

Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН

УПРАВЛЕНИЕ БОЛЬШИМИ СИСТЕМАМИ

*Специальный
выпуск 31.1*

Декабрь 2010

**СБОРНИК
ТРУДОВ**

*Математическая теория игр
и ее приложения II*

ISSN 1819-2467

Регистрационный номер Эл №ФС77-27285 от 22.02.2007

Москва – 2010

СПЕЦИАЛЬНЫЙ ВЫПУСК СБОРНИКА ТРУДОВ «УПРАВЛЕНИЕ БОЛЬШИМИ СИСТЕМАМИ»

ВЫПУСК 31.1: МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ИГР И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ II

Настоящий выпуск **Сборника трудов «Управление большими системами»** продолжает практику специальных тематических выпусков, выходящих в дополнение к основным периодическим выпускам.

Подготовкой настоящего выпуска занимались **Петрозаводский и Санкт-Петербургский региональные редакционные советы Сборника трудов «Управление большими системами»** и **Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН.**

Материалы специального выпуска представляют собой избранные статьи трех последних выпусков издаваемого Карельским научным центром РАН и Санкт-Петербургским государственным университетом журнала **«Математическая теория игр и ее приложения»**.

Вниманию авторов и читателей! Опубликованные в настоящем выпуске статьи, первоначально вышедшие в одном из номеров журнала «Математическая теория игр и ее приложения» за 2010 год, **не считаются новыми публикациями.** Однако при ссылке на любую из опубликованных статей можно ссылаться как на журнал «Математическая теория игр и ее приложения», так и на настоящий выпуск сборника трудов «Управление большими системами».

mgta.krc.karelia.ru

Журнал "МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ИГР И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ"



ЖУРНАЛ "МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ИГР И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ"

Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН

Журнал публикует статьи, касающиеся **теоретико-игрового анализа и методов оптимального управления** для решения прикладных задач в **экономике, экологии, политике и менеджменте**.

Целью публикаций задач стратегического анализа является поддержка взаимосвязи между математической теорией и приложениями. Публикуемые статьи содержат строгий анализ современных проблем и перспективы новых исследований. Журнал принимает статьи, связанные с теоретико-игровым подходом из всех областей применения в экономике, менеджменте, экологии и политике.

Важной задачей журнала является поощрение междисциплинарных взаимосвязей (математические и экономические науки, математические и биологические науки, математические и политические науки) и взаимодействия исследователей в области теории игр. Журнал «МТИ&П» приветствует не только статьи по теории игр и приложениям, но и технические заметки, комментарии, примеры, численный анализ, моделирование и вычислительные алгоритмы.

Редколлегия:

проф. Васин А.А.,
проф. Зенкевич Н.А. (отв. секретарь),
проф. Клейменов А.Ф.,
академик Кряжимский А.В.,
проф. Мазалов В.В. (зам. отв. редактора),
член-корр. РАН Новиков Д.А.,
проф. Петросян Л.А. (отв. редактор),
академик Осипов Ю.С.,
проф. Угольницкий Г.А.,
проф. Шевченко И.И.,
проф. Яновская Е.Б.



ubs.mtas.ru

Интернет-сайт электронного периодического
научного издания «Управление большими
системами: сборник трудов»

УПРАВЛЕНИЕ БОЛЬШИМИ СИСТЕМАМИ

ЭЛЕКТРОННЫЙ СБОРНИК НАУЧНЫХ ТРУДОВ
ИНСТИТУТА ПРОБЛЕМ УПРАВЛЕНИЯ ИМ. В.А. ТРАПЕЗНИКОВА РАН

С 1998 года Институт проблем управления РАН выпускает периодический сборник трудов ученых, занимающихся разработкой и исследованием математических моделей управления большими (социально-экономическими, организационными, организационно-техническими и др.) системами. Все статьи, публикуемые в сборнике, проходят рецензирование ведущими специалистами по теории управления.

С 2006 года сборник "Управление большими системами" вместе с ведущим журналом ИПУ РАН "Проблемы управления" – включены в Российский индекс научного цитирования (РИНЦ).

С июля 2007 года Сборник входит в список ВАК (перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертации на соискание ученой степени доктора и кандидата наук):

- * по управлению, вычислительной технике и информатике;
- * по электронике, измерительной технике, радиотехнике и связи; по энергетике.

**Уважаемые коллеги! Приглашаем Вас опубликовать
Вашу статью в очередном выпуске сборника
"Управление большими системами"!**

Периодичность сборника – 4 раза в год. Время выхода прошедшей рецензирование статьи – 3-4 месяца. Плата с авторов за публикацию рукописей не взимается.

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова

УПРАВЛЕНИЕ БОЛЬШИМИ СИСТЕМАМИ

СБОРНИК ТРУДОВ

Выпуск 31.1

*Математическая теория игр
и ее приложения II*

Москва – 2010

КООРДИНАЦИОННЫЙ СОВЕТ

Академики РАН: Васильев С.Н., Емельянов С.В., Коровин С.К., Куржанский А.Б., Федосов Е.А., Черноусько Ф.Л.; члены-корреспонденты РАН: Желтов С.Ю., Каляев И.А., Пархоменко П.П., Попков Ю.С.; д-ра техн. наук: Бутковский А.Г., Дорофеев А.А., Кузнецов О.П., Кульба В.В., Кротов В.Ф., Лотоцкий В.А., Павлов Б.В., Поляк Б.Т., Рутковский В.Ю.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор: член-корр. РАН Новиков Д.А. **Отв. секретарь:** к.т.н. Губко М.В.
Д-ра техн. наук: проф. Алескеров Ф.Т. (ГУ ВШЭ), проф. Артамонов Е.И. (ИПУ РАН), д-р экон. наук, проф. Архипова М.Ю. (ИПИ РАН), д-ра техн. наук: проф. Афанасьев В.Н. (МИЭМ), проф. Бахтадзе Н.Н. (ИПУ РАН), проф. Бурков В.Н. (ИПУ РАН), проф. Вишневский В.М. (ИППИ РАН), д-р экон. наук, проф. Голиченко О.Г. (ЦЭМИ РАН), д-р физ.-мат. наук, проф. Добровидов А.В. (ИПУ РАН), д-ра техн. наук: проф. Заложнев А.Ю. (ИПУ РАН), проф. Ириков В.А. (МФТИ), проф. Калянов Г.Н. (ИПУ РАН), проф. Касаткин С.И. (ИПУ РАН), проф. Каравай М.Ф. (ИПУ РАН), д-р экон. наук, проф. Клочков В.В. (ИПУ РАН), д-ра техн. наук: проф. Кононенко А.Ф. (ВЦ РАН), проф. Курдюков А.П. (ИПУ РАН), проф. Лебедев В.Г. (ИПУ РАН), к-т техн. наук, доцент Лебедев В.Н. (ИПУ РАН), д-р экон. наук, проф. Ловчиновский Э.В. (ИПУ РАН), д-р техн. наук, проф. Мандель А.С. (ИПУ РАН), д-р экон. наук, проф. Нижегородцев Р.М. (ИПУ РАН), д-ра техн. наук: проф. Новосельцев В.Н. (ИПУ РАН), проф. Орлов А.И. (МВТУ), канд. техн. наук Петрикевич Я.И. (ИПУ РАН), д-р физ.-мат. наук, проф. Рапопорт Л.Б. (ИПУ РАН), д-р техн. наук, проф. Рыков А.С. (МИСИС), д-р экон. наук, проф. Секерин В.Д. (ИПУ РАН), д-ра техн. наук: проф. Сидельников Ю.В. (МАИ), проф. Совлуков А.С. (ИПУ РАН), д-р экон. наук, проф. Сухарев О.С. (Ин-т экономики РАН), д-ра техн. наук: проф. Уткин В.А. (ИПУ РАН), проф. Хоботов Е.Н. (МВТУ), д-ра физ.-мат. наук: доцент Чеботарев П.Ю. (ИПУ РАН), проф. Чхартишвили А.Г. (ИПУ РАН), проф. Щербаков П.С. (ИПУ РАН).

РЕГИОНАЛЬНЫЕ РЕДАКЦИОННЫЕ СОВЕТЫ

Волгоград – д-ра физ.-мат. наук: проф. Воронин А.А., проф. Лосев А.Г. (ВолГУ); **Воронеж** – д-р техн. наук, проф. Баркалов С.А., д-р физ.-мат. наук, проф. Головинский П.А. (ВГАСУ), д-р техн. наук, проф. Подвальный С.Л. (ВГТУ); **Ижевск** – д-р физ.-мат. наук, проф. Непейвода Н.Н., к-т физ.-мат. наук, проф. Родионов В.И. (УдмГУ); **Иркутск** – д-ра физ.-мат. наук: проф. Бычков И.В., проф. Лакеев А.В. (ИДСТУ СО РАН); **Казань** – д-р физ.-мат. наук, проф. Маликов А.И., д-р техн. наук, проф. Сиразетдинов Р.Т. (КГТУ-КАИ); **Липецк** – д-ра техн. наук: проф. Кузнецов Л.А., проф. Погодаев А.К. (ЛГТУ); **Самара** – д-ра экон. наук: проф. Богатырев В.Д., проф. Гераськин М.И., д-р техн. наук, проф. Засканов В.Г. (СГАУ); **Петрозаводск** – д-р физ.-мат. наук, проф. Мазалов В.В., к-т физ.-мат. наук, доц. Печников А.А. (ИПМИ КарНЦ РАН); **Санкт-Петербург** – д-ра физ.-мат. наук: проф. Петросян Л.А. (СПбГУ), проф. Фрадков А.Л. (ИПМ РАН); **Старый Оскол** – д-р техн. наук, проф. Еременко Ю.И. (СТИ); **Тверь** – д-ра техн. наук: проф. Кузнецов В.Н., проф. Палюх Б.В. (ТГТУ).

Адрес редакции: 117997, г. Москва, ул. Профсоюзная, д. 65.

Адрес в Интернет: ubs.mtas.ru.

Номер гос. регистрации электронного научного издания (ЭНИ): 0420900023.

© ИПУ РАН, 2010

СОДЕРЖАНИЕ

Системный анализ

Акимова А. Н., Захаров В. В. <i>Метод нахождения S-ядра корневой игры.....</i>	5
Григорьева К. В. <i>Оптимизация в классе стохастических коалиционных игр.....</i>	30
Зенкевич Н. А., Зятчин А. В. <i>Построение сильного равновесия в дифференциальной игре многих лиц.....</i>	51
Зинченко А. Б., Мироненко Г. В., Провоторова П. А. <i>Консенсус-значение для игр с коалиционной структурой.....</i>	78
Ковшов А. М. <i>Стратегии параллельного сближения в игре простого преследования на сфере. Геодезическое сближение.....</i>	93
Райгородская А. В. <i>Стохастическая двухшаговая игра ε-наилучших ответов размерности 2×2.....</i>	116
Степанов Д. С. <i>Модель эндогенного формирования коалиций с двумя типами игроков.....</i>	141
Шевкопляс Е. В. <i>Устойчивая кооперация в дифференциальных играх со случайной продолжительностью.....</i>	162

Информационные технологии в управлении

Парилина Е. М.

Кооперативная игра передачи данных в беспроводной сети..... 191

Управление в социально-экономических системах

Васин А. А., Гусев А. Г, Шарикова А. А.

Теоретико-игровой анализ одноэтапных и двухэтапных аукционов однородного товара 210

Гладкова М.А., Зенкевич Н. А.

Теоретико-игровая модель управления качеством в условиях конкуренции 239

Калугина А. М.

Производящие функции для процедуры выбора комитетов 263

Мазалов В. В., Токарева Ю. С.

Теоретико-игровые модели проведения конкурсов 273

Менчер А. Э.

Дискретная арбитражная процедура с неравномерным распределением вероятностей 287

Управление в медико-биологических и экологических системах

Зенкевич Н. А., Козловская Н. В.

Устойчивый вектор Шепли в кооперативной задаче территориального экологического производства 303

Королев Ю. М., Голубцов П. В.

Двухуровневые конфликтные системы в задачах совместной разработки природных ресурсов 331

УДК 519.83
ББК 22.18

МЕТОД НАХОЖДЕНИЯ С-ЯДРА КОРНЕВОЙ ИГРЫ¹

Акимова А.Н.², Захаров В.В.³

(Санкт-Петербургский государственный университет,
Факультет прикладной математики – процессов управления,
Санкт-Петербург)

Показано, что в любой ТП-кооперативной игре основание большого (теневого) SC-ядра совпадает с C-ядром корневой игры. Сравнение определений большого SC-ядра и большого теневого SC-ядра с описанием агрегированно-монотонного C-ядра приводит к формальному геометрическому совпадению агрегированно-монотонного C-ядра либо с большим SC-ядром, либо с большим теневым SC-ядром. Предложен метод нахождения системы ограничений наиболее простого вида, описывающей C-ядро корневой игры в игре с n игроками. Для обоснования метода применяется теория двойственности и индуктивный метод Б. Пелега.

Ключевые слова: ТП-кооперативная игра, C-ядро, большое (теневое) SC-ядро, корневая игра, агрегированно-монотонное C-ядро, линейное программирование, сбалансированный набор коалиций.

Введение

В процессе развития теории кооперативных игр с трансферабельными полезностями предлагались различные виды монотонности решений, одной из которых является агрегированная монотонность одноточечных решений, введенная Н. Мегиддо [8]. Од-

¹ Текст приводится в соответствии с изданием «Математическая теория игр и ее приложения. – 2010. – Т. 2. № 1. – С. 3–26».

² Арина Николаевна Акимова, ассистент (arina_akimova@mail.ru).

³ Виктор Васильевич Захаров, доктор физико-математических наук, профессор (mcvictor@mail.ru).

нако часто главным требованием, предъявляемым к решению ТП-кооперативной игры, является его принадлежность C -ядру. Множество векторов выигрышей, образуемое всевозможными одноточечными решениями, удовлетворяющими свойству агрегированной монотонности и одновременно принадлежащими C -ядру, было названо агрегированно-монотонным C -ядром [7]. В той же статье для того, чтобы сформулировать точное аналитическое описание агрегированно-монотонного C -ядра, было введено понятие корневой игры по отношению к исходной ТП-кооперативной игре.

Ранее, исходя из геометрической точки зрения, было предложено множественное решение ТП-кооперативных игр, названное большим SC -ядром [13]. Было показано, что большое SC -ядро не пусто тогда и только тогда, когда игра сбалансирована. Позднее было предложено большое теневое SC -ядро как аналог большого SC -ядра в классе несбалансированных ТП-кооперативных игр [5, 14, 15]. Следует заметить, что определения этих решений были сформулированы с помощью множества оптимальных решений $X^0(v)$ специальной задачи линейного программирования, которое было названо основанием большого SC -ядра в случае сбалансированной игры и основанием большого теневого SC -ядра в случае несбалансированной игры.

В этой статье мы сначала покажем, что C -ядро корневой игры совпадает с множеством $X^0(v)$, а агрегированно-монотонное C -ядро, как множество векторов, формально совпадает либо с большим SC -ядром, либо с большим теневым SC -ядром в зависимости от сбалансированности игры. Затем мы докажем теорему о взаимно-однозначном соответствии между множеством потенциально-оптимальных граней и множеством минимальных сбалансированных наборов коалиций в игре с n игроками, и на основе этой теоремы сформулируем метод нахождения C -ядра корневой игры (или множества $X^0(v)$) в ТП-кооперативной игре с произвольным числом игроков.

1. Большое SC -ядро, большое теневое SC -ядро и агрегированно-монотонное C -ядро

Пусть $N = \{1, \dots, n\}$ — конечное множество игроков. Любое непустое подмножество множества игроков $S \subseteq N$ называется *коалицией*. Каждой коалиции S ставится в соответствие вещественное число $v(S)$, называемое значением коалиции S , которое представляет собой общий гарантированный доход этой коалиции, получаемый при кооперации ее членов. Построенная в результате функция $v: 2^N \rightarrow \mathbb{R}$, определенная на множестве всех подмножеств из N ($S \in 2^N$), с вещественными значениями и естественным условием $v(\emptyset) = 0$, называется *характеристической функцией* игры.

Упорядоченная пара $\Gamma = (N, v)$ называется *кооперативной игрой с трансферабельными полезностями игроков* (или ТП-кооперативной игрой, или ТП-игрой) *в форме характеристической функции*. Обозначим через G^N класс всех ТП-кооперативных игр с множеством игроков N , а через B^N — множество всех сбалансированных игр из класса G^N .

Допустимым вектором выигрышей игры (N, v) называется вектор $\xi \in \mathbb{R}^n$ такой, что $\sum_{i \in N} \xi_i \leq v(N)$.

Предделележом игры (N, v) называется вектор $\xi \in \mathbb{R}^n$ такой, что $\sum_{i \in N} \xi_i = v(N)$.

Дележом игры (N, v) называется преддележ $\xi \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющий условиям индивидуальной рациональности: $\xi_i \geq v(\{i\})$, $\forall i \in N$.

Множество всех допустимых векторов выигрышей обозначим через $X^*(v)$, множество всех предделелей — через $I^*(v)$, а множество всех дележей — через $I(v)$.

Решением на некотором классе ТП-кооперативных игр $G' \subseteq G^N$ называется отображение ϕ , которое каждой игре $(N, v) \in G'$ ставит в соответствие некоторое подмножество множества допустимых векторов выигрышей $\phi(v) \subset X^*(v)$. Если для любой игры $(N, v) \in G'$ множество $\phi(v)$ состоит из единственного допустимого вектора выигрышей, то решение называется *одноточечным*

или значением игры. Преддележ из множества $\phi(v)$ называют также *распределением*.

Для аналитического описания одной из наиболее важных концепций решения ТП-кооперативных игр, C -ядра, будем исходить из утверждения Оуэна [9].

Теорема 1. *Преддележ $\xi \in I^*(v)$ принадлежит C -ядру ТП-кооперативной игры (N, v) тогда и только тогда, когда для каждой коалиции $S \subset N$ выполняется неравенство: $\sum_{i \in S} \xi_i \geq v(S)$.*

Другими словами, C -ядро представляет собой множество коалиционно-рациональных (пред)дележей:

$$(1) \quad C(v) = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i \in N} \xi_i = v(N); \right. \\ \left. \sum_{i \in S} \xi_i \geq v(S), \forall S \subset N, S \neq \emptyset, N \right\}.$$

Рассмотрим следующую задачу линейного программирования:

$$(2) \quad \min \sum_{i \in N} \xi_i,$$

$$(3) \quad \sum_{i \in S} \xi_i \geq v(S), \quad \forall S \subset N, S \neq \emptyset, N.$$

Обозначим через $\xi^0 = (\xi_1^0, \dots, \xi_n^0)$ произвольное оптимальное решение, а через $X^0(v)$ множество всех оптимальных решений ЗЛП (2)–(3).

Известно (см., напр., [6, 13]), что C -ядро игры (N, v) не пусто тогда и только тогда, когда для произвольного $\xi^0 \in X^0(v)$ выполняется неравенство:

$$(4) \quad \sum_{i \in N} \xi_i^0 \leq v(N).$$

Приведем определение SC -ядра ТП-кооперативной игры (N, v) , впервые изложенное в [13].

Определение 1. Множество векторов

$$(5) \quad SC(v, \xi^0) = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^n \mid \xi \in I^*(v), \xi_i \geq \xi_i^0, \forall i \in N \right\} =$$

или в эквивалентной форме

$$(6) \quad = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^n \mid \xi_i = \xi_i^0 + \alpha_i \left(v(N) - \sum_{i \in N} \xi_i^0 \right), \text{ где} \right.$$

$$\left. \alpha_i \geq 0, \sum_{i \in N} \alpha_i = 1, \text{ и } \sum_{i \in N} \xi_i^0 \leq v(N) \right\}$$

называется *SC-ядром* ТП-кооперативной игры (N, v) относительно вектора $\xi^0 \in X^0(v)$, а вектор ξ^0 — основанием данного *SC-ядра*.

Распространение понятия *SC-ядра* относительно вектора ξ^0 на все множество оптимальных решений $X^0(v)$ приводит к понятию большого *SC-ядра* [16].

Определение 2. Множество векторов

$$GSC(v) = \bigcup_{\forall \xi^0 \in X^0(v)} SC(v, \xi^0)$$

называется *большим SC-ядром* ТП-кооперативной игры (N, v) .

При этом множество всех оптимальных решений задачи (2)–(3) $X^0(v)$ будем называть *основанием большого SC-ядра*. Справедливо следующее утверждение [16].

Теорема 2. В любой сбалансированной ТП-кооперативной игре (N, v) большое *SC-ядро* содержится в *C-ядре*: $GSC(v) \subseteq C(v)$.

Предположим теперь, что *C-ядро* игры (N, v) является пустым. В классе несбалансированных игр были введены «теневые» аналоги *SC-ядра* и *большого SC-ядра* [14].

Определение 3. Множество векторов

$$(7) \quad \overline{SC}(v, \xi^0) = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^n \mid \xi \in I^*(v), \xi_i \leq \xi_i^0, \forall i \in N \right\} =$$

или в эквивалентной форме

$$(8) \quad = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^n \mid \xi_i = \xi_i^0 + \alpha_i \left(v(N) - \sum_{i \in N} \xi_i^0 \right), \text{ где} \right. \\ \left. \alpha_i \geq 0, \sum_{i \in N} \alpha_i = 1, \text{ и } \sum_{i \in N} \xi_i^0 > v(N) \right\}$$

будем называть *теневым SC-ядром ТП-кооперативной игры* (N, v) относительно вектора $\xi^0 \in X^0(v)$.

Определение 4. *Множество векторов*

$$\overline{\text{GSC}}(v) = \bigcup_{\forall \xi^0 \in X^0(v)} \overline{\text{SC}}(v, \xi^0).$$

называется *большим теневым SC-ядром ТП-кооперативной игры* (N, v) .

В этом случае множество всех оптимальных решений задачи (2)–(3) $X^0(v)$ будем называть *основанием большого теневого SC-ядра*.

Так как в несбалансированной игре для любого $\xi^0 \in X^0(v)$ выполняется неравенство, противоположное неравенству (4), т. е. $\sum_{i \in N} \xi_i^0 > v(N)$, то любое теневое SC-ядро относительно вектора ξ^0 не пусто, а, следовательно, не пусто и большое теневое SC-ядро.

Приведем определение предложенного Н. Мегиддо [8] свойства агрегированной монотонности одноточечных решений.

Определение 5. *Значение ϕ на классе игр G^N называется агрегированно-монотонным, если для любых двух игр $v, v' \in G^N$ таких, что $v(S) = v'(S)$ для всех $S \subset N$ и $v(N) < v'(N)$, имеет место неравенство: $\phi(v) \leq \phi(v')$.*

В статье [7] было введено понятие агрегированно-монотонного C -ядра и понятие корневой игры.

Определение 6. *Агрегированно-монотонным C -ядром ТП-кооперативной игры (N, v) называется подмножество множества преддележей $I^*(v)$, которое является совокупностью найденных для данной игры (N, v) всевозможных значений из класса*

игр G^N , обладающих свойством агрегированной монотонности и принадлежащих C -ядру, если последнее не пусто.

Для произвольной ТП-игры (N, v) обозначим через B_v^N множество сбалансированных игр, которые отличаются от игры (N, v) только значением коалиции N :

$$(9) \quad B_v^N = \{ v' \in B^N \mid v'(S) = v(S) \forall S \subset N \}.$$

Определение 7. Корневой игрой (N, v_r) по отношению к ТП-игре (N, v) называется наименьшая сбалансированная игра из множества B_v^N , т. е. $v_r \in B_v^N$ и $v_r(N) \leq w(N)$ для любой другой игры $w \in B_v^N$.

Рассмотрим ЗЛП (2)–(3) для произвольной игры (N, v') из множества сбалансированных игр (9). Так как $v'(S) = v(S)$ для любой коалиции $S \subset N$, то

$$(10) \quad X^0(v') = X^0(v), \forall v' \in B_v^N.$$

Неравенство (4), которое выполняется для любой сбалансированной игры, также справедливо для всех игр из множества (9), и с учетом (10) имеет вид: $\sum_{i \in N} \xi_i^0 \leq v'(N)$ для произвольного $\xi^0 \in X^0(v)$. Тогда по определению 7 значение $v_r(N)$ корневой игры равно

$$(11) \quad v_r(N) = \sum_{i \in N} \xi_i^0.$$

Утверждение 1. Пусть (N, v) — произвольная ТП-кооперативная игра. C -ядро корневой игры (N, v_r) совпадает с множеством оптимальных решений $X^0(v)$ ЗЛП (2)–(3).

Доказательство. Непустое C -ядро игры (N, v_r) можно рассматривать как множество оптимальных решений следующей ЗЛП (см., напр., [9]):

$$(12) \quad \min \sum_{i \in N} \xi_i,$$

$$(13) \quad \sum_{i \in S} \xi_i \geq v(S), \quad \forall S \subset N, S \neq \emptyset,$$

$$(14) \quad \sum_{i \in N} \xi_i = v_r(N),$$

которая отличается от задачи (2)–(3) только дополнительным ограничением (14). Поскольку $C(v_r) \neq \emptyset$, то оптимальное значение ЗЛП (12)–(14) равно $v_r(N)$. Тогда из (11) следует, что множества оптимальных решений задач (2)–(3) и (12)–(14) совпадают друг с другом, т. е. $X^0(v) = C(v_r)$.

Следующая теорема обеспечивает точное аналитическое описание агрегированно-монотонного C -ядра [7].

Теорема 3. *Для агрегированно-монотонного C -ядра ТП-кооперативной игры (N, v) справедливо представление*

$$AC(v) = C(v_r) + (v(N) - v_r(N)) \Delta_N,$$

где $C(v_r)$ – C -ядро корневой игры (N, v_r) и $\Delta_N = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + \dots + x_n = 1, x_i \geq 0 \forall i \in N\}$.

Докажем следующее утверждение.

Утверждение 2. *Пусть (N, v) – произвольная ТП-кооперативная игра. Множество векторов из агрегированно-монотонного C -ядра совпадает с большим SC -ядром, если игра (N, v) сбалансирована, и с большим теневым SC -ядром, если игра (N, v) несбалансирована.*

Доказательство. Заметим, что описания SC -ядра и теневого SC -ядра в форме (6) и (8) отличаются друг от друга только условиями сбалансированности или несбалансированности игры (N, v) в виде неравенства (4) и противоположного ему неравенства. Поэтому объединяя их в одно определение и распространяя его на все множество $X^0(v)$, получим следующее общее выражение для большого SC -ядра и большого теневого SC -ядра.

Множество векторов

$$(15) \quad X = X^0(v) + \left(v(N) - \sum_{i \in N} \xi_i^0 \right) \Delta_N$$

является большим SC -ядром, если игра (N, v) сбалансирована, и большим теневым SC -ядром, если игра (N, v) несбалансирована.

Сравним выражение (15) с представлением агрегированно-монотонного C -ядра из теоремы 3. Принимая во внимание утверждение 1 и равенство (11), приходим к доказываемому утверждению.

2. Теоретическое обоснование метода

Для построения метода нахождения C -ядра корневой игры будем исходить из утверждения 1 о совпадении $C(v_r)$ с множеством $X^0(v)$. Как известно, множество оптимальных решений любой ЗЛП является также решением некоторой системы линейных уравнений и неравенств (см., напр., [4]). Поэтому рассмотрим задачу нахождения системы линейных ограничений, описывающей C -ядро корневой игры (или множество $X^0(v)$), минимальной по общему числу ограничений и содержащей наибольшее число ограничений типа равенств.

Представим ЗЛП (2)–(3) в векторно-матричной форме:

$$(16) \quad \min (\xi, \mathbb{I}),$$

$$(17) \quad \xi A \geq V,$$

где (ξ, \mathbb{I}) — скалярное произведение вектора $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ и n -мерного вектора $\mathbb{I} = (1, \dots, 1)^T$. Если некоторым образом перенумеровать все коалиции $S \subset N$ ($S \neq \emptyset, N$): S_1, \dots, S_p , где $p = 2^n - 2$ — общее число ограничений в системе (3), то можно представить элементы матрицы A и вектора V в виде:

$$(18) \quad a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i \in S_j, \\ 0, & \text{если } i \notin S_j, \end{cases} \quad \text{где } i = \overline{1, n}, j = \overline{1, p},$$

$$V = (v(S_1), \dots, v(S_p)).$$

Множество допустимых решений (17) с геометрической точки зрения является выпуклым замкнутым многогранным множеством, которое обозначим M . Поэтому множеством оптимальных решений $X^0(v)$ может быть только некоторая грань Γ множества M . Любую грань $\Gamma \in M$ такую, что $\Gamma \subseteq X^0(v)$, будем называть оптимальной гранью.

Определение 8. Грань $\Gamma \in M$ будем называть потенциально-оптимальной в классе игр G^N , если существует игра (N, v) из класса G^N такая, что $X^0(v) = \Gamma$ и для любой другой оптимальной грани $\Gamma' \subseteq X^0(v)$ справедливо включение $\Gamma' \subseteq \Gamma$.

Множество всех потенциально-оптимальных граней в классе игр G^N обозначим через P_N^0 .

Задача (16)–(17) является двойственной к задаче:

$$(19) \quad \max \sum_{j=1}^p \lambda_j v(S_j),$$

$$(20) \quad \begin{cases} \sum_{j: i \in S_j} \lambda_j = 1, & \forall i \in N, \\ \lambda_j \geq 0, & j = \overline{1, p}, \end{cases}$$

или в векторно-матричной форме

$$\begin{aligned} \max \quad & (V, \lambda), \\ & \begin{cases} A\lambda = \mathbb{I}, \\ \lambda \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Оптимальное решение ЗЛП (19)–(20) связано с понятиями сбалансированного и минимального сбалансированного набора коалиций (или покрытия), предложенными Бондаревой [2, 3] и Шепли [11].

Определение 9. Пусть $\mathcal{B} = \{S_1, \dots, S_k\}$ – некоторый набор коалиций $S_j \subset N$, $S_j \neq \emptyset$. Набор коалиций \mathcal{B} называется сбалансированным, если существуют такие положительные числа $\lambda_j > 0$, $\forall S_j \in \mathcal{B}$, что

$$(21) \quad \sum_{\substack{j: S_j \in \mathcal{B} \\ i \in S_j}} \lambda_j = 1, \quad \forall i \in N.$$

Набор чисел $(\lambda_j)_{S_j \in \mathcal{B}}$ называется системой балансирующих весов.

Определение 10. Сбалансированный набор коалиций \mathcal{B} называется минимальным, если он не содержит ни одного собственного подмножества $\mathcal{B}^* \subsetneq \mathcal{B}$, также являющегося сбалансированным набором коалиций.

Доказательство следующего необходимого и достаточного условия минимальности сбалансированного набора можно найти, например, в книге Оуэна [9].

Теорема 4. Сбалансированный набор коалиций \mathcal{B} является минимальным тогда и только тогда, когда для него существует единственная система балансирующих весов $(\lambda_j)_{S_j \in \mathcal{B}}$.

Для того, чтобы найти все минимальные сбалансированные наборы коалиций в классе игр G^N , Б. Пелегом был разработан индуктивный метод [10], сущность которого заключается в последовательном нахождении всех минимальных сбалансированных наборов коалиций для игр с n игроками, если известны все минимальные сбалансированные наборы коалиций для игр с $n - 1$ игроками. Заметим, что в работе Шепли [11] приведены все минимальные сбалансированные наборы коалиций для игр с числом игроков $n = 3, 4, 5, 6$.

Как известно, между оптимальными решениями пары двойственных задач существуют соотношения, устанавливаемые теоремами о дополняющей нежесткости, а также теоремой двойственности. Для пары двойственных задач линейного программирования в *стандартном* виде:

$$\begin{array}{ll} \min (x, c), & \max (b, y), \\ \left\{ \begin{array}{l} x D \geq b, \\ x \geq 0, \end{array} \right. & (*) \quad \left\{ \begin{array}{l} D y \leq c, \\ y \geq 0, \end{array} \right. & (**) \end{array}$$

где D — матрица, x и b — вектор-строки, y и c — вектор-столбцы, эти теоремы формулируются следующим образом (см., напр., [12]).

Теорема 5. (Теорема о дополняющей нежесткости в слабой форме.) *Допустимые векторы x и y задач (*) и (**) оптимальны тогда и только тогда, когда*

$$\begin{aligned} (b - x D) y &= 0, \\ x (D y - c) &= 0. \end{aligned}$$

Теорема 6. (Теорема о дополняющей нежесткости в сильной форме.) *Для заданной пары разрешимых двойственных задач (*) и (**) существует по крайней мере одна пара оптимальных решений x и y , удовлетворяющих соотношениям:*

$$\begin{aligned} (b - x D) + y^T &> 0, \\ (D y - c) + x^T &> 0. \end{aligned}$$

Теорема 7. (Теорема двойственности.) *Для того чтобы допустимый вектор x (вектор y) являлся оптимальным решением ЗЛП (*) (ЗЛП (**), соответственно), необходимо и достаточно, чтобы существовал допустимый вектор y (вектор x) двойственной задачи такой, что $(x, c) = (b, y)$. Оптимальные значения двойственных задач равны для любой пары их оптимальных решений.*

Кроме того, для допустимых векторов двойственных задач справедлива следующая теорема(см., напр., [12]).

Теорема 8. *Для любых допустимых векторов x и y задач (*) и (**), соответственно, выполняется неравенство: $(x, c) \geq (b, y)$.*

В следующей теореме мы покажем, что множество потенциально-оптимальных граней P_N^0 взаимно-однозначно связано с множеством минимальных сбалансированных наборов коалиций в классе игр G^N .

Предварительно заметим, что система ограничений, описывающая произвольную грань $\Gamma \in M$, получается из системы (17) путем замены в ней некоторых k неравенств на уравнения ($k \leq n$):

$$(22) \quad \xi \tilde{A} = \tilde{V},$$

$$(23) \quad \xi \hat{A} \geq \hat{V},$$

причем столбцы матрицы \tilde{A} должны быть линейно независимы, т. е. $\text{rank } \tilde{A} = k$. При этом размерность грани Γ определяется как $q = n - k$. Обозначим через $U(\Gamma) = (S_{i_1}, \dots, S_{i_k})$ множество коалиций, соответствующих неравенствам в (17), которые заменяются на уравнения для получения системы (22)–(23).

Докажем следующую теорему.

Теорема 9. *Грань $\Gamma \in M$ является потенциально-оптимальной в классе игр G^N тогда и только тогда, когда множество коалиций $U(\Gamma)$ является минимальным сбалансированным набором в классе игр G^N .*

Доказательство. НЕОБХОДИМОСТЬ. Предположим, что некоторая грань $\Gamma \in M$ является потенциально-оптимальной в

классе игр G^N и задается системой ограничений (22)–(23), где столбцы матрицы $\tilde{A} = \{\tilde{a}^j\}_{j=1}^k$ линейно независимы, а $U(\Gamma) = (S_1, \dots, S_k)$ – множество коалиций, перенумерованных в том же порядке, в котором они соответствуют столбцам матрицы \tilde{A} . По определению 8, существует игра (N, v) из класса G^N такая, что $X^0(v) = \Gamma$. Рассмотрим связь между оптимальными решениями задач (2)–(3) и (19)–(20) для данной игры. Пусть $\xi^0 \in X^0(v)$ и λ^0 – соответствующие произвольные оптимальные решения этих задач.

Заметим, что рассматриваемые задачи не являются задачами линейного программирования в стандартном виде, поэтому для них условия дополняющей нежесткости в слабой форме сводятся к единственному равенству: $(V - \xi A) \lambda = 0$, которое равносильно условиям:

$$(24) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{если } \lambda_j > 0, \text{ то } \sum_{i=1}^n \xi_i a_{ij} = v(S_j), \quad j \in \{1, \dots, p\}, \\ \text{если } \sum_{i=1}^n \xi_i a_{ij} > v(S_j), \text{ то } \lambda_j = 0, \quad j \in \{1, \dots, p\}, \end{array} \right.$$

а условия дополняющей нежесткости в сильной форме – к единственному неравенству: $(V - \xi A) + \lambda^T > 0$, которое равносильно условиям:

$$(25) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{если } \lambda_j = 0, \text{ то } \sum_{i=1}^n \xi_i a_{ij} > v(S_j), \quad j \in \{1, \dots, p\}, \\ \text{если } \sum_{i=1}^n \xi_i a_{ij} = v(S_j), \text{ то } \lambda_j > 0, \quad j \in \{1, \dots, p\}. \end{array} \right.$$

По теореме 5 условия дополняющей нежесткости в слабой форме выполняются для любой пары оптимальных решений двойственных задач ξ^0 и λ^0 . При этом для некоторых пар оптимальных решений равенства $\lambda_j^0 = 0$ и $\sum_{i=1}^n \xi_i^0 a_{ij} = v(S_j)$ при некоторых S_j могут выполняться одновременно. По теореме 6 условия дополняющей нежесткости в сильной форме гарантируют, что существует по крайней мере одна пара оптимальных решений ξ^0 и λ^0 , для которых условия $\lambda_j^0 = 0$ и $\sum_{i=1}^n \xi_i^0 a_{ij} = v(S_j)$ не могут иметь место одновременно.

Таким образом, существует, по крайней мере, одна пара оптимальных решений ξ^0 и λ^0 рассматриваемых задач такая, что

$$\begin{cases} \xi^0 \tilde{A} = \tilde{V}, \\ \xi^0 \hat{A} > \hat{V}, \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \lambda_j^0 > 0, \forall S_j \in U(\Gamma), \\ \lambda_j^0 = 0, \forall S_j \notin U(\Gamma). \end{cases}$$

Подставляя λ^0 в ограничения-равенства из (20), получим, что ненулевые компоненты λ^0 удовлетворяют системе:

$$\sum_{\substack{j: i \in S_j \\ S_j \in B}} \lambda_j^0 = 1, \quad \forall i \in N.$$

Тогда из определения 9 следует, что $U(\Gamma)$ является сбалансированным набором коалиций.

Из ненулевых компонент вектора λ^0 образуем вектор

$$\tilde{\lambda}^0 = (\lambda_1^0, \dots, \lambda_k^0),$$

располагая λ_j^0 в том же порядке, что и соответствующие им коалиции из множества $U(\Gamma)$. Так как столбцы матрицы $\tilde{A} = \{\tilde{a}^j\}_{j=1}^k$ линейно независимы, то вектор $\tilde{\lambda}^0$ является единственным решением системы уравнений $\tilde{A} \lambda = \mathbb{I}$. Тогда по теореме 4 получаем, что $U(\Gamma)$ является минимальным сбалансированным набором коалиций.

Достаточность. Пусть (N, v) — произвольная игра из класса G^N . Рассмотрим ЗЛП (19)–(20) для данной игры. Заметим, что крайними точками выпуклого многогранника M' , описываемого системой ограничений (20), являются векторы λ , ненулевые компоненты которых образуют системы балансирующих весов, соответствующие минимальным сбалансированным наборам коалиций. Следовательно, по крайней мере одно из оптимальных решений λ^0 задачи (19)–(20) является крайней точкой M' и отвечает некоторому минимальному сбалансированному набору коалиций $B = (S_1, \dots, S_k)$. Обозначим систему балансирующих весов для B через

$$\tilde{\lambda}^0 = (\lambda_1^0, \dots, \lambda_k^0),$$

располагая компоненты $\lambda_j^0 > 0$ оптимального вектора λ^0 в том же порядке, что и соответствующие им коалиции из множества \mathcal{B} .

Согласно теореме 4 система балансирующих весов $\tilde{\lambda}^0$ является единственным решением системы ограничений:

$$\begin{cases} \sum_{\substack{j: i \in S_j \\ S_j \in \mathcal{B}}} \lambda_j = 1, \quad \forall i \in N, \\ \lambda_j > 0, \quad \forall S_j \in \mathcal{B}, \end{cases}$$

которую можно представить в векторно-матричной форме как

$$(26) \quad \tilde{A} \lambda = \mathbb{I}, \quad \lambda > 0.$$

Тогда столбцы матрицы $\tilde{A} = \{\tilde{a}^j\}_{j=1}^k$ — линейно независимы, а их число $k \leq n$.

Покажем, что если $U(\Gamma) = \mathcal{B}$, то $X^0(v) = \Gamma$. Пусть грань Γ описывается системой (22)–(23) с $U(\Gamma) = \mathcal{B}$. Возьмем произвольный вектор $\xi \in \Gamma$, и умножим равенство (22), которому удовлетворяет этот вектор, справа скалярно на вектор $\tilde{\lambda}^0$:

$$(27) \quad \xi \tilde{A} \tilde{\lambda}^0 = \tilde{V} \tilde{\lambda}^0.$$

С одной стороны, левую часть этого выражения можно преобразовать согласно (26):

$$(28) \quad \xi \tilde{A} \tilde{\lambda}^0 = \xi \mathbb{I} = \sum_{i \in N} \xi_i.$$

С другой стороны, правая часть (27) равна оптимальному значению ЗЛП (19)–(20), так как

$$(29) \quad \tilde{V} \tilde{\lambda}^0 = \sum_{j: S_j \in \mathcal{B}} \lambda_j^0 v(S_j) = \sum_{j=1}^p \lambda_j^0 v(S_j) = \max \sum_{j=1}^p \lambda_j v(S_j).$$

Тогда по теореме 7 $\sum_{i \in N} \xi_i$ является оптимальным значением ЗЛП (2)–(3), и, следовательно, ввиду произвольности выбора вектора $\xi \in \Gamma$, справедливо включение $\Gamma \subseteq X^0(v)$.

Предположим, что $\Gamma \subset X^0(v)$, т. е. $\Gamma \neq X^0(v)$. Тогда существует другая оптимальная грань $\Gamma' = X^0(v)$ такая, что $\Gamma \subset \Gamma'$. Это означает, что любое решение системы (22)–(23) также является решением системы, описывающей грань Γ' :

$$(30) \quad \xi \tilde{A}' = \tilde{V}',$$

$$(31) \quad \xi \hat{A}' \geq \hat{V}',$$

причем все столбцы матрицы \tilde{A}' также являются столбцами матрицы \tilde{A} , и, следовательно, $U(\Gamma') \subset U(\Gamma) = \mathcal{B}$. По доказанному в первой части данной теоремы множество $U(\Gamma')$ является минимальным сбалансированным набором коалиций. Следовательно, сбалансированный набор коалиций \mathcal{B} не является минимальным. Полученное противоречит доказывает, что сделанное предположение неверно, и $\Gamma = X^0(v)$.

Для того, чтобы грань Γ являлась потенциально-оптимальной, согласно определению 8 нужно показать, что существует такая игра из класса G^N , что $X^0(v) = \Gamma$ и для любой другой оптимальной грани $\Gamma^* \subseteq X^0(v)$ справедливо включение $\Gamma^* \subset \Gamma$.

Так как $X^0(v) = \Gamma$ в исходной игре (N, v) , то для любой другой оптимальной грани $\Gamma^* \subseteq X^0(v)$ возможны два случая: либо $\Gamma^* \subset \Gamma$, либо $\Gamma^* \not\subseteq \Gamma$. В первом случае игра (N, v) является искомой игрой, а грань Γ — потенциально-оптимальной гранью.

Рассмотрим второй случай. Можно утверждать, что существует, по крайней мере, еще одна оптимальная грань $\hat{\Gamma} = X^0(v)$, $\hat{\Gamma} \neq \Gamma$, такая, что $\Gamma^* \subseteq \hat{\Gamma}$. Построим новую игру (N, \hat{v}) :

$$(32) \quad \begin{cases} \hat{v}(S) = v(S) - \varepsilon, \quad \forall S \subset N: S \in (U(\hat{\Gamma}) \setminus U(\Gamma)), \\ \hat{v}(S) = v(S), \quad \text{для остальных коалиций } S \subset N, \end{cases}$$

где $\varepsilon > 0$.

Рассмотрим ЗЛП (19)–(20) для новой игры (N, \hat{v}) :

$$(33) \quad \max \sum_{j=1}^p \lambda_j \hat{v}(S_j),$$

$$(34) \quad \begin{cases} \sum_{j: i \in S_j} \lambda_j = 1, \quad \forall i \in N. \\ \lambda_j \geq 0, \quad j = \overline{1, p}. \end{cases}$$

Заметим, что множество допустимых векторов (34) при изменении характеристической функции игры не меняется, а значение целевой функции (33) для любого допустимого вектора λ может,

разве что, уменьшиться:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^p \lambda_j \hat{v}(S_j) &= \sum_{j: S_j \in U(\hat{\Gamma}) \setminus U(\Gamma)} \lambda_j (v(S_j) - \varepsilon) + \\ &+ \sum_{j: S_j \notin U(\hat{\Gamma}) \setminus U(\Gamma)} \lambda_j v(S_j) \leq \sum_{j=1}^p \lambda_j v(S_j). \end{aligned}$$

Более того, значение целевой функции (33) для вектора λ^0 остается тем же, что и в исходной игре (N, v) , так как $\lambda_j^0 > 0$ только при $S_j \in U(\Gamma) = \mathcal{B}$, а другие компоненты $\lambda_j^0 = 0$:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^p \lambda_j^0 \hat{v}(S_j) &= \sum_{j: S_j \in U(\hat{\Gamma}) \setminus U(\Gamma)} \lambda_j^0 (v(S_j) - \varepsilon) + \\ &+ \sum_{j: S_j \in U(\Gamma)} \lambda_j^0 v(S_j) + \sum_{j: S_j \notin U(\hat{\Gamma}) \cup U(\Gamma)} \lambda_j^0 v(S_j) = \\ &= \sum_{j: S_j \in \mathcal{B}} \lambda_j^0 v(S_j) = \sum_{j=1}^p \lambda_j^0 v(S_j). \end{aligned}$$

Следовательно, предложенное изменение характеристической функции не повлияет на оптимальное значение задачи, а вектор λ^0 также является оптимальным решением новой ЗЛП (33)–(34). Тогда по теореме 7 оптимальное значение задачи (2)–(3) при переходе от игры (N, v) к игре (N, \hat{v}) также не меняется. А поскольку значения $\hat{v}(S) = v(S)$ для $S \in U(\Gamma)$, то в новой игре $X^0(\hat{v}) = \Gamma$.

Покажем, что $\hat{\Gamma} \not\subseteq X^0(\hat{v})$. Пусть в игре (N, v) грань $\hat{\Gamma}$ описывается системой ограничений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i \in S} \xi_i = v(S), \quad \forall S \in U(\hat{\Gamma}), \\ \sum_{i \in S} \xi_i \geq v(S), \quad \forall S \notin U(\hat{\Gamma}), \end{array} \right.$$

или в векторно-матричной форме:

$$(35) \quad \xi \check{A} = \check{V},$$

$$(36) \quad \xi \bar{A} \geq \bar{V},$$

причем $U(\hat{\Gamma}) \not\subseteq U(\Gamma)$ и $U(\Gamma) \not\subseteq U(\hat{\Gamma})$. Так как в исходной игре $X^0(v) = \hat{\Gamma}$, то по необходимости множество $U(\hat{\Gamma})$ является минимальным сбалансированным набором коалиций и существует система балансирующих весов $\hat{\lambda}^0$, которая является единственным решением системы уравнений:

$$(37) \quad \check{A} \lambda = \mathbb{I}, \quad \lambda > 0.$$

Тогда в игре (N, \hat{v}) грань $\hat{\Gamma}$ можно описать системой ограничений:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sum_{i \in S} \xi_i = v(S) - \varepsilon, & \forall S \in U(\hat{\Gamma}) \setminus U(\Gamma), \\ \sum_{i \in S} \xi_i = v(S), & \forall S \in U(\hat{\Gamma}) \cap U(\Gamma), \\ \sum_{i \in S} \xi_i \geq \hat{v}(S), & \forall S \notin U(\hat{\Gamma}), \end{array} \right.$$

которую представим в векторно-матричной форме следующим образом:

$$(38) \quad \xi \check{A}' = \check{V}',$$

$$(39) \quad \xi \check{A}'' = \check{V}'',$$

$$(40) \quad \xi \bar{A} \geq \bar{V}',$$

где без уменьшения общности можно считать, что $(\check{A}' | \check{A}'') = \check{A}$ и, соответственно, $(\check{V}' | \check{V}'') = \check{V}$.

Пусть $\hat{\xi} \in \hat{\Gamma}$ — произвольный вектор грани $\hat{\Gamma}$. Представим уравнения (38) и (39) в виде одного: $\xi (\check{A}' | \check{A}'') = (\check{V}' | \check{V}'')$, подставим в него $\hat{\xi}$ и умножим его справа скалярно на вектор $\hat{\lambda}^0$:

$$(41) \quad \hat{\xi} (\check{A}' | \check{A}'') \hat{\lambda}^0 = (\check{V}' | \check{V}'') \hat{\lambda}^0.$$

Левую часть этого выражения преобразуем согласно (37):

$$\hat{\xi} (\check{A}' | \check{A}'') \hat{\lambda}^0 = \hat{\xi} \check{A} \hat{\lambda}^0 = \hat{\xi} \mathbb{I} = \sum_{i \in N} \hat{\xi}_i.$$

Правую часть (41) представим в виде:

$$\begin{aligned} (\check{V}' | \check{V}'') \hat{\lambda}^0 &= \sum_{j: S_j \in U(\hat{\Gamma}) \setminus U(\Gamma)} \hat{\lambda}_j^0 (v(S_j) - \varepsilon) + \\ &+ \sum_{j: S_j \in U(\hat{\Gamma}) \cap U(\Gamma)} \hat{\lambda}_j^0 v(S_j) < \sum_{j: S_j \in U(\hat{\Gamma})} \hat{\lambda}_j^0 v(S_j). \end{aligned}$$

Таким образом, получаем неравенство:

$$\sum_{i \in N} \hat{\xi}_i < \sum_{j: S_j \in U(\hat{\Gamma})} \hat{\lambda}_j^0 v(S_j).$$

Так как сумма справа равна оптимальному значению ЗЛП (19)–(20), совпадающему с оптимальным значением ЗЛП (33)–(34), то по теореме 8 вектор $\hat{\xi}$ не является допустимым вектором ЗЛП (2)–(3) для игры (N, \hat{v}) . Следовательно, грань $\hat{\Gamma}$ не может быть оптимальной в новой игре, т. е. $\hat{\Gamma} \not\subseteq X^0(\hat{v})$.

Таким образом, в случае, когда кроме грани $\Gamma = X^0(v)$ существует оптимальная грань $\Gamma^* \subseteq X^0(v)$ такая, что $\Gamma^* \not\subseteq \Gamma$, построенная игра (N, \hat{v}) является искомой игрой из определения 8, и, следовательно, грань Γ является потенциально-оптимальной.

Из теоремы 9 следует, что для того, чтобы найти множество потенциально-оптимальных граней P_N^0 , достаточно найти множество всех минимальных сбалансированных наборов коалиций в классе игр G^N , и наоборот.

Так как для каждой потенциально-оптимальной грани Γ , по определению 8, найдется игра из класса G^N такая, что $X^0(v) = \Gamma$, то значение целевой функции (2) является постоянной величиной для любого вектора $\xi \in \Gamma$. Поэтому введем для нее специальное обозначение:

$$(42) \quad \sigma(\Gamma) = \sum_{i \in N} \xi_i, \quad \forall \xi \in \Gamma, \quad \Gamma \in P_N^0.$$

При доказательстве достаточности теоремы 9 были получены соотношения (27)–(29), из которых с учетом $\mathcal{B} = U(\Gamma)$ следует, что для любой потенциально-оптимальной грани Γ и соответствующей системы балансирующих весов $\tilde{\lambda}$ справедливо равенство:

$$(43) \quad \sum_{i \in N} \xi_i = \sum_{j: S_j \in U(\Gamma)} \tilde{\lambda}_j v(S_j).$$

Следующее утверждение дает критерий выбора оптимальной грани $\Gamma = X^0(v)$ из множества P_N^0 .

Утверждение 3. *Оптимальное значение ЗЛП (2)–(3):*

$$(44) \quad z^0 = \max_{\Gamma \in P_N^0} \sigma(\Gamma).$$

Доказательство. Возьмем некоторую потенциально-оптимальную грань $\Gamma^1 \in P_N^0$ и рассмотрим игру (N, v) , в которой $X^0(v) = \Gamma^1$. Пусть $\Gamma^2 \in P_N^0$ — любая другая потенциально-оптимальная грань.

По теореме 9 множества $U(\Gamma^1)$ и $U(\Gamma^2)$ являются минимальными сбалансированными наборами коалиций, которым соответствуют системы балансирующих весов $\tilde{\lambda}^1$ и $\tilde{\lambda}^2$.

Так как $X^0(v) = \Gamma^1$, то из (42), (43) и теоремы двойственности 7 получаем равенство:

$$(45) \quad \min_{i \in N} \sum \xi_i = \sigma(\Gamma^1) = \sum_{j: S_j \in U(\Gamma^1)} \tilde{\lambda}_j^1 v(S_j) = \max_{j=1}^p \sum \lambda_j v(S_j).$$

Следовательно, для систем балансирующих весов $\tilde{\lambda}^1$ и $\tilde{\lambda}^2$ справедливо неравенство:

$$\sum_{j: S_j \in U(\Gamma^1)} \tilde{\lambda}_j^1 v(S_j) \geq \sum_{j: S_j \in U(\Gamma^2)} \tilde{\lambda}_j^2 v(S_j),$$

эквивалентное неравенству $\sigma(\Gamma^1) \geq \sigma(\Gamma^2)$.

Откуда, ввиду произвольности выбора $\Gamma^2 \in P_N^0$, следует:

$$(46) \quad \sigma(\Gamma^1) = \max_{\Gamma \in P_N^0} \sigma(\Gamma).$$

Обозначая оптимальное значение ЗЛП (2)–(3) через z^0 , из (45) и (46) получаем равенство (44).

Из утверждения 3 следует, что если наибольшее значение $\sigma(\Gamma)$ достигается только на одной потенциально-оптимальной грани:

$$\arg \max_{\Gamma \in P_N^0} \sigma(\Gamma) = \Gamma^*,$$

то именно эта грань является множеством оптимальных векторов ЗЛП (2)–(3): $X^0(v) = \Gamma^*$.

Предположим, что $\sigma(\Gamma)$ достигает своего наибольшего значения на нескольких потенциально-оптимальных гранях:

$$\arg \max_{\Gamma \in P_N^0} \sigma(\Gamma) = \{\Gamma^1, \dots, \Gamma^k\}.$$

Тогда возникает проблема выбора $X^0(v)$ из данной совокупности граней.

Рассмотрим случай, когда $\sigma(\Gamma)$ достигает наибольшего значения только на двух потенциально-оптимальных гранях Γ^1 , $\Gamma^2 \in P_N^0$. Покажем, что тогда множество векторов, принадлежащих грани Γ^1 , совпадает с множеством векторов, принадлежащих грани Γ^2 .

Возьмем произвольные векторы $\xi^1 \in \Gamma^1$ и $\xi^2 \in \Gamma^2$ и рассмотрим вектор $\xi = \alpha \xi^1 + (1 - \alpha) \xi^2$, где $\alpha \in [0; 1]$. Так как многогранное множество M является выпуклым, то $\xi \in M$.

Значение целевой функции (2) для данного вектора ξ при любом $\alpha \in [0; 1]$ равно:

$$\begin{aligned} \sum_{i \in N} \xi_i &= \alpha \sum_{i \in N} \xi_i^1 + (1 - \alpha) \sum_{i \in N} \xi_i^2 = \\ &= \alpha \max_{\Gamma \in P_N^0} \sigma(\Gamma) + (1 - \alpha) \max_{\Gamma \in P_N^0} \sigma(\Gamma) = \max_{\Gamma \in P_N^0} \sigma(\Gamma). \end{aligned}$$

Но по условию $\arg \max_{\Gamma \in P_N^0} \sigma(\Gamma) = \{\Gamma^1, \Gamma^2\}$. Следовательно, вектор ξ принадлежит либо Γ^1 , либо Γ^2 , либо обоим граням одновременно. Таким образом, между гранями Γ^1 и Γ^2 нет никакой другой грани множества M и никаких внутренних векторов из M . Тогда

а) либо одна из граней является подмножеством другой: например, $\Gamma^2 \subset \Gamma^1$;

б) либо множества векторов, принадлежащих граням Γ^1 и Γ^2 , совпадают друг с другом.

Но по определению 8 ни одна из потенциально-оптимальных граней не может быть подмножеством другой потенциально-оптимальной грани. Следовательно, п. а) невозможен, и в результате остается только п. б).

Обобщая это рассуждение на несколько потенциально-оптимальных граней, приходим к выводу, что если

$$(47) \quad \arg \max_{\Gamma \in P_N^0} \sigma(\Gamma) = \{\Gamma^1, \dots, \Gamma^k\},$$

то множества векторов, принадлежащих граням $\Gamma^1, \dots, \Gamma^k$, совпадают друг с другом. Следовательно, множеством $X^0(v)$ является

любая из граней $\Gamma^1, \dots, \Gamma^k$.

Замечание 1. Пусть $\Gamma^1, \dots, \Gamma^k$ — потенциально-оптимальные грани из (47). Тогда каждый вектор $\xi^0 \in X^0(v)$ удовлетворяет всем ограничениям типа равенств, которые входят в систему ограничений, описывающую какую-либо из рассматриваемых граней.

3. Формулировка метода

На основании теоремы 9, утверждения 3 и замечания 1 получаем следующий метод нахождения C -ядра корневой игры с n игроками.

- 1) Найти, используя индуктивный метод Б. Пелега, множество всех минимальных сбалансированных наборов коалиций в классе игр G^N . По теореме 9 каждому минимальному сбалансированному набору коалиций \mathcal{B} взаимно-однозначно соответствует некоторая потенциально-оптимальная грань $\Gamma \in P_N^0$ с $U(\Gamma) = \mathcal{B}$.
- 2) Вычислить значения $\sigma(\Gamma)$ для всех $\Gamma \in P_N^0$ и определить наибольшее значение $\sigma(\Gamma)$ на множестве P_N^0 :

$$z^0 = \max_{\Gamma \in P_N^0} \sigma(\Gamma).$$

По утверждению 3 величина z^0 является оптимальным значением ЗЛП (2)–(3) или общим гарантированным доходом коалиции N в корневой игре: $v_r(N) = z^0$.

- 3) Выделить все потенциально-оптимальные грани, на которых достигается наибольшее значение $\sigma(\Gamma)$:

$$\{\Gamma^1, \dots, \Gamma^k\} = \arg \max_{\Gamma \in P_N^0} \sigma(\Gamma)$$

и найти множество коалиций

$$Y = U(\Gamma^1) \cup \dots \cup U(\Gamma^k).$$

- 4) Составить систему ограничений для множества $X^0(v)$, принимая во внимание замечание 1:

$$(48) \quad \begin{cases} \sum_{i \in S} \xi_i = v(S) & \text{при } S \subset N: S \in Y, \\ \sum_{i \in S} \xi_i \geq v(S) & \text{при } S \subset N: S \notin Y. \end{cases}$$

По утверждению 1 система (48) описывает C -ядро корневой игры (N, v_r) . Эта система, во-первых, содержит на одно ограничение меньше, чем классическое описание C -ядра из теоремы 1. Во-вторых, в этой системе имеется максимальное число ограничений типа равенств. Для окончательного нахождения C -ядра корневой игры остается найти его крайние точки, исходя из полученной системы.

4. Заключение

В этой статье мы показали, что C -ядро корневой игры совпадает с множеством оптимальных решений $X^0(v)$ задачи линейного программирования (2)–(3), а агрегированно-монотонное C -ядро, как подмножество множества преддележей, формально геометрически совпадает либо с большим SC -ядром, либо с большим теневым SC -ядром.

Совпадение C -ядра корневой игры с множеством $X^0(v)$ позволило обосновать и сформулировать метод для нахождения системы ограничений наиболее простого вида, описывающей C -ядро корневой игры.

Литература

1. АКИМОВА А.Н. *Аналитический метод решения специальной задачи линейного программирования* // Тезисы докладов международного конгресса «Нелинейный динамический анализ». – С.-Петербург, 2007. – С. 315.
2. БОНДАРЕВА О.Н. *Теория ядра в игре n лиц* // Вестник Ленинградского университета, Серия: мат., мех., астр. – 1962. – № 13(3). – С. 140–142.

3. БОНДАРЕВА О.Н. *Некоторые применения методов линейного программирования к теории кооперативных игр* // Проблемы кибернетики. – 1963. – № 10. – С. 119–140.
4. ЕРЕМИН И.И. *Линейная оптимизация и системы линейных неравенств*. – Москва: Издательский центр «Академия», 2007.
5. ЗАХАРОВ В.В., АКИМОВА А.Н. *О некоторых селекторах C-ядра* // Вестник Санкт-Петербургского Университета, Сер. 1. – 2002. – № 3. – С. 10–16.
6. ПЕЧЕРСКИЙ С.Л., ЯНОВСКАЯ Е.Б. *Кооперативные игры: решения и аксиомы*. – С.-Петербург: Издательство Европейского университета в С.-Петербурге, 2004.
7. CALLEJA P., RAFELS C. AND TIJS S. *The Aggregate-Monotonic Core* // Games and Economic Behavior. – 2009. – Vol. 66. – P. 742–748.
8. MEGIDDO N. *On the nonmonotonicity of the bargaining set, the kernel and the nucleolus of a game* // SIAM J. on Applied Mathematics. – 1974. – Vol. 27. – P. 355–358.
9. OWEN G. *Game theory* (third edition). – New York: Academic Press, 1995.
10. PELEG B. *An inductive method for constructing minimal balanced collections of finite sets* // Naval Research Logistics Quarterly. – 1965. – Vol. 12, № 2. – P. 155–162.
11. SHAPLEY L.S. *On balanced sets and cores* // Naval Research Logistic Quarterly. – 1967. – Vol. 14. – P. 453–460.
12. SIMONNARD M. *Linear programming*. – Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, Inc., 1966.
13. ZAKHAROV V.V. *About selectors of the core in dynamic games* // Proceedings of the 7th ISDG symposium on Dynamic Game and Applications. – Kanagawa, Japan, 1996.
14. ZAKHAROV V.V., АКИМОВА А.Н. *Nucleolus as a Selector of Subcore* // Proceedings Volume from the 11th IFAC Workshop «Control Applications of Optimization» (Zakharov V.V., ed), S.-Petersburg, Russia. – Great Britain: Pergamon, 2000. – Vol. 2. – P. 675–680.

15. ZAKHAROV V.V., AKIMOVA A.N. *Geometrical Properties of Subcore* // Game Theory and Applications (Petrosjan, L.A., and V.V. Mazalov, eds). – 2002. – Vol. 8. – P. 279–289.
16. ZAKHAROV, V.V., KWON O-H. *Selectors of the core and consistency properties* // Game Theory and Applications. – 1999. – Vol. 4. – P. 237–250.

A METHOD FOR ESTIMATING THE CORE OF ROOT GAME

Arina Akimova, St. Petersburg State University, Faculty of Applied Mathematics and Control Processes, assistant (arina_akimova@mail.ru).

Viktor Zakharov, St. Petersburg State University, Faculty of Applied Mathematics and Control Processes, Doctor of Science, professor (mcvictor@mail.ru).

Abstract: It is shown that the base of the grand (shadow) subcore coincides with the core of the root game in any TU-cooperative game. Comparing the definitions of the grand subcore and the grand shadow subcore with the description of the aggregate-monotonic core leads to formal geometrical coincidence of the aggregate-monotonic core with either the grand subcore or the grand shadow subcore. The method for estimating the simplest set of equations and inequalities describing the core of a root game in a TU-game with any number of players ($n > 3$) is proposed. To develop the method the duality theory and an inductive method by B. Peleg are used.

Keywords: TU-cooperative game, core, grand (shadow) subcore, root game, aggregate-monotonic core, linear programming, balanced collection of coalitions.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии В. В. Мазаловым

УДК 519.83
ББК 22.18

ОПТИМИЗАЦИЯ В КЛАССЕ СТОХАСТИЧЕСКИХ КОАЛИЦИОННЫХ ИГР¹

Григорьева К.В.²

*(Санкт-Петербургский государственный университет,
Факультет прикладной математики – процессов управления,
Санкт-Петербург)*

В работе рассмотрен один из классов многошаговых стохастических игр с различными коалиционными разбиениями. Исследуемая здесь игра задается на древовидном графе, где в каждой вершине z определяется коалиционное разбиение игроков, функция выигрыша коалиций и вероятности перехода в следующие вершины в зависимости от ситуации, реализовавшейся в игре, заданной в вершине z . Предложен новый математический метод решения стохастических коалиционных игр на основе вычисления обобщенного PMS-вектора как решения коалиционных игр. Предложенный метод иллюстрируется на примере трехшаговой стохастической игры трех лиц с переменной коалиционной структурой.

Ключевые слова: оптимизация, многошаговые игры, стохастические игры, равновесие по Нэшу, PMS-вектор.

Введение

В работе рассмотрен один из классов многошаговых стохастических игр с различными коалиционными разбиениями, предложен новый математический метод решения стохастических коалиционных игр на основе вычисления обобщенного PMS-вектора,

¹ Текст приводится в соответствии с изданием «Математическая теория игр и ее приложения. – 2010. – Т. 2. № 1. – С. 47–66».

² Ксения Владимировна Григорьева, кандидат физико-математических наук (kсениya196247@mail.ru).

введенного впервые в [4, 6] как решения коалиционных игр. Предложенный метод иллюстрируется на примере двухшаговой стохастической игры трех лиц с переменной коалиционной структурой.

Напомним, что *коалиционной игрой* является игра, в которой принимающие решение игроки объединены в фиксированные коалиции с целью получения максимально возможного выигрыша, а *стохастической игрой* является многошаговая игра со случайными переходами из состояния в состояние, разыгрываемая одним и более игроками.

1. Постановка задачи

Пусть задан конечный древовидный граф $\Gamma = (Z, L)$, где Z – множество вершин графа, а L – точно-множественное отображение, заданное на множестве Z : $L(z) \subset Z$, $z \in Z$. Конечный древовидный граф с начальной вершиной z_0 будем обозначать через $\Gamma(z_0)$.

В каждой вершине $z \in Z$ графа $\Gamma(z_0)$ задана *игра в нормальной форме*

$$G(z) = \langle N, X_1, \dots, X_n, K_1, \dots, K_n \rangle,$$

где

- $N = \{1, \dots, n\}$ – множество игроков, одинаковое для всех вершин $z \in Z$;
- $X_j = \left\{ x_j^z \mid x_j^z = k, k = \overline{1, m_j} \right\}$ – множество чистых стратегий игрока $j \in N$, одинаковое для всех вершин $z \in Z$;
 - m_j – число чистых стратегий игрока $j \in N$ в множестве X_j ;
 - x_j^z – чистая стратегия игрока $j \in N$ в вершине $z \in Z$;
 - $\mu_j^z = \left\{ \mu_k^j \right\}_{k=\overline{1, m_j}} \in \Sigma_j$ – смешанная стратегия игрока $j \in N$ в вершине $z \in Z$, где μ_k^j – вероятность выбора j -м

игроком k -й чистой стратегии: $\mu_k^j \geq 0$, $j = \overline{1, n}$, $k = \overline{1, m_j}$, $\sum_{k=1}^{m_j} \mu_k^j = 1$;

- Σ_j – множество всех смешанных стратегий j -го игрока;
- набор чистых стратегий $x^z = (x_1^z, \dots, x_n^z) \in X$, $x_j^z \in X_j$, $j = \overline{1, n}$, называется *ситуацией игры $G(z)$* в вершине $z \in Z$;
- $X = \prod_{i=\overline{1, n}} X_i$ – множество ситуаций, одинаковое для всех вершин $z \in Z$;
- набор смешанных стратегий $\mu^z = (\mu_1^z, \dots, \mu_n^z) \in \Sigma$, $\mu_j^z \in \Sigma_j$, $j = \overline{1, n}$, называется *ситуацией игры $G(z)$ в смешанных стратегиях* в вершине $z \in Z$;
- $\Sigma = \prod_{j=\overline{1, n}} \Sigma_j$ – множество ситуаций в смешанных стратегиях, одинаковое для всех вершин $z \in Z$;
- $K_j(x^z)$, $x^z \in X$, – функция выигрыша j -го игрока, одна и та же для всех вершин $z \in Z$; предполагается, что $K_j(x^z) \geq 0 \forall x^z \in X$ и $\forall j \in N$.

Далее, пусть в каждой вершине $z \in Z$ графа $\Gamma(z_0)$ задано коалиционное разбиение множества N

$$\Sigma_z = \{S_1, \dots, S_l\}, \quad l \leq n, \quad S_i \cap S_j = \emptyset, \quad \forall i \neq j, \quad \bigcup_{i=1}^l S_i = N,$$

т.е. множество игроков N разделено на l коалиций, каждая из которых действует как один игрок. Коалиционные разбиения, вообще говоря, различны для разных вершин z .

Тогда в каждой вершине $z \in Z$ мы имеем *одновременную коалиционную игру l лиц в нормальной форме ассоциированную с игрой $G(z)$*

$$G(z, \Sigma_z) = \left\langle N, \tilde{X}_{S_1}^z, \dots, \tilde{X}_{S_l}^z, H_{S_1}^z, \dots, H_{S_l}^z \right\rangle,$$

где

- $\tilde{X}_{S_i}^z = \prod_{j \in S_i} X_j$ – множество стратегий $\tilde{x}_{S_i}^z$ коалиции $S_i, i = \overline{1, l}$, где стратегия $\tilde{x}_{S_i}^z \in \tilde{X}_{S_i}^z$ коалиции S_i – это набор стратегий игроков из коалиции S_i , т. е. $\tilde{x}_{S_i}^z = \left\{ x_j^z \in X_j \mid j \in S_i \right\}$;
- набор стратегий $\tilde{x}^z = \left(\tilde{x}_{S_1}^z, \dots, \tilde{x}_{S_l}^z \right) \in \tilde{X}^z, \tilde{x}_{S_i}^z \in \tilde{X}_{S_i}^z, i = \overline{1, l}$, называется *ситуацией в игре* $G(z, \Sigma_z)$;
- $\tilde{X}^z = \prod_{i=\overline{1, l}} \tilde{X}_{S_i}^z$ – множество ситуаций в одновременной игре $G(z, \Sigma_z)$;
- $\tilde{\mu}_i^z$ – смешанная стратегия коалиции $S_i, i = \overline{1, l}$, в вершине $z \in Z$;
- $\tilde{\Sigma}_i^z$ – множество смешанных стратегий коалиции $S_i, i = \overline{1, l}$, в вершине $z \in Z$;
- набор смешанных стратегий $\tilde{\mu}^z = (\tilde{\mu}_1^z, \dots, \tilde{\mu}_l^z) \in \tilde{\Sigma}^z, \tilde{\mu}_i^z \in \tilde{\Sigma}_i^z, i = \overline{1, l}$, называется *ситуацией игры* $G(z)$ в смешанных стратегиях в вершине $z \in Z$;
- $\tilde{\Sigma}^z = \prod_{i=\overline{1, l}} \tilde{\Sigma}_i^z$ – множество ситуаций в смешанных стратегиях в вершине $z \in Z$;
- функция выигрыша коалиции S_i определяется как сумма выигрышей игроков из коалиции S_i , т. е.

$$H_{S_i}^z(\tilde{x}^z) = \sum_{j \in S_i} K_j(x), \quad i = \overline{1, l},$$

где $x^z = (x_1^z, \dots, x_n^z)$ и $\tilde{x}^z = \left(\tilde{x}_{S_1}^z, \dots, \tilde{x}_{S_l}^z \right)$ – одна и та же ситуация в играх $G(z)$ и $G(z, \Sigma_z)$, такая, что для каждой компоненты $x_j^z, j = \overline{1, n}$, из ситуации x^z следует, что эта же компонента $x_j^z, j \in S_i$, входит в состав стратегии $\tilde{x}_{S_i}^z$ из ситуации \tilde{x}^z .

Примем единое обозначение x^z для ситуации в играх $G(z)$ и $G(z, \Sigma_z)$. Из этого однако не следует, что $\mu^z = \tilde{\mu}^z$.

Далее, для каждой вершины $z \in Z$ графа $\Gamma(z_0)$ определены вероятности перехода $p(z, y; x^z)$ в следующие вершины $y \in L(z)$ графа $\Gamma(z_0)$, которые зависят от ситуации x^z , реализовавшейся в игре $G(z, \Sigma_z)$ с фиксированным в ней коалиционным разбиением:

$$\begin{aligned} p(z, y; x^z) &\geq 0, \\ \sum_{y \in L(z)} p(z, y; x^z) &= 1. \end{aligned}$$

Определение 1. Конечншаговой коалиционной стохастической игрой $\tilde{\Gamma}(z_0)$ будем называть игру на конечном древовидном графе $\Gamma(z_0)$ с начальной вершиной z_0 :

$$\tilde{\Gamma}(z_0) = \left\langle N, \Gamma(z_0), \{G(z, \Sigma_z)\}_{z \in Z}, \{p(z, y; x^z)\}_{z \in Z, y \in L(z), x^z \in X^z}, k_{\tilde{\Gamma}} \right\rangle$$

где

- $N = \{1, \dots, n\}$ – множество игроков, одинаковое для всех вершин $z \in Z$;
- $\Gamma(z_0)$ – древовидный граф с начальной вершиной z_0 ;
- $\{G(z, \Sigma_z)\}_{z \in Z}$ – одновременные коалиционные игры l лиц в нормальной форме, заданные в каждой вершине $z \in Z$ графа $\Gamma(z_0)$;
- $\{p(z, y; x^z)\}_{z \in Z, y \in L(z), x^z \in X^z}$ – вероятности реализации коалиционной игры $G(y, \Sigma_y)$ в вершине $y \in L(z)$ при условии, что на предыдущем шаге в одновременной игре $G(z, \Sigma_z)$ реализовалась ситуация x^z ;
- $k_{\tilde{\Gamma}}$ – число шагов в стохастической игре $\tilde{\Gamma}(z_0)$, конечное и фиксированное; шаг k в вершине $z_k \in Z$ определяется из условия $z_k \in (L(z_0))^k$, т. е. вершина z_k достигается из вершины z_0 за k шагов.

Состояниями в данной позиционной стохастической игре $\tilde{\Gamma}$ являются вершины графа $z \in Z$ с заданными в них коалиционными разбиениями Σ_z , т. е. пара вида (z, Σ_z) . Игра $\tilde{\Gamma}$ является стохастической, так как переход из состояния (z, Σ_z) в состояние (y, Σ_y) , $y \in L(z)$, определяется заданной вероятностью перехода $p(z, y; x^z)$.

Игра происходит следующим образом. Игра $\tilde{\Gamma}(z_0)$ начинается в вершине z_0 , где реализуется игра $G(z_0, \Sigma_{z_0})$ с некоторым коалиционным разбиением Σ_{z_0} . Игроки выбирают свои стратегии, образуется ситуация игры x^{z_0} . Затем с заданными вероятностями $p(z_0, z_1; x^{z_0})$ в зависимости от ситуации x^{z_0} осуществляется переход из вершины z_0 на древовидном графе $\Gamma(z_0)$ в игры $G(z_1, \Sigma_{z_1})$, $z_1 \in L(z_0)$. В игре $G(z_1, \Sigma_{z_1})$ игроки снова выбирают свои стратегии, образуется ситуация игры x^{z_1} . Затем из вершины $z_1 \in L(z_0)$ делается переход на графе в вершину $z_2 \in (L(z_0))^2$, снова образуется ситуация игры x^{z_2} , и так до тех пор, пока не будут достигнуты вершины $z_{k_{\tilde{\Gamma}}} \in (L(z_0))^{k_{\tilde{\Gamma}}}$, $L(z_{k_{\tilde{\Gamma}}}) = \emptyset$.

Обозначим через $\tilde{\Gamma}(z)$ подыгру игры $\tilde{\Gamma}(z_0)$, берущую начало в вершине $z \in Z$ графа $\Gamma(z_0)$, т. е. с коалиционной игры $G(z, \Sigma_z)$. Подыгра $\tilde{\Gamma}(z)$ очевидно также является стохастической игрой.

Введем обозначения:

- $u_j^z(\cdot)$ – стратегия игрока j , $j = \overline{1, n}$, в подыгре $\tilde{\Gamma}(z)$, которая каждой вершине $y \in Z$ ставит в соответствие стратегию x_j^y игрока j в одновременной игре $G(y, \Sigma_y)$ при $y \in \Gamma(z)$, т. е.

$$u_j^z(y) = \left\{ x_j^y \mid y \in \Gamma(z) \right\};$$

- $u_{S_i}^z(\cdot)$ – стратегия коалиции S_i в подыгре $\tilde{\Gamma}(z)$, которая есть набор стратегий $u_j^z(\cdot)$, $j \in S_i$;
- $u^z(\cdot) = (u_1^z(\cdot), \dots, u_n^z(\cdot)) = (u_{S_1}^z(\cdot), \dots, u_{S_n}^z(\cdot))$ – ситуация в подыгре $\tilde{\Gamma}(z)$.

Нетрудно показать, что выигрыш $E_j^z(u^z(\cdot))$ игрока j , $j = \overline{1, n}$, в любой подыгре $\tilde{\Gamma}(z)$ определяется как математическое ожидание выигрыша игрока j по следующей формуле ([2], с. 158):

$$(1) \quad E_j^z(u^z(\cdot)) = K_j(x^z) + \sum_{y \in L(z)} \left[p(z, y; x^z) E_j^y(u^y(\cdot)) \right].$$

Выигрыш $H_{S_i}^z(x^z)$ коалиции $S_i \in \Sigma_z$, $i = \overline{1, l}$, в каждой коалиционной игре $G(z, \Sigma_z)$ игры $\tilde{\Gamma}(z_0)$ в вершине $z \in Z$ в каждой ситуации x^z определяется как сумма выигрышей игроков из коалиции S_i :

$$(2) \quad H_{S_i}^z(x^z) = \sum_{j \in S_i} K_j(x^z).$$

Выигрыш коалиции $H_{S_i}^z(u^z(\cdot))$, $S_i \in \Sigma_z$, $i = \overline{1, l}$, в подыгре $\tilde{\Gamma}(z)$ игры $\tilde{\Gamma}(z_0)$ в вершине $z \in Z$ определяется как сумма выигрышей игроков из коалиции S_i в подыгре $\tilde{\Gamma}(z)$ в вершине $z \in Z$:

$$(3) \quad H_{S_i}^z(u^z(\cdot)) = \sum_{j \in S_i} E_j^z(u^z(\cdot)) = \sum_{j \in S_i} \left\{ K_j(x^z) + \sum_{y \in L(z)} \left[p(z, y; x^z) E_j^y(u^y(\cdot)) \right] \right\}.$$

Очевидно, что в любой вершине $z \in Z$ при коалиционном разбиении Σ_z игра $\tilde{\Gamma}(z)$ с выигрышами E_j^z игроков $j = \overline{1, n}$, определенными формулой (1), является бескоалиционной игрой между коалициями $S_i \in \Sigma_z$ с выигрышами коалиций $H_{S_i}^z(u^z(\cdot))$, определенными формулой (3). Для конечных бескоалиционных игр существование ситуации равновесия в смешанных стратегиях доказано [3, с. 137].

Напомним, что ситуацией равновесия по Нэшу (Nash Equilibrium, NE) называется ситуация $\bar{u}^z(\cdot)$:

$$H_{S_i}^z(\bar{u}^z(\cdot)) \geq H_{S_i}^z(\bar{u}^z(\cdot) \parallel u_{S_i}^z(\cdot)), \\ \forall u_{S_i}^z(\cdot) \in U_{S_i}^z, \forall S_i \in \Sigma_z, i = \overline{1, l},$$

где $U_{S_i}^z$ – множество стратегий $u_{S_i}^z(\cdot)$ коалиции $S_i \in \Sigma_z$, $i = \overline{1, l}$, а запись $(\bar{u}^z(\cdot) \parallel u_{S_i}^z(\cdot))$ означает, что коалиция S_i отклоняется от ситуации $\bar{u}^z(\cdot)$, выбирая стратегию $u_{S_i}^z(\cdot)$ вместо стратегии $\bar{u}_{S_i}^z(\cdot) \in \bar{u}^z(\cdot)$.

Поскольку выигрыши игроков j , $j = \overline{1, n}$, не выделены из коалиционного выигрыша в подыгре $\tilde{\Gamma}(z)$, то на следующем шаге в подыгре $\tilde{\Gamma}(y)$, $y \in L(z)$, при другом коалиционном разбиении в вершине y , выбор игрока j может оказаться нетривиальным и отличным от соответствующего выбора, входящего в равновесную стратегию $\tilde{u}_j^z(\cdot)$ в подыгре $\tilde{\Gamma}(z)$.

Таким образом, решить коалиционную стохастическую подыгру $\tilde{\Gamma}(z)$ означает *построить* ситуацию равновесия $\bar{u}^z(\cdot)$ в подыгре $\tilde{\Gamma}(z)$ с учетом наличия коалиционных структур в подыграх, включенных в подыгру $\tilde{\Gamma}(z)$, в частности, путем вычисления PMS-вектора выигрышей игроков во всех подыграх, включенных в подыгру $\tilde{\Gamma}(z)$.

Поставим следующую задачу: построить решение коалиционной стохастической игры $\tilde{\Gamma}(z_0)$, построив ситуацию равновесия $\bar{u}^z(\cdot)$ в игре $\tilde{\Gamma}(z_0)$, используя в качестве оптимального решения коалиционных игр обобщенный PMS-вектор, см. [4].

2. Построение решения в многошаговой стохастической игре

Предложим способ построения решения многошаговой стохастической игры $\tilde{\Gamma}(z)$ своего рода методом обратной индукции, т. е. двигаясь от окончательной позиции к начальной аналогично схеме построения абсолютного равновесия по Нэшу в позиционной игре с полной информацией [2, 3]. В качестве оптимального решения коалиционных игр будем использовать обобщенный PMS-вектор ([4, 6]).

Напомним алгоритм построения обобщенного PMS-вектора в коалиционной игре. Вычислим для всех коалиций $S_i \in \Sigma_z$, $i = \overline{1, l}$, коалиционной игры $G(z, \Sigma_z)$ значения выигрыша $H_{S_i}^z(x^z)$

по формуле (2):

$$H_{S_i}^z(x^z) = \sum_{j \in S_i} K_j(x^z).$$

Предполагая рациональность в поведении игроков, в игре $G(z, \Sigma_z)$ найдем ситуацию NE $\bar{x}^z = (\bar{x}_{S_1}^z, \dots, \bar{x}_{S_l}^z)$ или $\bar{\mu}^z = (\bar{\mu}_{S_1}^z, \dots, \bar{\mu}_{S_l}^z)$. Ситуаций NE в игре может быть много [5], тогда решение коалиционной игры определяется неоднозначно.

Отметим, что в случае $l = 1$ задача поиска ситуации равновесия является задачей максимизации суммарного выигрыша игроков из коалиции S_1 , в случае $l = 2$ – задачей поиска ситуации равновесия в биматричной игре, во всех остальных случаях – задачей поиска ситуации равновесия в бескоалиционной игре.

Выигрыш каждой коалиции в ситуации равновесия $H_{S_i}^z(\bar{\mu}^z)$ разделим в соответствии с вектором Шепли [7] $Sh(S_i) = (Sh(S_i : 1), \dots, Sh(S_i : s))$:

$$Sh(S_i : j) = \sum_{\substack{S' \subset S_i \\ S' \ni j}} \frac{(s'-1)!(s-s')!}{s!} [v(S') - v(S' \setminus \{j\})], \forall j = \overline{1, s},$$

где $s = |S_i|$ ($s' = |S'|$) – количество элементов множеств S_i (S'), а $v(S')$ – максимальный гарантированный выигрыш коалиции $S' \subset S_i$ ([2], с. 51). При этом

$$v(S_i) = \sum_{j=1}^s Sh(S_i : j).$$

Тогда PMS-вектор в ситуации NE в смешанных стратегиях в игре $G(z, \Sigma_z)$ определяется как

$$PMS(\bar{\mu}^z) = (PMS_1(\bar{\mu}^z), \dots, PMS_n(\bar{\mu}^z)),$$

где

$$PMS_j(\bar{\mu}^z) = Sh(S_i : j), j \in S_i, i = \overline{1, l}.$$

Более подробно об этом см. [4].

Замечание 1. Найти ситуацию NE – отдельная сложная задача, тогда вычисление PMS-вектора, соответственно, технически затруднено. В этом случае в качестве решения коалиционной игры можно предложить использовать любое другое «оптимальное» решение, например, оптимальность по Парето или арбитражную схему Нэша [1].

Перейдем непосредственно к построению решения в игре $\tilde{\Gamma}(z_0)$.

Шаг 1. Вычислим для всех коалиций $S_i \in \Sigma_z$, $i = \overline{1, l}$, каждой коалиционной игры $G(z, \Sigma_z)$, $L(z) = \emptyset$, PMS-вектор в ситуации NE в смешанных стратегиях:

$$\text{PMS}(z) = (\text{PMS}_1(z), \dots, \text{PMS}_n(z)) ,$$

где $\text{PMS}(z) := \text{PMS}(\bar{\mu}^z)$ и $\text{PMS}_j(z) := \text{PMS}_j(\bar{\mu}^z)$ – PMS-вектор и PMS-компоненты соответственно в одношаговой коалиционной игре $G(z, \Sigma_z)$, $L(z) = \emptyset$.

Шаг 2. Пусть игроки действуют не только на последнем шаге игры $\tilde{\Gamma}(z_0)$ оптимально, а на протяжении всей игры. Тогда рассмотрим с конца игры $\tilde{\Gamma}(z_0)$ все двухшаговые подыгры $\tilde{\Gamma}(z)$, $y \in L(z)$, $L(y) = \emptyset$, с выигрышами коалиций

$$(4) \quad H_{S_i}^z(u^z(\cdot)) = \sum_{j \in S_i} \left\{ K_j(x^z) + \sum_{y \in L(z)} [p(z, y; x^z) \text{PMS}_j(y)] \right\}$$

$\forall S_i \in \Sigma_z$, $i = \overline{1, l}$. Найдем ситуацию NE \bar{x}^z или $\bar{\mu}^z$ и соответственно $\bar{u}^z(\cdot)$ в подыгре $\tilde{\Gamma}(z)$ с выигрышами, определенными формулой (4). Заметим, что полученная здесь ситуация \bar{x}^z в общем случае не является NE в одновременной игре $G(z, \Sigma_z)$. Вычислим для всех коалиций $S_i \in \Sigma_z$, $i = \overline{1, l}$, PMS-вектор в ситуации NE $\bar{u}^z(\cdot)$:

$$\overline{\text{PMS}}(z) = (\overline{\text{PMS}}_1(z), \dots, \overline{\text{PMS}}_n(z)) ,$$

где $\overline{\text{PMS}}(z) := \overline{\text{PMS}}(\bar{u}^z(\cdot))$ и $\overline{\text{PMS}}_j(z) := \overline{\text{PMS}}_j(\bar{u}^z(\cdot))$ – PMS-вектор и PMS-компоненты соответственно.

Шаг k. Рассмотрим теперь с конца все k -шаговые подыгры $\tilde{\Gamma}(z)$,

$y \in [L(z)]^{k-1}$, $L(y) = \emptyset$. Пусть уже построено NE $\bar{u}^{z'}(\cdot)$ и найден PMS-вектор $\overline{\text{PMS}}(z')$ во всех $(k-1)$ -шаговых подыграх $\tilde{\Gamma}(z')$, $z' \in L(z)$. Вычислим выигрыши коалиций

$$(5) \quad H_{S_i}^z(u^z(\cdot)) = \sum_{j \in S_i} \left\{ K_j(x^z) + \sum_{z' \in L(z)} [p(z, z'; x^z) \overline{\text{PMS}}_j(z')] \right\}$$

$\forall S_i \in \Sigma_z$, $i = \overline{1, l}$. Найдем ситуацию NE \bar{x}^z или $\bar{\mu}^z$ и соответственно $\bar{u}^z(\cdot)$ в подыгре $\tilde{\Gamma}(z)$ с выигрышами, определенными формулой (5).

Введем оператор $\text{PMS} \oplus$, который каждому коалиционному разбиению Σ_z и набору выигрышей $H_{S_i}^z(u^z(\cdot))$ коалиций из этого разбиения ставит в соответствие компоненты PMS-вектора соответствующей коалиционной игры $G(z, \Sigma_z)$:

$$(6) \quad \overline{\text{PMS}}_j(z) = \text{PMS} \oplus \sum_{j \in S_i} \left\{ K_j(x^z) + \sum_{z' \in L(z)} [p(z, z'; x^z) \overline{\text{PMS}}_j(z')] \right\}$$

где $\overline{\text{PMS}}_j(z) := \overline{\text{PMS}}_j(\bar{u}^z(\cdot))$, $\overline{\text{PMS}}_j(z') := \overline{\text{PMS}}_j(\bar{u}^{z'}(\cdot))$, $j = \overline{1, n}$.

Действие оператора $\text{PMS} \oplus$ сводится к вычислению NE \bar{x}^z или $\bar{\mu}^z$ и соответственно $\bar{u}^z(\cdot)$ в подыгре $\tilde{\Gamma}(z)$ с выигрышами коалиций, определенными формулой (5), а затем к вычислению PMS-компонент коалиции $S_i \in \Sigma_z$, $i = \overline{1, l}$, в ситуации $\bar{u}^z(\cdot)$.

Таким образом, для любого $k = \overline{3, k_{\tilde{\Gamma}}}$ применение оператора $\text{PMS} \oplus$ к правой части формулы (5), т. е. формула (7), определяет рекуррентное вычисление PMS-вектора на каждом последующем шаге k игры $\tilde{\Gamma}(z_0)$ в зависимости от предыдущего $k-1$.

3. Выигрыш игрока на каждом шаге в коалиционной стохастической игре

Пусть найдено решение в многошаговой стохастической коалиционной игре $\tilde{\Gamma}(z_0)$. Игроки начинают игру в вершине z_0 в соответствии с этим решением. Вопрос: как определить, какой выигрыш они получают на каждом шаге игры?

Игроки $j = \overline{1, n}$ на каждом шаге игры $\tilde{\Gamma}(z_0)$ в качестве компонент дележа выигрыша соответствующей коалиции будут получать величину w_j , равную значению разности между выигрышем игрока $j = \overline{1, n}$ в подыгре $\tilde{\Gamma}(z)$ и математическим ожиданием выигрышей игрока $j = \overline{1, n}$ в подыграх $\tilde{\Gamma}(y)$ на следующем шаге:

$$(7) \quad w_j(\bar{x}^z) = \overline{\text{PMS}}_j(z) - \sum_{y \in L(z)} [p(z, y; \bar{x}^z) \overline{\text{PMS}}_j(y)],$$

где $\bar{x}^z \in \bar{u}^z(\cdot)$.

4. Примеры

Пример 1. Пусть в игре участвуют три игрока, у каждого из которых по две стратегии, а также определены выигрыши каждого игрока во всех ситуациях игры, см. табл. 1.

Таблица 1.

Стратегии игроков			Выигрыши игроков			Выигрыши коалиций	
I	II	III	I	II	III	(I, II)	(I, II, III)
1	1	1	4	2	1	6	7
1	1	2	1	2	2	3	5
1	2	1	3	1	5	4	9
1	2	2	5	1	3	6	9
2	1	1	5	3	1	8	9
2	1	2	1	2	2	3	5
2	2	1	0	4	3	4	7
2	2	2	0	4	2	4	6

1. Решим коалиционную игру $G(\Sigma_1)$, $\Sigma_1 = \{S = \{I, II\}, N \setminus S = \{III\}\}$, вычислив PMS-вектор ([4]) следующим образом.

1.1. Найдем NE в смешанных стратегиях в игре:

		$\eta = 3/7$	$1 - \eta = 4/7$	
		1	2	
	0	(1, 1)	[6, 1]	[3, 2]
	0	(2, 2)	[4, 3]	[4, 2]
$\xi = 1/3$	(1, 2)	[4, 5]	[6, 3]	
$1 - \xi = 2/3$	(2, 1)	[8, 1]	[3, 2]	

Очевидно, что первая строка доминируется последней, а вторая - третьей. Используя теорему о вполне смешанном равновесии [3, р. 135], получим

$$\bar{y} = (3/7, 4/7), \bar{x} = (0, 0, 1/3, 2/3).$$

Реализация выигрышей коалиций S и $N \setminus S$ в смешанных стратегиях имеет место со следующими вероятностями:

	η_1	η_2
ξ_1	0	0
ξ_2	0	0
ξ_3	$1/7$	$4/21$
ξ_4	$2/7$	$8/21$

Вычислим математическое ожидание выигрышей в НЕ в смешанных стратегиях:

$$E(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{7} [4, 5] + \frac{2}{7} [8, 1] + \frac{4}{21} [6, 3] + \frac{8}{21} [3, 2] = \left[5\frac{1}{7}, 2\frac{1}{3} \right].$$

1.2. Найдем гарантированные выигрыши $v\{I\}$ и $v\{II\}$ игроков I и II, см. табл. 2. Для этого зафиксируем смешанную стратегию игрока III

$$\bar{y} = (3/7, 4/7).$$

Тогда математическое ожидание выигрышей игроков коалиции S при фиксированной стратегии коалиции $N \setminus S$ имеет вид:

$$\begin{aligned} E_{S(1,1)}(\bar{y}) &= \left(\frac{3}{7} \cdot 4 + \frac{4}{7} \cdot 1, \frac{3}{7} \cdot 2 + \frac{4}{7} \cdot 2 \right) = \left(2\frac{2}{7}, 2 \right); \\ E_{S(1,2)}(\bar{y}) &= \left(\frac{3}{7} \cdot 3 + \frac{4}{7} \cdot 5, \frac{3}{7} \cdot 1 + \frac{4}{7} \cdot 1 \right) = \left(4\frac{1}{7}, 1 \right); \\ E_{S(2,1)}(\bar{y}) &= \left(\frac{3}{7} \cdot 5 + \frac{4}{7} \cdot 1, \frac{3}{7} \cdot 3 + \frac{4}{7} \cdot 2 \right) = \left(2\frac{5}{7}, 2\frac{3}{7} \right); \\ E_{S(2,2)}(\bar{y}) &= \left(\frac{3}{7} \cdot 0 + \frac{4}{7} \cdot 0, \frac{3}{7} \cdot 4 + \frac{4}{7} \cdot 4 \right) = (0, 4). \end{aligned}$$

Следовательно, гарантированные выигрыши вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned} \min H_1(x_1=1, x_2, \bar{y}) &= \min \left\{ 2\frac{2}{7}; 4\frac{1}{7} \right\} = 2\frac{2}{7}; & v \{I\} &= \\ \min H_1(x_1=2, x_2, \bar{y}) &= \min \left\{ 2\frac{5}{7}; 0 \right\} = 0; & &= \max \left\{ 2\frac{2}{7}; 0 \right\} = 2\frac{2}{7}; \\ \min H_2(x_1, x_2=1, \bar{y}) &= \min \left\{ 2; 2\frac{3}{7} \right\} = 2; & v \{II\} &= \max \{ 2; 1 \} = 2. \\ \min H_2(x_1, x_2=2, \bar{y}) &= \min \{ 1; 4 \} = 1; & & \end{aligned}$$

Таким образом, гарантированные выигрыши равны: $v \{I\} = 2\frac{2}{7}$, $v \{II\} = 2$.

Таблица 2.

Math. Expectation		x	The strategies of MS, the payoffs of S			
			y		S	
			0,43		0,57	
Strategies of S	v1	v2	1	S	2	S
	2,286	2,000	0,00	1, 1	4 2 6	1 2 3
	4,143	1,000	0,33	1, 2	3 1 4	5 1 6
	2,714	2,429	0,67	2, 1	5 3 8	1 2 3
	0,000	4,000	0,00	2, 2	0 4 4	0 4 4
					v1 v2	v1 v2
				min 1	3 2	1 2
				min 2	0 1	0 1
				max	3 2	1 2
	2,286	2				

1.3. Разделим выигрыш $E_1(\bar{x}, \bar{y}) = 5\frac{1}{7}$ по вектору Шепли [7]:

$$\begin{aligned} Sh_1 &= v \{I\} + \frac{1}{2} (v \{I, II\} - v \{II\} - v \{I\}) = 2\frac{2}{7} + \frac{1}{2} (5\frac{1}{7} - 2\frac{2}{7} - 2) = 2\frac{5}{7}; \\ Sh_2 &= v \{II\} + \frac{1}{2} (v \{I, II\} - v \{II\} - v \{I\}) = 2\frac{3}{7}. \end{aligned}$$

Таким образом, PMS-вектор равен:

$$PMS_1 = 2\frac{5}{7}; \quad PMS_2 = 2\frac{3}{7}; \quad PMS_3 = 2\frac{1}{3}.$$

2. Решим кооперативную игру $G(\Sigma_2)$, $\Sigma_2 = \{N = \{I, II, III\}\}$, см. табл. 3. Найдем максимальный выигрыш H_N коалиции N и разделим его по вектору Шепли [7]:

$$\begin{aligned}
 Sh_1 &= \frac{1}{6} [v \{I, II\} + v \{I, III\} - v \{II\} - v \{III\}] + \\
 &\quad + \frac{1}{3} [v \{N\} - v \{II, III\} + v \{I\}] ; \\
 Sh_2 &= \frac{1}{6} [v \{II, I\} + v \{II, III\} - v \{I\} - v \{III\}] + \\
 &\quad + \frac{1}{3} [v \{N\} - v \{I, III\} + v \{II\}] ; \\
 Sh_3 &= \frac{1}{6} [v \{III, I\} + v \{III, II\} - v \{I\} - v \{II\}] + \\
 &\quad + \frac{1}{3} [v \{N\} - v \{I, II\} + v \{III\}] .
 \end{aligned}$$

Найдем гарантированные выигрыши:

$$v \{I, II\} = \max \{4, 3\} = 4; \quad v \{I, III\} = \max \{3, 2\} = 3;$$

$$v \{II, III\} = \max \{3, 4\} = 4; \quad v \{I\} = \max \{1, 0\} = 1;$$

$$v \{II\} = \max \{2, 1\} = 2; \quad v \{III\} = \max \{1, 2\} = 2.$$

Таблица 3.

Стратегии игроков			Выигрыши игроков			Выигрыш коалиции	Вектор Шепли		
I	II	III	I	II	III	$H_N(I, II, III)$	$\lambda_1 H_N$	$\lambda_2 H_N$	$\lambda_3 H_N$
1	1	1	4	2	1	7			
1	1	2	1	2	2	5			
1	2	1	3	1	5	9	2.5	3.5	3
1	2	2	5	1	3	9	2.5	3.5	3
2	1	1	5	3	1	9	2.5	3.5	3
2	1	2	1	2	2	5			
2	2	1	0	4	3	7			
2	2	2	0	4	2	6			

Тогда

$$Sh_1^{(2,1,1)} = Sh_1^{(1,2,2)} = Sh_1^{(1,2,1)} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} [9 - 4] + \frac{1}{3} = 2\frac{1}{2},$$

$$Sh_2^{(2,1,1)} = Sh_2^{(1,2,2)} = Sh_2^{(1,2,1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} [9 - 3] + \frac{2}{3} = 3\frac{1}{2},$$

$$Sh_3^{(2,1,1)} = Sh_3^{(1,2,2)} = Sh_3^{(1,2,1)} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} [9 - 4] + \frac{2}{3} = 3.$$

3. Решим бескоалиционную игру $G(\Sigma_3)$, $\Sigma_3 = \{S_1 = \{I\}, S_2 = \{II\}, S_3 = \{III\}\}$. В чистых стратегиях NE не существует.

Воспользуемся вычисленными в п. 2 гарантированными выигрышами $v\{I\} = 1$; $v\{II\} = 2$; $v\{III\} = 2$. Найдем оптимальные стратегии, согласно арбитражной схеме Нэша [[1]], см. табл. 4, где «-» означает, что стратегии не оптимальны по Парето, а «+» – оптимальны по Парето. Тогда оптимальными будем считать ситуации (1, 1, 2) и (2, 1, 2), которые дают одинаковый выигрыш (1, 2, 2) в обеих ситуациях.

Таким образом, получены следующие результаты:

- Для $\Sigma_1 = \{S = \{I, II\}, N \setminus S = \{III\}\}$, имеем выигрыш $((2\frac{5}{7}, 2\frac{3}{7}), 2\frac{1}{3})$.
- Для $\Sigma_2 = \{N = \{I, II, III\}\} - (2\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2}, 3)$.
- Для $\Sigma_3 = \{S_1 = \{I\}, S_2 = \{II\}, S_3 = \{III\}\} -$ оптимальный выигрыш (1, 2, 2) в ситуациях (1, 1, 2) и (2, 1, 2).

•

Таблица 4.

Стратегии игроков			Выигрыши игроков			Оптимальность по Парето (P) и арбитражная схема Нэша	
I	II	III	I	II	III	Арбитражная схема Нэша	P
1	1	1	4	2	1	$(4 - 1)(2 - 2)(1 - 2) < 0$	-
1	1	2	1	2	2	$(1 - 1)(2 - 2)(2 - 2) = 0$	+
1	2	1	3	1	5	$(3 - 1)(1 - 2)(5 - 2) < 0$	-
1	2	2	5	1	3	$(5 - 1)(1 - 2)(3 - 2) < 0$	-
2	1	1	5	3	1	$(5 - 1)(3 - 2)(1 - 2) < 0$	-
2	1	2	1	2	2	$(1 - 1)(2 - 2)(2 - 2) = 0$	+
2	2	1	0	4	3	$(0 - 1)(4 - 2)(3 - 2) < 0$	-
2	2	2	0	4	2	$(0 - 1)(4 - 2)(2 - 2) < 0$	-

Пример 2. Рассмотрим на примере 1 двухшаговую стохастическую игру $\tilde{\Gamma}(G_{(I) \cup (II, III)})$, см. рис. 1. На графе, изображенном на рис. 1, указаны вероятности перехода из одной одновременной игры G в другую одновременную игру, при этом тройка (p_1, p_2, p_3) определяется из табл. 5. Оптимальные выигрыши игроков в каждой игре G получены в примере 5.1:

$$\text{PMS}_{G_{(I) \cup (II, III)}} = \left(2\frac{5}{7}, 2\frac{3}{7}, 2\frac{1}{3} \right), \text{PMS}_{\text{кооп}} = \left(2\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2}, 3 \right),$$

$$\text{PMS}_{\text{бескоал}} = (1, 2, 2).$$

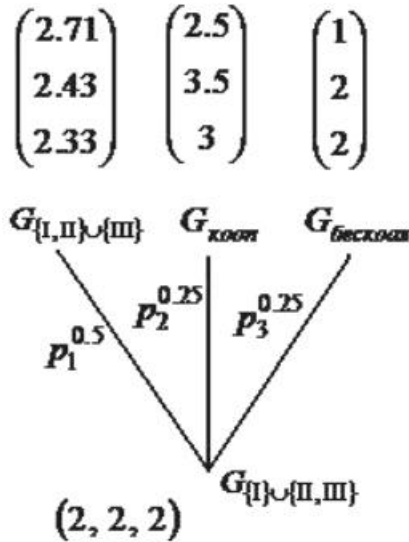


Рис. 1. Исходная игра

1. Выпишем вектор выигрышей в игре $\tilde{\Gamma}(G_{(I) \cup (II, III)})$, см. формулу (3.2):

$$\begin{aligned} E_{\tilde{\Gamma}(G_{(I) \cup (II, III)})}(2, 2, 2) &= K(2, 2, 2) + \\ &+ p_1 (G_{(I) \cup (II, III)} \parallel G_{\text{бескоал}}, (2, 2, 2)) \text{PMS}_{\text{бескоал}} + \\ &+ p_2 (G_{(I) \cup (II, III)} \parallel G_{(I, II) \cup (III)}, (2, 2, 2)) \text{PMS}_{G_{(I, II) \cup (III)}} + \\ &+ p_3 (G_{(I) \cup (II, III)} \parallel G_{\text{кооп}}, (2, 2, 2)) \text{PMS}_{\text{кооп}}. \end{aligned}$$

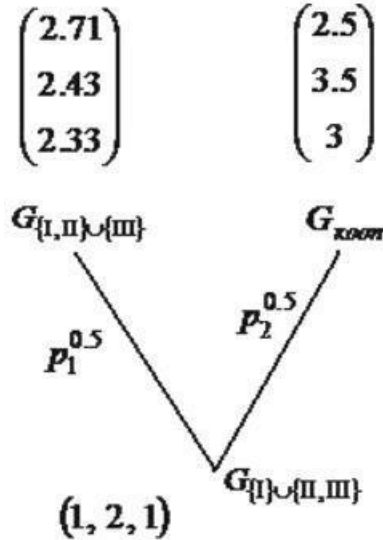


Рис. 2. Решенная игра

Из табл. 5 следует, что $K(2, 2, 2) = (0, 4, 2)$. Тогда

$$E_{\tilde{\Gamma}}(G_{(I) \cup \{II, III\}})(2, 2, 2) = (0, 4, 2) + 0.25 \cdot (1, 2, 2) + 0.5 \cdot (2\frac{5}{7}, 2\frac{3}{7}, 2\frac{1}{3}) + 0.25 \cdot (2.5, 3.5, 3) \approx (2.23, 6.59, 4.42) .$$

Таблица 5.

Стратегии игроков			Выигрыши игроков			Переходные вероятности в игре $G_{(I, II) \cup \{III\}}, G_{кооп}, G_{бескоал}$			Выигрыши игроков и коалиций в игре $\tilde{\Gamma}(G_{(I) \cup \{II, III\}})$			
I	II	III	I	II	III	p_1	p_2	p_3	E_1	E_2	E_3	$H(II, III)$
1	1	1	4	2	1	0	0.5	0.5	5.75	4.75	3.50	8.25
1	1	2	1	2	2	0.5	0	0.5	2.86	4.21	4.17	8.38
1	2	1	3	1	5	0.5	0.5	0	5.61	3.96	7.67	11.63
1	2	2	5	1	3	0.33	0.33	0.33	7.05	3.62	5.42	9.04
2	1	1	5	3	1	0	0.33	0.67	6.50	5.50	3.33	8.83
2	1	2	1	2	2	0.33	0	0.67	2.57	4.14	4.11	8.25
2	2	1	0	4	3	0.67	0	0.33	2.15	6.29	5.22	11.51
2	2	2	0	4	2	0.5	0.25	0.25	2.23	6.59	4.42	11.01

Аналогично вычислим по формулам (4)-(5) вектор выигрышей в игре $\tilde{\Gamma} (G_{(I) \cup (II, III)})$ во всех остальных ситуациях, см. табл. 5.

2. Решим коалиционную игру $\tilde{\Gamma} (G_{(I) \cup (II, III)})$ с выигрышами $H (II, III)$ и E_1 , табл. 5.

2.1. Найдем NE в смешанных стратегиях в биматричной игре:

$$\begin{array}{cc}
 & \eta = 1 & 1 - \eta = 0 \\
 & +1 & -2 \\
 \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ \xi = 0 \\ 1 - \xi = 1 \end{array} & \begin{array}{l} -(1, 1) \\ -(2, 2) \\ -(1, 2) \\ +(2, 1) \end{array} & \left(\begin{array}{cc} (8,25, 5,75) & (8,83, 6,5) \\ (9,04, 7,05) & (11,01, 2,23) \\ (8,38, 2,86) & (8,25, 2,57) \\ \mathbf{(11,63, 5,61)} & (11,51, 2,15) \end{array} \right)
 \end{array}$$

Первая, вторая и третья строки доминируются четвертой. Второй столбец доминируется первым. Здесь имеет место ситуация равновесия в чистых стратегиях: $\mu^1 = (0, 0, 0, 1)$; $\mu^2 = (1, 0)$.

2.2. Гарантированные выигрыши соответственно равны $v \{II\} = 4,21$, $v \{III\} = 4,17$.

2.3. Разделим средний выигрыш коалиции $\{II, III\}$ в ситуации NE $E (\mu^1, \mu^2) = 11.63$ между ее игроками в соответствии с вектором Шепли:

$$Sh_2 = v \{II\} + \frac{1}{2} [v \{II, III\} - v \{II\} - v \{III\}] = 5,84,$$

$$Sh_3 = v \{III\} + \frac{1}{2} [v \{II, III\} - v \{II\} - v \{III\}] = 5,8.$$

PMS-вектор игроков II и III коалиции $\{II, III\}$ принимает следующие значения:

$$PMS_1 = 5,61; PMS_2 = 5,84; PMS_3 = 5,8.$$

3. Поскольку игра $\tilde{\Gamma} (G_{(I) \cup (II, III)})$ – двухшаговая, то, применяя формулу (7), на первом шаге игроки получают следующий выигрыш:

$$w = (3,86, 3,09, 3,3).$$

Кроме того, в оптимизированном варианте рассмотренная двухшаговая стохастическая игра имеет вид, отличный от графа, представленного на рис. 1. Изобразим решенную игру на рис. 2. ●

Литература

1. ГРИГОРЬЕВА К.В. *Арбитражная схема Нэша в решении биматричных коалиционных игр* // Межвузовский тематический сборник трудов СПбГАСУ. – 2009. – № 15. – С. 56–61.
2. ЗЕНКЕВИЧ Н.А., ПЕТРОСЯН Л.А., ЯНГ Д.В.К. *Динамические игры и их приложения в менеджменте*. – Санкт-Петербург: Высшая Школа Менеджмента, 2009.
3. ПЕТРОСЯН Л.А., ЗЕНКЕВИЧ Н.А., СЕМИНА Е. *Теория игр*. – Москва: Высшая Школа, 1998.
4. GRIGORIEVA X., MAMKINA S. *Solutions of Bimatrix Coalitional Games* // Contributions to game and management. Collected papers printed on the Second International Conference «Game Theory and Management» [GTM'2008], Edited by Leon A. Petrosjan, Nikolay A. Zenkevich. Graduate School of Management, SpbSU. – 2009. – P. 147–153.
5. NASH J. *Non-cooperative Games* // Ann. Mathematics. – 1951. – Vol. 54. – P. 286–295.
6. PETROSJAN L., MAMKINA S. *Dynamic Games with Coalitional Structures* // Int. Game Theory Review. – 2006. – Vol. 8(2). – P. 295–307.
7. SHAPLEY L.S. *A Value for n-Person Games* // In: Contributions to the Theory of Games(Kuhn, H. W. and A. W. Tucker, eds.). Princeton University Press. – 1953. – P. 307–317.

SOLUTIONS FOR A CLASS OF STOCHASTIC COALITIONAL GAMES

Kseniya Grigorieva, Saint-Petersburh State University,
Saint-Petersburg, Cand.Sc. (kseniya196247@mail.ru).

Abstract: In this paper one of classes of multistage stochastic games with various coalition structures is considered. The game under research is set on a tree graph. In each vertex z of the tree the coalition structure of players is defined, along with the payoff function of coalitions, and the probability of transition to the following vertices of the tree depending on the situation realized in the game in vertex z . The new mathematical method is offered to building a solution of stochastic coalition games on the basis of calculation of the generalised PMS-vector as a solution of a coalition game. The offered method is illustrated by the example of three-step stochastic game of three persons with variable coalition structure.

Keywords: optimization, multistage games, stochastic games, Nash equilibrium, PMS-vector.

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии Л. А. Петросяном*

УДК 518.9 + 517.9
ББК 65.050.2

ПОСТРОЕНИЕ СИЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЕ МНОГИХ ЛИЦ¹

Зенкевич Н.А.², Зятчин А.В.³

*(Высшая школа менеджмента Санкт-Петербургского
государственного университета, Санкт-Петербург)*

В статье предложена техника нахождения ситуации сильного равновесия в дифференциальной игре с помощью специальной скаляризации векторного критерия. Сформулированы достаточные условия существования сильного равновесия. Приведен пример несимметричной игры двух лиц, в котором ситуация сильного равновесия найдена в явном виде.

Ключевые слова: дифференциальная игра, равновесие по Нэшу, сильное равновесие.

Введение

В настоящее время известно несколько концепций сильного равновесия [3, 7, 9]. При этом в каждом случае под сильным равновесием понимается ситуация, в определенном смысле устойчивая относительно коалиционных отклонений игроков. Этот принцип оптимальности исследован в широких классах игр в нормальной и развернутой формах (см. например [3, 4, 9]). Основным недостатком концепции сильного равновесия является то, что оно существует достаточно редко.

¹ Текст приводится в соответствии с изданием «Математическая теория игр и ее приложения. – 2010. – Т. 2. № 2. – С. 42–65».

² Николай Анатольевич Зенкевич, кандидат физико-математических наук, доцент (zenkevich@gsom.pu.ru).

³ Зятчин Андрей Васильевич, кандидат физико-математических наук, ассистент (zyatchin@gsom.pu.ru).

При исследовании дифференциальных игр часто используется принцип оптимальности Беллмана [1, 2, 5, 6, 9]. В этом случае задача определения оптимального значения интегрального функционала сводится к решению экстремального уравнения в частных производных. С помощью такой техники в ряде случаев удается найти равновесие по Нэшу и парето-оптимальное решение [2, 10]. При этом в исследуемой модели необходимо дополнительно учитывать условия существования и единственности решения системы дифференциальных уравнений, описывающей динамику игры, гладкость функции Беллмана, а также функций мгновенного и терминального выигрышей игроков.

В данной работе предлагается следующая техника нахождения сильного равновесия в дифференциальной игре. Для каждой коалиции с помощью специальной свертки осуществляется переход к экстремальной задаче со скалярным критерием, зависящим от набора параметров. Формулируются достаточные условия существования сильного равновесия в дифференциальной игре в виде условий на параметры свертки. Использование теоремы продемонстрировано на примере линейно-квадратичной несимметричной игры двух лиц. Для этой игры сильное равновесие удалось построить в явном виде на основе решения уравнения в частных производных первого порядка специального вида.

1. Определение сильного равновесия

Определим дифференциальную игру $\Gamma(x_0, T - t_0)$ из начального состояния x_0 и конечной продолжительности $T - t_0$. Здесь $t_0 \geq 0, T \geq t_0$ — моменты начала и окончания игры соответственно [2, 5, 8]. Множество игроков в игре $\Gamma(x_0, T - t_0)$ обозначим через $N = \{1, \dots, i, \dots, n\}$.

Предположим, что динамика изменения состояния игры $\Gamma(x_0, T - t_0)$ имеет вид:

$$(1) \quad \dot{x}(t) = f[t, x(t), u_1(t), \dots, u_n(t)], \quad x(t_0) = x_0,$$

где $x(t) \in R, x_0$ — известное начальное состояние игры, $u_i(t)$ — управление игрока $i \in N$ в момент времени t . Здесь $u_i(t) \in$

$U_i \subset R$, $\prod_{i \in N} U_i = U_N \subset R^n$. Предположим, что функция $f[t, x(t), u_1(t), \dots, u_n(t)]$ — непрерывно дифференцируемая на $[t_0, T] \times R \times U_N$.

Для каждого игрока $i \in N$ рассмотрим интегральный функционал с терминальным выигрышем вида:

$$J_i(x_0, u_1(\cdot), u_2(\cdot), \dots, u_n(\cdot)) = \int_{t_0}^T g_i[t, x(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t)] dt + q_i[x(T)],$$

где $u_i(\cdot)$ представляет собой непрерывную функцию $u_i(t)$, $t \in [t_0, T]$. Будем предполагать, что функции $g_i[t, x(t), u_1(t), \dots, u_n(t)]$ и $q_i[x(T)]$ являются дифференцируемыми в области определения. Предполагается, что игрок $i \in N$ стремится максимизировать значение функционала $J_i(x_0, u_1(\cdot), \dots, u_i(\cdot), \dots, u_n(\cdot))$ по $u_i(\cdot)$.

Пусть $S \subseteq N$ — произвольная коалиция в игре $\Gamma(x_0)$. Обозначим через $u_S(\cdot) = \{u_i(\cdot)\}_{i \in S}$ стратегию коалиции S . Стратегию дополнительной коалиции $N \setminus S$ будем обозначать через $u_{N \setminus S}(\cdot)$ или $u_{-S}(\cdot)$.

Определение 1. Ситуация $u_N^*(\cdot) = (u_1^*(\cdot), u_2^*(\cdot), \dots, u_n^*(\cdot))$ называется сильным равновесием в широком смысле в игре $\Gamma(x_0, T - t_0)$, если $\forall M \subseteq N, \forall u_M(\cdot)$ не выполнено:

$\forall i \in M$

$$J_i(x_0, u_M(\cdot), u_{-M}^*(\cdot)) = \int_{t_0}^T g_i[t, x^{[M]}(t), u_M(t), u_{-M}^*(t)] dt + q_i[x^{[M]}(T)] \geq \int_{t_0}^T g_i[t, x^*(t), u_M^*(t), u_{-M}^*(t)] dt + q_i[x^*(T)] = J_i(x_0, u_M^*(t), u_{-M}^*(t))$$

и $\exists i_0 \in M$, такой что:

$$\begin{aligned} J_{i_0}(x_0, u_M(\cdot), u_{-M}^*(\cdot)) &= \int_{t_0}^T g_{i_0} [t, x^{[M]}(t), u_M(t), u_{-M}^*(t)] dt + \\ &+ q_{i_0} [x^{[M]}(T)] > \int_{t_0}^T g_{i_0} [t, x^*(t), u_M^*(t), u_{-M}^*(t)] dt + q_{i_0} [x^*(T)] = \\ &= J_{i_0}(x_0, u_M^*(\cdot), u_{-M}^*(\cdot)), \end{aligned}$$

где

$$\dot{x}^{[M]}(t) = f [t, x^{[M]}(t), u_M(t), u_{-M}^*(t)], \quad x^{[M]}(t_0) = x_0,$$

$$\dot{x}^*(t) = f [t, x^*(t), u_1^*(t), \dots, u_n^*(t)], \quad x^*(t_0) = x_0.$$

Множество всех ситуаций сильного равновесия в смысле определения 1 в игре $\Gamma(x_0, T - t_0)$ будем обозначать $SME(\Gamma(x_0, T - t_0))$.

Рассмотрим векторы

$$\lambda^{[n,i]} = \left(\lambda_1^{[n,i]}, \dots, \lambda_i^{[n,i]}, \dots, \lambda_n^{[n,i]} \right) \in E^n,$$

где $\lambda_j^{[n,i]} = 0$ при $j \neq i$ и $\lambda_i^{[n,i]} = 1$.

Лемма 1. Для того чтобы ситуация

$$u_N^*(\cdot) = (u_1^*(\cdot), u_2^*(\cdot), \dots, u_n^*(\cdot)) \in SME(\Gamma(x_0, T - t_0)),$$

т. е. была сильным равновесием в смысле определения 1 достаточно, чтобы для любой коалиций $S \subseteq N$ существовал такой номер $i_0^S \in S$, что для любой стратегии $u_S(\cdot) \neq u_S^*(\cdot)$ этой коалиции выполнялось неравенство:

$$(2) \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i^{[n,i_0^S]} J_i(x_0, u_S^*(\cdot), u_{-S}^*(\cdot)) > \sum_{i=1}^n \lambda_i^{[n,i_0^S]} J_i(x_0, u_S(\cdot), u_{-S}^*(\cdot)).$$

Доказательство. Предположим противное, т.е. условия леммы 1 выполнены, но ситуация $u_N^*(\cdot) = (u_1^*(\cdot), u_2^*(\cdot), \dots, u_n^*(\cdot))$ не является сильным равновесием в смысле $SME(\Gamma(x_0, T - t_0))$. Тогда существует коалиция M и стратегия $u_M(\cdot)$, для которых выполнено:

$$(3) \quad \begin{cases} J_i(x_0, u_M(\cdot), u_{-M}^*(\cdot)) \geq J_i(x_0, u_M^*(\cdot), u_{-M}^*(\cdot)), \forall i \in M; \\ \exists i_0 \in M: J_{i_0}(x_0, u_M(\cdot), u_{-M}^*(\cdot)) > J_{i_0}(x_0, u_M^*(\cdot), u_{-M}^*(\cdot)). \end{cases}$$

Согласно условиям леммы, неравенство (2) выполнено для любой коалиции, в том числе и для коалиции M . Следовательно, существует такой номер $i_0^M \in M$, для которого справедливо неравенство для $\forall u_M(\cdot) \neq u_M^*(\cdot)$:

$$(4) \quad \begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \lambda_i^{[n, i_0^M]} J_i(x_0, u_M^*(\cdot), u_{-M}^*(\cdot)) > \\ & > \sum_{i=1}^n \lambda_i^{[n, i_0^M]} J_i(x_0, u_M(\cdot), u_{-M}^*(\cdot)). \end{aligned}$$

По определению вектора $\lambda^{[n, i_0^M]}$ из неравенства (4) следует:

$$(5) \quad J_{i_0^M}(x_0, u_M^*(\cdot), u_{-M}^*(\cdot)) > J_{i_0^M}(x_0, u_M(\cdot), u_{-M}^*(\cdot)).$$

Поскольку $i_0^M \in M$, то неравенства (3) и (5) несовместны. Следовательно, предположение неверно, что доказывает утверждение леммы.

Замечание 1. Число игроков n — конечное. Поэтому существование номера i_0^S из леммы 1 можно установить простым перебором векторов $\lambda^{[n, i]}$, $i = 1, 2, \dots, n$ для каждой коалиции $S \subseteq N$. При этом строгое неравенство будет иметь место, если удастся показать, что набор стратегий $u_N^*(\cdot) = (u_1^*(\cdot), u_2^*(\cdot), \dots, u_n^*(\cdot))$ является единственным, доставляющим максимум функционалу $J_{i_0^S}(x_0, u_N^*(\cdot))$, $i_0^S \in S$.

Введем следующие обозначения: $g_S[t, x(t), u_N(t)] = \sum_{i \in S} g_i[t, x(t), u_N(t)]$, $q_S[x(t)] = \sum_{i \in S} q_i[x(t)]$. Используя концепцию решения, предложенную Л.А. Петросяном [9], сформулируем другое определение сильного равновесия для дифференциальной игры.

Определение 2. Ситуацию $u_N^*(\cdot) = (u_1^*(\cdot), u_2^*(\cdot), \dots, u_n^*(\cdot))$ будем называть *сильным равновесием в узком смысле в дифференциальной игре* $\Gamma(x_0, T - t_0)$, если следующие неравенства выполнены для всех коалиций $S \subseteq N$ и стратегий $u_S(\cdot)$:

$$J_S(x_0, u_N^*(\cdot)) = \int_{t_0}^T g_S [t, x^*(t), u_1^*(t), \dots, u_i^*(t), \dots, u_n^*(t)] dt +$$

$$+ q_S [x^*(T)] \geq \int_{t_0}^T g_S [t, x^{[S]}(t), u_1^*(t), \dots, u_i(t), \dots, u_n^*(t)] dt +$$

$$+ q_S [x^{[S]}(T)] = J_S(x_0, u_S(\cdot), u_{-S}^*(\cdot)),$$

где $S = \{i\}$, $i \in N$;

$$J_S(x_0, u_N^*(\cdot)) =$$

$$= \int_{t_0}^T g_S [t, x^*(t), u_1^*(t), \dots, u_i^*(t), \dots, u_j^*(t), \dots, u_n^*(t)] dt +$$

$$+ q_S [x^*(T)] \geq$$

$$\geq \int_{t_0}^T g_S [t, x^{[S]}(t), u_1^*(t), \dots, u_i(t), \dots, u_j(t), \dots, u_n^*(t)] dt +$$

$$+ q_S [x^{[S]}(T)] = J_S(x_0, u_S(\cdot), u_{-S}^*(\cdot)),$$

где $S = \{i, j\}$, $i \neq j$, $i, j \in N$;

...

$$J_S(x_0, u_N^*(\cdot)) = \int_{t_0}^T g_S [t, x^*(t), u_1^*(t), u_2^*(t), \dots, u_n^*(t)] dt +$$

$$q_S [x^*(T)] \geq \int_{t_0}^T g_S [t, x^{[S]}(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t)] dt + \\ + q_S [x^{[S]}(T)] = J_S [x_0, u_S(\cdot), u_{-S}^*(\cdot)],$$

где $S = N$,

$$\dot{x}^{[S]}(t) = f [t, x^{[S]}(t), u_S(t), u_{-S}^*(t)], \quad x^{[S]}(t_0) = x_0,$$

$$\dot{x}^*(t) = f [t, x^*(t), u_1^*(t), \dots, u_n^*(t)], \quad x^*(t_0) = x_0.$$

Далее для неравенств из определения 2 будем использовать более короткую запись:

$$J_S [x_0, u^*(\cdot)] \geq J_S [x_0, u_S(\cdot), u_{-S}^*(\cdot)],$$

$$\dot{x}^{[S]}(t) = f [t, x^{[S]}(t), u_S(t), u_{-S}^*(t)], \quad x^{[S]}(t_0) = x_0,$$

$$\dot{x}^*(t) = f [t, x^*(t), u^*(t)], \quad x^*(t_0) = x_0,$$

$$\forall S \subset N, \quad S \neq \emptyset, \quad \forall u_S(\cdot).$$

Множество всех ситуаций сильного равновесия в смысле определения 2 в игре $\Gamma(x_0, T - t_0)$ будем обозначать $SPE(\Gamma(x_0, T - t_0))$.

Лемма 2. Для каждой игры $\Gamma(x_0, T - t_0)$ имеет место следующая включение:

$$SPE(\Gamma(x_0, T - t_0)) \subset SME(\Gamma(x_0, T - t_0)).$$

Доказательство. Проведем доказательство от противного. Предположим, что ситуация $u_N^*(\cdot) = (u_1^*(\cdot), u_2^*(\cdot), \dots, u_n^*(\cdot))$ в игре $\Gamma(x_0, T - t_0)$ является сильным равновесием в смысле определения 2, но эта ситуация не является сильным равновесием в смысле определения 1. Тогда существует коалиция $M \subseteq N$ и такая стратегия $u_M^{**}(\cdot)$ коалиции M , для которых выполняется:

$$\begin{cases} J_i(x_0, u_M^{**}(\cdot), u_{-M}^*(\cdot)) \geq J_i(x_0, u_M^*(\cdot), u_{-M}^*(\cdot)), \quad \forall i \in M; \\ \exists i_0 \in M : J_{i_0}(x_0, u_M^{**}(\cdot), u_{-M}^*(\cdot)) > J_{i_0}(x_0, u_M^*(\cdot), u_{-M}^*(\cdot)). \end{cases}$$

Рассмотрим сумму выигрышей игроков коалиции M :

$$\sum_{i \in M} J_i(x_0, u_M^*(\cdot), u_{-M}^*(\cdot)) < \sum_{i \in M} J_i(x_0, u_M^{**}(\cdot), u_{-M}^*(\cdot)).$$

Поэтому ситуация $u_N^*(\cdot) = (u_1^*(\cdot), u_2^*(\cdot), \dots, u_n^*(\cdot))$ не является сильным равновесием в игре $\Gamma(x_0, T - t_0)$ в смысле определения 2. Противоречие и доказывает справедливость утверждения леммы.

Докажем следующую теорему, используя технику динамического программирования.

Теорема 1. Если в игре $\Gamma(x_0, T - t_0)$ для каждой коалиции $S \subseteq N$, $S \neq \emptyset$, существует номер $i_0^S \in S$ и непрерывно дифференцируемое на $[0, T] \times R$ решение системы экстремальных дифференциальных уравнений в частных производных

$$\begin{aligned} (6) \quad & V_t^{[S]}(t, x) + \max_{u_S} \left\{ f[t, x, u_S(t), \phi_{-S}^*(t, x)] V_x^{[S]}(t, x) + \right. \\ & \left. + \sum_{i=1}^n \lambda_i^{[n, i_0^S]} g_i[t, x, u_S(t), \phi_{-S}^*(t, x)] \right\} = \\ & = V_t^{[S]}(t, x) + f[t, x, \phi_S^*(t, x), \phi_{-S}^*(t, x)] V_x^{[S]}(t, x) + \\ & + \sum_{i=1}^n \lambda_i^{[n, i_0^S]} g_i[t, x, \phi_S^*(t, x), \phi_{-S}^*(t, x)] = 0, \\ & V^{[S]}(T, x^{[S]}(T)) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^{[n, i_0^S]} q_i[x^{[S]}(T)], \end{aligned}$$

где для всех $S \subseteq N$ максимум в левой части (6) достигается на единственном наборе

$$\begin{aligned} \phi_S^*(t, x) &= \{\phi_i^*(t, x) \in U_i, i \in S\}, \\ \phi_N^*(t, x) &= (\phi_S^*(t, x), \phi_{-S}^*(t, x)), \end{aligned}$$

где $\phi_i^*(t, x) \in U_i$, $i \in N$ — непрерывные на $[t_0, T] \times R$ функции, тогда набор $\{u_i^*(t) = \phi_i^*(t, x) \in U_i, i \in N, t \in [t_0, T]\}$ является сильным равновесием в игре $\Gamma(x_0, T - t_0)$.

Доказательство. а) Предположим, что условия теоремы 1 выполнены для максимальной коалиции N . Тогда существует номер $i_0^N \in N$ и единственный вектор $\phi_N^*(t, x)$ такие, что:

$$\begin{aligned} & \phi_N^*(t, x) = \\ = & \arg \max_{u_N} \left\{ f[t, x, u_N(t)] V_x^{[N]}(t, x) + \sum_{i=1}^n \lambda_i^{[n, i_0^N]} g_i[t, x, u_N(t)] \right\}. \end{aligned}$$

Предположим, что коалиция N выбрала отличную от $\phi_N^*(t, x)$ произвольную стратегию $u_N(\cdot) \in U_N$, реализующую траекторию $x(t)$. Поскольку вектор $\phi_N^*(t, x)$ — единственный, имеет место строгое неравенство:

$$\begin{aligned} (7) \quad & V_t^{[N]}(t, x) + f[t, x, u_N(t)] V_x^{[N]}(t, x) + \\ & \sum_{i=1}^n \lambda_i^{[n, i_0^N]} g_i[t, x, u_N(t)] < 0, \\ & \dot{x}(t) = f[t, x(t), u_N(t)], \quad x(t_0) = x_0. \end{aligned}$$

При этом:

$$\begin{aligned} (8) \quad & V_t^{[N]}(t, x) + f[t, x, \phi_N^*(t, x)] V_x^{[N]}(t, x) + \\ & + \sum_{i=1}^n \lambda_i^{[n, i_0^N]} g_i[t, x, \phi_N^*(t, x)] = 0, \\ & \dot{x}^*(t) = f[t, x^*(t), \phi_N^*(t, x^*)], \quad x^*(t_0) = x_0 \end{aligned}$$

Рассмотрим интегралы выражений (7)-(8):

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^T \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i^{[n, i_0^N]} g_i[t, x, u_N(t)] \right) dt + \\ & + V^{[N]}(T, x(T)) - V^{[N]}(t_0, x(t_0)) < 0, \\ & \int_{t_0}^T \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i^{[n, i_0^N]} g_i[t, x, \phi_N^*(t, x)] \right) dt + \\ & + V^{[N]}(T, x^*(T)) - V^{[N]}(t_0, x^*(t_0)) = 0, \end{aligned}$$

следовательно,

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^T \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i^{[n, i_0^N]} g_i [t, x, \phi_N^*(t, x)] \right) dt + \\ & + V^{[N]}(T, x^*(T)) - V^{[N]}(t_0, x^*(t_0)) > \\ & > \int_{t_0}^T \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i^{[n, i_0^N]} g_i [t, x, u_N(t)] \right) dt + \\ & + V^{[N]}(T, x(T)) - V^{[N]}(t_0, x(t_0)). \end{aligned}$$

Поскольку

$$V^{[N]}(T, x^*(T)) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^{[n, i_0^N]} q_i [x^*(T)],$$

$$V^{[N]}(T, x(T)) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^{[n, i_0^N]} q_i [x(T)],$$

$$V^{[N]}(t_0, x(t_0)) = V^{[N]}(t_0, x^*(t_0)) = V^{[N]}(t_0, x_0),$$

имеем:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \left(\lambda_i^{[n, i_0^N]} \left\{ \int_{t_0}^T g_i [t, x, \phi_N^*(t, x)] dt + q_i [x^*(T)] \right\} \right) > \\ & > \sum_{i=1}^n \left(\lambda_i^{[n, i_0^N]} \left\{ \int_{t_0}^T g_i [t, x, u_N(t)] dt + q_i [x(T)] \right\} \right). \end{aligned}$$

Окончательно получаем:

$$(9) \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i^{[n, i_0^N]} J_i [x_0, u^*(\cdot)] > \sum_{i=1}^n \lambda_i^{[n, i_0^N]} J_i [x_0, u_N(\cdot)].$$

б) Предположим, что условия теоремы 1 выполнены для произвольной коалиции $S \subset N$, $S \neq N$. Тогда существует номер $i_0^S \in S$ и единственный вектор $\phi_S^*(t, x)$ такие, что:

$$\phi_S^*(t, x) = \arg \max_{u_S} \left\{ f [t, x, u_S(t), \phi_{-S}^*(t, x)] V_x^{[S]}(t, x) + \sum_{i=1}^n \lambda_i^{[n, i_0^S]} g_i [t, x, u_S(t), \phi_{-S}^*(t, x)] \right\},$$

где вид функций, входящих в стратегию $\phi_{-S}^*(t, x)$, установлен в п. а).

Предположим, что коалиция S выбрала отличную от $\phi_S^*(t, x)$ произвольную стратегию $u_S(\cdot) \in U_S$, реализующую траекторию $x^{[S]}(t)$:

$$\dot{x}^{[S]}(t) = f [t, x^{[S]}(t), u_S(t), \phi_{-S}^*(t, x)], \quad x^{[S]}(t_0) = x_0.$$

Поскольку вектор $\phi_S^*(t, x)$ — единственный, то имеет место строгое неравенство:

$$(10) \quad V_t^{[S]}(t, x^{[S]}) + f [t, x^{[S]}, u_S(t), \phi_{-S}^*(t, x)] V_x^{[S]}(t, x^{[S]}) + \sum_{i=1}^n \lambda_i^{[n, i_0^S]} g_i [t, x^{[S]}, u_S(t), \phi_{-S}^*(t, x)] < 0.$$

При этом:

$$(11) \quad V_t^{[S]}(t, x^*) + f [t, x^*, \phi_N^*(t, x)] V_x^{[S]}(t, x^*) + \sum_{i=1}^n \lambda_i^{[n, i_0^S]} g_i [t, x^*, \phi_N^*(t, x)] = 0, \\ \dot{x}^*(t) = f [t, x^*, \phi_N^*(t, x)], \quad x^*(t_0) = x_0$$

Рассмотрим интегралы выражений (10)-(11):

$$\int_{t_0}^T \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i^{[n, i_0^S]} g_i [t, x^{[S]}, u_S(t), \phi_{-S}^*(t, x)] \right) dt +$$

$$\begin{aligned}
 & +V^{[S]}(T, x^{[S]}(T)) - V^{[S]}(t_0, x^{[S]}(t_0)) < 0, \\
 & \int_{t_0}^T \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i^{[n, i_0^S]} g_i [t, x^*, \phi_N^*(t, x)] \right) dt + \\
 & +V^{[S]}(T, x^*(T)) - V^{[S]}(t_0, x^*(t_0)) = 0.
 \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
 & \int_{t_0}^T \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i^{[n, i_0^S]} g_i [t, x^*, \phi_N^*(t, x)] \right) dt + \\
 & +V^{[S]}(T, x^*(T)) - V^{[S]}(t_0, x^*(t_0)) > \\
 & > \int_{t_0}^T \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i^{[n, i_0^S]} g_i [t, x^{[S]}, u_S(t), \phi_{-S}^*(t, x)] \right) dt + \\
 & +V^{[S]}(T, x^{[S]}(T)) - V^{[S]}(t_0, x^{[S]}(t_0)).
 \end{aligned}$$

Поскольку

$$V^{[S]}(T, x^*(T)) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^{[n, i_0^S]} q_i [x^*(T)],$$

$$V^{[S]}(T, x^{[S]}(T)) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^{[n, i_0^S]} q_i [x^{[S]}(T)],$$

$$V^{[S]}(t_0, x^{[S]}(t_0)) = V^{[S]}(t_0, x^*(t_0)) = V^{[S]}(t_0, x_0),$$

имеем:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^n \left(\lambda_i^{[n, i_0^S]} \left\{ \int_{t_0}^T g_i [t, x^*, \phi_N^*(t, x)] dt + q_i [x^*(T)] \right\} \right) > \\
 & \sum_{i=1}^n \left(\lambda_i^{[n, i_0^S]} \left\{ \int_{t_0}^T g_i [t, x^{[S]}, u_S(t), \phi_{-S}^*(t, x)] dt + q_i [x^{[S]}(T)] \right\} \right)
 \end{aligned}$$

Окончательно получаем:

$$(12) \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i^{[n, i_0^S]} J_i [x_0, u^*(\cdot)] > \sum_{i=1}^n \lambda_i^{[n, i_0^S]} J_i [x_0, u_S(\cdot), \phi_{-S}^*(t, x)].$$

Из неравенств (9) и (12) следует, что для любой коалиций $S \subseteq N$, $S \neq \emptyset$, существует номер $i_0^S \in S$ такой, что для любой стратегии $u_S(\cdot) \neq u_S^*(\cdot)$ коалиции S выполняется неравенство:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i^{[n, i_0^S]} J_i(x_0, u_S^*(\cdot), u_{-S}^*(\cdot)) > \sum_{i=1}^n \lambda_i^{[n, i_0^S]} J_i(x_0, u_S(\cdot), u_{-S}(\cdot)).$$

Следовательно, по лемме 1 ситуация $u_N^*(\cdot)$ является сильным равновесием из $SPE(\Gamma(x_0, T - t_0))$.

2. Пример

Проиллюстрируем применение теоремы на примере, предварительно исследовав свойства уравнения в частных производных следующего вида:

$$(13) \quad \frac{\partial V(t, x)}{\partial t} + \eta_1 \left(\frac{\partial V(t, x)}{\partial x} \right)^2 + \\ + \eta_2 \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} x + ae^{bt} \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} + r(t) = 0 \\ V(T, x) = \eta_3 x,$$

где $a, b, \eta_1, \eta_2, \eta_3$ — заданные параметры, $b \neq \eta_2$, $r(t)$ — непрерывно-дифференцируемая функция на отрезке $[t_0, T]$.

Лемма 3. Уравнение (13) имеет на отрезке $[t_0, T]$ единственное решение $V(t, x)$, причем $\frac{\partial V(t, x)}{\partial x}$ не зависит от $a, b, \eta_1, r(t)$ и имеет вид:

$$\frac{\partial V(t, x)}{\partial x} = \eta_3 e^{\eta_2(T-t)}$$

Доказательство. Введем следующие обозначения:

$$(14) \quad \frac{\partial V(t, x)}{\partial t} = p, \quad \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} = q.$$

Запишем уравнение (13) с учетом (14) в виде:

$$(15) \quad p + \eta_1 q^2 + \eta_2 x q + a e^{bt} q + r(t) = F(t, x, p, q) = 0,$$

где

$$F_p^2 + F_q^2 = 1 + (2\eta_1 q + \eta_2 x + a e^{bt})^2 \neq 0.$$

Зададим граничное условие $V(T, x) = \eta_3 x$ в параметрическом виде:

$$(16) \quad t_0(\tau) = T, \quad x_0(\tau) = \tau, \quad V_0(\tau) = \eta_3 \tau, \quad p_0(\tau), \quad q_0(\tau).$$

В результате определена задача Коши (15)-(16), где $p_0(\tau)$ и $q_0(\tau)$ связаны условиями:

$$(17) \quad \begin{cases} F[t_0(\tau), x_0(\tau), p_0(\tau), q_0(\tau)] = 0, \\ \frac{dV_0}{d\tau} = p_0 \frac{dt_0}{d\tau} + q_0 \frac{dx_0}{d\tau}. \end{cases}$$

Из (17) имеем:

$$\begin{cases} p_0(\tau) + \eta_1 q_0^2(\tau) + \eta_2 \tau q_0(\tau) + a e^{bT} q_0(\tau) + r(T) = 0, \\ \eta_3 = q_0(\tau), \end{cases}$$

следовательно, $q_0(\tau) = \eta_3, p_0(\tau) = -a e^{bT} \eta_3 - r(T) - \eta_1 \eta_3^2 - \eta_2 \eta_3 \tau$.

Задача с граничными условиями (15)-(17) имеет единственное решение, если из данных граничных условий следует:

$$(18) \quad F_p \frac{dx}{d\tau} - F_q \frac{dt}{d\tau} \neq 0.$$

Проверим выполнение условий (18):

$$1 - \left(2\eta_1 q_0 + \eta_2 \tau + a e^{bT} \right) \cdot 0 = 1 \neq 0.$$

Условие (18) выполнено, следовательно, задача (15)-(17) имеет единственное решение.

Рассмотрим теперь систему характеристических уравнений:

$$\frac{dt}{dt} = F_p = 1,$$

$$(19) \quad \frac{dx}{dt} = F_q = 2\eta_1 q + \eta_2 x + a e^{bt}$$

$$(20) \quad \frac{dV}{dt} = p F_p + q F_q = p + 2\eta_1 q^2 + \eta_2 q x + a e^{bt} q$$

$$(21) \quad \begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= -(pF_V + F_t) = -abe^{bt}q - r'(t) \\ \frac{dq}{dt} &= -(qF_V + F_x) = -\eta_2q \end{aligned}$$

с условиями:

$$\begin{aligned} t_0(\tau) &= T, \quad x_0(\tau) = \tau, \quad V_0(\tau) = \eta_3\tau, \\ p_0(\tau) &= -ae^{bT}\eta_3 - r(T) - \eta_1\eta_3^2 - \eta_2\eta_3\tau, \quad q_0(\tau) = \eta_3. \end{aligned}$$

Тогда,

$$(22) \quad q = \eta_3 e^{\eta_2(T-t)}.$$

Подставляя (22) в (19), получим обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\frac{dx}{dt} = \eta_2x + 2\eta_1\eta_3e^{\eta_2(T-t)} + ae^{bt}, \quad x_0(\tau) = \tau,$$

которое имеет единственное решение:

$$(23) \quad \begin{aligned} x &= e^{-\eta_2(T-t)}\tau + \frac{\eta_1\eta_3}{\eta_2} \left(e^{-\eta_2(T-t)} - e^{\eta_2(T-t)} \right) + \\ &+ \frac{a}{b - \eta_2} \left(e^{bt} - e^{bT}e^{-\eta_2(T-t)} \right). \end{aligned}$$

Подставив (22) в (21), получим обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\frac{dp}{dt} = -abe^{bt}\eta_3e^{\eta_2(T-t)} - r'(t) = -r'(t) - ab\eta_3e^{bt}e^{\eta_2(T-t)},$$

$$p_0(\tau) = -ae^{bT}\eta_3 - r(T) - \eta_1\eta_3^2 - \eta_2\eta_3\tau,$$

которое имеет единственное решение:

$$(24) \quad p = -r(t) - \frac{a\eta_3}{b - \eta_2} \left(be^{bt}e^{\eta_2(T-t)} - \eta_2e^{bT} \right) - \eta_1\eta_3^2 - \eta_2\eta_3\tau.$$

Подставляя (22), (23), (24) в (20) и приведя подобные члены, имеем следующее уравнение:

$$\frac{dV}{dt} = -r(t) + \eta_1\eta_3^2e^{2\eta_2(T-t)}, \quad V_0(\tau) = \eta_3\tau.$$

Откуда,

$$dV = \left(\eta_1 \eta_3^2 e^{2\eta_2(T-t)} - r(t) \right) dt, \quad V_0(\tau) = \eta_3 \tau,$$

$$V = \eta_3 \tau + \int_T^t \left(\eta_1 \eta_3^2 e^{2\eta_2(T-\xi)} - r(\xi) \right) d\xi.$$

Поскольку $t \in [t_0, T]$, имеем:

$$V = \eta_3 \tau - \int_t^T \left(\eta_1 \eta_3^2 e^{2\eta_2(T-\xi)} - r(\xi) \right) d\xi,$$

$$V = \eta_3 \tau - \left(-\frac{\eta_1 \eta_3^2}{2\eta_2} e^{2\eta_2(T-\xi)} \Big|_t^T \right) + \int_t^T r(\xi) d\xi,$$

$$(25) \quad V = \eta_3 \tau - \frac{\eta_1 \eta_3^2}{2\eta_2} \left(e^{2\eta_2(T-t)} - 1 \right) + \int_t^T r(\xi) d\xi.$$

Рассмотрим систему, составленную из уравнений (23) и (25):

$$\begin{cases} x = e^{-\eta_2(T-t)} \tau + \frac{\eta_1 \eta_3}{\eta_2} \left(e^{-\eta_2(T-t)} - e^{\eta_2(T-t)} \right) + \\ + \frac{a}{b-\eta_2} \left(e^{bt} - e^{bT} e^{-\eta_2(T-t)} \right), \\ V = \eta_3 \tau - \frac{\eta_1 \eta_3^2}{2\eta_2} \left(e^{2\eta_2(T-t)} - 1 \right) + \int_t^T r(\xi) d\xi. \end{cases}$$

Исключим из системы параметр τ . Для этого выразим τ из первого уравнения:

$$\tau = e^{\eta_2(T-t)} x - \frac{\eta_1 \eta_3}{\eta_2} \left(1 - e^{2\eta_2(T-t)} \right) - \frac{a}{b-\eta_2} \left(e^{bt} e^{\eta_2(T-t)} - e^{bT} \right).$$

Полученное выражение подставим во второе уравнение системы, получим

$$(26) \quad V = \eta_3 e^{\eta_2(T-t)} x + \frac{\eta_1 \eta_3^2}{2\eta_2} \left(e^{2\eta_2(T-t)} - 1 \right) -$$

$$-\frac{a\eta_3}{b - \eta_2} \left(e^{bt} e^{\eta_2(T-t)} - e^{bT} \right) + \int_t^T r(\xi) d\xi.$$

Подстановкой (26) в (13) непосредственно проверяем, что (13) превращается в тождество.

Из (26) следует, что

$$V_x = \eta_3 e^{\eta_2(T-t)}.$$

Пример 1. Рассмотрим игру $\Gamma(x_0, T - t_0)$, где $N = \{1, 2\}$, $n = 2$, динамика (13) имеет вид:

$$(27) \quad \dot{x}(t) = ax + b_1 u_1 + b_2 u_2, \quad x(t_0) = x_0.$$

Пусть целью игрока 1 является максимизация функционала:

$$(28) \quad J_{\{1\}} [x_0, u_1, u_2] = \int_{t_0}^T \left[-u_1^2 - u_2^2 + u_1 x + u_2 x - \frac{x^2}{2} + r^{[1]}(t) \right] dt + x(T),$$

а целью игрока 2 — максимизация функционала:

$$(29) \quad J_{\{2\}} [x_0, u_1, u_2] = \int_{t_0}^T \left[-2u_1^2 - u_2^2 + 2u_1 x + u_2 x - \frac{3}{4}x^2 + r^{[2]}(t) \right] dt + x(T),$$

где $r^{[1]}(t)$, $r^{[2]}(t)$ — непрерывные функции.

Покажем, что в игре (28)-(29) существует сильное равновесие в смысле определения 1. Согласно теореме 1, для этого достаточно для каждой коалиции $S \subseteq N$, $S \neq \emptyset$, найти номер $i_0^S \in S$ и непрерывно-дифференцируемую функцию $V^{[S]}(t, x)$ такие, чтобы максимальное значение левой части уравнения (6) достигалось на единственном наборе $\phi_N^*(t, x)$.

Рассмотрим коалицию $S = \{1, 2\} = N$ и вектор

$$\lambda^{[n, i_0^N]} = \left(\lambda_1^{[n, i_0^N]}, \lambda_2^{[n, i_0^N]} \right).$$

Уравнение (6) принимает вид:

$$(30) \quad V_t^{[N]}(t, x) + \max_{u_1 u_2} \left\{ (ax + b_1 u_1 + b_2 u_2) V_x^{[N]}(t, x) + \right. \\ \left. + \lambda_1^{[n, i_0^N]} \left(-u_1^2 - u_2^2 + u_1 x + u_2 x - \frac{x^2}{2} + r^{[1]}(t) \right) + \right. \\ \left. + \lambda_2^{[n, i_0^N]} \left(-2u_1^2 - u_2^2 + 2u_1 x + u_2 x - \frac{3}{4}x^2 + r^{[2]}(t) \right) \right\} = 0,$$

$$V^{[N]}(T, x^{[N]}(T)) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^{[n, i_0^N]} x^{[N]}(T),$$

или

$$V_t^{[N]}(t, x) + \max_{u_1 u_2} \left\{ (ax + b_1 u_1 + b_2 u_2) V_x^{[N]}(t, x) - \right. \\ \left. - \left(\lambda_1^{[n, i_0^N]} + 2\lambda_2^{[n, i_0^N]} \right) u_1^2 - \left(\lambda_1^{[n, i_0^N]} + \lambda_2^{[n, i_0^N]} \right) u_2^2 + \right. \\ \left. + \left(\lambda_1^{[n, i_0^N]} + 2\lambda_2^{[n, i_0^N]} \right) x u_1 + \left(\lambda_1^{[n, i_0^N]} + \lambda_2^{[n, i_0^N]} \right) x u_2 - \right. \\ \left. - \left(\frac{x^2}{2} \lambda_1^{[n, i_0^N]} + \frac{3x^2}{4} \lambda_2^{[n, i_0^N]} \right) + \right. \\ \left. + \left(r^{[1]}(t) \lambda_1^{[n, i_0^N]} + r^{[2]}(t) \lambda_2^{[n, i_0^N]} \right) \right\} = 0, \\ V^{[N]}(T, x^{[N]}(T)) = \left(\lambda_1^{[n, i_0^N]} + \lambda_2^{[n, i_0^N]} \right) x^{[N]}(T).$$

Определим максимум функции в фигурных скобках. Значения управлений, на которых достигается максимум в левой части уравнения (30), получаем из условий первого порядка:

$$b_1 V_x^{[N]}(t, x) - 2 \left(\lambda_1^{[n, i_0^N]} + 2\lambda_2^{[n, i_0^N]} \right) \phi_1^*(t, x) + \\ + \left(\lambda_1^{[n, i_0^N]} + 2\lambda_2^{[n, i_0^N]} \right) x = 0, \\ b_2 V_x^{[N]}(t, x) - 2 \left(\lambda_1^{[n, i_0^N]} + \lambda_2^{[n, i_0^N]} \right) \phi_2^*(t, x) + \\ + \left(\lambda_1^{[n, i_0^N]} + 2\lambda_2^{[n, i_0^N]} \right) x = 0.$$

Откуда,

$$(31) \quad \begin{aligned} \phi_1^*(t, x) &= \frac{b_1}{2(\lambda_1^{[n, i_0^N]} + 2\lambda_2^{[n, i_0^N]})} V_x^{[N]}(t, x) + \frac{x}{2} \\ \phi_2^*(t, x) &= \frac{b_2}{2(\lambda_1^{[n, i_0^N]} + \lambda_2^{[n, i_0^N]})} V_x^{[N]}(t, x) + \frac{x}{2} \end{aligned}$$

Условия второго порядка зависят только от параметров свертки:

$$-2(\lambda_1^{[n, i_0^N]} + 2\lambda_2^{[n, i_0^N]}) < 0$$

и

$$(32) \quad \begin{vmatrix} -2(\lambda_1^{[n, i_0^N]} + 2\lambda_2^{[n, i_0^N]}) & 0 \\ 0 & -2(\lambda_1^{[n, i_0^N]} + \lambda_2^{[n, i_0^N]}) \end{vmatrix} = \\ = 4(\lambda_1^{[n, i_0^N]} + 2\lambda_2^{[n, i_0^N]}) (\lambda_1^{[n, i_0^N]} + \lambda_2^{[n, i_0^N]}) > 0.$$

Следовательно, при выполнении условий (32), набор функций (31) будет единственным, на котором достигается максимум левой части уравнения (30).

Подставляя (31) в (30), имеем:

$$(33) \quad \begin{aligned} & V_t^{[N]}(t, x) + \left\{ ax + \frac{b_1 x}{2} + \frac{b_2 x}{2} \right\} V_x^{[N]}(t, x) + \\ & + \left\{ \frac{b_1^2}{2(\lambda_1^{[n, i_0^N]} + 2\lambda_2^{[n, i_0^N]})} + \frac{b_2^2}{2(\lambda_1^{[n, i_0^N]} + \lambda_2^{[n, i_0^N]})} \right\} (V_x^{[N]}(t, x))^2 - \\ & - (\lambda_1^{[n, i_0^N]} + 2\lambda_2^{[n, i_0^N]}) \left(\frac{b_1}{2(\lambda_1^{[n, i_0^N]} + 2\lambda_2^{[n, i_0^N]})} V_x^{[N]}(t, x) + \frac{x}{2} \right)^2 - \\ & - (\lambda_1^{[n, i_0^N]} + \lambda_2^{[n, i_0^N]}) \left(\frac{b_2}{2(\lambda_1^{[n, i_0^N]} + \lambda_2^{[n, i_0^N]})} V_x^{[N]}(t, x) + \frac{x}{2} \right)^2 + \\ & + (\lambda_1^{[n, i_0^N]} + 2\lambda_2^{[n, i_0^N]}) \left(\frac{b_1}{2(\lambda_1^{[n, i_0^N]} + 2\lambda_2^{[n, i_0^N]})} V_x^{[N]}(t, x) + \frac{x}{2} \right) x + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left(\lambda_1^{[n, i_0^N]} + \lambda_2^{[n, i_0^N]} \right) \left(\frac{b_2}{2 \left(\lambda_1^{[n, i_0^N]} + \lambda_2^{[n, i_0^N]} \right)} V_x^{[N]}(t, x) + \frac{x}{2} \right) x - \\
 & \quad - \left(\frac{x^2}{2} \lambda_1^{[n, i_0^N]} + \frac{3x^2}{4} \lambda_2^{[n, i_0^N]} \right) + \\
 & \quad + \left(r^{[1]}(t) \lambda_1^{[n, i_0^N]} + r^{[2]}(t) \lambda_2^{[n, i_0^N]} \right) \} = 0, \\
 & V^{[N]}(T, x^{[N]}(T)) = \left(\lambda_1^{[n, i_0^N]} + \lambda_2^{[n, i_0^N]} \right) x^{[N]}(T).
 \end{aligned}$$

Раскрывая скобки в (33) и упрощая, имеем:

$$\begin{aligned}
 (34) \quad & V_t^{[N]}(t, x) + \left\{ a + \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2} \right\} x V_x^{[N]}(t, x) + \\
 & \quad + \left\{ \frac{b_1^2}{4 \left(\lambda_1^{[n, i_0^N]} + 2\lambda_2^{[n, i_0^N]} \right)} + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{b_2^2}{4 \left(\lambda_1^{[n, i_0^N]} + \lambda_2^{[n, i_0^N]} \right)} \right\} \left(V_x^{[N]}(t, x) \right)^2 + \\
 & \quad + \left(r^{[1]}(t) \lambda_1^{[n, i_0^N]} + r^{[2]}(t) \lambda_2^{[n, i_0^N]} \right) \} = 0, \\
 & V^{[N]}(T, x^{[N]}(T)) = \left(\lambda_1^{[n, i_0^N]} + \lambda_2^{[n, i_0^N]} \right) x^{[N]}(T).
 \end{aligned}$$

По лемме 3 уравнение (34) имеет единственное решение, причем

$$(35) \quad V_x^{[N]}(t, x) = \left(\lambda_1^{[n, i_0^N]} + \lambda_2^{[n, i_0^N]} \right) e^{\left\{ a + \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2} \right\} (T-t)}.$$

С учетом (35) из (31) следует, что

$$\begin{aligned}
 (36) \quad & \phi_1^*(t, x) = \frac{b_1 \left(\lambda_1^{[n, i_0^N]} + \lambda_2^{[n, i_0^N]} \right)}{2 \left(\lambda_1^{[n, i_0^N]} + 2\lambda_2^{[n, i_0^N]} \right)} e^{\left\{ a + \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2} \right\} (T-t)} + \frac{x}{2} . \\
 & \phi_2^*(t, x) = \frac{b_2}{2} e^{\left\{ a + \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2} \right\} (T-t)} + \frac{x}{2}
 \end{aligned}$$

При этом динамика (27) принимает вид:

$$(37) \quad \dot{x}(t) = \left(a + \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2} \right) x +$$

$$+ \left\{ \frac{b_1^2 \left(\lambda_1^{[n, i_0^N]} + \lambda_2^{[n, i_0^N]} \right)}{2 \left(\lambda_1^{[n, i_0^N]} + 2\lambda_2^{[n, i_0^N]} \right)} + \frac{b_2^2}{2} \right\} e^{\left\{ a + \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2} \right\} (T-t)},$$

$$x(t_0) = x_0.$$

Рассмотрим коалицию $S = \{1\}$ и вектор

$$\lambda^{[n, i_0^S]} = \left(\lambda_1^{[n, i_0^S]}, \lambda_2^{[n, i_0^S]} \right),$$

при условии, что игрок 2 выбрал стратегию $\phi_2^*(t, x)$. Уравнение (6) принимает вид:

$$(38) \quad \begin{aligned} & V_t^{[S]}(t, x) + \\ & + \max_{u_1} \left\{ \left[ax + b_1 u_1 + \frac{b_2^2}{2} e^{\left(a + \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2} \right) (T-t)} + \frac{b_2 x}{2} \right] V_x^{[S]}(t, x) + \right. \\ & \quad + \lambda_1^{[n, i_0^S]} \left(-u_1^2 - \left(\frac{b_2}{2} e^{\left(a + \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2} \right) (T-t)} + \frac{x}{2} \right)^2 + \right. \\ & \quad + u_1 x + \left. \left(\frac{b_2}{2} e^{\left(a + \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2} \right) (T-t)} + \frac{x}{2} \right) x - \frac{x^2}{2} + r^{[1]}(t) \right) + \\ & \quad + \lambda_2^{[n, i_0^S]} \left(-2u_1^2 - \left(\frac{b_2}{2} e^{\left(a + \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2} \right) (T-t)} + \frac{x}{2} \right)^2 + \right. \\ & \quad \left. \left. + 2u_1 x + \left(\frac{b_2}{2} e^{\left(a + \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2} \right) (T-t)} + \frac{x}{2} \right) x - \frac{3}{4} x^2 + r^{[2]}(t) \right) \right\} = 0 \\ & V^{[S]}(T, x(T)) = \left(\lambda_1^{[n, i_0^S]} + \lambda_2^{[n, i_0^S]} \right) x(T). \end{aligned}$$

Из определения вектора $\lambda^{[n, i_0^S]}$ следует, что $\lambda_2^{[n, i_0^S]} = 0$. Поэтому уравнение (38) принимает вид:

$$(39) \quad \begin{aligned} & V_t^{[S]}(t, x) + \\ & + \max_{u_1} \left\{ \left[ax + b_1 u_1 + \frac{b_2^2}{2} e^{\left(a + \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2} \right) (T-t)} + \frac{b_2 x}{2} \right] V_x^{[S]}(t, x) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \lambda_1^{[n, i_0^S]} \left(-u_1^2 - \left(\frac{b_2}{2} e^{(a + \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2})(T-t)} + \frac{x}{2} \right)^2 + \right. \\
 & \left. + u_1 x + \left(\frac{b_2}{2} e^{(a + \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2})(T-t)} + \frac{x}{2} \right) x - \frac{x^2}{2} + r^{[1]}(t) \right) \Big\} = 0, \\
 & V^{[S]}(T, x(T)) = \lambda_1^{[n, i_0^S]} x(T)
 \end{aligned}$$

Условие первого порядка для функции в фигурных скобках принимает вид:

$$b_1 V_x^{[S]}(t, x) - 2\lambda_1^{[n, i_0^S]} \phi_1^{**}(t, x) + \lambda_1^{[n, i_0^S]} x = 0.$$

Откуда,

$$(40) \quad \phi_1^{**}(t, x) = \frac{b_1}{2\lambda_1^{[n, i_0^S]}} V_x^{[S]}(t, x) + \frac{x}{2}.$$

Условие второго порядка зависит только от параметров свертки:

$$(41) \quad -2\lambda_1^{[n, i_0^S]} < 0,$$

поэтому при выполнении условия (41) стратегия (40) будет единственной, на которой достигается максимум левой части уравнения (39).

Подставив (40) в (39) и упростив, получим:

$$\begin{aligned}
 (42) \quad & V_t^{[S]}(t, x) + \\
 & + \frac{b_1^2}{4\lambda_1^{[n, i_0^S]}} \left(V_x^{[S]}(t, x) \right)^2 + \left(a + \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2} \right) x V_x^{[S]}(t, x) + \\
 & + \frac{b_2^2}{2} e^{(a + \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2})(T-t)} V_x^{[S]}(t, x) - \\
 & - \frac{\lambda_1^{[n, i_0^S]} b_2^2}{2} e^{2(a + \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2})(T-t)} + \lambda_1^{[n, i_0^S]} r^{[1]}(t) = 0,
 \end{aligned}$$

$$V^{[S]}(T, x(T)) = \lambda_1^{[n, i_0^S]} x(T).$$

По лемме 3 уравнение (42) имеет единственное решение, причем

$$(43) \quad V_x^{[S]}(t, x) = \lambda_1^{[n, i_0^S]} e^{\left\{ a + \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2} \right\} (T-t)}.$$

С учетом (43) из (40) следует:

$$(44) \quad \phi_1^{**}(t, x) = \frac{b_1}{2} e^{\left\{a + \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2}\right\}(T-t)} + \frac{x}{2}.$$

При этом динамика (27) принимает следующий вид:

$$(45) \quad \dot{x}(t) = \left(a + \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2}\right) x + \left(\frac{b_1^2}{2} + \frac{b_2^2}{2}\right) e^{\left\{a + \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2}\right\}(T-t)},$$

$$x(t_0) = x_0.$$

Рассмотрим коалицию $S = \{2\}$ и вектор

$$\lambda^{[n, i_0^S]} = \left(\lambda_1^{[n, i_0^S]}, \lambda_2^{[n, i_0^S]}\right),$$

при условии, что игрок 1 выбрал стратегию $\phi_1^*(t, x)$. Повторяя рассуждения, проведенные при рассмотрении случая $S = \{1\}$, имеем:

$$(46) \quad \phi_2^{**}(t, x) = \frac{b_2}{2} e^{\left\{a + \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2}\right\}(T-t)} + \frac{x}{2}.$$

При этом динамика (27) принимает вид:

$$(47) \quad \dot{x}(t) = \left(a + \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2}\right) x +$$

$$+ \left\{ \frac{b_1^2 \left(\lambda_1^{[n, i_0^N]} + \lambda_2^{[n, i_0^N]}\right)}{2 \left(\lambda_1^{[n, i_0^N]} + 2\lambda_2^{[n, i_0^N]}\right)} + \frac{b_2^2}{2} \right\} e^{\left\{a + \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2}\right\}(T-t)},$$

$$x(t_0) = x_0.$$

В результате получаем:

Для $S = N$, согласно (36), (37):

$$\phi_1^*(t, x) = \frac{b_1 \left(\lambda_1^{[n, i_0^N]} + \lambda_2^{[n, i_0^N]}\right)}{2 \left(\lambda_1^{[n, i_0^N]} + 2\lambda_2^{[n, i_0^N]}\right)} e^{\left\{a + \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2}\right\}(T-t)} + \frac{x}{2},$$

$$\phi_2^*(t, x) = \frac{b_2}{2} e^{\left\{a + \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2}\right\}(T-t)} + \frac{x}{2},$$

$$\dot{x}(t) = \left(a + \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2}\right) x +$$

$$+ \left\{ \frac{b_1^2 \left(\lambda_1^{[n, i_0^N]} + \lambda_2^{[n, i_0^N]} \right)}{2 \left(\lambda_1^{[n, i_0^N]} + 2\lambda_2^{[n, i_0^N]} \right)} + \frac{b_2^2}{2} \right\} e^{\left\{ a + \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2} \right\} (T-t)},$$

$$x(t_0) = x_0.$$

Для $S = \{1\}$, согласно (44), (45):

$$\phi_1^{**}(t, x) = \frac{b_1}{2} e^{\left\{ a + \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2} \right\} (T-t)} + \frac{x}{2},$$

$$\dot{x}(t) = \left(a + \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2} \right) x + \left(\frac{b_1^2}{2} + \frac{b_2^2}{2} \right) e^{\left\{ a + \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2} \right\} (T-t)},$$

$$x(t_0) = x_0.$$

Для $S = \{2\}$, согласно (46), (47):

$$\phi_2^{**}(t, x) = \frac{b_2}{2} e^{\left\{ a + \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2} \right\} (T-t)} + \frac{x}{2},$$

$$\dot{x}(t) = \left(a + \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2} \right) x +$$

$$+ \left\{ \frac{b_1^2 \left(\lambda_1^{[n, i_0^N]} + \lambda_2^{[n, i_0^N]} \right)}{2 \left(\lambda_1^{[n, i_0^N]} + 2\lambda_2^{[n, i_0^N]} \right)} + \frac{b_2^2}{2} \right\} e^{\left\{ a + \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2} \right\} (T-t)},$$

$$x(t_0) = x_0.$$

В игре возможны три коалиции ($n = 2$). Поэтому возможны $2^3 = 8$ векторов $\lambda^{[n, i_0^N]}$. Перебирая все варианты, находим следующий ответ.

Для $S = N$ значение $i_0^{\{1,2\}} = 1$, $\lambda^{[n, i_0^{\{1,2\}}]} = (1, 0)$, для $S = \{1\}$ значение $i_0^{\{1\}} = 1$, $\lambda^{[n, i_0^{\{1\}}]} = (1, 0)$, для $S = \{2\}$ значение $i_0^{\{2\}} = 2$, $\lambda^{[n, i_0^{\{2\}}]} = (0, 1)$. Тогда:

а) для всех экстремальных уравнений выполняются условия второго порядка,

б)

$$\phi_1^*(t, x) = \phi_1^{**}(t, x) = \frac{b_1}{2} e^{\left\{ a + \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2} \right\} (T-t)} + \frac{x}{2},$$

$$\phi_2^*(t, x) = \phi_2^{**}(t, x) = \frac{b_2}{2} e^{\left\{a + \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2}\right\}(T-t)} + \frac{x}{2},$$

в) выполняются условия существования и единственности уравнений (37), (45), (47). При этом указанные уравнения принимают одинаковый вид:

$$(48) \quad \dot{x}(t) = \left(a + \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2}\right) x + \left(\frac{b_1^2}{2} + \frac{b_2^2}{2}\right) e^{\left\{a + \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2}\right\}(T-t)},$$

$$x(t_0) = x_0.$$

Следовательно, для каждой коалиции $S \subseteq N$ нашлись такие номера игроков $i_0^{\{1,2\}} = 1$, $i_0^{\{1\}} = 1$, $i_0^{\{2\}} = 2$, что максимальное значение левой части уравнений (30), (39), а также экстремально-го уравнения, составленного для случая $S = \{2\}$, достигается на единственном наборе непрерывных функций:

$$\phi_N^*(t, x) = (\phi_1^*(t, x), \phi_2^*(t, x)) =$$

$$= \left(\frac{b_1}{2} e^{\left\{a + \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2}\right\}(T-t)} + \frac{x}{2}, \frac{b_2}{2} e^{\left\{a + \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2}\right\}(T-t)} + \frac{x}{2} \right).$$

Тогда по теореме 1 набор $\phi_N^*(t, x) \in SME$ в игре (27)-(29), что и требовалось найти. •

Литература

1. ВАЙСБОРД Э.М., ЖУКОВСКИЙ В.И. *Введение в дифференциальные игры нескольких лиц и их приложения*. – М.: Советское радио, 1980. – 304 с.
2. ЗЕНКЕВИЧ Н.А., ПЕТРОСЯН Л.А., ЯНГ Д.В.К. *Динамические игры и их приложения в менеджменте*. – Санкт-Петербург: Высшая школа менеджмента, 2009. – 415 с.
3. МУЛЕН Э. *Теория игр с примерами из математической экономики*. / Пер. с франц. О.Р. Меньшиковой, И.С. Меньшикова. – М.: Мир, 1985. – 200 с.
4. ПЕТРОСЯН Л.А., ЗЕНКЕВИЧ Н.А., СЕМИНА Е.А. *Теория игр*. – М.: Высш. шк., Книжный дом «Университет», 1998. – 304 с.

5. ФЛЕМИНГ У., РИШЕЛ Р. *Оптимальное управление детерминированными и стохастическими системами.* / пер. с англ. М. Г. Бутрим, П. К. Катышева; под ред. А. Н. Ширяева. – М.: Мир, 1978. – 320 с.
6. ЧИСТЯКОВ С.В. *О построении сильно динамически устойчивых решений кооперативных дифференциальных игр* // Вестник Санкт-Петербургского государственного университета. – 1992. – Сер.1: Математика, механика, астрономия. Вып. 1. – С. 57–69.
7. AUMANN R.J. *Acceptable Points in General Cooperative n - Person Games.* // Contributions to the Theory of Games IV. Annals of Mathematics Study 40, ed. by A.W. Tucker. – Princeton NJ: Princeton University Press, 1959. – P. 287–324.
8. ISAACS R. *Differential games.* – New York, London, Sydney: John Wiley and sons Inc, 1965.
9. PETROSYAN L.A., GRAUER L.V. *Strong Nash Equilibrium in Multistage Games*// International Game Theory Review. – 2002. – Vol. 4, № 3. – P. 255–264.
10. YEUNG D.W.K., PETROSYAN L.A. *Cooperative stochastic differential games.* – New York: Springer Verlag, 2006.

STRONG EQUILIBRIUM CONSTRUCTION IN A NONCOOPERATIVE DIFFERENTIAL GAME

Nikolay Zenkevich, Graduate School of Management,
Saint-Petersburg, Cand.Sc., assistant professor
(zenkevich@gsom.pu.ru).

Andrey Zyatchin, Graduate School of Management,
Saint-Petersburg, Cand.Sc., assistant (zyatchin@gsom.pu.ru).

Abstract: In this paper a special technique based on scalarization of a vector criterion is used to construct a strong equilibrium in a differential game. Sufficient conditions for the existence of strong equilibrium are proved. This approach is tested on an example of an asymmetrical differential game of two players, where the strong equilibrium was found in the explicit form.

Keywords: differential game, Nash equilibrium, strong equilibrium.

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии Д. А. Новиковым*

УДК 519.833.5
ББК В183 + 3-63

КОНСЕНСУС-ЗНАЧЕНИЕ ДЛЯ ИГР С КОАЛИЦИОННОЙ СТРУКТУРОЙ¹

Зинченко А.Б.², Мироненко Г.В.³, Провоторова П.А.⁴
(Южный Федеральный Университет, Ростов-на-Дону)

Выделен класс ТП-игр, для которых почти все концепции решения, кроме консенсус-значения, дают парадоксальные результаты. Доказано, что это игры большого босса. Предложено обобщение консенсус-значения для игр с коалиционной структурой.

Ключевые слова: коалиционная структура, коалиционное значение, консенсус-значение, игра большого босса, аксиоматизация.

Введение

Коалиционные структуры (объединения) возникают при формировании картелей, синдикатов, холдингов, политических альянсов и т.д. Такие ситуации моделируются кооперативными играми, позволяющими выделить выгодные коалиции и «справедливо» распределить прибыль между игроками. Если коалиции образовались до начала игры, т.е. известно разбиение $C = \{C_1, \dots, C_m\}$ множества игроков N , то возможны следующие сценарии.

– Игроки каждой коалиции $C_p \in C$ делят между собой полезность $\nu(C_p)$, которую в состоянии получить коалиция C_p независимо от поведения других игроков.

¹ Текст приводится в соответствии с изданием «Математическая теория игр и ее приложения. – 2010. – Т. 2. № 1. – С. 93–106».

² Александра Борисовна Зинченко, кандидат физико-математических наук, доцент (zinch46@mail.ru).

³ Георгий Викторович Мироненко, студент (georim89@mail.ru).

⁴ Полина Александровна Провоторова, студент (prov-pa@inbox.ru).

– Все игроки объединяются, но внутри максимальной коалиции N образуются подкоалиции C_1, \dots, C_m (союзы [5], группы давления [9]), действующие при дележе $\nu(N)$ как единый игрок. Затем выигрыш каждой коалиции $C_p \in C$ распределяется между ее игроками.

Будем рассматривать игры второго типа. Оуэн предложил концепцию решения (коалиционное значение Оуэна [5]), дважды использующую значение Шепли: в игре между коалициями и играх внутри коалиций. Позже были введены коалиционные значения, сочетающие значение Шепли с взвешенным значением Шепли, значение Банзафа с значением Шепли, значение Шепли с p -биномиальным значением ($p \in [0, 1]$) и др. Ссылки можно найти, например, в [2]. Относительно недавно для игр с трансферабельной полезностью (ТП-игр) было предложено консенсус-значение [3], косвенно учитывающее возможность образование подкоалиций внутри коалиции N .

В данной статье выделен класс имеющих приложения ТП-игр, для которых основные концепции решения приводят к парадоксальным результатам, а консенсус-значение согласуется с моделируемой ситуацией и доминирует по Лоренцу другие решения. Доказывается, что такие игры соответствуют вершине многогранника (0-1)-редуцированных игр большого босса. Предлагается обобщение консенсус-значения для игр с коалиционной структурой. Доказывается, что коалиционное консенсус-значение однозначно определяется аксиомами эффективности, аддитивности, внутренней симметричности, внешней симметричности и свойством нейтрального игрока.

Вторая часть статьи содержит необходимые определения. В третьей части описано консенсус-значение ТП-игры, сформулированы его новые свойства. Четвертая часть посвящена коалиционному консенсус-значению и его аксиоматическому обоснованию.

1. Определения

Игрой с трансферабельной полезностью называется пара (N, ν) , где $N = \{1, \dots, n\}$ – конечное множество, $\nu \in G^N = \{g : 2^N \rightarrow R \mid g(\emptyset) = 0\}$ – характеристическая функция. Игру (N, ν) часто отождествляют с характеристической функцией. Если $\nu, \omega \in G^N$ и $\alpha \in R$, то $\nu + \omega \in G^N$ и $\alpha\nu \in G^N$, где $(\nu + \omega)(S) = \nu(S) + \omega(S)$, $(\alpha\nu)(S) = \alpha\nu(S)$, $S \subseteq N$. Игроки $i, j \in N$ симметричны в (N, ν) , если $\nu(S \cup i) = \nu(S \cup j)$, $S \subseteq N \setminus \{i, j\}$. Игрок $i \in N$ нейтрален в (N, ν) , если $\nu(S \cup i) - \nu(S) = \nu(i)$, $S \subseteq N \setminus i$.

Будем обозначать: $x(S) = \sum_{i \in S} x_i$, \tilde{x} – вектор, полученный

из $x \in R^N$ упорядочением координат по неубыванию, $s = |S|$ – мощность множества S , $P^N = \{g : 2^N \rightarrow \{0, 1\} \mid g(\emptyset) = 0, g(N) = 1\}$ – множество простых игр, $Ne(N, \nu)$ – множество нейтральных игроков игры (N, ν) , $I(N, \nu) = \{x \in R^N \mid x(N) = \nu(N); x_i \geq \nu(i), i \in N\}$ – множество дележей, $C(N, \nu) = \{x \in I(N, \nu) \mid x(S) \geq \nu(S), S \subset N\}$ – C -ядро, $\mathfrak{R}_1^{(i)}(N, \nu)$ – переговорное множество (для коалиции N) [1], $\eta(N, \nu)$ – N -ядро [6]. D -ядром $D(N, \nu)$ игры (N, ν) называется множество всех недоминируемых дележей (дележ x доминирует дележ y , если существует такая коалиция $S \subset N$, что $x(S) \leq \nu(S)$ и $x_i > y_i$ для всех $i \in S$). Если $\nu(N) \geq \nu(S) + \sum_{i \in N \setminus S} \nu(i)$, $S \subset N$, то $D(N, \nu) = C(N, \nu)$.

Пусть $x, y \in R^N$ и $x(N) = y(N)$. Говорят, что x доминирует по Лоренцу y , если $\sum_{i=1}^p \tilde{x}_i \geq \sum_{i=1}^p \tilde{y}_i$, $p \in \{1, \dots, n-1\}$ и, по крайней мере, одно из неравенств – строгое. Игра (N, ν) называется игрой в $(0-1)$ -редуцированной форме, если $\nu(N) = 1$, $\nu(i) = 0$ для $i \in N$, $0 \leq \nu(S) \leq 1$ для $S \subset N$. Игра (N, ν) квазисбалансирована, если $m(N, \nu) \leq M^N(N, \nu)$ и $\sum_{i \in N} m_i(N, \nu) \leq \nu(N) \leq \sum_{i \in N} M_i^N(N, \nu)$, где

$$(1) \quad M_i^S(N, \nu) = \nu(S) - \nu(S \setminus i), \quad i \in S \subseteq N,$$

$$(2) \quad m_i(N, \nu) = \max_{S: i \in S} (\nu(S) - \sum_{j \in S \setminus i} M_j^N(N, \nu)), \quad i \in N.$$

Игра (N, ν) является (0-1)-редуцированной игрой большого босса с игроком 1 в качестве босса, если

$$(3) \quad 0 \leq \nu(S_1) \leq \nu(S_2) \leq 1, S_1 \subset S_2 \subset N, s_1 \geq 2,$$

$$(4) \quad \nu(S) = 0, s = 1 \text{ или } 1 \notin S,$$

$$(5) \quad \nu(N \setminus S) - \sum_{i \in S} \nu(N \setminus i) \leq s - 1, 1 \notin S, 2 \leq s < n.$$

Если упорядочить все непустые коалиции (S_1, \dots, S_d) , то игре (N, ν) соответствует вектор линейного пространства R^d , $d = 2^n - 1$, i -я координата которого равна $\nu(S_i)$. Множество B_n^1 решений системы (3)-(5) есть многогранник в R^d (многогранник (0-1)-редуцированных игр большого босса с игроком 1 в качестве босса).

Значением называется функция φ , которая каждой игре (N, ν) ставит в соответствие вектор $\varphi(N, \nu) \in R^N$. Множество значений игры (N, ν) обозначим через $\Phi(N, \nu)$. Приведем некоторые аксиомы для $\varphi \in \Phi(N, \nu)$.

Аксиома 1. (эффективность). $\sum_{i \in N} \varphi_i(N, \nu) = \nu(N)$.

Аксиома 2. (симметричность). Если игроки $i, j \in N$ симметричны в (N, ν) , то $\varphi_i(N, \nu) = \varphi_j(N, \nu)$.

Аксиома 3. (аддитивность). $\varphi(N, \nu + \omega) = \varphi(N, \nu) + \varphi(N, \omega)$.

Аксиома 4. (свойство нейтрального игрока). Если $i \in Ne(N, \nu)$, то $\varphi_i(N, \nu) = \nu(i) + \frac{\nu(N) - \sum_{j \in N} \nu(j)}{2n}$.

Значение Шепли sh и равномерное значение e игры (N, ν) , $\nu \in G^N$, определяются формулами

$$(6) \quad sh_i(N, \nu) = \sum_{S: i \in S} \frac{(n-s)!(s-1)!}{n!} M_i^S(N, \nu),$$

$$(7) \quad e_i(N, \nu) = \nu(i) + \frac{\nu(N) - \sum_{j \in N} \nu(j)}{n}, i \in N,$$

а τ -значение τ квазисбалансированной игры (N, ν) – системой

$$(8) \quad \sum_{i \in N} \tau_i(N, \nu) = \nu(N),$$

$$\tau(N, \nu) = \lambda m(N, \nu) + (1 - \lambda) M^N(N, \nu), \lambda \in [0, 1].$$

2. Консенсус-значение

Консенсус-значение [3] является обобщением решения игры двух лиц. Пусть $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_n)$ – перестановка N , $\Pi(N)$ – множество всех перестановок. Вначале разыгрывается игра двух лиц: игрока π_n и коалиции $S_{n-1} = \{\pi_1, \dots, \pi_{n-1}\}$, действующей как единый игрок. Игрок π_n получает $x_{\pi_n} = \nu(\pi_n) + \frac{\Delta_n}{2}$, где $\Delta_n = \nu(N) - \nu(S_{n-1}) - \nu(\pi_n)$, а коалиция S_{n-1} выигрывает $x_{S_{n-1}} = \nu(S_{n-1}) + \frac{\Delta_n}{2}$. Игрок π_n выходит из игры. В новой игре между π_{n-1} и коалицией $S_{n-2} = \{\pi_1, \dots, \pi_{n-2}\}$ выигрывши равны: $x_{\pi_{n-1}} = \nu(\pi_{n-1}) + \frac{\Delta_{n-1}}{2}$, $x_{S_{n-2}} = \nu(S_{n-2}) + \frac{\Delta_{n-1}}{2}$, где $\Delta_{n-1} = x_{S_{n-1}} - \nu(S_{n-2}) - \nu(\pi_{n-1})$. Игрок π_{n-1} выходит из игры и т.д. Консенсус-значение k есть среднее векторов $x^\pi = (x_{\pi_1}, \dots, x_{\pi_n})$: $k(N, \nu) = \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \Pi(N)} x^\pi$. Доказано [3], что

консенсус-значение однозначно определяется аксиомами 1-4 и

$$(9) \quad k(N, \nu) = \frac{e(N, \nu) + sh(N, \nu)}{2},$$

следовательно $k(N, \nu)$ балансирует два крайних принципа распределения дохода от кооперации: эгалитарного, реализуемого $e(N, \nu)$, и утилитарного принципа, отраженного в $sh(N, \nu)$. Приведем примеры, обобщение которых позволит сформулировать новые свойства значения k .

Пример 1. («Инвестиционная игра»). Рассмотрим проблему кооперативного инвестирования ([8], стр. 92) с тремя инвесторами и исходными капиталами 60, 40, 40 д.е. Имеются следующие возможности: 10% банковский депозит и инвестирование производственного процесса, приносящего 20% прибыли. Начальный вклад в производство не может быть меньше 100. Этой ситуации соответствует игра (N, ν) , где

$$N = \{1, 2, 3\}, \quad \nu(1) = 66, \quad \nu(2) = \nu(3) = 44, \\ \nu(1, 2) = \nu(1, 3) = 120, \quad \nu(2, 3) = 88, \quad \nu(N) = 164.$$

Устойчивым в [8] назван единственный дележ $x^c = (76, 44, 44)$ C -ядра $C(N, \nu)$. Положив $\nu'(S) = \nu(S) - \sum_{i \in S} \nu(i)$, $S \subseteq N$, пе-

рейдем к стратегически эквивалентной игре (N, ν') :

$$(10) \quad \nu'(i) = 0, i \in N, \nu'(2, 3) = 0, \nu'(1, 2) = \nu'(1, 3) = \nu'(N) = 10.$$

Получаем $C(N, \nu') = \{(x^c)'\}$, $(x^c)' = (10, 0, 0)$. Теперь более наглядна парадоксальность «ядерного» распределения: вся прибыль от кооперации достается первому инвестору, несмотря на то, что самостоятельно он может получить только $\nu'(1) = 0$. Вектор Шепли $sh(N, \nu') = (\frac{20}{3}, \frac{5}{3}, \frac{5}{3})$ также преувеличивает роль первого игрока. Игра (N, ν') квазисбалансирована, т. к. $C(N, \nu') \neq \emptyset$. Согласно (1) и (2) $M_1^N(N, \nu') = 10$, $M_2^N(N, \nu') = M_3^N(N, \nu') = 0$, $m(N, \nu') = M^N(N, \nu')$. Из (8) получаем, что $\tau(N, \nu') = (x^c)'$. Из вложения $\eta(N, \nu') \subseteq C(N, \nu')$ имеем $\eta(N, \nu') = (x^c)'$. При дележе $k(N, \nu') = (5, \frac{5}{2}, \frac{5}{2})$ первый игрок получает половину $\nu'(N)$, а другая половина эгалитарно распределяется среди остальных игроков. Нетрудно проверить, что $k(N, \nu')$ доминирует по Лоренцу $sh(N, \nu')$, $(x^c)'$, а следовательно $\eta(N, \nu')$ и $\tau(N, \nu')$. •

Пример 2. Игру (N, ν) ([3], стр. 691), где

$$(11) \quad \begin{aligned} N &= \{1, 2, 3\}, \nu(i) = 0, i \in N, \nu(2, 3) = 0, \\ \nu(1, 2) &= \nu(1, 3) = \nu(N) = 1, \end{aligned}$$

можно интерпретировать как игру «Перчатки» (или «Ботинки»), в которой первый игрок имеет левую перчатку (левый ботинок), а остальные игроки имеют по одной правой перчатке (правому ботинку). Рыночная цена комплекта – 1 д.е. $C(N, \nu) = \{x^c\}$, $x^c = \eta(N, \nu) = \tau(N, \nu) = (1, 0, 0)$, $sh(N, \nu) = (\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6})$, $k(N, \nu) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$. Игра (11) является (0-1)-редуцированной формой игры (10), следовательно, эти игры стратегически эквивалентны и все предыдущие рассуждения справедливы также для (11). •

Пример 3. («Взвешенная мажоритарная игра»). Три акционера владеют 50, 30 и 20 акциями. Любое решение может быть утверждено акционерами, имеющими простое большинство акций. Эта взвешенная мажоритарная игра (51; 50, 30, 20) совпадает с игрой «Парламент» (три партии, число голосов: 50, 30, 20) и игрой (11). •

Обобщением (11) является игра (N, b^1) , где $n \geq 3$,

$$(12) \quad b^1(S) = \begin{cases} 0, & \text{если } s = 1 \text{ или } 1 \notin S, \\ 1, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Предположение 1. (N, b^1) является игрой большого босса с игроком 1 в качестве босса и соответствует крайней точке многогранника B_n^1 .

Доказательство. (N, b^1) соответствует крайней точке гиперкуба $K = \{\nu \in R^d \mid 0 \leq \nu(S) \leq 1, \emptyset \neq S \subseteq N\}$ и $B_n^1 \subset K$, поэтому достаточно доказать, что $b^1 \in B_n^1$. Условие (4) выполняется для b^1 по определению. Пусть $S_1 \subset S_2 \subset N$, $s_1 \geq 2$. Если $1 \in S_2$, то $b^1(S_2) = 1$ и $b^1(S_1) \in \{0, 1\}$, следовательно справедливо (3). Если $1 \notin S_2$, то $1 \notin S_1$ и $b^1(S_1) = b^1(S_2) = 0$, т.е. условие (3) также выполняется. Подставляя b^1 в (5) и учитывая, что $b^1(N \setminus S) = b^1(N \setminus i) = 1$ для $i \in S$ и коалиций S , удовлетворяющих условиям $1 \notin S$, $2 \leq s < n$, получаем верное неравенство $s \geq 1$.

Предположение 2. Для игры (N, b^1) справедливо:

(a) $C(N, b^1) = D(N, b^1) = \mathfrak{R}_1^{(i)}(N, b^1) = \{x^c\}$, $x^c = \eta(N, b^1) = \tau(N, b^1) = (1, 0, \dots, 0)$;

(b) $sh(N, b^1) = (\frac{n-1}{n}, \frac{1}{n(n-1)}, \dots, \frac{1}{n(n-1)})$, $k(N, b^1) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2(n-1)}, \dots, \frac{1}{2(n-1)})$;

(c) $k(N, b^1)$ доминирует по Лоренцу x^c , $sh(N, b^1)$, $\eta(N, b^1)$ и $\tau(N, b^1)$.

Доказательство. (a) $C(N, b^1) = \{x \in R^N \mid x(N) = \nu(N); 0 \leq x_i \leq M_i^N(N, b^1), i \in N \setminus \{1\}\}$ [7]. Следовательно $C(N, b^1) = \{x^c\}$, $x^c = \eta(N, b^1) = (1, 0, \dots, 0)$. В игре (N, b^1) переговорное множество совпадает с C -ядром, N -ядро совпадает с τ -значением и центром C -ядра [7]. Кроме того, выполняется достаточное условие совпадения C -ядра и D -ядра.

(b) Так как $e_i(N, b^1) = \frac{1}{n}$, $i \in N$, и $M_1^S(N, b^1) = 0$ для $S = \{1\}$, $M_1^S(N, b^1) = 1$ в остальных случаях, то векторы $sh(N, b^1)$ и $k(N, b^1)$ легко находятся из (6), (9)

(с) Доказываемое утверждение вытекает из неравенств $\frac{1}{2(n-1)} > \frac{1}{n(n-1)} > 0$ и предположения о количестве игроков ($n \geq 3$) в игре (N, b^1) .

3. Коалиционное консенсус-значение

Пусть $C = \{C_1, \dots, C_m\}$ – коалиционная структура (разбиение N), $S \subseteq C_p \in C$, $C_p^S = \{C_1, \dots, C_{p-1}, S, C_{p+1}, \dots, C_m\}$ – разбиение $N \setminus (C_p \setminus S)$, $M = \{l \mid C_l \in C\}$ – множество индексов компонент структуры C , $(\nu/C)(Q) = \nu(\bigcup_{l \in Q} C_l)$ для всех $Q \subseteq M$, $(\nu/C_p^S)(Q) = \nu(S \cup \bigcup_{l \in Q \setminus p} C_l)$ для $Q \ni p$ и $(\nu/C_p^S)(Q) = (\nu/C)(Q)$ для остальных $Q \subseteq M$. Игра с коалиционной структурой (N, ν, C) распадается на игру $(M, \nu/C)$ между коалициями C_p , $p \in M$, и редуцированные игры (C_p, ν_p^ψ) внутри коалиций. Предполагается, что в качестве концепции решения внешней игры выбрано $\psi \in \Phi(M, \nu/C)$, а во внутренних играх – $\varphi \in \Phi(C_p, \nu_p^\psi)$. Вес коалиции S в (C_p, ν_p^ψ) равен ее выигрышу во вспомогательной игре $(M, \nu/C_p^S)$, т.е. $\nu_p^\psi(S) = \psi_p(M, \nu/C_p^S)$. Партнеры S по структуре C в игре $(M, \nu/C_p^S)$ не участвуют. Коалиционное значение f ставит в соответствие каждой игре (N, ν, C) вектор $f(N, \nu, C) \in R^N$, т.е. $f_i(N, \nu, C) = \varphi_i(C_p, \nu_p^\psi)$, $i \in N$.

Коалиционным консенсус-значением ks назовем коалиционное значение, при вычислении которого в качестве функций φ и ψ используется консенсус значение, т.е.

$$(13) \quad ks_i(N, \nu, C) = k_i(C_p, \nu_p^k), \quad i \in C_p \in C,$$

где

$$(14) \quad \nu_p^k(S) = k_p(M, \nu/C_p^S), \quad S \subseteq C_p.$$

Лемма 1. *Нейтральный в (N, ν) игрок $i \in C_p \in C$ нейтрален в редуцированной игре (C_p, ν_p^k) тогда и только тогда, когда $\Delta_p(M, \nu/C) = 0$, где*

$$(15) \quad \Delta_p(M, \nu/C) = \nu(N \setminus C_p) - \sum_{l \in M \setminus p} \nu(C_l).$$

Доказательство. Пусть $i \in C_p \cap Ne(N, \nu) \neq \emptyset$. Нужно показать, что условие $\Delta_p(M, \nu/C) = 0$ необходимо и достаточно для выполнения соотношений $\nu_p^k(i \cup S) - \nu_p^k(S) = \nu_p^k(i)$, $S \subseteq C_p \setminus i$. Из (14) и (9) имеем $\nu_p^k(S) = \frac{sh_p(M, \nu/C_p^S) + e_p(M, \nu/C_p^S)}{2}$. Используя (6), (7), (1) и учитывая нейтральность игрока i в (N, ν) , получаем $\nu_p^k(i \cup S) - \nu_p^k(S) = \nu(i)$ для всех $S \subseteq C_p \setminus i$. Рассмотрим игру $(M, \nu/C_p^{\{i\}})$ между компонентами структуры $C_p^{\{i\}}$. Пусть $Q \subseteq M \setminus p$, тогда $(\nu/C_p^{\{i\}})(p \cup Q) - (\nu/C_p^{\{i\}})(Q) = \nu(i \cup \bigcup_{l \in Q} C_l) - \nu(\bigcup_{l \in Q} C_l) = \nu(i) = (\nu/C_p^{\{i\}})(p)$, т.е. одноэлементная коалиция $\{i\}$ есть нейтральный игрок в $(M, \nu/C_p^{\{i\}})$, консенсус-выигрыш которого определяется аксиомой 4: $k_p(M, \nu/C_p^{\{i\}}) = \nu_p^k(i) = \nu(i) + \frac{\nu(i \cup \bigcup_{l \in M \setminus p} C_l) - \nu(i) - \sum_{l \in M \setminus p} \nu(C_l)}{2m} = \nu(i) + \frac{\nu(N \setminus C_p) - \sum_{l \in M \setminus p} \nu(C_l)}{2m} = \nu(i) + \frac{\Delta_p(M, \nu/C)}{2m}$. Равенство $\nu_p^k(i) = \nu(i)$ и доказываемое утверждение, выполняются тогда и только тогда, когда $\Delta_p(M, \nu/C) = 0$.

Сформулируем необходимые аксиомы для коалиционного значения f .

Аксиома 5. (эффективность). $\sum_{i \in N} f_i(N, \nu, C) = \nu(N)$.

Аксиома 6. (аддитивность). $f(N, \nu + \omega, C) = f(N, \nu, C) + f(N, \omega, C)$.

Аксиома 7. (внутренняя симметричность). Если игроки $i, j \in C_p \in C$ симметричны в (N, ν) , то $f_i(N, \nu, C) = f_j(N, \nu, C)$.

Аксиома 8. (внешняя симметричность). Если игроки $p, r \in M$ симметричны в $(M, \nu/C)$, то $\sum_{i \in C_p} f_i(N, \nu, C) = \sum_{i \in C_r} f_i(N, \nu, C)$.

Аксиома 9. (модифицированное свойство нейтрального игрока). Пусть $p \in M$, $i \in C_p \cap Ne(N, \nu) \neq \emptyset$. Если $C_p \subseteq Ne(N, \nu)$

то $f_i(N, \nu, C) = \nu(i) + \frac{\Delta_p(M, \nu/C)}{2c_p m}$, где $\Delta_p(M, \nu/C)$ определено (15). Если $C_p \not\subseteq Ne(N, \nu)$ и $\Delta_p(M, \nu/C) = 0$, то

$$(16) \quad f_i(N, \nu, C) = \nu(i) + \frac{k_p(M, \nu/C) - \sum_{j \in C_p} k_p(M, \nu/C_p^{\{j\}})}{2c_p}.$$

Заметим, что, формулы для ν/C и $\nu/C_p^{\{j\}}$, а также (9), (6), (7) и (15) выражают приведенные в аксиоме 9 выигрыши нейтральных в (N, ν) игроков через функцию ν . По лемме 1 нейтральный в (N, ν) игрок $i \in C_p \in C$ может уже не быть нейтральным в редуцированной игре внутри коалиции C_p . Аксиома 9 определяет выигрыши тех игроков из $Ne(N, \nu)$, которые принадлежат коалициям C_p , удовлетворяющим некоторым условиям. Если C_p состоит только из нейтральных в (N, ν) игроков, то $i \in C_p$ получает $\nu(i)$ и «добавку» $\frac{\Delta_p(M, \nu/C)}{2c_p m}$, одинаковую для всех игроков из C_p . Если не все игроки из C_p нейтральны в (N, ν) и $\Delta_p(M, \nu/C) = 0$, то $i \in C_p \cap Ne(N, \nu)$ получает $\nu(i)$ плюс $\frac{1}{2c_p}$ -ую часть разности между консенсус-выигрышем $k_p(M, \nu/C)$ коалиции C_p в игре между компонентами структуры C и суммой консенсус-выигрышей $k_p(M, \nu/C_p^{\{j\}})$ игроков из C_p , которые они получают, играя самостоятельно против всех коалиций $C_l \in C$, $l \in M \setminus p$. И в этом случае «добавка» к $\nu(i)$ одинакова для всех $i \in C_p \cap Ne(N, \nu)$. Формула (16) аксиомы 9 получается из формулы выигрыша нейтрального игрока в аксиоме 4 заменой функции ν на ν_p^k . Нетрудно проверить, что при одновременном выполнении условий $C_p \subseteq Ne(N, \nu)$ и $\Delta_p(M, \nu/C) = 0$, обе формулы из аксиомы 9 принимают вид $f_i(N, \nu, C) = \nu(i)$, $i \in C_p$.

Лемма 2. Коалиционное значение ks удовлетворяет аксиомам 5-9.

Доказательство. Из определения ks , свойств консенсус-значения k и [3] следует, что ks удовлетворяет аксиомам 5-8. Рассмотрим последнюю аксиому. Пусть $i \in C_p \in C$ – нейтральный игрок в (N, ν) .

1. Если $C_p \subseteq Ne(N, \nu)$, т. е. C_p состоит только из нейтральных в (N, ν) игроков, то $\nu(C_p) = \sum_{j \in C_p} \nu(j)$ и $\nu(R \cup S) - \nu(R) =$

$\nu(S)$, $S \subseteq C_p$, $R \subseteq N \setminus C_p$. Таким образом, любая коалиция $\emptyset \neq S \subseteq C_p$ является нейтральным игроком во внешней игре между компонентами структуры C_p^S . При доказательстве леммы 1 было показано, что $\nu_p^k(i) = \nu(i) + \frac{\Delta_p(M, \nu/C)}{2m}$. Аналогично доказываются соотношения $\nu_p^k(S) = \nu(S) + \frac{\Delta_p(M, \nu/C)}{2m}$, $\emptyset \neq S \subseteq C_p$. Пусть $u, \omega \in G^{C_p}$ и $u(S) = \nu(S)$, $\omega(S) = \frac{\Delta_p(M, \nu/C)}{2m}$. Тогда $\nu_p^k = u + \omega$. Все игроки в (C_p, ω) симметричны, поэтому $k_i(C_p, \omega) = \frac{\Delta_p(M, \nu/C)}{2c_p m}$. В (C_p, u) все игроки нейтральны и по

аксиоме 4: $k_i(C_p, u) = \nu(i) + \frac{\nu(C_p) - \sum_{j \in C_p} \nu(j)}{2c_p} = \nu(i)$. Из (13) и аксиомы 3 имеем $ks_i(N, \nu, C) = k_i(C_p, \nu_p^k) = \nu(i) + \frac{\Delta_p(M, \nu/C)}{2c_p m}$, т. е. ks удовлетворяет аксиоме 9.

2. Если $C_p \not\subseteq Ne(N, \nu)$ и $\Delta_p(M, \nu/C) = 0$, то игрок i нейтрален в (C_p, ν_p^k) и $\nu_p^k(i) = \nu(i)$. Из (13) и аксиомы 4 по-

лучаем $ks_i(N, \nu, C) = \nu_p^k(i) + \frac{\nu_p^k(C_p) - \sum_{j \in C_p} \nu_p^k(j)}{2c_p}$. Согласно (14): $\nu_p^k(C_p) = k_p(M, \nu/C)$, $\nu_p^k(j) = k_p(M, \nu/C^{\{j\}})$, $j \in C_p$. Следовательно для ks выполняется (16).

При обоснования коалиционного консенсус-значения будем использовать игру (N, u_T) единогласия коалиции T , где $\emptyset \neq T \subseteq N$, $u_T(S) = 1$ для $S \supseteq T$, $u_T(S) = 0$ в остальных случаях. Игроки из $Ne(N, u_T) = N \setminus T$ являются нулевыми в (N, u_T) , т. к. для них $\nu(i) = 0$. Множество T состоит из вето-игроков. Каждая пара нулевых игроков (или пара вето-игроков) симметрична.

Теорема 1. Коалиционное консенсус-значение ks является единственным значением для игр (N, ν, C) , удовлетворяющим аксиомам 5-9.

Доказательство. Пусть f – коалиционное значение, удовлетворяющее аксиомам 5-9. Система функций $\{u_T\}_{T \in 2^N \setminus \emptyset}$ является базисом в G^N , поэтому, учитывая лемму 2 и аксиому 6, достаточно показать, что f однозначно определяется для игры $(N, \alpha u_T, C)$, где $\alpha \in R$, $\emptyset \neq T \subseteq N$. Пусть $D = \{l \in$

$M \mid C_l \cap T \neq \emptyset$ – множество индексов компонент структуры C , содержащих по крайней мере одного игрока из T . Так как $(\alpha u_T/C)(Q) = (\alpha u_T)(\bigcup_{l \in Q} C_l) = \alpha$ для $Q \supseteq D$ и $(\alpha u_T/C)(Q) = 0$

в остальных случаях, то игра $(M, \alpha u_T/C)$ между компонентами структуры C совпадает с $(M, \alpha u_D)$, где (M, u_D) – игра единогласия коалиции D . Каждой коалиции $C_p, p \notin D$, состоящей из нейтральных в $(N, \alpha u_T)$ игроков, соответствует нейтральный и одновременно нулевой игрок в $(M, \alpha u_D)$. Коалиции $C_p, p \in D$, соответствует вето-игрок в $(M, \alpha u_D)$. Из (9) получаем

$$(17) \quad k_p(M, \alpha u_T/C) = k_p(M, \alpha u_D) = \frac{e_p(M, \alpha u_D) + sh_p(M, \alpha u_D)}{2}, \quad p \in M.$$

Известно, что

$$sh_p(M, \alpha u_D) = \begin{cases} 0, & p \notin D, \\ \frac{\alpha}{d}, & p \in D. \end{cases}$$

Так как $e_p(M, \alpha u_D) = (\alpha u_D)(p) + \frac{(\alpha u_D)(M) - \sum_{j \in M} (\alpha u_D)(j)}{m}$, $(\alpha u_D)(M) = \alpha$, $(\alpha u_D)(j) = \alpha$, если $j \in D$ и $d = 1$, $(\alpha u_D)(j) = 0$ в остальных случаях, то

$$(18) \quad e_p(M, \alpha u_D) = \begin{cases} 0, & p \notin D, d = 1, \\ \alpha, & p \in D, d = 1, \\ \frac{\alpha}{m}, & d \geq 2, \end{cases}$$

$$k_p(M, \alpha u_D) = \begin{cases} 0, & p \notin D, d = 1, \\ \alpha, & p \in D, d = 1, \\ \frac{\alpha}{2m}, & p \notin D, d \geq 2, \\ \frac{\alpha(m+d)}{2md}, & p \in D, d \geq 2. \end{cases}$$

Игра $(M, \alpha u_T/C_p^{\{j\}})$ между $j \in C_p \in C$ и коалициями $C_l, l \in M \setminus p$, получается из $(M, \alpha u_T/C)$ удалением из компоненты C_p всех игроков кроме j . Если удаляются игроки, не принадлежащие T , то характеристическая функция не меняется, т. е.

$(M, \alpha_{u_T}/C_p^{\{j\}})$ совпадает с $(M, \alpha_{u_T}/C)$ и с (M, α_{u_D}) . Другими словами, $(M, \alpha_{u_T}/C_p^{\{j\}})$ совпадает с (M, α_{u_D}) , если $p \notin D$ или j является единственным вето-игроком компоненты C_p . Если из C_p удаляется хотя бы один игрок, принадлежащий T , то игра $(M, \alpha_{u_T}/C_p^{\{j\}})$ становится нулевой. Следовательно

$$(19) \quad k_p(M, \alpha_{u_T}/C_p^{\{j\}}) = \begin{cases} k_p(M, \alpha_{u_D}), & \text{если } p \notin D \\ & \text{или } C_p \cap T = \{j\}, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

1. Пусть $p \notin D$. Тогда $C_p \subseteq Ne(N, \alpha_{u_T})$, т.к. компонента C_p не содержит вето-игроков, и $(\alpha_{u_T})(i) = 0$ для всех $i \in C_p$. По аксиоме 9: $f_i(N, \alpha_{u_T}, C) = \frac{\Delta_p(M, \alpha_{u_T}/C)}{2_{C_p m}}$, $i \in C_p$, где $\Delta_p(M, \alpha_{u_T}/C) = \alpha$, если $d \geq 2$, и $\Delta_p(M, \alpha_{u_T}/C) = 0$, если $d = 1$. Таким образом, аксиома 9 однозначно определяет выигрыши всех игроков каждой коалиции C_p , $p \notin D$.

2. Пусть $p \in D$. Тогда $C_p \not\subseteq Ne(N, \alpha_{u_T})$. В данном случае $\Delta_p(M, \alpha_{u_T}/C) = (\alpha_{u_T})(N \setminus C_p) - \sum_{l \in M \setminus p} (\alpha_{u_T})(C_l) = 0$. Обозначив $\xi = \frac{\Delta_p(M, \alpha_{u_T}/C)}{2_m}$, имеем $\sum_{p \notin D} \sum_{i \in C_p} f_i(N, \alpha_{u_T}, C) = (n-d)\xi$.

Каждая пара игроков $r, l \in D$ симметрична в $(M, \alpha_{u_T}/C)$ и $(\alpha_{u_T})(N) = \alpha$, следовательно по аксиомам 5, 8

$$(20) \quad \sum_{i \in C_p} f_i(N, \alpha_{u_T}, C) = \frac{\alpha - (n-d)\xi}{d}, \quad p \in D.$$

Аксиома 9 и формулы (16)-(19) однозначно определяют $f_i(N, \alpha_{u_T}, C)$ для нейтральных игроков $i \in C_p \setminus T = C_p \cap Ne(N, \alpha_{u_T})$ коалиций C_p , $p \in D$. Используя эти значения, аксиому 7 и формулу (20), получаем единственные значения $f_i(N, \alpha_{u_T}, C)$ для $i \in T$.

Таким образом, аксиомы 5, 7-9 однозначно определяют значения $f_i(N, \alpha_{u_T}, C)$ для всех $i \in N$.

Замечание 1. Для коалиционного консенсус-значения выполняется

$$\sum_{i \in C_p} k.s_i(N, \nu, C) = k.s_p(M, \nu/C, \{M\}) = k_p(M, \nu/C).$$

Левая часть этого соотношения называется свойством внешней игры, а правая – свойством согласованности. Оба свойства используются для аксиоматической характеристики коалиционных значений.

Замечание 2. Коалиционное консенсус-значение является одним из немногих коалиционных значений, не удовлетворяющих свойству нулевого игрока (игрок $i \in N$, для которого $M_i^S(N, \nu) = 0$, $S \subseteq N$, должен получить нулевой выигрыш). Однако в отличие, например, от двухэтапного Шепли-значения [4], выигрыш каждой коалиции $C_p \in C$ распределяется с учетом «внешних» возможностей игроков.

Литература

1. AUMANN R.J., MASCHLER M. *The bargaining set for cooperative games* // Advances in Game Theory. Princeton University Press. Princeton. – 1964. – P. 443–447.
2. GOMEZ-RUA M., VIDAL-PUGA J. *The axiomatic approach to three values in games with coalition structure*. MPRA Paper 8904. – 2008. – P. 1–30.
3. JU Y., BORM P., RUYS P. *The consensus value: a new solution concept for cooperative games* // Social Choice and Welfare. – 2007. – Vol. 28, № 4. – P. 685–703.
4. KAMIJO Y. *A Two-step Shapley value in a cooperative game with a coalition structure* // 21 COE-GLOPE Working Paper Series. – 2007. – Vol. 28. – P. 1–9.
5. OWEN G. *Values of games with a priori unions*. Essays in Mathematical Economics and Game Theory. Springer-Verlag, Berlin. – 1977. – P. 76–88.
6. SCHMEIDLER D. *The nucleolus of a characteristic function game* // SIAM Journal of Applied Mathematics. – 1969. – Vol. 17. – P. 1163–1170.

7. TIJS S. *Big boss games, clan games and information market games* // Game Theory and Applications. Academic Press, San Diego. – 1990. – P. 410–412.
8. WAEGENAERE A. DE, SUIJS J, TIJS S. *Stable profit sharing in cooperative investment* // OR Spectrum. – 2005. – Vol. 27, № 1. – P. 85–93.
9. WINTER E. *A value for cooperative games with levels structure of cooperation* // Int. Journal of Game Theory. – 1989. – Vol. 18, № 2. – P. 227–240.

A CONSENSUS VALUE FOR GAMES WITH COALITION STRUCTURE

Alexandra Zinchenko, Southern Federal University, Cand.Sc.,
dosent (zinch46@mail.ru).

George Mironenko, Southern Federal University, magistr
(georim89@mail.ru).

Polina Provotorova, Southern Federal University, magistr
(prov-pa@inbox.ru).

Abstract: The class of TU-games for which almost all solution concepts, except the consensus value, yield paradoxical results is selected. It is proved that it is big boss games. Generalisation of the consensus value for games with coalition structure is introduced.

Keywords: coalition structure, coalition value, consensus value, big boss game, axiomatization.

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии А. А. Печниковым*

УДК 519.837.4 + 517.977.8
ББК 22.18

СТРАТЕГИИ ПАРАЛЛЕЛЬНОГО СБЛИЖЕНИЯ В ИГРЕ ПРОСТОГО ПРЕСЛЕДОВАНИЯ НА СФЕРЕ. ГЕОДЕЗИЧЕСКОЕ СБЛИЖЕНИЕ ¹

Ковшов А.М. ²

(Санкт-Петербургский государственный университет,
Санкт-Петербург)

Рассматривается дифференциальная игра простого преследования на сфере двух лиц с нулевой суммой. Вводится стратегия геодезического сближения, обладающая некоторыми свойствами стратегии параллельного сближения на плоскости, доказывается её существование и единственность в общем случае, рассматриваются все особые случаи. Доказывается наискорейшее свойство этой стратегии.

Ключевые слова: дифференциальные игры, простое движение, преследование на сфере.

Введение

Дифференциальные игры преследования с простым движением достаточно хорошо исследованы для плоскости и пространств больших размерностей с нулевой гауссовой кривизной. В данной работе делается попытка исследовать некоторые свойства подобных игр на сфере, обладающей иными геометрическими и топологическими свойствами.

Среди множества стратегий преследования значимое место занимает стратегия параллельного преследования (*П-стратегия*),

¹ Текст приводится в соответствии с изданием «Математическая теория игр и ее приложения. – 2009. – Т. 1. № 4. – С. 41–62».

² Ковшов Александр Михайлович, кандидат физико-математических наук (petinv@ya.ru).

являющаяся наилучшей стратегией для широкого класса дифференциальных игр преследования. В работах Л. А. Петросяна впервые показана оптимальность Π -стратегии для игр простого преследования с линией жизни [2], в игре с двумя преследователями и одним убегающим [1] и в игре простого преследования в плоскости Петросян (1969).

Однако, как правило, исследования ограничивались играми на линейных многообразиях, либо на многообразиях, имеющих нулевую гауссову кривизну. Было бы интересно попробовать распространить результаты, полученные для игр на линейных многообразиях, на многообразии, имеющее ненулевую кривизну, в частности, на сферу. В данной работе описывается попытка построить стратегию сближения на сфере, обладающей некоторыми свойствами Π -стратегии на плоскости. Так Π -стратегия, при движении убегающего по прямолинейной траектории, предписывает преследователю двигаться тоже по некоторой прямой линии. На сфере отрезки прямых заменяются геодезическими отрезками, которыми являются дуги больших окружностей. Будет построена геодезическая стратегия сближения на сфере (Π_1 -стратегия), доказаны её существование и единственность для общего случая, а также рассмотрены особые случаи и доказано наискорейшее свойство.

1. Стратегия геодезического сближения **(Π_1 -стратегия)**

1.1. ИГРА ПРОСТОГО ПРЕСЛЕДОВАНИЯ НА СФЕРЕ

Пусть на сфере единичного радиуса находятся две подвижные точки E и P . Точка E — убегающий, точка P — догоняющий. Будем называть P и E игроками. Оба игрока могут двигаться по сфере в любом направлении и мгновенно менять направление движения, при этом убегающий двигается со скоростью σ , а догоняющий — со скоростью ρ , причем $\sigma < \rho$. Будем рассматривать игру, в которой целью догоняющего является поимка убегающего, а целью убегающего является избежание его поимки догоняющим. При этом будем считать, что догоняющий поймал

убегающего в момент времени t , если в этот момент времени координаты догоняющего совпали с координатами убегающего.

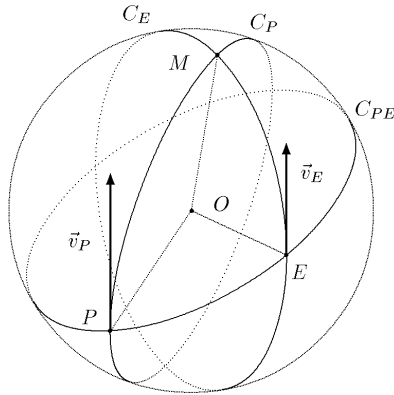


Рис. 1. Положение игроков на сфере

Во время игры и догоняющий, и убегающий знают координаты друг друга в каждый текущий момент времени, то есть, можно сказать, что игроки видят друг друга, кроме того, догоняющему всегда известна скорость его противника в текущий момент времени. Другими словами — это игра с дискриминацией по отношению к убегающему. В дальнейших рассуждениях мы не будем упоминать о том, что игра происходит на сфере именно единичного радиуса, однако это всегда будет подразумеваться.

Обозначим вектор скорости убегающего за \vec{v}_E , а догоняющего — за \vec{v}_P . Очевидно, что эти векторы являются касательными к сфере в точках E и P соответственно. Поставим в соответствие каждому вектору скорости по большой окружности C_E и C_P (радиус большой окружности совпадает с радиусом сферы), таким образом, чтобы большие окружности проходили соответственно через точки E и P , а векторы \vec{v}_E и \vec{v}_P были бы, соответственно, касательными векторами этих окружностей в этих точках. Еще одну большую окружность C_{PE} проведем через две точки P и E . Эта большая окружность является пересечением сферы с плоскостью, проведенной через три точки P , E и центр сферы O .

Эту плоскость можно однозначно построить, только если точки P , E и O не лежат на одной прямой, то есть, в тех случаях, когда точки P и E не совпадают или не являются диаметрально противоположными точками на сфере. Если хотя бы одна из больших окружностей C_E и C_P не совпадает с большой окружностью C_{PE} , то C_E и C_P пересекаются ровно в двух точках на сфере (рис. 1).

Как известно, большие окружности на сфере являются геодезическими линиями. Будем называть *геодезической дугой* любую дугу большой окружности, длина которой не превосходит π . Понятно, что такая дуга является кратчайшей линией на сфере, соединяющей свои крайние точки, и длина этой дуги равна *геодезическому расстоянию* между этими точками.

1.2. СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ ЦЕНТРА ПРЭСЛЕДОВАНИЯ

Пусть убегающий и догоняющий движутся соответственно вдоль C_E и C_P , причем C_E не совпадает с C_{PE} . И пусть в некоторый момент времени t они оба окажутся в одной из двух точек пересечения больших окружностей C_E и C_P . Обозначим эту точку за M . Докажем следующее предложение.

Предложение 1. (Существование). *При любом расположении игроков на сфере в разных точках, не являющихся диаметрально противоположными, и при любом направлении движения убегающего вдоль произвольной большой окружности C_E , не совпадающей с большой окружностью C_{PE} , существует такая большая окружность C_P , что двигаясь вдоль нее в определенном направлении, догоняющий окажется одновременно с убегающим в точке M , являющейся одной из двух точек пересечения больших окружностей C_E и C_P , причем дуги PE , EM и PM образуют сферический треугольник, то есть длины этих дуг и углы между ними не превосходят π .*

Доказательство. Для доказательства рассмотрим некоторый сферический треугольник, изображенный на рис. 2, с боковыми сторонами EM и PM , длины которых соотносятся как $\sigma : \rho$. Обозначим длину основания PE за λ , а длины боковых сторон

EM и PM выразим в виде $\sigma\tau$ и $\rho\tau$ соответственно, где τ — время движения игроков до точки встречи. Углы при вершинах P , E и M обозначим соответственно за ϕ , ψ и μ . Мы покажем, что сферический треугольник существует для любых λ и ψ , принадлежащих открытому отрезку вещественной оси $]0, \pi[$, то есть, что существует τ , такое что $\rho\tau \leq \pi$.

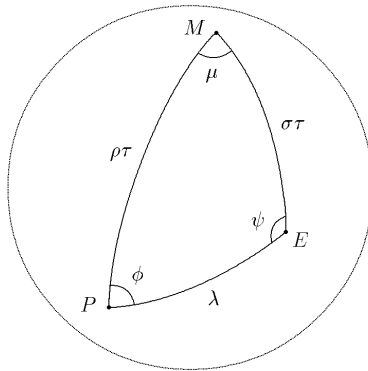


Рис. 2. Сферический треугольник

Воспользуемся известной формулой косинусов для сторон сферического треугольника:

$$(1) \quad \cos \rho\tau = \cos \lambda \cos \sigma\tau + \sin \lambda \sin \sigma\tau \cos \psi,$$

и перепишем ее в виде:

$$(2) \quad \cos \psi = \frac{\cos \rho\tau - \cos \lambda \cos \sigma\tau}{\sin \lambda \sin \sigma\tau}.$$

Определим, для каких ψ и λ из $]0, \pi[$ уравнение (1) разрешимо относительно τ . Рассмотрим знаменатель правой части уравнения (2). Поскольку $\sigma < \rho$ и $\rho\tau \leq \pi$, как сторона сферического треугольника, то $\sigma\tau < \pi$. С другой стороны, из (1) видно, что τ , а вместе с ним и $\sigma\tau$ могут равняться нулю лишь при $\lambda = 0$. Следовательно, знаменатель правой части уравнения (2) в нуль не обращается.

Поскольку $|\cos \psi| < 1$, из (2) получим неравенства:

$$(3) \quad 1 > \frac{\cos \rho\tau - \cos \lambda \cos \sigma\tau}{\sin \lambda \sin \sigma\tau},$$

$$(4) \quad -1 < \frac{\cos \rho\tau - \cos \lambda \cos \sigma\tau}{\sin \lambda \sin \sigma\tau}.$$

Из (3), умножая обе части на знаменатель и перенося члены, не содержащие $\rho\tau$, в правую часть, получим:

$$\cos \rho\tau < \cos \lambda \cos \sigma\tau + \sin \lambda \sin \sigma\tau,$$

а после свертки правой части в косинус разности:

$$\cos \rho\tau < \cos(\lambda - \sigma\tau),$$

откуда в силу $\rho\tau \leq \pi$ и $\lambda - \sigma\tau < \pi$ следует $\rho\tau > \lambda - \sigma\tau$, то есть

$$(5) \quad \tau > \frac{\lambda}{\rho + \sigma}.$$

Точно так же из (4) будем иметь:

$$\cos \rho\tau > \cos(\lambda + \sigma\tau).$$

Это неравенство имеет два решения: одно — при $\lambda + \sigma\tau \leq \pi$, другое — при $\lambda + \sigma\tau \geq \pi$.

Для $\lambda + \sigma\tau \leq \pi$, то есть $\tau \leq (\pi - \lambda)/\sigma$, получим $\rho\tau < \lambda + \sigma\tau$, откуда

$$(6) \quad \tau < \frac{\lambda}{\rho - \sigma}.$$

Очевидно, что такая запись решения имеет смысл при таких λ , что выполняется неравенство $\lambda/(\rho - \sigma) \leq (\pi - \lambda)/\sigma$, то есть $\lambda \leq \pi(\rho - \sigma)/\rho$. Если же $\lambda > \pi(\rho - \sigma)/\rho$, то решением будет весь рассматриваемый промежуток и оно запишется в виде:

$$(7) \quad \tau \leq \frac{\pi - \lambda}{\sigma}.$$

Для $\lambda + \sigma\tau \geq \pi$, то есть $\tau \geq (\pi - \lambda)/\sigma$, получим $2\pi - \rho\tau > \lambda + \sigma\tau$, откуда

$$(8) \quad \frac{\pi - \lambda}{\sigma} \leq \tau < \frac{2\pi - \lambda}{\rho + \sigma}.$$

Ясно, что это решение имеет место только при таких λ , которые удовлетворяют неравенству $(2\pi - \lambda)/(\rho + \sigma) > (\pi - \lambda)/\sigma$, то есть $\lambda > \pi(\rho - \sigma)/\rho$, ибо в противном случае это решение (8) не пересекается с рассматриваемым промежутком.

Объединяя решения (6)–(8) неравенства (4), и пересекая их с решением (5) неравенства (3), получим область допустимых значений для τ в уравнении (2):

$$(9) \quad \frac{\lambda}{\rho + \sigma} < \tau < \frac{\lambda}{\rho - \sigma}, \quad \text{при } 0 < \lambda \leq \frac{\rho - \sigma}{\rho} \pi,$$

$$(10) \quad \frac{\lambda}{\rho + \sigma} < \tau < \frac{2\pi - \lambda}{\rho + \sigma}, \quad \text{при } \frac{\rho - \sigma}{\rho} \pi < \lambda < \pi.$$

В (9) и (10) к своей нижней границе величина τ стремится при $\cos \psi \rightarrow 1$, а к своей верхней границе величина τ стремится при $\cos \psi \rightarrow -1$.

Заметим, что при $\lambda = (\rho - \sigma)\pi/\rho$ области допустимых значений τ , задаваемые неравенствами (9) и (10), совпадают, поскольку равны друг другу верхние границы τ . Действительно

$$\frac{\lambda}{\rho - \sigma} \Big|_{\lambda = \frac{\rho - \sigma}{\rho} \pi} = \frac{\pi}{\rho} = \frac{2\pi - \lambda}{\rho + \sigma} \Big|_{\lambda = \frac{\rho - \sigma}{\rho} \pi}.$$

Поэтому, если рассматривать верхнюю границу τ , как функцию от λ , то верхняя граница будет непрерывна по λ на промежутке $]0, \pi[$, что, несомненно, относится и к нижней границе.

Кроме того, очевидно, что на промежутке от 0 до $\pi(\rho - \sigma)/\rho$ верхняя граница τ возрастает, а от $\pi(\rho - \sigma)/\rho$ до π — убывает, откуда следует что при всех λ выполняется неравенство:

$$\tau < \frac{\pi}{\rho}, \quad \text{что эквивалентно } \rho\tau < \pi.$$

В неравенствах (9)–(10) нижняя граница области изменения τ получена из неравенства (3), а верхняя — из неравенства (4). Поскольку правая часть уравнения (2) непрерывна относительно τ , то при пробегании τ всех значений из открытого промежутка (9)–(10) правая часть уравнения (2) пробегает все значения из открытого промежутка $] - 1, 1[$. Находящаяся в левой части уравнения (2) функция косинуса монотонна на промежутке $]0, \pi[$, следовательно для любого $\psi \in]0, \pi[$ существует такое τ из (9) или (10), что правая часть уравнения (2) при этом значении τ равна $\cos \psi$.

При этом $0 < \sigma\tau < \rho\tau < \pi$, то есть геодезические дуги длинами λ , $\sigma\tau$ и $\rho\tau$ образуют сферический треугольник с углом ψ между первыми двумя сторонами. Другие два угла μ и ϕ при вершинах M и P соответственно выражаются по формуле косинусов через стороны следующим образом:

$$(11) \quad \cos \phi = \frac{\cos \sigma\tau - \cos \lambda \cos \rho\tau}{\sin \lambda \sin \rho\tau},$$

$$(12) \quad \cos \mu = \frac{\cos \lambda - \cos \rho\tau \cos \sigma\tau}{\sin \rho\tau \sin \sigma\tau}.$$

Знаменатели правых частей уравнений (11) и (12) в нуль не обращаются, поскольку $0 < \sigma\tau < \rho\tau < \pi$ и $0 < \lambda < \pi$, поэтому уравнения (11) и (12) справедливы при всех τ . А так как уравнения (11) и (12) задают не углы, а их косинусы, то нужно определить промежутки, из которых берутся углы, удовлетворяющие этим уравнениям. Будем считать, что углы ϕ и μ берутся из промежутка $[0, \pi]$. Очевидно, что угол ϕ является углом между плоскостью большой окружности C_{PE} и вектором скорости догоняющего \vec{v}_P так же, как угол ψ является углом между той же плоскостью и вектором скорости убегающего \vec{v}_E .

Мы рассматриваем углы ψ , ϕ и μ из промежутка $[0, \pi]$. Но убегающий может выбирать любое направление движения, а промежуток $[0, \pi]$ охватывает лишь половину возможных направлений. Дело в том, что сферический треугольник всегда целиком лежит только в одной полусфере, определяемой большой окружностью, которая содержит любую из сторон этого сферического треугольника. В частности, сферический треугольник PEM всегда целиком помещается в одной из полусфер, на которые делит сферу большая окружность C_{PE} . Поэтому мы можем считать, что положительные значения углов ψ и ϕ задают сферический треугольник в «правой» полусфере, а отрицательные — в «левой». При этом очевидно, что углы ψ и ϕ имеют всегда один и тот же знак. Следовательно, достаточно рассматривать только неотрицательные значения углов, считая при этом, что при отрицательных значениях углов получается такой же результат, как и при равных им по абсолютной величине положительных значени-

ях, с точностью до зеркального отражения от плоскости большой окружности C_{PE} .

Поскольку геодезическое расстояние между двумя точками на единичной сфере не превосходит π , причем равенство π достигается только при диаметрально противоположном расположении точек, то можно говорить, что каково бы ни было геодезическое расстояние $\lambda \in]0, \pi[$ между игроками и при любом выборе убегающим вектора скорости \vec{v}_E , не являющегося касательным вектором в точке E к большой окружности C_{PE} , догоняющий может выбрать такое направления вектора скорости \vec{v}_P , что соответствующие большие окружности C_E , C_P и C_{PE} составят сферический треугольник с отношением боковых сторон $\sigma : \rho$. Предложение доказано.

Предложение 2. (Единственность). *Уравнение (2) задает взаимнооднозначное соответствие между ψ из $]0, \pi[$ и τ из (9)–(10).*

Доказательство. В предыдущем предложении мы доказали, что каждому ψ соответствует свое τ . Докажем, что каждому ψ соответствует единственное τ .

Поскольку $\cos \psi$ непрерывная ограниченная монотонная на $]0, \pi[$ функция, и правая часть уравнения (2) ограничена и непрерывна по τ на ограниченном промежутке (9)–(10), то для доказательства достаточно показать монотонность правой части уравнения (2) на промежутке (9)–(10). Возьмем производную от правой части уравнения (2) по τ и, приравняв ее к нулю, попробуем найти корни.

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\cos \rho\tau - \cos \lambda \cos \sigma\tau}{\sin \lambda \sin \sigma\tau} \right) = \\ & = \frac{\sin \lambda \sin \sigma\tau (-\rho \sin \rho\tau + \sigma \cos \lambda \sin \sigma\tau)}{\sin^2 \lambda \sin^2 \sigma\tau} - \\ & - \frac{\sigma (\cos \rho\tau - \cos \lambda \cos \sigma\tau) \sin \lambda \cos \sigma\tau}{\sin^2 \lambda \sin^2 \sigma\tau} = 0, \\ & \quad \downarrow \\ & -\rho \sin \lambda \sin \sigma\tau \sin \rho\tau + \sigma \sin \lambda \sin^2 \sigma\tau \cos \lambda - \end{aligned}$$

$$-\sigma \cos \rho\tau \sin \lambda \cos \sigma\tau + \sigma \cos \lambda \cos^2 \sigma\tau \sin \lambda = 0,$$

⇓

$$\sigma \cos \lambda \sin \lambda - \sin \lambda (\sigma \cos \rho\tau \cos \sigma\tau + \rho \sin \rho\tau \sin \sigma\tau) = 0,$$

⇓

$$\sigma \cos \lambda - \sigma \cos \rho\tau \cos \sigma\tau - \rho \sin \rho\tau \sin \sigma\tau = 0,$$

⇓

$$\frac{\sigma}{\rho} \left(\frac{\cos \lambda - \cos \rho\tau \cos \sigma\tau}{\sin \rho\tau \sin \sigma\tau} \right) = 1,$$

откуда в силу (12) следует

$$\cos \mu = \frac{\rho}{\sigma}.$$

Последнее выражение содержит противоречие, ибо $\rho > \sigma > 0$ и значит, $\rho/\sigma > 1$, а косинус не может превосходить единицу.

Таким образом, производная корней не имеет, что доказывает монотонность правой части уравнения (2), а, следовательно, и все предложение.

Замечание 1. Доказаны существование и единственность \vec{v}_P , однозначно определяемого углом ϕ , зависящим от расстояния λ и угла ψ , а угол ψ задается вектором скорости убегающего \vec{v}_E , то есть можно ввести в рассмотрение функцию Π_1 : $\vec{v}_P = \Pi_1(\vec{v}_E, \lambda; \rho, \sigma)$.

Определение 1. Выбор догоняющим скорости \vec{v}_P по функции Π_1 мы будем называть параллельной геодезической стратегией преследования на сфере или просто — Π_1 -стратегией.

2. Наискорейшее свойство Π_1 -стратегии

Мы доказали, что для каждого выбранного направления движения убегающего, определяемого углом ψ , Π_1 -стратегия однозначно задает величину τ , являющуюся временем движения игроков от начального положения до точки встречи M , при условии,

что убегающий будет все время двигаться вдоль одной и той же большой окружности. Эта точка M будет являться *центром преследования* Π_1 -стратегии. Докажем одно важное свойство Π_1 -стратегии, заключающееся в том, что не существует стратегии для догоняющего, позволяющей настигнуть убегающего раньше, чем тот достигнет центра преследования, двигаясь по кратчайшему пути.

Предложение 3. (Наискорейшее свойство Π_1 -стратегии). *Если убегающий движется вдоль одной и той же большой окружности с постоянной скоростью σ , то догоняющий не сможет догнать его раньше момента времени $t = \tau$, определяемого Π_1 -стратегией.*

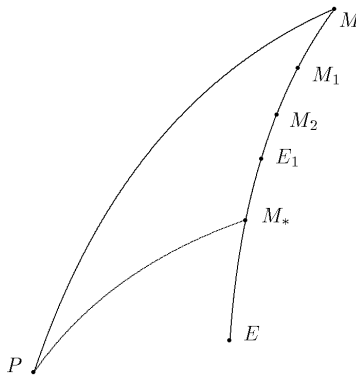


Рис. 3. К доказательству наискорейшего свойства

Доказательство. Предположим противное. Пусть существует некоторый другой путь, по которому догоняющий настигает убегающего в некоторой точке M_1 в момент времени τ_1 : $\tau_1 < \tau$ (рис. 3). Этот путь отличен от геодезической дуги в силу единственности, доказанной в предложении 2. Очевидно, что точка M_1 лежит внутри дуги EM . Соединим точки P и M_1 геодезической дугой. Поскольку геодезическая дуга короче любой другой линии, соединяющей те же точки, то, двигаясь по этой дуге, догоняющий окажется в точке M_1 в момент времени $\tau'_1 < \tau_1$. В

этот момент убегающий будет находиться в некоторой точке E_1 внутри геодезической дуги EM_1 . Если далее догоняющий движется вдоль дуги EM_1 в сторону точки E_1 , то он встретится с убегающим в некоторой точке M_2 , лежащей внутри дуги E_1M_1 , в момент времени τ_2 . Так как точка M_2 лежит внутри дуги EM_1 , то $\sigma\tau_2 < \sigma\tau_1$, откуда $\tau_2 < \tau_1$. Точно так же, как из τ_1 получили τ_2 , мы можем из τ_2 получить τ_3 и так далее. Получится убывающая ограниченная последовательность $\{\tau_n\}$, заданная на замкнутом отрезке $[0, \tau]$. Она имеет предел τ_* внутри этого отрезка. В момент времени τ_* убегающий окажется в такой точке M_* на геодезической дуге EM , что длина дуги EM_* равна $\sigma\tau_*$. Соответственно длина геодезической дуги PM_* равна $\rho\tau_*$. Следовательно, получили, что τ и τ_* удовлетворяют уравнению (2) при одном и том же ψ . Это противоречит предложению 2, что и доказывает наше предложение.

Следствие 1. *Если убегающий движется вдоль геодезической дуги EM_1 , а догоняющий вдоль геодезической дуги PM_1 и догоняющий попадает в точку M_1 раньше убегающего, то центр преследования M_* лежит внутри геодезической дуги EM_1 .*

3. Вырожденные случаи

Теперь рассмотрим вырожденные случаи, которые мы не рассматривали в разделе 1, и для которых Π_1 -стратегия еще не определена. Это те случаи, когда угол ψ принимает крайние значения, равные 0 и π , то есть когда убегающий выбирает направление движения вдоль большой окружности C_{PE} (рис. 4). С другой стороны, вырожденные случаи возникают при крайних значениях λ , которые тоже равны 0 и π , то есть когда игроки располагаются соответственно в одной и той же общей точке либо в диаметрально противоположных точках. Впрочем случай $\lambda = 0$ мы рассматривать не будем, ибо при нулевом расстоянии между игроками игра не может состояться.

Угол $\psi = 0$ соответствует движению убегающего навстречу догоняющему, а угол $\psi = \pi$ соответствует движению убегающе-

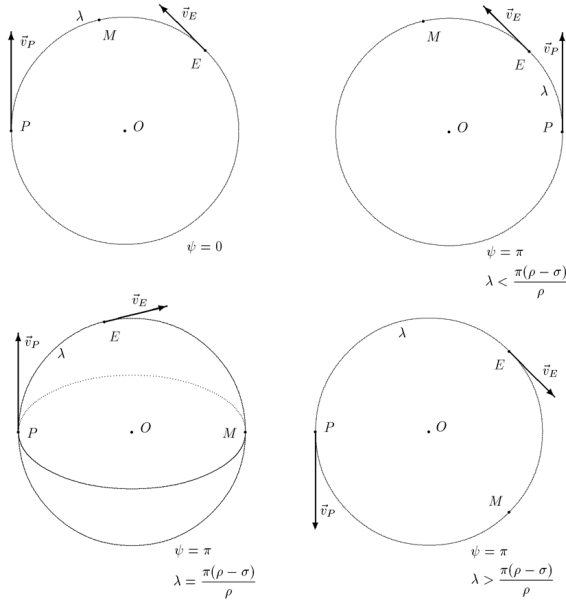


Рис. 4. Вырожденные случаи при $\psi = 0$ и $\psi = \pi$,

го прочь от догоняющего. При таких углах ψ сферический треугольник вырождается, хотя из общих соображений понятно, что догоняющий должен тоже двигаться вдоль большой окружности C_{PE} . Подтвердим эти соображения точными выкладками.

3.1. КРАЙНИЕ ЗНАЧЕНИЯ УГЛА УБЕГАНИЯ

Мы можем легко получить значения τ при $\psi = 0$ и $\psi = \pi$. Действительно, подставив эти крайние значения ψ в уравнение (2), мы получим два уравнения, правые и левые части которых совпадают с правыми и левыми частями неравенств (3) и (4), только связаны эти части уже отношениями точного равенства:

$$1 = \frac{\cos \rho\tau - \cos \lambda \cos \sigma\tau}{\sin \lambda \sin \sigma\tau}, \quad -1 = \frac{\cos \rho\tau - \cos \lambda \cos \sigma\tau}{\sin \lambda \sin \sigma\tau}.$$

Из этих уравнений можно получить, действуя подобно как

при доказательстве предложения 1, что если $\psi = 0$, то

$$\tau = \frac{\lambda}{\rho + \sigma},$$

а если $\psi = \pi$, то

$$\tau = \begin{cases} \frac{\lambda}{\rho - \sigma}, & \text{при } 0 < \lambda \leq \frac{\rho - \sigma}{\rho} \pi, \\ \frac{2\pi - \lambda}{\rho - \sigma}, & \text{при } \frac{\rho - \sigma}{\rho} \pi \leq \lambda \leq \pi. \end{cases}$$

Подставляя найденные τ в уравнение (11), получим, что

$$\phi = \begin{cases} 0, & \text{когда } \psi = 0, & \text{и} \\ \begin{cases} 0, & \text{при } 0 < \lambda \leq \frac{\rho - \sigma}{\rho} \pi, \\ \pi, & \text{при } \frac{\rho - \sigma}{\rho} \pi \leq \lambda \leq \pi, \end{cases} & \text{когда } \psi = \pi. \end{cases}$$

При этом заметим, что в крайних значениях ψ сохраняется непрерывность зависимостей $\tau(\psi)$ и $\phi(\tau)$. В этом просто убедиться, проверив легко вычисляемые пределы ψ и ϕ при стремлении τ к $\lambda/(\rho + \sigma)$, $\lambda/(\rho - \sigma)$ и $(2\pi - \lambda)/(\rho + \sigma)$. Для поиска предела $\cos \phi$ воспользуемся формулой (11).

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow \frac{\lambda}{\rho + \sigma}} \cos \phi &= \frac{\cos \frac{\sigma \lambda}{\rho + \sigma} - \cos \lambda \cos \frac{\rho \lambda}{\rho + \sigma}}{\sin \lambda \sin \frac{\rho \lambda}{\rho + \sigma}} = \\ &= \frac{\cos \frac{\sigma \lambda}{\rho + \sigma} - \frac{1}{2} \left(\cos \left(\frac{\lambda - \rho \lambda}{\rho + \sigma} \right) + \cos \left(\frac{\lambda + \rho \lambda}{\rho + \sigma} \right) \right)}{\frac{1}{2} \left(\cos \left(\frac{\lambda - \rho \lambda}{\rho + \sigma} \right) - \cos \left(\frac{\lambda + \rho \lambda}{\rho + \sigma} \right) \right)} = \end{aligned}$$

$$= \frac{\cos \frac{\sigma\lambda}{\rho + \sigma} - \frac{1}{2} \cos \frac{\sigma\lambda}{\rho + \sigma} - \frac{1}{2} \cos \left(\frac{\lambda + \rho\lambda}{\rho + \sigma} \right)}{\frac{1}{2} \cos \frac{\sigma\lambda}{\rho + \sigma} - \frac{1}{2} \cos \left(\frac{\lambda + \rho\lambda}{\rho + \sigma} \right)} = 1.$$

Точно так же можно найти предел $\cos \psi$, хотя и так очевидно, что

$$\lim_{\tau \rightarrow \frac{\lambda}{\rho + \sigma}} \cos \psi = 1,$$

потому как крайние значения τ в промежутках (9)–(10) получены из уравнения (2) путем подстановки крайних значений ψ . Мы доказали, что уравнение (2) задает взаимно-однозначное непрерывное соответствие между ψ и τ , поэтому мы имеем право написать

$$\lim_{\psi \rightarrow 0} \tau = \frac{\lambda}{\rho + \sigma},$$

а, следовательно, и

$$\lim_{\psi \rightarrow 0} \phi = 0.$$

Теперь рассмотрим предел ϕ , когда ψ стремится к π . Здесь нужно рассмотреть два случая. Первый случай, когда $\lambda < (\rho - \sigma)\pi/\rho$, и второй случай, когда $\lambda > (\rho - \sigma)\pi/\rho$. Возможен еще и третий случай, когда $\lambda = (\rho - \sigma)\pi/\rho$, но он является особым случаем, который мы рассмотрим отдельно.

В первом случае нетрудно убедиться, приводя те же доводы, что и при нахождении предела τ при $\psi \rightarrow 0$, что при ψ , стремящемся к π , время τ стремится к $\lambda/(\rho - \sigma)$. Найдем предел $\cos \phi$ при $\tau \rightarrow \lambda/(\rho - \sigma)$.

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow \frac{\lambda}{\rho - \sigma}} \cos \phi &= \\ &= \frac{\cos \frac{\sigma\lambda}{\rho - \sigma} - \cos \lambda \cos \frac{\rho\lambda}{\rho - \sigma}}{\sin \lambda \sin \frac{\rho\lambda}{\rho - \sigma}} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \cos \frac{\sigma\lambda}{\rho-\sigma} - \frac{1}{2} \left(\cos \left(\frac{\lambda-\rho\lambda}{\rho-\sigma} \right) + \cos \left(\frac{\lambda+\rho\lambda}{\rho-\sigma} \right) \right) \\
 = & \frac{\cos \frac{\sigma\lambda}{\rho-\sigma} - \frac{1}{2} \left(\cos \left(\frac{\lambda-\rho\lambda}{\rho-\sigma} \right) + \cos \left(\frac{\lambda+\rho\lambda}{\rho-\sigma} \right) \right)}{\frac{1}{2} \left(\cos \left(\frac{\lambda-\rho\lambda}{\rho-\sigma} \right) - \cos \left(\frac{\lambda+\rho\lambda}{\rho-\sigma} \right) \right)} = \\
 = & \frac{\cos \frac{\sigma\lambda}{\rho-\sigma} - \frac{1}{2} \cos \frac{-\sigma\lambda}{\rho-\sigma} - \frac{1}{2} \cos \left(\frac{\lambda+\rho\lambda}{\rho-\sigma} \right)}{\frac{1}{2} \cos \frac{-\sigma\lambda}{\rho-\sigma} - \frac{1}{2} \cos \left(\frac{\lambda+\rho\lambda}{\rho-\sigma} \right)} = 1.
 \end{aligned}$$

Отсюда можно заключить, что $\phi \rightarrow 0$ при $\psi \rightarrow \pi$, когда выполнено неравенство $\lambda < (\rho - \sigma)\pi/\rho$.

Во втором случае из тех же соображений, что и в первом, мы имеем, что при ψ , стремящемся к π , τ стремится к $(2\pi - \lambda)/(\rho - \sigma)$. Прежде, чем искать предел $\cos \phi$ приведем числитель правой части уравнения (11) к более удобному виду.

$$\begin{aligned}
 \cos \sigma\tau - \cos \lambda \cos \rho\tau &= \cos \sigma\tau - \frac{1}{2} \cos(\lambda - \rho\tau) - \frac{1}{2} \cos(\lambda + \rho\tau) = \\
 &= \frac{1}{2} \left(\cos \sigma\tau - \cos(\lambda - \rho\tau) \right) + \frac{1}{2} \left(\cos \sigma\tau - \cos(\lambda + \rho\tau) \right) = \\
 &= -\sin \left(\frac{\sigma\tau + \lambda - \rho\tau}{2} \right) \sin \left(\frac{\sigma\tau - \lambda + \rho\tau}{2} \right) - \\
 &\quad - \sin \left(\frac{\sigma\tau + \lambda + \rho\tau}{2} \right) \sin \left(\frac{\sigma\tau - \lambda - \rho\tau}{2} \right) = \\
 &= -\sin \left(\frac{\lambda + \tau(\sigma - \rho)}{2} \right) \sin \left(\frac{\tau(\sigma + \rho) - \lambda}{2} \right) - \\
 &\quad - \sin \left(\frac{\lambda + \tau(\sigma + \rho)}{2} \right) \sin \left(\frac{\tau(\sigma - \rho) - \lambda}{2} \right).
 \end{aligned}$$

Теперь отыщем предел $\cos \phi$, воспользовавшись только что преобразованным выражением (11).

$$\lim_{\tau \rightarrow \frac{2\pi-\lambda}{\rho+\sigma}} \cos \phi =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{-\sin\left(\frac{\lambda\rho + \lambda\sigma + 2\pi\sigma - 2\pi\rho - \lambda\sigma + \lambda\rho}{2(\rho + \sigma)}\right) \sin\left(\frac{2\pi - 2\lambda}{2}\right)}{\sin\lambda \sin\left(\frac{2\pi\rho - \lambda\rho}{\rho + \sigma}\right)} - \\
 &= \frac{\overbrace{\sin\left(\frac{\lambda + 2\pi - \lambda}{2}\right)}^{=0} \sin\left(\frac{(2\pi - \lambda)(\sigma - \rho)}{2(\rho + \sigma)} - \frac{\lambda}{2}\right)}{\sin\lambda \sin\left(\frac{2\pi\rho - \lambda\rho}{\rho + \sigma}\right)} = \\
 &= \frac{-\sin\left(\frac{\lambda\rho + \pi\sigma - \pi\rho}{\rho + \sigma}\right) \sin\lambda}{\sin\lambda \sin\left(\frac{2\pi\rho - \lambda\rho}{\rho + \sigma}\right)}.
 \end{aligned}$$

Сократив $\sin \lambda$, заметим, что сумма углов, являющихся аргументами функции синуса в числителе и знаменателе, равна π :

$$\left(\frac{\lambda\rho + \pi\sigma - \pi\rho}{\rho + \sigma}\right) + \left(\frac{2\pi\rho - \lambda\rho}{\rho + \sigma}\right) = \frac{\pi\rho + \pi\sigma}{\rho + \sigma} = \pi.$$

А если сумма двух углов равна π , то их синусы равны:

$\sin(\pi - \alpha) = \sin \pi \cos \alpha - \cos \pi \sin \alpha = \sin \alpha$, откуда заключаем, что

$$\lim_{\tau \rightarrow \frac{2\pi - \lambda}{\rho + \sigma}} \cos \phi = -1.$$

Это означает, что ϕ стремится к π при ψ , стремящемся к π , когда $\lambda > (\rho - \sigma)\pi/\rho$.

3.2. СЛУЧАЙ, КОГДА ПУТЬ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ РАВЕН π

Особым случаем является случай, когда $\lambda = (\rho - \sigma)\pi/\rho$. При ψ , стремящемся к π , τ будет стремиться к π/ρ . Это было отмечено, в частности, в замечании к (9) и (10). Если мы попытаемся найти предел $\cos \phi$, подставляя это значение τ в выражение (11), то получим неопределенность вида $0/0$. Этого следовало ожидать, поскольку при таких значениях λ и ψ точка встречи M будет диаметрально противоположна точке P , и длина пути, пройденного

догоняющим до точки встречи, будет равна π при любом значении угла f . Тем не менее этот предел существует, и его можно найти воспользуемся правилом Лопиталья.

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow \frac{\pi}{\rho}} \cos \phi &= \lim_{\tau \rightarrow \frac{\pi}{\rho}} \frac{\frac{d}{d\tau} \left(\cos \sigma\tau - \cos \frac{\rho - \sigma}{\rho} \pi \cos \rho\tau \right)}{\frac{d}{d\tau} \left(\sin \frac{\rho - \sigma}{\rho} \pi \sin \rho\tau \right)} = \\ &= \frac{-\sigma \sin \frac{\sigma}{\rho} \pi + \rho \cos \frac{\rho - \sigma}{\rho} \pi \overbrace{\sin \frac{\rho}{\rho} \pi}^{=0}}{\rho \sin \left(\pi - \frac{\sigma}{\rho} \pi \right) \underbrace{\cos \frac{\rho}{\rho} \pi}_{=-1}} = \frac{-\sigma \sin \frac{\sigma}{\rho} \pi}{-\rho \sin \frac{\sigma}{\rho} \pi} = \frac{\sigma}{\rho}. \end{aligned}$$

3.3. НАЙСКОРЕЙШЕЕ СВОЙСТВО ПРИ КРАЙНИХ ЗНАЧЕНИЯХ УГЛА УБЕГАНИЯ

Обсудим полученные результаты.

При $\psi = 0$, то есть, когда убегающий движется в сторону догоняющего по кратчайшей дуге, угол ϕ равен 0, то есть догоняющему следует двигаться навстречу убегающему по той же дуге, являющейся частью большой окружности C_{PE} . Наискорейшее свойство в этом случае несомненно выполняется. Более того, в этом случае догоняющий поймает убегающего за время, равное $\lambda/(\rho + \sigma)$, являющимся наименьшим возможным временем игры. Другими словами, даже если и убегающий, и догоняющий стремились бы встретиться как можно раньше, все равно они не смогли бы уменьшить это время, поскольку невозможно достичь большей скорости сближения игроков, чем $\rho + \sigma$. А именно такая скорость сближения наблюдается в нашем случае при движении игроков навстречу друг другу по кратчайшему пути.

При $\psi = \pi$, то есть, когда убегающий движется от догоняющего вдоль большой окружности C_{PE} возможны три случая.

Если догоняющий может настигнуть убегающего, двигаясь ему вслед так, чтобы расстояние, пройденное догоняющим от начальной точки P до точки встречи M с убегающим, было меньше

π , то, очевидно, это возможно при $\lambda/(\rho - \sigma) < \pi/\rho$, где в левой части стоит отношение расстояния между игроками в начальный момент времени к скорости их сближения, что равно времени преследования, а в правой — время прохождения догоняющим дуги, длина которой равна π .

Понятно, что в этом случае при таком пути преследования наискорейшее свойство выполняется, поскольку догоняющий движется из точки P в точку M по геодезической дуге и нет других геодезических дуг, соединяющих эти две точки. Таким образом, при $\lambda < \pi(\rho - \sigma)/\rho$ и $\psi = \pi$ наискорейшее свойство обеспечивается углом $\phi = 0$, что равно полученному пределу угла ϕ при $\psi \rightarrow \pi$.

Если же догоняющий, двигаясь вслед убегающему, настигает его в некоторой точке M_1 , пройдя путь, длина которого больше π , то очевидно, что, двигаясь в противоположную сторону по той же большой окружности, он встретится с убегающим раньше. В самом деле, при движении догоняющего вслед убегающему скорость их сближения равна $\rho - \sigma$, и следовательно время движения игроков до встречи равно $\lambda/(\rho - \sigma)$, которое больше π/ρ . При движении догоняющего в обратную сторону, то есть прочь от убегающего, скорость сближения игроков равна $\rho + \sigma$, а расстояние, которое они вместе должны преодолеть равно $2\pi - \lambda$, значит, время их движения до встречи равно $(2\pi - \lambda)/(\rho + \sigma)$. Из неравенства $\lambda/(\rho - \sigma) > \pi/\rho$ следует, что $\lambda > \pi(\rho - \sigma)/\rho$, откуда получим неравенство для времени движения игроков до встречи при обратном движении догоняющего

$$\frac{2\pi - \lambda}{\rho + \sigma} < \frac{2\pi - \pi \frac{\rho - \sigma}{\rho}}{\rho + \sigma} = \frac{\pi \left(\frac{2\rho - (\rho - \sigma)}{\rho} \right)}{\rho + \sigma} = \frac{\pi}{\rho},$$

Таким образом, из тех же соображений, что и в предыдущем случае, при $\lambda > \pi(\rho - \sigma)/\rho$ и $\psi = \pi$ наискорейшее свойство обеспечивается углом $\phi = \pi$, что также равно полученному пределу угла ϕ при $\psi \rightarrow \pi$.

То есть, первые два случая, хотя и являются вырожденными, не имеют никаких особенностей, поскольку наискорейшее свой-

ство в этих случаях обеспечивается значениями угла ϕ , совпадающими с пределами угла ϕ при стремлении угла ψ к значениям 0 или π , при которых происходит вырождение

Особым случаем является случай, когда $\lambda = \pi(\rho - \sigma)/\rho$, то есть когда догоняющий, двигаясь вслед убегающему, достигнет его за время, в точности равное π/ρ , пройдя при этом путь, длина которого равна π . В этом случае точка M , в которой происходит встреча игроков, является диаметрально противоположной точкой относительно точки P , где находится догоняющий в начальный момент времени. Поскольку через диаметрально противоположные точки на сфере можно провести сколь угодно много больших окружностей, то двигаясь по любой из них из точки P в точку M , догоняющий пройдет путь одной и той же длины π за одно и то же время, равное π/ρ , подобно тому, как при путешествии из Северного полюса в Южный полюс вдоль меридиана, преодолевается всегда одно и то же расстояние вне зависимости от того, по какому меридиану проходит путешествие. Таким образом, при $\lambda = \pi(\rho - \sigma)/\rho$ и $\psi = \pi$ любое значение угла ϕ обеспечивает поимку убегающего за время π/ρ , которое не может быть уменьшено. Тем не менее, существует предел угла ϕ при $\psi \rightarrow \pi$, когда $\lambda = \pi(\rho - \sigma)/\rho$, и этот предел равен $\arccos(\sigma/\rho)$. Можно показать, что при изменении угла ψ от 0 до π угол ϕ монотонно возрастает от 0 до $\arccos(\sigma/\rho)$.

На основании сделанных выводов строгие неравенства (9) и (10) можно записать в виде нестрогих неравенств:

$$(13) \quad \frac{\lambda}{\rho + \sigma} \leq \tau \leq \frac{\lambda}{\rho - \sigma}, \quad \text{при } 0 < \lambda \leq \frac{\rho - \sigma}{\rho} \pi,$$

$$(14) \quad \frac{\lambda}{\rho + \sigma} \leq \tau \leq \frac{2\pi - \lambda}{\rho + \sigma}, \quad \text{при } \frac{\rho - \sigma}{\rho} \pi \leq \lambda < \pi.$$

3.4. КРАЙНЕЕ ЗНАЧЕНИЕ РАССТОЯНИЯ λ МЕЖДУ ИГРОКАМИ

Мы рассмотрели случаи, когда крайние значения принимает угол ψ . Теперь рассмотрим случай, когда крайнее значение принимает λ — геодезическое расстояние между игроками в начальный момент времени. Как мы знаем, наибольшее значение,

которое может принимать λ , равно π , что соответствует такому положению игроков в начальный момент времени, при котором они находятся в точках P и E , являющихся диаметрально противоположными друг другу точками. В этом случае нельзя однозначно определить большую окружность C_{PE} , поскольку через диаметрально противоположные точки P и E можно провести сколь угодно много больших окружностей. Однако ничто не мешает произвольно выбрать одну из них в качестве базовой, от которой мы будем отсчитывать углы ψ и ϕ .

Вычислим предел области допустимых значений τ при стремлении λ к π . Для этого достаточно подставить в двойное неравенство (14) значение $\lambda = \pi$, после подстановки получим, что

$$\frac{\pi}{\rho + \sigma} \leq \tau \leq \frac{\pi}{\rho + \sigma},$$

откуда следует, что τ при любом значении угла ψ принимает одно и то же единственное значение, равное $\pi/(\rho + \sigma)$. Отсюда можно сделать вывод, что выбор базовой большой окружности не влияет на результат игры.

При $\lambda = \pi$ нельзя получить значения косинусов углов ϕ и ψ из уравнений (11) и (2), поскольку в этом случае в знаменателях правых частей этих уравнений будет стоять 0. Это и понятно, поскольку, в частности, уравнение (2) получено из уравнения (1) в предположении, что сомножители у $\cos \psi$ в уравнении (1) отличны от нуля, в противном случае любые значения угла ψ будут удовлетворять уравнению (1). Именно этим обусловлен произвол в выборе базовой большой окружности C_{PE} . Однако мы можем рассмотреть предел отношения косинусов углов ϕ и ψ при стремлении λ к π .

Из (2) и (11) получим, что

$$\frac{\cos \phi}{\cos \psi} = \frac{\cos \sigma \tau - \cos \lambda \cos \rho \tau \sin \sigma \tau}{\cos \rho \tau - \cos \lambda \cos \sigma \tau \sin \rho \tau}.$$

Подставляя в полученное равенство $\lambda = \pi$, увидим, что числитель и знаменатель первой дроби в правой части совпадают. Вторая

дробь представляет отношение синусов двух углов, сумма которых при $\tau = \pi/(\rho+\sigma)$ представляет собой $\pi\sigma/(\rho+\sigma) + \pi\rho/(\rho+\sigma)$, что равно π . А мы знаем, что если сумма двух углов равна π , то их синусы равны, откуда следует, что отношение косинусов углов ϕ и ψ равно 1, а это значит, что равны сами углы ϕ и ψ , поскольку оба они изменяются на промежутке $[0, \pi]$. Вычислим также и угол μ , воспользовавшись уравнением (12):

$$\begin{aligned} \cos \mu &= \frac{\cos \lambda - \cos \rho\tau \cos \sigma\tau}{\sin \rho\tau \sin \sigma\tau} = \\ &= \frac{2 \cos \lambda - \cos(\rho - \sigma)\tau - \cos(\rho + \sigma)\tau}{\cos(\rho - \sigma)\tau - \cos(\rho + \sigma)\tau} \Bigg|_{\substack{\lambda=\pi \\ \tau=\frac{\pi}{\rho+\sigma}}} = \\ &= \frac{1 - \cos \frac{\rho - \sigma}{\rho + \sigma} \pi}{\cos \frac{\rho - \sigma}{\rho + \sigma} \pi - 1} = -1, \end{aligned}$$

откуда заключаем, что $\mu = \pi$. На основании полученных результатов можно сделать вывод, что когда игроки в начальный момент времени располагаются в диаметрально противоположных точках, то при любом направлении движения убегающего догоняющему следует двигаться навстречу убегающему по той же большой окружности, по которой движется убегающий. Очевидно, что наискорейшее свойство в этом случае выполняется.

Теперь мы можем сказать, что Π_1 -стратегия определена для всех возможных положений игроков на сфере и для всех возможных направлений движения убегающего. При этом основным свойством Π_1 -стратегии является наискорейшее свойство.

Литература

1. ПЕТРОСЯН Л.А. *Дифференциальные игры преследования*. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1997.
2. ПЕТРОСЯН Л.А. *Дифференциальные игры на выживание со многими участниками* // Доклады АН СССР. – 1965. – Т. 161, № 2. – С. 285–287.

PARALLEL PURSUIT STRATEGIES IN A SIMPLE MOTION GAME ON THE SPHERE. GEODESIC PURSUIT.

Alexander M. Kovshov, Saint-Petersburg State University,
Saint-Petersburg, Cand.Sc. (petinv@ya.ru).

Abstract: The two-person zero-sum differential simple pursuit game on the sphere is considered. The strategy of geodesic pursuit, having some properties of parallel pursuit strategy on the plane, is defined, the existence and uniqueness in general are proved. All special cases are considered. The fastest property of the geodesic pursuit strategy is proved.

Keywords: differential games, simple motion, pursuit on the sphere.

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии Л. А. Петросяном*

УДК 519.83
ББК 22.173

СТОХАСТИЧЕСКАЯ ДВУХШАГОВАЯ ИГРА ε -НАИЛУЧШИХ ОТВЕТОВ РАЗМЕРНОСТИ 2×2 ¹

Райгородская А.В.²

(Московский государственный университет им.
М.В.Ломоносова, Москва)

Изучается повторяющаяся 2×2 игра ε -наилучших ответов, в которой каждый игрок в каждом последующем раунде назначает свою чистую стратегию, основываясь на результате случайного эксперимента; последний генерируется произвольной смешанной стратегией игрока, которая с большой, но, вообще говоря, отличной от 1 вероятностью предписывает этому игроку выбор его наилучшего ответа на чистую стратегию партнера, реализованную в предшествующем раунде. Описанные способы принятия решений (называемые в работе функциями ε -наилучшего ответа) интерпретируются как поведенческие стратегии игроков. Данные стратегии определяют стохастическую игру, в которой выигрышами игроков выступают их ожидаемые средние выигрыши, получаемые на протяжении всех раундов. Игра анализируется для случая двух раундов: дается классификация равновесий по Нэшу и проводится сравнение равновесных значений со средними выигрышами, получаемыми игроками в ходе детерминированного применения чистых стратегий наилучшего ответа в каждом раунде.

Ключевые слова: повторяющиеся игры, биматричные игры, наилучший ответ.

¹ Текст приводится в соответствии с изданием «Математическая теория игр и ее приложения. – 2010. – Т. 2. № 4. – С. 80–101».

² Анастасия Викторовна Райгородская, аспирант (asik.vmk@gmail.com.)

Введение

В теории повторяющихся (эволюционных) игр, изучающей модели принятия рациональных решений в процессах многократного взаимодействия игроков (см., напр., [3]–[6], [9], [11]), сравнение различных режимов взаимодействия производится, как правило, с позиции динамических систем: оценивается, каким образом столкновение различных поведенческих стратегий влияет на последовательность принимаемых решений. Основы теоретико-игрового подхода к анализу альтернативных способов принятия решений были заложены в [8], где введены в рассмотрение игры на классах ограниченно рациональных поведенческих стратегий игроков и определено понятие равновесных наборов поведенческих стратегий. Подход к оптимизации траекторий повторяющихся игр на классах поведенческих стратегий игроков, основанный на методах математической теории управления, был предложен в [7].

Данная работа следует в русле подхода [8]. Рассматривается повторяющаяся биматричная игра размерности 2×2 , в которой выбор стратегии каждым игроком в каждом последующем раунде диктуется желанием данного игрока наилучшим для себя образом ответить на последнее действие партнера. Отправной моделью служит, таким образом, повторяющаяся игра наилучших ответов, в которой данное правило принятия решений применяется без каких-либо отклонений. Затем классы поведенческих стратегий игроков расширяются: каждому игроку разрешается принимать решение о выборе своей чистой стратегии на следующем раунде, основываясь на результате случайного эксперимента. Последний генерируется произвольной смешанной стратегией игрока, которая предписывает большую, но, вообще говоря, отличную от 1, вероятность наилучшему ответу на чистую стратегию партнера, реализованную в предшествующем раунде; при этом в каждом последующем раунде допускается, вообще говоря, ненулевая вероятность выбора игроком своего наихудшего ответа на последнюю из реализованных чистых стратегий партнера. Такие

поведенческие стратегии игроков названы в работе функциями ε -наилучшего ответа.

В разделе 2 вводится в рассмотрение стохастическая игра на классах функций ε -наилучшего ответа (игра ε -наилучших ответов), выигрышами игроков выступают математические ожидания их средних выигрышей, получаемых на протяжении всех раундов.

В разделе 3 игра ε -наилучших ответов исследуется для случая двух раундов. Дается классификация равновесий по Нэшу и проводится сравнение равновесных значений со средними выигрышами, получаемыми игроками в исходной детерминированной игре наилучших ответов.

Раздел 4 содержит доказательства основных утверждений.

1. Определения. Постановка задачи

Рассмотрим биматричную игру размерности 2×2 с матрицами выигрышей $A = (a_{ij})_{i,j=1,2}$ и $B = (b_{ij})_{i,j=1,2}$ соответственно первого и второго игроков. Как обычно, строки матриц выигрыша соответствуют номерам чистых стратегий первого игрока, столбцы – номерам стратегий второго игрока. Под смешанной стратегией первого игрока понимаем, как обычно, произвольное вероятностное распределение $(\alpha, 1 - \alpha)$ на множестве стратегий этого игрока; здесь α – вероятность выбора игроком своей чистой стратегии 1, а $1 - \alpha$ – вероятность выбора игроком своей чистой стратегии 2. В соответствии с принятым стандартом, смешанную стратегию $(\alpha, 1 - \alpha)$ первого игрока отождествляем с ее первой компонентой $\alpha \in [0, 1]$. Аналогично, смешанную стратегию второго игрока отождествляем с числом $\beta \in [0, 1]$, имеющим смысл вероятности выбора вторым игроком своей чистой стратегии 1; при этом $1 - \beta$ есть вероятность выбора им своей чистой стратегии 2. Всякая пара (α, β) , где α и β – смешанные стратегии первого и второго игроков соответственно, естественным образом превращает множество всех пар чистых стратегий игроков в вероятностное пространство, а выигрыши первого и второго игроков – в случайные величины на этом вероятностном пространстве; математические ожидания данных случайных величин

тракуются как выигрыши игроков, отвечающие паре (α, β) .

Будем предполагать, что в рассматриваемой биматричной игре не существует точек равновесия по Нэшу с компонентами в чистых стратегиях. Тогда, в соответствии с известной классификацией 2×2 -игр (см. [1]), в данной биматричной игре существует единственная точка равновесия по Нэшу в смешанных стратегиях; при этом, согласно [1], не нарушая общности (при необходимости изменяя нумерацию игроков), можно считать, что

$$(1) \quad b_{12} > b_{11}, \quad b_{21} > b_{22}, \quad a_{11} > a_{21}, \quad a_{22} > a_{12}.$$

Далее предполагаем, что неравенства (1) имеют место. Тогда, обозначая через i_j^+ наилучший ответ первого игрока в классе чистых стратегий этого игрока на чистую стратегию j второго игрока и через j_i^+ наилучший ответ второго игрока в классе чистых стратегий этого игрока на чистую стратегию i первого игрока, имеем

$$(2) \quad i_1^+ = 1, \quad i_2^+ = 2, \quad j_1^+ = 2, \quad j_2^+ = 1.$$

Зафиксируем какую-либо пару (i_0, j_0) чистых стратегий игроков.

Под *повторяющейся игрой наилучших ответов* длины n понимаем процесс повторения биматричной игры, состоящий из раундов $0, 1, \dots, n$, такой, что в каждом последующем раунде $k + 1$ каждый игрок выбирает чистую стратегию наилучшего ответа на чистую стратегию партнера, реализованную в раунде k ; априорно заданная пара (i_0, j_0) чистых стратегий реализуется в раунде 0. По окончании каждого раунда игроки получают очки согласно своим матрицам выигрышей. Данный процесс представляет собой модель «близорукого» поведения неоднократно взаимодействующих игроков, в котором каждый из них стремится максимизировать свой выигрыш в каждом последующем взаимодействии, исходя из гипотезы о том, что в этом взаимодействии партнер повторит свой предшествующий выбор. Повторяющаяся игра наилучших ответов описывается дискретной динамической системой вида

$$(3) \quad (i_{k+1}, j_{k+1}) = (i_{j_k}^+, j_{i_k}^+) \quad (k = 0, \dots, n - 1)$$

в произведении

$$(4) \quad X = \{1, 2\} \times \{1, 2\}$$

множеств чистых стратегий первого и второго игроков. Для средних выигрышей первого и второго игроков в повторяющейся игре наилучших ответов (нулевой раунд из подсчета исключаем) имеем, соответственно, выражения

$$(5) \quad \bar{a}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_{i_k, j_k}, \quad \bar{b}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n b_{i_k, j_k}.$$

Введем в рассмотрение процесс, аналогичный повторяющейся игре наилучших ответов, в котором, однако, игроки назначают свои действия на последующих раундах не детерминированным образом, отдавая вероятностные предпочтения своим чистым стратегиям наилучшего ответа. В этом процессе для каждого игрока инструментом генерирования решений выступает та или иная функция ε -наилучшего ответа. Приведем соответствующее определение.

Фиксируем $\varepsilon \in [0, 1/2)$. Функцией ε -наилучшего ответа первого игрока назовем любую пару (α_1, α_2) смешанных стратегий первого игрока такую, что

$$(6) \quad 1 \geq \alpha_1 \geq 1 - \varepsilon, \quad 0 \leq \alpha_2 \leq \varepsilon.$$

Ввиду (2) данное определение подразумевает, что первый игрок, выбирая смешанную стратегию α_j в ответ на реализацию вторым игроком его чистой стратегии ($j = 1, 2$) задает большую вероятность своей чистой стратегии наилучшего ответа на эту чистую стратегию второго игрока. Аналогично, функцией ε -наилучшего ответа второго игрока назовем любую пару (β_1, β_2) смешанных стратегий второго игрока такую, что

$$(7) \quad 0 \leq \beta_1 \leq \varepsilon, \quad 1 \geq \beta_2 \geq 1 - \varepsilon.$$

Заметим, что при $\varepsilon = 0$ для указанных выше смешанных стратегий игроков имеем $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0, \beta_1 = 0, \beta_2 = 1$; таким образом, 0-наилучшие стратегии первого и второго игроков предписывают каждому из них, при реализации той или иной чистой стратегии партнера, с вероятностью 1 применять соответствующую чистую стратегию наилучшего ответа.

Каждую пару

$$(8) \quad S = ((\alpha_1, \alpha_2), (\beta_1, \beta_2)),$$

где (α_1, α_2) – функция ε -наилучшего ответа первого игрока и (β_1, β_2) – функция ε -наилучшего ответа второго игрока, будем называть *парой функций ε -наилучших ответов* игроков.

Для произвольной пары S (8) функций ε -наилучших ответов игроков рассмотрим случайный процесс, который назовем *повторяющейся игрой ε -наилучших ответов* длины n , соответствующей S . Процесс состоит из раундов $0, 1, \dots, n$, в каждом из которых игроки разыгрывают биматричную игру. Процесс развивается по следующей схеме. В раунде 0 реализуется начальная пара (i_0, j_0) чистых стратегий игроков. Если в раунде k реализуется пара (i_k, j_k) чистых стратегий игроков, то первый игрок для выбора своей чистой стратегии i_{k+1} в раунде $k + 1$ производит статистический эксперимент на множестве своих чистых стратегий, применяя смешанную стратегию α_{j_k} ; аналогично, второй игрок для выбора своей чистой стратегии j_{k+1} в раунде $k + 1$ производит статистический эксперимент на множестве своих чистых стратегий, применяя смешанную стратегию β_{i_k} . По окончании каждого раунда игроки получают очки согласно своим матрицам выигрышей. Данный процесс представляет собой модель «близорукого» поведения взаимодействующих игроков, которая, однако, в случае $\varepsilon > 0$, допускает большую гибкость в выборе действий по сравнению с повторяющейся игрой наилучших ответов: в каждом последующем раунде каждый игрок выбирает свою будущую чистую стратегию из условия вероятностного предпочтения своей чистой стратегии наилучшего ответа на реализующуюся чистую стратегию противника. При $\varepsilon = 0$ повторяющаяся игра ε -наилучших ответов, очевидно, переходит в (детерминированную) повторяющуюся игру наилучших ответов.

Далее считаем $\varepsilon > 0$. Уточним определение обозначенного выше случайного процесса. Пространством его состояний служит произведение X (4) множеств чистых стратегий первого и второго игроков, его временной шкалой – индексы $0, 1, \dots, n$ раундов повторяющейся игры. Пространство X понимаем как измеримое пространство, снабженное алгеброй всех его подмножеств. Для

каждого момента $k = 0, 1, \dots, n - 1$ функция на X вида

$$p_S(\cdot | (i_k, j_k)) = \alpha_{j_k} \times \beta_{i_k} = (\alpha_{j_k}, 1 - \alpha_{j_k}) \times (\beta_{i_k}, 1 - \beta_{i_k})$$

(см. (8)) задает переходную вероятность между двумя экземплярами измеримого пространства X , отвечающим моментам времени k и $k + 1$. Очевидно,

$$(9) \quad p_S((i_k, j_k) | (i_{k-1}, j_{k-1})) = \begin{cases} \alpha_{j_{k-1}} \beta_{i_{k-1}}, & \text{если } (i_k, j_k) = (1, 1); \\ (1 - \alpha_{j_{k-1}}) \beta_{i_{k-1}}, & \text{если } (i_k, j_k) = (2, 1); \\ \alpha_{j_{k-1}} (1 - \beta_{i_{k-1}}), & \text{если } (i_k, j_k) = (1, 2); \\ (1 - \alpha_{j_{k-1}}) (1 - \beta_{i_{k-1}}), & \text{если } (i_k, j_k) = (2, 2). \end{cases}$$

В соответствии со стандартным определением случайного процесса (см., например, теорему Ионеску-Тулча [2]), указанные переходные вероятности и начальное состояние (i_0, j_0) определяют случайный процесс, траекториями которого выступают последовательности

$$(10) \quad t = ((i_1, j_1), \dots, (i_n, j_n)) \in X^n.$$

Множество X^{n+1} всех траекторий данного случайного процесса имеет структуру вероятностного пространства с вероятностью p_S , определенной на множестве всех подмножеств X^{n+1} . Последняя вероятность характеризуется своими значениями на всех одноэлементных подмножествах X^{n+1} , которые мы далее отождествляем с траекториями. Именно, для всякой траектории t (10)

$$(11) \quad p_{n,S}(t) = p_S((i_n, j_n) | (i_{n-1}, j_{n-1})) \dots p_S((i_1, j_1) | (i_0, j_0)).$$

Так определенный случайный процесс будем рассматривать как формальную модель повторяющейся игры ε -наилучших ответов длины n , соответствующей паре S (8) функций ε -наилучшего ответа игроков.

Для каждой траектории t (10) введем значения средних выигрышей, соответственно, первого и второго игроков, реализуемых на данной траектории:

$$(12) \quad a_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_{i_k, j_k}, \quad b(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n b_{i_k, j_k}.$$

Для каждой пары S функций ε -наилучших ответов игроков функции $a_n(\cdot)$ и $b_n(\cdot)$ представляют собой случайные величины на вероятностном пространстве (X^{n+1}, p_S) . Математические ожидания случайных величин (12), задаваемые выражениями

$$(13) \quad a_n[S] = \int_{X^n} a_n(t) p_{n,S}(dt), \quad b_n[S] = \int_{X^n} b_n(t) p_{n,S}(dt),$$

назовем *ожидаемыми средними выигрышами*, соответственно, первого и второго игроков в повторяющейся игре ε -наилучшего ответа длины n , соответствующей паре S функций ε -наилучших ответов игроков.

Пару $S^* = ((\alpha_1^*, \alpha_2^*), (\beta_1^*, \beta_2^*))$ функций ε -наилучших ответов игроков назовем *равновесной* (по Нэшу) в повторяющейся игре ε -наилучших ответов длины n , если для любого ε -наилучшего ответа (α_1, α_2) первого игрока верно $a_n[S_1^*] \leq a_n[S^*]$, где $S_1^* = ((\alpha_1, \alpha_2), (\beta_1^*, \beta_2^*))$, и для любого ε -наилучшего ответа (β_1, β_2) второго игрока верно $b_n[S_2^*] \leq b_n[S^*]$, где $S_2^* = ((\alpha_1^*, \alpha_2^*), (\beta_1, \beta_2))$. Пару $(a_n[S^*], b_n[S^*])$ ожидаемых средних выигрышей первого и второго игроков, соответствующую паре S^* функций ε -наилучших ответов игроков в повторяющейся игре ε -наилучшего ответа длины n , будем называть *равновесной* в данной повторяющейся игре.

Возникает вопрос о существовании равновесной пары функций ε -наилучших ответов игроков. При условии существования такой пары представляет интерес выяснение ее структуры и сравнение равновесной пары ожидаемых средних выигрышей в (стохастической) повторяющейся игре ε -наилучших ответов с парой (\bar{a}_n, \bar{b}_n) (5), (3) средних выигрышей в детерминированной повторяющейся игре наилучших ответов. Цель данной работы – дать ответы на указанные вопросы для простейшего случая двухшаговой повторяющейся игры, т. е. для случая $n = 2$, при достаточно малом ε . Отметим, что случай $n = 1$ тривиален: в этом случае равновесная пара функций ε -наилучших ответов игроков с очевидностью состоит из детерминированных функций наилучшего ответа (см. (2)), т. е. имеет вид $((1, 0)(0, 1))$.

2. Формулировки результатов

Ниже $n = 2$.

Две приводимые ниже леммы составляют основу исследования. Их содержательный смысл состоит в следующем. В двухшаговой повторяющейся игре ε -наилучших ответов при достаточно малом ε каждый игрок имеет оптимальную функцию ε -наилучшего ответа, которая максимизирует его ожидаемый средний выигрыш вне зависимости от выбора партнером своей функции ε -наилучшего ответа. Структура оптимальной функции ε -наилучшего ответа игрока зависит от некоторых соотношений между элементами матрицы выигрышей этого игрока и не зависит от матрицы выигрышей его партнера. В ряде случаев оптимальная функция (α_1^*, α_2^*) ε -наилучшего ответа первого игрока имеет вид $(1, 0)$, т. е. определяет детерминированную реакцию наилучшего ответа первого игрока на выбор чистой стратегии второго игрока; в этих случаях для первого игрока малая рандомизация его ответного выбора нецелесообразна. В остальных типичных случаях пара (α_1^*, α_2^*) имеет вид $(1 - \varepsilon, 0)$ либо $(1, \varepsilon)$, т. е. одна из ее компонент остается чистой стратегией наилучшего ответа, другая же максимально рандомизируется. В этих случаях для первого игрока малая рандомизация его ответного выбора является целесообразной. Аналогичные наблюдения справедливы в отношении оптимальной функции (β_1^*, β_2^*) ε -наилучшего ответа второго игрока.

Через $U(\varepsilon)$ и $V(\varepsilon)$ будем обозначать множества всех функций ε -наилучшего ответа первого и второго игроков, соответственно; также введем множества

$$(14) \quad \begin{aligned} U^1(\varepsilon) &= \{(\alpha_1, \alpha_2) \in U(\varepsilon) : \alpha_1 < 1\}, \\ U^2(\varepsilon) &= \{(\alpha_1, \alpha_2) \in U(\varepsilon) : \alpha_2 > 0\}, \end{aligned}$$

$$(15) \quad \begin{aligned} V^1(\varepsilon) &= \{(\beta_1, \beta_2) \in V(\varepsilon) : \beta_1 > 0\}, \\ V^2(\varepsilon) &= \{(\beta_1, \beta_2) \in V(\varepsilon) : \beta_2 < 1\}. \end{aligned}$$

Положим

$$(16) \quad U_{i_0, j_0}(\varepsilon) = \begin{cases} U(\varepsilon) & \text{при } (i_0, j_0) \in \{(1, 2), (2, 1)\} \\ U^1(\varepsilon) & \text{при } (i_0, j_0) = (1, 1) \\ U^2(\varepsilon) & \text{при } (i_0, j_0) = (2, 2) \end{cases},$$

$$(17) \quad V_{i_0, j_0}(\varepsilon) = \begin{cases} V(\varepsilon) & \text{при } (i_0, j_0) \in \{(1, 1), (2, 2)\} \\ V^1(\varepsilon) & \text{при } (i_0, j_0) = (1, 2) \\ V^2(\varepsilon) & \text{при } (i_0, j_0) = (2, 1) \end{cases}.$$

Лемма 1. Существует $\varepsilon_1 \in (0, 1/2)$ такое, что при $\varepsilon \leq \varepsilon_1$ справедливы следующие утверждения.

1) Существует единственная функция (α_1^*, α_2^*) ε -наилучшего ответа первого игрока такая, что

(i) для всяких $(\alpha_1, \alpha_2) \in U(\varepsilon) \setminus \{(\alpha_1^*, \alpha_2^*)\}$ и $(\beta_1, \beta_2) \in V_{i_0, j_0}(\varepsilon)$ выполняется

$$(18) \quad a_2[(\alpha_1^*, \alpha_2^*), (\beta_1, \beta_2)] > a_2[(\alpha_1, \alpha_2), (\beta_1, \beta_2)],$$

(ii) в случае $(i_0, j_0) = (1, 2)$ при всяком $(\beta_1, \beta_2) \in V(\varepsilon) \setminus V_{i_0, j_0}(\varepsilon)$ для любого $(\alpha_1, \alpha_2) \in U(\varepsilon)$ такого, что $\alpha_2 \neq \alpha_2^*$, выполняется (18), а для любого $(\alpha_1, \alpha_2) \in U(\varepsilon)$ такого, что $\alpha_2 = \alpha_2^*$, выполняется

$$(19) \quad a_2[(\alpha_1^*, \alpha_2^*), (\beta_1, \beta_2)] = a_2[(\alpha_1, \alpha_2), (\beta_1, \beta_2)].$$

(iii) в случае $(i_0, j_0) = (2, 1)$ при всяком $(\beta_1, \beta_2) \in V(\varepsilon) \setminus V_{i_0, j_0}(\varepsilon)$ для любого $(\alpha_1, \alpha_2) \in U(\varepsilon)$ такого, что $\alpha_1 \neq \alpha_1^*$, выполняется (18), а для любого $(\alpha_1, \alpha_2) \in U(\varepsilon)$ такого, что $\alpha_1 = \alpha_1^*$, выполняется (19).

2) Значения α_1^* и α_2^* задаются следующей таблицей.

Лемма 2. Существует $\varepsilon_2 \in (0, 1/2)$ такое, что при $\varepsilon \leq \varepsilon_2$ справедливы следующие утверждения.

1) Существует единственная функция (β_1^*, β_2^*) ε -наилучшего ответа второго игрока такая, что

(i) для всяких $(\beta_1, \beta_2) \in V(\varepsilon) \setminus \{(\beta_1^*, \beta_2^*)\}$ и $(\alpha_1, \alpha_2) \in U_{i_0, j_0}(\varepsilon)$ выполняется

$$(20) \quad b_2[(\alpha_1, \alpha_2), (\beta_1^*, \beta_2^*)] > b_2[(\alpha_1, \alpha_2), (\beta_1, \beta_2)],$$

(ii) в случае $(i_0, j_0) = (1, 1)$ при всяком $(\alpha_1, \alpha_2) \in U(\varepsilon) \setminus U_{i_0, j_0}(\varepsilon)$ для любого $(\beta_1, \beta_2) \in V(\varepsilon)$ такого, что $\beta_1 \neq \beta_1^*$, выполняется (20), а для любого $(\beta_1, \beta_2) \in V(\varepsilon)$ такого, что $\beta_1 = \beta_1^*$, выполняется

$$(21) \quad b_2[(\alpha_1, \alpha_2), (\beta_1^*, \beta_2^*)] = b_2[(\alpha_1, \alpha_2), (\beta_1, \beta_2)].$$

Таблица 1.

случай	(i_0, j_0)	условие	(α_1^*, α_2^*)
1.1	(1, 1)	$a_{12} > a_{21}$	(1, 0)
1.2	(1, 1)	$a_{12} < a_{21}$	$(1 - \varepsilon, 0)$
1.3	(2, 2)	$a_{12} > a_{21}$	(1, ε)
1.4	(2, 2)	$a_{12} < a_{21}$	(1, 0)
1.5	(1, 2)	$a_{12} > a_{21}$	(1, ε)
1.6	(1, 2)	$a_{12} < a_{21}, a_{21} < (a_{11} + a_{12})/2$	(1, ε)
1.7	(1, 2)	$a_{12} < a_{21}, a_{21} > (a_{11} + a_{12})/2$	(1, 0)
1.8	(2, 1)	$a_{12} < a_{21}$	$(1 - \varepsilon, 0)$
1.9	(2, 1)	$a_{12} > a_{21}, a_{12} < (a_{22} + a_{21})/2$	$(1 - \varepsilon, 0)$
1.10	(2, 1)	$a_{12} > a_{21}, a_{12} > (a_{22} + a_{21})/2$	(1, 0)

(iii) в случае $(i_0, j_0) = (2, 2)$ при всяком $(\alpha_1, \alpha_2) \in U(\varepsilon) \setminus U_{i_0, j_0}(\varepsilon)$ для любого $(\beta_1, \beta_2) \in V(\varepsilon)$ такого, что $\beta_2 \neq \beta_2^*$, выполняется (20), а для любого $(\beta_1, \beta_2) \in V(\varepsilon)$ такого, что $\beta_2 = \beta_2^*$, выполняется (21).

2) Значения β_1^* и β_2^* задаются следующей таблицей.

Таблица 2.

случай	(i_0, j_0)	условие	(β_1^*, β_2^*)
2.1	(1, 2)	$b_{11} > b_{22}$	$(\varepsilon, 1)$
2.2	(1, 2)	$b_{11} < b_{22}$	(0, 1)
2.3	(2, 1)	$b_{11} > b_{22}$	(0, 1)
2.4	(2, 1)	$b_{11} < b_{22}$	$(0, 1 - \varepsilon)$
2.5	(1, 1)	$b_{11} > b_{22}$	$(\varepsilon, 1)$
2.6	(1, 1)	$b_{11} < b_{22}, b_{22} < (b_{11} + b_{21})/2$	$(\varepsilon, 1)$
2.7	(1, 1)	$b_{11} < b_{22}, b_{22} > (b_{11} + b_{21})/2$	(0, 1)
2.8	(2, 2)	$b_{11} < b_{22}$	$(0, 1 - \varepsilon)$
2.9	(2, 2)	$b_{11} > b_{22}, b_{11} < (b_{12} + b_{22})/2$	$(0, 1 - \varepsilon)$
2.10	(2, 2)	$b_{11} > b_{22}, b_{11} > (b_{12} + b_{22})/2$	(0, 1)

Из лемм 1 и 2 с очевидностью вытекает утверждение о существовании и структуре равновесной пары функций ε -наилучшего ответа.

Теорема 1. Пусть $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ определены согласно леммам 1 и 2, $\varepsilon \leq \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, функции (α_1^*, α_2^*) и (β_1^*, β_2^*) ε -наилучшего ответа, соответственно, первого и второго игроков заданы таблицами 1 и 2, и $S^* = ((\alpha_1^*, \alpha_2^*), (\beta_1^*, \beta_2^*))$. Тогда

1) S^* есть равновесная пара функций ε -наилучшего ответа в двухшаговой повторяющейся игре ε -наилучших ответов.

2) Равновесная пара S^* единственна во всех случаях кроме 1.1 и 1.4 из таблицы 1 и 2.2 и 2.3 из таблицы 2.

3) В случае 1.1 из таблицы 1 равновесной является всякая пара $S^* = ((\alpha_1^*, \alpha_2^*), (\beta_1^*, \beta_2^*))$, где $\beta_2^* \in [1 - \varepsilon, 1]$, а α_1^*, α_2^* и β_1^* заданы таблицами 1 и 2.

4) В случае 1.4 из таблицы 1 равновесной является всякая пара $S^* = ((\alpha_1^*, \alpha_2^*), (\beta_1^*, \beta_2^*))$, где $\beta_1^* \in [0, \varepsilon]$, а α_1^*, α_2^* и β_2^* заданы таблицами 1 и 2.

5) В случае 2.2 из таблицы 2 равновесной является всякая пара $S^* = ((\alpha_1^*, \alpha_2^*), (\beta_1^*, \beta_2^*))$, где $\alpha_1^* \in [1 - \varepsilon, 1]$, а α_2^*, β_1^* и β_2^* заданы таблицами 1 и 2.

6) В случае 2.3 из таблицы 2 равновесной является всякая пара $S^* = ((\alpha_1^*, \alpha_2^*), (\beta_1^*, \beta_2^*))$, где $\alpha_2^* \in [0, \varepsilon]$, α_1^* , а β_1^* и β_2^* заданы таблицами 1 и 2.

Следующая теорема утверждает, что, в условиях теоремы 1, в тех случаях, когда оптимальная функция ε -наилучшего ответа игрока (см. таблицы 1 и 2) имеет компоненту, не являющейся чистой стратегией, ожидаемый равновесный выигрыш этого игрока в двухшаговой игре ε -наилучших ответов строго больше его среднего выигрыша в (детеминированной) игре наилучших ответов. Таким образом, в этих случаях для рассматриваемого игрока малая рандомизация при выборе стратегии выгодна с точки зрения его ожидаемого среднего выигрыша.

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1.

1) В случаях 1.2, 1.3, 1.5, 1.6, 1.8, 1.9 из таблицы 1 ожидаемый равновесный выигрыш первого игрока в двухшаговой игре ε -наилучших ответов строго больше его среднего выигрыша в (детеминированной) двухшаговой игре наилучших ответов: $a_2[S^*] > \bar{a}_2$ (см. (13), (5)).

2) В случаях 2.1, 2.4, 2.5, 2.6, 2.8, 2.9 из таблицы 2 ожидаемый равновесный выигрыш второго игрока в двухшаговой игре ε -наилучших ответов строго больше его среднего выигрыша в (детеминированной) двухшаговой игре наилучших ответов: $b_2[S^*] > \bar{b}_2$ (см. (13), (5)).

Теорема 2 очевидно следует из лемм 1 и 2 и теоремы 1.

Следствие 1. Пусть выполнены условия теоремы 1. Если одновременно имеют место какой-либо из случаев 1.2, 1.3, 1.5, 1.6, 1.8, 1.9 из таблицы 1 и какой-либо из случаев 2.1, 2.4, 2.5, 2.6, 2.8, 2.9 из таблицы 2, то для каждого из игроков его ожидаемый равновесный выигрыш в двухшаговой игре ε -наилучших ответов строго больше его среднего выигрыша в (детеминированной) двухшаговой игре наилучших ответов, т. е. имеют место неравенства $a_2[S^*] > \bar{a}_2$ и $b_2[S^*] > \bar{b}_2$.

3. Доказательства лемм 1 и 2

Доказательство леммы 1.

Пусть S – произвольная пара функций ε -наилучших ответов игроков вида (8). Согласно (11) для любой траектории $t = ((i_1, j_1), (i_2, j_2)) \in X^2$ двухшаговой игры ε -наилучших ответов, соответствующих паре S , имеем

$$p_{2,S}(t) = p_S((i_2, j_2)|(i_1, j_1))p_S((i_1, j_1)|(i_0, j_0)).$$

Для ожидаемого среднего выигрыша первого игрока, в соответ-

ствии с (12), (13), имеем

$$\begin{aligned}
 a_2[S] &= \int_{X^2} a_2(t) p_{2,S}(dt) \\
 &= \frac{1}{2} \int_{X^2} (a_{i_1, j_1} + a_{i_2, j_2}) p_{2,S}(d((i_1, j_1), (i_2, j_2))) \\
 &= \frac{1}{2} \int_X a_{i_1, j_1} p_S(d(i_1, j_1)|(i_0, j_0)) + \\
 &\quad \frac{1}{2} \int_X p_S(d(i_1, j_1)|(i_0, j_0)) \int_X a_{i_2, j_2} p_S(d(i_2, j_2)|(i_1, j_1)).
 \end{aligned}$$

Обозначая

$$a_{1,0}(i_*, j_*) = \int_X a_{i,j} p_S(d(i, j)|(i_*, j_*)),$$

$$a_{2,0}(i_*, j_*) = \int_X a_1(i, j) p_S(d(i, j)|(i_*, j_*)),$$

получаем

$$(22) \quad a_2[S] = a_2[S](i_0, j_0) = \frac{a_{1,0}(i_0, j_0) + a_{2,0}(i_0, j_0)}{2}.$$

В силу (9)

$$(23) \quad \begin{aligned}
 a_{1,0}(i_0, j_0) &= (a_{11} - a_{12})\alpha_{j_0}\beta_{i_0} + \\
 &(a_{21} - a_{22})(1 - \alpha_{j_0})\beta_{i_0} + \alpha_{j_0}a_{12} + (1 - \alpha_{j_0})a_{22},
 \end{aligned}$$

$$(24) \quad \begin{aligned}
 a_{2,0}(i_0, j_0) &= [a_{1,0}(1, 1) - a_{1,0}(1, 2)]\alpha_{j_0}\beta_{i_0} + \\
 &[a_{1,0}(2, 1) - a_{1,0}(2, 2)](1 - \alpha_{j_0})\beta_{i_0} + \\
 &\alpha_{j_0}a_{1,0}(1, 2) + (1 - \alpha_{j_0})a_{1,0}(2, 2).
 \end{aligned}$$

Из (23) имеем

$$\begin{aligned}
 a_{1,0}(1, 1) - a_{1,0}(1, 2) &= [(a_{11} - a_{12}) - (a_{21} - a_{22})](\alpha_1 - \alpha_2)\beta_1 + \\
 &\quad (\alpha_1 - \alpha_2)(a_{12} - a_{22}), \\
 a_{1,0}(2, 1) - a_{1,0}(2, 2) &= [(a_{11} - a_{12}) - (a_{21} - a_{22})](\alpha_1 - \alpha_2)\beta_2 + \\
 &\quad (\alpha_1 - \alpha_2)(a_{12} - a_{22}), \\
 a_{1,0}(1, 2) &= (a_{11} - a_{12})\alpha_2\beta_1 + (a_{21} - a_{22})(1 - \alpha_2)\beta_1 + \\
 &\quad \alpha_2 a_{12} + (1 - \alpha_2)a_{22}, \\
 a_{1,0}(2, 2) &= (a_{11} - a_{12})\alpha_2\beta_2 + (a_{21} - a_{22})(1 - \alpha_2)\beta_2 + \\
 &\quad \alpha_2 a_{12} + (1 - \alpha_2)a_{22}.
 \end{aligned}$$

Подставляя в (24) и перегруппировывая слагаемые, получаем:

$$(25) \quad a_{2,0}(i_0, j_0) = c_1^{i_0} \alpha_1 \alpha_{j_0} + c_2^{i_0} \alpha_2 \alpha_{j_0} + c_3 \alpha_{j_0} + c_4^{i_0} \alpha_1 + c_5^{i_0} \alpha_2 + c_6,$$

где

$$(26) \quad c_1^{i_0} = (a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})(\beta_1 - \beta_2)\beta_{i_0},$$

$$(27) \quad c_2^{i_0} = (a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})(\beta_1 - \beta_2)(1 - \beta_{i_0}),$$

$$(28) \quad c_3 = (a_{21} - a_{22})(\beta_1 - \beta_2),$$

$$(29) \quad c_4^{i_0} = [(a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})\beta_2 + a_{12} - a_{22}]\beta_{i_0},$$

$$(30) \quad c_5^{i_0} = [(a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})\beta_2 + a_{12} - a_{22}](1 - \beta_{i_0}),$$

$$(31) \quad c_6 = (a_{21} - a_{22})\beta_2 + a_{22}.$$

Придавая начальной паре (i_0, j_0) все возможные значения в пределах множества X и применяя (23), запишем:

$$\begin{aligned}
 a_{1,0}(1, 1) &= \alpha_1 \beta_1 a_{11} + \alpha_1 (1 - \beta_1) a_{12} \\
 &\quad + (1 - \alpha_1) \beta_1 a_{21} + (1 - \alpha_1) (1 - \beta_1) a_{22}, \\
 a_{1,0}(1, 2) &= \alpha_2 \beta_1 a_{11} + \alpha_2 (1 - \beta_1) a_{12} \\
 &\quad + (1 - \alpha_2) \beta_1 a_{21} + (1 - \alpha_2) (1 - \beta_1) a_{22}, \\
 a_{1,0}(2, 1) &= \alpha_1 \beta_2 a_{11} + \alpha_1 (1 - \beta_2) a_{12} \\
 &\quad + (1 - \alpha_1) \beta_2 a_{21} + (1 - \alpha_1) (1 - \beta_2) a_{22}, \\
 a_{1,0}(2, 2) &= \alpha_2 \beta_2 a_{11} + \alpha_2 (1 - \beta_2) a_{12} \\
 &\quad + (1 - \alpha_2) \beta_2 a_{21} + (1 - \alpha_2) (1 - \beta_2) a_{22}.
 \end{aligned}$$

Расфиксируем пару S (8) и рассмотрим указанные выше значения как функции от переменных $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$, меняющихся в пределах ограничений (6), (7); для краткости обозначения аргументов будем опускать. Имеем:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_1} a_{1,0}(1, 1) = \beta_1 a_{11} + (1 - \beta_1) a_{12} - \beta_1 a_{21} - (1 - \beta_1) a_{22},$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_2} a_{1,0}(1, 1) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_1} a_{1,0}(1, 2) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_2} a_{1,0}(1, 2) = \beta_1 a_{11} + (1 - \beta_1) a_{12} - \beta_1 a_{21} - (1 - \beta_1) a_{22},$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_1} a_{1,0}(2, 1) = \beta_2 a_{11} + (1 - \beta_2) a_{12} - \beta_2 a_{21} - (1 - \beta_2) a_{22},$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_2} a_{1,0}(2, 1) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_1} a_{1,0}(2, 2) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_2} a_{1,0}(2, 2) = \beta_2 a_{11} + (1 - \beta_2) a_{12} - \beta_2 a_{21} - (1 - \beta_2) a_{22}.$$

Для значений $\beta_1 = 0, \beta_2 = 1$, отвечающим чистым стратегиям наилучшего ответа второго игрока, с учетом (1) получаем:

$$(32) \quad \frac{\partial}{\partial \alpha_1} a_{1,0}(1, 1) = a_{12} - a_{22} < 0, \quad \frac{\partial}{\partial \alpha_2} a_{1,0}(1, 1) = 0,$$

$$(33) \quad \frac{\partial}{\partial \alpha_1} a_{1,0}(1, 2) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \alpha_2} a_{1,0}(1, 2) = a_{12} - a_{22} < 0,$$

$$(34) \quad \frac{\partial}{\partial \alpha_1} a_{1,0}(2, 1) = a_{11} - a_{21} > 0, \quad \frac{\partial}{\partial \alpha_2} a_{1,0}(2, 1) = 0,$$

$$(35) \quad \frac{\partial}{\partial \alpha_1} a_{1,0}(2, 2) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \alpha_2} a_{1,0}(2, 2) = a_{11} - a_{21} > 0.$$

Далее, из (25)

$$a_{2,0}(i_0, 1) = c_1^{i_k-2} \alpha_1^2 + c_2^{i_k-2} \alpha_2 \alpha_1 + (c_3 + c_4^{i_k-2}) \alpha_1 + c_5^{i_k-2} \alpha_2 + c_6,$$

$$a_{2,0}(i_0, 2) = c_1^{i_k-2} \alpha_1 \alpha_2 + c_2^{i_k-2} \alpha_2^2 + c_4^{i_k-2} \alpha_1 + (c_3 + c_5^{i_k-2}) \alpha_2 + c_6.$$

Рассматривая указанные выше значения как функции от переменных $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$, меняющихся в пределах ограничений (6), (7) и опуская для краткости обозначения аргументов, имеем:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_1} a_{2,0}(i_0, 1) = c_1^{i_k-2} \alpha_1 + c_2^{i_k-2} \alpha_2 + c_3 + c_4^{i_k-2},$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_2} a_{2,0}(i_0, 1) = c_2^{i_k-2} \alpha_1 + c_5^{i_k-2},$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_1} a_{2,0}(i_0, 2) = c_1^{i_k-2} \alpha_2 + c_4^{i_k-2},$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_2} a_{2,0}(i_0, 2) = c_1^{i_k-2} \alpha_1 + c_2^{i_k-2} \alpha_2 + c_3 + c_5^{i_k-2}.$$

Подстановкой в эти выражения и в (26) – (31) значений

$$(36) \quad \alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = 0, \quad \beta_1 = 0, \quad \beta_2 = 1,$$

отвечающих чистым стратегиям наилучшего ответа первого и второго игроков, получаем:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_1} a_{2,0}(1, 1) = a_{22} - a_{21} = (a_{12} - a_{22}) + (a_{21} - a_{22}),$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_2} a_{2,0}(1, 1) = a_{12} - a_{22},$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_1} a_{2,0}(1, 2) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \alpha_2} a_{2,0}(1, 2) = a_{11} - 2a_{21} + a_{22},$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_1} a_{2,0}(2, 1) = a_{12} - a_{21}, \quad \frac{\partial}{\partial \alpha_2} a_{2,0}(2, 1) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_1} a_{2,0}(2, 2) = a_{11} - a_{21}, \quad \frac{\partial}{\partial \alpha_2} a_{2,0}(2, 2) = a_{12} - a_{11}.$$

Объединяя с (32)-(35), при всех значениях начальной пары (i_0, j_0) чистых стратегий для удвоенных частных производных ожидаемого среднего выигрыша (22) как функции от $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$, вычисленных в точке (36), получаем следующие выражения (обозначения аргументов для краткости опускаем):

$$(37) \quad 2 \frac{\partial}{\partial \alpha_1} a_2[S](1, 1) = a_{12} - a_{21}, \quad 2 \frac{\partial}{\partial \alpha_2} a_2[S](1, 1) = a_{12} - a_{22} < 0,$$

$$(38) \quad 2 \frac{\partial}{\partial \alpha_1} a_2[S](1, 2) = 0,$$

$$2 \frac{\partial}{\partial \alpha_2} a_2[S](1, 2) = (a_{11} - a_{21}) + (a_{12} - a_{21}),$$

$$(39) \quad 2 \frac{\partial}{\partial \alpha_1} a_2[S](2, 1) = (a_{12} - a_{21}) + (a_{12} - a_{22}),$$

$$2 \frac{\partial}{\partial \alpha_2} a_2[S](2, 1) = 0,$$

$$(40) \quad 2 \frac{\partial}{\partial \alpha_1} a_2[S](2, 2) = a_{11} - a_{21} > 0, \quad 2 \frac{\partial}{\partial \alpha_2} a_2[S](2, 2) = a_{12} - a_{21}.$$

Пусть $(i_0, j_0) = (1, 1)$. Поскольку в точке (36) имеет место (37), то в окрестности точки (36) ожидаемый средний выигрыш $a_2[S](1, 1)$ (а) возрастает по α_1 при $a_{12} > a_{21}$, (б) убывает по α_1 при $a_{12} < a_{21}$, (в) убывает по α_2 . Поэтому при достаточно малом ε ожидаемый средний выигрыш $a_2[S](1, 1)$ как функция от (α_1, α_2) , независимо от выбора пары (β_1, β_2) , удовлетворяющей (7), достигает в пределах ограничений (б) максимума в единственной точке $(\alpha_1^*, \alpha_2^*) = (1, 0)$ при $a_{12} > a_{21}$ и в единственной точке $(\alpha_1^*, \alpha_2^*) = (1 - \varepsilon, 0)$ при $a_{12} < a_{21}$. Этим закончено доказательство утверждения 1 леммы для случая $(i_0, j_0) = (1, 1)$ (см. пункт (i) и случаи 1.1 и 1.2 из таблицы 1).

Пусть $(i_0, j_0) = (1, 2)$. Поскольку в точке (36) имеет место (38), то в окрестности точки (36) ожидаемый средний выигрыш $a_2[S](1, 2)$ (а) возрастает по α_2 при $a_{12} > a_{21}$ и при одновременном выполнении $a_{12} < a_{21}$ и $2a_{21} < a_{11} + a_{12}$, (б) убывает по α_2 при одновременном выполнении $a_{12} < a_{21}$ и $2a_{21} > a_{11} + a_{12}$,

Рассмотрим зависимость $a_2[S](1, 2)$ от α_1 при ограничениях (6), (7) (в соответствии с (38) в точке (36) $\partial a_2[S](1, 2)/\partial \alpha_1 = 0$).

Согласно (25) (28), (30), (1) и (7) для произвольных $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$, удовлетворяющих (6), (7), имеем

$$(41) \quad 2 \frac{\partial a_2[S](1, 2)}{\partial \alpha_1} = [r_1(\beta_1 - \beta_2)\alpha_2 + (r_1\beta_2 - r_2)]\beta_1,$$

где

$$r_1 = a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22} > 0, \quad r_2 = a_{22} - a_{12} > 0,$$

при этом функция $a_2[S](1, 2)$, очевидно, линейна по α_1 . В силу (1) и (7) $r_2/r_1 < 1$. Пусть $\varepsilon < \varepsilon_*$ где $\varepsilon_* > 0$ таково, что

$$\frac{r_2}{r_1} < 1 - \varepsilon_*, \quad r_1\varepsilon_* < (1 - \varepsilon_*)r_1 - r_2.$$

Тогда для произвольных $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$, удовлетворяющих (6), (7), выполняется

$$r_1(\beta_1 - \beta_2)\alpha_2 + (r_1\beta_2 - r_2) > -r_1\varepsilon + (1 - \varepsilon)r_1 - r_2 > 0.$$

Следовательно, в соответствии с (41), в области (6), (7) функция $a_2[S](1, 2)$ строго возрастает по α_1 при $\beta_1 > 0$ и постоянна по α_1 при $\beta_1 = 0$.

Принимая во внимание установленные выше свойства монотонности функции $a_2[S](1, 2)$ по переменным α_1 и α_2 , заключаем, что, при достаточно малом ε , независимо от выбора пары (β_1, β_2) , удовлетворяющей (7), $a_2[S](1, 2)$ достигает, в пределах ограничений (6), максимума в следующих точках: (а) в случае $\beta_1 > 0$ – в единственной точке $(\alpha_1^*, \alpha_2^*) = (1, \varepsilon)$ при $a_{12} > a_{21}$ и при одновременном выполнении неравенств $a_{12} < a_{21}$ и $2a_{21} < a_{11} + a_{12}$ и в единственной точке $(\alpha_1^*, \alpha_2^*) = (1, 0)$ при одновременном выполнении неравенств $a_{12} < a_{21}$ и $2a_{21} > a_{11} + a_{12}$; (б) в случае $\beta_1 = 0$ – во всех точках вида $(\alpha_1^*, \alpha_2^*) = (\alpha_1^*, \varepsilon)$, где $\alpha_1^* \in [1 - \varepsilon, 1]$, при $a_{12} > a_{21}$ и при одновременном выполнении $a_{12} < a_{21}$ и $2a_{21} < a_{11} + a_{12}$ и во всех точках вида $(\alpha_1^*, \alpha_2^*) = (\alpha_1^*, 0)$, где $\alpha_1^* \in [1 - \varepsilon, 1]$, при одновременном выполнении неравенств $a_{12} < a_{21}$ и $2a_{21} > a_{11} + a_{12}$. Этим закончено рассмотрение случаев 1.5, 1.6 и 1.7 из таблицы 1.

Пусть $(i_0, j_0) = (2, 1)$. Поскольку в точке (36) имеет место (39), то в окрестности точки (36) ожидаемый средний выигрыш $a_2[S](2, 1)$ (а) убывает по α_1 при $a_{12} < a_{21}$ и при одновременном выполнении $a_{12} > a_{21}$ и $2a_{12} < a_{22} + a_{21}$, (б) возрастает по α_1 при одновременном выполнении $a_{12} > a_{21}$ и $2a_{12} > a_{22} + a_{21}$.

Рассмотрим зависимость $a_2[S](2, 1)$ от α_2 при ограничениях (6), (7) (в соответствии с (39) в точке (36) $\partial a_2[S](2, 1)/\partial \alpha_2 = 0$). Согласно (25) (28), (31), (1) и (7) для произвольных $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$, удовлетворяющих (6), (7), имеем

$$(42) \quad 2 \frac{\partial a_2[S](2, 1)}{\partial \alpha_2} = [r_1(\beta_1 - \beta_2)\alpha_1 + (r_1\beta_2 - r_2)](1 - \beta_2),$$

где

$$r_1 = a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22} > 0, \quad r_2 = a_{22} - a_{12} > 0,$$

при этом функция $a_2[S](2, 1)$, очевидно, линейна по α_2 . В силу (1) и (7) $r_2/r_1 > 0$. Пусть $\varepsilon < \varepsilon_*$ где $\varepsilon_* > 0$ таково, что

$$\frac{r_2}{r_1} > \varepsilon_*, \quad 3r_1\varepsilon_* < r_1 + r_2.$$

Тогда для произвольных $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$, удовлетворяющих (6), (7), выполняется

$$r_1(\beta_1 - \beta_2)\alpha_1 + (r_1\beta_2 - r_2) < 3r_1\varepsilon - r_1 - r_2 < 0.$$

Следовательно, в соответствии с (42), в области (6), (7) функция $a_2[S](2, 1)$ строго убывает по α_2 при $\beta_2 < 1$ и постоянна по α_2 при $\beta_2 = 1$.

Принимая во внимание установленные выше свойства монотонности функции $a_2[S](2, 1)$ по переменным α_1 и α_2 , заключаем, что, при достаточно малом ε , независимо от выбора пары (β_1, β_2) , удовлетворяющей (7), $a_2[S](2, 1)$ достигает, в пределах ограничений (6), максимума в следующих точках: (а) в случае $\beta_2 < 1$ – в единственной точке $(\alpha_1^*, \alpha_2^*) = (1 - \varepsilon, 0)$ при $a_{12} < a_{21}$ и при одновременном выполнении $a_{12} > a_{21}$ и $2a_{12} < a_{22} + a_{21}$ и в единственной точке $(\alpha_1^*, \alpha_2^*) = (1, 0)$ при одновременном выполнении $a_{12} > a_{21}$ и $2a_{12} > a_{22} + a_{21}$. (б) в случае $\beta_2 = 1$ – во всех

точках вида $(\alpha_1^*, \alpha_2^*) = (1 - \varepsilon, \alpha_2^*)$, где $\alpha_2^* \in [0, \varepsilon]$, при $a_{12} < a_{21}$ и при одновременном выполнении $a_{12} > a_{21}$ и $2a_{12} < a_{22} + a_{21}$ и во всех точках вида $(\alpha_1^*, \alpha_2^*) = (1, \alpha_2^*)$, где $\alpha_2^* \in [0, \varepsilon]$, при одновременном выполнении неравенств $a_{12} > a_{21}$ и $2a_{12} > a_{22} + a_{21}$. Этим закончено рассмотрение случаев 1.8, 1.9 и 1.10 из табл. 1.

Пусть $(i_0, j_0) = (2, 2)$. Поскольку в точке (36) имеет место (40), то в окрестности точки (36) ожидаемый средний выигрыш $a_2[S](2, 2)$ (а) возрастает по α_1 , (б) убывает по α_2 при $a_{12} > a_{21}$, (в) возрастает по α_2 при $a_{12} < a_{21}$. Поэтому при достаточно малом ε ожидаемый средний выигрыш $a_2[S](2, 2)$ как функция от (α_1, α_2) , независимо от выбора пары (β_1, β_2) , удовлетворяющей (7), достигает в пределах ограничений (6) максимума в единственной точке $(\alpha_1^*, \alpha_2^*) = (1, 0)$ при $a_{12} > a_{21}$ и в единственной точке $(\alpha_1^*, \alpha_2^*) = (1, \varepsilon)$ при $a_{12} < a_{21}$. Этим закончено рассмотрение случаев 1.3 и 1.4 из таблицы 1.

Лемма 1 доказана.

Доказательство леммы 2. Проведем преобразование игры. Имея исходные матрицы выигрышей

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix},$$

введем новые матрицы \bar{A} и \bar{B} , поменяв игроков местами и перенумеровав элементы матриц следующим образом:

$$(43) \quad (i, j) \rightarrow (\bar{i}, \bar{j}) \quad : \quad (2, 1) \rightarrow (1, 1), \quad (1, 1) \rightarrow (1, 2), \\ (2, 2) \rightarrow (2, 1), \quad (1, 2) \rightarrow (2, 2).$$

Получаем

$$(44) \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} \\ \bar{a}_{21} & \bar{a}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{21} & b_{11} \\ b_{22} & b_{12} \end{pmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{pmatrix} \bar{b}_{11} & \bar{b}_{12} \\ \bar{b}_{21} & \bar{b}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{11} \\ a_{22} & a_{12} \end{pmatrix}.$$

Используя соотношения (1) между элементами исходных матриц A и B , приходим к следующим соотношениям между элементами матриц \bar{A} и \bar{B} :

$$\bar{b}_{12} > \bar{b}_{11}, \quad \bar{b}_{21} > \bar{b}_{22}, \quad \bar{a}_{11} > \bar{a}_{21}, \quad \bar{a}_{22} > \bar{a}_{12}.$$

Эти соотношения имеют вид (1). Рассмотрим повторяющуюся игру ε -наилучших ответов с заменой матриц выигрышей A и B на \bar{A} и \bar{B} соответственно. Обозначим через $(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2) = (\beta_2, \beta_1)$ и $(\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2) = (\alpha_2, \alpha_1)$ функции ε -наилучшего ответа первого и второго игроков в новой игре. По доказанной выше лемме 1 существует $\bar{\varepsilon}_1 \in (0, 1/2)$ такое, что при $\varepsilon \leq \bar{\varepsilon}_1$ справедливы следующие утверждения.

1) Существует единственная функция $(\bar{\alpha}_1^*, \bar{\alpha}_2^*)$ ε -наилучшего ответа первого игрока такая, что

(i) для всяких $(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2) \in \bar{U}(\varepsilon) \setminus \{(\bar{\alpha}_1^*, \bar{\alpha}_2^*)\}$ и $(\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2) \in \bar{V}_{\bar{i}_0, \bar{j}_0}(\varepsilon)$ выполняется

$$(45) \quad \bar{a}_2[(\bar{\alpha}_1^*, \bar{\alpha}_2^*), (\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2)] > \bar{a}_2[(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2), (\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2)],$$

(ii) в случае $(\bar{i}_0, \bar{j}_0) = (1, 2)$ при всяком $(\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2) \in \bar{V}(\varepsilon) \setminus \bar{V}_{\bar{i}_0, \bar{j}_0}(\varepsilon)$ для любого $(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2) \in \bar{U}(\varepsilon)$ такого, что $\bar{\alpha}_2 \neq \bar{\alpha}_2^*$, выполняется (45), а для любого $(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2) \in \bar{U}(\varepsilon)$ такого, что $\bar{\alpha}_2 = \bar{\alpha}_2^*$, выполняется

$$(46) \quad \bar{a}_2[(\bar{\alpha}_1^*, \bar{\alpha}_2^*), (\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2)] = \bar{a}_2[(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2), (\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2)].$$

(iii) в случае $(\bar{i}_0, \bar{j}_0) = (2, 1)$ при всяком $(\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2) \in \bar{V}(\varepsilon) \setminus \bar{V}_{\bar{i}_0, \bar{j}_0}(\varepsilon)$ для любого $(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2) \in \bar{U}(\varepsilon)$ такого, что $\bar{\alpha}_1 \neq \bar{\alpha}_1^*$, выполняется (45), а для любого $(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2) \in \bar{U}(\varepsilon)$ такого, что $\bar{\alpha}_1 = \bar{\alpha}_1^*$, выполняется (46).

2) При этом значения $\bar{\alpha}_1^*$ и $\bar{\alpha}_2^*$ задаются следующей таблицей.

Таблица 3.

(\bar{i}_0, \bar{j}_0)	условие	$(\bar{\alpha}_1^*, \bar{\alpha}_2^*)$
(1, 1)	$\bar{a}_{12} > \bar{a}_{21}$	(1, 0)
(1, 1)	$\bar{a}_{12} < \bar{a}_{21}$	$(1 - \varepsilon, 0)$
(2, 2)	$\bar{a}_{12} > \bar{a}_{21}$	(1, ε)
(2, 2)	$\bar{a}_{12} < \bar{a}_{21}$	(1, 0)
(1, 2)	$\bar{a}_{12} > \bar{a}_{21}$	(1, ε)
(1, 2)	$\bar{a}_{12} < \bar{a}_{21}, \bar{a}_{21} < (\bar{a}_{11} + \bar{a}_{12})/2$	(1, ε)
(1, 2)	$\bar{a}_{12} < \bar{a}_{21}, \bar{a}_{21} > (\bar{a}_{11} + \bar{a}_{12})/2$	(1, 0)
(2, 1)	$\bar{a}_{12} < \bar{a}_{21}$	$(1 - \varepsilon, 0)$
(2, 1)	$\bar{a}_{12} > \bar{a}_{21}, \bar{a}_{12} < (\bar{a}_{22} + \bar{a}_{21})/2$	$(1 - \varepsilon, 0)$
(2, 1)	$\bar{a}_{12} > \bar{a}_{21}, \bar{a}_{12} > (\bar{a}_{22} + \bar{a}_{21})/2$	(1, 0)

Переходя обратно к старым обозначениям и используя (43) и (44), получаем следующую таблицу.

Таблица 4.

(i_0, j_0)	условие	(β_1^*, β_2^*)
(2, 1)	$b_{11} > b_{22}$	(0, 1)
(2, 1)	$b_{11} < b_{22}$	$(0, 1 - \varepsilon)$
(1, 2)	$b_{11} > b_{22}$	$(\varepsilon, 1)$
(1, 2)	$b_{11} < b_{22}$	(0, 1)
(1, 1)	$b_{11} > b_{22}$	$(\varepsilon, 1)$
(1, 1)	$b_{11} < b_{22}, b_{22} < (b_{11} + b_{21})/2$	$(\varepsilon, 1)$
(1, 1)	$b_{11} < b_{22}, b_{22} > (b_{11} + b_{21})/2$	(0, 1)
(2, 2)	$b_{11} < b_{22}$	$(0, 1 - \varepsilon)$
(2, 2)	$b_{11} > b_{22}, b_{11} < (b_{12} + b_{22})/2$	$(0, 1 - \varepsilon)$
(2, 2)	$b_{11} > b_{22}, b_{11} > (b_{12} + b_{22})/2$	(0, 1)

Таблица 4 совпадает с таблицей 2, что завершает доказательство леммы 2.

Благодарности

Автор выражает признательность своему научному руководителю акад. А.В. Кряжимскому за постановку задачи и руководство в процессе её решения.

Литература

1. ВОРОБЬЕВ Н.Н. *Теория игр для экономистов-кибернетиков*. – Москва: Наука, 1985.
2. НЕВЕ Ж. *Математические основы теории вероятностей*. – Москва: Мир, 1969.
3. AXELROD R. *The Evolution of Cooperation*. – Basic Books, 1984. ISBN 0-465-02122-2.
4. FUDENBERG D., KREPS D.M. *Learning mixed equilibria // Games and Econ. Behavior*. – 1993. – Vol. 5. – P. 320–367.

5. HOFBAUER J., SIGMUND K. *The Theory of Evolution and Dynamical Systems*. – Cambridge University Press, Cambridge, 1988.
6. KANIOVSKI YU.M., KRYAZHIMSKIY A.V., YOUNG H.P. *Learning equilibria in games played by heterogeneous populations // Games and Economic Behavior*. – 2000. – Vol. 31. – P. 50–96.
7. KLEIMENOV A.F., KRYAZHIMSKIY A.V. *Minimum-noncooperative trajectories in repeated games, Complex Dynamical Systems with Incomplete Information // (E. Reithmeier and G. Leitmann, eds.)*. – Shaker Verlag, Aachen, 1999. – P. 94–107.
8. KRYAZHIMSKIY A.V., OSIPOV YU.S. *On evolutionary-differential games // Proc. of Steklov Math. Inst.* – 1995. – Vol. 211. – P. 257–287.
9. NOWAK M., SIGMUND K. *The Alternating Prisoner's Dilemma // J. Theor. Biol.* – 1994. – Vol. 168. – P. 219–226.
10. VAN DER LAAN G., TIEMAN X. *Evolutionary Game Theory and the Modeling of Economic Behavior // De Economist*. – 1998. – Vol. 146, № 1. – P. 59–89.
11. WEIBULL J. *Evolutionary Game Theory*. – Cambridge: The M.I.T. Press, 1995.

A 2×2 ε -BEST RESPONSE STOCHASTIC TWO-STEP GAME

Anastasia Raygorodskaya, Lomonosov Moscow State University, Moscow, post-graduate student (asik.vmk@gmail.com).

Abstract: A 2×2 ε -best response repeated game, in which each player in each subsequent round chooses a pure strategy based on the result of a random test, is analyzed. The random test is generated by the player's arbitrary mixed strategy prescribing the player to choose his/her best response to his/her partner's previously chosen pure strategy with a high probability. The so defined decision making patterns (called ε -best response functions) are interpreted as the players' behavioral strategies. These strategies define a stochastic game, in which the expected benefits averaged over all the rounds act as the players' benefits. The game is analyzed in the two-step case. A classification of the Nash equilibrium points is provided, and the equilibrium values are compared with the average benefits gained through the deterministic usage of the players' best response pure strategies.

Keywords: repeated games, bimatrix games, best response.

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии М. В. Губко*

УДК 519.612+632.4
ББК 22.18

МОДЕЛЬ ЭНДОГЕННОГО ФОРМИРОВАНИЯ КОАЛИЦИЙ С ДВУМЯ ТИПАМИ ИГРОКОВ¹

Степанов Д.С.²,

(Факультет вычислительной математики и кибернетики,
Московский государственный университет, Москва)

Рассматривается модель формирования коалиций игроками, характеризующимися значением некоторого параметра (географическое положение, идеальная точка). Новизна постановки заключается в предположении о неоднотипности игроков: к основному множеству добавляется небольшая доля игроков с функцией выигрыша, отличной от функции выигрыша игроков основного типа. Рассмотрены различные концепции коалиционной устойчивости и получены соответствующие необходимые и достаточные условия. Проанализировано соотношение данных условий для игр с одним и двумя типами игроков.

Ключевые слова: коалиционная устойчивость, равновесие Нэша, слабое коалиционное равновесие (СКР).

Введение

Одно из современных направлений в теории игр связано с исследованием моделей эндогенного формирования коалиций в больших неоднородных популяциях игроков. В такой игре игроки похожи в смысле вида функции выигрыша и множества стратегий, но различаются по некоторому параметру $x \in X$ (идеальная точка), при этом все множество игроков описывается распределением по указанному параметру. Стратегия игрока – выбор некоторой коалиции, стратегия коалиции представляет собой точку из

¹ Текст приводится в соответствии с изданием «Математическая теория игр и ее приложения. – 2010. – Т. 2. № 2. – С. 79–98».

² Денис Сергеевич Степанов, студент (dn.step@gmail.com).

X и определяется по заданному правилу в зависимости от состава коалиции. Размер коалиции пропорционален доле игроков, вошедших в нее. Игроки однородны по функции выигрыша, которая зависит от двух параметров: возрастает по размеру коалиции и убывает по расстоянию между идеальной точкой x и стратегией коалиции.

Подобные модели используются в политологии и экономической географии при изучении вопросов устойчивости разбиения населения по странам [1, 2], а также по юрисдикциям (муниципалитетам или регионам) внутри страны [3, 4]. Они находят также применение при анализе устойчивых разбиений избирателей по политическим партиям [5, 6], социальных сетей (в Интернет-сообществах) и коалиций вообще [7, 8]. В указанных исследованиях авторы рассматривают вопросы существования и коалиционной устойчивости равновесий Нэша и изучают их свойства.

Однако, в данной области актуальной и практически неисследованной проблемой является учет в моделях неоднородности игроков не только по значению параметра, но и по характеру зависимости выигрыша от аргументов, то есть, другими словами, во всех упомянутых исследованиях предполагается, что игроки однотипны с точки зрения вида функции выигрыша. В реальной жизни можно наблюдать множество примеров, подтверждающих, что выигрыши агентов с одинаковой идеальной точкой в целом могут сильно отличаться или меняться с течением времени (вследствие каких-либо событий).

В настоящей работе рассматриваются структуры, являющиеся равновесными в модели с однотипными игроками, и исследуются их свойства в игре с двумя типами игроков, отличающихся характером зависимости выигрыша от аргументов. Для таких структур были найдены необходимые и достаточные условия *локальной устойчивости* (то есть устойчивости к образованию новых коалиций путем раскола или объединения существующих) и исследована их связь с аналогами для случая однотипной группы игроков. Также найден критерий существования *слабого коалиционного равновесия* (то есть равновесия, в котором не выгодно

образование вообще любых новых коалиций – например, из частей нескольких существующих коалиций).

1. Модель

Сначала приведем, следуя [8], формальное описание игры в случае, когда игроки относятся к одному типу. Пусть множество идеальных точек можно представить как отрезок $[0, 1] = X$, а игроки равномерно распределены по идеальным точкам на данном отрезке. Есть достаточно большой набор меток M : «Коалиция 1», «Коалиция 2»,... (например, в случае формирования политических партий это «социалисты», «демократы», «либералы» и т.д.). Пусть $M = \{1, 2, \dots, \bar{M}\}$. Каждый из игроков, выбирая соответствующую метку, становится членом коалиции или же не вступает ни в одну из коалиций (метка «0»). Стратегия (политика) коалиции определяется как медиана распределения членов коалиции по идеальным точкам (самое распространенное в литературе правило). Размер коалиции пропорционален доле игроков, выбравших соответствующую метку.

В общем случае коалицией i является множество игроков, выбравших метку i . В дальнейшем ограничимся анализом ситуаций, в которых каждая коалиция $i \in M$ характеризуется интегрируемой функцией $\delta_i(x), x \in X$, описывающей плотность распределения по идеальным точкам игроков, выбравших метку i . В этом случае размер r_i коалиции $i \in M$ формально определяется как $r_i = \int_0^1 \delta_i(x) dx$.

Ситуация игры \mathcal{D} определяется как множество коалиций ненулевого размера $I \subset M$ и набор $(\delta_i(x), i \in I)$ интегрируемых функций, показывающих долю игроков с идеальной точкой x , выбравших коалицию $i \in I$: $\mathcal{D} = \left\{ \delta_i(x) \geq 0 : \sum_{i \in I} \delta_i(x) \leq 1, x \in [0, 1], i \in I \right\}$. Пусть $\delta_0(x) = 1 - \sum_{i \in I} \delta_i(x)$ – доля игроков, не вступивших в коалиции. Стратегия

P_i коалиции задается условием $\int_0^{P_i} \delta_i(x) dx = \int_{P_i}^1 \delta_i(x) dx$. Выигрыш игрока с идеальной точкой x , вошедшего в коалицию $i \in I$,

определяется как

$$(1) \quad U(x, i, \mathcal{D}) = R(r_i(\mathcal{D})) - L(|P_i(\mathcal{D}) - x|),$$

где $R(\cdot), L(\cdot)$ – некоторые положительные монотонно возрастающие функции, причем $L''(\cdot) \geq 0, R''(\cdot) \leq 0$. Выигрыш игрока в случае отказа от вступления в коалиции равен 0. Обозначим данную игру как \mathcal{G}_1 .

Заметим, что выигрыш игрока в коалиции нулевого размера заведомо неположителен, поэтому будем предполагать, что доля игроков, выбравших такие коалиции, равна нулю.

В данной модели ситуация игры $\mathcal{D} = (\delta_i(x), i \in I)$ является *равновесием Нэша (РН)*, если для любого $x \in X$ и $i \in \bar{I}$ из того, что $\delta_i(x) > 0$ следует $i \in \operatorname{Argmax}_{j \in \bar{I}} U(x, j, \mathcal{D})$, где $\bar{I} = I \cup 0$. То

есть в РН каждый игрок выбирает коалицию, максимизирующую его выигрыш. Заметим, что *атомарная структура* (ни один из игроков не вступил в коалицию) – всегда РН.

Ниже исследуются *регулярные РН (PPH)*, то есть равновесия, в которых нет коалиций с одинаковой стратегией. Понятие *PPH* введено в [8], поскольку нерегулярные равновесия заведомо неустойчивы к объединению коалиций.

Рассмотрим следующую модификацию игры \mathcal{G}_1 – игру \mathcal{G}_2 . К исходному множеству игроков (*типа 1* или *старого, основного* типа) добавляется некоторое количество игроков (*типа 2* или *нового* типа) с иной функцией выигрыша таким образом, что доля игроков нового типа в общем множестве игроков равна $\lambda > 0$. При этом рассматривается два варианта относительного распределения игроков разных типов:

D1 Игроки обоих типов равномерно распределены на всем отрезке $[0, 1]$.

D2 Игроки типа 2 равномерно распределены по идеальным точкам только на некотором сегменте $S \subset [0, 1]$ длины λ , а игроки типа 1 – на дополнении этого сегмента.

Пусть функция $J_t(x) \geq 0$ показывает долю игроков типа $t \in \{1, 2\}$ среди игроков с идеальной точкой $x \in [0, 1]$. Тогда $J_1(x) +$

$J_2(x) = 1$ и в случае D1 функция $J_2(x) \equiv \lambda$, а в случае D2 – выражается как:

$$J_2(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in S; \\ 0 & \text{при } x \in [0, 1] \setminus S. \end{cases}$$

В игре \mathcal{G}_2 ситуация игры \mathcal{D} определяется как множество коалиций ненулевого размера $I \subset M$ и набор интегрируемых функций $\delta_i^t(x)$, показывающих долю игроков типа $t \in \{1, 2\}$ с идеальной точкой x , выбравших коалицию $i \in I$:

(2) $\mathcal{D}(I) =$

$$\left\{ \delta_i^t(x) \geq 0 : \sum_{i \in I} ((1-\lambda)\delta_i^1(x) + \lambda\delta_i^2(x)) \leq 1, x \in [0, 1], i \in I, t = 1, 2 \right\}$$

Таким образом, в игре \mathcal{G}_2 каждая коалиция $i \in I$ задается парой функций (δ_i^1, δ_i^2) . Пусть $\delta_i(x) = (1-\lambda)\delta_i^1(x) + \lambda\delta_i^2(x)$ для $i \in I$ и $\delta_0(x) = 1 - \sum_{i \in I} \delta_i(x)$. Размер r_i и стратегия P_i коалиции $i \in I$

определяется так же, как в игре \mathcal{G}_1 . Выигрыш игрока в игре \mathcal{G}_2 определяется аналогично формуле (1), но каждому типу $t \in \{1, 2\}$ соответствуют свои функции $R_t(\cdot)$ и $L_t(\cdot)$:

(3) $U_t(x, i, \mathcal{D}) = R_t(r_i(\mathcal{D})) - L_t(|P_i(\mathcal{D}) - x|)$.

Причем $L_t(\cdot), R_t(\cdot) \geq 0, L'_t(\cdot), R'_t(\cdot) \geq 0, L''_t(\cdot) \geq 0$ и $R''_t(\cdot) \leq 0$. В дальнейшем для обозначения выигрыша игрока x типа $t \in (1, 2)$ в коалиции i размера r_i со стратегией P_i будем использовать запись $U_t(x, r_i, P_i)$.

В игре \mathcal{G}_2 равновесие Нэша – такая ситуация игры $\mathcal{D} = (\delta_i^t(x), i \in I, t = 1, 2)$ в которой, для любого типа $t \in \{1, 2\}, x \in X$ и $i \in \bar{I}$ из того, что $\delta_i^t(x) > 0$ следует $i \in \underset{j \in \bar{I}}{\text{Argmax}} U_t(x, j, \mathcal{D})$,

где $\bar{I} = I \cup 0$. Понятие регулярного РН вводится аналогично игре \mathcal{G}_1 .

Поиск равновесных структур в данной теоретико-игровой модели, исходя из определения, предполагает решение сложных экстремальных задач на функциональном пространстве: необходимо найти множество $\bar{I} \subset M \cup \{0\}$ и такой набор интегрируемых функций $\bar{\mathcal{D}}(\bar{I}) = \{\delta_i^t(x), i \in \bar{I}, t = 1, 2\}$, удовлетворяющий

условию (2), что для любого $x \in [0, 1]$ из того, что $\delta_i(x) > 0$, следует, что $i \in \operatorname{Argmax}_{j \in \bar{I}} U(x, r_j, P_j)$, где r_j и P_j в свою очередь зависят от \bar{D} . Применение стандартных оптимизационных методов для решения данной задачи не приводит к содержательным результатам. В настоящей работе развивается подход, предложенный в работе [8], для описания равновесных коалиционных структур и их коалиционной устойчивости в игре \mathcal{G}_1 .

2. Равновесие Нэша

Напомним, что в игре \mathcal{G}_1 под коалицией $i \in I$ мы понимаем соответствующую функцию плотности δ_i . Носитель $\operatorname{supp} \delta_i$ функции δ_i задает множество S_i идеальных точек игроков, выбравших коалицию i . В общем случае $\delta_i(x)$ для данного $x \in [0, 1]$ может принимать любое значение из отрезка $[0, 1]$ и, следовательно, по множеству S_i нельзя однозначно восстановить исходную коалицию. Но в равновесии Нэша $\delta_i(x) = 1$ при $x \in \operatorname{int} S_i$ и множество S_i однозначным образом (с точностью до множества игроков, расположенных на его границе, мера которого равна нулю) соответствует множеству игроков, выбравших коалицию $i \in I$. Поэтому при поиске равновесий под коалицией $i \in I$ будем понимать более простой объект – множество S_i .

Можно показать, что в игре \mathcal{G}_1 в регулярном равновесии отрезок $[0, 1]$ разбивается на непересекающиеся интервалы идеальных точек игроков, выбравших одну коалицию (или не вступивших ни в одну из коалиций). Более того в работе [8] показано, что существует всего три типа равновесных разбиений игроков на коалиции (см. теорему 1).

Рассмотрим уравнение $R_t(r) - L_t(r/2) = 0$ для некоторого $t \in \{1, 2\}$. Отметим, что если данное уравнение имеет положительное решение, то в указанных предположениях оно единственно. Обозначим данное решение через r^* . Рассмотрим некоторое натуральное число m . Для игры \mathcal{G}_1 с игроками типа $t \in \{1, 2\}$ справедлива следующая теорема.

Теорема 1. ([8], стр.1522) *В игре \mathcal{G}_1 существуют следующие*

три типа РРН.

а) Разбиение отрезка $[0, 1]$ на m коалиций одинакового размера $r = 1/m$ является РРН тогда и только тогда, когда $r \leq r^*$. В частности, если $r^* \geq 1$ или $R_t(r) > L(r/2)$ для любого $r > 0$, то такая структура является РРН для любого m ; если $L'_t(0) > 2R'_t(0)$, то единственное РРН – атомарная структура.

б) Если $r^* \in (0, 1)$, то для любого $u \in (0, \max_r (R_t(r) - L_t(r/2)))$ существуют два решения $r_1(u), r_2(u) \in (0, 1)$ уравнения $u = R_t(r) - L_t(r/2)$, и если существуют натуральные числа m_1, m_2 такие, что $m_1 r_1(u) + m_2 r_2(u) = 1$, то разбиение отрезка $[0, 1]$ на m_1 коалиций размера $r_1(u)$ и m_2 коалиций размера $r_2(u)$ является РРН (коалиции могут располагаться в любом порядке).

с) Для любого $m < 1/r^*$ любое разбиение отрезка $[0, 1]$ на m коалиций размера r^* и $l \leq m + 1$ интервалов игроков, воздержавшихся от вступления в коалиции, является РРН.

Не существует других РРН кроме указанных.

Рассмотрим типы равновесий, описанные в пунктах б) и с) утверждения. Каждый из данных типов равновесий оказывается неустойчивым в некотором смысле. Коалиционная структура, соответствующая равновесию типа б) в игре \mathcal{G}_1 , в ситуации общего положения не будет равновесной в игре \mathcal{G}_2 , поскольку из того, что $R_t(r_1) - L_t(r_1/2) = R_t(r_2) - L_t(r_2/2)$ для $t = 1$, вообще говоря, не следует выполнение данного равенства для $t = 2$. А равновесие типа с) неустойчиво к образованию новых коалиций (из игроков, выбравших стратегию «0»). Таким образом, при исследовании эффектов, возникающих в равновесиях, при переходе от игры \mathcal{G}_1 к игре \mathcal{G}_2 будем рассматривать только структуры, описанные в пункте а) утверждения. Обозначим подобную структуру через K_m , а через r – размер коалиции в K_m : $r = 1/m$. Данная структура является равновесной тогда и только тогда, когда выигрыш игрока, находящегося на границе коалиции, неотрицателен:

$$(4) \quad R_t(r) - L_t(r/2) \geq 0.$$

В отличие от игры \mathcal{G}_1 в игре \mathcal{G}_2 коалиции $i \in I$ соответствует пара функций плотности (δ_i^1, δ_i^2) . Аналогичным образом носитель функции $\text{supp} \delta_i^t$ задает множество S_i^t идеальных точек

игроков типа $t \in \{1, 2\}$, выбравших коалицию i , и в равновесии множество S_i^t однозначным образом (с точностью до множества игроков, расположенных на его границе, нулевой меры) соответствует множеству игроков типа $t \in \{1, 2\}$, выбравших коалицию $i \in I$. В этом случае под коалицией $i \in I$ будем понимать пару множеств (S_i^1, S_i^2) . Это оказывается целесообразно и при исследовании коалиционной устойчивости равновесий, поскольку если $S_i^t = S_j^t, t = 1, 2$, и выгодно образование коалиции $i : \delta_i^t(x) \leq 1, x \in S_i^t, t = 1, 2$, то выгодно образование коалиции $j : \delta_j^t(x) = 1, x \in S_j^t, t = 1, 2$.

Для коалиции $i \in I$ такой, что каждое из множеств $S_i^t, t = 1, 2$, представляет собой отрезок, *границей коалиции i* будем называть множество крайних точек соответствующих интервалов. В этом случае *соседними* для коалиции i будут коалиции, пересечение границ которых с границей коалиции i не пусто.

3. Локальная устойчивость

Равновесие Нэша устойчиво в том смысле, что отклонение одного игрока от состояния равновесия не приводит к увеличению его выигрыша. В то же время хорошо известны примеры, когда одновременное отклонение нескольких игроков от равновесия приводит к увеличению выигрыша всех этих игроков. В связи с этим в литературе рассматриваются различные понятия коалиционной устойчивости равновесий. Основная часть данной работы также посвящена исследованию устойчивости коалиционных структур, являющихся регулярными равновесиями Нэша как в игре \mathcal{G}_1 (с игроками типа 1), так и в игре \mathcal{G}_2 (с игроками обоих типов), к образованию новых коалиций.

В работе рассматриваются следующие понятия коалиционной устойчивости. РН устойчиво к *локальному расколу*, если не существует новой коалиции, являющейся подмножеством некоторой коалиции и обеспечивающей большие выигрыши всем своим членам. РН устойчиво к *объединению*, если не существует новой коалиции, являющейся объединением соседних коалиций и обеспечивающей большие выигрыши всем своим членам. Если РН

устойчиво к локальному расколу и объединению, то оно *локально устойчиво*.

Теорема 2. ([8], стр. 1522) *В игре \mathcal{G}_1 с игроками типа $t \in \{1, 2\}$ равновесная структура K_m , $m = 2, 3, \dots$, локально устойчива тогда и только тогда, когда*

$$(5) \quad R_t(2r) - R_t(r) \leq L_t(r) - L_t(r/2).$$

Как было указано в предыдущем разделе, в игре \mathcal{G}_1 в равновесной структуре K_m выполнено условие (4) неотрицательности выигрыша граничного игрока. Оказывается, что указанное условие является критерием устойчивости структуры к локальному расколу. При невыполнении данного условия части агентов, близких к границе коалиции, невыгодно быть в ее составе (им выгодно выйти из состава данной коалиции или образовать новую коалицию меньшего размера). Таким образом, в данной игре равновесная структура K_m всегда устойчива к локальному расколу. Условие (5) гарантирует, что объединение соседних коалиций невыгодно. Это следует из того, что объединение любого числа соседних коалиций невыгодно, когда невыгодно объединение двух соседних коалиций, а последнее определяется величиной выигрыша граничных агентов объединенной коалиции. Покажем, что для игры \mathcal{G}_2 справедливы аналогичные результаты (при любом из предположений D1-D2).

Теорема 3. *Пусть для игроков типа 1 выполнены условия (4)–(5). В этом случае структура K_m является равновесием Нэша и локально устойчива в игре \mathcal{G}_2 тогда и только тогда, когда для игроков типа 2 выполнено условие (4).*

Доказательство. Следуя доказательству утверждения 2 из работы [8], можно показать, что условие (4) обеспечивает устойчивость к индивидуальным отклонениям игроков нового типа, а также к образованию коалиций (достаточно малого размера), состоящих из этих игроков (и, возможно, игроков старого типа). При этом не требуется выполнения условия (5), поскольку устойчивость к локальному объединению будет обеспечиваться игроками старого типа, для которых выполнены условия локальной устойчивости (4)–(5).

4. Слабое коалиционное равновесие

В данном разделе будет рассматриваться усиление понятия локальной устойчивости – понятие слабого коалиционного равновесия.

Равновесие Нэша называется *слабым коалиционным равновесием (СКР)*, если не существует новой коалиции, обеспечивающей бóльшие выигрыши всем своим членам.

Сначала приведем результаты для игры \mathcal{G}_1 , а в последующих подразделах – аналогичные результаты для игры \mathcal{G}_2 для вариантов распределения игроков D1 и D2.

При исследовании коалиционной устойчивости вводится дополнительное предположение относительно функций $R(\cdot)$ и $L(\cdot)$: $L'''(\cdot) \geq 0$, $R'''(\cdot) \leq 0$.

4.1. СКР В ИГРЕ \mathcal{G}_1

В работе [8] было доказано достаточное условие эквивалентности понятий локальной устойчивости и слабого коалиционного равновесия в случае $R(r) \equiv r$ (теорема 2, стр. 1522). Ниже приведем обобщение данного утверждения.

Теорема 4. *В игре \mathcal{G}_1 с игроками типа $t \in \{1, 2\}$ локально устойчивая структура K_m является СКР тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

$$(6) \quad L'_t(r/2) \geq R'_t(r) \text{ и}$$

$$(7) \quad R_t(r^*) - R(r) + L_t(r^*/2 - r/2) - L_t(r^*/2) \leq 0,$$

где $r^* = \min \{x^*, \frac{3}{2}r\}$, если существует решение уравнения $R'_t(x^*) + \frac{1}{2}L'_t(x^*/2 - r/2) - \frac{1}{2}L'_t(x^*/2) = 0$, и $r^* = r$ иначе.

Дополнительные ограничения (6)–(7) на локально устойчивые структуры возникают по следующей причине. Из доказательства теоремы 2 из [8] видно, что условия локальной устойчивости (4) и (5) обеспечивают устойчивость к образованию любых коалиций размера меньше r и больше $2r$ соответственно, но не гарантируют невыгодность образования коалиций, размер которых принадлежит интервалу $(r, 2r)$.

Также в работе [8] приведено достаточное условие *СКР*, в котором ограничения на параметры модели формулируются в более простом виде.

Следствие 1. ([8], стр. 1522) *Локально устойчивая структура K_m является СКР, если выполнено условие (6) и условие (8)*

$$R'_t(2r) + \frac{1}{2}L'_t(r/2) - \frac{1}{2}L'_t(r) \geq 0.$$

4.2. ИГРА \mathcal{G}_2 В ПРЕДПОЛОЖЕНИИ D1.

Напомним, что вариант D1 предполагает равномерное распределение игроков двух типов на отрезке $[0, 1]$.

В зависимости от свойств функций R_2 и L_2 добавление игроков нового типа к исходному множеству игроков может либо «разрушить» *СКР*, то есть привести к тому, что структура, являющаяся *СКР* в игре \mathcal{G}_1 , не будет *СКР* в игре \mathcal{G}_2 , либо наоборот обеспечить устойчивость, если ее не было. Нас будет интересовать первый исход, который может произойти по двум причинам:

- A1 Игроки нового типа являются *большими индивидуалистами*. То есть либо более чувствительны к росту удаленности: $L'_2(\cdot) > L'_1(\cdot)$, либо менее чувствительны к росту размера коалиции: $R'_2(\cdot) < R'_1(\cdot)$ (либо и то и другое одновременно).
- A2 Игроки нового типа являются *большими конформистами*. В этом случае предполагается выполнение неравенств, обратных неравенствам в предположении A1.

Рассмотрим последовательно данные случаи и для каждого из них приведем утверждения, характеризующие *СКР* в игре \mathcal{G}_2 .

Теорема 5. *Пусть выполнено предположение A1. Структура K_m является СКР в игре \mathcal{G}_2 тогда и только тогда, когда она является равновесной в игре \mathcal{G}_2 , то есть для игроков обоих типов выполнено условие (4), а также СКР в игре \mathcal{G}_1 с игроками типа 1, то есть для игроков типа 1 выполнены условия (5)–(7).*

Доказательство. Из выполнения предположения A1, а также неравенств (4)–(7) для игроков типа 1, следует, что возможен

единственный случай, при котором возникновение игроков нового типа может привести к тому, что структура K_m , являющаяся СКР в игре \mathcal{G}_1 (с игроками типа 1), не является СКР в игре \mathcal{G}_2 . Это возможно только, когда игрокам типа 2 выгодно выйти из состава существующей коалиции, посредством образования коалиции достаточно малого размера. Но при выполнении неравенства (4) игрокам типа 2 невыгодно создание такой коалиции.

Заметим, что предположение A2 не ограничивает «степень» конформизма игроков нового типа, которая а priori может быть достаточно велика для того, чтобы разрушить любое СКР. Например, если значение $L'_2(\cdot)$ на отрезке $[0,1]$ ограничено достаточно малой величиной, то игрокам типа 2 может быть выгодно всем вместе присоединиться к какой-либо существующей коалиции и тем самым образовать новую коалицию большего размера. В связи с этим необходимо ввести дополнительное ограничение на выигрыш игроков нового типа и самое естественное в данном случае – потребовать выполнение условия устойчивости к локальному объединению для игроков типа 2.

Теорема 6. Пусть выполнено предположение A2 и условия локальной устойчивости (4)–(5) структуры K_m для каждого из типов. Структура K_m является СКР тогда и только тогда, когда для типа 1 выполнены условия (6) и

(9) $R_1((1-\lambda)r_\lambda^* + 2r\lambda) - R_1(r) + L_1(r_\lambda^*/2 - r/2) - L_1(r_\lambda^*/2) \leq 0$,
 где $r_\lambda^* = \min\{x^*, \frac{3}{2}r\}$, если существует решение уравнения $(1 - \lambda + \lambda 2r/x^*)R'_1((1-\lambda)x^* + 2r\lambda) + \frac{1}{2}L'_1(x^*/2 - r/2) - \frac{1}{2}L'_1(x^*/2) = 0$,
 и $r_\lambda^* = r$ иначе, а для типа 2 – неравенство

(10)
$$L'_2(r/2) \geq \lambda R'_2(r).$$

Доказательство. Пусть π_1 – новая (потенциальная) коалиция со стратегией P_1 и размером r_1 . Рассмотрим сначала случай $r_1 \geq 2r$. Тогда π_1 формируется из членов как минимум двух коалиций из K_m , и, следовательно, существует игрок x типа $t \in \{1, 2\}$, такой что $|P_1 - x| \geq r_1/2$. Справедливо неравенство $R_t(r_1) - L_t(|P_1 - x|) \leq R_t(r_1) - L_t(r_1/2) = U_t(r_1)$. Обозначим $\Delta U_t(r_1) = U_t(r_1) - U_t(r)$. Тогда из устойчивости к локальному объединению вытекает, что $\Delta U_t(2r) \leq 0$. С учетом того, что

$\Delta U_t(r) = 0$ и $\Delta U_t(\cdot)$ – вогнутая функция получаем, что для любого размера $r_1 \geq 2r$ прирост выигрыша игрока x при смене коалиции $\Delta U_t(r_1) < 0$.

Пусть $r_1 \leq r$ и коалиция π_1 представляет собой связное множество. Предположим, что она несимметрична относительно своей стратегии. Пусть x – игрок типа $t \in \{1, 2\}$, чья идеальная точка расположена ближе всего к стратегии его исходной коалиции P . С учетом предположений относительно знака второй производной функций $R_t(\cdot)$ и $L_t(\cdot)$ прирост выигрыша этого игрока будет минимальным (среди игроков его типа). Пусть ρ обозначает расстояние от P_1 до ближайшей границы исходной коалиции из K_m , которой принадлежит P_1 . Фиксируем значение r_1 и подберем параметр $\varepsilon = const$ таким образом, что $|x - P_1| = \varepsilon r_1$, причем $\varepsilon > \frac{1}{2}$ (так как x – ближайший к P игрок). Прирост выигрыша игрока x при переходе в коалицию π_1 равен $\Delta U_t(x, r_1, P_1) = R_t(r_1) - R_t(r) + L_t(z_1) - L_t(z_2)$, где $z_1 = r/2 - (\varepsilon r_1 + \rho)$, $z_2 = |x - P_1| = \varepsilon r_1$ (далее по тексту индекс t опускаем). Заметим сразу, что ΔU убывает по ρ (то есть оптимальное положение коалиции – когда P_1 находится на границе существующих коалиций). Пусть $V(r_1) = \Delta U(r_1) + R(r) - R(r - r_1)$ и, значит, $\Delta U(r_1) \leq V(r_1)$ и функция $V(r_1)$ вогнута.

Существует значение r_1^* такое, что $z_1 = z_2$. При этом $r_1^* \leq \frac{r}{2}$ поскольку при $r_1^* > \frac{r}{2}$ значение $z_1 = \frac{r}{2} - \varepsilon \frac{r_1^*}{2} < \frac{r_1^*}{4} < z_2$ и $\Delta U < 0$. Значение $V(0) = -R(r) + L(r/2) \leq 0$ и $V(r_1^*) < 0$, следовательно, $V(r_1) \leq 0$ для всех $r_1 \leq r/2$.

Теперь предположим, что π_1 представляет собой произвольную (не обязательно связную) коалицию размера $r_1 \leq r$. Фиксируем игрока x , чья идеальная точка наиболее удалена от P_1 . Существует связная коалиция размера r_1 со стратегией P'_1 , в которой x также является граничным игроком, и причем $|P'_1 - x| \leq |P_1 - x|$. При этом $\Delta U(x, r_1, P_1) \leq \Delta U(x, r_1, P'_1)$. Но выше было показано, что $\Delta U(x, r_1, P'_1) \leq 0$.

Пусть, наконец, $r \leq r_1 \leq 2r$. Сначала покажем, что создание несимметричной коалиции (в смысле взаимного расположения множеств идеальных точек игроков типов 1 и 2) невыгодно.

Существуют два варианта оптимального расположения π_1 относительно исходной структуры: когда π_1 содержит (а) одну или (б) две точки, соответствующие стратегиям некоторых коалиций из K_m .

Покажем для варианта (а) невыгодность создания несимметричных коалиций (в случае (б) доказательство проводится аналогичным образом). Обозначим: x_1, x_2 – граничные агенты типа T_1 , z – расстояние от указанных граничных агентов до стратегии P_1 в случае симметричной коалиции, ρ – расстояние от агента x_i , до стратегии его исходной коалиции в случае симметричной коалиции, $\delta > 0$ – смещение стратегии P_1 относительно симметричного случая, d – смещение агента x_1 относительно его положения в симметричной конфигурации (см. рис. 1). Для

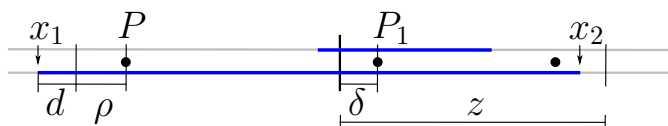


Рис. 1. Несимметричная коалиция в случае (а).

того, чтобы «компенсировать» игроку x_1 потерю выигрыша из-за смещения политики P_1 в сторону от него, необходимо подобрать достаточно большое смещение d . Покажем, что это невозможно без того, чтобы выигрыш агента x_2 не снизился по сравнению с его выигрышем в симметричной конфигурации. Прирост выигрыша каждого из агентов в этом случае равен (индексы при функциях $R(\cdot)$ и $L(\cdot)$ опускаем):

$$\begin{cases} \Delta_1 U(d, \delta) = R(r_1) - R(r) + L(\rho + d) - L(z + d + \delta), \text{ для } x_1, \\ \Delta_2 U(d, \delta) = R(r_1) - R(r) + L(\rho - d) - L(z - d - \delta), \text{ для } x_2. \end{cases}$$

Предположим, что существует функция $d(\delta)$ (дифференцируемая при $\delta \geq 0$) такая, что существует значение $\delta_0 > 0$ такое, что $\Delta U_i(d(\delta_0), \delta_0) > 0, i = 1, 2$. В силу непрерывности рассматриваемых функций данные неравенства выполняются в некоторой

окрестности точки δ_0 и $d'(\delta) > 0$ на некотором интервале из этой окрестности. Продифференцировав по δ каждый из приростов и сложив полученные выражения, получим:

$$\Delta_1 U' + \Delta_2 U' = d' [L'(\rho + d) - L'(\rho - d)] - d' [L'(z + d + \delta) - L'(z - d - \delta)] - [L'(z + d + \delta) - L'(z - d - \delta)].$$

Следовательно, так как интервал $(z - d - \delta, z + d + \delta)$ больше интервала $(\rho - d, \rho + d)$, значение $z + d + \delta$ больше $\rho + d$, а функция $L(\cdot)$ выпукла, то $\Delta_1 U' + \Delta_2 U' < 0$ для любого δ и, значит, $\Delta_1 U + \Delta_2 U < 0$. Таким образом, пришли к противоречию и $d = \delta = 0$.

С учетом доказанного выше, далее рассматриваются только симметричные коалиции, при этом также сохраняется деление на два случая – (а) и (б), описанное выше в доказательстве. Рассмотрим случай (а). Поместим начало координат в точку $P_1 = P$. Пусть $\frac{x}{2}$ – наиболее удаленный от стратегии коалиции агент нового типа из коалиции π_1 , $\frac{z}{2}$ – соответствующий агент старого типа. Для любой конфигурации π_1 существует $\tau > 0$ такое, что $z = \tau x$. Заметим, что конфигурация π_1 такая, что x или z больше $2r$ или в которой x (или z) меньше r невыгодна. Таким образом, в случае (а) x и z могут принимать значения только из диапазона: $x, z \in [r, 2r]$.

Прирост выигрыша крайнего агента типа 1 при переходе в коалицию π_1 равен $\Delta U_1(x) = \Delta R_1 + L_1(r - \frac{x}{2}) - L_1(\frac{x}{2})$, где $\Delta R_1 = R_1((1 - \lambda)x + \lambda\tau x) - R_1(r)$ (прирост для игрока нового типа выписывается аналогичным образом). Заметим, что $\Delta U_1(r) = R_1((1 - \lambda)r + \lambda\tau r) - R_1(r) = 0$ при $\tau = 1$ ($z = r$) и $\Delta U_1(r) > 0$ при $\tau > 1$. При этом $\Delta U_1''(x) \leq 0$ и при $\tau = 1$ значение $\Delta U_1'(r) \leq 0$ (следует из условия СКР) и, значит, $\Delta U_1'(x) \leq 0$ для любого x . Таким образом, для существования устойчивости к образованию подобных коалиций необходимо и достаточно чтобы для типа 2 конфигурация π_1 с $\tau > 1$ была невыгодна (для любого x). Значение ΔU_2 при $x = r$ равно $\Delta U_2|_{x=r} = R_2((1 - \lambda)r + \lambda\tau r) - R_2(r) + L_2(r - \frac{\tau r}{2}) - L_2(\frac{\tau r}{2})$ и равно нулю при $\tau = 1$. При этом вторая производная по τ

прироста выигрыша отрицательна при $\tau \geq 1$ для любого x . Следовательно, для того чтобы при $x = r$ значение ΔU_2 было меньше нуля необходимо и достаточно, чтобы производная $(\Delta U_2)'_{\tau}$ при $\tau = 1$ была отрицательной, что выполнено при выполнении условия (10).

Рассмотрим вариант расположения (b). Данная конфигурация является для игроков старого типа более выгодной, когда $\Delta R_1 + L_1(|x/2 - r/2|) - L_1(x/2) \geq \Delta R_1 + L_1(r - x/2) - L_1(x/2)$, что эквивалентно $x \geq \frac{3r}{2}$ и x в данном случае находится в пределах между $\frac{3r}{2}$ и $2r$ (аналогичное справедливо для типа 2). Условие, обеспечивающее устойчивость к образованию коалиций указанного типа, имеет вид: $\Delta U_1(x_{\tau}^*) \leq 0$, где $x_{\tau}^* \in (\frac{3r}{2}, 2r)$ – точка максимума прироста выигрыша на отрезке. Можно показать, что производная x_{τ}^* по τ положительна. Производная прироста выигрыша игрока старого типа по τ в точке x_{τ}^* равна $(\Delta U_1(x_{\tau}^*))'_{\tau} = \lambda x_{\tau}^* R_1'(r_1^*)$ и, следовательно, функция $\Delta U_1(x_{\tau}^*)$ возрастает по τ . Таким образом, необходимо найти максимальное возможное значение τ и обеспечить невыгодность образования такой конфигурации. Из локальной устойчивости следует, что $z = \tau x \leq 2r$. Значит, с учетом того, что x_{τ}^* возрастает по τ , максимальное значение τ^* равно $\frac{2r}{x_{\tau^*}^*}$, где $x_{\tau^*}^*$ определяется из условия (9) при $\tau = \frac{2r}{x_{\tau^*}^*}$.

Также приведем два следствия из теоремы, формулирующие условия устойчивости в более удобном виде и позволяющие упростить анализ устойчивости коалиционных структур.

Следствие 2. Структура K_m является СКРв игре \mathcal{G}_2 , если для типа 1 выполнено достаточное условие СКР для игры \mathcal{G}_1 , то есть условия (4)–(5) и неравенства (6) и (8), а для типа 2 – неравенство (10).

Следствие 3. Пусть структура K_m является СКР в игре \mathcal{G}_1 с игроками типа 1. Тогда она является СКР и в игре \mathcal{G}_2 , если для игроков типа 2 выполнено условие (10) и неравенство

$$\lambda R_2'(3r/2) + \frac{1}{2}L_2'(r/4) - \frac{1}{2}L_2'(3r/4) \leq 0.$$

Отметим, что основное отличие следствия 3 от теоремы и след-

ствия 2 в том, что в этом варианте утверждения не требуется дополнительных ограничений на тип 1.

В качестве иллюстрации рассмотрим следующий пример. Пусть выигрыш игрока типа $t \in \{1, 2\}$ равен

$$(11) \quad U_t(x, r, P) = 2\alpha_t r - |x - P|^{k_t},$$

где $\alpha_t \geq 0, k_t \geq 2$. Оказывается, что соотношение на параметры выигрыша игроков каждого типа в СКР можно выразить через две переменные: $\beta_t = \frac{2\alpha_t}{(r/2)^{k_t-1}}$ и k_t . С учетом следствия 2 ограничения на параметры в СКР имеют следующий вид:

$$(12) \quad k_1(2^{k_1-1} - 1) \leq \beta_1 \leq \min \left\{ 2k_1, 2^{k_1} - 1 \right\},$$

$$(13) \quad 1 \leq \beta_2 \leq \min \left\{ \frac{1}{\lambda} 2k_2, 2^{k_2} - 1 \right\}.$$

На рис. 2 изображены кривые, входящие в неравенства (12), и заштрихована область, в которой ограничения (12) выполняются. Из рисунка в частности видно, что, поскольку m возрастает с ростом β_1 , то с ростом эластичности функции потерь k_1 число коалиций в устойчивой структуре возрастает, а чем больше значение параметра α , тем больше должен быть размер коалиций в K_m . Также из (13) следует, что с ростом доли λ игроков нового типа значение m уменьшается.

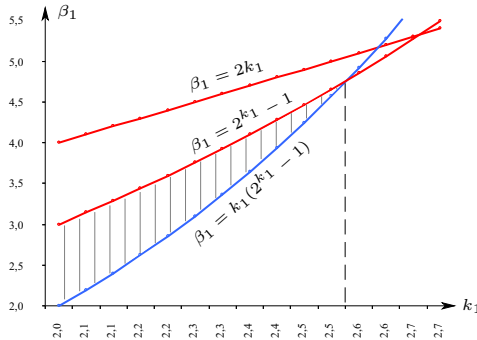


Рис. 2. Область допустимых значений параметров в СКР

4.3. ИГРА \mathcal{G}_2 В ПРЕДПОЛОЖЕНИИ D2

Напомним, что в варианте D2 относительного распределения игроков предполагается распределение игроков нового типа на некотором небольшом сегменте $S \subset [0, 1]$ длины $\lambda < r$. В разделе 3 было показано, что СКР возможно только в коалиционной структуре K_m , которая, согласно теореме 3, в игре \mathcal{G}_2 остается равновесной и локально устойчивой при выполнении для игроков типа 2 условия неотрицательности выигрыша граничного игрока (4).

Оказывается, что в предположении A1 (игроки типа 2 являются большими индивидуалистами) условия СКР для варианта относительного распределения игроков D2 полностью аналогичны соответствующим условиям для варианта D1.

Теорема 7. Пусть выполнено предположение A1. Структура K_m является СКР при варианте относительного распределения игроков D2 тогда и только тогда, когда она является СКР при варианте распределения D1.

В предположении A2 (игроки типа 2 являются большими конформистами) СКР может быть разрушено из-за выгоды создания новых коалиций, расположенных несимметрично относительно исходной равновесной структуры K_m (поскольку граничными игроками могут являться игроки разных типов). Более того, можно показать, что наибольшая «угроза» СКР возникает, когда игроки нового типа находятся на границе одной из существующих коалиций.

Теорема 8. Пусть выполнено предположение A2, структура K_m является СКР в игре \mathcal{G}_1 с игроками типа 1 и равновесной в игре \mathcal{G}_2 . В этих условиях структура K_m будет СКР в игре \mathcal{G}_2 тогда и только тогда, когда выполнено одно из двух неравенств:

$$(14) \quad \begin{cases} L'_1(r/2) \geq 2R'_1(r), \\ L'_2(r/2) \leq \frac{2}{3}R'_2(r). \end{cases}$$

Доказательство. Пусть π_1 – новая (потенциальная) коалиция со стратегией P_1 и размером r_1 , и аналогично доказательству теоремы 6 рассмотрим сначала случай $r_1 \geq 2r$. Здесь рассуждения аналогичны рассуждениям в соответствующем пункте теоре-

мы 6. Единственное отличие заключается в том, что поскольку $|S| = \lambda < r_1$ и в коалицию π входят игроки обоих типов, то устойчивость будет обеспечиваться игроками старого типа.

В случае $r_1 \leq r$ самая «опасная» с точки зрения устойчивости ситуация – когда игроки нового типа находятся на границе существующих коалиций. Но, аналогично доказательству теоремы 6, в этом случае также можно показать, что устойчивость будет обеспечиваться условием равновесия (4).

При $r \leq r_1 \leq 2r$ нужно также рассматривать два варианта расположения π_1 относительно K_m (см. доказательство теоремы 6) и аналогичным образом можно показать, что и в этом случае прирост выигрыша граничного игрока новой коалиции будет минимальным (среди его типа). Обозначим данного игрока через x . Заметим, далее, что в обоих вариантах расположения π_1 прирост граничного игрока старого типа будет тем больше, чем ближе граница π_1 расположена к границе коалиции из K_m и максимален, когда этот игрок является граничным агентом как π_1 , так и одной из коалиций из K_m . Прирост его выигрыша в этом случае равен $\Delta U_1(x, r_1, P_1) = R_1(r_1) - R_1(r) + L_1(r/2) - L_1(r_1/2)$, где $r \leq r_1 \leq 2r$. Заметим, что $\Delta U_1(r) = 0$ и $\Delta U_1'' < 0$, и если при этом минимальный прирост выигрыша игроков нового типа будет положителен, то для устойчивости необходимо и достаточно, чтобы $\Delta U_1'(r_1 = r) \leq 0$, и, таким образом, приходим к условиям (14)

Таким образом, только при выполнении более сильного ограничения на выигрыш игроков типа 1 (см. условие (6)) структура K_m остается СКР при возникновении игроков нового типа.

Вернемся теперь к примеру с функцией выигрыша вида (11). С учетом (14) ограничения на параметры функций выигрыша игроков старого типа примут вид:

$$k_1(2^{k_1-1} - 1) \leq \beta_1 \leq \min \left\{ k_1, 2^{k_1} - 1 \right\}.$$

Данное ограничение является более сильным, чем условие (12) и выполняется только при $k_1 = 2$. Таким образом, только за счет ограничений на свойства функции выигрыша игроков старого ти-

па не удается гарантировать устойчивость. Но при этом, если удастся гарантировать выполнение ограничений

$$1 \leq \beta_2 \leq \frac{1}{\lambda} 2k_2 \left(\left(\frac{3}{2}\right)^{k_2-1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{k_2-1} \right),$$

то коалиционная структура останется устойчивой при возникновении группы игроков нового типа, причем при $k_2 \geq 3$ данное условие гарантированно выполняется при выполнении неравенства (13), но при $2 \leq k_2 \leq 3$ наоборот является более сильным.

Литература

1. ALESINA A., SPOLAORE E. *On the Number and Size of Nations* // Quarterly Journal of Economics. – 1997. – Vol. 112, № 4. – P. 1027–1056.
2. ALESINA A.M., SPOLAORE E. *The size of Nations*. – Cambridge, MA: MIT Press, 2003.
3. BOGOMOLNAIA A.M., LE BRETON M., SAVVATEEV A., ET AL. *Stability of Jurisdiction Structures under the Equal Share and Median Rules* // IDEI Working Papers. – 2005. – N 362.
4. BOGOMOLNAIA A.M., LE BRETON M., SAVVATEEV A., ET AL. *The Egalitarian Sharing Rule in Provision of Public Goods* // Economic Bulletin. – 2005. – Vol. 8, № 11. – P. 1–5.
5. GOMBERG A.M., MARHUENDA F., ORTUÑO-ORTÍN I. *Endogenous Platforms: The Case of Many Parties* // International Journal of Game Theory. – 2005. – Vol. 35, № 2. – P. 223–249.
6. ORTUÑO-ORTÍN I., ROEMER J.E. *Endogenous Party Formation and the Effect of Income Distribution on Policy* // Ivie. – 2000. – Vol. AD, № 6. – P. 921–935.
7. SOSINA YU.V. *Endogenous Formation of Political Structures and Their Stability* // ORM2004: Труды. М.: МАКС Пресс. – 2004. – С. 215–216.
8. VASIN A.A., STEPANOV D.S. *Endogenous Formation of Political Parties* // Mathematical and Computer Modelling. – 2008. – Vol. 48, № 9-10. – P. 1519–1526.

TWO TYPES OF PLAYERS IN THE ENDOGENOUS COALITION FORMATION MODEL

Denis S. Stepanov, Moskow State University (dn.step@gmail.com).

Abstract: A model of coalition formation by players whose payoff depends on the value of the parameter (e.g., geographical location, bliss point) is considered. In this model a small portion of the new players with a different payoff function is injected into the main population. This paper considers different types of coalition stability and for each describes corresponding stability criteria. The derived conditions are then compared with the similar criteria in the game with a single type of players.

Keywords: coalition stability, Nash equilibrium, weak coalitional equilibrium (WCE).

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии Д. А. Новиковым*

УДК 517.977.8 + 519.83
ББК 22.18

УСТОЙЧИВАЯ КООПЕРАЦИЯ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ СО СЛУЧАЙНОЙ ПРОДОЛЖИТЕЛЬНОСТЬЮ¹

Шевкопляс Е.В.²

*(Санкт-Петербургский государственный университет,
Факультет прикладной математики – процессов управления,
Санкт-Петербург)*

Работа посвящена изучению проблемы динамической устойчивости кооперативных решений, впервые сформулированной Петросяном Л.А. в 1977 г. для дифференциальных игр с предписанной продолжительностью. В данной работе рассматривается модификация дифференциальной игры с предписанной продолжительностью, а именно, предполагается, что игра заканчивается в некоторый случайный момент времени. Кроме того, в качестве кооперативного решения используется вектор Шепли. Для такой постановки задачи сформулировано понятие процедуры распределения дележа, и получена аналитическая формула для проверки динамической устойчивости вектора Шепли. Также в работе изучается условие защиты от иррационального поведения участников (условие Д.Янга, 2006) и предложен механизм проверки выполнения этого свойства, основанный на процедуре распределения дележа. Теоретические результаты демонстрируются на примере дифференциальной игры разработки невозобновляемых ресурсов.

Ключевые слова: динамическая устойчивость, устойчивая кооперация, защита от иррационального поведения, разработка невоз-

¹ Текст приводится в соответствии с изданием «Математическая теория игр и ее приложения. – 2010. – Т. 2. № 3. – С. 79–105».

² Шевкопляс Екатерина Васильева, кандидат физико-математических наук (katya_shev@mail.ru).

обновляемых ресурсов, дифференциальная игра со случайной продолжительностью.

Введение

Исследование в данном направлении было начато в 1998 г. под руководством Л.А. Петросяна, которым была сформулирована тема работы – «Кооперативные дифференциальные игры со случайной продолжительностью». Л.А. Петросян предложил изучить проблему динамической устойчивости принципов оптимальности, сформулированную им в конце 1970–х годов для дифференциальных игр с предписанной продолжительностью (см. [2], [1]), для нового класса дифференциальных игр, а именно дифференциальных игр со случайной продолжительностью. В 1966 году в работе [4] изучалась антагонистическая игра преследования двух лиц с терминальными выигрышами в последний момент времени, который являлся случайной величиной с известной функцией распределения. Л. А. Петросян предложил автору рассмотреть общую постановку дифференциальной игры, заканчивающейся в случайный момент времени. Кроме того, выигрыши игроков в новой задаче предполагались интегральными.

Данное исследование переросло в диплом, а затем в кандидатскую диссертацию. Кроме проблемы динамической устойчивости, изученной в работе [5], было выведено уравнение типа Беллмана, позволяющее находить управления с обратной связью для задачи со случайной продолжительностью [6].

В данной работе собраны, переработаны и дополнены материалы, касающиеся проблемы устойчивой кооперации в дифференциальных играх со случайной продолжительностью.

В разделе 2 дается определение игры. В разделе 3 на примере вектора Шепли формулируется проблема динамической устойчивости принципов оптимальности для дифференциальных игр со случайной продолжительностью. В разделе 4 формулируется условие защиты от иррационального поведения участников. В разделе 5 приводится пример дифференциальной игры разработки невозобновляемых ресурсов, причем момент окончания игры

является случайной величиной, распределенной по закону Вейбулла.

1. Модель игры

В исследованиях в области дифференциальных игр, как правило, изучаются дифференциальные игры с предписанной продолжительностью. Это означает, что игра развивается во времени на фиксированном временном промежутке $[t_0, T]$, причем момент окончания игры T известен заранее.

В данной работе изучается модификация дифференциальной игры n лиц с предписанной продолжительностью, а именно, предполагается, что игра развивается на промежутке $[t_0, T]$, где T — случайная величина с известной функцией распределения $F(t)$, $t \in [t_0, \infty)$ [4], [5]. Таким образом, постановка дифференциальной игры со случайной продолжительностью является обобщением постановки дифференциальной игры с предписанной продолжительностью [2].

Итак, рассмотрим дифференциальную игру n лиц $\Gamma(x_0, t_0)$ со случайной продолжительностью $(T - t_0)$ и начальным состоянием x_0 [5]. Динамика игры задается системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$(1) \quad \dot{x} = g(x, u_1, \dots, u_n), \quad x \in R^m, \quad u_i \in U \subseteq \text{comp } R^l, \\ x(t_0) = x_0.$$

Предполагаем, что вектор-функция $g(x, u_1, \dots, u_n)$ непрерывна на $R^m \times U_1 \times \dots \times U_n$, удовлетворяет условию Липшица по x и существует $\lambda > 0$, такое что $\|g(x, u_1, \dots, u_n)\| \leq \lambda(1 + \|x\|)$ для всех $x \in R^m$, $u_i \in U$ [2].

Игра начинается в момент t_0 из состояния x_0 , однако, момент ее окончания не фиксирован заранее, а является реализацией некоторой случайной величины T . Будем полагать, что для случайной величины T задана функция распределения $F(t)$, которая

определена при $t \in [t_0, \infty)$ и удовлетворяет условию нормировки:

$$\int_{t_0}^{\infty} dF(t) = 1.$$

Кроме того, далее будем предполагать существование функции плотности $f(t) = F'(t)$ для случайной величины T .

Функция «мгновенного» выигрыша игрока i в момент времени τ , $\tau \in [t_0, \infty)$ зависит от времени τ и фазовой переменной $x(t_0, x_0, u(\cdot))$, где $u(\cdot) = \{u_1(\cdot), \dots, u_n(\cdot)\}$ — n -набор допустимых программных управлений игроков. Под допустимыми программными управлениями понимаются измеримые по Лебегу программные управления $u_i(\cdot) : t \rightarrow u_i(t) \in R^l$, такие что $u_i(t) \in U$. Для краткости обозначим мгновенную функцию выигрыша как $h_i(\tau, x(\tau), u(\tau))$.

Предполагается, что h_i являются непрерывными функциями на R^m . Тогда ожидаемый интегральный выигрыш игрока i имеет вид:

$$(2) \quad K_i(x_0, t_0, u_1, \dots, u_n) = \int_{t_0}^{\infty} \left[\int_{t_0}^t h_i(\tau, x(\tau), u(\tau)) d\tau \right] f(t) dt, \quad i = 1, \dots, n.$$

Известно, что по теореме Фубини–Тонелли о перестановке интегралов при требовании неотрицательности функций $h_i(\tau, x(\tau), u(\tau))$, функционалы вида (2) в форме повторных интегралов могут быть сведены к функционалам, имеющим стандартный для динамического программирования вид. Если же нельзя гарантировать неотрицательность функции мгновенного выигрыша h_i , но при этом выполнено условие абсолютной сходимости кратного интеграла

$$\iint_{[0, +\infty) \times [0, +\infty)} |f(t) h_i(\tau, x(\tau), u(\tau))| dt d\tau < +\infty,$$

то все равно можно использовать теорему Фубини–Тонелли и также изменить порядок интегрирования [6].

Тогда имеем:

$$\begin{aligned}
 (3) \quad K_i(x_0, t_0, u_1, \dots, u_n) &= \\
 &= \int_{t_0}^{\infty} \left[\int_{t_0}^t h_i(\tau, x(\tau), u(\tau)) d\tau \right] f(t) dt = \\
 &= \int_{t_0}^{\infty} (1 - F(\tau)) h_i(\tau, x(\tau), u(\tau)) d\tau.
 \end{aligned}$$

При развитии игры во времени в некоторый промежуточный момент ϑ , $\vartheta \in (t_0; \infty)$, игроки попадают в подыгру $\Gamma(x(\vartheta))$ с начальным состоянием $x(\vartheta) = x$. Очевидно, что игра может и закончиться до момента ϑ с вероятностью $F(\vartheta)$, а вероятность продолжить игру после момента ϑ равна $(1 - F(\vartheta))$. Тогда под выигрышем в подыгре $\Gamma(x(\vartheta))$ будем понимать условное математическое ожидание выигрыша, а именно:

$$\begin{aligned}
 (4) \quad K_i(x, \vartheta, u_1, \dots, u_n) &= \\
 &= \frac{1}{1 - F(\vartheta)} \int_{\vartheta}^{\infty} (1 - F(\tau)) h_i(\tau, x(\tau), u(\tau)) d\tau.
 \end{aligned}$$

2. Проблема динамической устойчивости кооперативных решений

2.1. КООПЕРАТИВНАЯ ИГРА

Рассмотрим кооперативную форму игры $\Gamma(x_0, t_0)$. Перед началом игры игроки договариваются об использовании ими таких допустимых программных управлений, которые будут максимизировать совокупный ожидаемый выигрыш игроков:

$$\begin{aligned}
 (5) \quad \max_{u_1, \dots, u_n} \sum_{i=1}^n K_i(x_0, t_0, u_1, \dots, u_n) &= \\
 &= \max_{u_1, \dots, u_n} \sum_{i=1}^n \int_{t_0}^{\infty} (1 - F(\tau)) h_i(\tau, x(\tau), u(\tau)) d\tau.
 \end{aligned}$$

Управления $\{u_1^*(t), \dots, u_n^*(t)\}$, доставляющие максимум (5), будем называть оптимальными, а траекторию $x^*(t)$, соответствующую оптимальным управлениям, – условно-оптимальной. Дальнейшее изложение предполагает, что условно-оптимальная траектория единственна.

Важным вопросом, который решается в кооперативной теории игр, является вопрос о выборе конкретного принципа оптимальности как справедливого способа раздела заработанного совместными усилиями выигрыша. Однако мы не будем останавливаться на данном аспекте и для определенности далее будем полагать, что игроки договорились использовать вектор Шепли для раздела суммы (5):

$$(6) \quad Sh_i = \sum_{\substack{S \subseteq N \\ i \in S}} \frac{(n-s)!(s-1)!}{n!} [V(x_0, t_0, S) - V(x_0, t_0, S \setminus \{i\})], i = \overline{1, n}.$$

Характеристической функцией $V(x_0, t_0, S)$, $S \subseteq N$, $|N| = n$, в игре $\Gamma(x_0, t_0)$ будем называть функцию множества, удовлетворяющую условиям:

$$(7) \quad V(x_0, t_0, \emptyset) = 0,$$

$$V(x_0, t_0, S_1 \cup S_2) \geq V(x_0, t_0, S_1) + V(x_0, t_0, S_2),$$

$$\forall S_1, S_2 \subset N, S_1 \cap S_2 = \emptyset,$$

где $V(x_0, t_0, S)$ интерпретируется как максимальное значение математического ожидания выигрыша, которое может обеспечить себе коалиция S в игре $\Gamma(x_0, t_0)$, действуя самостоятельно. Следовательно, $V(x_0, t_0, N)$ определяется по формуле (5).

Аналогичным образом определяется характеристическая функция в подыгре $\Gamma(x_t, t)$, начинающейся в момент времени t из состояния x_t . Отметим, что под характеристической функцией в подыгре понимается максимальное значение условного математического ожидания выигрыша, где условием является «дожитие» до момента t . Следовательно, $V(x_t, t, N)$ определяется как $\max_u \sum_{i=1}^n K_i(x_t, t, u_1, \dots, u_n)$.

Не будем подробно останавливаться на способе построения характеристической функции $V(x_0, t_0, S)$ в дифференциальных играх со случайной продолжительностью. Данный вопрос был подробно исследован в работе [10]. Характеристическая функция может быть построена как стандартным способом — с использованием значения вспомогательной антагонистической игры $\Gamma_{S, N \setminus S}$, так и каким-либо другим образом при условии проверки выполнения свойства супераддитивности (7). В работе [9] предлагается

следующий алгоритм построения характеристической функции $V(x_0, t_0, S)$ в дифференциальных играх: коалиция S максимизирует свой выигрыш, а остальные игроки, не входящие в S , используют равновесные по Нэшу стратегии.

Итак, предположим, что игроки в начальный момент t_0 договорились использовать оптимальные управления $\{u_1^*, \dots, u_n^*\}$, чтобы получить ожидаемый выигрыш (5), а затем разделить его согласно принципу оптимальности (вектору Шепли). Тогда, как и в любой дифференциальной игре, возникает вопрос о реализуемости вектора Шепли во времени или *проблема динамической устойчивости* выбранного игроками принципа оптимальности [2], [1].

2.2. ДИНАМИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ВЕКТОРА ШЕПЛИ

Развитию игры во времени соответствует движение вдоль условно-оптимальной траектории $x^*(t)$, на которой по определению игроки получают наибольший ожидаемый дележ. Однако движение вдоль оптимальной траектории еще не обеспечивает сохранение кооперации. Действительно, при движении вдоль $x^*(t)$ игроки попадают в подыгры с текущими начальными состояниями, в которых один и тот же игрок имеет различные возможности. Следовательно, в некоторый момент ϑ может возникнуть ситуация, когда решение текущей игры $\Gamma(x^*(\vartheta), \vartheta)$ будет неоптимальным в смысле первоначально выбранного принципа оптимальности (в нашем случае — вектора Шепли). Тогда перед игроками встанет вопрос о целесообразности придерживаться далее намеченного перед началом игры соглашения действовать «совместно оптимально». Последнее будет означать динамическую неустойчивость вектора Шепли и, соответственно, самого движения по траектории $x^*(t)$.

Определение 1. Рассмотрим вектор-функцию $\beta(t) = \{\beta_i(t) \geq 0\}_{i=1, \dots, n}$, такую что компоненты вектора Шепли $Sh = \{Sh_i\}_{i=1, \dots, n}$ в игре $\Gamma(x_0, t_0)$ представимы в виде

$$(8) \quad Sh_i = \int_{t_0}^{\infty} (1 - F(t)) \beta_i(t) dt, \quad i = 1, \dots, n.$$

Вектор-функцию $\beta(t) = \{\beta_i(t)\}$ будем называть процедурой распределения дележа (ПРД).

Определение ПРД для игр с фиксированной продолжительностью было введено в работе [1]. В нашей постановке ПРД определяет правило, по которому компоненты ожидаемого дележа распределяются во времени $[t_0, \infty)$. Отметим, что позднее в работах Петросяна Л.А. требование неотрицательности компонент $\beta_i(t)$, $\forall t \geq t_0$, было отменено (см., например, [9], [3]), однако в данной работе будем придерживаться изначальной формулировки.

Определение 2. Будем называть вектор Шепли $\{\bar{S}h_i\}$ динамически устойчивым вектором Шепли, если существует такая ПРД $\{\beta_i(t) \geq 0\}$, $t \in [t_0, \infty)$, что вектор $\bar{S}h^\vartheta = \{\bar{S}h_i^\vartheta\}$, $\forall \vartheta \in [t_0, \infty)$, вычисленный по формуле

$$(9) \quad \bar{S}h_i^\vartheta = \frac{1}{(1 - F(\vartheta))} \int_{\vartheta}^{\infty} (1 - F(t))\beta_i(t)dt, \quad i = 1, \dots, n,$$

также является вектором Шепли в соответствующей подыгре $\Gamma(x^*(\vartheta), \vartheta)$, $\vartheta \in [t_0, \infty)$.

Определение 2 означает, что при распределении дележа $\{\bar{S}h_i\}$ во времени при помощи выплат согласно ПРД $\{\beta_i(\tau)\}$, в каждый текущий момент времени ϑ , $\vartheta \in [t_0, \infty)$, ожидаемый дележ $\{\bar{S}h_i^\vartheta\}$ в оставшейся подыгре $\Gamma(x^*(\vartheta), \vartheta)$ также является вектором Шепли. Таким образом, игроки не имеют оснований для нарушения соглашения о кооперации, заключенного перед началом игры. Последнее означает динамическую устойчивость или, согласно терминологии в англоязычной литературе, временную состоятельность выбранного принципа оптимальности (вектора Шепли).

Принимая во внимание (9), заметим, что динамически устойчивый вектор Шепли $\{\bar{S}h_i\}$ в игре $\Gamma(x_0, t_0)$ может быть представлен в следующем виде:

$$(10) \quad \bar{S}h_i = \int_{t_0}^{\vartheta} (1 - F(\tau))\beta_i(\tau)d\tau + (1 - F(\vartheta))\bar{S}h_i^\vartheta, \quad \forall \vartheta \in [t_0, \infty), i = \overline{1, n}.$$

Первое слагаемое в (10) соответствует сумме, которую игрок получит при движении вдоль условно-оптимальной траектории $x^*(t)$ при $t \in [t_0, \vartheta]$. Второе слагаемое является математическим

ожиданием выигрыша в подыгре $\Gamma(x^*(\vartheta), \vartheta)$ при условии, что игра не закончилась до момента ϑ .

Дифференцируя (10) по ϑ , получаем аналитическую формулу для вычисления ПРД:

$$(11) \quad \beta_i(\vartheta) = \frac{f(\vartheta)}{(1 - F(\vartheta))} \bar{S}h_i^\vartheta - (\bar{S}h_i^\vartheta)', \quad \vartheta \in [t_0, \infty), \quad i = 1, \dots, n.$$

Очевидно, что в игре $\Gamma(x_0, t_0)$ мы всегда можем распределить во времени вектор Шепли $\{Sh_i\}$, используя формулу для выплат (11). Однако в общем случае нельзя гарантировать неотрицательности компонент $\beta_i(\vartheta), \forall \vartheta \in [t_0, \infty)$. Следовательно, в рамках Определения 2 вектор Шепли не является динамически устойчивым в общем случае. Алгоритм проверки динамической устойчивости вектора Шепли является следующим: вычислить компоненты ПРД по формуле (11) и проверить выполнение условия $\{\beta_i(\vartheta) \geq 0\}, \forall \vartheta \in [t_0, \infty)$. Если неотрицательность выполнена, то вектор Шепли $\{Sh_i\}$, распределенный во времени в игре $\Gamma(x_0, t_0)$ согласно (11), является динамически устойчивым.

В противном случае вектор Шепли не является динамически устойчивым принципом оптимальности. Тогда, при выполнении свойства неотрицательности функции мгновенного выигрыша $h_i(\tau, x(\tau), u(\tau)) \geq 0, i = 1, \dots, n$, для получения нового динамически устойчивого (регуляризованного) принципа оптимальности на основе первоначально выбранного игроками динамически неустойчивого принципа оптимальности, может быть использована новая процедура распределения дележа, а именно:

$$(12) \quad \bar{\beta}_i(\vartheta) = \frac{Sh_i^\vartheta \sum_{i=1}^n h_i(\vartheta, x^*(\vartheta), u^*(\vartheta))}{V(x^*(\vartheta), \vartheta, N)}, \quad \vartheta \in [t_0, \infty).$$

На основе $\bar{\beta}_i(\vartheta) \geq 0, i = 1, \dots, n$, можно сформировать так называемый регуляризованный вектор Шепли по формуле (8), который будет удовлетворять условию (10) (см. [5]).

2.3. ФОРМУЛА ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРД

Заметим, что множитель $\frac{f(\vartheta)}{1-F(\vartheta)}$ (функция плотности для случайного момента окончания игры T при условии, что игра не

закончилась до момента ϑ), появившийся в правой части уравнения (11), является стандартной для теории надежности функцией интенсивности отказов:

$$(13) \quad \lambda(t) = \frac{f(t)}{(1 - F(t))}.$$

Тогда, учитывая обозначение (13), выражение для ПРД (11) может быть переписано в следующем виде:

$$(14) \quad \beta_i(\vartheta) = \lambda(\vartheta)S\bar{h}_i^\vartheta - (S\bar{h}_i^\vartheta)', \quad \vartheta \in [t_0, \infty), \quad i = 1, \dots, n.$$

Кроме того, в данной терминологии $(1 - F(\vartheta))$ является функцией «дожития» до момента ϑ , для которой справедлива формула:

$$1 - F(\vartheta) = e^{-\int_{t_0}^{\vartheta} \lambda(t)dt}.$$

Тогда справедливо следующее представление для интегрального выигрыша игрока (3):

$$(15) \quad \int_{t_0}^{\infty} (1 - F(\tau))h_i(\tau, x(\tau), u(\tau))d\tau = \\ = \int_{t_0}^{\infty} h_i(\tau, x(\tau), u(\tau))e^{-\lambda(\tau-t_0)}d\tau,$$

а динамически устойчивый вектор Шепли (10) может быть представлен следующим образом:

$$(16) \quad S\bar{h}_i = \int_{t_0}^{\vartheta} \beta_i(\tau)e^{-\lambda(\tau-t_0)}d\tau + e^{-\lambda(\vartheta-t_0)}S\bar{h}_i^\vartheta.$$

Следовательно, задача со случайной продолжительностью является не только обобщением задачи с предписанной продолжительностью, но и обобщением задачи на бесконечном временном промежутке с дисконтированием мгновенных выигрышей игроков (подробнее см. [6]).

Очевидно, что последнее утверждение распространяется и на результаты относительно вычисления ПРД в играх с предписанной продолжительностью [1], [2] и в играх с дисконтированием с бесконечным временным горизонтом [9]. При $f(\vartheta) = 0$ ($\lambda(\vartheta) = 0$) фактически рассматривается детерминированный случай, однако необходимо дополнительно требовать сходимость несобственных

интегралов, соответствующих интегральным выигрышам игроков. Тогда из (14) получаем следующее выражение для ПРД:

$$\beta_i(\vartheta) = -(S\bar{h}_i^\vartheta)^\prime, \quad i = 1, \dots, n,$$

которое было получено в работе [1].

Кроме того, функция интенсивности отказов $\lambda(t)$ является константой тогда и только тогда, когда случайная величина T распределена по экспоненциальному закону:

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda(t-t_0)}; \quad F(t) = 1 - e^{-\lambda(t-t_0)}, \quad \forall t \geq t_0;$$
$$\frac{f(t)}{1 - F(t)} = \lambda.$$

Тогда интегральный выигрыш (15) в точности совпадает с интегральным выигрышем для постановки задачи с бесконечным временным горизонтом и дисконтированием мгновенных выигрышей экспоненциальной функцией с дискаунт-фактором λ :

$$\int_{t_0}^{\infty} h_i(\tau, x(\tau), u(\tau)) e^{-\lambda \cdot (\tau - t_0)} d\tau,$$

а формула для ПРД (14) в точности совпадает с формулой, полученной в работе [9]:

$$(17) \quad \beta_i(\vartheta) = \lambda S h_i^\vartheta - (S h_i^\vartheta)^\prime.$$

Отметим, что этот результат был получен еще в работе [5].

3. Защита от иррационального поведения игроков

Проблема динамической устойчивости принципов оптимальности, которая была изучена выше на примере проблемы динамической устойчивости вектора Шепли, предполагал рациональное поведение всех участников дифференциальной игры. В этом случае, используя механизм ПРД, можно было добиться того, чтобы у *рациональных* участников не возникло мотивации нарушить соглашение о кооперации.

Однако в настоящее время в теории игр начало уделяться внимание и моделированию *иррациональных* поступков игроков.

Предположим, что в некоторый момент времени ϑ игрок иррационально нарушает соглашение о кооперации, что приводит к распаду большой коалиции N . Для определенности будем полагать, что изначально игроки договорились разделить заработанный совместными усилиями максимальный ожидаемый выигрыш согласно вектору Шепли. Распад коалиции будет означать, что вектор Шепли не реализуем во времени. Следовательно, требуется выполнение некоторого условия для защиты от иррационального поведения игроков. Это условие впервые было сформулировано в работе [11] для игр с предписанной продолжительностью.

Итак, для кооперативной дифференциальной игры со случайной продолжительностью условие защиты от иррационального поведения может быть сформулировано следующим образом:

$$(18) \quad V(x_0, t_0, \{i\}) \leq \int_{t_0}^{\vartheta} (1-F(\tau))\beta_i(\tau)d\tau + (1-F(\vartheta))V(x^*(\vartheta), \vartheta, \{i\}), i = \overline{1, n}, \theta \in [t_0; \infty).$$

Условие (18) означает, что даже если в некоторый момент времени ϑ игрок (либо группа игроков) иррационально нарушил соглашение действовать совместно оптимально, то выбором ПРД можно гарантировать, что ожидаемый выигрыш игрока i во всей игре все равно будет не меньше, чем выигрыш в случае, если бы игрок с самого начала действовал самостоятельно и получил гарантированный выигрыш $V(x_0, t_0, \{i\})$.

Дифференцируя (18), при предположении дифференцируемости функции $V(x^*(\vartheta), \vartheta, \{i\})$ по ϑ , получаем условие на ПРД, обеспечивающее защиту от иррационального поведения:

$$(19) \quad \beta_i(t) \geq \lambda(t)V(\bar{x}(t), t, \{i\}) - \frac{d}{dt}V(\bar{x}(t), t, \{i\}), i = 1, \dots, n,$$

где $\lambda(t)$ определяется по формуле (13).

Очевидно, что для случая $\lambda(t) = 0$ мы фактически имеем полностью детерминированную задачу. Тогда при дополнительном требовании существования всех несобственных интегралов типа (15), из условия (19) имеем неравенства, полученные в работе [3] для дифференциальных игр с предписанной продолжи-

тельностью:

$$(20) \quad \beta_i(t) \geq -\frac{d}{dt}V(\bar{x}(t), t, \{i\}), \quad i = 1, \dots, n,$$

Отметим, что свойство динамической устойчивости принципа оптимальности никак не связано с выполнением условия защиты от иррационального поведения. В следующем разделе приведен пример, когда вектор Шепли является динамически устойчивым, но условие защиты от иррационального поведения не выполнено, и наоборот. Однако оба этих условия являются важными аспектами кооперации в динамических играх [3]. В том случае, когда ПРД удовлетворяет и уравнению (14), и неравенству (19), будем говорить, что вектор Шепли, распределенный во времени согласно ПРД (8), является *устойчивым принципом кооперации*.

В данной работе мы не затрагиваем такой аспект устойчивости кооперативного соглашения, как стратегическая поддержка (см. [3]). Однако отметим, что стратегическая поддержка в кооперативной дифференциальной игре со случайной продолжительностью, т.е. существование специально сконструированного равновесия по Нэшу, может быть конструктивно доказана для независимых движений игроков в (1).

Продолжим рассматривать полностью детерминированную задачу, т.е. пусть $\lambda(t) = 0$. В том случае, когда вектор Шепли является динамически устойчивым принципом оптимальности, т.е. существует $\{\beta_i(t) \geq 0\}$, такая что $\beta_i(t) = -(Sh_i^t)'$, и при этом выполнено условие защиты от иррационального поведения (20), получаем следующее условие устойчивости:

$$(21) \quad (Sh_i^t)' \leq \frac{d}{dt}V(x^*(t), t, \{i\}), \quad i = 1, \dots, n.$$

Напомним, что классическое условие индивидуальной рациональности имеет вид:

$$(22) \quad Sh_i^t \geq V(x^*(t), t, \{i\}), \quad i = 1, \dots, n.$$

Таким образом, условие (21) накладывает ограничения на первые производные для величин, присутствующих в неравенствах (22).

Теперь рассмотрим дифференциальную игру со случайной продолжительностью ($\lambda(t) \neq 0$). Тогда одновременное выполне-

ние условия динамической устойчивости вектора Шепли и защиты от иррационального поведения участников означает выполнение следующих неравенств:

$$(23) \quad \lambda(t)[Sh_i^t - V(\bar{x}(t), t, \{i\})] \geq [(Sh_i^t)' - \frac{d}{dt}V(\bar{x}(t), t, \{i\})],$$

$$\forall t \in [t_0, \infty), \quad i = 1, \dots, n.$$

Очевидно, что из (23) следует выполнение (21) при $\lambda(t) = 0$. Таким образом, результат, полученный для игр со случайной продолжительностью, покрывает результат, полученный для детерминированных игр.

4. Пример

В качестве примера рассмотрим теоретико-игровую модель [7] разработки невозобновляемых ресурсов (в частности, нефти) симметричными игроками. Особо отметим, что спецификой добычи нефти, особенно на континентальном шельфе, является прямая зависимость убытков от аварийности данного предприятия. Аварии на скважинах приводят к простоему производства во время замены и ремонта оборудования, а также к тяжелым экологическим последствиям, затраты на устранение которых часто приводят к колоссальным убыткам. В большинстве известных теоретико-игровых моделей, описывающих динамический процесс добычи нефти несколькими игроками, также как и в работе [7] предполагается, что игра развивается на бесконечном промежутке времени с постоянным дисконтированием мгновенных выигрышей. В данной работе будем предполагать, что мгновенные выигрыши игроков не дисконтируются, но игра заканчивается в случайный момент времени T , распределенный по закону Вейбулла. Выбор распределения Вейбулла, как одного из основных распределений, описывающих жизненный цикл работы технических систем, подробно обоснован в работе [6].

Распределение Вейбулла имеет функцию интенсивности от-

казов следующего вида:

$$(24) \quad \begin{aligned} \lambda(t) &= \lambda \delta t^{\delta-1}; \\ t &\geq 0; \lambda > 0; \delta > 0. \end{aligned}$$

Здесь λ и δ – параметры, определяющие данное распределение. λ – это параметр масштаба, а параметр формы δ соответствует одной из трех фаз, в которой может находиться система. Значение $\delta < 1$ соответствует «новорожденному» сценарию игры (период приработки). Здесь функция интенсивности отказов $\lambda(t)$ является убывающей функцией. При $\delta = 1$ система находится в режиме нормальной эксплуатации, $\lambda(t)$ равна константе λ . Отметим, что при $\delta = 1$ распределение Вейбулла соответствует экспоненциальному распределению. При $\delta > 1$ система находится в состоянии износа, $\lambda(t)$ является возрастающей функцией.

Итак, согласно модели [7], в игре участвуют n игроков – фирмы или страны, которые разрабатывают некоторый невозобновляемый природный ресурс, например, нефть. Множество всех игроков обозначим как $N = \{1, 2, \dots, n\}$. Пусть $x(t)$ – это поток невозобновляемого ресурса. Управлениями игроков являются темпы разработки ресурса, которые обозначим как $\{u_i(t)\}$. Динамика изменений потока ресурса $x(t)$ описывается следующим дифференциальным уравнением:

$$(25) \quad \dot{x}(t) = - \sum_{i=1}^n u_i(t); \quad u_i \geq 0, \quad x(t_0) = x_0, \quad x_0 > 0.$$

Ожидаемый выигрыш (2) игрока i , $i = 1, \dots, n$, при условии, что момент окончания игры описывается законом Вейбулла, принимает вид:

$$(26) \quad K_i(x_0, t_0, u_1, \dots, u_n) = \int_0^{\infty} h_i(t, x(t), u(t)) e^{-\lambda t^{\delta}} dt.$$

В данном примере каждый игрок i имеет функцию полезности $h_i(t, x, u)$ (функцию мгновенного выигрыша) в виде $h_i = h(u_i)$, определенную для всех $u_i > 0$, которая зависит от маргинальной полезности η :

$$(27) \quad h(u_i) = A \ln(u_i) + B, \quad \eta = 1;$$

$$(28) \quad h(u_i) = A \frac{u_i^{1-\eta}}{1-\eta} + B, \quad \eta \neq 1.$$

При $u_i = 0$ по определению полагаем $h(u_i) = 0$. Не умаляя общности, далее будем считать, что $A = 1$, $B = 0$. Кроме того, положим $t_0 = 0$.

Тогда общий ожидаемый выигрыш игроков вычисляется по формуле

$$(29) \quad \sum_{i=1}^n K_i(x_0, t_0, u_1, \dots, u_n) = \int_0^{\infty} \sum_{i=1}^n h(u_i) e^{-\lambda t^{\delta}} dt.$$

Очевидно, что в данной модели рассматриваются только симметричные игроки, поэтому положим $u_i = u_j = u$.

Задача максимизации общего ожидаемого выигрыша (29) при условии (25) может быть решена при помощи уравнения типа Беллмана, выведенного в работе [6]:

$$(30) \quad \lambda(t)W(x, t) = \frac{\partial W(x, t)}{\partial t} + \max_u \left(\sum_{i=1}^n h_i(x, u, t) + \frac{\partial W(x, t)}{\partial x} g(x, u) \right).$$

Кроме того, это уравнение будет использоваться и для вычисления значений характеристической функции $V(x, t, S)$. Подробное построение характеристической функции описано в работе [10].

4.1. ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ ПОЛЕЗНОСТИ

Рассмотрим функцию полезности вида $h(u_i) = \ln(u_i)$. Будем искать функцию Беллмана в виде $W(x, t) = A(t)\ln x + B(t)$, $\lim_{t \rightarrow \infty} W(x, t) = 0$. Тогда частные производные $W(x, t)$ вычисляются по формуле

$$(31) \quad \frac{\partial W(x, t)}{\partial x} = \frac{A(t)}{x}; \quad \frac{\partial W(x, t)}{\partial t} = \dot{A}(t)\ln(x) + \dot{B}(t).$$

Учитывая (31), из условия максимизации правой части уравнения (30) следует, что оптимальные управления имеют вид $u = \frac{x}{A(t)}$. Применяя метод неопределенных коэффициентов в уравнении (30), получаем следующую систему уравнений для коэффициентов $A(t), B(t)$:

$$\dot{A}(t) - \lambda(t)A(t) + n = 0;$$

$$\dot{B}(t) - \lambda(t)B(t) - n \ln(A(t)) - n = 0,$$

и краевыми ограничениями

$$\lim_{t \rightarrow \infty} A(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} B(t) = 0.$$

Окончательно, получаем следующие оптимальные управления для задачи разработки невозобновляемых ресурсов со случайной продолжительностью:

$$(32) \quad u_i^* = u^* = \frac{x \cdot e^{-\lambda(t)t}}{n \int_t^\infty e^{-\lambda(s)s} ds},$$

где $\lambda(t)$ удовлетворяет (24). Тогда при $\delta = 1$, соответствующем экспоненциальному распределению момента окончания игры, фактически рассматривается уже изученная модель с дисконтированными выигрышами на бесконечном временном промежутке [7]. Непосредственно из (32) следует, что при $\delta = 1$ оптимальными стратегиями игроков являются

$$u_i^* = u^* = \frac{\lambda}{n} x, \quad i = 1, \dots, n.$$

Тогда оптимальные управления и траектория вычисляются по формуле

$$x^*(t) = x_0 \cdot e^{-\lambda t}; \quad u_i^*(t) = \frac{\lambda}{n} x_0 \cdot e^{-\lambda t}.$$

Этот результат совпадает с результатом, полученным в работе Докнера и др.[7] для случая дисконтированных выигрышей на бесконечном временном промежутке для единичной эластичности маргинальной полезности игроков, причем выполнено следующее условие:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0.$$

Отметим, что траектория $x^*(t)$ удовлетворяет условию устойчивости по Ляпунову.

Значению характеристической функции $V(x^*(\vartheta), \vartheta, N)$ соответствует значение функции Беллмана $W(x^*(\vartheta), \vartheta)$:

$$\begin{aligned} V(x^*(\vartheta), \vartheta, N) &= W(x^*(\vartheta), \vartheta) = \frac{n}{\lambda} \ln(x^*) - \frac{n}{\lambda} - \frac{n \ln(n)}{\lambda} + \frac{n \ln(\lambda)}{\lambda} = \\ &= \frac{n}{\lambda} \ln(x_0) - n(\vartheta) - \frac{n}{\lambda} - \frac{n \ln(n)}{\lambda} + \frac{n \ln(\lambda)}{\lambda}. \end{aligned}$$

Положим $\vartheta = 0$. Тогда

$$(33) \quad V(x_0, 0, N) = W(x_0, 0) = \frac{n}{\lambda} \ln(x_0) - \frac{n}{\lambda} - \frac{n \ln(n)}{\lambda} + \frac{n \ln(\lambda)}{\lambda}.$$

Далее, для $\delta = 2$, которое соответствует распределению Рэлея для стареющей системы, из (32) получаем

$$u_i^* = \frac{x \cdot e^{-2\lambda t^2}}{n \int_t^\infty e^{-2\lambda s^2} ds}.$$

Тогда оптимальный способ поведения при разработке ресурса должен определяться согласно следующей формуле

$$u_i^* = \frac{2\sqrt{2}\sqrt{\lambda} \cdot e^{-2\lambda t^2}}{n(1 - \operatorname{erf}(\sqrt{2\lambda}t))} x = \frac{2\sqrt{2}\sqrt{\lambda} \cdot e^{-2\lambda t^2}}{n(1 - 2\Phi_0(2\sqrt{\lambda}t))} x,$$

где $\operatorname{erf}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-s^2} ds$, $\Phi_0(t)$ – интегральная функция Лапласа.

Для периода приработки (раннего периода) возьмем $\delta = \frac{1}{2}$. Тогда из уравнения (32) получаем

$$u_i^* = \frac{x \cdot e^{-\frac{\lambda}{2}t^{1/2}}}{n \int_t^\infty e^{-\frac{\lambda}{2}s^{1/2}} ds}.$$

Следовательно, получаем оптимальные стратегии в управлениях с обратной связью:

$$u_i^* = \frac{\lambda^2}{4n(\lambda\sqrt{t} + 2)} x.$$

Таким образом, для модели разработки невозобновляемых ресурсов удалось получить оптимальные решения для всех трех сценариев игры. Графическое изображение $u_i^*(x, t)$ при фиксированном параметре масштаба $\lambda = 1$ и параметрах формы $\delta = 1/2; 1; 2$ приведено на рис.1.

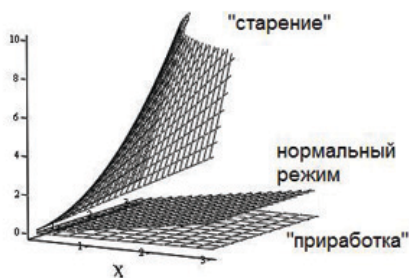


Рис. 1. Оптимальная скорость разработки u_i^* для трех сценариев игры

Интересно, что в рамках нашей модели мы получили, что оптимальное поведение игроков коренным образом отличается для различных сценариев игры. Для фазы приработки, т.е. когда оборудование и общая координация еще не налажены, скорость разработки должна быть наименьшей, что соответствует осторожности игроков. В режиме нормальной эксплуатации игроки должны «копать» с постоянной скоростью. В режиме износа оборудования (впрочем, это также касается и «износа» не только технических элементов), когда функция интенсивности отказов возрастает, необходимо увеличить темпы разработки месторождений.

Кроме того, было численно проанализировано поведение условно - оптимальных траекторий для всех трех фаз игры. Качественное различие убывания невозобновляемых ресурсов представлено на Рис. 2 и Рис. 3.

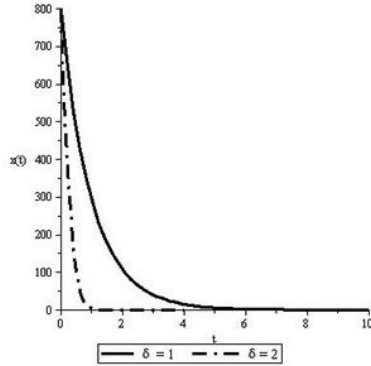


Рис. 2. Оптимальная траектория $x^*(t)$ для режима нормальной эксплуатации и фазы износа

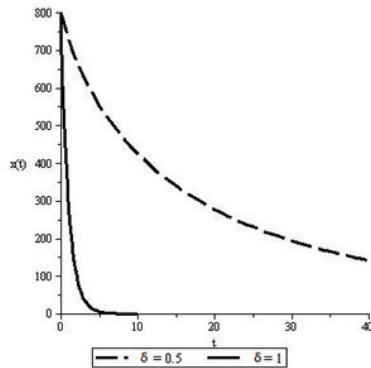


Рис. 3. Оптимальная траектория $x^*(t)$ для фазы приработки и режима нормальной эксплуатации

Заметим, что быстрее всего убывает ресурс при $\delta = 2$, что соответствует интенсивным разработкам в состоянии износа. Медленнее всего убывает ресурс при $\delta = 1/2$, что соответствует осторожным действиям игроков в состоянии приработки.

Далее, заменив $\sum_{i=1}^n h_i$ в уравнении (30) на h_i , можно найти

равновесные по Нэшу управления $\{u_i^{nc}\}$ в классе управлений с обратной связью, линейных по фазовой переменной (см. [10]). В данной работе не обсуждается вопрос существования и единственности решения уравнения (30). Проводя аналогичные вычисления, получаем

$$(34) \quad u_i^{nc} = \frac{e^{-\lambda(t)t}}{\int_t^\infty e^{-\lambda(s)s} ds} x, \quad i = 1, \dots, n$$

Далее в данном разделе во избежание излишнего нагромождения формул будут представлены результаты только для режима нормальной эксплуатации месторождения, т.е. для $\delta = 1$.

Итак, при $\delta = 1$ выполнено $\lambda(t) = \lambda$. Получаем управления, равновесные по Нэшу, а также соответствующие им траекторию и значение характеристической функции.

$$(35) \quad u_i^{nc} = \lambda x, \quad i = 1, \dots, n;$$

$$x^{nc}(t) = x^*(\vartheta) e^{-n\lambda(t-\vartheta)};$$

$$u_i^{nc}(t) = \lambda x^*(\vartheta) e^{-n\lambda(t-\vartheta)};$$

$$(36) \quad V(x^*(\vartheta), \vartheta, \{i\}) = W_i(x^*(\vartheta)) = \frac{\ln(x^*(\vartheta))}{\lambda} - \frac{n}{\lambda} + \frac{\ln(\lambda)}{\lambda}.$$

Положим $\vartheta = 0$. Тогда

$$(37) \quad V(x_0, 0, \{i\}) = W_i(x_0, 0) = \frac{\ln(x_0)}{\lambda} - \frac{n}{\lambda} + \frac{\ln(\lambda)}{\lambda}.$$

Для построения характеристической функции $V(x, t, S)$, $S \subseteq N$, используем подход, предложенный в работе [9]. Будем предполагать, что если s игроков объединяются в коалицию S , то оставшиеся игроки $N \setminus S$ не образуют антикоалицию с целью минимизации совместного выигрыша игроков из S , а используют равновесные по Нэшу стратегии u_j^{nc} , $j \in N \setminus S$. Тогда, применяя полученный выше результат (35) для равновесия по Нэшу, и используя в уравнении (30) $\sum_{i \in S} h_i$ вместо $\sum_{i=1}^n h_i$, получаем следующие результаты [10]. Кооперативная траектория, управления и

характеристическая функция имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} x^S(t) &= x^*(\vartheta)e^{-(n-s+1)\lambda(t-\vartheta)}, \\ u_i^S(t) &= \frac{\lambda}{s}x^*(\vartheta)e^{-(n-s+1)\lambda(t-\vartheta)}, \quad i \in S; \\ u_j^S(t) &= u_j^{nc}(t), \quad i \in N \setminus S, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(x^*(\vartheta), \vartheta, S) &= W_S(x^*(\vartheta), \vartheta) = \\ &= \frac{s}{\lambda} \ln(x^*(\vartheta)) - \frac{s}{\lambda} - \frac{k(n-s)}{\lambda} - \frac{s}{\lambda} \ln(s) + \frac{s \ln(\lambda)}{\lambda}. \end{aligned}$$

Положим $\vartheta = 0$. Тогда

$$(38) \quad \begin{aligned} V(x_0, 0, S) &= W_S(x_0, 0) = \\ &= \frac{s}{\lambda} \ln(x_0) - \frac{s}{\lambda} - \frac{s(n-s)}{\lambda} - \frac{s}{\lambda} \ln(s) + \frac{s \ln(\lambda)}{\lambda}. \end{aligned}$$

Таким образом, мы построили характеристическую функцию $V(x_0, 0, S)$,

$S \subseteq N$ (см. (33), (38)), используя подход, описанный в работе [9]. Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 1. Пусть функция $V(x_0, 0, S)$, $S \subseteq N$ определяется по формулам (33), (38). Тогда $V(x_0, 0, S)$ удовлетворяет свойству супераддитивности (7).

Для доказательства этого утверждения будем использовать следующую лемму.

Лемма 1. Пусть $s_1 \geq 1, s_2 \geq 1$. Тогда

$$(39) \quad s_1 \ln(s_1) + s_2 \ln(s_2) + 2s_1 s_2 \geq (s_1 + s_2) \ln(s_1 + s_2).$$

Данная лемма доказывается стандартными методами математического анализа. Нетрудно проверить, что левая часть неравенства растет быстрее, чем правая.

Доказательство Утверждения 1 непосредственно следует из Леммы 1 [10].

Используя построенную характеристическую функцию, получаем значение вектора Шепли в подыгре $\Gamma(x^*(t), t)$ и всей игре

$\Gamma(x_0, t_0)$:

$$(40) \quad Sh_i(x^*(t)) = \frac{V(x^*(t), t, N)}{n} = \frac{\ln(x^*(t))}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} - \frac{\ln(n)}{\lambda} + \frac{\ln(\lambda)}{\lambda} = \frac{\ln(x_0)}{\lambda} - (t - t_0) - \frac{1}{\lambda} - \frac{\ln(n)}{\lambda} + \frac{\ln(\lambda)}{\lambda},$$

$$Sh_i(x_0) = \frac{V(x_0, 0, N)}{n} = \frac{\ln(x_0)}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} - \frac{\ln(n)}{\lambda} + \frac{\ln(\lambda)}{\lambda}.$$

Вычислим значения ПРД по формуле (14), которая для случая $\delta = 1$ в точности совпадает с формулой (17). Получаем

$$(41) \quad \beta_i(\vartheta) = \ln(x_0) - \lambda\vartheta + \ln(\lambda) - \ln(n).$$

Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 2. Вектор Шепли $\{Sh_i(x_0)\}$ (40) не является динамически устойчивым принципом оптимальности.

Доказательство Утверждения 2 основано на Определении 2. Очевидно, что в (41) нельзя гарантировать неотрицательность компонент ПРД.

Отметим, что, поскольку $h_i = \ln u_i$ не является неотрицательной функцией, мы не можем воспользоваться регуляризацией вектора Шепли (12).

Проверим выполнение условия защиты от иррационального поведения участников (18), используя неравенство для ПРД (19). В данном примере с логарифмической функцией мгновенного выигрыша для параметра $\delta = 1$, получено значение характеристической функции $V(x^*(\vartheta), \vartheta, \{i\})$ (36). Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 3. Для ПРД (41) и характеристической функции $V(x^*(\vartheta), \vartheta, \{i\})$ (36) выполнено условие защиты от иррационального поведения (19).

Утверждение 3 доказывается непосредственной проверкой неравенства (19) при $\lambda(t) = \lambda$.

Таким образом, в данном примере с логарифмической функцией полезности было показано, что при экспоненциальном распределении момента окончания игры ($\delta = 1$, $\lambda(t) = \lambda$) вектор Шепли не является динамически устойчивым принципом оп-

тимальности, а условие защиты от иррационального поведения участников выполнено.

4.2. ИЗОЭЛАСТИЧНАЯ ФУНКЦИЯ ПОЛЕЗНОСТИ

Рассмотрим тот же самый пример игры, только с изоэластичной функцией полезности h_i , т.е.

$$h(u_i) = \frac{u_i^{1-\eta}}{1-\eta}, \quad \eta \neq 1.$$

Все вычисления проводятся аналогично тому, как это было сделано в разделе 5.1 для логарифмической функции полезности. Главным отличием является вид функции Беллмана, которая ищется как $W(x, t) = A(t)x^{1-\eta} + B(t)$ [10]. Получаем оптимальную скорость разработки ресурсов для произвольной функции интенсивности отказов $\lambda(t)$ (см. [8]):

$$u_i^* = \frac{e^{-\frac{\lambda(t)t}{\eta}}}{n \int_t^{\infty} e^{-\frac{\lambda(s)s}{\eta}} ds} x.$$

Тогда для экспоненциального распределения для случайной величины T , которому соответствует $\lambda(t) = \lambda$, имеем:

$$u_i^* = \frac{\lambda}{\eta n} x, \quad i = 1, \dots, n.$$

Следовательно, оптимальная траектория и оптимальные управления вычисляются согласно следующим формулам:

$$\begin{aligned} x^*(t) &= x_0 e^{-\frac{\lambda t}{\eta}}; \\ u_i^*(t) &= \frac{x_0 \lambda}{n \eta} e^{-\frac{\lambda t}{\eta}}. \end{aligned}$$

Отметим, что траектория $x^*(t)$ удовлетворяет условию устойчивости по Ляпунову.

Далее получаем выражение для характеристической функции для максимальной коалиции N :

$$(42) \quad V(x^*(\vartheta), \vartheta, N) = \left(\frac{n\eta}{\lambda}\right)^\eta \frac{1}{1-\eta} x^*(\vartheta)^{1-\eta} = \\ = \left(\frac{n\eta}{\lambda}\right)^\eta \frac{1}{1-\eta} x_0^{1-\eta} e^{-\frac{\lambda(1-\eta)\vartheta}{\eta}}.$$

Для равновесия по Нэшу имеем следующие результаты:

$$(43) \quad u_i^{nc} = \frac{\lambda x}{(1-n+n\eta)}, \quad i = 1, \dots, n; \\ x^{nc}(t) = x^*(\vartheta) e^{-\frac{n\lambda}{(1-n+n\eta)}(t-\vartheta)}; \\ u_i^{nc}(t) = \frac{\lambda x^*(\vartheta)}{(1-n+n\eta)} e^{-\frac{n\lambda}{(1-n+n\eta)}(t-\vartheta)}.$$

Очевидно, что требование неотрицательности скорости разработки $u_i^{nc} \geq 0$ выполнено только при $\eta > (1 - 1/n)$. В противном случае равновесия по Нэшу не существует.

Итак, вычисляем значение характеристической функции $V(x^*(\vartheta), \vartheta, \{i\})$:

$$(44) \quad V(x^*(\vartheta), \vartheta, \{i\}) = \left(\frac{(1-n+n\eta)}{\lambda}\right)^\eta \frac{1}{1-\eta} x^*(\vartheta)^{1-\eta} = \\ = \left(\frac{(1-n+n\eta)}{\lambda}\right)^\eta \frac{1}{1-\eta} x_0^{1-\eta} e^{-\frac{\lambda(1-\eta)\vartheta}{\eta}}.$$

Описанным в предыдущем разделе способом, получаем выражение для характеристической функции $V(x^*(\vartheta), \vartheta, S)$, $S \subset N$.

$$(45) \quad u_i^S = \frac{\lambda(1-s+s\eta)x}{s\eta(1-n+n\eta)}, \quad i \in S; \\ u_j^S(t) = u_j^{nc}(t), \quad i \in N \setminus S, \\ V(x^*(\vartheta), \vartheta, S) = \left(\frac{s\eta(1-n+n\eta)}{\lambda(1-s+s\eta)}\right)^\eta \frac{1}{1-\eta} x(\vartheta)^{1-\eta};$$

Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 4. Пусть функция $V(x_0, 0, S)$, $S \subseteq N$ определяется по формулам (42), (45). Тогда $V(x_0, 0, S)$ удовлетворяет свойству супераддитивности (7).

Доказательство Утверждения 4 основано на следующей лемме.

Лемма 2. Пусть $s_1 \geq 1, s_2 \geq 1, \eta \in (0, 1)$. Тогда

$$(46) \quad \frac{(s_1 + s_2)^\eta}{(1 - (s_1 + s_2) + (s_1 + s_2)\eta)^\eta} \geq \frac{s_1^\eta}{(1 - s_1 + s_1\eta)^\eta} + \frac{s_2^\eta}{(1 - s_2 + s_2\eta)^\eta}.$$

Нетрудно проверить, что левая часть неравенства растет быстрее, чем правая.

Окончательно получаем следующее выражение для вектора Шепли:

$$(47) \quad Sh_i(x(t)) = \frac{1}{1-\eta} \left(\frac{x(t)}{n}\right)^{1-\eta} \left(\frac{\lambda}{\eta}\right)^{-\eta};$$

$$(48) \quad Sh_i(x_0) = \frac{1}{1-\eta} \left(\frac{x_0}{n}\right)^{1-\eta} \left(\frac{\lambda}{\eta}\right)^{-\eta}.$$

Вычислим ПРД согласно (17). Тогда

$$(49) \quad \beta_i(\vartheta) = \lambda \left(\frac{n\eta}{\lambda}\right)^\eta x_0^{1-\eta} e^{-\frac{\lambda\vartheta}{\eta}} \frac{1}{\eta(1-\eta)}.$$

Следующие утверждения доказываются аналогично тому, как это было сделано выше в разделе для логарифмической функции полезности. Однако результат проверки динамической устойчивости и условия защиты от иррационального поведения оказывается противоположным предыдущему.

Утверждение 5. Вектор Шепли $\{Sh_i(x_0)\}$ (47) является динамически устойчивым принципом оптимальности при маргинальной полезности $\eta \in (0; 1)$.

Доказательство Утверждения 5 основано на Определении 2. Очевидно, что в (49) можно гарантировать неотрицательность компонент ПРД при $\eta \in (0; 1)$.

Утверждение 6. Для ПРД (49) и характеристической функции $\bar{V}(x^*(\vartheta), \vartheta, \{i\})$ (44) не выполнено условие защиты от иррационального поведения (19).

Утверждение 6 доказывается непосредственной проверкой неравенства (19) при $\lambda(t) = \lambda$.

Таким образом, в данном примере с изоэластичной функцией полезности было показано, что при экспоненциальном распределении момента окончания игры ($\delta = 1, \lambda(t) = \lambda$) вектор

Шепли является динамически устойчивым принципом оптимальности при маргинальной полезности $\eta \in (0; 1)$, а условие защиты от иррационального поведения участников не выполнено.

Следовательно, согласно результатам разделов 5.1, 5.2, построенный вектор Шепли не является устойчивым кооперативным соглашением ни для случая логарифмической функции полезности, ни для случая изоэластичной функции полезности игроков. При этом в обоих случаях условно–оптимальная траектория игры удовлетворяет условию устойчивости по Ляпунову.

Литература

1. ПЕТРОСЯН Л.А. *Сильно динамически устойчивые принципы оптимальности* // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1. – 1993. – Вып. 4, № 22. – С. 35–40.
2. ПЕТРОСЯН Л.А., ДАНИЛОВ Н.А. *Устойчивые решения неантагонистических дифференциальных игр с транзитивными выигрышами* // Вестник ЛГУ. – 1979. – № 1. – С. 46–54.
3. ПЕТРОСЯН Л.А., ЗЕНКЕВИЧ Н.А. *Принципы устойчивой кооперации* // Математическая теория игр и ее приложения. – 2009. – Т. 1, Вып. 1. – С. 102–117.
4. ПЕТРОСЯН Л.А., МУРЗОВ Н.В. *Теоретико-игровые проблемы в механике* // Литовский математический сборник. – 1966. – VI-3. – С. 423–433.
5. ПЕТРОСЯН Л.А., ШЕВКОПЛЯС Е.В. *Кооперативные дифференциальные игры со случайной продолжительностью* // Вестник СПбГУ. – 2000. – Сер. 1, Вып. 4. – С. 18–23.
6. ШЕВКОПЛЯС Е.В. *Уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана в дифференциальных играх со случайной продолжительностью* // Математическая теория игр и ее приложения. – 2009. – Т. 1, Вып. 2. – С. 98–118.
7. DOCKNER E.J., JORGENSEN S., N. VAN LONG AND SORGER G. *Differential games in economics and management science*. – Cambridge University Press, 2000.

8. MARIN-SOLANO J., SHEVKOPLYAS E.V. *Non-constant discounting in differential games with random duration* // Contributions to Game Theory and Management, collected papers of the Third International Conference «Game Theory and Management 2009». St. Petersburg. – 2010. – P. 267–280.
9. PETROSYAN L. A., ZACCOUR G. *Time-consistent Shapley value allocation of pollution cost reduction.* // Journal of Economic Dynamics and Control. – 2003. – Vol. 27. – P. 381–398.
10. SHEVKOPLYAS E.V. *The Shapley value in cooperative differential games with random duration* // Advances in Dynamic Games. 2011. V. 11. part 4. Edt. by M.Breton and K. Szajowski, Springer's imprint Birkhauser. Boston. – P. 359–373. URL: <http://www.springerlink.com/content/978-0-8176-8088-6/#section=815141&page=1>
11. YEUNG D.W.K. *An irrational-behavior-proofness condition in cooperative differential games* // Int. J. of Game Theory Rew. – 2007. – Vol. 9, № 1. – P. 256–273.

STABLE COOPERATION IN DIFFERENTIAL GAMES WITH RANDOM DURATION

Ekaterina Shevkoplyas, Faculty of Applied Mathematics and Control Processes, St.Petersburg State University, Saint-Petersburg, Cand.Sc. (katya_shev@mail.ru).

Abstract: The problem of time-consistency of cooperative solutions is investigated in the paper. This problem was stated by Petrosyan L.A. in 1977 for differential games with a finite time horizon. In this paper a modification of the game with a finite time horizon is considered, namely, the random time horizon of the game is supposed. The Shapley value is used as an optimality principle under cooperative behavior of players. For this formulation the definition of the imputation distribution procedure (IDP) is given and the analytic formula for IDP is derived. Moreover, the irrational behavior proofness condition by D.W.K. Yeung (2006) is modified for the problem with random duration. The tool is based on using IDP. Theoretical results are illustrated by an example of the differential game of non-renewable resource extraction.

Keywords: time-consistency, stable cooperation, irrational behavior proofness, non-renewable resource extraction, differential game with random duration.

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии В. В. Мазаловым*

УДК 519.83
ББК 22.18

КООПЕРАТИВНАЯ ИГРА ПЕРЕДАЧИ ДАННЫХ В БЕСПРОВОДНОЙ СЕТИ¹

Парилина Е.М.²

(Санкт-Петербургский государственный университет,
Санкт-Петербург)

В работе рассмотрена задача передачи данных в простой беспроводной сети. Процесс передачи данных моделируется с помощью стохастической (марковской) игры. В работе предлагается система штрафов и вознаграждений пользователям сети для регулирования процесса передачи данных. Рассмотрен кооперативный вариант игры, в качестве кооперативного решения которой предлагается вектор Шепли. Получено условие позиционной состоятельности найденного вектора Шепли и представлен метод построения кооперативной процедуры распределения дележа, позволяющей перераспределять выплаты игрокам (пользователям сети) на каждом промежутке времени, преодолевая естественную несостоятельность вектора Шепли. Приведен численный пример, на котором демонстрируются все полученные теоретические результаты.

Ключевые слова: кооперативная стохастическая игра, марковская игра, позиционная состоятельность, кооперативная процедура распределения дележа.

Введение

В статье рассматривается кооперативная стохастическая игра (кооперативная марковская игра), и полученные теоретические

¹ Текст приводится в соответствии с изданием «Математическая теория игр и ее приложения. – 2009. – Т. 1. № 4. – С. 93–110».

² Парилина Елена Михайловна, кандидат физико-математических наук, старший преподаватель (elena.parilina@gmail.com).

результаты применяются для моделирования процесса передачи данных в одной простой беспроводной сети. Предполагается, что беспроводная сеть передачи данных состоит из трех точек доступа (вершин).

В каждый промежуток времени в двух вершинах сети генерируются пакеты данных с некоторыми вероятностями. Время предполагается дискретным. В третьей вершине пакеты данных не генерируются. Работа сети состоит в передаче пакетов данных из первых двух вершин в третью. Первые две вершины имеют однонаправленное беспроводное соединение между собой, то есть первая вершина (игрок 1) в один промежуток времени может послать пакет данных либо в вершину 2 (игроку 2), либо напрямую в вершину 3. Предполагается, что за пересылку пакета данных из вершины 1 в вершину 2 игрок 1 получает неотрицательное вознаграждение. Система вознаграждений и издержек позволяет поддерживать кооперацию между игроками 1 и 2. Задача состоит в нахождении оптимального кооперативного поведения, позволяющего достичь максимума математического ожидания суммарного выигрыша игроков 1 и 2. Такое поведение игроков моделируется с помощью кооперативной марковской игры.

В работах [5, 6, 7, 11, 12] рассматриваются теоретико-игровые модели передачи данных в ad-hoc и multi-hop беспроводных сетях, причем, делается акцент на развитие механизмов кооперации для стимулирования переадресации данных. В статье [9] исследуется простая структура сети, и выигрышами игроков являются средние ожидаемые выигрыши игроков за один временной промежуток. В настоящей статье за выигрыши игроков принимаются математические ожидания выигрышей игроков во всей марковской игре. Теоретические результаты, на которые опирается повествование статьи, можно найти в [4, 8, 10]. В работе вычисляется максимальный суммарный выигрыш игроков и значения характеристической функции. В качестве дележа максимального суммарного выигрыша игроков может быть рассчитан любой дележ, известный в кооперативной теории игр. В настоящей работе используется вектор Шепли.

Кооперативная марковская игра — динамическая игра. В любой динамической игре условие сохранения кооперации имеет важное значение. Перераспределение выплат игроков в каждый промежуток времени в соответствии с кооперативной процедурой распределения дележа, предложенной Л.А. Петросяном в 1979 (см. [1, 3]), позволяет игрокам в каждый момент времени ожидать в оставшейся части игры получение дележа, который будет принадлежать тому же принципу оптимальности, который был выбран игроками в начале игры. Если дополнительно потребовать неотрицательности всех элементов кооперативной процедуры распределения дележа, то будет выполняться условие позиционной состоятельности этого дележа. В настоящее время множество работ [2, 13] посвящено исследованию позиционной состоятельности или динамической устойчивости принципов оптимальности в кооперативных динамических играх.

1. Постановка задачи

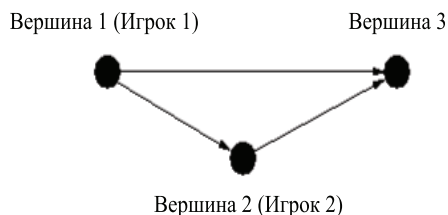


Рис. 1. Простая беспроводная сеть

Рассмотрим систему, в которой приемники (вершины 1 и 2) независимо генерируют пакеты данных на каждом промежутке времени с вероятностями a_1 и a_2 соответственно. Пакет данных может появиться в вершине 1 (2) с вероятностью a_1 (a_2) только, если в конце предыдущего временного промежутка очередь в

вершине 1 (2) пуста. Сделаем некоторые предположения:

1) вершины 1 и 2 (игроки 1 и 2 соответственно) стремятся послать пакеты данных, скопившихся у них, в конечный пункт назначения - вершину 3;

2) максимальная емкость буфера каждой вершины равна единице. Вершина 3 не может принять одновременно два пакета данных в один промежуток времени. В данной постановке исключается многопакетная передача данных, а также исключается одновременное отправление и принятие пакетов никакой из вершин в любой промежуток времени;

3) если игроки одновременно пересылают пакеты в вершину 3, то эти пакеты отклоняются и возвращаются в начальные вершины, таким образом, в следующий промежуток времени ни один новый пакет не может появиться в вершинах 1 и 2;

4) все пересылаемые пакеты данных имеют одинаковый размер, равный единице, и, если вершины имеют прямое соединение друг с другом, то доставка одного пакета данных из одной вершины в другую занимает один промежуток времени;

5) игрок 1 (вершина 1) выбирает одну из двух стратегий: переслать пакет данных напрямую в вершину 3 или переслать этот пакет в вершину 2, чтобы тот послал этот пакет в вершину 3 в следующий промежуток времени;

6) если игрок 1 (вершина 1) пересылает пакет данных игроку 2, который уже имеет в данный промежуток времени пакет в своей очереди, игрок 2 отклоняет переданный ему пакет. В противном случае игрок 2 решает принять или отклонить пакет, переданный ему игроком 1.

Предположим, что в вышеописанной системе передачи данных введена следующая схема поощрений и наказаний:

1) величина $f \geq 0$ — это премия, которую получает игрок 1 или 2 за каждую успешную передачу одного пакета данных в вершину 3;

2) игрок 1 получает премию в размере $c \geq 0$ от игрока 2 за передачу одного пакета данных игроку 2, который, в свою очередь, может рассчитывать на премию размером f только после

успешной передачи этого пакета в конечный пункт (вершину 3) в следующий промежуток времени;

3) задержка пакета данных в вершине 1 или 2 на один промежуток времени приносит игроку, находящемуся в этой вершине, издержки в размере $d \geq 0$, независимо от того, по какой причине произошла задержка;

4) величина D_{ij} — это издержки по пересылке одного пакета данных из вершины i в вершину j , которые несет игрок i .

Процесс передачи данных может остановиться в любой промежуток времени с вероятностью $0 < q < 1$. Вероятность q , по сути, является дисконт-фактором. Модель передачи данных в беспроводных сетях может быть представлена марковской игрой. Игроки, находящиеся в вершинах 1 и 2, стремятся максимизировать ожидаемый суммарный выигрыш с последующим разделом этого выигрыша с помощью вектора Шепли.

Обозначим через (Q_1, Q_2) состояние в беспроводной сети, где Q_i — это число пакетов данных, находящееся в очереди игрока $i = 1, 2$. Число Q_i может принимать значения 0 или 1, если ни одного или один пакет данных находится в данный промежуток времени в очереди игрока i соответственно.

В марковской игре передачи данных в беспроводных сетях возможно 4 состояния:

$$T = \{(0, 0); (0, 1); (1, 0); (1, 1)\}.$$

Предположим, что игроки имеют информацию о состоянии не только своей очереди, но и очереди другого игрока. Это предположение разумно, поскольку мы пытаемся найти кооперативное решение, которое подразумевает совместные действия, включая обмен информацией о состоянии очередей обоих игроков.

Определим, исходя из условия задачи игровые элементы во всех состояниях системы.

1) Игровой элемент $\Gamma(0, 0)$.

У игрока 1 имеется одна стратегия W (ожидать), у игрока 2 — одна стратегия W (ожидать). Выигрыши игроков будут $(0, 0)$.

2) Игровой элемент $\Gamma(0, 1)$.

У игрока 1 имеется одна стратегия W (ожидать), у игрока 2 — одна стратегия $\overset{3}{\rightarrow}$ (послать пакет в вершину 3). Выигрыши игроков будут следующими: $(0, f - D_{23})$.

3) Игровой элемент $\Gamma(1, 0)$.

Игрок 1 имеет две стратегии: 1) $\overset{3}{\rightarrow}$ (послать пакет в вершину 3), 2) $\overset{2}{\rightarrow}$ (послать пакет в вершину 2); игрок 2 имеет две стратегии: 1) Ac (принять пакет от игрока 1), 2) Rej (не принять пакет от игрока 1). Выигрыши игроков будут следующими:

$$\begin{pmatrix} (f - D_{13}, 0) & (f - D_{13}, 0) \\ (c - D_{12}, -c) & (-d - D_{12}, 0) \end{pmatrix}.$$

4) Игровой элемент $\Gamma(1, 1)$.

Игрок 1 имеет две стратегии: 1) $\overset{3}{\rightarrow}$ (послать пакет в вершину 3), 2) W (ожидать); игрок 2 имеет две стратегии: 1) $\overset{3}{\rightarrow}$ (послать пакет в вершину 3), 2) W (ожидать). Выигрыши игроков будут следующими:

$$\begin{pmatrix} (-d - D_{13}, -d - D_{23}) & (f - D_{13}, -d) \\ (-d, f - D_{23}) & (-d, -d) \end{pmatrix}.$$

Без потери общности прибавим число

$$z = \max\{d + D_{13}, d + D_{23}, d + D_{12}, -c + D_{12}, c\}$$

ко всем выигрышам игроков во всех игровых элементах, чтобы сделать все выигрыши неотрицательными.

2. Матрица переходных вероятностей

Будем решать описанную выше марковскую игру в классе стационарных стратегий [4]. В работе ограничимся рассмотрением множества чистых стационарных стратегий, но сначала для удобства определим матрицу вероятностей перехода марковской игры передачи данных в смешанных стратегиях для того, чтобы не выписывать 16 различных матриц вероятностей перехода для каждой ситуации в чистых стационарных стратегиях. Далее

при подстановке в эту матрицу определенных значений стратегий можно получить матрицу вероятностей перехода для любой ситуации в чистых стационарных стратегиях.

Обозначим через X_i множество смешанных стационарных стратегий игрока i , $i = 1, 2$.

В соответствии со структурой марковской игры передачи данных в беспроводной сети смешанная стационарная стратегия игрока 1 во всей марковской игре предписывает ему выбрать стратегию W с вероятностью 1 в состояниях $(0, 0)$, $(0, 1)$, стратегию $\xrightarrow{3}$ с вероятностью p_{11} в состоянии $(1, 0)$, и стратегию $\xrightarrow{3}$ с вероятностью p_{12} в состоянии $(1, 1)$. Смешанная стационарная стратегия игрока 2 во всей марковской игре предписывает ему выбрать стратегию W с вероятностью 1 в состояниях $(0, 0)$, стратегию $\xrightarrow{3}$ в состоянии $(0, 1)$, стратегию A с вероятностью p_{21} в состоянии $(1, 0)$, и стратегию $\xrightarrow{3}$ с вероятностью p_{22} в состоянии $(1, 1)$.

Обозначим через $u_i = (p_{i1}, p_{i2})$ смешанную стационарную стратегию игрока i и множество смешанных стационарных стратегий игрока i через U_i , $i = 1, 2$. Получаем ситуацию в смешанных стационарных стратегиях $u = (u_1, u_2) = (p_{11}, p_{12}, p_{21}, p_{22})$. Матрица переходных вероятностей в ситуации u в смешанных стационарных стратегиях будет следующей:

$$\Pi(u) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{pmatrix},$$

где

$$\alpha_{11} = (1 - a_1)(1 - a_2), \quad \alpha_{12} = (1 - a_1)a_2, \quad \alpha_{13} = a_1(1 - a_2),$$

$$\alpha_{14} = a_1a_2,$$

$$\alpha_{21} = (1 - a_1)(1 - a_2), \quad \alpha_{22} = (1 - a_1)a_2, \quad \alpha_{23} = a_1(1 - a_2),$$

$$\alpha_{24} = a_1a_2,$$

$$\alpha_{31} = p_{11}(1 - a_1)(1 - a_2), \quad \alpha_{32} = p_{11}(1 - a_1)a_2 + (1 - p_{11})p_{21}(1 - a_1),$$

$$\alpha_{33} = p_{11}a_1(1 - a_2) + (1 - p_{11})(1 - p_{21})(1 - a_2),$$

$$\alpha_{34} = p_{11}a_1a_2 + (1 - p_{11})p_{21}a_1 + (1 - p_{11})(1 - p_{21})a_2,$$

$$\alpha_{41} = 0, \alpha_{42} = p_{12}(1 - p_{22})(1 - a_1), \alpha_{43} = (1 - p_{12})p_{22}(1 - a_2), \\ \alpha_{44} = p_{12}p_{22} + (1 - p_{12})(1 - p_{22}) + p_{12}(1 - p_{22})a_1 + (1 - p_{12})p_{22}a_2.$$

Если в описанной выше марковской игре реализуется ситуация в стационарных стратегиях u , выигрыши игрока 1 в соответствующих состояниях будут следующими:

$$K_1(u) = (\Omega_{11}, \Omega_{12}, \Omega_{13}, \Omega_{14}),$$

где $\Omega_{11} = \Omega_{12} = z$, $\Omega_{13} = p_{11}(z + f - D_{13}) + (1 - p_{11})p_{21}(z + c - D_{12}) + (1 - p_{11})(1 - p_{21})(z - d - D_{12})$, $\Omega_{14} = p_{12}p_{22}(z - d - D_{13}) + p_{12}(1 - p_{22})(z + f - D_{13}) + (1 - p_{12})(z - d)$.

У игрока 2 будут следующими:

$$K_2(u) = (\Omega_{21}, \Omega_{22}, \Omega_{23}, \Omega_{24}),$$

где $\Omega_{21} = z$, $\Omega_{22} = z + f - D_{23}$, $\Omega_{23} = (1 - p_{11})p_{21}(z - c)$, $\Omega_{24} = p_{12}p_{22}(z - d - D_{23}) + (1 - p_{12})p_{22}(z + f - D_{23}) + (1 - p_{22})(z - d)$.

3. Кооперативная стохастическая игра передачи данных в беспроводной сети

Кооперативную игру передачи данных в беспроводной сети будем рассматривать в классе чистых стационарных стратегий. Обозначим через Ξ_i множество чистых стационарных стратегий игрока i , $i = 1, 2$. Например, чистая стационарная стратегия $\eta_1 = (1, 0)$ игрока 1 предписывает ему выбирать стратегию $\xrightarrow{3}$ в состоянии $(1, 0)$ и стратегию W в состоянии $(1, 1)$. Каждый игрок имеет 4 чистых стационарных стратегии, т. е. получается 16 ситуаций в чистых стационарных стратегиях. Для ситуации в чистых стационарных стратегиях $\eta = (\eta_1, \eta_2)$ можно записать в упрощенном виде матрицу переходных вероятностей $\Pi(\eta)$.

Например, для ситуации $\eta^1 = (1, 1, 1, 1)$ матрица переходных вероятностей будет иметь вид:

$$\Pi(\eta^1) = \begin{pmatrix} (1 - a_1)(1 - a_2) & (1 - a_1)a_2 & a_1(1 - a_2) & a_1a_2 \\ (1 - a_1)(1 - a_2) & (1 - a_1)a_2 & a_1(1 - a_2) & a_1a_2 \\ (1 - a_1)(1 - a_2) & (1 - a_1)a_2 & a_1(1 - a_2) & a_1a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для каждой ситуации в чистых стационарных стратегиях $\eta \in \Xi = \prod_{i=1}^2 \Xi_i$ можно посчитать математическое ожидание выигрышей игроков для подыгры, начинающейся с определенного состояния:

$$E_i(\eta) = (E_i^{(0,0)}(\eta), E_i^{(0,1)}(\eta), E_i^{(1,0)}(\eta), E_i^{(1,1)}(\eta)),$$

где $E_i^t(\eta)$ — математическое ожидание выигрыша игрока i в подыгре марковской игры, начинающаяся из состояния $t \in T$.

Математическое ожидание выигрышей игрока i для подыгр можно рассчитать по следующей формуле:

$$E_i(\eta) = (E - (1 - q)\Pi(\eta))^{-1}K_i(\eta),$$

где $K_i(\eta)$, $\Pi(\eta)$ определены выше.

Математическое ожидание выигрыша игрока i во всей марковской игре, включая ход «случая» (т.е. выбор начального состояния), может быть рассчитано по формуле:

$$\bar{E}_i(\eta) = \pi E_i(\eta),$$

где $\pi = (\pi_{(0,0)}, \pi_{(0,1)}, \pi_{(1,0)}, \pi_{(1,1)})$ — вектор начальных вероятностей, и π_t — вероятность того, что первое состояние в марковской игре будет $t \in T$.

Для решения кооперативного варианта описанной выше марковской игры необходимо найти кооперативное решение $\bar{\eta} = (\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2)$, т.е. ситуацию в чистых стационарных стратегиях такую, что

$$\sum_{i \in \{1,2\}} \bar{E}_i(\bar{\eta}) = \max_{\eta \in \Xi} \sum_{i \in \{1,2\}} \bar{E}_i(\eta).$$

Значение характеристических функций для подыгр

$$V(S) = (V^{(0,0)}(S), V^{(0,1)}(S), V^{(1,0)}(S), V^{(1,1)}(S))$$

можно рассчитать по формуле

$$(1) \quad V^t(S) = \max_{\eta_S} \min_{\eta_{N \setminus S}} \sum_{i \in S} E_i^t(\eta_S, \eta_{N \setminus S}).$$

Значение характеристической функции для всей марковской игры для коалиций $S \neq \emptyset$ определяется формулой

$$(2) \quad \bar{V}(S) = \pi V(S).$$

Для $S = \emptyset$ значение характеристической функции $\bar{V}(S) = 0$.

Определение 1. Кооперативной марковской игрой передачи данных в беспроводной сети называется пара $\langle \{1, 2\}, \bar{V}(S) \rangle$, где $\bar{V}(\emptyset) = 0$, $\bar{V}(\{1, 2\}) = \sum_{i \in \{1, 2\}} \bar{E}_i(\bar{\eta})$, для $S \neq \emptyset$ и $S \neq \{1, 2\}$

значение функции $\bar{V}(S)$ определяется формулой (2).

В качестве дележа максимального суммарного математического ожидания выигрыша игроков рассмотрим вектор Шепли. Обозначим через $Sh = (Sh_1, Sh_2)$, где

$$Sh_i = (Sh_i^{(0,0)}, Sh_i^{(0,1)}, Sh_i^{(1,0)}, Sh_i^{(1,1)})$$

вектор Шепли, рассчитанный для подыгр, и через $\bar{Sh} = (\bar{Sh}_1, \bar{Sh}_2)$ вектор Шепли, рассчитанный для всей марковской игры, т. е. $\bar{Sh}_i = \pi Sh_i$.

4. Кооперативная процедура распределения дележа

Игроки перед началом игры договариваются о кооперации и ожидают получить совместный выигрыш $\bar{V}(\{1, 2\})$ и соответствующие компоненты \bar{Sh}_1 и \bar{Sh}_2 вектора Шепли.

Было бы естественно, если выплаты игрокам в игровых элементах, соответствующих состояниям марковской игры, были бы равны выигрышам игроков в одновременных играх, реализуемых при кооперативном решении $\bar{\eta}$, что эквивалентно условию:

$$(3) \quad Sh_i = K_i(\bar{\eta}) + (1 - q)\Pi(\bar{\eta})Sh_i,$$

где $K_i(\bar{\eta})$ — выигрыш игрока i в одновременной игре при условии, что реализуется кооперативное решение $\bar{\eta}$, слагаемое $(1 - q)\Pi(\bar{\eta})Sh_i$ — математическое ожидание i -ой компоненты вектора Шепли при условии, что игра передачи данных не закончится.

Определение 2. Назовем вектор Шепли $\bar{Sh} = (\bar{Sh}_1, \bar{Sh}_2)$, где $\bar{Sh}_i = \pi Sh_i$ естественно состоятельным, если Sh_i удовлетворяет условию (3) для всех $i = 1, 2$.

К сожалению, реализуя выплаты игрокам в соответствии с их выигрышами в одновременных играх, невозможно достичь того, чтобы оставшиеся выплаты были бы равны соответствующим компонентам вектора Шепли, рассчитанного для подыгры. Нарушение естественной состоятельности может изменить планы игроков и разрушить их кооперацию. Предлагается перераспределить выигрыши игроков на каждом промежутке времени, чтобы преодолеть естественную несостоятельность вектора Шепли.

Перераспределенные выплаты игрокам β_i , где $\sum_{i \in N} \beta_i = \sum_{i \in N} K_i(\bar{\eta})$, можно найти по формуле

$$(4) \quad Sh_i = \beta_i + (1 - q)\Pi(\bar{\eta})Sh_i$$

или

$$(5) \quad \beta_i = (\beta_i^1, \dots, \beta_i^t) = (E - (1 - q)\Pi(\bar{\eta}))Sh_i.$$

Определение 3. Назовем вектор $\beta^t = (\beta_1^t, \dots, \beta_n^t)$, $t \in T$, кооперативной процедурой распределения дележа в состоянии t , где β_i^t – выплата игроку i в одновременной игре $\Gamma(t)$ в состоянии t , определяемая формулой (5).

Обозначим математическое ожидание суммы выплат игроку i в кооперативной марковской игре через $\bar{B}_i = \pi B_i$, где $B_i = \{B_i^t\}_{t \in T}$ и B_i^t – математическое ожидание суммы выплат игроку i в кооперативной стохастической подыгре, начинающейся из состояния t .

Лемма 1. Имеет место равенство $\bar{B}_i = \bar{S}h_i$ для всех $i \in N$.

Лемма 1 показывает, что перераспределение выплат игроков не влияет на их ожидаемый последующий выигрыш.

5. Позиционная состоятельность вектора Шепли

Можно потребовать, чтобы выплаты i -му игроку β_i^t были неотрицательными для любого состояния $t \in T$ и любого игрока $i \in N$, что эквивалентно тому, чтобы система уравнений относительно $\beta_i = (\beta_i^{(0,0)}, \beta_i^{(0,1)}, \beta_i^{(1,0)}, \beta_i^{(1,1)})$

$$Sh_i = (E - (1 - q)\Pi(\bar{\eta}(\cdot)))^{-1}\beta_i$$

имела бы неотрицательное решение.

Определение 4. Вектор Шенли $\overline{Sh} = (\overline{Sh}_1, \dots, \overline{Sh}_n)$, $\overline{Sh}_i = \pi Sh_i$ назовем позиционно состоятельным [4, 8] в марковской игре, если для каждого игрового элемента $\Gamma(t)$, $t \in T$ и для всех игроков $i \in N$ существует неотрицательная кооперативная процедура распределения дележа $\beta_i = (\beta_i^{(0,0)}, \beta_i^{(0,1)}, \beta_i^{(1,0)}, \beta_i^{(1,1)})$, удовлетворяющая уравнению (5).

В общем случае невозможно гарантировать неотрицательность элементов вектора $\beta_i = (\beta_i^{(0,0)}, \beta_i^{(0,1)}, \beta_i^{(1,0)}, \beta_i^{(1,1)})$. Несмотря на это, перераспределяя выигрыши игроков в каждом игровом элементе, который реализуется при кооперативном решении $\overline{\eta}$, в соответствии с кооперативной процедурой распределения дележа β_i , $i \in N$, можно добиться сохранения кооперации во всей марковской игре.

В некоторых случаях игроки могут считать условие неотрицательности выплат важным, особенно если их выигрыши в одновременных играх были неотрицательными. Но, возможно, игроки пойдут на то, чтобы на каких-то промежутках времени получать отрицательные выплаты в соответствии с кооперативной процедурой распределения дележа, желая при этом сохранить кооперацию.

6. Пример

Рассмотрим численный пример кооперативной игры передачи данных в беспроводной сети, поскольку в общем виде представить матрицу $(E - (1 - q)\Pi(\overline{\eta}))^{-1}$ в статье не имеется возможности. Пусть параметры игры принимают следующие значения:

$$\begin{aligned} a_1 &= 0,5, & a_2 &= 0,1, & \pi &= (0,25, 0,25, 0,25, 0,25) \\ q &= 0,01, & f &= 1, & d &= 0,1, & c &= 0,3, \\ D_{12} &= 0,1, & D_{13} &= 0,6, & D_{23} &= 0,2. \end{aligned}$$

В следующей таблице приведены рассчитанные значения математических ожиданий для каждой ситуации в чистых стационарных стратегиях η .

η	$E_1(\eta)$	$E_2(\eta)$	$E_1(\eta) + E_2(\eta)$
$\eta^1 = (1, 1, 1, 1)$	14,75966387	45,70756302	60,46722689
	14,75966387	46,50756302	61,26722689
	15,15966387	45,70756302	60,86722689
	0	40,	40,
$\eta^2 = (1, 1, 1, 0)$	89,80000000	76,24887286	166,0488729
	89,80000000	77,04887286	166,8488729
	90,20000000	76,24887286	166,4488729
	90,20000000	76,71127141	166,9112714
$\eta^3 = (1, 0, 1, 1)$	88,22724883	77,92000000	166,1472488
	88,22724883	78,72000000	166,9472488
	88,62724883	77,92000000	166,5472488
	88,30952131	78,72000000	167,0295213
$\eta^4 = (1, 0, 1, 0)$	64,67563026	62,34621849	127,0218488
	64,67563026	63,14621849	127,8218488
	65,07563026	62,34621849	127,4218488
	60,	60,	120,
$\eta^5 = (1, 1, 0, 1)$	14,75966387	45,70756302	60,46722689
	14,75966387	46,50756302	61,26722689
	15,15966387	45,70756302	60,86722689
	0,	40,	40,
$\eta^6 = (1, 1, 0, 0)$	89,80000000	76,24887286	166,0488729
	89,80000000	77,04887286	166,8488729
	90,20000000	76,24887286	166,4488729
	90,20000000	76,71127141	166,9112714
$\eta^7 = (1, 0, 0, 1)$	88,22724883	77,92000000	166,1472488
	88,22724883	78,72000000	166,9472488
	88,62724883	77,92000000	166,5472488
	88,30952131	78,72000000	167,0295213
$\eta^8 = (1, 0, 0, 0)$	64,67563026	62,34621849	127,0218488
	64,67563026	63,14621849	127,8218488
	65,07563026	62,34621849	127,4218488
	60,	60,	120,

$\eta^9 =$ (0, 1, 1, 1)	3,870077599 3,870077599 2,815688411 0,	41,81391498 42,61391498 41,29388792 40,	45,68399258 46,48399258 44,10957633 40,
$\eta^{10} =$ (0, 1, 1, 0)	85,30045000 85,30045000 85,58955000 85,78955000	82,15225000 82,95225000 82,29775000 82,49775000	167,4527000 168,2527000 167,8873000 168,2873000
$\eta^{11} =$ (0, 0, 1, 1)	75,28276807 75,28276807 75,40659007 75,23559576	93,56491025 94,36491025 93,89870345 94,52135936	168,8476783 169,6476783 169,3052935 169,7569551
$\eta^{12} =$ (0, 0, 1, 0)	60,82133034 60,82133034 60,70655852 60,	60,79766590 61,59766590 60,59084462 60,	121,6189962 122,4189962 121,2974031 120,
$\eta^{13} =$ (0, 1, 0, 1)	5,432827686 5,432827686 4,587155964 0,	43,10048870 43,90048870 42,75229358 40,	48,53331639 49,33331639 47,33944954 40,
$\eta^{14} =$ (0, 1, 0, 0)	62,35393639 62,35393639 62,07747575 63,29742280	75,10793102 75,90793102 75,07981035 75,59292249	137,4618674 138,2618674 137,1572861 138,8903453
$\eta^{15} =$ (0, 0, 0, 1)	51,37623762 51,37623762 50,99000000 51,09000000	77,92000001 78,72000001 77,92000000 78,72000000	129,2962376 130,0962376 128,9100000 129,8100000
$\eta^{16} =$ (0, 0, 0, 0)	59,38868199 59,38868199 59,08256880 60,	61,08577346 61,88577346 60,91743119 60,	120,4744554 121,2744554 120, 120,

В данном числовом примере кооперативным решением будет ситуация

$$\eta_{11} = ((W, W, \xrightarrow{2}, W), (W, \xrightarrow{3}, Ac, \xrightarrow{3})).$$

Максимум математического ожидания суммарного выигрыша игроков в этой марковской игре будет следующим:

$$\max_{\eta \in \Xi} \sum_{i \in N} \bar{E}_i(\eta) = 169,39.$$

Значения характеристических функций для подыгр будут следующими:

$$V(\{1\}) = (64,68; 64,68; 65,08; 60), V(\{2\}) = (61,09; 61,89; 60,92; 60),$$

$$V(\{1, 2\}) = (168,85; 169,65; 169,31; 169,76),$$

и для всей марковской игры:

$$\bar{V}(\{1\}) = 63,61, \quad \bar{V}(\{2\}) = 60,97,$$

$$\bar{V}(\{1, 2\}) = 169,39.$$

Компоненты вектора Шепли, рассчитанного для подыгр марковской игры передачи данных, будут следующими:

$$Sh_1 = (86,22; 86,22; 86,73; 84,88), Sh_2 = (82,63; 83,43; 82,57; 84,88).$$

Компоненты вектора Шепли, рассчитанного для всей марковской игры передачи данных, будут иметь значения

$$\bar{Sh}_1 = 86,01, \quad \bar{Sh}_2 = 83,38.$$

Кооперативные процедуры распределения дележа для игроков будут иметь следующие значения:

$$\beta_1 = (0,7; 0,7; 2,04; -0,8), \quad \beta_2 = (0,7; 1,5; -0,74; 2,9).$$

В соответствии с этими значениями игрокам необходимо перераспределять выигрыши следующим образом:

- в состоянии $(1, 0)$:
2,04 игроку 1 вместо 0,9,
−0,74 игроку 2 вместо 0,4,
- в состоянии $(1, 1)$:
−0,8 игроку 1 вместо 0,6,
2,9 игроку 2 вместо 1,5.

В численном примере марковской игры передачи данных вектор Шепли $\overline{Sh} = (86,01; 83,38)$ не является позиционно состоятельным, поскольку имеются отрицательные компоненты в векторе кооперативной процедуры распределения дележа.

7. Заключение

В работе рассмотрен случай чистых стационарных стратегий, поскольку стратегии работы в беспроводной сети должны быть простыми, особенно при большом потоке информации. Для того, чтобы добиться кооперации необходимо, чтобы удовлетворялись некоторые принципы. Одним из них является естественное желание игроков в течение всей игры придерживаться одного и того же принципа оптимальности. То есть, если в начале игры игроками было решено разделить их максимальный суммарный выигрыш в соответствии с вектором Шепли, то и на каждом последующем промежутке времени было бы естественно, если бы их оставшийся суммарный выигрыш тоже был бы разделен в соответствии с тем же принципом оптимальности. Дележ является естественно состоятельным, если ещё при этом на каждом промежутке времени игроки получают выплаты в соответствии со своими выигрышами в одновременных играх. Но это условие в реальных играх практически никогда не выполняется. Поэтому предлагается процедура перераспределения выплат на каждом промежутке времени таким образом, чтобы сумма этих выплат совпадала бы с суммарным выигрышем игроков на этом промежутке времени, и ожидаемый выигрыш любого игрока в оставшейся игре принадлежал бы тому же принципу оптимальности, что был выбран игроками в начале игры. Условие позиционной состоятельности

вектора Шепли накладывает дополнительно условие неотрицательности на выплаты игрокам на каждом промежутке времени.

Кооперативную процедуру распределения дележа можно считать универсальной, поскольку её можно построить в любой марковской игре, используя уравнения, полученные в работе, но гарантировать при этом позиционную состоятельность дележа в общем случае нельзя.

Кооперативное решение, полученное в работе для игры передачи данных позволяет наладить работу беспроводной сети и получить от этой работы максимальный ожидаемый результат. К сожалению, при изменении структуры сети необходимо заново определять матрицу вероятностей перехода и выигрыши игроков в игровых элементах. Также имеются вычислительные трудности при нахождении обратной матрицы в уравнениях, определяющих математические ожидания выигрышей игроков.

Литература

1. ПЕТРОСЯН Л.А. *Устойчивость решений в дифференциальных играх со многими участниками* // Вестник Ленинградского университета. Сер. 1. — 1977. — Вып. 19. — С. 46–52.
2. ПЕТРОСЯН Л.А., БАРАНОВА Е.М., ШЕВКОПЛЯС Е.В. *Многошаговые кооперативные игры со случайной продолжительностью* // Оптимальное управление и дифференциальные игры, Сборник статей, Труды института математики и механики. — 2004. — Т. 10, № 2. — С. 116–130.
3. ПЕТРОСЯН Л.А., ДАНИЛОВ Н.А. *Устойчивые решения неантагонистических дифференциальных игр с транзитивными выигрышами* // Вестник ЛГУ. — 1979. — № 1. — С. 46–54 .
4. BARANOVA E.M., PETROSJAN L.A. *Cooperative Stochastic Games in Stationary Strategies* // Game theory and Applications. — 2006. — Vol. XI. — P. 7–17.
5. BEN SALEM N., BUTTYAN L., HUBAUX J.-P., JAKOBSSON M. *A charging and rewarding scheme*

- for packet forwarding in multi-hop cellular networks // Proc. ACM International Symposium on Mobile Ad Hoc Networking and Computing (MobiHoc).* – 2003. – Annapolis, MD, USA.
6. BUTTYAN L., HUBAUX J.P. *Stimulating cooperation in self-organizing mobile ad hoc network // ACM Journal for Mobile Networks (MONET).* – 2003. – Vol. 8, № 5. – P. 579–592.
 7. MICHIARDI P., MOLVA R. *A game-theoretical approach to evaluate cooperation enforcement mechanisms in mobile ad hoc networks // Proc. WiOpt'03: Modeling and Optimization in Mobile, Ad Hoc and Wireless Networks.* – 2003. – Sophia-Antipolis, France.
 8. PETROSJAN L.A. *Cooperative Stochastic Games // Advances in Dynamic Games, Annals of the International Society of Dynamic Games, Application to Economics, Engineering and Environmental Management, ed. by A. Haurie, S. Muto, L. A. Petrosjan, T.E.S. Raghavan.* – 2006. – P. 139–146.
 9. SAGDUYU Y.E., EPHREMIDES A. *A game-theoretic look at simple relay channel // Wireless Networks.* – 2006. – Vol. 12, № 5. – P. 545–560.
 10. SHAPLEY L.S. *Stochastic Games // Proceedings of National Academy of Sciences of the USA.* – 1953. – Vol. 39. – P. 1095–1100.
 11. SRINIVASAN V., NOGGEHALLI P., CHIASSERINI C.F., RAO R.R. *Cooperation in wireless ad hoc networks // Proc. IEEE INFOCOM.* – 2003. San Francisco, CA, USA.
 12. URPI A., BONUCCELLI M., GIORDANO S. *Modelling cooperation in mobile ad hoc networks: a formal description of selfishness // Proc. WiOpt'03: Modeling and Optimization in Mobile, Ad Hoc and Wireless Networks.* – 2003. Sophia-Antipolis, France.
 13. YEUNG D.W.K., PETROSJAN L.A. *Subgame consist cooperative solutions in stochastic differential games // J. optimiz. theory and appl.* – 2004. – Vol. 120, № 3. – P. 651–666.

COOPERATIVE DATA TRANSMISSION GAME IN WIRELESS NETWORK

Elena Parilina, Saint-Petersburg State University, Saint-Petersburg, Cand.Sc. (elena.parilina@gmail.com).

Abstract: The paper considers the problem of data transmission in a simple wireless network. The process of data transmission is modelled with the help of a stochastic game. The paper proposes the system of rewards and costs to the network users to regulate the process of data transmission. The cooperative version of the game is considered. For this purpose the characteristic function is found. The Shapley value is proposed as a cooperative decision of the game. The condition of subgame consistency of the Shapley value and the method of construction of the cooperative payoff distribution procedure are taken. The cooperative payoff distribution procedure allows to redistribute payoffs to the players (network users) at each time slot to overcome the natural inconsistency of the Shapley value. The paper considers the numerical example which demonstrates all obtained theoretical results.

Keywords: cooperative stochastic game, Markov game, subgame consistency, cooperative payoff distribution procedure.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии А. А. Печниковым

ТЕОРЕТИКО-ИГРОВОЙ АНАЛИЗ ОДНОЭТАПНЫХ И ДВУХЭТАПНЫХ АУКЦИОНОВ ОДНОРОДНОГО ТОВАРА^{1 2}

Васин А.А.³, Гусев А.Г.⁴,
Шарикова А.А.⁵

(Факультет вычислительной математики и кибернетики,
Московский государственный университет им. М.В.
Ломоносова, Москва)

Один из возможных путей снижения «рыночной власти» компаний – введение возможности заключения форвардных контрактов. На примере симметричной олигополии с постоянными предельными издержками рассматривается модель функционирования спотового и форвардного рынков электроэнергии, организованных как аукционы Курно. Производители стремятся максимизировать свою прибыль, используя стратегии, соответствующие совершенному подыгровому равновесию (СПР) двухэтапной игры. В первой части статьи мы рассматриваем двухэтапную модель торгов при отсутствии арбитража и с ограниченными производственными мощностями. Во второй части работы исследована двухэтапная модель с пропорциональным правилом ратционирования потребителей. В такой модели существует равновесие в смешанных коррелированных стратегиях, а поведение производителей определяется эндогенной случайной величиной, определяющей разные ситуации на спотовом рынке.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ по проекту 08-01-00249 и гранта НШ 693.2008.1.

² Текст приводится в соответствии с изданием «Математическая теория игр и ее приложения. – 2009. – Т. 1. № 4. – С. 3–30».

³ Александр Алексеевич Васин, доктор физико-математических наук, профессор (vasin@cs.msu.su).

⁴ Антон Георгиевич Гусев, аспирант (vmik@hotmail.ru).

⁵ Агата Андреевна Шарикова, аспирант (agatha.sharikova@ubs.com).

Ключевые слова: форвардный рынок, олигополия Курно, рыночная власть, совершенное подыгровое равновесие.

Введение

Проблема использования рыночной власти крупными компаниями и связанного с этим отклонения рынка от состояния конкурентного равновесия имеет важное теоретическое и практическое значение. Рынок электроэнергии, характеризующийся значительной концентрацией производства, барьерами для входа на рынок и высокими требованиями к надежности компаний, предоставляет производителям реальные возможности получения сверхприбыли за счет использования рыночной власти в ущерб потребителям и суммарному общественному благосостоянию. Дробление рынка производства электроэнергии на мелкие компании нежелательно как с точки зрения издержек производства, так и с точки зрения надежности поставок электроэнергии. Альтернативным способом снижения рыночной власти является развитие рынка форвардных контрактов.

Начиная с работы [2], в ряде статей рассматривалось влияние рынка форвардных контрактов на уровень конкуренции в условиях олигополии. Большинство этих работ рассматривали рынок электроэнергии.

В работе [3] рассматривается рынок двух производителей с постоянными предельными издержками. Производители конкурируют по Курно на N последовательных рынках форвардных контрактов, а затем на одном спотовом рынке. Авторы предполагают, что активность арбитражеров уравнивает цены на всех $N + 1$ этапах, а неопределенность, связанная с будущим, отсутствует. В работе показано, что наличие возможности торговать на форвардном рынке увеличивает конкуренцию среди производителей, и что при увеличении числа этапов форвардных торгов N объем выпуска на таком рынке стремится к конкурентному состоянию. В последующей работе [7] показано, что такой результат возможен только в ситуации, когда форвардные позиции фирм являются общедоступной информацией, и что в противном

случае возникает исход Курно.

Newbery [10] и Green [6] рассматривают равновесия на аукционах функций предложения на спотовом рынке, в духе модели [8]. Newbery анализирует случайные гладкие монотонные заявки производителей на спотовом рынке и показывает, что при условии отсутствия ограничений по входу на рынок и риск-нейтральных потребителях, в ситуации СПР в данной модели любому генератору невыгодно предлагать ненулевой объем. Green [5] анализирует аукцион с линейными функциями предложения. Автор показал, что коалиция пары крупных генераторов может поднять цены на спотовом рынке существенно выше уровня предельных издержек. В случае конкуренции по Бертрану-Эджворту производители реализуют большую часть произведенного ими товара. Тогда как в случае конкуренции по Курно в СПР производителям невыгодно продавать произведенный товар.

В работе [9] показано, что в случае конкуренции по Бертрану-Эджворту на спотовом рынке возможность заключения форвардных контрактов может увеличить рыночную власть производителей и снизить суммарное общественное благосостояние. Авторы установили, что в равновесии в такой модели каждый производитель будет покупать форвардные контракты на весь объем собственного производства, поднимая тем самым цену на спотовом рынке.

James Bushnell [5] рассматривает двухэтапную модель симметричной олигополии на рынке электроэнергии с аукционом Курно на спотовом и форвардном рынках в условиях отсутствия арбитража. В работе показано, что в случае постоянных предельных издержек введение форвардного рынка с известными форвардными стратегиями производителей снижает рыночную власть последних (оцениваемую индексом Лернера) так же, как увеличение числа производителей в модели с n до n^2 .

В указанной модели некоторые предположения не соответствуют реальности, а именно: 1) ограничение производственных мощностей не является существенным; 2) на форвардном рынке товар покупают потребители наиболее высокими резервными

ценами. В реальности ограниченность производственных мощностей имеет существенное значение при ценообразовании (например, на рынках электроэнергии в пиковые периоды), а потребители обычно имеют равные возможности при покупке товара на форвардном рынке. Поэтому в рамках данного исследования рассматривается влияние указанных ограничений на равновесия. Спотовый рынок организован как аукцион Курно, при этом спрос на спотовом рынке соответствует остаточному спросу после торгов на форвардном рынке. Мы сравниваем цену конкурентного равновесия (Вальраса), равновесные по Нэшу цены одноэтапной модели Курно и одноэтапной модели Бертрана-Эджворта и цену СПР двухэтапного аукциона Курно. Отметим, что самый распространенный способ организации спотового рынка электроэнергии – это аукцион функций предложения единой цены, причем допустимые функции предложения – кусочно-постоянные. В работе [10] показано, что для этого аукциона исход, соответствующий устойчивым равновесиям Нэша, совпадает с исходом Курно. Аукцион оплаты по заявкам, применяемый в Великобритании, соответствует в этом смысле аукциону Бертрана-Эджворта (см. [13]).

В данной работе мы рассматриваем случай симметричной олигополии с постоянными предельными издержками. При заданной доле продаж наиболее крупной компании достигается максимальная разница между ценой Курно и ценой Вальраса ([11]). В разделе 1 данной работы представлены результаты касательно существования и характеристик равновесий по Нэшу для одноэтапных аукционов Курно и Бертрана-Эджворта. В разделе 2 анализируются две двухэтапные модели конкуренции по Курно.

Первый вариант отличается от модели Бушнелла лишь ограниченностью производственных мощностей. Найдены СПР, в зависимости от которых и указана область параметров, в которой СПР не существует. В зависимости от соотношения максимальной мощности и параметров функции спроса проведен сравнительный анализ равновесия двухэтапного аукциона и равновесий одноэтапных аукционов Курно и Бертрана-Эджворта.

В случае равенства цен на форвардном и спотовом рынках естественно предположить, что любой потребитель, чья резервная цена превосходит рыночную цену, может с равной вероятностью купить товар на любом из этих рынков. В этом случае остаточный спрос, реализующийся на спотовом рынке соответствует правилу пропорционального рационирования потребителей (см. [4]). Мы покажем, что СПР в чистых стратегиях для такой модели не существует. В то же время обосновано существование СПР в коррелированных смешанных стратегиях. Вводится случайная величина, определяющая стратегии игроков на спотовом рынке и принимающая два значения. При реализации первого значения, на спотовом рынке устанавливается низкая цена и высокие объемы продажи («медвежий рынок»). Для второго значения случайной величины на спотовом рынке реализуется высокая цена и низкие объемы («бычий рынок»). Определены условия существования такого СПР и дана оценка отклонения соответствующей цены от цены конкурентного равновесия, близкая к полученной в [5].

1. Анализ одноэтапных моделей

Рассмотрим рынок однородного товара с конечным числом производителей A . Каждый производитель a характеризуется функцией затрат $C^a(q)$ с неубывающими предельными издержками. Поведение потребителей характеризуется функцией спроса $D(p)$, которая непрерывно дифференцируема, убывает по p и известна всем агентам. Напомним известные модели принятия решений для такого рынка. Функция предложения Вальраса определяет оптимальный объем производства фирмы a в зависимости от цены p : $S^a(p) \stackrel{def}{=} \underset{q}{\text{Arg max}}(pq - C^a(q))$. Цену, при которой достигается равенство функции спроса на рынке с суммарной функцией предложения Вальраса, назовем *ценой Вальраса* \bar{p} . В модели олигополии Курно, стратегией производителя a является его объем производства $q_a \in [0, Q_a]$. Производители устанавливают свои объемы одновременно. Рыночная цена $p(\vec{q})$ уравнивает спрос и существующее предложение: $p(\vec{q}) = D^{-1}(\sum_{a \in A} q_a)$. Функция вы-

игрыша производителя a имеет вид $f^a(\vec{q}) = q_a p(\vec{q}) - C^a(q_a)$. Васин, Васина [10] установили следующее условие первого порядка для существования равновесия по Нэшу в данной модели. Пусть $(q_a^*, a \in A)$ - набор равновесных по Нэшу объемов производства, а $p^* = D^{-1}(\sum_{a \in A} q_a^*)$ - цена, соответствующая этим объемам (цена Курно). Тогда

$$(1) \quad (p^* - C'_-(q_a^*))|D'(p^*)| \leq q_a^* \leq (p^* - C'_+(q_a^*))|D'(p^*)|, \\ \text{если } C^a(0) < p^*,$$

$$(2) \quad q_a^* = 0 \text{ при } C^a(0) \geq p^*.$$

Цена Курно определяется из уравнения $\sum_a S_C^a(p^*) = D(p^*)$, где функция предложения Курно $S_C^a(p)$ определяется как решение системы (1), (2).

Рассмотрим симметричную олигополию с n фирмами-производителями и постоянными предельными издержками c . Пусть максимальная производственная мощность каждой фирмы ограничена: $q_a \leq \bar{q}$, $a = 1, \dots, n$, а суммарный спрос на рынке задан функцией $D(p) = \max\{0, \bar{D} - dp\}$. Тогда цена Вальраса $\tilde{p} = c$ при $0 \leq D(c) \leq n\bar{q}$, и $\tilde{p} = \frac{\bar{D} - n\bar{q}}{d}$ при $D(c) > n\bar{q}$.

Утверждение 1. Для данной симметричной олигополии при $Q^* \stackrel{def}{=} \frac{n}{n+1}(\bar{D} - cd) \leq n\bar{q}$ цена Курно равна $p^* = \frac{\bar{D} + cnd}{d(n+1)}$, суммарный объем производства равен Q^* . При $n\bar{q} < Q^*$ цена Курно равна $p^* = \frac{\bar{D} - n\bar{q}}{d} = \tilde{p}$, суммарный объем производства равен $n\bar{q}$.

Доказательство. Из системы (1), (2) суммарная функция предложения Курно равна $\sum_a S_C^a = \min\{(p - c)nd, n\bar{q}\}$, $p > c$. На рис. 1 показаны два возможных варианта пересечения суммарной функции предложения Курно с суммарной функцией спроса.

В первом случае $Q^* \leq n\bar{q}$, суммарная функция предложения Курно равна суммарному спросу при $p^* = \frac{\bar{D} + cnd}{d(n+1)}$, а суммарный объем производства равен Q^* . Во втором случае $n\bar{q} < Q^*$, суммарное предложение равно суммарному спросу при $p^* = \frac{\bar{D} - n\bar{q}}{d} = \tilde{p}$, а суммарный объем производства равен $n\bar{q}$.

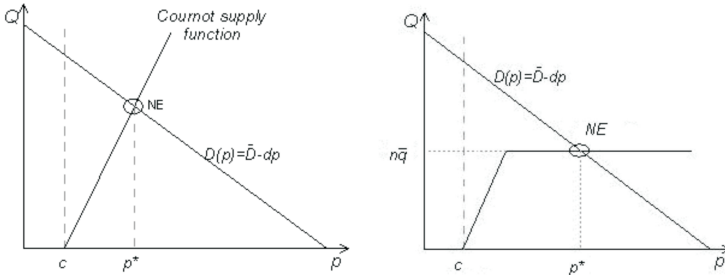


Рис. 1. а. Неактивное ограничение производственной мощности. б. Активное ограничение производственной мощности.

Рассмотрим теперь аналогичную олигополию с конкуренцией по Бертрану - Эджворту. Стратегией производителя a в такой модели является цена s_a . Набор $s = (s_a, a \in A)$ определяет фактическое предложение $\hat{Q}(s) = (\hat{Q}_p(s), p \in P(s))(s)$, где $\hat{Q}_p(s) = n(p)\bar{q}$, $n(p)$ - количество производителей, назначающих цену $s_a = p$, $P(s)$ - вектор установленных производителями цен, а \hat{Q}_p - количество товара, предлагаемого по цене p . Потребители становятся в очередь и покупают товар в порядке возрастания цены на него, учитывая свои резервные цены. Функция остаточного спроса $D(p, \hat{Q})$ показывает, сколько товара потребители готовы купить по цене p при фактическом предложении \hat{Q} , после того, как весь товар по ценам $p' < p$ будет распродан. При условии приоритета богатых потребителей эта функция имеет вид $D(p, \hat{Q}) = \max\{0, \bar{D} - \sum_{p' < p} \hat{Q}_{p'}\}$. В случае пропорционального правила рационирования, функция остаточного спроса при этом имеет вид $D_{pr}(p, \hat{Q}) = D(p)(1 - \sum_{p' < p} \frac{\hat{Q}_{p'}}{D(p')})$. По функции остаточного спроса для любых стратегий производителей однозначно определяется максимальная продажная цена $R(s) = \max\{p \in P(s) | D(p, \hat{Q}(s)) > 0\}$ максимальная цена, при которой остаточный спрос еще положительный. В качестве выиг-

рышей производителей рассмотрим их прибыли:

$$f^a(s) = \begin{cases} 0, & s_a > R(s), \\ (s_a - c)\bar{q}, & s_a < R(s), \\ (s_a - c) \min\{\bar{q}, D(R(s), \hat{Q}(s))/n(R(s))\}, & \end{cases}$$

где $n(R(s))$ – количество производителей, назначающих $s_a = R(s)$.

Следующее утверждение характеризует равновесия Нэша рассматриваемой одноэтапной игры:

Утверждение 2. При $(n - 1)\bar{q} > \bar{D} - cd$ набор стратегий $(s_a = c, a \in A)$ является равновесием Нэша в данной модели, соответствующим конкурентному равновесию. При $(n + 1)\bar{q} \leq \bar{D} - cd$ набор стратегий $(s_a = \tilde{p} = \frac{\bar{D} - n\bar{q}}{d}, a \in A)$ является равновесием Нэша при условии приоритета богатых потребителей. При $\frac{\bar{D} - cd}{(n+1)} < \bar{q} < \frac{\bar{D} - cd}{n-1}$ равновесий Нэша в рассматриваемой модели не существует. В условиях пропорционального правила последний набор стратегий является равновесием Нэша тогда и только тогда, когда $\bar{D} - cd \geq 2n\bar{q}$.

Доказательство. См. Приложение.

2. Анализ двухэтапных моделей

2.1. ОБОЗНАЧЕНИЯ

Рассмотрим симметричную олигополию с n фирмами - производителями с постоянными предельными издержками c . Производители участвуют в торгах на форвардном рынке, а затем в торгах на спотовом рынке, организованных в форме аукциона Курно. Стратегией производителя a является пара $q_a = (q_a^f, q_a^s(q^f))$, где q_a^f - объем предложения фирмы a на форвардном рынке, $\sum_a q_a^f = q^f$ - суммарный объем товара, проданного на форвардном рынке, а q_a^s - объем предложения фирмы a на спотовом рынке, зависящий от q^f . Суммарный объем производства каждой фирмы ограничен: $q_a^f + q_a^s(q_a^f) \leq \bar{q}, a = 1, \dots, n$. Каждая фирма стремится максимизировать свою суммарную прибыль. Активность арбитра

ражеров при любых стратегиях q_a , $a \in A$, обеспечивает равенство цен на форвардном и спотовом рынках: $p^s = p^f = p$.

2.2. МОДЕЛЬ С ПРИОРИТЕТОМ БОГАТЫХ ПОТРЕБИТЕЛЕЙ

Пусть предлагаемый на форвардном рынке объем достается потребителям с наиболее высокими резервными ценами. При таком правиле рационирования функция остаточного спроса по итогам форвардных торгов имеет вид $D(p, q^f) = \max\{0, D(p) - q^f\}$. Для любого набора стратегий $(q_a, a \in A)$, цена на спотовом рынке удовлетворяет соотношению $D(p) - q^f = \sum_a q_a^s(q^f)$. В СПР цена $p^s(q^f)$ на спотовом рынке определяется из равенства функции остаточного спроса функции остаточного предложения Курно: $D(p^s) - q^f = \min\{nd(p^s - c), n\bar{q} - q^f\}$.

Обозначим через \hat{p} и \hat{q} соответственно цену и суммарный объем предложения в СПР. Следующее утверждение описывает три типа СПР, которые существуют в рассматриваемой модели в зависимости от соотношения между суммарной максимальной производственной мощностью $n\bar{q}$ и значением спроса по цене, равной предельным издержкам $\bar{D} - cd$. Как и ранее, через \tilde{p} и p^* обозначены соответственно цена Вальраса и цена Курно для одноэтапной модели аукциона.

Утверждение 3. а) Если максимальная производственная мощность фирмы удовлетворяет соотношению $(n + 1)\bar{q} \leq \bar{D} - cd$, то для любого $q_a^f \leq \bar{q}$, $a \in A$ в рассматриваемой двухэтапной модели существует СПР с активным ограничением производственных мощностей такое, что $\hat{p} = \tilde{p} = p^*$, $q_a^f + q_a^s = \bar{q}$, $a \in A$.

б) Если $n\bar{q} < \bar{D} - cd < (n + 1)\bar{q}$, то существует локальное СПР с аналогичными характеристиками, но $p^* > \hat{p} = \tilde{p}$. Однако это локальное СПР не является истинным равновесием, так как производитель с максимальным объемом предложения на форвардном рынке может увеличить свою прибыль путем переброски всего объема своего предложения на спотовый рынок.

в) СПР с неактивным ограничением производственных мощностей существует в том и только том случае, когда $\bar{D} - cd \leq \frac{n^2+1}{n}\bar{q}$. В этом случае $\hat{p} = \frac{\bar{D}+n^2cd}{d(n^2+1)}$. Объемы предложения каждой фирмы равны $\hat{q}_a^f = \frac{(n-1)(\bar{D}-cd)}{n^2+1}$, $\hat{q}_a^s = \frac{\bar{D}-cd}{n^2+1}$.

Доказательство. См. Приложение.

Рис. 2 показывает типы СПР рассматриваемой модели в зависимости от соотношения между значением спроса по цене, равной предельным издержкам $\bar{D} - cd$, и суммарного максимального объема предложения $n\bar{q}$.

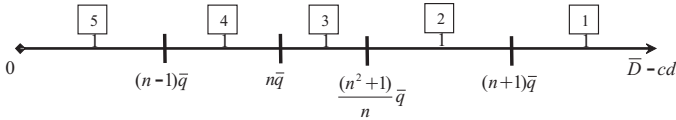


Рис. 2. Виды СПР для двухэтапной модели с ограниченными производственными мощностями.

1) При $(n+1)\bar{q} \leq \bar{D} - cd$ в модели существует равновесие Нэша, которому соответствует конкурентное равновесие одноэтапной модели с ценой $\hat{p} = \frac{\bar{D}-Q}{d}$ равной цене Вальраса. При этом ограничения производственных мощностей являются активными: $q_a^* = \bar{q}$. Для любого $\hat{q}_a^f < \bar{q}$, $a \in A$, аналогичное СПР с $\hat{q}_a^f + \hat{q}_a^s = \bar{q}$ существует для двухэтапной модели.

2) При $\frac{n^2+1}{n}\bar{q} \leq \bar{D} - cd < (n+1)\bar{q}$ существует локальное равновесие соответствующее конкурентному исходу. Однако это равновесие не является устойчивым в данной модели, а всем производителям оказывается при этом выгодно покинуть форвардный рынок. Таким образом, СПР в данном случае не существует.

3) При $n\bar{q} \leq \bar{D} - cd < \frac{(n^2+1)}{n}\bar{q}$ существует описанное выше локальное СПР. Кроме того, в этой области существует равновесие Бушнелла (с неактивными ограничениями производственной мощности): суммарный объем предложения каждого производителя a равен $\hat{q}_a = \frac{n(\bar{D}-cd)}{n^2+1}$, равновесная цена равна $\hat{p} = \frac{\bar{D}+n^2cd}{d(n^2+1)} < p^*$.

4) При $(n - 1)\bar{q} \leq \bar{D} - cd < n\bar{q}$ существует равновесие Бушнелла (см. выше).

5) При $0 \leq \bar{D} - cd < (n - 1)\bar{q}$ также существует равновесие Бушнелла. Однако в этом случае двухэтапный аукцион Курно оказывается неоптимальным способом организации торгов, поскольку аукцион Бертрана-Эджворта дает равновесие, совпадающее с конкурентным.

2.3. МОДЕЛЬ С ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫМ ПРАВИЛОМ РАЦИОНИРОВАНИЯ

При равенстве цен $p^s = p^f = p$, естественно предположить, что любой производитель с резервной ценой $p^r > p^f$ с равной вероятностью, не зависящей от p^s , покупает товар на форвардном рынке. Производители с более низкими резервными ценами ($p^r < p^f$) товар покупать не будут. Рис. 3 иллюстрирует остаточную функцию спроса, которая возникает при таком правиле рационирования потребителей. Для данной функции остаточного спроса в игре описывающей спотовый рынок, существуют два локальных равновесия. Первое из этих равновесий соответствует области крутого наклона функции остаточного спроса («рынок медведей»). Суммарная функция предложения Курно при этом равна $S_1(p) = nd(p - c)$, а остаточный спрос равен $D_{pr}^0(p, q^f) = \max\{0, \bar{D} - dp - q^f\}$. (В этом разделе рассматривается модель без ограничений на производственные мощности). Равновесная цена в этом случае равна

$$(3) \quad p_1 = p^* - \frac{q^f}{d(n+1)}$$

Объем предложения по цене p_1 равен

$$(4) \quad q^{s1} = nd\left(\Delta p - \frac{q^f}{d(n+1)}\right), \text{ где } \Delta p = p - c.$$

Второе равновесие соответствует области пологого наклона функции остаточного спроса: $D_{pr}^2(p, q^f) = D(p)\left(1 - \frac{q^f}{D(p^f)}\right)$. Равновесная цена и соответствующий объем предложения в этом случае равны:

$$(5) \quad p_2 = p^* > p_1, \quad q^{s2} = nd\Delta p \left(1 - \frac{q^f}{nd\Delta p + \frac{wq^f}{n+1}}\right) < q^{s1}$$

(«рынок быков», см. рис. 3).

Эти результаты следуют из необходимого условия (1), (2) существования равновесия Курно. Следующее утверждение устанавливает важную особенность рассматриваемого двухэтапного рынка.

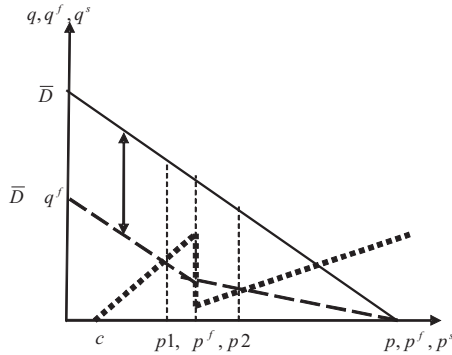


Рис. 3. Функция предложения Курно на спотовом рынке для двухэтапной модели с правилом пропорционального рационирования.

Утверждение 4. В данной модели СПР в чистых стратегиях не существует.

Доказательство. От противного, предположим, что существует СПР со стратегиями $(q_a^f, q_a^s(q^f)), a \in A$. Тогда ситуация $(q_a^s(q^f), a \in A)$ соответствует локальному равновесию Нэша на «бычьем рынке» или локальному равновесию Нэша на «медвежьем рынке». Либо $q^s = 0$, что возможно, если остаточный спрос при $p = c$ равен 0. Но набор $q_a^f, a \in A$, для которого $\sum q_a^f \geq D(c)$, не является равновесием Нэша одноэтапного аукциона Курно. Учитывая условие отсутствия арбитража, получим $p^f = p^s = p_1$ в первом случае, и $p^f = p^s = p_2$ во втором случае. Заметим, что такие стратегии не являются СПР, так как любой производитель с $q_a^s(q^f) > 0$ может увеличить свою прибыль, уменьшив свой объем предложения q_a^s на спотовом рынке в первом случае, и увеличив q_a^s во втором случае. (Это следует из условий первого

порядка для существования локального равновесия Нэша и из-за разного наклона функции остаточного спроса справа и слева от точки $p^f = p^s$).

Какого рода равновесия существуют для такой модели? Равновесие в смешанных стратегиях. Однако, практика показывает, что независимые смешанные стратегии не применяются на подобных рынках. Другая интересная возможность – это попытаться найти СПР в смешанных коррелированных стратегиях.

Предположим, что при известном объеме предложения на форвардном рынке q^f , стратегии производителей на спотовом рынке определяются случайной величиной, которая может принимать два значения: $\omega = 0$ и $\omega = 1$ с вероятностями w и $1 - w$ соответственно, $w \in (0, 1)$. Пусть при $\omega = 0$ реализуется равновесие с низкой ценой, а при $\omega = 1$ - равновесие с высокой ценой. Тогда при условии риск-нейтральности арбитражеров условие отсутствия арбитража означает, что $p^f = wp_1 + (1 - w)p_2 = p^* - \frac{wq^f}{d(n+1)}$, $w \in (0, 1)$.

Теперь найдем равновесие на форвардном рынке при условии, что стратегии производителей на спотовом рынке уже известны. Суммарная прибыль производителя a равна $\pi_a = \pi_a^f + \omega\pi_a^{s1} + (1 - \omega)\pi_a^{s2}$, где $\pi_a^f = (p^f - c)q_a^f = \frac{\bar{D} - dc - \omega q^f}{d(n+1)} q_a^f = (\Delta p - \frac{wq^f}{d(n+1)}) q_a^f$,

$$\pi_a^{s1} = (p_1 - c)q_a^{s1} = \frac{(\bar{D} - dc - q^f)^2}{d(n+1)^2} = d\left(\Delta p - \frac{q^f}{d(n+1)}\right)^2,$$

$$\begin{aligned} \pi_a^{s2} &= (p_2 - c)q_a^{s2} = \left(\frac{\bar{D} - dc}{d(n+1)}\right)^2 d\left(1 - \frac{q^f}{nd\Delta p + \frac{wq^f}{n+1}}\right) = \\ &= d(\Delta p)^2 \left(1 - \frac{q^f}{nd\Delta p + \frac{wq^f}{n+1}}\right). \end{aligned}$$

Условия первого порядка для нахождения равновесия принимают

вид:

$$(6) \quad \frac{\partial \pi_a}{\partial q_a^f} = \Delta p \left(1 - \frac{2w}{n+1} \right) + \frac{wq^f}{d(n+1)} \left(\frac{2}{n+1} - 1 - \frac{1}{n} \right) - \frac{(1-w)n\Delta p^3}{(n\Delta p + \frac{w}{d(n+1)}q^f)^2} = 0$$

Утверждение 5. В рассматриваемой двухэтапной модели СПР в смешанных коррелированных стратегиях существует при $w \in (w_1(n), w_2(n))$, при этом нижние и верхние границы интервала указаны в табл. 1. Для любого w из найденного интервала СПР определяется из (3)–(5), а равновесный объем предложения каждого производителя на форвардном рынке \hat{q}_a^f находится как максимальный корень уравнения (6). Значение суммарного предложения на форвардном рынке составляет $\hat{q}^f = \frac{d}{w} \Delta p \left(\frac{n^5 + (1-w)(n^4 - 2n^2 - 1) + n^3(1-2w)}{n^2(1+n^2)} \right)$ с точностью $o((1-w)^2)$.

Доказательство. См. Приложение.

Таблица 1.

n	w_1	w_2
2	0,687	0,793
3	0,772	0,863
5	0,866	0,917
7	0,907	0,940
10	0,937	0,957

В табл. 2 представлены соотношения равновесных цен для исследуемой и классической моделей олигополии по Курно. Видно, что возможность заключения форвардных контрактов снижает рыночную власть производителей. В табл. 3 показано соответствующее этому факту увеличение суммарного предложения для случая двухэтапной модели по сравнению с одноэтапной моделью.

Таким образом, результаты о соотношении равновесных цен и объемов оказались близки к результатам Бушнелла. Отличие в том, что в двухэтапной модели с правилом пропорционального рационирования существует неопределенность: ожидаемая (а

Таблица 2.

n	$\frac{p^f - c}{p^* - c}$	$\frac{p^f - c}{p^* - c} _{w_1}$	$\frac{p^f - c}{p^* - c} _{w_2}$
2	$\frac{13 + 23w}{60}$	0,480	0,520
3	$\frac{7 + 29w}{90}$	0.326	0.367
5	$\frac{19 + 206w}{975}$	0,202	0,213
7	$\frac{37 + 747w}{4900}$	0,146	0,150
10	$\frac{301 + 11799w}{111100}$	0,102	0,104

Таблица 3.

n	$\frac{q}{q^*} _{w_1}$	$\frac{q}{q^*} _{w_2}$
2	1,333	1,276
3	1,273	1,228
5	1,18	1,169
7	1,133	1,128
10	1,095	1,093

не фактическая) цена на спотовом рынке совпадает с ценой на форвардном рынке, при этом, как правило, на спотовых торгах реализуется цена более низкая, чем цена на форвардных торгах.

3. Заключение

Для симметричной олигополии с постоянными предельными издержками и ограниченными производственными мощностями были найдены условия, при которых введение возможности заключения форвардных контрактов снижает рыночную власть производителей и увеличивает суммарное общественное благосостояние. В частности:

1) В случае, когда суммарная производственная мощность существенно превосходит спрос по цене равной предельным издержкам, т. е. когда даже уход с рынка производителей не способен повлиять на равновесную цену, оптимальным является проведение аукциона Бертрана-Эджворта, в котором реализуется конкурентное равновесие с ценой, равной предельным издержкам. При этом введение форвардного рынка может только увеличить рыночную власть производителей.

2) В случае, когда спрос по цене, равной предельным издержкам, существенно превосходит суммарную производственную мощность (так что ограничение производственной мощности является активным), введение форвардного рынка никак не влияет на цены и уже исход одноэтапного аукциона Курно (и аукциона функций предложения единой цены) является конкурентным равновесием.

3) В ситуации, когда ограничение производственной мощности неактивно, получаются результаты, подобные работе [5], т. е. введение форвардного рынка ограничивает рыночную власть производителей примерно так же, как увеличение числа производителей на рынке с n до n^2 . Имеет место понижение цен и повышение выпуска. В случае пропорционального рационирования потребителей в модели существует СПР в коррелированных смешанных стратегиях, а на спотовом рынке имеет местно эндогенная неопределенность: как правило, на спотовых торгах реали-

зуется «рынок медведей» с более низкими ценами, реже – «рынок быков» с более высокими ценами.

4) В промежуточной области, близкой к 2), в двухэтапном аукционе Курно СПР не существует.

Так как на рынке электроэнергетики соотношение между функцией предложения Вальраса и суммарной производственной мощностью часто меняется, оптимальным с точки зрения увеличения суммарного благосостояния может оказаться применение различных типов аукционов для организации торгов в пиковые и непиковые периоды.

Одной из важных задач для дальнейшего исследования является обобщение полученных результатов на случай, когда существует несколько типов производственных мощностей.

Литература

1. ВАСИН А.А., ВАСИНА П.А. *Рынки и аукционы однородного товара* // Препринт # 2005/047. – М.: Российская Экономическая Школа, 2005. – 51 С.
2. ALLAZ B., VILA J.-L. *Cournot competition, forward markets and efficiency* // – Center HEC-ISA and Stern School of Business, NY University, 1989.
3. ALLAZ B., VILA J.-L. *Cournot competition, futures markets and efficiency* // J. of Economic Theory. – 1993. – № 1. – P. 1–16.
4. ALLEN B., HELLWIG M. *Bertrand-Edgeworth oligopoly in large markets*// Review of Economic Studies. – 1986. – Vol. 53. – P. 175–204.
5. BUSHNELL J. *Oligopoly equilibria in electricity contract markets*// CSEM Working Paper, University of California Energy Institute. – 2005. – WP-148.
6. GREEN R. *The Electricity contract market in England and Wales*// J. of Industrial Economics. – 1999. – Vol. XLII. – P. 107–124.

7. HUGHES J.S., KAO J.L. *Strategic forward contracting and observability* // Int. J. of Industrial Organization. – 1997. – P. 121–133.
8. KLEMPERER P.D., MEYER M.A. *Supply function equilibrium in oligopoly under uncertainty* // Econometrica. – 1989. – Vol. 57. – P. 1243–1277.
9. MAHENC P., SALANIE F. *Softening competition through forward trading* // J. of Economic Theory. – 2004. – № 2. – P. 282–293.
10. NEWBERY D.M. *Competition, contracts, and entry in the electricity spot market* // RAND J. of Economics. – 1998. – Vol. 29, № 4. – P. 726–749.
11. VASIN A.A., VASINA P.A. *Models of supply functions competition with application to the network auctions* // – Moscow: EERC, 2005.
12. VASIN A.A., VASINA P.A. *Electricity markets analysis and design* // Working paper # 2006/053. – Moscow, New Economic School, 2006. – 23 p.
13. WOLFRAM C. *Electricity markets: should the rest of the world adopt the United Kingdom's reforms?* // Regulation. – 1999. – Vol. 22, № 4. – P. 48–53.

4. Приложение

4.1. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 2.

Из необходимого условия для существования равновесия в модели Бертрана-Эджворта $s_a = \tilde{p}$, $a \in A$ в ситуации равновесия для модели симметричной олигополии. Таким образом, могут реализовываться две возможные ситуации, показанные на рис. 4. В случае а) $\bar{D} - cd \leq n\bar{q}$ - ограничения производственных мощностей являются неактивными, и $\tilde{p} = c$. В этом случае, равновесие существует тогда и только тогда, когда $\bar{D} - cd \leq (n-1)\bar{q}$. В такой ситуации увеличение цены одним из производителей порождает ситуацию, в которой остальные производители полностью покры-

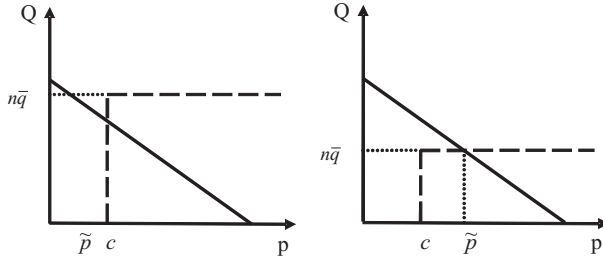


Рис. 4. а. Неактивное ограничение производственной мощности. б. Активное ограничение производственной мощности.

вают весь спрос на рынке по цене c – таким образом, назначение более высокой цены оказывается производителю невыгодно. И наоборот, при $n\bar{q} \geq \bar{D} - cd > (n - 1)\bar{q}$ любой производитель может увеличить свой выигрыш назначая цену $s_a > c$, так как остаточный спрос положителен в некоторой окрестности c .

Если $\bar{D} - cd > n\bar{q}$, то $\tilde{p} = \frac{\bar{D} - n\bar{q}}{d}$ (рис. 4б). Набор стратегий $(\bar{s}_a = \tilde{p}, a \in A)$ будет равновесным по Нэшу в случае, когда ни одному из производителей не выгодно увеличивать заявленную им цену, т. е. $(\tilde{p} - c)\bar{q} \geq (s_a - c)D(s_a, \hat{Q}(\bar{s})) = \begin{cases} ((n - 1)\bar{q}(s_a - c) & \text{при } p = \tilde{p}, \\ \bar{q} & \text{при } s_a > p \end{cases} = (s_a - c)(\bar{D} - ds_a - (n - 1)\bar{q})$ для любого $s_a > \tilde{p} \Leftrightarrow (s_a - p)\bar{q} \leq d(s_a - p)(s_a - c) \forall s_a \geq \tilde{p} \Leftrightarrow \bar{q} \leq d(\tilde{p} - c) = \bar{D} - n\bar{q} - cd \Leftrightarrow (n + 1)\bar{q} \leq \bar{D} - cd$.

При пропорциональном правиле рационирования остаточный спрос равен $D_{pr}(p, \hat{Q}) = D(p)(1 - \sum_{p' < p} \frac{\hat{Q}_{p'}}{D(p')})$. Отсюда условие существования равновесия Нэша имеет вид: $(\tilde{p} - c)\bar{q} \geq \frac{1}{n}(s_a - c)(n\bar{q} + d\tilde{p} - ds_a) \Leftrightarrow (\tilde{p} - c)\bar{q} \geq (s_a - c)\bar{q} - \frac{d(s_a - c)(s_a - \tilde{p})}{n} \Leftrightarrow \frac{d(s_a - c)}{n}(s_a - \tilde{p}) \geq (s_a - \tilde{p})\bar{q} \forall s_a \geq \tilde{p} \Leftrightarrow d(\tilde{p} - c) \geq n\bar{q} \Leftrightarrow \bar{D} - cd \geq 2n\bar{q}$.

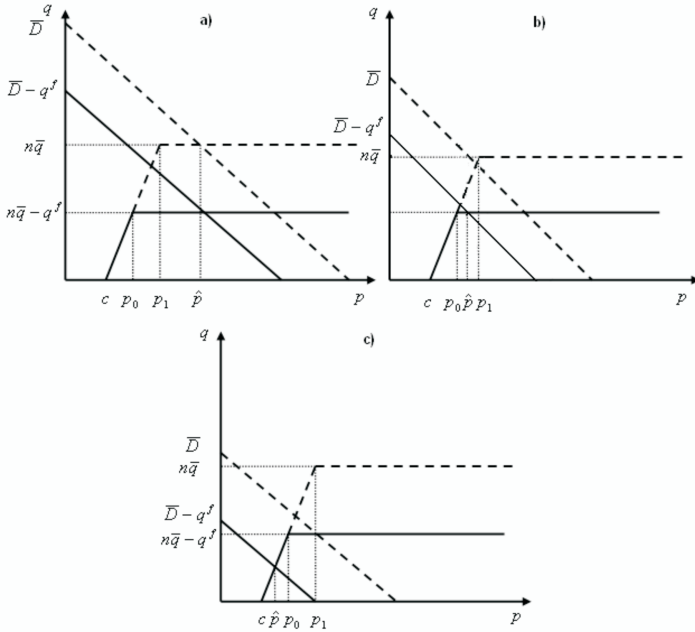


Рис. 5.

4.2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 3.

Пусть торги на форвардном рынке завершились, и суммарный объем товара, проданный на форвардном рынке составил $q^f = \sum_a q_a^f$, $a = \overline{1, n}$. Тогда остаточный спрос на спотовом рынке равен $D(p, q^f) = \bar{D} - dp - q^f$, а функция суммарного предложения Курно на спотовом рынке равна $S_C(p, q^f) = \begin{cases} nd(p - c), & c \leq p \leq p_0 \\ n\bar{q} - q^f, & p > p_0 \end{cases}$, $p_0 = \frac{n\bar{q} + ncd - q^f}{nd}$.

а) Пусть $(n + 1)\bar{q} \leq \bar{D} - cd$. Найдем значение объема q^f продаж на форвардном рынке, при котором функция остаточного спроса на спотовом рынке пересекает функцию суммарного остаточного предложения Курно на горизонтальном участке. В этом

случае цена на спотовом рынке совпадает с ценой на форвардном рынке (рис. 5а): $\hat{p} = p^s = p^f = \frac{\bar{D} - n\bar{q}}{d} = \tilde{p}$, суммарный объем товара, проданного на спотовом рынке равен $\hat{q}^s = n\bar{q} - q^f$. Так как $D(p_1) = n\bar{q}$, производители продадут весь предложенный ими объем на рассматриваемом двухэтапном аукционе. Заметим, что цена p_1 не зависит от объема q^f продаж на форвардном рынке. Поэтому, производителю a невыгодно изменять объем q_a^f своего предложения на форвардном рынке, так как такое отклонение не изменит равновесную цену. При этом прибыль производителя $\hat{\pi}_a = (\hat{p} - c)(q_a^f + q_a^s) = \frac{\bar{D} - cd - n\bar{q}}{d} \bar{q}$ остается неизменной, так как $\frac{\partial \pi_a}{\partial q_a^f} = 0 \forall q_a^f \in [0, \bar{q}]$. Таким образом, при $(n + 1)\bar{q} \leq \bar{D} - cd$ для любого значения q^f в рассматриваемой двухэтапной модели существует СПР с исходом, соответствующим равновесию в одноэтапной модели Курно при активном ограничении на производственные мощности: $\hat{q}_a^f + \hat{q}_a^s = \bar{q}$ для любого $a \in A$.

б) Пусть $\bar{D} - cd < (n + 1)\bar{q}$. Найдем суммарный объем q^f предложения на форвардном рынке, при котором функция остаточного спроса пересекает функцию суммарного предложения Курно на спотовом рынке на горизонтальном участке последней. При $\bar{D} - cd < (n + 1)\bar{q}$ такое пересечение возможно при $p_0 \leq \hat{p} \leq p_1$ (рис. 5б) \Leftrightarrow

$$(7) \quad \frac{n\bar{q} + ncd - q_f}{nd} \leq \frac{\bar{D} - n\bar{q}}{d} \leq \frac{\bar{q} + cd}{d} \quad \Leftrightarrow \\ (n + 1)n\bar{q} - n(\bar{D} - cd) \leq q^f.$$

Учитывая, что $q^f \leq n\bar{q}$, получим следующее условие существования СПР: $n\bar{q} \leq \bar{D} - cd \leq (n + 1)\bar{q}$.

Не ограничивая общности, предположим, что производитель a предлагает на форвардном рынке максимальный объем товара q_a^f , $q_a^f > \frac{q^f}{n}$. Рассмотрим ситуацию, когда все производители, кроме производителя a выбирают локально равновесные стратегии, найденные выше, а производитель a перебрасывает весь объем своего предложения на форвардном рынке на спотовый рынок таким образом, что неравенство (7) не выполнено: $\sum_{b \neq a} \hat{q}_b^f < (n + 1)n\bar{q} - n(\bar{D} - cd)$. В этом случае функция оста-

точного предложения Курно на спотовом рынке имеет вид (рис. 6):

$$S^C(p) = \begin{cases} 0, & p < c \\ (p - c)nd, & p \in [c; p_0] \\ (p - p_0)d + n\bar{q} - \sum_b \hat{q}_b^f, & p \in [p_0; p_1] \\ n\bar{q} - \sum_{b \neq a} \hat{q}_b^f, & p \geq p_1, \end{cases}$$

где $p_0 = c + \frac{n\bar{q} - \sum_b \hat{q}_b^f}{nd}$, $p_1 = c + \frac{\bar{q}}{d}$. Тогда новая равновесная цена p' удовлетворяет соотношению: $(p' - p_0)d + n\bar{q} - \sum_b \hat{q}_b^f = \bar{D} - dp' -$

$$\sum_{b \neq a} \hat{q}_b^f \Leftrightarrow p'd - cd - \bar{q} + \frac{\sum_b \hat{q}_b^f}{n} + n\bar{q} - \sum_b \hat{q}_b^f = \bar{D} - dp' - \sum_{b \neq a} \hat{q}_b^f.$$

Учитывая, что $\sum_b \hat{q}_b^f = n\hat{q}_a^f$, получаем новую равновесную цену p' и новый объем q_a суммарного предложения производителя a : $p' = \frac{1}{2d} (\bar{D} + cd - (n-1)\bar{q})$, $q_a = \frac{1}{2} ((\bar{D} - cd) - (n-1)\bar{q})$. При этом прибыль производителя a составит: $\pi'_a(q_a) = (p' - c)q_a = \frac{(\bar{D} - cd - (n-1)\bar{q})^2}{4d}$. Если $\pi'_a(q_a^{f'}) > \hat{\pi}_a$, то производителю выгодно изменить объем своего предложения на форвардном рынке тогда и только тогда, когда

$$(8) \quad \frac{(\bar{D} - cd - (n-1)\bar{q})^2}{4d} > \frac{\bar{D} - cd - n\bar{q}}{d} \bar{q}.$$

При $\bar{D} - cd < (n+1)\bar{q}$ неравенство (8) выполнено, и производитель a имеет возможность увеличить свою прибыль. Таким образом, при $n\bar{q} \leq \bar{D} - cd \leq (n+1)\bar{q}$ найденное локальное равновесие является неустойчивым в рассматриваемой модели.

Заметим, что в случае отклонения одного из производителей, прибыль остальных производителей возрастает.

в) Пусть теперь $\bar{D} - cd < n\bar{q}$. Суммарный объем q^f предложения на форвардном рынке, при котором функция остаточного спроса пересекает функцию суммарного предложения Курно на спотовом рынке на наклонном участке, удовлетворяет нера-

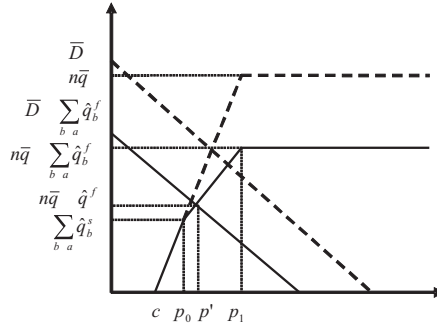


Рис. 6.

венству: $\hat{p} < p_0 \Leftrightarrow \frac{\bar{D}+ncd-q^f}{d(n+1)} < \frac{n\bar{q}+ncd-q^f}{nd} \Leftrightarrow q^f < (n+1)n\bar{q} - n(\bar{D} - cd)$.

Объемы предложения на спотовом рынке при цене \hat{p} равны: $\hat{q}_a^s = d(\hat{p} - c) = \frac{\bar{D}-cd-q^f}{n+1}$, $a \in A$. Эта ситуация соответствует двухэтапной модели, рассмотренной Бушнеллом. Определим оптимальный объем предложения q_a^f : предположим, что все производители, кроме производителя a выбирают свои форвардные стратегии q_b^f , $b \neq a$, а производитель a предлагает объем q_a^f на форвардном рынке. Прибыль производителя a равна: $\pi_a(\hat{p}, q_a) = (q_a^s + q_a^f)(\hat{p} - c) = \left(\frac{\bar{D}+ncd-q_a^f - \sum_{b \neq a} q_b^f}{d(n+1)} - c \right) \left(q_a^f + \frac{\bar{D}-cd-q_a^f - \sum_{b \neq a} q_b^f}{n+1} \right)$.

Производитель a выбирает стратегию q_a^f так, чтобы максимизировать свою прибыль. Тогда условие первого порядка имеет вид: $\frac{\partial \pi_a(\hat{p}, q_a^f, q_a^s(q_a^f))}{\partial q_a^f} = 0$. Так как мы рассматриваем случай симметричной олигополии, то: $-\frac{1}{d(n+1)} \left(q_a^f + \frac{\bar{D}-cd-nq_a^f}{n+1} \right) + \left(\frac{\bar{D}+ncd-nq_a^f}{d(n+1)} - c \right) \left(1 - \frac{1}{n} \right) = 0 \Leftrightarrow -q_a^f - (\bar{D}-cd) + n(\bar{D}-cd) - n^2 q_a^f = 0 \Rightarrow \hat{q}_a^f = \frac{n-1}{n^2+1} (\bar{D} - cd)$, $\hat{q}_a^s(q_a^f) = \frac{\bar{D}-cd}{n^2+1}$, $\hat{p} = \frac{\bar{D}+n^2cd}{d(n^2+1)}$. Так как $q_a = q_a^f + q_a^s \leq \bar{q}$, то при $\bar{D} - cd \leq \frac{(n^2+1)\bar{q}}{n}$ существует равновесия Бушнелла.

4.3. Доказательство утверждения 5.

Произведем замену $\frac{wq^f}{d(n+1)} + n\Delta p = z$. Тогда условие первого порядка (6) принимает вид кубического уравнения:

$$(9) \quad \Phi(z) = -z^3 \left(\frac{1+n^2}{n(n+1)} \right) + z^2 \Delta p \left(2+n - \frac{2(w+n)}{n+1} \right) - (1-w)n\Delta p^3 = 0$$

Проанализируем поведение этой функции, изучая ее производную $\Phi'(z) = -3z^2 \left(\frac{1+n^2}{n(n+1)} \right) + 2z \Delta p \left(2+n - \frac{2}{n+1}(w+n) \right)$. Локальный минимум функции достигается при $z_1 = 0$, локальный максимум – при $z_2 = \frac{2}{3} n \Delta p \left(\frac{n^2+n+2(1-w)}{1+n^2} \right)$, а функция $\Phi(z)$ имеет вид, показанный на рис. 7. Из логических ограничений на объемы предложения q^f, q_a^{s1}, q_a^{s2} (должны быть неотрицательными) имеем в пересчете для z следующие ограничения:

$$(10) \quad n\Delta p \leq z \leq n\Delta p \frac{n+1}{n+1-w}.$$

Заметим, что $\Phi(n\Delta p) = \frac{\Delta p(n^2-nw+w-1)}{n} > 0$ для любого $n > 1$ и $\Delta p > 0$, $\Phi'(n\Delta p) = \frac{-n^2+2n+4(1-w)-3}{n+1} < 0$ на найденном выше интервале. Таким образом, единственное подходящее нам решение (3) – это максимальный корень рассматриваемого кубического уравнения, при условии, что этот корень удовлетворяет второму неравенству из (10).

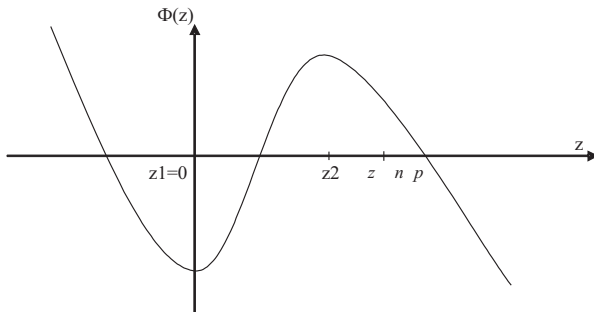


Рис. 7. График функции $\Phi(z)$.

Необходимо определить интервал значений w , при которых решение кубического уравнения существует и является равновесием. При $w = 1$ получим $\Phi((n + 1)\Delta p) = \frac{-n^2 - 2n - 1}{n} < 0$. Отсюда, верхняя граница для w - это 1. Нижняя граница допустимого интервала может быть определена с помощью итерационного метода, или разложением функции $\Phi(z)$ в ряд Тейлора, учитывая что $\varepsilon = 1 - w$. В результате вычислений, с точностью до 10^{-3} получены следующие нижние граничные значения для w в зависимости от n : $\underline{w}(2) = 0,637$; $\underline{w}(3) = 0,742$; $\underline{w}(5) = 0,832$; $\underline{w}(7) = 0,875$; $\underline{w}(10) = 0,909$.

При фиксированном w из допустимого интервала, аналогичными методами можно найти $z(w, n)$, учитывая что $\Phi(z)$ - гладкая монотонная функция на интервале (10). Суммарный объем предложения q^f на форвардном рынке, цены p^f и p_1 , объемы предложения на спотовом рынке q^{s1} , q^{s2} определяются по следующим формулам:

$$\begin{aligned} \hat{p}^f &= p^s = wp_1 + (1 - w)p_2 = p^* - \frac{wq^f}{d(n + 1)} = \\ &= p^* - \Delta p \left(\frac{n^5 + (1 - w)(n^4 - 2n^2 - 1) + n^3(1 - 2w)}{n^2(1 + n^2)(n + 1)} \right) \\ p_1 &= p^* - \frac{1}{w} \Delta p \left(\frac{n^5 + (1 - w)(n^4 - 2n^2 - 1) + n^3(1 - 2w)}{n^2(1 + n^2)(n + 1)} \right), \\ p_2 &= p^*, \\ \hat{q}^f &= \frac{d}{w} \Delta p \left(\frac{n^5 + (1 - w)(n^4 - 2n^2 - 1) + n^3(1 - 2w)}{n^2(1 + n^2)} \right), \\ q^{s1} &= nd \left(\Delta p - \frac{q^f}{d(n + 1)} \right), \\ q^{s2} &= nd \Delta p \left(1 - \frac{q^f}{nd \Delta p + \frac{wq^f}{n+1}} \right). \end{aligned}$$

На спотовом рынке из-за существования двух разных участков функции спроса, образовавшихся в результате пропорционального рационирования потребителей, для производителя может оказаться выгодным отклониться от найденных нами выше локально равновесных стратегий и изменить свой объем производства таким образом, что новая цена будет отвечать другому участку функции спроса. Вообще говоря, найденные нами выше равновесия могут оказаться локальными, но не глобальными. Ниже мы рассматриваем оба возможных варианта отклонения и исследуем равновесия на устойчивость к большим отклонениям.

Исследование устойчивости локального равновесия по Нэшу в случае реализации низкой цены на спотовом рынке. Для производителя может оказаться выгодным отклониться от найденной нами выше стратегии – объема q^{s1} . Он может начать сокращать свой объем, тем самым увеличивая равновесную цену. Для линейной функции спроса необходимое условие равновесия является достаточным. Поэтому сокращение объема предложения данного игрока, недостаточное для того, чтобы новая цена превзошла форвардную цену, не позволит производителю увеличить свою прибыль. Но заметим, что правый участок функции спроса у нас более пологий, следовательно, на этом участке сокращение объема приводит к более значительному увеличению цены. Таким образом найденная ранее пара (равновесные объемы, равновесная цена) может не быть равновесием в рассматриваемой модели.

Сравнивая ожидаемые выигрыши в случае применения найденной локально равновесной стратегии и в случае вышеописанного отклонения, можно найти условия существования равновесия в рассматриваемой модели. Прибыль производителя в случае использования найденной локально равновесной стратегии составит $\pi_I = q_1(p_1 - c) = d(p_1 - c)^2$, так как $q_1 = d(p_1 - c)$. В случае вышеописанного отклонения, новые локально равновесные объемы могут быть получены из условий первого порядка, и равны $v_1^{\text{new}} = Kd(p_1^{\text{new}} - c) = \frac{K}{2}(\bar{D} - dc) - \frac{n-1}{2}q_1$, где $K = 1 - \frac{q^f}{D(p^f)}$ доля неудовлетворенного спроса после проведения форвардных торгов. Ожидаемый выигрыш в данной ситуа-

ции равен $\tilde{\pi}_{II} = Kd(p_1^{\text{new}} - c)^2$. Отсюда условие устойчивости равновесия имеет вид: $d(p_1 - c)^2 \geq Kd(p_1^{\text{new}} - c)^2$. Локальное равновесие с низкой ценой является равновесием в рассматриваемой модели, если $w \in (w_1^1(n), w_2^1(n)) \subset (\underline{w}(n), 1)$, где $w_1^1(n), w_2^1(n)$ определяются из следующего неравенства: $f_1(q^f, n, w) = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{(n+1)q^f}{n+wq^f} \right) \left(1 - \frac{(n-1)(1-q^f)}{(n+1)(1-\frac{(n+1)q^f}{n+wq^f})} \right)^2 - \left(\frac{1-q^f}{n+1} \right)^2 \leq 0$, где $q^f = q^f(w)$.

Приблизительные значения $w_1^1(n), w_2^1(n), \underline{w}(n)$ для $n = 2, 3, 5, 7$ и 10 приведены в табл. 4. Без ограничения общности, положим $\bar{D} - dc = 1$. Так как $n - q^f(n + 1 - w) > 0$, достаточно проверить выполнение неравенства $\phi_1(q^f, n, w) = (q^f)^2((n-3)w^2 + 4w) + q^f(4w^2 - 6(n+1)w + 4n) + 4nw - 3n + 1 \leq 0$. При $w = 1$ это неравенство для q^f не выполнено, так как $Discrim\phi_1 = 16(n^2 - w)(1 - w)^3 \geq 0 \forall w \in [0, 1], Discrim\phi_1 = 0$ при $w = 1$. Численное решение неравенства: $q^f(w, n) \in \left(\frac{-2w^2 + 3w(n+1) - 2n - 2\sqrt{(n^2-w)(1-w)^3}}{w((n-3)w+4)}, \frac{-2w^2 + 3w(n+1) - 2n + 2\sqrt{(n^2-w)(1-w)^3}}{w((n-3)w+4)} \right)$ определяет интервал значений $(w_1^1(n), w_2^1(n)) \subset (\underline{w}(n), 1)$ величины w , при которых рассматриваемое локальное равновесие для случая $\omega = 0$ является устойчивым равновесием (см. табл. 4).

Исследование устойчивости локального равновесия по Нэшу в случае реализации высокой цены на спотовом рынке проводится аналогично вышеизложенному случаю: нужно рассмотреть ситуацию, когда при фиксированных стратегиях остальных игроков, производитель увеличивает объем своего предложения столь существенно, равновесная цена резко уменьшается и имеет место равновесие с низкой ценой (имеет место переход на крутой участок функции остаточного спроса). Сравнивая ожидаемые выигрыши в случае применения найденной локально равновесной стратегии и в случае вышеописанного отклонения, можно найти условия существования равновесия в рассматриваемой модели. Новый локальный максимум в этом случае равен $v_2^{\text{new}} = d(p_2^{\text{new}} - c) = \frac{1}{2} \left(1 - q^f - \frac{n-1}{n+1} \left(1 - \frac{q^f}{n+wq^f} \right) \right)$, соответствующая при-

быль равна $\tilde{\pi}_I = v_2^{\text{new}}(p_2^{\text{new}} - c) = \frac{1}{4d}(1 - q^f - \frac{n-1}{n+1}(1 - \frac{(n+1)q^f}{n+wq^f}))^2$, в то время как прибыль без отклонения от локального равновесия равна $\pi_{II} = q_2(p^* - c) = \frac{1}{d(n+1)^2}(1 - \frac{q^f}{n+wq^f})$. Отсюда, локальное равновесие будет равновесием в рассматриваемой модели тогда и только тогда, когда $\frac{1}{4}((1 - q^f)(n + 1) - (n - 1)(1 - \frac{(n+1)q^f}{n+wq^f}))^2 - (1 - \frac{q^f}{n+wq^f}) \leq 0$, где $q^f = q^f(w)$. Это неравенство определяет нижнюю границу $w_1^2(n)$ интервала допустимых значений ω , $\omega \in (w_1^2(n), 1)$, при которых существует равновесие Нэша в рассматриваемой модели (см. табл. 1). Пересечение полученных допустимых интервалов для каждого конкретного n дает интервал $(w_1(n), w_2(n))$ значений ω при котором рассматриваемые локальные равновесия образуют СПР для двухэтапной модели (см. табл. 4).

Таблица 4.

n	w	w_1^1	w_2^1	w_1^2
2	0,637	0,655	0,793	0,687
3	0,742	0,722	0,863	0,764
5	0,832	0,866	0,917	0,840
7	0,875	0,907	0,940	0,879
10	0,909	0,	0,957	0,911

GAME-THEORETIC ANALYSIS OF ONE-STAGE AND TWO-STAGE HOMOGENEOUS GOOD AUCTIONS

Alexander Vasin, Moscow State University, Moscow, Dr.Sc., professor (vasin@cs.msu.su),

Anton Gusev, Moscow State University, Moscow, post-graduate student (vmik@hotmail.ru),

Agatha Sharikova, Moscow State University, Moscow, post-graduate student (Agatha.Sharikova@ubs.com).

Abstract: Forward market is a known instrument for reduction of market power of large producers. This paper examines a two-stage oligopoly environment with constant marginal cost. The outcome at both the forward and the spot market is a Cournot outcome dependent on correspondent demand and supply at the market. Producers aim to maximize their profits via choosing subgame perfect equilibrium of the two-stage game as their strategies. In the first part of the current research we extend the model by Bushnell (2005) considering a capacity constraint. Our results show that the optimal way of market organization in such a model strongly depends on the difference between the maximal production volume and the demand volume at price equal to the marginal cost. In the second part of the paper we consider proportional rationing instead of surplus maximizing rationing at the forward market. We show that for such a model there exists only an SPE in correlated mixed strategies. Producers' behavior should depend on some random variable that determines one of two possibilities for the spot market: either the "bear market", or the "bull market". We compare this SPE with Nash equilibria of one-stage markets.

Keywords: forward market, Cournot oligopoly, market power, subgame perfect equilibrium.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии Д. А. Новиковым

УДК 517.977.8+519.834

ББК 22.18

ТЕОРЕТИКО-ИГРОВАЯ МОДЕЛЬ УПРАВЛЕНИЯ КАЧЕСТВОМ В УСЛОВИЯХ КОНКУРЕНЦИИ^{1 2}

Гладкова М.А.³, Зенкевич Н.А.⁴,

(Высшая школа менеджмента Санкт-Петербургского
государственного университета, Санкт-Петербург)

В работе построена и исследована теоретико-игровая модель управления качеством продукции в условиях конкуренции. Теоретико-игровая модель представляет собой двухшаговую игру фирм-производителей при неравномерном распределении склонности к качеству потребителей. В явном виде построено сильное равновесие в исследуемой модели, что позволило найти равновесные цены, доли рынка и доходы фирм-производителей. Практическое применение механизма управления качеством апробировано на примере анализа эмпирических данных для двух систем Интернет-трейдинга.

Ключевые слова: оценка качества, измерение качества, склонность к качеству потребителя, управление качеством, двухшаговая игра, равновесие по Нэшу, равновесие по Штакельбергу, парето-оптимальное решение, оптимальная дифференциация по качеству, показатель удовлетворенности потребителя.

¹ Работа выполнена по тематическому плану фундаментальных научно-исследовательских работ ВШМ СПбГУ (проект № 16.0.116.2009) при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 08-1-00301-а).

² Текст приводится в соответствии с изданием «Математическая теория игр и ее приложения. – 2010. – Т. 2. № 4. – С. 3–24».

³ Гладкова Маргарита Александровна, аспирант (gladkova@gsom.spb.ru).

⁴ Николай Анатольевич Зенкевич, кандидат физико-математических наук, доцент (zenkevich@gsom.spb.ru).

Введение

В статье рассматриваются вопросы, связанные с количественной оценкой и разработкой механизма управления качеством производимой продукции и оказываемых услуг в условиях конкуренции. Под управлением качеством здесь понимается целенаправленное изменение его количественной оценки.

Основная теоретическая задача проведенного исследования заключалась в разработке механизма управления качеством на основе построения и нахождения решения адекватной теоретико-игровой модели конкуренции фирм-производителей с учетом информации о качественных предпочтениях потребителей. С практической точки зрения нас в первую очередь интересовал вопрос методики измерения количественной оценки качества.

Для количественной оценки качества товара на основании мнений потребителей о его характеристиках будем оценивать качество товара как системы в целом. Поэтому в расчетах на основании эмпирических данных мы сводили вычисление качества товара к некоторому единому сводному показателю, позволяющему оценивать степень удовлетворенности потребителем товаром в целом. Для этого использована методика [3], которая позволила получить сводную оценку качества исследуемого товара на основе экспертных данных, полученных от потребителей.

Для оценки предпочтительного качества товара в условиях конкуренции построена теоретико-игровая модель, которая позволяет проанализировать процесс принятия решения по производству товаров необходимого качества в условиях рыночной конкуренции.

Представленная теоретико-игровая модель является развитием работ Бенасси и Мотта, которые рассматривали модели дуополии в условиях вертикальной дифференциации по качеству товаров. Так в работе [9] проанализированы два вида моделей вертикальной дифференциации продуктов в целях изучения влияния конкуренция по цене и количеству на вид равновесия по Нэшу. Модели различаются видом функции затрат относительно каче-

ства продукции. В одном случае они постоянные, а в другом – переменные. Установлено, что оптимальная дифференциация товаров увеличивается в обоих рассмотренных случаях по сравнению с более ранними результатами при симметричном выборе качества. Авторами показано, что дифференциация фирм больше в случае конкуренции по Бертрану, чем по Курно.

В данной статье мы доработали модель [9] на случай, когда рынок непокрыт, и параметр склонности к качеству распределен неравномерно (треугольное распределение). Другая модификация модели [9] была нами исследована в работе [1].

В работе [6] исследована дуополия в условиях вертикальной дифференциации в случае непокрытого рынка. Авторы анализируют влияние концентрации потребителей в отношении склонности к приобретению более качественных товаров на поведение фирм.

В статье [10] исследованы теоретико-игровые модели дуополии и вертикальной дифференциации для случая последовательного выбора качеств производимых товаров компаниями-конкурентами (модель Штакельберга). При этом авторы ограничиваются рассмотрением случая покрытого рынка. Подобная проблематика одновременного и последовательного выбора исследована в работе [5].

В теоретическом плане основными вопросами исследования являлись нахождение равновесия по качеству товаров и оптимальной дифференциации по качеству в условиях конкуренции. С этой целью нами разработана теоретико-игровая модель дуополии, в основе которой лежат модели [9,11], а также их развитие в [7].

1. Теоретико-игровая модель конкуренции по качеству

В работе рассматривается двухшаговая теоретико-игровая модель, когда фирмы на первом шаге конкурируют по качеству производимого товара, а затем по ценам при известных качествах продукции. При этом предполагается, что на каждом шаге фирмы реализуют свои решения одновременно.

Пусть две фирмы (игроки 1 и 2 соответственно) на некотором рынке предлагают потенциальным потребителям товары одинаковых потребительских свойств, но разного качества. Будем считать, что каждый потребитель имеет единичный спрос, но по-разному готов платить за качество товара. Предположим, что потребитель характеризуется параметром склонности к качеству $\theta \in [0, \bar{\theta}]$, который и определяет его готовность покупать товар известного качества. Тогда полезность потребителя со склонностью к качеству θ (потребитель θ) при покупке товара качества s по цене p может быть представлена в виде:

$$(1) \quad U_{\theta}(p, s) = \begin{cases} \theta s - p, & p \leq \theta s, \\ 0, & p > \theta s. \end{cases}$$

Здесь θs – это максимальная цена потребителя θ , при которой он готов покупать товар качества s , т. е. ценность товара для потребителя θ .

Естественно предположить, что потребитель θ покупает товар качества s по цене p , если $U_{\theta}(p, s) > 0$ и не покупает товар в противном случае. Будем предполагать в модели, что параметр θ случайный и имеет треугольное распределение вида:

$$f(\theta) = \begin{cases} 0, & \text{если } \theta \leq 0 \\ \frac{4}{b^2}\theta, & \text{если } \theta \in A = (0, \frac{b}{2}] \\ \frac{4}{b} - \frac{4}{b^2}\theta, & \text{если } \theta \in B = (\frac{b}{2}, b] \\ 0, & \text{если } \theta > b \end{cases}$$

Тогда функция распределения параметра θ примет вид:

$$F(\theta) = \begin{cases} 0, & \text{если } \theta \leq 0 \\ \frac{2}{b^2}\theta^2, & \text{если } \theta \in A = (0, \frac{b}{2}] \\ \frac{4}{b}\theta - \frac{2}{b^2}\theta^2 - 1, & \text{если } \theta \in B = (\frac{b}{2}, b] \\ 1, & \text{если } \theta > b \end{cases}$$

Здесь параметр $b \in [0, \bar{\theta}]$ – крайняя точка носителя распределения. Заметим, что функция распределения является непрерывной, дифференцируемой и строго возрастает на промежутке $[0, b]$. На рис. 1 представлен график функции плотности распределения параметра склонности к качеству θ .

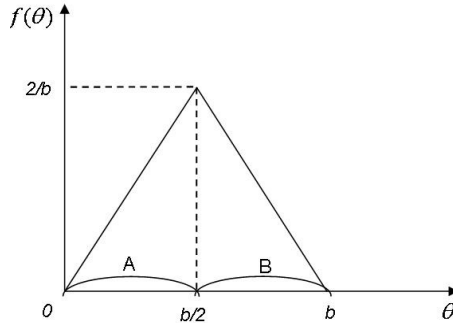


Рис. 1. Плотность распределения $f(\theta)$.

Потребитель θ безразличен к покупке товара качества s_1 при цене p_1 и отказу от покупки, если $\theta s_1 - p_1 = 0$. Поэтому величина $\theta_1 = \theta_1(p_1, s_1) = \frac{p_1}{s_1}$ – характеризует такого потребителя.

Пусть фирма i производит товар качества s_i при удельных затратах c_i и пусть для определенности $s_2 > s_1$, значения которых известны обеим фирмам и потребителям. Будем предполагать,

что фирмы ведут ценовую конкуренцию по Бертрану. Обозначим через p_i цену, назначенную фирмой i за товар качества s_i .

Потребитель θ безразличен к покупке товаров качеств s_1, s_2 при ценах p_1, p_2 соответственно, где $s_1 \leq s_2$ и $p_1 \leq p_2$, если $\theta s_1 - p_1 = \theta s_2 - p_2$. Поэтому число $\theta_2 = \theta_2(p_1, p_2, s_1, s_2) = \frac{p_2 - p_1}{s_2 - s_1}$ характеризует такого потребителя.

Определим функции спроса $D_i(p_1, p_2, s_1, s_2)$ фирм 1 и 2 соответственно в виде:

$$D_1(p_1, p_2, s_1, s_2) = \int_{\theta_1(p_1, s_1)}^{\theta_2(p_1, p_2, s_1, s_2)} f(\theta) d\theta = \\ F(\theta_2(p_1, p_2, s_1, s_2)) - F(\theta_1(p_1, s_1));$$

$$D_2(p_1, p_2, s_1, s_2) = \int_{\theta_2(p_1, p_2, s_1, s_2)}^b f(\theta) d\theta = 1 - F(\theta_2(p_1, p_2, s_1, s_2)).$$

Выигрыш фирмы будем оценивать функцией дохода от продаж:

$$(2) \quad R_i(p_1, p_2, s_1, s_2) = p_i \cdot D_i(p_1, p_2, s_1, s_2),$$

где p_i – цена фирмы i за товар качества s_i .

Теоретико-игровая модель управления качеством представляет собой следующую двухшаговую игру двух лиц (фирм, игроков), где выборы на каждом шаге осуществляются одновременно. При этом:

- на первом шаге фирмы i выбирают качества s_i товаров;
- на втором шаге, в предположении, что качества s_i товаров известны игрокам и потребителям, фирмы продолжают конкуренцию по ценам p_i .

Решать данную игру будем методом обратной индукции. В этом случае равновесие по Нэшу строится в два этапа. На первом этапе в предположении, что качества товаров s_i известны, находим равновесные цены $p_i^*(s_1, s_2)$. Зная $p_i^*(s_1, s_2)$, на втором этапе

находим равновесные по Нэшу значения качеств s_1^*, s_2^* фирм 1 и 2 соответственно.

В силу треугольного распределения параметра θ явный вид функций спроса будет различаться в зависимости от взаимного расположения параметров θ_1 и θ_2 на промежутке $[0, b]$. Теоретически возможны три случая:

- 1) $\theta_1, \theta_2 \in A$,
- 2) $\theta_1, \theta_2 \in B$,
- 3) $\theta_1 \in A, \theta_2 \in B$,

где области $A = [0, b/2]$, $B = (b/2, b]$ изображены на рис.1.

Для нахождения ценового равновесия воспользуемся следующей теоремой.

Теорема 1. *Предположим, что некоторая вогнутая функция плотности $f(\theta)$, определенная на интервале $[0, b]$, где $b \geq 0,5$, симметрична относительно медианы распределения $b/2$ и удовлетворяет условиям $f(0) = f(b) = 0$ и $f(b/2) \geq 2$. Если $\theta_2^* > \theta_1^*$ значения параметров в ценовом равновесии в модели вертикальной дифференциации ⁵, то θ_2^* единственно и $\theta_2^* < b/2$.*

Из теоремы 1 следует, что для нахождения ценового равновесия достаточно рассмотреть только один случай взаимного расположения параметров: $\theta_1, \theta_2 \in A$ (см. рис. 1). Тогда функции спроса фирм 1 и 2 соответственно примут вид:

$$D_1(p_1, p_2, s_1, s_2) = \frac{2}{b^2} \left(\frac{p_2 - p_1}{s_2 - s_1} \right)^2 - \frac{2}{b^2} \left(\frac{p_1}{s_1} \right)^2;$$

$$D_2(p_1, p_2, s_1, s_2) = 1 - \frac{2}{b^2} \left(\frac{p_2 - p_1}{s_2 - s_1} \right)^2;$$

⁵ В вертикально дифференцированном пространстве продуктов все потребители согласны относительно наиболее предпочтительного набора характеристик товара. Качество явный тому пример.

и функции выигрышей могут быть записаны в следующем явном виде:

$$R_1(p_1, p_2, s_1, s_2) = p_1 \left(\frac{2}{b^2} \left(\frac{p_2 - p_1}{s_2 - s_1} \right)^2 - \frac{2}{b^2} \left(\frac{p_1}{s_1} \right)^2 \right);$$

$$R_2(p_1, p_2, s_1, s_2) = p_2 \left(1 - \frac{2}{b^2} \left(\frac{p_2 - p_1}{s_2 - s_1} \right)^2 \right).$$

Найдем ценовое равновесие p_1^*, p_2^* при заданных качествах товаров s_1 и s_2 .

Значения p_1^*, p_2^* находим как решение системы уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial R_1}{\partial p_1} = \frac{2}{b^2} \left(\left(\frac{p_2 - p_1}{s_2 - s_1} \right)^2 - 3 \left(\frac{p_1}{s_1} \right)^2 - 2p_1 \frac{(p_2 - p_1)}{(s_2 - s_1)^2} \right) = 0, \\ \frac{\partial R_2}{\partial p_2} = 1 - \frac{6}{b^2} \left(\frac{p_2 - p_1}{s_2 - s_1} \right) - \frac{4p_1}{b^2(s_2 - s_1)} = 0. \end{cases}$$

Для нахождения решения системы сделаем замену вида $p_2 = mp_1$, где коэффициент $m > 1$. Тогда первое уравнение преобразуется в квадратное уравнение относительно m следующего вида:

$$m^2 - 4m + 3 - 3 \frac{(s_2 - s_1)^2}{s_1^2} = 0.$$

Откуда, учитывая неравенство $m > 1$, получаем:

$$(3) \quad m = 2 + \sqrt{1 + 3 \frac{(s_2 - s_1)^2}{s_1^2}}.$$

Из системы уравнений получим ценовое равновесие по Нэшу в явном виде:

$$(4) \quad \begin{cases} p_1^*(s_1, s_2) = \frac{bs_1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{m-3}{\sqrt{(3m-1)(m-3)}}, \\ p_2^*(s_1, s_2) = \frac{bs_1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{m(m-3)}{\sqrt{(3m-1)(m-3)}}, \end{cases}$$

где m задается значением (4).

Теперь вычислим в явном виде спрос фирм 1 и 2 и их выигрыши в равновесии как функции качеств соответственно:

$$(5) \quad \begin{cases} D_1^*(s_1, s_2) = D_1^*(p_1^*(s_1, s_2), p_2^*(s_1, s_2), s_1, s_2) = \frac{2m}{3(3m-1)}, \\ D_2^*(s_1, s_2) = D_2^*(p_1^*(s_1, s_2), p_2^*(s_1, s_2), s_1, s_2) = \frac{2m}{3m-1}, \end{cases}$$

$$(6) \quad \begin{cases} R_1^*(s_1, s_2) = R_1^*(p_1^*(s_1, s_2), p_2^*(s_1, s_2), s_1, s_2) = \\ \frac{2bs_1}{3\sqrt{6}} \cdot \frac{m(m-3)}{\sqrt{(3m-1)^3(m-3)}}; \\ R_2^*(s_1, s_2) = R_2^*(p_1^*(s_1, s_2), p_2^*(s_1, s_2), s_1, s_2) = \\ \frac{2bs_1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{m^2(m-3)}{\sqrt{(3m-1)^3(m-3)}} \end{cases}$$

На втором этапе решения игры найдем равновесие по Нэшу по качествам $s_1, s_2 \in [\underline{s}, \bar{s}]$ относительно функций выигрыша R_1^*, R_2^* , где $\underline{s} < \bar{s}$ – заданные параметры.

Частная производная выигрыша R_2 фирмы 2 по s_2 равна:

$$\frac{\partial R_2^*(s_1, s_2)}{\partial s_2} = \frac{b(s_2 - s_1)\sqrt{6}}{\sqrt{s_1^2 + 3(s_2 - s_1)^2}} \cdot \frac{m(3m^2 - 7m + 6)}{\sqrt{(3m-1)^5(m-3)}}.$$

Непосредственно проверяется, что в предположении $s_2 > s_1$ производная $\frac{\partial R_2^*(s_1, s_2)}{\partial s_2} > 0$, т.е. функция $R_2^*(s_1, s_2)$ строго возрастает по s_2 . Поэтому равновесной стратегией фирмы 2 будет выбор максимально возможного значения, т.е. $s_2^* = \bar{s}$.

Для нахождения равновесного значения s_1 для фирмы 1 сделаем замену переменных $s_1^* = k\bar{s}$, где $0 < k < 1$ – неизвестный параметр. Тогда значение параметра k можно найти из условия:

$$(7) \quad \frac{\partial R_1^*(k\bar{s}, \bar{s})}{\partial k} = 0.$$

Явный вид решения уравнения очень громоздкий, но при любом заданном числовом значении параметра b , можно получить численное значение коэффициента k , используя программный пакет Maple.

Так, например, если диапазон распределения параметра θ равен $[0; 0, 5]$, т. е. $b = 0, 5$, решением уравнения (8) будет число $k = 0, 6543$. В этом случае равновесие по Нэшу имеет вид:

$$(8) \quad \begin{cases} s_1^* = 0, 6543\bar{s}, \\ s_2^* = \bar{s}. \end{cases}$$

Подставляя это решение в формулу (4), получим численное значение коэффициента $m = 3, 3555$.

В соответствии с формулами для равновесных цен (5), спроса (6) и выигрышей (7), можно выписать в явном виде окончательные выражения относительно параметров b и k для равновесных цен p_1^*, p_2^* , спроса D_1^*, D_2^* в равновесии и равновесных значений выигрышей R_1^*, R_2^* :

$$\begin{cases} p_1^* = \frac{kb\bar{s}}{\sqrt{6}} \sqrt{\frac{\sqrt{k^2 + 3(1-k)^2} - k}{3\sqrt{k^2 + 3(1-k)^2} + 5k}}; \\ p_2^* = \frac{b\bar{s}}{\sqrt{6}} \left(2k + \sqrt{k^2 + 3(1-k)^2}\right) \sqrt{\frac{\sqrt{k^2 + 3(1-k)^2} - k}{3\sqrt{k^2 + 3(1-k)^2} + 5k}}. \\ \begin{cases} D_1^* = \frac{2\sqrt{k^2 + 3(1-k)^2} + 4k}{3(3\sqrt{k^2 + 3(1-k)^2} + 5k)}; \\ D_2^* = \frac{2\sqrt{k^2 + 3(1-k)^2} + 4k}{3\sqrt{k^2 + 3(1-k)^2} + 5k}. \end{cases} \\ \begin{cases} R_1^* = \frac{2kb\bar{s}}{3\sqrt{6}} \left(2k + \sqrt{k^2 + 3(1-k)^2}\right) \sqrt{\frac{\sqrt{k^2 + 3(1-k)^2} - k}{\left(3\sqrt{k^2 + 3(1-k)^2} + 5k\right)^3}}; \\ R_2^* = \frac{2b\bar{s}}{\sqrt{6}} \left(2k + \sqrt{k^2 + 3(1-k)^2}\right)^2 \sqrt{\frac{\sqrt{k^2 + 3(1-k)^2} - k}{\left(3\sqrt{k^2 + 3(1-k)^2} + 5k\right)^3}}. \end{cases} \end{cases}$$

Заметим, что фирма 2, производящая продукцию более высокого качества s_2 , получает в равновесии больший доход, чем

фирма 1, поскольку:

$$R_2^* - R_1^* = \frac{2b\bar{s}}{\sqrt{6}} \left(2k + \sqrt{k^2 + 3(1-k)^2} \right) \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{k^2 + 3(1-k)^2} - k}{\left(3\sqrt{k^2 + 3(1-k)^2} + 5k \right)^3}} \left(\frac{5k}{3} + \sqrt{k^2 + 3(1-k)^2} \right) > 0.$$

Отметим, что по построению в данной модели имеется два асимметричных равновесия по Нэшу $(k\bar{s}, \bar{s})$ и $(\bar{s}, k\bar{s})$, выгодные соответственно 2 и 1 игрокам. Нетрудно заметить, что оба равновесия при этом являются парето-оптимальными, т. е. сильными равновесиями [2].

Поэтому в плане выбора оптимального поведения в условиях конкуренции фирмы сталкиваются с известной проблемой борьбы за лидерство, подобной игре «Семейный спор» [2]. Это означает, что каждая фирма будет стремиться стать лидером, т. е. начать производить продукцию высокого качества, обеспечив себе более выгодную позицию в равновесии.

Заметим также, что если рассмотреть модель Штакельберга (фирма 2 – лидер, фирма 1 – ведомый), то результат получится аналогичным, но равновесие будет одно – $(k\bar{s}, \bar{s})$. При этом лидер (фирма 2) использует свое право первого хода и займет более выгодную позицию в равновесии.

2. Численный пример

В данном разделе рассмотрим пример применения представленной в предыдущем разделе методики на примере систем Интернет-трейдинга, использующихся в биржевых торгах.

Интернет-трейдинг – это принципиально новый, простой в использовании и высокоэффективный программный инструмент, дающий неограниченную возможность дистанционного участия в биржевых торгах в режиме реального времени через Интернет, а также предоставляющий доступ к огромному количеству аналитической информации. При помощи удаленного торгового

терминала инвестор может без постороннего участия выставлять заявки и проводить биржевые сделки. Появляется доступ к финансовой отчетности компаний и аналитической информации по рынку. Благодаря Интернет-трейдингу можно в режиме реального времени наблюдать движение собственных средств и контролировать состояние активов на разных счетах.

В настоящий момент, насчитывается свыше 20 систем Интернет-трейдинга, использующихся в России. Некоторые брокеры создали их самостоятельно, другие системы созданы ИТ-компаниями. Разработки ИТ-компаний сейчас доминируют на рынке. К ним относятся в первую очередь QUIK, NetInvestor, TRANSAQ, «ИТС-Брокер». В России наиболее распространена система QUIK, которая используется более 60 брокерами (свыше 3500 работающих пользователей). Система, предлагаемая компанией QUIK, фактически стала именем нарицательным, синонимом понятия «система Интернет-трейдинга».

Существует свыше 100 брокерских организаций-пользователей, которые установили системы Интернет-трейдинга. Списки таких организаций можно найти на сайтах крупнейших российских бирж – Московской межбанковской валютной биржи (ММВБ) и фондовой биржи «Российская торговая система (РТС)».

Основное предназначение системы Интернет-трейдинга – это получение интерфейса для разработки собственной программы, позволяющей осуществлять операции на биржевых торгах. Системы Интернет-трейдинга дают возможность получения биржевой информации и возможность самостоятельного совершения сделок. В них отображаются состояние портфеля инвестора (количество купленных/проданных акций), состояние денежных средств, как правило, в программе имеется опция просмотра ценовых графиков и другие дополнительные возможности.

При эмпирическом исследовании качества системы Интернет-трейдинга мы выделили восемь основных характеристик такой системы:

1) количество биржевых рынков, на которые предоставляется
250

доступ;

- 2) скорость операций, т. е. скорость передачи заявок и приема информации;
- 3) функциональность системы (котировки, построение временных рядов, графиков), т. е. наличие встроенной аналитики;
- 4) осуществляемая поддержка разработчиков;
- 5) возможность экспорта данных;
- 6) возможность самостоятельного расширения возможностей системы;
- 7) цена системы и ее обслуживания;
- 8) гарантия и надежность использования, т. е. ответственность компании-разработчика за возможные ошибки, их устранение и компенсация убытков.

2.1. ОПИСАНИЕ ВЫБОРКИ

Сбор данных проводился с помощью экспертного анкетирования. По результатам опроса была сформирована выборка из 29 респондентов. В рамках исследования нас интересовали мнения пользователей систем Интернет-трейдинга, а именно, работников департаментов администрирования торговых систем и экономистов брокерских компаний, непосредственно работающих с такими системами. По географическому местоположению были отобраны пользователи систем Интернет-трейдинга из таких крупнейших российских городов, как Москва, Санкт-Петербург и Екатеринбург.

Зачастую брокерские компании работают сразу с несколькими системами Интернет-трейдинга, что позволяет удовлетворять запросы различных инвесторов. Поскольку на российском биржевом рынке основной системой Интернет-трейдинга выступает

QUIK, мы выделили два типа систем – систему QUIK и другие системы (OTHER). В результате такого предположения, получилось, что 22 респондента являются пользователями системы QUIK, и 20 – работают с системами Интернет-трейдинга OTHER.

2.2. АЛГОРИТМ И МЕТОДИКА ОЦЕНКИ КАЧЕСТВА СИСТЕМЫ ИНТЕРНЕТ-ТРЕЙДИНГА

Определения качества объекта, представленные в документах ISO 9000 (2005), выделяют системный характер множества свойств объекта. В связи с этим, можно говорить о качестве системы Интернет-трейдинга в целом, о некоторой обобщенной количественной оценке или сводного показателя этого качества.

В нашем исследовании респонденты выступали одновременно в роли потребителей и экспертов. На основании мнений потребителей о каждой характеристике системы Интернет-трейдинга мы оценивали качество системы в целом. Для реализации этой принципиальной идеи был использован метод сводных показателей, реализованный в программе ОСППР АСПИД-3W [3]. Особенности применения ОСППР АСПИД-3W для оценки в условиях неопределенности качества сложных технических систем различного назначения и их проектов представлены, например, в работах [4,8].

Первым этапом эмпирического исследования была обработка данных с целью определения качества выбранной системы Интернет-трейдинга. Для этого респондентам предлагалось оценить степень удовлетворенности каждой из восьми выделенных нами ранее характеристик по всем системам Интернет-трейдинга, используемым в их организации. По методу сводных показателей оценка качества проводилась за три шага:

- 1) сначала был вычислен сводный показатель степени удовлетворенности для каждой из восьми характеристик системы Интернет-трейдинга QUIK; для каждой характеристики был вычислен сводный показатель по остальным системам Интернет-трейдинга (OTHER);

- 2) на основе сводных показателей были вычислены общие

252

сводные показатели степени удовлетворенности потребителей α_2 и α_1 для системы QUIK и OTHER соответственно;

- 3) на основе общих сводных показателей α_2 и α_1 были вычислены количественные оценки качеств систем по формулам: $s_2 = \alpha_2 p_2$ (для системы QUIK) и $s_1 = \alpha_1 p_1$ (для OTHER), где p_2, p_1 – цены систем QUIK и OTHER.

Формула количественной оценки качества требует пояснения. При анкетировании респондентам задавался вопрос: «Если Вы не вполне удовлетворены системами Интернет-трейдинга, которые используются в Вашей организации, то скажите, насколько процентов больше от нынешней стоимости Вы готовы платить за систему, которая бы Вас полностью удовлетворяла?» Поэтому если система полностью удовлетворяет потребителя, то в соответствии с нашим представлением количественной оценки качества величина $s = p_0$, где p_0 – цена системы. Если же степень удовлетворенности потребителей равна $0 < \alpha < 1$, то $s = \alpha p_0$.

Теперь обсудим связь эмпирической и теоретической модели. Если потребитель со склонностью к качеству θ_0 полностью удовлетворен используемой системой Интернет-трейдинга, то максимальная цена, которую он готов платить за систему равна $\theta_0 p_0$. С другой стороны: $\theta_0 p_0 = p_0 + \Delta p$, где Δp – это приращение цены, при котором потребитель готов приобретать исследуемую систему Интернет-трейдинга. Откуда, $\theta_0 = 1 + \frac{\Delta p}{p_0} > 1$. Обозначим склонность к качеству респондента через: $\theta = \frac{\Delta p}{p_0}$.

Тогда полезность потребителя с параметром склонности к качеству θ примет вид:

$$(9) \quad U_{\theta}(p, s) = \begin{cases} \theta s - p, & p \leq \theta s \\ 0, & p > \theta s \end{cases}, p = p_0 - s,$$

где $\theta \in [0, b]$, а правая граница промежутка b определяется из анкеты. Поэтому использование теоретико-игровой модели по данным эмпирического исследования корректно.

2.3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЭМПИРИЧЕСКОГО ИССЛЕДОВАНИЯ

В данном разделе представлены результаты реализации описанного выше алгоритма анализа полученных при анкетировании данных.

Сбор данных проводился с помощью экспертного анкетирования. Анкета состояла из двенадцати вопросов (разделенных на три группы), отражающих специфику пользователей и систем Интернет-трейдинга. При ответе на первую группу вопросов все респонденты указали, какими системами они пользуются, в каких целях, и насколько они удовлетворены каждой из используемых систем в целом.

Вторая группа вопросов посвящена характеристикам систем Интернет-трейдинга. Здесь респондентам было предложено ранжировать характеристики систем по степени важности, указать какими характеристиками систем они удовлетворены и насколько (по 5-бальной шкале Лакерта).

Третья группа вопросов касалась предпочтений потребителей по системам Интернет-трейдинга:

- 1) какую из используемых систем потребители считают ключевой;
- 2) на какую величину они готовы увеличить плату за систему при полном удовлетворении потребностей;
- 3) какой из имеющихся систем они бы хотели пользоваться;
- 4) какой бренд разработчика более предпочтителен потребителю.

Оценка качества системы QUIK (товар 2) и OTHER (товар 1) проводилась на основе ответов на вторую группу вопросов. Используя программу ОСППР АСПИД-3W, рассчитаны сводные показатели степени удовлетворенности потребителей по каждой характеристике систем (см. табл. 2). В качестве весовых коэффициентов использована информация о ранжировании потребителями

выделенных восьми характеристик систем Интернет-трейдинга (см. табл. 1).

Следующим шагом рассчитаны сводные показатели $\alpha_1 = 0,572$ и $\alpha_2 = 0,545$ удовлетворенности потребителями системами QUIK и OTHER соответственно.

Таблица 1. Весовые коэффициенты характеристик систем Интернет-трейдинга

Характеристика системы	Вес
количество доступных рынков	6,103
скорость операций	7,172
встроенная аналитика	3,552
поддержка разработчиков	5,517
экспорт данных	4,103
возможность самостоятельного расширения	2,828
цена	4,379
гарантия	3,586

Таблица 2. Сводные показатели удовлетворенности характеристиками систем

Характеристика системы	Quik	Other
количество доступных рынков	0,639	0,774
скорость операций	0,549	0,701
встроенная аналитика	0,492	0,498
поддержка разработчиков	0,699	0,612
экспорт данных	0,610	0,500
возможность самостоятельного расширения	0,394	0,407
цена	0,507	0,636
гарантия	0,470	0,450

Оценку качества каждой из систем получаем по формуле: $s_i = \alpha_i p_i$, где $i = 1$ означает систему OTHER, а $i = 2$ – систему QUIK. Цена на систему Интернет-трейдинга OTHER составляет: $p_1 = 119000$ руб. (эта цена получена как среднее арифметическое цен на каждую систему из OTHER, которые представлены на

сайтах компаний) и цена системы QUIK равна $p_2 = 140000$ руб. соответственно. Поэтому оценки качеств систем равны $s_1 = 68068$ руб. и $s_2 = 76300$ руб. соответственно.

Оценим диапазон изменения качества системы Интернет-трейдинга, т. е. оценим параметры \underline{s} и \bar{s} . Для этого рассчитаны показатели степени удовлетворенности потребителей с помощью ОСППР АСПИД-3W, которые получаются в случае, когда потребитель оценивает все характеристики системы по «1 – совсем не удовлетворен» и в случае, когда по всем характеристикам он ставит «5 – полностью удовлетворен». Результаты расчетов дают значения $\underline{\alpha} = 0,056$ и $\bar{\alpha} = 1,000$. Тогда границы диапазона изменения качеств равны $\underline{s} = \underline{\alpha}p_1 = 6664$ руб. и $\bar{s} = \bar{\alpha}p_2 = 140000$ руб.

Оценим теперь верхнюю границу b параметра θ . Величина $b = \max\{\max \Delta p_1, \max \Delta p_2\} = 0,5$. Поэтому $\theta \in [0; 0,5]$.

Далее проверяем гипотезу о треугольном распределении параметра θ склонности к качеству на промежутке $[0; 0,5]$.

В виду небольшой исходной выборки, будем рассматривать гипотезу о треугольном распределении параметра склонности к качеству на промежутке среднего по данной группе потребителей. Таким образом, необходимо проверить гипотезу о треугольном распределении θ на промежутке $[0, 15916; 0, 220852]$.

В табл. 3 представлены результаты расчетов при проверке гипотезы по критерию Колмогорова. Здесь x_i и x_{i+1} – границы интервалов разбиения значений выборки, l_i – относительные частоты для соответствующих интервалов, F^* – значение эмпирической функции распределения на конце интервала, F – значение теоретической функции распределения на конце интервала.

По критерию Колмогорова рассчитываем выборочную статистику:

$$\lambda^* = \sup | F^*(x_i) - F(x_i) | = 1,124498.$$

В результате проверки, гипотеза о треугольном распределении данного параметра принимается при уровне значимости 0,01.

Сравним полученные результаты эмпирических исследований с результатами теоретико-игровой модели конкуренции по

Таблица 3. Проверка гипотезы о треугольном распределении

x_i	x_{i+1}	l_i	F^*	F	$F^* - F$
0,15916	0,167973	1	0,01	0,034327	0,024327
0,167973	0,176786	9	0,1	0,152158	0,052158
0,176786	0,185599	15	0,25	0,353875	0,103875
0,185599	0,194412	27	0,52	0,63245	0,11245
0,194412	0,203226	25	0,77	0,834055	0,064055
0,203226	0,212039	14	0,91	0,951774	0,041774
0,212039	0,220852	9	1	0,985608	0,014392

качеству, описанной в предыдущем разделе. Равновесные оценки качеств систем QUIK и OTHER Интернет-трейдинга равны:

$$\begin{cases} s_1^* = 0,6543\bar{s} = 91602, \\ s_2^* = \bar{s} = 140000. \end{cases}$$

Заметим, что оба значения s_1^*, s_2^* попали в допустимый диапазон изменения качеств, т.е. $s_i^* \in [6664, 140000]$. Сравнивая эти значения с экспериментальными оценками $s_1 = 68068$ и $s_2 = 76300$, заключаем, что разработчикам обеих систем необходимо увеличивать качество, а также дифференциацию по качеству.

Для расчета ценовых стратегий вспомним, что $p = p_0 - s$ (см. (9)). Тогда равновесные цены разработчиков будут равны соответственно:

$$\begin{cases} p_{01}^* = p_1^* + s_1^* = 95305, \\ p_{02}^* = p_2^* + s_2^* = 152424. \end{cases}$$

Данный результат говорит о том, что при большей дифференциации по качеству разработчики могут больше дифференцироваться по ценам. Разница в ценах на системы Интернет-трейдинга в настоящий момент составляет 21 000 руб., а в соответствии с результатами моделирования они могут отличаться более, чем на 57 000 руб. Равновесные доли рынков равны соответственно:

$$\begin{cases} D_1^* = 0,247, \\ D_2^* = 0,740. \end{cases}$$

Данный результат отражает рыночную ситуацию в настоящее время, поскольку отношение количества потребителей систем OTHER и QUIK составляет 1 к 3.

Литература

1. ЗЕНКЕВИЧ Н.А., ГЛАДКОВА М.А. *Теоретико-игровая модель конкуренции «качество-цена» на отраслевом рынке* // Вестник Санкт-Петербургского Университета. Серия Менеджмент. – 2007. – Вып. 4. – С. 3–31.
2. ПЕТРОСЯН Л.А., ЗЕНКЕВИЧ Н.А., СЕМИНА Е.А. *Теория игр: Учебное пособие для университетов*. – Москва: Высшая школа, Книжный дом «Университет», 1998.
3. ХОВАНОВ К.Н., ХОВАНОВ Н.В. *Система поддержки принятия решений АСПИД-3W (Анализ и Синтез Показателей при Информационном Дефиците)*. Свидетельство об официальной регистрации программы для ЭВМ № 960087 от 22.03.1996. Российское агентство по правовой охране программ для ЭВМ, баз данных и топологии интегральных микросхем. (РосАПО). – М.: РосАПО, 1996.
4. ХОВАНОВ Н.В. *Оценка сложных объектов в условиях дефицита информации* // Труды 7-й международной научной школы «Моделирование и анализ безопасности и риска в сложных системах». – СПб.: ИПМАШ РАН, 2008. – С. 18–28.
5. AOKI R., PRUSA T.J. *Sequential versus Simultaneous Choice with endogenous quality* // International Journal of Industrial Organization. – 1996. – Vol. 15. – P. 103–121.
6. BENASSI C., CHIRCO A., COLOMBO C. *Vertical differentiation and the distribution of income* // Bulletin of Economic Research. – 2006. – Vol. 58:4. – P. 345–367.
7. GLADKOVA M., ZENKEVICH N. *Quality Competition: Uniform vs. Non-uniform Consumer Distribution* // Contributions to Game Theory and Management. Vol II. Collected papers presented on the Second International Conference «Game Theory and Management»(Eds. L.A.

- Petrosjan, N.A. Zenkevich) – SPb: Graduate School of Management, SPbU, 2009. – P. 111–124.
8. HOVANOV N., YUDAIEVA M., HOVANOV K. *Multicriteria estimation of probabilities on basis of expert non-numeric, non-exact and non-complete knowledge* // European Journal of Operational Research. – 2009. – Vol. 195. – P. 857–863.
 9. MOTTA M. *Endogenous quality choice: price vs. Quantity competition* // The journal of industrial economics. – 1993. – Vol. 41, № 2. – P. 113–131.
 10. NOH Y.-H., MOSCHINI G. *Vertical product differentiation, entry-deterrence strategies, and entry qualities* // Review of Industrial Organization. – 2006. – Vol. 29. – P. 227–252.
 11. TIROLE J. *The theory of Industrial Organization*. – Cambridge, MA: MIT Press, 2000.

Приложение. Доказательство теоремы 1.

Доказательство. Функции выигрыша игроков имеют вид:

$$R_1(p_1, p_2, s_1, s_2) = p_1(F(\theta_2) - F(\theta_1)),$$

$$R_2(p_1, p_2, s_1, s_2) = p_2(1 - F(\theta_2)),$$

где $\theta_1 = \frac{p_1}{s_1}$, $\theta_2 = \frac{p_2 - p_1}{s_2 - s_1}$.

Вычислим производную функции выигрыша R_2 по цене p_2 и приравняем ее к нулю:

$$\frac{\partial R_2}{\partial p_2} = 1 - F(\theta_2) - \frac{p_2}{s_2 - s_1} f(\theta_2) = 0.$$

Откуда получаем уравнение:

$$(10) \quad z(\theta_2) = 1 - F(\theta_2),$$

где $z(\theta_2) = (t + \theta_2) f(\theta_2)$, $t = \frac{p_1}{s_2 - s_1} > 0$.

Справедливо следующее неравенство:

$$z\left(\frac{b}{2}\right) = \left(t + \frac{b}{2}\right) f\left(\frac{b}{2}\right) > b \geq \frac{1}{2} = 1 - F\left(\frac{b}{2}\right).$$

Кроме того, $z(0) = tf(0) = 0 < 1 - F(0) = 1$. Поэтому

$$z\left(\frac{b}{2}\right) > 1 - F\left(\frac{b}{2}\right), \quad z(0) < 1 - F(0).$$

Таким образом, решение уравнения (3) $\theta_2^* < \frac{b}{2}$.

Заметим, что на промежутке $[0, b/2]$ функция R_2 является строго вогнутой по p_2 (или θ_2). В частности, для треугольного распределения (рис. 1) имеем: $\frac{\partial^2 R_2}{\partial p_2^2} = -\frac{6}{b^2(s_2 - s_1)} < 0$.

Поэтому в стационарной точке θ_2^* , удовлетворяющей уравнению (3), достигается наибольшее значение функции R_2 на промежутке $[0, b/2]$.

Докажем теперь, что в точке θ_2^* достигается наибольшее значение функции R_2 на промежутке $[0, b]$, и эта точка единственна.

Проанализируем уравнение (3). Поскольку функция распределения $F(\theta)$ строго возрастает на $[0, b]$, то правая часть уравнения $1 - F(\theta_2)$ строго убывает на $[0, b]$.

Левая часть уравнения $z(\theta_2)$ строго возрастает до тех пор, пока $f'(\theta_2) \geq 0$. Это является следствием вида производной: $z'(\theta_2) = f(\theta_2) + (t + \theta_2)f'(\theta_2)$.

Функция $z(\theta_2)$ является непрерывной, причем $z(b) = z(0) = 0$. Тогда наибольшее значение функции $z(\theta_2)$ на $[0, b]$ достигается в некоторой внутренней точке $\theta_2 = \hat{\theta}_2$. Неравенство $f'(\theta_2) \geq 0$ выполняется при любом $\theta_2 < \frac{b}{2}$. При этом на данном промежутке $z'(\theta_2) > 0$. Поэтому $\hat{\theta}_2 > \frac{b}{2}$ и $\theta_2^* \in [0, \hat{\theta}_2]$.

Рассмотрим теперь промежуток $\theta_2 \in [\hat{\theta}_2, b]$ и покажем, что на этом промежутке не достигается наибольшее значение функции выигрыша R_2 .

Для этого введем функцию $\varphi(\theta_2) = 1 - F(\theta_2) - z(\theta_2)$ и вычислим ее производную $\varphi'(\theta_2) = -2f(\theta_2) - (t + \theta_2)f'(\theta_2)$.

Поскольку функция плотности $f(\theta_2)$ убывает и вогнута на промежутке $[\hat{\theta}_2, b]$, то $f'(\theta_2)$ – убывающая или $\varphi'(\theta_2)$ – возрастающая функции.

Вычислим значения производной функции $\varphi(\theta_2)$ в точках $\hat{\theta}_2$ и b . Тогда: $\varphi'(\hat{\theta}_2) = -2f(\hat{\theta}_2) - (t + \hat{\theta}_2) f'(\hat{\theta}_2) = -f(\hat{\theta}_2) - z'(\hat{\theta}_2) = -f(\hat{\theta}_2) < 0$, поскольку $z'(\hat{\theta}_2) = 0$.

Производная $\varphi'(b) = -2f(b) - (t + b) f'(b) = -(t + b) f'(b) > 0$, поскольку $f(b) = 0$ и $f'(b) < 0$.

Итак, $\varphi'(\theta_2)$ возрастает, $\varphi'(\hat{\theta}_2) < 0$ и $\varphi'(b) > 0$. Поэтому существует единственная точка $\theta_2 = \tilde{\theta}_2$, в которой $\varphi'(\tilde{\theta}_2) = 0$, и в ней достигается минимум.

Поскольку $\varphi(\hat{\theta}_2) < 0$, а $\varphi(b) = 0$, то на всем промежутке $[\hat{\theta}_2, b]$ функция $\varphi(\theta_2) < 0$. Тогда $1 - F(\theta_2) < z(\theta_2)$ для любого $\theta_2 \in [\hat{\theta}_2, b]$, и поэтому на промежутке $[\hat{\theta}_2, b]$ нет точек, которые удовлетворяют уравнению (3).

Таким образом, существует единственное значение параметра θ_2^* в ценовом равновесии, при котором $\theta_2^* > \theta_1^*$ и $\theta_2^* < b/2$.

GAME-THEORETICAL MODEL OF QUALITY MANAGEMENT UNDER COMPETITION

Margarita Gladkova, Graduate School of Management, Saint-Petersburg, post-graduate student (gladkova@gsom.pu.ru).

Nikolay Zenkevich, Graduate School of Management, Saint-Petersburg, Cand.Sc., assistant professor (zenkevich@gsom.pu.ru).

Abstract: In this paper a game-theoretical model of quality management under competition is suggested. The game-theoretical model is represented as a two-stage game where production companies compete on an industrial market and consumer's taste to quality is non-uniformly distributed. The strong Nash equilibrium in the investigated game was obtained in explicit form which allowed us to evaluate prices, companies market shares and revenues in the equilibrium. A case study for Internet-trading systems was used to approve the suggested quality management mechanism.

Keywords: quality evaluation, quality measurement, consumer's taste to quality, quality management, two-stage game, Nash equilibrium, Stakelberg equilibrium, Pareto-optimal solution, optimal quality differentiation, index of consumers satisfaction.

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии М. В. Губко*

УДК 518.9

ББК В18

ПРОИЗВОДЯЩИЕ ФУНКЦИИ ДЛЯ ПРОЦЕДУРЫ ВЫБОРА КОМИТЕТОВ¹

Калугина А.М.²

(Забайкальский государственный гуманитарно-педагогический
университет имени Н.Г. Чернышевского, Чита)

В статье описаны процедуры минисуммы и минимакса для выбора комитета, предложенные в [2]. Представлен метод производящих функций для этих процедур, открывающий возможность использования в решении задачи большой размерности пакет символьных вычислений Mathematica.

Ключевые слова: производящая функция, процедура минимакса, процедура минисуммы.

Введение

Процедура принятия решений выборным органом обычно происходит путем голосования. Процедура голосования применяется также и при выборе комитета. Комитеты могут избираться как в выборных органах, так и в административном аппарате различных учреждений; например, выборы совета факультета, выборы аудиторской комиссии и др. В [2] были предложены процедуры минисуммы и минимакса для выбора комитета. Рассмотрим их.

1. Процедуры минисуммы и минимакса для выбора комитета

Пусть дано n избирателей и k кандидатов. Каждый избиратель в своем бюллетене может проголосовать за столько кан-

¹ Текст приводится в соответствии с изданием «Математическая теория игр и ее приложения. – 2009. – Т. 1. № 4. – С. 31–40».

² Анастасия Михайловна Калугина, кандидат физико-математических наук (kaluginam82@yandex.ru).

дидатов, сколько соответствуют его предпочтениям. Такой вид голосования называется голосованием одобрения. При голосовании одобрения каждый избирательный бюллетень – это бинарный k -вектор, (p_1, \dots, p_k) , где p_i равно 0 или 1. Эти бинарные вектора указывают одобрение или неодобрение каждого кандидата избирателем. Для обозначения выбранных комитетов мы будем пользоваться подобными бинарными векторами.

Чтобы упростить запись, мы запишем избирательный бюллетень такой, как, например, $(1,1,0)$, в виде 110. Это означает, что избиратель одобряет первого и второго кандидата и не одобряет третьего.

Число различных избирательных бюллетеней или, что тоже самое, число возможных результатов выбора, равно 2^k .

Пример 1. Пусть $q = 2$ и 4 избирателя заполняют бюллетени для трех кандидатов следующим образом:

1 избиратель: 100

1 избиратель: 110

2 избирателя: 101

Видно, что кандидат № 1 получил одобрение от всех 4-х избирателей, кандидат № 2 – от 1-го, и кандидат № 3 – от 2-х. То есть кандидаты № 1 и № 3 избраны, а № 2 – нет. •

Определение 1. Расстоянием Хемминга между двумя избирательными бюллетенями p и q называется число $d(p, q)$, равное количеству компонент, которыми они отличаются.

Например, для избирательного бюллетеня 110 расстояния Хемминга будут следующими (табл. 1):

Таблица 1.

Избирательный бюллетень	$d = 0$	$d = 1$	$d = 2$	$d = 3$
110	110	100	000	001
		010	101	
		111	011	

Теперь обратим внимание не на индивидуальные избирательные бюллетени, а на различные избирательные бюллетени и чис-

ло раз, которое каждый из них был учтен. Например, комитеты 100 и 101 минимизируют сумму расстояний Хемминга для всех избирателей в нашем примере, это эквивалентно тому, что сумма расстояний Хемминга всех различных избирательных бюллетеней имеет вес числа избирателей, заполнивших каждый из них.

Определение 2. *Индексным весом бюллетеня называется число его повторений.*

Процедура минисуммы состоит в определении минимума среди суммарных значений произведения расстояния Хемминга и весов всевозможных бюллетеней. *Процедура минимакса* состоит в определении минимума среди максимальных значений произведения расстояния Хемминга и весов всевозможных бюллетеней.

Таблица 2 показывает индексные веса бюллетеней примера 1 во всех восьми возможных случаях создания комитета (* отмечены минимальные значения).

Таблица 2.

Бюллетень	100	110	101	Сумма	Максимум
Число повторов	1	1	2		
000	1	2	4	7	4
100	0	1	2	3*	2*
010	2	1	6	9	6
001	2	3	2	7	3
110	1	0	4	5	4
101	1	2	0	3*	2*
011	3	2	4	9	4
111	2	1	2	5	2*

Ясно, что здесь два комитета-победителя: 100 и 101, чьи суммы минимизируют сумму расстояний Хемминга. В нашем примере такой комитет всегда содержит кандидата № 1, и может содержать или не содержать кандидата № 3.

Рассмотрим другой способ определения комитета, представляющего интересы большинства слоев электората. Вместо поиска комитета, который минимизирует сумму индексных весов по всем

избирательным бюллетеням, найдем комитет(ы), который(е) минимизирует(ют) максимум индексных весов. В нашем примере это три комитета: 100, 101 и 111.

Помимо индексного веса, каждый бюллетень обладает весом близости.

Весá близости отражают число избирателей, заполнивших каждый из различных избирательных бюллетеней. Но они также включают информацию о близости избирательного бюллетеня ко всем остальным избирательным бюллетеням, основанную на расстояниях Хемминга. Чем бюллетень ближе к большему числу избирательных бюллетеней, тем большее влияние он имеет при определении комитета.

Определение 3. *Вес близости избирательного бюллетеня q^j есть*

$$(1) \quad w_j = \frac{m_j}{\sum_{h=1}^t m_h d(q^j, q^h)},$$

где m_j – число избирателей, заполнивших избирательный бюллетень $q^j = (q_1^j, \dots, q_n^j)$ и t – число различных заполненных избирательных бюллетеней. Знаменатель дроби – сумма расстояний Хемминга между избирательным бюллетенем j и всеми остальными избирательными бюллетенями (включая j).

Процедуру минисуммы с весами близости проиллюстрируем на примере 1. Расстояние Хемминга избирательного бюллетеня 100 с ним самим, с 110 и с 101 равно 0, 1 и 1, соответственно. Поскольку эти избирательные бюллетени заполнены одним, одним и двумя избирателями, то избирательный бюллетень имеет вес

$$\frac{1}{[(1 \cdot 0) + (1 \cdot 1) + (2 \cdot 1)]} = \frac{1}{3}$$

Числитель здесь отражает тот факт, что один избиратель заполнил этот избирательный бюллетень.

Точно также, избирательные бюллетени 110 и 101 имеют веса $\frac{1}{5}$ и $\frac{2}{3}$:

$$\frac{1}{[(1 \cdot 1) + (0 \cdot 1) + (2 \cdot 2)]} = \frac{1}{5},$$

$$\frac{2}{[(1 \cdot 1) + (2 \cdot 1) + (0 \cdot 2)]} = \frac{2}{3}.$$

Избавимся для удобства от знаменателей, умножив их на 15; получим, что веса близости бюллетеней равны 5, 3, и 10, соответственно.

Таким образом, получим табл. 3, отличающуюся от предыдущей тем, что она основана на весах близости, а не на индексных весах.

Таблица 3.

Бюллетень	100	110	101	Сумма	Максимум
Вес близости	5	3	10		
000	5	6	20	31	20
100	0	3	10	13	10
010	10	3	30	43	30
001	10	9	10	29	10
110	5	0	20	25	20
101	5	6	0	11*	6*
011	15	6	20	41	20
111	10	3	10	23	10

Заметим, что только комитет 101 минимизирует и сумму и максимум весов близости, в то время, как комитет 101 – также один из комитетов, выделенных критериями минисуммы и минимакса, основанных на индексных весах. Это совпадение не обязательно будет нормой. В [2] показано, что результаты разных процедур могут быть антиподами.

2. Производящие функции для процедур минисуммы и минимакса

Пусть n избирателей голосуют за k кандидатов; избиратели заполняют n бюллетеней. Некоторые заполненные бюллетени могут повторяться. Пусть $A = \{a_i\}_{i=1,\dots,t}, t \leq n$ – множество заполненных избирательных бюллетеней. Пусть $u_i = u(a_i)$ число

повторов избирательного бюллетеня a_i , $\sum_{i=1}^t u_i = n$.

Используем для обозначения кандидатов метки γ_j , $j = 1, \dots, k$. Метки могут быть сокращены, если одновременно находятся в числителе и знаменателе одной дроби. Так, в примере 1 запись $\gamma_1\gamma_3$ означает комитет 101, а 1 соответствует комитету 000.

Опишем процедуру выбора комитета в терминах производящих функций.

Составим последовательность всевозможных бюллетеней

$$(2) \quad \underbrace{\{00\dots 0\}}_{k \text{ раз}}, \underbrace{\{10\dots 0\}}_{k \text{ раз}}, \dots, \underbrace{\{1\dots 1\}}_{k \text{ раз}}.$$

Последовательности бюллетеней (2) поставим в соответствие последовательность меток

$$(3) \quad \{1, \gamma_1, \dots, \gamma_k, \gamma_1\gamma_2, \dots, \gamma_1\dots\gamma_k\}.$$

Разобьем последовательность (3) на группы по количеству меток. То есть

$$\kappa_j = \{\kappa_j^l\}_{l=1}^{C_k^j}, \text{ где } |\kappa_j^l| = j.$$

Каждой такой группе можно поставить в соответствие последовательность меток

$$(4) \quad \kappa_j \rightarrow \left\{ \prod_{t=1}^j \gamma_{s_t} \right\}_1^{C_k^j}, \quad s_t \in \overline{1, k}$$

или

$$\{\{1\}, \{\gamma_1, \dots, \gamma_k\}, \{\gamma_1\gamma_2, \dots, \gamma_{k-1}\gamma_k\}, \dots, \{\gamma_1\dots\gamma_k\}\}$$

Для последовательности групп (4) составим производящую функцию:

$$(5) \quad G(x) = \sum_{j=0}^k \kappa_j x^j = 1 + (\gamma_1 + \dots + \gamma_k)x +$$

$$+ (\gamma_1\gamma_2 + \dots + \gamma_{k-1}\gamma_k)x^2 + \dots + \gamma_1\gamma_2\dots\gamma_k x^k = \prod_{j=1}^k (1 + \gamma_j x).$$

Далее, для каждого избирательного бюллетеня $a_i \in A$ найдем

$$(6) \quad G_i(x) = \frac{G(x)}{a_i}.$$

После раскрытия скобок и сокращения получим сумму дробей. Составим последовательность, в которую по порядку запишем все элементы суммы (6).

$$(7) \quad \left\{ \frac{1}{\gamma_{t_1} \dots \gamma_{t_l}}, \frac{\gamma_1 x}{\gamma_{t_1} \dots \gamma_{t_l}}, \frac{\gamma_2 x}{\gamma_{t_1} \dots \gamma_{t_l}}, \dots, \frac{\gamma_1 \dots \gamma_k x^k}{\gamma_{t_1} \dots \gamma_{t_l}} \right\}$$

Каждому элементу b_r , $r = 1, \dots, 2^k$ последовательности (7) поставим в соответствие число $g(b_r)$, равное числу меток в b_r . Это число определяет расстояние Хемминга между избирательными бюллетенями, находящимися в числителе и знаменателе дроби. Получим последовательности чисел

$$(8) \quad g_i = \{g_{i1}, \dots, g_{i2^k}\}.$$

Теперь составим новую последовательность, умножив все элементы последовательности (8) для бюллетеня a_i на u_i – индексный вес этого бюллетеня.

$$(9) \quad g_i u_i = \{g_{i1} u_i, \dots, g_{i2^k} u_i\}.$$

Для процедуры минисуммы составим последовательность W – сумму последовательностей вида (9) для всех $a_i \in A$.

$$(10) \quad W = \left\{ \sum_{i=1}^t g_{ij} u_i \right\}_{j=1}^{2^k}.$$

Для процедуры минимакса сравним поэлементно последовательности вида (9), и из максимумов составим последовательность M .

$$(11) \quad M = \left\{ \max_{a_i \in A} g_{ij} u_i \right\}_{j=1}^{2^k}.$$

Определим для последовательностей W и M процедуру $MinNo(\{c\}) = (c_m; \{m\})$, где c_m – значение минимального элемента последовательности, $\{m\}$ – последовательность порядковых номеров элемента.

После применения этой процедуры мы, определив элемент(ы) с номером m из (5), получим обозначение комитета-победителя выборов.

Вернемся к примеру 1.

Количество кандидатов $k = 3$, избирателей $n = 4$, различных избирательных бюллетеней $t = 3$, $a_1 = 100$, $u_1 = 1$, $a_2 = 110$, $u_2 = 1$, $a_3 = 101$, $u_3 = 2$.

Составим производящую функцию.

$$G = (1 + \gamma_1 x)(1 + \gamma_2 x)(1 + \gamma_3 x) = 1 + \gamma_1 x + \gamma_2 x + \gamma_3 x + \gamma_1 \gamma_2 x^2 + \gamma_1 \gamma_3 x^2 + \gamma_2 \gamma_3 x^2 + \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 x^3.$$

Определим последовательности расстояний Хемминга и последовательности индексных весов для a_1, a_2, a_3 .

$$\frac{G}{\gamma_1} = \frac{1}{\gamma_1} + x + \frac{\gamma_2}{\gamma_1} x + \frac{\gamma_3}{\gamma_1} x + \gamma_2 x^2 + \gamma_3 x^2 + \frac{\gamma_2 \gamma_3}{\gamma_1} x^2 + \gamma_2 \gamma_3 x^3,$$

$$g_1 = \{1, 0, 2, 2, 1, 1, 3, 2\}, u_1 g_1 = \{1, 0, 2, 2, 1, 1, 3, 2\}.$$

$$\frac{G}{\gamma_1 \gamma_2} = \frac{1}{\gamma_1 \gamma_2} + \frac{1}{\gamma_2} x + \frac{1}{\gamma_1} x + \frac{\gamma_3}{\gamma_1 \gamma_2} x + x^2 + \frac{\gamma_3}{\gamma_2} x^2 + \frac{\gamma_3}{\gamma_1} x^2 + \gamma_3 x^3,$$

$$g_2 = \{2, 1, 1, 3, 0, 2, 2, 1\}, u_2 g_2 = \{2, 1, 1, 3, 0, 2, 2, 1\}.$$

$$\frac{G}{\gamma_1 \gamma_3} = \frac{1}{\gamma_1 \gamma_3} + \frac{1}{\gamma_3} x + \frac{\gamma_2}{\gamma_1 \gamma_3} x + \frac{1}{\gamma_1} x + \frac{\gamma_2}{\gamma_3} x^2 + x^2 + \frac{\gamma_2}{\gamma_1} x^2 + \gamma_2 x^3,$$

$$g_3 = \{2, 1, 3, 1, 2, 0, 2, 1\}, u_3 g_3 = \{4, 2, 6, 2, 4, 0, 4, 2\}.$$

Тогда,

$$W = \{7, 3, 9, 7, 5, 3, 9, 5\}, M = \{4, 2, 6, 3, 4, 2, 4, 2\}.$$

$MinNo(W) = (3; 2, 6)$, то есть комитеты 100 и 101.

$MinNo(M) = (2; 2, 6, 8)$, то есть комитеты 100, 101 и 111.

Теперь рассмотрим процедуры минисуммы и минимакса, основанные на весах близости.

Разобьем $G(x)$ на две части: $G(x) = G'(x) + G''(x)$ – где $G'(x)$ состоит из слагаемых, соответствующих бюллетеням из A , а $G''(x)$ содержит все остальные.

Для определения веса близости бюллетеней будем действовать таким же образом, что и для определения индексного веса,

а именно: найдем $\frac{G'(x)}{a_i}$, составим последовательности из слагаемых и далее определим последовательности g'_i так же, как и последовательности (11).

Теперь найдем веса близости, используя формулу (1):

$$(12) \quad w_i = \frac{u_i}{\sum_{j=1}^t g'_{ij} u_j}.$$

Определив веса близости, так же, как и в [2], избавимся для удобства от знаменателя, переобозначив веса близости через u'_i . Далее действуем по вышеописанному алгоритму, используя вместо индексных весов u_i веса близости u'_i . Найдем последовательность W' путем поэлементного суммирования последовательностей типа (9). Последовательность M' определим путем поэлементного сравнения последовательностей типа (9) и определения максимума. Применим к W' и M' процедуру *MinNo* и определим комитеты-победители выборов.

Проиллюстрируем этот алгоритм на примере 1.

$$G'(x) = \gamma_1 x + \gamma_1 \gamma_2 x^2 + \gamma_1 \gamma_3 x^2.$$

$$\frac{G'(x)}{\gamma_1} = x + \gamma_2 x^2 + \gamma_3 x^2, \quad g'_1 = \{0, 1, 1\}, \quad w_1 = \frac{u_1}{\sum_{j=1}^3 g'_{1j} u_j} = \frac{1}{3}.$$

$$\frac{G'(x)}{\gamma_1 \gamma_2} = \frac{1}{\gamma_2} x + x^2 + \frac{\gamma_3}{\gamma_2} x^2, \quad g'_2 = \{1, 0, 2\}, \quad w_2 = \frac{u_2}{\sum_{j=1}^3 g'_{2j} u_j} = \frac{1}{5}.$$

$$\frac{G'(x)}{\gamma_1 \gamma_3} = \frac{1}{\gamma_3} x + \frac{\gamma_2}{\gamma_3} x^2 + x^2, \quad g'_3 = \{1, 2, 0\}, \quad w_3 = \frac{u_3}{\sum_{j=1}^3 g'_{3j} u_j} = \frac{2}{3}.$$

Избавившись от знаменателей, получим $u'_1 = 5$, $u'_2 = 3$, $u'_3 = 10$.

Далее, $u'_1 g_1 = \{5, 0, 10, 10, 5, 5, 15, 10\}$, $u'_2 g_2 = \{6, 3, 3, 9, 0, 6, 6, 3\}$, $u'_3 g_3 = \{20, 10, 30, 10, 20, 0, 20, 10\}$.

$W' = \{31, 13, 43, 29, 25, 11, 41, 23\}$, $M' = \{20, 10, 30, 10, 20, 6, 20, 10\}$.

$MinNo(W') = (11; 6)$, $MinNo(M') = (6; 6)$. Обе процедуры указывают на комитет 101.

Литература

1. BILBAO J.M., FERNANDEZ J.R., JIMENES A., LOPEZ J.J. *Generating functions for computing power indices efficiently* // Top. – 2000. – Vol. 8, № 2. – P. 191–213.
2. BRAMS S.F., STEVEN J., MARC KILGOUR D., REMZI SANVER M. *A Minimax Procedure for Negotiating Multilateral Treaties* // In Matti Wiberg (ed.), Reasoned Choices: Essays in Honor of Hannu Nurmi. Turku, Finland: Finnish Political Science Association. – 2004. – P. 255–274.

METHOD OF GENERATING FUNCTIONS FOR PROCEDURE OF COMMITTEE' ELECTING

Anastasiya Kalugina, Zabaikalsky State Humanitarian Pedagogical University named after N. Tchernishevsky, Chita, Cand. Sc. (kaluginam82@yandex.ru).

Abstract: In this paper we consider the minimax and minisum procedures for electing committee. These procedures were proposed by S.F. Brams et al. We introduce the method of generating functions for these procedures. This method can be used for electing with a large number of candidates. The "Mathematica" symbolic calculus software can be used to implement our method.

Keywords: generation function, minimax procedure, minisum procedure.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии В. В. Мазаловым

УДК 519.832.2

ББК 22.18

ТЕОРЕТИКО-ИГРОВЫЕ МОДЕЛИ ПРОВЕДЕНИЯ КОНКУРСОВ ^{1 2}

Мазалов В.В. ³,

(Учреждение Российской академии наук Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН, Петрозаводск)

Токарева Ю.С. ⁴

(Забайкальский государственный гуманитарно-педагогический университет им. Н.Г. Чернышевского, Чита)

Рассматривается бескоалиционная игра n лиц с ненулевой суммой, связанная с проведением конкурсов. Игроки представляют на конкурс проекты, которые характеризуются набором параметров. Арбитр или арбитражный комитет выбирает один из проектов, используя некоторую стохастическую процедуру с распределением вероятностей, которое известно участникам конкурса. При этом победитель конкурса получает выигрыш, зависящий от параметров проекта. В работе представлена теоретико-игровая модель данной задачи и найдено равновесие в двух и трехмерных моделях.

Ключевые слова: теоретико-игровая модель конкурса, игра n лиц, диаграмма Вороного, арбитражная процедура, равновесие по Нэшу.

¹ Работа поддержана грантами РФФИ (проект 10-01-00089-а), АБЦП «Развитие научного потенциала высшей школы» и ОМН РАН.

² Текст приводится в соответствии с изданием «Математическая теория игр и ее приложения. – 2010. – Т. 2. № 2. – С. 66–78».

³ Владимир Викторович Мазалов, доктор физико-математических наук, профессор (vmazalov@krc.karelia.ru).

⁴ Юлия Сергеевна Токарева, кандидат физико-математических наук (jtokareva2@mail.ru).

Введение

Рассматривается бескоалиционная игра n лиц с ненулевой суммой, связанная с проведением конкурсов. Игрок $i \in N = \{1, 2, \dots, n\}$ представляет на конкурс проект, который характеризуется набором параметров $x^i = (x_1^i, \dots, x_m^i)$. Например, проект может включать описание его стоимости, времени выполнения, числа работников и т.д. Арбитр или арбитражный комитет рассматривает поступившие предложения, выбирает один из проектов, используя стохастическую процедуру с распределением вероятностей, которое известно участникам конкурса. При этом победитель конкурса k получает выигрыш $h_k(x^k)$, зависящий от параметров его проекта. В работе для выбора проекта используется многомерная арбитражная процедура, которая выбирает ближайший к решению арбитра проект.

Этот подход широко применяется в одномерных игровых задачах двух лиц с нулевой суммой, которые интерпретируются как решение спора о зарплате между работником и работодателем. В работах [1-5] получены равновесия в таких играх с участием одного арбитра, и в работах [6-7] с участием арбитражного комитета.

В данной работе представлена многомерная теоретико-игровая модель n лиц с ненулевой суммой, в которой предложения игроков представляют собой набор параметров. Для ряда двухмерных и трехмерных задач найдены оптимальные решения и проведено их сравнение с решениями известных одномерных моделей.

1. Теоретико-игровая модель проведения конкурса

Рассмотрим следующую бескоалиционную игру n лиц с ненулевой суммой. Игроки $\{1, 2, \dots, n\}$ представляют на конкурс проекты, которые характеризуются векторами $\{x^1, \dots, x^n\}$ из некоторого допустимого множества S в пространстве R^m . Арбитр рассматривает поступившие предложения и выбирает один из проектов, используя следующую стохастическую процедуру.

В пространстве R^m моделируется случайный вектор a с некоторым распределением вероятностей $\mu(x_1, \dots, x_m)$, которое известно участникам конкурса. Будем называть вектор a решением арбитра. Победителем становится проект x^k , который ближе всего находится к точке a . Победитель конкурса игрок k получает выигрыш $h_k(x^k)$, зависящий от параметров проекта. Можно также думать о векторе a , как о наборе решений экспертов, где каждая компонента представляет собой решение отдельного эксперта. При этом, эксперты могут быть независимыми, или принимать коррелированные решения.

Заметим, что решение арбитра является случайным. Для представленного набора проектов $\{x^1, \dots, x^n\}$ множество $S \subset R^m$ разобьется на n подмножеств S_1, \dots, S_n , таких что если $a \in S_k$, то решением арбитра будет выбор проекта с номером k (см. рис. 1). Данное разбиение называется диаграммой Вороного. Его можно построить, используя процедуру Форчуна [8].

Таким образом, выигрыш игрока k в данной игре можно определить как среднее значение его выигрыша при попадании решения арбитра в множество S_k , т. е.

$$(1) \quad H_k(x^1, \dots, x^n) = \int_{S_k} h_k(x^k) \mu(dx_1, \dots, dx_n) = h_k(x_k) \mu(S_k), \quad k = 1, \dots, n.$$

Ищется равновесие по Нэшу в данной игре, т. е. такой профиль $x^* = (x^1, \dots, x^n)$, для которого

$$H_k(x^* || y^k) \leq H_k(x^*), \quad \forall y^k, \quad k = 1, \dots, n.$$

Для упрощения выкладок остановимся на двухмерном случае, когда проект представлен двумя параметрами. Предположим, что игроки представили на конкурс свои проекты $x^i = (x_i, y_i)$, $i = 1, \dots, n$, а два независимых арбитра оценивают их. Пусть решение арбитра моделируется случайным вектором на плоскости с плотностью распределения $f(x, y) = g(x)g(y)$.

Рассмотрим для определенности игрока 1. Множество S_1 , соответствующее принятию его проекта представляет собой многоугольник со сторонами l_{i_1}, \dots, l_{i_k} , где l_j это отрезок прямой

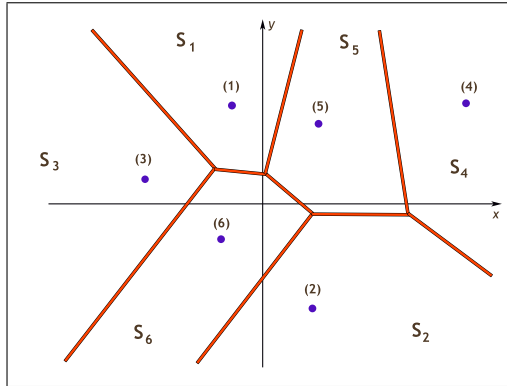


Рис. 1. Диаграмма Вороного на множестве проектов

линии, проходящий перпендикулярно отрезку $[x^1, x^j]$ через его середину (см. рис. 1).

Нетрудно найти, что уравнение границы l_j имеет вид

$$(2) \quad x(x_1 - x_j) + y(y_1 - y_j) = \frac{x_1^2 + y_1^2 - x_j^2 - y_j^2}{2},$$

или

$$y = l_j(x) = -\frac{x_1 - x_j}{y_1 - y_j}x + \frac{x_1^2 + y_1^2 - x_j^2 - y_j^2}{2(y_1 - y_j)}.$$

Пусть $x_{i_j}, j = 1, \dots, k$ абсциссы вершин многоугольника S_1 . Для удобства перенумеруем их таким образом, чтобы

$$x_{i_0} \leq x_{i_1} \leq x_{i_2} \leq \dots \leq x_{i_k} \leq x_{i_{k+1}},$$

где $x_{i_0} = -\infty, x_{i_{k+1}} = \infty$,

Для всех внутренних точек $(x, y) \in S_1$ выполняется условие, что $l_{i_j}(x)$ имеет тот же знак, что и $l_{i_j}(x_1)$, или $l_{i_j}(x)l_{i_j}(x_1) > 0, j = 1, \dots, k$.

Тогда меру $\mu(S_1)$ можно представить как

$$\mu(S_1) = \sum_{j=0}^{k+1} \int_{x_{i_j}}^{x_{i_{j+1}}} g(x) dx \int_{l_{i_j}(x)l_{i_j}(x_1) > 0, j=1, \dots, k} g(y) dy.$$

Аналогичное представление можно получить для любой области $S_i, i = 1, \dots, n$.

2. Двухмерная модель двух лиц с нормальным распределением

Рассмотрим, например, модель конкурса для двух лиц с нулевой суммой, в которой проекты представлены двумя параметрами. Например, можно представить спор о разделе имущества, которое состоит из движимого x и недвижимого имущества y . Игрок I хочет максимизировать сумму $x + y$, а второй - минимизировать. Предположим, что для определения победителя в споре арбитр использует процедуру с нормальным распределением $f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \exp\{-(x^2 + y^2)/2\}$.

Игроки вносят свои предложения (x_1, y_1) и (x_2, y_2) . Плоскость решений арбитра разобьется на два множества S_1 и S_2 , которые разбиваются прямой, проходящей через середину отрезка, соединяющего точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2) (см. рис. 2). Уравнение такой прямой

$$y = -\frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2}x + \frac{x_1^2 - x_2^2 + y_1^2 - y_2^2}{2(y_1 - y_2)}.$$

Таким образом, выигрыш игрока I в данной игре имеет вид

$$(3) \quad H(x_1, y_1; x_2, y_2) = (x_1 + y_1)\mu(S_1) = (x_1 + y_1) \cdot$$

$$\int_R \int_R f(x, y) I\left\{-\frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2}x + \frac{(x_1^2 - x_2^2 + y_1^2 - y_2^2)}{2(y_1 - y_2)} \geq 0\right\} dx dy,$$

где $I\{A\}$ -индикатор множества A .

Пользуясь симметрией задачи, можно предположить, что оптимальные стратегии будут предписывать одинаковые значения параметров. Пусть $x^2 = y^2 = -a$. Тогда из (3)

$$\begin{aligned} H(x_1, y_1) &= \\ &= (x_1 + y_1) \int_R \int_R f(x, y) I\left\{-\frac{x_1 + a}{y_1 + a}x + \frac{(x_1^2 + y_1^2 - 2a^2)}{2(y_1 + a)} \geq 0\right\} dx dy. \end{aligned}$$

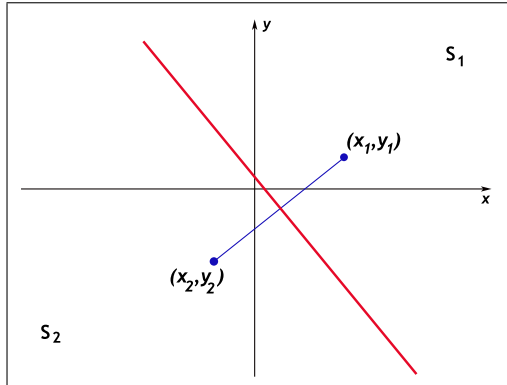


Рис. 2. Конкурс двух проектов на плоскости

Наилучший ответ первого игрока найдем из условия

$$\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0, \frac{\partial H}{\partial y_1} = 0.$$

Находим

$$(4) \quad \frac{\partial H}{\partial x_1} = \mu(S_1) + (x_1 + y_1) \frac{\partial \mu(S_1)}{\partial x_1} = \mu(S_1) + (x_1 + y_1) \cdot \int_R \frac{1}{2\pi} \frac{x - x_1}{y_1 + a} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(x^2 + \left(-\frac{x_1 + a}{y_1 + a}x + \frac{x_1^2 + y_1^2 - 2a^2}{2(y_1 + a)}\right)^2\right)\right\} dx.$$

Приравняем (4) нулю и потребуем, чтобы решение уравнения достигалось в точке $x^1 = y^1 = a$. Это приводит к нахождению оптимального значения параметра a . Заметим, что при этом из симметрии следует, что $\mu(S_1) = 1/2$. Тогда

$$\frac{1}{2} - 2a \int_R \frac{1}{2\pi} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x^2 + x^2)\right\} \frac{-x + a}{2a} dx = 0,$$

откуда

$$\int_{-\infty}^{\infty} (-x + a) \frac{1}{2\pi} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2},$$

и наконец получаем оптимальное значение a

$$a = \sqrt{\pi}.$$

Нетрудно проверить, что выполняются достаточные условия достижения максимума функции $H(x, y)$ в точке (a, a) .

Таким образом, оптимальные стратегии игроков в данной игре это предложения $(-\sqrt{\pi}, -\sqrt{\pi})$ и $(\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi})$ соответственно. Отметим отличие от оптимального решения для одномерной арбитражной процедуры [7], где равновесие имеет вид $(-\sqrt{\pi/2}, \sqrt{\pi/2})$.

3. Эффект корреляции на оптимальное решение

Выше мы рассмотрели модель конкурса, где проекты оцениваются по двум критериям, и решения арбитра моделировались независимыми нормальными случайными величинами. Рассмотрим эту же задачу в предположении, что решения арбитра являются зависимыми. Это соответствует случаю, когда по каждому из критериев приглашается отдельный эксперт, и при этом решения экспертов являются коррелированными.

Предположим, что для определения победителя используется процедура с нормальным распределением $f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-r^2}} \exp\{-\frac{1}{2(1-r^2)}(x^2 + y^2 - 2rxy)\}$, здесь $r : r \leq 1$ коэффициент корреляции.

Также, как в предыдущей модели воспользуемся симметрией. Предположим, что второй игрок использует стратегию $(-a, -a)$ и будем искать наилучший ответ первого игрока в виде $(x_1 = y_1 = a)$. Дифференцируя функцию выигрыша (3) с новым распределением, и подставляя значения $x_1 = y_1 = a$ приходим к условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} (-x + a) \frac{1}{2\pi\sqrt{1-r^2}} e^{-\frac{x^2}{1-r^2}} dx = \frac{1}{2},$$

откуда

$$a = \sqrt{\pi(1+r)}.$$

Мы видим, что зависимость между решениями арбитра позволяет увеличивать оптимальные значения предложений игроков.

4. Модель конкурса для трех лиц с ненулевой суммой

Рассмотрим теперь конкурс проектов трех лиц, в котором игрок I заинтересован максимизировать сумму $x + y$, игрок II заинтересован напротив минимизировать x , а игрок III минимизировать y . Пусть арбитр представлен нормальным распределением на плоскости $f(x, y) = g(x)g(y)$, где $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\{-x^2/2\}$.

Воспользуемся опять симметрией задачи. Оптимальные стратегии должны иметь вид

для игрока I: (c, c) ,

для игрока II: $(-a, 0)$,

для игрока III: $(0, -a)$.

Чтобы найти значения параметров a и c , поступим следующим образом. Предположим, что игроки II и III представили на конкурс проекты соответственно $(-a, 0)$ и $(0, -a)$. Пусть игрок I, представил на конкурс проект (x_1, y_1) , где $x_1, y_1 \geq 0$. Тогда плоскость проектов разобьется на три множества (см. рис. 3), разделяемые прямыми $y = x$ и

$$l_2 : y = -\frac{x_1 + a}{y_1}x + \frac{x_1^2 + y_1^2 - a^2}{2y_1}$$

и

$$l_3 : y = -\frac{x_1}{y_1 + a}x + \frac{x_1^2 + y_1^2 - a^2}{2(y_1 + a)}.$$

Все три прямые пересекаются в одной точке $x = y = x_0$, где

$$x_0 = \frac{x_1^2 + y_1^2 - a^2}{2(x_1 + y_1 + a)}.$$

Нас в первую очередь интересует область S_1 с границами l_2 и l_3 . Запишем выигрыш первого игрока

$$(5) \quad H_1(x_1, y_1) = (x_1 + y_1) \cdot$$

$$\left[\int_{-\infty}^{x_0} g(x)dx \int_u^{\infty} g(y)dy + \int_{x_0}^{\infty} g(x)dx \int_v^{\infty} g(y)dy \right],$$

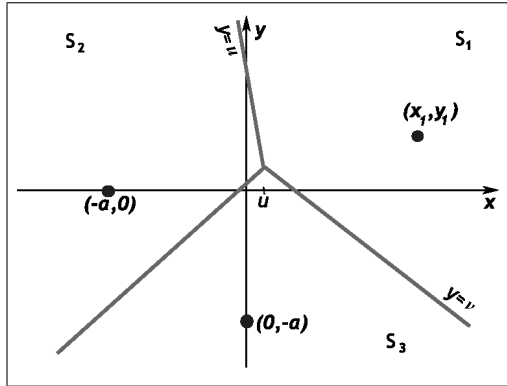


Рис. 3. Конкурс трех проектов на плоскости

где

$$u = -\frac{x_1 + a}{y_1}x + \frac{x_1^2 + y_1^2 - a^2}{2y_1},$$

$$v = -\frac{x_1}{y_1 + a}x + \frac{x_1^2 + y_1^2 - a^2}{2(y_1 + a)}.$$

Упрощая (5), приходим к выражению

$$(6) H_1(x_1, y_1) = (x_1 + y_1) \left[1 - \int_{-\infty}^{x_0} g(x)G(u)dx - \int_{x_0}^{\infty} g(x)G(v)dx \right],$$

где $G(x)$ функция нормального распределения. Максимум функции (6) достигается при $x_1 = y_1 = c$ и является функцией от a .

Теперь зафиксируем стратегию первого игрока (c, c) , $c > 0$ и предположим, что игрок III выбрал стратегию $(0, -b)$. Пусть игрок II выбрал стратегию $(-a, 0)$ и будем искать его наилучший ответ на стратегии игроков I и III. Плоскость проектов разобьется на три области (см. рис. 4). Нас интересуют границы области S_2 :

$$l_1 : y = -\frac{c + a}{c}x + \frac{2c^2 - a^2}{2c}$$

и

$$l_3 : y = \frac{a}{b}x - \frac{b^2 - a^2}{2b}.$$

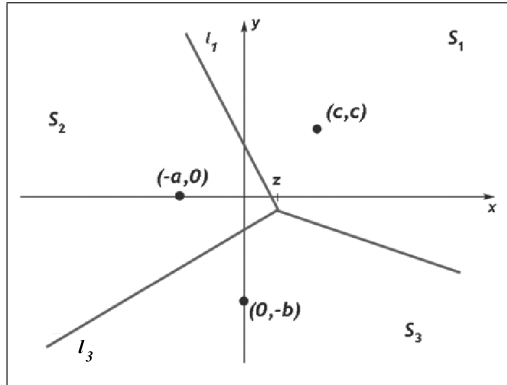


Рис. 4. Конкурс трех проектов на плоскости

Точка пересечения областей имеет абсциссу

$$z = \left(\frac{2c^2 - a^2}{2c} - \frac{a^2 - b^2}{2b} \right) \frac{1}{a/b + 1 + a/c}.$$

тогда выигрыш игрока II равен

$$(7) \quad H_2(a) = a \left[\int_{-\infty}^z g(x) dx \int_{v_1}^{v_2} g(y) dy \right] = \\ = a \left[\int_{-\infty}^z (G(v_2) - G(v_1)) f(x) dx, \right.$$

где

$$v_1 = \frac{a}{b}x - \frac{b^2 - a^2}{2b}, \\ v_2 = -\frac{c+a}{c}x + \frac{2c^2 - a^2}{2c}.$$

Из соображений симметрии минимум выражения (7) должен достигаться при $a = b$. Из этих двух задач оптимизации можно найти оптимальные значения параметров a и c . Численное моделирование приводит к следующему набору приближенных значений для оптимальных параметров

$$a = b \approx 1,7148, \quad c \approx 1,3736.$$

При этом, выигрыши игроков в равновесии

$$H_1 \approx 0,920, \quad H_2 = H_3 \approx 0,570,$$

и вероятности попадания в соответствующие области равны

$$\mu(S_1) \approx 0,335, \quad \mu(S_2) = \mu(S_3) \approx 0,332.$$

5. Проведение конкурса с участием арбитражного комитета

Предположим теперь, что решение о принятии проекта принимает не один арбитр, а несколько. При этом, каждый арбитр руководствуется тем же самым распределением вероятностей. Рассмотрим арбитражный комитет, состоящий из $2m - 1$ членов. Чтобы проект был принят, необходимо чтобы за него проголосовали больше половины членов арбитражного комитета. Тогда выигрыш игрока i определяется следующим образом

$$H_i(x^i) = h_i(x^i) \cdot \left\{ C_{2m-1}^m \mu_i^m (1-\mu_i)^{m-1} + C_{2m-1}^{m+1} \mu_i^{m+1} (1-\mu_i)^{m-2} + \dots + \mu_i^{2m-1} \right\},$$

где $\mu_i = \mu(S_i)$, $i = 1, \dots, n$.

Например, если число членов арбитражного комитета равно трем, то выигрыш игрока i определяется следующим образом:

$$H_i = h_i(x^i) (3\mu_i^2(1-\mu_i) + \mu_i^3) = h_i(x^i) (3\mu_i^2 - 2\mu_i^3), \quad i = 1, \dots, n.$$

Равновесие в данном случае находится таким же образом как и в случае одного арбитра. Рассмотрим, например, модель конкурса с двумя участниками, рассмотренную в разделе 3. Функция выигрыша примет вид

$$H(x_1, y_1; x_2, y_2) = (x_1 + y_1) \sum_{k=0}^{m-1} C_{2m-1}^{m+k} \mu^{m+k} \bar{\mu}^{m-1-k},$$

где $\mu = \mu(S_1)$, $\bar{\mu} = 1 - \mu$. Предполагая, что второй игрок использует стратегию $x_2 = y_2 = -a$, найдем наилучший ответ первого игрока. Для этого вычислим

$$(8) \quad \frac{\partial H}{\partial x_1} = \sum_{k=0}^{m-1} C_{2m-1}^{m+k} \mu^{m+k} \bar{\mu}^{m-1-k} + (x_1 + y_1)$$

$$\sum_{k=0}^{m-1} C_{2m-1}^{m+k} \mu^{m+k-1} \bar{\mu}^{m-2-k} ((m+k)\mu - (m-1-k)\bar{\mu}) \frac{\partial \mu(S_1)}{\partial x_1} = 0.$$

Из симметрии задачи следует, что в равновесии $\mu = \mu(S_1) = 1/2$ и $x_1 = y_1 = a$. Подставив в (8), получим

$$\frac{1}{2} + 2a \left(\frac{1}{2}\right)^{2m-2} \sum_{k=0}^{m-1} C_{2m-1}^{m+k} (2k+1) \frac{\partial \mu(S_1)}{\partial x_1} =$$

$$= \frac{1}{2} + m C_{2m-1}^m \left(\frac{1}{2}\right)^{2m-2} \int_R \frac{1}{2\pi} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x^2 + x^2)\right\} (x-a) dx = 0,$$

откуда находим оптимальное значение a

$$a = \frac{2^{2m-2}}{m C_{2m-1}^m} \sqrt{\pi}.$$

При больших m согласно локальной предельной теореме

$$m C_{2m-1}^m \left(\frac{1}{2}\right)^{2m-2} = (2m-1) C_{2m-2}^{m-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{2m-2} \approx 2\sqrt{2m} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

Тогда при $m \rightarrow \infty$

$$a \approx \frac{\pi}{2\sqrt{m}} \rightarrow 0.$$

Видим, что увеличение членов арбитражного комитета приводит к уменьшению разброса оптимальных значений предложений игроков.

6. Заключение

В работе предложена новая теоретико-игровая модель проведения конкурсов с использованием арбитражных процедур. Эта схема легко может быть реализована в компьютерной среде.

Для решения какой-то практической задачи (например, строительство дома) объявляется конкурс. В начале конкурса создается конкурсная комиссия. Эксперты (арбитры) оценивают данную задачу по каждому из параметров. Формируется распределение вероятностей, соответствующее мнению экспертов.

После этого игроки вносят свои предложения на конкурс. Комиссия сразу же может отбросить проекты, значения которых доминируются другими проектами. После этого наступает фаза выбора победителя. Решения арбитра или нескольких арбитров моделируются случайными величинами в пространстве проектов. Ближайший к решению арбитра проект объявляется победителем. В случае арбитражного комитета проводится голосование.

Литература

1. МАЗАЛОВ В.В., МЕНЧЕР А.Э., ТОКАРЕВА Ю.С. *О равновесии в модели переговоров с арбитром* // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2009. – № 5. – С. 77–83.
2. МАЗАЛОВ В.В. *Математическая теория игр и приложения*. – Санкт-Петербург-Москва-Краснодар: Лань, 2009. – 446 с.
3. DE BERG M., VAN KREVELD M., OVERMARS M., SCHWARZKOPF O. *Computational Geometry*. – Springer, 2000.
4. FARBER H. *An analysis of final-offer arbitration* // Journal of conflict resolution. – 1980. – Vol. 24. – P. 683–705.
5. GIBBONS R. *A Primer in Game Theory*. – Prentice Hall, 1992.
6. KILGOUR M. *Game-theoretic properties of final-offer arbitration* // Group Decision and Negot. – 1994. – Vol. 3. – P. 285–301.

7. MAZALOV V., MENTCHER A. AND TOKAREVA J. *On a discrete arbitration procedure // Scientiae Mathematicae Japonicae.* – 2006. – Vol. 63(3). – P. 325–330.
8. MAZALOV V., TOKAREVA J. *Bargaining model on the plane // Algorithmic and computational theory in algebra and languages.* – 2008. – P. 42–49.

GAME-THEORETIC MODELS OF TENDER DESIGN

Vladimir V. Mazalov, Institute of Applied Mathematical Research Karelian Research Center of Russian Academy of Sciences, Doctor of Science, professor (vmazalov@krc.karelia.ru).

Julia S. Tokareva, Zabaikalsky State Humanitarian Pedagogical University named after N.Tchernishevsky, Cand.Sc. (jtokareva2@mail.ru).

Abstract: We consider a n -person non-zero-sum game related to design of a tender. Players present some projects, which are characterized by a vector of parameters. Arbitrator or some juri chooses one of the projects using a stochastic procedure with a certain distribution function, which is known to players. The winner receives a payoff, which depends on the parameters of the project. The game-theoretic model of a tender is presented and equilibrium in two and three-dimensional models is derived.

Keywords: game-theoretic model of tender, n -person game, Voronoi diagram, arbitration procedure, Nash equilibrium.

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии М. В. Губко*

УДК 517.9
ББК 22.18

ДИСКРЕТНАЯ АРБИТРАЖНАЯ ПРОЦЕДУРА С НЕРАВНОМЕРНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ВЕРОЯТНОСТЕЙ¹

Менчер А.Э.²

*(Забайкальский государственный гуманитарно-педагогический
университет имени Н.Г. Чернышевского, Чита)*

Рассматривается антагонистическая игра, связанная с арбитражной схемой Фарбера. Для случаев, когда предложения арбитра сосредоточены в трех и четырех точках с неравномерным распределением вероятностей, найдено равновесие в смешанных стратегиях.

Ключевые слова: арбитражная схема, дискретное распределение, смешанные стратегии, равновесие.

Введение

Рассмотрим бескоалиционную игру с нулевой суммой, связанную с моделью арбитражной процедуры с конечным числом предложений. Игроки L и M , именуемые, соответственно, как работник и работодатель, ведут переговоры об установлении заработной платы. Игрок L делает предложение x , а игрок M — предложение y ; x и y — произвольные действительные числа.

Для достижения соглашения между игроками используется арбитражная схема Фарбера [1]. Если $x \leq y$, то конфликта нет и игроки соглашаются на выплату жалованья, равного $\frac{x+y}{2}$. Если же $x > y$, стороны апеллируют к арбитру A . Обозначим решение арбитра через z . Тогда из предложений x и y

¹ Текст приводится в соответствии с изданием «Математическая теория игр и ее приложения. – 2009. – Т. 1. № 4. – С. 78–92».

² Александр Эммануилович Менчер, кандидат физико-математических наук, доцент (MentcherAE@zabspu.ru).

выбирается то, которое ближе к точке z . В такой игре функция выигрыша есть математическое ожидание случайной величины $H_z(x, y) : H(x, y) = EH_z(x, y)$, где

$$H_z(x, y) = \begin{cases} \frac{x+y}{2}, & \text{если } x \leq y, \\ x, & \text{если } x > y, |x-z| < |y-z|, \\ y, & \text{если } x > y, |x-z| > |y-z|, \\ z, & \text{если } x > y, |x-z| = |y-z|. \end{cases}$$

Пусть $-\infty < y \leq 0 \leq x < +\infty$, а z – дискретная случайная величина. Если $z = 0$ с вероятностью, равной 1, то, очевидно, что точкой равновесия в игре является пара чистых стратегий $(0, 0)$. В статьях [2], [3] для случаев, когда z с равной вероятностью принимает значения -1 и 1 , либо $-1, 0$ и 1 , соответственно, найдено равновесие в смешанных стратегиях.

В настоящей работе рассматриваются ситуации, в которых предложения арбитра сосредоточены в трех и четырех точках и имеют неравномерное распределение. В обоих рассматриваемых случаях будем искать равновесие в игре среди смешанных стратегий. Обозначим через $f(x)$ и $g(y)$ смешанные стратегии игроков L и M , соответственно. Имеем:

$$f(x) \geq 0, \int_0^{+\infty} f(x)dx = 1; g(y) \geq 0, \int_{-\infty}^0 g(y)dy = 1.$$

Благодаря симметрии, цена игры равна нулю, а оптимальные стратегии симметричны относительно оси ординат, то есть: $g(y) = f(-y)$. Следовательно, достаточно построить оптимальную стратегию только для одного из игроков, например, L .

1. Оптимальные стратегии при трех предложениях

Пусть арбитр выбирает одно из трех значений: $-1, 0, 1$, соответственно, с вероятностями $\frac{1-p}{2}, p, \frac{1-p}{2}$. Случаи $p = 1, p = 0$ и $p = \frac{1}{3}$ отмечены во введении.

Мы будем искать равновесие в игре в общем случае: $0 < p < 1$.

Теорема 1. Если $p \in [p_0, 1)$, где p_0 – положительный корень уравнения $p^4 + 8p^3 + 4p^2 + 4p - 1 = 0$, то для игрока L оптимальной является стратегия

$$(1) \quad f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq x < c, \\ \frac{1+p}{4p} \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{x^3}}, & \text{если } c < x < c+2, \\ 0, & \text{если } c+2 \leq x < +\infty, \end{cases}$$

$$\text{где } c = \frac{(1-p)^2}{2p}.$$

Доказательство. Будем искать оптимальную стратегию для игрока L в следующей форме:

$$(2) \quad f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq x < c, \\ \varphi(x), & \text{если } c < x < c+2, \\ 0, & \text{если } c+2 \leq x < +\infty, \end{cases}$$

где функция $\varphi(x)$ положительна и непрерывно дифференцируема в интервале $(c, c+2)$. Обозначим через $H(f(x), y)$ функцию выигрыша игрока M при выбранной игроком L стратегии $f(x)$. Функция $H(f(x), y)$ непрерывна на всей полуоси $(-\infty, 0]$. Стратегия (2) будет оптимальной, если $H(f(x), y) = 0$ для $y \in [-(c+2), -c]$ и $H(f(x), y) \geq 0$ для $y \in (-\infty, -(c+2)) \cup (-c, 0]$.

Пусть $y \in [-(c+2), -c]$, тогда $-y \in [c, c+2]$ и

$$(3) \quad H(f(x), y) = \frac{1-p}{2}y + p \left[\int_c^{-y} x f(x) dx + \int_{-y}^{c+2} y f(x) dx \right] + \frac{1-p}{2} \int_c^{c+2} x f(x) dx.$$

Если теперь $f(x)$ – оптимальная стратегия, то из (3) получаем

$$H(f(x), -c - 0) = -\frac{1+p}{2}c + \frac{1-p}{2} \int_c^{c+2} xf(x)dx = 0,$$

$$H(f(x), -(c+2) + 0) = -\frac{1-p}{2}(c+2) + \frac{1+p}{2} \int_c^{c+2} xf(x)dx = 0,$$

откуда следуют соотношения для математического ожидания стратегии $f(x)$:

$$(4) \quad \int_c^{c+2} xf(x)dx = \frac{1-p}{1+p}(c+2) = \frac{1+p}{1-p}c = \sqrt{c(c+2)}.$$

Далее, для оптимальности стратегии $f(x)$ необходимо, чтобы $H'(f(x), y) = H''(f(x), y) = 0$ в интервале $(-(c+2), -c)$. Имеем:

$$(5) \quad H'(f(x), y) = \frac{1-p}{2} + p \left[2yf(-y) + \int_{-y}^{c+2} f(x)dx \right],$$

$$(6) \quad H''(f(x), y) = p(3f(-y) - 2yf'(-y)),$$

откуда приходим к уравнению

$$3f(-y) - 2yf'(-y) = 0.$$

Положим $x = -y$, тогда $x \in (c, c+2)$, $f(x) = \varphi(x)$ и

$$3\varphi(x) + 2x\varphi'(x) = 0.$$

Решением этого уравнения является функция

$$(7) \quad \varphi(x) = \frac{\alpha}{\sqrt{x^3}}.$$

Определим константы c и α . Из (5) получаем

$$0 = H'(f, -c - 0) = \frac{1+p}{2} - \frac{2\alpha p}{\sqrt{c}},$$

$$0 = H'(f, -(c+2) + 0) = \frac{1-p}{2} - \frac{2\alpha p}{\sqrt{c+2}}.$$

Тогда

$$(8) \quad c = \frac{(1-p)^2}{2}, \alpha = \frac{1+p}{4p} \sqrt{c}.$$

Из (2), (7) и (8) следует, что $f(x)$ имеет вид (1).

Проверим выполнение условий оптимальности.

Пусть $y \in [-(c+2), -c]$. Так как при построении стратегии $f(x)$ были использованы равенства $H''(f(x), y) = 0$ в интервале $(-(c+2), -c)$, $H'(f(x), -c-0) = 0$ и $H(f(x), -c-0) = 0$, то в силу непрерывности функции $H(f(x), y)$ заключаем, что $H(f(x), y) = 0$ при $y \in [-(c+2), -c]$.

Исследуем теперь поведение функции $H(f(x), y)$ вне отрезка $[-(c+2), -c]$.

Пусть $y \in (-\infty, -(c+4)]$, тогда $-y \in [(c+4), +\infty)$ и

$$H(f(x), y) = \int_c^{c+2} xf(x)dx = \sqrt{c(c+2)} = \frac{1-p^2}{2p} > 0.$$

Пусть $y \in [-(c+4), -(c+2)]$, тогда $-y \in [c+2, c+4]$, $-2-y \in [c, c+2]$ и

$$H(f(x), y) =$$

$$\frac{1-p}{2} \left[\int_c^{-2-y} xf(x)dx + \int_{-2-y}^{c+2} yf(x)dx \right] + \frac{1+p}{2} \int_c^{c+2} xf(x)dx,$$

$$\begin{aligned} H'(f(x), y) &= \frac{1-p}{2} \left[2(1+y)f(-2-y) + \int_{-2-y}^{c+2} f(x)dx \right] = \\ &= -\frac{(1-p^2)\sqrt{c}}{4p} \left[\frac{1}{\sqrt{(-2-y)^3}} + \frac{1}{\sqrt{c+2}} \right]. \end{aligned}$$

Так как $H(f(x), -(c+2)-0) = 0$ и $H'(f(x), y) < 0$ в интервале $(-(c+4), -(c+2))$, то $H(f(x), y) > 0$ при $y \in [-(c+4), -(c+2)]$.

Пусть $y \in [-c, -(c-2)] \cap [-c, 0]$, тогда $-y \in [c-2, c] \cap [0, c]$,
 $2-y \in [c, c+2] \cap [2, c+2]$ и

$$H(f(x), y) = \frac{1+p}{2} + \frac{1-p}{2} \left[\int_c^{2-y} xf(x)dx + \int_{2-y}^{c+2} yf(x)dx \right],$$

$$H'(f(x), y) = \frac{1+p}{2} + \frac{1-p}{2} \left[2(-1+y)f(2-y) + \int_{2-y}^{c+2} f(x)dx \right] =$$

$$= \frac{1+p}{2} + \frac{(1-p^2)\sqrt{c}}{4p} \left[\frac{1}{\sqrt{(2-y)^3}} - \frac{1}{\sqrt{c+2}} \right].$$

Далее, так как $H(f(x), -c+0) = 0$, а функция $H'(f(x), y)$ является строго возрастающей, то, если $H'(f(x), -c+0) \geq 0$, то $H(f(x), y) > 0$ при $y \in (-c, -(c-2)] \cap (-c, 0]$.

Имеем:

$$H'(f(x), -c+0) = \frac{1+p}{2} + \frac{(1-p^2)\sqrt{c}}{4p} \left[\frac{1}{\sqrt{(c+2)^3}} - \frac{1}{\sqrt{c+2}} \right] =$$

$$= \frac{p^2 + 4p - 1}{4p} + \frac{(1-p)^2}{2(1+p)^2} = \frac{p^4 + 8p^3 + 4p^2 + 4p - 1}{4p(1+p)^2}.$$

Для дальнейшего исследования заметим, что функция $c = c(p) = \frac{(1-p)^2}{2p}$ строго убывает в интервале $(0, 1)$.

Если $p^2 + 4p - 1 \geq 0$, то $p \geq \sqrt{5} - 2$, $0 < c \leq \sqrt{5} - 1 < 2$, $H'(f(x), -c+0) > 0$ и исследование условий оптимальности окончено.

Пусть теперь $p^2 + 4p - 1 < 0$. Рассмотрим функцию $F(p) = p^4 + 8p^3 + 4p^2 + 4p - 1$ на отрезке $[0, 1]$. Так как $F(0) = -1 < 0$, $F(1) = 16 > 0$ и $F'(p) = 4p^3 + 24p^2 + 8p + 4 > 0$, то существует единственная точка $p_0 \in (0, 1)$ такая, что $F(p_0) = 0$, $F(p) < 0$ при $p \in (0, p_0)$ и $F(p) > 0$ при $p \in (p_0, 1)$.

Уточним границы для констант p_0 и c . В самом деле, если $c \geq 2$, то $p \leq 3 - 2\sqrt{2}$. Имеем: $F(3 - 2\sqrt{2}) = 1448 - 1024\sqrt{2} \approx -0,15468786 < 0$.

Так как, очевидно, что $F(\sqrt{5} - 2) > 0$, то $p_0 \in (3 - 2\sqrt{2}, \sqrt{5} - 2)$ и $c \in (0, 2)$ при $p \in (p_0, 1)$.

Таким образом, $[-c, -(c-2)] \cap [-c, 0] = [-c, 0]$. Легко проверить, что $p_0 \in (\frac{1}{6}, \frac{1}{5}) \subset (3 - \sqrt{2}, \sqrt{5} - 2)$. Окончательно заключаем, что $H(f(x), y) > 0$ для $y \in (-\infty, -(c+2)) \cup (-c, 0]$ и теорема доказана.

2. Оптимальные стратегии при четырех предложениях

Пусть арбитр выбирает одно из четырех значений: $-3, -1, 1, 3$, соответственно, с вероятностями $\frac{1}{2} - p, p, p, \frac{1}{2} - p$. Ясно, что $0 \leq p \leq \frac{1}{2}$. Случай $p = \frac{1}{2}$ отмечен во введении, а случай $p = 0$ приводит к аналогичным результатам, так что мы будем искать равновесие в игре в ситуации, где $0 < p < \frac{1}{2}$.

Теорема 2. Если $p \in (p_0, \frac{1}{2})$, где p_0 – положительный корень уравнения $32p^5 + 16p^4 + 24p^3 + 8p^2 - 8p + 1 = 0$ из интервала $(\frac{1}{\sqrt{35}}, \frac{1}{5})$, то для игрока L оптимальной является стратегия

$$(9) \quad f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq x < c, \\ \frac{\sqrt{c+1}}{4p\sqrt{(x+1)^3}}, & \text{если } c < x < c+2, \\ \frac{\sqrt{c+3}}{4p\sqrt{(x-1)^3}}, & \text{если } c+2 < x < c+4, \\ 0, & \text{если } c+4 \leq x < +\infty, \end{cases}$$

где $c = \frac{\sqrt{p^2 + 1}}{p} - 2$.

Доказательство. Будем искать оптимальную стратегию для игрока L в следующей форме:

$$(10) \quad f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq x < c, \\ \varphi(x), & \text{если } c < x < c + 2, \\ \psi(x), & \text{если } c + 2 < x < c + 4, \\ 0, & \text{если } c + 4 \leq x < +\infty, \end{cases}$$

где функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ положительны и непрерывно дифференцируемы в соответствующих интервалах. Обозначим через $H(f(x), y)$ функцию выигрыша игрока M при выбранной игроком L стратегии $f(x)$. Функция $H(f(x), y)$ непрерывна на всей полуоси $(-\infty, 0]$. Стратегия (10) будет оптимальной, если $H(f(x), y) = 0$ для $y \in [-(c + 4), -c]$ и $H(f(x), y) \geq 0$ для $y \in (-\infty, -(c + 4)) \cup (-c, 0]$

Пусть $y \in [-(c + 4), -(c + 2)]$, тогда $-y \in [c + 2, c + 4]$, $-2 - y \in [c, c + 2]$ и

$$(11) \quad H(f(x), y) = \left(\frac{1}{2} - p\right) y + p \left(\int_c^{-2-y} x f(x) dx + \int_{-2-y}^{c+4} y f(x) dx \right) + \frac{1}{2} \int_c^{c+4} x f(x) dx.$$

Если теперь $f(x)$ – оптимальная стратегия, то из (11) получаем

$$\begin{aligned} H(f(x), -(c + 2) - 0) &= \\ &= -\left(\frac{1}{2} - p\right) (c + 2) - p(c + 2) + \frac{1}{2} \int_c^{c+4} x f(x) dx = 0, \end{aligned}$$

откуда следует равенство для математического ожидания стратегии $f(x)$:

$$(12) \quad \int_c^{c+4} x f(x) dx = c + 2.$$

Далее, для оптимальности стратегии $f(x)$ необходимо, чтобы $H'(f(x), y) = H''(f(x), y) = 0$ в интервале $(-(c + 4), -(c + 2))$.
Имеем:

$$(13) \quad H'(f(x), y) = \frac{1}{2} - p + p \left(2(1+y)f(-2-y) + \int_{-2-y}^{c+4} f(x)dx \right),$$

$$(14) \quad H''(f(x), y) = p(3f(-2-y) - 2(1+y)f'(-2-y)),$$

откуда приходим к уравнению

$$3f(-2-y) - 2(1+y)f'(-2-y) = 0.$$

Положим $x = -2 - y$, тогда $x \in [c, c + 2]$, $f(x) = \varphi(x)$ и

$$3\varphi(x) + 2(x + 1)\varphi'(x) = 0.$$

Решением этого уравнения является функция

$$(15) \quad \varphi(x) = \frac{\alpha}{\sqrt{(x + 1)^3}}.$$

Определим константу α . Из (13) получаем

$$0 = H'(f(x), -(c + 2) - 0) = \frac{1}{2} - \frac{2\alpha p}{\sqrt{c + 1}},$$

Тогда

$$(16) \quad \alpha = \frac{\sqrt{c + 1}}{4p}.$$

Далее, пусть $y \in [-(c + 2), -c]$, тогда $-y \in [c, c + 2]$, $2 - y \in [c + 2, c + 4]$ и

$$(17) \quad H(f(x), y) = \frac{1}{2}y + p \left(\int_c^{2-y} xf(x)dx + \int_{2-y}^{c+4} yf(x)dx \right) + \left(\frac{1}{2} - p \right) \int_c^{c+4} f(x)dx.$$

Имеем:

$$(18) \quad H'(f(x), y) = \frac{1}{2} + p \left(2(-1 + y)f(2 - y) + \int_{2-y}^{c+4} f(x)dx \right),$$

(19) $H''(f(x), y) = p(3f(2 - y) - 2f(-1 + y)f'(2 - y))$,
откуда приходим к уравнению

$$3f(2 - y) - 2(-1 + y)f'(2 - y) = 0.$$

Положим $x = 2 - y$, тогда $x \in [c + 2, c + 4]$, $f(x) = \psi(x)$ и

$$3\psi(x) + 2(x - 1)\psi'(x) = 0.$$

Решением этого уравнения является функция

$$(20) \quad \psi(x) = \frac{\beta}{\sqrt{(x - 1)^3}}.$$

Определим константу β . Из (18) получаем

$$0 = H'(f(x), -(c + 2) - 0) = \frac{1}{2} - \frac{2p\beta}{\sqrt{c + 3}},$$

тогда

$$(21) \quad \beta = \frac{\sqrt{c + 3}}{4p}.$$

Найдем константу c . Имеем:

$$1 = \int_c^{c+4} xf(x)dx = \int_c^{c+2} \frac{\sqrt{c+1}}{4p\sqrt{(x-4)^3}} dx + \int_{c+2}^{c+4} \frac{\sqrt{c+3}}{4p\sqrt{(x-1)^3}} dx,$$

откуда

$$\sqrt{\frac{c+3}{c+1}} - \sqrt{\frac{c+1}{c+3}} = 2p.$$

Полагая $t = \sqrt{\frac{c+1}{c+3}}$, приходим к квадратному уравнению

$t^2 + 2pt - 1 = 0$, положительный корень которого равен $\sqrt{p^2 + 1} - p$. Наконец,

$$(22) \quad c = \frac{\sqrt{p^2 + 1}}{p} - 2.$$

Отметим, что функция $c = c(p)$ строго убывает на полуоси $(0, +\infty)$. Так как по условию задачи $p < \frac{1}{2}$, то $c(p) > c(\frac{1}{2}) = \sqrt{5} - 2 > 0$.

Проверим выполнение условий оптимальности.

Пусть $y \in [-(c+4), -(c+2)]$. Так как при построении стратегии $f(x)$ были использованы равенства $H''(f(x), y) = 0$ в интервале $(-(c+4), -(c+2))$, $H'(f(x), -(c+2)-0) = 0$ и $H(f(x), -(c+2)-0) = 0$, то в силу непрерывности функции $H(f(x), y)$ заключаем, что $H(f(x), y) = 0$ при $y \in [-(c+4), -(c+2)]$. Аналогично приходим к выводу, что $H(f(x), y) = 0$ при $y \in [-(c+2), -c]$.

Исследуем теперь поведение функции $H(f(x), y)$ вне отрезка $[-(c+4), -c]$.

Пусть $y \in (-\infty, -(c+10)]$, тогда $-y \in [c+10, +\infty)$ и

$$H(f(x), y) = \int_c^{c+4} xf(x)dx = c+2 = \frac{\sqrt{p^2+1}}{p} > 0.$$

Пусть $y \in [-(c+10), -(c+8)]$, тогда $-y \in [c+8, c+10]$, $-6-y \in [c+2, c+4]$ и

$$H(f(x), y) = \left(\frac{1}{2} - p\right) \left[\int_c^{-6-y} xf(x)dx + \int_{-6-y}^{c+4} yf(x)dx \right] + \left(\frac{1}{2} + p\right) \int_c^{c+4} xf(x)dx,$$

$$H'(f(x), y) = \left(\frac{1}{2} - p\right) \left[2(3+y)f(-6-y) + \int_{-6-y}^{c+4} f(x)dx \right] =$$

$$= -\left(\frac{1}{2} - p\right) \frac{\sqrt{c+3}}{2p} \left(\frac{4}{\sqrt{(-7-y)^3}} + \frac{1}{\sqrt{c+3}} \right) < 0.$$

Пусть $y \in [-(c + 8), -(c + 6)]$, тогда $-y \in [c + 6, c + 8]$,
 $-6 - y \in [c, c + 2]$ и

$$H(f(x), y) = \left(\frac{1}{2} - p\right) \left[\int_c^{-6-y} xf(x)dx + \int_{-6-y}^{c+4} yf(x)dx \right] + \\ + \left(\frac{1}{2} + p\right) \int_c^{c+4} xf(x)dx,$$

$$H'(f(x), y) = \left(\frac{1}{2} - p\right) \left[2(3 + y)f(-6 - y) + \int_{-6-y}^{c+4} f(x)dx \right] = \\ = \left(\frac{1}{2} - p\right) \frac{1}{2p} \left[(2p - 1) - \frac{2\sqrt{c+1}}{\sqrt{(-5-y)^3}} \right] < 0.$$

Пусть $y \in [-(c + 6), -(c + 4)]$, тогда $-y \in [c + 4, c + 6]$,
 $-2 - y \in [c + 2, c + 4]$ и

$$H(f(x), y) = \left(\frac{1}{2} - p\right) y + p \left[\int_c^{-2-y} xf(x)dx + \int_{-2-y}^{c+4} yf(x)dx \right] + \\ + \frac{1}{2} \int_c^{c+4} xf(x)dx,$$

$$H'(f(x), y) = \left(\frac{1}{2} - p\right) + p \left[2(1 + y)f(-2 - y) + \int_{-2-y}^{c+4} f(x)dx \right] = \\ = -p - \frac{\sqrt{c+3}}{\sqrt{(-3-y)^3}} < 0.$$

Так как $H(f(x), -(c+4)-0) = 0$, то функция $H(f(x), y) > 0$
на полуоси $(-\infty, -(c + 4))$.

Далее, пусть $y \in [-c, -(c-2)] \cap [-c, 0]$, тогда $-y \in [c-2, c] \cap [0, c]$, $2-y \in [c, c+2] \cap [2, c+2]$ и

$$H(f(x), y) = \frac{1}{2}y + p \left[\int_c^{2-y} xf(x)dx + \int_{2-y}^{c+4} yf(x)dx \right] + \left(\frac{1}{2} - p \right) \int_c^{c+4} xf(x)dx,$$

$$\begin{aligned} H'(f(x), y) &= \frac{1}{2} + p \left[2(-1+y)f(2-y) + \int_{2-y}^{c+4} f(x)dx \right] = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left[(2p-1) + \frac{2\sqrt{c+1}}{\sqrt{(3-y)^3}} \right] = p + \frac{\sqrt{c+1}}{\sqrt{(3-y)^3}} > 0. \end{aligned}$$

Если $c \leq 2$, то исследование окончено; при этом $p \in \left[\frac{1}{\sqrt{15}}, \frac{1}{2} \right)$.

Пусть теперь $p \in \left(0, \frac{1}{\sqrt{15}} \right)$, тогда $c > 2$ и пусть $y \in [-(c-2), -(c-4)] \cap [-(c-2), 0]$, тогда $-y \in [c-4, c-2] \cap [0, c-2]$, $6-y \in [c+2, c+4] \cap [6, c+4]$ и

$$H(f(x), y) = \left(\frac{1}{2} + p \right) y + \left(\frac{1}{2} - p \right) \left[\int_c^{6-y} xf(x)dx + \int_{6-y}^{c+4} yf(x)dx \right],$$

$$\begin{aligned} H'(f(x), y) &= \frac{1}{2} + p + \left(\frac{1}{2} - p \right) \left[2(-3+y)f(6-y) + \int_{6-y}^{c+4} f(x)dx \right] = \\ &= 1 + p - \frac{1}{4p} + \frac{1-2p}{2p} \frac{\sqrt{c+3}}{\sqrt{(5-y)^3}}. \end{aligned}$$

Так как $H'(f(x), y)$ строго возрастает в области задания, то $H'(f(x), y) > H'(f(x), -(c-2) + 0)$. Имеем:

$$H'(f(x), -(c-2) + 0) = \frac{4p^2 + 4p - 1}{4p} + \frac{1 - 2p}{2p(c+3)}.$$

Пусть $4p^2 + 4p - 1 \geq 0$, тогда $p \geq \frac{\sqrt{2} - 1}{2}$,
 $c \leq c\left(\frac{\sqrt{2} - 1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}}{\sqrt{2} - 1} - 2 = 2\sqrt{2} + 1 < 4$, $[-(c-2), -(c-4)] \cap [-(c-2), 0] = [-(c-2), 0]$ и исследование окончено.

Рассмотрим случай $p \in \left(0, \frac{\sqrt{2} - 1}{2}\right)$. Решим неравенство

$$H'(f(x), -(c-2) + 0) \geq 0.$$

Имеем:

$$1 + p - \frac{1}{4p} + \frac{1 - 2p}{2} \left(\sqrt{p^2 - 1} - p\right) \geq 0,$$

$$\frac{1 - 2p}{2} \sqrt{p^2 + 1} \geq \frac{(1 - 2p)p}{2} - 1 - p + \frac{1}{4p},$$

$$(2p(1 - 2p)\sqrt{p^2 + 1})^2 \geq [2p^2(1 - 2p) - 4p - 4p^2 + 1]^2$$

и, наконец,

$$-32p^5 - 16p^4 - 24p^3 - 8p^2 + 8p - 1 \geq 0.$$

Исследуем поведение функции $F(p) = -32p^5 - 16p^4 - 24p^3 - 8p^2 + 8p - 1$ на отрезке $\left[0, \frac{\sqrt{2} - 1}{2}\right]$. Имеем: $F(0) = -1 < 0$,

$$F\left(\frac{\sqrt{2} - 1}{2}\right) > 0,$$

$$F'(p) = -160p^4 - 64p^3 - 72p^2 - 16p + 8,$$

$$F''(p) = -640p^3 - 192p^2 - 144p - 16 < 0.$$

Следовательно, $F'(p)$ строго убывает на отрезке $[0, \frac{\sqrt{2}-1}{2}]$ и, если $F'(\frac{\sqrt{2}-1}{2}) > 0$, то $F'(p) > 0$ на этом отрезке и функция $F(p)$ строго возрастает. Имеем: $F'(\frac{\sqrt{2}-1}{2}) = -152 + 108\sqrt{2} \approx 0,735 > 0$.

Далее, из неравенства $c \leq 4$ следует, что $p \geq \frac{1}{\sqrt{35}}$. Найдем $F(\frac{1}{\sqrt{35}})$: $F(\frac{1}{\sqrt{35}}) = \frac{8928 - 1521\sqrt{35}}{35^2\sqrt{35}} < 0$.

Тогда существует точка $p_0 \in (\frac{1}{\sqrt{35}}, \frac{\sqrt{2}-1}{2})$ такая, что $F(p_0) = 0$, $F(p) < 0$ при $p \in (\frac{1}{\sqrt{35}}, p_0)$ и $F(p) > 0$ при $p \in (p_0, \frac{\sqrt{2}-1}{2})$.

Наконец, заметим, что $F(\frac{1}{5}) > 0$. Таким образом, $p_0 \in (\frac{1}{\sqrt{35}}, \frac{1}{5})$ и, поскольку $c < 4$, то $[-(c-2), -(c-4)] \cap [-(c-2), 0] = [-(c-2), 0]$ и исследование окончено.

Так как $H(f(x), -c+0) = 0$, то для $p \in (p_0, 1)$ функция $H(f(x), y) > 0$ при $y \in (-c, 0]$. Теорема доказана.

Литература

1. FARBER H. *An analysis of final-offer arbitration* // Journal of conflict resolution. – 1980. – Vol. 35. – P. 683–705.
2. MAZALOV V.V., ZABELIN A.A., KARPIN A.S. *Equilibrium in arbitration game* // Probabilistic Methods in Discrete Mathematics. – 2002. – P. 41–46.

3. MAZALOV V.V., MENTCHER A.E., TOKAREVA J.S. *On a discrete arbitration procedure in three points*// Game Theory and Applications. – 2005. – Vol. XI. – P. 87–91.

DISCRETE ARBITRATION PROCEDURE WITH NONUNIFORM DISTRIBUTION

Alexsander Mentcher, Faculty of Physics and Mathematics,
Zabaikalsky State Humanitarian Pedagogical University named after
N. Tchernishevsky, Chita, Cand. Sc., docent
(MentcherAE@zabspu.ru)

Abstract: We consider a zero-sum game related to an arbitration scheme. The arbitrator's offers are concentrated in three or four points with nonuniform distribution. The equilibrium in mixed strategies is derived.

Keywords: arbitration scheme, discrete distribution, mixed strategies, equilibrium.

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии А. А. Печниковым*

УДК 517.977.8+519.834

ББК 22.18

УСТОЙЧИВЫЙ ВЕКТОР ШЕПЛИ В КООПЕРАТИВНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕРРИТОРИАЛЬНОГО ЭКОЛОГИЧЕСКОГО ПРОИЗВОДСТВА^{1 2}

Зенкевич Н.А.³,

(Санкт-Петербургский государственный университет, Высшая
школа менеджмента, Санкт-Петербург)

Козловская Н.В.⁴

(Санкт-Петербургский государственный университет,
Факультет прикладной математики – процессов управления,
Санкт-Петербург)

В статье исследована теоретико-игровая модель территориального экологического производства. Процесс управления выбросами моделируется неантагонистической дифференциальной игрой. Предложен устойчивый механизм перераспределения прибыли в случае кооперации предприятий с целью уменьшения общего загрязнения окружающей среды. Найдено абсолютное равновесие по Нэшу. В качестве кооперативного решения игры построен и исследован устойчивый вектор Шепли, который обладает свойствами динамической устойчивости, стратегической устойчивости и устойчивости против иррационального поведения. Приведен численный пример.

Ключевые слова: дифференциальная игра, кооперативная игра,

¹ Работа выполнена по тематическому плану фундаментальных научно-исследовательских работ ВШМ, СПбГУ (проект № 16.0.116.2009) при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 08-1-00301-а).

² Текст приводится в соответствии с изданием «Математическая теория игр и ее приложения. – 2010. – Т. 2. № 1. – С. 67–92».

³ Николай Анатольевич Зенкевич, кандидат физико-математических наук, доцент (zenkevich@gsom.spb.ru).

⁴ Надежда Владимировна Козловская, аспирант (kkn@yandex.ru).

динамическое программирование, уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана, вектор Шепли, равновесие по Нэшу, абсолютное равновесие, устойчивость кооперативного решения, динамическая устойчивость, стратегическая устойчивость, устойчивость против иррационального поведения.

Введение

В статье исследована теоретико-игровая модель территориального экологического производства, которая основана на работе Л.А. Петросяна и Г. Заккура [8]. В статье [8] моделировалось международное экологическое соглашение, результатом которого явилось динамически устойчивое (состоятельное во времени) распределение совокупных затрат при условии снижения общего уровня загрязнения. Затраты складывались из двух составляющих: выраженный в денежном эквиваленте экономический ущерб, включающий материальный ущерб, ущерб здоровью граждан и окружающей среде, и затраты на снижение выбросов с максимального уровня до некоторого допустимого. Такая постановка оправдана и логична, когда речь идет о межгосударственных соглашениях, направленных на заботу о благосостоянии и экологической безопасности граждан.

В том случае, если экологические проблемы рассматриваются на региональном уровне, а участниками конфликтно-управляемого процесса являются непосредственные виновники загрязнения - промышленные предприятия, проведение природоохранных мероприятий и плата за нанесенный ущерб окружающей среде остаются важнейшими задачами наряду с получением прибыли от хозяйственной деятельности.

В настоящее время мы наблюдаем недостаточную эффективность рыночного механизма применительно к ресурсам общего пользования, таким как вода и воздух. В данной работе мы рассматриваем процесс регулирования выбросов в атмосферу, в результате которого издержки внешнего эффекта переносятся на его виновника. Такой процесс называется интернализацией [4]. Несмотря на то, что экологическое регулирование является слож-

ной системой инструментов управления, которая включает различные рычаги, стимулы, стандарты и нормативы, большинство известных механизмов неэффективно в силу специфичности самого объекта исследования.

В статье исследована проблема кооперативного социально-ответственного соглашения, когда предприятия добровольно принимают решения о дополнительном регулировании, в результате которого они существенно снижают объемы выбросов по сравнению с законодательно допустимым уровнем. Добровольный подход к экологическому регулированию успешно применяется в ряде экономически развитых стран [3]. Добровольное регулирование, как правило, приводит как к кооперации участников соглашения между собой, так и к сотрудничеству с государством. Ранее подобные модели экологического регулирования исследовались в работах [6], [11].

В работе [9] также исследовано расширение модели [8] на случай асимметрии игроков, что привело к существенным техническим усложнениям. В данной статье рассматривается задача, когда основная цель предприятий заключается не в минимизации затрат, а в максимизации прибыли. Для этого вводятся функция прибыли и функция цены, где последняя является обратной функцией спроса. Предполагается, что региональные предприятия конкурируют по Курно. В модели найдено равновесие по Нэшу [7], которое является абсолютным, т. е. оно остается равновесием по Нэшу в любой подыгре, начинающейся с любого промежуточного момента времени из любого начального состояния. Для нахождения регионального кооперативного соглашения специальным образом построена характеристическая функция игры и доказана её супераддитивность. Цель данного исследования – построение устойчивого механизма перераспределения прибыли при долгосрочной кооперации. В качестве кооперативного решения дифференциальной игры выбран динамический вектор Шепли [10], который оказывается устойчивым.

Используемая концепция устойчивости кооперативного решения восходит к работе [2], где выделены три свойства устой-

чивой кооперации: динамическая устойчивость (состоятельность во времени), стратегическая устойчивость и устойчивость против иррационального поведения. Первое свойство - это динамическая устойчивость кооперативного решения. Впервые понятие динамической устойчивости было введено Л.А. Петросяном в работе [1]. При этом решение является динамически устойчивым, если оно обладает таким свойством, что в каждый момент времени при движении вдоль оптимальной траектории игроки придерживаются заранее выбранного принципа оптимальности. Кооперативное решение является стратегически устойчивым в том случае, если индивидуальные отклонения игроков оказываются не выгодны, т. е. существует равновесие по Нэшу которое осуществляет поддержку данного кооперативного решения. Устойчивость от иррационального поведения должна рассматриваться, поскольку нет уверенности в том, что все участники кооперации будут вести себя рационально на всем продолжительном промежутке реализации кооперативного соглашения. Участники должны быть уверены, что даже в случае реализации наихудшего сценария (например, аннулирования кооперативного соглашения) их выигрыш будет не меньше, чем при изначальном некооперативном поведении.

1. Решение задачи в случае конкуренции предприятий

1.1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЗАДАЧИ

Предположим, что на региональном рынке n предприятий (игроков) производят однородный товар. Обозначим множество игроков через $I = \{1, 2, \dots, n\}$.

Обозначим также $q_i = q_i(t)$ – объем выпуска предприятия i в момент времени t . Будем предполагать, что цена товара $p = p(t)$ в каждый момент времени t имеет вид:

$$(1) \quad p(t) = a - bQ(t),$$

где $a > 0$, $b > 0$ – параметры, $Q(t) = \sum_{i=1}^n q_i(t)$ – общий объем выпуска продукции. Здесь функция цены $p(t)$ является функцией

обратной функции спроса:

$$Q = Q(t) = \frac{a - p(t)}{b}.$$

Производственные издержки предприятий предполагаются линейными:

$$C_i(q_i(t)) = cq_i(t), \quad c > 0, \quad i \in I.$$

Будем предполагать, что игра начинается в момент времени t_0 из начального состояния s_0 , где s_0 – это объем загрязнения в момент t_0 , и имеет неограниченную продолжительность. Обозначим через $e_i(t)$ – выбросы предприятия i в момент времени t . Предполагается, что выбросы линейно зависят от объема производства предприятия i :

$$(2) \quad e_i(q_i(t)) = \alpha q_i(t), \quad \alpha > 0.$$

Под параметром \bar{e}_i будем понимать норматив допустимого воздействия на окружающую среду, а именно показатель ПДВ (предельно допустимый выброс), определяющий максимально разрешенный уровень выбросов для предприятия i ⁵:

$$(3) \quad 0 \leq e_i(q_i(t)) \leq \bar{e}_i.$$

Из формулы (3) следует, что максимальный допустимый объем производства фирмы i равен:

$$q_i^{max} = \frac{\bar{e}_i}{\alpha},$$

тогда максимально допустимый общий объем выпуска равен:

$$Q^{max} = \frac{\bar{e}}{\alpha},$$

⁵ В соответствии с российским природоохранным законодательством, предельно допустимые выбросы разрабатываются самостоятельно каждым предприятием, а потом утверждаются региональным экологическим комитетом, поэтому их значения различны для каждого предприятия (Федеральный закон от 10.01.2002 «Об охране окружающей среды», ст. 23.).

где $\bar{e} = \sum_{i=1}^n \bar{e}_i$. Будем полагать, что параметры модели таковы, что верно неравенство:

$$a - c - \frac{b}{\alpha} \bar{e} \geq 0,$$

которое гарантирует неотрицательность цены (1).

Обозначим через $s = s(t)$ – общее загрязнение к моменту t . Предполагается, что динамика накопления загрязнения определяется дифференциальным уравнением:

$$(4) \quad \dot{s}(t) = \alpha \sum_{k=1}^n q_k(t) - \delta s(t), \quad s(t_0) = s_0,$$

где δ – коэффициент, определяющий долю природно поглощенного загрязнения, $\alpha > 0$ – параметр. Предполагается также, что кроме производственных издержек, каждое предприятие несет ещё два типа издержек, не связанных с основной деятельностью: издержки на природоохранные мероприятия и издержки на возмещение ущерба от загрязнения. Будем считать, что издержки на природоохранные мероприятия в момент времени t имеют вид:

$$E_i(t) = \frac{\gamma}{2} e_i(t)(2\bar{e}_i - e_i(t)) = \frac{\gamma}{2} \alpha q_i(2\bar{e}_i - \alpha q_i),$$

$$\gamma > 0, \quad 0 \leq e_i(t) \leq \bar{e}_i.$$

Понятно, что функция издержек $E_i(t)$ является возрастающей и достигает максимального значения в точке $q_i = \bar{e}_i$. Эта функция также выпукла вверх, что содержательно можно трактовать так: при снижении на единицу объема производства затраты на природоохранные мероприятия увеличиваются.

Будем считать, что издержки на возмещение ущерба от загрязнения линейно зависят от объема загрязнения:

$$D_i(s(t)) = \pi_i s(t), \quad \pi_i > 0, \quad i \in I.$$

Под ущербом от загрязнения будем понимать экономический ущерб, т. е. совокупность материального ущерба, ущерба здоровью граждан и ущерба, нанесенного окружающей среде производ-

ственной деятельностью, в денежном выражении. Будем предполагать, что каждое предприятие стремится максимизировать свою общую прибыль, дисконтированную на начальный момент t_0 :

$$(5) \quad \Pi_i(s_0, t_0; q) = \int_{t_0}^{\infty} e^{-\rho(t-t_0)} \{pq_i - C_i(q_i) - D_i(s) - E_i(q_i)\} dt,$$

где $q = q(t) = (q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t))$, $t \geq t_0$ – траектория выпуска продукции, а $0 < \rho < 1$ – процентная ставка.

1.2. ВЫЧИСЛЕНИЕ РАВНОВЕСИЯ ПО НЭШУ

В равновесии по Нэшу каждый игрок стремится максимизировать свою прибыль (5):

$$W(\{i\}, s, t) = \max_{q_i} \Pi_i(s, t; q) = \max_{q_i} \int_t^{\infty} e^{-\rho(\tau-t)} \{q_i(a - bQ) - cq_i - \pi_i s + \frac{\gamma}{2} \alpha q_i (\alpha q_i - 2\bar{e}_i)\} d\tau, \quad i \in I,$$

где динамика накопления загрязнения s задается (4). Для нахождения равновесия по Нэшу необходимо решить систему уравнений Гамильтона-Якоби-Беллмана. Обозначим функцию Беллмана для этой задачи через $W_i = W(\{i\}, s, t)$. Вышеупомянутая система уравнений может быть записана следующим образом:

$$(6) \quad \rho W_i = \max_{q_i} \{q_i(a - bQ) - cq_i - \pi_i s + \frac{\gamma \alpha^2}{2} q_i^2 - \gamma \alpha \bar{e}_i q_i + \frac{\partial W_i}{\partial s} (\alpha Q - \delta s)\}, \quad i \in I.$$

Дифференцируя правую часть формулы (6) по q_i и приравнявая производную нулю, находим:

$$P_i = a - bQ - bq_i - c + \gamma \alpha^2 q_i - \gamma \alpha \bar{e}_i + \alpha \frac{\partial W_i}{\partial s}.$$

Вычислим вторую производную P_i по q_i :

$$\frac{dP_i}{dq_i} = \gamma \alpha^2 - 2b.$$

Таким образом, максимум существует, когда $\gamma\alpha^2 < 2b$. Будем искать функции Беллмана W_i в линейной форме [5]:

$$(7) \quad W_i = A_i s + B_i.$$

Тогда

$$\frac{\partial W_i}{\partial s} = A_i.$$

Решая систему уравнений $P_i = 0$, $i \in I$ относительно q_i , находим:

$$\hat{q}_i^N = \frac{1}{b(n+1) - \alpha^2\gamma} \left(a - c - \frac{b\alpha(A - \gamma\bar{e})}{b - \alpha^2\gamma} \right) + \frac{\alpha A_i - \gamma\alpha\bar{e}_i}{b - \alpha^2\gamma}, \quad i \in I,$$

где $A = \sum_{j=1}^n A_j$, $\bar{e} = \sum_{j=1}^n \bar{e}_j$.

Тогда стратегии игроков в равновесии по Нэшу равны:

$$(8) \quad q_i^N = \begin{cases} 0, & \hat{q}_i^N < 0, \\ \hat{q}_i^N, & 0 \leq \hat{q}_i^N \leq \frac{\bar{e}_i}{\alpha}, \\ \frac{\bar{e}_i}{\alpha}, & \frac{\bar{e}_i}{\alpha} \leq \hat{q}_i^N. \end{cases}$$

В данном исследовании ограничимся случаем, когда $0 \leq q_i^N \leq \frac{\bar{e}_i}{\alpha}$. Будем предполагать, что параметры модели таковы, что $\hat{q}_i^N \in [0, \frac{\bar{e}_i}{\alpha}]$. Подставляя (7) в систему (6), находим:

$$A_i = -\frac{\pi_i}{\rho + \delta},$$

$$B_i = \frac{1}{\rho} \left((a - c)q_i^N - bq_i^N Q^N + \alpha A_i Q^N + \frac{\gamma\alpha^2}{2} (q_i^N)^2 - \gamma\alpha\bar{e}_i q_i^N \right),$$

где q_i^N определяются формулой (8), а $Q^N = \sum_{j=1}^n q_j^N$. Найдем теперь равновесную по Нэшу траекторию. Подставляя найденные стратегии игроков (8) в уравнение динамики (4) и решая его получаем:

$$s^N(t) = \left(s_0 - \frac{\alpha}{\delta} Q^N \right) e^{-\delta(t-t_0)} + \frac{\alpha}{\delta} Q^N,$$

где

$$(9) \quad Q^N = \frac{n(a - c) + \alpha A - \gamma\alpha\bar{e}}{b(n+1) - \alpha^2\gamma}.$$

В силу того, что равновесие по Нэшу является решением системы уравнений Гамильтона–Якоби–Беллмана, оно является абсолютным равновесием, т.е. остается таковым в любой подыгре с любыми начальными условиями.

2. Характеристическая функция кооперативной игры

Для построения кооперативного решения в задаче экологического производства определим характеристическую функцию $V(K, s, t)$ этой игры. Идея построения характеристической функции следующая (см. [8]). Когда значение характеристической функции вычисляется для коалиции K , то действия игроков из K представляют собой наилучший ответ на фиксированное равновесие по Нэшу. Данный подход к вычислению характеристической функции имеет свои недостатки и достоинства. Достоинство заключается в том, что такой подход позволяет существенно сократить число вычислительных операций по сравнению со стандартным подходом, когда $V(K, s, t)$ представляет собой максимальный гарантированный выигрыш коалиции K , если даже остальные игроки объединяются в дополнительную коалицию $I \setminus K$. Недостатком подхода является тот факт, что характеристическая функция, вычисленная таким образом, в общем случае не является супераддитивной.

2.1. ЗНАЧЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНОЙ КОАЛИЦИИ

Значение характеристической функции для произвольной коалиции K будем вычислять, решая уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана. Функция Беллмана $W(K, s, t)$ является решением сле-

дующей задачи максимизации:

$$(10) \quad W(K, s, t) = \max_{q_j \in K} \sum_{j \in K} \Pi_j(s, t; q) = \\ = \max_{q_j \in K} \sum_{j \in K} \int_t^{\infty} e^{-\rho(\tau-t)} \{q_i(a - bQ) - cq_i - \pi_i s + \\ + \frac{\gamma}{2} \alpha q_i (\alpha q_i - 2\bar{e}_i)\} d\tau,$$

где динамика задается формулой (4). Обозначим через $W_K = W(K, s, t)$ функцию Беллмана задачи (10). Решение задачи (10) эквивалентно решению следующего уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана:

$$(11) \quad \rho W_K = \max_{q_j \in K} \left\{ \sum_{j \in K} q_j(a - bQ) - c \sum_{j \in K} q_j - \sum_{j \in K} \pi_j s + \right. \\ \left. + \frac{\gamma \alpha^2}{2} \sum_{j \in K} q_j^2 - \gamma \alpha \sum_{j \in K} \bar{e}_j q_j + \frac{\partial W_K}{\partial s} (\alpha Q - \delta s) \right\}.$$

Для нахождения наилучших ответов игроков q_i^K , $i \in K$ найдем производную правой части уравнения (11) по q_i :

$$\frac{dP^K}{dq_i} = a - bQ - b \sum_{j \in K} q_j - c + \gamma \alpha^2 q_i - \gamma \alpha \bar{e}_i + \alpha \frac{\partial W_K}{\partial s}.$$

Вспомним, что игроки, не входящие в коалицию K , действуют согласно фиксированным равновесным по Нэшу стратегиям, т. е. $q_i^K = q_i^N$, $i \in I \setminus K$. Тогда q_i^K , $i \in K$ могут быть найдены из системы:

$$(12) \quad a - c - b \sum_{j \in I \setminus K} q_j^N - 2b \sum_{j \in K} q_j^K + \\ + \gamma \alpha^2 q_i - \gamma \alpha \bar{e}_i + \alpha \frac{\partial W_K}{\partial s} = 0, \quad i \in K.$$

Суммируя (12) по $i \in K$, находим:

$$(13) \quad \sum_{i \in K} q_i^K = \frac{1}{2bk - \alpha^2 \gamma} (k(a - c) - \gamma \alpha \bar{e}^K + \\ + \alpha k \frac{\partial W_K}{\partial s} - bk \sum_{j \in I \setminus K} q_j^N),$$

где $\bar{e}^K = \sum_{j \in K} \bar{e}_j$, $k = |K|$ – количество элементов в множестве K .

Подставляя (13) в (12), находим q_i^K :

$$(14) \quad q_i^K = -\frac{1}{\alpha^2 \gamma} (a - c - b \sum_{j \in I \setminus K} q_j^N - 2b \sum_{j \in K} q_j^K - \gamma \alpha \bar{e}_i + \alpha \frac{\partial W_K}{\partial s}),$$

где q_j^N определяются формулой (8).

Функцию Беллмана будем искать в линейной форме:

$$(15) \quad W_K = A_K s + B_K.$$

Подставляя (15) и (14) в уравнение (11), находим коэффициенты:

$$(16) \quad A_K = \frac{\partial W_K}{\partial s} = -\frac{\sum_{j \in K} \pi_j}{\rho + \delta},$$

$$B_K = \frac{1}{\rho} ((a - c) \sum_{j \in K} q_j^K - b \sum_{j \in K} q_j^K (\sum_{j \in K} q_j^K + \sum_{j \in I \setminus K} q_j^N) + \alpha A_K (\sum_{j \in K} q_j^K + \sum_{j \in I \setminus K} q_j^N) + \frac{\gamma \alpha^2}{2} \sum_{j \in K} (q_j^K)^2 - \gamma \alpha \sum_{j \in K} \bar{e}_j q_j^K).$$

Из (13), (8) и (14) получаем:

$$(17) \quad q_i^K = \frac{\bar{e}_i}{\alpha} + \frac{1}{2bk - \alpha^2 \gamma} \left(\frac{(a - c)(b(k + 1) - \alpha^2 \gamma)}{b(n + 1) - \alpha^2 \gamma} - \frac{\alpha b(A - \gamma \bar{e})(b(k + 1) - \alpha^2 \gamma)}{(b - \alpha^2 \gamma)(b(n + 1) - \alpha^2 \gamma)} + \frac{2b - \alpha^2 \gamma}{b - \alpha^2 \gamma} (\alpha A_K - \frac{b}{\alpha} \bar{e}^K) \right).$$

Если сформировалась коалиция K , то её траектория $s^K(t)$ имеет

вид:

$$(18) \quad s^K(t) = (s_0 - \frac{\alpha}{\delta}(q^K + \sum_{j \in I \setminus K} q_j^N))e^{-\delta(t-t_0)} + \frac{\alpha}{\delta}(q^K + \sum_{j \in I \setminus K} q_j^N),$$

где

$$q^K = \sum_{j \in K} q_j^K = \frac{1}{2bk - \alpha^2\gamma}(k(a - c) - \gamma\alpha\bar{e}^K + \alpha kA_K - bk \sum_{j \in I \setminus K} q_j^N).$$

2.2. ЗНАЧЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ ДЛЯ МАКСИМАЛЬНОЙ КОАЛИЦИИ

Рассмотрим теперь случай полной кооперации, т. е. случай, когда игроки объединяются в максимальную коалицию. Оптимальные (кооперативные) стратегии игроков q_i^I могут быть получены подстановкой соответствующих параметров в формулу (17):

$$q_i^I = \frac{\bar{e}_i}{\alpha} + \frac{1}{2bn - \alpha^2\gamma}(a - c + \alpha A - \frac{2b}{\alpha}\bar{e}).$$

Можно показать, что $0 \leq q_i^I \leq \frac{\bar{e}_i}{\alpha}$, если $0 \leq q_i^N \leq \frac{\bar{e}_i}{\alpha}$.

Оптимальная (кооперативная) траектория $s^I(t)$ имеет вид:

$$(19) \quad s^I(t) = (s_0 - \frac{\alpha}{\delta}Q^I)e^{-\delta(t-t_0)} + \frac{\alpha}{\delta}Q^I,$$

где

$$(20) \quad Q^I = \sum_{j \in I} q_j^I = \frac{n(a - c) + \alpha nA - \alpha\gamma\bar{e}}{2bn - \alpha^2\gamma}.$$

Функция Беллмана для максимальной коалиции имеет вид:

$$(21) \quad W_I(s, t) = W = As + B,$$

где

$$A = -\frac{\sum_{j \in I} \pi_j}{\rho + \delta},$$

$$B = \frac{1}{\rho}((a - c)Q^I - b(Q^I)^2 + \alpha A Q^I + \frac{\gamma\alpha^2}{2} \sum_{j \in I} (q_j^I)^2 - \gamma\alpha \sum_{j \in I} \bar{e}_j q_j^I).$$

Лемма 1. Если $Q^I, Q^N \geq 0$, то загрязнение в случае полной кооперации не больше, чем загрязнение в равновесии по Нэшу, т. е.

$$s^I(t) \leq s^N(t).$$

Доказательство. Из формул (9) и (20) очевидно, что $Q^N > Q^I$. Рассматривая разность, имеем:

$$s^N(t) - s^I(t) = \frac{\alpha}{\delta}(Q^N - Q^I)(1 - e^{-\delta(t-t_0)}) \geq 0.$$

Подытоживая результаты раздела 3, получаем явный вид характеристической функции кооперативной игры:

$$(22) \quad V(L, s, t) = \begin{cases} 0, & L = \emptyset \\ W(\{i\}, s, t), & L = \{i\} \\ W(I, s, t), & L = I \\ W(K, s, t), & L = K \end{cases},$$

где $W(\{i\}, s, t)$, $W(K, s, t)$, $W(I, s, t)$ задаются формулами (7), (15), (21).

3. Супераддитивность характеристической функции

Как уже отмечалось ранее, характеристическая функция (22) в общем случае не является супераддитивной. Поэтому проверка свойства супераддитивности является самостоятельной задачей. По причине громоздкости формул и выкладок при доказательстве в общем случае, приведем здесь доказательство теоремы о супераддитивности только для симметричного случая. Для доказательства будем предполагать, что:

$$e_i = \hat{e}, \quad A_i = \hat{A}, \quad i \in I.$$

Теорема 1. Характеристическая функция (22) удовлетворяет свойству супераддитивности, для любых $s = s(t)$ и $t \geq t_0$:

$$V(K \cup L, s, t) \geq V(K, s, t) + V(L, s, t), \quad K, L \subset I.$$

Доказательство.

Для доказательства свойства супераддитивности необходимо показать, что:

$$\begin{aligned} V(K \cup L, s, t) - V(K, s, t) - V(L, s, t) = \\ = A_{K \cup L} s^{K \cup L} - A_K s^K - A_L s^L + B_{K \cup L} - B_K - B_L \geq 0. \end{aligned}$$

Доказательство будем проводить в два этапа. Сначала докажем, что

$$(23) \quad A_{K \cup L} s^{K \cup L} - A_K s^K - A_L s^L \geq 0.$$

Для этого рассмотрим левую часть (23):

$$A_{K \cup L} s^{K \cup L} - A_K s^K - A_L s^L = A_K (s^{K \cup L} - s^K) + A_L (s^{K \cup L} - s^L).$$

Из формулы (18) следует, что

$$s^K = s_0 e^{-\delta(t-t_0)} + \frac{\alpha}{\delta} (q^K + q_{I \setminus K}) (1 - e^{-\delta(t-t_0)}),$$

где $q_{I \setminus K} = \sum_{j \in I \setminus K} q_j^N$. Тогда

$$\begin{aligned} s^{K \cup L} - s^K &= \frac{\alpha}{\delta} (1 - e^{-\delta(t-t_0)}) (q^{K \cup L} - q^K + q_{I \setminus (K \cup L)} - q_{I \setminus K}) = \\ &= \frac{\alpha}{\delta} (1 - e^{-\delta(t-t_0)}) \left(\sum_K q_j^{K \cup L} - \sum_K q_j^K + \sum_L q_j^{K \cup L} - \sum_L q_j^N \right). \end{aligned}$$

Пользуясь формулой (17), получаем:

$$\begin{aligned}
 \sum_K q_j^{KUL} - \sum_K q_j^K &= -\frac{klb(2b - \alpha^2\gamma)}{(2bk - \alpha^2\gamma)(2b(k+l) - \alpha^2\gamma)} \\
 &\quad \left(\frac{a - c}{b(n+1) - \alpha^2\gamma} - \frac{\alpha(A - \gamma\bar{e})}{(b - \alpha^2\gamma)(b(n+1) - \alpha^2\gamma)} \right) - \\
 &\quad - \frac{\alpha^2\gamma lk}{(2bk - \alpha^2\gamma)(2b(k+l) - \alpha^2\gamma)} \frac{2b - \alpha^2\gamma}{b - \alpha^2\gamma} \left(\alpha\hat{A} - \frac{b}{\alpha}\hat{e} \right) = \\
 &= -\frac{klb(2b - \alpha^2\gamma)}{(2bk - \alpha^2\gamma)(2b(k+l) - \alpha^2\gamma)} \left(\frac{a - c}{b(n+1) - \alpha^2\gamma} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\alpha(A - \gamma\bar{e})}{(b - \alpha^2\gamma)(b(n+1) - \alpha^2\gamma)} + \frac{\alpha^2\gamma}{b(b - \alpha^2\gamma)} \left(\alpha\hat{A} - \frac{b}{\alpha}\hat{e} \right) \right) = \\
 &= -\frac{klb(2b - \alpha^2\gamma)}{(2bk - \alpha^2\gamma)(2b(k+l) - \alpha^2\gamma)} \left(\frac{a - c}{b(n+1) - \alpha^2\gamma} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\alpha(A - \gamma\bar{e})}{(b - \alpha^2\gamma)(b(n+1) - \alpha^2\gamma)} + \frac{\alpha\hat{A} - \frac{b}{\alpha}\hat{e}}{b - \alpha^2\gamma} - \frac{\alpha\hat{A}}{b} + \frac{\hat{e}}{\alpha} \right) = \\
 &= -\frac{lb(2b - \alpha^2\gamma)}{(2bk - \alpha^2\gamma)(2b(k+l) - \alpha^2\gamma)} \left(q^K - \frac{\alpha\hat{A}}{b} \right) < 0.
 \end{aligned}$$

Аналогичным образом можно доказать, что

$$(24) \quad \sum_L q_j^{KUL} - \sum_L q_j^N < 0,$$

а значит и $s^{KUL} - s^K < 0$. Отсюда следует, что $A_K(s^{KUL} - s^K) > 0$ и, аналогично, $A_L(s^{KUL} - s^L) > 0$. Итак неравенство (23) доказано.

Далее докажем, что $B_{KUL} - B_K - B_L \geq 0$.

Рассмотрим разность, подставляя (16):

$$\begin{aligned}
 \rho(B_{KUL} - B_K - B_L) &= (a - c)(q^{KUL} - q^K - q^L) + \\
 &\quad \alpha A_{KUL}(q^{KUL} + q_{I \setminus (KUL)}) - \alpha A_K(q^K + q_{I \setminus K}) - \alpha A_L(q^L + q_{I \setminus L}) - \\
 &\quad bq^{KUL}(q^{KUL} + q_{I \setminus (KUL)}) + bq^K(q^K + q_{I \setminus K}) + bq^L(q^L + q_{I \setminus L}) + \\
 &\quad \frac{\gamma\alpha^2}{2} \left(\sum_{KUL} q_j^{KUL} \left(q_j^{KUL} - \frac{2\bar{e}_j}{\alpha} \right) - \sum_K q_j^K \left(q_j^K - \frac{2\bar{e}_j}{\alpha} \right) - \sum_L q_j^L \left(q_j^L - \frac{2\bar{e}_j}{\alpha} \right) \right).
 \end{aligned}$$

После некоторых упрощений, можно получить:

$$\begin{aligned} \rho(B_{K \cup L} - B_K - B_L) &= \alpha A_L \left(\frac{1}{2} \sum_K q_j^{K \cup L} + \frac{1}{2} q^K - q^K \right) + \\ &\alpha A_K \left(\frac{1}{2} \sum_L q_j^{K \cup L} + \frac{1}{2} q^L - q^L \right) + \frac{b}{2} \sum_K q_j^{K \cup L} (q^L - q^L) + \frac{b}{2} q^L (q^K - \\ &\sum_K q_j^{K \cup L}) + \frac{b}{2} \sum_L q_j^{K \cup L} (q^K - q^K) + \frac{b}{2} q^K (q^L - \sum_L q_j^{K \cup L}) \geq 0, \end{aligned}$$

что верно вследствие (24).

4. Устойчивость динамического вектора Шепли

4.1. КООПЕРАТИВНОЕ РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЫ

Пусть $s^I(t)$, $t \geq t_0$ - это оптимальная (кооперативная) траектория, максимизирующая сумму выигрышей игроков и игроки согласны разделить максимальный суммарный выигрыш $V(I, s_0, t_0)$ в соответствии с некоторым дележом. Предположим, что в качестве дележа был выбран динамический вектор Шепли:

$$Sh(s, t) = (Sh_1(s, t), Sh_2(s, t), \dots, Sh_n(s, t)),$$

компоненты которого определяются по формуле:

$$Sh_i(s, t) = \sum_{K \ni i} \frac{(n-k)!(k-1)!}{n!} [V(K, s, t) - V(K \setminus \{i\}, s, t)].$$

Здесь мы не приводим явный вид вектора Шепли для данной модели ввиду её чрезмерной громоздкости. При этом структура вектора Шепли имеет вид:

$$(25) \quad Sh_i(s, t) = A_i s(t) + B sh_i,$$

где коэффициент $B sh_i$ вычисляется как вектор Шепли в статической игре с характеристической функцией:

$$V(K) = B_K, \quad K \in I.$$

4.2. ДИНАМИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ВЕКТОРА ШЕПЛИ

Под динамически устойчивым кооперативным решением понимается такой дележ, который остается оптимальным в любой подыгре вдоль оптимальной траектории в соответствии с выбранным принципом оптимальности. Приведем строгие определения динамической устойчивости, следуя работе [8]. Для этого рассмотрим подыгры

$\Gamma(s^I(t), t)$ исходной игры с начальными условиями $(s^I(t), t)$ на оптимальной траектории и обозначим через $Sh_i(s^I(t), t)$ вектор Шепли, в соответствующей подыгре $\Gamma(s^I(t), t)$.

Определение 1. Вектор $\beta(t) = (\beta_1(t), \beta_2(t), \dots, \beta_n(t))$ называется процедурой распределения дележа (ПРД) в соответствии с вектором Шепли, если

$$Sh_i(s_0, t_0) = \int_{t_0}^{\infty} e^{-\rho(t-t_0)} \beta_i(t) dt, \quad i \in I.$$

Определение 2. Вектор $\beta(t) = (\beta_1(t), \beta_2(t), \dots, \beta_n(t))$ – динамически-устойчивая ПРД, если при любых начальных $(s^I(t), t)$, при любом $t \in [t_0, \infty)$ выполняется следующее условие:

$$(26) \quad Sh_i(s_0, t_0) = \int_{t_0}^t e^{-\rho(\tau-t_0)} \beta_i(\tau) d\tau + e^{-\rho(t-t_0)} Sh_i(s^I(t), t),$$

$$t \in [t_0, \infty), \quad i \in I.$$

Теорема 2. Вектор $\beta(t) = (\beta_1(t), \beta_2(t), \dots, \beta_n(t))$, где $\beta(t)$ задается формулой

$$\beta_i(t) = \rho Sh_i(s^I(t), t) - \frac{d}{dt} Sh_i(s^I(t), t)$$

– динамически-устойчивая ПРД.

Доказательство теоремы 5.1 приведено в [8]. Таким образом вектор Шепли (25), является динамически-устойчивым, при этом процедура распределения дележа имеет вид:

$$(27) \quad \beta_i(t) = -\pi_i s^I(t) - \alpha Q^I A_i + \rho B sh_i.$$

4.3. СВОЙСТВО СТРАТЕГИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

Процедура распределения дележа (27) гарантирует динамическую устойчивость вектора Шепли, а поэтому и индивидуальную рациональность решения $Sh(s^I(t), t)$ в каждой подыгре $\Gamma(s^I(t), t)$ вдоль кооперативной траектории $s^I(t)$. Пусть $V_i(s_0, t_0)$ – это выигрыш игрока i в игре $\Gamma(x_0, t_0)$ в равновесии по Нэшу. Рассмотрим подыгры $\Gamma(s^I(t), t)$, $t \in [t_0, \infty]$ вдоль кооперативной траектории $s^I(t)$. Если $\beta(t) = (\beta_1(t), \beta_2(t), \dots, \beta_n(t))$ – динамически устойчивая ПРД, то должны выполняться следующие условия:

$$\int_{t_0}^{\infty} e^{-\rho(t-t_0)} \beta_i(t) dt = Sh_i(t_0, s_0),$$

$$\int_t^{\infty} e^{-\rho(\tau-t)} \beta_i(\tau) d\tau \geq V_i(s^I(t), t), \quad i \in I,$$

где $V_i(s^I(t), t)$ – равновесный выигрыш игрока i в подыгре $\Gamma(s^I(t), t)$. Но $\int_t^{\infty} e^{-\rho(\tau-t)} \beta_i(\tau) d\tau$ – это выигрыш игрока i при кооперации в игре $\Gamma(s^I(t), t)$, который индивидуально рационален. В статье [2] доказана теорема, из которой следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует ε -равновесие по Нэшу, причем выигрыши игроков в этом равновесии в точности равны $Sh(s_0, t_0) = (Sh_1(s_0, t_0), Sh_2(s_0, t_0), \dots, Sh_n(s_0, t_0))$. Это означает, что вектор Шепли (кооперативное решение) стратегически поддержан некоторым специально построенным ε -равновесием по Нэшу в игре $\Gamma(s_0, t_0)$.

4.4. УСЛОВИЕ ЯНГА ДЛЯ УСТОЙЧИВОГО КООПЕРАТИВНОГО РЕШЕНИЯ

Компоненты построенного кооперативного решения в каждой подыгре $\Gamma(s^I(t), t)$ удовлетворяют условиям индивидуальной и коллективной рациональности. Кроме того, вектор Шепли является динамически и стратегически устойчивым. Тем не менее, это

не гарантирует того, что отдельные игроки или группы игроков не будут предпринимать иррациональных действий, следствием которых может стать отказ остальных игроков от продолжения кооперативного соглашения. Такую ситуацию будем называть иррациональным поведением. Поэтому желательное свойство устойчивого соглашения заключается в том, что даже в случае отказа от кооперативного соглашения в любой момент $t \geq t_0$, каждый игрок ожидает получить выигрыш не меньше, чем если бы он действовал индивидуально. Такое свойство устойчивости кооперативного решения будем называть устойчивостью против иррационального поведения. Формально указанное свойство впервые было сформулировано Д.В.К. Янгом в работе [12] в виде условия (условие Янга):

$$V_i(x_0, t_0) \leq V_i(x^I(t), t) + \int_{t_0}^t \beta_i(\tau) d\tau, \quad t \geq t_0, \quad i \in I,$$

где $V_i(x, t)$ – это выигрыш игрока i в равновесии по Нэшу в игре, начинающейся в момент t из состояния x , $\beta_i(t)$ – процедура распределения. В нашем случае условие Д.В.К. Янга принимает вид:

$$(28) \quad V_i(s_0, t_0) \leq e^{-\rho(t-t_0)} V_i(s^I(t), t) + \int_{t_0}^t e^{-\rho(\tau-t_0)} \beta_i(\tau) d\tau,$$

$$t \geq t_0, \quad i \in I.$$

Тогда процедура распределения дележа $\beta_i(t)$, заданная формулой (27), может быть переписана в виде:

$$\beta_i(t) = -\pi_i s^I(t) + F_i,$$

а оптимальная траектория (19) примет вид:

$$S^I(t) = (s_0 - G)e^{-\delta(t-t_0)} + G,$$

где $G = \frac{\alpha}{\delta} Q^I$. Вычислим сначала интеграл в правой части неравенства (28):

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^t e^{-\rho(\tau-t_0)} \beta_i(\tau) d\tau = \\ & = \int_{t_0}^t e^{-\rho(\tau-t_0)} (-\pi_i((s_0 - G)e^{-\delta(\tau-t_0)} + G) + F_i) d\tau = \\ & = \left(e^{-\rho(\tau-t_0)} \left(\frac{\pi_i(s_0 - G)}{\rho + \delta} e^{-\delta(\tau-t_0)} + \frac{\pi_i G}{\rho} - \frac{F_i}{\rho} \right) \right) \Big|_{t_0}^t = \\ & = e^{-\rho(t-t_0)} \left(-A_i(s_0 - D_2) e^{-\delta(t-t_0)} + \frac{\pi_i G}{\rho} - \frac{F_i}{\rho} \right) + \\ & \quad + A_i(s_0 - G) - \frac{\pi_i G}{\rho} + \frac{F_i}{\rho}. \end{aligned}$$

Тогда левая часть формулы (28) примет вид:

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^t e^{-\rho(\tau-t_0)} \beta_i(\tau) d\tau + e^{-\rho(t-t_0)} V_i(s^I(t), t) = \\ & = e^{-\rho(t-t_0)} \left(-\frac{\delta}{\rho} A_i G + B_i - \frac{F_i}{\rho} \right) + A_i(s_0 - G) - \frac{\pi_i G}{\rho} + \frac{F_i}{\rho}. \end{aligned}$$

Правая часть формулы (28) равна:

$$V_i(s_0, t_0) = A_i s_0 + B_i.$$

Рассмотрим теперь разность левой и правой части. Для доказательства неравенства (28) необходимо доказать, что

$$(29) \quad \left(1 - e^{-\rho(t-t_0)} \right) \left(\frac{\delta}{\rho} A_i G - B_i + \frac{F_i}{\rho} \right) \geq 0.$$

Понятно, что $1 - e^{-\rho(t-t_0)} > 0$ при любом $t > t_0$ и $e^{-\rho(t-t_0)} - 1 = 0$ при $t = t_0$. Поэтому условие Янга выполнено в начальный момент времени t_0 . Обозначим через

$$\theta = \frac{\delta}{\rho} A_i G - B_i + \frac{F_i}{\rho}.$$

Если константа $\theta \geq 0$, то условие (29) выполнено при любом $t \geq t_0$, если же $\theta < 0$, то условие верно только в начальный момент времени. Покажем, что существует момент времени $T > t_0$, при котором условие Янга выполнено. Если это верно, то $\theta \geq 0$.

Поскольку $\beta(t)$ – динамически устойчивая ПРД, то условие (28) можно переписать, используя формулу (26), в виде:

$$(30) \quad Sh_i(s_0, t_0) - V_i(s_0, t_0) + e^{-\rho(t-t_0)}(V_i(s^I(t), t) - Sh_i(s^I(t), t)) \geq 0.$$

Поскольку $V_i(s^I(t), t)$ и $Sh_i(s^I(t), t)$ – ограниченные функции, а $e^{-\rho(t-t_0)}$ – бесконечно мала при $t \rightarrow \infty$, верно что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\rho(t-t_0)}(V_i(s^I(t), t) - Sh_i(s^I(t), t)) = 0,$$

а поэтому, переходя к пределу при $t \rightarrow \infty$ в неравенстве (30), получаем, что

$$Sh_i(s_0, t_0) \geq V_i(s_0, t_0).$$

Это верное равенство, вследствие индивидуальной рациональности. Обозначим через $\varepsilon = Sh_i(s_0, t_0) - V_i(s_0, t_0)$. По определению предела, существует такое $T > 0$, что при любом $t > T$ выполнено неравенство

$$\left| e^{-\rho(t-t_0)}(V_i(s^I(t), t) - Sh_i(s^I(t), t)) \right| < \varepsilon.$$

Тем самым мы доказали, что $\theta \geq 0$, и неравенство (29) верно при любом $t \geq 0$, что и требовалось доказать.

5. Числовой пример вычисления устойчивого вектора Шепли

Все вычисления производились в программном пакете MAPLE 10.

5.1. ПАРАМЕТРЫ МОДЕЛИ

В качестве примера рассмотрим модель экологического производства трех предприятий (игроков). Пусть параметры модели

следующие:

$t_0 = 0$ – начальный момент соглашения,

$s_0 = 0$ – начальный объем загрязнения,

$p(t) = 4000 - 10(q_1(t) + q_2(t) + q_3(t))$ – функция цены,

$c = 3$ – удельные производственные издержки,

$\rho = 0,07$ – процентная ставка,

$\alpha = 12$ – удельный объем выбросов,

$\delta = 0,4$ – доля природного поглощения загрязнения,

$\gamma = 0,055$ – коэффициент, характеризующий величину затрат на природоохранные мероприятия,

$\bar{e}_1 = 1180$, $\bar{e}_2 = 1170$, $\bar{e}_3 = 1167$ – предельно допустимые выбросы,

$\pi_1 = 6$, $\pi_2 = 6,4$, $\pi_3 = 6,25$ – коэффициенты, отражающие возможности игроков компенсировать экологический ущерб.

Из формул (2) и (3) следует, что максимально возможные мгновенные объемы производства игроков следующие:

$$q_1^{max} = 98,33, \quad q_2^{max} = 97,5, \quad q_3^{max} = 97,25.$$

5.2. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ УСТОЙЧИВОГО ВЕКТОРА ШЕПЛИ

5.2.1. Равновесные объемы производства

Равновесные по Нэшу объёмы производства равны:

$$q_1^N = 95,75, \quad q_2^N = 94,02, \quad q_3^N = 96,81,$$

при этом соответствующие объемы выбросов имеют значения:

$$e_1^N = 1149,05, \quad e_2^N = 1128,22, \quad e_3^N = 1161,73.$$

Из полученных значений видно, что в равновесии по Нэшу объемы производства игроков очень близки к максимально возможным, а соответствующие выбросы очень близки к ПДВ.

Кооперативные объемы производства равны:

$$q_1^I = 53,39, \quad q_2^I = 52,55, \quad q_3^I = 52,3,$$

при этом соответствующие кооперативные объемы выбросов принимают значения:

$$e_1^I = 640,64, \quad e_2^I = 630,64, \quad e_3^I = 627,64.$$

Заметим, что кооперативные объемы производства почти в два раза ниже максимума, при этом кооперативная цена существенно выше цены, реализуемой в равновесии по Нэшу:

$$(31) \quad \begin{aligned} p^N(t) &= 1134,16, \\ p^I(t) &= 2417,58. \end{aligned}$$

Вычислим также стратегии игроков в случае формирования коалиций из двух игроков:

$$\begin{aligned} q_1^{1,2} &= 60,79, & q_2^{1,2} &= 59,96 \\ q_1^{1,3} &= 61,94, & q_3^{1,3} &= 60,85 \\ q_2^{2,3} &= 60,76, & q_3^{2,3} &= 60,51. \end{aligned}$$

5.2.2. Характеристическая функция

По формулам (16) вычисляем коэффициенты характеристической функции кооперативной игры:

$$\begin{aligned} A_1 &= -12,77, & A_2 &= -13,61, & A_3 &= -13,3, \\ B_1 &= 26,147, & B_2 &= 21923,7 & B_3 &= 26326,3, \\ B_{1,2} &= 86280,33, & B_{1,3} &= 91511,86, & B_{2,3} &= 87029,71, \\ B &= B_I = 217350,63. \end{aligned}$$

Кооперативная траектория имеет вид:

$$s^I(t) = 4747,27 - 4747,27e^{-0,2t}, \quad t \geq 0.$$

Равновесная по Нэшу траектория:

$$s^N(t) = 8597,51 - 8597,51e^{-0,2t}, \quad t \geq 0.$$

Приведем графики изменения динамики загрязнения в обоих случаях (рис. 1).

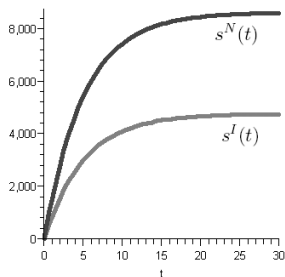


Рис. 1. Динамика загрязнения

5.2.3. Решения модели: сравнительный анализ

Прибыли игроков в равновесии по Нэшу в момент $t \geq 0$ равны соответственно:

$$\begin{aligned} V(\{1\}, s^N(t), t) &= 263777,4 + 109755,5e^{-0,2t}, \\ V(\{2\}, s^N(t), t) &= 196123,22 + 117072,5e^{-0,2t}, \\ V(\{3\}, s^N(t), t) &= 261761,8 + 114328,66e^{-0,2t}. \end{aligned}$$

Общий кооперативный выигрыш в момент $t \geq 0$ составляет:

$$(32) \quad V(I, s^I, t) = 2916301,18 + 188707,8045e^{-0,2t}.$$

В качестве принципа дележа при кооперации был выбран устойчивый динамический вектор Шепли. Кооперативные прибыли игроков в этом случае в момент времени $t \geq 0$ имеют вид соответственно:

$$\begin{aligned} Sh_1(s^I(t), t) &= 992916,94 + 60603,51e^{-0,2t}, \\ Sh_2(s^I(t), t) &= 926692,83 + 64643,66e^{-0,2t}, \\ Sh_3(s^I(t), t) &= 997023,3 + 63128,66e^{-0,2t}. \end{aligned}$$

На рис. 2 изображены графики функций прибыли всех трех игроков. Видно, что $V(\{1\}, s, t)$ и $V(\{3\}, s, t)$ пересекаются, это происходит в момент времени $t = 4,1$. На рис. 3 показаны графики функций прибыли в кооперативном случае.

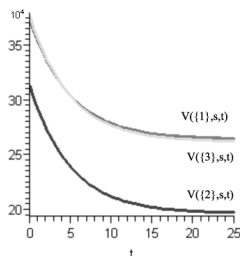


Рис. 2. Прибыли игроков в случае конкуренции

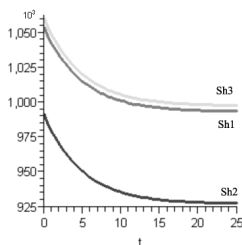


Рис. 3. Прибыли игроков при кооперации

На рис. 4 приведены графики, сравнивающие равновесную по Нэшу и кооперативную прибыль.

Мгновенные выигрыши игроков до перераспределения общей прибыли равны:

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_1(t) &= 70080,7 + 28533,83e^{-0,2t}, \\ \hat{\beta}_2(t) &= 66812,56 + 30436,09e^{-0,2t}, \\ \hat{\beta}_3(t) &= 67115,06 + 29722,74e^{-0,2t}.\end{aligned}$$

Процедура распределения дележа, соответствующая вектору Шепли, имеет вид:

$$\begin{aligned}\beta_1(t) &= 69454 + 28533,83e^{-0,2t}, \\ \beta_2(t) &= 64814,97 + 30436,09e^{-0,2t}, \\ \beta_3(t) &= 69739,36 + 29722,74e^{-0,2t}.\end{aligned}$$

На рис. 5 изображены графики функций $\beta_i(t)$ и $\hat{\beta}_i(t)$, $i = 1, 2, 3$, которые отражают перераспределение кооперативного выигрыша между игроками.

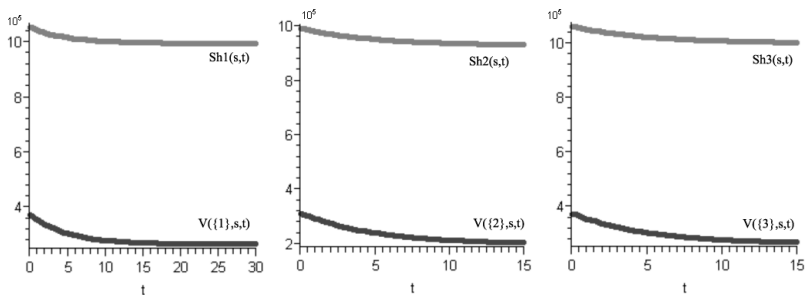


Рис. 4. Сравнение кооперативных и конкурентных прибылей фирм

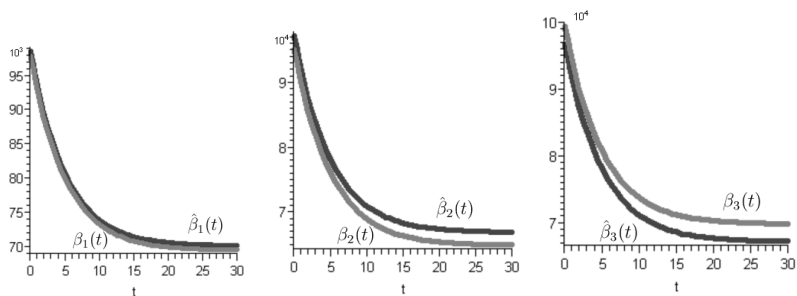


Рис. 5. Сравнение мгновенных прибылей фирм при кооперации до перераспределения и после.

Литература

1. ПЕТРОСЯН Л.А. Устойчивость решений в дифференциальных играх со многими участниками // Вестн. Ленингр. ун-та. – 1977. – Сер. 1, Вып. 14, № 19. – С. 46–52.
2. ПЕТРОСЯН Л.А., ЗЕНКЕВИЧ Н.А. Принципы устойчивой кооперации // Мат. теория игр и её приложения. – 2009. – Т. 1, Вып. 1. – С. 102–117.
3. BORKEY P., LEVEQUE F. Voluntary approaches for

- environmental protection in the European Union - a survey* // European Environment. – 2000. – Vol. 10. – P. 35–54.
4. DEMSETZ H. *Toward a theory of property rights* // The American Economic Review. – 1967. – Vol. 57, № 2. – P. 347–359.
 5. DOCKNER E. J., JORGENSEN S., VAN LONG N., SORGER G. *Differential Games in Economics and Management Science*. – Cambridge University Press, 2000. – P. 485.
 6. KATSOUACOS Y., XEPAPADEAS A. *Environmental policy under oligopoly with endogenous market structure* // Scand. J. of Economics. – 1995. – Vol. 97, № 3. – P. 411–420.
 7. NASH J.F. *Equilibrium points in n-person games* // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. – 1950. – Vol. 36. – P. 48–49.
 8. PETROSYAN L., ZACCOUR G. *Time-consistent Shapley value allocation of pollution cost reduction* // Journal of Economic Dynamics and Control. – 2003. – Vol. 27. – P. 381–398.
 9. PETROSYAN L., KOZLOVSKAYA N. *Differential coalitional environmental management game* // Game theory and applications. Russia, St.Petersburg State University. – 2009. – Vol. 14. – P. 104–113.
 10. SHAPLEY L.S. *A value for n-person games* // Contributions to the Theory of Games II. Princeton: Princeton University Press. – 1953. – P. 57–69.
 11. STIMMING M. *Capital accumulation subject to pollution control: Open-Loop versus feedback investment strategies* // Annals of Operations Research. – 1999. – Vol. 88. – P. 309–336.
 12. YEUNG D. W. K. *An irrational - behavior - proofness condition in cooperative differential games* // Int. J. of Game Theory Rew. – 2006. – Vol. 8. – P. 739–744.

STABLE SHAPLEY VALUE IN COOPERATIVE GAME OF TERRITORIAL ENVIRONMENTAL PRODUCTION

Nikolay Zenkevich, St. Petersburg University, Graduate School of Management, Department of Operations Management, Cand. Sc., associate professor (zenkevich@gsom.pu.ru).

Nadezhda Kozlovskaya, St. Petersburg University, Graduate School of Management, Department of Operations Management, post-graduate student (kknn@yandex.ru).

Abstract: A game-theoretic model of territorial environmental production is studied. The process is modeled as a cooperative differential game. The stable mechanism of distribution of common cooperative benefit among players is proposed. We prove that the cooperative total stock of accumulated pollution is strictly less than the pollution under Nash equilibrium for the whole duration of the game. The perfect Nash equilibrium is found. We design a stable Shapley value as a cooperative solution, which is time-consistent. The Shapley value is also strategic stable and satisfies the irrational-behavior-proofness condition. The numerical example is given.

Keywords: differential game, cooperative game, dynamic programming, Hamilton-Jacobi-Bellman equation, Shapley value, Nash equilibrium, perfect equilibrium, stability of cooperative solution, time-consistency, strategic stability, irrational-behavior-proofness condition.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии Л. А. Петросяном

УДК 517.977.8+519.834

ББК 22.18

ДВУХУРОВНЕВЫЕ КОНФЛИКТНЫЕ СИСТЕМЫ В ЗАДАЧАХ СОВМЕСТНОЙ РАЗРАБОТКИ ПРИРОДНЫХ РЕСУРСОВ¹

Королев Ю.М.², Голубцов П.В.³

*(Физический факультет, Московский государственный
университет им. М.В. Ломоносова, Москва)*

В работе исследуется конфликтная система, в которой взаимодействуют игроки двух принципиально разных типов – владельцы ресурса и разработчики. При этом владельцы устанавливают правила игры (налоги) для разработчиков. Проведено аналитическое исследование таких двухуровневых конфликтных систем для случая одного разработчика и многих владельцев ресурса. Решение игры найдено аналитически для функций выигрыша общего вида, удовлетворяющих некоторым естественным условиям.

Ключевые слова: теория игр, двухуровневая игра, оптимальное управление природными ресурсами, равновесие по Нэшу, игра Штакельберга с многими лидерами.

Введение

За последние десятилетия уровень технического оснащения добывающих компаний стал настолько высоким, что над многими видами природных ресурсов нависла реальная угроза исчерпания. Неадекватный учет эффектов соперничества приводит к катастрофическим последствиям в экономике и экологии. Поэтому возни-

¹ Текст приводится в соответствии с изданием «Математическая теория игр и ее приложения. – 2010. – Т. 2. № 4. – С. 25–48».

² Юрий Михайлович Королев, аспирант (um.korolev@physics.msu.ru).

³ Петр Викторович Голубцов, доктор физико-математических наук, профессор (golubtsov@physics.msu.ru).

кает потребность в развитии моделей, позволяющих исследовать процесс совместной разработки природных ресурсов.

Типичным примером задачи совместной разработки природных ресурсов является промышленный лов рыбы. В классической постановке задачи несколько независимых разработчиков ведут добычу ресурса из общего бассейна. В ранних публикациях на эту тему ([3],[6]) была показана важная особенность таких систем: при отсутствии ограничений на разработку в некооперативном случае происходит исчерпание ресурса до уровня, когда его разработка становится экономически нецелесообразной. В англоязычной литературе этот эффект получил название «tragedy of commons».

Осознание того факта, что бесконтрольная добыча приводит к исчерпанию ресурса, привело к созданию различного рода регуляторов - организаций, в состав которых входят как государства - владельцы ресурса, так и государства - разработчики. Они призваны управлять процессом разработки природных ресурсов за счет введения различного рода ограничений и квот. Как показывает практика, не все из них оказываются эффективными.

Кроме того, во многих регионах были введены эксклюзивные экономические зоны, добыча ресурса в которых могла вестись только с разрешения государства - владельца эксклюзивного права на разработку ([12]). Владельцы этого права стали допускать других участников рынка к разработке ресурса, взимая с них определенный налог. Такое устройство системы «владелец - разработчики ресурса» потребовало создания новых математических моделей ([8]).

Подавляющее большинство исследований в этой области базируются на численном моделировании. В этой связи стоит упомянуть работы [10] и [4], в которых рассмотрены задачи разработки природных ресурсов при неопределенности (в условиях непредсказуемых климатических изменений), а также при наличии у игроков асимметричной информации.

Конкуренция между разработчиками зачастую приводит к снижению эффективности разработки. Однако ситуация серьезно

осложняется в случае, когда владельцы ресурса также являются активными участниками событий.

Такая ситуация может быть описана как двухуровневая игра, в которой принимают участие игроки двух принципиально разных типов. Игроки первого уровня (владельцы ресурса) устанавливают правила игры для игроков второго уровня (разработчиков). При этом игроки первого уровня сами находятся в конфликтной ситуации. Доходы всех игроков, как первого, так и второго уровня, зависят от стратегий игроков обеих уровней.

Предполагается, что игроки первого владеют совершенно однородным ресурсом, и разработчику безразлично, у кого из них купить право на добычу. Однако условия разработки в различных регионах (соответствующих различным игрокам первого уровня) различны, а следовательно, различны и затраты на добычу единицы ресурса. Кроме того, эти регионы отличаются друг от друга налогами, которые устанавливают владельцы. Обычно налоги пропорциональны усилиям по разработке (в примере с ловом рыбы – количеству судов). Эти налоги и являются стратегиями игроков первого уровня. Стратегиями игроков второго уровня является распределение их усилий по разработке между различными регионами. Стараясь привлечь к себе разработчиков, владельцы могут снижать налоги, тем самым уменьшая свой суммарный доход и провоцируя наращивание добычи ресурса.

В общем случае в игре участвуют N владельцев ресурса и M разработчиков. Игра разыгрывается в два этапа. Решением игры на втором уровне является равновесие по Нэшу между разработчиками, параметрически зависящее от стратегий игроков первого уровня – налогов. Зная эту зависимость, игроки первого уровня также приходят к равновесию по Нэшу. В работе [9] проведено аналитическое исследование игры 1×2 , в которой участвуют два разработчика и один владелец (игра Штакельберга с одним лидером и двумя последователями). В настоящей работе изучаются эффекты, обусловленные конкуренцией между владельцами ресурса, поэтому рассматривается случай одного разработчика и многих владельцев (игра Штакельберга со многими лидерами и

одним последователем).

Все рассуждения в настоящей работе проводятся для функций выигрыша общего вида. Они должны удовлетворять некоторым вполне естественным условиям, которые получаются исходя из следующих соображений. Характерной особенностью рассматриваемых задач является зависимость удельных затрат на добычу ресурса от количества оставшегося ресурса. Интенсивность добычи в каждом регионе пропорциональна количеству оставшегося ресурса $R(t)$, а также приложенным усилиям E ([5]).

$$(1) \quad \frac{dR(t)}{dt} = -qER(t),$$

где $q = \text{const} > 0$ – коэффициент пропорциональности, определяющий эффективность добычи в каждом регионе.

Предположим, что время добычи ресурса равно T . Пусть $R(0) = R_0$. Тогда, с учетом (1), доход ω разработчика от продажи ресурса в зависимости от приложенных усилий есть разница между количеством ресурса на начало и конец сезона (предполагается, что цена на ресурс не изменяется в течение всего сезона).

$$(2) \quad \omega(E) = R_0(1 - e^{-qTE}).$$

Выигрыш разработчика складывается из доходов от продажи ресурса, добытого в различных регионах, за вычетом налоговых выплат, а также издержек добычи.

В разделе 2 рассмотрена простейшая игра, в которой участвует по одному игроку на каждом уровне. В разделе 3 рассмотрена игра, в которой участвуют два владельца ресурса. Уже в такой простой конфигурации проявляются интересные особенности рассматриваемых систем, например, неединственность равновесия по Нэшу в игре на первом уровне. В разделе 4 рассмотрена симметричная игра с произвольным числом игроков первого уровня, изучено влияние конкуренции (количества игроков) на решение игры.

Подобные двухуровневые игры могут возникать в задачах разработки различных биологических ресурсов, водных ресурсов

(например, артезианских вод), лесных ресурсов, в сельском хозяйстве, а также в других задачах.

1. Постановка задачи

Мы формализуем задачу игрой $G_{N \times 1} = \{N, X_i, Y, u_i, v; i = 1, \dots, N\}$, где N – множество игроков первого уровня, X_i – множества их стратегий, Y – множество стратегий игрока второго уровня, u_i и v – функции выигрыша игроков первого уровня и игрока второго уровня соответственно.

Вектор $\mathbf{x} \in X_1 \times \dots \times X_N$ интерпретируется как вектор налогов, а вектор $\mathbf{y} \in Y$ определяет распределение усилий игрока второго уровня по разработке ресурса между различными регионами. Предполагается, что $y_i \geq 0$, $i = 1, \dots, N$ и $\sum_{i=1}^N y_i \leq y_0$. Последнее условие выражает тот факт, что разработчик ограничен в своих возможностях (например, имеет ограниченный флот).

Функция выигрыша разработчика $v(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ в случае N владельцев ресурса имеет следующий вид

$$(3) \quad v(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^N \omega_i(y_i) - (c_i + x_i)y_i,$$

где $\omega_i(y_i)$ отражают доход от разработки ресурса в i -том регионе, c_i – константы, характеризующие естественные затраты на разработку ресурса в i -том регионе, а $x_i y_i$ – налоговые выплаты. Будем считать, что функции $\omega_i(y)$ удовлетворяют следующим вполне естественным условиям

$$(4) \quad \begin{aligned} \omega_i(0) &= 0, \\ \varphi_i(y) &= \omega'_i(y) > 0, \\ \varphi'_i(y) &= \omega''_i(y) < 0. \end{aligned}$$

Условия (4) означают, что доход от разработки в каждом регионе монотонно возрастает с ростом затраченных усилий, однако эффективность разработки падает с увеличением ее интенсивности. Это обусловлено исчерпанием ресурса.

Кроме того, подчиним функцию φ на отрезке $[0, y_0]$ условию

$$(5) \quad 2[\varphi'(y)]^2 > \varphi(y)\varphi''(y), \quad \varphi''(y) \geq 0.$$

Типичным примером функции $\omega_i(y)$ является зависимость (2), рассмотренная во введении. Легко убедиться в том, что она удовлетворяет условиями (4) и (5).

Множество стратегий игрока второго уровня – множество векторов $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n: y_i \geq 0, \sum_{i=1}^N y_i \leq y_0$. Множества стратегий игроков первого уровня X_i – лучи $x_i \geq 0$.

Выигрыши игроков первого уровня – налоговые выплаты, пропорциональные усилиям по добыче ресурса.

$$(6) \quad u_i(\mathbf{x}) = x_i \tilde{y}_i(\mathbf{x}), \quad i = 1, \dots, N.$$

Рассматриваемая игра – игра Штакельберга, в которой игроки первого уровня являются лидерами, а разработчик – последователем. При фиксированных налогах он решает следующую оптимизационную задачу.

$$(7) \quad v(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{y}}(\mathbf{x})) = \max_{\mathbf{y} \in Y} v(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Зная оптимальный отклик игрока второго уровня $\tilde{\mathbf{y}}(\mathbf{x})$, каждый игрок первого уровня оптимизирует свой выигрыш. Оптимальным набором стратегий в такой ситуации обычно считают равновесие по Нэшу.

$$(8) \quad u_i(\mathbf{x}^{eq}) = \max_{x_i \geq 0} u_i(\mathbf{x}^{eq} | x_i), \quad i = 1, \dots, N,$$

где $\mathbf{x}^{eq} | x_i$ обозначает вектор \mathbf{x}^{eq} , в котором i -я стратегия заменена на x_i .

2. Игра 1×1

Рассмотрим простейший случай, когда на каждом уровне находится по одному игроку (т.е. $N = 1$). В этом случае в игре участвуют один лидер и один последователь.

Игрок второго уровня максимизирует свою функцию выигрыша $v(x, y)$ при каждом фиксированном x , задавая функцию

$\tilde{y}(x)$ – оптимальный отклик на стратегию игрока первого уровня. Зная $\tilde{y}(x)$, владелец ресурса максимизирует свою функцию выигрыша $u(x, \tilde{y}(x))$. Оптимальные стратегии игроков являются решением следующей задачи.

$$(9) \quad \begin{cases} v(x, \tilde{y}(x)) = \max_{0 \leq y \leq y_0} v(x, y), \\ u(x^{opt}, \tilde{y}(x^{opt})) = \max_{x \geq 0} u(x, \tilde{y}(x)). \end{cases}$$

Найдем $\tilde{y}(x)$. Для этого надо максимизировать $v(x, y)$ по y на отрезке $[0, y_0]$. Для удобства мы будем искать не максимум $v(x, y)$, а минимум $-v(x, y)$.

Запишем необходимые условия экстремума (условия Куна-Таккера):

$$(10) \quad \begin{cases} -\frac{\partial v}{\partial y} + \mu_1 - \mu_2 = 0, \\ \mu_1(y - y_0) = 0, \\ \mu_2 y = 0, \\ \mu_1 \geq 0, \quad \mu_2 \geq 0. \end{cases}$$

Т.к. $\frac{\partial^2(-v)}{\partial y^2} = -\varphi'(y) > 0$, функция $-v(x, y)$ строго выпукла по y на отрезке $[0, y_0]$, и необходимые условия экстремума превращаются в достаточные условия глобального максимума функции v на $[0, y_0]$, причем точка максимума единственна.

Как видно из системы (10), достаточным условием достижения максимума на границе является положительность соответствующего множителя Лагранжа. Решая систему (10) при $\mu_1 > 0, \mu_2 = 0, y = y_0$ и при $\mu_1 = 0, \mu_2 > 0, y = 0$, получаем достаточные условия достижения максимума на границе. Во внутренних точках (при $\mu_i = 0$) система сводится к одному уравнению. Таким образом, решение системы (10) на отрезке $[0, y_0]$ есть функция

$$(11) \quad \tilde{y}(x) = \begin{cases} y_0, & \text{если } x \leq \varphi(y_0) - c, \\ \varphi^{-1}(c + x), & \text{если } \varphi(y_0) - c < x < \varphi(0) - c, \\ 0, & \text{если } x \geq \varphi(0) - c. \end{cases}$$

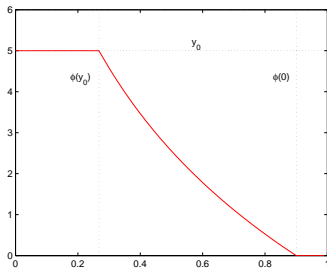


Рис. 1. Оптимальный отклик игрока второго уровня $\tilde{y}(x)$

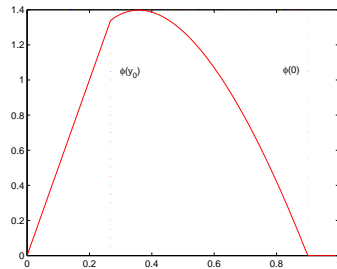


Рис. 2. Функция выигрыша игрока первого уровня $u(x, \tilde{y}(x))$

Любопытно заметить, что при $x < \varphi(y_0)$ – с оптимальная стратегия разработчика $\tilde{y}(x)$ не изменяется несмотря на увеличение налога x . При этом соответствующий множитель Лагранжа $\mu_1 = \varphi(y_0) - (c + x)$ уменьшается и при $x = \varphi(y_0) - c$ становится равным нулю. Это наблюдение позволяет интерпретировать множители Лагранжа в системе (10) как «виртуальные налоги». Они оказывают такое же влияние на стратегию игрока второго уровня, как и реальные налоги, хотя и не выражаются в выплатах игроку первого уровня. В этой связи естественно ожидать, что игрок первого уровня будет стремиться выбирать свою стратегию таким образом, чтобы множитель Лагранжа μ_1 в системе (10) был равен нулю. При этом ограничение $y \leq y_0$ фактически перестает работать. В этом легко убедиться, так как $\frac{du(x, \tilde{y}(x))}{dx} = y_0 > 0$ при $x < \varphi(y_0) - c$. Типичный вид функции выигрыша $u(x, \tilde{y}(x))$ представлен на рис. 2.

Найдем x^{opt} – оптимальную стратегию игрока первого уровня. Для этого нужно найти максимум функции $u(x, \tilde{y}(x))$. Т.к. при $x < \varphi(y_0) - c$ функция $u(x, \tilde{y}(x)) = u(x, y_0) = xy_0$ возрастает, а при $x > \varphi(0) - c$ значение $u(x, \tilde{y}(x)) \equiv 0$, достаточно рассмотреть задачу максимизации $u(x, \tilde{y}(x))$ на отрезке $[\varphi(y_0) - c, \varphi(0) - c]$.

$$(12) \quad u(x^{opt}, \tilde{y}(x^{opt})) = \max_{\varphi(y_0) - c \leq x \leq \varphi(0) - c} u(x, \tilde{y}(x)).$$

Найдем производную $\frac{du(x, \tilde{y}(x))}{dx} = \frac{d}{dx}(x\varphi^{-1}(c+x))$ и запишем необходимые условия Куна-Такера:

$$(13) \quad \frac{du(x, \tilde{y}(x))}{dx} = \varphi^{-1}(c+x) + \frac{x}{\varphi'(\varphi^{-1}(c+x))},$$

$$(14) \quad \begin{cases} -\varphi^{-1}(c+x) - \frac{x}{\varphi'(\varphi^{-1}(c+x))} - \lambda_1 + \lambda_2 = 0, \\ \lambda_1(x - (\varphi(y_0) - c)) = 0, \\ \lambda_2(x - (\varphi(0) - c)) = 0, \\ \lambda_1 \geq 0, \quad \lambda_2 \geq 0. \end{cases}$$

Запишем выражение для $\frac{d^2(-u)}{dx^2}$ на отрезке $[\varphi(y_0) - c, \varphi(0) - c]$:

$$(15) \quad \frac{d^2(-u)}{dx^2} = \frac{-1}{(\varphi'(y))^3} (2[\varphi'(y)]^2 - (\varphi(y) - c)\varphi''(y)) \Big|_{y=\varphi^{-1}(c+x)}.$$

Условия (5) гарантируют положительность $\frac{d^2(-u)}{dx^2}$ и, следовательно, строгую выпуклость $-u(x, \tilde{y}(x))$ на отрезке $[\varphi(y_0) - c, \varphi(0) - c]$.

Максимум на левой границе отрезка достигается при $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 = 0$. В этом случае $x^{opt} = \varphi(y_0) - c$. Выражая λ_1 из первого уравнения системы (14) и учитывая знак $\varphi'(y)$, получаем достаточные условия максимума на левой границе

$$(16) \quad \varphi(y_0) + y_0\varphi'(y_0) > c.$$

Аналогичные рассуждения для случая $\lambda_2 > 0$, $\lambda_1 = 0$ показывают, что при $\varphi(0) < c$ $\tilde{y}(x) \equiv 0$ и x^{opt} – любое. В остальных случаях нужно решить первое уравнение системы (14) при $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ и учесть тот факт, что $\varphi(y) = x + c$. Тогда для x^{opt} получаем уравнения

$$(17) \quad \begin{cases} \varphi(y^*) + y^*\varphi'(y^*) = c, \\ x^{opt} = \varphi(y^*) - c. \end{cases}$$

Таким образом, $x^{opt} = \varphi(y_0) - c$, если выполнено условие (16). Если $\varphi(y_0) \leq c$, то $x^{opt} = 0$. В остальных случаях x^{opt} находится из уравнений (17). Найденное значение x^{opt} позволяет вычислить отклик игрока второго уровня $\tilde{y}(x^{opt})$, а также значения функций выигрыша $u^{opt} = u(x^{opt}, \tilde{y}(x^{opt}))$ и $v^{opt} = v(x^{opt}, \tilde{y}(x^{opt}))$.

Для модельной функции (2) первое уравнение системы (17) выглядит особенно просто:

$$(18) \quad e^{-\xi}(1 - \xi) = \tilde{c},$$

где $\xi = qy$ и $\tilde{c} = c/(qR)$.

3. Игра 2×1

Теперь рассмотрим игру, в которой участвуют два игрока первого уровня и один игрок второго уровня. В зависимости от установленных налогов разработчик может увеличить интенсивность разработки в том или ином регионе, тем самым перераспределяя налоговые выплаты. Таким образом, игроки первого уровня начинают влиять друг на друга через оптимальный отклик игрока второго уровня.

3.1. ОПТИМАЛЬНЫЙ ОТКЛИК ИГРОКА ВТОРОГО УРОВНЯ

Оптимальный отклик разработчика $\tilde{y}(x_1, x_2) = (\tilde{y}_1(x_1, x_2), \tilde{y}_2(x_1, x_2))$ является решением следующей оптимизационной задачи в треугольной области $Y = \{y_1, y_2: y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_1 + y_2 \leq y_0\}$.

$$(19) \quad v(x_1, x_2, \tilde{y}_1(x_1, x_2), \tilde{y}_2(x_1, x_2)) = \max_{(y_1, y_2) \in Y} v(x_1, x_2, y_1, y_2).$$

Как и ранее, будем решать оптимизационную задачу (19) методом Куна-Такера. Запишем необходимые условия экстремума.

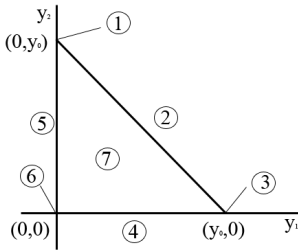


Рис. 3. Область изменения y_1 и y_2 и характерные участки ее границы

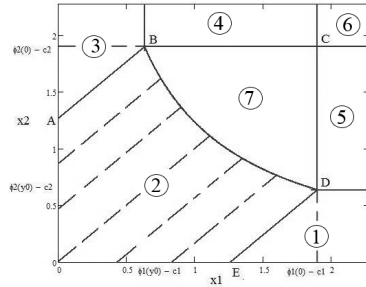


Рис. 4. Разбиение плоскости (x_1, x_2) и область влияния игроков первого уровня

$$(20) \quad \begin{cases} -\varphi_1(y_1) + c_1 + x_1 - \lambda_1 + \lambda_0 = 0, \\ -\varphi_2(y_2) + c_2 + x_2 - \lambda_2 + \lambda_0 = 0, \\ \lambda_1 y_1 = 0, \\ \lambda_2 y_2 = 0, \\ \lambda_0(y_1 + y_2 - y_0) = 0, \\ \lambda_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3. \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что матрица вторых производных функции $-v(x_1, x_2, y_1, y_2)$ (при фиксированных x_1 и x_2) положительно определена для любых y_1, y_2 . Поэтому необходимые условия экстремума являются и достаточными условиями максимума $v(x_1, x_2, y_1, y_2)$.

Рассмотрим все возможные комбинации ненулевых и нулевых коэффициентов Лагранжа $\lambda_i, i = 1, 2, 3$. Ненулевое значение коэффициента Лагранжа означает достижение максимума на соответствующей части границы области Y . На рис. 3 показана область Y и занумерованы характерные участки границы.

При $\lambda_0 = 0$ ограничение $y_1 + y_2 \leq y_0$ неактивно (оно выполняется со знаком « $<$ »), y_1 и y_2 выбираются независимо и могут быть найдены по формулам раздела 2.

Значение $\lambda_0 \neq 0$ соответствует случаю, когда игроки «упираются» в ограничение $y_1 + y_2 = y_0$ (участки границы 1, 2, 3 на рис. 3). Максимум может достигаться как во внутренних точках отрезка 1-3, так и в крайних точках. Рассмотрим эти случаи отдельно.

Если одно из λ_i , например, $\lambda_1 \neq 0$, то $y_1 = 0, y_2 = y_0$ (точка 1). Необходимым и достаточным условием для достижения максимума в точке $(0, y_0)$ является положительность коэффициентов Лагранжа λ_1 и λ_0 .

$$(21) \quad \begin{cases} \lambda_0 = \varphi_2(y_0) - (c_2 + x_2) > 0, \\ \lambda_1 = \lambda_0 - \varphi_1(0) + (c_1 + x_1) > 0. \end{cases}$$

Если же $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ (максимум во внутренних точках отрезка), то

$$(22) \quad \begin{aligned} \lambda_0 &= \varphi_1(y_1) - (c_1 + x_1) > 0, \\ \lambda_0 &= \varphi_2(y_2) - (c_2 + x_2) > 0, \\ y_1 + y_2 &= y_0. \end{aligned}$$

Для нахождения оптимального отклика $(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2)$ нужно решить относительно y следующее уравнение

$$(23) \quad \varphi_1(y_0 - y) - c_1 - x_1 - \varphi_2(y) + c_2 + x_2 = 0,$$

где y – оптимальный отклик \tilde{y}_2 . Заметим, что решение y зависит только от разности $x_2 - x_1$.

$$(24) \quad y = \psi(x_2 - x_1).$$

Рассмотренные выше достаточные условия максимума на границе области Y зависят от x_1 и x_2 . При различных значениях x_1 и x_2 максимум достигается в различных точках треугольной области Y . Значения множителей Лагранжа также зависят от x_1 и x_2 . Полагая равными нулю поочередно все множители Лагранжа, мы найдем некоторое разбиение плоскости (x_1, x_2) . В каждой из получившихся областей $(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2)$ имеют различные аналитические выражения. Это разбиение показано на рис. 4. Кроме того, на этом рисунке показаны «образы» характерных участков границы области Y .

На кривой BD коэффициент Лагранжа λ_0 , равный

$$(25) \quad \lambda_0 = \varphi_2(\psi(x_2 - x_1)) - (c_2 + x_2),$$

принимает нулевое значение. Отсюда можно найти уравнение кривой BD . Однако его можно найти и проще, если заметить, что на кривой BD оптимальные отклики, посчитанные по формулам области BCD , составляют в сумме y_0 (ограничение начинает работать). Тогда для кривой BD можно записать уравнение

$$(26) \quad \varphi_1^{-1}(c_1 + x_1) + \varphi_2^{-1}(c_2 + x_2) = y_0.$$

Для модельных функций (2) это уравнение задает гиперболу.

$$(27) \quad \frac{c_1 + x_1}{q_1 R_1} \left(\frac{c_2 + x_2}{q_2 R_2} \right)^{q_1/q_2} = e^{-q_1 y_0}.$$

Обратимся к условиям (22). Граница областей 1 и 3, в которых максимум достигается в точках $(0, y_0)$ или $(y_0, 0)$, соответствует случаю $\lambda_1 = 0$ или $\lambda_2 = 0$ соответственно, а $\lambda_0 > 0$. Например,

$$(28) \quad \begin{cases} \lambda_0 = \varphi_2(y_0) - (c_2 + x_2) > 0, \\ \lambda_1 = \lambda_0 - \varphi_1(0) + (c_1 + x_1) = 0. \end{cases}$$

Таким образом, границами этих областей являются прямые

$$(29) \quad \begin{aligned} AB: \quad x_2 &= x_1 + \varphi_2(0) - \varphi_1(y_0) + c_1 - c_2, \\ ED: \quad x_2 &= x_1 + \varphi_2(y_0) - \varphi_1(0) + c_1 - c_2. \end{aligned}$$

Скажем еще пару слов о разбиении на рис. 4.

Замечание 1. При $x_i > \varphi_i(0) - c_i$ разработка в i -том регионе не ведется, поэтому можно ограничить множества стратегий игроков первого уровня до квадрата $[0, \varphi_1(0) - c_1] \times [0, \varphi_2(0) - c_2]$.

Замечание 2. Ограничение y_0 активно только под кривой BD . Над этой кривой оптимальные отклики имеют такой же вид, как и в игре 1×1 (т. е. интенсивность разработки в каждом регионе зависит только от налога, установленного в данном регионе). Поэтому игроки первого уровня оказывают влияние друг на друга только в области, лежащей ниже кривой BD .

3.2. РАВНОВЕСИЕ ПО НЭШУ МЕЖДУ ИГРОКАМИ ПЕРВОГО УРОВНЯ

Теперь, когда найден оптимальный отклик игрока второго уровня, можно построить функции выигрыша игроков первого уровня $u_1(x_1, x_2) = x_1\tilde{y}_1(x_1, x_2)$ и $u_2(x_1, x_2) = x_2\tilde{y}_2(x_1, x_2)$. Они показаны на рис. 11. Исследуем их на выпуклость. Имеет место следующая

Теорема 1. Пусть в игре G с функциями выигрыша (6) и (3) выполнены условия (4) и (5). Тогда функции выигрыша $u_1(x_1, x_2) = x_1\tilde{y}_1(x_1, x_2)$ и $u_2(x_1, x_2) = x_2\tilde{y}_2(x_1, x_2)$ выпуклы вверх в области $OABCDE$ по x_1 и x_2 соответственно.

Доказательство. Проведем доказательство для функции $u_2(x_1, x_2)$.

Рассмотрим сначала область $OABDE$. Запишем выражение для производной $\frac{\partial u_2}{\partial x_2}$ внутри $OABDE$. В этой области ограничение y_0 активно, оптимальный отклик находится из условий (22).

$$(30) \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \psi(x_2 - x_1) + x_2\psi'(x_2 - x_1),$$

где ψ – решение (23).

Найдем $\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2}$ внутри области $OABDE$.

$$(31) \quad \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} = \psi' \left[2 - x_2 \frac{\varphi_2''(\psi) - \varphi_1''(y_0 - \psi)}{(\varphi_1'(y_0 - \psi) + \varphi_2'(\psi))^2} \right].$$

Так как $\psi'(x) < 0$, требуется проверить выполнение неравенства

$$(32) \quad 2(\varphi_1'(y_0 - \psi) + \varphi_2'(\psi))^2 - x_2(\varphi_2''(\psi) - \varphi_1''(y_0 - \psi)) > 0.$$

Неравенство (32) следует из условий (5) и (22) и уравнений (23), в этом несложно убедиться, перегруппировав слагаемые в (32).

Мы показали, что в области $OABDE$ производная $\frac{\partial u_2}{\partial x_2} < 0$ и $u_2(x_1, x_2)$ строго выпукла вверх. Строгая выпуклость вверх функции $u_2(x_1, x_2)$ в области BCD доказана в разделе 2 (в этой области она совпадает с функцией выигрыша игры 1×1). Далее, непосредственной проверкой можно убедиться в том, что

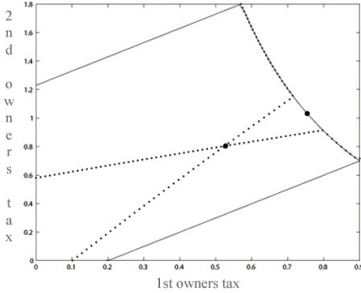


Рис. 5. Равновесие по Нэшу внутри области влияния, пространство стратегий

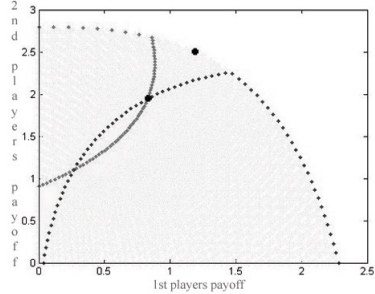


Рис. 6. Равновесие по Нэшу внутри области влияния, пространство выигрышей

$$(33) \quad \left. \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right|_{BD-0} > \left. \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right|_{BD+0}.$$

Из всего вышесказанного следует, что $u_2(x_1, x_2)$ выпукла вверх в области $OABCDE$. Теорема доказана.

Приступим к поиску равновесия по Нэшу. Покажем, что точка равновесия не может лежать вне области $OABCDE$. То, что она не может лежать вне квадрата $[0, \varphi_1(0) - c_1] \times [0, \varphi_2(0) - c_2]$, следует из замечания 2 на стр. 343. Остается показать, что равновесных точек нет ниже прямой ED и выше прямой AB .

Действительно, пусть ниже прямой ED есть равновесие по Нэшу (x_1^n, x_2^n) . Тогда должно выполняться

$$(34) \quad \begin{cases} u_1(x_1^n, x_2^n) \geq u_1(x_1, x_2^n) & \forall x_1, \\ u_2(x_1^n, x_2^n) \geq u_2(x_1^n, x_2) & \forall x_2. \end{cases}$$

Но в этой области оптимальный отклик разработчика равен $\tilde{y}_2(x_1, x_2) = y_0$, и производная

$$(35) \quad \frac{\partial u_2(x_1, x_2)}{\partial x_2} = y_0 > 0,$$

что противоречит условиям (34).

Итак, мы показали, что если равновесие по Нэшу существует, то оно находится в области $OABCDE$. Выпуклость этой области

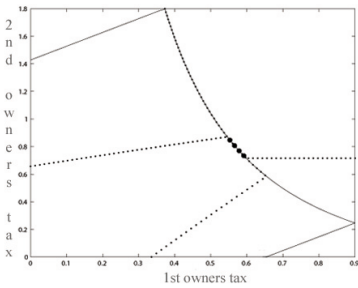


Рис. 7. Равновесие по Нэшу на границе области влияния, пространство стратегий

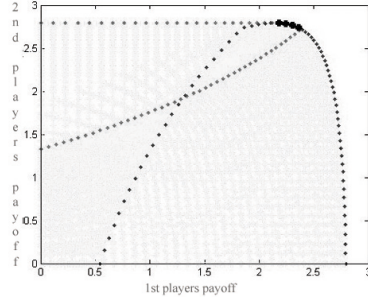


Рис. 8. Равновесие по Нэшу на границе области влияния, пространство выигрышей

очевидна, выпуклость вверх функций $u_1(x_1, x_2)$ и $u_2(x_1, x_2)$ есть утверждение теоремы 1. По теореме Нэша равновесие в игре G существует.

При различных значениях параметров задачи равновесие по Нэшу может лежать как внутри области $OABDE$, так и на ее границах, либо в области BCD . Первый случай показан на рис. 5. Точка (x_1^{opt}, x_2^{opt}) является решением следующей системы:

$$(36) \quad \begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = y_0 - \psi(x_2 - x_1) + x_1 \psi'(x_2 - x_1) = 0, \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \psi(x_2 - x_1) + x_2 \psi'(x_2 - x_1) = 0. \end{cases}$$

Переходя к новым переменным $\xi = x_1 + x_2$, $\eta = x_2 - x_1$, после несложных преобразований получаем систему

$$(37) \quad \begin{cases} \psi(\eta) + \frac{\eta}{2} \psi'(\eta) = \frac{y_0}{2}, \\ \xi = \frac{-y_0}{\psi'(\eta)} \end{cases}$$

Решение системы (36) (x_1^{opt}, x_2^{opt}) действительно будет равновесием по Нэшу, если эта точка является внутренней точкой области $OABDE$. Такое расположение равновесия проил-

люстрировано на рис. 5. При помощи преобразования $(x_1, x_2) \rightarrow (u_1(x_1, x_2), u_2(x_1, x_2))$ можно перейти в пространство выигрышей, как показано на рис. 6.

Наиболее интересным является случай, когда равновесные по Нэшу точки находятся на кривой BD . В этом случае равновесным является целый отрезок кривой BD . В пространстве выигрышей он представляет собой участок паретовской границы множества возможных исходов. Это показано на рис. 7 и рис. 8.

Границы этого отрезка можно найти следующим образом. Точка (x_1, x_2) кривой BD является равновесием тогда и только тогда, когда левые производные функций выигрыша в этой точке положительны, а правые отрицательны.

$$(38) \left\{ \begin{array}{l} F_1(x_1) = \varphi_1^{-1}(c_1 + x_1) + \\ + \frac{x_1}{\varphi_1'(\varphi_1^{-1}(c_1 + x_1)) + \varphi_2'(\varphi_2^{-1}(c_2 + x_2))} \Big|_{x_2=x_2(x_1)} > 0, \\ F_2(x_1) = \varphi_1^{-1}(c_1 + x_1) + \frac{x_1}{\varphi_1'(\varphi_1^{-1}(c_1 + x_1))} < 0, \\ F_3(x_1) = \varphi_2^{-1}(c_2 + x_2) + \\ + \frac{x_2}{\varphi_1'(\varphi_1^{-1}(c_1 + x_1)) + \varphi_2'(\varphi_2^{-1}(c_2 + x_2))} \Big|_{x_2=x_2(x_1)} > 0, \\ F_4(x_1) = \varphi_2^{-1}(c_2 + x_2) + \frac{x_2}{\varphi_2'(\varphi_2^{-1}(c_2 + x_2))} \Big|_{x_2=x_2(x_1)} < 0, \\ \varphi_1^{-1}(c_1 + x_1) + \varphi_2^{-1}(c_2 + x_2) = y_0. \end{array} \right.$$

Обозначим t_1, \dots, t_4 корни уравнений $F_1 = 0, \dots, F_4 = 0$ соответственно. Покажем, что каждая из функций F_1, \dots, F_4 имеет не более одного корня на отрезке $[\varphi_1(y_0) - c_1, \varphi_1(0) - c_1]$, соответствующем части кривой BD , заключенной между точками B и D .

Рассмотрим, например, функцию $F_3(x_1)$. С учетом (5) и равенства $c_1 + x_1 = \varphi_1(y_1)$, можно показать, что производная

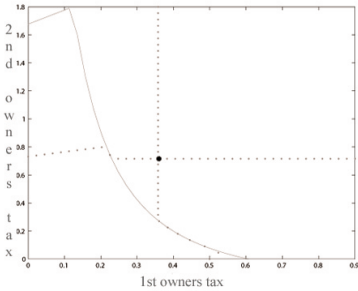


Рис. 9. Равновесие по Нэшу вне области влияния, пространство стратегий

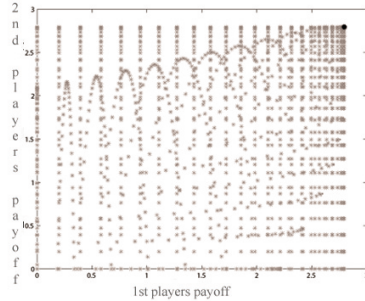


Рис. 10. Равновесие по Нэшу вне области влияния, пространство выигрышей

$$(39) \quad \frac{dF_3}{dx_1} < 0.$$

Аналогичный результат может быть получен для остальных функций. Из знакопостоянства производной следует единственность корня каждого из уравнений $F_1 = 0, \dots, F_4 = 0$ (они могут и не лежать между точками $[\varphi_1(y_0) - c_1$ и $\varphi_1(0) - c_1]$).

Точка t_2 всегда расположена левее точки t_1 , а точка t_3 – левее точки t_4 . Таким образом, отрезок, целиком состоящий из равновесий по Нэшу (мы запишем выражения только для координат x_1), является пересечением следующих трех множеств:

$$(40) \quad [x_1^l, x_1^r] = [\varphi_1(y_0) - c_1, \varphi_1(0) - c_1] \cap [t_2, t_1] \cap [t_3, t_4].$$

Рассмотрим, наконец, область BCD . В ней игроки первого уровня не оказывают влияния друг на друга, и равновесные стратегии находятся из уравнений типа (17). Если выполнено условие $y_1^* + y_2^* < y_0$, то найденная пара (x_1^*, x_2^*) действительно является равновесием и расположена внутри области BCD . Этот случай показан на рис. 9 и рис. 10.

Проиллюстрируем зависимость равновесия по Нэшу от параметров задачи. В случае, когда точки равновесия по Нэшу заполняют некоторый отрезок, мы будем изображать весь этот от-

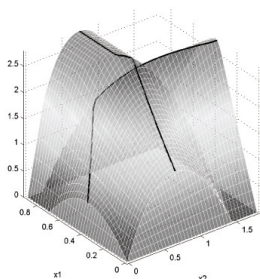


Рис. 11. Функции выигрыша игроков первого уровня

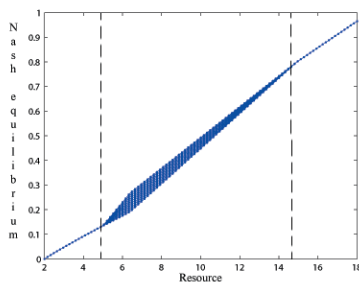


Рис. 12. Зависимость равновесия по Нэшу от количества ресурса

резок. Зависимость равновесия от начального количества ресурса (в симметричном случае) показана на рис. 12.

Замечание 3. В случае, когда множество равновесий по Нэшу – отрезок, игроки должны до начала игры договориться, какое именно равновесие они выберут. Рассматриваемый отрезок является в данном случае «переговорным множеством».

3.3. КООПЕРАЦИЯ ИГРОКОВ ПЕРВОГО УРОВНЯ

В случае сговора игроков первого уровня (в кооперативном случае) мы уже имеем дело не с двумя независимыми игроками первого уровня, а с одним игроком, стратегией которого является пара (x_1, x_2) . Его выигрыш складывается из выигрышей 1-го и 2-го игроков. Он решает следующую оптимизационную задачу:

$$(41) \quad u(x_1^{coop}, x_2^{coop}) = \max_{x_1, x_2 \geq 0} u(x_1, x_2) = \\ = \max_{x_1, x_2 \geq 0} (u_1(x_1, x_2) + u_2(x_1, x_2)).$$

Заметим, что максимум в (41) не может достигаться ниже кривой BD , т.к. игроки могут сместить свои стратегии вдоль линий $x_1 - x_2 = const$ до линии BD , увеличивая свой выигрыш. При таком согласованном увеличении налогов отклик разработ-

чика изменяться не будет, хотя его доходы будут падать. Значит, максимум достигается в области BCD .

Строгая выпуклость вверх функции u в области BCD следует из условия (5) (см. раздел 2). Покажем, что область BCD также выпукла. На кривой BD зависимость $x_2 = \gamma(x_1)$ задается уравнением (26). Покажем, что кривая BD лежит выше касательной к ней.

$$(42) \quad \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x_1^2} = \frac{\varphi_2''(\varphi_2^{-1}(c_2 + x_2)) + \varphi_1''(\varphi_1^{-1}(c_1 + x_1)) \frac{\varphi_2'(\varphi_2^{-1}(c_2 + x_2))}{\varphi_1'(\varphi_1^{-1}(c_1 + x_1))}}{(\varphi_1'(\varphi_1^{-1}(c_1 + x_1)))^2} \Bigg|_{x_2=\gamma(x_1)} > 0.$$

Из всего вышесказанного следует существование и единственность решения задачи (41). Так как $u_1 = 0$ при $x_1 = \varphi_1(0) - c_1$, а $u_2 = 0$ при $x_2 = \varphi_2(0) - c_2$, мы можем учитывать только ограничение кривой BD и переформулировать задачу.

$$(43) \quad \begin{cases} -x_1 \varphi_1^{-1}(c_1 + x_1) - x_2 \varphi_2^{-1}(c_2 + x_2) \rightarrow \min, \\ f(x_1, x_2) = \varphi_1^{-1}(c_1 + x_1) + \varphi_2^{-1}(c_2 + x_2) \leq y_0. \end{cases}$$

Запишем необходимые и достаточные условия минимума:

$$(44) \quad \begin{cases} \varphi_1^{-1}(c_1 + x_1) + \frac{\lambda - x_1}{\varphi_1'(\varphi_1^{-1}(c_1 + x_1))} = 0, \\ \varphi_2^{-1}(c_2 + x_2) + \frac{\lambda - x_2}{\varphi_2'(\varphi_2^{-1}(c_2 + x_2))} = 0, \\ \lambda f(x_1, x_2) = 0, \\ \lambda \geq 0. \end{cases}$$

При $\lambda \neq 0$ минимум достигается на BD и находится из следующих условий:

$$(45) \quad \begin{cases} \varphi_1^{-1}(c_1 + x_1)\varphi_1'(\varphi_1^{-1}(c_1 + x_1)) + x_1 = \\ = \varphi_2^{-1}(c_2 + x_2)\varphi_2'(\varphi_2^{-1}(c_2 + x_2)) + x_2, \\ \left(\frac{x_1}{\varphi_1'(\varphi_1^{-1}(c_1 + x_1))} + \frac{x_2}{\varphi_2'(\varphi_2^{-1}(c_2 + x_2))} \right) + y_0 < 0, \\ x_2 = \gamma(x_1). \end{cases}$$

Если же система (45) неразрешима, то решением задачи (41) будет пара решений (17) игры 1×1 для первого и второго регионов. В этом случае решение задачи о кооперации совпадает с равновесием по Нэшу. Очевидно, при таких условиях кооперация не играет роли.

4. Игра $N \times 1$

Рассмотрим игру, в которой участвуют $N \geq 2$ игроков первого уровня и один игрок второго уровня (N лидеров и один последователь). Будем считать, что игроки первого уровня симметричны, и ограничимся поиском симметричного решения игры. Запишем функцию выигрыша разработчика.

$$(46) \quad v(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^N [\omega(y_i) - (c + x_i)y_i].$$

Рассмотрим необходимые условия экстремума (являющиеся и достаточными условиями максимума вследствие сильной выпуклости вверх функции v по \mathbf{y}) вблизи симметричного равновесия по Нэшу. Предположим, что все игроки выбрали симметричные стратегии x^{eq} , а один отклонился от нее на малую величину.

$$(47) \quad \begin{cases} -\varphi(y_i) + c + x^{eq} - \lambda_i + \lambda_0 = 0, & i = 1, \dots, N-1, \\ -\varphi(y_N) + c + x_N - \lambda_N + \lambda_0 = 0, \\ \lambda_i y_i = 0, & i = 1, \dots, N, \\ \lambda_0 \left(\sum_{i=1}^N y_i - y_0 \right) = 0, \\ \lambda_i \geq 0, & i = 0, 1, \dots, N. \end{cases}$$

Найдем оптимальный отклик \mathbf{y}^{opt} в этом случае. Рассмотрим все возможные комбинации нулевых и ненулевых коэффициентов Лагранжа λ_i . Если $\lambda_0 = 0$, то игроки не влияют друг на друга, и игра распадается на N игр 1×1 . Необходимым и достаточным условием такого расположения максимума является выполнение следующего неравенства:

$$(48) \quad \varphi^{-1}(c + x^{eq}) < \frac{y_0}{N}.$$

Если же $\lambda_0 \neq 0$, то все $\lambda_i = 0, i = 1, \dots, N$ в силу симметрии задачи и малости отклонения N -го игрока. В этом случае получается система уравнений

$$(49) \quad \begin{cases} \lambda_0 = \varphi(y_i) - (c + x^{eq}) > 0, & i = 1, \dots, N - 1, \\ \lambda_0 = \varphi(y_N) - (c + x_N) > 0, \\ \sum_{i=1}^N y_i = y_0, \end{cases}$$

из которой получается следующее уравнение для y_N (учитывая симметрию поведения первых $N - 1$ игроков):

$$(50) \quad \varphi\left(\frac{y_0 - y_N}{N - 1}\right) - (c + x^{eq}) - \varphi(y_N) + (c + x_N) = 0.$$

Если все игроки, кроме N -го, придерживаются равновесных по Нэшу стратегий, то функция выигрыша N -го игрока $u_N(\mathbf{x}) = x_N y_N$ имеет максимум по x_N в равновесной точке. Найдем оптимальную стратегию N -го игрока при условии, что остальные игроки придерживаются стратегий x^{eq} . Равновесие по Нэшу мы найдем из условия $x_N^{opt} = x^{eq}$.

Если максимум $u_N(\mathbf{x})$ достигается в области, где игроки не влияют друг на друга, то x_N^{opt} и x^{eq} находятся по формулам раздела 2. Если же максимум достигается при активном ограничении, то его можно найти из следующего условия:

$$(51) \quad \frac{du_N}{dx_N} = y_N + x_N \frac{dy_N}{dx_N} = y_N + \frac{x_N}{\frac{1}{N-1} \varphi'(\frac{y_0 - y_N}{N-1}) + \varphi'(y_N)} = 0.$$

Учитывая, что $y_N = \frac{y_0}{N}$ при $x_N^{opt} = x^{eq}$, получаем уравнение

$$(52) \quad x_N^{opt} = x^{eq} = -\frac{y_0 \varphi'(\frac{y_0}{N})}{N - 1}.$$

Если же максимум достигается на изломе, то, как мы видели в разделе 3.2, равновесие по Нэшу неединственно. В симметричном случае эту проблему легко решить, выбрав симметричную точку

$$(53) \quad \mathbf{x}^{eq} = \left(\varphi \left(\frac{y_0}{N} \right) - c, \dots, \varphi \left(\frac{y_0}{N} \right) - c \right).$$

Запишем уравнения (50) и (52) для модельной функции (2).

$$(54) \quad qRe^{-q\frac{y_0-yN}{N-1}} - (c + x^{eq}) = qRe^{-qyN} - (c + x_N),$$

$$x_N^{opt} = x^{eq} = \frac{q^2 Ry_0 e^{-qy_0/N}}{N-1}.$$

Отметим следующий парадокс. В случае, когда равновесие по Нэшу достигается при активном ограничении, оптимальный отклик разработчика не зависит от количества ресурса R при симметричных налогах. Можно было бы ожидать, что и равновесие по Нэшу не зависит от R . Однако мы видим, что это не так. Дело в том, что количество ресурса влияет на устойчивость симметричного набора стратегий $\mathbf{x}^{eq} = (x, \dots, x)$ относительно малых отклонений одного игрока, поскольку при несимметричных налогах оптимальный отклик разработчика зависит от R . Таким неявным образом R оказывает влияние на равновесие по Нэшу.

Обсудим теперь влияние конкуренции на выигрыши игроков обоих уровней. Рассмотрим некий регион с количеством ресурса R_0 и коэффициентом плотности ресурса q_0 . Разделим его на n частей. При этом на каждую часть будет приходиться $R_n = R_0/n$ ресурса. Чтобы плотность ресурса $q_n R_n$ была одинаковой при любых n , нужно формально положить $q_n = q_0 n$. Тогда

$$(55) \quad \omega_n(y) = \frac{R_0}{n} (1 - e^{-q_0 n y}),$$

$$\varphi_n(y) = q_0 R_0 e^{-q_0 n y},$$

$$\varphi'_n(y) = -n q_0^2 R_0 e^{-q_0 n y}.$$

Исследуем зависимость от n выигрыша игрока второго уровня, а также суммарного выигрыша игроков первого уровня. Если равновесие по Нэшу достигается при пассивном ограничении, то зависимости от n нет, т.к. игроки в этом случае не оказывают

влияния друг на друга. Поэтому сосредоточимся на случае, когда равновесие по Нэшу достигается при активном ограничении y_0 . В этом случае

$$(56) \quad x^{eq}(n) = \frac{nq_0^2 R_0 y_0 e^{-q_0 y_0}}{n-1},$$

если выполнено

$$(57) \quad c + x^{eq}(n) < \varphi\left(\frac{y_0}{n}\right) = q_0 R_0 e^{-q_0 y_0}.$$

В этом случае суммарный выигрыш разработчиков равен

$$(58) \quad U_n = n x^{eq} \frac{y_0}{n} = q_0^2 R_0 y_0^2 e^{-q_0 y_0} \frac{n}{n-1} = \\ = q_0^2 R_0 y_0^2 e^{-q_0 y_0} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right).$$

В пределе при $n \rightarrow \infty$ выигрыш разработчиков падает до уровня

$$(59) \quad U_\infty = q_0^2 R_0 y_0^2 e^{-q_0 y_0}.$$

На рис. 13 показана зависимость суммарного выигрыша игроков первого уровня от налога x (несложно показать, что она одинаковая для всех n). На графике отмечены выигрыши в точках равновесия по Нэшу, которые выбирают игроки в условиях конкуренции при различных n . На рис. 14 то же показано для игрока второго уровня. Его выигрыш с ростом n увеличивается до предельного значения

$$(60) \quad v_\infty = R_0(1 - e^{-q_0 y_0}) - (c + q_0^2 R_0 y_0 e^{-q_0 y_0}) y_0.$$

Замечание 4. Заметим, что ситуация, когда при маленьких n равновесие достигается при пассивном ограничении, а при больших n – при активном, невозможна. Это следует из того, что в условии (48), как легко проверить, не входит n .

5. Заключение

В настоящей работе исследованы двухуровневые конфликтные системы, возникающие в задачах совместной разработки природных ресурсов. В этих системах игроки первого уровня устанавливают правила игры для игроков второго уровня. В одношаговой двухступенчатой игре (игре внутри сезона) между несколь-

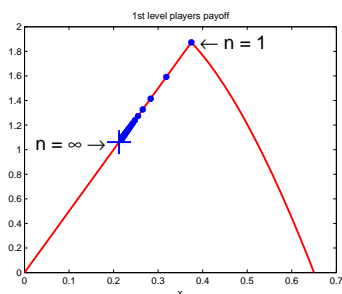


Рис. 13. Суммарный выигрыш игроков первого уровня в точке равновесия по Нэшу в зависимости от количества игроков

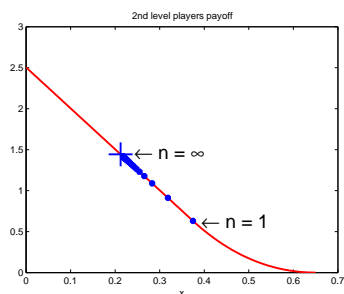


Рис. 14. Суммарный выигрыш игрока второго уровня в точке равновесия по Нэшу в зависимости от количества игроков

кими владельцами ресурса и разработчиком решена задача распределения усилий разработки по регионам при произвольных налогах, исследованы вопросы существования и единственности точки равновесия по Нэшу. Показано, что при определенных условиях точка равновесия по Нэшу будет неединственна, и получено полное описание множества таких точек. Получено аналитическое решение игры для случая 2-х владельцев и для N симметричных владельцев. Все рассуждения проведены для функций выигрыша из довольно общего класса. Кроме того, исследованы эффекты кооперации владельцев, а также поведение решения при увеличении числа независимых владельцев. Показано, что увеличение числа владельцев приводит к перераспределению доходов между владельцами и разработчиком (в пользу разработчика), однако на объеме разработки это не сказывается.

Рассмотренная здесь задача допускает ряд обобщений. В-первых, большой интерес представляют задачи с произвольным количеством как владельцев, так и разработчиков. Полное аналитическое исследование таких задач чрезвычайно громоздко и практически невозможно. При численном моделировании следу-

ет считаться с такой особенностью задачи, как неединственность равновесия по Нэшу. Другим важным обобщением задачи является рассмотрение игры в динамике, особенно интересное для возобновляемых природных ресурсов. Для решения таких задач, в которых происходит частичное восстановление ресурса в межсезонье, применяется метод динамического программирования. Отдельный интерес представляют задачи нахождения стационарных решений.

Литература

1. МУЛЕН Э. *Теория игр с примерами из математической экономики*. – Москва: Мир, 1985.
2. ОУЭН Г. *Теория игр*. – Москва: Мир, 1971.
3. CLARK C.W. *Restricted access to common-property fishery resources: a game-theoretic analysis* // *Dynamic Optimization and Mathematical Economics* (Eds. Liu, P.-T.). – New York: Plenum, 1980. – P. 117–132
4. GOLUBTSOV P.V., MCKELVEY R. *The Incomplete-Information Split-Stream FishWar: Examining the Implications of Competing Risks* // *Natural Resource Modeling*. – 2007. – Vol. 20, № 2. – P. 263–300.
5. HOMANS F.R., WILEN J.E. *A Model of Regulated Open Access Resource Use* // *Journal of environmental economics and management*. – 1997. – Vol. 32. – P. 1–21.
6. LEVHARI D., MIRMAN L.J. *The great fish war: an example using a dynamic Cournot-Nash solution* // *Bell Journal of Economics*. – 1980. – Vol. 11. – P. 322–344.
7. LUENBERGER D.G. *Linear and Nonlinear Programming*. – Addison-Wesley, 1984.
8. MCKELVEY R. *Game-theoretic Insights into the international management of fisheries* // *Natural Resource Modeling*. – 1997. – Vol. 10, № 2.
9. MCKELVEY R., GOLUBTSOV P. *A Regional Fisheries Strategic Management Game* // *Natural Resource Modeling*. – 2010. (submitted)

10. MCKELVEY R., GOLUBTSOV P.V. *The Effects of Incomplete Information in Stochastic Common-Stock Harvesting Games* // *Advances in Dynamic Games, AISDG*. – 2006. – Vol. 8. – P. 253–292.
11. MCKELVEY R., GOLUBTSOV P., MILLER K., CRIPE G. *Binational Management of a Transboundary Marine Fishery: Modeling the Destabilizing Impacts of Erratic Climatic Shifts. Climate Change and the Economics of the World's Fisheries: Examples of Small Pelagic Stocks* (Eds. R. Hannesson, M. Barange, S. Herrick Jr.). – Edgar Elgar Press, 2006. – P. 236–261.
12. MILLER K., GOLUBTSOV P., MCKELVEY R. *Fleets, Sites and Conservation Goals: Game Theoretic Insights on Management Options for Multinational Tuna Fisheries*. In *World Fisheries: a social-ecological analysis* (Eds. R. Ommer, I. Perry, P. Cury, K. Cochrane). – Wiley-Blackwell, 2010.

TWO-LEVEL COMPETITIVE STRUCTURES IN COMMON RESOURCE DEVELOPMENT

Yury Korolev, Moscow State University, Moscow, post-graduate student (um.korolev@physics.msu.ru),

Peter Golubtsov, Moscow State University, Moscow, Doctor of Science, professor (pgolubtsov@gmail.com).

Abstract: This paper studies the effects of owner-developer interaction in resource development. Resource is supposed to be allocated among several proprietors, and several companies are permitted to develop it. Marine fishery gives one of the most interesting examples. We study this game in the context of multinational management of transboundary marine fishery. It is well known that unconstrained harvesting often leads to resource depletion. This effect is often called "the tragedy of commons". The situation becomes more complex when we take into account competition among resource proprietors. Such interaction can be described as a game with players of two different types: proprietors and developers, called first- and second-level players, respectively. The first-level players establish the rules (taxes on development efforts) for the second-level players, who, in their turn, optimize their strategies reasoning from these rules. Every developer receives profit from resource selling and returns part of it to the owner as a tax. The systems described here appear in management problems for energy resources, mineral resources, biological resources, water resources, etc.

Keywords: optimal resource management, common natural resources, tragedy of commons, two level games, Nash equilibrium, Stackelberg game with multiple leaders, mathematical modeling.

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии В. В. Мазаловым*