

УДК 519.17: 681.3
ББК 78.34

КОМПАКТНЫЕ СТРУКТУРЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ И ИХ СИНТЕЗ

Мелентьев В. А.¹

(Институт физики полупроводников СО РАН
им. А.В. Ржанова, Новосибирск)

Одной из насущных проблем управления вычислительными системами (ВС) является критичность ко времени реализации управляющих воздействий. Своевременность управляющих воздействий в процессе функционирования ВС во многом определяется компактностью ее структуры, обеспечивающей минимум числа транзитов при реализации межмодульных взаимодействий. Компактные структуры ВС определены как s -регулярные графы порядка n с минимально возможным диаметром. Дано сопоставление этих графов с (s, g) -клеточными графами. Описан метод синтеза компактных графов, заключающийся в составлении и решении системы вершинно-полных проекций с минимально возможным числом уровней. Даны примеры полученных таким образом $n(s)$ -компактных графов.

Ключевые слова: компактные структуры вычислительных систем, компактные графы, проекция графа, синтез компактных структур.

1. Введение

Тенденция к глобализации вычислительных и информационных ресурсов неразрывно связана с поиском моделей, предоставляющих не только возможности детерминированного синте-

¹ Виктор Александрович Мелентьев, кандидат технических наук (melva@isp.nsc.ru).

за крупномасштабных вычислительных систем и компьютерных сетей (далее по тексту – систем, или ВС), но и возможности использования этих моделей для адекватного и безусловно актуализированного оперативного управления функционированием этих систем с целью сохранения ими функциональной и информационной целостности. Под актуализированным управлением здесь понимается то, что временной интервал от момента изменения состояний системы или отдельных ее элементов до момента завершения непосредственного реагирования на эти изменения в системе не превышает некоторое критическое значение, определяющее временную границу рациональности этого реагирования (управляющего воздействия). К примеру, запаздывание управляющих воздействий (превышение временного интервала над критическим его значением) на разгрузку линий электропередачи может привести не только к потере устойчивости энергосистемы, но и к катастрофическим для нее последствиям.

Факторами запаздывания управляющей информации, приводящими к ее устареванию и вследствие этого к неэффективному, а в некоторых случаях и небезопасному управлению, могут быть: недостаточная оперативность подсистем мониторинга состояний системы и ее элементов, недостаточная эффективность алгоритмов интерпретации состояний и выработки управляющих воздействий и *сетевые задержки* в доставке как информации об изменении состояния, так и соответствующей этим изменениям управляющей информации. Фактор задержек наряду с качеством используемых в системе каналов и протоколов связи определяется ее структурой: наличие транзитных модулей, характерное для неполносвязных систем, увеличивает задержки пропорционально числу транзитов.

Оптимизация структуры ВС по критерию задержек позволяет высвободить дополнительные временные резервы для использования более качественных (хоть и времязатратных) алгоритмов интерпретации состояний и выработки управляющей информации. Таким образом, выбор структуры с минимальными задержками межмодульных взаимодействий является одним из важнейших факторов, определяющих управляемость системы и ее устойчивость. Добавим к этому особую критичность к времени реакции (следовательно, и к структуре) на

конфигурационные изменения отказоустойчивых ВС: промедление в локализации неисправностей может привести к каскадному их развитию и соответствующим катастрофическим последствиям и для самой системы, и для объектов ее управления.

Решению проблем «поиска и исследования новых, более эффективных, чем известные, структур связей сложных информационных систем (в том числе многопроцессорных и многомашинных вычислительных и управляющих систем)» [1], «вносящих задержки в распространение сигналов», посвящены многие работы, например, [2, 9]. Проблемы синтеза структур с заданными коммуникационными характеристиками традиционно решаются методами теории графов. При этом между множеством модулей системы и множеством вершин графа, а также между множеством линий связи и ребер графа устанавливаются взаимно однозначные соответствия, а задержки в системах и сетях характеризуют метрическими характеристиками соответствующих им графов: диаметром, радиусом и эксцентриситетами вершин графа [10]. Поэтому, анализируя в данной работе графы и оптимизируя их метрические характеристики, мы имеем в виду прежде всего структуры систем и сетей связи и оптимизацию соответствующих этим структурам коммуникационных свойств.

Известные исследования устойчивости систем к случайному и/или преднамеренному удалению вершин из описывающих их графов свидетельствуют о большей устойчивости регулярных структур, характеризуемых распределением степени вершин с не более чем тремя несовпадениями [13]. Поэтому объектом исследования в данной работе являются регулярные структуры (графы ВС с заданной степенью вершин).

К сожалению, ни в теории сетей и систем, ни в фундаментальной ее основе – теории графов, проблематика генерации структуры системы (ее графа) с заданными свойствами систематическими методами, исключая необходимость перебора, практически не исследована. В теории графов сложилась парадоксальная ситуация, когда объекты ее изучения классифицируются по некоторым признакам, исследуются типичные представители соответствующих классов, делаются попытки перечислить или хотя бы оценить количество этих представите-

лей... Порой анализ случайным образом полученного графа выявляет отличие его свойств от уже классифицированных, и граф объявляется типичным представителем нового класса. При этом за очень редким исключением (например, гиперкубов) формализованные способы синтеза графов со свойствами, определяющими их принадлежность к тому или иному классу, отсутствуют.

Наиболее распространенными методами решения проблемы синтеза структур с заданными свойствами являются стохастические методы, состоящие в генерации случайных графов с их фильтрацией по соответствующим заданным свойствам критериям [12, 14] или основанные на генетических подходах. Однако в этом случае допустимо говорить лишь о вероятностно-оптимальном синтезе, определяемом размером выборки или мощностью случайно сгенерированной первоначальной популяции, и недетерминированность результатов такого синтеза может привести к непредсказуемым деструктивным последствиям в процессе функционирования системы.

Возможности детерминированного синтеза структур ВС в настоящее время мало изучены. Это связано с тем, что традиционно используемый аппарат анализа и преобразований графов основан на недостаточно формализованных и информационно емких описаниях. В работах [4, 5] впервые предложен способ описания графа скобочными его проекциями, изначально содержащими не только информацию о смежности вершин, но и об их достижимости, что исключает необходимость временных затрат на поиск кратчайших маршрутов; в работах [6, 7] предложено использовать такие проекции в процессе оперативного управления, в частности, в процессах реконфигурации отказоустойчивых ВС. Аналитический подход к синтезу регулярных графов с заданными значениями его порядка, степени и обхвата, основанный на представлении структуры проекциями графа ВС, впервые предложен в [8].

Итак, глобализация информационных и вычислительных ресурсов требует организации эффективного управления соответствующими системами, как в аспекте их функциональной целостности, так и с позиций устойчивости функционирования. Устойчивость системы в процессе функционирования определя-

ется адекватностью и своевременностью ее реакции на возникающие ситуации. Своевременность и рациональность управляющих воздействий во многом определяются структурой сети связи, являющейся, таким образом, неотъемлемой компонентой подсистем управления функционированием больших систем.

В данной работе в рамках задачи генерации регулярных структур ВС по критерию задержек введено понятие компактных структур (графов системы), дано их сопоставление с клеточными [11] и определены условия компактности. Предложен способ синтеза компактного графа с заданными значениями порядка и степени, основанный на построении базовой проекции остовного подграфа и исходной системы проекций этого суграфа, на совместном решении этой системы путем доопределения ее исходных проекций до реберной полноты. Приведены примеры сгенерированных таким образом графов.

2. Основные положения

В данном разделе приведены некоторые используемые в работе определения [11] и общие сведения о проекциях графа.

Регулярный граф – связный граф $G(V, E)$, степени $\text{deg}(v_i) = s_i$ всех вершин $v_i \in V$ которого равны между собой; при этом степень s называется степенью $s(G)$ регулярного графа G .

Эксцентриситет вершины – для данной вершины $u \in V$ графа $G(V, E)$ величина $e(u) = \max_{u, v \in V} \partial(u, v)$, где $\partial(u, v)$ – расстояние между вершинами u и v .

Диаметр – наибольшее расстояние между вершинами связного графа: $d(G) = \max_{u \in V} e(u)$.

Радиус графа – минимальный из эксцентриситетов вершин связного графа: $r(G) = \min_{u \in V} e(u)$.

Проекция $P(v_j)$ графа $G(V, E)$ представляет собой многоуровневую конструкцию, на нулевом уровне которой расположена вершина $v_j \in V$, выбранная в качестве ракурсной; порожденное ею подмножество вершин первого уровня $V_{1j} \subset V$ содержит все вершины ее окружения $\mathcal{L}(v_j)$, а i -й уровень ($i \geq 1$)

представляет собой совокупность подмножеств вершин, каждое из которых порождено вершиной $(i - 1)$ -го уровня и является окружением этой вершины без тех его вершин, что предшествуют ей в данной проекции. Таким образом, отношение «предшествования вершины/порождения подмножества» фактически моделирует отношение смежности предшествующей вершины вершинам порожденного ею подмножества. Формальная запись этих отношений в скобочном описании двух произвольно взятых соседних уровней проекции графа имеет вид

$$v_{i1}^{V_{i+1,1}}, \dots, v_{ij}^{V_{i+1,j}},$$

где вершины v_{i1} и v_{ij} одного из подмножеств i -го уровня предшествуют и смежны вершинам порожденных ими подмножеств $V_{i+1,1}$ и $V_{i+1,j}$ вышестоящего $(i + 1)$ -го уровня. Технология построения скобочных описаний графа и их свойства достаточно подробно представлены в работах [4, 5] и обобщены в [8], поэтому здесь остановимся лишь на некоторых используемых в данной работе свойствах.

Вершине v_{ij} k -уровневой проекции $P_k(v_0)$, построенной из ракурсной вершины v_0 , соответствует упорядоченное множество вершин $W(v_{ij}) = (v_0, v_{i0}, \dots, v_{ij})$, представляющее собой простую цепь из v_0 в v_{ij} , длина этой цепи $\partial(v_0, v_{ij}) = i$. В общем случае некоторые (за исключением ракурсной) вершины проекции $P_k(v_0)$ могут быть m_{ij} -кратными: $0 \leq m_{ij} \leq \sum_i C_i - \sum_i |V_i|$, где C_i – число элементов i -го уровня проекции $P_k(v_0)$, а $V_i \subset V$ – множество вершин графа, представленных i -м уровнем проекции. Отличие m_{ij} от единицы означает наличие соответствующего числа простых цепей из ракурсной вершины v_0 в вершину v_{ij} .

В [5] показано, что номер i уровня в проекции $P(v_0)$ определяет удаленность вершин V_i этого уровня от ракурсной вершины v_0 а также то, что уровень k_e , впервые доопределяющий множество вершин всех нижерасположенных уровней проекции графа $G(V, E)$ до V , соответствует эксцентриситету $e(v_0)$ ракурсной вершины v_0 в проекции $P(v_0)$:

$$(1) \quad e(v_0) = k_e \left| \bigcup_{i=0}^{k_e-1} V_i \subset V, \bigcup_{i=0}^{k_e} V_i = V \right|.$$

Назовем это условие для числа уровней условием вершинной полноты проекции. Однако реализации этого условия в

проекция не всегда достаточно для определения всех ребер описываемого ею графа. Проекция $P_k(v_0)$ графа $G(V, E)$ является полной, если ею определены все вершины и все ребра (отношения смежности) этого графа. Необходимые условия полноты проекции могут быть записаны следующим образом:

$$\bigcup_{i=0}^k V_i = V \text{ и } \bigcup_{i=0}^k E_i = E;$$

здесь $E_i = \{e_{uv} \mid u \in V_{i-1}, v \in V_i\}$ – множество ребер, инцидентных парам вершин соседних уровней проекции. Нетрудно заметить, что первое из этих условий (условие вершинной полноты) поглощается вторым (условием реберной полноты проекции), таким образом, условие реберной полноты является и условием полноты проекции графа.

Отметим здесь также доказанное в [5] свойство о числе уровней в полной проекции графа, согласно которому минимальное число уровней $k = k_{\min}(v_0)$ в проекции $P_k(v_0)$ связного простого графа $G(V, E)$, достаточное для полноты его представления, не меньше эксцентриситета $e(v_0)$ ракурсной вершины v_0 и не превышает увеличенного на единицу его значения:

$$(2) \quad k_{\min}(v_0) = \begin{cases} e(v_0), & A(u, v) = 0 \\ e(v_0) + 1, & A(u, v) = 1. \end{cases}$$

Предикат $A(u, v)$ будет истинным, если в множестве V_e вершин уровня рассматриваемой проекции с номером, равным эксцентриситету $e(v_0)$ ракурсной вершины v_0 этой проекции, найдется хотя бы 2 смежные вершины $u, v \in V_e$, $\partial(u, v) = 1$, равноотстоящие от ракурсной вершины v_0 на величину ее эксцентриситета $e(v_0)$, т.е. $\exists \{u, v \in V_k \mid \partial(v_0, u) = \partial(v_0, v) = e(v_0) \text{ и } \partial(u, v) = 1\}$.

Приведенные ниже и используемые в последующих разделах леммы являются следствиями доказанного в [8] утверждения, констатирующего, что обхват $g(G)$ графа $G(V, E)$, заданного проекцией $P(v_0)$, не превышает минимальной из сумм номеров ее уровней, содержащих одноименную вершину. Число повторений вершины $u \in V$ в проекции назовем ее кратностью и обозначим m_u .

Лемма 1. Если в проекции $P_k(v_0)$ графа $G(V, E)$ с числом уровней $k = e(v_0)$ кратность m_u вершины $u \in V$ больше единицы, то обхват графа $g(G)$ не превышает минимальной из сумм номеров уровней двух подмножеств, включающих в себя эту вершину:

$$\exists u \in V (m_u > 1) \Rightarrow g(G) \leq x_1 + x_2, \text{ где}$$

$$x_1, x_2 \in \vec{X} = (x_1, \dots, x_{m_u} = i \mid i = \overline{(1, e(v_0))}, u \in V_{ij}).$$

Лемма 2. Если в проекции $P_k(v_0)$ графа $G(V, E)$ с числом уровней $k = e(v_0)$ вершины, кратность которых больше единицы, отсутствуют, т.е. $\forall u \in V m_u = 1$, то граничные значения обхвата $g(G)$ определены выражением $e(v_0) + 2 \leq g(G) \leq 2e(v_0) + 1$.

3. Компактные графы

Максимально возможное при степени графа s число вершин $C_i(s)$ отличного от нуля i -го уровня проекции $P(v_0)$, $v_0 \in V$, регулярного простого графа $G(V, E)$ определено выражением

$$(3) \quad C_i(s) = s(s-1)^{i-1},$$

а максимальное число вершин $N_d(s)$ регулярного графа, которое можно поместить на d уровнях проекции, соответствует максимальному порядку графа G с диаметром d :

$$(4) \quad N_d(s) = 1 + s \sum_{i=1}^d (s-1)^{i-1}.$$

В разделе 2 дано условие (1) вершинной полноты проекции графа. Таким образом, синтез графа $G(V, E)$ порядка n с диаметром $d(G)$ сводится к такому размещению вершин на каждой из n проекций этого графа, при котором число уровней в проекциях, обусловленное выражением (1), не превысит заданный диаметр. Из множества задач синтеза регулярных графов с заданными значениями порядка n и степени s вычленим задачи синтеза графов с минимально возможными при этих n и s диаметрами. Компактность топологии таких графов предопределило и используемое нами название $n(s)$ -компактных.

Из (4) определим максимальное число вершин, которое возможно разместить на $(d - 1)$ -м уровне проекции регулярного графа:

$$N_{d-1}(s) = 1 + s \sum_{i=1}^{d-1} (s-1)^{i-1}.$$

Если в (4) определено максимальное для заданного диаметра d значение порядка n , то данным здесь выражением определен максимально возможный порядок графа с уменьшенным на единицу диаметром. Тогда условие компактности графа, соответствующее порядку и диаметр графа его степени, можно записать в следующем виде:

$$(5) \quad 1 + s \sum_{i=1}^{d-1} (s-1)^{i-1} < n(s) \leq 1 + s \sum_{i=1}^d (s-1)^{i-1}.$$

Итак, регулярный граф $G(V, E)$ порядка n , степени s с минимально возможным при заданных значениях n и s диаметром d назовем $n(s)$ -компактным графом. Заметим, что в компактном $n(s)$ -графе все вершины являются центральными, так как диаметр d компактного графа минимален по определению, а наличие в таком графе вершин с эксцентриситетами, меньшими диаметра, исключено условием (5). Из этого же следует и равенство диаметра $n(s)$ -компактного графа минимальному из эксцентриситетов вершин в графе, т.е. его радиусу. Например, для двух крайних в отношении степени s регулярных графов $s = 2$ (циклический граф) и $s = n - 1$ (полный граф) $r(n, s) = d(n, s)$ и, соответственно, $r(n, 2) = d(n, 2) = \lceil n/2 \rceil$ и $r(n, n - 1) = d(n, n - 1) = 1$. Все вершины этих графов являются центральными, а сами графы, соответственно, $n(2)$ - и $n(n - 1)$ -компактными. Однако равенство радиуса диаметру не является определяющим свойством компактных графов и осуществимо не только для них. В [8] показано, что в $8(3)$ -компактном графе с $n = 8$, $s = 3$ радиус $r(8, 3) = 2$ и диаметр $d(8, 3) = 2$ минимальны. Единичный же куб того же порядка $n = 8$ обладает хотя и равными, но большими, чем определено в (5), значениями радиуса и диаметра ($r = d = 3$) и потому компактным не является.

Итак, если порядок $n(s)$ -компактного графа $G(V, E)$ равен верхнему граничному значению $N_d(s)$, то двух- и более кратные вершины в любой его проекции $P_d(v_j)$, $v_j \in V$, отсутствуют ($\forall u \in V$

$m_u = 1$), и значения обхвата g в таком графе (см. лемму 2) ограничены в соответствии с выражением $d + 2 \leq g(G) \leq 2d + 1$.

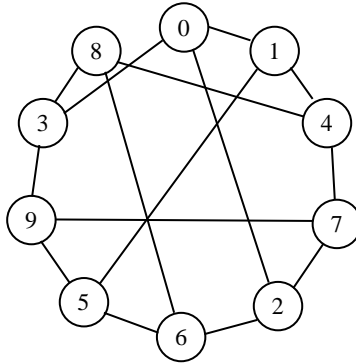


Рис. 1. 10(3)-компактный граф с обхватом $g = 5$

Рассмотрим представленный на рис. 1 10(3)-компактный граф с диаметром $d = 2$. Порядок этого графа равен максимальному числу вершин $n = N_2(3) = 10$ в его двухуровневой проекции. Это исключает возможность повторения вершин ($m = 1$) в любой двухуровневой его проекции $P_2(v_j)$, $v_j \in V$. Из рисунка, как и из приведенной ниже системы проекций, видно, что обхват этого графа равен максимально возможному $g = 2d + 1 = 5$. Таким образом, есть все основания полагать, что граф степени $s = 3$, обхвата $g = 5$ и порядка $n = 10$ является (3, 5)-клеткой и изоморфен графу Петерсена (рис. 2).

$$\begin{aligned}
 P_2(0) &= 0^{\{1^{[4,5]}, 2^{[6,7]}, 3^{[8,9]}\}}, & P_2(1) &= 1^{\{0^{[2,3]}, 4^{[7,8]}, 5^{[6,9]}\}}, \\
 P_2(2) &= 2^{\{0^{[1,3]}, 6^{[5,8]}, 7^{[4,9]}\}}, & P_2(3) &= 3^{\{0^{[1,2]}, 8^{[4,6]}, 9^{[5,7]}\}}, \\
 P_2(4) &= 4^{\{1^{[0,5]}, 7^{[2,9]}, 8^{[3,6]}\}}, & P_2(5) &= 5^{\{1^{[0,4]}, 6^{[2,8]}, 9^{[3,7]}\}}, \\
 P_2(6) &= 6^{\{2^{[0,7]}, 5^{[1,9]}, 8^{[3,4]}\}}, & P_2(7) &= 7^{\{2^{[0,6]}, 4^{[1,8]}, 9^{[3,5]}\}}, \\
 P_2(8) &= 8^{\{3^{[0,9]}, 4^{[1,7]}, 6^{[2,5]}\}}, & P_2(9) &= 9^{\{3^{[0,8]}, 5^{[1,6]}, 7^{[2,4]}\}}.
 \end{aligned}$$

Изоморфизм представленных этими рисунками графов определен отображением

$$\varphi: (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) \rightarrow (1, 3, 4, 6, 5, 8, 9, 2, 10, 7).$$

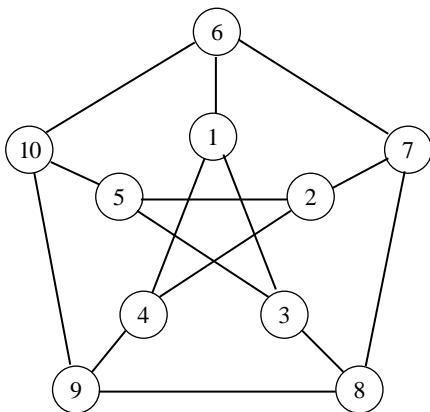


Рис. 2 Граф Петерсена – (3, 5)-клетка

Напомним, что (s, g) -клеточный граф представляет собой s -регулярный граф с обхватом g , имеющий минимально возможное число $n(s, g)$ вершин. Нижняя граница числа n_l вершин в (s, g) -клетке определяется выражением

$$(6) \quad n_l(s, g) \geq \begin{cases} 1 + s \sum_{i=0}^{(g-3)/2} (s-1)^i & - \text{нечетные } g, \\ 2 \sum_{i=0}^{(g-2)/2} (s-1)^i & - \text{четные } g; \end{cases}$$

притом что графы, порядок которых равен этой границе, называют графами Мура [11]. Граф Мура определяют также регулярным графом порядка $n = s^2 + 1$ и диаметра $d = 2$, степень которого $s \geq 2$ [3]. В данном случае $s = 3$ и $n = 10$. Подставив в (5) значение $d = 2$ и в (6) значение $g = 5$, получим равенство верхней границы порядка (3, 2)-компактного графа нижней границе числа вершин (3, 5)-клетки, что подтверждает вхождение графов Мура (и графа Петерсена в том числе) в число компактных.

Из определения клеточного графа и из (6) следует прямая зависимость нижней границы числа $n_l(s, g)$ его вершин от обхвата. Такая зависимость числа $n(s, g)$ вершин клеточных графов от их степени ($n_l(s-1, g) < n(s, g) < n_l(s+1, g)$) и от обхвата ($n_l(s, g-1) < n(s, g) < n_l(s, g+1)$) подтверждается также практи-

кой построения клеточных (s, g) -графов (обращаем здесь внимание на то, что нижняя граница числа $n_l(s, g)$ вершин (s, g) -клетки, в отличие от самого этого числа $n(s, g)$, помечена индексом l). Таким образом, можно обусловить не только общеизвестную нижнюю, но и верхнюю границу числа вершин в клеточных графах. Подставив в (6) уменьшенные на единицу значения s и g , убедимся в том, что $n_l(s, g)$ заведомо больше любого из $n_l(s - 1, g)$, $n_l(s, g - 1)$ и больше порядков $n(s - 1, g)$ и $n(s, g - 1)$ соответствующих известных клеток; следовательно, уточнение $n_l(s, g)$ через использование $n_l(s - 1, g)$, $n_l(s, g - 1)$, $n(s - 1, g)$ и $n(s, g - 1)$ лишено смысла. Подставив в (6) увеличенные на единицу значения s или g

$$n_l(s + 1, g) \geq \begin{cases} 1 + (s + 1) \sum_{i=0}^{(g-3)/2} s^i & \text{— нечетные } g, \\ 2 \sum_{i=0}^{(g-2)/2} s^i & \text{— четные } g, \end{cases}$$

$$n_l(s, g + 1) \geq \begin{cases} 2 \sum_{i=0}^{(g-1)/2} (s - 1)^i & \text{— нечетные } g, \\ 1 + s \sum_{i=0}^{(g-2)/2} (s - 1)^i & \text{— четные } g; \end{cases}$$

получим ограничение сверху порядка $n(s, g)$ клеточного графа меньшими из этих значений. Тогда области определения минимального числа вершин в (s, g) -клетке определятся соответственно из (7.1) — для нечетных и (7.2) — для четных значений g :

$$(7.1) \quad 1 + s \sum_{i=0}^{(g-3)/2} (s - 1)^i \leq n(s, g) < \min \{n_l(s + 1, g), n_l(s, g + 1)\},$$

$$(7.2) \quad 2 \sum_{i=0}^{(g-2)/2} (s - 1)^i \leq n(s, g) < \min \{n_l(s + 1, g), n_l(s, g + 1)\}.$$

В соответствии с леммой 2 максимальные четное и нечетное значения обхватов компактного графа равны соответственно $g = 2d$ и $g = 2d + 1$. Диаметры компактных графов с четными обхватами — $d = g/2$ и с нечетными — $d = (g - 1)/2$. Подставив эти значения в (5), получим:

для нечетных g

$$1 + s \sum_{i=1}^{(g-3)/2} (s - 1)^{i-1} < n(s) \leq 1 + s \sum_{i=1}^{(g-1)/2} (s - 1)^{i-1},$$

$$1 + s \sum_{i=1}^{(g-2)/2} (s - 1)^{i-1} < n(s) \leq 1 + s \sum_{i=1}^{g/2} (s - 1)^{i-1}.$$

Приведя пределы суммирования к принятым в (7.1) и (7.2), получим для нечетных g

$$(8.1) \quad 1 + s \sum_{i=0}^{(g-5)/2} (s-1)^i < n(s) \leq 1 + s \sum_{i=0}^{(g-3)/2} (s-1)^i$$

и для четных g

$$(8.2) \quad 1 + s \sum_{i=0}^{(g-4)/2} (s-1)^i < n(s) \leq 1 + s \sum_{i=0}^{(g-2)/2} (s-1)^i .$$

Сравнив (7.1) с (8.1), обнаружим, что область определения $n(s, g)$ -клеточных графов с нечетными значениями обхвата g пересекается с соответствующей областью определения $n(s)$ -компактных графов нижним пределом первых с верхним пределом вторых, т.е. согласно [11] это (3, 5)-, (7, 5)- и, возможно, (57, 5)-клетки (графы Мура). Представительство клеточных графов с четными значениями обхвата g в множестве компактных графов также не исключено: верхний предел порядка $n(s)$ компактных графов с четными g в (8.2) заведомо больше соответствующего нижнего предела числа вершин $n(s, g)$ -клеточных графов в (7.2).

В следующем разделе дано описание предложенного автором метода синтеза и приведены примеры полученных с использованием этого метода $n(s)$ -компактных графов.

4. Синтез компактных графов

В [8] впервые представлен аналитический подход к синтезу регулярных графов с заданными значениями их порядка, степени, диаметра и обхвата. В целях конкретизации подхода для введенных здесь компактных графов последовательность действий по их синтезу необходимым образом дополнена.

1. Из (3) получим корреспондируемое заданными значениями порядка n и степени/диаметра значение диаметра/степени компактного графа. Введем однозначную разметку n вершин графа и выберем произвольную вершину в качестве ракурсной вершины базовой d -уровневой проекции не имеющего циклов остовного подграфа синтезируемого графа с заданными значениями порядка n , степени s и диаметра d . Определим число m двух- и более кратных вершин: $m = N_d(s) - n(s)$, где $N_d(s)$ определим из (4). Если число m равно нулю, то максимальный об-

хват g (при реальности такого графа с этим значением g) в соответствии с леммой 3 составит $g = 2d + 1$.

2. Построим базовую d -уровневую остовную проекцию $P'_d(v_0)$ синтезируемого $n(s)$ -компактного графа $G(V, E)$, выбрав в качестве ракурсной вершины v_0 любую из произвольным образом пронумерованных вершин, $v_0 \in V$. Описываемый проекцией $P'_d(v_0)$ граф $G'(V, E') \subset G(V, E)$ является каркасом (остовным деревом) искомого графа с корнем в v_0 . Он включает в себя все вершины графа с единичной кратностью ($m_u = 1, u \in V$) и не содержит циклов. Размещение n вершин на d уровнях этой проекции может быть произвольным, но, повторимся, таким, чтобы построенная проекция была вершинно-полной:

$$\bigcup_{i=0}^d V_i = V, \text{ или } \sum_{i=0}^d |V_i| = |V|.$$

Вершины V_1 , расположенные на первом уровне базовой проекции $P'_d(v_0)$, являются окружением $\mathcal{N}(v_0)$ ракурсной вершины v_0 , и их число $|V_1|$ равно степени s синтезируемого графа; на остальных уровнях этой проекции число вершин $|V_i|$ при $2 < i \leq d$ может быть меньшим, чем число $C_i(s)$ элементов этого уровня, определяемое из (3). В этом случае число $|V_{i+1}|$ вершин $(i + 1)$ -го уровня будет меньше числа $C_{i+1}(s)$, т.е. $|V_{i+1}| \leq |V_i| \cdot (s - 1)$. Разность $C_i(s) - |V_i|$ равна числу неизвестных на i -м уровне проекции $P'_d(v_0)$ элементов.

3. Соответствующие базовой проекции $P'_d(v_0)$ окружения $\mathcal{N}(v_j)$ вершин сведем в список $\mathcal{N}(G) = (\mathcal{N}(v_j) \mid v_j \in V)$.

Вершины $v_j \in V$, окружения которых пока не определены полностью ($|\mathcal{N}(v_j)| < s$), включим во множество $V' = \{v_j \in V \mid |\mathcal{N}(v_j)| < s\}$. Окружения $\mathcal{N}(v_j)$ этих вершин $v_j \in V'$ дополняем потенциальными подмножествами $\mathcal{N}_p(v_j) = \{V' \setminus \{W(v_0, v_j)\}_x\}$, нижний индекс x при которых равен числу недостающих в этом окружении вершин, $x = s - |\mathcal{N}(v_j)|$: $\mathcal{M}(v_j) = \mathcal{N}(v_j) \cup \mathcal{N}_p(v_j)$; здесь

$W(v_0, v_j)$ – множество всех предшественниц вершины v_j в проекции $P'_d(v_0)$, составляющих простую цепь из v_0 в v_j .

Синтез $n(s)$ -компактного графа при необходимости может быть обусловлен его обхватом, определяемым леммами 1 или 2. В этом случае потенциальные подмножества вершин $\mathcal{N}_p(v_j)$, входящие в состав $\mathcal{M}(v_j)$, должны быть соответствующим образом скорректированы: $\mathcal{N}_p(u_i) := \mathcal{N}_p(u_i) \setminus \{v_j \in \mathcal{N}_p(u_i) \mid i, j \in \{1, \dots, d\}, i + j < g\}$, – здесь индексы при вершинах $u_i, u_j \in V$ соответствуют номеру уровня проекции $P'_d(v_0)$, на котором эти вершины располагаются. Полученные таким образом окружения $\mathcal{M}(v_j)$ сведем в список $\mathcal{M}(G) = (\mathcal{M}(v_j) \mid v_j \in V)$.

4. Используя полученный в п. 3 список окружений $\mathcal{M}(G)$ и учитывая (при необходимости) требуемое значение обхвата графа, поочередно выстраиваем остальные проекции $P_d(v_j)$, $v_j \in V$, проводя каждый раз уточнение потенциальных подмножеств $\mathcal{N}_p(v_j)$ во вновь построенных проекциях и внося соответствующие изменения в список окружений $\mathcal{M}(G)$ графа и в построенные ранее проекции.

5. Задача синтеза графа будет решена, если список окружений его вершин не содержит потенциальных подмножеств: $\forall v_j \in V (|\mathcal{M}(v_j)| = s, |\mathcal{N}_p(v_j)| = 0)$.

Если в результате выполнения указанных действий для всех проекций синтезируемого графа хотя бы одно из окружений его вершин по-прежнему является потенциальным (содержит потенциальное подмножество), то синтез $n(s)$ -компактного графа не завершен, так как число вершин в построенном таким образом промежуточном варианте окружения не соответствует заданной степени. В этом случае в одном из потенциальных окружений следует выбрать вершину из его потенциального подмножества (произвести подстановку), скорректировав затем в соответствии с п. 4 все остальные проекции и список окружений вершин графа. Заметим при этом, что подстановки, не

совместные с определенными заданием условиями, делают и систему проекций несовместной. Это выражается, в частности, в том, что мощности некоторых потенциальных подмножеств в отдельных проекциях системы становятся меньше числа вершин, неизвестных в соответствующих этим потенциальным подмножествам окружениях. В таком случае следует произвести возврат к предшествующей подстановке с запретом таковой и выбрать альтернативный в данном потенциальном подмножестве вариант.

Ниже приведены примеры $n(s)$ -компактных графов, сгенерированных в соответствии с описанной здесь последовательностью. В подрисуночные подписи этих графов включены их базовые остовные проекции $P'_d(v_0)$, построенные в соответствии с п. 2, при этом число уровней в них определено в соответствии с п. 1. Следует обратить внимание, что исходной для синтеза разных 13(4)-компактных графов (рис. 3, 4) является одна и та же базовая проекция. Разница же в результатах синтеза обусловлена введением (в соответствии с п. 3) запрета треугольных циклов в графе на рис. 4.

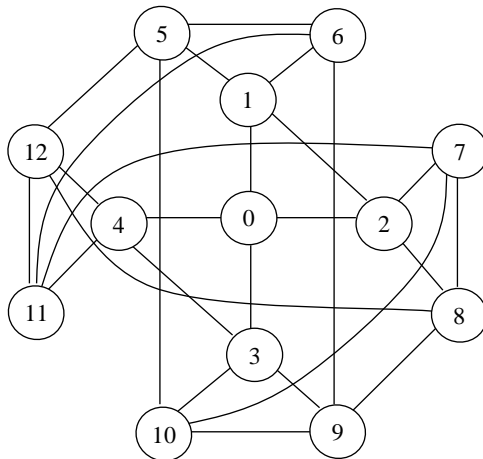


Рис. 3. 13(4)-компактный граф с обхватом $g = 3$

$$0^{\{1^{\{5,6\},2^{\{4,7-12\}}\}}, 2^{\{7,8\},1,3^{\{6,9-12\}}\}}, 3^{\{1,2,4-8,11,12\},9,10\}}, 4^{\{1-3,5-10\},11,12\}}$$

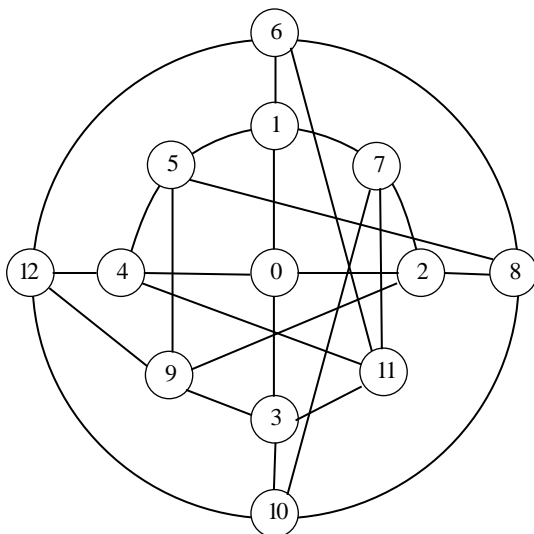


Рис. 4. 13(4)-компактный граф с обхватом $g = 4$
 $0^{\{1^{\{5,6,(2-4,7-12)_1\}, 2^{\{7,8,(1,3-6,9-12)_1\}, 3^{\{(1,2,4-8,11,12)_1,9,10\}, 4^{\{(1-3,5-10)_1,11,12\}}\}}$

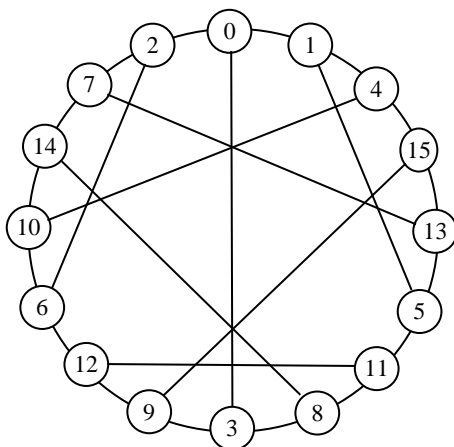


Рис. 5. 16(3)-компактный граф с обхватом $g = 5$
 $0^{\{1^{\{4^{\{10,(11-15)_1\}, 5^{\{11,(10,12-15)_1\}, 2^{\{6^{\{12,(10,11,13-15)_1\}, 7^{\{13,(10-12,14,15)_1\}, 3^{\{8^{\{(10-13,15)_1,14\}, 9^{\{(10-14)_1,15\}}\}}\}}\}}$

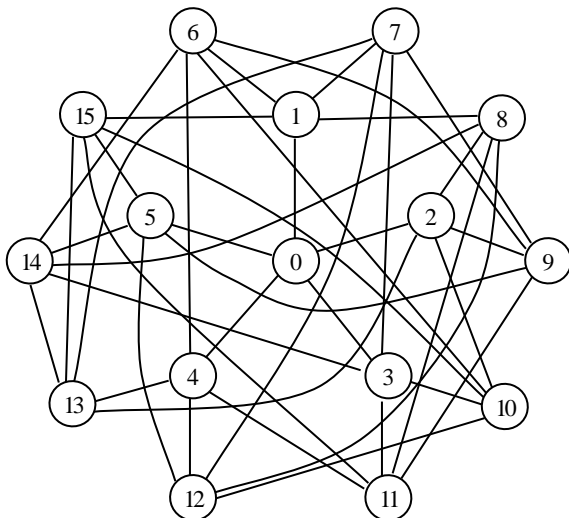


Рис. 6. 16(5)-компактный граф с обхватом $g = 4$
 $0^{\{1\{6,7,\{2-5,8-15\}_2\}, 2\{8,9,\{1,3-7,10-15\}_2\}, 3\{10,11,\{1,2,4-9,12-15\}_2\}, 4\{12,13,\{1-3,5-11,14,15\}_2\}, 5\{1-4,6-13\}_2,14,15\}}$

5. Заключение

В рамках проблемы повышения устойчивости функционирования больших систем путем снижения временных затрат на доставку контрольно-диагностической и управляющей информации и высвобождения временных резервов для реализации более качественных управляющих процедур и алгоритмов в статье решается задача синтеза регулярных структур ВС, обладающих минимальными задержками при заданных значениях порядка и степени представляющего систему графа. В работе введено понятие $n(s)$ -компактных графов как s -регулярных графов порядка n , обладающих минимально возможным диаметром. Определены основные свойства таких графов и их проекций, показано, что клеточные графы, в том числе графы Мура могут представлять в множестве компактных.

Задача синтеза регулярной ВС с заданными значениями порядка, степени при минимуме диаметра ее графа сведена к абстрагированному, не требующему графического представления, построению системы вершинно-полных (остовных) проек-

ций с соответствующим минимальному диаметру числом уровней. Часть вершин в проекциях при этом представлена потенциальными подмножествами, дающими возможность альтернативного выбора из обладающих неполными окружениями вершин. Включение вершин в потенциальные подмножества, их изъятие и подстановки регламентированы определенными в работе свойствами, согласованными с остальными проекциями системы, диаметром и, при необходимости, с обхватом графа. Изменения, внесенные в одну из проекций, требуют внесения соответствующих коррективов в остальные проекции системы. Таким образом, задача синтеза обладающей некоторыми свойствами структуры сведена к построению совместной в отношении заданных свойств системы вершинно-полных проекций графа ВС и ее решению. Дано формальное изложение последовательности действий в процессе синтеза, приведены результаты синтеза полученных таким образом $n(s)$ -компактных графов.

Учитываемые при генерации компактных структур свойства не ограничиваются рассматриваемой в работе проблемой синтеза регулярных графов с минимальным диаметром. В качестве оптимизируемых могут рассматриваться и другие коммуникационные свойства, например, наличие гамильтоновых циклов или цепей, ограничения на длины резервных маршрутов и т.д. Использование предложенного подхода в решении задач масштабирования систем, в том числе и нерегулярных, также выглядит достаточно прозрачным и перспективным. Не вызывает сомнений, что разработка и внедрение аналитических методов решения перечисленных задач в теорию и практику построения отказоустойчивых систем сетей связи, повысит их реактивность и предсказуемость.

Литература

1. КАРАВАЙ М.Ф., ПАРХОМЕНКО П.П., ПОДЛАЗОВ В.С. *Комбинаторные методы построения двудольных однородных минимальных квазиполных графов (симметричных блок-схем)* // Автоматика и телемеханика. – 2009. – №2. – С. 153–170.

2. КАРАВАЙ М.Ф., ПАРХОМЕНКО П.П., ПОДЛАЗОВ В.С. *К новой топологии отказоустойчивых кластеров и локальных управляющих систем* // Радиоэлектронні і комп'ютерні системи. – 2008. – №6(33). – С. 93–98.
3. МАХНЕВ А.А., ПАДУЧИХ Д.В. *О группе автоморфизмов графа Ашбахера* // Труды ИММ УрО РАН. – 2009. – Т. 15, №2. – С. 162–176.
4. МЕЛЕНТЬЕВ В.А. *Формальные основы скобочных образов в теории графов* // Труды II Междунар. конф. «Параллельные вычисления и задачи управления» РАСО'2004: Ин-т проблем управления РАН им. В.А. Трапезникова. – 2004. – С. 694–706.
5. МЕЛЕНТЬЕВ В.А. *Формальный подход к исследованию структур вычислительных систем* // Вестник Томского гос. ун-та. – 2005. – №14. – С. 167–172.
6. МЕЛЕНТЬЕВ В.А. *Операции над проекциями графов и актуализация описаний отказоустойчивых систем* // Вестник Томского гос. ун-та. – 2006. – №17. – С. 208–213.
7. МЕЛЕНТЬЕВ В.А. *Поиск вершинных (s,t) -сечений графа вычислительной системы с ограничением по диаметру компонент связности* // Прикладная дискретная математика. – 2008. – №2(2). – С. 107–112.
8. МЕЛЕНТЬЕВ В.А. *Аналитический подход к синтезу регулярных графов с заданными значениями порядка, степени и обхвата* // Прикладная дискретная математика. – 2010. – №2(8). – С. 74–86.
9. ПИНЧУК В.П. *Базовые графы для построения топологии управляющих сетей многопроцессорных систем* // Искусственный интеллект. – 2004. – №4. – С. 46–58.
10. РАПОПОРТ А.М. *Метрические характеристики графов сетей коммуникаций* // Труды ИСА РАН. – 2005. – Т. 14. – С. 141–147.
11. ХАРАРИ Ф. *Теория графов*. – М.: Мир, 1973. – 300 с.
12. DONETTI L., HURTADO P.I., MUFIOZ M.A. *Entangled networks, synchronization and optimal network topology* // Phys. Rev. Lett. – 2005. – Vol. 95(18). – P. 1–8.

13. LAKAMRAJU V., KOREN Z., KOREN I., KRISHNA M. *Measuring the vulnerability of interconnection networks in embedded systems* // Proc. First Merged Symp. IPPS/SPDP, EHPC Workshop, April 1998. – P. 919–924.
14. WEINSTEIN E.W. *Cage Graph* [Электронный ресурс] // WolframMathWorld: сайт. – URL: <http://mathworld.wolfram.com/topics/CageGraphs.html> (дата обращения: 17.07.10).

COMPACT STRUCTURES OF COMPUTER SYSTEMS AND THEIR SYNTHESIS

Victor Melent'ev, A.V. Rzhanov Institute of Semiconductor Physics SB RAS, Novosibirsk, Ph.D., Senior Scientist (melva@isp.nsc.ru).

Abstract: One of essential issues in computer systems (CS) control is limited decision-making time. Timing of control actions in the process of computer system functioning is in many respects determined by compactness of its structure providing the minimal number of transits at realization of intermodule communications. Compact structures CS are defined as regular graphs of an order n with the minimum diameter. These graphs are compared with (s, g) -cage graphs. The method of compact graphs synthesis is suggested. The method is based on the representation of compact graphs by the set of vertex-complete projections with minimally possible number of levels. Examples of $n(s)$ -compact graphs built are given.

Keywords: compact structures of computer systems, compact graphs, projection of the graph, synthesis of compact structures.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии А. К. Погодаевым