ ,  $\pi_2^{\max}$ , полученный на основании обработки статистических данных по предприятиям черной металлургии РФ, разбивается на 9 ячеек. Каждую из его сторон делят на 3 примерно равных интервала. Для  $\pi_1$  интервал (0,20; 0,45] условно относят к агрессивной модели управления объемами активов (модели А1), интервал (0,45; 0,7] – к умеренной (модели У2), а больше 0,7 – к консервативной (модели К2). Аналогично для показателя  $\pi_2$  условно принято, что интервал (0,1; 0,4] относится к консервативной модели управления источниками финансирования текущих активов (модели К2); интервал (0,4; 0,7] – к умеренной (модели У2); интервал (0,7; 1,0] – к агрессивной (модели А2). При  $\pi_2$  больше 1,0 считается, что предприятие не обеспеченно собст-

венными источниками и долгосрочными заемными средствами (модель Н2). В использованных обозначениях моделей индекс 1 означает, что данная модель связана с фактическим значением  $\pi_1$ , а индекс 2 – с величиной  $\pi_2$ .

Предложенная классификация моделей с помощью рассмотренной сетки способов управления является условной. В принципе деление диапазонов  $\pi_1^{\min}$ ,  $\pi_1^{\max}$ ,  $\pi_2^{\min}$ ,  $\pi_2^{\max}$  на отрезки может быть и другим. Например, отрезки могут быть неравными.

«Сетка способов» управления объемом оборотных средств и источниками их финансирования, рассчитанная по 86 балансам предприятий за период 2003–2008 гг. для комбинатов черной металлургии РФ, приведена в таблице 1.

Таблица 1. «Сетка способов управления» ОС для комбинатов черной металлургии РФ

$\pi_2$	$\pi_1$					
	$0,2 < \pi_1 \leq 0,45$ (A1)		$0,45 < \pi_1 \leq 0,7$ (У1)		$0,7 < \pi_1$ (K1)	
	Количество точек	Средний рейтинг	Количество точек	Средний рейтинг	Количество точек	Средний рейтинг
$1,0 < \pi_2$ (Н2)	14	0,37	6	0,24		
$0,7 < \pi_2 \leq 1,0$ (A2)	6	0,75	4	0,63		
$0,4 < \pi_2 \leq 0,7$ (У2)	9	0,85	12	0,92	1	0,50
$0,1 < \pi_2 \leq 0,4$ (K2)	13	1,10	21	1,28		

Как видно, наиболее эффективной является стратегия (У1, К2). Может быть также рекомендована к использованию стратегия (У1, У2). В период финансового кризиса достаточно

эффективная стратегия (А1, К2) обеспечивается только при выполнении двух условий: 1) высокой дисциплины соблюдения графика поставок сырья и «точно в срок» и 2) при наращивании собственного капитала и/или повышения доступности долгосрочных заемных средств.

Иллюстрацией результатов измерения используемых способов управления ОС служат так называемые «фоновые диаграммы» [4].

Основную идею рассмотренной методики можно распространить также на управление дебиторской и кредиторской задолженностью, а также запасами предприятия. В принципе, ее можно рассматривать как разновидность уже изложенного способа управления ОС и источниками их финансирования. По аналогии с коэффициентами  $\pi_1$  и  $\pi_2$  введены два показателя, один из которых характеризует наличие средств, а второй – относительный объем используемых краткосрочных источников финансирования.

Первый из этих показателей ( $\mu_1$ ) предлагается рассчитывать по формуле:

$$\mu_1 = \frac{\frac{1}{\alpha} R_a^{\text{покуп}}}{R_p^{\text{постав}}},$$

где  $R_a^{\text{постав}}$  – кредиторская задолженность поставщикам и подрядчикам;  $R_a^{\text{покуп}}$  – дебиторская задолженность покупателей и заказчиков;  $\alpha$  – коэффициент, отражающий соотношение произведенной стоимости и потребленной:

$$\alpha = \frac{Вр}{С - S_{зп} - Ам} = \frac{(\Pi + S_{зп} + Ам + Нл) + С - S_{зп} - Ам}{С - S_{зп} - Ам},$$

$$\alpha = \frac{ДС}{С - S_{зп} - Ам} + 1,$$

где  $Вр$  – произведенная стоимость (выручка);  $\Pi$  – прибыль;  $С$  – себестоимость;  $S_{зп}$  – заработная плата, в том числе и страхо-



вые взносы; Нл – налоги, включаемые в себестоимость; ДС – добавленная стоимость.

Коэффициент  $\alpha$  введен в формулу по той причине, что кроме кредиторской задолженности поставщикам и подрядчикам существует использование части прибыли, а также задолженности перед персоналом организации, перед внебюджетными фондами, задолженности по налогам и сборам, а также прочими кредиторами.

Показатель  $\mu_1$  является показателем наличия средств. Он отражает долю средств поставщиков, которую направили покупателю. Если эта доля мала, то модель – агрессивная.

Второй показатель  $\mu_2$  представляет собой долю запасов, полученных с отсрочкой платежа:

$$\mu_2 = \frac{R_p^{\text{постав}}}{Z},$$

где  $R_p^{\text{постав}}$  – кредиторская задолженность поставщикам и подрядчикам;  $Z$  – запасы и НДС по приобретенным ценностям.

Коэффициент  $\mu_2$  является показателем, характеризующим источники финансирования. В случае, когда предприятие малую долю запасов финансирует за счет кредиторской задолженности поставщикам, используемая модель – консервативная. При финансировании большей доли запасов за счет поставщиков модель – агрессивная.

Далее построим «сетку» способов управления дебиторской и кредиторской задолженностью, а также запасами. Показатель  $\mu_1$  наличия средств у предприятия в принципе может изменяться от нуля до бесконечности. Однако обработка статистических данных для комбинатов черной металлургии РФ показала, что значений коэффициента  $\mu_1$ , больших двух, практически не бывает. Поэтому, разделив отрезок длиной две единицы на три примерно равные части, получаем следующие интервалы: (0; 0,67], (0,67; 1,33] и (1,33; 2]. При достаточно больших значениях  $\mu_1$  можно говорить о том, что предприятие кредитует потребителей, рассчитываясь с поставщиками практически

вовремя. Такая модель является «консервативной». Консервативной по показателю  $\mu_1$  будем считать модель, для которой  $\mu_1$  больше 1,33 (модель К1). При  $\mu_1$ , близком к 1, можно говорить, что предприятие кредитует своих покупателей ровно настолько же, насколько его кредитует поставщик. Поэтому модель, при которой  $\mu_1$  равен 1 лежит в середине интервала, т.е. при которой  $\mu_1$  больше 0,67 и не больше 1,33, будем считать умеренной (модель У1). Случай же  $\mu_1$  менее 0,67 отнесем к агрессивной модели (модель А1).

Коэффициент  $\mu_2$ , характеризующий наличие у предприятия источников финансирования запасов, для предприятий черной металлургии РФ находится в диапазоне от 0 до 1,33. Верхняя граница интервала определяется тем, что для рассматриваемых предприятий доля материальных затрат в себестоимости продукции составляет 70–80%, таким образом, число 1,33 получено путем деления 1 на 0,75.

Разделив диапазон (0; 1,33] на три примерно равных части, получим следующие три интервала: (0; 0,44], (0,44; 0,89] и (0,89; 1,33]. Будем считать, что предприятие не обеспечено собственными источниками финансирования запасов (модель Н1) при  $\mu_2 > 1,33$ . Если показатель  $\mu_2$  близок к нулю, то это говорит о том, что предприятие достаточно быстро рассчитывается со своими поставщиками. Поэтому случай, когда  $\mu_2 < 0,44$ , будем считать «консервативной» моделью (модель К2). Если же показатель  $\mu_2$  близок к 1,33, то предприятие не торопится с оплатой счетов, тем самым, используя и запасы, и денежные средства, предназначенные для их оплаты. Поэтому интервал с достаточно высокими значениями  $\mu_2$  (более 0,89), будем рассматривать как использование «агрессивной» модели (модель А2). Промежуточную ситуацию, когда  $\mu_2$  находится в интервале от 0,44 до 0,89, будем считать результатом применения «умеренной» стратегии (модель У2). Выделение указанных интервалов позволяет разбить рассматриваемую область на соответст-

вующие ячейки и тем самым закончить построение «сетки способов управления».

«Сетка способов управления» относительной структурой оборотных средств и источников их финансирования, рассчитанная по 86 точкам для комбинатов черной металлургии РФ, приведена в таблице 2.

Таблица 2. «Сетка способов управления» способов управления дебиторской и кредиторской задолженностью, а также запасами для комбинатов черной металлургии РФ

$\mu_2$	$\mu_1$					
	$0,67 \leq \mu_1$ (A1)		$0,67 < \mu_1 \leq 1,33$ (У1)		$1,33 < \mu_1$ (К1)	
	Количество точек	Средний рейтинг	Количество точек	Средний рейтинг	Количество точек	Средний рейтинг
$1,33 < \mu_2$ (Н2)	29	0,47	4	0,89		
$0,89 < \mu_2 \leq 1,33$ (A2)	12	0,93	3	0,67	1	0,50
$0,44 < \mu_2 \leq 0,89$ (У2)	5	0,97	16	1,20	6	1,15
$0,44 \leq \mu_2$ (К2)			4	1,09	6	1,30

Предлагаемая методика измерения «методом сеток» и выбора рационального комплексного способа управления ОС сводится к следующему.

Результатами измерения с помощью указанной методики являются координаты двух векторов  $(\pi_1, \pi_2, R_{\pi}^{DC})$  и  $(\mu_1, \mu_2, R_{\mu}^{DC})$ .

Расчет значений  $\pi_1, \pi_2$  и  $\mu_1, \mu_2$  осуществляется по приведенным ранее формулам. Далее представляется возможным, пользуясь «сетками методов», определить две из следующих клеток:

$(A_1, H_2), (Y_1, H_2), (K_1, H_2), (A_1, A_2), (Y_1, A_2), (K_1, A_2), (A_1, Y_2), (Y_1, Y_2), (K_1, Y_2), (A_1, K_2), (Y_1, K_2), (K_1, K_2)$ , в которых лежат точки с координатами  $(\pi_1, \pi_2)$  и  $(\mu_1, \mu_2)$ :

$$(S_{\pi_1}; S_{\pi_2}) \in \{(A_1, H_2), (Y_1, H_2), (K_1, H_2), (A_1, A_2), (Y_1, A_2),$$

$$(K_1, A_2), (A_1, Y_2), (Y_1, Y_2), (K_1, Y_2), (A_1, K_2), (Y_1, K_2), (K_1, K_2)\}$$

$$(S_{\mu_1}; S_{\mu_2}) \in \{(A_1, H_2), (Y_1, H_2), (K_1, H_2), (A_1, A_2), (Y_1, A_2),$$

$$(K_1, A_2), (A_1, Y_2), (Y_1, Y_2), (K_1, Y_2), (A_1, K_2), (Y_1, K_2), (K_1, K_2)\}$$

Тем самым удается идентифицировать названия используемых предприятием разновидностей способов управления ОС.

Координаты  $R_{\pi}^{DC}$  и  $R_{\mu}^{DC}$  являются интегральными рейтинговыми оценками экономического положения предприятия при использовании рассматриваемых способов управления ОС, то есть положения предприятия для найденных клеток  $(S_{\pi_1}; S_{\pi_2})$  и  $(S_{\mu_1}; S_{\mu_2})$ . В принципе эти оценки могут и различаться. Оценки определяются либо путем статистической обработки фактических данных о работе предприятия, либо с помощью регрессионных зависимостей. Например, для одного из крупных металлургических предприятий рассчитанная по данным 41 баланса указанная регрессионная зависимость имеет следующий вид:

$$R_{\pi}^{DC} = 7,36 \cdot \pi_1 - 1,8 \cdot \pi_1 \cdot \pi_2 - 8,36 \cdot \pi_1^2,$$

$$t_1 = 7,27; t_2 = -10,32; t_3 = -4,45; R_{\text{множ}} = 0,972.$$

Аналогичное соотношение, в принципе, можно записать и для  $R_{\mu}^{DC} = f(\mu_1, \mu_2)$ .

Понятно, что рассмотренную процедуру следует повторить для всех клеток «сеток способов» управления ОС. Тогда выбор рационального комплексного способа управления ОС будет сводиться к переходу к клеткам с более высокими значениями  $R_{\pi}^{DC}$  и  $R_{\mu}^{DC}$ , если, конечно, такой переход окажется необходимым и возможным по условиям обеспеченности предприятия финансовыми ресурсами.

Для внедрения предложенной системы необходимо ее объединение с существующей на металлургических предприятиях системой управления качеством, решение рассмотренных оптимизационных задач, а также мониторинг с использованием статистических контрольных карт следующих показателей:

- статей баланса и отчета о прибылях и убытках;
- фактических и оптимальных значений коэффициентов  $\pi_1$ ,  $\pi_2$ ,  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ , объемов оборотных средств, запасов, дебиторской и кредиторской задолженности;
- фактических и оптимальных значений рейтинговых оценок экономического состояния предприятия.

Периодически должна осуществляться корректировка целевых функций в задачах оптимизации.

### **Заключение**

Показано, что измерение методом сеток и выбор рационального комплексного способа управления оборотными средствами сводится к следующему:

1. Расчет по фактическим данным работы предприятия показателей мер, используемых при измерении способа (стратегии) управления ОС.

2. Определение с помощью найденных значений этих мер соответствующей клетки «сетки способа (стратегии) управления» и его идентификация.

3. Расчет прогнозируемого значения интегральной оценки по регрессионной зависимости от показателей мер и сопоставление найденной для этой оценки клетки «сетки управления» с клетками, в которых достигаются наиболее высокие значения этих оценок.

4. Выдача рекомендаций по изменению обеспеченности предприятия ОС и источниками их финансирования.

Рекомендовано объединение предложенной системы с существующими на металлургических предприятиях системами управления качеством.

### Литература

1. БЛАНК И.А. *Финансовый менеджмент: Учебный курс.* – 2-е изд., перераб. и доп. – Киев: Эльга, Ника-Центр, 2004. – 656 с.
2. ВАН ХОРН Д.К., ВАХОВИЧ Д.М. *Основы финансового менеджмента:* 12-е изд. Вильямс, 2006. – 1232 с.
3. КОНДРАКОВ Н.П., *Эккаунтинг для менеджеров. Бухгалтерский учет и финансово-экономический анализ.* – М.: Дело, 1998. – 280 с.
4. ЛАРИОНОВА И.А. *Диагностика стратегий управления оборотными средствами* // Журнал «Вестник ИНЖЭКО-На». – 2009. – Вып. 1(28). – С. 133–138.
5. ЛАРИОНОВА И.А., РОЖКОВ И.М., СКРЯБИН О.О., МАРКОВ С.В. *Диагностика и оптимизация стратегий управления оборотными средствами* // *Металлург.* – 2007. – №5. – С. 19–22.
6. РОЖКОВ И.М., КАЛИНСКИЙ О.И., МАРКОВ С.В. *Комплексная оценка финансово-экономического положения предприятия, ориентированная на показатели добавленной стоимости производимой продукции (на примере сталелитейных предприятий РФ)* // *Материалы международной конференции по финансовому менеджменту и логистике «Invention – Innovation – Investment. From Recession to Prosperity», 13–15 мая 2009 г.* /под ред. Radim Lenort, Iveta Voznakova. – Ostrava: VSB – TU Ostrava, 2009. – С. 179–188.
7. *Финансовый менеджмент: теория и практика: Учебник* / Под ред. Стояновой Е.С. – 5-е издание, перераб. и доп. – М: Перспектива, 2003. – 656 с.
8. ШЕРЕМЕТ А.Д., САЙФУЛИН Р.С., НЕГАШЕВ Е.В. *Методика финансового анализа.* – М.: Инфра-М, 2001. – 208 с.

**COMPLEX MANAGEMENT OF CURRENT ASSETS AND THEIR FINANCING SOURCES BASED ON MEASUREMENT OF STRATEGY IN USE**

**Irina Larionova**, Cand. Sc., professor (+7(495) 955-00-37).

**Anna Jaglovskaya**, Cand. Sc., assistant professor (+7(495)955-01-30 #138).

**Aleksandr Boykov**, assistant (+7(495) 236-52-33 доб. 121).

**Igor Rojkov**, Doctor of Science, professor (тел. +7(495) 955-00-37)

**Sergey Markov**, assistant (markov\_s\_v@mail.ru)

*Abstract: The problem of measurement and choice of a rational enterprise strategy for current assets and their financing management is considered. The key performance indicator – the integral estimate of the economic status – is built on the basis of financial reports data of the enterprises from the same industry. Strategy assessment method is suggested for current assets management. The method relies on relative amounts of current assets and short-term liabilities. The developed technique is used to show the optimal parameters of the management system that maximize performance.*

*Keywords: automated control systems, current assets, financing sources, integral criterion, financial factors, extra value added.*

*Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии М. В. Губко*

УДК 658.5.012+122.011.56

ББК 22.193

## **КОМПЛЕКСНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ПРИ ВЫБОРЕ ОПТИМАЛЬНОГО ПЛАНА ПРОИЗВОДСТВА НА ТАКТИЧЕСКОМ УРОВНЕ С УЧЕТОМ НЕЧЕТКИХ КРИТЕРИЕВ И ОГРАНИЧЕНИЙ<sup>1</sup>**

**Вожаков А. В.<sup>2</sup>, Гитман М. Б.<sup>3</sup>, Федосеев С. А.<sup>4</sup>**

*(Пермский государственный технический университет, Пермь)*

*Рассматривается модель оценки результатов работы автоматизированной системы планирования производства при нечетких ограничениях и критериях. Находятся и сравниваются оптимальные решения, полученные с использованием различных значений комплексного критерия.*

Ключевые слова: календарное планирование производства, нечеткие множества, математическое моделирование, оптимизация.

### **1. Введение**

На крупных предприятиях с дискретным производством и сложной высокотехнологичной продукцией возникает серьезная проблема при календарном планировании – эффективно распределить множество технологических операций по имеющимся производственным мощностям (тактический уровень планирования [3]). На предприятиях, как правило, используются не оптимальные, а лишь допустимые производственные планы, по-

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 10-08-00539).

<sup>2</sup> Артем Викторович Вожаков, кандидат технических наук (vozhaakov@ya.ru).

<sup>3</sup> Михаил Борисович Гитман, доктор физико-математических наук, профессор (mgitman@netzero.net).

<sup>4</sup> Сергей Анатольевич Федосеев, кандидат физико-математических наук (fsa@gelicon.biz).



рождающие множество очевидных недостатков, что приводит к снижению прибыли предприятия. Задача повышения качества производственного планирования усложняется еще и тем, что часто невозможно четко сформулировать критерии оптимальности плана и соответствующие производственные ограничения на имеющиеся ресурсы предприятия.

С точки зрения оптимизации все решения, получаемые в результате выработки планов, можно разделить на:

- оптимальные по всем критериям;
- оптимальные по одному/нескольким критериям;
- приемлемые по всем ограничениям.

## **2. Постановка задачи**

Решением задачи многокритериальной оптимизации часто является Парето-множество решений, при этом выбор наилучшего решения представляет собой сложную задачу, основанную на комплексной оценке решений. Часто для описания соотношений между частными критериями оптимальности требуется введение дополнительных параметров.

Рассмотрим многокритериальную задачу оптимизации планирования производства на тактическом уровне [4]. Для описания календарного плана производства вводится матрица  $P$ . Ее элементы  $p_{ld}$  определяют количество операций  $l$ -го вида, запланированных на день с номером  $d$ ,  $l \in 1, \dots, W$ ,  $d \in 1, \dots, T$ , где  $T$  – количество дней в плановом периоде;  $W$  – количество видов операций. Введем матрицу баланса номенклатурных единиц  $B$ . Ее элементы  $b_{id}$  определяют количество номенклатурных единиц с номерами  $i \in 1, \dots, C$  ( $C$  – количество номенклатурных позиций в справочнике), находящихся на цеховых складах на конец дня с номером  $d$  ( $d \in 1, \dots, T$ ); значение индекса  $d = 0$  используется в матрице баланса для определения остатков номенклатурных единиц на начало планируемого периода. Очевидно, что значения матрицы напрямую зависят от плана производства  $P$  и от начального значения остатков на складе  $r$ . Мат-

рица  $B$  зависит от главного календарного плана производства (ГКПП) [2]. В дни, когда запланирован выпуск продукции, происходит отгрузка готовой продукции со склада, уменьшая тем самым остаток. Элементы матрицы  $B$  можно определить следующим образом:

$$(1) \quad b_{id} = \begin{cases} r_i, & i \in \overline{1, C}, \quad d = 0, \\ b_{id-1} + p_{s_i+w_i-1,d} - g_{id} - \sum_{j=1}^N p_{s_j,d} a_{ij}, & i \in \overline{1, N}, \quad d \in \overline{1, T}, \\ b_{id-1} - \sum_{j=1}^N p_{s_j,d} a_{ij}, & N < i \leq C, \quad d \in \overline{1, T}; \end{cases}$$

где  $r_i$  – остаток  $i$ -ой номенклатурной единицы на начало периода;  $g$  – главный календарный план производства (ГКПП);  $a_{ij}$  – состав изготавливаемых изделий;  $w_i$  – количество операций в  $i$ -ом технологическом этапе;  $N$  – количество изготавливаемых номенклатурных позиций в справочнике;  $s_i = \begin{cases} 1, & i = 1, \\ s_{i-1} + w_{i-1}, & i \in \overline{2, N}. \end{cases}$

Очевидно, что при составлении плана производства должны учитываться следующие ограничения:

1. Суммарное количество операций одного вида в плане-графике должно быть равно общему количеству операций данного вида, которые необходимо выполнить в плановом периоде согласно ГКПП:

$$(2) \quad \sum_{d=1}^T p_{ld} = o_l \quad \text{для всех } l \in \overline{1, W},$$

где  $O_l$  – количество операций, которые необходимо выполнить.

2. В каждый из планируемых дней максимальная загрузка рабочих центров не должна превышать максимально возможную загрузку:

$$(3) \quad \sum_{l=1}^W p_{ld} t_l \beta_{lk} \leq t_k^* q_k,$$

где  $\beta_{lk} = \begin{cases} 1, & e_l = k, \\ 0, & e_l \neq k; \end{cases} \quad l \in \overline{1, W}, \quad k \in \overline{1, E}, \quad d \in \overline{1, T}; \quad t_k^*$  – максималь-

ная загрузка оборудования, данная величина может быть нечеткой, т. е. может быть задана в виде нечеткого числа [4];  $q_k$  – ко-

личество рабочих центров  $k$ -го типа;  $t_l$  – трудоемкость операции  $l$ -го вида;  $e_l$  – номер типа рабочего центра для совершения операции  $l$ -го вида;  $E$  – количество типов рабочих центров, имеющих на производстве.

3. В любой момент времени остаток номенклатурных единиц не может быть отрицательным. Математически данное ограничение может быть записано как

$$(4) \quad b_{id} \geq 0 \text{ для всех } i \in \overline{1, C}, d \in \overline{0, T}.$$

Введем четыре частных критерия оптимальности плана - графика производства:

1. Критерий комфортности производства – план – график производства должен быть скомпонован таким образом, чтобы операции одного вида запускались в производство как можно большими партиями (в этом случае не потребуются переналадка оборудования при переходе от выполнения одной операции к другой):

$$(5) \quad J_1 = \sum_{l=1}^W \sum_{d=1}^T \beta_{ld} \rightarrow \min,$$

$$\text{где } \beta_{ld} = \begin{cases} 1, & p_{ld} \neq 0, \\ 0, & p_{ld} = 0. \end{cases}$$

2. Производство должно быть равномерным (уровень загрузки рабочих центров должен изменяться постепенно, без резких перепадов):

$$(6) \quad J_2 = \sum_{d=1}^{T-1} \sum_{k=1}^E |z_{kd} - z_{kd+1}| \rightarrow \min,$$

$$\text{где } z_{kd} = \frac{\sum_{l=1}^W p_{ld} t_l \beta_{lk}}{t_k q_k}, \quad \beta_{lk} = \begin{cases} 1, & e_l = k, \\ 0, & e_l \neq k. \end{cases}$$

3. Риск срыва плана производства должен быть минимален. Максимальное опережение производства  $\tau$  является нормативом предприятия и измеряется в днях. Будем говорить, что продукция выпущена с опережением, если продукция произведена

раньше, чем это стало крайне необходимо. Относительная загрузка оборудования (суммарная трудоемкость, отнесенная к максимальной загрузке данного типа оборудования), попадающая в  $\tau/2$  области перед отгрузкой готовой продукции, должна быть минимальной (интервал  $\tau/2$  выбран из практических соображений):

$$(7) \quad J_3 = \sum_{d=1}^T \sum_{d^*=1}^{d-d^*>0} \frac{1}{d^*} \chi_d \sum_{l=1}^W \frac{p_{ld-d^*} t_l}{q_{e_l} t_{e_l}^*} \rightarrow \min,$$

$$\text{где } \chi_d = \begin{cases} 1, & \sum_{i=1}^N g_{id} \neq 0, \\ 0, & \sum_{i=1}^N g_{id} = 0. \end{cases}$$

4. Срок изготовления продукции должен быть минимальным. При этом продукт считается изготовленным только в том случае, если все операции завершены, т. е. дата совершения последней операции и будет определять срок изготовления продукции:

$$(8) \quad J_4 = \max_{d \in \overline{1, T}} \omega(d) \rightarrow \min,$$

$$\text{где } \omega(d) = \begin{cases} d, & \sum_{l=1}^W \sum_{u=d}^T p_{lu} = 0, \\ 0, & \sum_{l=1}^W \sum_{u=d}^T p_{lu} \neq 0. \end{cases}$$

На основе предложенных частных критериев введен обобщенный критерий оптимальности с использованием расширенного специального нечеткого множества над частными критериями оптимальности

$$J^r = \{\mu_1/J_1; \mu_2/J_2; \mu_3/J_3; \mu_4/J_4\},$$

где  $\mu_i \in [0; 1]$ ,  $i \in \overline{1, 4}$ , – экспертная оценка значимости  $i$ -го критерия.

Для сравнения двух элементов  $J^{r1}$  и  $J^{r2}$  множества  $J^r$  будем использовать четкую функцию от нечеткого аргумента (специальный индекс ранжирования [1]):

$$(9) \quad H(J^{r1}, J^{r2}) = \text{sign } C_i,$$

$$\text{где } C_i = \frac{\mu_i^{r1} \cdot J_i^{r1} - \mu_i^{r1} J_i^{r2}}{u_i};$$

$$i \text{ доставляет } \max |(\mu_i^{r1} \cdot J_i^{r1} - \mu_i^{r1} J_i^{r2}) / u_i|;$$

$\mu_i^{r1}$  – функция принадлежности (значимость),  $J_i^{r1}$ ;

$\mu_i^{r2}$  – функция принадлежности (значимость)  $J_i^{r2}$ ;

$$u_i = \max(J_i^{r1}, J_i^{r2}), \quad i \in \overline{1, 4}.$$

При этом если значение  $i$  единственно и  
если  $\text{sign } C_i = \langle + \rangle$ , то  $J^{r1} > J^{r2}$ ;  
если  $\text{sign } C_i = \langle - \rangle$ , то  $J^{r1} < J^{r2}$ .

Если значение  $i$  не единственно, то определим  $k$  – количество равных по модулю экстремумов ( $k \leq n$ ) и вычислим

$$\lambda = \sum_{i=1}^k \text{sign } C_i.$$

Если  $\lambda = 0$ , то  $J^{r1} = J^{r2}$ ;

если  $\lambda < 0$ , то  $J^{r1} < J^{r2}$ ;

если  $\lambda > 0$ , то  $J^{r1} > J^{r2}$ .

Математическая постановка задачи составления оптимального плана - графика производства может быть представлена в следующем виде:

Найти значение матрицы плана производства  $p_{ld}$ ,  $l \in \overline{1, W}$ ,  
 $d \in \overline{1, T}$ , приводящее к минимуму выражение

$$(10) \quad J^r \rightarrow \min, \text{ где } J^r = \{\mu_1/J_1; \mu_2/J_2; \mu_3/J_3; \mu_4/J_4\},$$

где  $J_1, J_2, J_3, J_4$  – частные критерии оптимальности плана производства при ограничениях (1)–(4);  $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$  – оценки значимости частных критериев.

Введем показатели оптимальности полученного решения. Данные показатели будут использоваться для отображения результатов и исследования множества решений задачи, полученных при различных значениях экспертных оценок важности критериев. Показатели оптимальности строятся на основании частных критериев оптимальности с соблюдением следующих принципов:

- показатели должны быть возрастающими, т. е. при улучшении значения критерия показатель возрастает;

- показатели должны быть отнормированы к единице, при этом за 0 берется самое худшее значение критерия, а за 1, соответственно, самое лучшее;

- значения показателей должны в точности соответствовать значениям соответствующего частного критерия оптимальности. Для любых двух значений частного критерия оптимальности (А и В) соответствующие им показатели оптимальности (РА и РВ) должны находиться в отношении: если А лучше В, то  $PA > PB$ , если  $A = B$ , то  $PA = PB$ ;

- минимальные и максимальные значения показателей должны быть достижимыми в рамках конкретной задачи.

Будем использовать следующие показатели оптимальности плана производства, которые соответствуют всем требованиям.

Показатель комфортности:

$$(11) J_1^* = 1 - \frac{\sum_{l=1}^W \sum_{d=1}^T \beta_{ld} - \frac{1}{T}}{W \cdot T - \frac{1}{T}},$$

где  $\beta_{ld} = \begin{cases} 1, & p_{ld} \neq 0, \\ 0, & p_{ld} = 0. \end{cases}$

Показатель равномерности:

$$(12) \rho_d = 1 - \frac{\sum_{k=1}^E |z_{kd} - z_{kd+1}|}{E},$$

$$\text{где } z_{kd} = \frac{\sum_{l=1}^W p_{ld} t_l \beta_{lk}}{t_k q_k}; \beta_{lk} = \begin{cases} 1, & e_l = k, \\ 0, & e_l \neq k. \end{cases}$$

Показатель равномерности за весь период:

$$(13) J_2^* = \frac{\sum_{d=1}^{T-1} \rho_d}{T-1}.$$

Показатель риска срыва производства:

$$(14) J_3^* = 1 - \frac{\sum_{d=1}^T \sum_{d^*=1}^{d-d^*>0} \frac{\chi_d}{d^*} \sum_{l=1}^W \frac{p_{ld-d^*} t_l}{q_{e_l} t_{e_l}^* E}}{\sum_{d=1}^T \sum_{d^*=1}^{d-d^*>0} \frac{\chi_d}{d^*}},$$

$$\text{где } \chi_d = \begin{cases} 1, & \sum_{i=1}^N g_{id} \neq 0, \\ 0, & \sum_{i=1}^N g_{id} = 0. \end{cases}$$

Показатель минимальности срока производства:

$$(15) J_4^* = 1 - \max_{d \in 1, T} \frac{\omega(d) - 1}{T - 2},$$

$$\text{где } \omega(d) = \begin{cases} d, & \sum_{l=1}^W \sum_{u=d}^T p_{lu} = 0, \\ 0, & \sum_{l=1}^W \sum_{u=d}^T p_{lu} \neq 0. \end{cases}$$

### **3. Решение задачи, оценка результатов**

Для решения поставленной задачи была разработана методика, состоящая из последовательности эвристических алгоритмов. Данная методика позволяет находить близкие к оптимальным планы производства при заданных значениях важности частных критериев. Также была разработана автоматизированная система, реализующая данную методику. Подробное описание методики, автоматизированной системы и результатов ее использования выходит за рамки данной статьи. Далее речь пойдет о сравнении решений, полученных при различных значениях оценки важности частных критериев. Очевидно, что от выбора значений важности частных критериев зависит и эффективность полученного решения. Поэтому требуется исследовать поле значений функции принадлежности и сравнить полученные результаты для того, чтобы выбрать те значения функции принадлежности, которые наиболее соответствуют целям производства.

В качестве тестового примера для исследования был взят производственный план предприятия ООО «Завод СДМ», г. Пермь. Расчет проводился на три месяца. В реальности план производства, как правило, не бывает выполнен полностью в плановом периоде, так как к началу периода уже есть определенный задел деталей и агрегатов, и по завершению месяца остается также незавершенное производство. Поэтому показательным является второй месяц, так как к началу второго месяца уже есть определенный задел деталей и к концу месяца также необходимо будет подготовить определенный набор деталей, чтобы производство не стартовало с нуля. В данной постановке не будет учитываться частный критерий минимизации срока производства, тому есть две причины:

1. Использование критерия минимальности срока производства неизбежно привело бы к перемещению нагрузки на более ранние даты. Таким образом, при оценке плана производства на второй месяц мы бы неизбежно оценивали планы производства, состоящие из разных наборов технологических операций. В этом случае сравнение планов производства было бы некорректным.



2. Использование трех критериев вместо четырех позволит на порядок снизить машинное время, требуемое для проведения исследования. В противном случае проведение столь длительных исследований стало бы невозможным.

ГКПП рассматриваемого примера представлен в таблице 1.

Таблица 1. Пример производства крупных партий

Дата выпуска (день от начала планового периода)	Число изделий
22	50
44	50
66	50

Первоначально был найден допустимый план производства, без оптимизации. Данный план производства лег в основу серии расчетов оптимальных планов производства при различных значениях функции принадлежности. Первоначально были найдены два плана производства, оптимизированные при различных значениях важности критериев:

1. Максимально комфортный план производства. В данном случае использовался только критерий комфортности производства, и задача, по сути, стала однокритериальной. Экспертные оценки важности критериев следующие:  $\mu_1 = 1$ ,  $\mu_2 = 0$ ,  $\mu_3 = 0$ . Результат обозначим как «комфортный план производства».

2. Достаточно комфортное и максимально равномерное производство. Экспертные оценки важности критериев следующие:  $\mu_1 = 0,7$ ,  $\mu_2 = 1$ ,  $\mu_3 = 0,3$ . Результат обозначим как «экспертный план производства».

Полученные результаты будут использоваться для сравнения.

В вышеприведенном примере использовались значения функции принадлежности, установленные с помощью экспертной оценки, т. е. те значения, которые наиболее соответствуют представлению экспертов о приоритетах построения производственного процесса. Дополнительно рассмотрим другие значения функции принадлежности, которые могут быть использова-

ны при решении данной задачи. Для исследования были выбраны значения функции принадлежности от 0,1 до 1 с шагом в 0,1

В результате проведенных вычислений было получено множество решений (размер множества совпадает с количеством проведенных вычислений). Из данного множества были исключены решения, заведомо не оптимальные. Заведомо неоптимальными решениями были признаны значения  $J^1$ , для которых существует решение  $J^2$  такое, что для всех  $i$  выполняются условия:  $J_i^{r1*} \leq J_i^{r2*}$ ;  $\mu_i^{r1} \leq \mu_i^{r2}$ . Таким образом, получили набор решений (множество выбираемых решений), представленный в таблице 2.

Далее необходимо выбрать наилучшее решение из выбираемого множества. Очевидно, что рассматривать значения частных критериев без привязки к значениям важности частных критериев не имеет смысла, так как повышение важности одного из частных критериев автоматически означает, что требуется улучшить этот критерий, т. е. значения частных критериев должны соответствовать их важности. Для выбора наилучшего значения были использованы три различных способа:

- линейная свертка значений частных критериев без учета важности критериев;
- линейная свертка значений частных критериев с учетом важности критериев в качестве множителей;
- поиск наилучшего значения с использованием индекса ранжирования (9).

Дополнительно стоит указать физический смысл индекса ранжирования (9): наилучшим значением множества  $J$  будет признано то значение  $J^r$ , у которого больше количество пиковых значений частных критериев, с учетом их значимости. В таблице 2 представлены оценки по всем трем способам выбора наилучшего. Для удобства таблица отсортирована по значению линейной свертки частных критериев без учета их важности. Значения в столбце «Ранг» указывают оценку решения с помощью индекса ранжирования (9), где 1 – наилучшее значение, 2 – наилучшее из оставшихся решений и т.д.

Из таблицы видно, что оценки, полученные с помощью индекса ранжирования, сильно отличаются от оценок, полученных с помощью линейных сверток. Далее каждое решение было рассмотрено группой экспертов, которые проводили оценки качества решений с точки зрения сбалансированности и отражения поставленных целей. Эксперты указали, что значения, полученные с помощью индекса ранжирования (9), являются более адекватными. Таким образом, данный индекс следует рассматривать как альтернативу линейной свертке, однако для каждой задачи вопрос применения той или иной оценки является открытым. Итак, наилучшим признано решение №10 из таблицы 2 – это решение соответствует оценкам важности частных критериев для данной задачи:  $\mu_1 = 1$ ,  $\mu_2 = 0,6$ ,  $\mu_3 = 0,8$ .

Таблица 2. Множество выбираемых решений задачи

№	$\mu_1$	$\mu_2$	$\mu_3$	$J_1^*$	$J_2^*$	$J_3^*$	$\sum_{i=1}^3 J_i^*$	$\sum_{i=1}^3 \mu_i J_i^*$	Ранг
1	0,4	1	0,3	0,40	0,97	0,36	1,74	1,24	
2	0,7	1	0,3	0,74	0,84	0,37	1,9	1,48	
3	1	0,8	0,4	0,82	0,75	0,4	1,97	1,58	
4	0,4	0,7	1	0,42	0,59	0,96	1,98	1,55	
5	0,5	0,4	1	0,53	0,47	1	2,01	1,45	
6	0,5	1	0,7	0,49	0,89	0,62	2,01	1,58	
7	0,5	1	0,8	0,39	0,85	0,79	2,04	1,68	3
8	1	0,3	1	0,87	0,27	0,97	2,11	1,92	5
9	1	0,4	0,5	0,93	0,43	0,76	2,13	1,49	
<b>10</b>	<b>1</b>	<b>0,6</b>	<b>0,8</b>	<b>0,83</b>	<b>0,5</b>	<b>0,8</b>	<b>2,14</b>	<b>1,77</b>	<b>1</b>
11	0,9	0,6	0,8	0,81	0,51	0,83	2,16	1,70	2
12	1	0,4	0,9	0,89	0,31	0,95	2,16	1,87	4
13	0,9	0,3	1	0,83	0,36	0,98	2,18	1,84	

Отметим, что решение с экспертной оценкой функции принадлежности (предыдущий пример) не попало в число наилуч-

ших (таблица 2). Однако при постоянной эксплуатации системы оценки, полученные из практического опыта для конкретного производства, вероятно, будут давать вполне удовлетворительный результат.

Рассмотрим решение задачи при наилучших значениях функций принадлежности:  $\mu_1 = 1$ ,  $\mu_2 = 0,6$ ,  $\mu_3 = 0,8$ .

На рис. 1 представлен график изменения показателя равномерности плана производства  $\rho_d$  для четырех планов производства: допустимый план до оптимизации (допустимый); план после оптимизации по критерию комфортности (комфортный); план после оптимизации по комплексному критерию с экспертными оценками (экспертный) и план после оптимизации по комплексному критерию с наилучшими оценками важности критериев (далее оптимальный). Точки на графике указывают значение показателя  $\rho_d$  между днями  $d$  и  $d + 1$ .



Рис. 1. Равномерность загрузки оборудования

На рис. 2 представлены значения показателя минимальности риска срыва производства  $J_4^*$  для допустимого, комфортно-го, экспертного и оптимального производственных планов.

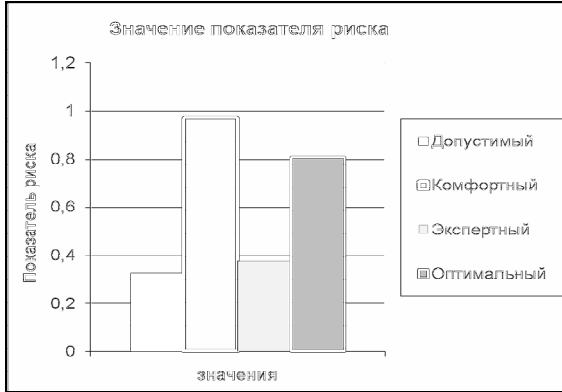


Рис. 2. Риск срыва производства

На рис. 3 представлены значения показателя комфортности  $J_1^*$  для допустимого, комфортного и комплексного производственных планов.

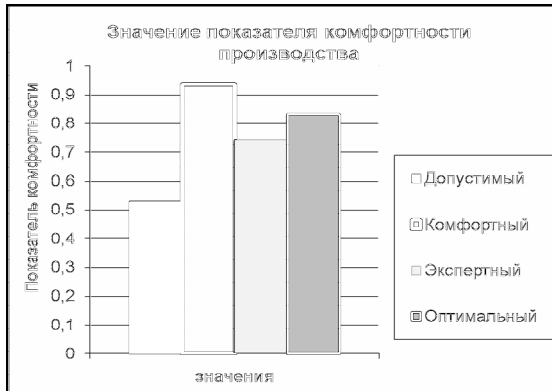


Рис. 3. Комфортность производства

#### 4. Заключение

Из приведенных выше графиков видно, что после оптимизации допустимого плана производства по комплексному критерию произошли следующие характерные изменения:

1. Значение показателя комфортности улучшено по сравнению с допустимым планом и меньше оптимального значения (комфортный план) менее чем на 10%.

2. Показатель равномерности загрузки оборудования значительно улучшен по отношению к допустимому и комфортному плану производства, однако на 40% меньше, чем в экспертном плане производства.

3. Значение показателя риска срыва производства в два с половиной раза лучше, чем в допустимом плане, и менее чем на 20% меньше оптимального значения;

4. Производственный график стал более равномерным за счет ограничения на досрочный выпуск деталей.

5. В последние дни планового периода нагрузка снижается, чтобы дать возможность оперативно решить возможные проблемы.

#### Литература

1. БОРИСОВ А.Н., АЛЕКСЕЕВ А.В., МЕРКУРЬЕВА Г.В. *Обработка нечеткой информации в системах принятия решений* – М.: Радио и связь, 1989. – 304 с.
2. ГАВРИЛОВ Д.А. *Управление производством на базе стандарта MRP II*. – СПб.: Питер, 2002.
3. СТОЛБОВ В.Ю., ФЕДОСЕЕВ С.А. *Модель интеллектуальной системы управления предприятием* // Проблемы управления. – 2006. – №5. – С. 36–39.
4. ФЕДОСЕЕВ С.А., ВОЖАКОВ А.В., ГИТМАН М.Б. *Модель календарного планирования производства с нечеткими целями и ограничениями* // Системы управления и информационные технологии. – 2009. – №3. – С. 21–24.

## COMPLEX EVALUATION FOR OPTIMAL TACTICAL PRODUCTION SCHEDULE SELECTION UNDER FUZZY CRITERIA AND CONSTRAINTS

**Artem Vozhakov**, Perm State Technical University, Cand. Sc., (*vozhakov@ya.ru*).

**Mikhail Gitman**, Perm State Technical University, Doctor of Science, professor (*gmb@matmod.pstu.ac.ru*).

**Sergey Fedoseev**, Perm State Technical University, Cand. Sc., assistant professor (*fsa@gelicon.biz*).

*Abstract: The model is considered for evaluation of performance of an automated production scheduling and planning system under fuzzy criteria and constraints. Optimal schedules obtained using different models of integrated estimation are calculated and compared.*

Keywords: production scheduling, fuzzy sets, mathematical modelling, optimization.

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии Д. А. Новиковым*

УДК 681.324

ББК 32.973.202-018.2

## ОПТИМАЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ МИГРАЦИИ ДАННЫХ В МАСШТАБИРУЕМЫХ ОБЛАЧНЫХ ХРАНИЛИЩАХ<sup>1</sup>

Петров Д. Л.<sup>2</sup>

(Санкт-Петербургский Государственный Электротехнический  
Университет «ЛЭТИ», Санкт-Петербург)

*Исследуется многокритериальная задача оптимизации плана миграции данных в распределенном облачном хранилище. Разработан алгоритм миграции данных в масштабируемых облачных хранилищах. Доказано, что алгоритм является полиномиальным и дает оптимальный результат по первому критерию.*

Ключевые слова: облачные вычисления, распределенные хранилища данных, миграция данных.

### **Введение**

Традиционно оптимизация вычислительных ресурсов в распределенных системах осуществляется при помощи процедуры балансировки нагрузки [18]. Балансировка заключается в назначении возникающих заданий определенным устройствам-обработчикам, объединенным в кластер. Это подразумевает, что любое задание может быть обработано любым из устройств в кластере. К сожалению, это условие не выполняется в распределенных хранилищах данных. Каждое из устройств не способно хранить все данные, которые могут быть востребованы. Поэтому каждый элемент данных (блок данных, файл) хранится лишь на

---

<sup>1</sup> Научный руководитель – руководитель Центра Новых Информационных Технологий СПбГЭТУ, к.т.н., доцент Татаринюв Ю. С.

<sup>2</sup> Петров Дмитрий Леонидович, начальник лаборатории (DLPetrov@mail.eltech.ru)



ограниченном наборе устройств хранения. Процедура балансировки нагрузки в распределенных хранилищах является относительно простой и заключается лишь в выборе устройства из этого ограниченного набора.

Основная же задача распределенных хранилищ данных – регулярная переконфигурация, которая должна осуществляться всякий раз после изменения потребностей к данным [8, 9, 10, 14, 16]. Переконфигурация заключается в оптимизации распределения данных по устройствам хранения, входящим в состав хранилища. Этот процесс требует перемещения больших объемов данных и занимает много времени.

Одновременное перемещение больших объемов данных приводит к резкому падению производительности. Поэтому обычно принимают, что любое из устройств хранения одновременно может участвовать не более чем в одной операции передачи данных. Также принимают, что перемещаемые элементы данных имеют фиксированный размер и время передачи между любыми устройствами хранения. Задача составления оптимального плана перемещения данных в хранилище называется задачей миграции данных [10]. Полученный в результате ее решения план миграции данных позволяет выполнить процедуру миграции предельно быстро, т. е. оптимизация плана миграции приводит к оптимизации времени миграции. Доказано, что задача миграции данных *NP*-сложная [10], т. е. невозможно получить оптимальное решение за полиномиальное время. Существуют аппроксимационные алгоритмы ее решения [9, 10, 15].

Облачные вычисления сильно меняют взгляды на технологии [5, 17] и, в частности, на технологии хранилищ данных [16, 19]. Хранилища имеют фиксированное количество устройств хранения, соединенных сетью. Облачными хранилищами будем называть хранилища, основанные на «облачной» инфраструктуре, т. е. инфраструктуре, предоставляемой по требованию *IaaS* (*Infrastructure as a Service*). *IaaS*-инфраструктура позволяет, не ограничиваясь фиксированным количеством устройств хранения, временно арендовать дополнительные устройства в слу-

чае необходимости. И наоборот, высвобождать устройства, когда необходимость в них отпала. Изменение состава устройств хранения называется масштабированием. Именно возможность масштабироваться отличает облачные хранилища от традиционных [19]. Устройства, добавляемые к хранилищу или высвобождаемые из хранилища, будем называть масштабируемыми устройствами. Добавление или удаление устройств должно происходить во время переконфигурации хранилища.

Задача миграции данных в общем виде является *NP*-сложной [10]. Задача миграции данных в масштабируемом облачном хранилище является частным случаем задачи миграции, она была сформулирована автором этой статьи в [16] как задача многокритериальной оптимизации времени миграции. Первый критерий задачи – оптимизация времени миграции на масштабируемых устройствах хранения, т. е. оптимизация времени масштабирования. Второй критерий – оптимизация времени миграции на остальных устройствах. Эффективное решение поставленной задачи позволит предельно быстро масштабировать хранилища данных, снижая стоимость на аренду устройств хранения.

В этой статье представлен алгоритм решения задачи миграции данных в масштабируемых облачных хранилищах, а также доказана полиномиальность алгоритма и его оптимальность по первому критерию – скорости масштабирования.

## **1. Существующие алгоритмы**

### **1.1. ЗАДАЧА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДАННЫХ**

Перед переконфигурацией хранилища необходимо вычислить оптимальное расположение данных в хранилище. Выходными данными этой задачи является отображение, в котором каждому элементу данных сопоставляются устройства хранения, на которых он должен быть после переконфигурации. Задача является *NP*-сложной, но были разработаны полиномиальные аппроксимационные алгоритмы ее решения [8, 14]. Вычислив новое расположение данных и имея старое расположение, можно построить направленный мультиграф без циклов  $G$ , демонстрирующий пе-

ремещение элементов данных из старой конфигурации в новую. Этот граф называют графом требований [10]:

$$(1) \quad \begin{aligned} G &= (V, E, P) \\ E &\subseteq V \times V \\ P &: E \rightarrow \mathbb{N} \\ \forall v, w \in V, P(v, w) &= 0 \text{ если } (v, w) \notin E \end{aligned}$$

$V$  – устройства хранения;  $E$  – операция перемещения;  $P$  – весовая функция мультиграфа.

### 1.2. ЗАДАЧА МИГРАЦИИ ДАННЫХ

План миграции можно разбить на шаги, поскольку все элементы данных имеют фиксированный размер и одинаковое время передачи. В данной работе мы не учитываем емкость устройств хранения. Задача миграции данных заключается в составлении плана перемещения данных между устройствами хранения согласно графу требований (1) за минимальное число шагов. Очевидно, что задача в таком виде элементарно сводится к задаче раскраски дуг мультиграфа. Минимальное число цветов раскраски дуг мультиграфа называют хроматическим индексом мультиграфа и обозначают  $\chi'$ . Следует заметить, что направление передачи данных в хранилище не имеет значения с точки зрения задачи миграции [10]. Устройство считается занятым независимо от того, принимает оно данные или передает. Замена направленного мультиграфа на ненаправленный позволит сократить минимальное количество цветов раскраски:

$$(2) \quad \begin{aligned} G &= (V, E, P) \\ E &\subseteq V \times V \\ P &: E \rightarrow \mathbb{N} \\ \forall v, w \in V &\Rightarrow P(v, w) = P(w, v) \end{aligned}$$

### 1.3. АЛГОРИТМЫ РАСКРАСКИ РЕБЕР МУЛЬТИГРАФОВ

Задача раскраски дуг мультиграфа в общем виде является  $NP$ -сложной [12] и, следовательно, алгоритмы ее точного решения требуют полного перебора всех вариантов и имеют экспонен-

циальную вычислительную сложность, т. е. не являются полиномиальными.

**Алгоритм 1** (Раскраска ребер мультиграфа). В учебнике [2] описан неполиномиальный алгоритм раскраски ребер мультиграфа, основанный на полном переборе всех вариантов раскраски ребер.

Низкая эффективность неполиномиальных алгоритмов не позволяет использовать их на практике. Для задачи раскраски ребер мультиграфа существует множество аппроксимационных полиномиальных алгоритмов [7, 11].

**Алгоритм 2** (Полиномиальная раскраска ребер). В статье [11] описан полиномиальный аппроксимационный алгоритм раскраски ребер мультиграфа с вычислительной сложностью  $O(|A|(|V| + \delta))$ , где  $A$  – множество ребер мультиграфа;  $V$  – множество вершин;  $\delta$  – некоторая константа.

Алгоритм основан на принципе «разделяй и властвуй». Общее решение для всего графа выстраивается из объединения частных решений для множества раскрашенных подграфов. В начале работы алгоритма максимальный размер подграфов ограничен небольшим числом. Ребра выбираются последовательно в произвольном порядке и формируют новые подграфы или входят в состав уже известных. При определенных условиях новое ребро может объединить два подграфа в один. В процессе работы алгоритма максимальный размер подграфов постепенно увеличивается. После прохода по всем ребрам раскрашенные подграфы объединяются в единый граф с общей раскраской.

В работе существующие алгоритмы не описываются подробно, а лишь приводятся ссылки на них.

Раскраска дуг двудольного мультиграфа является частным случаем задачи раскраски дуг, но эта задача не принадлежит классу  $NP$ -сложных задач. Вероятно, первое решение этой задачи было предложено в работе [13]. Но существуют алгоритмы с меньшей трудоемкостью:

**Алгоритм 3** (Раскраска ребер двудольного мультиграфа). В статье [4] можно найти описание оптимального алгоритма

раскраски ребер с вычислительной сложностью  $O(|A| \log D)$ , где  $A$  – множество ребер;  $D$  – максимальная степень вершин мультиграфа.

Алгоритм 3, аналогично алгоритму 2, основан на принципе «разделяй и властвуй». Но в случае простого, двудольного графа можно определить правила добавления ребер к тем или иным подграфам и правила объединения подграфов, которые позволяют формировать заведомо оптимальную раскраску на каждом шаге алгоритма.

Для оценки эффективности алгоритма потребуется следующая теорема, позволяющая приближенно оценить значение хроматического индекса произвольного мультиграфа:

**Теорема 1** (Теорема Визинга).  $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$ , где  $G$  – произвольный граф;  $\Delta(G)$  – максимальная степень вершины.

Доказательство. См. [1] ■

## 2. Миграция данных в масштабируемых облачных хранилищах

### 2.1. МОДЕЛЬ МАСШТАБИРУЕМОГО ОБЛАЧНОГО ХРАНИЛИЩА

Опишем модель масштабируемого облачного хранилища на основе хранилища без ограничений объема устройств хранения (2). Чтобы учесть особенности масштабируемого облачного хранилища, явно выделим подмножество масштабирующих устройств хранения, которое необходимо вывести из строя (или добавить) в результате переконфигурации.

**Определение 1.** *Масштабирующим (scaling) подмножеством  $S$  будем называть подмножество вершин, которые необходимо вывести из строя или добавить к хранилищу в результате переконфигурации. Среди операций передачи данных не может быть операций передачи с одного масштабирующего устройства на другое, т. е.*

$$(3) \quad \forall v, w \in S \subseteq V \Rightarrow P(v, w) = 0$$

**Определение 2.** Масштабируемым облачным хранилищем  $G$  будем называть хранилище с явно выделенным масштабирующим подмножеством  $S$ .

$$(4) \quad \begin{aligned} G &= (V, E, P, S) \\ \forall v, w \in S \subseteq V &\Rightarrow P(v, w) = 0 \end{aligned}$$

## 2.2. РАЗБИЕНИЕ МАСШТАБИРУЕМОГО ОБЛАЧНОГО ХРАНИЛИЩА

Во время масштабирования необходимо выполнить процедуру миграции на всех масштабирующих устройствах  $S$ . После этого их можно высвободить и выполнить миграцию данных на оставшихся устройствах хранения.

Разделим процедуру миграции на две части: масштабирование и остаточную миграцию. Для решения подобных задач часто используют методы разделения графов на подграфы [3, 6]. Разделим граф масштабируемого облачного хранилища  $G$  на два подграфа: масштабирующий подграф  $G_S$  и остаточный  $G_R$ .

**Определение 3.** Масштабирующим подграфом  $G_S$  будем называть подграф масштабируемого облачного хранилища  $G$ , образованный множеством вершин  $S$  и множеством вершин  $S_{adj}$ , смежными с  $S$ , а также всеми дугами, соединяющими вершины  $S$  с  $S_{adj}$ .

$$(5) \quad \begin{aligned} G_S &= (V_S, E_S, P) \\ V_S &\subseteq V \\ E_S &\subseteq E \\ v \in S_{adj} \subseteq V &\Leftrightarrow \exists w \in S, P(v, w) > 0 \\ V_S &= S \cup S_{adj} \\ (v, w) \in E_S &\Leftrightarrow v \in S, w \in S_{adj}, P(v, w) > 0 \end{aligned}$$

В последней формуле определения (5) выражение  $v \in S, w \in S_{adj}, P(v, w) > 0$  эквивалентно выражению  $v \in S_{adj}, w \in S, P(v, w) > 0$ , поскольку граф  $G$  ненаправленный, в соответствии с (2). В левой части рис. 1 показан граф  $G$ , подмножество  $S$  (черные вершины) и  $S_{adj}$  (заштрихованные вершины).

**Определение 4.** *Остаточным (residual) подграфом  $G_R$  будем называть подграф масштабируемого облачного хранилища  $G$ , образованный всеми дугами графа  $G$  без масштабирующего подмножества  $S$ , и все дуги, соединяющие эти вершины.*

$$\begin{aligned}
 G_R &= (V_R, E_R, P) \\
 V_R &\subseteq V \\
 (6) \quad E_R &\subseteq E \\
 V_R &= V \setminus S \\
 (v, w) \in E_R &\Leftrightarrow v, w \in V_R, P(v, w) > 0
 \end{aligned}$$

Очевидно, что множество вершин  $S_{adj}$  принадлежит как  $G_S$ , так и  $G_R$ , в соответствии с их определениями (5) и (6). Дуги, соединяющие вершины  $S_{adj}$ , лежат только в  $G_R$ . В правой части рис. 1 изображен граф, разделенный на два подграфа  $G_S$  и  $G_R$ .

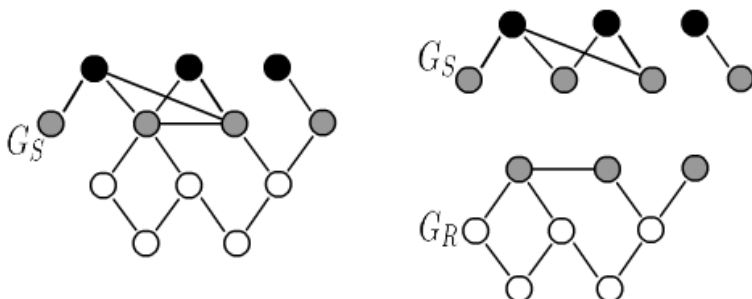


Рис. 1. Разбиение графа масштабируемого облачного хранилища  $G$  на два подграфа:  $G_S$  и  $G_R$

### 2.3. ЗАДАЧА МИГРАЦИИ ДАННЫХ В МАСШТАБИРУЕМОМ ОБЛАЧНОМ ХРАНИЛИЩЕ

Используя введенные термины, можно сформулировать задачу миграции данных в масштабируемом облачном хранилище.

**Определение 5.** *Задача миграции данных в масштабируемом облачном хранилище  $G$  – это многокритериальная задача*

оптимизации времени миграции. Основным критерием задачи является время миграции в подграфе  $G_S$ , а второй критерий – время миграции в подграфе  $G_R$ .

### **3. Алгоритмы миграции данных в масштабируемом облачном хранилище**

Опишем алгоритм миграции данных в масштабируемом облачном хранилище, дающий оптимальный результат по первому критерию – оптимальности времени масштабирования. Для этого докажем, что масштабирующий подграф  $G_S$  является двудольным мультиграфом, для которого существуют оптимальные полиномиальные алгоритмы раскраски дуг.

**Лемма 1.** *Масштабирующий подграф  $G_S$  является двудольным.*

**Доказательство.** Масштабирующий подграф состоит из множества вершин  $S$  и вершин  $S_{adj}$ , смежных с  $S$ , исходя из определения (5). Докажем, что множества вершин  $S$  и  $S_{adj}$  разбивают граф  $G_S$  на две доли, т. е. в графе нет дуг, идущих из  $S$  в  $S$  или же из  $S_{adj}$  в  $S_{adj}$ .

Вершины из множества  $S_{adj}$  не имеют общих дуг, поскольку это противоречит определению масштабирующего подмножества (3), входящего в состав масштабируемого облачного хранилища (4). Также из (5) следует, что любая его дуга соединяет вершины из  $S$  только с вершинами из  $S_{adj}$ . Следовательно, вершины из  $S_{adj}$  также не могут иметь общих дуг. Таким образом, множества вершин  $S$  и  $S_{adj}$  составляют две доли двудольного мультиграфа  $G_S$ .

**Алгоритм 4 (Миграция данных).** Для решения задачи будем использовать метод уступок. Выделив два критерия оптимизации, будем оптимизировать алгоритм по первому критерию, для чего потребуется поступиться эффективностью по второму критерию. Первый частный критерий – время масштабирования, т. е. миграция данных на масштабирующем подграфе  $G_S$ . Второй критерий – время миграции на остальных устройствах, т. е. миграция дан-



ных на подграфе  $G_R$ . Опишем алгоритм в виде последовательности шагов, описанных выше.

1. Выделить подграф  $G_S$  из графа  $G$  на основе известного подмножества  $S$ .

2. Выделить подграф  $G_R$  из  $G$  на основе подграфа  $G_S$ .

3. Использовать алгоритм 3 для расчета плана миграции двудольного мультиграфа  $G_S$ .

4. Использовать переборный алгоритм 1 для расчета плана миграции мультиграфа  $G_R$ .

5. Получить общий плана миграции масштабируемого облачного хранилища  $G$  путем последовательного объединения планов миграции мультиграфа  $G_S$  с планом миграции  $G_R$ .

**Алгоритм 5** (Полиномиальная миграции данных). Шаги аналогичны алгоритму 4. Но на шаге 4 используется полиномиальный алгоритм 2 вместо переборного алгоритма 1.

**Теорема 2** (Оптимальность алгоритмов 4 и 5).

*Предложенные алгоритмы 4 и 5 оптимальны по первому критерию задачи миграции данных в масштабируемом облачном хранилище, сформулированной в определении 5.*

**Доказательство.** Рассмотрим сначала алгоритм 4. В соответствии с доказанной леммой 1, подграф  $G_S$  является двудольным мультиграфом, и для нахождения оптимальной раскраски дуг  $G_S$  в алгоритме используется полиномиальный алгоритм 3, который дает оптимальное время миграции подграфа  $G_S$ . Исходя из постановки задачи, сформулированной в определении 5, оптимальность алгоритма по первому критерию обеспечивается благодаря оптимальности времени миграции подграфа  $G_S$  (шаг 3 алгоритма). То есть алгоритм 4 является оптимальным по первому критерию.

Полиномиальный алгоритм 5 отличается от 4 только шагом 4, а оптимальность, как показано выше, обеспечивается на шаге 3. Следовательно, алгоритм 5 также является оптимальным по первому критерию. ■

**Теорема 3** (Полиномиальность алгоритма 5).

*Предложенный алгоритм 5 имеет полиномиальную вычис-*

лительную сложность.

**Доказательство.** Очевидно, что шаги 1 и 2 алгоритма 5 являются полиномиальными, поскольку вычисление вершин  $S_{adj}$ , смежных с  $S$ , – задача тривиальная, а выделение подграфов  $G_S$  и  $G_R$ , состоящих из заданных вершин, имеет линейную сложность от количества вершин  $O(|V|)$ . Шаги 3 и 4 также являются полиномиальными, их вычислительная сложность равна  $O(|A| \log \Delta)$  и  $O(|A|(|V| + \delta))$ , в соответствии с алгоритмом 2 и алгоритмом 3, где  $A$  – множество ребер;  $V$  – множество вершин;  $\Delta$  – максимальная степень вершин;  $\delta$  – некоторая константа.

Результат выполнения шагов 3 и 4 – два плана миграции, состоящие из последовательности операций перемещения данных (дуг подграфов), а шаг 5 состоит из простой операции последовательного объединения двух планов миграции. Очевидно, что шаг 5 имеет линейное время выполнения  $O(|A|)$ , зависящее от числа ребер графа  $G$ .

Поскольку алгоритм 5 является последовательным объединением шагов 1–5, его вычислительная сложность равна сложности наиболее затратного шага:  $\max\{O(|V|), O(|A| \log \Delta), O(|A|(|V| + \delta)), O(|A|)\} = \max\{O(|A| \log \Delta), O(|A|(|V| + \delta))\}$ . Из этого следует, что алгоритм имеет полиномиальную сложность. ■

#### **4. Экспериментальная оценка эффективности алгоритма**

##### **4.1. ЗАДАЧА ОЦЕНКИ ЭФФЕКТИВНОСТИ**

Используя традиционные алгоритмы миграции данных, масштабирование облачного хранилища можно произвести только после полного выполнения процедуры миграции данных. Это связано с тем, что масштабирующиеся устройства хранения могут быть задействованы в процедуре миграции данных до самых последних шагов. Разработанный алгоритм выделяет в графе хранилища  $G$  масштабирующий подграф  $G_S$ , содержащий все масштабирующиеся устройства. Это позволяет скорее выполнить процедуру миграции на этих устройствах и высвободить их с целью экономии затрат на аренду устройств. Обратной стороной алго-

ритма является необходимость выполнения остаточной миграции в подграфе  $G_R$  после выполнения миграции в  $G_S$  и последовательное объединение шагов миграции, которое увеличивает общее время миграции.

С практической точки зрения интересны ответы на следующие вопросы:

- на сколько уменьшается время (количество шагов) масштабирования?
- на сколько увеличивается время полной процедуры миграции?

Такие оценки удобно производить в процентах относительно общего времени миграции  $G$  с использованием традиционных алгоритмов.

Количество шагов в плане миграции равно количеству цветов раскраски дуг соответствующего мультиграфа хранилища, т. е. его хроматическому индексу  $\chi'$ . Значения хроматических индексов  $\chi'(G)$ ,  $\chi'(G_S)$  и  $\chi'(G_R)$  соответствуют количеству шагов в плане миграции для соответствующих графов хранилищ. В качестве приближенной оценки  $\chi'$ , в соответствии с теоремой 1, можно использовать максимальную степень вершин мультиграфа  $\Delta$  плюс 1. Будем обозначать эту оценку как  $\Delta'$ . Использование приближенных оценок  $\Delta'$  вместо  $\chi'$  позволяет быстро и достаточно точно произвести оценку, не прибегая к трудоемкой процедуре вычисления раскраски ребер мультиграфа.

Эффективность переборного алгоритма 4 можно оценить формально, поскольку он дает оптимальный результат. Эффективность алгоритма 5 оценивать не будем, поскольку он является приближением алгоритма 4 и отличается от алгоритма 4 лишь планом миграции в подграфе  $G_R$ , что не существенно с точки зрения первого критерия оптимизации (определение 5).

#### 4.2. МЕТОДИКА ОЦЕНКИ

Исходя из задачи оценки эффективности алгоритмов миграции данных в облачном хранилище будем использовать следующие параметры оценки:

- $P_{step} = \chi'(G) - \chi'(G_S) \approx \Delta'(G) - \Delta'(G_S)$  – время (кол-во шагов) масштабирования, которое было сэкономлено в результате применения алгоритма;
- $P_{rel} = \frac{P_{step}}{\chi'(G)} \approx \frac{\Delta'(G) - \Delta'(G_S)}{\Delta'(G)}$  – относительный выигрыш от масштабирования, соответствующий сэкономленному времени по сравнению с традиционным алгоритмом;
- $L_{step} = \chi'(G_S) + \chi'(G_R) \approx \Delta'(G_S) + \Delta'(G_R)$  – общее время миграции данных с новым алгоритмом;
- $L_{rel} = \frac{L_{step}}{\chi'(G)} - 1 \approx \frac{\Delta'(G_S) + \Delta'(G_R)}{\Delta'(G)} - 1$  – относительный проигрыш времени от разделения графа, соответствующий дополнительно затраченному времени на миграцию от общего времени миграции данных.

Можно вычислить абсолютный выигрыш от масштабирования в машино-часах (точнее в машино-шагах), которые будут сэкономлены в результате применения алгоритма:  $P = P_{step} * |S|$ .

Проигрыш времени процедуры миграции (абсолютный проигрыш  $L$ ) не приводит к потере ресурсов, но он приводит к увеличению времени работы хранилища в режиме переконфигурации и, соответственно, к увеличению времени между последовательными процедурами миграции. Для некоторых видов хранилищ это может быть важной характеристикой.

#### 4.3. ЭКСПЕРИМЕНТ

Для проведения эксперимента было выбрано несколько случайных графов, в которых число масштабирующихся устройств хранения  $|S|$  невелико по сравнению с общим числом устройств хранения  $|V|$ , и количество дуг между устройствами подграфа  $G_S$  также невелико по сравнению с дугами между обычными устройствами из  $G_R$ . Эти условия типичны для прикладных задач, в которых масштабирующиеся устройства нельзя отключать (или подключать) от хранилища в большом количестве, а также

при отключении (включении) устройств хранения не все данные должны передаваться из (на) этого хранилища сразу.

Проведено 4 эксперимента с графами различного размера. Граф хранилища из эксперимент №1 изображен на рис. 1.

Таблица 1. Результаты экспериментов

№	$ V $	$ S $	$\Delta'(G)$	$\Delta'(G_S)$	$\Delta'(G_R)$	$P_{rel}$	$P$	$L_{rel}$
1	12	3	5	3	3	40%	6	20%
2	20	5	13	6	13	54%	35	46%
3	28	12	17	8	16	53%	108	41%
4	37	16	22	11	22	50%	176	50%

В результате эксперимента было выяснено, что для хранилищ с относительно небольшим количеством масштабирующихся устройств хранения предложенный алгоритм способен обеспечить экономию времени масштабирования на 40–60% по сравнению с существующими алгоритмами. При этом общее время миграции данных может увеличиться на 20–50%.

#### 4.4. ВОЗМОЖНЫЕ УЛУЧШЕНИЯ АЛГОРИТМА

Увеличение общего времени миграции на 20–50% для некоторых видов хранилищ может являться существенной проблемой, несмотря на оптимальное время масштабирования. Предложенный алгоритм можно улучшить. Основной способ улучшения алгоритма – замена последовательного объединения планов миграции в подграфах  $G_S$  и  $G_R$  на «параллельное объединение» с целью сокращения общего количества цветов раскраски. Проще говоря, во время миграции данных в подграфе  $G_S$  можно параллельно выполнять миграцию в подграфе  $G_R$  таким образом, чтобы она не влияла на миграцию в  $G_S$ , сохраняя тем самым оптимальность алгоритма по первому критерию.

Допустимы как минимум два подхода сокращения общего количества цветов раскраски:

- раздельная раскраска  $G_S$  и  $G_R$  (как это делается в алгоритмах 4 и 5), но при составлении общего плана миграции  $G$

для каждого цвета в раскраске  $G_S$  производить поиск такого цвета в  $G_R$ , чтобы эти цвета можно было объединить в один цвет в общей раскраске  $G$

- расширить двудольный граф  $G_S$  вершинами и ребрами из  $G_R$  так, чтобы количество цветов раскраски расширенного  $G_S$  не увеличилось, а количество цветов раскраски  $G_R$  уменьшилось

Указанные улучшения требуют дополнительной проработки и подробно не рассматриваются в данной работе.

## 5. Выводы

В статье описана многокритериальная оптимизационная задача миграции данных в масштабируемых облачных хранилищах и предложены алгоритмы ее решения. Задача разделяет общую задачу миграции на две подзадачи: масштабирования и остаточной миграции. Основным критерий оптимизации – минимизация времени (шагов) масштабирования. Показано, что задача является *NP*-сложной.

Предложено два алгоритма решения задачи: переборный алгоритм и аппроксимационный алгоритм полиномиальной вычислительной сложности  $\max\{O(|A| \log \Delta), O(|A|(|V| + \delta))\}$ , где  $A$  – множество ребер;  $V$  – множество вершин;  $\Delta$  – максимальная степень вершин;  $\delta$  – некоторая константа. Доказано, что алгоритмы дают оптимальный результат по первому критерию – минимизации времени масштабирования.

Экспериментально показано, что для хранилищ с относительно небольшим количеством масштабирующихся устройств хранения предложенный алгоритм способен обеспечивать экономию времени масштабирования на 40–60% по сравнению с существующими алгоритмами. При этом общее время миграции данных может увеличиться на 20–50%.

Оптимальная скорость масштабирования позволит облачным хранилищам предельно быстро арендовать и высвобождать устройства хранения данных и, тем самым, минимизировать срок

и стоимость аренды устройств, предоставляемых как инфраструктура по требованию *IaaS*.

### Литература

1. ВИЗИНГ В. Г. *Хроматический класс мультиграфа* // Кибернетика. – 1965. – №3. – С. 29–39.
2. ЕВСТИГНЕЕВ В., КАСЬЯНОВ В. *Графы в программировании: обработка, визуализация и применение*. – С.-Пб.: БХВ-Петербург, 2003. – 1104 с.
3. BERGER M., BOKHARI S. *Partitioning strategy for nonuniform problems on multiprocessors* // IEEE Transactions on Computers. – 1987. –С-36(5). – P. 570–580
4. COLE R., OST K., SCHIRRA S. *Edge-coloring bipartite multigraphs in  $O(E \log D)$  time* // Combinatorica. – 2001. – №21. – P. 5–12.
5. DELIC K. A., WALKER M. A. *Emergence of the academic computing clouds* // ACM Ubiquity. – 2008. – Vol. 9, Iss. 31. – P. .
6. GEORGE A., LIU J. *Computer Solution of Large Sparse Positive Definite Systems*. – Prentice-Hall, Englewood Cliffs NJ, 1981.
7. GOLDBERG M. K. *Edge-coloring of multigraphs: Recoloring technique* // J. Graph Theory. – 1984. – №8. – P. 121–137.
8. GOLUBCHIK L., KHANNA S., KHULLER S., THURIMELLA R. AND ZHU A. *Approximation Algorithms for Data Placement on Parallel Disks* // Proc. of ACM-SIAM SODA, 2000.
9. GOLUBCHIK L., KHULLER S., KIM Y. A., SHARGORODSKAYA S., WAN Y. *Data Migration on Parallel Disks: Algorithms and Evaluation* // Algorithmica. – 2006. – №45(1). – P. 137–158.
10. HALL J., HARTLINE J., KARLIN A., SAIA J., WILKES J. *On Algorithms for Efficient Data Migration* // ACM Symposium on Discrete Algorithms. – 2001. – P. 620–629.

11. HOCHBAUM D. S., NISHIZEKI T., SHMOYS D. B. *A better than "Best Possible" algorithm to edge color multigraphs* // J. off Algorithms. – 1986. – №7. – P. 79–104.
12. HOLYER I. *The NP-completeness of Edge-Coloring* // SIAM J. Comp. – 1982. №11. – P. 117–129.
13. HOPCROFT J., KARP R. *An  $n$ . 5/2 algorithm for maximum matchings in bipartite graphs* // SIAM J. Comput. – 1973. – №2. – P. 225–231.
14. KASHYAP S., KHULLER S. *Algorithms for Non-Uniform Size Data Placement on Parallel Disks* // Conference on Foundations of Software technology and Theoretical Computer Science, LNCS 2914. – 2003. – P. 265–276.
15. KHULLER S., KIM Y. A. *Algorithms for Data Migration with Cloning* // SIAM Journal on Computing. – 2004. – Vol. 33, №2. – P. 448–461.
16. PETROV D. L., TATARINOV Y. *Data migration in the scalable storage cloud* // IEEE, International Conference on Ultra Modern Telecommunications, ICUMT, St. Petersburg, 2009.
17. ROBISON S. *A Bright Future in the Cloud* // Financial Times, March 4, 2008.
18. SHIRAZI B. A., KAVI K. M., HURSON A. R. *Scheduling and Load Balancing in Parallel and Distributed Systems* // IEEE Computer Society Press. – 1995. – 448 p.
19. ZUCKERMAN B. *Scalable storage in the cloud* // Cloud Slam Conference, 2009. – URL: <http://cloudslam09.com>.



## **OPTIMAL ALGORITHM FOR DATA MIGRATION IN SCALABLE STORAGE CLOUDS**

**Dmitry L. Petrov**, Saint Petersburg Electrotechnical University  
«LETI», Saint Petersburg, Head of Laboratory  
(DLPetrov@mail.eltech.ru).

*Abstract: The problem of multi-criteria optimization of data migration schedule in distributed cloud storage is investigated. The algorithm for data migration in scalable cloud storage is developed. We prove that the algorithm has polynomial computational complexity and results in the optimal value of the first criterion.*

Keywords: computing clouds, distributed storage system, data migration.

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии М. В. Губко*