

**Институт проблем управления  
им. В.А. Трапезникова РАН**

# **УПРАВЛЕНИЕ БОЛЬШИМИ СИСТЕМАМИ**

***Выпуск 32***

**Март 2011**

ISSN 1819-2467

Регистрационный номер Эл №ФС77-27285 от 22.02.2007

**СБОРНИК  
ТРУДОВ**

**Москва – 2011**

# www.mtas.ru

## ИНТЕРНЕТ-сайт теории управления организационными системами

**ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ ОРГАНИЗАЦИОННЫМИ СИСТЕМАМИ**

ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ УПРАВЛЕНИЯ ИМ. В.А. ТРАПЕЗНИКОВА РАН



**Целью сайта** является предоставление специалистам по теории и практике управления организационными системами (ученым, преподавателям, аспирантам, студентам, а также реальным управленцам) доступа к ресурсам, отражающим современное состояние теории и возможности обмена идеями и результатами.

**На сайте имеются разделы:**

**Теория** – с обзором теории управления организационными системами, глоссарием, информацией для аспирантов;

**Практика** – с обзором результатов внедрения механизмов управления в реальных организациях;

**Библиография** – около 2500 публикаций по теории управления, снабжена классификатором и аннотациями;

**Электронная библиотека** – около 700 полнотекстовых монографий, статей и учебных пособий;

**а также многое другое.**

На сайте работает **форум**, на котором можно обсудить вопросы, относящиеся к математике, экономике, управлению организациями, узнать новости теории управления и ознакомиться с планируемыми конференциями и семинарами.

# ubs.mtas.ru

Интернет-сайт электронного периодического  
научного издания «Управление большими  
системами: сборник трудов»

## УПРАВЛЕНИЕ БОЛЬШИМИ СИСТЕМАМИ

ЭЛЕКТРОННЫЙ СБОРНИК НАУЧНЫХ ТРУДОВ  
ИНСТИТУТА ПРОБЛЕМ УПРАВЛЕНИЯ ИМ. В.А. ТРАПЕЗНИКОВА РАН

С 1998 года Институт проблем управления РАН выпускает периодический сборник трудов ученых, занимающихся разработкой и исследованием математических моделей управления большими (социально-экономическими, организационными, организационно-техническими и др.) системами. Все статьи, публикуемые в сборнике, проходят рецензирование ведущими специалистами по теории управления.

С 2006 года сборник "Управление большими системами" вместе с ведущим журналом ИПУ РАН "Проблемы управления" – включены в Российский индекс научного цитирования (РИНЦ).

С июля 2007 года Сборник входит в список ВАК (перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертации на соискание ученой степени доктора и кандидата наук):

\* по управлению, вычислительной технике и информатике (для докторов наук);

\* по электронике, измерительной технике, радиотехнике и связи; по энергетике (для кандидатов наук).

**Уважаемые коллеги! Приглашаем Вас опубликовать  
Вашу статью в очередном выпуске сборника  
"Управление большими системами"!**

Периодичность сборника - 4 раза в год. Время выхода прошедшей рецензирование статьи - 3-4 месяца. Плата с авторов за публикацию рукописей не взимается.

**Редколлегия сборника "Управление большими системами" сотрудничает со многими научными и общественными организациями:**

**ФГУП НТЦ "Информрегистр"** по указанию Правительства РФ осуществляет регистрацию электронных научных изданий, публикация в которых приравнивается ВАКом к опубликованным работам, отражающим основные результаты диссертационной работы. Сборник трудов "Управление большими системами" с 2006 года зарегистрирован НТЦ "Информрегистр".

**Научная электронная библиотека eLIBRARY.RU** - это крупнейший российский информационный портал в области науки, технологии, медицины и образования, содержащий рефераты и полные тексты более 12 млн научных статей и публикаций. Все выпуски сборника трудов "Управление большими системами" доступны в открытом доступе на платформе eLIBRARY.RU.

**Общероссийский математический портал Math-Net** - это общероссийский математический портал, предоставляющий российским и зарубежным математикам различные возможности в поиске информации о математической жизни в России. Все выпуски сборника трудов "Управление большими системами" доступны в открытом доступе на платформе MathNet.Ru.

**Всероссийский институт научной и технической информации РАН** – это крупнейший российский и мировой информационный и аналитический центр. Все выпуски Сборника трудов "Управление большими системами" обрабатываются ВИНИТИ, включаются им в базу данных и реферативный журнал.

**Издательство "МАИК Наука"** при поддержке Российской академии наук издает более 180 академических журналов на английском языке и совместно с Академиздатцентром Наука – более 200 журналов на русском языке практически по всем направлениям современной науки. С 2010 года Сборник трудов «Управление большими системами» сотрудничает с выпускаемым издательством МАИК Наука журналом «Автоматика и телемеханика», что предполагает опубликование избранных статей Сборника на английском языке в выпускаемом издательством МАИК «Наука» журнале «Automation and Remote Control» (английская версия журнала «Автоматика и телемеханика»).

**Подробнее о программах сотрудничества со Сборником УБС – на официальном сайте [ubs.mtas.ru](http://ubs.mtas.ru)**

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
*Институт проблем управления*  
*им. В.А. Трапезникова*

**УПРАВЛЕНИЕ  
БОЛЬШИМИ  
СИСТЕМАМИ**

**СБОРНИК ТРУДОВ**

*Выпуск 32*

**Москва – 2011**

### КООРДИНАЦИОННЫЙ СОВЕТ

Академики РАН: Васильев С.Н., Емельянов С.В., Коровин С.К., Куржанский А.Б., Федосов Е.А., Черноусько Ф.Л.; члены-корреспонденты РАН: Желтов С.Ю., Каляев И.А., Пархоменко П.П., Попков Ю.С.; д-ра техн. наук: Бутковский А.Г., Дорофеюк А.А., Кузнецов О.П., Кульба В.В., Кротов В.Ф., Лотоцкий В.А., Павлов Б.В., Поляк Б.Т., Рутковский В.Ю.

### РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

**Главный редактор:** член-корр. РАН Новиков Д.А. **Отв. секретарь:** к.т.н. Губко М.В. Д-ра техн. наук: проф. Алескеров Ф.Т. (ГУ ВШЭ), проф. Артамонов Е.И. (ИПУ РАН), д-р экон. наук, проф. Архипова М.Ю. (ИПИ РАН), д-ра техн. наук: проф. Афанасьев В.Н. (МИЭМ), проф. Бахтадзе Н.Н. (ИПУ РАН), проф. Бурков В.Н. (ИПУ РАН), проф. Вишневский В.М. (ИППИ РАН), д-р экон. наук, проф. Голиченко О.Г. (ЦЭМИ РАН), д-р физ.-мат. наук, проф. Добровидов А.В. (ИПУ РАН), д-ра техн. наук: проф. Заложнев А.Ю. (ИПУ РАН), проф. Ириков В.А. (МФТИ), проф. Калянов Г.Н. (ИПУ РАН), проф. Касаткин С.И. (ИПУ РАН), проф. Каравай М.Ф. (ИПУ РАН), д-р экон. наук, проф. Ключков В.В. (ИПУ РАН), д-ра техн. наук: проф. Кононенко А.Ф. (ВЦ РАН), проф. Курдюков А.П. (ИПУ РАН), проф. Лебедев В.Г. (ИПУ РАН), к-т техн. наук, доцент Лебедев В.Н. (ИПУ РАН), д-р экон. наук, проф. Ловчиновский Э.В. (ИПУ РАН), д-р техн. наук, проф. Мандель А.С. (ИПУ РАН), д-р экон. наук, проф. Нижегородцев Р.М. (ИПУ РАН), д-ра техн. наук: проф. Новосельцев В.Н. (ИПУ РАН), проф. Орлов А.И. (МВТУ), канд. техн. наук Петрикевич Я.И. (ИПУ РАН), д-р физ.-мат. наук, проф. Рапопорт Л.Б. (ИПУ РАН), д-р техн. наук, проф. Рыков А.С. (МИСИС), д-р экон. наук, проф. Секерин В.Д. (ИПУ РАН), д-ра техн. наук: проф. Сидельников Ю.В. (МАИ), проф. Совлуков А.С. (ИПУ РАН), д-р экон. наук, проф. Сухарев О.С. (Ин-т экономики РАН), д-ра техн. наук: проф. Уткин В.А. (ИПУ РАН), проф. Хоботов Е.Н. (МВТУ), д-ра физ.-мат. наук: доцент Чеботарев П.Ю. (ИПУ РАН), проф. Чхартишвили А.Г. (ИПУ РАН), проф. Щербakov П.С. (ИПУ РАН).

### РЕГИОНАЛЬНЫЕ РЕДАКЦИОННЫЕ СОВЕТЫ

**Волгоград** – д-ра физ.-мат. наук: проф. Воронин А.А., проф. Лосев А.Г. (ВолГУ); **Воронеж** – д-р техн. наук, проф. Баркалов С.А., д-р физ.-мат. наук, проф. Головинский П.А. (ВГАСУ), д-р техн. наук, проф. Подвальный С.Л. (ВГТУ); **Ижевск** – д-р физ.-мат. наук, проф. Непейвода Н.Н., к-т физ.-мат. наук, проф. Родионов В.И. (УдмГУ); **Иркутск** – д-ра физ.-мат. наук: проф. Бычков И.В., проф. Лакеев А.В. (ИДСТУ СО РАН); **Казань** – д-р физ.-мат. наук, проф. Маликов А.И., д-р техн. наук, проф. Сиразетдинов Р.Т. (КГТУ-КАИ); **Липецк** – д-ра техн. наук: проф. Кузнецов Л.А., проф. Погодаев А.К. (ЛГТУ); **Самара** – д-ра экон. наук: проф. Богатырев В.Д., проф. Гераськин М.И., д-р техн. наук, проф. Засканов В.Г. (СГАУ); **Санкт-Петербург** – д-ра физ.-мат. наук: проф. Петросян Л.А. (СПбГУ), проф. Фрадков А.Л. (ИПМ РАН); **Старый Оскол** – д-р техн. наук, проф. Еременко Ю.И. (СТИ); **Тверь** – д-ра техн. наук: проф. Кузнецов В.Н., проф. Палюх Б.В. (ТГТУ).

**Адрес редакции:** 117997, г. Москва, ул. Профсоюзная, д. 65.

**Адрес в Интернет:** [ubs.mtas.ru](http://ubs.mtas.ru).

Номер гос. регистрации электронного научного издания (ЭНИ): 0420900023.

© ИПУ РАН, 2011

## СОДЕРЖАНИЕ

### *Системный анализ*

**Яцало Б. И., Грицюк С. В., Мирзеабасов О. А.,  
Василевская М. В.**

*Учет неопределенностей в рамках многокритериального анализа решений с использованием концепции приемлемости.....* 5

### *Математическая теория управления*

**Андриенко А. Я., Тропова Е. И.**

*Прогнозирование состояния динамических систем на основе анализа их спектральных характеристик .....* 31

**Солнечный Э. М., Черёмушкина Л. А.**

*Исследование условий причинности и устойчивости системы управления линейным объектом теплопроводности (особые случаи). Часть II.....* 40

### *Управление в социально-экономических системах*

**Алгазин Г. И., Алгазина Ю. Г.**

*Моделирование поведения экономических агентов в системе «производитель–посредник–конкурентный рынок».....* 83

**Гурман В. И., Матвеев Г. А., Трушкова Е. А.**

*Социо-эколого-экономическая модель региона в параллельных вычислениях .....* 109

**Жуланов Е. Е.**

*Управление социально-экономической асимметрией регионов как фактор экономического роста.....* 131

**Шумов В. В.**

*Информационно-математическая модель для обоснования уровней пограничной безопасности.....* 155

*Управление в медико-биологических  
и экологических системах*

---

**Киселев В. Г.**

*Сетевые модели управления в животноводческой  
отрасли АПК* ..... 172

*Управление техническими системами  
и технологическими процессами*

---

**Аншаков Г. П., Мостовой Я. А.**

*Безопасное управление сложными техническими  
системами*..... 195

**Майков И. Л., Директор Л. Б., Зайченко В. М.**

*Методы теплогидравлической оптимизации и  
управления тепловыми сетями*..... 205

**Шнайдер Д. А., Казаринов Л. С.**

*Метод упреждающего управления сложными  
технологическими комплексами по критериям  
энергетической эффективности* ..... 221

*Технические и программные средства управления*

---

**Мелентьев В. А.**

*Компактные структуры вычислительных систем и  
их синтез*..... 241



УДК 519.81  
ББК 22.18

## УЧЕТ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ В РАМКАХ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОГО АНАЛИЗА РЕШЕНИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КОНЦЕПЦИИ ПРИЕМЛЕМОСТИ

Яцало Б. И.<sup>1</sup>, Грицюк С. В.<sup>2</sup>,  
Мирзеабасов О. А.<sup>3</sup>, Василевская М. В.<sup>4</sup>

(Национальный исследовательский ядерный университет  
ИАТЭ МИФИ, Обнинск)

*Представлен подход к учету неопределенностей критериев и весовых коэффициентов в рамках многокритериального анализа решений с использованием теории нечетких множеств и вероятностных методов. Предлагаемые методы (FMAA – Fuzzy Multicriteria Acceptability Analysis, ProMAA – Probabilistic Multicriteria Acceptability Analysis) базируются на вычислении индексов приемлемости рангов альтернатив. Обсуждается общий подход к реализации указанных методов и его конкретизация на примере многокритериальной аддитивной модели. Реализация методов FMAA и ProMAA основана на использовании численных методов для оценки функций от нечетких/случайных величин без применения методов Монте-Карло. Описана система поддержки принятия решений DECERNS WebSDSS, реализующая методы FMAA и ProMAA, а также ряд других методов многокритериального анализа решений.*

---

<sup>1</sup> Борис Иванович Яцало, доктор технических наук  
(yatsalo@iate.obninsk.ru).

<sup>2</sup> Сергей Витальевич Грицюк, аспирант (s.gritsyuk@gmail.com).

<sup>3</sup> Олег Ахмедбекович Мирзеабасов, кандидат технических наук, доцент (oam@iate.obninsk.ru).

<sup>4</sup> Мария Викторовна Василевская, магистр информатики,  
(mvvasilevskaya@gmail.com).

Ключевые слова: Многокритериальный анализ решений; анализ неопределенностей; многокритериальный анализ приемлемости; системы поддержки принятия решений; *DECERNS WebSDSS*.

## 1. Введение

Многокритериальный анализ решений (МКАР; *Multi-Criteria Decision Analysis, MCDA*) на практике, как правило, сталкивается с неопределенностями объективных и субъективных значений критериев и предпочтений. Для анализа различного рода неопределенностей внешнего и внутреннего происхождения [1, 4, 5, 12, 30], включая неполноту, неточность и нечеткость данных, а также их случайный/вероятностный характер, используются соответствующие модели/методы МКАР. Наиболее часто для учета указанных выше неопределенностей в рамках анализа решений и многокритериального анализа в частности используется (однопараметрический) анализ чувствительности (прежде всего влияние изменения весовых коэффициентов на результаты ранжирования альтернатив), вероятностные методы, а также, в ряде случаев, нечеткие множества.

Выделим следующие методы МКАР, учитывающие неопределенности используемых в рамках метода величин.

В рамках классического метода *MAUT (Multi-Attribute Utility Theory)* случайные значения критериев, нормированные с использованием частных функций полезности, агрегируются в интегральное значение полезности альтернативы с помощью вычисления ожидаемой полезности; при этом используются точные (т.е. не распределенные) значения весовых коэффициентов (так называемые коэффициенты шкалирования, *scaling factors*) [10, 16, 33]. В ряде задач используется также стохастический метод *UTA (Utilities Additives)* с целью извлечения информации из заданного (эталонного) ранжирования альтернатив для построения функций полезности в рамках аддитивной модели [12, 14].

Предложен ряд вариантов стохастических моделей обобщенного метода аналитической иерархии (*AHP, Analytic Hierar-*

*chy Process*) [29] для учета неопределенностей рассматриваемых критериев и методов их сравнения [13, 21, 26].

Ряд обобщений классических моделей из класса *ORT* (теория отношения превосходства, *Outranking Relation Theory*, или *outranking methods*) [27,12] также базируется на применении вероятностных методов и нечетких множеств. В работе [9] дискретные распределения вероятностей используются для описания оценок альтернатив по критериям; для каждой пары альтернатив оценивается распределение степени предпочтения по каждому критерию с последующим вычислением распределения степени превосходства (с использованием медиан распределений) для полного или частичного упорядочения/ранжирования альтернатив. В работе [23] анализ неопределенностей в рамках методов *ORT* базируется на оценках предпочтения пар альтернатив по каждому критерию с использованием методов стохастического доминирования [12, 23]. В работе [25] представлен вероятностный метод *FlowSortPro* для учета неопределенностей, представляющий собой расширение базового метода многокритериальной сортировки альтернатив *FlowSort* [24]; в рамках *FlowSortPro* основные используемые величины (исходные профили, весовые коэффициенты, а также значения альтернатив для рассматриваемых критериев) могут описываться соответствующими распределениями вероятностей с последующим вычислением распределения потока (*net flow*) для каждой альтернативы и ее назначения в одну из predeterminedных категорий альтернатив.

В рамках семейства методов *SMAA* (*Stochastic Multicriteria Acceptability Analysis*) реализуется стохастический подход к многокритериальному анализу приемлемости альтернатив на основе вычисляемых индексов приемлемости ранга альтернативы с применением методов Монте-Карло [17–19, 31]; в методах *SMAA* пользователь может задать как распределения значений критериев для рассматриваемых альтернатив, так и распределения весовых коэффициентов.

Многокритериальные методы анализа решений с использованием нечетких величин (нечетких множеств), как расширения соответствующих классических (четких) моделей, представлены

нечеткими версиями многокритериальных методов *AHP*, *MAVT*, *PROMETHEE*, *FlowSort* и ряда других [7, 8, 11, 15].

Детальный обзор методов МКАР, в том числе с учетом различного рода неопределенностей, можно найти, например, в [5, 12], см. также [15, 35, 36].

В данной работе рассматриваются два новых подхода к многокритериальному анализу приемлемости (*multicriteria acceptability analysis*, *MAA*): метод *FMAA* (*Fuzzy MAA*), в котором значения критериев и весовые коэффициенты описываются нечеткими величинами, а оценки приемлемости альтернатив реализованы с использованием методов нечеткой логики, а также метод *ProMAA* (*Probabilistic MAA*), в котором реализован вероятностный алгоритм оценки приемлемости на базе аналитической модели сравнения альтернатив без использования методов Монте-Карло.

## **2. Учет неопределенностей в рамках многокритериального анализа приемлемости**

Попарное сравнение альтернатив часто применяется в методах многокритериального анализа решений, в том числе в методах *AHP*, *ORT*, см, например, [12, 29], а также в ряде методов голосования, например, в методе Кондорсе [28]. В предлагаемом подходе к анализу приемлемости попарное сравнение используется для оценки индексов приемлемости рангов альтернатив.

### **2.1. БАЗОВЫЙ АЛГОРИТМ ОЦЕНКИ ПРИЕМЛЕМОСТИ**

В рамках базового алгоритма, положенного в основу методов *FMAA* и *ProMAA*, конструируются «события ранга» для всех рассматриваемых альтернатив с использованием логических операций «И/AND» (знак  $\wedge$  в формулах ниже), а также «ИЛИ/OR» ( $\vee$ ) на основе попарного сравнения альтернатив. Учет и анализ неопределенностей в рамках предлагаемых методов основан на оценке меры «события ранга».

Рассматривается дискретная многокритериальная задача, в которой выделено множество альтернатив  $A = \{a_i, i = 1, \dots, n\}$  и

множество критериев  $C = \{C_j, j = 1, \dots, m\}$ . Обозначим через  $h_i = h(a_i)$  оценку альтернативы  $a_i, i = 1, \dots, n$ , в некоторой выбранной шкале, например, в интегральной шкале полезности/utility (детализация выбора интегрального критерия обсуждается в разделе 2.2); при этом чем выше значение (полезность)  $h_i$  в ряду значений  $h_1, h_2, \dots, h_n$ , тем лучше альтернатива  $a_i$  (относительно заданного множества альтернатив) и тем выше ее ранг. Под рангом альтернативы будем понимать ее место в упорядоченном по предпочтению списке альтернатив (ранг 1 присваивается лучшей альтернативе, ранг  $n$  – худшей).

Принимая во внимание различные источники неопределенностей и подходы к их описанию и использованию, ниже будем рассматривать  $h_i, i = 1, \dots, n$ , как нечеткие числа (при описании алгоритма *FMAA*) или случайные величины (алгоритм *ProMAA*).

Рассмотрим событие ранга  $S_{ik}$ :

$$S_{ik} = \{ \text{Альтернатива } i \text{ имеет ранг } k; i, k = 1, \dots, n \}.$$

События  $S_{ik}$  могут быть сформированы следующим образом с использованием логических выражений:

- (1)  $S_{i1} = \{ \bigwedge_{j \neq i} (h_i \geq h_j) \},$
- (2)  $S_{i2} = \{ \bigvee_{l \neq i} ((h_i < h_l) \wedge_{j \neq i, j \neq l} (h_i \geq h_j)) \},$
- (3)  $S_{ik} = \{ \bigvee_{\substack{(l_1 < l_2 < \dots < l_{k-1}) \\ l_s \neq i, s=1, \dots, k-1}} ((\bigwedge_{s=1}^{k-1} (h_i < h_{l_s}) \wedge_{j \neq i, j \neq l_s, s=1, \dots, k-1} (h_i \geq h_j))) \},$
- (4)  $S_{in} = \{ \bigwedge_{j \neq i} (h_i < h_j) \}.$

Выражение (1) представляет собой утверждение того, что альтернатива  $a_i$  превосходит все другие альтернативы, т.е. имеет ранг 1; в выражении (2) утверждается, что может найтись только одна альтернатива, полезность которой превосходит полезность альтернативы  $a_i$ , и т.д.; в (4), соответственно, утверждается, что полезность альтернативы  $a_i$  ниже полезностей всех других альтернатив.

В случае применения модели приемлемости альтернатив без учета неопределенностей (без учета распределений, напри-

мер, при использовании интегральной ценности в классической модели MAVT [5]), только одно из выражений  $S_{ik}$ ,  $k = 1, \dots, n$ , является истинным (принимает значение 1).

Основной задачей учета/анализа неопределенностей с использованием нечетких или случайных величин (значений  $h_i = h(a_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ ) в рамках концепции приемлемости на базе модели (1)–(4) является оценка меры (степени уверенности или вероятности) высказываний/событий  $S_{ik}$ .

## 2.2. ВЫБОР ИНТЕГРАЛЬНОГО КРИТЕРИЯ ДЛЯ РЕАЛИЗАЦИИ МАА

Пусть в рамках дискретной многокритериальной задачи выделено множество альтернатив  $A = \{a_i, i = 1, \dots, n\}$  и множество критериев  $C = \{C_j, j = 1, \dots, m\}$ . В общем случае многокритериальная задача выбора/ранжирования альтернатив может быть представлена следующим образом (с некоторыми уточнениями для отдельных многокритериальных моделей; методы Парето-оптимизации [1, 2] в данной работе не рассматриваются):

$$(5) \quad h(a) = f(C(a), w) \rightarrow \max$$

$$(6) \quad g(C(a), w) \in G; a \in A.$$

Здесь  $C(a) = (C_1(a), \dots, C_m(a))$  – вектор оценок альтернативы  $a \in A$  по критериям  $C_j$ ,  $j = 1, \dots, m$ ;  $w = (w_1, \dots, w_m)$  – вектор используемых (при решении конкретной многокритериальной задачи) весовых коэффициентов;  $g(\cdot, \cdot)$  – векторная функция, содержащая все используемые в рамках модели, а также конкретной многокритериальной задачи, требования и ограничения (например,  $\sum w_i = 1$ ,  $w_j \in [w_j^{\min}, w_j^{\max}]$ , ограничения на критерии, например  $C_j \in [C_j^{\min}, C_j^{\max}]$ , используемые при скрининге (т.е. отбраковке/отсеивании) альтернатив);  $h(a)$  в (5) представляет собой интегральную оценку альтернативы  $a$  (в соответствующей шкале) с использованием функции/модели агрегирования  $f(\cdot)$  (например, аддитивная MAVT/MAUT-функция оценки интегральной ценности/полезности [1, 4, 5, 12, 16, 33] или оценка чистого потока в методе PROMETHEE [6, 12] и др.).

В рамках классических детерминистских методов дискретного многокритериального анализа (методы *MADM* [5, 12, 22]), например, в рамках методов *MAVT*, *ELECTRE*, *PROMETHEE*, *TOPSIS*, значения критериев  $C_j(\mathbf{a})$  и весов  $w_j$ ,  $j = 1, \dots, m$ , являются действительными нераспределенными (т.е. четкими, неслучайными) числами. Анализ неопределенностей в таких моделях проводится с использованием методов анализа чувствительности; как правило, используются средства анализа чувствительности к изменению весов.

В большинстве практических задач значение альтернативы  $\mathbf{a}$  по критерию  $j$ ,  $C_j(\mathbf{a})$ ,  $j = 1, \dots, m$ , определяется неоднозначно, что вызвано различного рода неопределенностями.

В рамках многокритериального метода *MAUT* [12, 16, 33], например, значения критериев могут описываться случайными величинами  $X_j = C_j(\mathbf{a})$ ,  $j = 1, \dots, m$ ; величина  $X_j$  характеризуется соответствующей плотностью распределения вероятностей  $f_j(x)$  (функцией распределения  $F_j(x)$ ). Интегральная полезность альтернатив, например, в рамках аддитивной модели *MAUT* (корректное применение которой сопряжено с необходимостью проверки ряда условий независимости критериев) [16, 33], может быть представлена следующей конкретизацией модели (5), (6):

$$(7) \quad U(\mathbf{a}) = \sum_{j=1}^m w_j U_j(X_j),$$

$$(8) \quad w_j > 0, \quad j = 1, \dots, m; \quad \sum_{j=1}^m w_j = 1,$$

где  $U_j(x)$  – частная функция полезности для критерия (атрибута)  $j$ ,  $j = 1, \dots, m$ ; как правило,  $0 \leq U_j(x) \leq 1$  (см. обсуждения о сходстве и возможном различии функций ценности и полезности и рекомендации об использовании функций ценности при практическом применении аддитивных методов *MAVT/MAUT*, [5, 12, 33]); весовые коэффициенты  $w_j$  представляют собой *коэффициенты масштабирования (scaling factors)* [5, 10, 16, 33], являющиеся точными/нераспределенными положительными числами. В то же время, вместо оценки распреде-

ления интегральной полезности  $U(\mathbf{a})$  в рамках метода MAUT вычисляются значения *ожидаемой полезности* (*expected utility*)

$$(9) \quad E(U(\mathbf{a})) = \sum_{j=1}^m w_j E(U_j(X_j)),$$

где  $E(X)$  – математическое ожидание случайной величины  $X$ . Ранжирование альтернатив в рамках метода MAUT базируется на ранжировании значений *ожидаемой полезности* альтернатив: альтернатива  $\mathbf{a}_1$  превосходит альтернативу  $\mathbf{a}_2$  ( $\mathbf{a}_1 > \mathbf{a}_2$ ) тогда и только тогда, когда

$$(10) \quad E(U(\mathbf{a}_1)) > E(U(\mathbf{a}_2)),$$

Поскольку, согласно (7), (9), невысокие показатели полезности альтернативы по одним критериям могут быть компенсированы более высокими значениями по другим критериям, метод MAUT принадлежит к множеству так называемых *компенсаторных* методов многокритериального анализа [5, 16].

Несмотря на повсеместное использование категории *ожидаемой* полезности, отношение к ней как к универсальному методологическому принципу для обоснования предпочтения, выбора или ранжирования альтернатив не является однозначным [33]. В связи с этим предлагаются и другие методы многокритериального анализа, не ограничивающиеся оценками ожидаемой полезности.

Для реализации базового алгоритма МАА (многокритериального анализа приемлемости) в данной работе используется аддитивная модель (7), в которой значения критериев  $X_j = C_j(\mathbf{a})$ ,  $j = 1, \dots, m$ , могут описываться нечеткими или случайными величинами. В то же время, весовые коэффициенты  $w_j$  также могут рассматриваться неопределенными и описываться нечеткими числами (в FMAA) или случайными величинами (в Pro-MAA). Методы задания весовых коэффициентов в этих случаях описываются в разделе 2.5.

Для анализа альтернатив в рамках моделей вида (7), (8) предлагаются и другие подходы, не основанные на применении категории *ожидаемой* полезности. Один из таких методов, SMAA (*Stochastic Multicriteria Acceptability Analysis*), предложен в работах [17–19, 31] и реализован как для модели (7),(8), так и



для ряда других дискретных моделей МКАР. Методы семейства *SMAA* представляют собой реализацию концепции приемлемости (*MAA*) на базе экстенсивного использования методов Монте-Карло для (приближенного) вычисления статистики рангов альтернатив, учитывая *стохастическую* (вероятностную) природу значения критериев и весовых коэффициентов (с сохранением для случайных значений весов соотношения нормировки (8)).

Ниже предложен методологически другой подход к оценке приемлемости альтернатив, базирующийся на реализации аналитической модели приемлемости (1)–(4), позволяющей последовательно реализовать концепцию приемлемости (без применения методов Монте-Карло) как для вероятностной природы неопределенностей объективных значений критериев и субъективных предпочтений (в том числе вероятностных значений весовых коэффициентов), так и для случаев альтернативного подхода к анализу неопределенностей с использованием теории нечетких множеств.

### *2.3. МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ПРИЕМЛЕМОСТИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ НЕЧЕТКИХ ДАННЫХ И ПРЕДПОЧТЕНИЙ: FMAA*

В целом ряде сценариев значения объективных и субъективных показателей многокритериальных задач не могут быть адекватно представлены ни средними значениями (когда выбор среднего ведет к существенной потере информации о возможных значениях критериев и/или росту несогласия среди экспертов по выбору значений), ни распределением вероятностей соответствующих случайных величин (ввиду отсутствия статистических данных и/или несогласия в задании субъективных распределений вероятностей). В этих случаях использование нечетких множеств (*fuzzy sets*) может способствовать решению проблемы формирования значений критериев для множества альтернатив  $A = \{a_i, i = 1, \dots, n\}$ , а также значений весовых коэффициентов  $w_j, j = 1, \dots, m$  [4, 7, 8, 11, 15, 22].

Нечеткие числа  $Z$ , используемые в рамках данного метода, представляют собой нормализованные, выпуклые и ограничен-

ные нечеткие множества, заданные на универсальном множестве действительных чисел  $\mathbf{R}$  с непрерывной функцией принадлежности [20], т.е.

$$(11) Z = \{(x, m_z(x)) : m_z(x) > 0, c_1 < x < c_2; m_z(x) = 0, x \notin (c_1, c_2)\},$$

где  $m_z(x)$  – непрерывная функция принадлежности элемента/четкого числа  $x$  множеству  $Z$ ,  $c_i \in \mathbf{R}$ ; для синглтона (одноэлементного множества)  $z$  имеем соответственно  $c_1 = c_2 = c$ ,  $m_z(c) = 1$ .

Ниже обсуждается подход к реализации многокритериального анализа приемлемости на базе использования нечетких величин (*FMAA*, сокращенно от *Fuzzy MAA*). В излагаемом подходе значения критериев  $a_{ij} = X_j(a_i)$ , значения частных функций ценности  $V_j(a_{ij})$ , а также весовые коэффициенты  $w_j$  и интегральная ценность  $V(a_i)$  альтернатив  $a_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $j = 1, \dots, m$ , описываются нечеткими числами в соответствии с моделью (7). В качестве функции  $V_j(x)$  используется обычная/четкая функция ценности  $V_j(x)$ , заданная на множестве изменения критерия  $C_j$  (для всего множества рассматриваемых альтернатив) в соответствии с принципом расширения [20].

Предлагаемый метод *FMAA* (точнее, *FMAA-V*, учитывая использование аддитивной функции ценности вида (7), расширенной до функции от нечетких аргументов) является адаптацией анализа приемлемости (1)–(4) по отношению к множеству ценностей  $\{V(a_i), i = 1, \dots, n\}$ , выражаемых нечеткими числами.

Как и в разделе 2.1, будем использовать обозначение  $h_i$  для нечеткого числа  $V(a_i)$ , положим также  $h_{ij} = h_i - h_j$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $j = 1, \dots, m$ . Функция принадлежности нечеткого числа  $h_{ij}$  определяется формулой

$$(12) m_{h_{ij}}(z) = \bigvee_{\substack{x, y: \\ z = x - y}} (m_{h_i}(x) \wedge m_{h_j}(y)),$$

где  $x \wedge y = \min(x, y)$ ,  $x \vee y = \max(x, y)$ .

В настоящее время существует несколько десятков подходов к сравнению нечетких чисел, основанных как на методах дефаззификации, так и на реализации более сложных процедур сравнения [15, 32]. Для описания степени различия значений

ценностей  $h_i$  и  $h_j$ , альтернатив  $a_i$  и  $a_j$ , представленных нечеткими числами, реализован следующий *интегральный* метод сравнения.

Степень/меру принадлежности нечеткого числа  $z$  (11) множеству неотрицательных (нечетких) чисел  $\mathbf{F}_{\mathbf{R}_{\geq 0}}$  можно определить следующим образом, используя функцию принадлежности  $m_z(x)$ :

$$(13) m_{\mathbf{F}_{\mathbf{R}_{\geq 0}}}(z) = \int_{x \geq 0} m_z(x) dx / \int_{c_1}^{c_2} m_z(x) dx$$

(в (13) предполагается, как и указано в (11),  $c_1 < c_2$ ; для синглтона  $z$  мера принадлежности к  $\mathbf{F}_{\mathbf{R}_{\geq 0}}$  равна 1 для  $z \geq 0$  и 0 для  $z < 0$ ).

Определим меру того, что значение ценности  $h_i$  альтернативы  $a_i$  превосходит ценность  $h_j$  альтернативы  $a_j$  ( $j \neq i$ ) формулой

$$(14) m_{ij} = m_{\mathbf{F}_{\mathbf{R}_{\geq 0}}}(h_{ij}) (= m_{h_i \geq h_j} = m(h_{ij} \geq 0)).$$

Из (13), (14) следует, что  $m_{ij} + m_{ji} = 1$  и  $m(h_{ij} < 0) = 1 - m(h_{ij} \geq 0)$  (в данной работе не обсуждаются вопросы транзитивности сравнения альтернатив по предпочтению на основе введенной меры  $m_{h_i \geq h_j}$ ).

В рамках *FMAA* мера событий  $S_{ik}$ , см. (1)–(4), определяет так называемый индекс приемлемости ранга  $m(i, k)$  или степень уверенности в том, что альтернатива  $i$  имеет ранг  $k$ . Индексы приемлемости ранга  $m(i, k)$  могут быть определены с использованием методов нечеткой логики (например, с использованием одного из наиболее часто используемых вариантов Лукашевича) [20]:

$$(15) m(i, 1) = m(S_{i1}) = m(\bigwedge_{j \neq i}^n (h_{ij} \geq 0)) = \min_{j \neq i} \{m(h_{ij} \geq 0)\} = \min_{j \neq i} \{m_{ij}\},$$

$$(16) m(i, 2) = m(S_{i2}) = m(\bigvee_{l \neq i}^n ((h_{il} < 0) \wedge_{j \neq i, j \neq l}^n (h_{ij} \geq 0))) = \max_{l \neq i} \{ \min_{j \neq i, j \neq l} \{m_{il}, m_{ij}\} \},$$

$$(17) \quad m(i, k) = m(S_{ik}) = m\left(\bigvee_{\substack{(l_1 < l_2 < \dots < l_{k-1}) \\ l_s \neq i, s=1, \dots, k-1}} \left( \bigwedge_{s=1}^{k-1} (h_{i l_s} < 0) \right) \bigwedge_{\substack{j \neq i, j \neq l_s, \\ s=1, \dots, k-1}}^n (h_{ij} \geq 0)\right) =$$

$$(18) \quad m(i, n) = m(S_{in}) = \min_{j \neq i} \{ \min\{ \min_{\substack{(l_1 < l_2 < \dots < l_{k-1}) \\ l_s \neq i, s=1, \dots, k-1}} m_{l_s i}, \min_{\substack{j \neq i, j \neq l_s, \\ s=1, \dots, k-1}} m_{ij} \} \} = \min_{j \neq i} \{ m_{ji} \}.$$

Располагая данными о мерах (матрице)  $m(i, k) = m(S_{ik})$  событий  $S_{ik}$ , эксперты/ЛППР могут выбирать наиболее приемлемую альтернативу. Для интеграции имеющихся показателей приемлемости альтернативы, если эксперты видят в этом необходимость, может быть также использован метод взвешенного суммирования (19) для определения индекса  $R_i$  интегральной приемлемости альтернативы  $a_i$  (предложенного для стохастического метода *SMAA* [17]):

$$(19) \quad R_i = \sum_{k=1}^n w_k^{ac} m(i, k),$$

где  $w_k^{ac}$  – веса относительной важности рангов, задаваемые экспертами/ЛППР. В то же время, рекомендации по использованию индекса  $R_i$  приемлемости альтернативы являются достаточно ограниченными. Возможны также и другие (комплексные) подходы по интеграции индексов приемлемости ранга  $\{m(i, k)\}$  и степени предпочтения альтернатив  $\{m_j\}$ .

Метод задания весовых коэффициентов  $w_i$  для моделей *FMAA* вида (7) обсуждается в разделе 2.5.

#### 2.4. ВЕРОЯТНОСТНЫЙ ПОДХОД К МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОМУ АНАЛИЗУ ПРИЕМЛЕМОСТИ: PROMAA

Вероятностный подход к анализу неопределенностей в рамках МКАР основан на трактовке используемых в (5), (7) величин  $X_j = C_j(a)$  (значения критериев), а также, для некоторых методов,  $w_j$  (значения весовых коэффициентов) как случайных с известными/заданными законами распределения. Дальнейшие процедуры состоят в определении законов распределения интегральных величин  $h_i = h(a_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$  (для модели (7), например, в предположении независимости используемых случайных

величин, это эффективно достигается с использованием численных методов).

Пусть интегральная оценка альтернативы  $h_i = h(a_i)$ , полученная на основе (5)/(7), характеризуется соответствующей плотностью распределения вероятностей  $j_i(x)$  (функцией распределения  $F_i(x)$ ). В предположении *независимости* (в рамках модели сравнения интегральных полезностей альтернатив) рассматриваемых случайных величин  $h_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , вероятности событий ранга  $S_{ik}$  (1)–(4) могут быть оценены следующим образом.

Нетрудно показать, что

$$(20) \quad P_{ij} = P(h_i \geq h_j) = \int F_j(x) j_i(x) dx = \int F_j(x) dF_i(x) = \int F_j dF_i,$$

а также

$$(21) \quad P((h_1 \geq h_2) \wedge (h_1 \geq h_3)) = \int F_3 F_2 dF_1;$$

подчеркнем при этом, что события  $(h_1 \geq h_2)$  и  $(h_1 \geq h_3)$  в общем случае являются зависимыми, при этом (21) является корректной формулой в случае независимых  $h_i$ .

Исходя из выражений (20), (21), для вероятностей событий рангов  $P_{ik} = P(S_{ik})$ ,  $i, k = 1, \dots, n$ , называемых индексами приемлемости рангов, имеем следующие оценки:

$$(22) \quad P_{i1} = P\{S_{i1}\} = \int \prod_{j \neq i} F_j(x) dF_i(x) = \int \prod_{j \neq i} F_j dF_i,$$

$$(23) \quad P_{i2} = P\{S_{i2}\} = \sum_{l \neq i} \int (1 - F_l) \prod_{j \neq i, j \neq l} F_j dF_i,$$

$$(24) \quad P_{ik} = P\{S_{ik}\} = \sum_{\substack{(l_1 < l_2 < \dots < l_{k-1}) \\ l_s \neq i, s=1, \dots, k-1}} \int \left( \prod_{s=1}^{k-1} (1 - F_{l_s}) \right) \prod_{\substack{j \neq i, j \neq l_s \\ s=1, \dots, k-1}} F_j dF_i,$$

$$(25) \quad P_{in} = P\{S_{in}\} = \int \prod_{j \neq i} (1 - F_j) dF_i.$$

Можно доказать также, что для матрицы  $\{P_{ik}\}$   $i, k = 1, \dots, n$ , выполняются условия

$$(26) \quad \sum_{k=1}^n P_{ik} = \sum_{i=1}^n P_{ik} = 1.$$

В ряде случаев, если эксперты находят это возможным (обоснованным или согласованным), может также использоваться интегральный индекс  $R_i$  приемлемости альтернативы [17]:

$$(27) R_i = \sum_{k=1}^n w_k^{ac} P_{ik} ,$$

где  $w_k^{ac}$  – задаваемые экспертами/ЛПП веса относительной важности рангов.

Таким образом, выбор лучшей альтернативы, ранжирование или скрининг альтернатив в рамках *ProMAA* (аналогично *FMAA*) базируется на комплексном анализе матрицы  $\{P_{ik}\}$  и/или оценке интегральных показателей приемлемости  $R_i$  (27). При этом, например, в рамках *ProMAA-U/V* (метода *ProMAA*, основанного на использовании интегральной функции полезности/ценности (7)), эксперты могут также учитывать значения ожидаемых полезностей (9).

Метод задания весовых коэффициентов  $w_i$  для *ProMAA-V*, обсуждается в разделе 2.5.

Подчеркнем, что перед выводом формул (20) и (21), на основе которых получены оценки (22)–(25), сделано предположение о независимости случайных величин  $h_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ ; в случае зависимости необходимо использование совместных распределений или других подходов к корректной оценке индексов приемлемости зависимых величин.

При использовании *ProMAA*, когда для определения интегральной полезности альтернативы  $a_i$ ,  $h_i = U(a_i)$ , применяется аддитивная модель (7), а весовые коэффициенты  $w_i$  (см. раздел 2.5) при этом также могут рассматриваться распределенными/случайными величинами с заданными законами распределения, случайные величины  $h_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , не являются независимыми. Действительно, в предположении независимости всех используемых исходных случайных величин (значений критериев  $X_{ij} = C_j(a_i)$  и, соответственно, случайных величин  $U_{ji} = U_j(X_{ij})$ , а также весовых коэффициентов  $w_j$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,

$j = 1, \dots, m$ ) получаем следующую оценку ковариации для  $h_i$  и  $h_k$ :

$$(28) \text{Cov}(h_i, h_k) = \sum_{j=1}^m E(U_{ji})E(U_{jk})Dw_j,$$

где  $U_{ji} = U_j(C_j(a_i))$ ; отметим также, что в рамках *FMAA* и *Pro-MAA*  $0 \leq U_j(x) \leq 1$  и (после нормализации распределений весов, см. 2.5)  $0 \leq w_j < 1$ .

Таким образом, учитывая приведенное выше замечание, оценки индексов приемлемости рангов на основе (22)–(25) являются в общем случае приближенными (точными для случая нераспределенных/постоянных значений весовых коэффициентов в (7)). Дополнительные исследования показывают, что при решении практических задач различие между оценками (22)–(25) и оценками вероятности «событий рангов» на основе методов Монте-Карло при реализации (7) не превышает 2–3%.

В то же время, оценка вероятностей событий (1)–(4) на основе (22)–(25) может иметь свое обоснование. Получая распределения полезностей альтернатив  $h_i = U(a_i)$  с использованием модели (7) (в том числе с распределенными коэффициентами), эксперты сравнивают случайные величины  $h_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , на основе (1)–(4) исходя только из оцененных законов распределения  $h_i$  без учета их возможной зависимости.

## 2.5. ЗАДАНИЕ ВЕСОВ В FMAA И PROMAA

В моделях *MAVT/MAUT*, так же как и в рамках других классических методов МКАР, весовые коэффициенты  $w_i$  рассматриваются как постоянные (нераспределенные) положительные величины. В этих случаях для анализа неопределенностей применяется, как правило, однопараметрический анализ чувствительности к изменению заданного весового коэффициента (с пропорциональным изменением оставшихся весов для сохранения соотношения нормализации весов (8)). В то же время, расширенный анализ неопределенностей, когда веса не рассматриваются постоянными/средними, а распределены в рамках некоторых интервалов, является актуальным и востребованным при решении большинства практических задач МКАР.

Весовые коэффициенты (коэффициенты относительной важности критериев) в рамках методов МКАР могут быть оценены различными методами, включая свинг (*swing*) [5, 10, 33] – метод для определения коэффициентов масштабирования в моделях *MAVT* (с возможностью их практического применения в модели *MAUT* [5,12]), методы голосования для определения весов в методах *ELECTRE/PROMETHEE* и др. [3, 5, 22, 27, 33]. При этом весовые коэффициенты в большинстве случаев характеризуются своими неопределенностями, являющимися следствием групповых или индивидуальных субъективных оценок и предпочтений, а также выбранного метода.

При задании числовых значений оценок и предпочтений экспертам в большинстве случаев легче указать диапазон изменения относительной важности весового коэффициента в сравнении с заданием его точного значения. Например, при реализации метода взвешивания *swing/swing* [5] утверждение «относительная важность/ценность изменения от худшего значения до лучшего для второго по важности критерия составляет 30–60% от соответствующего изменения (от худшего до лучшего значения) для наиболее важного критерия» является более вероятным, чем утверждение, что указанная величина равна в точности 45%. Указанные неопределенности весовых коэффициентом могут быть также естественным следствием группового анализа (как распределение оценок, данных различными членами группы).

Рекомендуемым методом задания весовых коэффициентов в *FMAA/ProMAA* (основанных на аддитивной модели с использованием частных функций ценностей) является метод свинг, являющийся обоснованным методом задания весов/коэффициентов масштабирования для методов *MAVT* (который также может быть использован в рамках *MAUT* вместо применения концептуально более сложных методов лотерей [5]):

– наиболее значимому критерию присваивается вес  $w_1 = 1$ , принимая во внимание значимость свинга/амплитуды (изменения в рамках границ), т.е. увеличение интегральной ценности



при изменении значения критерия от худшего к лучшему (обозначим этот критерий как  $C_1$ );

- интервал изменения  $[w_2^{min}, w_2^{max}]$ ,  $0 \leq w_2^{min} \leq w_2^{max} \leq 1$  назначается весовому коэффициенту  $w_2$  (второму по важности критерию  $C_2$ ) на основе оценки изменения относительной ценности от худшего значения к лучшему для критерия  $C_2$  в сравнении с соответствующей ценностью изменения для наиболее важного критерия;

- предыдущий шаг повторяется для третьего по важности критерия и т.д.;

- распределения вероятностей (для *ProMAA*) как результат задания субъективных вероятностей (или как результат статистического анализа весов, заданных членами группы экспертов) или (для *FMAA*) функции принадлежности задаются экспертами для всех весовых коэффициентов  $w_j$  в интервалах изменения  $[w_j^{min}, w_j^{max}]$ ,  $j = 2, \dots, m$ .

В рамках классических методов *MAVT/MAUT* заданные веса нормируются согласно (8). Такой подход является обоснованным, включая возможность интерпретации важности весов в процентах, представление интегральной функции ценности и др. [3, 5, 33]. В ряде случаев эксперты могут посчитать более естественным задание базового критерия, чей вес определяется равным 1, а веса относительной важности остальных критериев определяются в долях от заданного веса [5, 22]. Очевидно также, что пропорциональное изменение всех весов  $w_j$ ,  $j = 1, \dots, m$ , ( $w_j \rightarrow dw_j$ , где  $d$  – действительное положительное число) не изменяет порядка ранжирования альтернатив в методах *MAVT/MAUT*, а также *FMAA/ProMAA*.

В текущей реализации методов *FMAA* и *ProMAA* в рамках *DECERNS SDSS* (см. раздел 3.) оригинальные весовые коэффициенты, полученные согласно указанному выше свинг-методу, нормализуются на сумму их средних значений; таким образом, сумма средних значений весовых коэффициентов после нормализации равна 1. Такой подход позволяет сравнивать веса в *FMAA* и *ProMAA* с весами, используемыми в других методах

при реализации различных подходов к решению исследуемой многокритериальной задачи.

### 3. Реализация FMAA и ProMAA

В рамках веб-системы поддержки принятия решений *DECERNS WebSDSS* [34] реализован ряд методов многокритериального анализа, включая *MAVT*, *TOPSIS*, *AHP*, *PROMETHEE*, *MAUT*, *F-MAVT*, *FlowSort*, а также методы *ProMAA* и *FMAA*.

Реализация *ProMAA* основана на эффективном использовании оригинальной библиотеки компьютерных модулей *RandFunction* (без применения методов Монте-Карло) для оценки плотности/функции распределения случайной величины  $x = f(x_1, \dots, x_m)$  для широкого класса функций  $f(\cdot)$  (включая арифметические и алгебраические функции, а также  $\exp(\cdot)$ ,  $\ln(\cdot)$ ) и всех основных типов распределений (независимых) случайных величин  $x_i$  (равномерное, нормальное, логнормальное, дельта-распределение и гистограммы).

*Randfunction* представляет собой библиотеку *Java*-модулей, разработанных в рамках *DECERNS* и ФЦП проекта [33, 36]. На базе библиотеки *Randfunction* создано также веб-приложение *RandCalculator* для реализации пользователями функций от независимых случайных величин.

Для реализации *FMAA* (и *F-MAVT*) разработана библиотека *FuzzyLib*, на базе которой реализуются функции от нечетких переменных,  $x = f(x_1, \dots, x_m)$  для того же класса функций  $f(\cdot)$ , указанных выше для случайных величин, и основных типов (входных) нечетких чисел  $x_i$  (синглтоны, треугольные, трапецевидные и кусочно-линейные нечеткие числа). На базе библиотеки *FuzzyLib* создано также веб-приложение *FuzzyCalculator* для реализации пользователями функций от нечетких переменных.

Интерфейс *ProMAA/FMAA* и реализованные на базе библиотеки программных модулей *Randfunction/FuzzyLib* функции позволяют:

– задать плотности распределения/функции принадлежности исходных критериев  $X_j(a_j)$ ,  $j = 1, \dots, m$ , исследуемой многокри-

териальной задачи для рассматриваемого множества альтернатив  $A = \{a_i, i = 1, \dots, n\}$ ;

- задать плотности распределения/функции принадлежности весовых коэффициентов  $w_j, j = 1, \dots, m$ , (см. раздел 2.5 выше);

- вычислить распределения/функции принадлежности величин интегральной ценности/полезности  $h_i = U(a_i), i = 1, \dots, n$ , согласно используемой модели;

- вычислить *индексы приемлемости рангов*  $P_{ik}/m(i, k)$  (вероятность/нечеткая мера того, что альтернатива  $a_i, i = 1, \dots, n$ , будет иметь ранг  $k: k = 1$  – «лучшая»,  $k = n$  – «худшая» альтернативы);

кроме того,

- проводить графический и табличный анализ полученных оценок для последующего принятия соответствующих решений;

- проводить анализ чувствительности получаемых результатов к изменению формы используемых частных функций ценности/полезности;

- редактировать значения критериев и весов (диапазоны изменения весов и их распределения) в рамках дополнительного анализа неопределенностей.

Для эффективного вычисления выражений вида (17) и (24) реализованы оригинальные алгоритмы с использованием методов двоичного кодирования входящих в формулу компонентов.

Вычисление выходных результатов в рамках распределенной веб-системы *DECERNS WebSDSS* выполняются на стороне сервера. При использовании *ProMAA*, например, время расчета задачи с 5-ю критериями и 5-ю альтернативами (все критерии и веса, за исключением максимального, рассматриваются распределенными) составляет менее 0,4 секунды (для 10 критериев и 10 альтернатив – менее 1,8 секунды); указанные оценки зависят от характеристик компьютера и включают только время работы процессора (в указанном случае использовался сервер с частотой 3 ГГц).

#### 4. Заключение

Предложенные методы *FMAA* и *ProMAA*, основанные на оценке индексов приемлемости рангов, представляют собой один из подходов к учету неопределенностей объективных значений и субъективных предпочтений в рамках многокритериального анализа решений. Являясь фактически расширением методов *MAVT/MAUT*, описанные варианты многокритериального анализа приемлемости *FMAA* и *ProMAA* не используют концепцию ожидаемой полезности. Указанные методы могут быть эффективным средством анализа решений в случаях существенной неопределенности значений критериев и/или весовых коэффициентов; при этом неопределенности могут быть представлены как с использованием вероятностных методов (*ProMAA*), так и с использованием нечетких величин (*FMAA*).

Метод *FMAA* представляет собой оригинальный подход к анализу приемлемости альтернатив, основанный на применении базового алгоритма (1)–(4) и определения меры приемлемости рангов с использованием аппарата нечеткой логики.

Использование нечетких значений объективных показателей и субъективных предпочтений (значения критериев и/или весовых коэффициентов) и их интеграция в рамках методов многокритериального анализа (*FMAA*, *F-MAVT* и др.) в целом ряде случаев может быть более обоснованным, чем моделирование процесса многокритериального анализа с использованием случайных величин/вероятностных методов. Что касается непосредственно использования методологии нечетких чисел и нечеткой логики в рамках многокритериального анализа приемлемости для решения конкретных практических задач, то здесь необходимо проведение дополнительных исследований.

*ProMAA* также представляет собой оригинальную реализацию многокритериального анализа приемлемости с использованием методов теории вероятностей, и является альтернативным по отношению к *SMAA-2* подходом к оценке индексов приемлемости рангов [17]. Методы *SMAA* базируются на использовании процедур Монте-Карло; в *ProMAA* вычисляются распределения функций от (независимых) случайных величин на основе реали-

зации соответствующих теоретико-вероятностных методов. Процедуры задания весовых коэффициентов в *SMAA-2* и *ProMAA-V* (*ProMAA*, основанном на аддитивной модели *MAVT/MAUT* (7) и частных функций ценности) являются различными: в *ProMAA* веса задаются в соответствии с методом задания весовых коэффициентов *swing* (раздел 2.5); в *SMAA-2* веса выбираются из заданных  $(m - 1)$  интервалов возможного изменения весов в соответствии с законами распределения, где  $m$  – число критериев; последний вес определяется из соотношения нормировки весов (8), если при этом выборка из  $(m - 1)$  весов является допустимой (т.е. допускает вычисление последнего неотрицательного весового коэффициента, лежащего в соответствующем интервале). Указанные различия в алгоритмах задания весов являются одной из причин различия оценок индексов приемлемости в *SMAA* и *ProMAA* (проведенные исследования показывают, что это различие составляет менее 3%).

При использовании *ProMAA/FMAA* в рамках многокритериальной системы поддержки принятия решений *DECERNS WebSDSS* [34] пользователи/эксперты могут также сравнивать результаты проведенного анализа (ранжирование альтернатив, результаты анализа неопределенностей, рекомендации для принятия решений или проведения дальнейших исследований), полученные с использованием других методов. В *DECERNS WebSDSS*, кроме *ProMAA* и *FMAA*, реализованы также многокритериальные методы анализа решений *MAVT*, *MAUT*, *AHP*, *TOPSIS*, *PEOMETHEE*, *Fuzzy-MAVT*, *FlowSort*. При этом в рамках *DECERNS WebSDSS* используется одна и та же базовая структура таблицы для задания входных значений (*performance table*), автоматически расширяемая до необходимой степени при выборе метода с более сложной структурой входных данных. Это позволяет (при наличии возможности, необходимости и/или при желании пользователей/экспертов) эффективно переходить от одного метода МКАР к другому и сравнивать полученные результаты в процессе поддержки принятия решений. Безусловно, параметризация субъективных предпочтений, в том числе задание весовых коэффициентов при использовании каждого из

выбираемых методов, является задачей экспертов, участвующих в решении многокритериальной задачи.

Возможности реализованных в рамках *DECERNS WebSDSS* методов *ProMAA* и *FMAA* прорабатываются авторами в рамках решения конкретных многокритериальных задач.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках проекта ФЦП (Информатика) 14.740.11.0360, а также проекта РФФИ 11-07-97529. Авторы выражают благодарность участникам проектов за обсуждение работы и предложения по реализации представленных методов в рамках *DECERNS WebSDSS*.

### Литература

1. ЛАРИЧЕВ О.И. *Теория и методы принятия решений*. – М.: Физматкнига, 2006.
2. ЛОТОВ А.В., БУШЕНКОВ В.А., КАМЕНЕВ Г.К., ЧЕРНЫХ О.Л. *Компьютер и поиск компромисса. Метод достижимых целей*. – М.: Наука, 1997.
3. ПОДИНОВСКИЙ В.В. *Введение в теорию важности критериев*. – М.: Физматлит, 2007.
4. ТРАХТЕНГЕРЦ Э.А. *Компьютерная поддержка принятия решений*. – М.: Синтег, 1998.
5. BELTON V., STEWART T. *Multiple Criteria Decision Analysis: An Integrated Approach*. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002.
6. BRANS J.P., VINCKE P. *A preference ranking organization method: the PROMETHEE method for multiple criteria decision-making* // Management Science. – 1985. – Vol. 31. – P. 647–656.
7. CARLSSON C., FULLER R. *Fuzzy multiple criteria decision making: Recent developments* // Fuzzy Sets and Systems. – 1996. – Vol. 78. – P. 139–153.
8. CHANG D.Y. *Applications of the extent analysis method on fuzzy AHP* // European Journal of Operational Research. – 1996. – Vol. 95. – P. 649–655.

9. D'AVIGNON G.R., VINCKE P. *An outranking methods under uncertainty* // European Journal of Operational Research. – 1988. – Vol. 36. – P. 311–321.
10. EDWARDS W., BARRON F.H. *SMARTS and SMARTER: improved simple methods for multiattribute utility measurement* // Organization Behavior and Human Processes. – 1994. – Vol. 60. –P. 306–325.
11. FERNÁNDEZ-CASTRO A.S, JIMÉNEZ M. *PROMETHEE: An Extension through Fuzzy Mathematical Programming* // The Journal of the Operational Research Society. – 2005. – Vol. 56, No. 1. – P. 119–122.
12. FIGUEIRA J., GRECO S., EHRGOTT M. (Eds). *Multiple criteria decision analysis: State of the art surveys*. – New York: Springer Science, Business Media, Inc, 2005.
13. HAINES L.M. *A statistical approach to the analytic hierarchy process with interval judgments* // European Journal of Operational Research. – 1998. – Vol. 110. – P. 112–125.
14. JACQUET-LAGREZE E., SISKOS Y. *Assessing a set of additive utility functions for multicriteria decision making: The UTA method* // European Journal of Operational Research. – 1982. – Vol. 10, No. 2. – P. 151–164.
15. KAHRAMAN C. (Ed). *Fuzzy Multi-Criteria Decision Making. Theory and Applications with Recent Developments* // Series: Springer, Optimization and Its Applications. – 2008. – Vol.16.
16. KEENEY R.L., RAIFFA H. *Decision with Multiple Objectives*. – New York: LJ.Wiley & Sons, 1976.
17. LAHDELMA R., HOKKANEN J., SALMINEN P. *SMAA – Stochastic Multiobjective Acceptability Analysis* // European Journal of Operational Research. – 1998. – Vol. 106. – P. 137–143.
18. LAHDELMA R., SALMINEN P. *SMAA-2: stochastic multicriteria acceptability analysis for group decision making* // Operations Research. – 2001. – Vol. 49, No. 3. – P. 444–454.

19. LAHDELMA R., MAKKONEN S., SALMINEN P. *Multivariate Gaussian criteria in SMAA* // European Journal of Operational Research. – 2006. – Vol. 170, No. 3. – P. 957–970.
20. LEE K.H. *First Course on Fuzzy Theory and Applications*. – Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 2005.
21. LEVARY R.R., WAN K. *A simulation approach for handling uncertainty in the analytic hierarchy process* // European Journal of Operational Research. – 1998. – Vol. 106. – P. 116–122.
22. MALCZEWSKI J. *GIS and Multicriteria Decision Analysis*. – New York: John Wiley & Sons Inc, 1999.
23. MARTEL J.-M., ZARAS K. *Stochastic dominance in multicriteria analysis under risk* // Theory and Decision. – 1995. – Vol. 39. – P. 31–49.
24. NEMERY Ph., LAMBORAY Cl. *FlowSort: a flow-based sorting method with limiting and central profiles*. – 2008, TOP 16, 90–113.
25. NEMERY Ph. *FlowSortPro: a probabilistic extension of the multicriteria sorting method FlowSort* // Technical Paper. – 2009. – URL: <http://userweb.port.ac.uk/~nemeryp/> (дата обращения 10.08.2010).
26. ROSENBLOOM E.S. *A probabilistic interpretation of the final rankings in AHP* // European Journal of Operational Research. – 1996. – Vol. 96. – P. 371–378.
27. ROY B. *Multicriteria Methodology for Decision Aiding*. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1996.
28. SAARI D.G. *Basic Geometry of Voting*. – Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1995.
29. SAATY T.L. *The Analytic Hierarchy Process*. – New York: McGraw-Hill, 1980.
30. STEWART T.J. *Simplified approaches for multi-criteria decision making under uncertainty* // Journal of Multi-Criteria Decision Analysis. – 1995. – Vol. 4. – P. 246–258.
31. TERVONEN T., FIGUEIRA J.R. *A Survey on Stochastic Multicriteria Acceptability Analysis Methods* // Journal of Multi-Criteria Decision Analysis. – 2008. – Vol. 15. – P. 1–14.



32. WANG X., KERRE E. *Reasonable Properties for the Ordering of Fuzzy Quantities* // Fuzzy Sets and Systems. – 2001. – Vol. 118. – P. 375–405.
33. VON WINTERFELDT D., EDWARDS W. *Decision Analysis and Behavioral Research*. – Cambridge: Cambridge University Press, 1986.
34. YATSALO B., DIDENKO V., GRITSYUK S., MIRZE-ABASOV O. *Multi-Criteria Spatial Decision Support System DECERNS: Application to Land Use Planning* // International Journal of Information Systems and Social Change. – 2010. – Vol. 1, No. 1. –P. 11–30.
35. ZADEH L.A. *Generalized theory of uncertainty (GTU) – principal concepts and ideas* // Computational Statistics & Data Analysis. – 2006. – Vol. 51. – P. 15–46.
36. ZIMMERMANN H. *An application-oriented view of modeling uncertainty* // European Journal of Operational Research. – 2000. – Vol. 122. – P. 190–198.

## UNCERTAINTY TREATMENT WITHIN MULTICRITERIA DECISION ANALYSIS WITH THE USE OF ACCEPTABILITY CONCEPT

**Boris Yatsalo**, National Research Nuclear University IATE MEPHI, Obninsk, Russia, Doctor of science (yatsalo@iate.obninsk.ru).

**Sergey Gritsyuk**, National Research Nuclear University IATE MEPHI, Obninsk, Russia, PhD student (s.gritsyuk@gmail.com).

**Oleg Mirzeabasov**, National Research Nuclear University IATE MEPHI, Obninsk, Russia, Cand.Sc. (oam@iate.obninsk.ru).

**Maria Vasilevskaya**, National Research Nuclear University IATE MEPHI, Obninsk, Russia, Master of informatics (mvvasilevskaya@gmail.com).

*Abstract: The new approach to uncertainty treatment within multicriteria decision analysis taking into account uncertainties of criteria values and subjective judgments has been presented. The methods suggested (FMAA, Fuzzy Multicriteria Acceptability Analysis, and ProMAA, Probabilistic MAA) are based on assessing rank acceptability indices. The general approach to FMAA/ProMAA implementation along with its specification for multicriteria additive utility models is discussed. Realization of FMAA/ProMAA is based on the numerical approximation of functions of random/fuzzy variables and the numerical assessment of integrals without Monte Carlo simulations. The decision support system DECERNS WebSDSS which implements FMAA and ProMAA as well as several other multicriteria decision analysis methods has been briefly described.*

**Keywords:** multi-criteria decision analysis; uncertainty analysis; multicriteria acceptability analysis; decision support systems; *DECERNS WebSDSS*.

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии Д. А. Новиковым*

УДК 519.283  
ББК 22.171

## ПРОГНОЗИРОВАНИЕ СОСТОЯНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ АНАЛИЗА ИХ СПЕКТРАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

Андриенко А. Я.<sup>1</sup>, Тропова Е. И.<sup>2</sup>

(Учреждение Российской академии наук  
Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова  
РАН, Москва)

*Предложен метод построения оценок спектральной плотности стационарного процесса по его реализации ограниченной длительности. Повышение точности этих оценок достигается варьированием ширины спектрального окна в функции от длительности наблюдения и локальных свойств спектральной плотности.*

Ключевые слова: случайный процесс, оценка спектральной плотности, преобразование Фурье, спектральное окно.

### 1. Введение

Решение многих задач, возникающих в различных областях техники, приводит к необходимости оценивания состояния случайного процесса и прогнозирования этого состояния в будущие моменты времени. Можно выделить два типа таких задач.

К первому типу относятся задачи, в которых требуется по наблюдаемой реализации случайного процесса количественно оценить его статистические характеристики. Примером задачи этого типа является оценивание ресурса механических конструкций, подверженных воздействию случайной нагрузки.

---

<sup>1</sup> Анатолий Яковлевич Андриенко, заведующий лабораторией, доктор технических наук, профессор (vladguc@ipu.rssi.ru).

<sup>2</sup> Елена Ивановна Тропова, научный сотрудник (тел. (495) 334-88-71).

В задачах второго типа по наблюдаемой реализации требуется оценить случайное значение, которое примет реализация в будущие моменты времени. Примерами задач этого типа служат прогноз спроса на рыночную продукцию либо оперативный (или долговременный) прогноз регулярности полетов, используемый при планировании эксплуатации аэродрома, и т.д.

Для решения таких задач широко используется спектральный метод. Среди различных подходов к оцениванию спектра значительное место занимают методы, основанные на вычислении периодограммы с последующим её сглаживанием при помощи спектрального окна [1]. В этих методах используется минимальная априорная информация о случайном процессе (обычно предполагается стационарность процесса и гладкость его спектральной плотности). Предложено большое количество различных спектральных окон, для большинства из них получены асимптотические оценки статистической точности действия и найдены условия асимптотической оптимальности [2]. Однако во многих практических случаях наблюдению доступен фрагмент реализации случайного процесса, длительность которого существенно ограничена. В этих условиях асимптотически оптимальные спектральные окна могут приводить к большим погрешностям оценивания спектральной плотности (СП). В статье основное внимание уделено формированию оптимальных оценок СП случайного процесса по его реализации конечной длительности.

## **2. Постановка задачи**

В основе большинства известных методов оценивания спектра лежит периодограмма

$$J_T(f) = \frac{2}{T} \left| \int_0^T x(t) \exp(-i2\pi ft) dt \right|^2,$$

где  $f$  – частота (в герцах);  $x(t)$  – реализация стационарного случайного процесса  $\{X(t)\}$ .

Всякая оценка спектральной плотности  $S(f)$ , являющаяся линейной комбинацией значений периодограммы, в общем виде может быть представлена сверткой [2]

$$(1) \quad \hat{S}_T(f) = \int_0^{\infty} W(f - \lambda) J_T(\lambda) d\lambda,$$

где  $W(f - I)$  – спектральное окно. В известных методах это окно подбирается так, чтобы оно имело резко выраженный максимум в нуле и давало асимптотически несмещенную и состоятельную оценку спектральной плотности  $S(f)$ . Отметим, что форма спектрального окна в (1) одинакова для всей совокупности частот, на которых строятся точечные оценки спектральной плотности, и зависят только от разности  $f - I$ .

Вместо линейной оценки (1) предлагается использовать нелинейную оценку

$$(2) \quad \hat{S}_T(f) = \int_0^{\infty} W(f - \lambda, f) J_T(\lambda) d\lambda,$$

в которой форма спектрального окна зависит от локальных свойств периодограммы в окрестности частоты  $f$ , на которой строится оценка. Известно [1], что требования уменьшения смещения оценки спектральной плотности и обеспечения наиболее быстрой сходимости дисперсии этой оценки к нулю при неограниченном увеличении длительности наблюдения  $T$  оказываются противоречивыми. Если СП стационарного процесса является гладкой функцией частоты, то смещение оценки (1) пропорционально второй производной спектральной плотности, а дисперсия этой оценки пропорциональна квадрату спектральной плотности. Отсюда следует, что относительный вклад смещения и дисперсии в суммарную статистическую точность оценки (1) зависит от соотношения между значением спектральной плотности и величиной её второй производной, т.е. от локальных свойств спектральной плотности. Задача заключается в том, чтобы для каждой частоты  $f$ , на которой строится точечная оценка спектральной плотности, выбрать такую форму спектрального окна  $W(f - I, f)$ , которая обеспечила бы минимум среднеквадратического отклонения оценки (2) от истинного значения СП.

В следующем разделе вводится скользящее преобразование Фурье, рассматриваются его основные свойства и показывается, каким образом можно построить семейство оценок вида (2) в функции от эффективной ширины спектрального окна. В разделе 4 кратко представлен способ выбора оптимальной ширины спектрального окна для формирования оптимальной оценки спектральной плотности процесса по его финитной реализации.

### 3. Некоторые свойства скользящего преобразования Фурье

Пусть  $x(t)$  – действительная функция, заданная на всей числовой оси и суммируемая с квадратом на любом конечном интервале  $t$ . Определим скользящий интервал  $\{J_{rt} : t \leq s \leq t + t\}$ , ширина  $t$  которого постоянна, а начальная точка скользит вдоль числовой оси. Представим разложение  $x(t)$  на интервале  $J_{rt}$  в ряд Фурье:

$$(3) \quad x(t+s) \approx \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{kt}(t) \exp(i k \omega(t+s)), \quad 0 \leq s \leq t,$$

коэффициенты которого в отличие от обычного ряда Фурье зависят от времени:

$$c_{rt}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t x(t+s) \exp(-ikws) ds, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Ряд (3) сходится на интервале  $t$  к  $x(t)$  в каждой точке её непрерывности, однако в конечных точках поточечная сходимость нарушается из-за эффекта Гиббса [2]. Поэтому вместо (3) будем рассматривать ряд

$$(4) \quad x(t) \approx \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{kt}(t-e) \exp(i k \omega t),$$

где  $e$  – фиксированное малое положительное число. Этот ряд сходится к  $x(t)$  в каждой точке её непрерывности; более того, если дополнительно потребовать выполнения одного из условий, обеспечивающих равномерную сходимость (например, условия Дини), то в (4) может быть поставлен знак равенства.

Проведем такие же рассуждения применительно к случайному процессу  $\{X(t)\}$ . Будем полагать, что процесс стационарный, эргодический, непрерывен в среднеквадратическом и обладает конечными моментами до четвертого порядка включительно. Тогда интеграл

$$h_{kt}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t X(t+s) \exp(-ikws) ds \quad (k = 0, \pm 1, \dots),$$

является случайной функцией  $t$ . Поэтому записанный по аналогии с (4) ряд

$$(5) \quad X(t) \approx \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_{kt}(t-e) \exp(ik\omega t), \quad 0 < e < t,$$

сходится к  $\{X(t)\}$ . Остановимся кратко на конечных его свойствах.

Рассматривая ряд (4) при различных значениях ширины базового интервала  $t$ , получим семейство скользящих рядов Фурье  $\{\Phi_t X\}$ , где  $\Phi_t$  – линейный оператор скользящего преобразования Фурье. В силу сделанных предположений о случайном процессе  $X(t)$  выражение

$$(6) \quad S_t(w) = 2t M \left[ |h_t(w)|^2 \right]$$

(где  $M(\cdot)$  – оператор матожидания) имеет смысл для каждого  $t$ . Величина  $S_t(w)$  при  $t \rightarrow \infty$  сходится к спектральной плотности процесса  $S(w)$ .

В силу линейности оператора  $\Phi_t$  и эргодичности  $\{X(t)\}$  случайные функции  $\{h_{kt}(t)\}$  стационарны и эргодичны, поэтому оператор матожидания (6) может быть заменен усреднением по времени:

$$(7) \quad S_t(w) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2t}{T-t} \int_0^{T-t} |h_t(w,t)|^2 dt.$$

Если наблюдению доступен фрагмент реализации полной длительности  $T$ , то параметрическое семейство оценок (6) для различных  $t$  может быть получено из (7) в виде

$$(8) \quad \hat{S}_{tT}(w) = \frac{2t}{T-t} \int_0^{T-t} |h_t(w,t)|^2 dt, \quad 0 < t \leq T.$$

Обозначим дисперсию оценки (8) через  $S_{tT}^2(w)$  и смещение

– через  $b_{tT}(w)$ . Среднеквадратическое уклонение оценки (8) относительно истинного значения  $S(w)$  есть

$$(9) \quad M \left[ \hat{S}_{tT}(w) - S(w) \right]^2 = s_{tT}^2(w) + b_{tT}^2(w).$$

Первый член в этом выражении с уменьшением  $t$  падает в силу возрастания интервала временного сглаживания  $T - t$ , второй возрастает. Задача состоит в том, чтобы при фиксированной полной длительности  $T$  отыскать оптимальное значение  $t$ , доставляющее минимум (9).

#### **4. Оптимальное оценивание спектральной плотности процесса по его финитной реализации**

Пусть  $\{X(t), 0 \leq t \leq T\}$  – финитный фрагмент реализации случайного процесса  $X$ , удовлетворяющего приведенным в разделе 3 предположениям. Выбор ширины базового интервала  $t$  определяется тремя факторами: требуемым разрешением оценок СП по частоте, удобством применения процедуры быстрого преобразования Фурье и корреляционными свойствами процесса.

Будем полагать, что этот интервал укладывается целое число ( $N$ ) раз на полном интервале  $T$ , т.е.  $T = Nt$ . Исходным является семейство оценок вида

$$(10) \quad \hat{S}_{nt}(f_k) = nt \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{\sin(plnt)}{plnt} \right]^2 J_T(f_k + l) dl,$$

$$J_T(l) = J_T(-l); \quad f_k = k/t, \quad k = 1, 2, \dots; \quad n = 1, 2, \dots, N-1.$$

Дальнейший анализ выражения (10) проведем при двух предположениях: 1) полная длительность  $T$  финитного фрагмента реализации процесса достаточно велика, так что для периодограммы могут быть использованы асимптотические оценки; 2) спектральная плотность  $S(l)$  процесса является гладкой (дважды дифференцируемой) функцией частоты.

Известно [2], что  $J_T(l)$  есть несмещенная оценка  $S_T(l)$ , поэтому при больших  $T$  периодограмма может быть приближенно представлена в виде

$$(11) \quad J_T(l) = S_T(l) + x_T(l),$$



где  $x_T(l)$  – случайная функция с независимыми значениями, нулевым матожиданием и дисперсией  $s^2[x_T(l)] \approx S_T^2(l)$ ,  $l \neq 0$ .

С учетом (10), (11) уклонение оценки спектральной плотности от истинного значения представим в виде

$$(12) \quad \hat{S}_{nt}(f_k) - S_T(f_k) = \frac{1}{p} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\sin l}{l} \right)^2 \left[ S_T \left( f_k + \frac{l}{pnt} \right) - S_T(f_k) \right] dl + \\ + \frac{1}{p} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\sin l}{l} \right)^2 x_T \left( f_k + \frac{l}{pnt} \right) dl .$$

Первый интеграл в этом выражении описывает смещение оценки, второй – её вариабельность. При больших  $T$  можно воспользоваться известным асимптотическим выражением для дисперсии [2]

$$(13) \quad s_{nt}^2(f_k) \approx \frac{n}{N} s^2[J_T(f_k)] \approx \frac{n}{N} S^2(f_k),$$

откуда следует, что при выборе малых значений  $n/N$  дисперсия оценки (10) может быть значительно уменьшена, но при этом возрастает смещение оценки вследствие увеличения эффективной ширины спектрального окна и влияния на оценку значений спектра на более отдаленных частотах.

Используя предположение 2), представим приближенно спектральную плотность в виде квадратичного трехчлена

$$(14) \quad S_T \left( f_k + \frac{l}{pnt} \right) \approx S_T(f_k) + \frac{1}{pnt} S_T'(f_k)l + \frac{1}{2(pnt)^2} S_T''(f_k)l^2, \\ -p \leq l \leq p .$$

Погрешность этого приближения на интервале  $-p \leq l \leq p$  может быть сделана сколь угодно малой посредством выбора достаточно больших значений  $n$ . Подставив (14) в первый интеграл правой части (12) и учтя, что подынтегральная функция является четной, получим для смещения оценки приближенную формулу

$$(15) \quad b_{nt}(f_k) \approx \left( \frac{N}{n} \right)^2 S''(f_k) / 2p^2 T^2 .$$

Для формирования оптимальной точечной оценки спектральной плотности при фиксированной полной длительности наблюдения  $T$ , необходимо выбрать такое  $n^*$ , при котором среднеквадратическое уклонение оценки (относительно истинного значения спектра) минимально. Обозначив  $r = n/N$ , из (12) с учетом (13) и (15) получим

$$M \left[ \hat{S}_{nt}(f_k) - S_T(f_k) \right]^2 \approx r_k S^2(f_k) + \frac{1}{r_k^4} \left[ S_T''(f_k) / 2p^2 T^2 \right]^2.$$

Это выражение достигает минимума при

$$r_k^* = \frac{n_k^*}{N} = \sqrt[5]{\frac{1}{p^4 T^4} \left[ S_T''(f_k) / S_T(f_k) \right]^2}.$$

Таким образом, оптимальная ширина спектрального окна (т.е. оптимальное значение  $n_k^* t$ ) зависит от локальных свойств спектральной плотности в окрестности частоты  $f_k$  и от полной длительности наблюдения  $T$ . Если на частоте  $f_k$  спектральная плотность имеет резкий пик (или провал), то ее вторая производная в этой точке отрицательна (соответственно положительна) и велика по абсолютной величине. В этом случае оценка (10) согласно (15) будет иметь большое смещение и ширину спектрального окна следует увеличивать. Если же в окрестности частоты  $f_k$  спектральная плотность постоянна либо изменяется по закону, близкому к линейному, то смещение у оценки (10) практически отсутствует и величина  $n_k^* t$  должна быть выбрана возможно более малой с тем, чтобы обеспечить максимальное сглаживание случайной составляющей оценки.

Отметим также, что при  $T \rightarrow 0$  оптимальное значение  $r_k^*$  стремится к нулю при любой форме спектральной плотности, при этом оценка (10) является состоятельной и асимптотически несмещенной, что согласуется с известными результатами.

## 5. Заключение

Представленный метод оценивания спектральной плотности стационарного ограниченной длительности позволяет повысить статистическую точность оценок посредством использова-

ния на каждой частоте спектральных окон переменной ширины, автоматически учитывающих особенности корреляционных связей анализируемого процесса. Необходимое быстродействие оценивания обеспечивается применением быстрого преобразования Фурье на всех этапах вычислений.

### **Литература**

1. АНДЕРСОН Т. *Статистический анализ временных рядов.* – М.: Мир, 1976.
2. *Справочник по теории вероятностей и математической статистике.* – М.: Наука, 1985.

### **FORECASTING STATE OF DYNAMIC SYSTEMS ON THE BASIS OF THEIR SPECTRAL CHARACTERISTICS**

**Anatolii Andrienko**, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Laboratory Head, Doctor of Science, professor (Moscow, Profsoyuznaya st., 65, (495) 334-88-71, vladguc@ipu.rssi.ru).

**Elena Tropova**, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, researcher, (495) 334-88-71, vladguc@ipu.rssi.ru

*Abstract: The method is offered to construct estimates of spectral density of a stationary process on the basis of its realization of limited duration. Increase of accuracy of these estimates is achieved by the variation of the width of the spectral window in the function of supervision time and of the local characteristics of spectral density.*

Keywords: random process, estimate of spectral density, Fourier transformation, spectral window.

*Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии Д. А. Новиковым*

УДК 517.958

ББК 22.161.5

## ИССЛЕДОВАНИЕ УСЛОВИЙ ПРИЧИННОСТИ И УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ЛИНЕЙНЫМ ОБЪЕКТОМ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ (ОСОБЫЕ СЛУЧАИ). ЧАСТЬ II

Солнечный Э. М.<sup>1</sup>, Черёмушкина Л. А.<sup>2</sup>

*(Учреждение Российской академии наук*

*Институт проблем управления РАН, Москва)*

*Для одного из особых видов граничных условий на одномерно распределённый объект теплопроводности конечной длины получены оценки норм операторов, входящих в достаточное условие детерминированности, причинности и устойчивости системы управления объектом с помощью нелинейной обратной связи.*

Ключевые слова: система управления, причинность, устойчивость, распределенные динамические системы, линейный объект теплопроводности, теория функций комплексного переменного.

### **1. Введение**

Настоящая работа опирается на изложенную в [4] методику исследования условий детерминированности, причинности и устойчивости системы, состоящей из линейного распределённого объекта и, вообще говоря, нелинейной обратной связи. Работа содержит исследование ограниченности операторов, входящих в полученное в [4] достаточное условие причинности и устойчивости системы управления одномерно распределённым объек-

---

<sup>1</sup> *Энгель Михайлович Солнечный, доктор физико-математических наук (Москва, ул. Профсоюзная, д. 65, тел. (495) 334-92-29).*

<sup>2</sup> *Людмила Александровна Черёмушкина (Москва, ул. Профсоюзная, д. 65, тел. (495) 334-92-29).*

том теплопроводности конечной длины  $l > 1$ , и определение оценок норм этих операторов.

Объект, рассматриваемый в данной работе, описывается уравнениями

$$(1.1) \quad \begin{cases} c \frac{\partial \Delta T}{\partial t} = -\lambda \frac{\partial \Delta q}{\partial x}, \\ \Delta q = -I \frac{\partial \Delta T}{\partial x}; \end{cases}$$

с граничными условиями вида

$$(1.2) \quad C_0 y|_{x=0} + C_l y|_{x=l} = u,$$

где  $y = \begin{pmatrix} \Delta T \\ \Delta q \end{pmatrix}$ ;  $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ ;  $u$  – отклонение входного воздействия

на объект от его установившегося значения;  $\Delta T$ ,  $\Delta q$  – отклонение соответственно температуры  $T$  и потока тепла  $q$  (в направлении возрастания  $x$ ) от их установившихся значений;  $t$  – время;  $x$  – координата вдоль длины объекта ( $x \in \mathbf{L} = [0, l]$ );  $c$  – теплоемкость теплопередающей среды на единицу длины;  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности среды;  $C_0 = (c_{0rs})$  и  $C_l = (c_{lrs})$ , где  $r, s = 1, 2$ , – заданные числовые квадратные матрицы 2-го порядка.

При этом в рассматриваемом в данной работе особом случае матрицы  $C_0$  и  $C_l$  полагаются такими, что определяемые через элементы этих матриц коэффициенты  $a_0 = \det C_0 + \det C_l$  и  $a_1 = \det ((c_{0r1})(c_{lr2})) = c_{011}c_{l21} - c_{l11}c_{021}$  не равны нулю. Здесь  $p = 1, 2$ , т.е.  $(c_{0p1})$ ,  $(c_{lp1})$  – первые столбцы матриц  $C_0$  и  $C_l$  соответственно. Два же других коэффициента  $a_2 = \det ((c_{0p1})(c_{lp2}))$  и  $a_{12} = \det ((c_{0p2})(c_{lp1})) - \det ((c_{0p2})(c_{lp2}))$ ,  $p = 1, 2$ , равняются нулю:  $a_2 = 0$ ,  $a_{12} = 0$  (см. [4]).

Один из простейших видов матриц  $C_0$ ,  $C_l$ , удовлетворяющих этим условиям, представлен в следующем примере:

$$(1.3) \quad \begin{cases} \Delta T|_{x=0} = u_1, \\ b\Delta q|_{x=0} + \Delta T|_{x=l} = u_2; \end{cases}$$

где  $b \neq 0$ .

В настоящей работе, являющейся продолжением работы [5], проводится:

1. Исследование расположения полюсов передаточной функции  $Y$  объекта от  $u$  к  $y$ , т.е. нулей её знаменателя  $D$ , имеющего для рассматриваемой задачи вид

$$(1.4) \quad D = a_0 - \frac{a_1}{k} S_l = \frac{a_1}{k} P,$$

где  $k = \sqrt{cI/q}$ ;  $q$  – константа, имеющая размерность времени;  $S_l = (al/\sqrt{q})(\text{sh} \hat{z}/\hat{z})$ ;  $a = \sqrt{c/I}$ ;  $\hat{z}(p) = al\sqrt{p}$  – однозначная ветвь функции  $z(p) = al\sqrt{p}$  комплексного переменного  $p$  с областью значений  $\hat{\mathbf{C}} = \mathbf{C}^+ \cup \{z = it : t \geq 0\} \subset \mathbf{C}$ . Здесь  $\mathbf{C}$  – комплексная плоскость,  $\mathbf{C}^+ = \{z = s + it : s > 0\}$ ;  $\sigma, \tau$  – вещественные числа;  $P(p) = g - \text{sh}(al\sqrt{p})/al\sqrt{p}$ ;  $\hat{P}(\hat{z}) = g - \text{sh} \hat{z}/\hat{z}$ ;  $g = ka_0/a_1$ .

Параметр  $\gamma$  будем далее считать отрицательным (что означает отрицательность произведения  $a_0 a_1$ ). Такой выбор  $\gamma$  гарантирует отсутствие у функции  $D(p)$ , вещественных положительных нулей (наличие таких нулей у функции  $D(p)$  означало бы неустойчивость изучаемого объекта).

2. Определение пространства  $\mathbf{U}$  входных воздействий, для которого гарантирована устойчивость объекта, под которой здесь понимается ограниченность оператора  $u \rightarrow y$ . Как следует из выражения для передаточной функции  $Y$  объекта (см. [4], формула (2.2)), устойчивость объекта гарантирована при ограниченности сужений на  $\mathbf{U}$  операторов

$$\underline{R_{J_x D}} \quad (J = H, S ; x \in \mathbf{L}),$$

имеющих передаточные функции

$$(1.5) \quad R_{J_x D} = \frac{J_x}{D} \quad (J = H, S),$$

где  $H_x(p) = \text{ch} \left( \frac{x}{l} al\sqrt{p} \right)$ ;  $S_x(p) = \frac{al}{al\sqrt{p}\sqrt{q}} \text{sh} \left( \frac{x}{l} al\sqrt{p} \right)$ .

Пространство  $\mathbf{U}$  ищется в классе пространств  $\mathbf{Q}_{(-i,j)}$  ( $i, j = 1, 2, \dots$ ) функций-оригиналов  $\varphi$  [1], равномерно ограниченных при  $t > 0$ , имеющих  $i$  ограниченных первообразных  $\varphi^{(-r)}$ ,  $0 \leq r \leq i$ , и  $j$  ограниченных (обобщенных) производных  $\varphi^{(s)}$ ,  $0 \leq s \leq j$ . Для краткости  $\mathbf{Q}_{(0,j)}$  обозначаем  $\mathbf{Q}_j$ , а  $\mathbf{Q}_{(0,0)}$  обозначаем  $\mathbf{Q}$ . Норма в пространстве  $\mathbf{Q}_{(-i,j)}$ :

$$(1.6) \quad \|j\|_{\mathbf{Q}_{(-i,j)}} = \max_{r=0+i, s=0+j} \left( \operatorname{vrai\,sup}_{t>0} |j^{(-r)}| q^{-r}, \operatorname{vrai\,sup}_{t>0} |j^{(s)}| q^s \right).$$

Функции  $R_{J,D}$  входят как в выражение для передаточной функции объекта  $Y$ , так и в достаточное условие детерминированности, причинности и устойчивости замкнутой системы «объект–обратная связь» (см. [4], формула (2.2)), имеющее вид:

$$(1.7) \quad L_X < 1.$$

В (1.7) обозначено (см. [4], формула (2.4)):

$$L_X = m_2 L_{F_{1,U}} + m_1 L_{F_{2,U}},$$

$$m_a = (|c_{0a2}| + |c_{1a2}|) N_{H,U} + \frac{|c_{0a1}| + |c_{1a1}|}{k} N_{S,U},$$

$$N_{J,U} = \sup_{\zeta \in \mathbf{L}} \left\| \underline{R_{J,D}} \right\|_{\mathbf{B}_U}, \quad J = H, S;$$

$\mathbf{B}_U$  – пространство линейных ограниченных операторов  $\mathbf{U} \rightarrow \mathbf{Q}$ ;  $L_{F_{a,U}}$  – константа, входящая в условия липшицевости обратной связи:

$$(1.8) \quad \|F_a(\Delta T_1, f) - F_a(\Delta T_2, f)\|_{\mathbf{U}} \leq L_{F_{a,U}} \|\Delta T_1 - \Delta T_2\|_{\mathbf{X}}, \quad a = 1, 2,$$

где  $F_a(\Delta T, f)$  – реализуемый обратной связью оператор (вообще говоря, нелинейный)  $\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{U}$ ;  $f$  – внешнее воздействие, действующее на обратную связь;  $\mathbf{X}$  – пространство ограниченных функций  $\Delta T: \mathbf{L} \rightarrow \mathbf{Q}$  с нормой

$$\|\Delta T\|_{\mathbf{X}} = \sup_{x \in \mathbf{L}} \|\Delta T(x)\|_{\mathbf{Q}}.$$

### 3. Вычисление оценок для норм сужений операторов

$$(1.9) \quad \underline{R_{J_x P}}, \quad J = H, S,$$

имеющих передаточные функции

$$(1.10) \quad R_{J_x P} = \frac{J_x}{P} = \frac{a_1}{k} R_{J_x D},$$

на пространство  $\mathbf{U}$  и рассматриваемых как операторы  $\mathbf{U} \rightarrow \mathbf{Q}$ . Как видно из выражений для  $L_x$ ,  $m_\alpha$  и  $N_{J,U}$ , эти оценки необходимы для определения (по достаточности) класса  $\mathbf{FB}$  обратных связей, для каждой из которых гарантированы детерминированность, причинность и устойчивость замкнутой системы.

## 2. Исследование полюсов функций $R_{J_x P}$ ( $J = H, S$ )

Введём в рассмотрение функцию  $h(\tau) = \sin \tau / \tau$  вещественного переменного  $\tau$ . Так как функция  $h$  – чётная, достаточно считать  $\tau$  положительным.

В интервалах  $\mathbf{I}_n = (\pi(2n - 1), 2\pi n)$ ,  $n \geq 1$ , функция  $h$  принимает отрицательные значения и имеет минимумы в точках  $\bar{\tau}_n$ , являющихся решениями уравнения  $\tau = \operatorname{tg} \tau$ ; точка  $\bar{\tau}_n$  располагается в интервале  $\mathbf{J}_n = (\pi(2n - 1), \pi(2n - 0,5))$ . Минимальное значение функции  $h$  в интервале  $\mathbf{I}_n$ :

$$(2.1) \quad \bar{h}_n = \min_{\mathbf{J}_n} \frac{\sin t}{t} = h(\bar{\tau}_n) = \cos \bar{\tau}_n = -\frac{1}{\sqrt{1 + \bar{\tau}_n^2}}.$$

Обозначим через  $N_\gamma$  наибольшее из чисел  $n$ , для которых  $g \geq \bar{h}_n$  (если  $g < \bar{h}_1$ , считаем  $N_\gamma = 0$ ), через  $h^*$  обозначим величину  $\bar{h}_{N_\gamma} = h(\bar{\tau}_{N_\gamma})$ , а через  $t^*$  – величину  $\bar{\tau}_{N_\gamma}$ .

**Теорема 1.** При любом  $g \in (\bar{h}_1, 0)$  в области  $\hat{\mathbf{C}}$  функция  $\hat{P}(\hat{z})$  имеет  $2N_\gamma$  простых чисто мнимых нулей вида  $\hat{z}_{nk}^0 = it_{nk}$ ,  $k = 1, 2$ , где  $\tau_{nk}$  – решения уравнения

$$(2.2) \quad \frac{\sin t}{t} = g,$$

находящиеся в интервале  $\mathbf{I}_n = (\pi(2n - 1), 2\pi n)$ , а при  $g = h^*$ , где

$$h^* = \bar{h}_{N_\gamma} = -\frac{1}{\sqrt{1 + (t^*)^2}}, \quad t^* = \bar{\tau}_{N_\gamma},$$



функция  $\hat{P}$  имеет нуль 2-го порядка  $\zeta^* = it^*$ . Этим нулям при  $g \in (\bar{h}_1, 0)$  соответствуют простые вещественные отрицательные нули

$$(2.3) \quad p_{nk} = -\left(\frac{t_{nk}}{al}\right)^2$$

функций  $P$  и  $D$ , а при  $\gamma = h^*$  – нуль 2-го порядка

$$(2.4) \quad p^* = -\left(\frac{t^*}{al}\right)^2.$$

Кроме того, функция  $\hat{P}$  при любом  $g < 0$  имеет в  $\hat{C}$  счётное число пар простых комплексных нулей вида  $z_n^0 = s_n^0 \pm it_n^0$ , у которых  $s_n^0 > 0$ ,  $t_n^0 \in \mathbf{M}_n$ ,  $\mathbf{M}_n = (p(2n-1), \bar{t}_n)$ ,  $n \geq N_g + 1$ . Этим парам нулей функции  $\hat{P}(\hat{z})$  соответствуют пары сопряжённых комплексных нулей

$$(2.5) \quad p_n^0 = \left(\frac{z_n^0}{al}\right)^2$$

функции  $P(p)$ . При  $g > \tilde{g}_1 = -4,5697$  все нули функции  $\hat{P}$  удовлетворяют условию  $|\operatorname{Re} z_{nk}^0| < |\operatorname{Im} z_{nk}^0|$ , поэтому все нули функции  $P(p)$  располагаются в полуплоскости  $\mathbf{C}^- = \{p: \operatorname{Re} p < 0\}$ . Если же  $g < \tilde{g}_1$ , то  $P(p)$  приобретает такие нули вида  $z_n^0 = s_n^0 \pm it_n^0$ , у которых  $s_n^0 \geq t_n^0$ , что означает неустойчивость объекта управления.

Доказательство теоремы см. в приложении П1.

Исходя из требования устойчивости объекта и опираясь на теорему 1, в дальнейшем будем полагать  $g > \tilde{g}_1$ . Как показывают вычисления, минимумы функции  $h(\tau)$  в первых трех интервалах  $\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2, \mathbf{I}_3$  достигаются в точках

$$\bar{t}_1 = 4,49341, \quad \bar{t}_2 = 10,90412, \quad \bar{t}_3 = 17,22076$$

и, соответственно, равны

$$\bar{h}_1 = -0,21723, \quad \bar{h}_2 = -0,09133, \quad \bar{h}_3 = -0,05797.$$

Поэтому при  $|\gamma| > 0,21723$  функция  $\hat{P}$  не имеет чисто мнимых нулей ( $N_g = 0$ ), а функция  $P$ , соответственно, не имеет вещественных нулей. При  $0,01933 < |\gamma| \leq 0,21723$  имеем  $N_g = 1$ . При меньших значениях  $|\gamma|$  величину  $N_g$  можно оценить следующим образом.

*Теорема 2.* При  $|\gamma| \leq 0,0194$  величина  $N_g$  находится в диапазоне

$$(2.6) \quad N_g \in \left( \frac{1}{2p|g|} - \frac{3}{4}, \frac{1}{2p|g|} + \frac{1}{2} \right).$$

Если при этом  $|g| \in \Gamma_1 = (|\bar{h}_{N_{g+1}}|, 1/r_{N_g}]$ , где

$$r_{N_g} = p(2N_g - 0,5), \text{ то}$$

$$(2.7) \quad N_g = \text{int} \left( \frac{1}{2p|g|} + \frac{1}{4} \right),$$

где  $\text{int}(x)$  – целая часть числа  $x$ .

Если же  $|g| \in \Gamma_2 = (1/r_{N_g}, h^*]$ , где  $h^* = |\bar{h}_{N_g}|$ , то

$$(2.8) \quad N_g = \text{int} \left( \frac{1}{2p|g|} + \frac{1}{2} \right).$$

Доказательство теоремы см. в приложении П2.

### 3. Разложение операторов на составляющие по полюсам их передаточных функций $R_{J_x P}$ ( $J = H, S$ )

Введём в рассмотрение функции

$$(3.1) \quad F_J = \frac{R_{J_x P}}{\Theta}, \quad J = H, S,$$

где  $\Theta(p) = \theta p$ ,  $\theta$  – см. раздел 1, и систему  $\{\mathbf{G}_n, n \geq 1\}$  окружностей

$$(3.2) \quad \mathbf{G}_n = \{p \in \mathbf{C} : |p| = r_n^2 / (al)^2\}, \text{ где } r_{N_g} = p(2N_g - 1/2).$$

*Лемма.* Значения функций  $F_J$  ( $J = H, S$ ) на окружностях  $\mathbf{G}_n$  стремятся к нулю при  $n \rightarrow \infty$ .

Доказательство леммы дано в приложении ПЗ. Лемма позволяет применить к функциям  $F_J$  теорему Коши [1, п. 71].

**Т е о р е м а 3.** *Функция  $F_J$  представима в виде суммы ряда, составленного из главных частей её разложений в ряд Лорана в окрестностях полюсов  $p_n^0$  ( $n \geq 1$ ):*

$$(3.3) \quad F_J = W_{J0} + W_{Jr} + \tilde{W}_{JrN_g} + W_J^* + W_{Jc},$$

$$\text{где } W_{J0}(p) = \frac{C_{J0}}{p}; \quad W_{Jr} = \sum_{n=1}^{N_g-1} \tilde{W}_{Jrn};$$

$$\tilde{W}_{Jrn}(p) = \sum_{k=1}^2 \frac{C_{Jnk}}{p - p_{nk}}, \quad n = 1, \dots, N_g;$$

$$W_J^*(p) = \begin{cases} 0 & \text{при } g \in (\bar{h}_{N_{g+1}}, h^*), \\ \frac{C_{J1}^*}{p - p^*} + \frac{C_{J2}^*}{(p - p^*)^2} & \text{при } g = h^*; \end{cases}$$

$$W_{Jc}(p) = \sum_{n=N_g+1}^{\infty} \left( \frac{C_{Jn}^0}{p - p_n^0} + \frac{\bar{C}_{Jn}^0}{p - \bar{p}_n^0} \right);$$

$p \in \mathbf{C}$ ,  $p_{nk}$ ,  $p_n^0$ ,  $p^*$ ,  $h^*$  – см. формулировку теоремы 1;

$$C_{H0} = \frac{1}{q(g-1)}; \quad C_{S0} = \frac{al}{q^{3/2}} \frac{x}{l} \frac{1}{g-1};$$

$$C_{Hnk} = \frac{2}{q} \frac{\cos((x/l)t_{nk})}{g + s_{nk}\sqrt{1-g^2t_{nk}^2}}; \quad C_{Snk} = \frac{2al}{q^{3/2}} \frac{\sin((x/l)t_{nk})}{t_{nk}(g + s_{nk}\sqrt{1-g^2t_{nk}^2})};$$

$s_{n1} = 1$  при  $n \in [1, N_g]$ ;  $s_{n2} = -1$  при  $n \in [1, N_g - 1]$ ;

$s_{N_g2} = \text{sign}(|g| - 1/r_{N_g})$ ;

$$C_{H1}^* = \frac{4}{t^*q} \sqrt{1+(t^*)^2} \left( \frac{\cos((x/l)t^*)}{3t^*} - \frac{x}{l} \sin((x/l)t^*) \right);$$

$$C_{S1}^* = \frac{4al}{(t^*)^2} \frac{\sqrt{1+(t^*)^2}}{q^{3/2}} \left( \frac{4}{3} \frac{\sin((x/l)t^*)}{t^*} - \frac{x}{l} \cos((x/l)t^*) \right);$$

$$C_{H2}^* = \frac{8}{(al)^2q} \cos((x/l)t^*) \sqrt{1+(t^*)^2};$$

$$C_{S2}^* = \frac{8}{alq^{3/2}} \frac{\sin((x/l)t^*)}{t^*} \sqrt{1+(t^*)^2};$$

$$C_{Hn}^0 = \frac{2}{q} \frac{\text{ch}((x/l)z_n^0)}{g - \text{ch}z_n^0}, \quad C_{Sn}^0 = \frac{2al}{q^{3/2}} \frac{\text{sh}((x/l)z_n^0)}{z_n^0(g - \text{ch}z_n^0)}.$$

Доказательство теоремы дано в приложении П4.

Из (3.3) следуют разложения для функций  $R_{J_{xP}}$  ( $J = H, S$ ):

$$(3.4) \quad R_{J_{xP}} = C_{J0}q + \Theta(W_{Jr} + \tilde{W}_{JrN_g} + W_J^* + W_{Jc}).$$

Функции  $C_{J0}q$ ,  $\tilde{W}_{Jrn}$  ( $n = 1, \dots, N_g$ ),  $W_{Jr}$ ,  $W_J^*$  и  $W_{Jc}$  являются соответственно передаточными функциями операторов

$$\underline{C_{J0}q}, \quad \underline{\tilde{W}_{Jrn}} \quad (n = 1, \dots, N_g), \quad \underline{W_{Jr}}, \quad \underline{W_J^*} \quad \text{и} \quad \underline{W_{Jc}};$$

эти операторы входят в пространство  $\mathbf{B}$  ограниченных операторов  $\mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{Q}$  (см. раздел 1). Норма оператора с передаточной функцией  $C_{J0}\theta$  в пространстве  $\mathbf{B}$  равна, естественно,  $C_{J0}\theta$ . Оператор с передаточной функцией  $\Theta$ , который пропорционален оператору обобщённого дифференцирования, входит в пространство  $\mathbf{B}_1$  операторов  $\mathbf{Q}_1 \rightarrow \mathbf{Q}$  ( $\mathbf{Q}_1$  – см. раздел 1), и его норма в пространстве  $\mathbf{B}_1$  равна 1.

Ниже будут рассмотрены вопросы вычисления или оценки норм остальных операторов с передаточными функциями, входящими в правую часть (3.14).

#### 4. Вычисление норм операторов $\underline{\tilde{W}_{Jrn}}$ ( $n \leq N_g$ , $J = H, S$ ) и оценка норм операторов $\underline{W_{Jr}}$

Теорема 4. Нормы операторов  $\underline{\tilde{W}_{Jrn}}$  ( $n = 1, \dots, N_g$ ) в пространстве  $\mathbf{B}$  вычисляются следующим образом:

$$(4.1) \quad \|\underline{W_{Hrn}}\|_{\mathbf{B}} = \frac{2(al)^2}{q} \left| \sum_{k=1}^2 \frac{c_{Hk}}{b_k t_{nk}^2} \cos((x/l)t_{nk}) \right|,$$

$$(4.2) \quad \|\underline{W_{Srn}}\|_{\mathbf{B}} = \frac{2(al)^3}{q^{3/2}} \left| \sum_{k=1}^2 \frac{c_{Sk}}{b_k t_{nk}^3} \sin((x/l)t_{nk}) \right|,$$

$$\text{где } c_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{при } Q_j \leq 1, \\ 2Q_j^{-r_k} - 1 & \text{при } Q_j > 1; \end{cases} \quad k = 1, 2; \quad r_k = \frac{t_{nk}^2}{t_{n2}^2 - t_{n1}^2};$$

$$J = H, S; \quad Q_H = -\frac{b_1 \cos((x/l)t_{n2})}{b_2 \cos((x/l)t_{n1})}; \quad Q_S = -\frac{b_1 t_{n1} \sin((x/l)t_{n2})}{b_2 t_{n2} \sin((x/l)t_{n1})};$$

$b_k = g + s_{nk} t_{nk} \sqrt{t_{nk}^2 - g^2}$ ;  $s_{nk}$  – см. формулировку теоремы 3; значения  $t_{n1}$ ,  $t_{n2}$  ( $t_{n1} \in \mathbf{M}_n = (p(2n-1), \bar{t}_n)$ ,  $t_{n2} \in \mathbf{L}_n = (\bar{t}_n, 2pn)$ ) вычисляются путем численного решения уравнения (2.2) в интервалах  $\mathbf{M}_n$  и  $\mathbf{L}_n$ .

Доказательство теоремы дано в приложении П5.

**Т е о р е м а 5.** При  $|g| < 0,04$  нормы операторов  $\underline{W}_{Jr}$  ( $J = H, S$ ) в пространстве  $\mathbf{B}$  могут быть оценены сверху с помощью следующих соотношений:

$$(5.1) \quad \|\underline{W}_{Jr}\|_{\mathbf{B}} < k_J (M_{J1} + M_{J2}),$$

$$\text{где } k_H = \frac{2}{q} \frac{(al)^2}{p^2}; \quad k_S = \frac{2}{q} \frac{(al)^3}{p^3} m_{N_g};$$

$$m_{N_g} = \min\left(1, \left|2p(N_g - 1)x/l\right|\right);$$

$$M_{H2} = \frac{1}{|g|} \left( \frac{7}{9} - \frac{1}{4N_g - 5} \right); \quad M_{S2} = \frac{1}{|g|} \left( \frac{11}{27} - \frac{1}{(4N_g - 5)^2} \right);$$

$$M_{J1} = r_J + m_{J1} + m_{J2}; \quad r_J = \begin{cases} 0 & \text{при } n_J = N_g - 1, \\ \frac{p(2n_J + 3/2)}{(2n_J + 1)^{b_J}} & \text{при } n_J \leq N_g - 2; \end{cases}$$

$$n_H = \text{int} \left( \frac{1 - 2pg + \sqrt{1 - 4pg}}{|8pg|} \right); \quad n_S = \text{int} \left( \frac{2 - 3pg + \sqrt{4 - 6pg}}{|12pg|} \right);$$

$$b_H = 2, \quad b_S = 3;$$

$$m_{J1} = \frac{2}{3p + 2g} + \frac{B_J}{2} \ln \frac{2 + 3pg}{2 + (4n_J - 1)pg} +$$

$$+ \frac{A_{J1}}{2} \ln(2n_J - 1) + \frac{1}{2} \sum_{i=2}^{b_J} \frac{A_{Ji}}{i-1} \left( 1 - \frac{1}{(2n_J - 1)^i} \right);$$

$m_{J2} = 0$  при  $n_J \geq N_g - 2$ , а в случае  $n_J \leq N_g - 3$

$$m_{J2} = \frac{p(4N_g - 5)}{(2N_g - 3)^{b_J} (2 + pg(4N_g - 5))} + \\ + \frac{B_J}{2} \ln \frac{2 + pg(4n_J + 7)(4n_J + 7)}{2 + pg(4N_g - 5)} + \frac{A_{J1}}{2} \ln \frac{4N_g - 5}{4n_J + 7} + \\ + \frac{1}{2} \sum_{i=2}^{b_J} \frac{A_{Ji}}{i-1} \left( \frac{2^{i-2}}{(4n_J + 7)^{i-1}} - \frac{2^{i-2}}{(4N_g - 5)^{i-1}} \right);$$

$$n_H = \text{int} \left( \frac{1 + 2p |g| + \sqrt{1 + 4p |g|}}{8p |g|} \right);$$

$$n_S = \text{int} \left( \frac{2 + 3p |g| + \sqrt{4 + 6p |g|}}{12p |g|} \right);$$

$$B_H = \left( \frac{p}{a_g} \right)^2; \quad B_S = \left( \frac{p}{a_g} \right)^3 g^2; \quad A_{H1} = \frac{p}{a_g^2}; \quad A_{H2} = A_{S3} = \frac{p}{2a_g};$$

$$A_{S1} = \frac{p^2 |g|}{a_g^3}; \quad A_{S2} = \frac{p |g|}{a_g^2}; \quad a_g = 1 + \frac{p}{2} g; \quad b_H = 2; \quad b_S = 3.$$

Доказательство теоремы см. в приложении Пб.

## 5. Вычисление норм операторов $\underline{W}_J^*$ ( $J = H, S$ )

Теорема 6. Нормы операторов с передаточной функцией  $\underline{W}_J^*$  ( $J = H, S$ ) в пространстве  $\mathbf{B}$  вычисляются следующим образом:

$$(5.1) \quad \|\underline{W}_J^*\|_{\mathbf{B}} = a_{J1} + a_{J2} b_J,$$

$$\text{где } a_{H1} = \frac{4(al)^2}{(t^*)^3} \sqrt{1 + (t^*)^2} \left( \frac{7}{3} \cos((x/l)t^*) + \frac{x}{l} \sin((x/l)t^*) \right),$$

$$a_{H2} = -16 \frac{(al)^2}{(t^*)^4} \sqrt{1 + (t^*)^2} \cos((x/l)t^*),$$

$$e_H = \frac{1}{3} + \frac{x}{l} t^* \operatorname{tg}((x/l)t^*), \quad b_H = \begin{cases} 0 & \text{при } e_H \geq 0, \\ \exp(-|e_H|/2) & \text{при } e_H < 0; \end{cases}$$

$$a_{S1} = \frac{4(al)^3}{(t^*)^4 \sqrt{q}} \sqrt{1+(t^*)^2} \left( \frac{10}{3} \frac{\sin((x/l)t^*)}{t^*} - \frac{x}{l} \cos((x/l)t^*) \right),$$

$$a_{S2} = -16 \frac{(al)^3}{(t^*)^5 \sqrt{q}} \sqrt{1+(t^*)^2} \sin((x/l)t^*),$$

$$e_S = \begin{cases} \frac{2}{3} - \frac{x}{l} \frac{t^*}{2} \operatorname{ctg}((x/l)t^*) & \text{при } x > 0, \\ \frac{1}{6} & \text{при } x = 0; \end{cases}$$

$$b_S = \begin{cases} 0 & \text{при } e_S \geq 0, \\ \exp(-e_S) & \text{при } e_S < 0. \end{cases}$$

Доказательство теоремы дано в приложении П7.

## 6. Оценка норм операторов $\underline{W}_{Jc}$ ( $J = H, S$ )

**Теорема 7.** Нормы операторов с передаточной функцией  $\underline{W}_{Jc}$  ( $J = H, S$ ) в пространстве  $\mathbf{B}$  оцениваются сверху следующим образом:

$$1) \text{ при } |g| < g_1 = 1/\sqrt{p^2 - 1} \approx 0,3358$$

$$(6.1) \quad \|\underline{W}_{Jc}\|_{\mathbf{B}} \leq \frac{4(al)^2}{q} \frac{1}{J_{N_g+1}} \left| \frac{J_x(z_{N_g+1}^0)}{(g - \operatorname{ch} z_{N_g+1}^0)} \right| +$$

$$+ \frac{4(al)^2}{q} a_J |g| \left( \frac{m_J}{\Phi_g(N_g + 2)} + \tilde{I}_{1J} \right),$$

где  $z_n^0 = s_n^0 + it_n^0$  — нуль функции  $\hat{P}$  (см. (1.4)), лежащий в полосе  $\{s + it \in \hat{C} : s > 0, t \in \mathbf{J}_n\}$ :

$$z_n^0 \in \{s + it \in C : s > 0, t \in \mathbf{J}_n = (2p(n-1), p(2n-0,5))\};$$

$$J_n = (t_n^0)^2 - (s_n^0)^2; \quad H_x(p) = \operatorname{ch}((x/l)z); \quad S_x(p) = \frac{al}{\sqrt{qz}} \operatorname{sh}((x/l)z);$$

$$\begin{aligned}
 a_H &= p; a_S = al/\sqrt{q}; n_g = 2N_g + 3; \\
 m_{1H} &= n_g; m_{1S} = 1; \Phi_g(n) = \Phi_{1g}(n)\Phi_{2g}(n); \\
 \Phi_{1g}(n) &= p^2(2n-1)^2 - 2,7|g|\sqrt{1+p^2(2n-1,5)^2}; \\
 \Phi_{2g}(n) &= g + \sqrt{p^2(2n-1)^2g^2 - 1}; \\
 \tilde{I}_{1H} &= \frac{\sqrt{1+g^2}\Lambda(n_g)}{2p^2g^2\tilde{a}_g(y_g)} + \frac{27a_g}{p^2b_g} \left( \frac{2j(N_g)}{\tilde{a}_g(y_g)} + g \right); \\
 n_\gamma &= 2N_\gamma + 3; j(N_g) = pn_g - \sqrt{1+p^2(2N_g+2,5)^2}; \\
 b_g &= \sqrt{2,7|g|(4j(N_g) - 2,7|g|)}; a_g = \arctg \frac{b_g}{2pn_g + 2,7g}; \\
 y_g &= \frac{1}{pg}\sqrt{1+g^2}; \Lambda(n_g) = \ln \frac{\sqrt{\tilde{a}_g(n_g)}}{p(n_g - y_g)}; \\
 \tilde{a}_g(y_g) &= 2,7p|g|j(N_g) + (1+g^2)/g^2 - 2,7\sqrt{1+g^2}; \\
 \tilde{a}_g(n_g) &= (pn_g)^2 - 2,7|g|\sqrt{1+p^2(2N_g+2,5)^2};
 \end{aligned}$$

2)  $n_{pu} |g| \in [g_1, |\tilde{g}_1|)$

$$(6.2) \quad \|W_{Jc}\|_B \leq \frac{4(al)^2}{q} \left( + a_J |g| \left( \sum_{n=p_g+1}^{k_g} m_{2Jn} + \tilde{I}_{2J} \right) \right) \sum_{n=1}^{p_g} \frac{1}{J_n} \left| \frac{j_x(z_n^0)}{g - \text{ch } z_n^0} \right|.$$

Здесь  $m_{2Jn} = \frac{m_{2Jn}}{\Phi_g(n)}$ ;  $m_{2Hn} = 2n - 1$ ;  $m_{2Sn} = 1$ ;

$$\tilde{I}_{2H} = \frac{1}{p^2\sqrt{1+g^2}} \ln \frac{l_g}{l_g - y_g}, \quad \tilde{I}_{2S} = \frac{1}{p} \left( \frac{|g|}{1+g^2} \ln \frac{l_g}{l_g - y_g} + \frac{1}{pl_g\sqrt{1+g^2}} \right).$$

При этом пределы суммирования  $k_y$  и  $p_y$  в формуле (6.2) зависят от величины следующим образом: представим множество значений  $|g|$  как объединение полуинтервалов

$$[g_1, |\tilde{g}_1|) = \bigcup_{i=1}^5 [g_i, g_{i+1})$$



с границами  $g_2 = 0,38$ ,  $g_3 = 1,49$ ,  $g_4 = 2,65$ ,  $g_5 = 3,8$ ,  $g_6 = |\tilde{g}_1|$ . Тогда если  $|g| \in [g_i, g_{i+1}) \subset [g_1, \tilde{g}_1)$  при некотором  $i$ , то  $k_g = i$ , а

$$p_g = \begin{cases} 0 & \text{при } |g| \in [g_1, g_2), \\ 1 & \text{при } |g| \in [g_2, g_4), \\ 2 & \text{при } |g| \in [g_4, g_6). \end{cases}$$

Доказательство теоремы см. в приложении П8.

## 7. Заключение

Выполненное в разделах 4–6 исследование показывает ограниченность сужений операторов

$$\underline{W}_{J\Gamma}, \tilde{W}_{J\Gamma N_g}, \underline{W}_J^*, \underline{W}_{Jc}$$

на пространство  $\mathbf{Q}$  как операторов  $\mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{Q}$  и даёт оценки сверху их норм. С учётом представления (3.14), для функций  $R_{J_x P}$  это означает ограниченность сужений соответствующих им операторов на пространство  $\mathbf{Q}_1$  (см. раздел 3) как операторов  $\mathbf{Q}_1 \rightarrow \mathbf{Q}$ , т.е. устойчивость исследуемого объекта по отношению к паре пространств  $(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q})$  (см. [2], п. 2.2). Следовательно, роль пространства  $\mathbf{U}$  управлений (см. раздел 1) может играть пространство  $\mathbf{Q}_1$ .

Полученные в разделах 4–6 оценки дают возможность определения класса  $\mathbf{FB}$  обратных связей  $u_\alpha = F_\alpha(\Delta T, f)$ , для каждой из которых гарантированы детерминированность, причинность и устойчивость замкнутой системы управления (см. раздел 1).

**П1. Доказательство теоремы 1**

а) Вещественных нулей функция  $\hat{P}(z)$  не имеет в силу выбора параметра  $\gamma$  ( $\gamma < 0$ ). Рассмотрим вопрос о её чисто мнимых нулях. Так как минимумы  $\bar{h}_n$  функции  $h(t) = \sin t/t$  (см. пояснения к теореме 1) стремятся к нулю при  $n \rightarrow \infty$ , а

$$(П1.1) \quad \hat{P}(it) = g - \frac{\sin t}{t} = g - h(t),$$

то при любом  $\gamma < 0$  функция  $\hat{P}$  имеет лишь конечное число чисто мнимых нулей и вообще не имеет их при

$$g < \bar{h}_1 = \cos \bar{t}_1 = -\frac{1}{\sqrt{1 + \bar{t}_1^2}}.$$

Так как  $\gamma < 0$ , при  $n \leq N_\gamma$  функция  $\hat{P}$  имеет чисто мнимые нули в полосе  $\mathbf{G}_n = \{s + it : s > 0, t \in \mathbf{I}_n\}$ , где  $\mathbf{I}_n = (\pi(2n - 1), 2\pi n)$ .

Если  $g > \bar{h}_n$ , то  $\hat{P}$  имеет пару простых мнимых нулей  $it_{nk}$ :  $t_{n1} \in \mathbf{M}_n = (p(2n - 1), \bar{t}_n)$ ,  $t_{n2} \in \mathbf{L}_n(\bar{t}_n, 2pn)$ ,  $t_{nk}$  – решения уравнения  $h(t) = \gamma$ ,  $k = 1, 2$ .

Если же  $\gamma = h^*$  (см. теорему 1), где

$$(П1.2) \quad h^* = \frac{\sin t^*}{t^*} = \min_{\mathbf{I}_{N_g}} \frac{\sin t}{t},$$

функция  $\hat{P}$  имеет нуль  $z^* = it^*$ , а  $t^*$  удовлетворяет уравнениям

$$(П1.3) \quad \begin{cases} t = \operatorname{tg} t, \\ -\frac{1}{\sqrt{1 + t^2}} = g. \end{cases}$$

Этот нуль 2-го порядка, ибо

$$(П1.4) \quad P'(it^*) = i \frac{t^* \cos t^* - \sin t^*}{(t^*)^2} = 0,$$

$$(П1.5) \quad P''(it^*) = -\cos t^* = \frac{1}{\sqrt{1 + (t^*)^2}} \neq 0.$$

б) Рассмотрим теперь вопрос о комплексных нулях функции  $\hat{P}$ . Пусть  $z_n^0 = s_n^0 + it_n^0$  – такой нуль функции  $\hat{P}(\hat{z})$ , что  $s_n^0 > 0$ ,  $t_n^0 \in [2p(n-1), 2pn]$ . В области  $\mathbf{C}^+$  при  $\sigma > 0$  уравнение

$$(П1.6) \quad \hat{P}(\hat{z}) = g - \text{sh}(\hat{z}) / \hat{z} = 0, \text{ где } \hat{z} = s + it,$$

эквивалентно уравнению

$$\text{sh}(s + it) - g(s + it) = 0$$

или системам уравнений

$$(П1.7) \quad \begin{cases} \text{Re}(z \hat{P}(\hat{z})) = 0, \\ \text{Im}(z \hat{P}(\hat{z})) = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{sh} s \text{ cost} - sg = 0, \\ i \text{ch} s \sin t - itg = 0; \end{cases}$$

которые при приводимы к виду

$$(П1.8) \quad \begin{cases} \frac{\text{sh} s \text{ cost}}{s} - g = 0, \\ \frac{\text{tgt}}{t} - \frac{\text{th} s}{s} = 0. \end{cases}$$

Введем функции двух переменных  $Z(\sigma, \tau)$  и  $G(\sigma, \tau)$ :

$$(П1.9) \quad Z(s, t) = \frac{\text{sh} s \text{ cost}}{s} - g, \quad G(s, t) = \frac{\text{tgt}}{t} - \frac{\text{th} s}{s}.$$

Из выражений для функций  $Z$  и  $G$  видно, что эти функции чётны по  $\tau$ . Поэтому далее будем искать нули лишь в первом открытом квадранте  $\{\sigma > 0, \tau > 0\}$  комплексной плоскости  $\mathbf{C}^+$ .

Если  $\hat{P}(s_n^0 + it_n^0) = 0$ ,  $s_n^0$  и  $t_n^0$  должны удовлетворять уравнениям системы (П1.8), т.е.

$$(П1.10) \quad Z(s_n^0, t_n^0) = 0,$$

$$(П1.11) \quad G(s_n^0, t_n^0) = 0.$$

Отсюда с учетом неравенств  $\gamma < 0$ ,  $s_n^0 > 0$ ,  $t_n^0 > 0$  следует, что  $\text{cost}_n^0 < 0$ ,  $\text{sint}_n^0 < 0$ , т.е.  $t_n^0 \in \mathbf{J}_n = (p(2n-1), p(2n-0,5))$ .

Так как  $\text{th} \sigma / \sigma < 1$ , из (П1.11) следует, что

$$t_n^0 > \text{tgt}_n^0, \text{ т.е. } t_n^0 \text{cost}_n^0 - \text{sint}_n^0 < 0 \text{ и } h'(t_n^0) < 0.$$

Поэтому  $t_n^0$  лежит в  $\mathbf{M}_n = (p(2n-1), \bar{t}_n)$  – интервале убывания функции  $h$ :  $t_n^0 < \bar{t}_n$ . Так как  $\bar{t}_n \in \mathbf{J}_n$ , то  $|\cos t_n^0| > |\cos \bar{t}_n| = |\bar{h}_n|$ . Учтя, что  $\text{sh } \sigma > \sigma$ , из (П1.10) получаем:  $|g| > |\cos t_n^0|$ . Поэтому (П1.12)  $|g| > |\cos t_n^0| > |\cos \bar{t}_n| = |\bar{h}_n|$ .

Следовательно, при  $n \leq N_\gamma$  (т.е. если  $g \geq \bar{h}_n$ ) функция  $\hat{P}$  не имеет нулей в полосе  $\{s + it : s > 0, t \in [2p(n-1), 2pn]\}$ .

в) Итак, если  $z_n^0 = s_n^0 + it_n^0$  – нуль функции  $\hat{P}$  и  $s_n^0 > 0$ , то  $n > N_\gamma$ ,  $|\bar{h}_n| < |g|$ , и  $z_n^0 \in \{(s + it) : s > 0, t \in \mathbf{M}_n\}$ .

Докажем теперь, что при любом  $n > N_\gamma$ , т.е. при  $|\bar{h}_n| < |g|$ , в области  $\mathbf{G}_n$  функция  $\hat{P}$  имеет один и только один нуль.

В области  $\mathbf{P}_n = \{(s, t) : s > 0, t \in \mathbf{J}_n\} \subset \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+$  уравнение (П1.10) неявно задает функцию  $t = u(s)$ . Действительно, частные производные функции  $Z(s, t)$  всюду в  $\mathbf{P}_n$  отличны от 0, при этом

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = -\frac{\text{sh } s \sin t}{s} > 0, \quad \frac{\partial Z}{\partial s} = \frac{s \text{ ch } s - \text{sh } s}{s^2} \cos t < 0.$$

Поэтому из теоремы о неявной функции следует, что заданная уравнением (П1.10) функция  $t = u(s)$  монотонно возрастает, стремясь при  $\sigma \rightarrow \infty$  к  $t = p(2n - 0,5)$ , так как  $\cos(u(s)) \rightarrow 0$ . При  $\sigma \rightarrow 0$  согласно (П1.10)  $\cos(u(s)) \rightarrow \gamma$ , и так как по условию  $|g| > |\bar{h}_n| = |\cos \bar{t}_n|$ , то

$$(П1.13) \lim_{s \rightarrow 0} u(s) < \bar{t}_n.$$

Далее, частные производные функции  $G(\sigma, \tau)$  (см. П1.11) в области  $\mathbf{P}_n$  строго положительны:

$$(П1.14) \frac{\partial G}{\partial s} = \frac{-s + \text{sh } s \text{ ch } s}{s^2 \text{ ch}^2 s} > 0, \quad \frac{\partial G}{\partial t} = \frac{t - \sin t \cos t}{t^2 \cos^2 t} > 0,$$

поэтому уравнение  $G(\sigma, \tau) = 0$  в области  $\mathbf{P}_n$  тоже неявно задает функцию  $t = v(s)$ , которая монотонно убывает с ростом  $\sigma$ ; при этом при  $\sigma \rightarrow 0$  значения  $v(\sigma)$  стремятся к  $\bar{t}_n$ , так как  $\bar{t}_n = \text{tg } \bar{t}_n$ , а при  $\sigma \rightarrow +\infty$  – к  $\tau = \pi(2n - 1)$ . Из неравенств

$$\lim_{s \rightarrow 0} u(s) < \bar{t}_n = \lim_{s \rightarrow 0} v(s),$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} v(s) = p(2n - 1) < p(2n - 0,5) = \lim_{s \rightarrow \infty} u(s)$$

следует, что возрастающая функция  $t = u(s)$  и убывающая функция  $t = v(s)$  пересекаются в некоторой точке  $(s_n^0, t_n^0) \in \Pi_n$ . Эта точка пересечения единственная в силу строгой монотонности этих функций. Отсюда и из выводов пункта **в**) этого раздела следует, что при  $|\bar{h}_n| < |g|$  функция  $\hat{P}$  имеет один и только один нуль вида  $z_n^0 = s_n^0 + it_n^0$  в области  $G_n$ .

г) Для устойчивости объекта необходимо, чтобы все нули функции  $D$  располагались в  $C^- = \{p \in C : \text{Re } p < 0\}$ . Нули функции  $D$ , соответствующие чисто мнимым нулям функции  $\hat{P}$ , удовлетворяют этому требованию; для комплексных нулей, наличие которых установлено в п. **в**), это условие означает необходимость выполнения неравенства:

$$(П1.15) \quad \text{Re } z_n^0 < |\text{Im } z_n^0|$$

При любом  $\sigma$  число  $\sigma + iv(\sigma)$  (см. п. **в**) является нулём функции  $\hat{P}$ , если значение  $\gamma$  равно

$$(П1.16) \quad g = \frac{\text{sh } s \cos(v(s))}{s}.$$

Из этого равенства следует, что  $|\gamma(s)|$  монотонно растёт при  $\sigma \rightarrow \infty$ , так как значения убывающей функции  $t = v(s)$  лежат в интервале  $J_n$ , где  $|\cos t|$  монотонно растёт при убывании  $t$ , а, следовательно,  $|\cos(v(\sigma))|$ , как и отношение  $\text{sh } s/s$ , монотонно растёт с ростом  $\sigma$ .

Поскольку при фиксированном  $n$  отношение  $v(\sigma)/\sigma$  монотонно убывает при  $\sigma \rightarrow \infty$ , стремясь к нулю, при некотором значении  $\sigma$ , которое обозначим как  $\tilde{S}_n$ , выполняется равенство

$$v(\tilde{S}_n) = \tilde{S}_n.$$

Это значение можно найти из (П1.8) как решение уравнения

$$(П1.17) \quad \text{th } \tilde{S}_n = \text{tg } \tilde{S}_n$$

в интервале  $J_n$ . Число  $\tilde{S}_n + i\tilde{S}_n$  будет нулём функции  $\hat{P}$ , если

$$(П1.18) \quad g = \tilde{g}_n = \frac{\text{sh} \tilde{S}_n \cos \tilde{S}_n}{\tilde{S}_n}.$$

В силу монотонной зависимости  $\gamma$  от  $\sigma$  лежащий в области  $\mathbf{G}_n$  нуль функции  $\hat{P}$

$$s_n^0 + it_n^0 = s_n^0 + in_n(s_n^0)$$

удовлетворяет требованию (П1.15) лишь при

$$(П1.19) \quad |g| < |\tilde{g}_n|,$$

так как тогда  $s_n^0 < n_n(s_n^0)$ , а  $s_n^0 \geq n_n(s_n^0)$  при  $|g| \geq |\tilde{g}_n|$ .

Из (П1.17) и (П1.16) следует, что  $\tilde{g}_n$  монотонно возрастает с ростом  $n$ . Поэтому, если при  $n = 1$  неравенство (П1.19) выполняется, то оно справедливо для любого  $n$ .

Следовательно, выполнение условия (П1.15) для всех нулей функции  $\hat{P}$  (что необходимо для устойчивости объекта) имеет место лишь для значений  $\gamma$ , строго больших величины  $\tilde{g}_1$ . Из (П1.17) и (П1.18) находим численные значения  $\tilde{S}_1$  и  $\tilde{g}_1$ :

$$(П1.20) \quad \tilde{S}_1 = 3,9266, \quad \tilde{g}_1 = -4,5687.$$

Теорема 1 доказана.

## П2. Доказательство теоремы 2

Введём обозначение  $\rho_n = \pi(2n - 0,5)$ . Так как

$$(П2.1) \quad h(r_n) = -1/r_n,$$

то  $|\bar{h}_n| > 1/r_n$ .

С другой стороны (см. (2.1)),

$$(П2.2) \quad |\bar{h}_n| = 1/\sqrt{1 + \bar{\epsilon}_n^2} < 1/p(2n - 1),$$

поэтому

$$\frac{1}{r_{N_g+1}} < |\bar{h}_{N_g+1}| < \frac{1}{p(2N_g+1)} < \frac{1}{p(2N_g-0,5)} < |\bar{h}_{N_g}| < \frac{1}{p(2N_g-1)}.$$

Отсюда, если  $|g| \in (\bar{h}_{N_g+1}, \bar{h}_{N_g}]$ , то

$$\frac{1}{p(2N_g+1,5)} < |\bar{h}_{N_g+1}| < |g| \leq |\bar{h}_{N_g}| < \frac{1}{p(2N_g-1)};$$

следовательно,

$$(П2.3) \quad N_g \in \left( \frac{1}{2pg} - 0,75, \frac{1}{2pg} + 0,5 \right),$$

что допускает два возможных значения для  $N_g$ .

Если же

$$(П2.4) \quad g \in \Gamma_1 = (1/r_{N_g}, |\bar{h}_{N_g}|],$$

$$\text{то } \frac{1}{p(2N_g - 0,5)} < |g| < \frac{1}{p(2N_g - 1)}, \text{ т.е. } N_g - 0,5 < \frac{1}{2p|g|} < N_g - 0,25.$$

Поэтому

$$N_g \in \left( \frac{1}{2p|g|} + 0,25, \frac{1}{2p|g|} + 0,5 \right),$$

откуда следует, что

$$N_g \in \text{int} \left( \frac{1}{2pg} + 0,5 \right).$$

Если

$$(П2.5) \quad g \in \Gamma_2 = (|\bar{h}_{N_g+1}|, 1/r_{N_g}],$$

то

$$\frac{1}{p(2N_g - 0,5)} \leq |g| < \frac{1}{p(2N_g + 1,5)},$$

поэтому

$$N_g \in \left( \frac{1}{2p|g|} - 0,75, \frac{1}{2p|g|} + 0,25 \right),$$

откуда следует, что

$$N_g \in \text{int} \left( \frac{1}{2pg} + 0,25 \right).$$

Теорема 2 доказана.

### П3. Доказательство леммы

Рассмотрим функции

$$(П3.1) \quad F_H = \frac{R_{H_x P}}{qp} = \frac{H_x}{P(p)}, \quad F_S = \frac{R_{S_x P}}{qp} = \frac{S_x}{P(p)}.$$

Оценим модули функций  $|R_{J,p}|$  ( $J = H, S$ , см. (1.10))

$$(ПЗ.2) \quad |R_{H,p}| = \left| \frac{\operatorname{ch}((x/l)al\sqrt{p})}{P(p)} \right| \leq \frac{|z| \|\operatorname{ch}(z)\|}{\|g\| |z + shz|} \leq \frac{|z| \|\operatorname{ch} s\|}{\|g\| |z + shz|},$$

$$(ПЗ.3) \quad |R_{S,p}| = \left| \frac{\operatorname{sh}((x/l)al\sqrt{p})}{\sqrt{qp}P(p)} \right| \leq \frac{al \|\operatorname{ch} s\|}{\sqrt{q} \|g\| |z + shz|}$$

где  $z = al\sqrt{p} = s + it \in \mathbf{C}$ .

Из (ПЗ.2)–(ПЗ.3) следует, что лемма справедлива, если функция

$$(ПЗ.4) \quad f(z) = \left| \frac{g|z|}{\operatorname{ch} s} + \frac{shz}{\operatorname{ch} s} \right|$$

при  $n \rightarrow \infty$  равномерно ограничена на полуокружностях

$$\Gamma_n = \{z \in \mathbf{C} : |z| = r_n = 2pn + 0,5p, \arg z \in (-p/2, p/2]\},$$

так как отсюда следует, что при  $n \rightarrow \infty$  модули  $F_H$  и  $F_S$  равномерно стремятся к нулю на системе окружностей  $\{\mathbf{G}_n\}$ .

Обозначим через  $M$ ,  $M_1$  и  $M_2$  модули следующих функций:

$$(ПЗ.5) \quad M(z) = \left| \frac{z|g|}{\operatorname{ch} s} + \frac{shz}{\operatorname{ch} s} \right|,$$

$$(ПЗ.6) \quad M_1(z) = \left| \frac{z|g|}{\operatorname{ch} s} \right| = \frac{r_n|g|}{\operatorname{ch} s}, \quad M_2(z) = \left| \frac{shz}{\operatorname{ch} s} \right|.$$

Заметим, что справедливы неравенства

$$(ПЗ.7) \quad \operatorname{th} s \leq M_2(z), \quad M \geq |M_2 - M_1|.$$

Нужно показать, что существует такое целое  $N$ , что для любого  $n > N$  выполняется неравенство  $M \geq m$ , где  $m$  – некоторое число, большее нуля. В силу четности  $M$  по  $\sigma$  и  $\tau$ , достаточно рассмотреть только дугу окружности, лежащую в I-й четверти комплексной плоскости (т.е. если  $0 \leq \sigma \leq r_n$ ).

Сначала оценим величину  $M(\zeta)$  в такой точке  $\zeta_n = \sigma_n + it_n$  дуги  $\Gamma_n$ , в которой  $\tau_n = r_n - 0,5\pi$ . Точка  $\zeta_n$  делит рассматриваемую четверть окружности на две дуги  $\Gamma_{n1}$  и  $\Gamma_{n2}$ :

$$\Gamma_{n1} = \{z : z \in \Gamma_n, \operatorname{Im} z \leq t_n\}, \quad \Gamma_{n2} = \{z : z \in \Gamma_n, \operatorname{Im} z > t_n\}.$$

Действительная часть числа  $\zeta_n$  равна



$$(ПЗ.8) \quad s_n = \sqrt{r_n^2 - t_n^2} = \sqrt{r_n^2 - (r_n - 0,5p)^2} = \sqrt{p r_n - 0,25p^2},$$

следовательно, если  $n \rightarrow \infty$ , то  $\sigma_n \rightarrow \infty$ .

Выберем числа  $m_1$  и  $m_2$  так, что  $0 < m_1 < m_2 < 1$ .

Из неравенств

$$(ПЗ.9) \quad M_2(s_n) = \sqrt{(\operatorname{sh}^2 s + \sin^2 t) / \operatorname{ch} s} \geq \operatorname{th} s_n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{th} s_n = 1,$$

$$(ПЗ.10) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} M_1(z_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{(r_n - 0,5p) |g|}{\operatorname{ch} \sqrt{p r_n - 0,25p^2}} \right) = 0$$

следует существование таких целых  $N_1$  и  $N_2$ , что  $M_1(\zeta_n) < m_1$  при всех  $n > N_1$ , а  $M_2(\zeta_n) \geq \operatorname{th} \sigma_n > m_2$  при всех  $n > N_2$ . Если же  $n > \max(N_1, N_2)$ , то

$$(ПЗ.11) \quad M(z_n) \geq M_2(z_n) - M_1(z_n) > m_2 - m_1 = m > 0$$

(например, выберем  $m_1 = 0,25$  и  $m_2 = 0,5$ , тогда  $m = 0,25$ ).

Далее, в точках  $\zeta = \sigma + it$  дуги  $\Gamma_{n2}$ , лежащих ниже точки  $\zeta_n$  (т.е.  $\sigma > \sigma_n$ ), модуль  $M_2(\zeta) \geq \operatorname{th} \sigma > \operatorname{th} \sigma_n > m_2$ , а  $M_1(\zeta)$  с ростом  $\sigma$  убывает. Поэтому из (ПЗ.11) следует, что для всех точек  $\zeta$  дуги  $\Gamma_{n2}$  при любом  $n > \max(N_1, N_2)$  выполняется неравенство

$$(ПЗ.12) \quad M(z) \geq M_2(z) - M_1(z) > M_2(z_n) - M_1(z_n) > m.$$

Оценим величину  $M(\zeta)$  в точках дуги  $\Gamma_{n1}$ . Согласно (ПЗ.5)

$$(ПЗ.13) \quad M(z) = \sqrt{\frac{(s |g| + \operatorname{sh} s \cos t)^2 + (t |g| + \operatorname{ch} s \sin t)^2}{\operatorname{ch}^2 s}}.$$

Заметим, что в точках дуги  $\Gamma_{n1}$  величины  $\sin t$  и  $\cos t$  положительны. Поэтому на  $\Gamma_{n1}$  функция  $M(\zeta)$  ограничена снизу положительной функцией, зависящей только от  $\sigma$ :

$$(ПЗ.14) \quad M_n(z) > \sqrt{\frac{r_n^2 |g|^2}{\operatorname{ch}^2 s} + \operatorname{th}^2 s}.$$

Стоящая под корнем в (ПЗ.14) функция

$$(ПЗ.15) \quad g(s) = \frac{r_n^2 |g|^2}{\operatorname{ch}^2 s} + \operatorname{th}^2 s$$

с ростом  $\sigma$  убывает на дуге  $\Gamma_{n1}$  при каждом  $n$ , превосходящем некоторое целое  $N_3$ , так как ее производная

$$g'(s) = 2 \frac{(1-r_n^2 |g|^2) \operatorname{th} s}{\operatorname{ch}^2 s} < 0$$

на  $\Gamma_{n1}$  отрицательна, если  $n \geq N_3 > 1/|\gamma|$ . При  $\sigma = 0$  (в точке  $ir_n$ ) эта функция равна  $(\gamma r_n)^2$ , а в точке  $\zeta_n = \sigma_n + i\tau_n$  она равна

$$g(z_n) = \frac{r_n^2 |g|^2}{\operatorname{ch}^2 s_n} + \operatorname{th}^2 s_n > \operatorname{th}^2 s_n > m_2^2 \quad (\text{см. (П3.11)}).$$

Поэтому при  $n \geq N_3$  во всех точках  $\zeta$  дуги  $\Gamma_{n1}$ :

$$(П3.16) \quad M(z) > \sqrt{g(z)} \geq \sqrt{g(z_n)} > m_2 > m.$$

Положим  $n > N = \max(N_1, N_2, N_3)$ .

Согласно (П3.16), (П3.12), при  $n > N$  для всех точек  $\Gamma_n$  справедливо неравенство  $M(\zeta) > m > 0$ , т.е. функция  $f(\zeta)$  равномерно ограничена на  $\{\Gamma_n\}$ , откуда следует справедливость леммы.

### П4. Доказательство теоремы 3

а) Так как

$$F_J = \frac{R_{JxP}(p)}{qp} = \frac{\hat{J}_x(al\sqrt{p})}{qp\hat{P}(al\sqrt{p})},$$

из выражения для  $W_{J0}$  (см. пояснения к (3.3)) следует, что

$$(П4.1) \quad C_{J0} = \operatorname{res}_0 F_J = \frac{R_{JxP}(0)}{q}$$

(см. [1, п. 23]). Отсюда следуют приводимые в пояснениях к (3.3) выражения для  $C_{J0}$  ( $J = H, S$ ).

б) Из выражения для  $\tilde{W}_{J\tau n}$  (см. там же) следует, что

$$(П4.2) \quad C_{Jnk} = \operatorname{res}_{P_{nk}} F_J = -i \frac{2\hat{J}_x(al\sqrt{p_{nk}})}{qt_{nk}\hat{P}'(it_{nk})} = -\frac{2}{q} \frac{\hat{J}_x(it_{nk})}{t_{nk}h'(t_{nk})} = \\ = \frac{2}{q} \frac{\hat{J}_x(it_{nk})}{g - \operatorname{cost}_{nk}} = \frac{2}{q} \frac{\hat{J}_x(it_{nk})}{g + s_{nk}\sqrt{1-g^2t_{nk}^2}}, \quad k = 1, 2, \quad J = H, S.$$

Здесь величина коэффициента  $s_{nk}$  определяется так:

$$s_{n1} = 1 \text{ при } n \in [1, N_g], \text{ так как } \operatorname{cost}_{n1} < \operatorname{cost}_{n2} < 0;$$

$s_{n2} = -1$  при  $n \in [1, N_g - 1]$ , так как в точке  $t_{n2}$  функция  $|h(t)|$  убывает, но

$$(П4.3) \quad |h(t_{n2})| < |h(\bar{t}_{n+1})| < \frac{1}{\bar{t}_{n+1}} < \frac{1}{r_n} = |h(r_n)|,$$

где  $r_n = p(2n - 0,5)$ , следовательно,  $t_{n2} > r_n$  и  $\cos t_{n1} > 0$ ;  $s_{N_g 2} = \text{sign}(|g| - 1/r_{N_g})$  (считая  $\text{sign}(0) = 0$ ), так как  $\cos t_{N_g 2} < 0$  при  $t_{N_g 2} \in (\bar{t}_{N_g}, r_{N_g})$ , и  $\cos t_{N_g 2} > 0$  при  $t_{N_g 2} \in (r_{N_g}, 2pn)$ .

Отсюда следуют приводимые в пояснениях к (3.3) выражения для коэффициентов  $C_{Jnk}$ .

в) Так как при  $g = h^*$  функция  $F_J$  имеет в точке  $p^* = \frac{-(t^*)^2}{(al)^2}$

полнос второго порядка, то в этом случае

$$(П4.4) \quad W_J^*(p) = \frac{C_{J1}^*}{p - p^*} + \frac{C_{J2}^*}{(p - p^*)^2}.$$

Так как  $P(p^*) = 0$ ,  $P'(p^*) = 0$  и

$$(П4.5) \quad \frac{d^2 P}{(dp)^2}(p^*) = -\frac{(al)^4}{4(z^*)^2} \frac{\text{sh} z^*}{z^*} = -\frac{(al)^4}{4(t^*)^2 \sqrt{1 + (t^*)^2}},$$

то

$$(П4.6) \quad C_{J2}^* = \lim_{p \rightarrow p^*} (F_J(p - p^*)^2) = \frac{2\hat{J}_x(al\sqrt{p^*})}{qp^*P''(p^*)}.$$

Отсюда с учетом равенств (П1.4) и (П1.5) получаем:

$$(П4.7) \quad C_{J2}^* = \frac{8\hat{J}_x(it^*)}{q(al)^2} \sqrt{1 + (t^*)^2} \quad (\hat{J}_x = \hat{H}_x, \hat{S}_x).$$

Так как

$$(П4.8) \quad \hat{H}_x(it^*) = \cos((x/l)t^*), \quad \hat{S}_x(it^*) = \frac{al}{t^* \sqrt{q}} \sin((x/l)t^*),$$

находим, что

$$(П4.9) \quad C_{H2}^* = \frac{8}{(al)^2 q} \cos((x/l)t^*) \sqrt{1 + (t^*)^2},$$

$$(П4.10) C_{S2}^* = \frac{8}{alq^{3/2}} \frac{\sin((x/l)t^*)}{t^*} \sqrt{1+(t^*)^2}.$$

Далее,

$$\begin{aligned} (П4.11) C_{J1}^* &= \operatorname{res}_{p^*} F_J = \lim_{p \rightarrow p^*} \frac{d(F_J(p-p^*)^2)}{dp} = \\ &= \lim_{p \rightarrow p^*} \frac{d}{dp} \left( \frac{\hat{J}_x(al\sqrt{p})(p-p^*)^2}{qpP} \right) = \\ &= \lim_{p \rightarrow p^*} \frac{(p-p^*)^2}{qP} \frac{d}{dp} \left( \frac{\hat{J}_x(al\sqrt{p})}{p} \right) + \\ &+ \lim_{p \rightarrow p^*} \frac{\hat{J}_x(al\sqrt{p})}{qp} \frac{d}{dp} \left( \frac{(p-p^*)^2}{P} \right) = \\ &= \frac{2}{qP''(p^*)} \lim_{p \rightarrow p^*} \left( \frac{p(\hat{J}_x(al\sqrt{p}))'_p - \hat{J}_x(al\sqrt{p})}{p^2} \right) + \\ &- \frac{(al)^2 \hat{J}_x(it^*)}{q(t^*)^2} \lim_{p \rightarrow p^*} \left( \frac{2(p-p^*)P - (p-p^*)^2 P'}{P^2} \right). \end{aligned}$$

Из тэйлоровских разложений функций  $P$  и  $P'$  в точке  $p^*$  следует:

$$(П4.12) 2(p-p^*)P(p) = P''(p^*)(p-p^*)^3 + \\ + P'''(p^*)(p-p^*)^4/3 + (p-p^*)^4 o(p-p^*),$$

$$(П4.13) (p-p^*)^2 P'(p) = P''(p^*)(p-p^*)^3 + P'''(p^*)(p-p^*)^4/2 + \\ + (p-p^*)^4 o(p-p^*).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} &\lim_{p \rightarrow p^*} \left( \frac{2(p-p^*)P - (p-p^*)^2 P'}{P^2} \right) = \\ &= \lim_{p \rightarrow p^*} - \frac{2(p-p^*)^4 P'''(p^*)/3 + (p-p^*)^4 o(p-p^*)}{(P''(p^*))^2 (p-p^*)^4 + (p-p^*)^4 o((p-p^*))} = \frac{-2P'''(p^*)}{3(P''(p^*))^2}, \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$C_{1J}^* = \frac{-8\sqrt{1+(t^*)^2}}{q(t^*)^2} \left( it^* (\hat{J}_x(it^*))'_z / 2 - \hat{J}_x(it^*) \right) + \\ + \frac{(al)^2 \hat{J}_x(it^*)}{q(t^*)^2} \frac{2P''(p^*)}{3(P''(p^*))^2}.$$

Используя соотношения

$$(П4.14) \frac{d^2 P(p^*)}{(dp)^2} = -\frac{(al)^4 \operatorname{sh} z}{4z^3} = -\frac{(al)^4}{4(t^*)^2} \frac{1}{\sqrt{1+(t^*)^2}},$$

$$(П4.15) \frac{d^3 P(p^*)}{(dp)^3} = -\frac{5(al)^6}{8(t^*)^4} \frac{1}{\sqrt{1+(t^*)^2}},$$

а также (см. (П4.8) и (1.5))

$$H_x(p) = \operatorname{ch}\left(\frac{x}{l} al\sqrt{p}\right), \quad S_x(p) = \frac{1}{\sqrt{p}\sqrt{q}} \operatorname{sh}\left(\frac{x}{l} al\sqrt{p}\right),$$

$$\text{или } \hat{H}_x(z) = \operatorname{ch}\left(\frac{x}{l} z\right), \quad \hat{S}_x(z) = \frac{al}{z\sqrt{q}} \operatorname{sh}\left(\frac{x}{l} z\right),$$

находим:

$$C_{H1}^* = \frac{4}{q} \frac{\sqrt{1+(t^*)^2}}{t^*} \left( \frac{x}{l} t^* \sin((x/l)t^*) + \frac{\cos((x/l)t^*)}{3t^*} \right), \\ C_{S1}^* = \frac{4al}{(t^*)^2} \frac{\sqrt{1+(t^*)^2}}{q^{3/2}} \left( \frac{4}{3} \frac{\sin((x/l)t^*)}{t^*} - \frac{x}{l} \cos((x/l)t^*) \right).$$

г) Из выражения для  $W_{Jc}$  (см. (3.3)) следует, что

$$(П4.14) C_{Jn}^0 = \operatorname{res}_{p_n^0} F_J = \frac{1}{q} \frac{J_x(p_n^0)}{p_n^0 P'(p_n^0)} = \frac{2}{q} \frac{\hat{J}_x(z_n^0)}{z_n^0 \hat{P}'(z_n^0)} = \\ = \frac{2}{q} \frac{z_n^0 \hat{J}_x(z_n^0)}{\operatorname{sh}(z_n^0) - z_n^0 \operatorname{ch}(z_n^0)} = \frac{2}{q} \frac{\hat{J}_x(z_n^0)}{g - \operatorname{ch}(z_n^0)},$$

Здесь учитываются соотношения:

$$J_x(p_n^0) = \hat{J}_x(z_n^0), \quad J'_x(p_n^0) = (\hat{J}_x)'_p \frac{dz}{dp} = \frac{(al)^2 \hat{J}'_x(z_n^0)}{2z_n^0},$$

$$\hat{p}'(z) = \frac{\operatorname{sh} z - z \operatorname{ch} z}{z^2}.$$

Используя (П4.8), получаем приводимые в пояснениях к (3.3) выражения для коэффициентов  $C_{Jn}^0$ .

## П6. Доказательство теоремы 5

Норму функции  $w(\underline{\tilde{W}}_{Jrn})$  в пространстве  $L^1(\mathbf{R}^+)$  при  $n$  от 1 до  $N_\gamma - 1$  включительно можно оценить сверху следующим образом:

$$(П6.1) \quad \|w(\underline{\tilde{W}}_{Jrn})\|_{L^1(\mathbf{R}^+)} \leq \left| \frac{C_{Jn1}}{p_{n1}} \right| + \left| \frac{C_{Jn2}}{p_{n2}} \right| = a l \left( \frac{C_{Jn1}}{t_{n1}^2} + \frac{C_{Jn2}}{t_{n2}^2} \right).$$

Используя выражения для  $C_{Jnk}$  (см пояснения к (3.3)) и учитывая соотношения

$$(П6.2) \quad L_n = p(2n-1) < t_{n1} < \bar{t}_n < r = p(2n-0,5),$$

$$(П6.3) \quad \cos t_{n1} < \cos \bar{t}_n = \bar{h}_n = -\frac{1}{\sqrt{1 + \bar{t}_n^2}},$$

$$(П6.4) \quad |\sin x| \leq m(x) = \min(1, x),$$

получаем оценки:

$$(П6.5) \quad \|\underline{\tilde{W}}_{Hrn}\|_{\mathbf{B}} \leq \frac{2(al)^2}{q} \left[ \frac{\cos((x/l)t_{n1}}{t_{n1}^2(g - \cos t_{n1})} + \frac{\cos((x/l)t_{n2}}{t_{n2}^2(|g| + \cos t_{n2})} \right] \leq \\ \leq \frac{2(al)^2}{q} \left[ \frac{1}{L_n^2(|\bar{h}_n| - |g|)} + \frac{1}{r_n^2 |g|} \right],$$

$$(П6.6) \quad \|\underline{\tilde{W}}_{Srn}\|_{\mathbf{B}} \leq \frac{2(al)^3}{q^{3/2}} \left[ \frac{\sin((x/l)t_{n1}}{t_{n1}^3(g - \cos t_{n1})} + \frac{\sin((x/l)t_{n2}}{t_{n2}^3(|g| + \cos t_{n2})} \right] \leq \\ \leq \frac{2(al)^2}{q} \left[ \frac{m((x/l)\bar{t}_n)}{L_n^3(|\bar{h}_n| - |g|)} + \frac{m(2p(x/l)n)}{r_n^3 |g|} \right].$$

Так как  $\bar{h}_n > 1/r_n$ , из (П6.5) и (П6.6) следуют оценки сверху для  $\|\underline{\tilde{W}}_{Srn}\|_{\mathbf{B}}$  ( $J = H, S$ ):

$$(П6.7) \quad \|\underline{W}_{Jr}\| \leq k_J(Q_{J1} + Q_{J2}),$$

где

$$k_H = \frac{2}{q} \left( \frac{al}{p} \right)^2, \quad k_S = \frac{2}{q^{3/2}} \left( \frac{al}{p} \right)^3 m(x/l)p(N_g - 1);$$

$$Q_{Ji} = \sum_{n=1}^{N_g-1} \Phi_{Ji}(n), \quad F_{J1}(n) = \frac{1}{F_J(n)};$$

$$F_J(n) = (2n-1)^{b_J} \left( \frac{1}{p(2n-0,5)} - |g| \right);$$

$$\Phi_{J2}(n) = \frac{1}{(2n-0,5)^{b_J} |g|}; \quad b_H = 2; \quad b_S = 3.$$

В качестве диапазона значений параметра  $|g|$  принимаем промежуток  $(0, 0,04]$ ; при этом, согласно (2.6),  $N_\gamma \geq 4$ .

Так как значения функций  $\Phi_{J2}$  убывают с ростом  $n$ , сумма  $Q_{J2}$  при  $N_\gamma \geq 2$  может быть оценена сверху следующим образом (см. [4], с. 61, формула (2.28)):

$$(П6.8) \quad Q_{J2} < F_{J2}(1) + \frac{1}{|g|} \left( \left( \frac{2}{3} \right)^2 + \int_1^{N_g-1} \frac{dx}{(2x-0,5)^{b_J}} \right) =$$

$$= \frac{1}{|g|} \left\{ \left( \frac{2}{3} \right)^{b_J} + \frac{1}{2(b_J-1)} \left[ \left( \frac{2}{3} \right)^{b_J-1} - \frac{1}{(2N_g-2,5)^{b_J-1}} \right] \right\} =$$

$$= \frac{2^{b_J-2}}{|g|(b_J-1)} \left[ \frac{4b_J-1}{3^{b_J}} - \frac{1}{(4N_g-5)^{b_J-1}} \right].$$

Таким образом,

$$(П6.9) \quad Q_{H2} < \frac{1}{|g|} \left( \frac{7}{9} - \frac{1}{4N_g-5} \right),$$

$$(П6.10) \quad Q_{S2} < \frac{1}{|g|} \left( \frac{11}{27} - \frac{1}{(4N_g-5)^2} \right).$$

Общий же член каждой из сумм  $Q_{J_1}$  – более сложная функция  $n$ , имеющая участок убывания и участок возрастания. Для оценки этих сумм введём в рассмотрение функцию

$$(П6.11) \tilde{F}_J(x) = (2x-1)^{b_J} \left( \frac{1}{p(2x-0,5)} - |g| \right)$$

скалярного переменного  $x$  ( $1 \leq x \leq N_\gamma - 1$ ), функцию  $\Phi_J = 1/F_J$  и, наконец, функцию

$$(П6.12) \hat{F}_J(y) = (y-0,5)^{b_J} (1/py - |g|)$$

скалярного переменного  $y = 2x - 0,5$  ( $1,5 \leq y \leq 2N_\gamma - 2,5$ ).

Согласно (2.6) за максимальный диапазон изменения  $y$  можно принять промежуток  $Y = [1,5; 1/\pi|\gamma|]$ .

Из выражения для производной функции  $\hat{F}_J(y)$ :

$$(П6.13) \hat{F}'_J(y) = (y-0,5)^{b_J-1} \frac{b_J - b_J py - 0,5}{py}$$

видно, что эта функция принимает в промежутке  $Y$  положительные значения и имеет максимум в точке

$$(П6.14) y_J = \frac{b_J - 0,5}{pb_J},$$

поэтому функция  $\Phi_J = 1/F_J$  имеет в этой точке минимум.

Введем еще в рассмотрение функции от  $|\gamma|$ .

$$(П6.15) f_J(|g|) = (y_J + 0,5)/2,$$

$$(П6.16) f_{N_1}(|g|) = (1/p|g| + 1,5)/2, \text{ при этом } N_g - 1 = \text{int } f_{N_1}(|g|).$$

Заметим, что число  $n_J = \text{int } f_J(|\gamma|)$  не превышает  $N_g - 1$ . Действительно, функции

$$(П6.17) d_J(|g|) = (f_{N_1} - f_J) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{p|g|} - \frac{b_J - 0,5}{pb_J} + 1 \right), \quad J = H, S,$$

убывают с ростом  $|\gamma|$  и при  $|\gamma| = 0,04$  принимают значение  $d_H(0,04) = 0,7646$ ,  $d_S(0,04) = 0,2068$ . Поэтому

$$\text{int } f_{N_1}(|\gamma|) \geq \text{int } f_J(|\gamma|).$$

Так как функция  $\hat{\Phi}_J$  убывает при  $y \in (3/2, y_J)$  и возрастает при  $y \in (y_J, 1/py - 2)$ , то для оценки сверху суммы  $Q_{J_1}$  разобьём её на слагаемые:



$$(П6.18) Q_{J1} = Q_{J11} + q_J + Q_{J12},$$

$$\text{где } Q_{J11} = \sum_{n=1}^{n_J} \Phi_{J1}(n); \quad q_J = \begin{cases} 0 & \text{при } n_J = N_g - 1, \\ \Phi_{J1}(n_J + 1) & \text{при } n_J \leq N_g - 2; \end{cases}$$

$$Q_{J12} = \begin{cases} 0 & \text{при } n_J \geq N_g - 2, \\ \sum_{n=n_J+2}^{N_g-1} \Phi_{J1}(n) & \text{при } n_J \leq N_g - 3. \end{cases}$$

Суммы  $Q_{J11}$ ,  $Q_{J12}$  оцениваются сверху согласно [4] (с. 61, (2.28)):

$$(П6.19) Q_{J11} < \Phi_{J1}(1) + \int_1^{n_J} \tilde{\Phi}_J(x) dx = \Phi_{J1}(1) + 0,5 \int_{1,5}^{2n_J-0,5} \hat{\Phi}_J(y) dy,$$

$$(П6.20) Q_{J12} < \Phi_{J1}(N_g - 1) + \int_{n_J+2}^{N_g-1} \tilde{\Phi}_J(x) dx = \\ = \Phi_{J1}(N_g - 1) + 0,5 \int_{2n_J+3,5}^{2N_g-2,5} \hat{\Phi}_J(y) dy.$$

Используя разложение функции  $\hat{\Phi}_J(y) = 1/\hat{F}_J(y)$  (см. (П6.12))

$$(П6.21) \hat{\Phi}_J(y) = \frac{py}{(y-0,5)^{b_J} (1-|g|py)}$$

на элементарные рациональные дроби:

$$(П6.22) \hat{\Phi}_J(y) = \frac{B_J}{1-|g|py} + \sum_{i=1}^{b_J} \frac{A_{Ji}}{(y-0,5)^i},$$

$$\text{где } B_J = \left( \frac{p}{a_g} \right)^{b_J} |g|^{b_J-1}; \quad a_g = 1-p|g|/2;$$

$$A_{Ji} = \frac{p^{b_J-i} |g|^{b_J-i-1}}{a_g^{b_J-i+1}} \text{ при } i = 1 \div (b_J - 1); \quad A_{Jb_J} = \frac{p}{2a_g};$$

из (П6.19), (П6.20) получаем выражения для оценок сумм  $Q_{J11}$ ,  $Q_{J12}$ :

$$(П6.23) Q_{J11} < \frac{2}{3p-2|g|} + \frac{B_J}{2} \ln \frac{1-1,5p|g|}{1-(2n_J-0,5)p|g|} +$$

$$+ \frac{A_{J1}}{2} \ln(2n_J - 1) + \frac{1}{2} \sum_{i=2}^{b_J} \frac{A_{Ji}}{i-1} \left( 1 - \frac{1}{(2n_J - 1)^i} \right);$$

$Q_{J12} = 0$  при  $n_J \geq N_g - 2$ , а при  $n_J \leq N_g - 3$

$$(П6.24) \quad Q_{J12} < \frac{p(2N_g - 2,5)}{(2N_g - 3)^{b_J} d_g} + \frac{B_J}{2} \ln \frac{1-p |g| (2n_J - 3,5)}{d_g} + \\ + \frac{A_{J1}}{2} \ln \frac{(2N_g - 2,5)}{(2n_J - 3,5)} + \frac{1}{2} \sum_{i=2}^{b_J} \frac{A_{Ji}}{i-1} \left( \frac{1}{(2n_J - 3,5)^{i-1}} - \frac{1}{(2N_g - 2,5)^{i-1}} \right),$$

где  $d_g = 1 - p |g| (2N_g - 2,5)$ .

Добавляя сюда выражение для  $q_J$ :

$$(П6.25) \quad q_J = \begin{cases} 0 & \text{при } n_J = N_g - 1, \\ \frac{p(2n_J + 1,5)}{(2n_J + 1)^{b_J} (1 - p(2n_J + 1,5) |g|)} & \text{при } n_J \leq N_g - 2, \end{cases}$$

получаем оценки для  $\| \underline{W}_{Srn} \|_{\mathbf{B}}$ , приведенные в формулировке теоремы 5 (раздел 4).

**Замечание.** Величина  $d_g$ , входящая в знаменатели некоторых выражений из правой части (П6.24), при фиксированном  $|\gamma|$  ограничена снизу. Действительно, в силу (П2.3) имеем:

$$(П6.26) \quad p |g| (2N_g - 2,5) < 1 - 1,5p |g|,$$

$$(П6.27) \quad d_g \geq 1,5p |g|,$$

что означает ограниченность сверху (при фиксированном  $|\gamma|$ ) оценки (П6.24).

Этим завершается доказательство теоремы 5 (см. раздел 4).

## П7. Доказательство теоремы 6

Норма оператора  $\underline{W}_J^*$  в пространстве  $\mathbf{B}$  при  $\gamma^{\circ} = h^*$  вычисляется следующим образом:

$$(П7.1) \quad \left\| \underline{W}_J^* \right\|_{\mathbf{B}} = \int_0^{\infty} |C_{J1}^* + C_{J2}^* t| \exp(p^* t) dt,$$

(см. пояснения к (3.3). Эта норма в зависимости от знака произведения  $C_{J_1}^* C_{J_2}^*$  равна

$$(П7.2) \quad \left\| \underline{W}_J^* \right\|_{\mathbf{B}} = \left| \int_0^{\infty} \mathbf{j}(x, t) dt \right| = |a_{J_1}| \text{ при } C_{J_1}^* C_{J_2}^* \geq 0;$$

$$(П7.3) \quad \left\| \underline{W}_J^* \right\|_{\mathbf{B}} = \left| \int_0^{t_{0J}} \mathbf{j}(x, t) dt \right| - \left| \int_{t_{0J}}^{\infty} \mathbf{j}(x, t) dt \right| = a_{J_1} + a_{J_2} b_J$$

при  $C_{J_1}^* C_{J_2}^* < 0$ .

Здесь

$$t_{0J} = -\frac{C_{J_1}^*}{C_{J_2}^*}, \quad a_{J_1} = \frac{C_{J_1}^*}{|p^*|} + \frac{C_{J_2}^*}{|p^*|^2};$$

$$a_{J_2} = 2 \left[ \frac{C_{J_1}^*}{|p^*|} + C_{J_2}^* \left( \frac{t_{0J}}{|p^*|} - \frac{1}{|p^*|^2} \right) \right] = -2 \frac{C_{J_2}^*}{|p^*|^2};$$

$$b_J = \exp \left( - \left| p^* \frac{C_{J_1}^*}{C_{J_2}^*} \right| \right).$$

Используя приведённые в пояснениях к (3.3) выражения для  $C_{J_1}^*$  и  $C_{J_2}^*$  ( $J = H, S$ ), получаем выражения для нормы оператора и коэффициентов  $a_{J_1}$ ,  $a_{J_2}$  и  $b_J$ , приведенные в формулировке теоремы 6.

## П8. Доказательство теоремы 7

Применяя процедуру исследования, изложенную в [4, раздел 1, п. 5], составим ряд  $R_0(W_{Jc})$  из оригиналов членов разложения функции  $W_{Jc}$  (см. пояснения к (3.3)). Оригинал  $n$ -го члена этого разложения имеет вид

$$(П8.1) \quad \mathbf{L}^{-1} \left( \frac{C_{Jn}^0}{p - p_n^0} + \frac{\overline{C_{Jn}^0}}{p - \overline{p_n^0}} \right) = 2 \operatorname{Re} (C_{Jn}^0 \exp(p_n^0 t)) = \\ = 2 |C_{Jn}^0| \exp(-m_n t) \cos(w_n t + \arg C_{Jn}^0),$$

где  $\mathbf{L}^{-1}$  – оператор, обратный оператору Лапласа;

$$m_n = \frac{J_n}{(al)^2}; \quad J_n = (t_n^0)^2 - (s_n^0)^2; \quad w_n = 2 \frac{s_n^0 t_n^0}{(al)^2};$$

$$\arg C_{J_n}^0 = \arctg \frac{\operatorname{Im} C_{J_n}^0}{\operatorname{Re} C_{J_n}^0} + ap; \quad a = \begin{cases} 0 & \text{при } \operatorname{Re} C_{J_n}^0 \geq 0, \\ 1 & \text{при } \operatorname{Re} C_{J_n}^0 < 0. \end{cases}$$

Норма этого оригинала в пространстве  $L^1(\mathbf{R}^+)$  оценивается сверху, согласно (П4.16), величиной

$$(П8.2) \quad M_{J_n} = 2 \frac{|C_{J_n}^0|}{m_n} = \frac{4 (al)^2}{q J_n} \left| \frac{\hat{J}(z_n^0)}{g - \operatorname{ch} z_n^0} \right|.$$

а) Оценим по модулю сверху величину

$$(П8.3) \quad r_{H_n} = \left| \frac{\hat{H}_x(z_n^0)}{g - \operatorname{ch} z_n^0} \right| = \left| \frac{\operatorname{ch}((x/l)z_n^0)}{g - \operatorname{ch} z_n^0} \right|.$$

В силу неравенств

$$\left| \operatorname{ch}((x/l)z_n^0) \right| < \operatorname{ch}((x/l)s_n^0) \leq \operatorname{ch} s_n^0, \quad |\operatorname{ch} z_n^0| > \operatorname{sh} s_n^0$$

при выполнении условия

$$(П8.4) \quad \operatorname{sh} s_n^0 > |g|$$

имеем оценку для  $r_{H_n}$ :

$$(П8.5) \quad r_{H_n} \leq \frac{1}{\operatorname{th} s_n^0 - (|g| / \operatorname{ch} s_n^0)}.$$

б) При  $n \rightarrow \infty$  величина  $s_n^0$  возрастет неограниченно. Действительно, при фиксированном  $\sigma^0 > 0$  из (П1.6) и (П1.7) следует соотношение

$$(П8.6) \quad g = -\frac{\operatorname{sh} s}{s} \frac{1}{\sqrt{1 + (n_n(o)(\operatorname{th} s / s))^2}}.$$

Так как модуль правой части (П8.5) оценивается сверху величиной  $\operatorname{ch} s / n_n(o)$  и  $n_n(s) \geq p(2n-1)$ , откуда следует оценка:

$$(П8.7) \quad s_n^0 > \operatorname{Arch}(p(2n-1) |g|);$$

т.е.  $s_n^0 \rightarrow \infty$  при  $n^0 \rightarrow \infty$ .

То же можно сказать о величине

$$(П8.8) \quad r_{s_n} = \left| \frac{\hat{S}_x(z_n^0)}{g - \text{ch} z_n^0} \right| = \frac{al}{\sqrt{q}} \left| \frac{\text{sh}((x/l)z_n^0)}{z_n^0(g - \text{ch} z_n^0)} \right|$$

(она даже стремится к нулю при  $n^0 \rightarrow \infty$ ).

в) Теперь оценим снизу величину  $J_n$ , для чего нужно оценить снизу величину  $t_n^0$  и сверху – величину  $s_n^0$ . Нуль  $z_n^0$  функции  $\hat{P}$  лежит в области  $\tilde{Q}_n = \{z \in \mathbf{C} : s > 0, t \in \mathbf{M}_n\}$  (см. формулировку теоремы 1), т.е.  $t_n^0 > p(2n - 1)$ . Для оценки сверху величины  $s_n^0$  используем соотношение (П1.6), из которого следует:

$$(П8.9) \quad \frac{\text{sh} s_n^0}{s_n^0} = \left| \frac{g}{\cos n(s_n^0)} \right| < \left| \frac{g}{\cos n(0)} \right| = \\ = |g| \sqrt{1 + (\bar{t}_n)^2} < |g| \sqrt{1 + r_n^2},$$

где  $r_n = p(2n - 0,5)$ .

Величина же  $\text{sh} s_n^0 / s_n^0$  может быть оценена снизу величиной  $k(s_n^0)^2$  для некоторых  $k > 0$ . Обозначим максимальное из таких чисел  $k$  как  $k_m$ ;  $k_m$  может быть определено из решения системы уравнений

$$(П8.10) \quad \begin{cases} \text{sh} s_0 = k_m s_0^3, \\ \text{ch} s_0 = 3k_m s_0^2; \end{cases}$$

где  $s_0$  – точка касания графиков функций  $\text{sh} s$  и  $k_m s^3$ . Из (П8.10) следует, что  $s_0$  определяется как решение уравнения

$$(П8.11) \quad \text{th} s_0 = \frac{s_0}{3}.$$

Численное решение этого уравнения даёт значение  $s_0 \approx 2,985$ , откуда получаем значение  $k_m = \text{sh} s / s^3 \approx 0,371$ .

Таким образом, из (П8.9) следует оценка

$$(П8.12) \quad (s_n^0)^2 \leq \frac{1}{k_m} \frac{\text{sh} s_n^0}{s_n^0} < c |g| \sqrt{1 + (\bar{t}_n)^2} < c |g| \sqrt{1 + r_n^2},$$

где  $c = 1/k_m \approx 2,7$ .

Полученные оценки показывают, что норма в  $\mathbf{L}^1(\mathbf{R}^+)$  каждого из членов ряда  $R_0(W_{Jc})$  является величиной  $O(1/n^2)$ ; поэтому ряд в этом пространстве сходится, а это означает [4, см. раздел 1, п. 5], что сумма ряда  $R_0(W_{Jc})$  является импульсной переходной функцией оператора  $\underline{W}_{Jc}$  и, следовательно, этот оператор входит в пространство  $\mathbf{B}$ .

г) Переходя к оценке нормы оператора  $\underline{W}_{Jc}$ , отметим, что выполнение условия (П8.4) при всех  $n \geq 1$  гарантировано лишь для значений  $|\gamma|$ , больших величины

$$g_1 = 1/\sqrt{p^2 - 1} \approx 0,3358.$$

Действительно, из (П8.7) следует, что величина

$$(П8.13) \quad d_{Hn} = \text{sh}^2 s_n^0 - g^2$$

оценивается снизу величиной

$$(p^2(2n-1)^2 - 1)g^2 - 1 \geq (p^2 - 1)g^2 - 1$$

и что, следовательно, выполнение условия (П8.4) при любых  $n \geq 1$  гарантировано лишь при  $|\gamma| > g_1$ . Так как  $\bar{h}_1 = -0,2173$  (см. раздел 2), этому диапазону значений  $|\gamma|$  соответствует  $N_\gamma = 0$ .

Для меньших значений  $|\gamma|$ , учитывая (П8.7) и соотношение

$$(П8.14) \quad |g| > -\bar{h}_{N_g+1} = \frac{1}{\sqrt{1 + \bar{t}_{N_g+1}^2}} > \frac{1}{\sqrt{1 + \bar{r}_{N_g+1}^2}} = \\ = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2(2N_g + 1,5)^2}},$$

получаем для  $d_{Hn}$  оценку снизу:

$$(П8.15) \quad d_{Hn} > \frac{p^2[4n(n-1) - 4N_g^2 - 6N_g - 1,25] - 2}{1 + p^2(2N_g + 1,5)^2},$$

из которой следует, что положительность  $d_{Hn}$  гарантирована лишь для  $n \geq N_\gamma + 2$ , в то время как ряд  $R_0(W_{Jc})$ , определяющий функцию  $W_{Jc}$  (см. пояснения к (3.3)), начинается с  $n = N_\gamma + 1$ . Поэтому первый член этого ряда необходимо вычислять и оценивать по норме пространства  $\mathbf{L}^1(\mathbf{R}^+)$  отдельно.

д) Рассмотрим сначала случай  $|\gamma| < g_1$ . Величина  $J_n$  в знаменателе оценки  $M_{J_n}$  нормы оригинала  $n$ -го члена разложения функции  $W_{J_c}$  (см. (П8.2)) оценивается снизу (см. (П8.12)) согласно п. в) положительной при  $|\gamma| < g_1$  функцией  $\varphi_\gamma(n)$ :

$$(П8.16) j_g(n) = j_{\text{im}}(n) - j_r(n) |g|,$$

$$\text{где } j_{\text{im}}(n) = p^2(2n-1)^2, \quad j_r(n) = c\sqrt{1+r_n^2} = c\sqrt{1+p^2(2n-1,5)^2}$$

Величины  $r_{J_n}$  ( $J = H, S$ ), также входящие в выражение (П8.2) для  $M_{J_n}$ , оцениваются сверху, при выполнении условия (П8.4) и с учётом (П8.7), следующим образом:

$$(П8.17) r_{Hn} < \frac{\text{ch} s_n^0}{\text{sh} s_n^0 - |g|} < \frac{p(2n-1) |g|}{y_g(n)},$$

$$\text{где } y_g(n) = \sqrt{p^2(2n-1)g^2 - 1 - |g|};$$

$$(П8.18) r_{Sn} < \frac{al}{\sqrt{q} t_n^0 (\text{sh} s_n^0 - |g|)} < \frac{al}{\sqrt{q}} \frac{|g|}{y_g(n)},$$

Таким образом, для получения оценок норм операторов  $W_{J_c}$  ( $J = H, S$ ) необходимо оценить суммы рядов

$$(П8.19) R_{1H} = \sum_{n=N_g+2}^{\infty} \frac{2n-1}{j_g(n) y_g(n)},$$

$$(П8.20) R_{1S} = \sum_{n=N_g+2}^{\infty} \frac{1}{j_g(n) y_g(n)}.$$

Так как общие члены рядов  $R_{1J}$  ( $J = H, S$ ) убывают с ростом  $n$ , их суммы могут быть оценены сверху суммами соответственно  $m_{1J} + I_{1J}$ , где

$$(П8.21) m_{1H} = \frac{n_g}{j_g(N_g+2) y_g(N_g+2)},$$

$$(П8.22) I_{1H} = \int_{N_g+2}^{\infty} \frac{2x-1}{j_g(x) y_g(x)} dx = \frac{1}{2} \int_{n_g}^{\infty} \frac{y dy}{a_g(y) b_g(y)},$$

$$(П8.23) m_{1S} = \frac{1}{j_g(N_g+2) y_g(N_g+2)},$$

$$(П8.24) I_{1S} = \int_{N_g+2}^{\infty} \frac{1}{j_g(x)y_g(x)} dx = \frac{1}{2} \int_{n_g}^{\infty} \frac{dy}{a_g(y)b_g(y)},$$

$$(П8.25) a_g(y) = (py)^2 - c |g| \sqrt{1+p^2(y-0,5)^2},$$

$$(П8.26) b_g(y) = \sqrt{(py)^2 g^2 - 1} - |g|,$$

$$(П8.27) n_g = 2N_g + 3.$$

Ввиду сложности интегрирования иррациональных функций  $j_g$  и  $y_g$  минорируем их соответственно полиномом

$$(П8.28) \tilde{a}_g(y) = (py)^2 - cp |g| (y - n_g) - d_g,$$

где  $d_g = c |g| \sqrt{1+p^2(2N_g+2,5)^2},$

и линейной функцией

$$(П8.29) \tilde{b}_g(y) = p |g| y - \sqrt{1+g^2}.$$

Разложим рациональные функции

$$(П8.30) F_{1H}(y) = \frac{y}{\tilde{a}_g(y)\tilde{b}_g(y)}$$

$$(П8.31) F_{1S}(y) = \frac{1}{\tilde{a}_g(y)\tilde{b}_g(y)}$$

на элементарные рациональные дроби:

$$(П8.32) F_{1J}(y) = \frac{A_{1J}y + B_{1J}}{\tilde{a}_g(y)} + \frac{C_{1J}}{\tilde{b}_g(y)} \quad (J = H, S),$$

где  $C_{1H} = \frac{y_g}{\tilde{a}_g(y_g)}; y_g = \frac{\sqrt{1+g^2}}{p |g|};$

$$A_{1H} = -\frac{p}{|g|} C_{1H} = -\frac{\sqrt{1+g^2}}{g^2 \tilde{a}_g(y_g)};$$



$$\begin{aligned}
 B_{1H} &= \frac{1 + C_{1H} c p |g| + A_{1H} \sqrt{1+g^2}}{p |g|} = \\
 &= \frac{1}{p |g|} \left( 1 + c \frac{\sqrt{1+g^2}}{\tilde{a}_g(y_g)} - \frac{1+g^2}{g^2 \tilde{a}_g(y_g)} \right) C_{1S} = \frac{1}{\tilde{a}_g(y_g)}; \\
 A_{1S} &= -\frac{p}{|g|} C_{1S} = -\frac{p}{|g| \tilde{a}_g(y_g)}; \\
 B_{1S} &= C_{1S} c + \frac{A_{1S} \sqrt{1+g^2}}{p |g|} = \frac{1}{\tilde{a}_g(y_g)} \left( c - \frac{\sqrt{1+g^2}}{g^2} \right).
 \end{aligned}$$

Используя разложения (П8.33), получаем выражения для значений интегралов

$$(П8.33) \quad \tilde{I}_{1H} = \frac{1}{2} \int_{n_g}^{\infty} \frac{y \, dy}{\tilde{a}_g(y) \tilde{b}_g(y)}$$

$$(П8.34) \quad \tilde{I}_{1S} = \frac{1}{2} \int_{n_g}^{\infty} \frac{dy}{\tilde{a}_g(y) \tilde{b}_g(y)},$$

мажорирующих соответствующие интегралы  $I_{1J}$  ( $J = H, S$ ):

$$(П8.35) \quad \tilde{I}_{1H} = \frac{\Lambda(n_g) \sqrt{1+g^2}}{2(pg)^2 \tilde{a}_g(y_0)} + \frac{a_g}{p^2 |g| b_g} \left[ 1 + \frac{1}{\tilde{a}_g(y_0)} \left( \frac{c \sqrt{1+g^2}}{2} - \frac{1+g^2}{g^2} \right) \right],$$

где  $\Lambda(n_g) = \ln \left( \frac{\sqrt{\tilde{a}_g(n_g)}}{p(n_g - y_0)} \right)$ ;  $b_g = \sqrt{4(c p n_g |g| - d_g) - c^2 g^2}$ ;

$$a_g = \operatorname{arctg} \frac{b_g}{2 p n_g - c |g|}.$$

$$(П8.36) \quad \tilde{I}_{1S} = \frac{\Lambda(n_g)}{2 p |g| a_g(y_0)} -$$

$$-\left[ \frac{c|g|}{4p} + \frac{\sqrt{1+g^2}-g^2}{2\tilde{a}_g(y_0)g^2} \right] \operatorname{arctg} \frac{b_g}{2pn_g - c|g|}.$$

Таким образом, при  $|\gamma| < g_1$  норма оператора  $\underline{W}_{Jc}$  ( $J = H, S$ ) оценивается сверху величиной

$$\frac{4}{q} (al)^2 \left( \frac{1}{J_{N_g+1}} \left| \frac{\hat{J}_x(z_{N_g+1}^0)}{g - \operatorname{ch} z_{N_g+1}^0} \right| + a_J |g| (m_{1J} + \tilde{I}_{1J}) \right),$$

где  $a_H = p$ ;  $a_S = al/\sqrt{q}$ ,  $z_{N_g+1}^0$  должны вычисляться путём численного решения системы уравнений (П1.6), (П1.7).

е) Теперь рассмотрим случай  $|\gamma| \geq g_1$  (при этом  $N_\gamma = 0$ , т.е., ряд  $R_0(W_{Jc})$  начинается с  $n = 1$ ). Из вида функции  $j_g$  следует, что условие её положительности при всех  $n \geq 1$  выполняется лишь для значений  $|\gamma|$ , меньших  $q_1 = 0,76$ ; для значений  $|\gamma|$ , меньших  $q_2 = 2,98$ , функция  $\varphi_\gamma$  положительна при всех  $n \geq 2$ ; и, наконец, положительность этой функции для всех  $|g| < \tilde{g}_1$  ( $|\tilde{g}| = 4,5697$ , см. формулировку теоремы 1) гарантируется лишь при  $n \geq 3$ . Поэтому разобьём диапазон  $[g_1, |\tilde{g}_1|)$  на промежутки  $\mathbf{G}_k = [g_k, g_{k+1})$ ,  $k = 1, \dots, 5$ , где  $g_k$ ,  $k = 2, \dots, 5$ , вычисляются из условия:  $j_r(k)|g| \leq j_{im}(k)/2$  для  $|\gamma| \leq g_{k+1}$  (тогда соотношение  $j_r(n)|g| \leq j_{im}(n)/2$  будет выполнено для всех  $n \geq k$ ),  $g_6 = |\tilde{g}|$ . Подсчёт даёт значения  $g_2 = q_1/2 = 0,38$ ,  $g_3 = q_2/2 = 1,49$ ,  $g_4 = 2,65$ ,  $g_5 = 3,8$ . В соответствии со значениями  $g_k$  и  $q_i$ ,  $i = 1, 2$ , для  $|\gamma|$  из диапазона  $\mathbf{G}_k$  мы можем оценить лишь суммы рядов

$$(П8.37) R_{2H} = \sum_{n=n_{k_g}}^{\infty} \frac{2n-1}{j_g(n)y_g(n)},$$

$$(П8.38) R_{2S} = \sum_{n=n_{k_g}}^{\infty} \frac{1}{j_g(n)y_g(n)},$$

где  $n_1 = 1$ ,  $n_2 = n_3 = 2$ ,  $n_4 = n_5 = 3$ ,  $k_\gamma$  определяется тем из промежутков  $\mathbf{G}_k$ , в который попадает модуль заданного значения па-

раметра  $\gamma$  (приведённые значения  $n_k$  определяются из условия положительности значений  $\varphi_n$  при  $n \geq n_{k_g}$ ).

Первые члены ряда  $R_0(W_{Jc})$ , определяющего функцию  $W_{Jc}$  (см. (3.2)) ( $n \in [1, n_{k_g} - 1]$ , т.е. первый член для  $|g| \in [0, 38, 2, 65]$  и два первых члена для  $|g| \in [2, 65, |\tilde{g}'|)$ ) приходится вычислять и оценивать отдельно.

Суммы рядов  $R_{2J}$  ( $J = H, S$ ) оцениваются сверху суммами

$$(П8.39) \quad \sum_{n=n_{k_g}}^{k_g} m_{2Jn} + I_{2J},$$

где

$$(П8.40) \quad m_{2Hn} = \frac{2n-1}{j_g(n)y_g(n)};$$

$$(П8.41) \quad m_{2Sn} = \frac{1}{j_g(n)y_g(n)};$$

$$(П8.42) \quad I_{2H} = \int_{k_g}^{\infty} \frac{2x-1}{j_g(x)y_g(x)} dx = \frac{1}{2} \int_{l_g}^{\infty} \frac{y dy}{a_g(y)b_g(y)};$$

$$(П8.43) \quad I_{2S} = \int_{k_g}^{\infty} \frac{1}{j_g(x)y_g(x)} dx = \frac{1}{2} \int_{l_g}^{\infty} \frac{dy}{a_g(y)b_g(y)};$$

$$(П8.44) \quad l_g = 2k_g - 1,$$

$\varphi_\gamma$  – см. (П8.17),  $y_\gamma$  – см. пояснения к (П8.18);  $a_\gamma, b_\gamma$  – см. соответственно (П8.27)

Так как для  $y \geq l_g$  выполняется соотношение

$$(П8.45) \quad a_g(y) \geq (py)^2 / 2,$$

интегралы  $I_{2J}$  ( $J = H, S$ ) мажорируются интегралами

$$(П8.46) \quad \tilde{I}_{2H} = \frac{1}{p^2} \int_{l_g}^{\infty} \frac{dy}{y \tilde{b}_g(y)},$$

$$(П8.47) \quad \tilde{I}_{2S} = \frac{1}{p^2} \int_{l_g}^{\infty} \frac{dy}{y^2 \tilde{b}_g(y)},$$

где  $\tilde{b}_g$  – см. (П8.30).

Разложим рациональные функции

$$(П8.48) F_{2H}(y) = \frac{1}{y\tilde{b}_g(y)},$$

$$(П8.49) F_{2S}(y) = \frac{1}{y^2\tilde{b}_g(y)},$$

на элементарные рациональные дроби:

$$(П8.50) F_{2H}(y) = \frac{A_{2H}}{y} + \frac{C_{2H}}{\tilde{b}_g(y)},$$

$$\text{где } A_{2H} = -\frac{1}{\sqrt{1+g^2}}; \quad C_{2H} = \frac{1}{y_0} = \frac{p|g|}{\sqrt{1+g^2}};$$

$$(П8.51) F_{2S}(y) = \frac{A_{2S}}{y} + \frac{B_{2S}}{y^2} + \frac{C_{2S}}{\tilde{b}_g(y)},$$

$$\text{где } C_{2S} = \frac{1}{y_0^2} = \frac{p^2g^2}{1+g^2}; \quad A_{2S} = -\frac{C_{2S}}{p|g|} = -\frac{p|g|}{1+g^2};$$

$$B_{2S} = -\frac{1}{\sqrt{1+g^2}}.$$

Используя разложения (П8.50) и (П8.51), получаем выражения для значений интегралов  $\tilde{I}_{2J}$  ( $J = H, S$ ):

$$(П8.52) \tilde{I}_{2H} = \frac{1}{p^2\sqrt{1+g^2}} \ln \frac{l_g}{l_g - y_0},$$

$$(П8.53) \tilde{I}_{2S} = \frac{1}{p} \left( \frac{|g|}{1+g^2} \ln \frac{l_g}{l_g - y_0} + \frac{1}{pl_g\sqrt{1+g^2}} \right).$$

Таким образом, при  $|g| \geq g_1$  норма оператора  $\underline{W}_{Jc}$  ( $J = H, S$ ) оценивается сверху величиной

$$\frac{4}{q} (al)^2 \left( \sum_{n=1}^{n_{kg}-1} \frac{1}{J_n} \left| \frac{\hat{J}_x(z_n^0)}{g - \text{ch } z_n^0} \right| + a_J |g| (m_{2J} + \tilde{I}_{2J}) \right),$$

где  $a_H = p$ ;  $a_S = al/\sqrt{q}$ ;  $z_n^0$  для  $n \in [1, n_{k_g} - 1]$  должны вычисляться путём численного решения системы уравнений (П1.6) и (П1.7).

### Литература

1. ЛАВРЕНТЬЕВ М.А., ШАБАТ Б.В. *Методы теории функций комплексного переменного*. – М.: Физматгиз, 1958.
2. СОЛНЕЧНЫЙ Э.М. *Вырожденные системы и их использование в задаче синтеза заданного поведения*. – М.: Наука, 1989.
3. СОЛНЕЧНЫЙ Э.М. *О причинности системы теплопроводности с нелинейной обратной связью по граничным условиям* // Автоматика и телемеханика. – 2002. – №9. – С. 15–26.
4. СОЛНЕЧНЫЙ Э.М. *Исследование условий причинности и устойчивости системы управления линейным распределенным объектом* // Автоматика и телемеханика. – 2006. – №4. – С. 53–85.
5. СОЛНЕЧНЫЙ Э. М., ЧЕРЁМУШКИНА Л.А. *Исследование условий устойчивости системы управления линейным объектом теплопроводности* // Управление большими системами. – 2010. – №4. – С. 89–125.

### INVESTIGATION OF CAUSALITY AND STABILITY CONDITIONS OF LINEAR HEAT-CONDUCTIVITY OBJECT CONTROL SYSTEM (SPECIAL CASES). PART II

**Engel Solnechnyi**, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Doctor of Science (Moscow, Profsoyuznaya st., 65, (495)334-92-29, solnechn@ipu.ru)

**Ludmila Cheryomushkina**, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Cand.Sc. (Moscow, Profsoyuznaya st., 65, (495)334-92-29, l.a.cheryom@yandex.ru)

*Abstract: For a special sort of boundary conditions of stable one-dimensional finite-length object of heat conductivity estimates are derived of norms of the operators translating boundary influences into the object temperature. These estimates are used for finding a sufficient condition of causality and stability for the system consisting of the object and the nonlinear feedback.*

**Keywords:** system with feedback, causality, stability, distributed dynamic system, linear heat conduction object, complex-variable functions theory.

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии А. Г. Бутковским*

УДК 519.863  
ББК 22.18 + 65.42

## **МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ ЭКОНОМИЧЕСКИХ АГЕНТОВ В СИСТЕМЕ «ПРОИЗВОДИТЕЛЬ–ПОСРЕДНИК– КОНКУРЕНТНЫЙ РЫНОК»**

**Алгазин Г. И.<sup>1</sup>, Алгазина Ю. Г.<sup>2</sup>**

*(Алтайский государственный университет, г. Барнаул)*

*Рассматривается проблема управления системой «производитель–посредник–рынок» с учетом ограниченности рационального поведения экономических агентов и несимметричной их информированности. Решаются задачи нахождения и аналитического исследования возможных равновесных состояний этой системы в условиях предположений Курно и Штакельберга. Получены новые результаты о взаимосвязи между прибылью фирмы-производителя и ростом посреднической сети на конкурентном рынке. Такие исследования могут представлять интерес при организации взаимодействия агентов и оптимизации посреднической сети.*

Ключевые слова: производитель, торговые посредники, взаимодействие, модельные исследования, конкурентное равновесие, Курно, Штакельберг, стратегии гамма-один.

### **1. Введение**

Формирование посреднической сети не всегда проходит обоюдовыгодно для производителей и посредников. Нередко этот процесс сопровождается конфликтами между ними и меж-

---

<sup>1</sup> Геннадий Иванович Алгазин, зав. кафедрой, доктор физико-математических наук, профессор (algazin@socio.asu.ru).

<sup>2</sup> Юлия Геннадьевна Алгазина, кандидат экономических наук, доцент (algazina@inbox.ru).

ду самими посредниками одной сети. Производитель заинтересован в максимальном объеме продаж и минимальном риске и поэтому в случае благоприятной конъюнктуры стремится к наращиванию числа посредников, работающих на данном рынке. Посредник, напротив, заинтересован в монопольном обслуживании территории. Поэтому очень важно выдержать оптимальный уровень развития системы в целом, при котором обеспечивается баланс интересов участников рынка.

Чтобы проанализировать проблему формирования посреднической сети более глубоко, необходимы математические исследования.

Объектом исследования в данной статье является конкурентный рынок однородного товара, в котором ограниченное число агентов-посредников занимается продвижением товара до потребителей без кооперации друг с другом.

В отечественной и зарубежной литературе, посвященной вопросам баланса интересов в модели такого рода, ведущее место занимает модель Курно. При этом различные авторы придавали большее значение разным аспектам применения модели Курно. Ряд авторов рассматривают модель, в которой все фирмы идентичны [6, 7, 17, 18, 22]. Другая группа авторов исследует равновесие на рынке, где не обязательна идентичность всех фирм-агентов, используя те ли иные предположения о свойствах обратной функции спроса, функций затрат и функции прибыли [13, 20, 21, 23, 26]. В ряде исследований внимание акцентировано на методах поиска решений [3, 14, 15, 19, 20, 21, 22]. Отечественные ученые рассматривают вместо стандартной гипотезы Курно гипотезы более общего вида [4] и модели олигополии с рынками производственных факторов [2]. В монографии [1] проведены модельные исследования франчайзинговых систем на рынке олигополии, в которых франчайзи-конкуренты не различаются как фирмы-производители, торговые точки или предприятия сферы услуг.

В значительном ряде публикаций в дополнение к модели Курно вводится модель фирмы, действующей по особым правилам [1, 3, 4, 7, 15, 24]. В отличие от фирм Курно, эта фирма, обладая возможностью первого хода, доминирует на конку-



рентном рынке, максимизируя собственную прибыль при явном учете реакции остальных фирм на изменение ее поведения. Остальные же фирмы, как и раньше, максимизируют собственную прибыль на основе принципа Курно–Нэша о неизменности поведения других фирм. Эту фирму-лидер называют еще фирмой Штакельберга, так как он первым ввел такую модель поведения [25].

В классическом подходе принципы поведения Курно и Штакельберга рассматриваются в применении к фирмам-производителям. В настоящей статье эти принципы реализованы в применении к фирмам-посредникам. Авторским расширением (но не пионерским, см., например, работы [1, 16]) традиционного модельного представления олигополистического рынка является введение в модель нового агента, который может существенно влиять на рынок, имея возможность регулирования через цену предложения товара (ниже в модели, используя для этого параметр  $k$ ), активность и количество посредников на рынке. Этим «новым» агентом выступает фирма – производитель товара. Таким образом, вместо традиционной системы «производитель–рынок» рассматривается система «производитель–посредник–рынок».

Производитель, выступая в роли продавца, заинтересован в продаже товара по максимальной цене. Посредник, действуя в роли покупателя и продавца, заинтересован в приобретении товара у производителя по минимальной цене и реализации его на рынке по максимальной цене. Конфликтность интересов экономических агентов, конкурентность рынка и ограниченная этими факторами рациональность поведения агентов, а также несимметричная их информированность определяют выбор механизмов взаимодействия экономических агентов. При отсутствии каких-либо соглашений между производителем и посредником о выборе ими решений одной из реально возможных для описания поведения производителя в такого рода системах может служить модель скрытого управления, являющегося разновидностью рефлексивного управления [6, 9-12]. Очевидно, что в этой модели управляющий субъект (активный агент) – производитель, а управляемый субъект (пассивный агент) –

посредник. Критерием эффективности скрытого управления является выигрыш, получаемый активным агентом [9, 10]. В этой связи авторами статьи проведены специальные исследования зависимостей между развитием посреднической сети и прибылью производителя.

Поэтому проведенные исследования могут представлять интерес не только при расчете и изучении реакции каждой фирмы-посредника рынка на изменение активности ее конкурентов-посредников. Этот аспект работы, в основном, укладывается в рамки классических экономико-математических моделей олигополии. Так, близкие подходы можно найти в работах [1, 7, 16]. Новыми же аспектами исследования являются изучение механизмов повышения прибыли производителя под влиянием изменения тех или иных параметров (факторов) системы «производитель–посредник–рынок», связанного с развитием посреднической сети, а также анализ функционирования этой системы и оптимизация посреднической сети.

## 2. Описание модели

Ниже в работе рассматривается фрагмент рынка однородного товара, состоящего из одного его производителя и  $h$  торговых посредников. Посредник продает потребителю товар по цене  $p$ , покупая его у производителя по цене  $(1 - k)p$ . Таким образом, величина  $kp$  есть разница между ценой спроса и ценой предложения на этом рынке. Эта разница и формирует доход посредника.

Базисной для исследования рынка будет являться модель, в которой интересы сторон представляются в виде целевых установок на максимизацию их прибыли. Эта модель включает:

- задачу фирмы-производителя:

$$(1) \begin{cases} \Pi(p, Q, k) = (1 - k) \cdot p \cdot Q - j(Q) \rightarrow \max_{Q, k}, \\ Q \in [0, \bar{Q}], \\ k \in [0, 1]; \end{cases}$$

- задачу посредника  $r$ :

$$(2) \quad R_r(p, q_r, k) = k \cdot p \cdot q_r - j_r(q_r) \rightarrow \max_{q_r}, \quad r = 1, \dots, h.$$

Здесь  $q_r$  – это действие посредника  $r$ , представляющее объем реализованного им товара потребителям;  $Q = \sum_{r=1}^h q_r$  – объем производимого товара, который затем полностью реализуется через посредников на рынке;  $\bar{Q}$  – предельно возможный объем активности производителя;  $\varphi(\cdot)$  – функция затрат производителя, а  $\varphi_r(\cdot)$  – функции затрат посредников. Важно отметить, что в этой модели значение параметра  $k$  определяется фирмой-производителем.

В наших исследованиях будем полагать, что и функции затрат и цена продукции определяются следующими выражениями:

$$(3) \quad j(Q) = c \cdot Q + d,$$

$$(4) \quad j_r(q_r) = c_r \cdot q_r + d_r, \quad r = 1, \dots, h;$$

$$(5) \quad p(Q) = a - b \cdot Q.$$

Здесь цена продукции – линейная функция объема выпуска производителем (такие модели цен достаточно широко применяются в экономико-математических исследованиях, например в исследованиях рынка Эвансом (в частности, см. работу [7]));  $a$  – спрос на продукцию [6, 9, 16];  $b$  – снижение цены при увеличении на единицу общего выпуска фирмой-производителем; издержки фирм ( $\varphi$  и  $\varphi_r$ ) являются также линейными функциями, а  $c$  и  $c_r$  – предельные переменные издержки;  $d$  и  $d_r$  – постоянные издержки фирм. Как будет показано ниже, слагаемые-константы  $d$  и  $d_r$  не будут оказывать влияния на решение задач оптимизации производителя и посредников.

Оптимальный объем активности посредника определяется из условия

$$\frac{\partial R_r}{\partial q_r} = k \frac{\partial p}{\partial q_r} \cdot q_r + kp - c_r = 0.$$

Поэтому

$$(6) \quad \frac{\partial p}{\partial q_r} = \frac{1}{q_r} \cdot \left( \frac{c_r}{k} - p \right)$$

Тогда по (5) с учетом (6) имеем

$$\frac{\partial p}{\partial q_r} = -b \cdot \frac{\partial Q}{\partial q_r} = \frac{1}{q_r} \cdot \left( \frac{c_r}{k} - a + b \cdot Q \right)$$

или

$$1 + \frac{\partial Q_{-r}}{\partial q_r} = \frac{1}{q_r} \cdot f_r - 1 - \frac{1}{q_r} \cdot Q_{-r},$$

где использованы обозначения:

$$(7) \quad f_r = \frac{a - \frac{c_r}{k}}{b},$$

$$(8) \quad Q_{-r} = \sum_{j \neq r} q_j.$$

Получаем

$$q_r \cdot \left( 2 + \frac{\partial Q_{-r}}{\partial q_r} \right) = f_r - Q_{-r},$$

и окончательно:

$$(9) \quad q_r = \frac{f_r - Q_{-r}}{2 + \frac{\partial Q_{-r}}{\partial q_r}} \quad \text{для } r = 1, \dots, h.$$

### 3. Равновесие Курно

В условиях конкуренции каждой фирме при определении своей рыночной стратегии необходимо принимать в расчет поведение конкурентов. Чтобы понять поведение конкурирующих фирм, Курно предложил сделать простое предположение относительно реакции каждой фирмы на поведение конкурентов, а именно: каждая фирма будет действовать так, как будто она не ожидает от своих конкурентов изменения объемов выпуска, даже если она сама сделает это (А. Курно «Исследование о математических принципах теории богатств», Париж, 1838 г.).

Далее, используя предположение Курно, будем считать, что каждая фирма-посредник устанавливает объем своих продаж так, как будто она ожидает, что другие посредники оставят свои объемы продаж неизменными.

Тогда, согласно определению дифференциалов, при  $r = 1, \dots, h$  имеем

$$dQ_{-r} = \sum_{j=1}^h \frac{\partial Q_{-r}}{\partial q_j} dq_j,$$

и из требования  $dQ_{-r} = 0$  следует, что для  $r$ -й фирмы должны быть равны нулю не только  $dq_j$  ( $j \neq r$ ), но и  $\partial Q_{-r} / \partial q_r$ , так как в противном случае при  $dq_r \neq 0$  будет  $dQ_{-r} \neq 0$ . Итак, имеем

$$(10) \quad \frac{\partial Q_{-r}}{\partial q_r} = 0, \quad r = 1, \dots, h.$$

По (9) получим

$$q_r = \frac{f_r - Q_{-r}}{2},$$

или

$$(11) \quad q_r = f_r - Q, \quad r = 1, \dots, h.$$

Суммируя по индексу  $r$  левые и правые части полученных равенств (11), имеем:

$$\sum_{r=1}^h q_r = \sum_{r=1}^h f_r - hQ,$$

или

$$Q = \sum_{r=1}^h f_r - hQ,$$

и в итоге

$$Q = \frac{1}{h+1} \cdot \sum_{r=1}^h f_r.$$

Обозначим элементы полученного равновесного состояния для конкурентного по Курно рынка верхним индексом « $K$ ». Тогда подстановка формулы (7) в формулу  $Q$  дает формулу (12); подстановка формулы (12) в (5) дает формулу (13); формулу (14) получаем подстановкой в (11) формул (7) и (12); формула (15) получается последовательной подстановкой в выражение для прибыли производителя в (1) формул (3), (12) и (13); аналогичным образом (16) имеем после подстановки в выражение для прибыли посредника в (2) формул (4), (13) и (14).

$$(12) \quad Q^K = \frac{1}{(h+1)b} \left( ha - \frac{\sum_{r=1}^h c_r}{k} \right)$$

$$(13) p^K = \frac{1}{h+1} \left( a + \frac{\sum_{r=1}^h c_r}{k} \right);$$

$$(14) q_r^K = \frac{1}{(h+1)b} \left( a + \frac{\sum_{r=1}^h c_r - (h+1)c_r}{k} \right), \quad r=1, \dots, h;$$

$$(15) \left\{ \begin{array}{l} \Pi^K = \frac{1-k}{(h+1)^2 b} \left( a + \frac{\sum_{r=1}^h c_r}{k} \right) \left( ha - \frac{\sum_{r=1}^h c_r}{k} \right) - \\ - \frac{c}{(h+1)b} \left( ha - \frac{\sum_{r=1}^h c_r}{k} \right) - d; \end{array} \right.$$

$$(16) \left\{ \begin{array}{l} R_r^K = \frac{k}{(h+1)^2 b} \left( a + \frac{\sum_{r=1}^h c_r}{k} \right) \left( a + \frac{\sum_{r=1}^h c_r - (h+1)c_r}{k} \right) - \\ - \frac{c_r}{(h+1)b} \left( a + \frac{\sum_{r=1}^h c_r - (h+1)c_r}{k} \right) - d_r, \quad r=1, \dots, h; \end{array} \right.$$

$$(17) s_r^K = \frac{1-k}{(h+1)^2 b} \left( a + \frac{\sum_{r=1}^h c_r}{k} \right) \left( a + \frac{\sum_{r=1}^h c_r - (h+1)c_r}{k} \right), \quad r=1, \dots, h.$$

Здесь  $\sigma_r^K$  – стоимость товара, закупленного посредником у фирмы-производителя. Она рассчитывается по формуле  $(1-k)pq$ , где  $p$  определяется по (13), а  $q$  – по (14). В теории активных систем величина  $\sigma_r^K \times k/(1-k)$  может интерпретироваться как стимулирование, т.е. вознаграждение, выплачиваемое производителем (заказчиком) посреднику (исполнителю) [8].

Для изучения различных возможностей проектирования систем отношений между участниками конкурентного рынка рассмотрим расчет параметра  $k$ , определяющего величину стоимости  $\sigma_r^K$ , на основе теоретико-игровых стратегий  $\Gamma_1$  (гамма-один), известных также как стратегии Штакельберга. Этот вариант расчета дает наиболее выгодное для фирмы-производителя значение этого параметра при условии, что посредники действуют оптимальным для себя образом.

Из условия  $\partial \Pi^K / \partial k = 0$ , где  $\Pi^K$  определяется по (15), после несложных преобразований приходим к следующему «неполному» кубическому уравнению для определения  $k_{\Gamma_1}^K$ :

$$(18) \quad \frac{a}{h} k^3 + \left( a - \frac{a}{h} + c + \bar{c} + \frac{\bar{c}}{h} \right) k - 2\bar{c} = 0.$$

Здесь использовано обозначение  $\bar{c} = \frac{\sum_{r=1}^h c_r}{h}$  – среднее значение предельных переменных издержек фирм-посредников.

Таким образом, параметр скидки цены спроса  $k_{\Gamma_1}^K$ , вычисленный по (18) на основе стратегий  $\Gamma_1$  для состояния равновесия Курно, зависит только от средних предельных переменных издержек посредников ( $\bar{c}$ ), предельных переменных издержек производителя ( $c$ ), числа самих посредников ( $h$ ) и параметра  $a$  – цены продукции при нулевом выпуске производителем. В связи с этим этот параметр может не изменяться достаточно продолжительный период и быть приемлемым для регулирования отношений между участниками франшизы при их согласии на стратегии  $\Gamma_1$ .

Тогда соответствующие элементы равновесного состояния для конкурентного по Курно рынка, когда его участники следуют стратегиям  $\Gamma_1$ , определяются по (12)–(17) при  $k = k_{\Gamma_1}^K$ .

Если  $\bar{c} = 0$ , то и  $k_{\Gamma_1}^K = 0$ , т.е. производителю выгодно про-  
давать посредникам товар по цене потребителей, а сами посредники не будут иметь прибыли.

Более подробные и специальные исследования механизмов типа  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_1$  с фиксированными платежами [5] при взаимодействии активного агента (производитель, франчайзер) и пассивных агентов (посредников, франчайзи) на похожей модели можно найти в работах [1, 16].

Далее рассмотрим задачу оптимизации числа посредников. В математических выкладках будем исходить из того, что все посредники несут одинаковые предельные переменные издержки, т.е.  $c_r = e$ ,  $r = 1, \dots, h$ .

Согласно (1)–(2) общая (суммарная) прибыль рассматриваемых участников рынка (производителя и посредников) определяется выражением

$$(19) \Delta = p(Q)Q - j(Q) - \sum_{r=1}^h j_r(q_r),$$

или с учетом (3) и (4) имеем

$$(20) \Delta = p(Q)Q - cQ - d - \sum_{r=1}^h (c_r q_r + d_r).$$

Для определения оптимального числа посредников на рынке в состоянии равновесия Курно с точки зрения максимизации общей (суммарной) прибыли решаем уравнение  $\partial \Delta^K / \partial h = 0$ , где  $\Delta^K$  определяется на основе (20), (12)–(14).

После ряда преобразований приходим к следующему его решению

$$(21) h_{\Delta}^K = \frac{a - c - e}{a - \left( \frac{2e}{k} - c - e \right)}.$$

Если предельные переменные издержки  $c_r$  посредников равны нулю, то

$$h_{\Delta}^K = \frac{a - c}{a + c},$$

и в лучшем случае будет необходимость только в одном посреднике.

Для определения оптимального числа посредников с точки зрения максимизации общего дохода от реализованной продукции ( $H^K = p^K Q^K$ ) решаем уравнение  $\partial H^K / \partial h = 0$ , где  $p^K$  и  $Q^K$  определяются по (12) и (13). После ряда несложных преобразований приходим к следующему его решению:

$$(22) h_H^K = \frac{a}{a - \frac{2e}{k}}.$$

Здесь чем выше предельные переменные издержки посредников, тем больше нужно посредников на рынке. Если предельные переменные издержки посредников равны нулю, то оптимально иметь только одного посредника.

Для определения оптимального числа посредников с точки зрения максимизации прибыли производителя  $\Pi^K$  решаем урав-



нение  $\partial \Pi^K / \partial h = 0$ , где  $\Pi^K$  определяется по (15). Это уравнение имеет следующее решение:

$$(23) \quad h_{\Pi}^K = \frac{a - c / (1 - k)}{a - 2e / k + c / (1 - k)}.$$

Наблюдается та же закономерность: чем выше предельные переменные издержки посредников, тем больше нужно посредников на рынке.

Продолжая анализ рынка в состоянии равновесия Курно, отметим следующее. Из неравенства

$$\frac{\partial Q^K}{\partial h} = \frac{1}{(h+1)^2 b} \left( a - \frac{e}{k} \right) > 0$$

следует, что с ростом числа посредников растет и выпуск товара производителем. Но вместе с тем

$$\frac{\partial q_r^K}{\partial h} = -\frac{1}{(h+1)^2 b} \left( a - \frac{e}{k} \right) < 0,$$

т.е. падает количество проданных каждым посредником товаров. Таким образом, рост выпуска обеспечивается исключительно за счет новых посредников.

Поясним, откуда следует эти неравенства. Первое, истинность этих неравенств вытекает из формулы (12) для количества производимого товара и того, что это количество не может быть отрицательно. Второе, истинность вытекает также и из того, что прибыль посредников не может быть отрицательной. Действительно, по (2), (4) и (5) имеем

$$\begin{aligned} R_r &= kpq_r - j_r(q_r) = k(a - bQ)q_r - c_r q_r - d_r = \\ &= kq_r \left( a - \frac{c_r}{k} \right) - kbQq_r - d_r. \end{aligned}$$

Первый член в последней формуле должен быть больше нуля, чтобы прибыль посредника не была отрицательной.

Далее выпуск производителя падает с ростом средних и суммарных предельных переменных издержек посредников, так как

$$\frac{\partial Q^K}{\partial e} = -\frac{h}{(h+1)bk} < 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial Q^K}{\partial \left( \sum_{r=1}^h c_r \right)} = -\frac{1}{(h+1)bk} < 0.$$

Цена товара растет с ростом средних и суммарных предельных переменных издержек посредников –

$$\frac{\partial p^K}{\partial e} = \frac{h}{(h+1)k} > 0, \quad \frac{\partial p^K}{\partial \left(\sum_{r=1}^h c_r\right)} = \frac{1}{(h+1)k} > 0,$$

но падает с ростом числа посредников –

$$\frac{\partial p^K}{\partial h} = -\frac{1}{(h+1)^2} \left( a - \frac{e}{k} \right) < 0.$$

С ростом числа посредников падает стоимость закупленного посредником товара у производителя –

$$\frac{\partial s_r^K}{\partial h} = -\frac{1-k}{(h+1)^3} \cdot b \left( 2a + \frac{(h-1)}{k} \right) \left( a - \frac{e}{k} \right) < 0$$

и прибыль посредника –

$$\frac{\partial R_r^K}{\partial h} = -\frac{2k}{(h+1)^3} b \left( a - \frac{e}{k} \right)^2 < 0, \quad r = 1, \dots, h.$$

#### 4. Равновесие Штакельберга

Допустим, что первая фирма-посредник полагает, что все другие фирмы-посредники будут действовать по Курно. Тогда из  $dq_{-r} = 0$  и  $dQ_{-r} = 0$  при  $r = 2, \dots, h$  имеем  $\partial Q_{-r} / \partial q_r = 0$ , а также

$$q_r = \frac{f_r - Q_{-r}}{2},$$

где  $f_r$  определяется по (7).

Из последнего равенства следует

$$\frac{\partial q_r}{\partial q_1} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial Q_{-r}}{\partial q_1} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial Q}{\partial q_1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial q_r}{\partial q_1} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial Q_{-1}}{\partial q_1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial q_r}{\partial q_1},$$

или

$$\frac{\partial q_r}{\partial q_1} = -1 - \frac{\partial Q_{-1}}{\partial q_1}, \quad r = 2, \dots, h.$$

Суммируя левые и правые части последних равенств по  $r$  при  $r = 2, \dots, h$ , получаем

$$\frac{\partial Q_{-1}}{\partial q_1} = -(h-1) - (h-1) \cdot \frac{\partial Q_{-1}}{\partial q_1},$$

$$(24) \quad \frac{\partial Q_{-1}}{\partial q_1} = -\frac{h-1}{h}.$$

Тогда

$$(25) \quad q_1 = \frac{f_1 - Q_{-1}}{2 - \frac{h-1}{h}},$$

или

$$q_1 = \frac{h \cdot (f_1 - Q + q_1)}{h+1},$$

$$(26) \quad q_1 = hf_1 - hQ.$$

Имеем также при  $r = 2, \dots, h$

$$(27) \quad q_r = f_r - Q.$$

Суммируя левые и правые части равенств (27) по  $r$  ( $r = 2, \dots, h$ ), а затем с (26), получаем

$$Q = (h-1)f_1 + \sum_{r=1}^h f_r - (2h-1)Q.$$

Используя ранее введенные обозначения (см. (7)) для  $f_1$  и  $f_r$ , получаем формальное выражение для  $Q$ .

Обозначим соответствующее равновесное по Штакельбергу решение верхним индексом «S». Тогда:

$$(28) \quad Q^S = \frac{1}{2hb} \left( (2h-1)a - \frac{\sum_{r=1}^h c_r + (h-1)c_1}{k} \right);$$

$$(29) \quad p^S = \frac{1}{2h} \left( a + \frac{\sum_{r=1}^h c_r + (h-1)c_1}{k} \right);$$

$$(30) \quad q_1^S = \frac{1}{2b} \left( a + \frac{\sum_{r=1}^h c_r - (h+1)c_1}{k} \right);$$

$$(31) \quad q_r^S = \frac{1}{2hb} \left( a + \frac{\sum_{r=1}^h c_r - 2hc_r + (h-1)c_1}{k} \right) \quad r = 2, \dots, h;$$

$$(32) \left\{ \begin{aligned} \Pi^S &= \frac{1-k}{4h^2b} \left( a + \frac{\sum_{r=1}^h c_r + (h-1)c_1}{k} \right) \left( (2h-1)a - \frac{\sum_{r=1}^h c_r + (h-1)c_1}{k} \right) - \\ &- \frac{c}{2hb} \left( (2h-1)a - \frac{\sum_{r=1}^h c_r + (h-1)c_1}{k} \right) - d; \end{aligned} \right.$$

$$(33) \left\{ \begin{aligned} R_1^S &= \frac{k}{4hb} \left( a + \frac{\sum_{r=1}^h c_r + (h-1)c_1}{k} \right) \left( a + \frac{\sum_{r=1}^h c_r - (h+1)c_1}{k} \right) - \\ &- \frac{c_1}{2b} \left( a + \frac{\sum_{r=1}^h c_r - (h+1)c_1}{k} \right) - d_1; \end{aligned} \right.$$

$$(34) \left\{ \begin{aligned} R_r^S &= \frac{k}{4h^2b} \left( a + \frac{\sum_{r=1}^h c_r + (h-1)c_1}{k} \right) \left( a + \frac{\sum_{r=1}^h c_r - 2hc_r + (h-1)c_1}{k} \right) - \\ &- \frac{c_r}{2hb} \left( a + \frac{\sum_{r=1}^h c_r - 2hc_r + (h-1)c_1}{k} \right) - d_r, \quad r=2, \dots, h; \end{aligned} \right.$$

$$(35) s_1^S = \frac{1-k}{4hb} \left( a + \frac{\sum_{r=1}^h c_r + (h-1)c_1}{k} \right) \left( a + \frac{\sum_{r=1}^h c_r - (h+1)c_1}{k} \right)$$

$$(36) \left\{ \begin{aligned} s_r^S &= \frac{1-k}{4h^2b} \left( a + \frac{\sum_{r=1}^h c_r + (h-1)c_1}{k} \right) \left( a + \frac{\sum_{r=1}^h c_r - 2hc_r + (h-1)c_1}{k} \right) \\ &r=2, \dots, h. \end{aligned} \right.$$

Аналогичным образом из условия  $\partial \Pi^S / \partial k = 0$  можно провести расчеты параметра  $k$  на основе игр  $\Gamma_1$ . При этом выходит, что, наряду с первой фирмой-посредником, по Штакельбергу будет действовать также и производитель. Найденное значение этого параметра обозначим как  $k_{\Gamma_1}^S$ . Тогда соответствующие показатели равновесного состояния для конкурентного по Штакельбергу рынка, когда его участники следуют стратегиям  $\Gamma_1$ , определяются по (28)–(36) при  $k = k_{\Gamma_1}^S$ .

Для определения оптимального числа посредников на рынке в состоянии равновесия Штакельберга также могут приниматься во внимание различные критерии. С точки зрения мак-

симизации общей (суммарной) прибыли оптимальное число посредников находится из решения уравнения

$$\frac{\partial \Delta^S}{\partial h} = 0, \quad \Delta^S = p^S Q^S - c Q^S - d - \sum_{r=1}^h (c_r q_r^S + d_r);$$

максимизации общего дохода от реализованной продукции – из уравнения

$$\frac{\partial H^S}{\partial h} = 0, \quad H^S = p^S Q^S;$$

максимизации прибыли производителя – из уравнения  $\partial \Pi^S / \partial h = 0$ , где  $\Pi^S$  определяется по (32).

Так, оптимальное число посредников с точки зрения максимизации общего дохода от реализованной продукции  $H^S$  определяется как

$$(37) \quad h_H^S = \frac{ka - e}{ka - 2e}.$$

По (37) при равенстве нулю предельных переменных издержек посредников оптимально иметь одного посредника.

Оптимальное число посредников с точки зрения максимизации прибыли фирмы-производителя продукции  $\Pi^S$  определяется по формуле

$$(38) \quad h_{\Pi}^S = \frac{a - e / k}{a - 2e / k + c / (1 - k)}.$$

Из неравенства

$$\frac{\partial Q^S}{\partial h} = \frac{1}{h^2 b} \left( a - \frac{e}{k} \right) > 0$$

следует, что в состоянии равновесия Штакельберга с ростом числа посредников также растет выпуск товара производителем; количество проданных товаров не изменяется для первого посредника, но падает для других посредников –

$$\frac{\partial q_1^S}{\partial h} = 0, \quad \frac{\partial q_r^S}{\partial h} = -\frac{1}{2h^2 b} \left( a - \frac{e}{k} \right) < 0, \quad r = 2, \dots, h.$$

Поэтому рост общего выпуска обеспечивается исключительно за счет новых посредников. С ростом же числа посредников цена товара падает –

$$\frac{\partial p^S}{\partial h} = -\frac{1}{2h^2} \left( a - \frac{e}{k} \right) < 0,$$

падают стоимость товара, закупленного каждым посредником у производителя –

$$\frac{\partial S_1^S}{\partial h} = -\frac{1-k}{4h^2b} \left( a - \frac{e}{k} \right) < 0, \quad \frac{\partial S_r^S}{\partial h} = -\frac{1-k}{2h^3b} \left( a - \frac{e}{k} \right)^2 < 0, \quad r = 2, \dots, h,$$

и их прибыль –

$$\frac{\partial R_1^S}{\partial h} = -\frac{k}{4h^2b} \left( a - \frac{e}{k} \right)^2 < 0, \quad \frac{\partial R_r^S}{\partial h} = -\frac{k}{2h^3b} \left( a - \frac{e}{k} \right)^2 < 0, \quad r = 2, \dots, h.$$

С ростом предельных переменных издержек посредников падает выпуск производителя, так как

$$\frac{\partial Q^S}{\partial e} = -\frac{2h-1}{2hbk} < 0,$$

но растет цена товара –

$$\frac{\partial p^S}{\partial e} = \frac{2h-1}{2hk} > 0.$$

## 5. Неравновесие Штакельберга

Пусть остальные фирмы, так же, как и первая, будут действовать по Штакельбергу, т.е. каждая фирма считает, что все другие действуют по Курно. Такая ситуация называется неравновесием по Штакельбергу [7].

В этом случае по (24) как для первой фирмы, так и для всех остальных будут выполняться соотношения

$$(39) \quad \frac{\partial Q_{-r}}{\partial q_r} = -\frac{h-1}{h}, \quad r = 1, \dots, h;$$

и согласно (9) имеем, что

$$q_r = \frac{f_r - Q_{-r}}{2 - \frac{h-1}{h}} = \frac{h}{h+1} (f_r - Q + q_r).$$

Далее следует:

$$(40) \quad q_r = h(f_r - Q), \quad r = 1, \dots, h.$$

Суммируя по  $r$  левые и правые части равенств (40), получаем

$$Q = h \sum_{r=1}^h f_r - h^2 Q; \quad Q = \frac{h}{(h^2 + 1)b} \left( ha - \frac{\sum_{r=1}^h c_r}{k} \right)$$

Обозначим элементы полученного неравновесного по Штакельбергу состояния конкурентного рынка верхним индексом « $\bar{S}$ ». Тогда последовательно используя (7), (5), (40), а также формальные выражения доходов участников в задачах (1) и (2), получаем следующие соотношения:

$$(41) \quad Q^{\bar{S}} = \frac{h}{(h^2 + 1)b} \left( ha - \frac{\sum_{r=1}^h c_r}{k} \right)$$

$$(42) \quad p^{\bar{S}} = \frac{1}{h^2 + 1} \left( a + \frac{h \sum_{r=1}^h c_r}{k} \right)$$

$$(43) \quad q_r^{\bar{S}} = \frac{h}{(h^2 + 1)b} \left( a + \frac{h \sum_{r=1}^h c_r - (h^2 + 1)c_r}{k} \right) \quad r = 1, \dots, h;$$

$$(44) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Pi^{\bar{S}} = \frac{h(1-k)}{(h^2 + 1)^2 b} \left( a + \frac{h \sum_{r=1}^h c_r}{k} \right) \left( ha - \frac{\sum_{r=1}^h c_r}{k} \right) - \\ - \frac{hc}{(h^2 + 1)b} \left( ha - \frac{\sum_{r=1}^h c_r}{k} \right) - d; \end{array} \right.$$

$$(45) \quad \left\{ \begin{array}{l} R_r^{\bar{S}} = \frac{hk}{(h^2 + 1)^2 b} \left( a + \frac{h \sum_{r=1}^h c_r}{k} \right) \left( a + \frac{h \sum_{r=1}^h c_r - (h^2 + 1)c_r}{k} \right) - \\ - \frac{hc_r}{(h^2 + 1)b} \left( a + \frac{h \sum_{r=1}^h c_r - (h^2 + 1)c_r}{k} \right) - d_r, \quad r = 1, \dots, h; \end{array} \right.$$

$$(46) \quad \left\{ \begin{array}{l} S_r^{\bar{S}} = \frac{h(1-k)}{(h^2 + 1)^2 b} \left( a + \frac{h \sum_{r=1}^h c_r}{k} \right) \left( a + \frac{h \sum_{r=1}^h c_r - (h^2 + 1)c_r}{k} \right) \\ r = 1, \dots, h. \end{array} \right.$$

Когда отношения производителя и посредников строятся на основе теоретико-игровых стратегий  $\Gamma_1$ , значение параметра скидки цены  $k$  для точки не равновесия Штакельберга находится из условия  $\partial \Pi^{\bar{s}} / \partial k = 0$ , где  $\Pi^{\bar{s}}$  определяется по (44). Соответствующие показатели функционирования рынка находятся из (41)–(46) при  $k = k_{\Gamma_1}^{\bar{s}}$ .

Оптимальное число посредников на данном рынке может быть найдено из условий:

$$\frac{\partial \Delta^{\bar{s}}}{\partial h} = 0, \quad \Delta^{\bar{s}} = p^{\bar{s}} Q^{\bar{s}} - c Q^{\bar{s}} - d - \sum_{r=1}^h (c_r q_r^{\bar{s}} + d_r),$$

если критерием числа посредников является максимизация общей (суммарной) прибыли производителя и посредников;

$$\frac{\partial H^{\bar{s}}}{\partial h} = 0, \quad \text{где } H^{\bar{s}} = p^{\bar{s}} Q^{\bar{s}},$$

если критерием числа посредников является максимизация общего дохода от реализованной продукции;

$$\frac{\partial \Pi^{\bar{s}}}{\partial h} = 0,$$

где  $\Pi^{\bar{s}}$  определяется по (44)) – при максимизации прибыли производителя.

Рассмотрим подробнее случай, когда число посредников определяется по критерию максимизации дохода. Уравнение

$$\frac{\partial H^{\bar{s}}}{\partial h} = 0$$

после ряда несложных преобразований дает искомое решение:

$$(47) \quad \left(h_n^{\bar{s}}\right)^2 = \frac{a}{a - \frac{2e}{k}}.$$

Рассмотрим также случай определения оптимального числа посредников по критерию максимизации дохода производителя:

$$(48) \quad \left(h_n^{\bar{s}}\right)^2 = \frac{a - \frac{c}{(1-k)}}{a - \frac{2e}{k} + \frac{c}{(1-k)}}.$$



Переходя к анализу рынка в состоянии неравновесия Штакельберга, отметим, что с ростом числа посредников также растет выпуск товара производителем. Это следует из неравенства

$$\frac{\partial Q^{\bar{s}}}{\partial h} = \frac{2h}{(h^2 + 1)^2 b} \left( a - \frac{e}{k} \right) > 0;$$

однако для посредников количество проданных товаров падает

$$\frac{\partial q_r^{\bar{s}}}{\partial h} = -\frac{h^2 - 1}{(h^2 + 1)^2 b} \left( a - \frac{e}{k} \right) \leq 0.$$

Поэтому рост выпуска товара обеспечивается исключительно за счет новых посредников. С ростом числа посредников также падают цена товара

$$\frac{\partial p^{\bar{s}}}{\partial h} = -\frac{2h}{h^2 + 1} \left( a + \frac{(h^2 - 1)e}{k} \right) < 0$$

и прибыль каждого посредника –

$$\frac{\partial R_r^{\bar{s}}}{\partial h} = -\frac{k(3h^2 - 1)}{(h^2 + 1)^3 b} \left( a - \frac{e}{k} \right)^2 < 0, r = 1, \dots, h.$$

С ростом числа посредников может неоднозначно вести себя стоимость товара, закупленного каждым посредником у производителя, так как

$$\frac{\partial s_r^{\bar{s}}}{\partial h} = \frac{h(1-k)}{(h^2 + 1)^3 b} \left[ (1-h^2) \left( a - \frac{e}{k} \right) + \frac{(h^2 + 1)^2 e}{k} \right] \left( a - \frac{e}{k} \right), r = 1, \dots, h.$$

При  $h = 1$  последнее выражение положительно, т.е. стоимость закупленного товара растет; при небольших значениях  $h$  знак выражения зависит от соотношения между параметрами  $a, e, k$  и при значительных значениях  $h$  очевидно, что опять последнее выражение положительно, что означает рост стоимости товара, закупаемого каждым посредником у производителя.

В состоянии неравновесия Штакельберга с ростом предельных переменных издержек посредников падает выпуск производителя, так как

$$\frac{\partial Q^{\bar{s}}}{\partial e} = -\frac{h^2}{(h^2 + 1)k} < 0,$$

но цена товара растет:

$$\frac{\partial p^s}{\partial e} = \frac{h^2}{(h^2 + 1)k} > 0.$$

## 6. Общие выводы

В заключение добавим ряд общих содержательных выводов, относящихся к взаимосвязи между прибылью производителя и ростом числа посредников в его сети.

1. Во всех трех случаях (равновесия Курно и Штакельберга, неравновесия Штакельберга) наблюдается  $\cap$ -образная форма зависимости между прибылью производителя и числом посредников. Это дает основания для предположения об оптимальном ограниченном числе посредников для производителя в его посреднической сети на конкурентном рынке. Вычислительные эксперименты для подобных систем показали, что после оптимума идет достаточно медленное монотонное понижение прибыли производителя [1].

Видимо, такого рода зависимость объясняется тем, что в условиях ограниченности рационального поведения и несимметричной информированности агентов при малом числе посредников действие факторов, «положительно» влияющих на прибыль производителя, превалирует над «отрицательно» влияющими. А при значительном числе посредников наблюдается обратная картина.

В этом плане могут представлять интерес те параметры системы «производитель–посредник–рынок», изменения которых (в большую или меньшую сторону) с ростом числа посредников всегда положительно связаны с прибылью производителя. Поэтому далее остановимся на этом вопросе подробнее.

2. Во всех трех случаях повышение цены предложения (т.е. уменьшение параметра  $k$ ) приводит к повышению прибыли производителя и положительно связано с увеличением числа посредников.

Так для равновесия Курно повышение прибыли производителя можно подтвердить подстановкой соотношения для опти-

мального числа посредников (23) в соотношение для определения прибыли (15) при  $c_r = e$ ,  $r = 1, \dots, h$ . Тогда имеем, что прибыль составит

$$(49) \quad \Pi^K = \frac{1-k}{4b} \left( a - \frac{c}{1-k} \right)^2 - d.$$

Тогда знак производной (49) по  $k$  доказывает данное утверждение о повышении прибыли, а именно

$$\frac{\partial \Pi^K}{\partial k} = -\frac{1}{4b} \left( a - \frac{c}{1-k} \right) \left( a + \frac{c}{1-k} \right) < 0.$$

Кроме того, по (23) следует

$$\frac{\partial h_{\Pi}^K}{\partial k} = -\frac{2c \left( a - \frac{e}{k} \right)}{\left[ (1-k)a - \frac{2e(1-k)}{k} + c \right]^2} < 0,$$

т.е. оптимальное число посредников убывает с увеличением  $k$ . Итак, показано, что в случае равновесия Курно повышение цены предложения приводит к повышению прибыли производителя и положительно связано с увеличением числа посредников (примечание: уменьшение параметра  $k$  имеет свои границы, так как при малых его значениях функции для  $h$  могут иметь особенности).

Аналогичным образом рассматриваются и другие случаи.

3. Следует отметить интересный факт, что во всех трех случаях прибыль производителя для оптимального числа посредников составляет одну и ту же величину, определяемую формулой (49).

Поэтому для завершения доказательства вывода 2 представляет смысл здесь привести только производные выражений (38) и (48)

$$\frac{\partial h_{\Pi}^S}{\partial k} = -\frac{\frac{c}{(1-k)^2} \cdot \left( a - \frac{e}{k} \right) + \frac{ae}{k^2}}{\left[ a - \frac{2e}{k} + \frac{c}{(1-k)} \right]^2} < 0,$$

$$\frac{\partial(h_{\Pi}^{\bar{s}})^2}{\partial k} = -\frac{2c(a - e/k)}{\left[ (1-k)a - \frac{2e(1-k)}{k} + c \right]^2} < 0.$$

4. Во всех трех случаях повышение активности производителя (т.е. объема производства товара  $Q$ ) приводит к повышению прибыли производителя и положительно связано с ростом посреднической сети.

С одной стороны, по (1), (3) и (5) имеем

$$\Pi = (1-k)(a - bQ)Q - cQ - d, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial Q} = (1-k) \left( a - \frac{c}{1-k} \right) > 0.$$

Последнее неравенство следует из того, что прибыль производителя не может быть отрицательной:

$$\begin{aligned} \Pi &= (1-k)aQ - (1-k)bQ^2 - cQ - d = \\ &= (1-k)Q \left( a - \frac{c}{1-k} \right) - (1-k)bQ^2 - d. \end{aligned}$$

Если первая составляющая последней формулы будет отрицательной или равной нулю, то и прибыль будет отрицательной. Таким образом, показано, что с ростом  $Q$  растет прибыль производителя.

С другой стороны, выше было показано, что для всех трех случаев с ростом числа посредников растет выпуск  $Q$  и этот рост выпуска обеспечивается исключительно за счет новых посредников.

5. Во всех трех случаях снижение цены товара  $p$  приводит к повышению прибыли производителя и положительно связано с увеличением числа посредников. Этот вывод непосредственно следует из предыдущего, так как по (5)  $p = a - bQ$ . Впрочем, это утверждение можно также подтвердить и приведенными выше

соотношениями для  $\frac{\partial p^K}{\partial h}$ ,  $\frac{\partial p^S}{\partial h}$  и  $\frac{\partial p^{\bar{S}}}{\partial h}$ , показывающими, что цена товара снижается с ростом числа посредников.

## 7. Заключение

В статье описывается модель функционирования рынка однородного товара, состоящего из одного производителя и ряда конкурирующих друг с другом торговых посредников. На основе этой модели получены аналитические оценки ряда основных характеристик рынка в условиях конкурентного равновесия Курно, конкурентного равновесия Штакельберга и неравновесия Штакельберга, включающих: объем производства товара; объем закупаемого у производителя и реализованного потребителям товара каждым посредником; рыночная цена продукции; прибыль производителя и посредников и др. Предложены математические модели организации отношений между производителем и посредниками на основе теоретико-игрового подхода с применением стратегий  $\Gamma_1$ . Осуществлена постановка и приведено решение задачи оптимизации числа посредников на региональном конкурентном рынке по различным критериям: максимизация общей (суммарной) прибыли производителя и посредников; максимизация общего (суммарного) дохода; максимизация прибыли производителя. Проведен анализ рынка в состоянии равновесия Курно, равновесия Штакельберга и неравновесия Штакельберга.

Получены новые результаты, относящиеся к взаимосвязи между прибылью производителя и ростом числа посредников в его сети. Показано, что во всех трех случаях: 1) наблюдается  $\cap$ -образная форма зависимости между прибылью производителя и числом посредников; 2) повышение цены предложения (т.е. уменьшение параметра  $k$ ) приводит к повышению прибыли производителя и положительно связано с увеличением числа посредников; 3) повышение активности производителя (т. е. объема производства товара  $Q$ ) приводит к повышению прибыли производителя и положительно связано с ростом посреднической сети; 4) снижение цены товара  $p$  приводит к повышению прибыли производителя и положительно связано с увеличением числа посредников.

## Литература

1. АЛГАЗИН Г.И., АЛГАЗИНА Д.Г. *Моделирование много-агентных франчайзинговых систем*: монография. – Барнаул: АлтГУ, 2009. – 91 с.
2. БУЛАВСКИЙ В.А. *Модель олигополии с рынками производственных факторов* // Экономика и математические методы. – 1999. – Т. 35, №4. – С. 78–86.
3. БУЛАВСКИЙ В.А., КАЛАШНИКОВ В.В. *Метод однопараметрической прогонки для исследования состояния равновесия* // Экономика и математические методы. – 1994. – Т. 30, вып. 4. – С. 129–138.
4. БУЛАВСКИЙ В.А., КАЛАШНИКОВ В.В. *Равновесие и обобщенных моделях Курно и Штакельберга* // Экономика и математические методы. – 1995. – Т. 31, вып. 4. – С. 151–163.
5. ГЕРМЕЙЕР Ю.Б. *Игры с противоположными интересами*. – М.: Наука, 1976. – 328 с.
6. ДЮСУШЕ О.М. *Статическое равновесие Курно-Нэша и рефлексивные игры олигополии: случай линейных функций спроса и издержек* // Экономический журнал ВШЭ. – 2006. – №1. – С. 3–32.
7. КОЛЕМАЕВ В.А. *Математическая экономика*: учеб. для вузов. – М.: ЮНИТИ, 1998. – 240 с.
8. НОВИКОВ Д.А. *Стимулирование в организационных системах*. – М.: СИНТЕГ, 2003. – 312 с.
9. НОВИКОВ Д.А., ЧХАРТИШВИЛИ А.Г. *Прикладные модели информационного управления*. – М.: ИПУ РАН, 2004. – 129 с.
10. НОВИКОВ Д.А., ЧХАРТИШВИЛИ А.Г. *Рефлексивные игры*. – М.: СИНТЕГ, 2003. – 149 с.
11. CAMERER C.F., HO T.-H., CHONG J.-K. *Cognitive Hierarchy Theory of One-shot Games* // CalTech working paper. – 2002. – 39 p.
12. COSTA-GOMES M.A., IRIBERRI N., CRAWFORD V.P. *Comparing Models of Strategic Thinking in Van Huyck, Battalio, and Beil's Coordination Games* // Journal of the European

- Economic Association. – April–May 2009. – Vol.7(2–3). – P. 365–376.
13. FRANK C.R., QUANDT R.E. *On the Existence of Cournot Equilibrium* // International Economic Review. – 1963. – Vol. 5.
  14. HARKER P.T. *A Variational Inequality Approach for the Determination of Oligopolistic Market Equilibrium* // Mathematical Programming. – 1984. – Vol. 30, №1. – P. 105–111.
  15. HARKER P.T., CHOI S.-C. *A Penalty Function Approach for Mathematical Programs with Variational Inequality Constraints* // Information and Decision Technologies. – 1991. – Vol. 17.
  16. HEGJI C.E., MOORE E.C. *On the Economics of Manufactures and Dealers: A Reexamination* // Southwestern Economic Review. – 2006. – P. 107–120.
  17. McMANUS M. *Numbers and Size in Cournot Oligopoly* // Yorkshire Bulletin Social and Economic Research. – 1962. – Vol. 14.
  18. McMANUS M. *Equilibrium, Numbers and Size in Cournot Oligopoly* // Yorkshire Bulletin Social and Economic Research. – 1964. – Vol. 16.
  19. METZLER C., HOBBS B.S., PANG J.-S. *Nash-Cournot Equilibria in Power Markets on a Linearized DC network with Arbitrage: Formulations and Properties* // Networks and Spatial Economics. – 2003. – Vol. 3, №2. – P. 123–150.
  20. NOVSHEK W. *On the Existence of Cournot Equilibrium* // Review Economic Studies. – 1985. – Vol. 5(1), №168.
  21. OKUQUCHI K. *Quasi-competitiveness and Cournot Oligopoly* // Review Economic Studies. – 1973. – Vol. 40.
  22. ROBERTS J., SONNENSCHN H. *On the Existence of Cournot Equilibrium Without Concave Profit Functions* // Journal Economic Theory. – 1976. – Vol. 13.
  23. RUFFIN R.J. *Cournot Oligopoly and Competitive Behaviour* // Review Economic Studies. – 1971. – Vol. 38(4), №116.
  24. SHERALI H.D., SOYSTER A.L., MURPHY F.H. *Stackelberg-Nash-Cournot Equilibria: Characterizations and Computations* // Operations Research. – 1983. – Vol. 31, №2.

25. STACKELBERG H. *Marktform und Gleichgewicht*. – Vienna: Julius Springer, 1934.
26. SZIDAROVSKY F., YAKOWITZ S. *A New Proof of the Existence and Uniqueness of the Cournot Equilibrium* // International Economic Review. – 1977. – Vol. 18, №3.

### **MODELLING BEHAVIOUR OF ECONOMIC AGENTS IN «MANUFACTURER- MEDIATOR -COMPETITIVE MARKET» SYSTEM**

**Gennady Algazin**, Altai State University, Barnaul, Doctor of Science, professor (algazin@socio.asu.ru).

**Julia Algazina**, Altai State University, Barnaul, Cand.Sc. associated professor (algazina@inbox.ru).

*Abstract: The management problem is considered for a "manufacturer-mediator-market" system. The model accounts for asymmetric information and limited rationality of economic agents. Cournot and Stackelberg equilibria are calculated and analyzed. The relation is studied between the profit of a manufacturing firm and the size of its distribution network in a competitive market. Applications include agents' interactions organization and distribution network optimization.*

Keywords: manufacturing firm, distributors, interaction, mode-based approach, competitive equilibrium, Cournot, Stackelberg, gamma-one strategy.

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии В. Д. Богатырёвым*



УДК 519.68:519.86

ББК 22.19

## **СОЦИО-ЭКОЛОГО-ЭКОНОМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РЕГИОНА В ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЯХ<sup>1</sup>**

**Гурман В. И.<sup>2</sup>, Матвеев Г. А.<sup>3</sup>, Трушкова Е. А.<sup>4</sup>**  
*(Учреждение Российской академии наук Институт  
программных систем имени А.К. Айламазяна РАН,  
Переславль-Залесский)*

*Разработана общая процедура (с методическими рекомендациями) приближенного синтеза оптимального управления для социо-эколого-экономической модели региона. Создан комплекс программ DSEEmodel 1.0, реализующий на кластерном вычислительном устройстве параллельные алгоритмы сценарных расчетов, оптимизации и улучшения приближенно-оптимального управления для социо-эколого-экономической модели с целью проведения многовариантных расчетов, связанных с разработкой стратегии устойчивого развития региона. В целом это – новый подход к проблеме ситуационного управления регионом с использованием суперЭВМ для реализации полномасштабной социо-эколого-экономической модели.*

**Ключевые слова:** социо-эколого-экономическая модель, оптимальное управление, параллельные алгоритмы, динамическое распараллеливание программ, Т-система.

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РГНФ (проект №09-02-00650) и РФФИ (проекты №09-01-00170 и №10-06-00081)

<sup>2</sup> Владимир Иосифович Гурман, доктор технических наук, профессор, (vladimir@gurman.botik.ru).

<sup>3</sup> Герман Анатольевич Матвеев, (gera@prime.botik.ru).

<sup>4</sup> Екатерина Александровна Трушкова, (katerina@trushkova.pereslavl.ru).

## **Введение**

В конце 1970-х годов в Сибирском отделении Академии наук в связи с решением проблемы сохранения природного комплекса озера Байкал и прилегающего региона были инициированы исследования с целью эволюционного развития классических моделей экономической динамики (см., например, [12]) путем дополнения их экологическими блоками в сопоставимых терминах при сохранении их преимущественно теоретического характера. Они оказались успешными и вылились в достаточно общую методологию моделирования и системного анализа регионов [8, 11].

С тех пор эта методология развивалась вслед за становлением парадигмы устойчивого развития [10]. Изначальная концепция модели региона как эколого-экономической переросла в социо-эколого-экономическую и пополнилась новым блоком, отражающим активные инновационные процессы как важнейший фактор развития. Создававшиеся при этом версии модели применялись для исследования различных аспектов и проблем регионального развития: стратегий устойчивого развития, медико-эколого-экономических, формирования информационной базы с приложением к конкретным регионам.

Последняя версия, представленная в [9], наиболее перспективна для различных приложений, но и наиболее сложна по сравнению с предшествующими. Она не могла быть реализована в полном объеме на обычных компьютерах, даже самых современных. Для практических вычислений требовались различные упрощающие допущения и высокая степень агрегирования. Появление доступных суперкомпьютеров открывает здесь новые возможности, которые демонстрируются ниже.

### **1. Описание математической модели**

Концепция рассматриваемой модели трактует регион как открытую систему, разделенную условно на три взаимодействующих подсистемы: экономическую, природную и социальную [9]. Экономическая подсистема включает традиционные произ-

водственный и непроеизводственный секторы и нетрадиционные виды деятельности, направленные на восстановление или улучшение в определенном смысле состояния природной и социальной подсистем. Динамика природной и социальной подсистем описывается однотипно. Инновации учитываются через видоизменение созданной ранее региональной модели путем дополнения ее специальным блоком, описывающим инновационные процессы. Поскольку в реальности инновации связываются с определенным объектом, где производятся соответствующие инновационные процессы, то понятие «инновация» трактуется формально как любое целенаправленное изменение параметров модели, описывающей этот объект, которые прежде рассматривались как константы. Число параметров исходной модели рассматриваемого класса, как правило, достаточно велико.

Модель описывается следующими соотношениями:

- (1)  $c = (E - A(\theta))y - Bu - A^z z - B^z u^z - A^d d - B^d u^d,$
- (2)  $\dot{r} = N(r - \bar{r}) - C(\theta)y - Du - D^z u^z + C^z z + im^r - ex^r,$   
 $r_{\min} \leq r \leq r_{\max},$
- (3)  $\dot{k} = u - [\delta]k, \quad \dot{k}^z = u^z - [\delta^z]k^z, \quad \dot{k}^d = u^d - [\delta^d]k^d,$
- (4)  $y_{\min} \leq y \leq [\beta]k, \quad 0 \leq z \leq [\beta^z]k^z, \quad 0 \leq d \leq [\beta^d]k^d,$   
 $u \leq 0, \quad u^z \leq 0, \quad u^d \leq 0,$
- (5)  $\dot{\theta} = -([d] + H_{inv} + [H_{dif}]) (\theta - \bar{\theta}),$
- (6)  $\dot{\Pi} = \left( (1-l)p^T c - l(r - \bar{r})^2 \right) e^{-\rho t}, \quad 0 \leq l \leq 1.$

Здесь в качестве переменных состояния выступают векторы  $k \in \mathbb{R}^{n_1}, k^z \in \mathbb{R}^{n_2}, k^d \in \mathbb{R}^{n_3}$  – основные фонды в экономическом, природо-социо-восстановительном и инновационном секторах ( $n_3 = n_1(n_1 + n_2)$ );  $r \in \mathbb{R}^{n_1}$  – индексы состояния природной среды и социума;  $\theta \in \mathbb{R}^{n_3}$  – инновационные индексы (агрегированное описание изменения за счет инноваций элементов матрицы прямых затрат в экономическом секторе  $A(\theta)$  и матрицы коэффициентов прямого воздействия отраслей экономики на компоненты природной и социальной подсистем  $C(\theta)$ );  $\Pi \in \mathbb{R}$  – благосостояние. Переменными управления служат векторы  $y, z,$

$d$  – выпуски продукции по отраслям, активное природо-социовосстановление, активные инновации;  $u$ ,  $u^z$ ,  $u^d$  – инвестиции в экономическом, природо-социовосстановительном и инновационном секторах. Остальные величины, входящие в модель (1)–(6):  $c$  – конечное потребление;  $\Gamma(k) = [\beta]k$ ,  $\Gamma^z(k^z) = [\beta^z]k^z$ ,  $\Gamma^d(k^d) = [\beta^d]k^d$ ;  $\delta$ ,  $\delta^z$ ,  $\delta^d$  – мощности и темпы амортизации в экономическом, природо-социовосстановительном и инновационном секторах;  $p$  – цены;  $\bar{r}$  – заданная функция (опорная), например получаемая из статистического прогноза;  $im^r$ ,  $ex^r$  – миграционные потоки загрязнений и ресурсов;  $A^z$ ,  $A^d$  – прямые затраты в природо-социовосстановительном и инновационном секторах;  $B$ ,  $B^z$ ,  $B^d$  – фондообразующие затраты в указанных секторах;  $N$  – коэффициенты взаимовлияния компонентов природной и социальной подсистем;  $D$ ,  $D^z$  – коэффициенты воздействия на компоненты природной и социальной подсистем при инвестициях в отрасли экономики и в природо-социовосстановительный сектор;  $H_{inv}$ ,  $[H_{dif}]$  – матрицы, отражающие влияние инвестиций и диффузии инноваций;  $r_{min}$ ,  $r_{max}$  – минимально и максимально допустимые индексы состояния природной среды и социума,  $y_{min}$  – минимально допустимые выпуски продукции по отраслям.

Данная модель может трактоваться как непрерывная, так и дискретная по времени. Точкой сверху в непрерывном варианте обозначаются производные по времени ( $\dot{k} = \frac{dk}{dt}$  и т. д.), а в дискретном – конечные разности ( $\dot{k} = \frac{k(t+h)-k(t)}{h}$  и т. д.), где  $h$  – временной шаг, который удобно задавать равным единице времени (типично – году),  $h = 1$ . Все величины в правых частях уравнений и в конечных соотношениях берутся в момент  $t$ .

Одной из важных целей построения модели (1)–(6), как и в классических задачах экономической динамики, является оптимальный выбор управляющих воздействий по критерию максимума некоторого функционала полезности. Эта процедура служит по существу продолжением процесса моделирования, определяя поведение действующих сторон (агентов) исходя из единого принципа. Здесь предлагается достаточно очевидный критерий оптимальности: на заданном отрезке времени  $[t_I, t_F]$  (период, го-

ризонт планирования) максимизировать величину  $\Pi(t_F)$  (функционал благосостояния) при заданных ограничениях и заданном состоянии в начале периода:  $\Pi(t_I) = 0$ ,  $k(t_I) = k_I$ ,  $k^z(t_I) = k_I^z$ ,  $k^d(t_I) = k_I^d$ ,  $r(t_I) = r_I$ ,  $\theta(t_I) = \theta_I$ .

После представления наборов фазовых и управляющих переменных модели (1)–(6) в виде соответствующих векторов  $x = (k, k^z, k^d, r, \theta, \Pi)$ ,  $u = (y, z, u, u^z, u^d, d)$ , замены ограничений штрафными добавками в минимизируемый функционал задачу оптимизации для модели (1)–(6) можно рассматривать как задачу оптимального управления в стандартной форме

$$(7) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= f(t, x(t), u(t)), \quad t \in T = \{t_I, \dots, t_F\}, \\ x &\in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^p, \\ n &= n_1 + 2n_2 + 2n_1(n_1 + n_2) + 1, \\ p &= 2n_1 + 2n_2 + 2n_1(n_1 + n_2), \\ x(t_I) &= x_I, \quad F(x(t_F)) \rightarrow \min, \end{aligned}$$

и применять к ее исследованию известные методы теории оптимального управления.

## 2. Программно-алгоритмический инструментарий

На основе рассматриваемая версии модели разработан программно-алгоритмический комплекс *DSEEmodel 1.0* для суперЭВМ серии «СКИФ» Союзного государства «Россия-Белоруссия». Все основные алгоритмы комплекса программ *DSEEmodel 1.0* реализованы в рамках *T*-системы с открытой архитектурой (*OpenTS*) на языке программирования *T++*. *T*-система – система параллельного программирования, реализующая концепцию автоматического динамического распараллеливания программ. Это оригинальная российская разработка, которая ведется в Институте программных систем РАН [1, 2]. *T*-система автоматически (без участия программиста) выполняет распараллеливание фрагментов кода в программе, планировку вычислений, синхронизацию параллельных фрагментов кода, обмен данными между фрагментами программы и распределение данных по различным узлам кластера. Причем эти действия определяются и выполняются в динамике, во время исполнения программы (а не пла-

нируются заранее, в статике, во время компиляции). *T*-система предоставляет язык программирования *T++* (очень простой параллельный диалект *C++*), который предназначен для эффективной реализации динамического распараллеливания.

Комплекс *DSEEmodel 1.0* предназначен для компьютерной поддержки следующих типов расчетов:

- 1) сценарный анализ – программа поиска решения (прямого расчета системы) при задании всех входных величин;
- 2) моделирование неопределенностей – программы случайных изменений коэффициентов и входов моделей с целью исследования их на устойчивость и чувствительность;
- 3) грубая глобальная оптимизация – программа поиска магистральных решений, характерных для данной модели, как приближенных глобально оптимальных, которые можно выбирать в качестве начальных приближений для последующего итерационного уточнения;
- 4) последовательное улучшение и приближенно-оптимальный синтез управления – программа, реализующая итерационное улучшение приближенных решений.

### *2.1. Сценарный расчет*

Более общая цель создания модели региона – проведение широкой серии вычислительных экспериментов при широком участии экспертов и руководителей–практиков для выбора обоснованной стратегии развития. Такие расчеты должны давать ответы на вопросы типа «что будет, если...?», т. е. оценивать последствия возможных решений, которые формулируются как некоторые сценарии. Источниками разнообразных содержательных сценариев могут выступать подходы к решению существующих проблем (спад производства, устаревшие технологии, угроза уникальному природному объекту и т. п.), неопределенность внешних факторов и критериев, практически значимые аппроксимации и интерпретации идеализированных оптимальных решений.

Для проведения вычислительных экспериментов непосредственно с математической моделью требуются формальные сценарии. Под формальным сценарием понимается любая заданная комбинация входов. Их источниками могут выступать: «перевод» содержательных сценариев на язык модели (при этом одному и тому же содержательному сценарию могут отвечать различные интерпретации, т. е. различные формальные сценарии), анализ чувствительности модели и оптимальных решений к параметрам и неопределенностям, что позволяет выявить, с одной стороны, группу наиболее значимых параметров, в отношении которых требования к эмпирическим данным должны быть особенно жесткими, а с другой – возможные несущественные компоненты и связи, игнорирование которых позволяет упростить модель или ее информационное наполнение.

Систематизация возможных формальных сценариев с учетом опыта работы с предшествующими версиями модели и их приложений позволило сформулировать требования к создаваемому компьютерному инструментарию.

Предполагается прямой расчета системы (1)–(6) при задании входных величин:  $n_1, n_2, t_I, t_F, h, k(t_I), k^z(t_I), k^d(t_I), r(t_I), \theta(t_I), \Pi(t_I), \delta, \delta^z, \delta^d, \bar{r}, im^r, ex^r, p, \bar{\theta}, \rho, l, N, H_{inv}, H_{dif}, C^z, D, D^z, A^z, A^d, B, B^z, B^d$ , и управлений  $y, z, d, u, u^z, u^d$  в моменты времени  $t_I, \dots, t_F - h$ .

Алгоритм расчета последователен, но приобретает явный параллелизм при наличии нескольких независимых наборов входных величин.

## 2.2. Моделирование неопределенностей

Предполагается исследовать чувствительность целевого функционала  $F_0(\Pi(t_F)) = -\Pi(t_F)$  при заданных управлениях к малым изменениям коэффициентов матрицы прямого воздействия отраслей экономики на компоненты природной и социальной подсистем  $C(\theta)$  и матрицы прямых затрат в экономическом секторе  $A(\theta)$ .

Данный сценарий предполагает задание входных величин:  $n_1, n_2, t_I, t_F, h, k(t_I), k^z(t_I), k^d(t_I), r(t_I), \theta(t_I), \Pi(t_I), \delta, \delta^z, \delta^d,$

$\bar{r}$ ,  $im^r$ ,  $ex^r$ ,  $p$ ,  $\bar{\theta}$ ,  $\rho$ ,  $l$ ,  $N$ ,  $H_{inv}$ ,  $H_{dif}$ ,  $C^z$ ,  $D$ ,  $D^z$ ,  $A^z$ ,  $A^d$ ,  $B$ ,  $B^z$ ,  $B^d$ , и управлений  $y$ ,  $z$ ,  $d$ ,  $u$ ,  $u^z$ ,  $u^d$  в моменты времени  $t_I, \dots, t_F - h$ . В дальнейшем производится расчет для каждого нового набора входов с изменением одного коэффициента матрицы  $A(\theta)$  (матрицы  $C(\theta)$ ) на 1% от исходного значения текущего коэффициента. При этом очевидно, что вычисления могут вестись параллельно для каждого текущего значения входов. По окончании сравниваются изменения значения целевого функционала  $F_0$  на исходном наборе входных данных и на текущих наборах входных данных.

### 2.3. Поиск магистрального решения

Рассматриваемая математическая модель региона (1)–(6) допускает при некоторых идеализирующих допущениях применение специального высокоэффективного метода поиска магистральных решений [9], который состоит в следующем.

Из рассматриваемой системы (1)–(6) исключаются дифференциальные уравнения относительно  $k^z$ ,  $k^d$  и  $\theta$ . Управления  $u$ ,  $z$  считаются неограниченными,  $u^d = 0$ ,  $d = 0$ ,  $C(\theta) = const = C(\theta(t_I))$ ,  $A(\theta) = const = A(\theta(t_I))$ ,  $B^z = 0$ ,  $D = 0$ ,  $D^z = 0$ . Ищется решение задачи оптимального управления следующего вида:

$$(8) \quad \begin{aligned} \dot{k} &= u - [\delta]k, \quad t \in [t_I, t_F], \\ \dot{r} &= N(r - \bar{r}) - Cy + C^z z + im^r - ex^r, \\ \dot{\Pi} &= \left( (1-l)p^T((E-A)y - Bu - A^z z) - l(r - \bar{r})^2 \right) e^{-\rho t}, \\ k(t_I) &= k_I, \quad k(t_F) = k_F, \quad r(t_I) = r_I, \quad \Pi(t_I) = 0, \\ &-\Pi(t_F) \rightarrow \min. \end{aligned}$$

Применяется специальный метод преобразования к производной системе (сингулярной релаксации) [4], который, вкратце состоит в следующем. Записывается вспомогательная система

$$\begin{aligned} \frac{\partial k}{\partial \tau_1} &= E, \quad \frac{\partial r}{\partial \tau_1} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \tau_1} = -(1-l)e^{-\rho t} p^T B, \\ \frac{\partial k}{\partial \tau_2} &= 0, \quad \frac{\partial r}{\partial \tau_2} = C^z, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \tau_2} = -(1-l)e^{-\rho t} p^T A^z, \end{aligned}$$

где  $\tau_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$ ,  $\tau_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$ , и находится ее интергал (скалярный)

$$(9) \quad I(t) = \Pi(t) + \tilde{p}^T(t) B k(t) + \tilde{p}^T(t) A^z (C^z)^{-1} r(t),$$



где  $\tilde{p}(t) = (1 - l)e^{-\rho t}p$ . Заметим, что  $\dot{\tilde{p}}(t) = -\rho\tilde{p}(t)$ . Далее записывается полная производная (9) в силу системы (8)

$$\begin{aligned} \dot{I}(t) &= \dot{\Pi}(t) - \rho\tilde{p}^T(t)Bk(t) + \tilde{p}^T(t)B\dot{k}(t) - \\ &- \rho\tilde{p}^T(t)A^z(C^z)^{-1}r(t) + \tilde{p}^T(t)A^z(C^z)^{-1}\dot{r}(t) = \\ &= \tilde{p}^T(t)(E - A - A^z(C^z)^{-1}C)y(t) - \\ &- \tilde{p}^T(t)B(\rho E + [\delta])k(t) - \\ &- le^{\rho t}(r(t) - \bar{r})^2 + \tilde{p}^T(t)A^z(C^z)^{-1}(N - \rho E)r(t) + \xi(t), \end{aligned}$$

где  $\xi(t)$  — функция только от  $t$ .

В результате максимизации полученного выражения при каждом  $t \in [t_I, t_F]$  по переменным  $y, k, r$  в области

$$\begin{aligned} r_{min} \leq r(t) \leq r_{max}, \quad k_{low}(t) \leq k(t) \leq k_{up}(t), \\ y_{min} \leq y(t) \leq [\beta]k(t), \end{aligned}$$

где  $k_{low}(t) = k_I e^{-[\delta]t}$ ,  $k_{up}(t) = k_F e^{[\delta](t_F - t)}$  — решения уравнения  $\dot{k} = -[\delta]k$  при условиях  $k(t_I) = k_I$ ,  $k(t_F) = k_F$  соответственно, получается тройка функций  $\hat{y}(t)$ ,  $\hat{k}(t)$ ,  $\hat{r}(t)$ , называемая магистралью. Ее комбинация с заданными граничными точками, как правило, разрывна. Предлагается аппроксимировать магистральное решение в окрестности разрывов линейными функциями с заданными коэффициентами наклона следующим образом.

1. Максимизация по  $k$ .

а) если  $\{-p^T B(\rho E + [\delta])\}_i > 0$ , то

$$\hat{k}_i(t) = \begin{cases} \lambda(t; t_0, t_0 + s, k_i(t_0), k_{up\ i}(t_0 + s)), & t \in [t_0, t_0 + s), \\ k_{up\ i}(t), & t \in [t_0 + s, t_F], \end{cases}$$

где  $\lambda(t; \tau_0, \tau_1, x_0, x_1)$  — прямая, проходящая через точки  $(\tau_0, x_0)$ ,  $(\tau_1, x_1)$  (выход на магистраль).

б) если  $\{-p^T B(\rho E + [\delta])\}_i < 0$ , то

$$\hat{k}_i(t) = \begin{cases} k_{low\ i}(t), & t \in [t_0, t_F - s), \\ \lambda(t; t_F, t_F - s, k_i(t_F), k_{low\ i}(t_F - s)), & t \in [t_F - s, t_F]. \end{cases}$$

в) если  $\{-p^T B(\rho E + [\delta])\}_i = 0$ , то

$$\hat{k}_i(t) = \lambda(t; t_0, t_F, k_i(t_0), k_i(t_F)), \quad t \in [t_0, t_F].$$

2. Максимизация по  $y$ .

Если справедливо  $\{p^T (E - A - A^z(C^z)^{-1}C)\}_i \geq 0$ , то

$$\hat{y}_i(t) = \left\{ [\beta] \hat{k}(t) \right\}_i; \text{ иначе } \hat{y}_i(t) = 0.$$

3. Максимизация по  $r$ .

Расчет вспомогательных величин  $r^*$  и  $\tilde{r}$ :

$$r^* = \bar{r} + \frac{1-l}{2l} (p^T A^z (C^z)^{-1} (N - \rho E))^T,$$

$$\tilde{r} = \begin{cases} r^*_{i}, & \text{если } l \neq 0, r^*_{i} \in [r_{\min i}, r_{\max i}], \\ r_{\min i}, & \text{если } l \neq 0, r^*_{i} < r_{\min i}, \\ & \text{или } l = 0, \{p^T A^z (C^z)^{-1} (N - \rho E)\}_i < 0, \\ r_{\max i}, & \text{если } l \neq 0, r^*_{i} > r_{\max i}, \\ & \text{или } l = 0, \{p^T A^z (C^z)^{-1} (N - \rho E)\}_i > 0; \end{cases}$$

$$\hat{r}_i(t) = \begin{cases} r_i(t_0), & \text{если } l = 0, \{p^T A^z (C^z)^{-1} (N - \rho E)\}_i = 0, \\ \begin{cases} \lambda(t; t_0, t_0 + s, r_i(t_0), \tilde{r}), & t \in [t_0, t_0 + s), \\ \tilde{r}, & t \in [t_0 + s, t_F], \end{cases} & \text{иначе.} \end{cases}$$

Далее, из уравнений (8)  $\dot{k} = u - [\delta]k$  находим  $\hat{u} = \dot{\hat{k}} + [\delta]\hat{k}$ . Из уравнений (8)  $\dot{r} = N(r - \bar{r}) - Cy + C^z z + im^r - ex^r$  находим  $\hat{z} = (C^z)^{-1} (\dot{\hat{r}} - N(\hat{r} - \bar{r}) + C\hat{y} - im^z + ex^z)$ . Используя ограничения (4)  $0 \leq z \leq [\beta^z]k^z$  и условия  $k^z(t_I) = k_I^z, k^z(t_F) = k_F^z$  (если они заданы), полагаем  $\hat{k}_i^z = \frac{1}{\beta_i^z} \hat{z}_i$ . Если это необходимо, то аппроксимируем решение в окрестности разрывов линейными функциями с заданными коэффициентами наклона:

$$\hat{k}_i^z(t) = \begin{cases} \lambda(t; t_0, t_0 + s, k_i^z(t_0), \frac{1}{\beta_i^z} \hat{z}_i(t_0 + s)), & t \in [t_0, t_0 + s), \\ \frac{1}{\beta_i^z} \hat{z}_i(t), & t \in [t_0 + s, t_F - s), \\ \lambda(t; t_F, t_F - s, k_i^z(t_F), \frac{1}{\beta_i^z} \hat{z}_i(t_F - s)), & t \in [t_F - s, t_F]. \end{cases}$$

Далее из уравнений (3) находим  $\hat{u}^z = \dot{\hat{k}}^z + [\delta^z]\hat{k}^z$ .

Найденную аппроксимацию магистрального управления составят функции  $\hat{y}(t), \hat{z}(t), \hat{u}(t), \hat{u}^z(t), u^d(t) = 0, d(t) = 0$ , которые

можно использовать в качестве начального приближения в ниже-описанной итерационной процедуре улучшения управления.

Поиск магистрального решения предполагает задание входных величин:  $n_1, n_2, t_I, t_F, h, k(t_I), k^z(t_I), k^d(t_I), r(t_I), \theta(t_I), \Pi(t_I), \delta, \delta^z, \delta^d, \bar{r}, im^r, ex^r, p, \bar{\theta}, \rho, l, N, H_{inv}, H_{dif}, C^z, D, D^z, A^z, A^d, B, B^z, B^d, r_{\min}, r_{\max}, \beta, \beta^z, \beta^d, y_{\min}$ , и, возможно, некоторых из величин  $k(t_F), k^z(t_F), r(t_F)$ . В случае, когда все величины  $k(t_F)$  заданы, алгоритм поиска магистрального решения последователен. В случае, когда некоторые из величин  $k(t_F)$  не заданы, алгоритм поиска магистрального решения должен выполняться на некотором количестве принудительно заданных вариантов недостающих исходных величин, что порождает параллельные вычисления.

#### 2.4. Последовательное улучшение управления

Задача улучшения управления ставится следующим образом: имеется начальное решение задачи оптимального управления (7) — допустимый элемент  $m^I = (x^I(t), u^I(t))$ , требуется найти допустимый элемент  $m^{II} = (x^{II}(t), u^{II}(t))$ , такой, что  $F(x^{II}(t_F)) < F(x^I(t_F))$ .

Метод улучшения первого порядка в случае, когда  $F = F_0$  (т.е. ограничения не учтены с помощью штрафных добавок в минимизируемом функционале), выражается формулами

$$\begin{aligned} u^{II}(t) &= u^I(t) + \frac{1}{h\alpha} f_u^T(t, x^I(t), u^I(t)) \psi(t+h), \\ \psi(t) &= f_x^T(t, x^I(t), u^I(t)) \psi(t+h), \quad t = t_f - h, \dots, t_I, \\ \psi(t_F) &= (0, \dots, 0, 1 - \alpha)^T, \end{aligned}$$

где  $\alpha \in (0, 1]$  — параметр метода. Для исследуемой модели (1)–(6) сложность заключается в процедуре выбора весовых коэффициентов при добавлении штрафных добавок в минимизируемый функционал и в нахождении матриц частных производных  $f_u$  и  $f_x$  в силу нелинейности исходной модели (1)–(6). Для преодоления первой сложности в ПК *ISCON* была предложена достаточно универсальная процедура выбора весовых коэффициентов при добавлении штрафных добавок на каждой итерации алгорит-

ма улучшения [5, 6, 7]. Матрицы же частных производных были вычислены аналитически.

Алгоритм улучшения управления предполагает задание входных величин:  $n_1, n_2, t_I, t_F, h, k(t_I), k^z(t_I), k^d(t_I), r(t_I), \theta(t_I), \Pi(t_I), \delta, \delta^z, \delta^d, \bar{r}, im^r, ex^r, p, \bar{\theta}, \rho, l, N, H_{inv}, H_{dif}, C^z, D, D^z, A^z, A^d, B, B^z, B^d, r_{min}, r_{max}, \beta, \beta^z, \beta^d, y_{min}$ , и начальных управлений  $y, z, d, u, u^z, u^d$  в моменты времени  $t_I, \dots, t_F - h$ . В области изменения параметра метода улучшения  $\alpha$  выбирается равномерно несколько значений, и параллельно для каждого значения параметра проводятся итерации улучшения начального управления.

Одним из важнейших условий эффективности итерационного улучшения является удачный выбор начального приближения, т. е. успешное выполнение расчетов типа 2.

### 3. Тестовые расчеты

Были проведены расчеты для двух условных регионов с основными исходными данными, соответствующими Переславскому региону [5] и Байкальскому региону [3]. Реальных данных в настоящее время далеко не достаточно для формирования полных наборов, необходимых для практических содержательных расчетов. Это самостоятельный сложный комплекс междисциплинарных эмпирических исследований, связанных с моделированием конкретных регионов и организованных также на основе концептуальной модели. Представление об этом дают соответствующие разделы монографий [3, 5]. Для проведения тестовых расчетов реальные данные были дополнены значительным количеством условных. В качестве параметров, подлежащих инновационным изменениям, были выбраны коэффициенты матриц прямых производственных затрат  $A$  прямых воздействий отраслей экономики на компоненты природы и социума  $C$ . С учетом возможностей высокопроизводительных параллельных вычислений агрегирование в инновационном блоке не производилось.

Для непрерывной модели региона типа «Переславский» соответствующий набор данных представлен в таблице 1. Экономический

мика здесь представлена тремя агрегированными отраслями, состояние природно-социального блока характеризуется четырьмя индексами:  $r^1$  – приведенный запас природных ресурсов;  $r^2$  – качество природной среды;  $r^3$  – численность населения;  $r^4$  – индекс социального развития. Вектор инновационных индексов составляют 9 коэффициентов матрицы  $A$  и 12 коэффициентов матрицы  $C$ . Общая размерность вектора состояния составляет 54, вектора управлений – 56.

На этих данных было проведено три типа расчетов (1, 3, 4). Вначале находилось магистральное решение (расчет типа 3), затем оно модифицировалось в начальное приближение для управлений и рассчитывался соответствующий сценарий (расчет типа 1), далее запускался итерационный процесс улучшения (расчет типа 4). Результаты расчетов представлены на рис. 1–5. Значения экономических переменных отнесены к начальным значениям, а природно-социальных – к опорным (невозмущенным). Они демонстрируют качественный характер оптимальной стратегии устойчивого развития региона, несмотря на условность исходных данных. А именно, природно-социальные индексы остаются в заданных границах. При этом 1-я и 2-я отрасли оказываются нерентабельными с учетом затрат на восстановление природной и социальной среды, и их выпуски остаются на нижней границе, определенной из условий занятости. Третья отрасль становится рентабельной на 15-м году в результате инновационных процессов, и ее выпуск переключается на максимальный. Хотя в целом экономика остается нерентабельной, но тенденция накопления регионального дохода сменяется с отрицательной на положительную.

Для условного региона типа «Байкальский» были проведены расчеты типа 2 по моделированию неопределенностей. А именно, исследовались изменения целевого функционала в процентах при изменении коэффициентов матриц  $A$  и  $C$  также в процентах (т. е. в терминах логарифмических производных). Базовый набор данных был сформирован исходя из информации, предоставленной специалистами Иркутского и Бурятского науч-

Таблица 1.

$k(0)$	211 251 37,3
$k^z(0)$	4 12 0,15 8,5
$k^d(0)$	1 2 1 1 2 1 1 2 1 1 1 2 1 2 1 1 1 1 2 2
$r(0)$	5755 0,8 69,5 0,44
$r_{min}$	5000 0,3 60 0,4
$r_{max}$	6000 1,3 120 0,8
$\bar{r}$	6000 0,7 100 0,5
$p$	1 1 1
$\delta$	0,06 0,06 0,07
$\delta^z$	0,07 0,09 0,06 0,11
$\delta^d$	0,06 ... 0,06
$y_{min}$	42,2 43,925 9,325
$\beta$	0,4 0,35 0,5
$\beta^z$	3,7 0,019 0,03 0,0026
$\beta^d$	0,003 ... 0,003
$im^r, ex^r, \rho, l, D, D^z, H_{dif}, N$	нулевые
$C^z$ (diag)	1 1 1 1
$H_{inv}$ (diag)	0,01 ... 0,01
$A$	0,08 0,001 $1e - 05$ 0,5 0,4 0,35 0,001 0,006 0,06
$B$	0 0 0 0,45 0,65 0,4 0 0 0
$A^z$	0,2 80 3 200 0,4 90 40 1000 0 0,6 20 3000
$B^z$	0 0 0 0 0,3 0,35 0,2 0,15 0 0 0 0
$C$	0 0,011 0 0,0018 0,002 0,0011 0,0001 0,0005 0,0003 0,0002 0,0001 0,0003

ных центров СО РАН. Экономика при этом описывалась наиболее детально как совокупность 38 отраслей, а природно-социальный блок — посредством 8-ми агрегированных индексов. Полные размерности динамической системы (7), соответствующей построенной социо-эколого-экономической модели (1)–(6), составили  $n = 3551$ ,  $p = 3588$ , т. е. получившаяся конкретная модель описывает динамику 3551 величины под действием 3588 управляющих воздействий.

Таблица данных и детальные результаты расчетов здесь не приводятся из-за громоздкости. В целом выявлена резкая дифференциация чувствительностей, что позволит в дальнейшем радикально уменьшить размерность наиболее громоздкого инновационного блока и тем самым всей конкретной модели в более сложных расчетах.

Проводились вычислительные эксперименты по исследованию эффективности параллельной версии программ анализа чувствительности и улучшения управления на суперкомпьютере СКИФ МГУ «Чебышёв». Полученные данные представлены в таблицах 2 и 3.

*Таблица 2. Эффективность параллельной версии программы анализа чувствительности*

Число процессоров (ядер)	Время работы программы, с (мин)	Ускорение
8	3466 (58)	6,232
19	1483 (25)	14,565
38	785 (13)	27,516
64	520 (9)	41,538

Аналогичные эксперименты проводились с параллельными версиями программ оптимизации на суперкомпьютере СКИФ «Первенец-М», расположенном в ИПС РАН. Полученные данные представлены в таблице 4.

Таблица 3. Эффективность параллельной программы улучшения управления

Число процессоров (ядер)	Время работы программы, с (мин)	Ускорение
1	703 (12)	1
2	394 (7)	1,78
4	230 (4)	3,06
9	202 (3)	3,48

Таблица 4. Эффективности параллельных программ оптимизации

Число процессоров (ядер)	Время работы программы, с (мин)	Ускорение
Поиск магистрального решения		
1	603 (10)	1
4	173 (3)	3,49
8	105 (2)	5,74
16	89 (1)	6,78
Поиск магистрального решения с последующим расчетом динамики		
1	2275 (38)	1
4	622 (10)	3,66
8	351 (6)	6,48
16	288 (5)	7,90



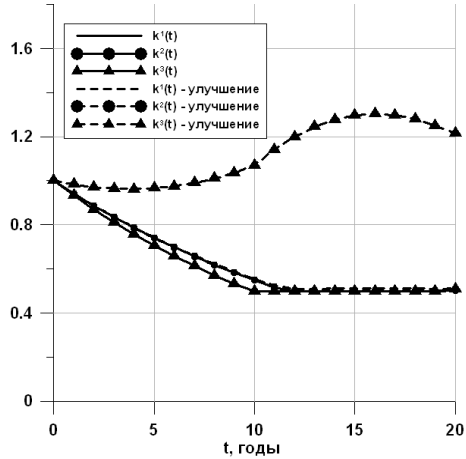


Рис. 1.

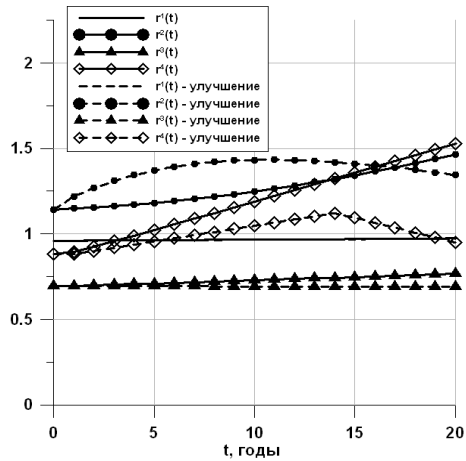


Рис. 2.

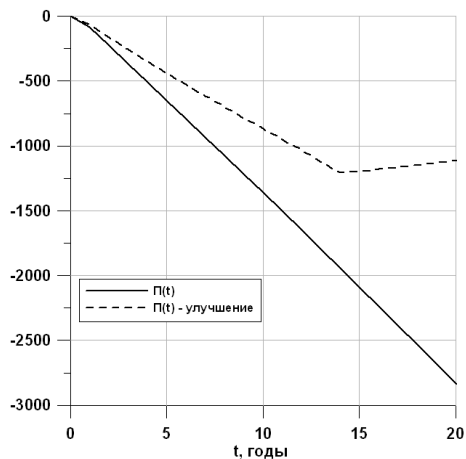


Рис. 3.

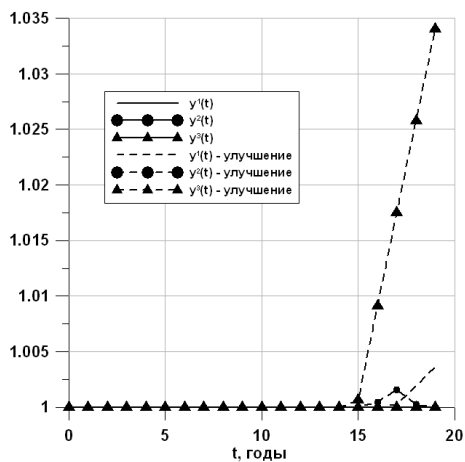


Рис. 4.

#### 4. Заключение

В целом на основании проведенных исследований можно заключить, что применение суперкомпьютеров кластерного типа

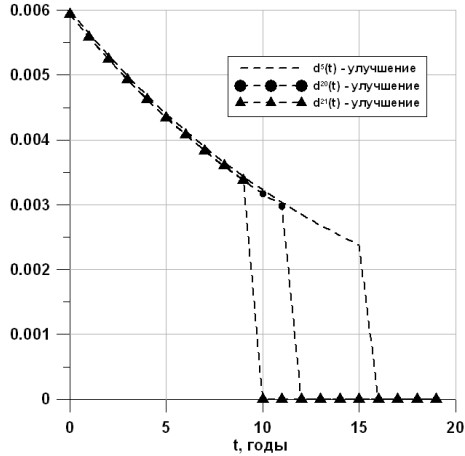


Рис. 5.

для реализации описанной концепции модели региона открывает новые перспективы ее эффективного использования, немислимые ранее при использовании обычных компьютеров с последовательным исполнением программ из-за большой размерности практически значимых версий модели и сложной системы данных. В особенности это относится к инновационным процессам, учет которых в модели без искусственного агрегирования приводит к драматическому росту ее размерности и числа параметров, требующих идентификации.

С другой стороны, задачи, связанные с моделью, как многовариантные, естественным образом приспособлены для параллельных вычислений на кластерах и не требуют сложных процедур распараллеливания. При определенной организации многовариантных вычислительных экспериментов и трактовке их результатов они становятся инструментом не только трудоемких количественных оценок, но и качественного анализа, позволяя выделить ведущие факторы, переменные и параметры, на которых требуется сосредоточиться при последующих эмпирических исследованиях.

Следует отметить как недостаток невысокую эффективность в данном случае градиентного метода улучшения управления. Это связано с тем, что результирующие управления (например,  $y^3(t)$ ) меняются скачкообразно в то время как на начальном приближении они достаточно плавные. Скачки же реализуются медленно в течение многих итераций. В перспективе планируется применить глобальный метод Кротова [12], который в настоящее время реализуется в составе ПК *ISCON*.

### Литература

1. АБРАМОВ С. М., ЕСИН Г. И., ЗАГОРОВСКИЙ И. М., МАТВЕЕВ Г. А., РОГАНОВ В. А. *Принципы организации отказоустойчивых параллельных вычислений для решения вычислительных задач и задач управления в T-Системе с открытой архитектурой (OpenTS)* // Труды Межд. конф. «Программные системы: теория и приложения», Переславль-Залесский, октябрь 2006. – М.: Наука, Физматлит. – Т. 1. – С. 257–264.
2. АБРАМОВ С. М., ЗАГОРОВСКИЙ И. М., КОВАЛЕНКО М. Р., МАТВЕЕВ Г. А., РОГАНОВ В. А. *Миграция от MPI к платформе OpenTS: эксперимент с приложениями PovRay и ALCMD* // Труды Межд. конф. «Программные системы: теория и приложения», Переславль-Залесский, октябрь 2006. – М.: Наука, Физматлит. – Т. 1. – С. 265–275.
3. БЛИНОВ А. О., ГУРМАН В. И., ТРУШКОВА Е. А., ФРАЛЕНКО В. П. *Программный комплекс оптимизации закон оуправления* // Программные продукты и системы. – 2009. – №2. – С. 95–100.
4. ГУРМАН В. И. *Принцип расширения в задачах управления*. – М.: Наука, Физматлит, 1997.
5. ГУРМАН В. И., ТРУШКОВА Е. А. *Приближенные методы оптимизации управляемых процессов* // Эл. науч. журнал Института программных систем имени А. К. Айламазяна РАН «Программные системы: теория и приложения». – 2010. – Т. 1, №4.

6. ГУРМАН В. И., ТРУШКОВА Е. А., УХИН М. Ю. *Улучшение управления, реализующего скользящий режим* // Автоматика и телемеханика. – 2008. – №3. – С. 161–171.
7. КОВАЛЕНКО М. Р., МАТВЕЕВ Г. А., ОСИПОВ В. И., ТРУШКОВА Е. А. *Параллельный алгоритм улучшения управления* // Труды IV межд. конф. «Параллельные вычисления и задачи управления» (РАСО'2008), Москва, 27-29 октября 2008 г., ИПУ им. В.А.Трапезникова РАН. – ISBN 978-5-91450-016-7.
8. *Модели управления природными ресурсами* / Под ред. В. И. Гурмана – М.: Наука, 1981.
9. *Моделирование социо-эколого-экономической системы региона* // Под ред. В. И. Гурмана, Е. В. Рюминой. – М.: Наука, 2001.
10. *Организация Объединенных Наций: основные факты.* – М.: Издательство «Весь Мир», 2005.
11. *Эколого-экономическая стратегия развития региона: Математическое моделирование и системный анализ на примере Байкальского региона.* – Новосибирск: Наука, 1990.
12. ЭРРОУ К. *Применение теории управления к экономическому росту* // В кн.: Математическая экономика. – М.: Мир, 1974.

## **SOCIO-ECOLOGICAL-ECONOMIC REGION MODEL IN PARALLEL COMPUTING**

**Vladimir Gurman**, Institute of Programm Systems of RAS,  
Pereslavl, Doct.Sc., professor (vladimir@gurman.botik.ru).

**German Matveev**, Institute of Programm Systems of RAS,  
Pereslavl, (gera@prime.botik.ru).

**Ekaterina Trushkova**, Institute of Programm Systems of RAS,  
Pereslavl, Cand.Sc., (katerina@trushkova.pereslavl.ru).

*Abstract: A general procedure of the approximate optimal control synthesis for socio-ecological-economic model of the region is developed. A set of programs DSEEmodel 1.0, which implements at the cluster computing devices parallel algorithms for scenario calculations, optimization and improvement of an approximate optimal control for socio-ecological-economic model to conduct multi-variant calculations relating to the development of strategies for sustainable development in the region is created. In general, this is a new approach to the problem of situational control of the region by using supercomputers to implement full-scale socio-ecological-economic model.*

**Keywords:** socio-ecologo-economic model, optimal control, parallel algorithms, dynamic parallel programs, T-system.

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии В. В. Кульбой*

УДК 330.354:316.34

ББК 65.012.1:60.56

## УПРАВЛЕНИЕ СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКОЙ АСИММЕТРИЕЙ РЕГИОНОВ КАК ФАКТОР ЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА<sup>1</sup>

Жуланов Е.Е.<sup>2</sup>

(ГОУ ВПО «Пермский государственный технический университет», Пермь)

*Предложен механизм управления социально-экономической асимметрией регионов РФ в целях создания условий для развития конкуренции и обеспечения на этой основе экономического роста страны. Данный механизм основан на применении микро-математического аппарата линейного программирования, благодаря которому становится возможным оценивать наиболее рациональное распределение ресурсов в экономике. Для снижения асимметрии и повышения эффективности функционирования экономики предлагается дифференциация налоговых ставок, учитывающая диспропорции в социально-экономическом развитии регионов РФ и в их ресурсном оснащении.*

Ключевые слова: экономический рост, региональная экономика, моделирование, методика, отраслевой рынок.

Как известно, в рыночной экономике основным движущим фактором развития является конкуренция. Именно ее активность воздействует на конъюнктуру товарных рынков, что, выражается в изменении рыночных цен и объемов продаж. Как следствие, скорость темпов роста расширенного воспроизводства

---

<sup>1</sup> Статья подготовлена при финансовой поддержке РГНФ в рамках научно-исследовательского проекта РГНФ («Иерархическое взаимодействие властных и рыночных структур как основа экономического роста»), проект №10-02-82206А/у.

<sup>2</sup> Евгений Евгеньевич Жуланов, кандидат экономических наук, заведующий кафедрой экономики и организации промышленного производства, доцент (zeepsti@yandex.ru).

ва в регионах тоже будет меняться. От этого непосредственно зависит национальный экономический рост, под которым понимается увеличение количества благ производимых в национальной экономике.

В соответствии со сложившимися положениями экономической теории об оптимальном использовании ресурсов, конкурентное равновесие на отраслевых рынках обеспечивает:

1. Эффективность по Парето в распределении благ, т.е. невозможность перераспределения благ таким образом, чтобы улучшилось благосостояние хотя бы одного потребителя без уменьшения благосостояния других.

2. Эффективность по Парето в производстве, т.е. невозможность увеличения производства одного или нескольких товаров без сокращения производства других.

3. Эффективность по Парето в структуре выпуска продукции, т.е. формируется такая комбинация благ, при которой невозможно увеличить благосостояние хотя бы одного индивида без уменьшения благосостояния других.

Исходя из данных определений оптимального состояния экономики, для определения наибольшего экономического роста в Российской Федерации может быть использована оптимизационная задача линейного программирования.

Каждому Парето-эффективному распределению благ и ресурсов соответствует система цен, которая обеспечивает общее равновесие. При этом положение одних субъектов хозяйствования улучшается не за счет положения других, а только за счет повышения эффективности распределения благ и ресурсов. Обеспечивает желаемую максимизацию благосостояния общества и производственных возможностей конкурентный рыночный механизм. Чтобы достигнуть наилучшего благосостояния и результата в распределении благ, необходимо перераспределение доходов [3].

Руководствуясь вышеуказанными принципами Парето-эффективности, для определения наилучшего способа использования производственных возможностей страны может быть применен экономико-математический аппарат линейного программирования.



Целевая функция при этом будет направлена на максимизацию полезности потребителей, выраженную в денежных единицах или в ценности благ, определяемой на основе их полезности через соотношение спроса и предложения на товарных рынках:

$$(1) \quad Z = \sum_{g=1}^G u_g \rightarrow \max,$$

где  $G$  – количество доходных групп потребителей;  $g$  – доходная группа потребителей, объединяющая в себе лиц с приблизительно равным доходом;  $u_g$  – полезность  $g$ -й группы потребителей в денежном выражении.

Зная уровень оплаты труда доходных групп и среднюю склонность к потреблению, можно на основе модели линейного программирования определить такую комбинацию выпуска разных товаров, при которой полезность населения была бы максимально удовлетворена при текущих рыночных условиях.

Между тем, как общеизвестно, достижение Парето-эффективности в экономике и максимальной полезности потребителей возможно лишь при определении индивидуальных полезностей каждого потребителя. Однако в условиях фактической рыночной деятельности хозяйствующих субъектов возможность установления рыночных цен на индивидуальном уровне для каждого потребителя не представляется возможным, поскольку это запрещено антимонопольным законодательством. Исходя из этого, судить о полезности товаров для потребителя можно только на основе данных о его готовности оплачивать потребляемый товар и о структуре его потребительской корзины. О готовности свидетельствуют совершаемые им покупки. При определении состава потребительской корзины следует учитывать, что в ее состав входят виды товаров, для которых устанавливаются одни и те же цены во избежание ценовой дискриминации. Следовательно, в зависимости от размера получаемого дохода и средней склонности к потреблению можно определить состав товаров, входящих в потребительскую корзину потребительских групп с приблизительно равными доходами. При этом чем больше будет количество потребительских групп, тем точнее будет определена полезность, получаемая обществом от потребления товаров.

В связи с этим, принимая во внимание то, что полезность можно интерпретировать в денежном эквиваленте, т.е. в размере потребительских расходов, состоящих из платежей за потребительские товары, целевая функция (1) будет выражена через объемы продаж данных товаров и их цены:

$$(2) \quad Z = \sum_{j=1}^m p_j \cdot e_j \cdot t_j \rightarrow \max,$$

где  $p_j$  – средняя цена  $j$ -го товара;  $e_j$  – изменение цены на товар  $j$ -го рынка под влиянием конкурентного давления и внедрения инноваций;  $t_j$  – количество конечного потребительского товара  $j$ -го вида;  $m$  – количество потребительских товаров.

Для выделения однородных товаров, образующих товарный рынок, необходимо воспользоваться группировкой товарных групп в соответствии с кодом ОКВЭД (общероссийский классификатор видов экономической деятельности).

Систему ограничений можно представить в виде:

$$(3) \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^m p_{gj} \cdot e_j \cdot t_j = w_g \cdot c \cdot q_g, & g = 1, \dots, G, \\ t_j \geq 0; \end{cases}$$

где  $w_g$  – средний уровень заработной платы в доходной группе  $g$ ;  $q_g$  – количество человек в доходной группе  $g$ ;  $c$  – средняя склонность к потреблению в отчетном периоде;  $p_{gj}$  – цена  $j$ -го товара для  $g$ -й потребительской группы (сегмента рынка с определенным уровнем доходов).

В системе ограничений (3) представлены знаки равенства, исходя из предпосылки о полном использовании потребителями части своих доходов предназначенной для потребительских расходов.

Неравенства системы ограничений расположены в последовательности возрастания стоимости товаров, производимых предприятиями отраслевых рынков по критерию удовлетворения более дорогостоящих потребностей потребителей вдоль иерархии потребления. Это означает, что левая часть каждого последующего неравенства содержит нормы расхода капитала

на производство только тех товаров, которые входят в потребительскую корзину данной доходной группы.

Значения множителей  $\varepsilon_j$  по каждому рынку может быть определено при помощи индекса цен Пааше [4, с. 536].

$$(4) \quad e_j = \frac{\sum_{r=1}^R P_{jr}^2 \cdot q_{jr}^2}{\sum_{r=1}^R P_{jr}^1 \cdot q_{jr}^2},$$

где  $P_{jr}^1$  и  $P_{jr}^2$  – цена товара  $j$ -го отраслевого рынка в  $r$ -м регионе на начало и на конец предшествующего периода;  $q_{jr}^2$  – объем продаж товара  $j$ -го отраслевого рынка в  $r$ -м регионе на конец предшествующего периода;  $R$  – количество регионов.

Уменьшение значения показателей  $\varepsilon_j$  характеризует падение цен на отраслевых рынках в результате развития конкуренции, что в свою очередь свидетельствует о приближении региональных рыночных структур к конкурентным, а также о расширении географических границ рынков и о росте эффективности их функционирования.

Таким образом, применение теоретического подхода к определению Парето-эффективности в распределении благ позволяет найти при помощи предлагаемой модели оптимальный план распределения расходов домохозяйств между потребительскими товарами при сложившихся рыночных условиях. На следующем этапе, в соответствии с теоретическим подходом к определению Парето-эффективности в производстве и в структуре выпуска, следует найти оптимальный план производства в национальной экономике при сложившихся рыночных условиях. Для этого также может быть использована модель линейного программирования. При ее построении следует исходить из того, что производство промежуточных товаров или ресурсов непосредственно зависит от запросов фирм – производителей конечных товаров, реализующих их на потребительских рынках.

Целевая функция при определении оптимального плана производства промежуточных товаров может быть направлена на минимизацию издержек производства  $i$ -х промежуточных товаров:

$$(5) \quad Z = \sum_{i=1}^m AC_i \cdot t_i \rightarrow \min.$$

где  $AC_i$  – средние издержки производства  $i$ -го промежуточного товара;  $t_i$  – количество промежуточного товара  $i$ -го вида.

Система ограничений может быть представлена в следующем виде:

$$(6) \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^m k_{ji} \cdot e_i \cdot t_i \leq K_j, \quad j = 1, \dots, m-1, \\ \sum_{i=1}^m l_i \cdot a_i \cdot t_i \leq L, \\ t_i \geq 0; \end{cases}$$

где  $k_{ji}$  – норма расхода капитала на покупку  $i$ -го промежуточного товара или основных средств для производства единицы конечного потребительского товара  $j$ -го вида;  $l_i$  – норма расхода труда на производство единицы промежуточного товара  $i$ -го вида;  $a_i$  – индекс роста производительности труда на  $i$ -м рынке;  $K_j$  – сумма капитальных вложений фирм-производителей  $j$ -го товара в приобретение  $i$ -х производственных ресурсов: промежуточных товаров или основных средств.

Множитель  $e_i$  – характеризует изменение цены на промежуточный товар (ресурс)  $i$ -го рынка под влиянием конкурентного давления и внедрения инноваций. Его значение определяется по формуле

$$(7) \quad e_i = \frac{\sum_{r=1}^R k_{ir}^2 \cdot q_{ir}^2}{\sum_{r=1}^R k_{ir}^1 \cdot q_{ir}^2},$$

где  $k_{ir}^1$  и  $k_{ir}^2$  – средняя цена промежуточного товара  $i$ -го отраслевого рынка в  $r$ -м регионе на начало и на конец предшествующего периода;  $q_{ir}^2$  – объем продаж промежуточного товара  $i$ -го отраслевого рынка в  $r$ -м регионе на конец предшествующего периода.

Уменьшение значения показателей  $e_i$ , так же как и  $e_j$ , характеризует падение цен на отраслевых рынках промежуточных товаров.

Аналогичным образом может быть рассчитан индекс роста производительности труда  $a_i$ . Однако для соблюдения адекват-

ности модели распределения ресурсов в экономике формулу Пааше необходимо преобразовать следующим образом:

$$(8) \quad a_i = \frac{\sum_{r=1}^R t_{ir}^1 \cdot l_{ir}^2}{\sum_{r=1}^R t_{ir}^2 \cdot l_{ir}^2},$$

где  $t_{ir}^1$  и  $t_{ir}^2$  – выработка  $i$ -го промежуточного товара на единицу трудового ресурса в  $r$ -м регионе на начало и конец предшествующего периода соответственно;  $l_{ir}^2$  – количество трудового ресурса в  $r$ -м регионе, используемого для производства  $i$ -го товара на конец предшествующего периода.

Величина  $K_j$  определяется на основе полученного оптимального плана производства конечных потребительских товаров по формуле

$$(9) \quad K_j = p_j \cdot e_j \cdot t_j^*,$$

где  $t_j^*$  – количество товара  $j$ -го вида, полученного по оптимальному плану производства конечных товаров.

Данный комплекс моделей позволит определить состояние экономики наиболее близкое к Парето-эффективному в сложившихся рыночных условиях.

В системе ограничений (6), в отличие от традиционных моделей экономического роста [7], представлены не степенные, а линейные нормы расхода капитала (материалов, оборудования), которые предполагают постоянную отдачу от использования ресурса. Связано это с тем, что в данной модели переоценивается изменение состояния рынков (объемы продаж и цены) под давлением конкуренции в конце каждого анализируемого периода, а следовательно, переоцениваются также и нормы потребления каждого ресурса. Переоценка осуществляется при помощи коэффициентов  $\varepsilon_i$  и  $\varepsilon_j$ , встроенных в вышеуказанные модели.

Чтобы определить коэффициенты  $e_j$ , необходимо выделить отраслевые рынки по трем видам рыночных границ: продуктовым, географическим и временным. В условиях совершенной конкуренции ресурсное обеспечение, товары и индивидуальный спрос для каждого продавца одинаковы. Поэтому рыночные границы будут одинаковыми, а следовательно, процессы внедрения инноваций будут происходить с одинаковой интенсив-

ностью. Однако, принимая во внимание фактическую дифференциацию ресурсной базы, климатических условий, численности населения и покупательной способности в регионах, единое рыночное пространство «распадается» на ряд рыночных зон со схожими условиями хозяйственной деятельности. В результате вместо рыночной структуры, по мере возможности приближенной к состоянию совершенной конкуренции, в регионах образуются рыночные структуры в виде олигополии, монополистической конкуренции и монополии. Эффективность функционирования отраслевых рынков и экономики в целом при данных структурах ниже, чем в условиях совершенной конкуренции, поскольку предложение товара меньше, а цены значительно выше, чем при совершенной конкуренции, т.е. образуются «чистые потери» потребителей и производителей от монопольной власти [2, с. 74]. Поэтому для увеличения темпов экономического роста за счет сокращения размера данных потерь необходимо поддержание таких условий, при которых структуры рынков приближались бы к совершенным.

Поскольку основной движущей силой изменения структуры рынка является конкурентная среда, то появляется необходимость в ее развитии за счет управления социально-экономической асимметрией регионов. Это обеспечит сопоставимые экономические условия хозяйственной деятельности, покупательной способности населения и рыночной конъюнктуры в регионах. Как следствие произойдет разрушение региональных рыночных барьеров, благодаря которым и образуются «чистые потери».

В целях управления социально-экономической асимметрией может быть предложен макроэкономический механизм, обеспечивающий выравнивание условий конкуренции на региональных товарных рынках и устранение межрегиональных социально-экономических диспропорций за счет инноваций и инвестиций, стимулируемых конкуренцией.

Для разработки инструментария может быть предложен следующий подход. Как известно, в соответствии с макроэкономической моделью круговых потоков выделяется несколько укрупненных рынков: рынок ресурсов, рынок продуктов, рынок труда, финансовый рынок. В целях проведения макроэкономи-

ческой политики, направленной на обеспечение экономического роста по отношению к каждому рынку государственные исполнительные власти РФ применяют соответствующие налоговые регуляторы, представленные в таблице 1.

Таблица 1. Налоговые регуляторы рыночной деятельности

Рынок	Налог
Ресурсов Продуктов Финансовый	1. Налог на прибыль 2. Налог на имущество организаций 3. Налог на добавленную стоимость
Ресурсов	Налог на добычу полезных ископаемых
Труда	1. Налог на доходы физических лиц 2. Налог на имущество физических лиц

Основываясь на действующих налоговых регуляторах, представленных в таблице 1, можно предложить следующий механизм дифференцирования налоговых ставок в разрезе регионов России в целях управления асимметрией в социально-экономическом их развитии.

В связи с тем, что налоги, связанные с добычей полезных ископаемых, и платежи за загрязнение окружающей среды должны обеспечивать компенсацию ресурсных и экологических потерь, ставки этих налогов и платежей не должны изменяться для целей управления социально-экономической асимметрией.

Поскольку развитие хозяйственной деятельности в регионах зависит прежде всего от инвестиционных потоков, направляемых в экономику, то целесообразно создать условия для притока капитала в депрессивные регионы. Для этого можно использовать дифференциацию налогов на прибыль и имущество организаций.

Дифференцированную ставку налога на прибыль организаций региона ( $N_{i,r,НП}$ ), занятых определенным видом деятельности следует определять по формуле

$$(10) N_{i,r,НП} = \frac{\text{Пр}_{i,r}}{\text{Пр}_{i,6}} \cdot N_{6,НП},$$

где  $\text{Пр}_{i,r}$  – прибыль, полученная предприятиями  $r$ -го региона по  $i$ -му виду деятельности;  $\text{Пр}_{i,6}$  – наибольшая прибыль, получен-

ная организациями в одном из регионов РФ по  $i$ -му виду деятельности;  $N_{б.нпг}$  – базовая ставка налога на прибыль вводимая в РФ.

В соответствии с методикой выделения агрегированных видов деятельности Федеральной службы государственной статистики, к  $i$ -му виду деятельности может относиться: сельское хозяйство, охота и лесное хозяйство; рыболовство, рыбоводство; добыча полезных ископаемых; обрабатывающие производства; производство и распределение электроэнергии, газа, воды; строительство; оптовая и розничная торговля, ремонт автомобилей личного пользования; транспорт и связь; финансовая деятельность; операции с недвижимым имуществом, аренда и предоставление услуг.

Данная формула дифференциации ставки налога на прибыль имеет две важные особенности. С одной стороны, у предпринимателей появляется стимул осуществлять капитальные вложения в экономику менее развитых регионов РФ, так как при этом они уплачивают меньшую сумму налога. С другой стороны, предлагаемая формула учитывает отраслевую дифференциацию прибыльности хозяйственной деятельности, что позволяет более точно учесть влияние межрегиональной асимметрии развития одного и того же вида деятельности.

Дифференцированную ставку налога на имущество организаций региона следует определять по формуле:

$$(11) N_{i,r.ни} = \frac{C_{i,r}}{C_{i,б}} \cdot N_{б.ни},$$

где  $C_{i,r}$  – стоимость активов основных средств, используемых в  $i$ -м виде деятельности в  $r$ -м регионе;  $C_{i,б}$  – наибольшая стоимость активов основных средств в одном из регионов РФ, которые используются в  $i$ -м виде деятельности;  $N_{б.ни}$  – базовая ставка налога на имущество вводимая в РФ.

В целях оценки влияния дифференциации ставок налогов на прибыль и на имущество организаций может быть применен экономико-математический аппарат «транспортной задачи» [6, с. 75]. По каждому из вышеперечисленных видов экономической деятельности должна быть сделана постановка транспорт-



ной задачи и построена исходная таблица с опорным планом, в которой отражаются межрегиональное распределение денежных потоков для целей инвестирования. Для постановки задачи следует задать целевую функцию (3) и систему ограничений (4). Целевая функция направлена на максимум прибыли организаций от инвестирования:

$$(12) Z = \sum_{k=1}^K \sum_{r=1}^R \Delta\Pi_{rk} \cdot \text{ИП}_{rk} \rightarrow \max,$$

где  $\Delta\Pi_{rk}$  – дополнительная прибыль, получаемая организациями  $r$ -го региона от инвестирования в  $i$ -й вид хозяйственной деятельности  $k$ -го региона;  $\text{ИП}_{rk}$  – сумма инвестируемых денежных средств, перечисляемых из  $r$ -го в  $k$ -й регион;  $R$  – количество регионов РФ с избыточным объемом финансовых ресурсов, предназначенных для целей инвестирования;  $K$  – количество регионов РФ, нуждающихся в приросте инвестиций.

Система ограничений при этом будет иметь вид

$$(13) \left\{ \begin{array}{l} \sum_{r=1}^R \text{ИП}_{rk} \leq \Phi P'_r, \quad r = 1, \dots, R, \\ \sum_{k=1}^K \text{ИП}_{rk} \leq \Phi P''_k, \quad k = 1, \dots, K, \\ \text{ИП}_{rk} \geq 0; \end{array} \right.$$

где  $\Phi P'_r$  – сумма денежных средств коммерческих банков регионов, предназначенных для кредитования инвестиционных проектов;  $\Phi P''_k$  – сумма инвестиций, требуемых региональной экономикой по  $i$ -му виду деятельности.

Величина  $\Delta\Pi_{rk}$  определяется как сумма льготы по налогу на имущество организаций и прибыли, получаемой от инвестирования в  $i$ -й вид деятельности  $r$ -го региона, с учетом изменения рентабельности деятельности и льготы по налогу на прибыль. Ее величина определяется по формуле

$$(14) \Delta\Pi_{rk} = ((1 - N_{i.k.\text{НПп}}) \cdot r_{i.k} - (1 - N_{i.r.\text{НПп}}) \cdot r_{i.r}) \cdot \Phi P'_r + (N_{i.r.\text{НПп}} - N_{i.k.\text{НПп}}) \cdot \Phi P'_r,$$

где  $\rho_{i,r}$  и  $\rho_{i,k}$  – рентабельность использования капитала организаций по  $i$ -му виду деятельности в  $r$ -м и  $k$ -м регионе соответственно.

Исходные данные для построения модели оценки межрегионального перераспределения инвестиционных потоков по  $i$ -му виду хозяйственной деятельности на основе «транспортной задачи» заносятся в таблицу 2.

Решение данной задачи позволит спрогнозировать возможное перераспределение инвестиционных потоков между регионами, исходя из рационального поведения хозяйствующих субъектов, направленного на максимизацию получаемой прибыли.

Если дифференциации ставок налогов на имущество юридических лиц и прибыль при помощи формул (10) и (11) будет недостаточно для обеспечения нужных стране инвестиционных потоков, то возможно установление ставок данных налогов методом подбора на основе анализа проводимого по модели оценки межрегионального перераспределения инвестиционных потоков.

Таблица 2. Модель оценки межрегионального перераспределения инвестиционных потоков по  $i$ -му виду хозяйственной деятельности

Регионы с недостатком инвестиций / Регионы с избыточными инвестиционными ресурсами	Субъект РФ №1	Субъект РФ №2	...	Субъект РФ №R	Объем инвестиционных ресурсов регионов (млн. руб.)
Субъект РФ №1	$\Delta\Pi_{11}$ ИП <sub>11</sub>	$\Delta\Pi_{12}$ ИП <sub>12</sub>	...	$\Delta\Pi_{1R}$ ИП <sub>1R</sub>	$\Phi P_1'$
Субъект РФ №2	$\Delta\Pi_{21}$ ИП <sub>21</sub>	$\Delta\Pi_{22}$ ИП <sub>22</sub>	...	$\Delta\Pi_{2R}$ ИП <sub>2R</sub>	$\Phi P_2'$
...	...	...	...	...	...
Субъект РФ №K	$\Delta\Pi_{R1}$ ИП <sub>R1</sub>	$\Delta\Pi_{R2}$ ИП <sub>R2</sub>	...	$\Delta\Pi_{RR}$ ИП <sub>RR</sub>	$\Phi P_R'$
Потребность в финансовых ресурсах региона (млн. руб.)	$\Phi P_1''$	$\Phi P_2''$	...	$\Phi P_K''$	

Непосредственное влияние на объемы рыночного спроса, предложения и тип рыночной структуры может оказать налог на добавленную стоимость (НДС). В целях обеспечения выравнивания условий рыночной деятельности фирм и усиления конкуренции ставку НДС необходимо дифференцировать так, чтобы для региональных территорий выполнялось правило единства географических границ. В соответствии с ним территории образуют единый рынок только в том случае, если располагающиеся на них потребители признают для себя равную доступность товара. То есть разница в ценах не должна составлять более 10% [1, с. 27]. Данная величина определена на основе опроса потребителей и утверждена Приказом антимонопольной службы «Об утверждении порядка проведения анализа состояния конкуренции на товарном рынке» [5]. Исходя из этого министерству социально-экономического развития РФ нужно выделить в разрезе товарных рыночных границ те регионы, которые способны поставлять товар потребителям в другие регионы РФ. Затем следует определить какой должна быть цена на товар региона – «межрегионального экспортера», чтобы его территорию и территорию региона – «межрегионального импортера» можно было отнести к одному товарному рынку.

Поскольку цены в рыночной экономике не могут быть изменены государством в принудительном порядке и в основном обусловлены фактическим уровнем себестоимости продукции, на основе которой, как правило, и формируется цена, то единственным способом выровнять доступность товаров для потребителей представляется изменение ставки налога на добавленную стоимость (НДС). От ее размера непосредственно зависит покупательная способность населения. Поэтому на следующем этапе необходимо определить дифференцированную ставку НДС на товар региона – «межрегионального экспортера» для всех регионов – «межрегиональных импортеров» при помощи формулы расчета размера льготы по налогу на добавленную стоимость:

$$(15) \text{НДС}_j^{\text{рег.эксп}} = C \cdot P_j^{\text{рег.эксп}} - (P_j^{\text{рег.имп}} - P_j^{\text{рег.эксп}} \cdot 1,1),$$

где  $P_j^{\text{рег.эксп}}$  – цена  $j$ -го товара в регионе – «межрегиональном экспортере»;  $P_j^{\text{рег.имп}}$  – цена  $j$ -го товара в регионе – «межрегио-

нальном импортере»; 1,1 – коэффициент, характеризующий предельную ценовую границу, свыше которой территория будет делиться на рынки с разными географическими границами;  $C$  – ставка налога на добавленную стоимость в виде коэф.

Следует заметить, что коэффициент 1,1 введен для целей налогообложения, чтобы минимизировать потери бюджета в связи с дифференциацией налоговой ставки.

Поскольку дифференциация ставки НДС направлена на выравнивание условий деятельности отраслевых региональных рынков, то это позволит расширить их географические границы, в пределах которых окажется большее число участников, и как следствие усилятся конкурентные процессы. В результате этого произойдет изменение: объема спроса, концентрации продавцов и типа рыночной структуры.

На основании сведений регионов РФ о производимых в них товарах министерство социально-экономического развития может собрать необходимые данные обо всех или наиболее значимых для экономики разновидностях товаров, производимых в каждом регионе и представляющих собою промежуточный ресурс для других отраслевых рынков.

Если же цена товара определяется для региона – «межрегионального импортера», в котором нет производства данного товара, то для определения цены поставки следует воспользоваться механизмом предлагаемой двойственной задачи линейного программирования. В целях ее построения следует использовать прямые задачи оптимального распределения потребительских (2, 3) и промежуточных товаров (5, 6). Для рынка потребительских товаров постановка двойственной задачи будет иметь следующий несимметричный вид. Целевая функция задана на минимум потребительских расходов:

$$(16) Z = \sum_{g=1}^G w_g \cdot c \cdot q_g \cdot y_g \rightarrow \min,$$

где  $y_g$  – двойственная оценка, характеризующая значимость потребительских расходов  $g$ -й группы для установления рыночной цены на  $j$ -й конечный товар.

Система ограничений примет следующий вид:

$$(17) \begin{cases} \sum_{g=1}^G d_{jg} \cdot y_g \geq p_j, & j=1, \dots, m, \\ y_g \geq 0; \end{cases}$$

где  $d_{jg}$  – параметр, характеризующий норму потребительских расходов на  $j$ -й товар.

Данная задача является несимметричной, так как в ней используются знаки неравенства  $\geq$ . Это необходимо для определения фактической стоимости производства  $j$ -го потребительского товара в Российской Федерации. Расчет левой части неравенств в системе ограничений (17) позволит установить истинную ценность каждого вида  $j$ -го конечного товара, а также показать, насколько безубыточно его производство в национальной экономике с учетом установленной на него рыночной цены.

Аналогичным образом будет сделана постановка двойственной задачи для рынков промежуточных товаров или производственных ресурсов. Целевая функция будет задана на максимизацию размера используемого капитала ( $K_i$ ) и труда ( $L$ ):

$$(18) Z = \sum_{i=1}^m K_i \cdot y_i + L \cdot y_{m+1} \rightarrow \max,$$

а система ограничений примет вид

$$(19) \begin{cases} \sum_{j=1}^{m-1} d_{ij} \cdot e_i \cdot y_j + d_{mj} \cdot a_i \cdot y_j \geq AC_i, & i=1, \dots, m, \\ y_j \geq 0; \end{cases}$$

где  $d_{ij}$  – параметр, характеризующий норму расхода капитальных вложений или труда на производство  $i$ -ого промежуточного товара.

В результате решения двойственных задач можно получить максимальную цену товаров – ресурсов, использованных в фактическом периоде в Российской Федерации. Иными словами, данная оценка будет представлять собою усредненную стоимость производственных ресурсов в стране при условии равномерного распределения данных ресурсов по ее территории. На основе этой информации будет построена модель межрегионального перераспределения ресурсной базы в национальной экономике.

На основе этой информации будет построена модель межрегионального перераспределения конечных и промежуточных товаров между региональными рынками. При создании данной модели следует выдвинуть несколько предпосылок относительно регионов – «межрегиональных экспортеров». К их числу могут быть отнесены те регионы, которые удовлетворяют следующим требованиям:

1. В регионе должен наблюдаться избыток ресурсов (в том числе трудовых) по сравнению с потребностью регионального производства. Данное требование связано с тем, что в регионе-экспортере не должна тормозиться или приостанавливаться производственная деятельность вследствие образования искусственного дефицита ресурсов. Данный дефицит может наступить из-за продажи ресурсов в соседние регионы с более низким НДС и повышенным спросом, вызванным этим.

2. Цена на ресурс должна быть ниже цен других регионов. В противном случае нет смысла дифференцировать налоговую ставку, так как транспортные издержки на доставку ресурса в другие регионы могут сделать неконкурентоспособным этот ресурс по цене.

Для прогнозирования перераспределения товарных потоков между регионами может быть использована «транспортная задача» линейного программирования [6, с. 75]. Она должна быть построена для каждого товарного рынка. В целях ее постановки необходимо задать целевую функцию (20) и систему ограничений (21).

$$(20) Z = \sum_{k=1}^K \sum_{r=1}^R P_{rk}^{\text{ндс}} \cdot QR_{rk} \rightarrow \min,$$

где  $P_{rk}^{\text{ндс}}$  – цена  $t$ -го промежуточного или конечного товара, вывозимого из  $r$ -го в  $k$ -й регион с учетом дифференцированной ставки НДС;  $QR_{rk}$  – объем товара, вывозимого из  $r$ -го в  $k$ -й регион;  $R$  – количество регионов РФ – «межрегиональных экспортеров»;  $K$  – количество регионов РФ – «межрегиональных импортеров».

Целевая функция направлена на минимизацию уровня конечной цены на  $t$ -й товар, поскольку фирмы-продавцы заинтере-

сованы в увеличении своих продаж при отрицательном наклоне кривой спроса.

Система ограничений при этом будет иметь вид

$$(21) \begin{cases} \sum_{k=1}^K QR_{rk} \leq QR_r^{\text{эксп}}, r = 1, \dots, R, \\ \sum_{r=1}^R QR_{rk} \leq QR_k^{\text{имп}}, k = 1, \dots, K, \\ QR_{rk} \geq 0. \end{cases}$$

Исходные данные для построения модели оценки межрегионального перераспределения  $t$ -х товаров на основе «транспортной задачи» заносятся в таблицу 3.

Таблица 3. Модель оценки межрегионального перераспределения  $t$ -го товара

Регионы– «межрегиональные импортеры»	Субъект РФ №1	Субъект РФ №2	...	Субъект РФ №R	Объем межрегионального экспорта
Субъект РФ №1	$P_{11}^{\text{ндс}}$ $QR_{11}$	$P_{12}^{\text{ндс}}$ $QR_{12}$	...	$P_{1R}^{\text{ндс}}$ $QR_{1R}$	$QR_1^{\text{эксп}}$
Субъект РФ №2	$P_{21}^{\text{ндс}}$ $QR_{21}$	$P_{22}^{\text{ндс}}$ $QR_{22}$	...	$P_{2R}^{\text{ндс}}$ $QR_{2R}$	$QR_2^{\text{эксп}}$
...	...	...	...	...	...
Субъект РФ №R	$P_{R1}^{\text{ндс}}$ $QR_{R1}$	$P_{R2}^{\text{ндс}}$ $QR_{R2}$	...	$P_{RR}^{\text{ндс}}$ $QR_{RR}$	$QR_R^{\text{эксп}}$
Объем межрегионального импорта	$QR_1^{\text{имп}}$	$QR_2^{\text{имп}}$	...	$QR_R^{\text{имп}}$	

В результате определения оптимального плана предлагаемой «транспортной задачи» министерство экономического развития РФ сможет определить возможное перераспределение

товаро-материальных потоков между регионами РФ, исходя из рационального поведения хозяйствующих субъектов. Это позволит оценить, как изменятся географические границы региональных рынков и на сколько снизится уровень рыночной власти их участников и чистых потерь в экономике при помощи имеющегося у Федеральной антимонопольной службы инструментария для определения типов рынков по степени концентрации.

Между тем, усиления притока инвестиций в экономически слабые регионы и повышения уровня конкуренции на региональных рынках недостаточно. Необходимо обеспечить мобильность трудоспособного населения. От нее также зависит прирост интеллектуального капитала, необходимого для развития высокотехнологичных производств в регионах России. Для этого предлагается дифференцировать ставку налога на доходы физических лиц по регионам. Ее величина для  $r$ -го региона ( $N_{r, \text{НДФЛ}}$ ) рассчитывается по формуле:

$$(22) N_{r, \text{НДФЛ}} = \frac{I_{\text{ср.д.}r} - (C_{\text{min.}r} + Z_{\text{жкх.}r})}{I_{\text{ср.д.б}} - (C_{\text{min.б}} + Z_{\text{жкх.б}})} \cdot N_{\text{б.НДФЛ}},$$

где  $I_{\text{ср.д.}r}$  – среднедушевой денежный доход населения в  $r$ -м регионе;  $I_{\text{ср.д.б}}$  – наиболее высокий среднедушевой денежный региональный доход в России;  $C_{\text{min.}r}$  – величина прожиточного минимума в  $r$ -ом регионе;  $C_{\text{min.б}}$  – величина прожиточного минимума в регионе с наиболее высоким среднедушевым денежным доходом;  $Z_{\text{жкх.}r}$  – средний размер расходов домохозяйств на оплату жилищно-коммунальных услуг в  $r$ -м регионе;  $Z_{\text{жкх.б}}$  – средний размер расходов домохозяйств на оплату жилищно-коммунальных услуг в регионе с наибольшей площадью жилья на одного жителя;  $N_{\text{б.НДФЛ}}$  – базовая ставка налога на доходы физических лиц, устанавливаемая в России.

В формуле (22) дифференциация налога осуществляется по размеру располагаемого дохода, используемого для сбережений и покупки товаров долгосрочного пользования в регионах РФ. Данный подход обусловлен тем, что при принятии решения о миграции население прежде всего будет ориентироваться на прирост своего располагаемого дохода за вычетом необходимых затрат на поддержание своей жизнедеятельности. Кроме того,



дифференциация налога позволит усилить потребительский спрос в депрессивных регионах.

Аналогичным образом может быть дифференцирована ставка налога на имущество физических лиц в  $r$ -м регионе ( $N_{r, \text{НИФЛ}}$ ):

$$(23) N_{r, \text{НИФЛ}} = \frac{\Pi_{\text{ж}, r}}{\Pi_{\text{ж}, б}} \cdot N_{б, \text{НИФЛ}},$$

где  $\Pi_{\text{ж}, r}$  – средняя цена одного м<sup>2</sup> общей площади жилья на первичном рынке в  $r$ -м регионе;  $\Pi_{\text{ж}, б}$  – средняя цена одного м<sup>2</sup> общей площади жилья на первичном рынке в регионе с наиболее высокой ценой;  $N_{б, \text{НИФЛ}}$  – базовая ставка налога на имущество физических лиц, устанавливаемая в России.

Для оценки государством миграционных потоков населения под влиянием дифференциации ставок налога на доходы и имущество физических лиц предлагается использовать такую же методику «транспортной задачи». Данная задача должна строиться по каждой доходной группе населения. В исходной таблице задачи количество пунктов поставщиков равно количеству пунктов потребителей по количеству регионов РФ. Они представляют собой соответственно регионы с избытком трудоспособного населения и регионы с недостатком трудоспособного населения.

Целевая функция транспортной задачи будет направлена на максимизацию величины превышения суммы налоговой льготы над затратами, связанными с жизнеобеспечением. Она имеет вид

$$(24) Z = \sum_{k=1}^K \sum_{r=1}^R \Delta I_{rk} \cdot T_{rk} \rightarrow \max,$$

где  $\Delta I_{rk}$  – разница между суммой налоговой льготы и затратами по жизнеобеспечению при переезде на постоянное место жительства одного человека из  $r$ -го в  $k$ -й регион;  $T_{rk}$  – количество человек, мигрирующих из  $r$ -го в  $k$ -й регион;  $R$  – количество регионов РФ с населением, расположенным к переезду;  $K$  – количество регионов РФ желающих принять мигрантов из других регионов РФ.

Система ограничений при этом будет иметь вид:

$$(25) \left\{ \begin{array}{l} \sum_{r=1}^R T_{rk} \leq T_r', \quad r = 1, \dots, R, \\ \sum_{k=1}^K T_{rk} \leq T_k'', \quad k = 1, \dots, K, \\ T_{rk} \geq 0; \end{array} \right.$$

где  $T_r'$  – число жителей  $r$ -го региона, потенциально готовых переехать в  $k$ -й регион на постоянное место жительства;  $T_k''$  – число трудоспособных мигрантов, требующихся в  $k$ -м регионе РФ.

Показатель  $T_r'$  включает в себя численность безработного населения и населения, не обеспеченного собственным жильем по современным нормам. Показатель  $T_k''$  определяется наличием свободных рабочих мест в регионе при условии наличия свободной жилой площади. Если в регионе нет жилья для размещения трудоустраиваемого населения из других регионов, то потребность принимающего региона в мигрирующих кадрах определяется по формуле

$$(26) T_k'' = \begin{cases} \text{Ч}_н \cdot (S_{f.k} / H_s), & \text{если } S_{f.k} / H_s < 1, \\ \text{Ч}_н, & \text{если } S_{f.k} / H_s \geq 1; \end{cases}$$

где  $S_{f.k}$  – предложение жилья на рынке в  $k$ -м регионе в  $m^2$ ;  $H_s$  – жилая площадь на одного человека по международным нормам.

Данная предпосылка основана на том, что при невозможности обеспечения доступным жильем мигрирующего населения процесс миграции будет невозможен.

Показатель  $\Delta I_{rk}$  характеризует экономическую выгоду от миграции, получаемую населением. Он определяется по формуле

$$(27) \Delta I_{rk} = (N_{r.\text{НДФЛ}} - N_{k.\text{НДФЛ}}) \cdot I_{\text{ср.д.к}} + (N_{r.\text{НИФЛ}} - N_{k.\text{НИФЛ}}) \cdot H_{\text{ж.р}} + (З_{\text{жкх.р}} - З_{\text{жкх.к}}) + (C_{\text{min.r}} - C_{\text{min.k}}) - \text{ТЗ}_{rk},$$

где  $T_{rk}$  – транспортные затраты на переезд гражданина из  $r$ -го региона в  $k$ -й;  $H_{ж,r}$  – норма жилья на одного человека в  $m^2$  в  $r$ -м регионе.

Если  $\Delta I_{rk} > 0$ , то у трудоспособного населения есть стимул к переезду, и наоборот. Чем оно больше, тем более  $k$ -й регион привлекателен для переезда.

Исходные данные для построения модели оценки межрегионального перераспределения трудоспособного населения  $g$ -х групп на основе «транспортной задачи» заносятся в таблицу 4.

Таблица 4. Модель межрегионального перераспределения трудоспособного населения  $g$ -й доходной группы

Регионы с недостатком трудоспособного населения Регионы с избыточным трудоспособным населением	Субъект РФ №1	Субъект РФ №2	...	Субъект РФ №R	Потенциальный миграционный резерв региона (чел.)
Субъект РФ №1	$B_{11}$ $T_{11}$	$B_{12}$ $T_{12}$	...	$B_{1R}$ $T_{1R}$	$T_1'$
Субъект РФ №2	$B_{21}$ $T_{21}$	$B_{22}$ $T_{22}$	...	$B_{2R}$ $T_{2R}$	$T_2'$
...	...	...	...	...	...
Субъект РФ №K	$B_{R1}$ $T_{R1}$	$B_{R2}$ $T_{R2}$	...	$B_{RR}$ $T_{RR}$	$T_R'$
Дополнительная потребность в кадрах региона (чел.)	$T_1''$	$T_2''$	...	$T_K''$	

Решение данной задачи позволит спрогнозировать возможные миграционные потоки трудоспособного населения между регионами, исходя из его рационального поведения нацеленного на максимизацию собственного располагаемого дохода.

Если дифференциации ставок налогов на имущество и доходы физических лиц при помощи формул (23) и (22) будет недостаточно для обеспечения нужных стране миграционных потоков, то возможно установление ставок данных налогов

методом подбора на основе анализа проводимого по модели межрегионального перераспределения трудоспособного населения.

Подводя итог вышеизложенному, можно сделать следующие выводы. На основе разработанного механизма оценки производственных возможностей страны в сложившихся условиях рыночной конъюнктуры органы государственной власти могут определить наилучший вариант использования производственных ресурсов страны и потребления товаров. Для этого используются предлагаемые модели линейного программирования, позволяющие определить наилучшую комбинацию производства:

- 1) конечных потребительских товаров с точки зрения максимизации количества благ полезных для населения;
- 2) промежуточных товаров с точки зрения минимизации затрат на их производство.

Благодаря встроенным в модели индексам, характеризующим изменение уровня цен на товарных рынках регионов РФ, органы власти могут оценить степень влияния конкурентной среды отраслевых региональных рынков на эффективность их функционирования и как следствие на экономический рост в РФ за счет сокращения «чистых потерь» от рыночной (монопольной) власти. Развитие конкуренции обеспечивается за счет выравнивания социально-экономической асимметрии развития регионов, путем применения предлагаемого механизма дифференциации вышеуказанных налоговых ставок и методики оценки перераспределения инвестиций, товаров и миграционных потоков населения между регионами РФ на основе применения методики «транспортной задачи». Это обеспечивает устранение монопольных зон хозяйствования фирм или снижение их рыночной власти. Кроме того, выравнивание условий предложения товаров в регионах неминуемо приведет к росту конкурентного давления, что будет стимулировать выработку предпринимательской инициативы, направленной на применение ресурсосберегающих технологий и снижение за счет этого рыночных цен. Это также будет содействовать экономическому росту страны, так как количество благ потребляемых в обществе на душу населения увеличится.

## Литература

1. АВДАШЕВА С.Б., АРОНИН В.А., АХПОЛОВ И.К. *Конкуренция и антимонопольное регулирование: учеб. пособие для вузов* / Под ред. А.Г. Цыганова – М.: Логос, 1999. – 367 с.
2. АВДАШЕВА С.Б., РОЗАНОВА Н.М. *Теория организации отраслевых рынков: учебник* – М.: ИЧП «Издательство “Магистр”», 1998. – 320 с.
3. ГАЛЬПЕРИН В.М., ИГНАТЬЕВ С.М., МОРГУНОВ В.И. *Микроэкономика: учебник для вузов. Том 2.* / Под ред. В.М. Гальперина. – СПб: Экономическая школа, 2003. – 349 с.
4. ЕЛИСЕЕВА И.И., ЮЗБАШЕВ М.М. *Общая теория статистики: учебник для вузов* / Под ред. И.И. Елисейевой. – 5-е изд., перераб. и доп. – М.: Финансы и статистика. 2008. – 655 с.
5. *Приказ федеральной антимонопольной службы «Об утверждении порядка проведения анализа состояния конкуренции на товарном рынке» №220 от 28.04.2010.*
6. ФЕДОСЕЕВ В.В., ГАРМАШ А.Н., ДАЙИТБЕГОВ Д.М. и др. *Экономико-математические методы и прикладные модели: учеб. пособие для вузов* / Под ред. В.В. Федосеева. – М.: ЮНИТИ, 2005. – 302 с.
7. ШАРАЕВ Ю.В. *Теория экономического роста.* – М.: Изд. дом ГУ ВШЭ, 2006. – 254 с.

## MANAGEMENT OF SOCIAL AND ECONOMIC ASYMMETRY OF REGIONS AS A FACTOR OF ECONOMIC GROWTH

**Evgeniy Zhulanov**, The Perm state technical university, Perm,  
Cand.econ.sci., head of the department of economy and organization  
of industrial production (zeepstu@yandex.ru).

*Abstract: We propose the mechanism of leveraging social and economic asymmetry of regions of Russia, which creates pre-requisites*

*for development of competition and growth of the economy of the country. Optimal resource distribution in economy is calculated from the linear programming problem. Decrease of asymmetry and increase of economy performance is achieved by the differentiation of tax rates. This differentiation must reduce disproportions in social and economic development and resources' provision of Russian Federation regions.*

Keywords: economic growth, regional economy, modeling, technique, branch market.

*Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии Р. М. Нижегородцевым*

---

---

---

---

---

*Уважаемые читатели! Обращаем Ваше внимание на выпущенный в 2010 году Институтом проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН тематический сборник статей «Сетевые модели в управлении». Подробная информация о Сборнике доступна на сайте [www.mtas.ru](http://www.mtas.ru).*

УДК 519.876.2

ББК 32.81

## **ИНФОРМАЦИОННО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ ОБОСНОВАНИЯ УРОВНЕЙ ПОГРАНИЧНОЙ БЕЗОПАСНОСТИ**

**Шумов В. В.<sup>1</sup>**

*(Отделение погранологии*

*Международной академии информатизации, Москва)*

*Рассматривается информационно-математическая модель, позволяющая вычислять критерий эффективности охраны границы – математическое ожидание предотвращенного ущерба. Эта модель также может быть использована для прогнозирования интенсивности нарушений границы.*

Ключевые слова: эффективность охраны границы, пограничные средства, информационно-математическая модель, информационное управление.

### **Введение**

Пограничные службы (войска) должны обеспечивать эффективное выполнение заключенных между сопредельными государствами двусторонних договоров о режиме границы и выполнять контактную, барьерную и фильтрующую функции. Минимальные плотности сил и средств охраны границы должны быть таковы, чтобы выполнялись требования договоров о режиме границы и не был утрачен контроль за пересечениями границы (вероятность обнаружения или задержания нарушителей не ниже 0,1-0,3).

Для многих государств в настоящее время актуальной является проблема борьбы с постоянно возрастающей международ-

---

<sup>1</sup> Владислав Вячеславович Шумов, кандидат технических наук, доцент (vshum59@yandex.ru).

ной преступностью (терроризм, контрабанда, нелегальная миграция и т.д.). Учитывая большую протяженность сухопутных, речных и морских границ, для эффективного отражения угроз в пограничном пространстве могут потребоваться значительные финансовые и людские ресурсы. В этой связи представляется актуальной проблема обоснования необходимых уровней (критериев) обеспечения безопасности государств в пограничном пространстве.

В настоящей статье количественно оцениваются некоторые факторы, влияющие на интенсивность потока нарушений границы. На основании полученной модели даются рекомендации, направленные на повышение эффективности действий пограничных служб (войск).

Следует отметить, что проблемы обеспечения пограничной безопасности государств (и связанные с ними проблемы) изучаются специалистами по исследованию операций, теории игр, эконометрике [9–11, 13]. В нашей стране подобные задачи также являются предметом изучения в исследовании операций, погранологии и погранометрике.

## **1. Классификация и характеристика субъектов воздействия пограничной службы**

К субъектам воздействия (далее СВ) пограничной службы можно отнести выгодоприобретателей, организаторов незаконных каналов через границу, собственно нарушителей границы и пособников (*первое основание* для классификации – организационная роль).

*Второе основание* для классификации СВ – степень знания ими системы охраны границы. По данному основанию можно выделить следующие классы СВ:

- СВ с публичным знанием: изучение законодательства (Закон об охране границы, Уголовный кодекс и т.д.), комментариев государственных органов власти и публикаций СМИ о состоянии, способах и результатах охраны границы и т.п.;
- СВ, лично изучающие систему охраны границы;



- СВ, находящие и использующие для изучения системы охраны границы пособников (проводников);
- СВ, получающие знания и инструкции от организаторов и/или выгодоприобретателей.

*Третье основание* для классификации СВ – вид правонарушения. По данному основанию выделим следующие классы СВ:

- СВ, нарушающие правила режима границы;
- СВ, нарушающие правила пограничного режима;
- СВ, нарушающие правила режима в пунктах пропуска и т.д.

*Четвертое основание* для классификации СВ – вид юридической ответственности за совершенное правонарушение. По видам юридической ответственности выделим следующие классы СВ:

- СВ, деяния которых влекут дисциплинарную ответственность;
- СВ, деяния которых влекут административную ответственность;
- СВ, деяния которых влекут уголовную ответственность и т.д.

*Пятое основание* для классификации – степень государственной (общественной) опасности. По данному основанию обычно выделяются следующие классы СВ:

- террористы, диверсанты и т.д.;
- СВ, занимающиеся контрабандой оружия;
- СВ, занимающиеся контрабандой наркотических средств;
- СВ, занимающиеся экономической контрабандой;
- незаконные мигранты;
- СВ, ведущие незаконную деятельность вблизи границы и т.д.

*Шестое основание* для классификации – мотивация действий. По данному основанию СВ различаются:

- СВ, действующие не из материальной выгоды (под влиянием внушения со стороны других лиц и организаций, из моральных соображений и т.д.);
- СВ, действующие исходя из материальной выгоды.

*Седьмое основание* для классификации – направление действий. По данному основанию выделим:

- СВ, пересекающие границу с нашей стороны;

- СВ, пересекающие границу со стороны сопредельного государства в наш тыл;
- СВ, действующие вблизи границы на небольшую глубину (сельскохозяйственные работы и т.д.).

С учетом перечисленных классификаций разделим субъекты воздействия на  $n$  групп, по ходу текста определяя необходимые атрибуты  $i$ -й группы,  $i = 1, \dots, n$ . Множество групп СВ обозначим  $N$ , выделив в нем подмножество  $N_E$  (множество групп СВ, действующих исходя из материальной выгоды). Очевидно, что чем большее число групп мы введем в рассмотрение, тем точнее будут полученные результаты. С другой стороны, число групп ограничено сверху доступными для анализа статистическими данными (часть отсутствующих данных можно получить в результате экспертных опросов). Предположим, что субъекты воздействия не переходят из одной группы в другую.

Рассматриваются и другие основания для классификации СВ: степень их опасности при задержании, способы преодоления контролируемого рубежа, способы взаимодействия с силами и средствами охраны границы и т.д., учитываемые в математических моделях оценки эффективности охраны границы.

Способы воздействия со стороны пограничной службы могут быть классифицированы по следующим основаниям.

*Первое основание* классификации – способы действий в случае задержания СВ и расходы на эти действия. По данному основанию выделим:

- СВ, задержанные вблизи границы (минимальные расходы на выдворение);
- СВ, задержанные другими органами правопорядка вне пограничного пространства (могут потребоваться значительные расходы и издержки на выдворение и/или нейтрализацию последствий их действий).

*Второе основание* классификации – способы воздействия со стороны пограничной службы. По данному основанию выделим:

- СВ, на которых оказывается непосредственное (физическое, юридическое и т.д.) воздействие;

- СВ, на которых оказывается информационное воздействие (информационное управление);
- СВ, на которых оказывается рефлексивное воздействие (рефлексивное управление).

Субъекты воздействия в каждой  $i$ -й группе могут выбирать свою стратегию исходя только из личной оценки ситуации (они не подвержены внешним информационным воздействиям) или ее оценки своим организатором. Таких СВ отнесем к 1-му типу. СВ 2-го типа будем считать субъектов, выбирающих свою стратегию под воздействием внешней информации о состоянии эффективности охраны границы. Для каждой  $i$ -й группы обозначим  $0 \leq \alpha_i \leq 1$  – долю субъектов 1-го типа.

## 2. Описание информационно-математической модели

Существующие математические модели для оценки эффективности охраны границы пограничными заставами [7] имеют сложные аналитические и алгоритмические зависимости, поскольку учитывают данные электронных карт о рельефе местности, реальные конфигурации рубежей и множество различных факторов. При решении многих задач верхнего уровня (обоснование штатов и комплектов технических средств и др.) подробными моделями пользоваться нецелесообразно, желательно иметь простую аналитическую модель вида

$$(1) \quad p_{zi} = 1 - e^{-k_{0i} y_0},$$

где  $p_{zi}$  – вероятность задержания нарушителя границы  $i$ -й группы;  $y_0$  – совокупная стоимость владения средствами охраны границы и расходы на содержание персонала ( $y_0 > 0$ );  $k_{0i}$  – параметр для СВ  $i$ -й группы,  $k_{0i} > 0$ .

Оценку параметра  $k_{0i}$  можно получить в результате отсеивающих экспериментов и факторного планирования [4].

Американский экономист М. Сесновиц [12] в 1972 г. предложил формулу для расчета ожидаемого дохода  $RS_i$  преступника  $i$ -й группы:

$$(2) \quad RS_i = (1 - p_i) S_i + p_i (S_i - D_i) = S_i - p_i D_i,$$

где  $p_i = p_{si} p_{zi}$  – вероятность задержания и наказания преступника  $i$ -й группы;  $p_{si}$  – вероятность наказания преступника  $i$ -й группы в случае его задержания;  $S_i$  – доход преступника  $i$ -й группы (за год или иной срок, рассчитывается по стране и месту его постоянного проживания);  $D_i$  – денежная величина потерь в случае наказания.

Г. Беккер [8] предложил использовать ожидаемую полезность от совершения правонарушения  $i$ -й группы:

$$(3) R_i = (1 - p_i) \varphi(S_i) + p_i \varphi(S_i - D_i) = \varphi(S_i - p_i D_i),$$

где  $\varphi(\cdot)$  – функция полезности преступника.

Л. Вейн, Лю и А. Мотскин в статье «Анализ национальной безопасности США – мексиканская граница» [13] показали, что доли потенциальных нелегальных мигрантов, решивших пересечь границу Мексика–США ( $l = 1$ ) или отказаться от попытки нарушения ( $l = 2$ ), вычисляются по формуле:

$$(4) P_l = \frac{\exp(qR_l)}{\exp(qR_1) + \exp(qR_2)}, \quad l = 1, 2,$$

где  $R_l$  – ожидаемая полезность от выбора  $l = 1$  или  $l = 2$ ;  $\theta$  – параметр масштабирования.

Ожидаемые полезности  $R_l$ ,  $l = 1, 2$ , зависят от уровня зарплаты иностранцев в США, расходов на переезд и обследование участков границы, затрат в случае задержания.

Примем гипотезу о линейности функции полезности преступника (субъекта воздействия) и учтем расходы на обследование границы. Тогда выражение (2) можно переписать в виде:

$$(5) R_i = (1 - p_i) S_i + p_i (S_i - D_i) - G_i,$$

где  $G_i$  – затраты СВ  $i$ -й группы на обследование границы и выбор места попытки ее нарушения.

Сформулируем гипотезу о решающем правиле. Будем полагать, что доля  $q_i$  СВ (действующих исходя из материального интереса), отказывающихся от преступной деятельности, равна:

$$(6) q_i = \frac{\exp(q_i \hat{R}_i)}{\exp(q_i R_i) + \exp(q_i \hat{R}_i)}, \quad \theta_i > 0, \quad i \in N_E,$$

где  $\hat{R}_i$  – ожидаемая полезность законной деятельности СВ  $i$ -й группы (полезность деятельности в случае принятия решения о

не нарушении границы);  $\theta_i$  – параметр масштабирования для СВ  $i$ -й группы.

Например, если ожидаемый доход от легальной деятельности  $\hat{R}_i = 60$ , от преступной –  $R_i = 100$ , параметр  $\theta_i = 0,01$ , то СВ с вероятностью 0,4 выберет легальную деятельность и с вероятностью 0,6 – преступную (попытается нарушить границу).

Если к СВ некоторой группы нельзя применить материальные показатели деятельности, то гипотеза о решающем правиле для таких СВ может иметь вид

$$(7) \quad q_i = \frac{\exp(q_i b_i p_i)}{\exp(q_i b_i p_i) + \exp(q_i \hat{p}_i)}, \quad \theta_i > 0, \quad i \in N \setminus N_E,$$

где  $\hat{p}_i$  – пороговая вероятность задержания и наказания для СВ  $i$ -й группы, превышение которой приводит к отказу от нарушения границы;  $\beta_i > 0$  – параметр, характеризующий субъективную степень тяжести наказания СВ  $i$ -й группы в случае задержания.

Оценка параметра  $\hat{p}_i$  применительно к условиям ведения боевых действий рассмотрена в литературе [1, 2, 6].

Например, если вероятность задержания и наказания  $p_i = 0,2$ , пороговая вероятность  $\hat{p}_i = 0,4$ , параметры  $\beta_i = 5$ ,  $\theta_i = 1$ , то по формуле (7) СВ с вероятностью 0,65 выберет легальную деятельность и с вероятностью 0,35 – преступную.

Интенсивность потенциальных правонарушений  $A$  можно считать величиной постоянной (в течение некоторого периода времени – нескольких лет или десятилетий):

$$A = \sum_{i=1}^n A_i$$

где  $A_i$  – потенциальная интенсивность нарушений  $i$ -й группы.

Получить оценку интенсивности правонарушений (в целом и по группам) можно статистическим путем (см. приложение №1).

Информационное управление субъектами 2-го типа может быть направленным на формирование у них представлений, что<sup>1</sup>:

- вероятность наказания СВ (вскрытия его замыслов)  $i$ -й группы в случае его задержания равна  $p_{si1} > p_{si}$  (т.е. выше реальной вероятности) – управление 1-го вида;

- вероятность задержания нарушителей  $i$ -й группы равна  $p_{zi2} > p_{zi}$  (выше реальной вероятности задержания) – управление 2-го вида;

- пороговая вероятность  $\hat{p}_{i3} < \hat{p}_i$ ,  $i \in N \setminus N_E$  – управление 3-го вида.

Информационное управление  $k$ -го вида,  $k = 1, 2, 3$ , можно разделить на две составляющие:

- управление, направленное на все субъекты воздействия (безадресное), соответствующую составляющую суммы расходов безадресного управления  $k$ -го вида обозначим  $\Delta y_k$ ;

- адресное управление  $k$ -го вида, направленное на СВ  $i$ -й группы, соответствующую составляющую суммы расходов адресного управления  $k$ -го вида субъектом воздействия  $i$ -й группы обозначим  $\Delta y_{ki}$ .

Следовательно, на СВ  $i$ -й группы направлены две составляющих управления  $k$ -го вида, причем расходы на информационное управление  $k$ -го вида,  $k = 1, 2, 3$ , равны:

$$(8) \quad y_k = \Delta y_k + \sum_{i=1}^n \Delta y_{ki}, \quad k = 1, 2, \quad y_3 = \Delta y_3 + \sum_{i \in N_E \setminus N} \Delta y_{3i}.$$

Полагая, что расходы на информационное управление возрастают с увеличением разницы между представляемой эффективностью охраны границы и реальной, примем следующую гипотезу зависимости затраченных средств от представляемой эффективности (рис. 1, гиперболическая зависимость):

---

<sup>1</sup> Виды наказаний по административному или уголовному праву являются публичным знанием, поэтому информационное воздействие на денежную величину потерь в случае наказания здесь не рассматривается.

$$(9) \quad \Delta y_{1i} + \Delta y_1 = \frac{K_{1i}}{1 - p_{si1}} + \frac{K_{1i}}{p_{si} - 1},$$

где  $\Delta y_{1i} + \Delta y_1$  – расходы на информационное управление 1-го вида, направленные на СВ  $i$ -й группы;  $K_{1i} > 0$  – переводной коэффициент (стоимость условной единицы управления);  $p_{si} < p_{si1} < 1$ .

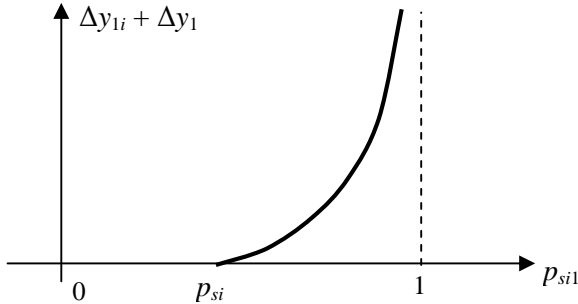


Рис. 1. Зависимость расходов на информационное управление от значения информационной вероятности

Тогда эффективность управления 1-го вида равна:

$$(10) \quad p_{si1} = 1 - \frac{K_{1i}}{\Delta y_{1i} + \Delta y_1 - \frac{K_{1i}}{p_{si} - 1}}.$$

Для эффективности управления 2-го вида получим аналогичное выражение:

$$(11) \quad p_{zi2} = 1 - \frac{K_{2i}}{\Delta y_{2i} + \Delta y_2 - \frac{K_{2i}}{p_{zi} - 1}},$$

где  $\Delta y_{2i} + \Delta y_2$  – расходы на информационное управление 2-го вида, направленные на СВ  $i$ -й группы;  $K_{2i} > 0$  – переводной коэффициент (стоимость условной единицы управления);  $p_{zi} < p_{zi2} < 1$ .

Для эффективности управления 3-го вида получим следующее выражение (нам желательно минимизировать  $\hat{p}_{i3}$ ):

$$(12) \hat{p}_{i3} = 1 - \frac{K_{3i}}{\Delta y_{3i} + \Delta y_3 + \frac{K_{3i}}{\hat{p}_i}}, \quad i \in N \setminus N_E,$$

где  $\Delta y_{3i} + \Delta y_3$  – расходы на информационное управление 3-го вида, направленные на СВ  $i$ -й группы;  $K_{3i} > 0$  – переводной коэффициент (стоимость условной единицы управления);  $0 < \hat{p}_{i3} < \hat{p}_i$ .

Неизвестные коэффициенты  $K_{ki}$ ,  $k = 1, 2, 3$ , в выражениях (10–12) могут быть определены опытным путем в ходе пробных информационных воздействий.

Предположим, что ущерб государству и обществу от действий правонарушителей пропорционален их доходу. Тогда ущерб от СВ  $i$ -й группы:

$$(13) u_i = k_{gi} S_i x_i,$$

где  $k_{gi} > 0$  – коэффициент ущерба от одной единицы дохода СВ  $i$ -й группы;  $x_i$  – интенсивность нарушений СВ  $i$ -й группы.

Для СВ, побудительные причины действий которых имеют нематериальный характер, примем  $S_i = 1$ , а коэффициент  $k_{gi}$  определим как потенциальный ущерб от одного нарушения СВ  $i$ -й группы.

Предотвращенный ущерб  $U_i$  от действий СВ  $i$ -й группы вычисляется по формуле:

$$(14) U_i = k_{gi} S_i (A_i - x_i) = k_{gi} S_i A_i q_i = k_{gi} S_i A_i (a_i q_i^{(1)} + (1 - a_i) q_i^{(2)}),$$

где  $q_i^{(1)}$ ,  $q_i^{(2)}$  – доля СВ соответственно 1-го и 2-го типа  $i$ -й группы, отказывающихся от преступной деятельности.

СВ 1-го типа не подвержены информационному управлению, следовательно, доля отказов от незаконной деятельности вычисляется по формулам (5–7):

$$(15) q_i^{(1)} = \frac{\exp(q_i \hat{R}_i)}{\exp(q_i R_i^{(1)}) + \exp(q_i \hat{R}_i)},$$

$$R_i^{(1)} = S_i - p_i D_i - G_i, \quad i \in N_E;$$



$$(16) q_i^{(1)} = \frac{\exp(q_i b_i p_i^{(1)})}{\exp(q_i b_i p_i^{(1)}) + \exp(q_i \hat{p}_i)}, \quad p_i^{(1)} = p_i, \quad i \in N \setminus N_E.$$

Для СВ 2-го типа соответствующая доля равна:

$$(17) q_i^{(2)} = \frac{\exp(q_i \hat{R}_i)}{\exp(q_i R_i^{(2)}) + \exp(q_i \hat{R}_i)},$$

$$R_i^{(1)} = S_i - p_{sil} p_{zi2} D_i - G_i, \quad i \in N_E;$$

$$(18) q_i^{(2)} = \frac{\exp(q_i b_i p_i^{(2)})}{\exp(q_i b_i p_i^{(2)}) + \exp(q_i \hat{p}_i^{(2)})},$$

$$p_i^{(2)} = p_{sil} p_{zi2}, \quad \hat{p}_i^{(2)} = \hat{p}_{i3}, \quad i \in N \setminus N_E.$$

Для оценки эффективности охраны границы и информационного управления субъектами воздействия можно использовать критерий максимизации предотвращенного ущерба (за вычетом расходов):

$$(19) W = \sum_{i=1}^n U_i - y_0 - y_1 - y_2 - y_3.$$

### 3. Анализ модели на примере

В приложении №2 представлены условные исходные данные примера для двух групп нарушителей – контрабандистов и нелегальных мигрантов.

На рис. 2 показана зависимость эффективности охраны границы (сплошная линия) и вероятности задержания (пунктирная линия) нарушителей в зависимости от расходов на охрану границы в условиях отсутствия информационного управления (при  $y_1 = y_2 = 0$ ).

Из рисунка видно, что при вероятности задержания нарушителей границы выше 0,55 эффективность охраны (предотвращенный ущерб за вычетом расходов на охрану границы) начинает уменьшаться.

На рис. 3 показан график зависимости интенсивности нарушений границы (КБ – контрабандисты, НМ – нелегальные мигранты) от вероятности задержания нарушителей.

Резкий спад потока контрабандистов происходит на интервале вероятности задержания от 0,3 до 0,5.

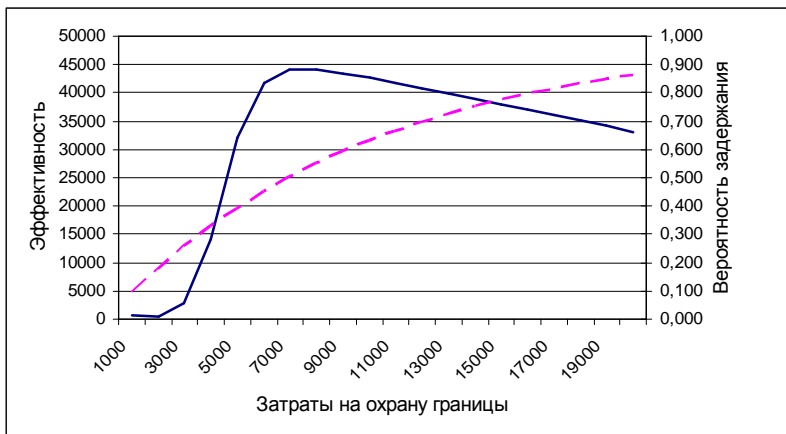


Рис. 2. Эффективность охраны границы и вероятность задержания нарушителей

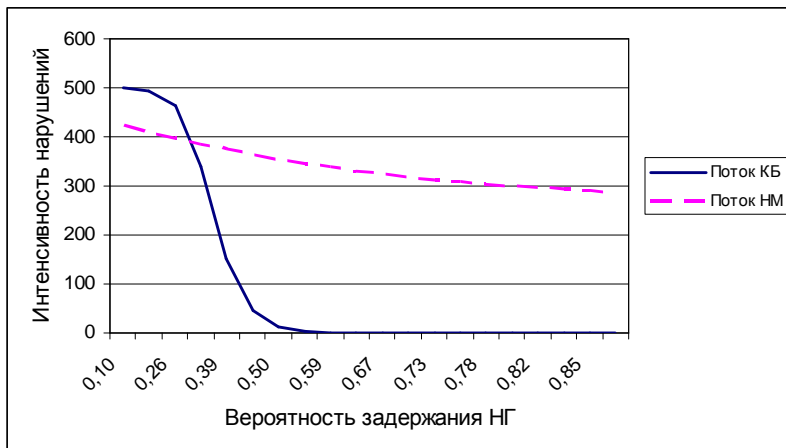


Рис. 3. Зависимость потока нарушений границы от вероятности задержания нарушителей

Поток нелегальных мигрантов с увеличением вероятности задержания снижается незначительно, что обусловлено неэффективной системой мер по их наказанию.

В условиях информационного управления СВ ( $y_1 = y_2 = 300$ ) график зависимости интенсивности нарушений границы от вероятности задержания примет вид, показанный на рис. 4.

То есть в условиях примера информационное управление привело к тому, что потенциальные контрабандисты практически полностью отказались от незаконной деятельности.

#### 4. Перспективные исследования

В настоящей статье не рассмотрено рефлексивное управление [3, 5] субъектами воздействия, имеющее важное теоретическое и практическое значение для пограничной службы.

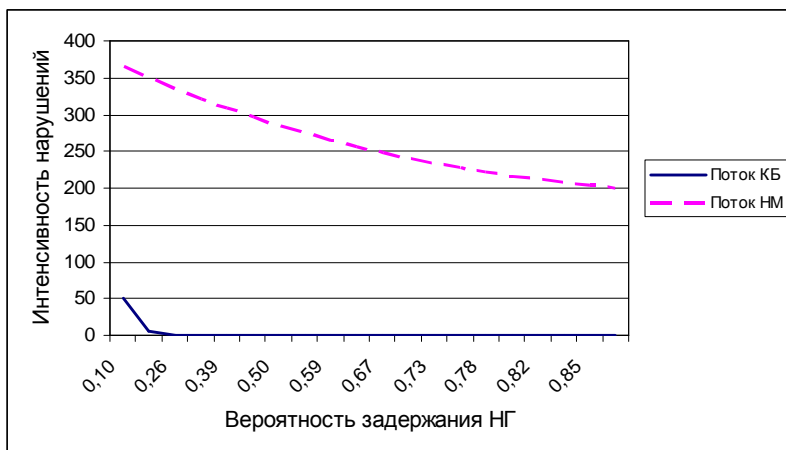


Рис. 4. Зависимость потока нарушений границы от вероятности задержания нарушителей в условиях информационного управления

Актуальной задачей является разработка оптимизационной модели распределения имеющихся ресурсов по задачам управления субъектами воздействия (непосредственное и информационное управления).

Рассмотренная модель может найти применение для оценки эффективности действий пограничной службы (береговой охраны) в исключительной экономической зоне, где число групп субъектов воздействия невелико и незаконная деятельность имеет преимущественно экономический характер.

## **Заключение**

Применение модели в практике органов пограничной службы (центр и регионы) будет способствовать определению требуемых уровней обеспечения пограничной безопасности, прогнозированию потока нарушений режима границы (исключительной экономической зоны и континентального шельфа).

В интересах практического использования полученной математической модели представляется необходимым провести ряд подготовительных мероприятий:

- разработать простые аналитические модели вида (1) для расчета эффективности действий подразделений пограничной службы в пунктах пропуска, в исключительной экономической зоне, на континентальном шельфе и при охране морских границ;
- по предложенной классификации сформировать список групп субъектов воздействия и разработать методику оценки соответствующих параметров;
- провести эксперимент по информационному воздействию с целью получения оценок параметров информационного воздействия;
- разработать и внедрить в практику органов управления программное обеспечение для решения задачи обоснования уровней пограничной безопасности, прогнозирования потока нарушителей и оптимизации расходов.

## **Приложение № 1. Упрощенная оценка интенсивности потенциальных правонарушений**

В условиях существующих расходов на охрану границы вычисляем оценку вероятности задержания  $p_{z;i0}$  нарушителей границы  $i$ -й группы с использованием имеющихся математиче-

ских моделей [7]. Тогда оценка интенсивности реального потока правонарушений  $i$ -й группы будет равна

$$A_{iR} \approx z_{i0} / p_{zi0},$$

где  $z_{i0}$  – количество задержанных нарушителей  $i$ -й группы за некоторый период времени (например, за год).

По формулам (6–7) вычисляем оценку доли  $q_{i0}$ . Искомая интенсивность потенциальных правонарушений будет равна

$$A_{i0} \approx A_{iR} / q_{i0}.$$

## Приложение № 2. Исходные данные для примера

Рассмотрим две группы нарушителей – контрабандисты ( $i = 1$ ) и нелегальные мигранты ( $i = 2$ ) – при следующих исходных данных:

Параметр	Значение параметра	
	$i = 1$	$i = 2$
Параметр, характеризующий задержание нарушителей $k_{0i}$	0,0005	0,0005
Стоимости условных единиц управления $K_{1i}$ и $K_{2i}$ (управление 3-го вида отсутствует)	1000	1000
Вероятность наказания преступника в случае его задержания $p_{si}$	0,25	0,25
Доход СВ $S_i$	100	20
Потери в случае наказания $D_i$	1000	50
Затраты на обследование границы $G_i$	0	0
Параметр $\theta_i$	0,1	0,1
Полезность законной деятельности $\hat{R}_i$	10	10
Доля СВ, не подверженных информационному управлению $\alpha_i$	0,6	0,6
Интенсивность потенциальных нарушителей $A_i$	500	600
Коэффициент ущерба от одной единицы дохода $k_{2i}$	1	0,5
Характер расходов на информационное управление	безадресный	безадресный

## Литература

1. АБДУРАХМАНОВ Р.А. *Военная психология: методология, теория, практика*. – М.: Воен. ун-т, 1996. – 260 с.
2. ГОЛОВИН Н.Н. *Исследование боя. Исследование деятельности и свойств человека как бойца*. – Спб., 1907.
3. ЕРМАКОВ Н.С., ИВАЩЕНКО А.А., НОВИКОВ Д.А. *Модели репутации и норм деятельности*. – М.: ИПУ РАН, 2005. – 67 с.
4. *Математическая теория планирования эксперимента* / Под редакцией С.М. Ермакова. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1983. – 392 с.
5. НОВИКОВ Д.А. *Теория управления организационными системами*. – М.: МПСИ, 2005. – С. 379–418.
6. *Современная буржуазная военная психология*. Сборник переводных статей. – М.: Воениздат, 1964. – 294 с.
7. ШУМОВ В.В. *Применение математических методов и моделей для обоснования решений на охрану государственной границы*: Научно-практическое пособие. В 2 ч. – М.: Академия ФПС России, 1996. – Ч.1. – 184 с.; Ч.2. – 197 с.
8. BECKER G.S. *Crime and Punishment: An Economic Approach* // *Essays in the Economics of Crime and Punishment* / Ed. by G.S. Becker, W.L. Landes. – N.Y., 1974. – P. 10.
9. KAUFMANN F. *Emigrant or Sojourner? The Determinants of Mexican Labor Migration Strategies to the United States*. – M.Sc., University of Karlsruhe; Ph.D., University Of Massachusetts Amherst, 2008.
10. MALCZYNSKI L., COCKERILL K., FORSTER C., PASSELL H. *Borders as Membranes: Metaphors and Models for Improved Policy in Border Regions*. – Sandia National Laboratories, 2005.
11. PITA J., JAIN M., MARECKI J., ORDÓÑEZ F., PORTWAY C., TAMBE M., WESTERN C., PARUCHURI P., KRAUS S. *Deployed ARMOR Protection: The Application of a Game Theoretic Model for Security at the Los Angeles International Airport* // Proc. of 7th Int. Conf. on Autonomous Agents

- and Multiagent Systems (AAMAS 2008), May, 12–16, 2008, Estoril, Portugal. – P. 125–132.
12. SESNOWITZ M. *Returns to Burglary* // The Economics of Crime. – Cambridge (Mass.), 1980. – P. 181–186.
  13. WEIN L., LIU Y., MOTSKIN A. *Analyzing the Homeland Security of the U.S.-Mexico Border*. – URL: [http://www.stanford.edu/~amotskin/index\\_files/USMBorder.pdf](http://www.stanford.edu/~amotskin/index_files/USMBorder.pdf) (дата обращения 07.05.2010)

## **A MATHEMATICAL/INFORMATIONAL MODEL FOR SUBSTANTIATING LEVELS OF BORDER SECURITY**

**Vladislav Shumov**, International Informatizational Academy, Moscow, Cand.Sc., senior lecturer (vshum59@yandex.ru).

*The purpose of this paper is to consider a mathematical/informational model for determining the criterion of effectiveness of the state border's safeguarding – the expectation of prevented damage. This model can also be used to predict the intensity of border violations.*

**Keywords:** operational ways of safeguarding of state border, border detachment, mathematical/informational model, informational control.

*Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии А. Г. Чхартишвили*

УДК 519.8  
ББК 2.22

## СЕТЕВЫЕ МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ В ЖИВОТНОВОДЧЕСКОЙ ОТРАСЛИ АПК

Киселев В. Г.<sup>1</sup>

*(Учреждение Российской академии наук Вычислительный  
центр им. А. А. Дородницына РАН, Москва)*

*Исследуется сетевая модель, описывающая динамику стада домашних животных. Показывается, что такие модели целесообразно использовать в оперативном управлении при сложившихся различных ситуациях с кормами.*

Ключевые слова: сетевая модель, оперативное управление, оптимизация, животноводство.

### **1. Введение**

Как и в любом производстве, функционирующем под воздействием случайных факторов, в аграрно-промышленном комплексе (АПК) возникает потребность в оперативном управлении. Наиболее сложной в смысле проведения оперативного управления является животноводческая отрасль АПК. Дело в том, что в силу специфики этой отрасли оперативные решения, принятые в текущий момент, влияют на состояние системы в течение нескольких лет. Основным случайным воздействием, влияющим на состояние системы, является наличие кормовой базы. Если кормовая база стационарна, то, исходя из поставленных целей по производству животноводческой продукции, можно определить оптимальную структуру и численность стада животных и соответствующие нормы их кормления. Однако это нереальный случай, и если в результате сложившихся погодных

---

<sup>1</sup> Валерий Георгиевич Киселев, кандидат физико-математических наук, доцент (vgkiselev@yandex.ru).



условий кормов произведено меньше или больше, чем запланировано, то приходится решать задачу оперативного управления. Существуют следующие возможности. Во-первых, не меняя численности и структуры стада, сохранив его на последующие годы, уменьшить интенсивность кормления, однако это приведет к уменьшению производства продукции в текущем году. Возможно также решение с уменьшением численности стада или отдельных его групп с одновременным перераспределением имеющихся кормов. В частности, совершенно не очевидна справедливость требования сохранения численности стада в текущий, крайне неурожайный год. Ясно, что для принятия оперативного решения необходимо решать некоторую оптимизационную задачу. Ясно также, что эта задача должна быть динамической, охватывающей по крайней мере несколько лет. При решении динамических задач, размерность которых пропорциональна количеству рассматриваемых лет, важно, чтобы размерность модели, описывающей происходящие в стаде процессы в данный момент времени, была минимальной.

Вопросам моделирования животноводства посвящено довольно много публикаций. У нас в стране пионером работ по моделированию сельскохозяйственного производства и, в частности, животноводства, является, по-видимому, Р.Г. Кравченко. Основные его работы собраны в монографиях [3, 13]. В качестве примера других работ по данной тематике можно привести публикации [2, 7, 14].

Естественно, что сложность рассматриваемых по данной тематике задач со временем повышалась. Так, в работах классика [3, 13] рассматривались в детерминированной постановке стационарные задачи оптимизации структуры и оборота стада и оптимизации использования и производства кормов. В работе [14] приводится описание автоматизированной системы текущего планирования производства в свиноводческом откормочном комплексе, разработанной во ВНИИ кибернетики Минсельхоза СССР, которая была опробована и внедрена в производство. Разработанная система позволяла в течение года производить расчеты движения поголовья на свиноводческом комплексе на каждом участке. Движение животных отражается в помесечном

разреze по каждой производственной группе животных, исходя из их наличия на начало периода, поступления из других групп, покупки и выбытия в связи с переводом в другие группы, падежом, санитарной выбраковкой, а также плановой выбраковкой в связи с обновлением основного стада и реализацией откормленных свиней. Планирование движения поголовья позволяет рассчитать требуемое количество корма в каждом периоде, плановые привесы и общий выход продукции.

Далее, в каждой задаче планирования производства сельскохозяйственной продукции необходимым элементом является блок животноводства. Детализация описания этого блока зависит от решаемой задачи. В качестве примера таких задач приведем проблему, решаемую в работе [9]. Это задача оптимизации планов развития АПК Российской Федерации на пятилетку. В частности, решалась задача производства и использования кормов с целью удовлетворения потребностей сельскохозяйственных животных в кормах и, соответственно, населения в животноводческой продукции. В модели рассматривались различные варианты развития животноводческих отраслей и птицеводства. Затраты кормов принимались нормативными. Задача решалась, как и абсолютное большинство подобных задач, в детерминированной постановке с использованием средних значений соответствующих параметров.

Примером задачи планирования сельскохозяйственного производства, учитывающей вероятностную природу производства, может служить задача оптимизации производственной структуры в регионе с резкими колебаниями сельскохозяйственных условий производства, опубликованная в работе [11]. В ней рассматривались три исхода производства – худший, средний и относительно благоприятный. Вероятности каждого из исходов считаются известными. Продукцией сельскохозяйственного производства является продукция как растениеводческой отрасли, так и животноводства. Решалась задача оптимизации производства, максимизирующего математическое ожидание суммарного выпуска продукции в стоимостном выражении. По современной терминологии (например, [8]), в данной работе решалась задача двухэтапного стохастического

программирования. Стратегическими переменными были структура посевных площадей, структура стада домашних животных. Tактическими переменными в блоке животноводства являлись различные варианты кормления животных. Как известно, такая задача сводится к задаче линейного программирования.

Среди более поздних работ выделим две – [4] и [16]. Работа [16] – это рекомендации ведущего в те годы института Минсельхоза – ВНИПТИК. Рекомендации по перспективному развитию скотоводства (рассматривается стадо КРС) основаны по существу на стационарной модели стада КРС, в которой переменными являются численности различных групп стада. Рассматривается одна технология кормления дойных коров (в смысле интенсивности кормления), зависящая только от массы животного. В отличие от других моделей дойные коровы здесь подразделяются по годам лактации. Количество требуемых кормов для дойного стада вычисляется с помощью некоторой формулы, которая является статистической аппроксимацией различных данных. Выращивание и откорм молодняка предполагается вести различными способами, которые отличаются только технологиями содержания, но интенсивность кормления в этих способах по существу одинаковая и требуемое количество корма вычисляется по одной статистической формуле, зависящей только от массы откармливаемого животного. В работе предлагается рассматривать еще один вид продукции животноводства – навоз, который можно использовать или на продажу, или в растениеводческом секторе.

Работа [4] посвящена анализу проблем соответствия кормовой базы и численности поголовья животных. Рассматриваются две модели. Одна из них – агрегированная региональная модель кормопроизводства и животноводства – в достаточной степени традиционная модель, но доведенная до машинной реализации, и с ее помощью можно проводить полезные численные эксперименты. Другая модель предназначена для решения задачи управления структурой стада в условиях случайных возмущений в процессе производства кормов и представляет несомненный интерес. Предлагается динамическая модель стада КРС, учитывающая стохастическую природу производства кормов.

Корма являются случайной величиной с известной функцией распределения. Под оптимальным управлением структуры стада понимается следующее. Основное стадо остается постоянным во всех случаях, а управлением является количество голов молодняка, оставленное на откорм на следующий год (количество лет откорма – не более двух). Критерием задачи является математическое ожидание дохода от суммарной продукции за планируемое число лет. В этих достаточно жестких упрощающих предположениях автор решает задачу синтеза управления. Хотя предлагаемая задача не совсем реальна, она представляет несомненный интерес, поскольку здесь делается попытка приблизиться к решению актуальной проблемы управления процессом получения животноводческой продукции в реальных условиях изменчивости кормовой базы.

В заключение анализа работ, использующих математические методы для решения различных проблем в животноводстве, можно отметить, что абсолютное большинство их посвящено описанию и решению некоторых частных стационарных задач, а небольшое количество динамических моделей разработано при достаточно жестких предположениях. Следует отметить, что задача влияния изменчивости кормовой базы на производство животноводческой продукции рассматривалась весьма мало.

Таким образом, для решения задач управления в животноводческой отрасли АПК при изменчивой кормовой базе необходимо разработать качественно новую модель, которая удовлетворяла бы следующим требованиям.

Разрабатываемая модель должна:

1) учитывать реальные технологии получения животноводческой продукции и соответствующие способы кормления различных групп стада. Такие технологии разработаны и приведены в справочниках типа [5], [10]. Заметим, что математические модели, описывающие процесс лактации и роста мясной массы, приведенные, например, в [18], далеки от совершенства и рассчитывать на них не приходится;

2) описывать динамику стада домашних животных с учетом половозрастной структуры стада и соответствующих методик кормления;

3) быть ориентирована на решение задач управления при изменчивости кормовой базы (возможные альтернативные решения указаны выше);

4) наконец, желательно, чтобы модель была универсальной в том смысле, что должна годиться для всех отраслей животноводства.

В данной работе будет приведено изложение сетевой модели динамики стада домашних животных, которая удовлетворяет всем этим требованиям. На эту тему уже было несколько публикаций автора, последняя из них – [12]. Здесь же будет приведено более полное изложение сетевой модели и, кроме того, будут обсуждаться некоторые вопросы использования сетевой модели в оперативном управлении животноводческой отраслью.

## **2. Сетевая модель динамики стада домашних животных**

Стадо домашних животных состоит из трех главных групп: основного стада, в котором содержатся взрослые особи (в стаде КРС – это стадо дойных коров), репродуктивного стада молодняка и откормочного стада – основного поставщика мясной продукции. В некоторых случаях отдельные группы животных могут отсутствовать, например, может отсутствовать откорм животных, когда откормочный молодняк стада продается в силу специализации хозяйства. Возможны и другие ситуации. Каждая из перечисленных основных групп в свою очередь состоит из других групп, назначение которых будет пояснено ниже.

Все связи между отдельными группами стада животных можно представить в виде ориентированного взвешенного графа. Каждая вершина этого графа характеризуется весом – численностью соответствующей группы животных, а дуги с приписанными к ним весами характеризуют интенсивность переходов между этими группами. Предполагается, что возможны различные технологии, характеризующиеся различными уровнями кормления и, соответственно, различной продуктивностью. Пример графа, задающего половозрастную структуру

стада, связи в стаде между группами и различные технологии кормления, представлен на рис. 1.

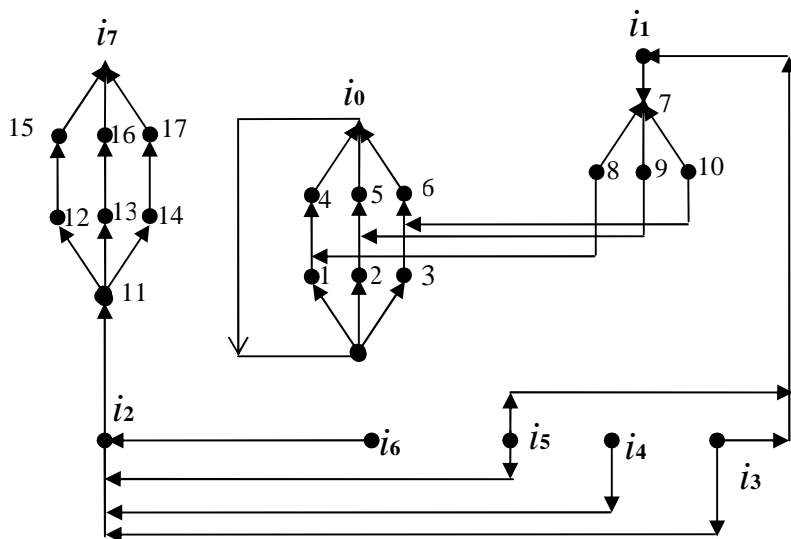


Рис.1.

Дадим некоторые пояснения. Группы с номерами  $i = 1, \dots, 6$  – это основное стадо, причем первые три группы – это молодые коровы, только готовые к рождению телят. Предусмотрено три технологии кормления (группы 1–4, 2–5, 3–6) и, соответственно, три различные продуктивности. Группы с номерами  $i = 7, \dots, 10$  – это ремонтное стадо, причем возможны только переходы (8–4), (9–5), (10–6). Группы с номерами  $i = 11, \dots, 17$  – это откормочное стадо. Здесь также предполагается три программы откорма, характеризующиеся как интенсивностью кормления, так и временем откорма.

Для удобства и единообразия описания всех переходов, происходящих в стаде животных, для любого графа введем дополнительно фиксированные вершины  $i_0, i_1, \dots, i_7$  и дуги, соединяющие эти вершины между собой и с вершинами основного графа.

Для описания модели введем следующие обозначения.

Пусть

$t$  – дискретное время (день);

$i$  – номер группы (вершины графа);

$G$  – множество всех вершин графа;

$G_i^+$ ,  $G_i^-$  – вершины графа, которые связаны входящими (исходящими) дугами с вершиной  $I$ ;

$r_i$  – время пребывания животных в группе  $I$ ;

$x_i(t)$  – численность  $i$ -й группы в день  $t$ ;

$u_{ij}(t)$  – количество животных, переходящих из  $i$ -й в  $j$ -ю группу в день  $t$ ;

$d_i(t)$ ,  $b_i(t)$  – смертность и плановая (среднестатистическая) выбраковка в  $i$ -й группе;

$v_i(t)$  – убой животных в  $i$ -й группе, превосходящий плановую выбраковку.

Внутри  $i$ -й группы происходят следующие изменения, которые отображены на рис. 2.

Количество животных  $\sum_{k \in G_i^+} u_{ki}(t)$ , поступивших в группу  $i$  в день  $t$ , находится в этой группе без изменения численности до последнего дня пребывания, равного  $r_i$ , и лишь в последний день происходит выбраковка и плановый убой животных.

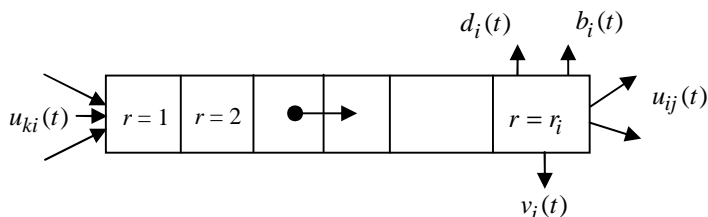


Рис. 2.

Отсюда следует, что справедливо следующее соотношение:

$$(1) \quad x_i(t+1) = x_i(t) + \sum_{k \in G_i^+} u_{ki}(t) - \sum_{j \in G_i^-} u_{ij}(t) - \\ - b_i(t) - d_i(t) - v_i(t), \quad t = 0, 1, \dots$$

Учитывая традиционный способ задания смертности и выбраковки соответствующими коэффициентами  $e_i^d$  и  $e_i^b$ , можно записать следующие соотношения:

$$(2) \quad \begin{aligned} b_i(t) &= e_i^b \sum_{k \in G_i^+} u_{ki}(t - r_i), \\ d_i(t) &= e_i^d \sum_{k \in G_i^+} u_{ki}(t - r_i). \end{aligned}$$

В каждой вершине сохраняется баланс потоков:

$$(3) \quad \sum_{j \in G_i^-} u_{ij}(t) = \sum_{k \in G_i^+} u_{ki}(t - r_i) - d_i(t) - b_i(t) - v_i(t).$$

Кроме того, имеются ограничения неотрицательности переменных

$$(4) \quad v_i(t) \geq 0, u_{ij}(t) \geq 0, x_i(t) \geq 0.$$

В этих соотношениях  $u_{ki}(-r_i), \dots, u_{ki}(-1)$  должны быть заданы.

Используя равенства (3), переменные  $v_i(t)$  можно исключить. Тогда ограничения (1) будут иметь вид

$$(5) \quad x_i(t+1) = x_i(t) + \sum_{k \in G_i^+} [u_{ki}(t) - u_{ki}(t - r_i)] - b_i(t) - d_i(t),$$

а условие  $v_i(t) \geq 0$  запишется в виде

$$(6) \quad \sum_{k \in G_i^-} u_{ki}(t - r_i) - \sum_{j \in G_i^-} u_{ij}(t) - b_i(t) - d_i(t) \geq 0.$$

Нетрудно видеть, что количество животных в группе до выбраковки и смерти в соответствии с принятой гипотезой осуществления этих событий равно

$$(7) \quad x_i'(t) = \sum_{k \in G_i^+} \sum_{s=1}^{r_i} u_{kr}(t - r_i + s),$$

а после –

$$(8) \quad \begin{aligned} x_i(t) &= x_i'(t) - d_i(t) - b_i(t) - v_i(t) = \\ &= x_i'(t) + \sum_{j \in G_i^-} u_{ij}(t) - \sum_{k \in G_i^+} u_{ki}(t - r_i). \end{aligned}$$

Это выражение и является решением системы разностных уравнений (1) и (5). Понятен тот факт, что в текущий момент времени количество животных в группе, если животные содержатся в



ней  $r_i$  дней, определяется только поступлениями в эту группу животных из других групп за  $r_i$  предыдущих дней и выбытием из нее в момент  $t$ .

Условие неотрицательности переменных  $x_i(t) \geq 0$  запишется в виде

$$(9) \quad \sum_{k \in G_i^+} \sum_{s=1}^{r_i} u_{ki}(t-r_i+s) + \sum_{j \in G_i^-} u_{ij}(t) - \sum_{k \in G_i^+} u_{ki}(t-r_i) \geq 0.$$

Таким образом, мы привели разные модели описания динамики стада животных. В зависимости от поставленной задачи можно рассматривать модели с разным набором переменных. Мы будем рассматривать модель, в которой присутствуют только потоки  $u_{ij}(t)$  и ограничения (6) и (9), в которых  $b_i(t)$  и  $d_i(t)$  заменены по формулам (2), а необходимые значения  $x_i(t)$  вычисляются по формулам (8). Такую модель, в которой переменными являются только потоки в сети, назовем потоковой моделью.

Для удобства и единообразия описания потоков в сети были введены дополнительные вершины  $i_0, i_1, \dots, i_7$  и необходимые дополнительные дуги, как это показано на рис. 1.

В вершинах  $i_0, i_1, i_2$  следует записать уравнения сохранения потоков в момент времени  $t$ :

$$(10) \quad \sum_{j \in G_i^-} u_{ij}(t) - \sum_{k \in G_i^+} u_{ki}(t) = 0, \quad i = i_0, i_1, i_2.$$

Вершины  $i_3, i_4, i_5, i_6$  являются источниками в рассматриваемой сети. Мощность этих источников равна количеству бычков, рождающихся в основном и ремонтном стадах (вершины  $i_6, i_4$ ) и, соответственно, телочек (вершины  $i_5, i_3$ ). Мощность этих источников равна

$$(11) \quad p_i(t) = \sum_{k \in \Omega_i} \sum_{j \in G_k^-} u_{ki}(t) b_k, \quad i = i_3, i_4, i_5, i_6,$$

где  $\Omega_i$  – множество групп животных, которые производят потомство и поставляют его в группу  $i$ ;  $b_k$  – коэффициент рождаемости бычков или телочек в  $k$ -й группе.

Для этих вершин, являющихся источниками, запишем уравнение баланса:

$$(12) p_i(t) = \sum_{j \in G_i^-} u_{ij}(t).$$

Для поглощающей вершины  $i_7$  никаких уравнений не записывается – она введена для единообразия описания и используется для подсчета получаемой мясной продукции.

Будем считать, что каждая группа животных кормится по жесткому рациону, потребляя в день  $t$  на каждую голову корма вида  $h$  в количестве  $w_h^j(t)$ ,  $h = 1, \dots, H$ . Тогда в день  $t$  для всех животных требуется корма вида  $h$  в количестве

$$(13) \sum_{i \in G} w_h^i(t) x_i'(t).$$

### 3. Агрегирование модели

Ясно, что приведенная выше модель с шагом в один день для проведения расчетов на длительную перспективу непригодна из-за большой размерности задачи. Проведем ее агрегирование по времени.

Разобьем каждый год на  $N$  интервалов, которые будем называть сезонами. Введем новое время  $t = 0, \dots, N\tilde{T}$ , которое является сквозной нумерацией сезонов от 0 до  $\tilde{T}$  лет. Пусть  $T_t$  – длительность временного интервала номера  $t$ , а  $t_t^0, t_t^k$  – его начало и конец на оси времен  $t$ . Обозначим также

$$\Delta_t = \left\{ t: t_t^0 \leq t \leq t_t^k \right\}.$$

Введем новые переменные  $U_{ij}(t)$ , такие что на интервале  $t$

$$(14) u_{ij}(t) = U_{ij}(t) / T_t.$$

$U_{ij}(t)$  означает количество животных, перешедших из  $i$ -й группы в  $j$ -ю за интервал номера  $t$ . Аналогично вводятся величины  $V_i(t), B_i(t), D_i(t)$ .

С учетом сказанного, для  $t \in D_t$  из (7) и (14) следует:

$$(15) x_i'(t) = \sum_{k \in G_i^+} \sum_{m=0}^{l_i(t)} a_{im}(t, t) U_{ki}(t - m),$$

где

$$\begin{aligned}
 a_{im}(t, t) &= d_{im}(t, t) / T_{t-m}, \\
 d_{im}(t, t) &= \left[ \min(t, t_{t-m}^k) - \max(t - r_i, t_{t-m}^0) \right]_+, \\
 l_i(t) &: t - r_i \in \Delta_{t-l_i(t)}, \\
 z_+ &= \max(0, z).
 \end{aligned}
 \tag{16}$$

Из (16) ясно, что  $a_{im}(t, t)$  – периодическая функция своих аргументов: по  $t$  – с периодом  $N$ , а по  $t$  – с периодом в один год.

Условие неотрицательности переменных  $x_i(t) \geq 0$  (условие (9)) мы будем записывать для конца интервала  $t$  в виде

$$\begin{aligned}
 \sum_{k \in G_i^+} \sum_{m=0}^{l_i(t_t^k)} a_{im}(t, t_t^k) U_{ki}(t - m) + \\
 + \sum_{j \in G_i^-} \frac{U_{ij}(t)}{T_t} - \sum_{k \in G_i^+} \frac{U_{ki}(t - l_i(t_t^k))}{T_{t-l_i(t_t^k)}} \geq 0.
 \end{aligned}
 \tag{17}$$

Условие неотрицательности переменных  $V_i(t) \geq 0$  получим, суммируя по  $t \in D_t$  ограничение (6) с учетом выражений (2). Предварительно вычислим сумму

$$\sum_{t=t_t^0}^{t_t^k} u_{ki}(t - r_i) = \sum_{m=0}^{l_i} e_{im}(t) U_{ki}(t - m),$$

где

$$\begin{aligned}
 l_i(t) &: t_t^0 - r_i \in \Delta_{t-l_i(t)}, \\
 e_{im}(t) &= \frac{1}{T_{t-m}} \left[ \min(t_{t-m}^k, t_t^k - r_i) - \max(t_{t-m}^0, t_t^0 - r_i) \right]_+.
 \end{aligned}$$

Принимая все это во внимание, соответствующее ограничение запишем в виде:

$$\sum_{k \in G_i^+} (1 - e_i^b - e_i^d) \sum_{m=0}^{l_i(t)} e_{im}(t) U_{ki}(t - m) - \sum_{j \in G_i^-} U_{ij}(t) \geq 0
 \tag{18}$$

Запишем, наконец, агрегированные ограничения по кормам. Для этого вычислим предварительно следующую сумму

$$(19) \quad X_i(t) = \sum_{t=t_t^0}^{t_t^k} x_i(t) = \sum_{k \in G_i^+} \sum_{m=0}^{l_i(t)} c_{im} U_{ki}(t-m),$$

где

$$c_{im}(t) = \sum_{t=t_t^0}^{t_t^k} a_{im}(t, t).$$

Коэффициенты  $c_{im}(t)$  можно представить в следующем виде:

$$(20) \quad c_{im}(t) = \left[ \min(b_i^k, t_{t-m}^0) - \min(t_{t-m}^0, b_i^0) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2T_{t-m}} \left[ a_i^0(1+a_i^0) - a_i^k(1+a_i^k) \right] \right] \times \text{sgn}(m) + \\ + \frac{1}{T_t} \left[ \frac{g_i(1+g_i)}{2} + r_i(T_t - r_i)_+ \right] \times (1 - \text{sgn}(m)),$$

где

$$b_i^o = t_t^0 - r_i, \quad b_i^k = t_t^k - r_i, \quad g_i = \min(r_i, T_t), \\ a_i^0 = \min(T_{t-m}, (t_{t-m}^k - b_i^o)), \\ a_i^k = \max(0, t_{t-m}^k - b_i^k).$$

Если обозначить  $D_T$  – множество номеров временных интервалов  $t$ , принадлежащих году  $T$ , то агрегированные ограничения по кормам можно представить в виде следующих неравенств, которые необходимо записать для каждого вида корма  $h$  и каждого года  $T$ .

$$(21) \quad \sum_{t \in D_T} \sum_{i \in G} w_h^i(t) X_i(t) \leq x_h(T).$$

Здесь  $x_h(T)$  – годовой запас корма вида  $h$

Последнее замечание. В ограничениях (10)–(12) переменные  $u_{ij}(t)$  надо заменить на агрегированные переменные  $U_{ij}(t)$ .

Заметим также, что данная модель применима для любой отрасли животноводства и даже птицеводства. В каждом конкретном случае меняется только структура графа и содержательный смысл вершин.

#### 4. Производство животноводческой продукции

Будем рассматривать производство животноводческой продукции на интервале  $\tilde{T}$  лет. С учетом введенных обозначений производство мяса в год  $t$  равно

$$F_1(T) = \sum_{i \in G} \sum_{t \in D_T} p_i^1 [U_{i_{i_7}}(t) + V_i(t) + B_i(t)],$$

где  $p_i^1$  – вес животного  $i$ -й группы.

Производство молока равно

$$F_2(T) = \sum_{i \in G} \sum_{t \in D_T} p_i^2 T_t X_i(t),$$

где  $p_i^2$  – дневной удой животных  $i$ -й группы (если животные этой группы потребляют молоко, то эта величина отрицательная).

В качестве обобщенного показателя производства животноводческой продукции КРС в год  $T$  будем рассматривать свертку критериев  $F_1$  и  $F_2$  вида

$$(22) F(T) = I F_1(T) + (1 - I) F_2(T), \quad 0 \leq I \leq 1.$$

На рассматриваемом интервале времени соответствующий критерий будет иметь вид

$$(23) F = \sum_{T=1}^{\tilde{T}} F(T).$$

#### 5. Оптимизационная задача производства животноводческой продукции на заданном временном интервале при известной информации о кормовой базе

Рассмотрим производство животноводческой продукции некоторого стада домашних животных. Для определенности будем считать, что это стадо КРС, половозрастная структура которого задается графом, представленным на рис. 1.

Как уже было сказано выше, группы с номерами  $i = 1, \dots, 6$  — это основное стадо. Последние три группы —

дойное стадо. Продуктивность дойного стада:  $p_4 = 8$  кг,  $p_5 = 10$  кг,  $p_6 = 12$  кг молока в сутки. Соответственно изменяются и режимы кормления, которые взяты из соответствующих справочников.

Ремонтное стадо:  $i = 7, 8, 9, 10$ . Сначала молодой корова кормится одинаково (группа 7), затем, в зависимости от планируемой продуктивности, переводится в группы 8, 9, 10. Из этих групп возможны только переходы (8–4), (9–5), (10–6).

Откормочное стадо:  $i = 11, \dots, 17$ . Сначала весь откормочный молодой корова кормится одинаково в группе с номером 11, а затем возможны три технологии откармливания: интенсивная ( $i = 12, 15$ ) и две умеренные ( $i = 13, 16$ ), ( $i = 14, 17$ ), отличающиеся количеством и составом потребляемого корма и временем откармливания.

Конечный вес откармливаемых животных соответственно равен 450, 420, 400 кг.

Времена пребывания животных во всех группах равны: 60, 60, 60, 305, 305, 305, 365, 120, 120, 120, 120, 180, 180, 180, 180, 240, 240 дням.

В качестве компонент корма рассматривались концентрированные корма и все остальные. Число сезонов в году  $N = 1$ .

Будем рассматривать функционирование стада на интервале  $[0, \tilde{T}]$  лет. Будем также считать, что кормовая база на этот период известна.

Пусть в начальный момент заданы значения  $x_i(0)$ . Требуется найти управления  $U_{ki}(0), U_{ki}(1), \dots, U_{ki}(\tilde{T})$ ,  $k, i \in G$ , доставляющие максимум функционалу (23) при ограничениях (10)–(12), в которых переменные  $u_{ij}(t)$  надо заменить на агрегированные переменные  $U_{ij}(t)$ , и ограничениях (17), (18), (21). В последнем ограничении  $X_i(t)$  надо заменить по формулам (19).

Чем интересна эта задача? Традиционно в планировании считается, что планируемое производство животноводческой продукции можно определить, зная только средние значения потребляемых кормов. Решая подобные задачи, можно выяснить, насколько влияет изменчивость кормовой базы на производство животноводческой продукции.

Поскольку мы будем решать задачу максимизации функционала на конечном интервале времени, на правом конце надо добавить дополнительные ограничения, гарантирующие сохранность стада в последний год. Добавленные ограничения требовали, чтобы в последний год численность в основном, ремонтном и откормочных стадах были не меньше среднего значения за весь интервал.

Расчеты проводились при фиксированном значении параметра  $I$ , гарантирующем необходимое соотношение производства молока и мяса, и заданном временном ряде кормов. Временные ряды  $x_1(T)$  и  $x_2(T)$  полностью коррелированы. Характер изменения временных рядов представлен на рис. 3.

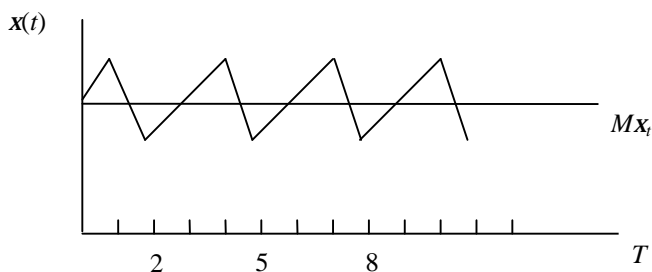


Рис. 3.

Характеристика разброса значений такого ряда  $D = \left( \max_T x(T) - Mx(T) \right) / Mx(T)$  будет использована в дальнейшем. Средние значения этих рядов  $Mx_1 = 1000$ ,  $mx_2 = 450$ .

Естественно, что граничные условия влияют на решение оптимизационной задачи. Для выявления этого влияния были проведены расчеты с разными начальными условиями и с различными временными интервалами. Оказалось, что влияние правого конца и начальных условий сказывается только на начальных и последних 2–3 годах. Таким образом, отступив от начала и конца по 3 года, мы можем анализировать качественные свойства решений этой задачи.

Зафиксировав начальную структура стада, полученную из решения стационарной задачи, были проведены расчеты для

интервала в 15 лет с  $D = 0\%$ ,  $10\%$ ,  $20\%$ ,  $30\%$ . Вариант с  $D = 0\%$ , как и следовало ожидать, дал постоянное в течение всего времени стадо и постоянное производство продукции. В других вариантах численности групп животных меняются значительно, а зависимость оптимального значения функционала от параметра  $D$  почти линейна и такова, что теряется около  $0,7\%$  агрегированной продукции на каждый  $1\%$  показатель изменчивости корма  $D$ . Это очень большая величина, показывающая, что неучет изменчивости кормовой базы может привести к значительным ошибкам в планировании.

После анализа всех рассмотренных вариантов можно сделать некоторые качественные выводы. В оптимальных решениях никогда не выбирались технологии с наименьшей продуктивностью и с наименьшей потребностью в корме. Всегда имеется в некоторых группах ненулевой забой животных. Наблюдается следующая закономерность: при малых значениях параметра  $D = 10\%$  выбраковка производится в группах откормочного стада (в годы  $T = 5, 8, 11$ ), но основное стадо не трогается. Для  $D = 20\%$  происходит выбраковка в откормочном стаде, а в годы  $T = 4, 7, 10$  происходит выбраковка и в основном стаде. При  $D = 30\%$  характер стратегии выбраковки не меняется, увеличивается лишь численность забиваемых животных. Во всех рассмотренных случаях ремонтное стадо не выбраковывалось.

Конечно, к этим качественным выводам надо относиться осторожно, поскольку они проводились на временных рядах определенного вида, но проведенные расчеты показывают, что учитывать изменчивость кормовой базы при планировании производства животноводческой продукции просто необходимо.

## **6. Задача оперативного управления в животноводческой отрасли**

Как было сказано во введении, кормовая база подвержена влиянию случайных погодных и других неопределенных факторов. К этим неопределенным факторам можно отнести, например, количество закупаемых кормов. В данном случае мы мо-



жем лишь рассматривать некоторые возможные прогнозные варианты.

Разработанные выше потоковые модели и аппарат решения динамических задач мы применим к решению задачи оперативного управления в животноводстве.

Одним из способов оперативного управления является способ, иногда называемый скользящим управлением, когда на ряд лет вперед задается прогноз неопределенных факторов и текущее управление принимается из условия достижения максимума некоторого функционала. Мы модифицируем этот метод и применим его к решению задачи оперативного управления. Будем считать, что начало года совпадает с началом стойлового периода, когда сделаны основные запасы корма. Сделаем еще одно упрощающее предположение, что известны все корма до конца года, включая те, которые будут выращены до начала следующего стойлового периода. Это нам нужно для того, чтобы интервал планирования можно было бы принять равным календарному году.

Рассмотрим следующую задачу управления.

К началу текущего года  $t$  известен годовой запас кормов  $x(t)$ . Кроме того, известен прогноз кормов на следующие годы:  $x(t + 1)$ ,  $x(t + 2)$ , ... . Найдем максимум функционала типа (22), но, вообще говоря, на бесконечном интервале времени. Из всей последовательности оптимальных управлений зафиксируем только управление  $U(t)$  – вектор оперативного управления в год  $t$ . К началу следующего года  $(t + 1)$  будет известна информация о кормах на этот год и детерминированный прогноз на все последующие годы. Решим аналогичную задачу, полученное управление  $U(t + 1)$  примем в качестве оперативного управления в год  $(t + 1)$ , перейдем к следующему году  $(t + 2)$  и т.д.

Для реализации описанной процедуры на каждом шаге нужно, вообще говоря, решать оптимизационную задачу на бесконечном интервале времени. Это гарантирует от влияния величины рассматриваемого интервала на выбор управления на начальной стадии процесса. Заметим, что при решении задачи в момент  $t$  нам нужно избежать влияния интервала планирования только на текущее управление.

Пусть  $U(t, T)$  – управление, относящееся к году  $t$ , полученное в результате решения оптимизационной задачи в  $t$ -й год на интервале времени величиной  $T$ . Предположим, что верна следующая гипотеза: существует такое  $\hat{T}$ , что для всех  $T \geq \hat{T}$ :  $U(t, T) = U(t, \hat{T})$ . В этом случае мы можем ограничиться решением задачи на конечном интервале времени. Конкретные расчеты показали справедливость этой гипотезы, но интервал планирования нужно выбирать довольно большой, по крайней мере не менее 11 лет.

*Метод р-траекторий оперативного управления*

Опишем сейчас модификацию метода скользящего планирования, который применялся для решения задачи оперативного управления.

Как правило, информация об урожайности культур в регионе весьма скудна – это ряд измерений за небольшое число лет. Кроме того, обычно в регионе часть концентрированных кормов является привозной, и в данном случае говорить о вероятностной природе таких поставок весьма затруднительно.

Для вычисления ожидаемого за период планирования производства воспользуемся следующим подходом. Будем считать, что из наблюдаемого состояния  $x(t)$  возможны  $n(t)$  прогнозных траекторий  $x^i(t)$ , которые реализуются с вероятностями  $p_i(x^i(t))$ ,  $\sum_i p_i = 1$ . В качестве таких траекторий могут быть

взяты траектории, сформированные из наблюдаемых рядов (подробнее об этом будет сказано ниже), а по концентрированным кормам можно рассмотреть несколько вариантов поставок этих кормов с весами, интерпретируемыми как соответствующие вероятности. В этих предположениях величина ожидаемого производства за  $T$  лет равна

$$(24) F = \sum_{t=0}^T e^{-qt} \sum_{i=1}^{n(t)} p_i(x^i(t)) F_i(x^i),$$

где  $F_i(x^i(t))$  – производство продукции на траектории  $i$ , вычисляемое по формуле (23), а  $q$  – коэффициент дисконтирования.

Далее применяется метод скользящего планирования с функционалом (24) при условии

$$U^1(t) = U^2(t) = \dots = U^{n(t)} = U(t).$$

*Результаты численных экспериментов.*

Для исследования эффективности метода  $p$ -траекторий были проведены расчеты на реальной информации. В качестве исходных данных для кормовой базы был принят 13-летний ряд урожайностей кормовых культур в одной из областей. Эти значения были нормированы таким образом, что среднее значение урожая равно 1000 тонн кормовых единиц, а поставки концентрированных кормов считались постоянными во времени и равны 450 т. Нормированный ряд кормов представлен на рис. 4.

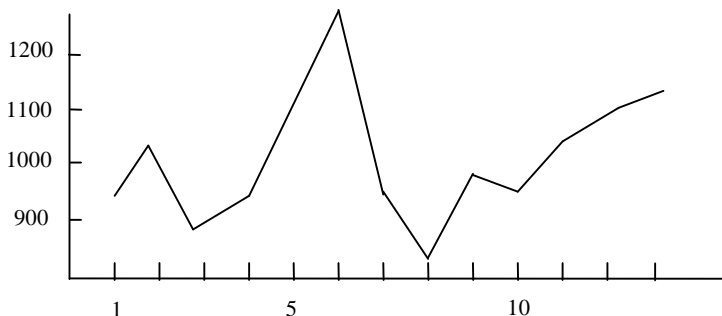


Рис. 4. Построение  $p$ -траекторий

Прогнозные траектории строятся из известного ряда наблюдаемых значений. Для этого в известном ряде отыскиваются значения, отличающиеся на малую величину от значений в год  $t$ . Пусть эти значения соответствуют годам  $t_j(t)$ ,  $j = 1, \dots, n(t)$ . Тогда из известного ряда, начиная с этих годов  $t_j(t) + 1$  строятся прогнозные ряды –  $p$ -траектории.

Длина прогнозного ряда должна быть равна  $T$  годам – выбранному интервалу расчетов. Если прогнозный ряд не позволяет построить прогнозный ряд такой длины, то проводится циклическое продление ряда: начиная с начала исходного ряда в нем отыскиваются значения, отличающиеся на малую величину

от последнего значения в исходном ряде, и по только что описанной методике строятся продолжения исходного ряда (их, естественно, может быть несколько). В том случае, если в исходном ряде нет значений, отличающихся на малую величину от заданного значения, в качестве прогноза берется ряд нужной длины, состоящий из постоянных значений, равных среднему значению исходного ряда. После этого каждой траектории приписывается некоторый вес. Таким образом,  $p$ -траектории строятся из отрезков исходного ряда.

Был проведен следующий численный эксперимент. Сначала была решена задача с одной  $p$ -траекторией, совпадающей с заданным рядом, приведенным на рис. 4., т.е. была решена задача с полностью известной информацией. Решение этой задачи было использовано для оценки управления, вырабатываемого с помощью метода  $p$ -траекторий. Затем на интервале  $\hat{T}$  лет решалась задача оперативного управления, т.е. каждый год, исходя из информации, представленной в виде временного ряда, строились  $p$ -траектории и решалась соответствующая оптимизационная задача. Полученные решения сравнивались по функционалу с решением задачи с полной информацией. Проведенные расчеты показали, что предлагаемый метод дает вполне приличный результат – на интервале  $\hat{T}$  лет он проигрывает по функционалу решению с полной информацией меньше, чем на 5%.

### Литература

1. БАЙРАМОВ О.Б. *Математические модели оценки предельной продуктивности животноводства*. – М.: ВЦ РАН, 1999. – 23 с.
2. БЕРГ Р.Т., БАТТЕРФИЛД Р.М. *Мясной скот: концепция роста*. – М.: Колос, 1979. – 280 с.
3. БРАСЛАВЕЦ М.Е., КРАВЧЕНКО Р.Г. *Математическое моделирование экономических процессов в сельском хозяйстве*. – М.: Колос, 1972. – 589 с.

4. ВЕЛИКОРОСОВ Н.В. *Математическое моделирование развития животноводческого комплекса. Детерминированные и стохастические модели*: Дис. канд. физ.-мат. наук. – Москва, 1991.
5. ГАЙКО А.А., ГОЛУБИЦКИЙ А.П. *Справочник по скотоводству*. – Мн.: Ураджай, 1984. – 310 с.
6. ГЕНДИНА Л.А. *Использование нелинейных динамических моделей для анализа возможности оптимизации баланса кормов и поголовья сельскохозяйственных животных в условиях неопределенности*: Дис. канд. физ.-мат. наук. – Москва, 1988.
7. ГРИГОРЬЕВ Н.Г., ВОЛКОВ Н.П., ВОРОБЬЕВ Е.С. и др. *Биологическая полноценность кормов*. – М.: Агропромиздат, 1989. – 289 с.
8. ЕРМОЛЬЕВ Ю.М., ЯСТРЕМСКИЙ А.И. *Стохастические модели и методы в экономическом планировании*. – М.: Наука, 1979. – 251 с.
9. ИЛЬЮШОНОК С.Е. *Оптимизация темпов и пропорций развития аграрно-промышленного комплекса*. – Новосибирск, 1980. – 304 с.
10. КАЛАШНИКОВ А.П., КЛЕЙМЕНОВ Н.И., БАКЛАНОВ В.Н. и др. *Нормы и рационы кормления сельскохозяйственных животных*. – М.: Агропромиздат, 1985. – 352 с.
11. КАРДАШ В.А. *Модели управления производственно-экономическими процессами в сельском хозяйстве*. – М.: Экономика, 1981. – 210 с.
12. КИСЕЛЕВ В.Г. *Управление процессом функционирования одного класса популяций* // Труды института системного анализа РАН «Динамика неоднородных систем». – 2008. – Т. 32.2. – С. 40–47.
13. КРАВЧЕНКО Р.Г. *Математическое моделирование экономических процессов в сельском хозяйстве*. – М.: Колос, 1978. – 423 с.
14. КРЫЛАТЫХ Э.Н. *Система моделей в планировании сельского хозяйства*. – М.: Экономика, 1981. – 210 с.

15. *Моделирование перспективного планирования развития скотоводства* (рекомендации ВНИПТИК). – М.: Агропромиздат, 1990. – 14 с.
16. ОГНИВЦЕВ С.Б. *Моделирование перспективного планирования развития скотоводства*. – М.: Агропромиздат, 1990. – 14 с.
17. ОГНИВЦЕВ С.Б., СИПТИЦ С.О. *Моделирование АПК: теория, методология, практика*. – М.: Энциклопедия российских деревень, 2002.
18. ФРАНС ДЖ., ТОРНЛИ ДЖ, *Математическое моделирование в сельском хозяйстве*. – М.: Агропромиздат, 1987. – 273 с.
19. ХУДЯКОВА Е.В., ЛИПАТОВ А.А. *Имитационное моделирование экономических процессов в АПК*. Учеб. пособие. – М.: Издат. центр МГАУ, 2006. – 185 с.

## **NETWORK MODELS OF CONTROL IN STOCK BREEDING BRANCH OF AGRICULTURAL SECTOR**

**Valeriy Kiselev**, A. A. Dorodnicyn Computing Center of RAS, Moscow, Cand.Sc., assistant professor (vgkiselev@yandex.ru).

*The network model of cattle stock dynamic is suggested. The models of this sort are shown to be useful for operative control under stochastic forages.*

Keywords: network model, operative control, optimization, stock breeding.

*Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии М. В. Губко*

УДК 681.5.09  
ББК 32.965

## БЕЗОПАСНОЕ УПРАВЛЕНИЕ СЛОЖНЫМИ ТЕХНИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

**Аншаков Г. П.<sup>1</sup>**

*(Государственный научно-производственный ракетно-космический центр ЦСКБ-ПРОГРЕСС, г. Самара)*

**Мостовой Я. А.<sup>2</sup>**

*(Самарский государственный аэрокосмический университет, г. Самара)*

*Рассматриваются критические по безопасности сложные системы, состоящие из большого числа механических и электронных подсистем, чьей работой нужно взаимосвязанно управлять. Безопасное управление такими сложными техническими системами (СТС) базируется на богатых возможностях встроенной вычислительной техники по контролю состояния подсистем и СТС в целом и принятию решений по управлению в нештатных ситуациях. Вопросы безопасного управления СТС рассмотрены исходя из опыта создания бортовых комплексов управления космическими аппаратами.*

Ключевые слова: сложные технические системы, информационная безопасность, управление, критические системы, программное обеспечение.

### **1. Введение**

Прекращение нормального функционирования критических по безопасности эксплуатации сложных технических систем

---

<sup>1</sup> Геннадий Петрович Аншаков, зам. генерального конструктора, член-корр. РАН, доктор технических наук, профессор (443009, г. Самара, ул. Земеца, 18, , тел.(8462) 9926198, e-mail: csbd@mail.samtel.ru).

<sup>2</sup> Яков Анатольевич Мостовой, доктор технических наук, профессор (443086. Россия, Самара, Московское шоссе, 34,тел. (8462) 3378084).

(СТС) ведет к большим экономическим потерям, ущербу окружающей среде или гибели людей. Использование в СТС системной ЦВМ и аппаратуры со встроенными ЦВМ, образующими локальную сеть, позволяет реализовать при создании критических СТС эффективную стратегию безопасности.

Безопасность информационных взаимодействий определяется защищенностью информации и поддерживающей инфраструктуры от случайных или преднамеренных воздействий, могущих принести ущерб субъектам информационных взаимодействий.

Без преувеличений можно сказать, что наибольший ущерб субъектам и объектам информационных отношений в СТС наносят сбои и отказы аппаратуры СТС и ошибки в программном обеспечении (ПО) системной и встроенных в аппаратуру ЦВМ [3, 4]. Практика показывает, что не редки также ошибки эксплуатирующего персонала при задании данных для работы ПО СТС, приводящие к тяжелым последствиям для СТС.

В связи с этим вопросы защиты от злоумышленных действий и внешних атак на СТС, в том числе и с применением вредоносного ПО, в данной статье не рассматриваются, поскольку авторы являются сторонниками изоляции критических СТС, обеспечивающей их информационную безопасность.

При выстраивании стратегии информационной безопасности критических систем прежде всего необходимо рассмотреть принципы создания безопасного ПО с учетом того, что системное свойство «безопасность» должно сохраняться и в том случае, когда свойство «безотказность» уже нарушено.

## **2. Принципы создания безопасного программного обеспечения критических СТС**

В основе концепции обеспечения безопасности ПО лежат несколько базовых идей, которые уже используются и развиваются.

1. Повышение безотказности (безошибочности) ПО посредством

– уменьшения первичного потока ошибок за счет применения эффективных технологий проектирования ПО;



– конструирования толерантного (устойчивого) к ошибкам ПО. В настоящее время создание в полной мере толерантного ПО для практических применений представляется нереалистичным. Однако создание ПО, толерантного не в полной мере, но обеспечивающего «мягкий останов» ПО и СТС при проявлении ошибки в ПО или исходных данных, является задачей вполне выполнимой (см. ниже);

– проведения отладки ПО с четко сформулированными целями и критериями отлаженности, с использованием эффективных инструментальных средств, например, имитационной математической модели внешней среды – модели, позволяющей воспроизводить детали межпрограммных взаимодействий ПО во всех вариантах эксплуатации СТС.

2. Принцип изоляции при создании ПО и СТС должен быть использован везде, где это возможно, и не только в части внешних связей СТС с окружающей средой, но и во внутренней среде – путем изоляции отдельных процессов управления СТС в рамках имеющихся функциональных возможностей.

Использование принципа изоляции позволяет сохранить «непотопляемость системы» при нарушении целостности ее «информационных отсеков», препятствуя распространению ошибочной информации и обеспечивая решение задач информационной устойчивости [1, 2]. При решении задачи изоляции необходимо, однако, обеспечить возможность реализации необходимых связей между структурными частями СТС, связей между СТС и системами более высокого уровня иерархии.

Поскольку связи подсистем в рассматриваемых СТС осуществляются на программном уровне системной ЦВМ, изоляцию и взаимодействие процессов необходимо обеспечивать соответствующим распределением памяти, защитой этого распределения средствами системной ЦВМ и ее операционной системы, реализацией межпроцессного обмена информацией только через операционную систему.

3. Невозможно создать на нынешнем технологическом уровне большое абсолютно защищенное ПО. Но возможно сформировать небольшое усиленно защищенное ядро безопасности, принимающее все решения, касающиеся защиты ПО. Таким

ядром для ПО является программа управления в нештатных ситуациях – программа «аварийной защиты». Всё остальное ПО будет действовать на менее защищенных уровнях.

4. Фиксированный набор задач, решаемых встроенными в системы ЦВМ, позволяет применить для хранения ПО и используемых констант постоянное запоминающее устройство (ПЗУ). При этом повышается защищенность ПО, так как изменение информации в ПЗУ связано с использованием специальных технических средств, санкционированное привлечение которых существенно ограничивается.

5. Для многих СТС условия их работы не позволяют оперативно проводить коррекцию ПО встроенных ЦВМ из-за отсутствия прямого физического доступа, а также из-за использования для хранения ПО ПЗУ. Однако доступность оперативной коррекции ПО может стать для таких систем важным преимуществом, влияющим на безопасность, например, в случаях устранения ошибок ПО или компенсации ошибок аппаратуры СТС путем изменения алгоритма обработки информации с нее. Применение технологий, позволяющих дистанционно и оперативно корректировать ПО, является еще одним способом обеспечения безопасности ПО СТС.

Эта корректировка должна проводиться либо без прекращения процесса функционирования СТС, либо с переводом СТС в запасное устойчивое состояние, в котором ее функционирование ограничено и безопасно.

### **3. Системные методы, реализующие безопасное управление СТС**

В рамках рассматриваемой стратегии можно выделить ряд общесистемных методов по обеспечению информационной безопасности, которые лучше изложить на примере бортового комплекса управления космического аппарата (БКУ КА).

1. Составление при проектировании СТС перечня аварийных (нештатных ситуаций), выход из которых также прорабатывается на стадии проектирования СТС. Рассмотрение этого перечня, методов распознавания этих ситуаций и методов выхода из них приводит к созданию:

- ситуационных планов управления в нештатных ситуациях, которые в конечном итоге оформляются в виде инструкций по управлению в эксплуатационной документации;

- программ бортового ПО, обеспечивающих автономное управление в нештатных ситуациях и реализующих, в том числе, функцию «аварийной защиты» СТС.

Для реализации этой защиты в бортовое ПО вводится перечень возможных нештатных ситуаций и сценарии выхода из них, связанные с разной степенью вынужденного, но допустимого ухудшения качества функционирования СТС.

2. Создание методов встроенного контроля работоспособности подсистем СТС и бортового ПО, который осуществляется на многих уровнях:

- аппаратными средствами системной ЦВМ с выходом на внутренние прерывания в случае обнаружения аппаратурой ЦВМ нештатных ситуаций типа переполнения регистра результатов, нарушения распределения памяти, «зависания» и т.п.;

- средствами операционной системы бортовой ЦВМ обобщенно с выходом на программное прерывание в случае обнаружения нештатных ситуаций типа превышения допустимого времени занятости процессора одной задачей, занесения отрицательной уставки времени и т.п.;

- средствами бортового ПО, осуществляющими функциональный контроль типа выполнения заданной функции за заданное время и т.п. Эти средства распределены по функциональным алгоритмам бортового ПО.

3. Создание методов, обеспечивающих возможность оперативной и дистанционной коррекции по радиолинии «защитого» в ПЗУ бортового программного обеспечения в процессе эксплуатации КА на орбите.

По мере развития электронных технологий последовательно разрабатывались различные варианты такой коррекции, причем все они сохранили свое значение и могут быть использованы совместно.

Технология коррекции программ ПЗУ в полете базировалась на предусмотренной при проектировании бортового ПО возможности обхода исполнения тех или иных участков про-

грамм в ПЗУ с заменой их на фрагменты программ, передаваемых на борт по радиолинии. После появления в бортовой ЦВМ флеш-памяти были созданы технологии коррекции содержимого флеш-памяти, в том числе без прекращения штатного функционирования БЦВМ.

4. Использование принципа изоляции СТС не должно препятствовать доступности операций ввода в ПО СТС необходимых для нее исходных данных и получения информации с результатами работы СТС. Поэтому внешние связи СТС с системами более высокого уровня иерархии должны быть реализованы с использованием пограничного контроля на межсетевых экранах, средств шифрования сообщений из систем более высокого уровня иерархии и т.п. [3]. Шифрование данных и формирование контрольной суммы ПО позволили решить проблему информационной безопасности достаточно эффективно. Это соответствует подходу, когда защищаются собственно данные, а не элементы информационной инфраструктуры, участвующие в получении, хранении, и передачи данных. Но при этом обязательна защита данных на всем пути их продвижения.

Также целесообразна сеансная работа канала связи с СТС, когда вне сеанса связи канал закрывается. Опыт эксплуатации КА подтверждает эффективность этих мероприятий.

5. Контроль за функционированием СТС посредством записи, сбора и передачи на Землю в виде телеметрической информации (ТМИ) всех событий на борту КА, а также дискретной записи состояний его внутренней среды. Назначаемый период дискретизации позволяет восстановить параметры всех физических процессов, протекающих на борту КА.

6. Создание резервов аппаратуры СТС, обеспечивающих выполнение целевой функции СТС с заданной вероятностью. Если для СТС методы обеспечения надежности, связанные с внесением избыточности в аппаратные средства, являются вполне достаточными для сохранения целостности и доступности информации, то для системной ЦВМ, реализующей функции аварийной защиты при возникновении в СТС нештатных ситуаций, требуется обеспечение отказосбоеустойчивости. Свойство отказосбоеустойчивости просто подключением резервной аппаратуры (вместо отказавшей) не обеспечивается даже при автоматизи-

ческом переходе на резерв по результатам работы встроенного контроля – необходимо сохранять также и информационную устойчивость.

Здесь под информационной устойчивостью понимается свойство восстановления информации после ее искажения вследствие сбоя, отказа или информационной атаки. Именно наличие организованной при проектировании СТС информационной устойчивости позволяет продолжить штатное функционирование СТС после подключения резервных устройств взамен отказавших. Методы обеспечения информационной устойчивости рассмотрены в [1, 2].

7. Проведение стендовых испытаний СТС, при которых используется реальное системное ПО, совместно с реальной системной ЦВМ. В составе стенда реальное ПО работает совместно с имитационной математической моделью внешней среды, структура и характеристики которой позволяют реализовать все варианты работы системы в штатных и нештатных ситуациях.

Задействование такого стенда позволяет предварительно моделировать и отрабатывать все управленческие решения в нештатных ситуациях перед тем как использовать их в реальной СТС.

Требование к имитационной математической модели внешней среды в этом случае такие же, как при отладке бортового ПО – полностью «подыгрывать» прохождению потоков данных в бортовом ПО для всех вариантов его использования. При отладке ПО используются специальные отладочные наборы входных данных, а для проверки управленческих решений – реальные данные СТС в конкретной ситуации.

Использование этого стенда в контуре управления СТС для контроля правильности подготовленных исходных данных перед их вводом в СТС представляется важным и полезным, так как объем и структура исходных данных для работы СТС могут быть весьма значительными и, как показывает опыт, их подготовка сопровождается частыми ошибками.

Принцип изоляции процессов управления в СТС (см. раздел 2, п. 2) доставляет весьма эффективное средство обеспечения информационной безопасности. Так, итальянская

научная аппаратура «Памела», установленная на КА «Ресурс-ДК» [2], имела выход на бортовую локальную сеть по ГОСТ 26765.52–87 (1553В), по которой она управлялась со стороны БКУ КА и по которой она передавала полученную ею научную информацию в радиолинию БКУ для передачи на Землю.

Наличие «чужой» активной аппаратуры иностранного производства в одной локальной сети шинной топологии с целевой аппаратурой, аппаратурой системы угловой ориентации и стабилизации и т.п. КА создавало дополнительную проблему безопасности, так как работа в сети в принципе могла быть нарушена при отказах аппаратуры «Памела», качество разработки и изготовления которой нами не контролировалось. Задача обеспечения безопасности была решена путем изоляции аппаратуры «Памела» на специально выделенной для нее локальной бортовой сети. При этом в системной бортовой ЦВМ БКУ пришлось установить второй сетевой адаптер, специально выделенный под аппаратуру «Памела», благо что техническая возможность этого имела.

Рассмотренные методы обеспечения информационной безопасности для КА имеют общенаучное и общетехническое значение и могут быть применены для любой сложной технической системы, использующей в своем составе ЦВМ или сеть ЦВМ.

### ***Литература***

1. АНШАКОВ Г.П., МОСТОВОЙ Я.А., СОЛЛОГУБ А.В. *Устойчивость информационных взаимодействий в сложных технических системах* // Труды VI международной конференции по проблемам управления и моделирования в сложных системах, Самарский НЦ РАН, ИПУСС РАН, г. Самара, 2004. – С. 425–430.
2. АХМЕТОВ Р.Н., МОСТОВОЙ Я.А., СОЛЛОГУБ А.В. *Информационная устойчивость управления сложными техническими системами* // Труды IX международной конференции по проблемам управления и моделирования в сложных системах, Самарский НЦ РАН, ИПУСС РАН, г. Самара, 2007. – С. 264–272.

3. ГАЛАТЕНКО В.А. *Основы информационной безопасности*. – М.: Интернет-Университет Информационных Технологий. Бином. Лаборатория знаний, 2008. – С. 205.
4. КОЗЛОВ Д.И., АНШАКОВ Г.П., МОСТОВОЙ Я.А., СОЛЛОГУБ А.В. *Управление космическими аппаратами зондирования земли: Компьютерные технологии*. – М.: Машиностроение, 1998. – 386 с.

## SAFE CONTROL IN COMPLEX TECHNICAL SYSTEMS

**Gennadiy Anshakov**, CSBD–PROGRESS, Samara, Deputy the General constructor, member of the cortexes RAS, doctor of technical sciences, professor (443009, Samara, Zemeca str., 18, e-mail: csbd@mail.samtel.ru, tel.(8462) 9926198).

**Jakob Mostovoi**, SSAU, Samara, doctor of technical sciences, professor (443086, Russia, Samara, Moscow freeway, 34, tel. (8462) 3378084).

*Abstract: We consider safety-critical complex systems consisting of a large number of mechanical and electronic subsystems to be controlled and coordinated. Safe control in such complex technical systems (CTS) is based on the capabilities of the built-in computing machinery to monitor states of the subsystems and the CTS as a whole and to make control actions in contingency situations. The problems of safe control in CTS are considered on the basis of authors' experience of on-board complexes control systems development for space vehicles.*

Keywords: complex technical systems, information safety, control, critical systems, software.

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии Д. А. Новиковым*

УДК 536.7 + 519.85  
ББК 78.34

## **МЕТОДЫ ТЕПЛОГИДРАВЛИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ И УПРАВЛЕНИЯ ТЕПЛОВЫМИ СЕТЯМИ**

**Майков И. Л.<sup>1</sup>, Директор Л. Б.<sup>2</sup>, Зайченко В. М.<sup>3</sup>**

*(Учреждение Российской академии наук*

*Объединенный Институт высоких температур РАН,  
Москва)*

*Представлен метод решения одной из практически важных задач, связанных с эффективным теплоснабжением абонентов тепловых сетей, как в случае сильной гидравлической разбалансировки сети (статическая задача), так и при изменениях тепловых нагрузок в процессе эксплуатации (динамическая задача). Разработан численный метод для анализа и оптимизации тепловых сетей, позволяющий решать задачи оптимизации и управления тепловой сетью с большим количеством абонентов с целью реализации оптимального режима теплоснабжения. Показано, что и статическая, и динамическая задачи могут быть решены в рамках одной общей нелинейной оптимизационной задачи. Разработан алгоритм решения такой задачи, в котором минимизация целевой функции осуществляется в итерационном процессе с использованием метода покоординатного спуска.*

Ключевые слова: математическое моделирование, нелинейная оптимизация, задачи минимизации, численные методы, тепловые сети.

---

<sup>1</sup> Игорь Леонидович Майков, доктор физико-математических наук, в.н.с. (maikov\_i@mail.ru).

<sup>2</sup> Леонид Бенцианович Директор, доктор технических наук, в.н.с. (director@oivtran.ru).

<sup>3</sup> Виктор Михайлович Зайченко, доктор технических наук, зав. лаб. (zaitch@oivtran.ru).



## **1. Введение**

Тепловые сети предприятий или городских микрорайонов, обеспечивающие подачу тепловой энергии конкретным потребителям (абонентам) для целей отопления, являются достаточно сложными теплогидравлическими системами, включающими, помимо собственно трубопроводов различного диаметра, регулирующую арматуру, насосы, смесительные устройства, отопительные приборы. При проектировании жилых зданий, промышленных объектов тепловая сеть рассчитывается таким образом, чтобы ее гидравлические характеристики обеспечивали заданную температуру воздуха внутри помещений в широком диапазоне сезонного изменения температуры наружного воздуха при качественном регулировании (регулировании соответствующим изменением температуры теплоносителя) [5].

В процессе развития или перепрофилирования предприятий их тепловые сети претерпевают значительные изменения и тепловые нагрузки, заложенные в первоначальный проект системы теплоснабжения, не всегда соответствуют фактическим потребностям абонентов тепловой сети. Кроме того, в процессе длительной эксплуатации значительно изменяются гидравлические характеристики сети. Возникающие при этом проблемы, связанные с недостаточным обеспечением теплом отдельных абонентов, решаются наименее эффективно – увеличением тепловой нагрузки всей тепловой сети.

Настройка тепловой сети, насчитывающей десятки абонентов, представляет собой сложную, многопараметрическую задачу, решить которую без наличия адекватной математической модели сети практически нереально.

В работе представлен метод решения одной из практически важных задач, связанных с эффективным теплоснабжением абонентов тепловых сетей, как в случае сильной гидравлической разбалансировки сети, так и при изменениях тепловых нагрузок в процессе эксплуатации. В основу теплогидравлической модели тепловой сети положена рекурсивная схема [3]. Модель сети строится «сверху вниз»: сначала в качестве основных элементов рассматриваются крупные участки сети, затем

они детализируются, впоследствии детализируются их абоненты и т.д. Таким образом, с помощью одной и той же программы может быть смоделирована сеть практически любого уровня сложности, и ее конфигурацию можно изменять в широких пределах.

В работе сформулировано несколько нелинейных задач оптимизации с ограничениями (статическая и динамическая задачи) с соответствующими критериями оптимизации, определены условия разрешимости этих задач. Сформулирована общая задачи оптимизации теплогидравлической сети, имеющая однозначное решение.

Разработан численный метод для анализа и оптимизации тепловых сетей, позволяющий решать задачи оптимизации и управления сетью с большим количеством абонентов с целью реализации оптимального режима теплоснабжения.

## **2. Постановка задачи**

При построении модели рассматривается формализованная схема теплотрассы с присоединенными к ней абонентами (рис. 1). Такой формальный подход позволяет описывать схемы тепловых сетей практически любой сложности и глубины детализации.

Обозначения на схеме:

абонент (А) – подключенный между подающей и обратной магистралью элемент тепловой сети, в котором происходит полезное тепловыделение;

коллектор (К1, К2) – часть тепловой сети, содержащая параллельно включенные элементы (абоненты, коллекторы, трассы) с общими точками на входе и выходе;

трасса (Т1, Т2) – часть тепловой сети, включающая набор коллекторов, абонентов и трасс;

узел (У) – точки на прямой и обратной магистралях, между которыми подключен абонент (группа абонентов);

дроссельное устройство (Д) – регулирующий клапан.

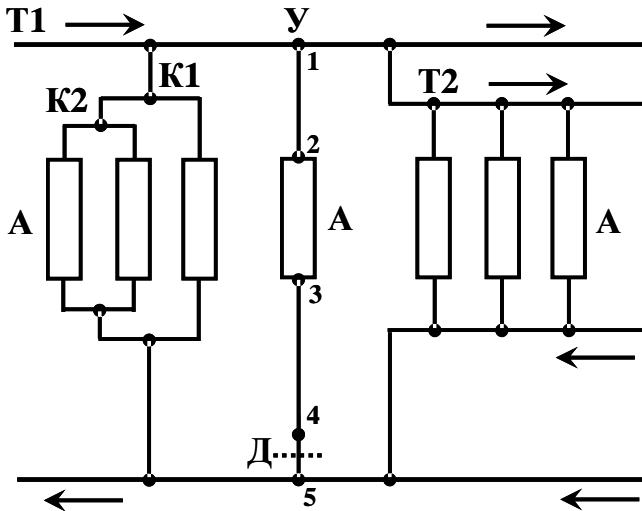


Рис. 1. Схема элементов теплотрассы

Исходными данными для расчета теплотрассы служат: проектные тепловые нагрузки абонентов  $Q_i$  и соответствующие им расходы теплоносителя (воды)  $G_i$  (при заданных температурах в помещениях абонентов  $T(i)_h$ ); температура наружного воздуха  $T_a$ ; температура  $T_{in}$  и расход воды  $G_{in}$  на входе в теплотрассу; параметры участков теплотрассы и абонентских вводов; потери давления на абонентских вводах и выводах; потери давления на абонентах. Индекс  $i = 1, \dots, N$ , где  $N$  – количество абонентов.

Расчетные гидродинамические сопротивления на абонентах вычисляются из уравнения Бернулли

$$(1) \quad D_{z(i)} = \frac{dp(i)}{\left(\frac{G(i)}{r}\right)^2},$$

$$D_{zeta} = \sum_{i=1}^4 D_{z(i)}.$$

В уравнениях (1) под  $dp(i)$  понимаются потери давления:  $DP1_i$  – потери давления на абоненте (между точками 2 и 3);  $DP2_i$  – потери давления на абонентском вводе (между точками 1

и 2);  $DP3_i$  – потери давления на абонентском выводе (между точками 3 и 4);  $DP4_i$  – потери давления на дроссельном устройстве (между точками 4 и 5);  $G(i)$  – расход теплоносителя через абонент  $i$ ;  $\rho$  – плотность теплоносителя,  $Dzeta$  – общее сопротивление между точками 1 и 5.

В дальнейшем, не теряя общности, пренебрегаем потерями тепла в теплотрассе (их учет может быть произведен для любой конкретной задачи [5]). Температура воды на выходе из абонента вычисляется из условия теплового баланса

$$(2) \quad T_{out}^i = T_{in}^i - \frac{Q_i}{(G_i c_p)},$$

где  $c_p$  – теплоемкость теплоносителя.

Для узловой точки  $j$  используется средневзвешенное значение температуры

$$(3) \quad T_{out}^j = \frac{G_i T_{out}^i + G_{i-1} T_{out}^{i-1}}{G_i + G_{i-1}}.$$

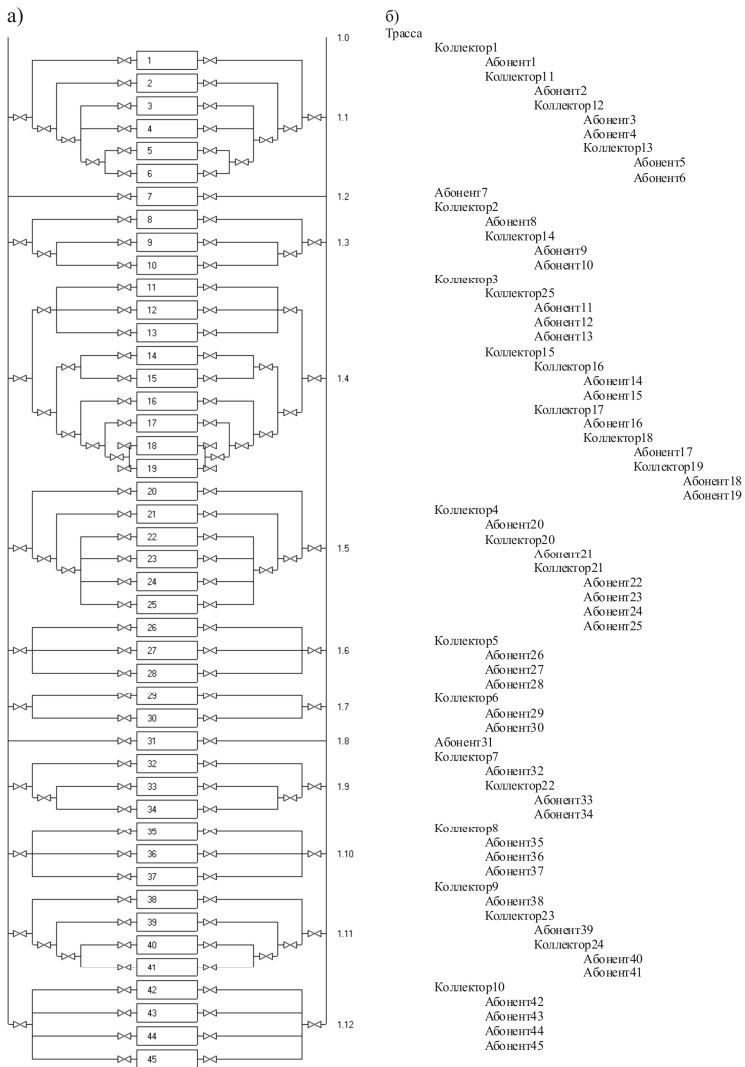
Алгоритм расчета.

1. По располагаемым напорам на абонентах и потерям напора на абонентских вводах по уравнению (1) определяются их коэффициенты гидравлического сопротивления. Все  $DP4_i$  предполагаются равными 0.

2. Рассчитывается температура воды на абонентах и во всех узловых точках теплотрассы по формулам (2) и (3).

Пример расчетной схемы тепловой сети с разбивкой на расчетные элементы в соответствии с рис. 1 приведен на рис. 2.

Полученные поля температур и расходов при этом будут обеспечивать работу теплотрассы в проектном режиме, т.е. все характеристики теплотрассы согласованы таким образом, что обеспечивается заданная температура воды на выходе из абонентов и, соответственно, заданная температура воздуха в помещениях абонентов. Тепловая сеть состоит из одной трассы, 25 коллекторов и 45 абонентов.



*Рис. 2. Тепловая сеть: а) – расчетная схема,  
б) – разбивка на расчетные элементы*

Результаты расчетов (выходная температура воды на абонентах) приведены на рис. 3.

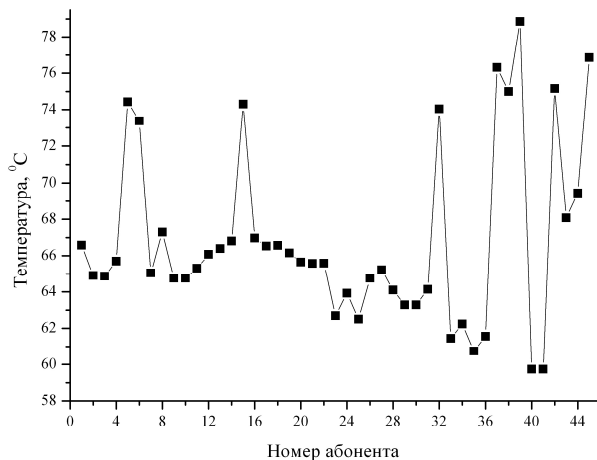


Рис. 3. Распределение температуры теплоносителя на выходе из абонентов

### 3. Процедуры оптимизации

#### 3.1. СТАТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА

Рассмотрим случай, когда в результате расчетов (рис. 3) не удалось получить согласованные температуры обратной воды, соответствующие заданной температуре наружного воздуха. Это может быть связано с гидродинамической рассогласованностью сети.

**Задача 1.** Требуется найти такие  $DP4_i$ , чтобы температура воды на выходе из каждого абонента была равна  $T_{out} = 70\text{ }^{\circ}\text{C}$  (расчетная температура воды в обратной магистрали при расчетной температуре воздуха для проектирования. При этом температура воды в прямой магистрали равна  $T_{in} = 130\text{ }^{\circ}\text{C}$ ). Расход теплоносителя в тепловой сети согласован с теплопотреблением  $Q$ , т.е.

$$(4) \quad G = \frac{\sum_{i=1}^N Q_i}{c_p (T_{in} - T_{out})},$$

где  $G$  – расход теплоносителя в теплосети;  $c_p$  – теплоемкость теплоносителя. Все  $DP4_i \geq 0$ , так как

$$(5) \quad DP4_i = \left( \frac{G(i)}{r} \right)^2 Dz4_i,$$

где  $Dz4_i$  – сопротивления дроссельных (регулирующих) устройств. Из технических соображений сопротивления дроссельных устройств ограничиваются и сверху, что приводит к ограничениям и потерь давления на дроссельных устройствах  $DP4_i \leq DP4_{max}$ , где  $DP4_{max}$  – максимальный перепад давления на дроссельных устройствах.

Рассмотрим функцию

$$(6) \quad L(DP4_1, \dots, DP4_N) = \sum_{i=1}^N G_i |T_{out}^i - T_{out}|.$$

Функция (6) является функцией  $N$  переменных – перепадов давления на дроссельных устройствах  $DP4_i$ , стоящих на каждом абоненте. В выражении (6) каждая выходная температура учитывается со своим весом  $G_i$  согласованно с (3).

### 3.2. МЕТОД РЕШЕНИЯ

Сформулируем следующую оптимизационную задачу:

найти такие  $DP4_i$ , при которых целевая функция (6) при  $T_{out} = 70$  °С достигает минимума:

$$(7) \quad L(DP4_1, \dots, DP4_N) \rightarrow \min ,$$

причем  $0 \leq DP4_i \leq DP4_{max}$  и выполняется условие (4).

Оптимизационная задача (7) является нелинейной задачей оптимизации с ограничениями  $0 \leq DP4_i \leq DP4_{max}$  и с размерностью  $N$ , причем  $N$  велико. Большинство методов решения таких задач требует вычисления первых или даже вторых производных [2, 4]. На практике такие вычисления часто оказываются слишком трудоемкими либо их принципиально невозможно осуществить точно по причине отсутствия явных выражений не только для производных (как и в рассматриваемой задаче), но и для самой целевой функции (6). Наиболее перспективным методом, не связанным с (точным или приближенным) вычислением производных, является метод покоординатного спуска [2], также называемый еще релаксационным методом [1].

Общая схема метода включает следующие шаги.

1. Задание нулевого приближения ( $k = 0$  – номер приближения)  $\mathbf{DP4}^{(k)} = (DP4_1^{(k)}, \dots, DP4_N^{(k)})$ .

2. Рассмотрение функции  $L(DP4_1^{(k)}, \dots, DP4_N^{(k)})$  при фиксированных  $DP4_2^{(k)}, \dots, DP4_N^{(k)}$  как функции одной переменной  $DP4_1$ ,

3. Нахождение минимума функции одной переменной  $L(DP4_1, DP4_2^{(k)}, \dots, DP4_N^{(k)})$ , определение  $DP4_1^{(k+1)}$ .

4. Повторение пунктов 2 и 3 для остальных переменных  $i = 2, \dots, N$  для вычисления  $\mathbf{DP4}^{(k+1)}$ .

5. Проверка условия  $|L(\mathbf{DP4}^{(k+1)}) - L(\mathbf{DP4}^{(k)})| < \varepsilon$  ( $\varepsilon$  – заданная точность). Если условие выполняется – выход, в противном случае  $k = k + 1$  и переход к п. 2.

Центральным звеном предложенного алгоритма является поиск минимума функции одной переменной (п. 3). В работе используется алгоритм Брента [6], в основе которого лежит комбинация методов золотого сечения и последовательной параболической интерполяции.

Результаты расчетов  $DP4_i$  представлены на рис. 4, распределение температуры теплоносителя на выходе из абонентов – на рис. 5.

Максимальное отклонение расчетной температуры воды от заданной составляет менее  $0,3$  °C (рис. 5). При отсутствии регулирования отклонение температур составляло более  $10$  °C (рис. 3).

Таким образом, дополнительные сопротивления (сопротивления дроссельных устройств) на абонентах (рис. 4) обеспечивают согласованный (проектный) режим работы теплосети – все абоненты имеют проектную температуру воздуха внутри помещения (расчеты проводились при  $T(i)_h = 16$  °C).



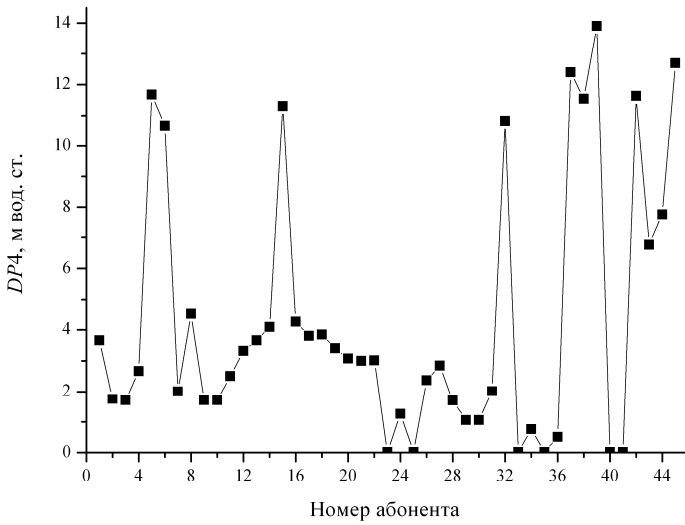


Рис. 4. Распределение перепадов давления на дроссельных устройствах абонентов

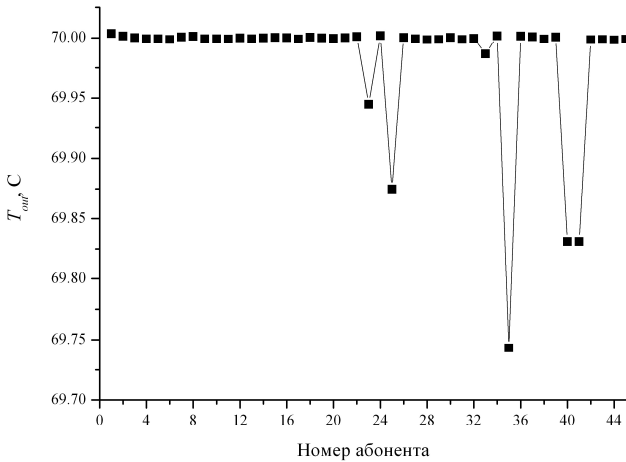


Рис. 5. Распределение температуры теплоносителя на выходе из абонентов после процедуры оптимизации

### 3.3. ДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА

Рассмотрим динамическую задачу, когда произошло изменение тепловой нагрузки одного или нескольких абонентов.

Задача 2. Требуется найти  $DP4_i$  для каждого абонента и расход воды  $G$  в теплотрассе, обеспечивающие температуру воды на выходах всех абонентах  $T_{out} = 70$  °С.

Оптимизационная задача (7) в стандартной постановке не дает решения поставленной задачи, так как не выполняется условие (4). Но задача (7) имеет сходящееся решение, если определить выходную температуру воды следующим образом

$$(8) \quad T_{out} = \frac{\sum_{i=1}^N G_i T_{out}^i}{\sum_{i=1}^N G_i}.$$

Оптимизационная задача может быть сформулирована следующим образом:

найти такие  $DP4_i$ , при которых целевая функция (6) достигает минимума:

$$(9) \quad L(DP4_1, \dots, DP4_N) \rightarrow \min ,$$

причем  $0 \leq DP4_i \leq DP4_{max}$  и  $T_{out}$  удовлетворяет условию (8).

Решение задачи (9) определяет  $DP4_i$  для каждого абонента такие, что температура обратной воды  $T_{out}$  удовлетворяет условию (8).

Рассмотрим функцию

$$(10) \quad L(DP4_1, \dots, DP4_N, G) = \sum_{i=1}^N G_i |T_{out}^i - T_{out}|.$$

Тогда общая оптимизационная задача формулируется следующим образом

найти такие  $DP4_i$ , при которых целевая функция (10) при  $T_{out} = 70$  °С достигает минимума:

$$(11) \quad L(DP4_1, \dots, DP4_N, G) \rightarrow \min ,$$

причем  $0 \leq DP4_i \leq DP4_{max}$  и выполняется условие (4).

Следует заметить, что задача (7) является частным случаем общей задачи (11) (при фиксированном  $G$  задача (11) переходит в (7)).

Минимизация функционала (10) осуществляется аналогично схеме, описанной в п. 3.2, с учетом, что вектор  $\mathbf{DP4} = (DP4_1, \dots, DP4_N, G)$  имеет размерность  $N + 1$ .

### 3.4. ЗАМЕЧАНИЕ

Рассмотрим случай, когда условие (4) выполняется, но решение задачи (7) не существует, т.е. невозможно получить  $T_{out} = 70$  °С одновременно для всех абонентов. То есть можно получить только решение задачи (9), в котором  $T_{out} \neq 70$  °С, а удовлетворяет условию (8). Математически это объясняется ограничениями на  $DP4_i$ . По условиям задачи (7) они должны удовлетворять условию неотрицательности, и поэтому, достигнув нулевого значения,  $DP4_i$  не меняются, при этом значение целевой функции (6) имеет некоторое конечное значение. Если снять условие неотрицательности, получится сходящееся решение задачи (7), и значение целевой функции будет стремиться к нулю. Отрицательные значения  $DP4_i$  на дроссельных устройствах говорят о том, что для обеспечения оптимального режима необходимо уменьшить сопротивления самих абонентов. В постановке задачи сопротивления абонентов заданные величины (либо заданы потери напора на абонентах, связанные с сопротивлениями соотношением (1)) и меняться не могут.

Таким образом, даже выполнение условия (4) не гарантирует возможности получения решения  $T_{out} = 70$  °С одновременно для всех абонентов без изменения расхода теплоносителя в тепловой сети, а значит необходимо решение задачи (11).

Общий алгоритм решения задач 1 и 2 состоит из следующих шагов:

1.  $M = 1$  ( $M$  – номер внешней итерации).
2.  $m = 1$  ( $m$  – номер внутренней итерации).
3. Задание  $T_{out} = 70$  °С.
4. Решение задачи (9) (определение  $DP4_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ ).
5. Расчет нового значения  $T_{out}$  согласно (8).
6. Проверка условия сходимости (по изменениям  $L$  и  $DP4_i$  и в итерациях).
7. При выполнении условий шага 6 – переход к п. 8, в противном случае – переход к п. 4 (задание  $m = m + 1$ ).

8. Проверка условия  $T_{out} = 70$  °С?

9. При выполнении условия шага 8 – выход, в противном случае – задание  $T_{out} = 70$  °С и переход к п. 10.

10. Решение задачи (11) при фиксированных  $DP4_i$ ,  $i = 1, \dots, N$  (определение  $G$ ).

11. Переход к п. 2 (задание  $M = M + 1$ ).

Итерации внутреннего цикла дают решение задачи (9). Выполнение условия п. 8 при  $M = 1$  дает решение задачи (7) (задача 1 без корректировки расхода). Выполнение условия п. 8 при  $M > 1$  (итерации внешнего цикла) дает решение задачи (11) (задача 1 с корректировкой расхода или динамическая задача – задача 2).

#### 4. Результаты

Расчеты проводились для реальной тепловой сети одного из московских предприятий. Расчетная схема тепловой сети представлена на рис. 2, расчетная тепловая нагрузка теплосети  $Q = 25,497$  Гкал/ч, расчетный расход теплоносителя в теплосети  $G = 424,95$  т/ч (тепловая нагрузка и расход удовлетворяют условию (4)),  $T_{in} = 130$  °С.

Начальное распределение температуры воды на выходе из абонентов и результаты расчетов представлены на рис. 6.

Результаты расчетов показывают, что, несмотря на выполнение условия (4), сходящееся решение (решение задачи (9)) получается только при  $T_{out} = 68,345$  °С (кривая 2). Корректировка расхода (решение задачи (11)) приводит к  $T_{out} = 69,983$  °С, при этом  $G = 438,96$  т/ч.

Следующий пример показывает решение динамической задачи. Пусть по каким-то причинам (ухудшение теплоизоляционных свойств ограждающих конструкций, рост или снижение тепловыделения внутри зданий и т.п.) изменилось теплотребление абонентов.

Соответственно изменились температуры теплоносителя на выходах абонентов. Зная расходы и разности температур по формуле (2) можно определить новые  $Q_i$  и решить задачу (11).

Исходные данные модельной задачи – решение предыдущей задачи (вычисленные новый расход и перепады давления на дроссельных устройствах, которые обеспечивают  $T_{out} = 69,983$  °С). Кроме того, введем изменения в абоненте №32 (рис. 2): тепловая нагрузка выросла в 2 раза и составила величину 11,02 Гкал/ч. Сходящееся решение при заданном расходе теплоносителя получилось при температуре воды в обратной магистрали  $T_{out} = 57,359$  °С.

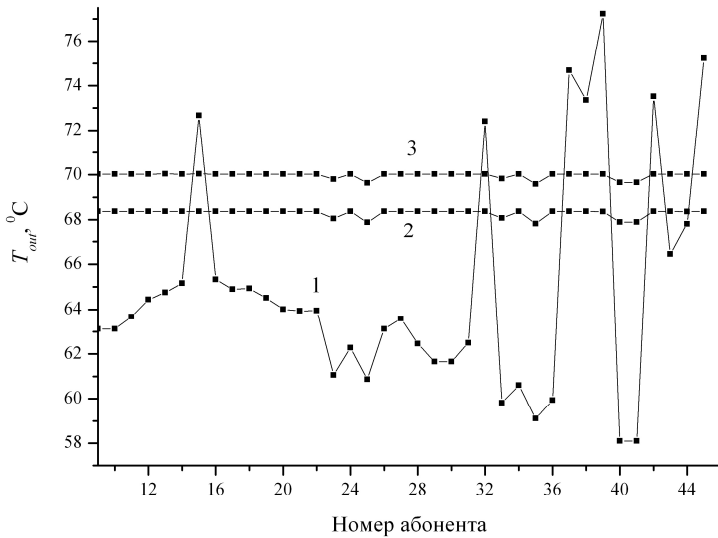


Рис. 6. Распределение температуры теплоносителя на выходе из абонентов: 1 – исходное распределение; 2 – решение задачи (9); 3 – решение задачи (11)

Результаты решения задачи оптимизации (11) представлены на рис. 7. Новый расход составил 533,438 т/ч, температура воды в обратной магистрали  $T_{out} = 70,029$  °С.

Как видно из рис. 7, на изменение нагрузки одного абонента отреагировала вся система: произошло изменение сопротивления всех дроссельных устройствах, максимальное изменение потери давления составило более 2 м вод. ст.

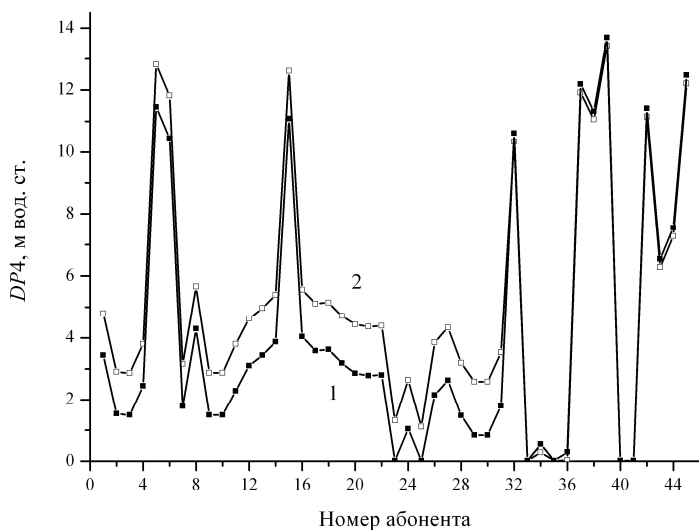


Рис. 7. Распределение перепадов давления на дроссельных устройствах абонентов: 1 – исходное распределение; 2 – реакция системы на изменение теплопотребления

## 5. Выводы

В работе показана возможность расчетной оптимизации тепловой сети как в случае сильной гидравлической разбалансировки сети, так и при изменениях тепловых нагрузок в процессе эксплуатации. Показано, что даже согласованный расход теплоносителя в тепловой сети с теплопотреблением не гарантирует получения оптимального одновременно для всех абонентов без изменения расхода теплоносителя в тепловой сети, и необходимо решение общей оптимизационной задачи.

Разработанная оптимизационная процедура позволяет проводить расчет характеристик регулирующих элементов и приводить тепловую сеть к оптимальным (проектным) параметрам, а также отслеживать изменение параметров тепловой сети и

возвращать их в оптимальное состояние за счет изменения характеристик регуляторов и общего расхода.

### Литература

1. АОКИ М. *Введение в методы оптимизации*. – М.: Наука, 1977. – 344 с.
2. БОГЛАЕВ Ю.П. *Вычислительная математика и программирование*. – М.: Высшая школа, 1990. – 544 с.
3. ДИРЕКТОР Л.Б., ЗАЙЧЕНКО В.М., МАЙКОВ И.Л., ФРИД С.Е. *Математическое моделирование и оптимизация разветвленных тепловых сетей* // *Новости теплоснабжения*. – 2002. – №5(21). – С. 36–38.
4. ИЗМАЙЛОВ А.Ф., СОЛОДОВ М.В. *Численные методы оптимизации*: Учеб. пособие. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 304 с.
5. СОКОЛОВ Е.Л. *Теплофикация и тепловые сети*: Учебник для ВУЗов. – 5-е изд. – М.: Энергоатомиздат, 1982. – 360 с.
6. ФОРСАЙТ Д., МАЛЬКОЛЬМ М., МОУЛЕР К. *Машинные методы математических вычислений*. – М.: Мир, 1980. – 280 с.

### METHODS OF THERMO-HYDRAULIC OPTIMIZATION AND MANAGEMENT OF HEAT SUPPLY NETWORKS

**Igor Maikov**, Joint Institute for High Temperatures of RAS, Moscow, professor (*maikov\_i@mail.ru*).

**Leonid Director**, Joint Institute for High Temperatures of RAS, Moscow, professor (*director@oivtran.ru*).

**Victor Zaitchenko**, Joint Institute for High Temperatures of RAS, Moscow, professor, head of a laboratory (*zaitch@oivtran.ru*).

*Abstract: The method is suggested to solve one of the most important problems in the field of effective heat supply both in the case of the strong hydraulic deregulation of a heating system (a static problem) and in the case of varying thermal loadings (a dynamic*

*problem). The numerical procedure is developed for heating system analysis and optimization, which allows solving heat-consumption regime optimization and control problems for considerably large heat networks. Both static and dynamic problems are shown to reduce to a single general nonlinear optimization problem. The optimization algorithm is built where goal function minimization is carried out in an iterative process using the method of coordinate-wise descent.*

Keywords: mathematical modeling, nonlinear optimization, minimization problems, numerical techniques, heat supply networks.

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии Н. Н. Бахтадзе*

*Уважаемые читатели! Обращаем Ваше внимание на выпущенный в 2010 году Институтом проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН тематический сборник статей «Сетевые модели в управлении». Подробная информация о Сборнике доступна на сайте [www.mtas.ru](http://www.mtas.ru).*



УДК 681.513.54, 681.518, 621.18-5  
ББК 32.965, 31.391

## МЕТОД УПРЕЖДАЮЩЕГО УПРАВЛЕНИЯ СЛОЖНЫМИ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИМИ КОМПЛЕКСАМИ ПО КРИТЕРИЯМ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ ЭФФЕКТИВНОСТИ

Шнайдер Д. А.<sup>1</sup>, Казаринов Л. С.<sup>2</sup>

(Южно-Уральский государственный университет,  
Челябинск)

*Предложен метод упреждающего управления сложными технологическими комплексами по критериям энергетической эффективности на основе моделей обратной динамики. Предложен подход к построению обратных моделей динамики технологических объектов управления в условиях помех с использованием метода экспоненциальной фильтрации. Приведен пример построения адаптивной системы регулирования подачи воздуха в паровой котел по критерию максимума КПД процессов горения.*

Ключевые слова: энергетическая эффективность, упреждающее управление, экспоненциальная фильтрация, паровой котел.

### 1. Введение

Существующие теории и практика управления большими технологическими комплексами используют, как правило, методы централизованного диспетчерского управления в сочетании с локальными автоматическими регуляторами технологических

---

<sup>1</sup> Дмитрий Александрович Шнайдер, кандидат технических наук, доцент кафедры автоматики и управления (shnayder@ait.susu.ac.ru).

<sup>2</sup> Лев Сергеевич Казаринов, доктор технических наук, профессор кафедры автоматики и управления (kazarinov@ait.susu.ac.ru).

параметров. При этом обеспечение качества и эффективности управления требует получения достоверной прогнозной информации о состоянии системы, позволяющей формировать оперативные управляющие воздействия в соответствии с заданными критериями управления. Решение данной задачи основано на создании автоматизированных систем управления на базе различных подходов, в том числе прогнозирующих моделей технологических объектов управления (ТОУ), описывающих динамику выработки, аккумулярования и потребления ресурсов.

Проблема построения систем автоматической оптимизации была впервые рассмотрена В.В. Казакевичем [1]. С этого времени появилось большое количество работ, посвященных исследованию и построению различных типов подобных систем [5, 8, 11, 12]. Современные подходы к решению задач рассматриваемого класса основываются на использовании методов прогнозирующего управления. Обзор существующих практических разработок систем оптимизации на основе прогнозирующего управления содержится в работе [13].

В настоящее время актуальной задачей является построение управления сложными технологическими комплексами по критериям энергетической эффективности [10]. При построении подобных систем управления критическим вопросом является вычисление оценок критериев эффективности технологического процесса в реальном времени. Подобные критерии представляют собой двухсторонние оценочные соотношения, где одна сторона отношения – объемы производимой продукции, другая – объемы потребляемых ресурсов. Однако построение точных прогнозирующих моделей для сложных технологических комплексов является весьма объемной и трудно решаемой задачей. Реально во многих случаях подобные модели обладают недостаточной точностью оценки показателей эффективности, требуемой в соответствии с технологическими регламентами. Поэтому применение известных методов управления, основанных на построении точных прогнозирующих моделей ТОУ, для эффективного управления сложными технологическими процессами имеет определенные ограничения.

В этой связи актуальной проблемой является разработка подхода к управлению, который основывается на упреждающих оценках эффективности процессов, получаемых не на прогнозирующих моделях, заданных на основе ранее проведенных исследований, а исходя из непосредственных измерений двух сторон оценочного отношения: текущих расходов энергетических ресурсов, объемов выходной продукции, а также статистики отказов и аварийных ситуаций. Построение подобных оценок приводит к нетривиальным задачам, так как их решение должно существенно базироваться на комбинированных моделях прямой и обратной динамики управляемых процессов. При этом сам принцип управления, основанный на упреждающих оценках эффективности использования ресурсов до того, как эти ресурсы будут реально использованы или исчерпаны, является естественным условием достижения функциональной и эксплуатационной эффективности в сложных технологических комплексах.

Поиску и реализации новых эффективных подходов и решений к энергосберегающему управлению сложными производственными процессами и системами посвящены работы [6, 7, 9]. Однако методы упреждающего управления сложными технологическими процессами по критериям энергетической эффективности в настоящее время еще недостаточно разработаны, что и определяет актуальность данной работы.

## ***2. Метод упреждающего управления сложными технологическими комплексами по показателям энергетической эффективности на основе моделей обратной динамики***

Задачи оперативного управления сложными технологическими комплексами по технико-экономическим показателям в настоящее время, как правило, решаются на основе текущих или прогнозных оценок показателей, которые вычисляются на моделях управляемых процессов. Однако во многих случаях задачи оперативного оценивания технико-экономических показателей оказываются некорректно поставленными и статистически смещенными.

Примером может служить прямая оперативная оценка удельного показателя энергоемкости продукции

$$(1) \quad a(t) = \frac{P(t)}{W(t)},$$

где  $P(t)$  – текущий объем производимой продукции;  $W(t)$  – текущий объем потребляемых энергетических ресурсов (ЭР).

Задача (1) является некорректно поставленной, так как текущий импульс энергии  $W(t)$  вследствие существующего технологического запаздывания расходуется не на выпуск текущего объема продукции  $P(t)$ , а на будущий выпуск  $P(t + \tau_3)$ . В динамически выраженных случаях оценка (1) будет иметь произвольный характер и не отражать текущую энергоемкость процесса.

Более корректной оценкой является оценка [1]

$$(2) \quad a(t) = \frac{P(t)}{W(t - \tau_3)},$$

где  $\tau_3$  – запаздывание технологического процесса.

Однако оценка (2) неэффективна в управлении, так как импульс ЭР  $W(t - \tau_3)$  уже израсходован. Такая оценка является ретроспективной.

Прогнозирующая оценка [3]

$$(3) \quad a(t) = \frac{P(t + \tau_3)}{W(t)}$$

более эффективна в управлении, но она основана на предельном упрощении модели ТП, сведении его к звену запаздывания.

Статистическая оценка

$$(4) \quad a_{\text{ср}} = \frac{P_{\text{ср}}}{W_{\text{ср}}}$$

является корректной, но не отражает динамики процесса, поэтому не является оперативной.

Другой пример – вычисление оценок эффективности в существующих моделях прогнозирующего управления.

На рис. 1  $\Phi_{\text{дин}}$  – динамическая модель ТП. В этом случае оценка удельного показателя энергоемкости будет иметь вид

$$(5) \quad a(t) = \frac{P^{пр}(t)}{W(t)},$$

где  $P^{пр}(t)$  – прогнозирующая оценка, рассчитанная при помощи модели  $\Phi_{дин}$ ;  $W(t)$  – измеренный объем потребления ЭР.

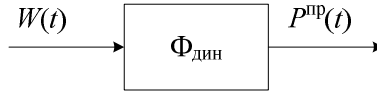


Рис. 1. Вычисление прогнозного значения выпуска продукции на основе динамической модели технологического процесса (ТП)

Подобная оценка является смещенной, так как в оценке  $P^{пр}(t)$  содержится методическая ошибка, обусловленная неточностью построенной модели процесса. Для сложных процессов построить точные модели затруднительно, поэтому методическая ошибка здесь может быть велика.

В рассмотренных случаях постановки задач оперативной оценки технико-экономических показателей являются некорректными. Это приводит к большим вариациям значений показателей в зависимости от ошибок измерений и моделирования. Все это снижает устойчивость и качество оперативного управления ТП.

В работе предлагается новый подход к построению упреждающего управления в АСУ ТП, основанный на использовании статистически несмещенных корректных оценок динамики технико-экономических показателей технологических процессов.

Рассматриваемая структура АСУ ТП имеет следующий обобщенный вид (рис. 2).

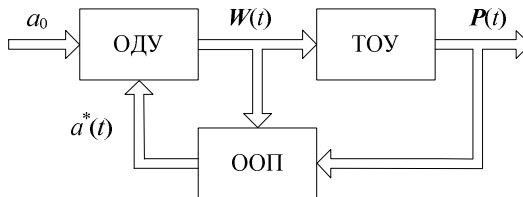


Рис. 2. Структура АСУ ТП с контуром упреждающего управления по показателям энергетической эффективности

На рис. 2 ОДУ – оперативно-диспетчерское управление; ТОУ – технологический объект управления, включая локальные системы управления; ООП – оперативная оценка удельных показателей энергоемкости  $a^*(t)$ ;  $a_0$  – заданное значение удельных показателей энергоемкости.

Вычисление статистически несмещенных корректных оценок динамики технико-экономических показателей в блоке ООП основывается на следующих принципах:

- 1) двухканального измерения динамики удельных технико-экономических показателей;
- 2) обеспечения статистической инвариантности оценок к методическим ошибкам построения моделей процессов;
- 3) обеспечения динамической синхронизации компонент, составляющих оперативные оценки удельных технико-экономических показателей.

В работе предлагается следующая структура вычисления оперативной упреждающей оценки энергоемкости технологического процесса (рис. 3).

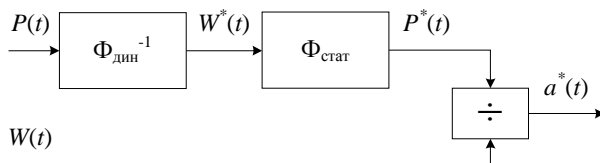


Рис. 3. Структура вычисления оперативной упреждающей оценки энергоемкости технологического процесса

Здесь:  $\Phi_{\text{дин}}$  – динамическая модель ТП;  $\Phi_{\text{стат}}$  – статическая модель ТП;  $P^*(t)$  – упреждающая оценка объема выпуска продукции.

Для структуры оценки (рис. 3) выполнены указанные выше принципы корректного построения несмещенных оценок динамики удельных технико-экономических показателей вида

$$(6) \quad a^*(t) = \frac{P^*(t)}{W(t)},$$

а именно:

- 1) оценка производится на основе двухканальных измерений;
- 2) данная оценка является статистически несмещенной, так как в статике выполняется условие инвариантности

$$(7) \quad \Phi_{\text{стат}} \Phi_{\text{дин}}^{-1} = I,$$

где  $I$  – единичный оператор.

В результате в статике формула оценки становится типовой, принятой в практике технико-экономических показателей

$$(8) \quad a = \frac{P}{W}$$

и не зависит от ошибки модели;

- 3) в динамике процессы  $W^*(t)$  и  $P^*(t)$  являются синхронизированными, так как связаны безынерционной связью  $\Phi_{\text{стат}}$ . Так как  $W^*(t)$  в пределах точности модели отражает  $W(t)$ , то  $P^*(t)$  также оказывается синхронизированным с  $W(t)$  в пределах точности модели. Синхронизация в указанном выше смысле величин  $P^*(t)$  и  $W(t)$  приводит к корректной постановке задачи оценивания.

Например, для простейшей модели ТП:

$$(9) \quad \Phi_{\text{дин}} : P(t) = \Phi_{\text{стат}} W(t - t_3)$$

синхронизированная оценка будет иметь вид

$$(10) \quad a^*(t) = \frac{\Phi_{\text{стат}} [\Phi_{\text{стат}} W(t - t_3)]^{-1}}{W(t)} = \frac{P(t + t_3)}{W(t)}.$$

Из (10) видно, что оценка  $a(t)$  является упреждающей и корректно вычисляемой.

Преимущества использования упреждающих оценок технико-экономических показателей технологических процессов, статистически инвариантных к ошибкам моделей, состоят в следующем:

- 1) оперативное управления процессом ведется не только по текущим значениям технико-экономических показателей, но и упреждающим оценкам показателей, что повышает качество оперативного управления;

- 2) расширяются возможности использования моделей ТП в задачах ОДУ. Для сложных систем здесь достаточно использовать упрощенные макромоделли, что снижает сложность реали-

зации упреждающего управления, делает его практически реализуемым для сложных ТОУ.

### 3. Построение обратных моделей динамики технологических процессов в условиях помех на основе экспоненциальной фильтрации

Рассматриваемый подход к построению упреждающего управления существенно базируется на построении обратных моделей динамики ТП. Рассмотрим решение данной задачи с использованием методов экспоненциальной фильтрации.

Математически построение обратных моделей динамики ТП сводится к решению операторного уравнения

$$(11) \Phi(W_t) = P_{t,0},$$

где  $P_{t,0}$  – заданная реализация процесса  $P(t)$ ;  $W_t$  – искомая реализация процесса  $W(t)$ .

Данная задача является некорректно поставленной. Регуляризованное решение поставленной задачи может быть выполнено с использованием обратных моделей динамики, построенных на основе методов экспоненциальной фильтрации.

Пусть оператор ТП задан в дробно-рациональном виде со звеном запаздывания:

$$(12) L_0(p) = \frac{\sum_{j=0}^m b_j p^j}{\sum_{i=0}^n a_i p^i} e^{-pt_3}, \quad m < n.$$

Формальное обращение оператора

$$(13) L_0^{-1}(p) = \frac{\sum_{i=0}^n a_i p^i}{\sum_{j=0}^m b_j p^j} e^{pt_3}.$$

Структурная схема обратного оператора представлена на рис. 4.



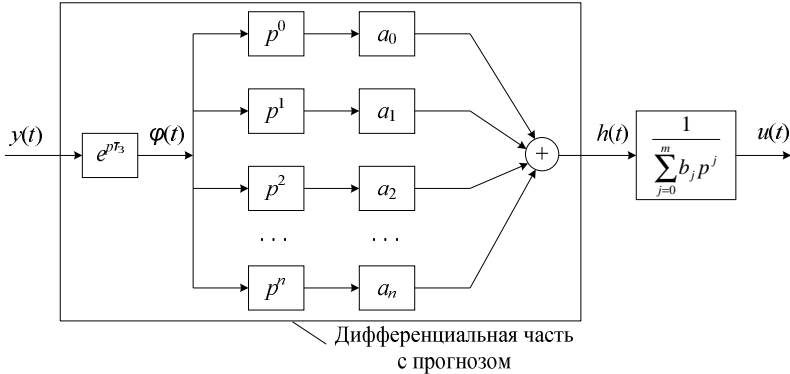


Рис. 4. Формальная структурная схема обратного оператора

В работе решена задача построения дифференциальной части с прогнозом, входящей в состав обратного оператора, на фоне помех.

Решение базируется на разложении сигнала  $y(t)$  в полиномиальном базисе

$$(14) \quad y(t - I) \approx \sum_{i=0}^n g_i(t) I^i,$$

где  $\lambda$  – интервал ретроспективы;  $g_i(t)$  – спектральные составляющие разложения.

На основе метода экспоненциальной фильтрации [2] был определен выход дифференциальной части фильтра с прогнозом:

$$(15) \quad h(t) \approx \sum_{i=0}^n (-1)^i g_i(t) \sum_{k=0}^i k! c_k a_k t_3^{i-k},$$

где  $c_k$  – биномиальные коэффициенты.

В результате получена структура обратного оператора, приведенная на рис. 5.

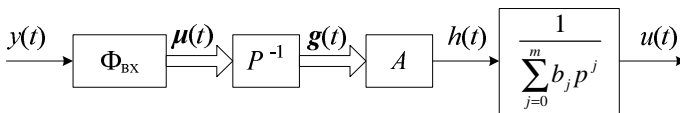


Рис. 5. Структурная схема обратного оператора

На рис. 5  $\Phi_{\text{вх}}$  – формирующий фильтр моментов входного сигнала;  $P^{-1}$  – обратная матрица корреляционных коэффициентов;  $A$  – матрица коэффициентов дифференциальной части обратного оператора;  $\mu(t) = (\mu_0(t), \mu_1(t), \dots, \mu_n(t))^T$  – вектор моментов входного сигнала;  $g(t)$  – вектор координатных функций разложения.

Рассмотрим в общем случае задачу реализации обратного оператора на фоне шума.

В случае белого шума данная задача сводится к нахождению безусловного минимума функционала Лагранжа

$$(16) D_0 - \sum_{i=0}^n 2g_i \int_0^{\infty} t^i w(t) e^{-ct} dt ,$$

где  $\gamma_i$  – неопределенные множители Лагранжа;  $D_0$  – дисперсия сигнала на выходе фильтра при действии белого шума.

Оптимальная весовая функция определяется уравнением

$$(17) w(t) = \sum_{i=0}^n g_i t_i e^{-ct} ,$$

где  $\gamma_i$  определяются из условий:

$$(18) \int_0^{\infty} I^i w(I) dI = \sum_{k=0}^i (-1)^i k! c_k a_k t_3^{i-k} .$$

На фоне «цветных» помех дисперсия (центрированный случайный процесс с гауссовским распределением) на выходе фильтра определяется функционалом

$$(19) D_z = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} K_z(t-l) w(t) w(l) dt dl .$$

Здесь  $K_z(\tau)$  – корреляционная функция «цветного» шума.

Заметим, что корреляционной функции  $K_z(\tau)$  в частотной области соответствует частотный спектр шума  $S_z(\omega)$ , который образуется на основе прохождения белого шума через формирующий фильтр с передаточной функцией  $F(s)$ :

$$(20) S_z(\omega) = F^*(j\omega)F(j\omega) .$$

Для «цветного» шума постановка задачи нахождения оптимальной весовой функции динамического звена сводится к нахождению минимума функционала

$$(21) (1-a)D_z + aD_0 - \sum_{i=0}^n 2g_i \int_0^{\infty} t^i w(t) e^{-ct} dt, \quad 0 \leq a \leq 1.$$

где  $\alpha$  – интенсивность фона белого шума, который вводится для регуляризации постановки задачи. При  $\alpha = 1$  задача минимизации функционала (21) совпадает с предыдущей. При  $\alpha = 0$  задача минимизации функционала (21) является некорректно поставленной. В этом случае малым отклонениям в исходных данных могут соответствовать большие отклонения в решении. Выбор значения параметра регуляризации  $\alpha$  необходимо осуществлять на основе компромисса между точностью и устойчивостью решения.

В целом задача минимизации функционала (21) соответствует постановке задачи оптимальной фильтрации по Винеру. Решением задачи является оптимальная передаточная функция фильтра, удовлетворяющая условию физической осуществимости:

$$(22) W(s) = \frac{\sum_{i=0}^n g_i c \Phi_i(-c + s)}{(1-a)F(s) + a}.$$

где неопределенные множители Лагранжа  $\gamma_i$  определяются из условий (18).

На системном уровне АСУ ТП рассмотренные упреждающие оценки динамики технико-экономических показателей могут быть использованы в оперативно-диспетчерском управлении и в автоматических системах экстремального регулирования.

В случае оперативного управления на экран диспетчера выводятся текущие значения технико-экономических показателей ТП, их упреждающие оценки, а также кумулятивная оценка экономии ресурсов, полученная в результате упреждающего управления.

В автоматических системах экстремального регулирования упреждающие оценки рекомендуется использовать в качестве критериев оптимизации технологических процессов в нестационарных режимах.

#### **4. Пример построения адаптивной системы регулирования подачи воздуха в паровой котел по критерию максимума КПД процессов горения**

Топочные процессы в энергетических котлах, работающих в составе сложных технологических комплексов, находятся под воздействием дестабилизирующих факторов, среди которых наибольшее значение имеют:

- изменения давления и калорийности топливных газов (например, для металлургического производства – доменного и коксового газа);
- колебания задающих воздействий по выработке тепловой энергии, определяемые технологическими режимами основного производства.

Нестабильность параметров режимов топочных процессов обуславливает снижение КПД котлов. Компенсировать влияние дестабилизирующих факторов можно на основе адаптивной коррекции карт рабочих режимов, проводимой как в режиме автоматического регулирования, так и в оперативном режиме. Коррекция заключается в вычислении сигнала коррекции подачи воздуха в топку, исходя из текущих значений параметров топочных процессов. Целью коррекции подачи воздуха является достижение максимального КПД топочных процессов.

Общая схема предлагаемой системы управления паровым барабанным котлом приведена на рис. 6.

На рис. 6: *I* – контур регулирования давления в магистрали; *II* – контур регулирования по тепловой нагрузке котла; *III* – контур регулирования подачи воздуха по содержанию кислорода в уходящих газах; *IV* – контур автоматической оптимизации подачи воздуха по критерию максимума КПД топочных процессов;  $p_m$  – давление пара в магистрали;  $p_{m0}$  – уставка давления пара в магистрали;  $\Delta p_m$  – сигнал рассогласования по давлению;  $W_{гр}(p)$  – передаточная функция главного регулятора;  $u_{гр}$  – управляющее воздействие по давлению пара от главного регулятора;  $d_i$  – доля нагрузки  $i$ -ой котельной установки, задаваемая главным регулятором; ЗРУ – задатчик ручного управления;  $Q'_{т0}$  – задание

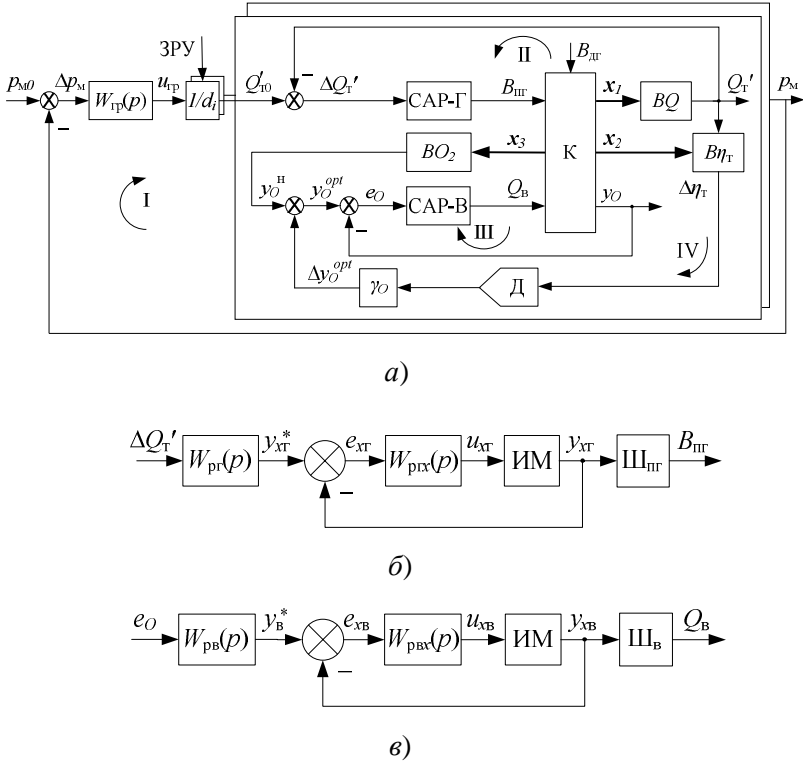


Рис. 6. Общая схема системы автоматического регулирования парового барабанного котла, работающего на смеси газов

нагрузки котла от главного регулятора;  $Q'_T$  – тепловыделение в топке;  $\Delta Q'_T$  – сигнал ошибки по нагрузке;  $CAP-\Gamma$  – система автоматического регулирования подачи природного газа (рис. 12, б);  $B_{пр}$  – расход природного газа;  $B_{др}$  – расход доменного газа;  $y_O$ ,  $y_O^H$  – текущее и номинальное содержание кислорода в дымовых газах, соответственно;  $\Delta y_O^{opt}$  – сигнал коррекции номинального содержания кислорода по критерию максимума КПД топочных процессов;  $y_O^{opt}$  – оптимальное процентное содержание кислорода в дымовых газах;  $e_O$  – сигнал ошибки по содер-

жанию кислорода; САР-В – система автоматического регулирования подачи воздуха (рис. 12, в);  $Q_B$  – расход воздуха;  $x_1 = \{p_6, D_6, h'', h_{в.э.}'', W_{п.в.}\}$ ,  $x_2 = \{B_{пт}, B_{дг}, Q_H^{пт}, Q_H^{дг}, P_B\}$ ,  $x_3 = \{D_{пт}, B_{пт}, B_{дг}\}$  – векторы режимных параметров, где  $p_6$  – давление в барабане котла;  $D_6$  – паропроизводительность барабана;  $h''$  – энтальпия пара в барабане;  $h_{в.э.}''$  – энтальпия воды водяного экономайзера;  $W_{п.в.}$  – расход питательной воды;  $D_{пт}$  – выработка перегретого пара;  $Q_H^{пт}$  – калорийность природного газа;  $Q_H^{дг}$  – калорийность доменного газа;  $P_B$  – давление воздуха после воздухоподогревателя;  $BQ$  – вычислитель сигнала  $Q_T$ ;  $BO_2$  – вычислитель сигнала  $O_2^H$ ;  $Bh$  – вычислитель приращения КПД  $\Delta\eta_T$  при изменении подачи воздуха;  $\gamma_O$  – коэффициент, определяющий скорость адаптации системы автоматического регулирования по критерию максимума КПД,  $D$  – дискретный интегратор, вычисляющий оптимальную коррекцию  $\Delta y_O^{opt}$  задающего воздействия  $y_O^H$  по критерию максимума КПД;  $W_{рг}(p)$ ,  $W_{рв}(p)$  – передаточные функции регуляторов подачи природного газа и воздуха соответственно;  $y_{хг}^*$ ,  $y_{хв}^*$  – задания положений исполнительных механизмов (ИМ) шиберов (Ш) природного газа и воздуха соответственно;  $e_{хг}$ ,  $e_{хв}$  – сигналы ошибки по положению ИМ природного газа и воздуха соответственно;  $W_{ргх}(p)$ ,  $W_{рвх}(p)$  – передаточные функции регуляторов положения ИМ подачи природного газа и воздуха соответственно;  $u_{хг}$ ,  $u_{хв}$  – управляющие воздействия по положению шиберов природного газа и воздуха соответственно.

Вычисление сигнала  $Q_T'$  осуществляется на основе обратной модели динамики циркуляционного контура котла [4]:

$$(23) \quad Q_T' = \frac{1}{A_1} \cdot \frac{dp_6}{dt} + (D_6 \cdot h'' - W_{п.в.} \cdot h_{в.э.}'') - A_2 \cdot (D_6 - W_{п.в.}).$$

Вычисление производной в формуле (23) осуществляется при помощи метода экспоненциальной фильтрации, рассмотренного ранее.

В процессе функционирования котельного агрегата параметры топливных газов могут изменяться. Особо это относится к параметрам доменного газа, давление которого и калорийность могут изменяться в широких пределах. В этих условиях режим работы котельного агрегата может значительно отличаться от оптимального режима, соответствующего максимальному КПД котла. Для обеспечения оптимального режима работы котельного агрегата целесообразно использовать экстремальную настройку системы автоматического регулирования по критерию максимума КПД котла.

Текущий поток тепловой энергии вычисляется по формуле:

$$(24) Q_{\text{вх}}(t) = B_{\text{пр}}(t) \cdot Q_{\text{н}}^{\text{пр}}(t) + B_{\text{др}}(t) \cdot Q_{\text{н}}^{\text{др}}(t).$$

На практике калорийность природного газа относительно постоянна, калорийность доменного газа представляет собой случайный процесс, который будем характеризовать математическим ожиданием  $Q_{\text{н0}}^{\text{др}}$  и среднеквадратическим отклонением

(СКО)  $S_{\text{н}}^{\text{др}}$ . В этих условиях текущий поток тепловой энергии (24) может быть представлен в виде случайного процесса:

$$(25) Q_{\text{вх}}'(t) = B_{\text{пр}}(t) \cdot Q_{\text{н}}^{\text{пр}}(t) + B_{\text{др}}(t) \cdot Q_{\text{н0}}^{\text{др}}(t) + B_{\text{др}}(t) \cdot z(t),$$

где  $z(t)$  – центрированная случайная величина.

Тепловыделение в топке определяется по формуле (23). Текущее значение КПД можно оценить на основе соотношения

$$(26) h_{\text{т}}(t) = \frac{Q_{\text{т}}'(t)}{Q_{\text{вх}}(t - t_3(t))},$$

где  $t_3(t)$  – запаздывание, определяемое по решению экстремальной задачи

$$(27) t_3(t) = \arg \max_{\{t_3\}} \{M_t(\Delta Q_{\text{вх}}(t - t_3) \Delta Q_{\text{т}}'(t))\}.$$

Смысл экстремальной задачи состоит в том, что на ее основе по параметру  $t_3$  в каждый момент времени  $t$  определяется максимум коэффициента корреляции между отклонениями  $\Delta Q_{\text{вх}}(t - t_3)$ ,  $\Delta Q_{\text{т}}'(t)$  от средних значений. Оператор  $M_t(\cdot)$  – оператор текущего усреднения.

Зная текущее значение КПД (26), можно оценить степени влияния действующих режимных факторов на отклонения КПД

( $\Delta\eta_T$ ) от среднего значения. Для решения задач настройки системы регулирования при оценке текущего КПД используется линеаризация:

$$(28) \quad h_T(t) = h_{T, \text{cp}}(t) + \Delta h_T,$$

где среднее значение КПД определяется формулами:

$$(29) \quad h_{T, \text{cp}}(t) = \frac{Q'_{T, \text{cp}}(t)}{Q_{\text{вх}, \text{cp}}(t)},$$

$$(30) \quad Q'_{T, \text{cp}}(t) = M_t \{Q'_T(t)\},$$

$$(31) \quad Q_{\text{вх}, \text{cp}}(t) = M_t \{Q_{\text{вх}}(t)\}.$$

Влияние режимных факторов оценивается на основе упреждающего соотношения

$$(32) \quad \Delta h_T = a_1(t) \cdot \Delta Q_{\text{вх}}(t - (t_3 - \Delta t_y)) + a_2(t) \cdot \Delta P_{\text{в}}(t - (t_3 - \Delta t_y)),$$

где

$$(33) \quad a_1(t) = \frac{\partial h_T}{\partial Q_{\text{вх}}(t - (t_3 - \Delta t_y))}, \quad a_2(t) = \frac{\partial h_T}{\partial P_{\text{в}}(t - (t_3 - \Delta t_y))}.$$

Здесь  $\Delta Q_{\text{вх}}(t)$ ,  $\Delta P_{\text{в}}(t)$  – соответственно отклонение входного теплового потока и давления воздуха от среднего значения;  $\Delta t_y$  – интервал упреждения.

Определение коэффициентов влияния  $a_1(t)$ ,  $a_2(t)$  находится на основе решения задачи оценки неизвестных коэффициентов зависимости (32) по критерию минимума среднеквадратической ошибки с учетом случайного характера объемов подачи и калорийности доменного газа.

Коэффициенты влияния отклонения подачи топлива и подачи воздуха на КПД котла служат индикаторами оптимальности процесса горения в топке котла.

Применение адаптивной системы автоматического регулирования нагрузки котлов и подачи воздуха, использующей упреждающие оценки, позволяет осуществлять в следящем режиме оптимизацию топочных процессов по критерию максимума КПД (брутто) при возмущающих колебаниях параметров доменного газа. Реализация на практике адаптивной системы на



котле ст. №5 ЦЭС ОАО «ММК» позволила повысить КПД до 2–4% в зависимости от параметров режимов.

## **5. Выводы**

1. Перспективным подходом, позволяющим повысить эффективность автоматизированного управления сложными технологическими процессами, является введение упреждающего управления по критериям энергетической эффективности и реализация на его основе соответствующих систем автоматизированного управления.

2. В работе предложен метод упреждающего управления сложными технологическими процессами по критериям энергетической эффективности на основе использования комбинированных моделей прямой и обратной динамики ТОО.

3. Предложен подход к обращению динамических операторов с использованием метода экспоненциальной фильтрации. Рассмотрена в общем случае задача реализации обратного оператора на фоне помех.

4. Приведен пример построения адаптивной системы регулирования подачи воздуха в паровой котел по критерию максимума КПД процессов горения.

## **Литература**

1. КАЗАКЕВИЧ В.В. *Об экстремальном регулировании*. Дис. канд. техн. наук. МВТУ, 1944. – В кн. *Автоматическое управление и вычислительная техника*. – М.: Машиностроение, 1964. – Вып. 6. – С. 7–53.
2. КАЗАРИНОВ Л.С., ГОРЕЛИК С.И. *Прогнозирование случайных колебательных процессов на основе метода экспоненциального сглаживания* // Автоматика и телемеханика. – 1994. – №10. – С. 27–34.
3. КАЗАРИНОВ Л.С., ШНАЙДЕР Д.А. *Метод построения упреждающих оценок энергетической эффективности технологических процессов* // Вестник ЮУрГУ. Серия

- «Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника». – 2010. – Вып. 12, №22 (198). – С. 57–62.
4. КАЗАРИНОВ Л.С., ШНАЙДЕР Д.А., КИНАШ А.В., КОЛЕСНИКОВА О.В. *Корреляционно-экстремальная система управления энергетической эффективностью паровых котлов* // Вестник ЮУрГУ. Серия «Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника». – 2010. – Вып. 11, №2 (178). – С. 81–85.
  5. КРАСОВСКИЙ А.А. *Динамика непрерывных самонастраивающихся систем*. – М.: Физматгиз, 1963. – 313 с.
  6. КРУТЬКО П.Д. *Обратные задачи динамики в теории автоматического управления*. Цикл лекций: учеб. пособие для вузов. – М.: Машиностроение, 2004. – 576 с.
  7. МАТВЕЙКИН В.Г., МУРОМЦЕВ Д.Ю. *Теоретические основы энергосберегающего управления динамическими режимами установок производственно-технического назначения*: Монография. – М.: Машиностроение, 2007.
  8. РАСТРИГИН Л.А. *Системы экстремального управления*. – М.: Наука, 1974. – 632 с.
  9. СУЛТАНГУЗИН И.А. *Научно-технические основы моделирования и оптимизации энерготехнологической системы металлургического комбината*: Дис. д-ра техн. наук. – М.: РГБ, 2005. – 414 с.
  10. Федеральный закон от 23.11.2009 N 261-ФЗ «Об энергосбережении и о повышении энергетической эффективности и о внесении изменений в отдельные законодательные акты Российской Федерации».
  11. ФЕЛЬДБАУМ А.А. *Основы теории оптимальных автоматических систем*. – М.: Наука, 1966.
  12. ЦЫПКИН Я.З. *Адаптация и обучение в автоматических системах*. – М. Наука, 1968. – 400 с.
  13. Qin S.J., Badgwell T.A. *A survey of industrial model predictive control technology* // Control Engineering Practice. – 2003. – №11. – P. 733–764.

**ENERGY EFFICIENT PREDICTIVE CONTROL OF  
COMPLEX MANUFACTURING PROCESSES**

**Dmitry Shnayder**, South Ural State University, Chelyabinsk,  
Cand.Sc., assistant professor (shnayder@ait.susu.ac.ru).

**Lev Kazarinov**, South Ural State University, Chelyabinsk, Doctor of  
Science, professor (kazarinov@ait.susu.ac.ru).

*Abstract: The method of energy efficient predictive control for complex manufacturing processes is considered. The algorithm for real time evaluation of process efficiency using exponential filtration is proposed. An application for energy efficient predictive control of a steam generator is discussed.*

**Keywords:** energy efficiency, predictive control, exponential filtration, steam generator.

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии Н. Н. Бахтадзе*

УДК 519.17: 681.3  
ББК 78.34

## КОМПАКТНЫЕ СТРУКТУРЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ И ИХ СИНТЕЗ

Мелентьев В. А.<sup>1</sup>

(Институт физики полупроводников СО РАН  
им. А.В. Ржанова, Новосибирск)

*Одной из насущных проблем управления вычислительными системами (ВС) является критичность ко времени реализации управляющих воздействий. Своевременность управляющих воздействий в процессе функционирования ВС во многом определяется компактностью ее структуры, обеспечивающей минимум числа транзитов при реализации межмодульных взаимодействий. Компактные структуры ВС определены как  $s$ -регулярные графы порядка  $n$  с минимально возможным диаметром. Дано сопоставление этих графов с  $(s, g)$ -клеточными графами. Описан метод синтеза компактных графов, заключающийся в составлении и решении системы вершинно-полных проекций с минимально возможным числом уровней. Даны примеры полученных таким образом  $n(s)$ -компактных графов.*

Ключевые слова: компактные структуры вычислительных систем, компактные графы, проекция графа, синтез компактных структур.

### 1. Введение

Тенденция к глобализации вычислительных и информационных ресурсов неразрывно связана с поиском моделей, предоставляющих не только возможности детерминированного синте-

---

<sup>1</sup> Виктор Александрович Мелентьев, кандидат технических наук (melva@isp.nsc.ru).

за крупномасштабных вычислительных систем и компьютерных сетей (далее по тексту – систем, или ВС), но и возможности использования этих моделей для адекватного и безусловно актуализированного оперативного управления функционированием этих систем с целью сохранения ими функциональной и информационной целостности. Под актуализированным управлением здесь понимается то, что временной интервал от момента изменения состояний системы или отдельных ее элементов до момента завершения непосредственного реагирования на эти изменения в системе не превышает некоторое критическое значение, определяющее временную границу рациональности этого реагирования (управляющего воздействия). К примеру, запаздывание управляющих воздействий (превышение временного интервала над критическим его значением) на разгрузку линий электропередачи может привести не только к потере устойчивости энергосистемы, но и к катастрофическим для нее последствиям.

Факторами запаздывания управляющей информации, приводящими к ее устареванию и вследствие этого к неэффективному, а в некоторых случаях и небезопасному управлению, могут быть: недостаточная оперативность подсистем мониторинга состояний системы и ее элементов, недостаточная эффективность алгоритмов интерпретации состояний и выработки управляющих воздействий и *сетевые задержки* в доставке как информации об изменении состояния, так и соответствующей этим изменениям управляющей информации. Фактор задержек наряду с качеством используемых в системе каналов и протоколов связи определяется ее структурой: наличие транзитных модулей, характерное для неполносвязных систем, увеличивает задержки пропорционально числу транзитов.

Оптимизация структуры ВС по критерию задержек позволяет высвободить дополнительные временные резервы для использования более качественных (хоть и времязатратных) алгоритмов интерпретации состояний и выработки управляющей информации. Таким образом, выбор структуры с минимальными задержками межмодульных взаимодействий является одним из важнейших факторов, определяющих управляемость системы и ее устойчивость. Добавим к этому особую критичность к времени реакции (следовательно, и к структуре) на

конфигурационные изменения отказоустойчивых ВС: промедление в локализации неисправностей может привести к каскадному их развитию и соответствующим катастрофическим последствиям и для самой системы, и для объектов ее управления.

Решению проблем «поиска и исследования новых, более эффективных, чем известные, структур связей сложных информационных систем (в том числе многопроцессорных и многомашинных вычислительных и управляющих систем)» [1], «вносящих задержки в распространение сигналов», посвящены многие работы, например, [2, 9]. Проблемы синтеза структур с заданными коммуникационными характеристиками традиционно решаются методами теории графов. При этом между множеством модулей системы и множеством вершин графа, а также между множеством линий связи и ребер графа устанавливают взаимно однозначные соответствия, а задержки в системах и сетях характеризуют метрическими характеристиками соответствующих им графов: диаметром, радиусом и эксцентриситетами вершин графа [10]. Поэтому, анализируя в данной работе графы и оптимизируя их метрические характеристики, мы имеем в виду прежде всего структуры систем и сетей связи и оптимизацию соответствующих этим структурам коммуникационных свойств.

Известные исследования устойчивости систем к случайному и/или преднамеренному удалению вершин из описывающих их графов свидетельствуют о большей устойчивости регулярных структур, характеризуемых распределением степени вершин с не более чем тремя несовпадениями [13]. Поэтому объектом исследования в данной работе являются регулярные структуры (графы ВС с заданной степенью вершин).

К сожалению, ни в теории сетей и систем, ни в фундаментальной ее основе – теории графов, проблематика генерации структуры системы (ее графа) с заданными свойствами систематическими методами, исключая необходимость перебора, практически не исследована. В теории графов сложилась парадоксальная ситуация, когда объекты ее изучения классифицируются по некоторым признакам, исследуются типичные представители соответствующих классов, делаются попытки перечислить или хотя бы оценить количество этих представите-

лей... Порой анализ случайным образом полученного графа выявляет отличие его свойств от уже классифицированных, и граф объявляется типичным представителем нового класса. При этом за очень редким исключением (например, гиперкубов) формализованные способы синтеза графов со свойствами, определяющими их принадлежность к тому или иному классу, отсутствуют.

Наиболее распространенными методами решения проблемы синтеза структур с заданными свойствами являются стохастические методы, состоящие в генерации случайных графов с их фильтрацией по соответствующим заданным свойствам критериям [12, 14] или основанные на генетических подходах. Однако в этом случае допустимо говорить лишь о вероятностно-оптимальном синтезе, определяемом размером выборки или мощностью случайно сгенерированной первоначальной популяции, и недетерминированность результатов такого синтеза может привести к непредсказуемым деструктивным последствиям в процессе функционирования системы.

Возможности детерминированного синтеза структур ВС в настоящее время мало изучены. Это связано с тем, что традиционно используемый аппарат анализа и преобразований графов основан на недостаточно формализованных и информационно емких описаниях. В работах [4, 5] впервые предложен способ описания графа скобочными его проекциями, изначально содержащими не только информацию о смежности вершин, но и об их достижимости, что исключает необходимость временных затрат на поиск кратчайших маршрутов; в работах [6, 7] предложено использовать такие проекции в процессе оперативного управления, в частности, в процессах реконфигурации отказоустойчивых ВС. Аналитический подход к синтезу регулярных графов с заданными значениями его порядка, степени и обхвата, основанный на представлении структуры проекциями графа ВС, впервые предложен в [8].

Итак, глобализация информационных и вычислительных ресурсов требует организации эффективного управления соответствующими системами, как в аспекте их функциональной целостности, так и с позиций устойчивости функционирования. Устойчивость системы в процессе функционирования определя-

ется адекватностью и своевременностью ее реакции на возникающие ситуации. Своевременность и рациональность управляющих воздействий во многом определяются структурой сети связи, являющейся, таким образом, неотъемлемой компонентой подсистем управления функционированием больших систем.

В данной работе в рамках задачи генерации регулярных структур ВС по критерию задержек введено понятие компактных структур (графов системы), дано их сопоставление с клеточными [11] и определены условия компактности. Предложен способ синтеза компактного графа с заданными значениями порядка и степени, основанный на построении базовой проекции остовного подграфа и исходной системы проекций этого суграфа, на совместном решении этой системы путем доопределения ее исходных проекций до реберной полноты. Приведены примеры сгенерированных таким образом графов.

## **2. Основные положения**

В данном разделе приведены некоторые используемые в работе определения [11] и общие сведения о проекциях графа.

*Регулярный граф* – связный граф  $G(V, E)$ , степени  $\text{deg}(v_i) = s_i$  всех вершин  $v_i \in V$  которого равны между собой; при этом степень  $s$  называется степенью  $s(G)$  регулярного графа  $G$ .

*Эксцентриситет вершины* – для данной вершины  $u \in V$  графа  $G(V, E)$  величина  $e(u) = \max_{u, v \in V} \partial(u, v)$ , где  $\partial(u, v)$  – расстояние между вершинами  $u$  и  $v$ .

*Диаметр* – наибольшее расстояние между вершинами связного графа:  $d(G) = \max_{u \in V} e(u)$ .

*Радиус графа* – минимальный из эксцентриситетов вершин связного графа:  $r(G) = \min_{u \in V} e(u)$ .

*Проекция  $P(v_j)$*  графа  $G(V, E)$  представляет собой многоуровневую конструкцию, на нулевом уровне которой расположена вершина  $v_j \in V$ , выбранная в качестве ракурсной; порожденное ею подмножество вершин первого уровня  $V_{1j} \subset V$  содержит все вершины ее окружения  $\mathcal{L}(v_j)$ , а  $i$ -й уровень ( $i \geq 1$ )



представляет собой совокупность подмножеств вершин, каждое из которых порождено вершиной  $(i - 1)$ -го уровня и является окружением этой вершины без тех его вершин, что предшествуют ей в данной проекции. Таким образом, отношение «предшествования вершины/порождения подмножества» фактически моделирует отношение смежности предшествующей вершины вершинам порожденного ею подмножества. Формальная запись этих отношений в скобочном описании двух произвольно взятых соседних уровней проекции графа имеет вид

$$v_{i1}^{V_{i+1,1}}, \dots, v_{ij}^{V_{i+1,j}},$$

где вершины  $v_{i1}$  и  $v_{ij}$  одного из подмножеств  $i$ -го уровня предшествуют и смежны вершинам порожденных ими подмножеств  $V_{i+1,1}$  и  $V_{i+1,j}$  вышестоящего  $(i + 1)$ -го уровня. Технология построения скобочных описаний графа и их свойства достаточно подробно представлены в работах [4, 5] и обобщены в [8], поэтому здесь остановимся лишь на некоторых используемых в данной работе свойствах.

Вершине  $v_{ij}$   $k$ -уровневой проекции  $P_k(v_0)$ , построенной из ракурсной вершины  $v_0$ , соответствует упорядоченное множество вершин  $W(v_{ij}) = (v_0, v_{10}, \dots, v_{ij})$ , представляющее собой простую цепь из  $v_0$  в  $v_{ij}$ , длина этой цепи  $\partial(v_0, v_{ij}) = i$ . В общем случае некоторые (за исключением ракурсной) вершины проекции  $P_k(v_0)$  могут быть  $m_{ij}$ -кратными:  $0 \leq m_{ij} \leq \sum_i C_i - \sum_i |V_i|$ , где  $C_i$  – число элементов  $i$ -го уровня проекции  $P_k(v_0)$ , а  $V_i \subset V$  – множество вершин графа, представленных  $i$ -м уровнем проекции. Отличие  $m_{ij}$  от единицы означает наличие соответствующего числа простых цепей из ракурсной вершины  $v_0$  в вершину  $v_{ij}$ .

В [5] показано, что номер  $i$  уровня в проекции  $P(v_0)$  определяет удаленность вершин  $V_i$  этого уровня от ракурсной вершины  $v_0$  а также то, что уровень  $k_e$ , впервые доопределяющий множество вершин всех нижерасположенных уровней проекции графа  $G(V, E)$  до  $V$ , соответствует эксцентриситету  $e(v_0)$  ракурсной вершины  $v_0$  в проекции  $P(v_0)$ :

$$(1) \quad e(v_0) = k_e \left| \bigcup_{i=0}^{k_e-1} V_i \subset V, \bigcup_{i=0}^{k_e} V_i = V \right|.$$

Назовем это условие для числа уровней условием вершинной полноты проекции. Однако реализации этого условия в

проекция не всегда достаточно для определения всех ребер описываемого ею графа. Проекция  $P_k(v_0)$  графа  $G(V, E)$  является полной, если ею определены все вершины и все ребра (отношения смежности) этого графа. Необходимые условия полноты проекции могут быть записаны следующим образом:

$$\bigcup_{i=0}^k V_i = V \text{ и } \bigcup_{i=0}^k E_i = E;$$

здесь  $E_i = \{e_{uv} \mid u \in V_{i-1}, v \in V_i\}$  – множество ребер, инцидентных парам вершин соседних уровней проекции. Нетрудно заметить, что первое из этих условий (условие вершинной полноты) поглощается вторым (условием реберной полноты проекции), таким образом, условие реберной полноты является и условием полноты проекции графа.

Отметим здесь также доказанное в [5] свойство о числе уровней в полной проекции графа, согласно которому минимальное число уровней  $k = k_{\min}(v_0)$  в проекции  $P_k(v_0)$  связного простого графа  $G(V, E)$ , достаточное для полноты его представления, не меньше эксцентриситета  $e(v_0)$  ракурсной вершины  $v_0$  и не превышает увеличенного на единицу его значения:

$$(2) \quad k_{\min}(v_0) = \begin{cases} e(v_0), & A(u, v) = 0 \\ e(v_0) + 1, & A(u, v) = 1. \end{cases}$$

Предикат  $A(u, v)$  будет истинным, если в множестве  $V_e$  вершин уровня рассматриваемой проекции с номером, равным эксцентриситету  $e(v_0)$  ракурсной вершины  $v_0$  этой проекции, найдется хотя бы 2 смежные вершины  $u, v \in V_e$ ,  $\partial(u, v) = 1$ , равноотстоящие от ракурсной вершины  $v_0$  на величину ее эксцентриситета  $e(v_0)$ , т.е.  $\exists \{u, v \in V_k \mid \partial(v_0, u) = \partial(v_0, v) = e(v_0) \text{ и } \partial(u, v) = 1\}$ .

Приведенные ниже и используемые в последующих разделах леммы являются следствиями доказанного в [8] утверждения, констатирующего, что обхват  $g(G)$  графа  $G(V, E)$ , заданного проекцией  $P(v_0)$ , не превышает минимальной из сумм номеров ее уровней, содержащих одноименную вершину. Число повторений вершины  $u \in V$  в проекции назовем ее кратностью и обозначим  $m_u$ .

**Лемма 1.** Если в проекции  $P_k(v_0)$  графа  $G(V, E)$  с числом уровней  $k = e(v_0)$  кратность  $m_u$  вершины  $u \in V$  больше единицы, то обхват графа  $g(G)$  не превышает минимальной из сумм номеров уровней двух подмножеств, включающих в себя эту вершину:

$$\exists u \in V (m_u > 1) \Rightarrow g(G) \leq x_1 + x_2, \text{ где}$$

$$x_1, x_2 \in \vec{X} = (x_1, \dots, x_{m_u} = i \mid i = \overline{(1, e(v_0))}), u \in V_{ij}.$$

**Лемма 2.** Если в проекции  $P_k(v_0)$  графа  $G(V, E)$  с числом уровней  $k = e(v_0)$  вершины, кратность которых больше единицы, отсутствуют, т.е.  $\forall u \in V m_u = 1$ , то граничные значения обхвата  $g(G)$  определены выражением  $e(v_0) + 2 \leq g(G) \leq 2e(v_0) + 1$ .

### 3. Компактные графы

Максимально возможное при степени графа  $s$  число вершин  $C_i(s)$  отличного от нуля  $i$ -го уровня проекции  $P(v_0)$ ,  $v_0 \in V$ , регулярного простого графа  $G(V, E)$  определено выражением

$$(3) \quad C_i(s) = s(s-1)^{i-1},$$

а максимальное число вершин  $N_d(s)$  регулярного графа, которое можно поместить на  $d$  уровнях проекции, соответствует максимальному порядку графа  $G$  с диаметром  $d$ :

$$(4) \quad N_d(s) = 1 + s \sum_{i=1}^d (s-1)^{i-1}.$$

В разделе 2 дано условие (1) вершинной полноты проекции графа. Таким образом, синтез графа  $G(V, E)$  порядка  $n$  с диаметром  $d(G)$  сводится к такому размещению вершин на каждой из  $n$  проекций этого графа, при котором число уровней в проекциях, обусловленное выражением (1), не превысит заданный диаметр. Из множества задач синтеза регулярных графов с заданными значениями порядка  $n$  и степени  $s$  вычленим задачи синтеза графов с минимально возможными при этих  $n$  и  $s$  диаметрами. Компактность топологии таких графов предопределило и используемое нами название  $n(s)$ -компактных.

Из (4) определим максимальное число вершин, которое возможно разместить на  $(d - 1)$ -м уровне проекции регулярного графа:

$$N_{d-1}(s) = 1 + s \sum_{i=1}^{d-1} (s-1)^{i-1}.$$

Если в (4) определено максимальное для заданного диаметра  $d$  значение порядка  $n$ , то данным здесь выражением определен максимально возможный порядок графа с уменьшенным на единицу диаметром. Тогда условие компактности графа, соответствующее порядку и диаметр графа его степени, можно записать в следующем виде:

$$(5) \quad 1 + s \sum_{i=1}^{d-1} (s-1)^{i-1} < n(s) \leq 1 + s \sum_{i=1}^d (s-1)^{i-1}.$$

Итак, регулярный граф  $G(V, E)$  порядка  $n$ , степени  $s$  с минимально возможным при заданных значениях  $n$  и  $s$  диаметром  $d$  назовем  $n(s)$ -компактным графом. Заметим, что в компактном  $n(s)$ -графе все вершины являются центральными, так как диаметр  $d$  компактного графа минимален по определению, а наличие в таком графе вершин с эксцентриситетами, меньшими диаметра, исключено условием (5). Из этого же следует и равенство диаметра  $n(s)$ -компактного графа минимальному из эксцентриситетов вершин в графе, т.е. его радиусу. Например, для двух крайних в отношении степени  $s$  регулярных графов  $s = 2$  (циклический граф) и  $s = n - 1$  (полный граф)  $r(n, s) = d(n, s)$  и, соответственно,  $r(n, 2) = d(n, 2) = \lceil n/2 \rceil$  и  $r(n, n - 1) = d(n, n - 1) = 1$ . Все вершины этих графов являются центральными, а сами графы, соответственно,  $n(2)$ - и  $n(n - 1)$ -компактными. Однако равенство радиуса диаметру не является определяющим свойством компактных графов и осуществимо не только для них. В [8] показано, что в  $8(3)$ -компактном графе с  $n = 8$ ,  $s = 3$  радиус  $r(8, 3) = 2$  и диаметр  $d(8, 3) = 2$  минимальны. Единичный же куб того же порядка  $n = 8$  обладает хотя и равными, но большими, чем определено в (5), значениями радиуса и диаметра ( $r = d = 3$ ) и потому компактным не является.

Итак, если порядок  $n(s)$ -компактного графа  $G(V, E)$  равен верхнему граничному значению  $N_d(s)$ , то двух- и более кратные вершины в любой его проекции  $P_d(v_j)$ ,  $v_j \in V$ , отсутствуют ( $\forall u \in V$

$m_u = 1$ ), и значения обхвата  $g$  в таком графе (см. лемму 2) ограничены в соответствии с выражением  $d + 2 \leq g(G) \leq 2d + 1$ .

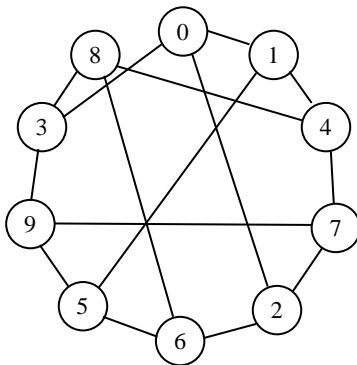


Рис. 1. 10(3)-компактный граф с обхватом  $g = 5$

Рассмотрим представленный на рис. 1 10(3)-компактный граф с диаметром  $d = 2$ . Порядок этого графа равен максимальному числу вершин  $n = N_2(3) = 10$  в его двухуровневой проекции. Это исключает возможность повторения вершин ( $m = 1$ ) в любой двухуровневой его проекции  $P_2(v_j)$ ,  $v_j \in V$ . Из рисунка, как и из приведенной ниже системы проекций, видно, что обхват этого графа равен максимально возможному  $g = 2d + 1 = 5$ . Таким образом, есть все основания полагать, что граф степени  $s = 3$ , обхвата  $g = 5$  и порядка  $n = 10$  является (3, 5)-клеткой и изоморфен графу Петерсена (рис. 2).

$$\begin{aligned}
 P_2(0) &= 0^{\{1^{[4,5]}, 2^{[6,7]}, 3^{[8,9]}\}}, & P_2(1) &= 1^{\{0^{[2,3]}, 4^{[7,8]}, 5^{[6,9]}\}}, \\
 P_2(2) &= 2^{\{0^{[1,3]}, 6^{[5,8]}, 7^{[4,9]}\}}, & P_2(3) &= 3^{\{0^{[1,2]}, 8^{[4,6]}, 9^{[5,7]}\}}, \\
 P_2(4) &= 4^{\{1^{[0,5]}, 7^{[2,9]}, 8^{[3,6]}\}}, & P_2(5) &= 5^{\{1^{[0,4]}, 6^{[2,8]}, 9^{[3,7]}\}}, \\
 P_2(6) &= 6^{\{2^{[0,7]}, 5^{[1,9]}, 8^{[3,4]}\}}, & P_2(7) &= 7^{\{2^{[0,6]}, 4^{[1,8]}, 9^{[3,5]}\}}, \\
 P_2(8) &= 8^{\{3^{[0,9]}, 4^{[1,7]}, 6^{[2,5]}\}}, & P_2(9) &= 9^{\{3^{[0,8]}, 5^{[1,6]}, 7^{[2,4]}\}}.
 \end{aligned}$$

Изоморфизм представленных этими рисунками графов определен отображением

$$\varphi: (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) \rightarrow (1, 3, 4, 6, 5, 8, 9, 2, 10, 7).$$

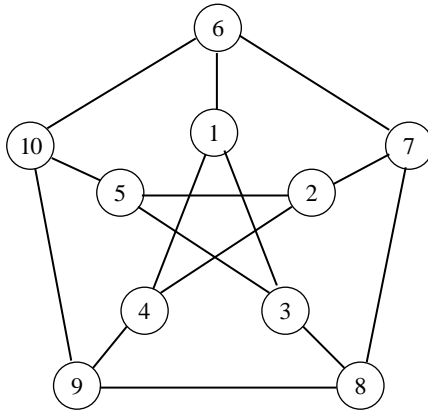


Рис. 2 Граф Петерсена – (3, 5)-клетка

Напомним, что  $(s, g)$ -клеточный граф представляет собой  $s$ -регулярный граф с обхватом  $g$ , имеющий минимально возможное число  $n(s, g)$  вершин. Нижняя граница числа  $n_l$  вершин в  $(s, g)$ -клетке определяется выражением

$$(6) \quad n_l(s, g) \geq \begin{cases} 1 + s \sum_{i=0}^{(g-3)/2} (s-1)^i & - \text{нечетные } g, \\ 2 \sum_{i=0}^{(g-2)/2} (s-1)^i & - \text{четные } g; \end{cases}$$

притом что графы, порядок которых равен этой границе, называют графами Мура [11]. Граф Мура определяют также регулярным графом порядка  $n = s^2 + 1$  и диаметра  $d = 2$ , степень которого  $s \geq 2$  [3]. В данном случае  $s = 3$  и  $n = 10$ . Подставив в (5) значение  $d = 2$  и в (6) значение  $g = 5$ , получим равенство верхней границы порядка (3, 2)-компактного графа нижней границе числа вершин (3, 5)-клетки, что подтверждает вхождение графов Мура (и графа Петерсена в том числе) в число компактных.

Из определения клеточного графа и из (6) следует прямая зависимость нижней границы числа  $n_l(s, g)$  его вершин от обхвата. Такая зависимость числа  $n(s, g)$  вершин клеточных графов от их степени ( $n_l(s-1, g) < n(s, g) < n_l(s+1, g)$ ) и от обхвата ( $n_l(s, g-1) < n(s, g) < n_l(s, g+1)$ ) подтверждается также практи-

кой построения клеточных  $(s, g)$ -графов (обращаем здесь внимание на то, что нижняя граница числа  $n_l(s, g)$  вершин  $(s, g)$ -клетки, в отличие от самого этого числа  $n(s, g)$ , помечена индексом  $l$ ). Таким образом, можно обусловить не только общеизвестную нижнюю, но и верхнюю границу числа вершин в клеточных графах. Подставив в (6) уменьшенные на единицу значения  $s$  и  $g$ , убедимся в том, что  $n_l(s, g)$  заведомо больше любого из  $n_l(s - 1, g)$ ,  $n_l(s, g - 1)$  и больше порядков  $n(s - 1, g)$  и  $n(s, g - 1)$  соответствующих известных клеток; следовательно, уточнение  $n_l(s, g)$  через использование  $n_l(s - 1, g)$ ,  $n_l(s, g - 1)$ ,  $n(s - 1, g)$  и  $n(s, g - 1)$  лишено смысла. Подставив в (6) увеличенные на единицу значения  $s$  или  $g$

$$n_l(s + 1, g) \geq \begin{cases} 1 + (s + 1) \sum_{i=0}^{(g-3)/2} s^i & \text{— нечетные } g, \\ 2 \sum_{i=0}^{(g-2)/2} s^i & \text{— четные } g, \end{cases}$$

$$n_l(s, g + 1) \geq \begin{cases} 2 \sum_{i=0}^{(g-1)/2} (s - 1)^i & \text{— нечетные } g, \\ 1 + s \sum_{i=0}^{(g-2)/2} (s - 1)^i & \text{— четные } g; \end{cases}$$

получим ограничение сверху порядка  $n(s, g)$  клеточного графа меньшими из этих значений. Тогда области определения минимального числа вершин в  $(s, g)$ -клетке определятся соответственно из (7.1) — для нечетных и (7.2) — для четных значений  $g$ :

$$(7.1) \quad 1 + s \sum_{i=0}^{(g-3)/2} (s - 1)^i \leq n(s, g) < \min \{n_l(s + 1, g), n_l(s, g + 1)\},$$

$$(7.2) \quad 2 \sum_{i=0}^{(g-2)/2} (s - 1)^i \leq n(s, g) < \min \{n_l(s + 1, g), n_l(s, g + 1)\}.$$

В соответствии с леммой 2 максимальные четное и нечетное значения обхватов компактного графа равны соответственно  $g = 2d$  и  $g = 2d + 1$ . Диаметры компактных графов с четными обхватами —  $d = g/2$  и с нечетными —  $d = (g - 1)/2$ . Подставив эти значения в (5), получим:

для нечетных  $g$

$$1 + s \sum_{i=1}^{(g-3)/2} (s - 1)^{i-1} < n(s) \leq 1 + s \sum_{i=1}^{(g-1)/2} (s - 1)^{i-1},$$

$$1 + s \sum_{i=1}^{(g-2)/2} (s - 1)^{i-1} < n(s) \leq 1 + s \sum_{i=1}^{g/2} (s - 1)^{i-1}.$$

Приведя пределы суммирования к принятым в (7.1) и (7.2), получим для нечетных  $g$

$$(8.1) \quad 1 + s \sum_{i=0}^{(g-5)/2} (s-1)^i < n(s) \leq 1 + s \sum_{i=0}^{(g-3)/2} (s-1)^i$$

и для четных  $g$

$$(8.2) \quad 1 + s \sum_{i=0}^{(g-4)/2} (s-1)^i < n(s) \leq 1 + s \sum_{i=0}^{(g-2)/2} (s-1)^i .$$

Сравнив (7.1) с (8.1), обнаружим, что область определения  $n(s, g)$ -клеточных графов с нечетными значениями обхвата  $g$  пересекается с соответствующей областью определения  $n(s)$ -компактных графов нижним пределом первых с верхним пределом вторых, т.е. согласно [11] это (3, 5)-, (7, 5)- и, возможно, (57, 5)-клетки (графы Мура). Представительство клеточных графов с четными значениями обхвата  $g$  в множестве компактных графов также не исключено: верхний предел порядка  $n(s)$  компактных графов с четными  $g$  в (8.2) заведомо больше соответствующего нижнего предела числа вершин  $n(s, g)$ -клеточных графов в (7.2).

В следующем разделе дано описание предложенного автором метода синтеза и приведены примеры полученных с использованием этого метода  $n(s)$ -компактных графов.

#### 4. Синтез компактных графов

В [8] впервые представлен аналитический подход к синтезу регулярных графов с заданными значениями их порядка, степени, диаметра и обхвата. В целях конкретизации подхода для введенных здесь компактных графов последовательность действий по их синтезу необходимым образом дополнена.

1. Из (3) получим корреспондируемое заданными значениями порядка  $n$  и степени/диаметра значение диаметра/степени компактного графа. Введем однозначную разметку  $n$  вершин графа и выберем произвольную вершину в качестве ракурсной вершины базовой  $d$ -уровневой проекции не имеющего циклов остовного подграфа синтезируемого графа с заданными значениями порядка  $n$ , степени  $s$  и диаметра  $d$ . Определим число  $m$  двух- и более кратных вершин:  $m = N_d(s) - n(s)$ , где  $N_d(s)$  определим из (4). Если число  $m$  равно нулю, то максимальный об-



хват  $g$  (при реальности такого графа с этим значением  $g$ ) в соответствии с леммой 3 составит  $g = 2d + 1$ .

2. Построим базовую  $d$ -уровневую остовную проекцию  $P'_d(v_0)$  синтезируемого  $n(s)$ -компактного графа  $G(V, E)$ , выбрав в качестве ракурсной вершины  $v_0$  любую из произвольным образом пронумерованных вершин,  $v_0 \in V$ . Описываемый проекцией  $P'_d(v_0)$  граф  $G'(V, E') \subset G(V, E)$  является каркасом (остовным деревом) искомого графа с корнем в  $v_0$ . Он включает в себя все вершины графа с единичной кратностью ( $m_u = 1, u \in V$ ) и не содержит циклов. Размещение  $n$  вершин на  $d$  уровнях этой проекции может быть произвольным, но, повторимся, таким, чтобы построенная проекция была вершинно-полной:

$$\bigcup_{i=0}^d V_i = V, \text{ или } \sum_{i=0}^d |V_i| = |V|.$$

Вершины  $V_1$ , расположенные на первом уровне базовой проекции  $P'_d(v_0)$ , являются окружением  $\mathcal{N}(v_0)$  ракурсной вершины  $v_0$ , и их число  $|V_1|$  равно степени  $s$  синтезируемого графа; на остальных уровнях этой проекции число вершин  $|V_i|$  при  $2 < i \leq d$  может быть меньшим, чем число  $C_i(s)$  элементов этого уровня, определяемое из (3). В этом случае число  $|V_{i+1}|$  вершин  $(i + 1)$ -го уровня будет меньше числа  $C_{i+1}(s)$ , т.е.  $|V_{i+1}| \leq |V_i| \cdot (s - 1)$ . Разность  $C_i(s) - |V_i|$  равна числу неизвестных на  $i$ -м уровне проекции  $P'_d(v_0)$  элементов.

3. Соответствующие базовой проекции  $P'_d(v_0)$  окружения  $\mathcal{N}(v_j)$  вершин сведем в список  $\mathcal{N}(G) = (\mathcal{N}(v_j) \mid v_j \in V)$ .

Вершины  $v_j \in V$ , окружения которых пока не определены полностью ( $|\mathcal{N}(v_j)| < s$ ), включим во множество  $V' = \{v_j \in V \mid |\mathcal{N}(v_j)| < s\}$ . Окружения  $\mathcal{N}(v_j)$  этих вершин  $v_j \in V'$  дополняем потенциальными подмножествами  $\mathcal{N}'_p(v_j) = \{V' \setminus \{W(v_0, v_j)\}_x\}$ , нижний индекс  $x$  при которых равен числу недостающих в этом окружении вершин,  $x = s - |\mathcal{N}(v_j)|$ :  $\mathcal{M}(v_j) = \mathcal{N}(v_j) \cup \mathcal{N}'_p(v_j)$ ; здесь

$W(v_0, v_j)$  – множество всех предшественниц вершины  $v_j$  в проекции  $P'_d(v_0)$ , составляющих простую цепь из  $v_0$  в  $v_j$ .

Синтез  $n(s)$ -компактного графа при необходимости может быть обусловлен его обхватом, определяемым леммами 1 или 2. В этом случае потенциальные подмножества вершин  $\mathcal{N}_p(v_j)$ , входящие в состав  $\mathcal{M}(v_j)$ , должны быть соответствующим образом скорректированы:

$\mathcal{N}_p(u_i) := \mathcal{N}_p(u_i) \setminus \{v_j \in \mathcal{N}_p(u_i) \mid i, j \in \{1, \dots, d\}, i + j < g\}$ , – здесь индексы при вершинах  $u_i, u_j \in V$  соответствуют номеру уровня проекции  $P'_d(v_0)$ , на котором эти вершины располагаются. Полученные таким образом окружения  $\mathcal{M}(v_j)$  сведем в список  $\mathcal{M}(G) = (\mathcal{M}(v_j) \mid v_j \in V)$ .

4. Используя полученный в п. 3 список окружений  $\mathcal{M}(G)$  и учитывая (при необходимости) требуемое значение обхвата графа, поочередно выстраиваем остальные проекции  $P_d(v_j)$ ,  $v_j \in V$ , проводя каждый раз уточнение потенциальных подмножеств  $\mathcal{N}_p(v_j)$  во вновь построенных проекциях и внося соответствующие изменения в список окружений  $\mathcal{M}(G)$  графа и в построенные ранее проекции.

5. Задача синтеза графа будет решена, если список окружений его вершин не содержит потенциальных подмножеств:  $\forall v_j \in V (|\mathcal{M}(v_j)| = s, |\mathcal{N}_p(v_j)| = 0)$ .

Если в результате выполнения указанных действий для всех проекций синтезируемого графа хотя бы одно из окружений его вершин по-прежнему является потенциальным (содержит потенциальное подмножество), то синтез  $n(s)$ -компактного графа не завершен, так как число вершин в построенном таким образом промежуточном варианте окружения не соответствует заданной степени. В этом случае в одном из потенциальных окружений следует выбрать вершину из его потенциального подмножества (произвести подстановку), скорректировав затем в соответствии с п. 4 все остальные проекции и список окружений вершин графа. Заметим при этом, что подстановки, не

совместные с определенными заданием условиями, делают и систему проекций несовместной. Это выражается, в частности, в том, что мощности некоторых потенциальных подмножеств в отдельных проекциях системы становятся меньше числа вершин, неизвестных в соответствующих этим потенциальным подмножествам окружениях. В таком случае следует произвести возврат к предшествующей подстановке с запретом таковой и выбрать альтернативный в данном потенциальном подмножестве вариант.

Ниже приведены примеры  $n(s)$ -компактных графов, сгенерированных в соответствии с описанной здесь последовательностью. В подрисуночные подписи этих графов включены их базовые остовные проекции  $P'_d(v_0)$ , построенные в соответствии с п. 2, при этом число уровней в них определено в соответствии с п. 1. Следует обратить внимание, что исходной для синтеза разных 13(4)-компактных графов (рис. 3, 4) является одна и та же базовая проекция. Разница же в результатах синтеза обусловлена введением (в соответствии с п. 3) запрета треугольных циклов в графе на рис. 4.

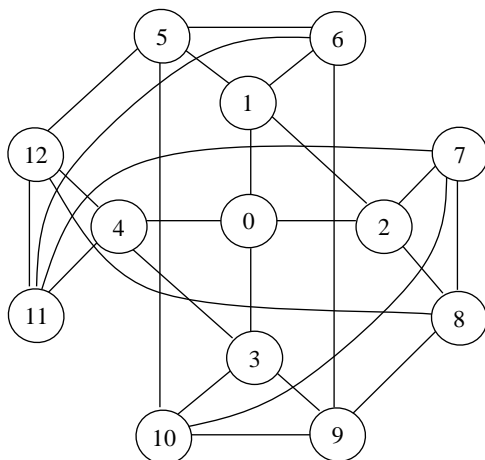


Рис. 3. 13(4)-компактный граф с обхватом  $g = 3$   
 $0^{\{1^{\{5,6\},\{2-4,7-12\}}\}}, 2^{\{7,8,\{1,3-6,9-12\}}\}}, 3^{\{1,2,4-8,11,12\},9,10\}}, 4^{\{1-3,5-10\},11,12\}}$

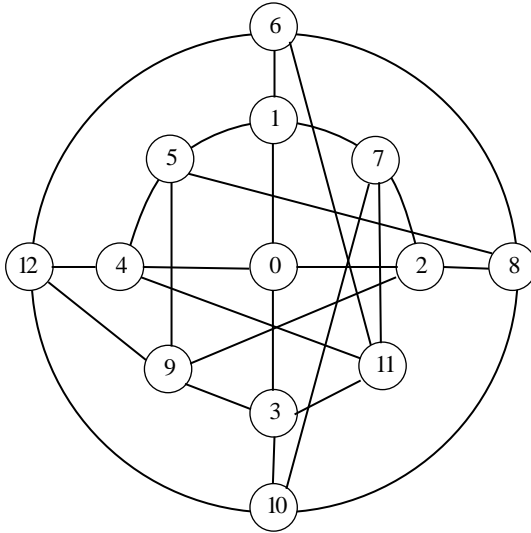


Рис. 4. 13(4)-компактный граф с обхватом  $g = 4$   
 $0^{\{1^{\{5,6,(2-4,7-12)_1\}, 2^{\{7,8,(1,3-6,9-12)_1\}, 3^{\{(1,2,4-8,11,12)_1,9,10\}, 4^{\{(1-3,5-10)_1,11,12\}}\}}$

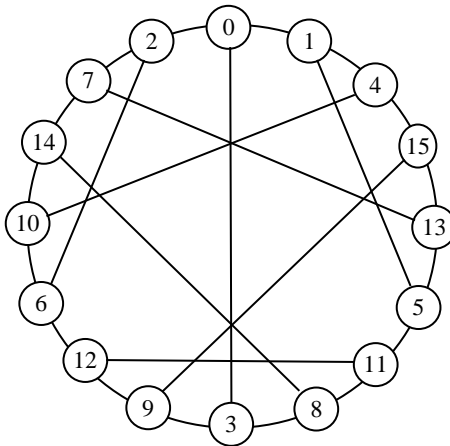


Рис. 5. 16(3)-компактный граф с обхватом  $g = 5$   
 $0^{\{1^{\{4^{\{10,\{11-15\}_1\}, 5^{\{11,\{10,12-15\}_1\}, 2^{\{6^{\{12,\{10,11,13-15\}_1\}, 7^{\{13,\{10-12,14,15\}_1\}, 3^{\{8^{\{(10-13,15)_1,14\}, 9^{\{(10-14)_1,15\}}\}}\}}\}}$

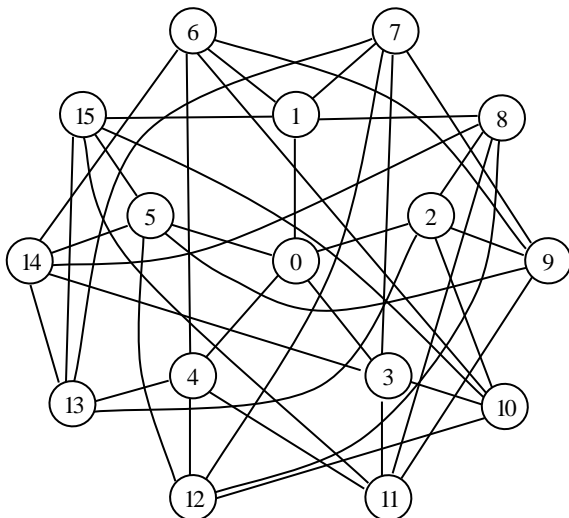


Рис. 6. 16(5)-компактный граф с обхватом  $g = 4$   
 $0^{\{1\{6,7,\{2-5,8-15\}_2\}, 2\{8,9,\{1,3-7,10-15\}_2\}, 3\{10,11,\{1,2,4-9,12-15\}_2\}, 4\{12,13,\{1-3,5-11,14,15\}_2\}, 5\{1-4,6-13\}_2,14,15\}}$

## 5. Заключение

В рамках проблемы повышения устойчивости функционирования больших систем путем снижения временных затрат на доставку контрольно-диагностической и управляющей информации и высвобождения временных резервов для реализации более качественных управляющих процедур и алгоритмов в статье решается задача синтеза регулярных структур ВС, обладающих минимальными задержками при заданных значениях порядка и степени представляющего систему графа. В работе введено понятие  $n(s)$ -компактных графов как  $s$ -регулярных графов порядка  $n$ , обладающих минимально возможным диаметром. Определены основные свойства таких графов и их проекций, показано, что клеточные графы, в том числе графы Мура могут представлять в множестве компактных.

Задача синтеза регулярной ВС с заданными значениями порядка, степени при минимуме диаметра ее графа сведена к абстрагированному, не требующему графического представления, построению системы вершинно-полных (остовных) проек-

ций с соответствующим минимальному диаметру числом уровней. Часть вершин в проекциях при этом представлена потенциальными подмножествами, дающими возможность альтернативного выбора из обладающих неполными окружениями вершин. Включение вершин в потенциальные подмножества, их изъятие и подстановки регламентированы определенными в работе свойствами, согласованными с остальными проекциями системы, диаметром и, при необходимости, с обхватом графа. Изменения, внесенные в одну из проекций, требуют внесения соответствующих коррективов в остальные проекции системы. Таким образом, задача синтеза обладающей некоторыми свойствами структуры сведена к построению совместной в отношении заданных свойств системы вершинно-полных проекций графа ВС и ее решению. Дано формальное изложение последовательности действий в процессе синтеза, приведены результаты синтеза полученных таким образом  $n(s)$ -компактных графов.

Учитываемые при генерации компактных структур свойства не ограничиваются рассматриваемой в работе проблемой синтеза регулярных графов с минимальным диаметром. В качестве оптимизируемых могут рассматриваться и другие коммуникационные свойства, например, наличие гамильтоновых циклов или цепей, ограничения на длины резервных маршрутов и т.д. Использование предложенного подхода в решении задач масштабирования систем, в том числе и нерегулярных, также выглядит достаточно прозрачным и перспективным. Не вызывает сомнений, что разработка и внедрение аналитических методов решения перечисленных задач в теорию и практику построения отказоустойчивых систем сетей связи, повысит их реактивность и предсказуемость.

### **Литература**

1. КАРАВАЙ М.Ф., ПАРХОМЕНКО П.П., ПОДЛАЗОВ В.С. *Комбинаторные методы построения двудольных однородных минимальных квазиполных графов (симметричных блок-схем)* // Автоматика и телемеханика. – 2009. – №2. – С. 153–170.

2. КАРАВАЙ М.Ф., ПАРХОМЕНКО П.П., ПОДЛАЗОВ В.С. *К новой топологии отказоустойчивых кластеров и локальных управляющих систем* // *Радіоелектронні і комп'ютерні системи*. – 2008. – №6(33). – С. 93–98.
3. МАХНЕВ А.А., ПАДУЧИХ Д.В. *О группе автоморфизмов графа Ашбахера* // *Труды ИММ УрО РАН*. – 2009. – Т. 15, №2. – С. 162–176.
4. МЕЛЕНТЬЕВ В.А. *Формальные основы скобочных образов в теории графов* // *Труды II Междунар. конф. «Параллельные вычисления и задачи управления» РАСО'2004: Ин-т проблем управления РАН им. В.А. Трапезникова*. – 2004. – С. 694–706.
5. МЕЛЕНТЬЕВ В.А. *Формальный подход к исследованию структур вычислительных систем* // *Вестник Томского гос. ун-та*. – 2005. – №14. – С. 167–172.
6. МЕЛЕНТЬЕВ В.А. *Операции над проекциями графов и актуализация описаний отказоустойчивых систем* // *Вестник Томского гос. ун-та*. – 2006. – №17. – С. 208–213.
7. МЕЛЕНТЬЕВ В.А. *Поиск вершинных  $(s,t)$ -сечений графа вычислительной системы с ограничением по диаметру компонент связности* // *Прикладная дискретная математика*. – 2008. – №2(2). – С. 107–112.
8. МЕЛЕНТЬЕВ В.А. *Аналитический подход к синтезу регулярных графов с заданными значениями порядка, степени и обхвата* // *Прикладная дискретная математика*. – 2010. – №2(8). – С. 74–86.
9. ПИНЧУК В.П. *Базовые графы для построения топологии управляющих сетей многопроцессорных систем* // *Искусственный интеллект*. – 2004. – №4. – С. 46–58.
10. РАПОПОРТ А.М. *Метрические характеристики графов сетей коммуникаций* // *Труды ИСА РАН*. – 2005. – Т. 14. – С. 141–147.
11. ХАРАРИ Ф. *Теория графов*. – М.: Мир, 1973. – 300 с.
12. DONETTI L., HURTADO P.I., MUFIOZ M.A. *Entangled networks, synchronization and optimal network topology* // *Phys. Rev. Lett.* – 2005. – Vol. 95(18). – P. 1–8.

13. LAKAMRAJU V., KOREN Z., KOREN I., KRISHNA M. *Measuring the vulnerability of interconnection networks in embedded systems* // Proc. First Merged Symp. IPPS/SPDP, EHPC Workshop, April 1998. – P. 919–924.
14. WEINSTEIN E.W. *Cage Graph* [Электронный ресурс] // WolframMathWorld: сайт. – URL: <http://mathworld.wolfram.com/topics/CageGraphs.html> (дата обращения: 17.07.10).

## COMPACT STRUCTURES OF COMPUTER SYSTEMS AND THEIR SYNTHESIS

**Victor Melent'ev**, A.V. Rzhanov Institute of Semiconductor Physics SB RAS, Novosibirsk, Ph.D., Senior Scientist (melva@isp.nsc.ru).

*Abstract: One of essential issues in computer systems (CS) control is limited decision-making time. Timing of control actions in the process of computer system functioning is in many respects determined by compactness of its structure providing the minimal number of transits at realization of intermodule communications. Compact structures CS are defined as regular graphs of an order  $n$  with the minimum diameter. These graphs are compared with  $(s, g)$ -cage graphs. The method of compact graphs synthesis is suggested. The method is based on the representation of compact graphs by the set of vertex-complete projections with minimally possible number of levels. Examples of  $n(s)$ -compact graphs built are given.*

**Keywords:** compact structures of computer systems, compact graphs, projection of the graph, synthesis of compact structures.

*Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии А. К. Погодаевым*