УДК 517.977.58
ББК 22.161.8

МЕТОД УЛУЧШЕНИЯ ДЛЯ ДИСКРЕТНОЙ УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЫ С СЕТЕВОЙ СТРУКТУРОЙ[1]

Батурин В. А.[2], **Лемперт А. А.**[3]
(*Учреждение Российской академии наук Институт динамики систем и теории управления СО РАН, Иркутск*)

Работа посвящена построению приближенных методов решения дискретных задач оптимального управления с сетевой структурой, использующих достаточные условия оптимальности В. Ф. Кротова.

Ключевые слова: дискретная управляемая система, сетевая структура, метод улучшения управления.

Введение

Объекты, описываемые математическими моделями в виде дискретной управляемой системы с сетевой структурой встречаются достаточно часто в прикладных задачах химического или экологического содержания. Для построения алгоритмов улучшения в таких задачах используется технология достаточных условий оптимальности [3]. Методы улучшения для классической задачи оптимального управления дискретными системами построены в [1]. Предлагаемый в работе метод является обобщением одного из алгоритмов данного семейства применительно к задаче оптимального управления с сетевой структурой.

---

[1] *Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 08-01-00156.*

[2] *Владимир Александрович Батурин, доктор физико-математических наук, профессор* (*rozen@icc.ru*).

[3] *Анна Ананьевна Лемперт, кандидат физико-математических наук* (*lempert@icc.ru*).

1. Постановка задачи

Пусть задан ориентированный граф (рис. 1) с вершинами $i = \overline{0, N+h}$. Обозначим:

A_i – множество номеров вершин j таких, что в заданном графе существует ребро ij, причем $j < i$, B_i – множество номеров вершин j таких, что в заданном графе существует ребро ij, причем $j > i$.

Пусть первые k вершин графа являются входными, а последние h вершин – выходными, т.е. $A_i = \varnothing$ при $i = \overline{0, k}$ и $B_i = \varnothing$ при $i = \overline{N+1, N+h}$.

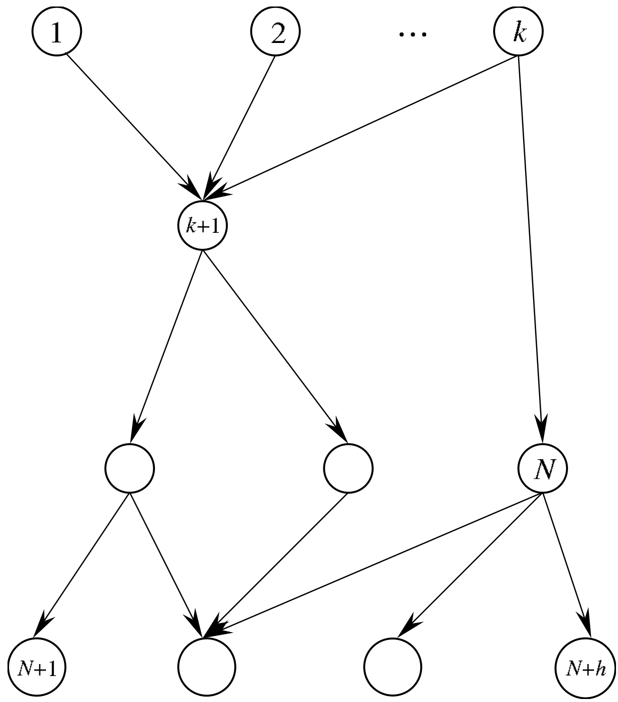

Рис. 1. Ориентированный граф

В каждой вершине графа состояние процесса описывается своей математической моделью в форме дискретной управляемой системы:

$$x^i(t^i+1) = f^i\left(t^i, x^i(t^i), u^i(t^i)\right), \tag{1}$$

где $t_i \in \{t_0^i, t_0^i+1, ..., t_1^i\}$, $i = \overline{0, N}$, $j \in B_i$.

Далее индекс i у t будем опускать.

Начальные условия в каждой вершине определяются из следующих соотношений:

$$\begin{gathered} x^i(t_0^i) = x_0^i, i = \overline{0, k}, \\ x^i(t_0^i) = \kappa^i\left(x^{l_1}(t_1^{l_1}), \ldots, x^{l_p}(t_1^{l_p})\right), \\ l_1, ..., l_p \in A_i,\ i = \overline{k+1, N}. \end{gathered} \tag{2}$$

Функции $x^i(t)$ принимают значения в евклидовом пространстве $R^{n(i)}$; $u^i(t) \in U_i \subset R^{m(i)}$; κ^i – заданные функции.

Обозначим $x = \left(x^1(t), x^2(t), \ldots, x^{N+h}(t)\right)'$, $u = \left(u^1(t), u^2(t), \ldots, u^{N+h}(t)\right)'$.

Множество троек (x, u, a), удовлетворяющих перечисленным условиям, а также связям (1) и начальным условиям (2), будем называть множеством допустимых и обозначать D, предполагается, что $D \neq \emptyset$.

Определим функционал

$$I(x, u) = F\left(x^{N+1}(t_1^{N+1}), \ldots, x^{N+h}(t_1^{N+h})\right) \to \min. \tag{3}$$

2. Метод улучшения

Пусть $\varphi^i(t, x^i)$ – функции, непрерывно дифференцируемые по x^i, $t \in \left\{t_0^i, t_0^i+1, ..., t_1^i\right\}$, $i = \overline{1, N+h}$. Обозначим $x_0^i = x^i(t_0^i)$, $x_1^i = x^i(t_1^i)$ и введем следующие конструкции.

$$R^i(t, x^i, u^i) = \varphi^i\left(t+1, f^i(t, x^i, u^i)\right) - \varphi^i(t, x^i) + \frac{1-\alpha}{2}\|\Delta u^i\|^2,$$

$$G^i(x_0^i, x_1^i) = \varphi^i(t_1^i, x_1^i) - \varphi^i(t_0^i, x_0^i) + \frac{1-\alpha}{2}\|\Delta x_1^i\|^2.$$

Обозначим

$$\Gamma(x_0, x_1) = F\Big(x_1^{N+1}, \ldots, x_1^{N+h}\Big) + \sum_{i=1}^{N+h} G^i\Big(x_0^i, x_1^i\Big),$$

$$L(x,u) = \Gamma(x_0, x_1) - \sum_{i=1}^{N+h} \sum_{t_0^i}^{t_1^i - 1} R^i\left(t, x^i(t), u^i(t)\right) dt.$$

Относительно постановки задачи сделаем следующие предположения: $U_i = R^{m(i)}$.

Пусть заданы управления $u_I^i(t)$ и соответствующие состояния $x_I^i(t)$. Требуется найти $u_{II}^i(t), x_{II}^i(t),\ i = \overline{1, N+h}$, такие, что

$$I\left(x_{II}, u_{II}\right) \leqslant I\left(x_I, u_I\right).$$

Пусть функции $f^i(t, x^i, u^i)$, дважды непрерывно дифференцируемы по x^i, u^i, функции F, κ^i, дважды непрерывно дифференцируемы по своим аргументам, $i = \overline{1, N+h}$.

Функции Кротова будем искать в классе линейно-квадратичных функций:

$$\varphi^i(t, x^i) = \psi'^i(t)\Delta x^i + \frac{1}{2}\Delta x'^i \sigma^i(t) \Delta x^i,$$

где $\psi^i(t)$ – $n(i)$ – векторы; $\sigma^i(t)$ – $(n(i){\times}n(i))$ – симметрические матрицы; $\Delta x^i = x^i - x_I^i(t)$, $\Delta u^i = u^i - u_I^i(t)$.

Рассмотрим приращение функционала L.

$$\Delta L(x,u) = \Delta\Gamma(x_0, x_1) - \sum_{i=1}^{N+h} \sum_{t_0^i}^{t_1^i - 1} \Delta R^i\left(t, x^i(t), u^i(t)\right) dt.$$

Приращение функций Γ и R^i разложим в ряд Тейлора до слагаемых 2-го порядка включительно.

Выпишем частные производные функции Γ, аргументы функций κ^i для краткости будем опускать.

При $i = \overline{1, N}$:

$$\Gamma_{x^i(t_1^i)} = \psi^i(t_1^i) - \sum_{z \in B_i} \psi^z(t_0^z) \cdot \kappa^z_{x_1^i},$$

$$\Gamma_{x^i(t_1^i)\, x^i(t_1^i)} = -\sum_{z \in B_i} \left(\left(\psi^z(t_0^z) \cdot \kappa^z_{x_1^i} \right)'_{x_1^i} + \kappa'^z_{x_1^i} \cdot \sigma^z(t_0^z) \cdot \kappa^z_{x_1^i} \right) + \\ + \sigma^i(t_1^i) + (1-\alpha) E^{n(i)}.$$

При $i=\overline{N+1,N+h}$:

$$\Gamma_{x^i(t_1^i)}=\alpha F_{x_1^i}+\psi^i(t_1^i),$$

$$\Gamma_{x^i(t_1^i)\,x^i(t_1^i)}=\alpha F_{x_1^i\,x_1^i}+\sigma^i(t_1^i)+(1-\alpha)E^{n(i)}.$$

Тогда

$$\Delta\Gamma=\sum_{i=1}^{N}\Bigg[\Bigg(\psi^i(t_1^i)-\sum_{z\in B_i}\psi^z(t_0^z)\cdot\kappa^z_{x_1^i}\Bigg)'\Delta x_1^i+$$
$$+\tfrac{1}{2}\Delta x_1^i\Bigg(\sigma^i(t_1^i)-\sum_{z\in B_i}\Bigg(\Big(\psi^z(t_0^z)\cdot\kappa^z_{x_1^i}\Big)'_{x_1^i}+\kappa'^z_{x_1^i}\cdot\sigma^z(t_0^z)\cdot\kappa^z_{x_1^i}\Bigg)+$$
$$+(1-\alpha)E^{n(i)}\Bigg)\Delta x_1^i\Bigg]+\sum_{i=N+1}^{N+h}\Bigg[\Big(\alpha F_{x_1^i}+\psi^i(t_1^i)\Big)'\Delta x_1^i+$$
$$+\tfrac{1}{2}\Delta x_1^i\Big(\alpha F_{x_1^i\,x_1^i}+\sigma^i(t_1^i)+(1-\alpha)E^{n(i)}\Big)\Delta x_1^i\Bigg]+o(\|\Delta x_1\|^2),$$

$$\Delta R^i=R^i_{x^i}\Delta x^i+R^i_{u^i}\Delta u^i+\tfrac{1}{2}\Big(\Delta x'^i R^i_{x^ix^i}\Delta x^i+$$
$$+\Delta u'^i R^i_{u^iu^i}\Delta u^i+\Delta x'^i R^i_{x^iu^i}\Delta u^i+\Delta u'^i R^i_{u^ix^i}\Delta x^i\Big)+$$
$$+o\left(\left\|\Delta x^i(t)\right\|^2,\left\|\Delta u^i(t)\right\|^2\right).$$

Найдем $\max\limits_{\Delta u^i}\left(dR^i+\frac{1}{2}d^2R^i\right)$, приравнивая к нулю производные по Δu^i, получим

(4) $\quad \Delta u^i=-\left(R^i_{u^iu^i}\right)^{-1}\left(R^i_{u^i}+R^i_{u^ix^i}\Delta x^i\right),\quad i=\overline{1,N+h}.$

Здесь производные функций R^i подсчитываются вдоль начального приближения.

Подставим (4) в приращение функций ΔR^i, получим:

$$\left(R^i_{x^i}-R^i_{u^i}\left(R^i_{u^iu^i}\right)^{-1}R^i_{u^ix^i}\right)\Delta x^i+$$
$$+\tfrac{1}{2}\Delta x'^i\left(R^i_{x^ix^i}-R^i_{x^iu^i}\left(R^i_{u^iu^i}\right)^{-1}R^i_{u^ix^i}\right)\Delta x^i-$$
$$-\tfrac{1}{2}R^i_{u^i}\left(R^i_{u^iu^i}\right)^{-1}R^i_{u^i}+o\left(\left\|\Delta x^i(t)\right\|^2,\left\|\Delta u^i(t)\right\|^2\right).$$

Коэффициенты функций $\varphi^i(t,x^i)$ зададим так, чтобы выполнялись следующие соотношения:

$$\max_{\Delta u^i}\left(dR^i+\frac{1}{2}d^2R^i\right)=c(t),$$

$$d\Gamma+\frac{1}{2}d^2\Gamma=0.$$

Для выполнения данных соотношений при любых Δx^i достаточно, чтобы

$$R^i_{x^i}-R^i_{u^i}\left(R^i_{u^iu^i}\right)^{-1}R^i_{u^ix^i}=0;$$

$$R^i_{x^ix^i}-R^i_{x^iu^i}\left(R^i_{u^iu^i}\right)^{-1}R^i_{u^ix^i}=0;$$

при $i=\overline{1,N}$:

(5) $$\psi^i(t_1^i)=\sum_{z\in B_i}\psi^z(t_0^z)\cdot\kappa^z_{x_1^i};$$

(6) $$\sigma^i(t_1^i)=\sum_{z\in B_i}\left(\left(\psi^z(t_0^z)\cdot\kappa^z_{x_1^i}\right)'_{x_1^i}+\kappa'^z_{x_1^i}\cdot\sigma^z(t_0^z)\cdot\kappa^z_{x_1^i}\right)+ \\ +(1-\alpha)E^{n(i)};$$

при $i=\overline{N+1,N+h}$:

(7) $$\psi^i(t_1^i)=-\alpha F_{x_1^i};$$

(8) $$\sigma^i(t_1^i)=-\alpha F_{x_1^i\,x_1^i}-(1-\alpha)E^{n(i)}.$$

Обозначим $H^i(t,x^i,\psi^i,u^i)=\psi^i(t+1)f^i(t,x^i,u^i), i=\overline{1,N+h}$.

Выпишем производные от функций R^i через производные от функций H^i, f^i, получим

$$R^i_{x^i}=H^i_{x^i}-\psi^i(t),\quad R^i_{u^i}=H^i_{u^i},$$

$$R^i_{x^ix^i}=H^i_{x^ix^i}+f'^i_{x^i}\sigma^i(t+1)f^i_{x^i}-\sigma^i(t),$$

$$R^i_{u^iu^i}=H^i_{u^iu^i}+f'^i_{u^i}\sigma^i(t+1)f^i_{u^i}-(1-\alpha)E^{m(i)},$$

$$R^i_{x^iu^i}=H^i_{x^iu^i}+f'^i_{x^i}\sigma^i(t+1)f^i_{u^i}.$$

Производные функций $H^i(t, x^i, \psi^i, u^i)$ подсчитываются вдоль $(t, x^i_I(t), \psi^i(t+1), u^i_I(t))$.

Окончательно получим следующие соотношения $\left(i = \overline{1, N+h}\right)$:

$$\begin{aligned} \psi^i(t) = H^i_{x^i} - \left(H^i_{x^i u^i} + f'^i_{x^i}\sigma^i(t+1) f^i_{u^i}\right)\left(H^i_{u^i u^i} + \right. \\ \left. + f'^i_{u^i}\sigma^i(t+1) f^i_{u^i} - (1-\alpha)E^{m(i)}\right)^{-1} H^i_{u^i}; \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} \sigma^i(t) = f'^i_{x^i}\sigma^i(t+1) f^i_{x^i} - \left(f'^i_{x^i}\sigma^i(t+1) f^i_{u^i} + H^i_{x^i u^i}\right) \times \\ \times \left(H^i_{u^i u^i} + f'^i_{u^i}\sigma^i(t+1) f^i_{u^i} - (1-\alpha)E^{m(i)}\right)^{-1} \times \\ \times \left(f'^i_{x^i}\sigma^i(t+1) f^i_{u^i} + H^i_{x^i u^i}\right)' + H^i_{x^i x^i}; \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} \Delta u^i = -\left(H^i_{u^i u^i} + f'^i_{u^i}\sigma^i(t+1) f^i_{u^i} - (1-\alpha)E^{m(i)}\right)^{-1} \times \\ \times \left[H^i_{u^i} + \left(H^i_{x^i u^i} + f'^i_{x^i}\sigma^i(t+1) f^i_{u^i}\right)\Delta x^i\right]. \end{aligned} \tag{11}$$

Полученные соотношения определяют алгоритм улучшения 2-го порядка:

1. В каждой вершине графа задаются начальные управления $u^i_I(t)$, из уравнений (1) и начальных условий (2) определяются $x^i_I(t)$.

2. Задается параметр $\alpha \in (0, 1]$ так, чтобы выполнялись неравенства:

$$H^i_{u^i u^i} + f'^i_{u^i}\sigma^i(t+1) f^i_{u^i} - (1-\alpha)E^{m(i)} < 0,$$

   и из уравнений (9), (10) с учетом (5) – (8) находятся $\psi^i(t), \sigma^i(t),\ i = \overline{1, N+h}$.

3. Решаются системы $x^i(t^i+1) = f^i\left(t, x^i, u^i_I + \Delta u^i\right)$, где Δu^i задаются формулой (11), тем самым получается u^i_{II} и x^i_{II}.

4. Сравниваются значения функционалов $I(x_I, u_I)$ и $I(x_{II}, u_{II})$. Если улучшения не произошло, то параметр α уменьшается и процесс повторяется начиная с шага 2.

3. Модельный пример

На рисунке 2 представлена структурная схема задачи.

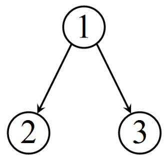

Рис. 2. Ориентированный граф задачи

Процессы в вершинах графа описываются следующими уравнениями.

$$\begin{aligned}
&x^1(t+1) = x^1(t) + u^1(t),\ x^1(0) = 1,\ t \in \{0,1,2\};\\
&x^2(t+1) = 2x^2(t) + u^2(t),\ x^2(0) = x^1(2) + 1,\ t \in \{0,1\};\\
&x^3(t+1) = \left(x^3(t)\right)^2,\ x^2(0) = x^1(2),\ t \in \{0,1\};
\end{aligned}$$

$$I = x^2(1) + x^3(1) \to \min.$$

Проведем одну итерацию метода улучшения.

1. Зададим начальные управления $u_I^1(t) = 1$ и $u_I^2(t) = 1$, тогда в силу системы

$$\begin{aligned}
&x_I^1(0) = 1, x_I^1(1) = 2, x_I^1(2) = 3;\\
&x_I^2(0) = 4, x_I^2(1) = 9;\\
&x_I^3(0) = 3, x_I^3(1) = 9.
\end{aligned}$$

2. Выпишем основные конструкции алгоритма:

$$\begin{aligned}
&H^1(t, x^1, \psi^1, u^1) = \psi^1(t+1)\left(x^1(t) + u^1(t)\right);\\
&H^2(t, x^2, \psi^2, u^2) = \psi^2(t+1)\left(2x^2(t) + u^2(t)\right);\\
&H^3(t, x^3, \psi^3, u^3) = \psi^3(t+1)\left(x^3(t)\right)^2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\psi^1(t) = \psi^1(t+1)\left(1 - \sigma^1(t+1)\left(\sigma^1(t+1) - (1-\alpha)\right)^{-1}\right);\\
&\sigma^1(t) = \sigma^1(t+1)\left(1 - \sigma^1(t+1)\left(\sigma^1(t+1) - (1-\alpha)\right)^{-1}\right);\\
&\psi^1(2) = \psi^2(0) + \psi^3(0);\\
&\sigma^1(2) = \sigma^2(0) + \sigma^3(0) + 2(1-\alpha).
\end{aligned}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned}
&\psi^2(t) = 2\psi^2(t+1)\left(1 - \sigma^2(t+1)\left(\sigma^2(t+1) - (1-\alpha)\right)^{-1}\right);\\
&\sigma^2(t) = 2\sigma^2(t+1)\left(1 - 2\sigma^2(t+1)\left(\sigma^2(t+1) - (1-\alpha)\right)^{-1}\right);\\
&\psi^2(1) = -\alpha;\\
&\sigma^2(1) = -1+\alpha.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\psi^3(t) = 2\psi^2(t+1)x^3(t);\\
&\sigma^3(t) = 2\psi^2(t+1) + 4\sigma^3(t+1)\left(x^3(t)\right)^2;\\
&\psi^3(1) = -\alpha;\\
&\sigma^3(1) = -1+\alpha.
\end{aligned}$$

Зададим параметр $\alpha = 0.5$. Тогда

$$\begin{aligned}
&\psi^3(1) = -0.5;\ \sigma^3(1) = -0.5;\ \psi^3(0) = -3;\ \sigma^3(0) = -19;\\
&\psi^2(1) = -0.5;\ \sigma^2(1) = -0.5;\ \psi^2(0) = -0.5;\ \sigma^2(0) = 0;\\
&\psi^1(2) = -3.5;\ \sigma^1(2) = -18;\ \psi^1(1) \approx -0.014;\ \sigma^1(1) \approx -0.49.
\end{aligned}$$

3. Определим

$$\begin{aligned}
&\Delta u^1(0) \approx 0.4 - 0.49x^1(0);\\
&\Delta u^1(1) \approx 1.76 - 0.97x^1(1);\\
&\Delta u^2(0) \approx 3.5 - x^2(0).
\end{aligned}$$

Отсюда получим

$$\begin{aligned}
&u^1_{II}(0) \approx 0.9;\ x^1_{II}(0) = 1;\\
&u^1_{II}(1) \approx 0.9;\ x^1_{II}(1) \approx 1.9;\\
&x^1_{II}(2) \approx 2.8;\\
&u^2_{II}(0) \approx 0.7;\ x^2_{II}(0) \approx 3.8;\\
&x^2_{II}(1) \approx 8.3;\\
&x^3_{II}(0) \approx 2.8;\ x^3_{II}(1) \approx 7.84.
\end{aligned}$$

4. Подсчитаем значение функционала $I(x_I, u_I) = 18$, $I(x_{II}, u_{II}) \approx 16.14$. Новое значение меньше предыдущего, таким образом, итерация закончена.

Заключение

В работе предложено обобщение метода улучшения второго порядка для дискретной задачи оптимального управления на случай, когда управляемая система имеет сложную сетевую структуру.

Такие задачи считаются подклассом задач управления гибридными системами и часто встречаются на практике. В качестве примера можно привести задачи управления химико-технологическими процессами, управления автоматизированными производственными системами конвейерного типа, оценки качества состояния воды в бассейне реки в зависимости от выбросов промышленными предприятиями загрязняющих веществ и другие.

Построенный алгоритм состоит из решения исходной системы в каждой вершине графа в прямом времени, решения вспомогательной системы в обратном времени с пересчетом начальных данных в точках состыковки процесса, получения улучшающей вариации в форме линейного синтеза управления.

Приведен модельный пример, иллюстрирующий работу данного алгоритма.

Разработанный в работе подход можно использовать при решении не только задач оптимального управления, но и задач нормирования, управляемости и наблюдаемости, оценки множества достижимости.

Литература

1. БАТУРИН В.А., УРБАНОВИЧ Д.Е. *Приближенные методы оптимального управления, основанные на принципе расширения.* — Новосибирск: Наука, 1997. – 175 с.
2. БАТУРИН В.А., ЛЕМПЕРТ А.А. *Методы слабого улучшения в задаче оптимального управления на сети операторов* // Тр. междунар. конф. «Вычислительные и информационные технологии в науке и образовании». Павлодар, 2006. — Т. 2. – С. 76-87.

3. КРОТОВ В.Ф., ГУРМАН В.И. *Методы и задачи оптимального управления.* — М.: Наука, 1973. – 446 с.

IMPROVING METHOD FOR DISCRETE PLANT WITH NETWORK STRUCTURE

Vladimir Baturin, Institute for System Dynamics and Control Theory of SB RAS, Irkutsk, Doctor of Science, professor (rozen@icc.ru).
Anna Lempert, Institute for System Dynamics and Control Theory of SB RAS, Irkutsk, Cand.Sc. (lempert@icc.ru).

Abstract: The paper is devoted to design of approximate methods of the optimal control problem solution for the network-structured discrete plant. The methods developed are based on Krotov sufficient conditions of optimality.

Keywords: discrete control system, network structure, improving method.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии Д. А. Новиковым