

УДК 519.83
ББК 22.18

МЕТОД НАХОЖДЕНИЯ С-ЯДРА КОРНЕВОЙ ИГРЫ¹

Акимова А.Н.², Захаров В.В.³

(Санкт-Петербургский государственный университет,
Факультет прикладной математики – процессов управления,
Санкт-Петербург)

Показано, что в любой ТП-кооперативной игре основание большого (теневого) SC-ядра совпадает с C-ядром корневой игры. Сравнение определений большого SC-ядра и большого теневого SC-ядра с описанием агрегированно-монотонного C-ядра приводит к формальному геометрическому совпадению агрегированно-монотонного C-ядра либо с большим SC-ядром, либо с большим теневым SC-ядром. Предложен метод нахождения системы ограничений наиболее простого вида, описывающей C-ядро корневой игры в игре с n игроками. Для обоснования метода применяется теория двойственности и индуктивный метод Б. Пелега.

Ключевые слова: ТП-кооперативная игра, C-ядро, большое (теневое) SC-ядро, корневая игра, агрегированно-монотонное C-ядро, линейное программирование, сбалансированный набор коалиций.

Введение

В процессе развития теории кооперативных игр с трансферабельными полезностями предлагались различные виды монотонности решений, одной из которых является агрегированная монотонность одноточечных решений, введенная Н. Мегиддо [8]. Од-

¹ Текст приводится в соответствии с изданием «Математическая теория игр и ее приложения. – 2010. – Т. 2. № 1. – С. 3–26».

² Арина Николаевна Акимова, ассистент (arina_akimova@mail.ru).

³ Виктор Васильевич Захаров, доктор физико-математических наук, профессор (mcvictor@mail.ru).

нако часто главным требованием, предъявляемым к решению ТП-кооперативной игры, является его принадлежность C -ядру. Множество векторов выигрышей, образуемое всевозможными одноточечными решениями, удовлетворяющими свойству агрегированной монотонности и одновременно принадлежащими C -ядру, было названо агрегированно-монотонным C -ядром [7]. В той же статье для того, чтобы сформулировать точное аналитическое описание агрегированно-монотонного C -ядра, было введено понятие корневой игры по отношению к исходной ТП-кооперативной игре.

Ранее, исходя из геометрической точки зрения, было предложено множественное решение ТП-кооперативных игр, названное большим SC -ядром [13]. Было показано, что большое SC -ядро не пусто тогда и только тогда, когда игра сбалансирована. Позднее было предложено большое теневое SC -ядро как аналог большого SC -ядра в классе несбалансированных ТП-кооперативных игр [5, 14, 15]. Следует заметить, что определения этих решений были сформулированы с помощью множества оптимальных решений $X^0(v)$ специальной задачи линейного программирования, которое было названо основанием большого SC -ядра в случае сбалансированной игры и основанием большого теневого SC -ядра в случае несбалансированной игры.

В этой статье мы сначала покажем, что C -ядро корневой игры совпадает с множеством $X^0(v)$, а агрегированно-монотонное C -ядро, как множество векторов, формально совпадает либо с большим SC -ядром, либо с большим теневым SC -ядром в зависимости от сбалансированности игры. Затем мы докажем теорему о взаимно-однозначном соответствии между множеством потенциально-оптимальных граней и множеством минимальных сбалансированных наборов коалиций в игре с n игроками, и на основе этой теоремы сформулируем метод нахождения C -ядра корневой игры (или множества $X^0(v)$) в ТП-кооперативной игре с произвольным числом игроков.

1. Большое SC -ядро, большое теневое SC -ядро и агрегированно-монотонное C -ядро

Пусть $N = \{1, \dots, n\}$ — конечное множество игроков. Любое непустое подмножество множества игроков $S \subseteq N$ называется *коалицией*. Каждой коалиции S ставится в соответствие вещественное число $v(S)$, называемое значением коалиции S , которое представляет собой общий гарантированный доход этой коалиции, получаемый при кооперации ее членов. Построенная в результате функция $v: 2^N \rightarrow \mathbb{R}$, определенная на множестве всех подмножеств из N ($S \in 2^N$), с вещественными значениями и естественным условием $v(\emptyset) = 0$, называется *характеристической функцией* игры.

Упорядоченная пара $\Gamma = (N, v)$ называется *кооперативной игрой с трансферабельными полезностями игроков* (или ТП-кооперативной игрой, или ТП-игрой) *в форме характеристической функции*. Обозначим через G^N класс всех ТП-кооперативных игр с множеством игроков N , а через B^N — множество всех сбалансированных игр из класса G^N .

Допустимым вектором выигрышей игры (N, v) называется вектор $\xi \in \mathbb{R}^n$ такой, что $\sum_{i \in N} \xi_i \leq v(N)$.

Предделележом игры (N, v) называется вектор $\xi \in \mathbb{R}^n$ такой, что $\sum_{i \in N} \xi_i = v(N)$.

Дележом игры (N, v) называется преддележ $\xi \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющий условиям индивидуальной рациональности: $\xi_i \geq v(\{i\})$, $\forall i \in N$.

Множество всех допустимых векторов выигрышей обозначим через $X^*(v)$, множество всех предделележей — через $I^*(v)$, а множество всех дележей — через $I(v)$.

Решением на некотором классе ТП-кооперативных игр $G' \subseteq G^N$ называется отображение ϕ , которое каждой игре $(N, v) \in G'$ ставит в соответствие некоторое подмножество множества допустимых векторов выигрышей $\phi(v) \subset X^*(v)$. Если для любой игры $(N, v) \in G'$ множество $\phi(v)$ состоит из единственного допустимого вектора выигрышей, то решение называется *одноточечным*

или значением игры. Преддележ из множества $\phi(v)$ называют также *распределением*.

Для аналитического описания одной из наиболее важных концепций решения ТП-кооперативных игр, C -ядра, будем исходить из утверждения Оуэна [9].

Теорема 1. *Преддележ $\xi \in I^*(v)$ принадлежит C -ядру ТП-кооперативной игры (N, v) тогда и только тогда, когда для каждой коалиции $S \subset N$ выполняется неравенство: $\sum_{i \in S} \xi_i \geq v(S)$.*

Другими словами, C -ядро представляет собой множество коалиционно-рациональных (пред)дележей:

$$(1) \quad C(v) = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i \in N} \xi_i = v(N); \right. \\ \left. \sum_{i \in S} \xi_i \geq v(S), \forall S \subset N, S \neq \emptyset, N \right\}.$$

Рассмотрим следующую задачу линейного программирования:

$$(2) \quad \min \sum_{i \in N} \xi_i,$$

$$(3) \quad \sum_{i \in S} \xi_i \geq v(S), \quad \forall S \subset N, S \neq \emptyset, N.$$

Обозначим через $\xi^0 = (\xi_1^0, \dots, \xi_n^0)$ произвольное оптимальное решение, а через $X^0(v)$ множество всех оптимальных решений ЗЛП (2)–(3).

Известно (см., напр., [6, 13]), что C -ядро игры (N, v) не пусто тогда и только тогда, когда для произвольного $\xi^0 \in X^0(v)$ выполняется неравенство:

$$(4) \quad \sum_{i \in N} \xi_i^0 \leq v(N).$$

Приведем определение SC -ядра ТП-кооперативной игры (N, v) , впервые изложенное в [13].

Определение 1. Множество векторов

$$(5) \quad SC(v, \xi^0) = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^n \mid \xi \in I^*(v), \xi_i \geq \xi_i^0, \forall i \in N \right\} =$$

или в эквивалентной форме

$$(6) \quad = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^n \mid \xi_i = \xi_i^0 + \alpha_i \left(v(N) - \sum_{i \in N} \xi_i^0 \right), \text{ где} \right.$$

$$\left. \alpha_i \geq 0, \sum_{i \in N} \alpha_i = 1, \text{ и } \sum_{i \in N} \xi_i^0 \leq v(N) \right\}$$

называется *SC-ядром ТП-кооперативной игры* (N, v) относительно вектора $\xi^0 \in X^0(v)$, а вектор ξ^0 — *основанием* данного *SC-ядра*.

Распространение понятия *SC-ядра* относительно вектора ξ^0 на все множество оптимальных решений $X^0(v)$ приводит к понятию *большого SC-ядра* [16].

Определение 2. Множество векторов

$$GSC(v) = \bigcup_{\forall \xi^0 \in X^0(v)} SC(v, \xi^0)$$

называется *большим SC-ядром ТП-кооперативной игры* (N, v) .

При этом множество всех оптимальных решений задачи (2)–(3) $X^0(v)$ будем называть *основанием большого SC-ядра*. Справедливо следующее утверждение [16].

Теорема 2. В любой сбалансированной ТП-кооперативной игре (N, v) большое *SC-ядро* содержится в *C-ядре*: $GSC(v) \subseteq C(v)$.

Предположим теперь, что *C-ядро* игры (N, v) является пустым. В классе несбалансированных игр были введены «теневые» аналоги *SC-ядра* и *большого SC-ядра* [14].

Определение 3. Множество векторов

$$(7) \quad \overline{SC}(v, \xi^0) = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^n \mid \xi \in I^*(v), \xi_i \leq \xi_i^0, \forall i \in N \right\} =$$

или в эквивалентной форме

$$(8) \quad = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^n \mid \xi_i = \xi_i^0 + \alpha_i \left(v(N) - \sum_{i \in N} \xi_i^0 \right), \text{ где} \right. \\ \left. \alpha_i \geq 0, \sum_{i \in N} \alpha_i = 1, \text{ и } \sum_{i \in N} \xi_i^0 > v(N) \right\}$$

будем называть *теневым SC-ядром ТП-кооперативной игры* (N, v) относительно вектора $\xi^0 \in X^0(v)$.

Определение 4. *Множество векторов*

$$\overline{\text{GSC}}(v) = \bigcup_{\forall \xi^0 \in X^0(v)} \overline{\text{SC}}(v, \xi^0).$$

называется *большим теневым SC-ядром ТП-кооперативной игры* (N, v) .

В этом случае множество всех оптимальных решений задачи (2)–(3) $X^0(v)$ будем называть *основанием большого теневого SC-ядра*.

Так как в несбалансированной игре для любого $\xi^0 \in X^0(v)$ выполняется неравенство, противоположное неравенству (4), т. е. $\sum_{i \in N} \xi_i^0 > v(N)$, то любое теневое SC-ядро относительно вектора ξ^0 не пусто, а, следовательно, не пусто и большое теневое SC-ядро.

Приведем определение предложенного Н. Мегиддо [8] свойства агрегированной монотонности одноточечных решений.

Определение 5. *Значение ϕ на классе игр G^N называется агрегированно-монотонным, если для любых двух игр $v, v' \in G^N$ таких, что $v(S) = v'(S)$ для всех $S \subset N$ и $v(N) < v'(N)$, имеет место неравенство: $\phi(v) \leq \phi(v')$.*

В статье [7] было введено понятие агрегированно-монотонного C -ядра и понятие корневой игры.

Определение 6. *Агрегированно-монотонным C -ядром ТП-кооперативной игры (N, v) называется подмножество множества преддележей $I^*(v)$, которое является совокупностью найденных для данной игры (N, v) всевозможных значений из класса*

игр G^N , обладающих свойством агрегированной монотонности и принадлежащих C -ядру, если последнее не пусто.

Для произвольной ТП-игры (N, v) обозначим через B_v^N множество сбалансированных игр, которые отличаются от игры (N, v) только значением коалиции N :

$$(9) \quad B_v^N = \{ v' \in B^N \mid v'(S) = v(S) \forall S \subset N \}.$$

Определение 7. Корневой игрой (N, v_r) по отношению к ТП-игре (N, v) называется наименьшая сбалансированная игра из множества B_v^N , т. е. $v_r \in B_v^N$ и $v_r(N) \leq w(N)$ для любой другой игры $w \in B_v^N$.

Рассмотрим ЗЛП (2)–(3) для произвольной игры (N, v') из множества сбалансированных игр (9). Так как $v'(S) = v(S)$ для любой коалиции $S \subset N$, то

$$(10) \quad X^0(v') = X^0(v), \forall v' \in B_v^N.$$

Неравенство (4), которое выполняется для любой сбалансированной игры, также справедливо для всех игр из множества (9), и с учетом (10) имеет вид: $\sum_{i \in N} \xi_i^0 \leq v'(N)$ для произвольного $\xi^0 \in X^0(v)$. Тогда по определению 7 значение $v_r(N)$ корневой игры равно

$$(11) \quad v_r(N) = \sum_{i \in N} \xi_i^0.$$

Утверждение 1. Пусть (N, v) — произвольная ТП-кооперативная игра. C -ядро корневой игры (N, v_r) совпадает с множеством оптимальных решений $X^0(v)$ ЗЛП (2)–(3).

Доказательство. Непустое C -ядро игры (N, v_r) можно рассматривать как множество оптимальных решений следующей ЗЛП (см., напр., [9]):

$$(12) \quad \min \sum_{i \in N} \xi_i,$$

$$(13) \quad \sum_{i \in S} \xi_i \geq v(S), \quad \forall S \subset N, S \neq \emptyset,$$

$$(14) \quad \sum_{i \in N} \xi_i = v_r(N),$$

которая отличается от задачи (2)–(3) только дополнительным ограничением (14). Поскольку $C(v_r) \neq \emptyset$, то оптимальное значение ЗЛП (12)–(14) равно $v_r(N)$. Тогда из (11) следует, что множества оптимальных решений задач (2)–(3) и (12)–(14) совпадают друг с другом, т. е. $X^0(v) = C(v_r)$.

Следующая теорема обеспечивает точное аналитическое описание агрегированно-монотонного C -ядра [7].

Теорема 3. *Для агрегированно-монотонного C -ядра ТП-кооперативной игры (N, v) справедливо представление*

$$AC(v) = C(v_r) + (v(N) - v_r(N)) \Delta_N,$$

где $C(v_r)$ – C -ядро корневой игры (N, v_r) и $\Delta_N = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + \dots + x_n = 1, x_i \geq 0 \forall i \in N\}$.

Докажем следующее утверждение.

Утверждение 2. *Пусть (N, v) – произвольная ТП-кооперативная игра. Множество векторов из агрегированно-монотонного C -ядра совпадает с большим SC -ядром, если игра (N, v) сбалансирована, и с большим теневым SC -ядром, если игра (N, v) несбалансирована.*

Доказательство. Заметим, что описания SC -ядра и теневого SC -ядра в форме (6) и (8) отличаются друг от друга только условиями сбалансированности или несбалансированности игры (N, v) в виде неравенства (4) и противоположного ему неравенства. Поэтому объединяя их в одно определение и распространяя его на все множество $X^0(v)$, получим следующее общее выражение для большого SC -ядра и большого теневого SC -ядра.

Множество векторов

$$(15) \quad X = X^0(v) + \left(v(N) - \sum_{i \in N} \xi_i^0 \right) \Delta_N$$

является большим SC -ядром, если игра (N, v) сбалансирована, и большим теневым SC -ядром, если игра (N, v) несбалансирована.

Сравним выражение (15) с представлением агрегированно-монотонного C -ядра из теоремы 3. Принимая во внимание утверждение 1 и равенство (11), приходим к доказываемому утверждению.

2. Теоретическое обоснование метода

Для построения метода нахождения C -ядра корневой игры будем исходить из утверждения 1 о совпадении $C(v_r)$ с множеством $X^0(v)$. Как известно, множество оптимальных решений любой ЗЛП является также решением некоторой системы линейных уравнений и неравенств (см., напр., [4]). Поэтому рассмотрим задачу нахождения системы линейных ограничений, описывающей C -ядро корневой игры (или множество $X^0(v)$), минимальной по общему числу ограничений и содержащей наибольшее число ограничений типа равенств.

Представим ЗЛП (2)–(3) в векторно-матричной форме:

$$(16) \quad \min (\xi, \mathbb{I}),$$

$$(17) \quad \xi A \geq V,$$

где (ξ, \mathbb{I}) — скалярное произведение вектора $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ и n -мерного вектора $\mathbb{I} = (1, \dots, 1)^T$. Если некоторым образом перенумеровать все коалиции $S \subset N$ ($S \neq \emptyset, N$): S_1, \dots, S_p , где $p = 2^n - 2$ — общее число ограничений в системе (3), то можно представить элементы матрицы A и вектора V в виде:

$$(18) \quad a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i \in S_j, \\ 0, & \text{если } i \notin S_j, \end{cases} \quad \text{где } i = \overline{1, n}, j = \overline{1, p},$$

$$V = (v(S_1), \dots, v(S_p)).$$

Множество допустимых решений (17) с геометрической точки зрения является выпуклым замкнутым многогранным множеством, которое обозначим M . Поэтому множеством оптимальных решений $X^0(v)$ может быть только некоторая грань Γ множества M . Любую грань $\Gamma \in M$ такую, что $\Gamma \subseteq X^0(v)$, будем называть оптимальной гранью.

Определение 8. Грань $\Gamma \in M$ будем называть потенциально-оптимальной в классе игр G^N , если существует игра (N, v) из класса G^N такая, что $X^0(v) = \Gamma$ и для любой другой оптимальной грани $\Gamma' \subseteq X^0(v)$ справедливо включение $\Gamma' \subseteq \Gamma$.

Множество всех потенциально-оптимальных граней в классе игр G^N обозначим через P_N^0 .

Задача (16)–(17) является двойственной к задаче:

$$(19) \quad \max \sum_{j=1}^p \lambda_j v(S_j),$$

$$(20) \quad \begin{cases} \sum_{j: i \in S_j} \lambda_j = 1, & \forall i \in N, \\ \lambda_j \geq 0, & j = \overline{1, p}, \end{cases}$$

или в векторно-матричной форме

$$\begin{aligned} \max \quad & (V, \lambda), \\ & \begin{cases} A\lambda = \mathbb{I}, \\ \lambda \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Оптимальное решение ЗЛП (19)–(20) связано с понятиями сбалансированного и минимального сбалансированного набора коалиций (или покрытия), предложенными Бондаревой [2, 3] и Шепли [11].

Определение 9. Пусть $\mathcal{B} = \{S_1, \dots, S_k\}$ – некоторый набор коалиций $S_j \subset N$, $S_j \neq \emptyset$. Набор коалиций \mathcal{B} называется сбалансированным, если существуют такие положительные числа $\lambda_j > 0$, $\forall S_j \in \mathcal{B}$, что

$$(21) \quad \sum_{\substack{j: S_j \in \mathcal{B} \\ i \in S_j}} \lambda_j = 1, \quad \forall i \in N.$$

Набор чисел $(\lambda_j)_{S_j \in \mathcal{B}}$ называется системой балансирующих весов.

Определение 10. Сбалансированный набор коалиций \mathcal{B} называется минимальным, если он не содержит ни одного собственного подмножества $\mathcal{B}^* \subsetneq \mathcal{B}$, также являющегося сбалансированным набором коалиций.

Доказательство следующего необходимого и достаточного условия минимальности сбалансированного набора можно найти, например, в книге Оуэна [9].

Теорема 4. Сбалансированный набор коалиций \mathcal{B} является минимальным тогда и только тогда, когда для него существует единственная система балансирующих весов $(\lambda_j)_{S_j \in \mathcal{B}}$.

Для того, чтобы найти все минимальные сбалансированные наборы коалиций в классе игр G^N , Б. Пелегом был разработан индуктивный метод [10], сущность которого заключается в последовательном нахождении всех минимальных сбалансированных наборов коалиций для игр с n игроками, если известны все минимальные сбалансированные наборы коалиций для игр с $n - 1$ игроками. Заметим, что в работе Шепли [11] приведены все минимальные сбалансированные наборы коалиций для игр с числом игроков $n = 3, 4, 5, 6$.

Как известно, между оптимальными решениями пары двойственных задач существуют соотношения, устанавливаемые теоремами о дополняющей нежесткости, а также теоремой двойственности. Для пары двойственных задач линейного программирования в *стандартном* виде:

$$\begin{array}{ll} \min (x, c), & \max (b, y), \\ \left\{ \begin{array}{l} x D \geq b, \\ x \geq 0, \end{array} \right. & (*) \quad \left\{ \begin{array}{l} D y \leq c, \\ y \geq 0, \end{array} \right. & (**) \end{array}$$

где D — матрица, x и b — вектор-строки, y и c — вектор-столбцы, эти теоремы формулируются следующим образом (см., напр., [12]).

Теорема 5. (Теорема о дополняющей нежесткости в слабой форме.) *Допустимые векторы x и y задач (*) и (**) оптимальны тогда и только тогда, когда*

$$\begin{aligned} (b - x D) y &= 0, \\ x (D y - c) &= 0. \end{aligned}$$

Теорема 6. (Теорема о дополняющей нежесткости в сильной форме.) *Для заданной пары разрешимых двойственных задач (*) и (**) существует по крайней мере одна пара оптимальных решений x и y , удовлетворяющих соотношениям:*

$$\begin{aligned} (b - x D) + y^T &> 0, \\ (D y - c) + x^T &> 0. \end{aligned}$$

Теорема 7. (Теорема двойственности.) *Для того чтобы допустимый вектор x (вектор y) являлся оптимальным решением ЗЛП (*) (ЗЛП (**), соответственно), необходимо и достаточно, чтобы существовал допустимый вектор y (вектор x) двойственной задачи такой, что $(x, c) = (b, y)$. Оптимальные значения двойственных задач равны для любой пары их оптимальных решений.*

Кроме того, для допустимых векторов двойственных задач справедлива следующая теорема(см., напр., [12]).

Теорема 8. *Для любых допустимых векторов x и y задач (*) и (**), соответственно, выполняется неравенство: $(x, c) \geq (b, y)$.*

В следующей теореме мы покажем, что множество потенциально-оптимальных граней P_N^0 взаимно-однозначно связано с множеством минимальных сбалансированных наборов коалиций в классе игр G^N .

Предварительно заметим, что система ограничений, описывающая произвольную грань $\Gamma \in M$, получается из системы (17) путем замены в ней некоторых k неравенств на уравнения ($k \leq n$):

$$(22) \quad \xi \tilde{A} = \tilde{V},$$

$$(23) \quad \xi \hat{A} \geq \hat{V},$$

причем столбцы матрицы \tilde{A} должны быть линейно независимыми, т. е. $\text{rank } \tilde{A} = k$. При этом размерность грани Γ определяется как $q = n - k$. Обозначим через $U(\Gamma) = (S_{i_1}, \dots, S_{i_k})$ множество коалиций, соответствующих неравенствам в (17), которые заменяются на уравнения для получения системы (22)–(23).

Докажем следующую теорему.

Теорема 9. *Грань $\Gamma \in M$ является потенциально-оптимальной в классе игр G^N тогда и только тогда, когда множество коалиций $U(\Gamma)$ является минимальным сбалансированным набором в классе игр G^N .*

Доказательство. НЕОБХОДИМОСТЬ. Предположим, что некоторая грань $\Gamma \in M$ является потенциально-оптимальной в

классе игр G^N и задается системой ограничений (22)–(23), где столбцы матрицы $\tilde{A} = \{\tilde{a}^j\}_{j=1}^k$ линейно независимы, а $U(\Gamma) = (S_1, \dots, S_k)$ – множество коалиций, перенумерованных в том же порядке, в котором они соответствуют столбцам матрицы \tilde{A} . По определению 8, существует игра (N, v) из класса G^N такая, что $X^0(v) = \Gamma$. Рассмотрим связь между оптимальными решениями задач (2)–(3) и (19)–(20) для данной игры. Пусть $\xi^0 \in X^0(v)$ и λ^0 – соответствующие произвольные оптимальные решения этих задач.

Заметим, что рассматриваемые задачи не являются задачами линейного программирования в стандартном виде, поэтому для них условия дополняющей нежесткости в слабой форме сводятся к единственному равенству: $(V - \xi A) \lambda = 0$, которое равносильно условиям:

$$(24) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{если } \lambda_j > 0, \text{ то } \sum_{i=1}^n \xi_i a_{ij} = v(S_j), \quad j \in \{1, \dots, p\}, \\ \text{если } \sum_{i=1}^n \xi_i a_{ij} > v(S_j), \text{ то } \lambda_j = 0, \quad j \in \{1, \dots, p\}, \end{array} \right.$$

а условия дополняющей нежесткости в сильной форме – к единственному неравенству: $(V - \xi A) + \lambda^T > 0$, которое равносильно условиям:

$$(25) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{если } \lambda_j = 0, \text{ то } \sum_{i=1}^n \xi_i a_{ij} > v(S_j), \quad j \in \{1, \dots, p\}, \\ \text{если } \sum_{i=1}^n \xi_i a_{ij} = v(S_j), \text{ то } \lambda_j > 0, \quad j \in \{1, \dots, p\}. \end{array} \right.$$

По теореме 5 условия дополняющей нежесткости в слабой форме выполняются для любой пары оптимальных решений двойственных задач ξ^0 и λ^0 . При этом для некоторых пар оптимальных решений равенства $\lambda_j^0 = 0$ и $\sum_{i=1}^n \xi_i^0 a_{ij} = v(S_j)$ при некоторых S_j могут выполняться одновременно. По теореме 6 условия дополняющей нежесткости в сильной форме гарантируют, что существует по крайней мере одна пара оптимальных решений ξ^0 и λ^0 , для которых условия $\lambda_j^0 = 0$ и $\sum_{i=1}^n \xi_i^0 a_{ij} = v(S_j)$ не могут иметь место одновременно.

Таким образом, существует, по крайней мере, одна пара оптимальных решений ξ^0 и λ^0 рассматриваемых задач такая, что

$$\begin{cases} \xi^0 \tilde{A} = \tilde{V}, \\ \xi^0 \hat{A} > \hat{V}, \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \lambda_j^0 > 0, \forall S_j \in U(\Gamma), \\ \lambda_j^0 = 0, \forall S_j \notin U(\Gamma). \end{cases}$$

Подставляя λ^0 в ограничения-равенства из (20), получим, что ненулевые компоненты λ^0 удовлетворяют системе:

$$\sum_{\substack{j: i \in S_j \\ S_j \in B}} \lambda_j^0 = 1, \quad \forall i \in N.$$

Тогда из определения 9 следует, что $U(\Gamma)$ является сбалансированным набором коалиций.

Из ненулевых компонент вектора λ^0 образуем вектор

$$\tilde{\lambda}^0 = (\lambda_1^0, \dots, \lambda_k^0),$$

располагая λ_j^0 в том же порядке, что и соответствующие им коалиции из множества $U(\Gamma)$. Так как столбцы матрицы $\tilde{A} = \{\tilde{a}^j\}_{j=1}^k$ линейно независимы, то вектор $\tilde{\lambda}^0$ является единственным решением системы уравнений $\tilde{A} \tilde{\lambda} = \mathbb{I}$. Тогда по теореме 4 получаем, что $U(\Gamma)$ является минимальным сбалансированным набором коалиций.

Достаточность. Пусть (N, v) — произвольная игра из класса G^N . Рассмотрим ЗЛП (19)–(20) для данной игры. Заметим, что крайними точками выпуклого многогранника M' , описываемого системой ограничений (20), являются векторы λ , ненулевые компоненты которых образуют системы балансирующих весов, соответствующие минимальным сбалансированным наборам коалиций. Следовательно, по крайней мере одно из оптимальных решений λ^0 задачи (19)–(20) является крайней точкой M' и отвечает некоторому минимальному сбалансированному набору коалиций $B = (S_1, \dots, S_k)$. Обозначим систему балансирующих весов для B через

$$\tilde{\lambda}^0 = (\lambda_1^0, \dots, \lambda_k^0),$$

располагая компоненты $\lambda_j^0 > 0$ оптимального вектора λ^0 в том же порядке, что и соответствующие им коалиции из множества \mathcal{B} .

Согласно теореме 4 система балансирующих весов $\tilde{\lambda}^0$ является единственным решением системы ограничений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{\substack{j: i \in S_j \\ S_j \in \mathcal{B}}} \lambda_j = 1, \quad \forall i \in N, \\ \lambda_j > 0, \quad \forall S_j \in \mathcal{B}, \end{array} \right.$$

которую можно представить в векторно-матричной форме как

$$(26) \quad \tilde{A} \lambda = \mathbb{I}, \quad \lambda > 0.$$

Тогда столбцы матрицы $\tilde{A} = \{\tilde{a}^j\}_{j=1}^k$ — линейно независимы, а их число $k \leq n$.

Покажем, что если $U(\Gamma) = \mathcal{B}$, то $X^0(v) = \Gamma$. Пусть грань Γ описывается системой (22)–(23) с $U(\Gamma) = \mathcal{B}$. Возьмем произвольный вектор $\xi \in \Gamma$, и умножим равенство (22), которому удовлетворяет этот вектор, справа скалярно на вектор $\tilde{\lambda}^0$:

$$(27) \quad \xi \tilde{A} \tilde{\lambda}^0 = \tilde{V} \tilde{\lambda}^0.$$

С одной стороны, левую часть этого выражения можно преобразовать согласно (26):

$$(28) \quad \xi \tilde{A} \tilde{\lambda}^0 = \xi \mathbb{I} = \sum_{i \in N} \xi_i.$$

С другой стороны, правая часть (27) равна оптимальному значению ЗЛП (19)–(20), так как

$$(29) \quad \tilde{V} \tilde{\lambda}^0 = \sum_{j: S_j \in \mathcal{B}} \lambda_j^0 v(S_j) = \sum_{j=1}^p \lambda_j^0 v(S_j) = \max \sum_{j=1}^p \lambda_j v(S_j).$$

Тогда по теореме 7 $\sum_{i \in N} \xi_i$ является оптимальным значением ЗЛП (2)–(3), и, следовательно, ввиду произвольности выбора вектора $\xi \in \Gamma$, справедливо включение $\Gamma \subseteq X^0(v)$.

Предположим, что $\Gamma \subset X^0(v)$, т. е. $\Gamma \neq X^0(v)$. Тогда существует другая оптимальная грань $\Gamma' = X^0(v)$ такая, что $\Gamma \subset \Gamma'$. Это означает, что любое решение системы (22)–(23) также является решением системы, описывающей грань Γ' :

$$(30) \quad \xi \tilde{A}' = \tilde{V}',$$

$$(31) \quad \xi \hat{A}' \geq \hat{V}',$$

причем все столбцы матрицы \tilde{A}' также являются столбцами матрицы \tilde{A} , и, следовательно, $U(\Gamma') \subset U(\Gamma) = \mathcal{B}$. По доказанному в первой части данной теоремы множество $U(\Gamma')$ является минимальным сбалансированным набором коалиций. Следовательно, сбалансированный набор коалиций \mathcal{B} не является минимальным. Полученное противоречит доказывает, что сделанное предположение неверно, и $\Gamma = X^0(v)$.

Для того, чтобы грань Γ являлась потенциально-оптимальной, согласно определению 8 нужно показать, что существует такая игра из класса G^N , что $X^0(v) = \Gamma$ и для любой другой оптимальной грани $\Gamma^* \subseteq X^0(v)$ справедливо включение $\Gamma^* \subset \Gamma$.

Так как $X^0(v) = \Gamma$ в исходной игре (N, v) , то для любой другой оптимальной грани $\Gamma^* \subseteq X^0(v)$ возможны два случая: либо $\Gamma^* \subset \Gamma$, либо $\Gamma^* \not\subseteq \Gamma$. В первом случае игра (N, v) является искомой игрой, а грань Γ — потенциально-оптимальной гранью.

Рассмотрим второй случай. Можно утверждать, что существует, по крайней мере, еще одна оптимальная грань $\hat{\Gamma} = X^0(v)$, $\hat{\Gamma} \neq \Gamma$, такая, что $\Gamma^* \subseteq \hat{\Gamma}$. Построим новую игру (N, \hat{v}) :

$$(32) \quad \begin{cases} \hat{v}(S) = v(S) - \varepsilon, \quad \forall S \subset N: S \in (U(\hat{\Gamma}) \setminus U(\Gamma)), \\ \hat{v}(S) = v(S), \quad \text{для остальных коалиций } S \subset N, \end{cases}$$

где $\varepsilon > 0$.

Рассмотрим ЗЛП (19)–(20) для новой игры (N, \hat{v}) :

$$(33) \quad \max \sum_{j=1}^p \lambda_j \hat{v}(S_j),$$

$$(34) \quad \begin{cases} \sum_{j: i \in S_j} \lambda_j = 1, \quad \forall i \in N. \\ \lambda_j \geq 0, \quad j = \overline{1, p}. \end{cases}$$

Заметим, что множество допустимых векторов (34) при изменении характеристической функции игры не меняется, а значение целевой функции (33) для любого допустимого вектора λ может,

разве что, уменьшиться:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^p \lambda_j \hat{v}(S_j) &= \sum_{j: S_j \in U(\hat{\Gamma}) \setminus U(\Gamma)} \lambda_j (v(S_j) - \varepsilon) + \\ &+ \sum_{j: S_j \notin U(\hat{\Gamma}) \setminus U(\Gamma)} \lambda_j v(S_j) \leq \sum_{j=1}^p \lambda_j v(S_j). \end{aligned}$$

Более того, значение целевой функции (33) для вектора λ^0 остается тем же, что и в исходной игре (N, v) , так как $\lambda_j^0 > 0$ только при $S_j \in U(\Gamma) = \mathcal{B}$, а другие компоненты $\lambda_j^0 = 0$:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^p \lambda_j^0 \hat{v}(S_j) &= \sum_{j: S_j \in U(\hat{\Gamma}) \setminus U(\Gamma)} \lambda_j^0 (v(S_j) - \varepsilon) + \\ &+ \sum_{j: S_j \in U(\Gamma)} \lambda_j^0 v(S_j) + \sum_{j: S_j \notin U(\hat{\Gamma}) \cup U(\Gamma)} \lambda_j^0 v(S_j) = \\ &= \sum_{j: S_j \in \mathcal{B}} \lambda_j^0 v(S_j) = \sum_{j=1}^p \lambda_j^0 v(S_j). \end{aligned}$$

Следовательно, предложенное изменение характеристической функции не повлияет на оптимальное значение задачи, а вектор λ^0 также является оптимальным решением новой ЗЛП (33)–(34). Тогда по теореме 7 оптимальное значение задачи (2)–(3) при переходе от игры (N, v) к игре (N, \hat{v}) также не меняется. А поскольку значения $\hat{v}(S) = v(S)$ для $S \in U(\Gamma)$, то в новой игре $X^0(\hat{v}) = \Gamma$.

Покажем, что $\hat{\Gamma} \not\subseteq X^0(\hat{v})$. Пусть в игре (N, v) грань $\hat{\Gamma}$ описывается системой ограничений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i \in S} \xi_i = v(S), \quad \forall S \in U(\hat{\Gamma}), \\ \sum_{i \in S} \xi_i \geq v(S), \quad \forall S \notin U(\hat{\Gamma}), \end{array} \right.$$

или в векторно-матричной форме:

$$(35) \quad \xi \check{A} = \check{V},$$

$$(36) \quad \xi \bar{A} \geq \bar{V},$$

причем $U(\hat{\Gamma}) \not\subseteq U(\Gamma)$ и $U(\Gamma) \not\subseteq U(\hat{\Gamma})$. Так как в исходной игре $X^0(v) = \hat{\Gamma}$, то по необходимости множество $U(\hat{\Gamma})$ является минимальным сбалансированным набором коалиций и существует система балансирующих весов $\hat{\lambda}^0$, которая является единственным решением системы уравнений:

$$(37) \quad \check{A} \lambda = \mathbb{I}, \quad \lambda > 0.$$

Тогда в игре (N, \hat{v}) грань $\hat{\Gamma}$ можно описать системой ограничений:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sum_{i \in S} \xi_i = v(S) - \varepsilon, & \forall S \in U(\hat{\Gamma}) \setminus U(\Gamma), \\ \sum_{i \in S} \xi_i = v(S), & \forall S \in U(\hat{\Gamma}) \cap U(\Gamma), \\ \sum_{i \in S} \xi_i \geq \hat{v}(S), & \forall S \notin U(\hat{\Gamma}), \end{array} \right.$$

которую представим в векторно-матричной форме следующим образом:

$$(38) \quad \xi \check{A}' = \check{V}',$$

$$(39) \quad \xi \check{A}'' = \check{V}'',$$

$$(40) \quad \xi \bar{A} \geq \bar{V}',$$

где без уменьшения общности можно считать, что $(\check{A}' | \check{A}'') = \check{A}$ и, соответственно, $(\check{V}' | \check{V}'') = \check{V}$.

Пусть $\hat{\xi} \in \hat{\Gamma}$ — произвольный вектор грани $\hat{\Gamma}$. Представим уравнения (38) и (39) в виде одного: $\xi (\check{A}' | \check{A}'') = (\check{V}' | \check{V}'')$, подставим в него $\hat{\xi}$ и умножим его справа скалярно на вектор $\hat{\lambda}^0$:

$$(41) \quad \hat{\xi} (\check{A}' | \check{A}'') \hat{\lambda}^0 = (\check{V}' | \check{V}'') \hat{\lambda}^0.$$

Левую часть этого выражения преобразуем согласно (37):

$$\hat{\xi} (\check{A}' | \check{A}'') \hat{\lambda}^0 = \hat{\xi} \check{A} \hat{\lambda}^0 = \hat{\xi} \mathbb{I} = \sum_{i \in N} \hat{\xi}_i.$$

Правую часть (41) представим в виде:

$$\begin{aligned} (\check{V}' | \check{V}'') \hat{\lambda}^0 &= \sum_{j: S_j \in U(\hat{\Gamma}) \setminus U(\Gamma)} \hat{\lambda}_j^0 (v(S_j) - \varepsilon) + \\ &+ \sum_{j: S_j \in U(\hat{\Gamma}) \cap U(\Gamma)} \hat{\lambda}_j^0 v(S_j) < \sum_{j: S_j \in U(\hat{\Gamma})} \hat{\lambda}_j^0 v(S_j). \end{aligned}$$

Таким образом, получаем неравенство:

$$\sum_{i \in N} \hat{\xi}_i < \sum_{j: S_j \in U(\hat{\Gamma})} \hat{\lambda}_j^0 v(S_j).$$

Так как сумма справа равна оптимальному значению ЗЛП (19)–(20), совпадающему с оптимальным значением ЗЛП (33)–(34), то по теореме 8 вектор $\hat{\xi}$ не является допустимым вектором ЗЛП (2)–(3) для игры (N, \hat{v}) . Следовательно, грань $\hat{\Gamma}$ не может быть оптимальной в новой игре, т. е. $\hat{\Gamma} \not\subseteq X^0(\hat{v})$.

Таким образом, в случае, когда кроме грани $\Gamma = X^0(v)$ существует оптимальная грань $\Gamma^* \subseteq X^0(v)$ такая, что $\Gamma^* \not\subseteq \Gamma$, построенная игра (N, \hat{v}) является искомой игрой из определения 8, и, следовательно, грань Γ является потенциально-оптимальной.

Из теоремы 9 следует, что для того, чтобы найти множество потенциально-оптимальных граней P_N^0 , достаточно найти множество всех минимальных сбалансированных наборов коалиций в классе игр G^N , и наоборот.

Так как для каждой потенциально-оптимальной грани Γ , по определению 8, найдется игра из класса G^N такая, что $X^0(v) = \Gamma$, то значение целевой функции (2) является постоянной величиной для любого вектора $\xi \in \Gamma$. Поэтому введем для нее специальное обозначение:

$$(42) \quad \sigma(\Gamma) = \sum_{i \in N} \xi_i, \quad \forall \xi \in \Gamma, \quad \Gamma \in P_N^0.$$

При доказательстве достаточности теоремы 9 были получены соотношения (27)–(29), из которых с учетом $\mathcal{B} = U(\Gamma)$ следует, что для любой потенциально-оптимальной грани Γ и соответствующей системы балансирующих весов $\tilde{\lambda}$ справедливо равенство:

$$(43) \quad \sum_{i \in N} \xi_i = \sum_{j: S_j \in U(\Gamma)} \tilde{\lambda}_j v(S_j).$$

Следующее утверждение дает критерий выбора оптимальной грани $\Gamma = X^0(v)$ из множества P_N^0 .

Утверждение 3. *Оптимальное значение ЗЛП (2)–(3):*

$$(44) \quad z^0 = \max_{\Gamma \in P_N^0} \sigma(\Gamma).$$

Доказательство. Возьмем некоторую потенциально-оптимальную грань $\Gamma^1 \in P_N^0$ и рассмотрим игру (N, v) , в которой $X^0(v) = \Gamma^1$. Пусть $\Gamma^2 \in P_N^0$ — любая другая потенциально-оптимальная грань.

По теореме 9 множества $U(\Gamma^1)$ и $U(\Gamma^2)$ являются минимальными сбалансированными наборами коалиций, которым соответствуют системы балансирующих весов $\tilde{\lambda}^1$ и $\tilde{\lambda}^2$.

Так как $X^0(v) = \Gamma^1$, то из (42), (43) и теоремы двойственности 7 получаем равенство:

$$(45) \quad \min_{i \in N} \sum \xi_i = \sigma(\Gamma^1) = \sum_{j: S_j \in U(\Gamma^1)} \tilde{\lambda}_j^1 v(S_j) = \max_{j=1}^p \sum \lambda_j v(S_j).$$

Следовательно, для систем балансирующих весов $\tilde{\lambda}^1$ и $\tilde{\lambda}^2$ справедливо неравенство:

$$\sum_{j: S_j \in U(\Gamma^1)} \tilde{\lambda}_j^1 v(S_j) \geq \sum_{j: S_j \in U(\Gamma^2)} \tilde{\lambda}_j^2 v(S_j),$$

эквивалентное неравенству $\sigma(\Gamma^1) \geq \sigma(\Gamma^2)$.

Откуда, ввиду произвольности выбора $\Gamma^2 \in P_N^0$, следует:

$$(46) \quad \sigma(\Gamma^1) = \max_{\Gamma \in P_N^0} \sigma(\Gamma).$$

Обозначая оптимальное значение ЗЛП (2)–(3) через z^0 , из (45) и (46) получаем равенство (44).

Из утверждения 3 следует, что если наибольшее значение $\sigma(\Gamma)$ достигается только на одной потенциально-оптимальной грани:

$$\arg \max_{\Gamma \in P_N^0} \sigma(\Gamma) = \Gamma^*,$$

то именно эта грань является множеством оптимальных векторов ЗЛП (2)–(3): $X^0(v) = \Gamma^*$.

Предположим, что $\sigma(\Gamma)$ достигает своего наибольшего значения на нескольких потенциально-оптимальных гранях:

$$\arg \max_{\Gamma \in P_N^0} \sigma(\Gamma) = \{\Gamma^1, \dots, \Gamma^k\}.$$

Тогда возникает проблема выбора $X^0(v)$ из данной совокупности граней.

Рассмотрим случай, когда $\sigma(\Gamma)$ достигает наибольшего значения только на двух потенциально-оптимальных гранях Γ^1 , $\Gamma^2 \in P_N^0$. Покажем, что тогда множество векторов, принадлежащих грани Γ^1 , совпадает с множеством векторов, принадлежащих грани Γ^2 .

Возьмем произвольные векторы $\xi^1 \in \Gamma^1$ и $\xi^2 \in \Gamma^2$ и рассмотрим вектор $\xi = \alpha \xi^1 + (1 - \alpha) \xi^2$, где $\alpha \in [0; 1]$. Так как многогранное множество M является выпуклым, то $\xi \in M$.

Значение целевой функции (2) для данного вектора ξ при любом $\alpha \in [0; 1]$ равно:

$$\begin{aligned} \sum_{i \in N} \xi_i &= \alpha \sum_{i \in N} \xi_i^1 + (1 - \alpha) \sum_{i \in N} \xi_i^2 = \\ &= \alpha \max_{\Gamma \in P_N^0} \sigma(\Gamma) + (1 - \alpha) \max_{\Gamma \in P_N^0} \sigma(\Gamma) = \max_{\Gamma \in P_N^0} \sigma(\Gamma). \end{aligned}$$

Но по условию $\arg \max_{\Gamma \in P_N^0} \sigma(\Gamma) = \{\Gamma^1, \Gamma^2\}$. Следовательно, вектор ξ принадлежит либо Γ^1 , либо Γ^2 , либо обоим граням одновременно. Таким образом, между гранями Γ^1 и Γ^2 нет никакой другой грани множества M и никаких внутренних векторов из M . Тогда

а) либо одна из граней является подмножеством другой: например, $\Gamma^2 \subset \Gamma^1$;

б) либо множества векторов, принадлежащих граням Γ^1 и Γ^2 , совпадают друг с другом.

Но по определению 8 ни одна из потенциально-оптимальных граней не может быть подмножеством другой потенциально-оптимальной грани. Следовательно, п. а) невозможен, и в результате остается только п. б).

Обобщая это рассуждение на несколько потенциально-оптимальных граней, приходим к выводу, что если

$$(47) \quad \arg \max_{\Gamma \in P_N^0} \sigma(\Gamma) = \{\Gamma^1, \dots, \Gamma^k\},$$

то множества векторов, принадлежащих граням $\Gamma^1, \dots, \Gamma^k$, совпадают друг с другом. Следовательно, множеством $X^0(v)$ является

любая из граней $\Gamma^1, \dots, \Gamma^k$.

Замечание 1. Пусть $\Gamma^1, \dots, \Gamma^k$ — потенциально-оптимальные грани из (47). Тогда каждый вектор $\xi^0 \in X^0(v)$ удовлетворяет всем ограничениям типа равенств, которые входят в систему ограничений, описывающую какую-либо из рассматриваемых граней.

3. Формулировка метода

На основании теоремы 9, утверждения 3 и замечания 1 получаем следующий метод нахождения C -ядра корневой игры с n игроками.

- 1) Найти, используя индуктивный метод Б. Пелега, множество всех минимальных сбалансированных наборов коалиций в классе игр G^N . По теореме 9 каждому минимальному сбалансированному набору коалиций \mathcal{B} взаимно-однозначно соответствует некоторая потенциально-оптимальная грань $\Gamma \in P_N^0$ с $U(\Gamma) = \mathcal{B}$.
- 2) Вычислить значения $\sigma(\Gamma)$ для всех $\Gamma \in P_N^0$ и определить наибольшее значение $\sigma(\Gamma)$ на множестве P_N^0 :

$$z^0 = \max_{\Gamma \in P_N^0} \sigma(\Gamma).$$

По утверждению 3 величина z^0 является оптимальным значением ЗЛП (2)–(3) или общим гарантированным доходом коалиции N в корневой игре: $v_r(N) = z^0$.

- 3) Выделить все потенциально-оптимальные грани, на которых достигается наибольшее значение $\sigma(\Gamma)$:

$$\{\Gamma^1, \dots, \Gamma^k\} = \arg \max_{\Gamma \in P_N^0} \sigma(\Gamma)$$

и найти множество коалиций

$$Y = U(\Gamma^1) \cup \dots \cup U(\Gamma^k).$$

- 4) Составить систему ограничений для множества $X^0(v)$, принимая во внимание замечание 1:

$$(48) \quad \begin{cases} \sum_{i \in S} \xi_i = v(S) & \text{при } S \subset N: S \in Y, \\ \sum_{i \in S} \xi_i \geq v(S) & \text{при } S \subset N: S \notin Y. \end{cases}$$

По утверждению 1 система (48) описывает C -ядро корневой игры (N, v_r) . Эта система, во-первых, содержит на одно ограничение меньше, чем классическое описание C -ядра из теоремы 1. Во-вторых, в этой системе имеется максимальное число ограничений типа равенств. Для окончательного нахождения C -ядра корневой игры остается найти его крайние точки, исходя из полученной системы.

4. Заключение

В этой статье мы показали, что C -ядро корневой игры совпадает с множеством оптимальных решений $X^0(v)$ задачи линейного программирования (2)–(3), а агрегированно-монотонное C -ядро, как подмножество множества преддележей, формально геометрически совпадает либо с большим SC -ядром, либо с большим теневым SC -ядром.

Совпадение C -ядра корневой игры с множеством $X^0(v)$ позволило обосновать и сформулировать метод для нахождения системы ограничений наиболее простого вида, описывающей C -ядро корневой игры.

Литература

1. АКИМОВА А.Н. *Аналитический метод решения специальной задачи линейного программирования* // Тезисы докладов международного конгресса «Нелинейный динамический анализ». – С.-Петербург, 2007. – С. 315.
2. БОНДАРЕВА О.Н. *Теория ядра в игре n лиц* // Вестник Ленинградского университета, Серия: мат., мех., астр. – 1962. – № 13(3). – С. 140–142.

3. БОНДАРЕВА О.Н. *Некоторые применения методов линейного программирования к теории кооперативных игр* // Проблемы кибернетики. – 1963. – № 10. – С. 119–140.
4. ЕРЕМИН И.И. *Линейная оптимизация и системы линейных неравенств*. – Москва: Издательский центр «Академия», 2007.
5. ЗАХАРОВ В.В., АКИМОВА А.Н. *О некоторых селекторах C-ядра* // Вестник Санкт-Петербургского Университета, Сер. 1. – 2002. – № 3. – С. 10–16.
6. ПЕЧЕРСКИЙ С.Л., ЯНОВСКАЯ Е.Б. *Кооперативные игры: решения и аксиомы*. – С.-Петербург: Издательство Европейского университета в С.-Петербурге, 2004.
7. CALLEJA P., RAFELS C. AND TIJS S. *The Aggregate-Monotonic Core* // Games and Economic Behavior. – 2009. – Vol. 66. – P. 742–748.
8. MEGIDDO N. *On the nonmonotonicity of the bargaining set, the kernel and the nucleolus of a game* // SIAM J. on Applied Mathematics. – 1974. – Vol. 27. – P. 355–358.
9. OWEN G. *Game theory* (third edition). – New York: Academic Press, 1995.
10. PELEG B. *An inductive method for constructing minimal balanced collections of finite sets* // Naval Research Logistics Quarterly. – 1965. – Vol. 12, № 2. – P. 155–162.
11. SHAPLEY L.S. *On balanced sets and cores* // Naval Research Logistic Quarterly. – 1967. – Vol. 14. – P. 453–460.
12. SIMONNARD M. *Linear programming*. – Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, Inc., 1966.
13. ZAKHAROV V.V. *About selectors of the core in dynamic games* // Proceedings of the 7th ISDG symposium on Dynamic Game and Applications. – Kanagawa, Japan, 1996.
14. ZAKHAROV V.V., АКИМОВА А.Н. *Nucleolus as a Selector of Subcore* // Proceedings Volume from the 11th IFAC Workshop «Control Applications of Optimization» (Zakharov V.V., ed), S.-Petersburg, Russia. – Great Britain: Pergamon, 2000. – Vol. 2. – P. 675–680.

15. ZAKHAROV V.V., AKIMOVA A.N. *Geometrical Properties of Subcore* // Game Theory and Applications (Petrosjan, L.A., and V.V. Mazalov, eds). – 2002. – Vol. 8. – P. 279–289.
16. ZAKHAROV, V.V., KWON O-H. *Selectors of the core and consistency properties* // Game Theory and Applications. – 1999. – Vol. 4. – P. 237–250.

A METHOD FOR ESTIMATING THE CORE OF ROOT GAME

Arina Akimova, St. Petersburg State University, Faculty of Applied Mathematics and Control Processes, assistant (arina_akimova@mail.ru).

Viktor Zakharov, St. Petersburg State University, Faculty of Applied Mathematics and Control Processes, Doctor of Science, professor (mcvictor@mail.ru).

Abstract: It is shown that the base of the grand (shadow) subcore coincides with the core of the root game in any TU-cooperative game. Comparing the definitions of the grand subcore and the grand shadow subcore with the description of the aggregate-monotonic core leads to formal geometrical coincidence of the aggregate-monotonic core with either the grand subcore or the grand shadow subcore. The method for estimating the simplest set of equations and inequalities describing the core of a root game in a TU-game with any number of players ($n > 3$) is proposed. To develop the method the duality theory and an inductive method by B. Peleg are used.

Keywords: TU-cooperative game, core, grand (shadow) subcore, root game, aggregate-monotonic core, linear programming, balanced collection of coalitions.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии В. В. Мазаловым