

## **ГРАФЫ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ПРОЦЕССОВ УПРАВЛЕНИЯ ПРОМЫШЛЕННЫМИ ПРЕДПРИЯТИЯМИ**

**Орлов А. И.<sup>1</sup>,**

*(Московский государственный технический университет  
им. Н. Э. Баумана, Москва)*

*Рассмотрено использование различных видов графов при моделировании процессов управления организациями промышленности, в частности, при оптимизации на графах, в экспертных технологиях. Рассмотрены связи графов с другими видами объектов нечисловой природы – бинарными отношениями, матрицами из 0 и 1, результатами парных сравнений. Исправлена наша неточность при анализе парных сравнений. При обсуждении проверки согласованности мнений экспертов и классификации экспертных оценок показана роль люсианов. С прикладной точки зрения роль теории графов определяется тем, что она – важная составная часть математического инструментария контроллинга и менеджмента высоких технологий.*

Ключевые слова: математическое моделирование, теория графов, бинарные отношения, экспертные технологии, процессы управления, контроллинг.

---

<sup>1</sup> Александр Иванович Орлов, директор Института высоких статистических технологий и эконометрики МГТУ им. Н. Э. Баумана, доктор технических наук, доктор экономических наук, кандидат физико-математических наук, профессор (prof-orlov@mail.ru, <http://orlovs.pp.ru>).

## 1. Введение

Понятия теории графов применяются при моделировании различных процессов управления. Распространен термин *сетевые модели управления*, поскольку «сеть» и «граф» в теории моделирования практически синонимы. В настоящей статье в соответствии с основными интересами нашего научного коллектива сосредоточимся на процессах управления промышленными предприятиями. Одна из целей работы – выявить, с какими понятиями и результатами теории графов необходимо знакомить студентов, обучающихся по специальности «менеджмент высоких технологий».

При анализе прикладных задач разработки и принятия управленческих решений [12] возникает необходимость во введении нескольких типов графов:

- неориентированных (выделено множество вершин, некоторые пары вершин соединены ребрами),
- ориентированных (ребра имеют начало и конец и называются дугами);
- взвешенных ориентированных (дугам поставлены в соответствие положительные числа, называемые весами).

Отметим, что хотя реально третий тип графов используется, как самостоятельная сущность в теории графов обычно не выделяется. Можно было бы рассмотреть и четвертый тип – взвешенные неориентированные графы, однако польза для приложений таких математических объектов автору статьи не ясна, поэтому рассматривать их не будем.

## 2. Оптимизация на графах

При моделировании процессов управления промышленными предприятиями широко используют взвешенные ориентированные графы. Приведем примеры [12].

Начнем с задачи коммивояжера: необходимо за минимальное время обойти все вершины и вернуться в исходную точку.

Название задачи обманчиво. Она может быть проинтерпретирована как задача выбора маршрутов ремонтника при проверке работы ряда технических устройств, охранника – при контроле безопасности помещений, транспортного средства – при доставке грузов по нескольким адресам.

В задаче о максимальном потоке пропускная способность транспортной сети определяется взвешенным ориентированным графом. Эта задача, как и задача коммивояжера, решается с помощью специальных алгоритмов.

Транспортная задача состоит в нахождении взвешенного ориентированного графа, задающего маршруты и объемы перевозок из исходных складов потребителям. С математической точки зрения она является задачей линейного программирования.

Организационная структура предприятия описывается взвешенным ориентированным графом (деревом), в котором начала и концы дуг соответствуют подчиненности лиц и подразделений, а веса – интенсивности взаимодействия. Совершенствование организационной структуры обычно осуществляют неформально, хотя уже есть и математические подходы [4].

При выявлении неформальной структуры малой группы также используют взвешенные ориентированные графы, хотя для интерпретации обычно избавляются от весов, сравнивая их с пороговым значением и оставляя ребро (дугу), если вес больше или равен порога, отбрасывая в противном случае [7].

При проектировании корпоративных информационных систем, например, документооборота, незаменимы ориентированные графы, а при моделировании трафика – взвешенные ориентированные графы [7].

По сравнению с известной работой [2] мы подчеркиваем, что при моделировании часто используются именно взвешенные ориентированные графы, а не другие типы графов.

### 3. Графы, бинарные отношения, матрицы

При разработке и принятии управленческих решений активно используются технологии экспертных оценок [12]. С целью моделирования поведения экспертов рассмотрим три ряда понятий: графы – бинарные отношения – матрицы.

Бинарные отношения на конечном множестве – это подмножества декартова квадрата этого множества. Неориентированный граф можно описать бинарным отношением на множестве его вершин следующим образом: пара вершин входит в бинарное отношение тогда и только тогда, когда эти вершины соединены ребром. Та же пара вершин, упорядоченная противоположным образом, также входит в рассматриваемое бинарное отношение. Для описания ориентированного графа надо использовать упорядоченные пары вершин: первая соответствует началу дуги, вторая – ее концу. Взвешенные ориентированные графы соответствуют метризованным бинарным отношениям, в которых каждая пара вершин, входящих в отношение, снабжена числом (весом) [8].

Бинарные отношения находятся во взаимно-однозначном соответствии с матрицами из 0 и 1. Это соответствие строится на основе нумерации элементов конечного множества. Упорядочим каким-либо образом то множество, на котором определено бинарное отношение:  $\{a(1), a(2), \dots, a(k)\}$ . Бинарному отношению поставим в соответствие матрицу  $\|b(i, j)\|$  из 0 и 1 порядка  $k$  следующим образом:  $b(i, j) = 1$ , если пара  $(a(i), a(j))$  входит в отношение, и  $b(i, j) = 0$  в противном случае. Метризованному отношению естественно поставить в соответствие матрицу, в которой для входящей в отношение пары  $(a(i), a(j))$  элемент матрицы  $b(i, j)$  равен тому числу, которым снабжена эта пара, и  $b(i, j) = 0$  для пар, которые не входят в отношение.

Таким образом, неориентированные и ориентированные графы, бинарные отношения и матрицы из 0 и 1 находятся во взаимно-однозначном соответствии, равно как взвешенные ориентированные графы, метризованные отношения и матрицы

описанного выше специального вида. Вести рассуждения можно на любом из трех языков – теории графов, бинарных отношений, матриц из 0 и 1. Например, ставить прикладные задачи естественно на языке графов или бинарных отношений, а разрабатывать алгоритмы и проводить расчеты – на языке матриц.

Описанная выше общая схема взаимнооднозначных соответствий развивает ту часть статистики нечисловых данных [11], в которой устанавливаются связи между различными видами объектов нечисловой природы. В многообразии объектов нечисловой природы введены графы.

Как любая общая схема, в некоторых конкретных случаях она нуждается в уточнениях. Как быть, если в графе некоторые пары вершин соединены двумя или более ребрами или дугами? Для описания такого графа в терминах бинарных отношений придется ввести метризованное бинарное отношение специального вида, в котором веса – натуральные числа.

В качестве примера рассмотрим неориентированный граф, в котором каждые две вершины могут соединяться не более чем одним ребром. Он описывается матрицей из 0 и 1, симметричной относительно главной диагонали. На главной диагонали стоит 1, если соответствующая вершина соединена ребром сама с собой, и 0 в противном случае. Неориентированные графы можно сопоставить с толерантностями – рефлексивными симметричными бинарными отношениями, которым соответствуют симметричные относительно главной диагонали матрицы из 0 и 1, на главной диагонали которых стоят 1.

Пользу языка теории графов при анализе бинарных отношений можно продемонстрировать на примере алгоритма согласования кластеризованных ранжировок [3], в котором строится (неориентированный) граф противоречий, а затем в нем выделяются связные компоненты, упорядочение которых – результат работы алгоритма. Выделение связных компонент наиболее естественно проводится на языке графов.

В различных пространствах бинарных отношений можно ввести геометрическую структуру [11], в частности, выделить

для каждого элемента совокупность ближайших соседей. Например, для упорядочения ближайшие соседи – те, которые отличаются от рассматриваемого одной инверсией. Введем граф ближайших соседей, в котором вершинами являются элементы рассматриваемого пространства бинарных отношений, а ребра соединяют ближайших соседей. Такой граф позволяет строить итеративные алгоритмы оптимизации, в которых одна итерация состоит в просчитывании значений оптимизируемого функционала для ближайших соседей бинарного отношения и переход к одному из ближайших соседей.

В частности, такой подход позволил В.Н. Жихареву построить новый алгоритм нахождения медианы Кемени в пространстве ранжировок (упорядочений), использованный для изучения ее свойств (результаты включены в [11]). Этот алгоритм отличается от ранее предложенного Б.Г. Литваком [8]. Отметим, что задача нахождения медианы Кемени имеет разную сложность в зависимости от того, по какому множеству происходит оптимизация. Минимум элементарно находится (по правилу большинства), если минимизацию проводим по множеству всех бинарных отношений [11]. Алгоритмы сложны, если минимизацию проводим по множеству всех упорядочений (алгоритмы Б.Г. Литвака и В.Н. Жихарева), как это было предложено в классической книге Дж. Кемени и Дж. Снелла [6].

#### **4. Парные сравнения и бинарные отношения**

Матрицами из 0 и 1 описываются результаты парных сравнений. Сопоставим их с бинарными отношениями и исправим неточность изложения, допущенную в [11].

Парные сравнения применяют в двух разных формах.

Первая относится к признаку, измеренному в шкале наименований. Результат парного сравнения – значения признака для двух объектов совпадают (код 0) или не совпадают (код 1).

Вторая относится к признаку, измеренному в порядковой шкале. Результат парного сравнения – значение признака для

первого объекта больше, чем для второго (код 0) или значение признака для первого объекта меньше или равны, чем для второго (код 1). Рассмотрим частный случай, в котором равенство значений признака для двух разных объектов не допускается.

В обоих случаях результаты последовательности парных сравнений, проведенных определенным экспертом, – это последовательность из 0 и 1, т. е. люсиан [9]. Проверка согласованности экспертов – это проверка согласованности люсианов [11].

Пусть каждый объект сравнивается с каждым. Тогда ответы эксперта при использовании первой формы парных сравнений – рефлексивное симметричное отношение (толерантность). При использовании второй формы парных сравнений – рефлексивное антисимметричное отношение (квазитолерантность). Антисимметричность означает, что для двух разных клеток матрицы, симметричных относительно главной диагонали, в одной стоит 0, а в другой 1. Для заполнения главной диагонали нет необходимости обращаться к экспертам – по определению записи результатов процедуры парного сравнения во всех клетках должны стоять 1.

По заполнению 0 и 1 части матрицы, лежащей выше главной диагонали, отличить квазитолерантность от толерантности невозможно. На главной диагонали стоят единицы. Квазитолерантность отличается от толерантности только по заполнению части матрицы, лежащей ниже главной диагонали. Для толерантности в симметричных клетках стоят одинаковые числа, для квазитолерантности – числа, в сумме составляющие 1.

Согласованность экспертов достаточно проверять для лежащих выше главной диагонали частей матриц, описывающих мнения экспертов. Следовательно, одинаковы алгоритмы проверки согласованности для двух форм парных сравнений, описывающихся толерантностями и квазитолерантностями соответственно (алгоритмы приведены в [11]).

Есть мнение, что последняя фраза неточна, выражая лишь «люсианоцентрический» подход. Необходимо допускать существование специфических методов проверки согласованности

измерений а) в шкале наименований и б) в порядковой шкале – методов, по существу использующих смысловые структурные особенности этих шкал. При этом метод, осмысленный для порядковой шкалы, может плохо подходить для шкалы наименований и наоборот – эта логическая возможность необоснованно исключается тезисом об одинаковости алгоритмов проверки согласованности для двух форм парных сравнений.

То, что квазитолерантность отличается от толерантности только по заполнению части матрицы, лежащей ниже главной диагонали, а эту часть мы не используем при проверке согласованности, может послужить причиной отождествления толерантности и квазитолерантности, допущенного в [11]. Такое смешение понятий ошибочно, хотя и не приводит к каким-либо проблемам при расчетах.

Пусть цель обработки экспертных данных состоит в получении ранжировки, отражающей групповое мнение. Однако согласно рекомендуемой процедуре экспертного опроса пусть эксперты не упорядочивают объекты, а проводят парные сравнения (во второй форме), сравнивая каждый из рассматриваемых объектов со всеми остальными, причем ровно один раз. Тогда ответ эксперта – квазитолерантность (рефлексивное антисимметричное отношение), но, вообще говоря, не ранжировка, поскольку в ответах эксперта может нарушаться транзитивность.

Сравним два пути обработки данных (из многих разработанных в литературе). Первый – превратить ответ эксперта в ранжировку (тем или иным способом «спроектировав» его на пространство ранжировок), а затем проверять согласованность ранжировок с помощью известных критериев (например, коэффициента ранговой конкордации Кендалла и Б. Смита [1]). При этом от квазитолерантности перейти к ранжировке можно, например, так. Будем выбирать ближайшую (в смысле применяемого расстояния) матрицу к матрице ответов эксперта из всех, соответствующих ранжировкам без связей.



Второй путь – проверить согласованность случайных квазитолерантностей, а групповое мнение искать с помощью медианы Кемени непосредственно по исходным данным, т. е. по квазитолерантностям. Групповое мнение при этом может быть найдено в пространстве ранжировок. Вторым путем мы считаем более предпочтительным, поскольку при этом обеспечивается более адекватная проверка согласованности (с помощью теории люсианов) и исключается процедура укладывания мнения эксперта в «прокрустово ложе» ранжировки.

### **5. Проверка согласованности мнений экспертов и классификация экспертных мнений**

Практика применения экспертных технологий показывает, что мнения разных экспертов различаются. Важно понять, насколько велико это различие. Если мало – усреднение мнений экспертов позволит выделить то общее, что есть у всех экспертов, отбросив случайные отклонения в ту или иную сторону. Если велико – усреднение является чисто формальной процедурой. Так, если представить себе, что ответы экспертов равномерно покрывают поверхность бублика, то формальное усреднение укажет на центр дырки от бублика, а такого мнения не придерживается ни один эксперт. Из сказанного ясна важность проблемы проверки согласованности мнений экспертов.

Разработан ряд методов такой проверки. Статистические методы проверки согласованности зависят от математической природы ответов экспертов. Соответствующие статистические теории весьма трудны, если эти ответы – ранжировки или разбиения, и достаточно просты, если ответы – результаты независимых парных сравнений. Отсюда вытекает рекомендация по организации экспертного опроса: не старайтесь сразу получить от эксперта ранжировку или разбиение, ему трудно это сделать, да и имеющиеся математические методы не позволяют далеко продвинуться в анализе подобных данных. Например, рекомендуют проверять согласованность ранжировок с помощью коэф-

фициента ранговой конкордации Кендалла–Смита. Но давайте вспомним, какая статистическая модель при этом используется. Как известно, в рамках методологии математической статистики проверяется нулевая гипотеза, согласно которой ранжировки независимы и равномерно распределены на множестве всех ранжировок. Если эта гипотеза принимается, то ни о какой согласованности мнений экспертов говорить нельзя. А если отклоняется? Тоже нельзя. Например, может быть два (или больше) центра, около которых группируются ответы экспертов. Нулевая гипотеза отклоняется. Но разве можно говорить о согласованности?

Эксперту гораздо легче на каждом шагу сравнивать только два объекта. Пусть он занимается парными сравнениями. *Непараметрическая теория парных сравнений (теория люсианов)* [11] *позволяет решать более сложные задачи, чем статистика ранжировок или разбиений.* В частности, вместо гипотезы равномерного распределения можно рассматривать гипотезу однородности, т. е. вместо совпадения всех распределений с одним фиксированным (равномерным) можно проверять лишь совпадение распределений мнений экспертов между собой, что естественно трактовать как согласованность их мнений. Таким образом, удастся избавиться от неестественного предположения равномерности.

При отсутствии согласованности экспертов естественно разбить их на группы сходных по мнению. Это можно сделать различными методами статистики объектов нечисловой природы, относящимися к кластер-анализу, предварительно введя метрику в пространство мнений экспертов. Идея американского математика Джона Кемени об аксиоматическом введении метрик [6] нашла многочисленных продолжателей. Однако методы кластер-анализа обычно являются эвристическими. В частности, обычно невозможно с позиций статистической теории обосновать «законность» объединения двух кластеров в один. Имеется важное исключение – *для независимых парных сравнений (люсианов) разработаны методы, позволяющие проверить воз-*

*возможность объединения кластеров как статистическую гипотезу. Это – еще один аргумент за то, чтобы рассматривать теорию люсианов как ядро математических методов экспертных оценок [12].*

## **6. Практическое значение теории графов**

Теория графов – важная составная часть математического инструментария контроллинга и менеджмента высоких технологий.

В нашей стране бурно развивается теория и практика *контроллинга* – современной концепции системного управления организацией, в основе которой лежит стремление обеспечить ее долгосрочное эффективное существование [5, 15]. Методы контроллинга – это методы информационно-аналитической поддержки принятия решений на предприятии (в организации). В XXI в. создано «Общество контроллеров» и журнал «Контроллинг», начата подготовка специалистов по контроллингу.

Теория графов как часть математического аппарата теории принятия решений широко используется при организационно-экономическом моделировании процессов управления промышленными предприятиями. Роль рассмотренных в настоящей статье математических методов при постановке и решении задач контроллинга достаточно подробно раскрыта в работах [13, 14].

Контроллинг – часть менеджмента высоких технологий, предметом которого являются системы управления наукоемкими предприятиями и их объединениями. Экономико-математические методы, кибернетика, информационно-коммуникационные технологии составляют научный инструментарий менеджмента высоких технологий. Как видно из [7], заметное место в этом инструментарии занимают математические методы, рассмотренные в настоящей статье.

Здесь рассмотрена лишь часть математических подходов и результатов, относящихся к тематике статьи, и еще меньшая

часть прикладной тематики. Отметим, например, большое значение теории графов, бинарных отношений, парных сравнений в социологических исследованиях и при моделировании социальных процессов [10].

Автор искренне благодарен рецензенту за внимательное прочтение рукописи и весьма полезные замечания.

### Литература

1. БОЛЬШЕВ Л.Н., СМИРНОВ Н.В. *Таблицы математической статистики*. – М.: Наука, 1983. – 416 с.
2. БУРКОВ В.Н., ЗАЛОЖНЕВ А.Ю., НОВИКОВ Д.А. *Теория графов в управлении организационными системами*. – М.: Синтег, 2001. – 124 с.
3. ГОРСКИЙ В.Г., ГРИЦЕНКО А.А., ОРЛОВ А.И. *Метод согласования кластеризованных ранжировок // Автоматика и телемеханика*. – 2000. – №3. – С. 179-187.
4. ГУБКО М.В. *Математические модели оптимизации иерархических структур*. – М.: ЛЕНАНД, 2006. – 264 с.
5. КАРМИНСКИЙ А.М., ОЛЕНЕВ Н.И., ПРИМАК А.Г., ФАЛЬКО С.Г. *Контроллинг в бизнесе. Методологические и практические основы построения контроллинга в организациях*. – М.: Финансы и статистика, 1998. – 256 с.
6. КЕМЕНИ ДЖ., СНЕЛЛ ДЖ. *Кибернетическое моделирование: Некоторые приложения*. – М.: Советское радио, 1972. – 192 с.
7. КОЛОБОВ А.А., ОМЕЛЬЧЕНКО И.Н., ОРЛОВ А.И. *Менеджмент высоких технологий. Интегрированные производственно-корпоративные структуры: организация, экономика, управление, проектирование, эффективность, устойчивость*. – М.: Экзамен, 2008. – 621 с.
8. ЛИТВАК Б.Г. *Экспертная информация: методы получения и анализа*. – М.: Радио и связь, 1982. – 184 с.

9. ОРЛОВ А.И. *Люсиан* // Вероятность и математическая статистика: энциклопедия [под ред. Ю. В. Прохорова]. – М.: Большая Российская Энциклопедия, 1999. – С. 293.
10. ОРЛОВ А.И. *Организационно-экономические методы и модели и их применение в социологических исследованиях* // Математическое моделирование социальных процессов. Вып.10 : сб. ст. / Под ред. А.П. Михайлова. – М.: КДУ – 2009. – С. 248–263.
11. ОРЛОВ А.И. *Организационно-экономическое моделирование: учебник* : в 3 ч. Часть 1: *Нечисловая статистика*. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2009. – 541 с.
12. ОРЛОВ А.И. *Теория принятия решений*. – М.: Экзамен, 2006. – 576 с.
13. ОРЛОВ А.И. *Эконометрическая поддержка контроллинга* // Контроллинг. – 2002. – №1. – С. 42-53.
14. ОРЛОВ А.И., КУЛИКОВА С.Ю., МУРАВЬЕВА В.С. *Организационно-экономическое моделирование в контроллинге* // Контроллинг. – 2009. – №5(33). – С. 42-47.
15. ХАН Д. *Планирование и контроль: концепция контроллинга*: Пер. с нем. – М.: Финансы и статистика, 1997. – 800 с.

## **NETWORK MODELS OF INDUSTRIAL CONTROL SYSTEMS**

**Alexander Ivanovich Orlov**, Director of Institute of High Statistical Technologies and Econometrics of Baumann Moscow State Technical University, Dr. Sc. (technology), Dr. Sc. (economics), PhD (mathematics), full professor ([prof-orlov@mail.ru](mailto:prof-orlov@mail.ru), <http://orlovs.pp.ru>).

*Abstract: Use of various sorts of graphs is considered for modeling managerial processes in industry organizations (in particular, for optimization on graphs, and in expert technologies). Conformities*

*of graphs are considered with the other classes of non-numerical mathematical objects – binary relations, binary matrices, pair-wise comparison results. Our earlier discrepancy of the analysis of pair-wise comparisons is corrected. The role of ljustians is shown in concordance testing of expert opinions and classification of expert estimations. Graph theory is widely used in industry; in particular, it is an important component of mathematical toolkit of controlling and management of high technologies.*

Keywords: mathematical modeling, graph theory, binary relations, expert technologies, managerial processes, controlling.

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии Д. А. Новиковым*