

**Институт проблем управления  
им. В.А. Трапезникова РАН**

# **УПРАВЛЕНИЕ БОЛЬШИМИ СИСТЕМАМИ**

***Выпуск 33***

**Июнь 2011**

**СБОРНИК  
ТРУДОВ**

ISSN 1819-2467

Регистрационный номер Эл №ФС77-27285 от 22.02.2007

**Москва – 2011**

# www.mtas.ru

## ИНТЕРНЕТ-сайт теории управления организационными системами

**ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ ОРГАНИЗАЦИОННЫМИ СИСТЕМАМИ**

ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ УПРАВЛЕНИЯ ИМ. В.А. ТРАПЕЗНИКОВА РАН



**Целью сайта** является предоставление специалистам по теории и практике управления организационными системами (ученым, преподавателям, аспирантам, студентам, а также реальным управленцам) доступа к ресурсам, отражающим современное состояние теории и возможности обмена идеями и результатами.

**На сайте имеются разделы:**

**Теория** – с обзором теории управления организационными системами, глоссарием, информацией для аспирантов;

**Практика** – с обзором результатов внедрения механизмов управления в реальных организациях;

**Библиография** – около 2500 публикаций по теории управления, снабжена классификатором и аннотациями;

**Электронная библиотека** – около 700 полнотекстовых монографий, статей и учебных пособий;

**а также многое другое.**

На сайте работает **форум**, на котором можно обсудить вопросы, относящиеся к математике, экономике, управлению организациями, узнать новости теории управления и ознакомиться с планируемыми конференциями и семинарами.

# ubs.mtas.ru

Интернет-сайт электронного периодического  
научного издания «Управление большими  
системами: сборник трудов»

## УПРАВЛЕНИЕ БОЛЬШИМИ СИСТЕМАМИ

ЭЛЕКТРОННЫЙ СБОРНИК НАУЧНЫХ ТРУДОВ  
ИНСТИТУТА ПРОБЛЕМ УПРАВЛЕНИЯ ИМ. В.А. ТРАПЕЗНИКОВА РАН

С 1998 года Институт проблем управления РАН выпускает периодический сборник трудов ученых, занимающихся разработкой и исследованием математических моделей управления большими (социально-экономическими, организационными, организационно-техническими и др.) системами. Все статьи, публикуемые в сборнике, проходят рецензирование ведущими специалистами по теории управления.

С 2006 года сборник "Управление большими системами" вместе с ведущим журналом ИПУ РАН "Проблемы управления" – включены в Российский индекс научного цитирования (РИНЦ).

С июля 2007 года Сборник входит в список ВАК (перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертации на соискание ученой степени доктора и кандидата наук):

\* по управлению, вычислительной технике и информатике (для докторов наук);

\* по электронике, измерительной технике, радиотехнике и связи; по энергетике (для кандидатов наук).

**Уважаемые коллеги! Приглашаем Вас опубликовать  
Вашу статью в очередном выпуске сборника  
"Управление большими системами"!**

Периодичность сборника - 4 раза в год. Время выхода прошедшей рецензирование статьи - 3-4 месяца. Плата с авторов за публикацию рукописей не взимается.

# lab18.ipu.rssi.ru

## XI - международная конференция Системы проектирования, технологической подготовки производства и управления этапами жизненного цикла промышленного продукта (CAD/CAM/PDM-2011)

*Уважаемые дамы и господа, приглашаем Вас принять участие в десятой международной конференции "Системы проектирования, технологической подготовки производства и управления этапами жизненного цикла промышленного продукта (CAD/CAM/PDM-2011)", которую планируется провести с 18 по 20 октября 2011 года в Москве, в Институте проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН.*

### **ТЕМАТИКА КОНФЕРЕНЦИИ:**

- ∅ Организация структур технических и программных средств проектирования и управления. Средства взаимодействия, структуры данных, международные стандарты.
- ∅ Компьютерная графика и CAD/CAM/PDM-системы в учебных процессах (программы обучения по дисциплинам, методические материалы, тестирование). Средства виртуальной реальности в промышленных системах.
- ∅ Интегрированные производственные системы и управление технологическими процессами. PDM-системы.
- ∅ Проектирование в машиностроении и строительстве.
- ∅ Проектирование в радиоэлектронике.

### **КЛЮЧЕВЫЕ ДАТЫ:**

**До 15 сентября 2011 года** – заявка на участие в конференции и/или выставке, перевод оргвзноса, тезисы докладов (объем не более 1-ой страницы формата А-5).

**До 1 октября 2011 года** – полные тексты докладов.

**Заявки, тезисы и доклады высылаются по e-mail:**  
[conf18@spm.ipu.ru](mailto:conf18@spm.ipu.ru)

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
*Институт проблем управления*  
*им. В.А. Трапезникова*

**УПРАВЛЕНИЕ  
БОЛЬШИМИ  
СИСТЕМАМИ**

**СБОРНИК ТРУДОВ**

*Выпуск 33*

**Москва – 2011**

### КООРДИНАЦИОННЫЙ СОВЕТ

Академики РАН: Васильев С.Н., Емельянов С.В., Коровин С.К., Куржанский А.Б., Федосов Е.А., Черноусько Ф.Л.; члены-корреспонденты РАН: Желтов С.Ю., Каляев И.А., Пархоменко П.П., Попков Ю.С.; д-ра техн. наук: Бутковский А.Г., Дорофеюк А.А., Кузнецов О.П., Кульба В.В., Кротов В.Ф., Лотоцкий В.А., Павлов Б.В., Поляк Б.Т., Рутковский В.Ю.

### РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

**Главный редактор:** член-корр. РАН Новиков Д.А. **Отв. секретарь:** к.т.н. Губко М.В. Д-ра техн. наук: проф. Алескеров Ф.Т. (ГУ ВШЭ), проф. Артамонов Е.И. (ИПУ РАН), д-р экон. наук, проф. Архипова М.Ю. (ИПИ РАН), д-ра техн. наук: проф. Афанасьев В.Н. (МИЭМ), проф. Бахтадзе Н.Н. (ИПУ РАН), проф. Бурков В.Н. (ИПУ РАН), проф. Вишневецкий В.М. (ИППИ РАН), д-р экон. наук, проф. Голиченко О.Г. (ЦЭМИ РАН), д-р физ.-мат. наук, проф. Добровидов А.В. (ИПУ РАН), д-ра техн. наук: проф. Заложнев А.Ю. (ИПУ РАН), проф. Ириков В.А. (МФТИ), проф. Калянов Г.Н. (ИПУ РАН), проф. Касаткин С.И. (ИПУ РАН), проф. Каравай М.Ф. (ИПУ РАН), д-р экон. наук, проф. Ключков В.В. (ИПУ РАН), д-ра техн. наук: проф. Кононенко А.Ф. (ВЦ РАН), проф. Курдюков А.П. (ИПУ РАН), проф. Лебедев В.Г. (ИПУ РАН), к-т техн. наук, доцент Лебедев В.Н. (ИПУ РАН), д-р экон. наук, проф. Ловчиновский Э.В. (ИПУ РАН), д-р техн. наук, проф. Мандель А.С. (ИПУ РАН), д-р экон. наук, проф. Нижегородцев Р.М. (ИПУ РАН), д-ра техн. наук: проф. Новосельцев В.Н. (ИПУ РАН), проф. Орлов А.И. (МВТУ), канд. техн. наук Петрикевич Я.И. (ИПУ РАН), д-р физ.-мат. наук, проф. Рапопорт Л.Б. (ИПУ РАН), д-р техн. наук, проф. Рыков А.С. (МИСИС), д-р экон. наук, проф. Секерин В.Д. (ИПУ РАН), д-ра техн. наук: проф. Сидельников Ю.В. (МАИ), проф. Совлуков А.С. (ИПУ РАН), д-р экон. наук, проф. Сухарев О.С. (Ин-т экономики РАН), д-ра техн. наук: проф. Уткин В.А. (ИПУ РАН), проф. Хоботов Е.Н. (МВТУ), д-ра физ.-мат. наук: доцент Чеботарев П.Ю. (ИПУ РАН), проф. Чхартишвили А.Г. (ИПУ РАН), проф. Щербakov П.С. (ИПУ РАН).

### РЕГИОНАЛЬНЫЕ РЕДАКЦИОННЫЕ СОВЕТЫ

**Волгоград** – д-ра физ.-мат. наук: проф. Воронин А.А., проф. Лосев А.Г. (ВолГУ); **Воронеж** – д-р техн. наук, проф. Баркалов С.А., д-р физ.-мат. наук, проф. Головинский П.А. (ВГАСУ), д-р техн. наук, проф. Подвальный С.Л. (ВГТУ); **Ижевск** – д-р физ.-мат. наук, проф. Непейвода Н.Н., к-т физ.-мат. наук, проф. Родионов В.И. (УдмГУ); **Иркутск** – д-ра физ.-мат. наук: проф. Бычков И.В., проф. Лакеев А.В. (ИДСТУ СО РАН); **Казань** – д-р физ.-мат. наук, проф. Маликов А.И., д-р техн. наук, проф. Сиразетдинов Р.Т. (КГТУ-КАИ); **Липецк** – д-ра техн. наук: проф. Кузнецов Л.А., проф. Погодаев А.К. (ЛГТУ); **Самара** – д-ра экон. наук: проф. Богатырев В.Д., проф. Гераськин М.И., д-р техн. наук, проф. Засканов В.Г. (СГАУ); **Санкт-Петербург** – д-ра физ.-мат. наук: проф. Петросян Л.А. (СПбГУ), проф. Фрадков А.Л. (ИПМ РАН); **Старый Оскол** – д-р техн. наук, проф. Еременко Ю.И. (СТИ); **Тверь** – д-ра техн. наук: проф. Кузнецов В.Н., проф. Палюх Б.В. (ТГТУ).

**Адрес редакции:** 117997, г. Москва, ул. Профсоюзная, д. 65.

**Адрес в Интернет:** [ubs.mtas.ru](http://ubs.mtas.ru).

Номер гос. регистрации электронного научного издания (ЭНИ): 0420900023.

© ИПУ РАН, 2011

## СОДЕРЖАНИЕ

### *Системный анализ*

---

- Чистов Д. А., Камаев В. А., Набока М. В.**  
*Онтологический реинжиниринг бизнес-процессов оператора связи* ..... 5
- Юдицкий С. А.**  
*Графодинамическое имитационное моделирование развития сетевых структур* ..... 21

### *Математическая теория управления*

---

- Бунич А. Л.**  
*Системы управления с идентификатором* ..... 35
- Жилина Т. Е.**  
*Синтез стабилизирующего управления в диффузионных системах с марковскими переключениями* ..... 70
- Фургат И. Б., Цыкунов А. М.**  
*Робастное управление нестационарными объектами с неизвестной переменной относительной степенью* ..... 91

### *Анализ и синтез систем управления*

---

- Жучков Р. Н., Пакшин П. В.**  
*Стабилизирующее сетевое управление линейными дискретными системами в условиях потери пакетов данных* ..... 113

### *Информационные технологии в управлении*

---

- Тычков С. Н.**  
*Реализация мультискобки Кругликова-Лычагина в системе компьютерной алгебры Maple* ..... 127

**Управление в социально-экономических системах**

**Еналеев А. К.**

*Оптимальность согласованных механизмов функционирования в активных системах.....* 143

**Клочков В. В., Панин Б. А.**

*Институциональные аспекты управления генерацией знаний в научном сообществе.....* 167

**Управление техническими системами  
и технологическими процессами**

**Сочнев А. Н.**

*Оптимизация функционирования представленных сетями Петри систем с помощью искусственных нейронных сетей.....* 198

**Технические и программные средства управления**

**Домнич В. С., Иващенко В. А.**

*Построение базы знаний для поиска причин аварийных ситуаций при формовании листового стекла.....* 218

**Кошев А. Н., Кузина В. В.**

*Моделирование и расчет концентрации электроактивного компонента в процессе электролиза.....* 233



УДК 005-044.337:004.82

ББК 30в6

## ОНТОЛОГИЧЕСКИЙ РЕИНЖИНИРИНГ БИЗНЕС-ПРОЦЕССОВ ОПЕРАТОРА СВЯЗИ

**Чистов Д. А.<sup>1</sup>, Камаев В. А.<sup>2</sup>, Набока М. В.<sup>3</sup>**

*(Волгоградский государственный технический университет, Волгоград)*

*Проведен сравнительный анализ подходов к реинжинирингу бизнес-процессов предприятий. Выполнена разработка метода реинжиниринга бизнес-процессов телекоммуникационного предприятия с использованием технологии онтологического инжиниринга, создана эталонная онтология бизнес-процессов в соответствии со структурной платформой enhanced Telecom Operations Map, а также разработана онтология существующих бизнес-процессов телекоммуникационного предприятия. Проведено тестирование предложенного метода реинжиниринга бизнес-процессов на примере автоматизированного сравнения эталонной онтологии с онтологией существующих бизнес-процессов крупного оператора связи.*

Ключевые слова: системный анализ, онтологический инжиниринг, управление знаниями, бизнес-процесс.

### **1. Введение**

В начале 90-х годов прошлого столетия в России начали активно развиваться телекоммуникационные предприятия федерального и регионального уровней. Большинство из них прошли

---

<sup>1</sup> Дмитрий Анатольевич Чистов, аспирант кафедры «САПР и ПК» (virus113@mail.ru).

<sup>2</sup> Валерий Анатольевич Камаев, доктор технических наук, профессор (cad@vstu.ru).

<sup>3</sup> Михаил Викторович Набока, кандидат технических наук (mikhail.naboka@gmail.com).

путь от небольших компаний до крупнейших операторов связи, предоставляющих широкий спектр телекоммуникационных услуг.

После того как заканчиваются ресурсы для экстенсивного развития, перед каждой компанией встает проблема интенсивного развития, повышения конкурентоспособности, использования внутренних ресурсов, анализа и оптимизации корпоративных бизнес-процессов.

«В условиях резко и часто непредсказуемо меняющейся рыночной конъюнктуры и жесткой конкурентной борьбы быстрота (и адекватность) реакции всех систем телекоммуникационного предприятия, точность и эффективность его операций приобретают особую значимость. Считается, что в таких условиях при осуществлении масштабной реорганизации предприятия наиболее эффективен подход реинжиниринга, в последнее время достаточно широко обсуждаемый в различных изданиях, посвященных вопросам управления. Реинжиниринг, по сути задуманный как технология, способствующая повышению эффективности предприятия за счет переопределения его бизнес-процессов и корректировки или замены используемой в нем бизнес-модели, должен и, что самое главное, может помочь многим российским телекоммуникационным предприятиям» [3].

Для помощи поставщикам услуг и сетевым операторам в решении возникающих перед ними проблем и автоматизации их бизнес-процессов в 1998 году была создана международная некоммерческая организация *TeleManagement Forum (TM Forum)*. В настоящее время она разрабатывает концепцию *New Generation Operations System and Software (NGOSS)*, представляющую собой набор стандартизованных спецификаций и руководств, которые охватывают важнейшие области деятельности оператора связи, в том числе стандартную архитектуру бизнес-процессов оператора связи *enhanced Telecom Operations Map (eTOM)*, «позволяющую всем заинтересованным сторонам в области телекоммуникаций понимать друг друга» [10].

Таким образом, применение концепции *NGOSS* и ее бизнес-составляющей – структурной модели бизнес-процессов *eTOM*

для реинжиниринга бизнес-процессов телекоммуникационного предприятия является актуальной задачей, решение которой позволит перейти операторам связи на качественно новый уровень, сократив при этом материальные, временные и трудовые затраты.

## **2. Исследование подходов к реинжинирингу бизнес-процессов**

В настоящее время существует три основных подхода к построению новой бизнес-модели компании:

– «*zero-approach*» – разработка бизнес-модели компании «с чистого листа». «По сути, этот подход является построением идеального образа компании на основе теоретических и практических представлений и субъективных ожиданий лиц, осуществляющих проект реинжиниринга, а также руководства экономического субъекта» [4];

– подход на основе решений – «построение бизнес-модели на основе моделирования системы принимаемых управленческих решений с последующим ее совершенствованием и построением новых бизнес-процессов на основе оптимизированной системы принятия решений» [4];

– детальный анализ – «детальное отражение существующего положения и последующее построение модели бизнес-процессов. По сути, этот подход представляет собой детальное описание и всесторонний анализ ключевых аспектов деятельности организации по различным основаниям и дальнейшее построение процессов на основе данных анализа» [4].

Исследование подходов к выполнению реинжиниринга бизнес-процессов показало, что для решения поставленных задач необходимо совместное использование подхода *zero-approach* и детального анализа. Первый подход используется на этапе создания эталонной онтологии бизнес-процессов предприятия. Второй подход применяется при разработке онтологии существующих бизнес-процессов оператора связи.

### 3. Исследование инженерии знаний и онтологического инжиниринга

Инженерия знаний – «раздел (дисциплина) инженерии, направленный на внедрение знаний в компьютерные системы для решения комплексов задач, обычно требующих богатого человеческого опыта» [11].

В инженерии знаний под онтологией понимается «структурная спецификация некоторой предметной области, ее формализованное представление, которое включает словарь (или имена) указателей на термины предметной области и логические выражения, которые описывают, как они соотносятся друг с другом» [1].

Формальная модель онтологии:

$$(1) O = \langle T, R, F \rangle,$$

где  $T$  – термины прикладной области, описываемой онтологией  $O$ ;  $R$  – отношения между терминами заданной прикладной области;  $F$  – функции интерпретации, заданные на терминах и/или отношениях онтологии  $O$ .

«Онтологический инжиниринг подразумевает глубокий структурный анализ предметной области... Основным преимуществом онтологического инжиниринга является целостный подход к автоматизации предприятия» [2].

В настоящее время существует ряд проектов, посвященных разработке онтологий бизнес-процессов предприятий. Среди них необходимо выделить *Enterprise project*, *Toronto Virtual Enterprise (TOVE) project* и *Process Specification Language (PSL) project*. Однако перечисленные онтологии «не удовлетворяют необходимым требованиям, предъявленным к системам организационного моделирования. В первую очередь это связано с тем, что предлагаемые в них модели и методы не дают комплексного решения. Они либо не интегрированы с существующими инструментами автоматизированной поддержки организационного проектирования (*TOVE*, *PSL*), либо поддерживают решения частных задач (автоматизация бизнес-процессов организации –

*Enterprise Project*, поддержка рассуждений на основе формальной организационной модели – *TOVE*)» [6].

Стоит отметить проекты *Business Process Management Ontology (BPMO)*, *Upper Process Ontology (UPO)* и *Yet Another Telecommunication Ontologies, Services and Processes framework (YATOSP)*, являющиеся частью более крупного проекта *SUPER Project* [12], а также *United Nations Standard Products and Services Code (UN SPSC)*, совместно разрабатываемый группой *United Nations Development Organization (UNDO)* и компанией *Dun & Bradstreet*.

Разрабатываемые в рамках этих проектов онтологии, доступные для анализа и использования, описывают типовые бизнес-процессы абстрактных предприятий и не учитывают специфику телекоммуникационной отрасли. Поэтому было принято решение о создании собственной онтологии бизнес-процессов телекоммуникационного предприятия на основе лучших мировых разработок в этой области.

В качестве эталонной модели бизнес-процессов телекоммуникационного предприятия выбрана многоуровневая структурная платформа бизнес-процессов *eTOM*, являющаяся международным стандартом в отрасли телекоммуникаций. *eTOM* «охватывает весь диапазон бизнес-процессов, необходимых для организации эффективной деятельности оператора связи, поэтому она становится поистине «бизнес-языком» телекома» [7]. Концептуальная модель платформы *eTOM* показана на рис. 1.

#### **4. Метод онтологического реинжиниринга бизнес-процессов**

Для реинжиниринга бизнес-процессов телекоммуникационного предприятия предложен метод онтологического реинжиниринга бизнес-процессов (далее – ОРБП), который состоит из трех основных шагов:

– создание эталонной онтологии бизнес-процессов телекоммуникационного предприятия в соответствии с многоуровневой платформой бизнес-процессов *eTOM*;



Рис. 1. Концептуальная модель платформы eTOM

- создание онтологии существующих бизнес-процессов конкретного телекоммуникационного предприятия на основе анализа его бизнес-процессов;
- сравнение построенных на шаге 1 и 2 онтологий и формирование соответствующих рекомендаций по приведению структуры существующих бизнес-процессов оператора связи к рекомендуемой архитектуре.

Общая схема метода онтологического реинжиниринга бизнес-процессов представлена на рис. 2.

На первом шаге предложенного метода ОРБП проводится анализ описания бизнес-процессов платформы eTOM, представленного в рекомендациях Международного союза электросвязи. Затем каждый бизнес-процесс заносится в эталонную онтологию либо как класс, либо как экземпляр класса в зависимости от уровня модели eTOM. Далее определяются связи между классами и экземплярами классов в онтологии, и рассчитывается окончательная таксономия.

На втором шаге выполняется сбор всей необходимой информации о существующих бизнес-процессах конкретного теле-

коммуникационного предприятия и последующее построение соответствующей онтологии аналогично построению онтологии на шаге 1. Важным моментом на этом этапе является использование единого глоссария при создании классов и экземпляров классов либо использование специальных слотов, содержащих синонимичные названия бизнес-процессов. Языком создаваемых онтологий выбран английский язык, так как он наиболее точно отражает смысл эталонных бизнес-процессов платформы *eTOM*.

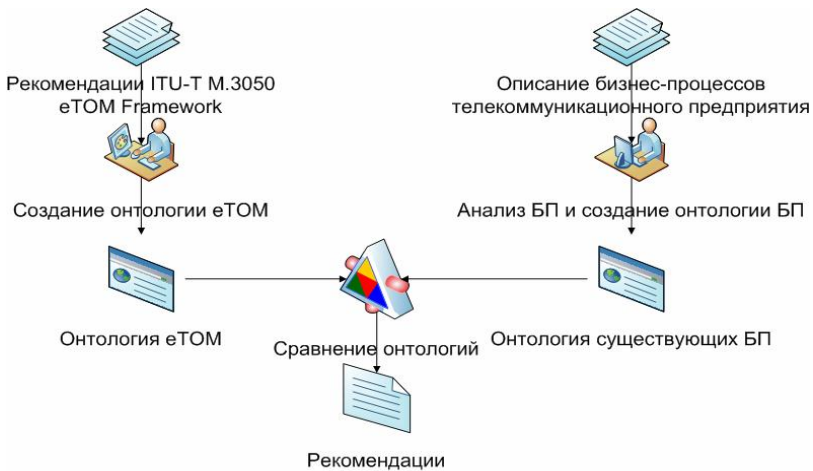


Рис. 2. Общая схема метода ОРБП

На заключительном третьем шаге сначала производится автоматическое сравнение построенных на предыдущих шагах онтологий бизнес-процессов, а затем при необходимости ручное сопоставление бизнес-процессов между двумя онтологиями. Далее в удобной графической либо текстовой форме представляются результаты сравнения онтологий бизнес-процессов, после чего бизнес-аналитик делает выводы о целесообразности произведенных изменений в иерархии бизнес-процессов и формулирует соответствующие рекомендации по реинжинирингу существующих бизнес-процессов телекоммуникационного предприятия и привидению их к рекомендуемой архитектуре.

Необходимо заметить, что в качестве эталонной онтологии бизнес-процессов может выступать несколько измененная онтология, отражающая желаемую структуру исследуемой предметной области. Тогда итерационный процесс сравнения онтологий будет отражать процесс последовательной перестройки существующей структуры бизнес-процессов организации с наглядным графическим представлением всех выполняемых изменений.

Метод позволяет уменьшить риски осуществления реинжиниринга бизнес-процессов на конкретном телекоммуникационном предприятии. Это достигается использованием итерационного подхода к проведению реорганизации деятельности оператора связи с возможностью наглядного представления получаемых результатов.

## 5. Разработка онтологий бизнес-процессов

При разработке онтологий для определения принадлежности бизнес-процесса к группе бизнес-процессов одного типа предложено использование свойства класса в виде

(2) *hasType (hasValue X, hasValue Y, ...)*,

где *hasType* – свойство, определяющее отношения между индивидными концептами; *M* – множество экземпляров-маркеров надклассов; *X* – экземпляр-маркер первого надкласса бизнес-процессов; *Y* – экземпляр-маркер второго надкласса; *hasValue* – конструкция языка *OWL*.

В целях повышения информативности разрабатываемых онтологий для классов и экземпляров классов было определено свойство *hasProcessID*, содержащее уникальный идентификационный номер бизнес-процесса в соответствии с платформой *eTOM*, а также в виде комментариев вносилось описание каждого бизнес-процесса.

На рис. 3 приведен фрагмент окна редактирования свойств класса *Customer Interface Management* в инструментальном средстве *Protégé*. Для данного класса указаны ограничения его принадлежности к группам бизнес-процессов *Fulfillment (F)*, *Assurance (A)* и *Billing (B)*.



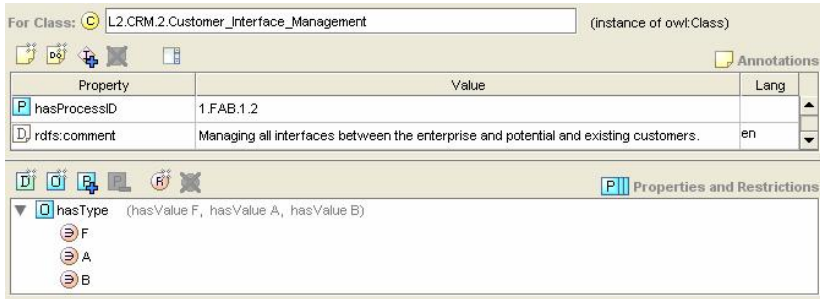


Рис. 3. Определение свойств классов онтологии

В совокупности было создано 209 экземпляров для 41 класса. Общее количество классов различных уровней в эталонной онтологии бизнес-процессов в соответствии с моделью *eTOM* составило 77 классов. На рис. 4 показан фрагмент иерархии классов и экземпляров эталонной онтологии, разработанной в инструментальном программном средстве *Protégé*.

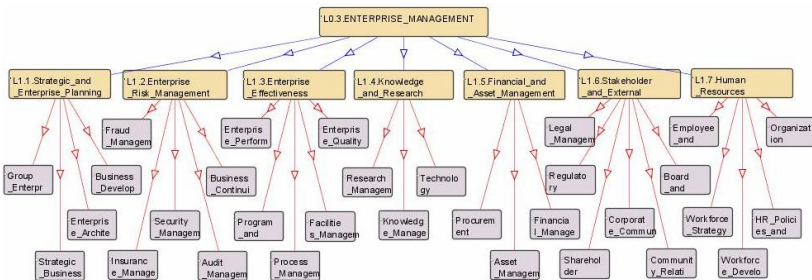


Рис. 4. Фрагмент иерархии классов и экземпляров онтологии

Аналогично была построена онтология существующих бизнес-процессов крупного оператора связи, включающая 97 классов и 102 экземпляра классов различных уровней.

Далее в соответствии с шагом 3 предложенного метода онтологического реинжиниринга бизнес-процессов телекоммуникационного предприятия производится автоматизированное сравнение онтологий бизнес-процессов и формирование соот-

ветствующих рекомендаций по приведению структуры существующих бизнес-процессов телекоммуникационного предприятия к рекомендуемой архитектуре.

В качестве программного средства для объединения онтологий используется плагин *Prompt* к редактору онтологий *Protégé*. «При объединении двух онтологий *PROMPT* создает список предлагаемых операций. Операция может состоять, например, из объединения двух терминов или копирования терминов в новую онтологию. Пользователь может выполнить операцию, выбирая одну из предлагаемых или определяя непосредственно операцию. *PROMPT* выполняет выбранную операцию и дополняет изменения, вызванные этой операцией. Потом список предлагаемых операций модифицируется и создается список конфликтов и возможных решений этих конфликтов. Это повторяется до тех пор, пока не будет готова новая онтология» [8]. Для удобства представления результатов сравнения онтологий используется плагин *PROMPTViz* к *Protégé*, показывающий в интуитивно понятном графическом виде все изменения в целевой онтологии.

В результате автоматизированного сравнения онтологий формируется список идентичных бизнес-процессов и список бизнес-процессов, отсутствующих в онтологии существующих бизнес-процессов оператора связи или требующих перепроектирования.

Интерпретацией результатов сравнения онтологий бизнес-процессов занимается бизнес-аналитик, являющийся экспертом в области реинжиниринга бизнес-процессов телекоммуникационного предприятия. Он может использовать либо табличное представление результатов отображения онтологий (рис. 5), либо визуальное представление целевой таксономии (рис. 6).

Поскольку при создании онтологий применяются дескриптивные логики и правила вывода, то «при сравнении онтологий автоматизированная система самостоятельно рассчитывает все изменения в таксономии на каждой итерации, избавляя бизнес-аналитика от слежения за изменяющимися связями между бизнес-процессами и предоставляя возможность удобного корректирования получаемых результатов» [5].

f1	f2	renamed operat.	map level	rename explanation
Биллинг	L1.4.Billing	Yes	Map	Directly-changed frame ids are the same
Взаимодействие_с_внутренними_потребителями	L2.CRM.2.Customer_Interface_Management	Yes	Map	Directly-changed frame ids are the same
Взаимодействие_с_партнерами	L1.OPS.4.Supplier_Partner_Relationship_Management	Yes	Map	Directly-changed frame ids are the same
Планирование_и_перспективное_развитие	L1.1.Strategic_and_Enterprise_Planning	Yes	Map	Directly-changed frame ids are the same
Предоставление_услуг_внешним_потребителям	L0.1.OPERATIONS	Yes	Map	Directly-changed Same superclass and sub...
Предоставление_услуг_внутренним_потребителям	L0.1.OPERATIONS	Yes	Map	Directly-changed Same superclass and sub...
Управление_внешними_взаимотношениями	L1.6.Stakeholder_and_External_Relations_Management	Yes	Map	Directly-changed frame ids are the same
Управление_жизненным_циклом_услуг	L1.3.Product_Lifecycle_Management	Yes	Map	Directly-changed frame ids are the same
Управление_предприятием	L0.3.ENTERPRISE_MANAGEMENT	Yes	Map	Directly-changed frame ids are the same
Управление_рисками_предприятия	L1.2.Enterprise_Risk_Management	Yes	Map	Directly-changed frame ids are the same
Управление_человеческими_ресурсами	L1.7.Human_Resources_Management	Yes	Map	Directly-changed frame ids are the same
Управление_эффективностью_предприятия	L1.3.Enterprise_Effectiveness_Management	Yes	Map	Directly-changed frame ids are the same

Operation	Property	Restriction	Old Value	New Value
restriction added				hasType has B
Property Value changed	NAME		Биллинг	L1.4.Billing
Property Value added	rdfrs:comment			This vertical end-end process grou...
primitive to defined changed				

Рис. 5. Табличное представление результатов отображения онтологий

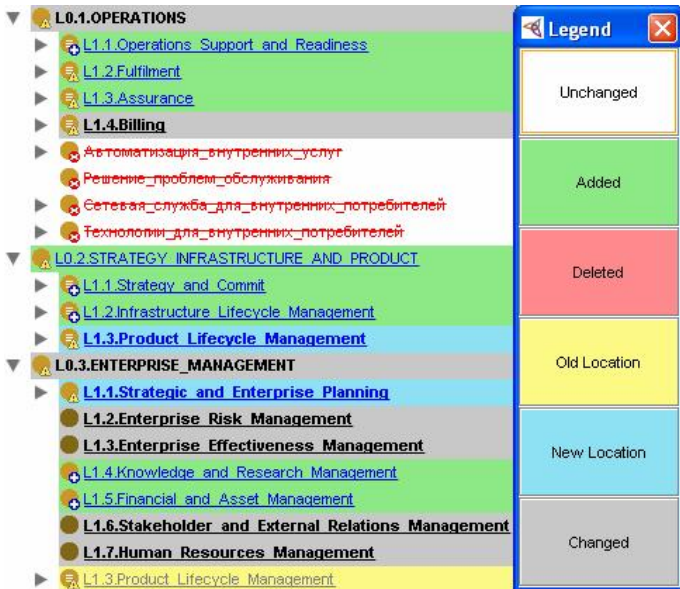


Рис. 6. Визуальное представление таксономии классов в процессе автоматизированного сравнения онтологий

Классы и экземпляры классов, соответствующие идентичным бизнес-процессам в обеих онтологиях, выделяются серым цветом. Если в результате сравнения элементы таксономии изменяют свое местоположение (меняется класс-родитель), то они обозначаются желтым и синим цветом, показывая старое и новое местоположение соответственно. Если класс или экземпляр класса выделен красным цветом, это означает, что он был удален из результирующей таксономии, так как не нашлось соответствующего ему класса или экземпляра класса в другой онтологии. Зеленым цветом обозначаются элементы таксономии, которые были добавлены в целевую онтологию.

В рассматриваемом случае целевой онтологией выступает эталонная онтология бизнес-процессов в соответствии с платформой *eTOM*, поэтому все бизнес-процессы из онтологии существующих бизнес-процессов, не имеющие аналогов в эталонной онтологии, будут удалены из целевой онтологии. При этом в наглядной форме показывается, какие именно бизнес-процессы не соответствуют эталонной архитектуре бизнес-процессов телекоммуникационного предприятия, рекомендуемой *TM Forum* и Международным союзом электросвязи.

Этот вариант носит название «жесткого» реинжиниринга, поскольку предполагает радикальное изменение и переосмысление существующих бизнес-процессов, а, следовательно, изменение организационной структуры предприятия. Под это определение попадает понятие реинжиниринга, используемое в рамках классического метода *Business Process Reengineering (BPR)*: «реинжиниринг – это принципиальное переосмысление и радикальная перестройка бизнес-процессов для достижения кардинальных улучшений критических современных показателей эффективности: стоимости, качества, сервиса и оперативности» [9].

Необходимо отметить, что в настоящее время очень мало компаний могут себе позволить полную реорганизацию своих бизнес-процессов, поэтому если перед компанией стоит задача изменения в пределах существующих структур, то используется так называемый «мягкий» реинжиниринг. В этом случае целевой онтологией будет выступать онтология существующих бизнес-процессов телекоммуникационного предприятия. При

этом объектом разработки являются существующие бизнес-процессы оператора связи, которые необходимо улучшить. В дополнение к ним создается некоторое количество новых бизнес-процессов из онтологии *eTOM*. В этом случае задача определения необходимого количества создаваемых бизнес-процессов ложится на бизнес-аналитика.

Поскольку изменение организационной структуры, предполагающее «жесткий» реинжиниринг, не входило в задачи настоящей работы, то для реорганизации бизнес-процессов оператора связи был выбран «мягкий» реинжиниринг с сохранением существующей организационной структуры предприятия.

В результате применения метода ОРБП телекоммуникационного предприятия для области бизнес-процессов «Управление предприятием» крупного регионального оператора связи было найдено 4 полных соответствия групп существующих бизнес-процессов с эталонной архитектурой *eTOM*, а также добавлено 14 новых групп бизнес-процессов и для двух групп изменено местоположение. Таксономия целевой онтологии бизнес-процессов и общие показатели результатов реинжиниринга области бизнес-процессов «Управление предприятием» оператора связи представлены на рис. 7.

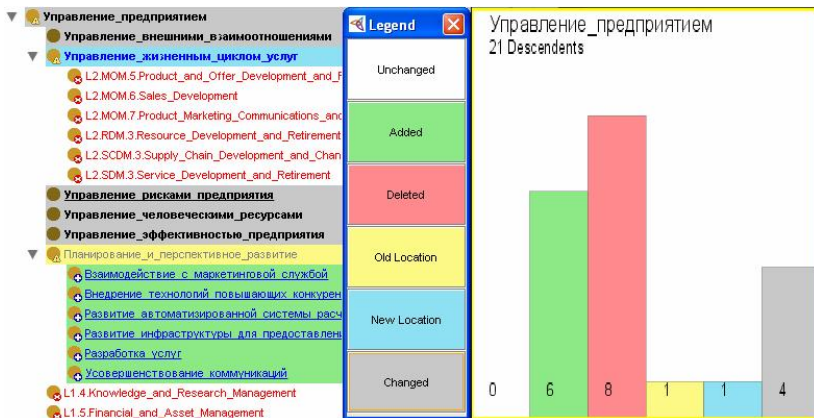


Рис. 7. Показатели результатов реинжиниринга группы бизнес-процессов «Управление предприятием»

## 6. Выводы

Предложенный метод онтологического реинжиниринга бизнес-процессов телекоммуникационного предприятия позволяет уменьшить риски осуществления реинжиниринга бизнес-процессов на конкретном телекоммуникационном предприятии. Это достигается использованием итерационного подхода к проведению реорганизации деятельности оператора связи с возможностью наглядного представления получаемых результатов.

Авторы полагают, что метод онтологического реинжиниринга может быть использован не только для реинжиниринга бизнес-процессов, но и для перепроектирования организационной структуры оператора связи (при наличии эталонной либо желаемой организационной структуры предприятия).

Результатами работы являются метод онтологического реинжиниринга бизнес-процессов телекоммуникационного предприятия, эталонная онтология бизнес-процессов в соответствии с многоуровневой структурной платформой *eTOM* и онтология существующих бизнес-процессов конкретного оператора связи, которые участвовали в процессе автоматизированного сравнения онтологий, в результате которого сформирован список рекомендаций по оптимизации существующих бизнес-процессов телекоммуникационного предприятия.

## Литература

1. ГАВРИЛОВА Т.А. *Онтологический инжиниринг* // Труды конференции «КИИ-2002». – М., 2002. – С. 845–853.
2. ГАВРИЛОВА Т.А. *Онтологический подход к управлению знаниями при разработке корпоративных систем автоматизации* [Электронный ресурс]. – Режим доступа: [http://www.big.spb.ru/publications/bigspb/km/ontol\\_podhod\\_to\\_uz.shtml#1](http://www.big.spb.ru/publications/bigspb/km/ontol_podhod_to_uz.shtml#1)
3. ДМИТРИЕВА Е.И. *Реинжиниринг как способ выживания предприятий в условиях жесткой конкуренции* // Вестник Тамбовского университета. Серия: Гуманитарные науки. – 2006. – №4. – С. 318–321.

4. ЗАБУЛОНОВ А.Б. *Реинжиниринг: практические подходы к реорганизации* // Менеджмент в России и за рубежом. – 2002. – №1. – С. 10–13.
5. КАМАЕВ В.А., ЧИСТОВ Д.А. *Онтологический реинжиниринг бизнес-процессов телекоммуникационного предприятия в соответствии с концепцией New Generation Operations Systems and Software* // Открытое образование: [по матер. XXXVI междунар. конф. и дискус. науч. клуба IT+SE'09, майская сессия, Ялта – Гурзуф]. – 2009. – Приложение к журн. – С. 184–186.
6. КУДРЯВЦЕВ Д.В. *Обзор применения онтологий в моделировании и управлении* [Электронный ресурс]. – Режим доступа: [http://www.businessengineeringgroup.com/theory/experience/ontologies\\_for\\_modelling.php](http://www.businessengineeringgroup.com/theory/experience/ontologies_for_modelling.php)
7. НАГАЕВ Е.В. *eTOM: структурная модель бизнес-процессов для операторов связи* // Мобильные системы. – 2005. – №5. – С. 36–38.
8. ОВДЕЙ О.М., ПРОСКУРИНА Г.Ю. *Обзор инструментов инженерии онтологий* [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.elbib.ru/index.phtml?page=elbib/rus/journal/2004/part4/op>
9. ХАММЕР М., ЧАМПИ Д. *Реинжиниринг корпорации: Манифест революции в бизнесе* / Пер. с англ. Ю.Е. Корнилович. – М.: Манн, Иванов и Фербер, 2006. – 287 с.
10. *ITU-T Recommendation M.3050.0 (03/2007). Telecommunications management network. Enhanced Telecom Operations Map (eTOM) – Introduction* / ITU. – Geneva, 2007. – 14 p.
11. [http://ru.wikipedia.org/wiki/Инженерия\\_знаний](http://ru.wikipedia.org/wiki/Инженерия_знаний) (дата обращения: 13.03.2010)
12. <http://www.ip-super.org/content/view/32/66/> (дата обращения: 09.02.2011)

## ONTOLOGICAL BUSINESS-PROCESS REENGINEERING OF TELECOM SERVICE PROVIDER

**Dmitry Chistov**, Volgograd State Technical University, Volgograd, postgraduate student (virus113@mail.ru).

**Valery Kamaev**, Volgograd State Technical University, Volgograd, Doctor of Science, professor (cad@vstu.ru).

**Michael Naboka**, Volgograd State Technical University, Volgograd, Cand.Sc. (mikhail.naboka@gmail.com).

*Abstract: We review and compare the approaches and methodologies of business-process reengineering, and develop the method for telecom business-processes reengineering. The method is based on the technology of ontological engineering. The reference business-processes ontology is created in accordance with a structural framework named “Enhanced Telecom Operations Map”, and also existing business-processes ontology of the telecommunication company is designed. We illustrate the suggested method of business-process reengineering on the example of automated comparison of the reference ontology with the ontology of existing business-processes of a big telecom service provider.*

**Keywords:** system analysis, ontological engineering, knowledge management, business process.

*Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии М. В. Губко*



УДК 007:681.518.2  
ББК 22.18 65.23 65.29

## ГРАФОДИНАМИЧЕСКОЕ ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАЗВИТИЯ СЕТЕВЫХ СТРУКТУР

Юдицкий С. А.<sup>1</sup>

(Учреждение Российской академии наук Институт  
проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН)

*Исследована графодинамика изменения конфигураций в процессах развития сетевых структур на заданном временном горизонте. Введён набор элементарных локальных операций преобразования графов. Предложена конечно-автоматная модель развития в терминах действий, преобразующих конфигурацию сети с учётом временного фактора и воздействий внешней среды.*

Ключевые слова: сетевая структура, графодинамическое имитационное моделирование, конфигурация сети, локальные операции над графами, конечный автомат, действия, индикаторные логические функции.

### **1. Введение. Постановка задачи**

Во всех развитых странах наблюдается всё возрастающее применение в различных предметных областях сетевых структур и рост интереса к сетевым моделям в управлении. Резко вырос поток публикаций по этой тематике, в том числе русскоязычной литературы. Опубликованы работы по общим вопросам математики сетей [1, 5, 6], по сетевым методам принятия решений [10], социальным сетям [7], сетецентрическому управлению в многоагентных системах [3, 8, 9], рассмотрены многочисленные примеры технологических сетей (в газо- и нефтетранспорт-

---

<sup>1</sup> Семен Абрамович Юдицкий, доктор технических наук, профессор, главный научный сотрудник ИПУ РАН (yuseab@yandex.ru).

ных системах, электроэнергетике, в глобальной и локальных компьютерных средах и т.д. [4, 15]).

Сетевая структура моделируется графом, вершины которого соответствуют автономным функциональным единицам – агентам, а рёбра отображают взаимодействия между агентами. Взаимодействие заключается в том, что один из агентов посылает другому сообщение и получает от него ответ. Такой «сеанс взаимодействия» может инициироваться любым из пары агентов, повторяться многократно, причём каждое следующее выполнение сеанса возможно только после завершения предыдущего.

Эффективность управления поведением сетевой структуры во многом определяется предварительным имитационным моделированием, в ходе которого определяются временные и ресурсные характеристики системы, конфликтные ситуации, «узкие места» и т.д. Целью моделирования является также прогнозирование процессов развития сетевой структуры, с определением её возможных конфигураций и их изменения. Динамическая модель развития («видение будущего») должна работать на дискретной временной шкале и учитывать не только предсказуемые, но и неожиданные (маловероятные) внешние события. Проблема моделирования процессов развития сетевых структур исследована ещё не в полной мере, попыткой продвижения на пути к её решению следует считать и данную работу.

Сформулированная проблема относится к области графодинамики – направлению в теории управления, в котором значениями переменных являются графы. Фундаментальная работа в области аналитической графодинамики [2], в которой и введён термин «графодинамика», была выполнена под руководством профессора М.А. Айзермана и опубликована более 30 лет назад. Более поздние работы, развивающие идеи [2], автору неизвестны.

В [2] исследовались процессы изменения во времени иерархических структур, описываемых графами типа дерева с вершинами, кодируемыми числами натурального ряда 1, 2, 3, ... (при стандартном порядке обхода дерева – сверху вниз от «корня» 1 к «листьям» и слева направо в каждом ярусе). Дерево, согласно [2], моделируется целочисленной функцией целочисленного аргумента (функцией подчинённости), задающей для каждой вершины, кроме корня, ту вышестоящую вершину, которая

связана ребром с данной. В терминах функций подчинённости введён ряд операций преобразования деревьев, причём каждая операция выполняется «над всем деревом», а не над его локальными фрагментами. В [2] рассмотрены примеры уравнений графодинамики, исследованы некоторые свойства описываемых уравнениями динамических процессов, прогнозируются тенденции «развития деревьев» и т.д. Вместе с тем вышерассмотренные научные результаты пока не доведены до реальных инженерных приложений. Кроме того, всё в большей степени в сетевых структурах проявляется тенденция отхода от чисто иерархического принципа, базирующегося на математическом аппарате деревьев, с переходом на сетцентрический принцип с применением графов любого типа.

Данная работа имеет целью посмотреть на проблему графодинамики с другой, инженерной стороны, и в этом смысле не является развитием [2]. Работа посвящена имитационному моделированию процессов развития сетевых структур и ориентирована на аналитиков и предметных специалистов, которые формулируют задачи исследования и интерпретируют полученные результаты. В работе изложен инженерный подход, базирующийся на следующих предпосылках.

1. Конфигурации сетевой структуры моделируются произвольными неориентированными графами.

2. Операции над графами (кроме копирования – см. ниже) являются локальными. Набор операций взят из практики и определен на подмножестве вершин графа (одной вершине, паре вершин, неполном или полном наборе вершин). Список операций является открытым и может пополняться.

3. Процесс развития характеризуется последовательностью действий, где каждое действие путём применения заданного набора операций изменяет предыдущую конфигурацию (граф сети).

4. Между действиями и формируемыми ими графами имеет место однозначное соответствие, обеспечиваемое тем, что последовательность действий определяется конечным автоматом на основе дерева (каждому действию, кроме начального, непосредственно предшествует одно и то же действие).

В данной работе решается следующая графодинамическая задача. На дискретной временной шкале выделены моменты  $t_i$ ,

$i = 0, 1, \dots, k$ , образующие горизонт моделирования, и задан граф  $g(t_0)$ , соответствующий начальному моменту. Известен также набор стандартных операций, выполняющих простейшие действия над графами при внесении изменений в сетевую структуру: копирование графа либо его фрагмента, добавление или удаление вершины и ребра и т.д. Требуется для каждого момента  $t_i$ ,  $i > 0$ , определить граф  $g(t_i)$ , полученный при помощи вышеуказанных стандартных операций с учётом внешних воздействий.

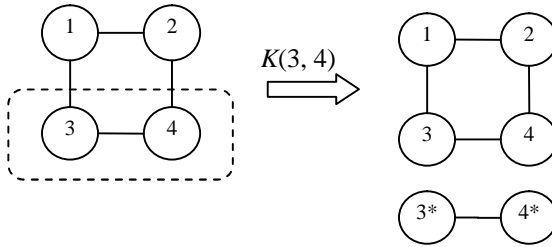
Задача решается введением набора стандартных операций над графами, отражающих изменения конфигураций реальных сетевых структур, и построения конечного автомата трансформирования графов на заданном временном горизонте. Состояниям автомата соответствуют действия, а переходы обусловлены событиями, описываемыми индикаторными логическими формулами [16, 18]. События определяются истечением конкретного времени с момента запуска предыдущего действия и внешними воздействиями на сетевую структуру.

## **2. Стандартные операции над графами**

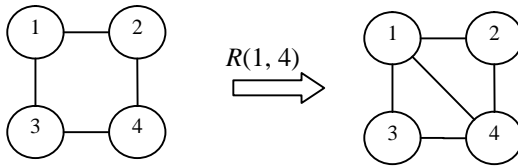
Состав набора операций поясним на примере организационных систем (административных, политических, бизнес-структур и т.д.). В процессе развития организации сливаются и разделяются, в них создаются новые подразделения (в том числе за счёт выделения из существующих) и ликвидируются неэффективные, вводятся и устраняются функциональные связи внутри организации и между организацией и внешней средой. Организация или её часть, продемонстрировавшие свою эффективность, могут копироваться (дублироваться) и развёртываться на новом месте с образованием филиалов и т.д.

Вышесказанное может быть реализовано на основе элементарных операций, проиллюстрированных на рис. 1. Каждая операция преобразует входной граф в выходной граф. Для входного графа имеет место ограничение: кратные рёбра и петли в нём отсутствуют. Вершины  $p_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , входного (выходного) графов обозначаются числами натурального ряда, номера вершин, на которых определена операция, указываются в скобках справа от символа операции.

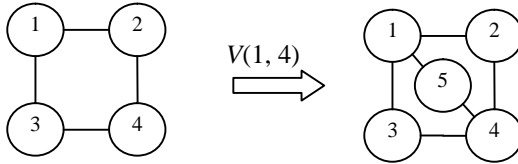
а) Копирование с выделением подграфа



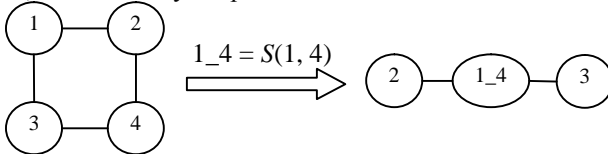
б) Введение ребра



в) Вставка вершины



г) Слияние двух вершин



д) Удаление вершины

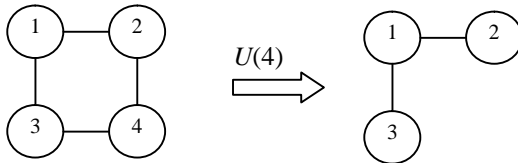


Рис. 1. Элементарные операции над графами

Предлагается следующий набор:

1. Операция  $K(P^*)$  копирования [14] с выделением связного подграфа, где  $P^*$  – подмножество множества  $P = \{p_i, i = 1, \dots, n\}$  вершин входного графа (в предельном случае  $P^* = P$ ). Выделенный подграф включает все вершины из  $P^*$  и все рёбра, инцидентные обоими концами вершинам из  $P^*$ . Выходной граф состоит из двух компонент связности, соответствующих входному графу и выделенному фрагменту, вершины последнего помечаются звёздочкой. Пример копирования дан на рис. 1а, подграф на базе вершин 3, 4 выделен пунктиром.

2. Операция  $R(p_i, p_j)$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ ,  $i \neq j$ , введения ребра, соединяющего выделенные вершины входного графа (при условии, что такое ребро отсутствовало) – см. рис. 1б.

3. Операция  $V(p_i, p_j)$  вставки дополнительной вершины (кодируется следующим числом натурального ряда), соединённой рёбрами с вершинами  $p_i, p_j$  – см. рис. 1в. Дополнительная вершина закодирована цифрой 5.

4. Операция  $S(p_i, p_j)$  слияния двух вершин и заменой их одной вершиной  $p_i p_j$ , сопровождающаяся удалением петель, охватывающих образованную вершину, и замещением кратных рёбер одинарными. Пример слияния вершин 1 и 4 дан на рис. 1г. Две пары рёбер, связывающих вершину 1\_4 с 2 и 3, замещены одинарными рёбрами.

5. Операция  $U(p_i)$  удаления вершины сопровождается удалением всех инцидентных ей рёбер – см. рис. 1д.

### 3. Конечно-автоматная модель процессов развития

Дадим формальное определение конечно-автоматной модели процессов развития сетевых структур и проиллюстрируем его на примере.

Введём обозначения:

$\mathbf{D} = \{d_i, i = 1, \dots, a\}$  – множество действий;

$\mathbf{Q} = \{K, R, V, S, U\}$  – множество стандартных операций;

$\mathbf{Q}^*$  – подмножество  $\mathbf{Q}$ ;

$\mathbf{G} = \{g_i, i = 1, \dots, b\}$  – множество графов,

$W = \{w_i, i = 1, \dots, c\}$  – множество условий перехода между действиями, выражаемых индикаторными логическими функциями.

Входной и выходной граф относительно действия в момент  $t = 0, 1, \dots, k$  обозначим соответственно  $g_{\text{вх}}(t), g_{\text{вых}}(t)$ .

Примем следующие соотношения:

- (1)  $g_{\text{вх}}(t) = g_{\text{вх}}(t - 1),$
- (2)  $g_{\text{вых}}(t) = \alpha(d(t), g_{\text{вх}}(t), Q^*(t)),$
- (3)  $Q^*(t) = \beta(d(t)),$
- (4)  $d(t) = \mu(d(t - 1), w(t)),$

где  $\alpha, \beta, \mu$  – операторы, заданные лицом, проводящим моделирование (ЛПМ).

Подставляя (1) и (3) в (2), получаем

- (5)  $g_{\text{вых}}(t) = \alpha(d(t), g_{\text{вх}}(t - 1), \beta(d(t)) = \pi(d(t), g_{\text{вх}}(t - 1)),$
- где оператор  $\pi$  определяется на основе операторов  $\alpha$  и  $\beta$ .

Графодинамика процессов развития сетевых структур отображается уравнениями (4), (5), выражающими соответственно функцию переходов и функцию выходов автомата. Для начального момента задаём граф  $g_{\text{вх}}(t = 0); d(t = 0)$  – пустое действие.

Формально автоматная модель процессов развития представляется в виде набора:

- (6)  $A = \langle D, Q, G, W, \mu, \pi, g_{\text{вх}}(t = 0) \rangle$

**Пример.** Автоматную модель проиллюстрируем на примере, показанном на рис. 2. Непунктирными квадратами на рис. 2 изображены действия, над квадратами проставлены наборы операций, выполняемых действиями согласно (3). Пунктирными прямоугольниками показаны выходные графы, формируемые действиями в дискретные моменты  $t$ . Эти же графы являются входными для действия в следующий момент – см. (1). Сплошными дугами изображены переходы от действия к действию, дуги помечены индикаторными логическими формулами, о которых будет сказано ниже.

На порядок выполнения операций, соотносённых одному действию, накладываются определенные ограничения:

- операция копирования не может быть в одном наборе с какой-либо другой операцией;

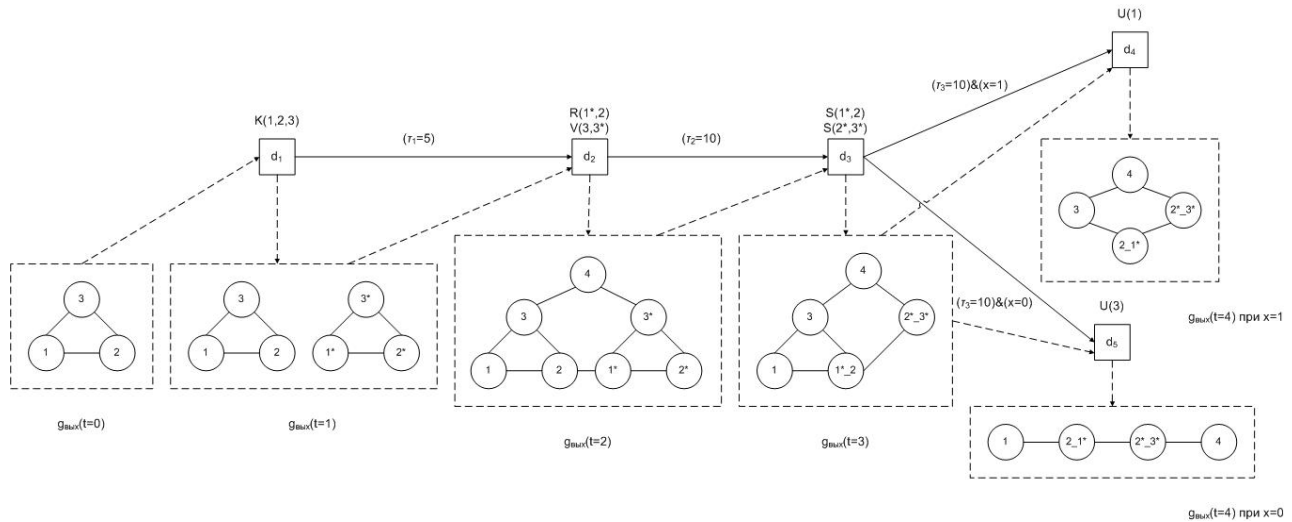


Рис. 2. Автоматная модель процесса развития сетевой структуры



- для любых двух операций, соотнесенных одному и тому же действию, пересечение подмножеств вершин, на которых они определены, должно быть пустым.

При этих ограничениях все операции, находящиеся в одном наборе, выполняются «квазипараллельно», т.е. в любой последовательности.

Определим дискретную временную шкалу, на которой реализуется процесс развития. Моменты  $t = 0, 1, \dots$ , соответствующие завершению текущего действия, совпадающему с началом следующего действия, будем определять как начальные точки «медленных» тактов. Моменты  $\tau = 0, 1, \dots$  внутри интервала  $[t - 1, t]$ , характеризующие продолжительность действия, сопоставим начальным точкам «быстрых» тактов. Каждому действию  $d_i$  соответствует быстрая тактность  $\tau_i$ . Условие перехода от действия к действию выражается логической формулой:

$$(7) \quad W = f_t(\bullet) \& f_i(\bullet),$$

где булева функция  $f_t$  индуцирует временные требования к текущему действию, а функция  $f_i$  – требования к величине внешних воздействий, инициирующих в момент  $t$  следующее действие.

Индикаторные логические формулы составляются путём применения конечное число раз операций булевой алгебры (конъюнкции, дизъюнкции, инверсии) к предикатам (индикаторам) вида  $(x \# c)$ , где  $\#$  – знак сравнения из множества  $\{=, \neq, >, \geq, <, \leq\}$ ;  $x$  – числовая переменная;  $c$  – числовая константа. Более подробно индикаторные логические формулы, включая их эквивалентные преобразования, были рассмотрены в [16, 18].

Вернёмся к рис. 2. Действие  $d_1$  в момент  $t = 1$  копирует заданный для момента  $t = 0$  граф, состоящий из вершин 1, 2, 3, и формирует два несвязанных графа соответственно с вершинами 1, 2, 3 и  $1^*, 2^*, 3^*$ , образующих выходной граф для момента  $t = 1$ . По прошествии пяти быстрых тактов (выполнении условия  $f_t(t = 1) = (\tau_1 = 5) = 1$  на дуге  $d_1 d_2$ ) и принятом для этой дуги значении  $f_i(t = 1) = 1$ , согласно (7), имеет место  $w(d_1, d_2) = 1 \& 1 = 1$ . В момент  $t = 2$  прекращается действие  $d_1$  и

запускается действие  $d_2$ , которое в выходном графе  $g_{\text{вых}}(t=2)$  вводит ребро 2, 1\* и вершину 4 с инцидентными ей рёбрами 3, 4 и 3\*, 4.

В момент  $t=3$  действие  $d_3$  производит две операции слияния вершин, с образованием «совмещённых» вершин  $1*_2, 2*_3^*$ . Пересечение подмножеств вершин для этих операций пусто. По завершению действия  $d_3$  при выполнении альтернативных условий  $(\tau_3=10) \& (x=1)$  и  $(\tau_3=10) \& (x=0)$ , где  $x$  – внешнее воздействие, инициируются соответственно действия  $d_4$  или  $d_5$ . Первое в момент  $t=4$  удаляет из выходного графа  $g_{\text{вых}}(t=3)$  вершину 1 с двумя рёбрами, второе – вершину 3 с тремя рёбрами.

#### 4. Заключение

Итак, результатом работы метода, предложенного в статье, является упорядоченная последовательность графов, описывающих конфигурации моделируемой системы на заданном горизонте её развития. Каждый граф сопоставляется временному интервалу между двумя последовательными моментами  $[t-1, t]$ .

Возникает вопрос: как применить полученный результат для управления процессами развития сетевых структур?

Одним из возможных решений является использование «конфигурационных» графов при триадном подходе к моделированию и управлению крупномасштабными системами [17, 19].

Напомним, что триадный принцип моделирования и управления исходит из представления поведения дискретной системы в виде последовательности целенаправленных действий, сопровождающихся изменением показателей системы (факторов). Построение триадной модели включает решение ряда задач:

- формирование состава и структуры целей, поставленных перед системой, установление причинно-следственных связей на множестве целей (целеполагание);
- задание состава и порядка выполнения действий (логическое управление);
- выбор наиболее значимых показателей, характеризующих работу системы, определение отношений и способов взаимо-

влияния между показателями (когнитивный анализ);

- установление связей между целями, операциями и показателями.

Структурно триадная модель состоит из трёх взаимодействующих блоков: графа целей (реализуется на сетях Петри [12]), графа действий (сети Петри, помеченные индикаторными логическими формулами), графа показателей (знаковые графы [13] либо матрицы [11], другое название – когнитивные карты).

Анализ процессов развития сетевой структуры на основе триадной модели реализуется в форме человеко-компьютерного взаимодействия. Исходя из заданной конфигурации сетевой структуры, человек (ЛПМ) формирует триадную модель. Компьютерная среда просчитывает модель и выдаёт данные о достижении (или недостижении за нормативное время) целей, о тенденциях изменения показателей, о месте и времени нарушений, например, выходе показателей за допустимые пределы, об установившихся в сети нежелательных циклах, и т.д. Человек анализирует эти данные и принимает решение о введении в сеть соответствующих механизмов управления, о коррекции параметров модели и т.д. Далее описанный цикл моделирования повторяется для данной или следующей конфигурации сетевой структуры. При прогнозировании процессов развития сетевых структур на заданном временном горизонте триадная модель строится и исследуется для каждого интервала, соответствующему медленному такту. Основой когнитивной карты в составе триадной модели может служить соответствующий граф, отображающий конфигурацию сетевой структуры. Методологии преобразования графа в когнитивную карту будут посвящены последующие публикации автора.

### **Литература**

1. АГАЕВ Р.П., ЧЕБОТАРЁВ П.Ю. *Сходимость и устойчивость в задачах согласования характеристик (обзор базовых результатов)* // Управление большими системами. Спецвыпуск 30.1. – М.: ИПУ РАН, 2010. – С. 470–505.

2. АЙЗЕРМАН М.А., ГУСЕВ Л.А., ПЕТРОВ С.В., СМЕРНОВА И.Н. *Динамический подход к анализу структур, описываемых графами (основы графодинамики)* // Автоматика и телемеханика. – 1977. – №7. – С. 135–151; №9, С. 123–136.
3. АМБАРЦУМЯН А.А. *Сетецентрическое управление на сетях Петри в структурированной дискретно-событийной системе* // Управление большими системами. Спецвыпуск 30.1. – М.: ИПУ РАН, 2010. – С. 506–535.
4. АХМЕТЗЯНОВ А.В., САЛЬНИКОВ А.М., СПИРИДОНОВ С.В. *Многосеточные балансовые модели нестационарных потоков в сложных газотранспортных системах* // Управление большими системами. Спецвыпуск 30.1. – М.: ИПУ РАН, 2010. – С. 230–251.
5. БЛЮМИН С.Л. *Оргиперграфы: матричное представление* // Управление большими системами. Спецвыпуск 30.1. – М.: ИПУ РАН, 2010. – С. 22–39.
6. БУРКОВ В.Н., БУРКОВА И.В. *Метод сетевого программирования в задачах управления проектами* // Управление большими системами. Спецвыпуск 30.1. – М.: ИПУ РАН, 2010. – С. 40–61.
7. ГУБАНОВ Д.А., НОВИКОВ Д.А., ЧХАРТИШВИЛИ А.Г. *Социальные сети: модели информационного влияния, управления и противоборства*. – М.: Физматлит, 2010.
8. ЗАТУЛИВЕТЕР Ю.С., ФИЩЕНКО Е.А. *Графодинамические системы с сетецентрическим управлением в математически однородном поле компьютерной информации* // Управление большими системами. Спецвыпуск 30.1. – М.: ИПУ РАН, 2010. – С. 567–604.
9. КУЗНЕЦОВ О.П., КУЛИНИЧ А.А., МАРКОВСКИЙ А.В. *Анализ влияний при управлении слабоструктурированными ситуациями на основе когнитивных карт* // Человеческий фактор в управлении. – М.: КомКнига, 2006. – С. 313–344.
10. КУЛЬБА В.В., КОНОНОВ Д.А., ЧЕРНОВ И.В., РОЦИН П.Е., ШУЛИГИНА О.А. *Сценарное исследование сложных систем: анализ методов группового управления* // Управление большими системами. Спецвыпуск 30.1. – М.:

- ИПУ РАН, 2010. – С. 154–186.
11. МАКСИМОВ В.И. *Структурно-целевой анализ развития социально-экономических ситуаций* // Проблемы управления. – 2005. – №3. – С. 30–38.
  12. ПИТЕРСОН ДЖ. *Теория сетей Петри и моделирование систем.* – М.: Мир, 1984.
  13. РОБЕРТС Ф.С. *Дискретные математические модели с приложениями к социальным, биологическим и экологическим задачам.* – М.: Наука, 1986.
  14. СЕМЁНОВ А.С. *Фрактальные развивающиеся архитектуры* // Управление большими системами. Спецвыпуск 30.1. – М.: ИПУ РАН, 2010. – С. 91–103.
  15. СТЕЦЮРА Г.Г. *Механизмы взаимодействия объектов сетевых цифровых систем* // Управление большими системами. Спецвыпуск 30.1. – М.: ИПУ РАН, 2010. – С. 337–351.
  16. ЮДИЦКИЙ С.А., РАДЧЕНКО Е.Г. *Алгебра потокособытий и сети Петри – язык потокового моделирования многоагентных иерархических систем* // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. – 2004. – №9. – С. 61–66.
  17. ЮДИЦКИЙ С.А., ВЛАДИСЛАВЛЕВ П.Н., ТОЧ Д.С. *Триадный подход к моделированию систем сетецентрического управления* // Управление большими системами. Выпуск 28. – М.: ИПУ РАН, 2010. – С. 24–39.
  18. ЮДИЦКИЙ С.А., ВЛАДИСЛАВЛЕВ П.Н. *Основы предпроектного анализа организационных систем.* – М.: Финансы и статистика, 2005.
  19. ЮДИЦКИЙ С.А., ЖЕЛТОВА Л.В., ВЛАДИСЛАВЛЕВ П.Н. *Графодинамическая триадная модель системы с дискретным управлением* // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. – 2010. – №10. – С. 12–18.

## GRAPHODYNAMIC SIMULATION MODELING OF NETWORK STRUCTURES EVOLUTION

**Semen Yuditskiy**, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Doctor of Science, professor (Moscow, Profsoyuznaya st., 65, tel. (495) 339-59-10).

*Abstract: Changes in configuration of network structures during evolution on a specific time horizon are studied by using the technique of graphodynamics. A set of elementary local graph morphing operations is introduced. A finite-state-machine model of evolution is developed. The model bases on actions that transform network configuration with account of the time factor and impact of the environment.*

**Keywords:** network structure, graphodynamic simulation modeling, network configuration, local operations over graphs, finite state machine, actions, logical indicator functions.

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии В. Г. Лебедевым*

УДК 62.50  
ББК 32.817

## СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ С ИДЕНТИФИКАТОРОМ

Бунич А. Л.<sup>1</sup>

(Учреждение Российской академии наук  
Институт проблем управления РАН, Москва)

*Представлен обзор работ по адаптивным системам управления с идентификатором (АСИ) дискретными объектами с параметрической и непараметрической неопределенностью на основе метода прогнозирующей модели. Основное внимание уделено связи между спектральными характеристиками внешних возмущений и предельно достижимым качеством управления и быстродействию идентификатора. Выделен класс стационарных возмущений с априорно известной локализацией спектра, в котором разрешима задача синтеза систем предписанной точности регулирования по критерию дисперсии установившейся реакции и исследуется чувствительность системы управления к вариациям спектрального состава возмущений.*

Ключевые слова: идентификатор, рекуррентное оценивание, прогнозирующая модель, сингулярные возмущения.

### **1. Предпосылки идентификационного подхода к задаче синтеза регулятора**

«Разница между типами систем в значительной мере определяется уровнем накапливаемой информации и отсюда наличием более или менее развитой иерархии частей управляющего устройства» [54, с. 581].

Под объектом управления понимается модель наблюдений (в эконометрике – механизм порождения данных, *data*

---

<sup>1</sup> Александр Львович Бунич, доктор технических наук, профессор, ведущий научный сотрудник ([bunich19462010@hotmail.com](mailto:bunich19462010@hotmail.com)).

*generating process* [37]) со структурированной неопределенностью из заданного класса  $\Xi = \Xi_1 \times \Xi_2$ , индексированного абстрактным параметром  $J$ , где  $\Xi_1$  – неопределенность собственно объекта, а  $\Xi_2$  – неопределенность возмущения. Выделим особо случай  $\Xi = \{J\}$  – «полностью определенного объекта», для которого задача синтеза регулятора решается методами классической теории управления.

Регулятор (обратная связь) представляет собой неупреждающую зависимость изменяемых переменных (управлений) от наблюдений, а объект с присоединенным к нему регулятором называется системой управления. Цель синтеза регулятора определяется подлежащим минимизации функционалом стоимости управления в заданном классе допустимых обратных связей  $\mathcal{X}$ . Нижняя грань стоимости управления по классу  $\mathcal{X}$  называется ценой управления. Синтез оптимального (субоптимального) регулятора состоит в построении системы, для которой стоимость управления совпадает с ценой (превосходит цену на не более чем заданный порог) для любого объекта из  $\Xi$ .

Управление неопределенным объектом включает снижение неопределенности его начального описания в процессе обработки результатов наблюдений. Снижение неопределенности реализуется настраиваемой (подобранной, *fitted*) моделью, а точность настройки (подгонки под наблюдения [27, 29]) характеризуют функционалом невязки выходных переменных объекта и настраиваемой модели.

Возможны различные способы описания и снижения неопределенности объекта. Для снижения неопределенности объектов с детерминированной неопределенностью используют средства интервального анализа [23], гарантированного оценивания, основанного на методе описанных эллипсоидов [35]. В рамках статистического описания неопределенности принципиальное значение имеет тот факт, что функционалы от эмпирического распределения с увеличением объема выборки наблюдений сближаются с соответствующими «теоретическими» значениями, что позволяет состоятельно оценивать характеристики объекта методом подстановки и его модификациями [5].



Пусть  $\{x_t\}_{t=1}^T$  – выборка объема  $T$  независимых однородных наблюдений из генеральной совокупности с неизвестным распределением  $P$ , а неопределенный параметр объекта  $J$  задан как функционал от распределения:  $J = G(P)$ . Метод подстановки рекомендует в качестве оценки параметра выбрать статистику  $J_T = G(P_T)$  где  $P_T$  – эмпирическое распределение. Если функционал  $G(P)$  определен на гладких распределениях, то вместо  $P_T$  используют подстановку сглаженного эмпирического распределения. К оценкам подстановки относятся, например, ОМП (оценки максимального правдоподобия) [25, с. 51],  $M$ -оценки Хубера [57], оценки методом моментов К. Пирсона. Идею подстановки использует и метод идентификации, основанный на построении настраиваемой прогнозирующей модели объекта. Параметр  $J$  определен (в неявной форме) условием минимума функционала невязки выходов объекта и модели, а выборочная оценка параметра определяется минимизацией эмпирического функционала (полученного заменой в функционале невязки ансамблевого усреднения выборочным средним). Алгоритм вычисления оценок в реальном времени (алгоритм идентификатора) определяется процедурой стохастической аппроксимации, градиентной или псевдоградиентной относительно эмпирического функционала, [55, 83]. Настройку модели интерпретируют как идентификацию (буквально – отождествление при  $T \rightarrow \infty$ , от лат. *identifico* – отождествлять) настраиваемой модели с точной, параметр которой совпадает с параметром объекта. Идентификация относится к обратным задачам динамики – восстановления неизвестных характеристик объекта по наблюдениям. Теоретические результаты идентификации подкреплены программным обеспечением в рамках системы *MATLAB* (пакет *System Identification Toolbox*) на основе известных методов идентификации, в частности, разработанных Л. Льюнгом [81, 82].

Метод подстановки подсказывает иерархическую структуру адаптивной системы управления с идентификатором (АСИ), адекватно отражающую разделение темпов процессов в системе на быстрые (координатные) и медленные (параметрические) возмущения (рис. 1) [19, 41]. АСИ включает настраиваемый ре-

гулятор, структура которого определена на этапе синтеза основного контура, и (поисковый или беспойсковый) идентификатор, управляющий настройками регулятора.

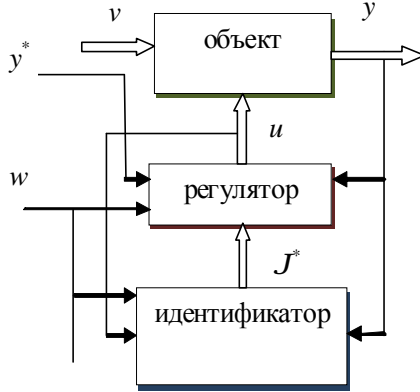


Рис. 1. Структурная схема АСИ

Предположим, что задача синтеза основного контура решена, и управления  $u$  при известном параметре  $J$  формируются по закону  $u_0 = U_0(y_0, J)$ ,  $u_t = U_t(u^{t-1}, y^t, J)$ ,  $t = 1, 2, \dots$ , с известными функциями прошлых наблюдений (управлений  $u$  и измеряемых выходов объекта  $y$ )  $U_t(\cdot)$ . Для формирования управлений неопределенным объектом произведем подстановку  $J_t = J_t(u^{t-1}, y^{t-1}) \rightarrow J$ , где оценки параметра  $J_t$  на соответствующих тактах определяются идентификатором, и построим реализуемую стратегию управления с обратными связями  $u_0 = U_0(y_0, J)$ ,  $u_t = U_t(u^{t-1}, y^t, J)$ ,  $t = 1, 2, \dots$

Естественно предположить, что при состоятельном оценивании параметра неопределенность начального описания объекта несущественна в смысле предельного по  $T \rightarrow \infty$  функционала стоимости управления

$$I_U^\infty = \limsup_{T \rightarrow \infty} T^{-1} \sum_{t=1}^T I_U^t \rightarrow \inf_{U \in \mathfrak{K}} I_U^t = E_U q_t(y_t, u_t, v_t, J)$$

с функциями потерь  $q_t(\cdot)$ ,  $t = 1, 2, \dots$ ,  $E_U$  – математическое ожидание по стратегической мере, которая соответствует случайному управляемому процессу, порожденному стратегией  $U \in \mathfrak{K}$ .

Кроме того, идентификатор в качестве датчика параметрических возмущений может использоваться не только при проектировании АСИ, но также и при решении важных задач обслуживания систем управления, например, для прогнозирования медленных отказов, а также в исследовательских целях.

Впервые промышленная система с идентификатором в цепи обратной связи, используемым для настройки компенсатора, была внедрена в системе управления точностью прокатки труб [39, 47].

Очевидно, изложенная схема синтеза регулятора может быть обоснована лишь в рамках асимптотической постановки задачи («решение неасимптотических задач оценивания, хотя и весьма важное само по себе, как правило, не может являться объектом достаточно общей математической теории», [25, с. 7]). Действительно, заморозим идентификатор на некотором фиксированном такте  $t = T \gg 0: J_t = J_T$  при  $t > T$ . Устойчивость замкнутой системы представляет статистическую гипотезу по ограниченной выборке наблюдений, которая не может быть достоверной с вероятностью единица. Таким образом, построенная система управления имеет ограниченную надежность, не обеспечивая достижения даже наиболее слабой (стабилизационной) цели синтеза.

Попытка решения задачи синтеза в неасимптотической постановке на основе байесового подхода осложняется так называемой «априорной трудностью» – неадекватным реальным условиям предположением о том, что случайный параметр  $J$  имеет известную априорную плотность распределения. Переход от априорной к апостериорным плотностям распределения (относительно прошлых наблюдений при фиксированной регулярной стратегии управления  $U$ ) по правилу Байеса

$$p_U(J/y^t) = p_U(J/y^{t-1}) p(y_t/J, y^{t-1})/p(y_t/y^{t-1}),$$

локализация и темп локализации этих плотностей в окрестности «истинного» значения параметра зависит (для систем с активным накоплением информации) от выбора стратегии и интерпретируется как «изучение» объекта [54]. Более формально неопределенный объект с состоянием  $x$  рассматривается как полностью определенный с расширенным состоянием  $X = (x, J)$ ,

параметр – как ненаблюдаемая компонента состояния  $X$ , а задача синтеза – как задача стохастического оптимального управления полностью определенным объектом по неполным данным. При конечном горизонте управления оценки чувствительны к априорной плотности распределения и зависимость ослабевает лишь при  $T \rightarrow \infty$  («принцип асимптотической инвариантности байесовских оценок» по отношению к априорной плотности, [25, с. 35]). Таким образом, в реальных задачах (когда априорное распределение неизвестно) «априорная трудность» преодолевается введением большого параметра  $T$ . При этом вопрос о состоятельности оценок параметра объекта в замкнутом контуре требует специального рассмотрения (мартингал Леви  $E(J|y^t)$  сходится п.н. при  $t \rightarrow \infty$  однако сходимость к  $J$  определяется условными моментами второго порядка и зависит от выбора стратегии управления).

Обоснование идентификационного подхода сопряжено со значительными трудностями. Прежде всего, допущение о состоятельности оценок параметра представляет ограничение на класс стратегий управления и относится к цели синтеза, а не к исходной постановке задачи. Кроме того, условие состоятельности необходимо согласовать с операцией ансамблевого усреднения в функционале стоимости. Далее, на больших временных интервалах предположение о стационарности объекта неадекватно реальной ситуации (износ инструмента, старение катализатора – типичные примеры медленных параметрических возмущений с неизвестной динамикой). Во-вторых, предельно-оптимальные стратегии существенно различаются по скорости переходных процессов (скорости сходимости временных средних к пределу в определении функционала стоимости), и практически важный вопрос об оптимизации стратегий по качеству переходного процесса требует специального рассмотрения. В третьих, остаются открытыми вопросы оптимального синтеза основного контура и алгоритма идентификатора (идентификация объекта в замкнутом контуре, когда оценки параметра используются при формировании управлений, специфична, не сводится к известным из статистики процедурам состоятельного оценивания и может потребовать принятия специальных мер по

обогащению спектра процесса управления). Наконец, для проектирования АСИ необходимо рассмотреть важные вопросы эффективной вычислительной реализации стратегии управления в системах реального времени.

Малая вариативность управлений и требование устойчивости замкнутой системы стимулировали прогресс в рекуррентном оценивании [55, 62, 69, 73, 74, 77, 85, 89, 90, 92] и активной идентификации (с использованием поисковых процедур и тестовых сигналов). Однако реализация активных стратегий осложнена ограничениями режима нормальной эксплуатации [61] и трудностями оценки потерь на поиск [49], поэтому вопрос о выборе активной или пассивной идентификации не имеет универсального ответа.

Для некоторых классов объектов эффективное управление возможно и без снижения неопределенности [45], либо на основе «функциональной идентификации» [17, 56], когда идентифицируется объект из того же или близкого класса адаптивности, на основе общего решения адаптивной минимаксной задачи в терминах систем совместимых моделей [2], посредством прямого подхода (более простого в реализации, особенно для систем с малой размерностью вектора настраиваемых параметров регулятора). Наконец, условия состоятельного оценивания в АСИ могут быть избыточны по отношению к построению предельно – оптимальной стратегии, например, при использовании в идентификаторе МНК в случае предельного вырождения информационной матрицы [1, 28].

Для иллюстрации трудностей проектирования систем управления объектами со стохастической неопределенностью рассмотрим задачу компенсации постоянного возмущения. Скалярный объект описывается уравнением  $y_t = J + u_t + v_t$  с дискретным временем  $t = 1, 2, \dots$ , центрированной стационарной помехой  $v$ , управлением  $u$ , неизвестным параметром  $J$  и стабилизируемым на нулевом уровне измеряемым выходом  $y$ . Цель управления (ЦУ) – асимптотическая по времени стабилизация – реализуется регулятором  $u_t = -J_{t-1}(y_1^{t-1})$ ,  $t > 1$ ,  $u_1 = 0$ , где  $J_{t-1}(y_1^{t-1})$  – состоятельная оценка параметра сдвига по измерени-

ям  $\{y_i^{t-1}\}$ . Таким образом, каждой состоятельной оценке параметра соответствует некоторая стратегия управления, и естественно классифицировать оценки по скорости затухания переходного процесса в идентификаторе, измеряемой, например, асимптотикой с.к. ошибки стабилизации  $S_i^2(\mathcal{J}) = E(\mathcal{J} - J_i)^2$ .

Такой выбор критерия качества естественен для класса асимптотически нормальных оценок ( $\sqrt{t}(\mathcal{J} - J_i) \sim N(0, D(\mathcal{J}))$ ) с дисперсией предельного распределения нормированной ошибки  $D(\mathcal{J})$ . Точная нижняя граница (граница Рао–Крамера) дисперсии  $D(\mathcal{J})$  достигается, например, для оценок ММП (метод максимального правдоподобия), а оценки, для которых достигается эта граница, называются асимптотически эффективными по Фишеру. Намеченная Фишером программа состояла в построении асимптотически оптимальных оценок (для которых дисперсия предельного нормального распределения минимальна равномерно по оцениваемому параметру) и обосновании ММП.

Обоснование программы Фишера в последующие десятилетия потребовало значительных усилий многих статистиков. Во-первых, программа Фишера охватывала лишь регулярные задачи (с конечной информацией Фишера  $I(\mathcal{J})$ ). В нерегулярных же задачах, как правило, не выполняется условие асимптотической нормальности нормированной соответствующим образом ошибки, а асимптотическая скорость сходимости  $S_i^2(\mathcal{J})$  при  $t \rightarrow \infty$  может быть существенно (по порядку объема выборки) выше, чем в регулярном случае (пример: ММП для помехи с равномерным распределением). Во-вторых, и в регулярных задачах для некоторых значений параметра  $D(\mathcal{J})$  меньше нижней границы  $\Gamma^1(\mathcal{J})$  (впервые пример такой суперэффективной оценки построил Ходжес) и оценок с минимальной дисперсией не существует [25]. В третьих, более адекватна приложениям задача оценивания, в которой распределение помехи известно с точностью до некоторого класса, т.е. оценки параметра должны быть «адаптивными» [34] по отношению к неопределенности помехи, обеспечивая такую же дисперсию предельного распределения нормированной ошибки, как ММП при заданном распределении помех.

Наконец, для построения АСИ представляют интерес именно рекуррентные аналоги алгоритмов оценивания, позволяющие использовать идентификатор в системах реального времени.

Перечисленные затруднения (даже в узких рамках асимптотического подхода) дают некоторое представление о масштабе проблемы проектирования АСИ с учетом существенно более сложных (по сравнению с рассмотренным тривиальным примером) условий реальных задач синтеза, в которых стабилизируемая переменная необязательно наблюдаема, объект многомерный динамический, а вопрос об оптимальном синтезе основного контура требует специального рассмотрения.

Ограничимся лишь довольно кратким перечнем результатов математической статистики, используемых при построении АСИ.

## 2. Статистическое оценивание (основные вехи)

Современная постановка задачи оценивания и общее условие состоятельности оценок ММП (метод максимального правдоподобия) принадлежат *Вальду* (1939, 1943, 1949), а состоятельность байесовских оценок установлена *Ле Камом* (1953).

Видимо, первый пример ММП привел *Даниил Бернулли* (1777): оценивание параметра сдвига  $V$ -распределения. В частных случаях ММП применялся *Гауссом*. Ему принадлежит и рекуррентная версия МНК (1821).

Метод моментов предложил *К. Пирсон* (1894).

Общий ММП с исследованием асимптотики дал *Р. Фишер*: (1912, 1925), обоснованием ММП занимались *Дуб*, *Вольд*, *Вольфовиц*, *Крамер* (30–40 гг).

Минимаксные оценки введены *Борелем* (1921) и *Дж. Нейманом* (1928).

Неравенство информации получено (независимо) *Р. Фишером* (1925), *Фреие* (1943), *Рао* (1945), *Крамером* (1946).

Нерегулярные задачи оценивания: *Даниил Бернулли* (1777), *Ибрагимов* и *Хасьминский* (1972), *Ермаков* (1977) по наст. вр.

Непараметрическое оценивание: *Парзен*, *Розенблатт*, *Стейн*, *Левит*, *Невельсон*, *Ибрагимов* (50г. по наст. вр.)

Метод стохастической аппроксимации: *Роббинс* и *Монро*, (1951), *Блум* (1954), *Кифер* и *Вольфовиц* (1952), *Сакрисон* (1964,

1966), Фабиан (1960–1968), Цыпкин (1968), Айзерман, Браверман и Розоноэр (1970), Невельсон и Хасьминский (1972) по наст. вр.

Устойчивость статистических решений и робастная идентификация: Тьюки, Ходжес, Леман, Хьюбер, Цыпкин и др. (70-е гг. по наст. вр.)

Некорректность задачи статистического точечного оценивания (как обратной задачи теории вероятностей): Ченцов Н.Н. (1981) [60].

### 3. Отслеживание динамики нестационарного объекта

В [4] решена задача состоятельного отслеживания детерминированного дрейфа для нестационарного объекта (1), в котором изменяющиеся коэффициенты операторных полиномов образуют параметр  $J_t$ ,  $J_{t+1} = HJ_t$ , матрица  $H$  известна, начальное значение  $J_0$  не определено. При некоторых предположениях, включая предельную ограниченность процесса  $u$ , построена рекуррентная сильно состоятельная оценка  $J_t^*$  ( $y'_0, u'_0$ ) параметра  $J_t$ .

Для отслеживания случайного дрейфа используются: алгоритм Качмажа [15] и его модификации [46], оценивание на скользящем временном интервале [40], взвешенный МНК (с дисконтированием) [83].

Для линейных объектов  $x_{t+1} = A_t(J_t)x_t + B_t(J_t)u_t + v_{t+1}$  (в регрессионной форме  $y_t = \Phi_t J_t + v_{t+1}$ ) с обратными связями по выходу  $u = u(y)$  достаточно общего типа задача отслеживания линейного марковского дрейфа параметра  $J_t$  ( $J_{t+1} = F_t J_t + w_{t+1}$ ) рассмотрена в [55, §5.2]. При независимых гауссовских белозумных возмущениях (в уравнениях дрейфа и объекта) и линейных матричных функциях  $A_t(J)$ ,  $B_t(J)$  с.к. оптимальные оценки на каждом такте  $t$  в классе произвольных статистик от данных наблюдений  $x^t, u^{t-1}$  дает фильтр типа Калмана–Бьюси (в отличие от стандартного фильтра Калмана–Бьюси матрица состава измерений  $\Phi_t$  случайная и зависит от  $J_{t-1}$  и прошлых измерений выхода  $y^{t-1}$ ). Рассматривается асимптотическая точность



слежения при стационарном дрейфе ( $F_t = F$ ) и с.к. малых возмущениях  $W$  на основе непрерывности в малом решения уравнения Риккати относительно свободного члена.

В [86] отслеживается медленное случайное блуждание

$J_t = J_{t-1} + gw_t$ , параметра регрессии  $y_t = J_t^T x_t + v_t$  с независимыми белозумными процессами  $v, w$ . Алгоритм слежения (*SLAMS, smoothed average LMS*) использует последовательное усреднение стандартных *LMS*-оценок посредством скользящего усреднения и экспоненциального сглаживания с матричным коэффициентом  $S$ . В представлении  $U = gU_0 + o(g)$  для асимптотической ковариационной матрицы ошибки слежения  $U$  получена нижняя граница для  $U_0$  и для гауссовских возмущений установлено достижение этой границы оценками *SLAMS* при оптимальном выборе коэффициента  $S$ .

#### 4. Метод прогнозирующей модели

Для идентификации линейного объекта

$$(1) \quad a(\nabla)y_t = b(\nabla)u_t + v_t, \quad a(0) = 1, \quad b(0) = 0$$

с возмущением  $v_t = c(\mathcal{J}, \nabla)e_t$ , где параметр  $\mathcal{J}$  представляет набор неизвестных коэффициентов полиномов в (1),  $c(\mathcal{J}, 0) = 1$ , а  $e$  – обновляющий процесс, используют настраиваемую (прогнозирующую) модель с входом  $(y, u)$ , выходом  $y_t^* = x_t^T \mathcal{J}^*$ , настройкой модели  $\mathcal{J}^*$  и расширенным регрессором  $x_t = \text{col}(y_{t-n}^{t-1}, u_{t-n}^{t-1}, e_{t-m}^{t-1}), e_t = y_t - y_t^*, m = \deg c$ .

Точность настройки модели определяется функционалом невязки  $I(\mathcal{J}^*) = \limsup_{t \rightarrow \infty} E j(e_t)$  с выпуклой функцией потерь  $j(e)$ ,

$j(0) = 0$ . В режиме нормальной работы схема наблюдений стационарна и  $I(\mathcal{J}^*) = E j(e_t)$ . При некоррелированном возмущении  $c(\mathcal{J}, z) = 1$  модель с регрессором  $x_t = \text{col}(y_{t-n}^{t-1}, u_{t-n}^{t-1})$  называется регрессионной.

Структура модели [55, 58, 83]. Пусть полином  $c(\mathcal{J}^*, z)$ ,  $\mathcal{J}^* \in \Xi \subseteq R^N$  устойчив, а (1) представлено в форме обновления  $a(\mathcal{J}^*, \nabla)y_t = \{b(\mathcal{J}^*, \nabla)u_t + [c(\mathcal{J}^*, \nabla) - 1]\}e_t + e_t$  при  $\mathcal{J}^* = \mathcal{J}$ , где пер-

вое слагаемое (в фигурных скобках) определяется предысторией  $(y^{t-1}, u^{t-1})$ , а последнее слагаемое от предыстории не зависит. Регрессионная модель получается отбрасыванием последнего (обновляющего) слагаемого  $e_t$ . Для коррелированного же возмущения модель имеет структуру

$$(2) \quad c(J^*, \nabla) y_t^* = [c(J^*, \nabla) - a(J^*, \nabla)]y_t + b(J^*, \nabla)u_t.$$

Для симметрично распределенных с.в.  $e_t$  точно настроенная модель (2) отслеживает обновление ( $e_t - e_{t-1} \approx 0$  при  $t \gg 1$ ) и  $I(J^*) \geq I(J) = E j(e_t)$ . Метод прогнозирующей модели относится к методам подстановки [5]: в функционале  $J = \arg \min_{t \in \Xi} I(t)$

распределений наблюдений производится подстановка  $I_{эмп}(t) \rightarrow I(t)$ . Идентификатор определяется выбором градиентной или псевдоградиентной относительно функционала невязки процедуры стохастической аппроксимации (например, для квадратичного функционала – расширенный МНК, а для более медленно растущих функций потерь  $j^*$  – различные алгоритмы робастного оценивания).

Исследование сходимости существенно усложняется, если оценки параметра используются при формировании управлений. Из-за нестационарности АСИ для исключения параметрического резонанса приходится снижать темп перенастройки регулятора по сравнению с темпом идентификации (использованием *кусочно-стационарных стратегий с увеличивающимися циклами идентификации* на интервалах стационарности и перестройкой параметров в начале каждого цикла [55, 76, 90]). Состоятельное оценивание требует, вообще говоря, рандомизации управления широкополосным (обычно белозумным) тестовым сигналом. Требования к мощности тестового сигнала противоречивы, что отражает двойственность управления, «в известной мере изучающего и одновременно направляющего» [54, с. 390].

Для *минимально-фазовых*  $n \times n$  объектов (1) с конечно-зависимым возмущением и заданной равномерно ограниченной программной траекторией  $y^*$  настраиваемый регулятор (адаптивная версия регулятора Астрема [64]) описывается уравнением  $J_t^T x_t = y_{t+1}^* + w_t$ ,  $\text{cov}(w) = R_w$ , с расширенным регрессором  $x_t$  и

рандомизирующим управление белозумным тестовым сигналом  $w_t$ , независимым от возмущения в объекте  $v_t = c(J^*, \nabla)e_t$ ,  $\operatorname{Re} c^{-1}(J^*, z) > 1/2$  при  $|z| = 1$ . В идентификаторе используется упрощенная версия МНК (схема Гудвина). Стратегия управления – идентифицирующая при невырожденной матрице  $R_w$ , и выполняются соотношения:

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} T^{-1} \sum_{t=1}^T (\|y_t\|^2 + \|u_t\|^2) < \infty,$$

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} T^{-1} \sum_{t=1}^T (y_t - y_t^*)(y_t - y_t^*) = R_w \text{ п.н.}$$

Идея рандомизации высказана Фишером [72] (рандомизированное планирование эксперимента). Пробное воздействие (информирующую обратную связь) предлагал Винер [13, с. 178]. Состоятельность оценок в алгоритмах с рандомизацией обеспечивается при достаточно широких предположениях о возмущении [14]. Алгоритмы с возмущением на входе» [50, 55] (поисковые алгоритмы стохастической аппроксимации) широко использовались в задачах идентификации объекта в замкнутом контуре и адаптивного управления. О применении алгоритмов с рандомизацией см. на сайте <http://www.jhuapl.edu/SPSA>.

В [55] рассмотрена задача синтеза для объекта (1) с заданным компактным выпуклым множеством  $\Xi$ ,  $v_t = c(J^*, \nabla)e_t$ ,  $\operatorname{Re} c(J^*, z) \geq r = \text{const} > 0$  при  $|z| = 1, J^* \in \Xi$ ; пара полиномов  $a(J^*, z)$ ,  $b(J^*, z)$  стабилизируема при  $J^* \in \Xi$ . Обновление  $e$  и белозумное тестовое воздействие  $w$  в канале обратной связи (3) независимы в совокупности, причем

$$Ew_t = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} Ew_t^4 = 0, Ew_t^2 \geq c / \ln t, c > 0.$$

Стоимость управления  $J[U^\infty(*)] = \limsup_{T \rightarrow \infty} T^{-1} \sum_{t=1}^T q(x_t, u_t)$  с заданной неотрицательной квадратичной формой  $q(x, u)$ ,  $x_t = \operatorname{col}(y_{t-n-1}^t, u_{t-n-1}^{t-1})$ . Пусть  $J^*(J^*)$  – цена управления, достигаемая (нереализуемой) линейной стратегией для объекта (1) с параметром  $J^* \in \Xi$ . Построена реализуемая идентифицирующая стратегия  $U^\infty(*)$ , для которой выполняется условие  $J[U^\infty(*)] = J^*(J^*)$  независимо от начальных данных и параметра

объекта  $J \in \Xi$ . Стратегия  $U^\infty(*)$  порождена рандомизированной настраиваемой обратной связью

$$(3) \quad a(J_t, \nabla)u_t = b(J_t, \nabla)y_t + w_t,$$

где для вычисления оценок параметра  $J_t$  используется упрощенная версия расширенного МНК с проектированием оценок на  $\Xi$ . Убывание мощности тестового сигнала необходимо для исключения роста стоимости управления из-за рандомизации, а ограничение на скорость убывания требуется для состоятельного оценивания.

Значительный прогресс достигнут в исследовании скорости сходимости. Видимо, впервые проблема оптимизации алгоритмов адаптивного управления по скорости сходимости была поставлена в [36]: для линейных систем была установлена асимптотическая нижняя граница и построен алгоритм идентификатора, который при определенных условиях обеспечивает достижение этой границы.

Для многомерного объекта (1) с возмущением мартигал-разность в [66] установлен порядок скорости сходимости п.н. оценок МНК:  $\|J_t - J\|^2 = O(\ln t/t)$ . Для более широкого класса возмущений порядок скорости сходимости МНК исследуется в [96].

При проектировании АСИ полезен методический прием введения *обобщенного настраиваемого объекта* (ОНО), включающего собственно объект управления, измерительную систему, исполнительные механизмы и управляющие устройства с настраиваемыми параметрами [51]. Синтез ОНО представляет первый этап решения задачи синтеза основного контура, структура которого определяет зависимость управлений от параметра объекта.

Идентификатор как *датчик параметрических возмущений* позволяет использовать в АСИ принцип регулирования по возмущению.

**Пример** идентифицирующей стратегии рассмотрим на примере модели, использованной в АСИ точностью прокатки труб<sup>2</sup>

---

<sup>2</sup> За внедрение адаптивной системы управления точностью прокатки труб группа сотрудников лаборатории идентификации ИПУ РАН была удостоена Государственной премии СССР.

[46, 47]:  $y_t = x_t^T J + ku_t + v_t$  с наблюдаемым возмущением  $x \in R^n$  помехой  $v$  измерения выхода  $y \in R^1$  управлением  $u \in R^1$  и неизвестным параметром  $J^* \in \Xi = R^n$ , коэффициент усиления по управлению  $k \neq 0$  известен. По предположению  $(x, v) - m$ -независимый стационарный центрированный процесс,  $Ex_t = 0$ ,  $E\|x_t\|^2 < \infty, |v_t| \leq d$  п.н. с известной константой  $d > 0$  с.в.;  $x_t$  имеет плотность распределения  $p(x) > 0, x \in R^n$ .

В схеме АСИ на рис. 1 структурированное возмущение включает помеху измерения выхода и наблюдаемое (векторное) возмущение с каналами прохождения, обозначенными штриховыми линиями. Предельно-оптимальная стратегия  $U_0^\infty (*)$  определяется условием  $\lim_{t \rightarrow \infty} E_{J, U_0^\infty (*)} (y_t - v_t)^2 = 0 \quad \forall J \in \Xi$ . В соответствии с идентификационным подходом к синтезу регулятора стратегия  $U_0^\infty (*)$  порождается настраиваемым компенсатором  $u_t = -k^{-1} x_t^T J_{t-1}$  с оценками неизвестного параметра, вычисляемыми идентификатором посредством алгоритма «зона нечувствительности» [7, 11, 12]:

$$J_t = J_{t-1} + f(y_t - ku_t - x_t^T J_{t-1})x_t \|x_t\|^{-2}, J_0 \in R^n,$$

$$f(z) = \begin{cases} 0 & \text{при } |z| \leq d \\ z - d \operatorname{sign}(z) & \text{при } |z| > d. \end{cases}$$

Алгоритм «зона нечувствительности» – стохастическая версия релаксационной процедуры Мощкина (1951) решения систем линейных неравенств. Геометрическая интерпретация коррекции оценки – проектирование в бесконечную прямоугольную полосу, толщина которой определяется амплитудой помехи (при отсутствии помех полоса вырождается в плоскость, а алгоритм превращается в итерационную процедуру Качмажа решения системы линейных уравнений).

В АСИ с объектом (1) эффект большого отношения сигнал/шум создается искусственно рандомизацией управления тестовым сигналом убывающей средней мощности, но принимающего на редких тактах большие значения (именно такой

прием, увеличивающий невязку, избавляет от остановки алгоритма при достаточно точной оценке параметра объекта).

**Интерпретация.** Идентификатор «ждет» длинного и повернутого в нужную сторону наблюдаемого возмущения», что гарантируется приведенными ограничениями на помеху и наблюдаемые возмущения, обеспечивающими эффект большого отношения сигнал/шум. Именно этот эффект увеличивает невязку выходов объекта и модели, исключая прекращение коррекции оценок в малой окрестности истинного значения параметра.

Для некоторых классов ограниченных помех измерений с граничными особенностями получены неасимптотические оценки скорости с.к. сходимости по степенному закону со сколь угодно большим (в зависимости от типа особенности) степенным показателем [11].

Алгоритм «зона нечувствительности» применен в системе статического управления кислородно-конвертерной плавки стали для прогноза температуры и содержания углерода [68]. «Зона нечувствительности» применяется во многих алгоритмах оценивания, в частности, в модификации МНК, использующей конструкцию вписанных эллипсоидов [70].

## **5. Идентификация и управление объектами с непараметрической неопределенностью**

Для статических объектов с непараметрической неопределенностью предельно достижимая скорость сходимости определяется достижимыми нижними границами информационных неравенств и зависит по порядку величины от гладкости восстанавливаемой характеристики [24, 25].

Для объекта нелинейная авторегрессия – скользящее среднее  $y_t = f(y_{t-n}^{t-1}, x_{t-n}^t) + v_t$  с независимыми в совокупности возмущениями  $x, v$  в [21] построены рекуррентные состоятельные оценки нелинейности парзеновского типа. Оптимизация непараметрических оценок по скорости сходимости (с применением к задаче томографии) рассматривается в [30].

В [79] отслеживается программное движение  $y^*$  (известная детерминированная равномерно ограниченная последовательность) для объекта  $y_t = J^T f(y_{t-n}) + u_{t-1} + v_t$  с белым шумом  $v_t$ , класс неопределенности  $\Xi = \{f: \|f\| \leq C_1 + C_2 \|y\|^b\}$ ,  $b > 0$ . Стратегия управления порождается обратной связью  $u_t = -J_t^T f_t(y_{t-n}^*) + y_{t+1}^*$ , где для вычисления оценок  $J_t$  используется МНК. При  $b < 4$  получена оценка качества слежения  $\sum_{t=1}^T (y_t - y_t^* - v_t)^2 = O(\ln T)$  при  $T \rightarrow \infty$ , а при  $b > 4$  установлена неустойчивость системы (нарушение условия предельной ограниченности п.н. средней мощности).

В [76] рассматривается задача стабилизации объекта нелинейной авторегрессии первого порядка  $y_t = -f(y_{t-1}) + u_{t-1} + v_t$ , где стационарное возмущение  $v_t$  – центрированный процесс с независимыми значениями и достаточно гладким распределением,  $f \in \Xi$ , где  $\Xi$  – класс Гельдера с показателем  $S$ . Допустимы селекторы  $u_t = U_t(y_0^t)$ ,  $t \geq 0$  удовлетворяющие условию равномерной устойчивости  $\sup_{t>0} \sup_{f \in \Xi} E y_t^2 < \infty$ . Стратегия адаптивна, если выход следит за возмущением:

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} T^{-1} \sum_{t=1}^T E(y_t - v_t)^2 = 0 \quad \forall f \in \Xi.$$

Цель состоит в оптимизации адаптивных стратегий по скорости переходного процесса (сходимости к нулю с.к. ошибки слежения).

Идентификатор определяет по наблюдениям локально-полиномиальные оценки  $f_t^*$  неизвестной характеристики  $f$ , а управления формируются регулятором  $u_t = f_t(y_t)$ . Перестройка регулятора производится лишь на тактах, расстояние между которыми (во времени) растет экспоненциально. Установлено информационное неравенство (без ограничения равномерной устойчивости):

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} t^{2s/(2s+1)} \sup_{f \in \Xi} E(y_t - v_t)^2 \geq C(\Xi) \quad (C(\Xi) > 0).$$

Если стратегия управления удовлетворяет условию равномерной устойчивости, то

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} t^{2s/(2s+1)} \sup_{f \in \Xi} E(y_t - v_t)^2 \geq C(\Xi).$$

Таким образом, установлена минимаксная нижняя граница ошибки стабилизации для равномерно устойчивых стратегий. Получено информационное неравенство (с усреднением по времени), справедливое без ограничения равномерной устойчивости:

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} T^{2s/(2s+1)} \sup_{f \in \Xi} T^{-1} \sum_{t=1}^T E(y_t - v_t)^2 \geq (2s+1)C(\Xi).$$

Построена адаптивная стратегия, для которой верхняя граница с.к. ошибки стабилизации совпадает с нижней границей с точностью до зависящей от  $s$  мультипликативной константы. Порядок скорости сходимости с.к. ошибки стабилизации  $O(t^{-2s/(2s+1)})$  такой же, как и в задаче оценивания непараметрической регрессии [25].

## 6. Задача синтеза основного контура

Предельные возможности проектируемой системы (в смысле критерия стоимости) во многом определяются на этапе синтеза основного контура. Для «стандартных» возмущений (гауссовских с известной рациональной спектральной плотностью) можно ограничиться классом линейных стратегий, порожденных допустимыми (стабилизирующими объект) регуляторами [56]. Ограничения «стандартности» существенны: для негауссовских возмущений оптимальная стратегия управления линейным объектом порождается, вообще говоря, нелинейными обратными связями [26], а рациональность спектральной плотности обеспечивает разрешимость задачи оптимизации в классе допустимых регуляторов (напомним, что допустимы лишь регуляторы конечной глубины памяти).

Ограничения стандартности часто аргументируют простой вычислительной реализацией винеровских регуляторов, однако для многомерных систем процедура факторизации матричных полиномов требует значительных вычислительных затрат.



Еще более существенны принципиальные возражения против условий стандартности и даже еще более широкого условия линейной регулярности возмущений, необходимых для применимости метода факторизации. Действительно, регулярность возмущения представляет нетривиальное предположение о физических процессах во внешней среде – гипотезу обновления, согласно которой функционирование системы управления сопровождается стационарным притоком новой (обновляющей возмущение) информации. Эта гипотеза не выполняется, например, для возмущений с конечным спектром частот, когда задача синтеза решается элементарными средствами (на основе «принципа поглощения» [59]). Интересно, что именно автор метода факторизации приводит пример [14, с. 268]) процесса с типичным признаком сингулярности – «исчезновением спектра» в некотором частотном диапазоне (вблизи частоты 9,05 Гц при исследовании энцефалограмм). Наконец, стандартные модели возмущений не охватывают широкий класс процессов с «длинной зависимостью» (*long-range dependence*), широко распространенные в гидрологии и геофизике, анализе сетевого трафика, в области телекоммуникаций и финансовой математике [53, 80, 84, 88, 91, 95]. Учет особенностей моделей возмущений, в частности, фрактальных процессов позволяет предложить более эффективные регуляторы по сравнению с типовыми [43, 44] (см. авторский сайт: <http://www.potapov-fractal.com>). С учетом изложенного можно заключить, что именно формирование «банка упрощенных моделей» представляет препятствие, о которое спотыкается теория управления на практике» [22, с.13].

Напомним, что управление с прогнозом (*predictive control*) восходит к идее Винера замены принципа предварения Понселе прогнозирующими фильтрами в цепи обратной связи, не имеющей отношения к обоснованию метода факторизации. Регуляторы с экстраполяцией используются, например, при управлении энергетическими объектами [32].

Естественна попытка описания достаточно массивного класса неопределенности  $\Xi$ , для которого жесткие требования к точности регулирования совместимы с эффективной реализацией регулятора. Основные вопросы сводятся к следующему:

1. Существуют ли задачи синтеза с нулевой ценой управления? (далее такие задачи назовем вырожденными).

2. Каковы ограничения на возмущения, обеспечивающие вырожденность задачи синтеза?

3. Насколько велико увеличение стоимости управления, когда характеристики возмущений не удовлетворяют ограничениям п.2?

Возмущение с конечным спектром или с непрерывным спектром, имеющим «мертвую зону» (типа приведенного Винером примера) дают положительный ответ на вопрос п.1. Предположим, что расположение «мертвой зоны» (интервала частот нулевой спектральной меры, называемого далее лакуной) известно (именно такова ситуация, когда возмущение имеет конечный спектр частот, известных с малыми погрешностями). Тогда можно построить допустимый (стабилизирующий объект (1)) без использования дополнительной (помимо расположения лакуны  $\Delta$ ) информации о возмущении [38]. Приведем более точные формулировки.

Пусть  $\Xi$  – класс центрированных стационарных возмущений  $\{v\}$  с фиксированной дисперсией  $D$  и лакуной  $\Delta \subset [-p, p]$ ,  $I_v(K)$  – стоимость управления объектом (1) с регулятором  $K$ . Тогда

$$(4) \inf_{K \in \mathfrak{R}} \sup_{v \in \Xi} I_v(K) = 0.$$

Наличие лакуны «почти достаточно» для вырожденности задачи синтеза (независимо от п.ф. объекта по управлению): вырожденность задачи синтеза возможна только для линейно-сингулярных возмущений (напомним критерий сингулярности [48, с. 86]:  $\ln s \notin L^1[-p, p]$  где  $s$  – плотность абсолютно непрерывной компоненты спектральной меры возмущения).

Сингулярность процесса (в соответствии со значением термина *singular*) ассоциируют с некоторой особенностью, нетипичностью. Естественно возникает вопрос об универсальности метода факторизации в смысле его применимости к возмущениям «общего положения». При положительном ответе (и при неадекватном реальным задачам синтеза требовании полной информации о возмущении) вырожденные задачи синтеза можно было бы отнести к исключительным, нетипичным.

Строгое определение нетипичности естественно в терминах бэровских категорий для пространства  $M$  спектральных плотностей с  $L^1$ -метрикой. В частности, именно такой подход к определению типичности использовался в работе [38].

Напомним, что класс  $R \subset M$  спектральных плотностей всех регулярных возмущений с абсолютно непрерывным спектром характеризуется условием  $\ln s \in L^1$ . Таким образом, точная формулировка гипотезы типичности свойства регулярности такова: является ли семейство  $R$  множеством второй категории Бэра (дополнением в  $M$  некоторого множества первой категории)? Как видно из следующего утверждения, гипотеза типичности свойства регулярности ошибочна.

*Лемма.* Множество  $R$  представляет множество первой категории Бэра в пространстве  $M$

$$\text{Доказательство. } R = \bigcup_{n=1}^{\infty} (n^{-1}Q), \quad Q = \{s \in M : l(s) \geq 0\}.$$

Достаточно доказать, что  $Q^* = \emptyset$ ,  $Q^* = \text{Int } \bar{Q}$ , где  $\bar{Q}$  – замыкание  $Q$ . Если  $Q^* \neq \emptyset$ , то  $\bar{Q}$  содержит некоторый шар, поэтому  $s \in \bar{Q}$ , где  $s \notin M$  равна нулю на некотором малом интервале  $\Delta$  (плотности, обращающиеся в нуль на интервалах, плотны в  $M$ ).

Из  $s \in \bar{Q}$  следует  $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$  с некоторыми  $s_n \in Q$ . В силу вогнутости логарифмической функции имеем:

$$(\ln\{(m\Delta)^{-1} \int_{\Delta} s_n dl\} \geq (m\Delta)^{-1} \int_{\Delta} \ln s_n dl), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Delta} \ln s_n dl \rightarrow -\infty,$$

$$\int_{\Delta^c} s_n dl \geq \int_{\Delta^c} \ln s_n dl = \int_{-p}^p \ln s_n dl - \int_{\Delta} \ln s_n dl \geq - \int_{\Delta} \ln s_n dl \rightarrow \infty \quad \text{при}$$

$n \rightarrow \infty$ , где  $\Delta^c = [-p, p] \setminus \Delta$ . Следовательно,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Delta^c} s_n dl = \infty$  вопреки  $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ , предположение  $Q^* \neq \emptyset$  ошибочно и лемма доказана.

Таким образом, получен исчерпывающий ответ на вопрос из п.2, предположение об исключительности вырожденных за-

дач синтеза не имеет оснований, а проблема построения систем с предписанной стоимостью управления не сводится к «исключительным» частным примерам и требует специального рассмотрения.

Рассмотрим вопрос о грубости (п.3). Пусть «истинное» возмущение  $v$  имеет спектральную меру  $S$ ,  $S(\Delta^c) < \epsilon$  с малым  $\epsilon > 0$  и не принадлежит классу  $\Xi$ . Заметим, что неравенство  $S(\Delta^c) < \epsilon$  выполняется, если спектральная мера  $S$  достаточно близка к спектральной мере некоторого возмущения  $v \in \Xi$  в смысле топологии сходимости спектральных мер по вариации [6, с. 176].

Для системы управления с некоторым допустимым регулятором  $K$  стоимость управления удовлетворяет неравенству  $I_v(K) < d + \|W_y\|_\infty^2 \epsilon$ , поэтому  $I_v(K) < d$  для достаточно малого  $\epsilon$ . Таким образом, регулятор  $K$  гарантирует предписанный уровень стоимости управления  $d$  также для возмущений, спектр которых в основном сосредоточен в априорно заданном диапазоне частот  $\Delta$ . Однако с уменьшением уровня  $d$  резко растет равномерно – частотный показатель  $\|W_y\|_\infty^2$  и сохранение целевого неравенства  $I_v(K) < d$  возможно лишь при достаточно малых  $\epsilon$ .

Система с  $H^\infty$ -оптимальным регулятором обладает гораздо более сильным свойством грубости, поскольку определенный уровень стоимости управления  $d^*$  гарантируется независимо от спектрального состава возмущения. С другой стороны, использование информации о локализации спектра возмущения позволяет гарантировать предписанный уровень стоимости управления  $d \ll d^*$ , когда минимаксный подход приводит к консервативным результатам, преувеличивая неопределенность описания возмущений. Отчасти этот недостаток сглаживают модификацией критерия с введением весовых функций (частотно-зависимых множителей  $c_{1,2}(I)$ , выделяющих наиболее значимые диапазоны частот [3]). Используем аффинную параметризацию класса п.ф. системы управления функциональным параметром  $f$  из класса  $\mathfrak{S}$  устойчивых д.р.ф., и рассмотрим экстремальную задачу

$$(5) \sup_{I \in [p,p]} \{ |c_1 W_y|^2 + |c_2 W_u|^2 \} \rightarrow \inf_{f \in \mathfrak{S}}.$$

Решение задачи (5) существенно зависит от выбора весовых функций, который естественно связать с априорной информацией о локализации спектра возмущений. При решении задачи синтеза системы с предписанной точностью управления в качестве весовой функции  $c_1$  выбирается индикатор спектра  $\Delta$  и  $c_2 \equiv 0$ . Аналогично, в задаче стабилизации с предписанными расходами на управление следует выбрать  $c_2$ - индикатором  $\Delta$  (при  $c_1 \equiv 0$ ).

Для многомерных объектов (1) общего положения препятствием к вырожденности задачи (в смысле критерия следа ковариационной матрицы установившейся реакции) является фактор дефицита размерности по управлению. Действительно, если  $\dim u < \dim y$ , то матрица  $I_n - aW_y = -bW_u$  вырождена, что несовместимо с вырожденностью задачи синтеза регулятора.

При одинаковой размерности управления и стабилизируемой переменной и (покомпонентно) лакунарных возмущениях задача синтеза вырождена, а методика построения систем с предписанным уровнем стоимости управления описана в [8, 9] и в [10] для систем с непрерывным временем.

**Схема решения.** Пусть объект (1) стабилизируется некоторым опорным регулятором  $K_0$ . Предположим временно, что возмущение на каждом такте доступно наблюдению в прошлом, настоящем и будущем. Построим комбинированную систему (рис. 2) с законом управления  $u_t = K_0 y_t + g v_t$ , определенным условием полной компенсации [33, 52]:  $g = -b^{-1}$ .

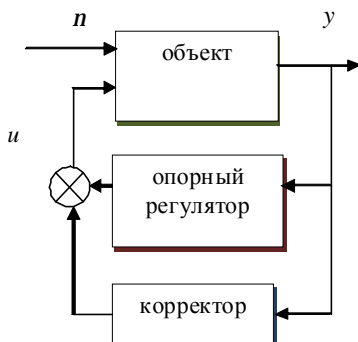


Рис. 2. Структурная схема системы управления с опорным регулятором и корректором

Для сингулярного возмущения  $v = \text{col}(v^1, \dots, v^n)$  выход физически нереализуемого фильтра с п.ф.  $b^{-1}$  допускает с.к. аппроксимацию реакциями фильтров с полиномиальными п.ф.  $q(z)$ . После исключения возмущений в силу уравнения объекта (1) комбинированную систему заменим системой с обратной связью по выходу

$$(6) \quad u_i = Ky_i, \quad K = (I_n - qb)^{-1}(K_0 - qa), \quad q \approx b^{(-1)}.$$

Операция приближенного обращения полинома  $q = b^{(-1)}$  в (6) определяется соотношением  $b^{(-1)} = \text{adj}(b)[I_n \det b]^{(-1)}$ , где второй множитель представляет собой диагональную матрицу  $\text{diag}(p_1, \dots, p_n)$ , а элемент  $p_i$  – результат ранее определенного приближенного обращения для скалярного возмущения  $v^i$ . Допустимость регулятора (6) и достижение (для аппроксимирующего матричного полинома  $q$  достаточно высокого порядка) предписанной стоимости управления проверяется непосредственным вычислением п.ф. замкнутой системы от возмущения к выходу.

Множитель  $(I_n - qb)^{-1}$  в (6) играет роль селективно (по гармоникам из спектра возмущения) «большого коэффициента усиления», выбор которого согласован с требованием устойчивости замкнутой системы. Возможность операции приближенного обращения  $b^{(-1)}$  в классе каузальных фильтров обусловлена именно сингулярностью возмущения и может рассматриваться в качестве приближенного метода «динамической компенсации». Предписанная стоимость управления обеспечивается регулятором, итеративным по структуре, в которой каждая итерация  $K_0 \rightarrow K$  задается полиномом  $q$ , причем для фиксированного полинома  $q$  скорость снижения цены управления экспоненциальна относительно порядка регулятора.

## 7. Заключение

Ряд важных вопросов проектирования обсужден слишком фрагментарно или даже вообще не затронут. Применительно к задаче синтеза основного контура этот пробел восполняют монографии [16, 20].

АСИ имеют более чем полувековую историю, и структура таких систем обсуждалась разными авторами еще до первого

конгресса ИФАК [65], однако строгие результаты относительно предельной оптимальности и идентифицирующих свойств адаптивных стратегий были получены лишь на рубеже 70–80 годов. Проблемы предельно достижимого качества управления (в смысле асимптотики с.к. ошибки стабилизации) и предельного быстродействия идентификатора относятся к центральным.

Предельные возможности быстродействия идентификатора (по порядку степенной асимптотики с.к. сходимости оценок параметра объекта) в нерегулярных задачах оценивания зависят от типа особенности распределения возмущения, что показано в [7] для алгоритма «зона нечувствительности» в случае ограниченных возмущений. В [11] этот алгоритм использован для построения минимаксной прогнозирующей модели, а в [12] область применимости алгоритма была расширена посредством использования эффекта большого отношения сигнал/шум (при пассивной идентификации статического объекта и активной идентификацией динамического объекта с рандомизацией управления специальным тестовым воздействием).

Стандартная (аффинная) параметризация п.ф. системы управления описывает класс п.ф. системы управления без ограничения порядка. Параметризация системы управления с регуляторами заданного порядка рассматривалась в [75].

Проблемы каузальности, предсказуемости и случайности привлекали всеобщее внимание от глубокой древности (греческие богиня судьбы Мойра и случая, удачи Тихэ) до формирования мощного направления современной теории автоматического регулирования «*predictive control*» [71, 74], обсуждения границ предсказуемости и безошибочной фильтрации [31, 38, 42].

Напомним, что именно противоречие с причинностью выдвигалось критиками идеи полной компенсации Г.В. Щипанова [67, 93]. Однако в предсказуемых средах физически нереализуемое упреждение эквивалентно точному прогнозу по наблюдениям и противоречие с причинностью устраняется. Для некоторых классов линейно-сингулярных возмущений прогноз заданной точности эффективно реализуем и требуемая стоимость управления лимитируется только ограничениями на порядок регулятора. Методика синтеза систем с предписанной стоимостью

управления распространяется на объекты с непрерывным временем и возмущениями, спектральная мера которых  $S$  удовлетворяет условию Крамера

$\int_{-\infty}^{\infty} e^{lh} S(dI) < \infty$  для всех достаточно

близких к нулю  $h$ . В частности, для возмущений с ограниченным спектром алгоритм синтеза систем с предписанной стоимостью управления предложен в [78]. Предложенная методика может рассматриваться и как этап синтеза основного контура АСИ с более массивным классом неопределенности, включающего неопределенность передаточной функции объекта по управлению.

Не рассмотрена проблема некорректности точечного оценивания как обратной задачи теории вероятностей, аналогичной некорректности нетривиальных задач математической физики [60]. Априорная информация о порядке идентифицируемого объекта (с параметрической неопределенностью) или гладкость восстанавливаемой характеристики (например, непараметрической регрессии) играет роль регуляризатора, превращающего «черный» ящик в «серый» и снижающего чувствительность оценок к вариациям параметров задачи.

Не рассмотрены методы построения адаптивных оценок (с такой же асимптотикой скорости сходимости, как нижняя граница Рао–Крамера при известном распределении возмущений, т.е. оценок, «адаптирующих себя» к неизвестному распределению). Возможность построения адаптивных оценок была высказана Стейном (1956) и впоследствии адаптивные оценки были построены для достаточно широких классов гладких распределений, включая оценивание параметра сдвига и регрессии [67, 78, 93]. Робастному оцениванию (для регулярных задач идентификации динамических объектов) посвящена монография [58].

Проблематика идентификации объекта в замкнутом контуре рассматривается в обзорной работе [94].

В настоящее время в действующих системах управления весьма велика (по некоторым данным около 90%) доля эмпирически построенных регуляторов малых порядков с 1–3 настраиваемыми параметрами (как правило, ПИ- и ПИД-регуляторов [18, 63, 87], предложенных еще в начале прошлого



века), не обеспечивающих требований к новой технике, прежде всего требований к точности регулирования). Именно ориентация на «сформировавшийся часто в ущерб реальности, но в угоду теории, банк упрощенных моделей» [22, с. 13], в частности, моделей внешних возмущений препятствует практическому использованию рекомендаций современной теории регулирования.

Автор благодарит Н. Г. Волчек за помощь при подготовке рукописи к печати.

*Список некоторых обозначений и сокращений*

АСИ – адаптивная система управления с идентификатором

МНК (*LMS*) – метод наименьших квадратов

ОМП – оценка максимального правдоподобия

П.ф. – передаточная функция

П.н. – почти наврное

С.в. – случайная величина

С.к. – сходимость – сходимость в среднем квадратическом

*E*– математическое ожидание

$x_0^T$  – совокупность значений ( $x_0, \dots, x_T$ )

*S*– спектральная мера (спектральная функция) возмущения,

$L^2(S)$ – пространство функций с интегрируемым квадратом модуля по мере *S* с нормой  $\| * \|_{L^2(S)}$

Ξ– класс неопределенности объекта

℔– класс п.ф. допустимых регуляторов

∇– оператор сдвига на такт назад (по времени)

\* – эрмитово сопряжение

### **Литература**

1. БАРАБАНОВ А.Е. *Критериальная сходимость МНК в адаптивной системе управления* // Докл. Академии Наук СССР. – 1982. – Т. 358, №1. – С. 32–34.
2. БАРАБАНОВ А.Е. *Синтез адаптивных  $H^\infty$ -оптимальных регуляторов* // Автоматика и телемеханика. – 1999. – №3. – С. 55–71.
3. БАРАБАНОВ А.Е., ПЕРВОЗВАНСКИЙ А.А. *Оптимизация*

- по равномерно–частотному критерию ( $H^\infty$ –теория) // Автоматика и телемеханика. – 1992. – №9. – С. 3–32.*
4. БОНДАРЕНКО М.В., ПОЗНЯК А.С. *Сходимость алгоритмов оценивания нестационарных параметров регрессионно – авторегрессионных объектов при помехах типа скользящего среднего // Автоматика и телемеханика. – 1993. – №8. – С. 90–108.*
  5. БОРОВКОВ А.А. *Математическая статистика. – М.: Наука, 1984. – 472 с.*
  6. БУЛИНСКИЙ А.В., ШИРЯЕВ А.Н. *Теория случайных процессов. – М.: Физматлит, 2005. – 404 с.*
  7. БУНИЧ А.Л. *Быстросходящийся алгоритм идентификации линейного объекта с ограниченной помехой // Автоматика и телемеханика. – 1983. – №8. – С. 101–107.*
  8. БУНИЧ А.Л. *Вырожденные задачи синтеза систем управления линейными дискретными объектами // Проблемы управления. – 2009. – №5. – С. 2–8.*
  9. БУНИЧ А.Л. *Вырожденные задачи синтеза системы управления линейным дискретным объектом // Автоматика и телемеханика. – 2005. – №11. – С. 35–45.*
  10. БУНИЧ А.Л. *Высокоточные системы управления с сингулярными возмущениями // Автоматика и телемеханика. – 2007. – №7 – С. 3–17.*
  11. БУНИЧ А.Л. *Минимаксная прогнозирующая модель в системе управления с идентификатором // Автоматика и телемеханика. – 2006. – №7. – С. 120–132.*
  12. БУНИЧ А.Л. *Пассивная и активная идентификация линейного дискретного объекта с ограниченной помехой // Автоматика и телемеханика. – 2003. – №11. – С. 60–73.*
  13. ВИНЕР Н. *Кибернетика, или управление и связь в животном и машине. – М.: Сов. Радио, 1968. – 326 с.*
  14. ГРАНИЧИН О.Н., ПОЛЯК Б.Т. *Рандомизированные алгоритмы оптимизации при почти произвольных помехах. – М.: Наука, 2003.*
  15. ГРОП Д. *Методы идентификации систем. – М.: Наука, 1979. – 336 с.*
  16. ГУДВИН Г.К., ГРЕБЕ С.Ф., САЛЬГАДО М.Э. *Проектирование систем управления. – М.: Лаборатория базовых зна-*

- ний, 2004. – 912 с.
17. ГУСЕВ С.В. *Конечно-сходящийся алгоритм восстановления функции регрессии и его применение в задачах адаптивного управления* // Автоматика и телемеханика. – 1989. – №3. – С. 99–108.
  18. ДЕНИСЕНКО В.В. *ПИД-регуляторы: принципы построения и модификации* // Современные технологии автоматизации. – 2006. – № 4. – С. 66–74; 2007. – №1. – С. 78–88.
  19. ДЕРЕВИЦКИЙ Д.П., ФРАДКОВ А.Л. *Прикладная теория дискретных адаптивных систем управления*. – М.: Наука. 1981. – 216 с.
  20. ДОРФ Р., БИШОП Р. *Современные системы управления*. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2002. – 832 с.
  21. ДУКАН П., ЦЫБАКОВ А.Б. *Непараметрическое рекуррентное оценивание в нелинейных ARX-моделях* // Пробл. передачи информации. – 1993. – Т. 29, вып. 4. – С. 24–34.
  22. ЕМЕЛЬЯНОВ С.В., КОРОВИН С.К. *Новые типы обратной связи: Управление при неопределенности*. – М.: Наука. Физматлит, 1997. – 352 с.
  23. ЖОЛЕН Л., КИФЕР М., ДИДРИ О., ВАЛЬТЕР Э. *Прикладной интервальный анализ* (2-е изд). – Москва–Ижевск: Изд-во НИЦ «Регулярная и стохастическая динамика», 2007. – 468 с.
  24. ИБРАГИМОВ И.А. *Об оценке многомерной регрессии* // ТВП. – 2003. – Т. 48:2. – С. 301–320.
  25. ИБРАГИМОВ И.А., ХАСЬМИНСКИЙ Р.З. *Асимптотическая теория оценивания*. – М.: Наука, 1979. – 528 с.
  26. КАЗАРИНОВ Ю.Ф., ФОМИН В.Н. *Линейно-квадратичная задача стохастической оптимизации. III. Нелинейные оптимальные регуляторы* // Автоматика и телемеханика. – 1993. – №5. – С. 94–99.
  27. КАШЬЯП Р., Рао А. *Построение динамических стохастических моделей по экспериментальным данным*. – М.: Наука, 1985. – 384 с.
  28. КОГАН М.М., НЕЙМАРК Ю.И. *Идентификация рекуррентным методом наименьших квадратов при невыполнении условий теоремы Гаусса–Маркова* // Изв. РАН. Техн.

- кибернетика. – 1993. – №4. – С. 29–34.
29. КОНЕВА Е.С. *Выбор моделей для реальных временных рядов. Обзор* // Автоматика и телемеханика. – 1988. – №6. – С. 3–18.
30. КОРОСТЕЛЕВ А.П., ЦЫБАКОВ А.Б. *Оптимальные скорости сходимости оценок в вероятностной постановке задачи томографии* // Пробл. передачи информации. – 1991. – Т. 27, вып. 1. – С. 92–103.
31. КРАВЦОВ Ю.А. *Случайность, детерминированность, предсказуемость* // Успехи физических наук. – 1989. – Т. 158, вып. 1. – С. 93–122.
32. КРАСОВСКИЙ А.А., МИСРИХАНОВ М.Ш. *Самоорганизующиеся регуляторы с экстраполяцией для энергетических объектов, история и перспективы* // Автоматика и телемеханика. – 2006. – №5. – С. 48–53.
33. ЛЕЗИНА З.М., ЛЕЗИН В.И. *Г.В. Шипанов и теория инвариантности (труды и документы)*. – М.: Физматлит, 2004. – 428 с.
34. ЛЕМАН Э. *Теория точечного оценивания*. – М.: Наука, 1991. – 448 с.
35. НАЗИН С.А., ПОЛЯК Б.Т. *Параметрическое оценивание методом эллипсоидов в линейных многомерных системах с неопределенным описанием модели* // Автоматика и телемеханика. – 2009. – №6. – С. 67–80.
36. НЕМИРОВСКИЙ А.С., ЦЫПКИН Я.З. *Об оптимальных алгоритмах адаптивного управления* // Автоматика и телемеханика. – 1984. – №12. – С. 64–77.
37. НОСКО В.П. *Эконометрика*. – М.: ИЭПП, 2004. – 501 с.
38. ОЛЕВСКИЙ А.М. *Представление функций экспонентами с положительными частотами* // Успехи матем. наук. – 2004. – Т. 59, вып. 1 (355). – С. 169–178.
39. *Основы управления технологическими процессами* / Под ред. Н.С. Райбмана. – М.: Наука, 1978. – 368 с.
40. ПЕРЕЛЬМАН И.И. *Оперативная идентификация объектов управления*. – М.: Энергоиздат, 1982. – 336 с.
41. ПЕТРОВ Б.Н., РУТКОВСКИЙ В.Ю., ЗЕМЛЯКОВ С.Д. *Адаптивное координатно-параметрическое управление нестационарными объектами*. – М.: Наука, 1980.
42. ПИНСКЕР М.С., ПРЕЛОВ В.В. *О безошибочной фильт-*

- рации некоторых стационарных процессов // Успехи матем. наук. – 1997. – Т.52, вып. 2 (314). – С. 109–118.*
43. ПОТАПОВ А.А., ЧЕРНЫХ В.А. *Дробное исчисление А.В. Летникова, теория фракталов и скейлинг / Под ред. А.А. Потапова. – М.: Физматлит, 2009. – 820 с.*
  44. ПОТАПОВ А.А., ГИЛЬМУТДИНОВ А.Х., УШАКОВ П.А. *Системные принципы и элементная база фрактальной радиоэлектроники. Ч. I. Этапы становления и состояние // Радиотехника и электроника. – 2008. – Т. 53, № 9. – С. 1033–1080; Ч. II. Методы синтеза, модели и перспективы применения // Радиотехника и электроника. – 2008. – Т. 53, №11. – С. 1347–1394.*
  45. ПЯТНИЦКИЙ Е.С. *Управление черным ящиком механической природы // Автоматика и телемеханика. – 1999. – №3. – С. 202–212.*
  46. РАЙБМАН Н.С., ЧАДЕЕВ В.М. *Адаптивные модели в системах управления. – М.: Советское радио, 1966. – 160 с.*
  47. РАЙБМАН Н.С., ЧАДЕЕВ В.М. *Построение моделей процессов производства. – М.: Энергия, 1975. – 374 с.*
  48. РОЗАНОВ Ю.А. *Стационарные случайные процессы. – М.: Наука, 1990. – 272 с.*
  49. РОГАЧ В.Я. *Адаптация в системах управления технологическими процессами // Промышленные АСУ и контроллеры. – 2005. – №1. – С. 4–10.*
  50. САРИДИС ДЖ. *Самоорганизующиеся стохастические системы управления. – М.: Наука, 1980. – 448 с.*
  51. *Справочник по теории автоматического управления // Под ред. А.А. Красовского. – М.: Наука, 1987. – 712 с.*
  52. *Труды научного семинара «70 лет теории инвариантности» / Под ред. С.Н. Васильева. – М.: ЛКИ, 2008. – 256 с.*
  53. ФЕДЕР Е. *Фракталы. – М.: Мир, 1991. – 254 с.*
  54. ФЕЛЬДБАУМ А.А. *Основы теории оптимальных автоматических систем. – М.: Наука, 1966. – 624 с.*
  55. ФОМИН В.Н. *Методы управления линейными дискретными объектами. – Ленинград: Изд-во ЛГУ, 1985. – 336 с.*
  56. ФОМИН В.Н., ФРАДКОВ А.Л., ЯКУБОВИЧ В.А. *Адаптивное управление динамическим объектами. – М.: Наука. 1981. – 448 с.*

57. ХЬЮБЕР П. *Робастность в статистике*. – М.: Мир, 1984. – 304 с
58. ЦЫПКИН Я.З. *Информационная теория идентификации*. – М.: Наука, 1995. – 336 с.
59. ЦЫПКИН Я.З. *Скользящая аппроксимация и принцип площащения* // Докл. РАН. – 1997. – Т.357, №6. – С. 750–753.
60. ЧЕНЦОВ Н.Н. *О корректности задачи статистического точечного оценивания* // Теория вероятностей и ее применения. – 1981. – Т.26, №1. – С. 15–31.
61. ШТЕЙНБЕРГ Ш.Е., ЗАЛУЦКИЙ И.Е. *Адаптация стандартных регуляторов к условиям эксплуатации в промышленных системах регулирования* // Промышленные АСУ и контроллеры. – 2003. – №4. – С. 11–14.
62. ANDERSON B.D., GEVERS M. *Fundamental problems in adaptive control* // In D. Normand-Cyrot, editor, *Perspectives in Control Theory and Application*. – Springer-Verlag, Berlin, 1998. P. 9–21.
63. ANG K.H., CHONG G., LI Y. *PID-control system analysis, design, and technology* // IEEE Trans. on Control Syst. Tech. – July 2005. – Vol. 13, No.4. – P. 559–576.
64. ASTROM K.J., WITTENMARK B. *Adaptive Control*. – Addison-Wesley Publishing Company, 1989.
65. BELLMAN R., KALABA R. *Dynamic programming and adaptive control processes: Mathematical foundations* // IRE Trans. on Automatic Control. – 1960. – Vol. AC-5. – P. 5–10.
66. BERCU B., VAZQUEZ V. *Further results for ARX models in adaptive tracking* // Pr. 47th IEEE Conference on Decision and Control Cancun, Mexico, Dec. 9–11, 2008. – ThC15.1. – P. 5571–5575.
67. BICKEL P.J. *On adaptive estimation* // Ann. Statist. – 1982. – Vol. 10, No.3. – P. 647–671.
68. BUNICH A.L. *Adaptive control of Oxygen–Converter Steel Melting* // Pr. IV-th IFAC Symp. on Automation in Mining, Mineral and Metal Processing, Helsinki. – Pergamon Press, London, 1983. – Vol. 2. – P. 251–253.
69. CHEN H.F. *Recursive system identification and adaptive control by use of the modified least squares algorithm* // SIAM J. Control and Optimization. – 1984. – V. 22, No.5. – P. 758–776.

70. EVANS R.J., ZHONG C., SOH Y.G. *Bounded-Error estimation using dead zone and bounded ellipsoid* // Int. J. of System Processing. – 1994. – Vol. 8. – P. 31–42.
71. FARMER J.D., SIDOROVICH J.J. *Predicting chaotic time series* // Phys. Rev. Lett. – 1987. – Vol. 59, No.8. – P. 845–848.
72. FISHER R.A. *The Design of Experiments*. – Edinburg: Oliver and Boyd, 1935.
73. GEVERS M. *Identification for control: from the early achievements to the revival of experiment design* // European Journal of Control. – 2005. – Vol. 11(4–5). – P. 335–352.
74. GOODWIN G.C., SIN K.S. *Adaptive Filtering: Prediction and Control*. First edition. – Prentice Hall, 1984.
75. HSIEH C., SKELTON R.E. *All covariance controllers for linear discrete – time systems* // IEEE Trans. Automat. Contr. 1990. – Vol. 35, No.8. – P. 908–915.
76. JUDITSKY A., NAZIN A. *On minimax approach to nonparametric adaptive control* // Int. J. Adapt. Control & Signal Process. – 2001. – Vol. 15. – P. 153–168.
77. KOSUT R., ANDERSON B., MAREELS I. *Stability theory for adaptive systems: Method of averaging and persistency of excitation* // IEEE Transactions on Automatic Control. – 1987. – No.32(1). – P. 26–34.
78. KOUL H.L., SUSARLA V. *Adaptive estimation in linear regression* // Statistics and Decision. – 1983. – Vol. 1, No.4–5. – P. 379–400.
79. LEI GUO. *On Critical Stability of Discrete-Time Adaptive Nonlinear Control* // IEEE Trans. on Aut. Contr. – 1997. – Vol. 42, No.11. – P. 1488–1499.
80. LELAND W.E., WILSON D.V. “*High Time-Resolution Measurement and Analysis of LAN Traffic: Implications for LAN interconnection*” // Proc. of the IEEE INFOCOM-91. Bal Harbour, FL. – 1991. – P. 1360–1366.
81. LJUNG L., GLAD T.. *Modeling of Dynamic Systems*. – Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J, 1994.
82. LJUNG L. *System Identification Toolbox User’s Guide*. Computation. Visualization. Programming. Version 5. The Math. Works, Inc., 2000.
83. LJUNG L. *System identification*. Theory for user. – Prentice

- Hall, Upper Saddle River, N.J., 2nd edition, 1999. – 609 p.
84. MANDELBROT B. *The variation of certain speculative prices* // Journal of Business. – 1963. – Vol. XXXVI. – P. 392–417.
  85. NARENDRA K.S., ANNASWAMY A.M. *Stable Adaptive Systems*. – Prentice Hall, New Jersey, USA, 1988.
  86. NAZIN A.V., LJUNG L. *Asymptotically optimal smoothing of averaged LMS estimates for regression parameter tracking* // Automatica. – 2002. – Vol. 38. – P. 1287–1293.
  87. QIN S.J., BADGWELL T.A. *A survey of industrial control technology* // Contr. Eng. Practice. – 2003. – No.11. – P. 733–764.
  88. ROGERS C. *Arbitrage with fractional Brownian motion* // Math. Finance. – 1997. – No. 7. – P. 95–105.
  89. SASTRY S., BODSON M. *Adaptive Control: Stability, Convergence, and Robustness*. – Prentice Hall, 1994.
  90. SKELTON R.E. *Model error concepts in control design* // Int. J. Control. – 1989. – Vol. 49. – P. 1725–1753.
  91. SOTTINEN T. *Fractional Brownian motion, random walks and binary market models* // Finance and Stochastics. – 2001. – Vol. 5. – P. 343–355.
  92. STEFANOVIC M., WANG R., SAFONOV M.G. *Stability and convergence in adaptive systems* // In Proceedings of American Control Conference, Boston, MA, July 2004.
  93. STONE C. *Adaptive maximum likelihood estimation of a location parameter* // Ann. Statist. – 1975. – Vol. 3, No.2. – P. 267–284.
  94. VAN DEN HOF P.M.J., SCHRAMA R.J.P. *Identification and control: Closed-loop issues* // Automatica. – 1995. – No.31(12). P. 1751–1770.
  95. WILLINGER W., TAQQU M., TEVEROVSKY V. *Long range dependence and stock returns* // Finance and Stochastics. – 1999. – Vol. 3. – P. 1–13.
  96. XIAO-LI HU, LJUNG L. *New Convergence Results for Least Squares Identification Algorithm* // Technical report from Automatic Control at Linköpings universitet. Division of Automatic Control, 13th May 2009. Report no.: LiTH-ISY-R-2904.



## CONTROL SYSTEMS WITH IDENTIFIER

**Aleksandr Bunich**, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Professor, Phd (bunich1946@hotmail.com).

*Abstract: The paper overviews the literature on predictive model-based adaptive control systems with identifier (ASI) for discrete objects with parametric and nonparametric uncertainties. It focuses on the relationship between the spectral characteristics of external perturbations and maximum achievable control performance as well as identifier speed. A class of stationary external perturbations with the known spectrum localization is established with the solvable problem of synthesizing the systems of prescribed control precision subject to the criterion of minimum steady-state response variance. The sensitivity of the control system to variations of the spectral composition of disturbances is investigated.*

Keywords: identifier, recursive estimation, predictive model, singular perturbation.

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии Н.Н. Бахтадзе*

УДК 681.5.011+681.5.013

ББК 22.18

## **СИНТЕЗ СТАБИЛИЗИРУЮЩЕГО УПРАВЛЕНИЯ В ДИФфуЗИОННЫХ СИСТЕМАХ С МАРКОВСКИМИ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯМИ<sup>1</sup>**

**Жилина Т. Е.<sup>2</sup>**

*(Арзамасский политехнический институт Нижегородского  
государственного технического университета им. Р.Е.  
Алексеева, Арзамас)*

*Рассматриваются стохастические системы, описываемые дифференциальными уравнениями Ито с марковскими переключениями. Предлагается параметрическое описание всех линейных стабилизирующих управлений со статической обратной связью по выходу, обеспечивающих экспоненциальную устойчивость в среднем квадратическом замкнутой системы. На основе этой параметризации получены достаточные условия стабилизации, которые позволяют разработать алгоритм нахождения матриц усиления статического и динамического регулятора с применением линейных матричных неравенств. Приводится пример решения задачи стабилизации перевернутого маятника при скачкообразном изменении массы и случайных вибрациях основания.*

Ключевые слова: стабилизация, обратная связь по выходу, диффузионные системы.

### **Введение**

В современных задачах управления широкое распространение получили многорежимные системы, режимы которых описываются стохастическим дифференциальным уравнением Ито, а переходы между ними – цепью Маркова. В отечественной

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, гранты 10-08-00843, 11-01-97025.

<sup>2</sup> Татьяна Евгеньевна Жилина, аспирантка (zhilina@apingu.edu.ru).

литературе модели таких объектов известны под названием «системы случайной структуры» [1], в западной используются термины «диффузионные системы с марковскими переключениями (скачками)» или «системы с переключаемой диффузией» [14]. Примерами могут служить склонные к отказам сложные производственно-технологические и энергетические системы, системы управления подвижными объектами и т.п. [9, 14]. Диффузионные модели с марковскими переключениями широко используются также при описании экономических процессов и в финансовой математике, для моделирования уровня спроса или производительности оборудования при планировании производства, для отслеживания изменений рыночных курсов и процентных ставок [14].

Основы исследования систем случайной структуры были заложены в цикле статей [4]. Результаты дальнейших исследований подведены в монографиях [2, 9, 14]. Широко изучались также дискретные модели [5, 8].

Несмотря на большое количество работ, для диффузионных систем с марковскими переключениями достаточно мало изученной является важная для теории и практики задача синтеза стабилизирующего управления с обратной связью по выходу. В работах [10, 11] разработаны метод и алгоритм синтеза стабилизирующего управления со статической обратной связью по выходу для диффузионных систем [10] и систем случайной структуры [11]. Для дискретных стохастических систем случайной структуры такая задача решалась в [12].

В данной работе подход [10, 11] развивается для класса диффузионных систем с марковскими переключениями. Предлагается параметрическое описание всех линейных стабилизирующих управлений со статической обратной связью по выходу, обеспечивающих экспоненциальную устойчивость в среднем квадратическом систем этого класса. На основе такой параметризации получены достаточные условия стабилизации, которые позволяют разработать алгоритм нахождения матриц усиления статического и динамического регулятора с применением линейных мат-

ричных неравенств. Приводится пример решения задачи стабилизации перевернутого маятника при скачкообразном изменении массы и случайных вибрациях основания.

### 1. Постановка задачи

Рассмотрим линейную систему, описываемую уравнением Ито с марковскими переключениями

$$(1) \quad dx_t = [A(r_t)x_t + B(r_t)u_t]dt + \sum_{l=1}^m \gamma_l(r_t)A_l(r_t)x_t dw_{lt},$$

$$y_t = C(r_t)x_t, \quad t \geq 0,$$

где  $x_t \in \mathbf{R}^n$  – вектор состояния;  $u_t \in \mathbf{R}^m$  – вектор входных переменных;  $y_t \in \mathbf{R}^k$  – вектор выходных переменных;  $A(r_t), A_l(r_t) (l = 1, \dots, m)$  – матрицы размеров  $n \times n$ ;  $B(r_t)$  – матрица размеров  $n \times m$ ;  $r_t$  – однородная марковская цепь с пространством состояний  $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots, \nu\}$  и матрицей интенсивностей переходов

$$P(\theta) = [P_{ij}(\theta)]_1^\nu = [\text{Prob}\{r(t+\theta) = j \mid r(t) = i\}]_1^\nu = \exp(\Pi\theta),$$

$0 \leq t \leq t + \theta$ ,  $\Pi = [\pi_{ij}]_1^\nu$ ,  $\pi_{ij} > 0$ , ( $i \neq j$ ),  $\pi_{ii} = -\sum_{j \neq i} \pi_{ij}$ ;  $w_{lt}$  ( $l = 1, \dots, m$ ) – стандартный винеровский процесс, определенный на полном вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  с естественной фильтрацией  $\mathcal{F}_t$ , порожденной процессом  $w$  до момента  $t$  включительно; начальные условия  $x(0) = x_0$  и  $r(0) = r_0$  – детерминированные; процессы  $w_t$  и  $r_t$  – независимы;  $\gamma_l(r_t) (l = 1, \dots, m)$  – положительные скаляры;  $C(r_t)$  – матрица размера  $k \times n$  имеющая полный ранг по строкам.

Далее для краткости будем обозначать  $F_i = F(r_t)$ ,  $A_i = A(r_t)$ ,  $B_i = B(r_t)$ ,  $C_i = C(r_t)$ ,  $A_{li} = A_l(r_t)$ , если  $r_t = i$ ,  $i \in \mathbb{N}$ .

Закон управления зададим в виде динамической обратной связи по выходу:

$$(2) \quad \begin{aligned} \dot{x}_{ct} &= A_{ci}x_{ct} + B_{ci}u_t, & \text{если } r_t = i, i \in \mathbb{N}, \\ u_t &= C_{ci}x_{ct} + D_{ci}y_t, & \text{если } r_t = i, i \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

где  $x_{ct}$  – вектор состояния динамического регулятора;  $A_{ci}, B_{ci}, C_{ci}, D_{ci}$  – матрицы соответствующих размеров.

Введем в рассмотрение расширенный вектор состояния и объединим уравнения (1), (2) в виде:

$$(3) \quad dx_t = [\bar{A}_i \bar{x}_t + \bar{B}_i u_t] dt + \sum_{l=1}^m \gamma_{li} \bar{A}_{li} \bar{x}_t dw_{lt},$$

$$y_t = \bar{C}_i \bar{x}_t, \quad t \geq 0, \quad i \in \mathbb{N},$$

$$(4) \quad u_t = -F_i y_t, \quad i \in \mathbb{N},$$

где  $\bar{x}_t = [x_t, x_{ct}]$ ,  $\bar{A}_i, \bar{B}_i, \bar{C}_i, F_i$  определены следующим образом:

$$(5) \quad \bar{A}_i = \begin{bmatrix} A_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \bar{B}_i = \begin{bmatrix} B_i & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix},$$

$$\bar{C}_i = \begin{bmatrix} C_i & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, F_i = - \begin{bmatrix} D_{ci} & C_{ci} \\ B_{ci} & A_{ci} \end{bmatrix}.$$

Для расширенной системы регулятор является статическим.

**Определение 1.** Решение  $x = 0$  системы (3) называется экспоненциально устойчивым в среднем квадратическом, если при любых начальных условиях в области  $x_t \in \mathbf{R}^n, r_t \in \mathbf{N}, 0 \leq t_0 \leq t$  существуют такие постоянные  $B > 0, \alpha > 0$ , что при всех  $t \geq t_0$  выполнено неравенство

$$M [ \|x(t)\|^2 | x_0, r_0 ] \leq B \|x_0\|^2 e^{-\alpha(t-t_0)}.$$

Поставим задачу описать в параметрической форме все матрицы усиления в (4), при которых система (3) будет экспоненциально устойчива в среднем квадратическом (ЭУСК), и получить алгоритм вычисления матрицы усиления стабилизирующего регулятора  $F$ .

## 2. Параметризация стабилизирующих матриц усиления

Следующая теорема дает необходимые и достаточные условия параметризации всех матриц усиления стабилизирующих управлений со статической обратной связью по выходу. Она является обобщением результатов [10, 11] на диффузионные системы с марковскими переключениями

**Теорема 1.** *Матрица усиления  $F_i$ , обеспечивающая экспоненциальную устойчивость в среднем квадратическом системы (3) с управлением (4), существует тогда и только тогда, когда найдутся матрицы параметров  $Q_i = Q_i^T \geq 0$ ,  $R_i = R_i^T > 0$  и  $L_i$  такие, что*

$$(6) \quad F_i \bar{C}_i = R_i^{-1} [\bar{B}_i^T P_i + L_i],$$

где матрицы  $P_i = P_i^T > 0$  и  $L_i$  удовлетворяют системе квадратных матричных неравенств

$$(7) \quad \bar{A}_i^T P_i + P_i \bar{A}_i - P_i \bar{B}_i R_i^{-1} \bar{B}_i^T P_i + \sum_{j=1}^N \pi_{ij} P_j + \\ + \sum_{l=1}^m \gamma_{li}^2 \bar{A}_{li}^T P_i \bar{A}_{li} + Q_i + L_i^T R_i^{-1} L_i < 0.$$

**Доказательство.** *Необходимость.* Пусть  $F_i$  – матрица усиления стабилизирующего управления. Тогда согласно [2] существует положительно определенное решение системы неравенств.

$$(8) \quad (\bar{A}_i - \bar{B}_i F_i \bar{C}_i)^T P_i + P_i (\bar{A}_i - \bar{B}_i F_i \bar{C}_i) + \sum_{j=1}^N \pi_{ij} P_j + \\ + \sum_{l=1}^m \gamma_{li}^2 \bar{A}_{li}^T P_i \bar{A}_{li} < 0,$$

очевидно, при этом найдутся матрицы  $Q_i = Q_i^T \geq 0$  и  $R_i = R_i^T > 0$  (возможно, достаточно малые) такие, что

$$(9) \quad (\bar{A}_i - \bar{B}_i F_i \bar{C}_i)^T P_i + P_i (\bar{A}_i - \bar{B}_i F_i \bar{C}_i) + \sum_{j=1}^N \pi_{ij} P_j + \\ + \sum_{l=1}^m \gamma_{li}^2 \bar{A}_{li}^T P_i \bar{A}_{li} + Q_i + (F_i \bar{C}_i)^T R_i F_i \bar{C}_i < 0.$$

Элементарными преобразованиями из (9) получим

$$(10) \quad \bar{A}_i^T P_i + P_i \bar{A}_i + (F_i \bar{C}_i)^T R_i (F_i \bar{C}_i) - (F_i \bar{C}_i)^T \bar{B}_i^T P_i - \\ - P_i \bar{B}_i (F_i \bar{C}_i) + \sum_{l=1}^m \gamma_{li}^2 \bar{A}_{li}^T P_i \bar{A}_{li} + \sum_{j=1}^N \pi_{ij} P_j + Q_i < 0.$$

Обозначим

$$(11) \quad K_i = F_i \bar{C}_i - R_i^{-1} \bar{B}_i^T P_i$$

и перепишем (10) в следующем виде:

$$(12) \quad \bar{A}_i^T P_i + P_i \bar{A}_i - P_i \bar{B}_i R_i^{-1} \bar{B}_i^T P_i + K_i^T R_i K_i + \\ + \sum_{l=1}^m \gamma_{li}^2 \bar{A}_{li}^T P_i \bar{A}_{li} + \sum_{j=1}^N \pi_{ij} P_j + Q_i < 0.$$

Определим

$$(13) \quad L_i = R_i K_i.$$

Учитывая (13) и (11), легко получим (6) и (7).

*Достаточность.* Пусть существуют матрицы  $P_i = P_i^T > 0$  и  $F_i$ , удовлетворяющие (6) и (7). Тогда матрицы  $L_i$  и  $K_i$  определяются по формулам (11) и (13). Из (7) с учетом (6) последовательно

получим

$$\begin{aligned}
 0 > \bar{A}_i^T P_i + P_i \bar{A}_i - P_i \bar{B}_i R_i^{-1} \bar{B}_i^T P_i + \sum_{l=1}^m \gamma_{li}^2 \bar{A}_{li}^T P_i \bar{A}_{li} + \sum_{j=1}^N \pi_{ij} P_j + \\
 + Q_i + L_i^T R_i^{-1} L_i = (\bar{A}_i - \bar{B}_i F_i \bar{C}_i)^T P_i + P_i (\bar{A}_i - \bar{B}_i F_i \bar{C}_i) + \\
 + \sum_{l=1}^m \gamma_{li}^2 \bar{A}_{li}^T P_i \bar{A}_{li} + \sum_{j=1}^N \pi_{ij} P_j + Q_i + (F_i \bar{C}_i)^T R_i F_i \bar{C}_i.
 \end{aligned}$$

Из этого неравенства следует, что  $F_i$  – матрица усиления стабилизирующего управления.

Смысл сформулированной теоремы состоит в следующем. Теоретически матрицы  $F_i, P_i$  (стабилизирующую пару) можно было бы найти, решая систему билинейных матричных неравенств (8), но эти неравенства являются невыпуклыми и эффективные методы их решения неизвестны. Условия, заданные формулами (6) и (7), также являются невыпуклыми, но для них можно предложить эффективную выпуклую аппроксимацию в виде линейных матричных неравенств. Кроме того эти условия содержат свободные параметры в виде матриц  $Q_i$  и  $R_i$ , которые по смыслу аналогичны весовым матрицам в задаче о линейно-квадратичном регуляторе, что дает дополнительные возможности выбора при проектировании.

### 3. Выпуклые достаточные условия и алгоритм вычисления матрицы усиления

Предположим, что для некоторого скаляра  $\mu_i > 0$  и матриц параметров  $Q_i, R_i$  и  $L_i$  справедливо следующее неравенство

$$(14) \quad \begin{bmatrix} \mu_i Q_i & L_i^T \\ L_i & R_i \end{bmatrix} > 0,$$



и  $P_i = P_i^T > 0$  является решением обобщенных уравнений Риккати

$$(15) \quad \bar{A}_i^T P_i + P_i \bar{A}_i - P_i \bar{B}_i R_i^{-1} \bar{B}_i^T P_i + \sum_{j=1}^N \pi_{ij} P_j + \\ + \sum_{l=1}^m \gamma_{li}^2 \bar{A}_{li}^T P_i \bar{A}_{li} + (1 + \mu_i) Q_i = 0.$$

Тогда, учитывая (7), имеем

$$\bar{A}_i^T P_i + P_i \bar{A}_i - P_i \bar{B}_i R_i^{-1} \bar{B}_i^T P_i + \sum_{l=1}^m \gamma_{li}^2 \bar{A}_{li}^T P_i \bar{A}_{li} + \sum_{j=1}^N \pi_{ij} P_j + \\ + Q_i + L_i^T R_i^{-1} L_i < \bar{A}_i^T P_i + P_i \bar{A}_i - P_i \bar{B}_i R_i^{-1} \bar{B}_i^T P_i + \\ (16) \quad + \sum_{l=1}^m \gamma_{li}^2 \bar{A}_{li}^T P_i \bar{A}_{li} + \sum_{j=1}^N \pi_{ij} P_j + (1 + \mu_i) Q_i = 0.$$

Далее, в соответствии с [13], необходимым и достаточным условием разрешимости уравнения (6) является выполнение равенства

$$(17) \quad [\bar{B}_i^T P_i + L_i](I - \bar{C}_i^+ \bar{C}_i) = 0,$$

где  $C_i^+$  – псевдообращение по Муру–Пенроузу. При этом единственное решение (6) определится по формуле:

$$(18) \quad F_i = R_i^{-1} [\bar{B}_i^T P_i + L_i] \bar{C}_i^+.$$

Таким образом, имеем следующее утверждение.

**Следствие 1.** Пусть для некоторого скаляра  $\mu_i > 0$  и матриц параметров  $Q_i = Q_i^T \geq 0$ ,  $R_i = R_i^T > 0$  система уравнений Риккати (15) имеет положительно определенное решение  $P_i = P_i^T$ , удовлетворяющее (14), (17) для некоторой матрицы  $L_i$ . Тогда закон управления (4) с матрицей усиления (18) обеспечивает ЭУСК системы (3).

В [6] показано, что решение задачи выпуклой оптимизации

$$\text{trace} \sum_{j=1}^N P_j \longrightarrow \max, \quad P_i = P_i^T > 0,$$

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_i^T P_i + P_i \bar{A}_i + \sum_{l=1}^m \gamma_{li}^2 \bar{A}_{li}^T P_i \bar{A}_{li} + \\ + \sum_{j=1}^N \pi_{ij} P_j + (1 + \mu_i) Q_i & P_i \bar{B}_i \\ \bar{B}_i^T P_i & R_i \end{bmatrix} \geq 0$$

совпадает с решением системы уравнений Риккати (16).

Основываясь на этом факте и выпуклых достаточных условиях следствия 1, можно предложить следующий алгоритм вычисления матрицы усиления.

**Алгоритм 1.**

1. Назначаем весовые матрицы  $Q_i = Q_0$ ,  $R_i = R$  исходя из принципов теории линейно квадратичного регулятора и задаем скаляр  $\mu_i > 0$ .

2. Решаем задачу оптимизации при ограничениях в виде линейных матричных неравенств относительно переменных  $P_i = P_i^T$  и  $L_i$ :

$$\text{trace} \sum_{j=1}^N P_j \longrightarrow \max, \quad P_i = P_i^T > 0,$$

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_i^T P_i + P_i \bar{A}_i + \sum_{l=1}^m \gamma_{li}^2 \bar{A}_{li}^T P_i \bar{A}_{li} + \\ + \sum_{j=1}^N \pi_{ij} P_j + (1 + \mu_i) Q_i & P_i \bar{B}_i \\ \bar{B}_i^T P_i & R_i \end{bmatrix} \geq 0,$$

$$\begin{bmatrix} \mu_i Q_i & L_i^T \\ L_i & R_i \end{bmatrix} > 0, \quad \left[ \bar{B}_i^T P_i + L_i \right] (I - \bar{C}_i^+ \bar{C}_i) = 0.$$

3. Если эта система совместна, то вычисляем  $F_i$  по формуле (18).

4. *Проверка.* Если система линейных матричных неравенств относительно матриц  $S_i$

$$(\bar{A}_i - \bar{B}_i F_i \bar{C}_i)^T S_i + S_i (\bar{A}_i - \bar{B}_i F_i \bar{C}_i) + \sum_{l=1}^m \gamma_{li}^2 \bar{A}_{li}^T S_i \bar{A}_{li} + \sum_{j=1}^N \pi_{ij} S_j < 0.$$

совместна, то  $F_i$  является искомой матрицей усиления стабилизирующего управления.

Необходимость шага проверки здесь обусловлена тем, что из-за дополнительных ограничений решение задачи оптимизации может не давать решение системы (16), но тем не менее, если выполнены условия монотонности левых частей (16) по переменным  $P_i$ , то решение системы неравенств

$$\begin{aligned} \bar{A}_i^T P_i + P_i \bar{A}_i - P_i \bar{B}_i R_i^{-1} \bar{B}_i^T P_i + \sum_{l=1}^m \gamma_{li}^2 \bar{A}_{li}^T P_i \bar{A}_{li} + \sum_{j=1}^N \pi_{ij} P_j + \\ + Q_i + L_i^T R_i^{-1} L_i < \bar{A}_i^T P_i + P_i \bar{A}_i - P_i \bar{B}_i R_i^{-1} \bar{B}_i^T P_i + \\ + \sum_{l=1}^m \gamma_{li}^2 \bar{A}_{li}^T P_i \bar{A}_{li} + \sum_{j=1}^N \pi_{ij} P_j + (1 + \mu_i) Q_i \geq 0. \end{aligned}$$

может быть стабилизирующим. Именно этот факт и устанавливает указанная проверка.

Определенную трудность в алгоритме представляет выбор весовых матриц. Далее предлагается возможная техника такого выбора. Она основана на том, что вычисляется начальное приближение матрицы усиления на основе решения вспомогательной детерминированной задачи с использованием пакета *MATLAB – HIFOO (H-Infinity Fixed-Order Optimization)* [7]. Пакет построен на основе гибридного алгоритма, объединяющего стандартные генетические алгоритмы и градиентные методы. *HIFOO* позволяет решать следующие задачи: стабилизации фиксированного порядка, одновременной стабилизации фиксированного порядка,  $H_\infty$ -оптимизации фиксированного порядка,  $H_2$ -оптимизации фиксированного порядка,

рованного порядка. После того как такая матрица найдена, можно найти весовые матрицы. На основе такого подхода получаем следующую модификацию алгоритма.

**Алгоритм 2.**

1. В качестве базового назначаем один из режимов функционирования системы. Для него вычисляем матрицу усиления  $F_0$  с использованием *HIFOO*, решая детерминированную задачу стабилизации.

2. Для базового режима находим матрицу замкнутой системы  $A_c = A + BF_0C$ , где  $A$ ,  $B$ ,  $C$  – матрицы, определяющие базовый режим.

3. Задаем весовую матрицу  $R$  и находим начальное приближение весовой матрицы  $Q_0$ , решая линейное матричное неравенство

$$H_0 = H_0^T > 0, \quad Q_0 = Q_0^T \geq 0$$

$$A_c^T H_0 + H_0 A_c + Q_0 + C^T F_0 R F_0 C < 0.$$

4. Назначаем весовые матрицы для всех режимов  $Q_i = Q_0$ ,  $R_i = R$ . Задаем скаляр  $\mu_i > 0$ .

5. Решаем задачу оптимизации при ограничениях в виде линейных матричных неравенств относительно переменных  $P_i = P_i^T$ :

$$\text{trace} \sum_{j=1}^N P_j \longrightarrow \max, \quad P_i = P_i^T > 0,$$

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_i^T P_i + P_i \bar{A}_i + \sum_{l=1}^m \gamma_{li}^2 \bar{A}_{li}^T P_i \bar{A}_{li} + \\ + \sum_{j=1}^N \pi_{ij} P_j + (1 + \mu_i) Q_i & P_i \bar{B}_i \\ \bar{B}_i^T P_i & R_i \end{bmatrix} \geq 0.$$

6. Решаем систему линейных матричных уравнений и неравенств относительно матрицы  $L_i$

$$\begin{bmatrix} \mu_i Q_i & L_i^T \\ L_i & R_i \end{bmatrix} > 0, \quad \left[ \bar{B}_i^T P_i + L_i \right] (I - \bar{C}_i^+ \bar{C}_i) = 0.$$

7. Если эта система совместна, то вычисляем  $F_i$  по формуле (18).

8. Проверка. Если система линейных матричных неравенств относительно матриц  $S_i$

$$(\bar{A}_i - \bar{B}_i F_i \bar{C}_i)^T S_i + S_i (\bar{A}_i - \bar{B}_i F_i \bar{C}_i) + \sum_{l=1}^m \gamma_{li}^2 \bar{A}_{li}^T S_i \bar{A}_{li} + \sum_{j=1}^N \pi_{ij} S_j < 0.$$

совместна, то  $F_i$  является искомой матрицей усиления стабилизирующего управления.

#### 4. Пример

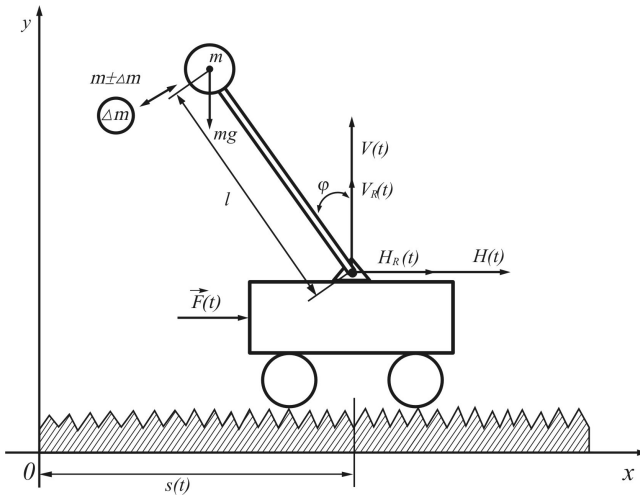


Рис. 1. Перевернутый маятник

В данном разделе на основе предложенного метода рассматривается задача стабилизации перевернутого маятника [3], который показан на рис. 1. Ось маятника закреплена на платформе, которая может перемещаться в горизонтальном направлении. Платформа приводится в движение небольшим двигателем, который

в момент времени  $t$  прикладывает к ней силу  $u(t)$ , являющуюся входной переменной системы. При движении платформа испытывает случайные вибрации, которые передаются на ось маятника.

Перемещение оси характеризуется функцией  $s(t)$ , а угловое отклонение маятника – функцией  $\varphi(t)$ . Масса маятника  $m$  пренебрежимо мала по сравнению с массой платформы  $M$ . К маятнику приложена сила  $mg$  в центре тяжести.  $H(t)$ ,  $V(t)$  – горизонтальная и вертикальная силы реакции у оси маятника. Вибрации оси моделируются белым шумом с составляющими  $H_R(t)$  и  $V_R(t)$ .

Математическая модель рассматриваемой системы имеет вид:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{F}{M} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{g}{L'} & 0 & \frac{g}{L'} & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) +$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{L'M} & 0 & \frac{1}{L'M} & 0 \end{bmatrix} V_R(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{M} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} H_R(t),$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t),$$

где  $x = [s(t), \dot{s}(t), \varphi, \dot{\varphi}]^T$ ;  $g$  – ускорение свободного падения;  $L'$  – эффективная длина маятника:  $L' = \frac{J+mL^2}{mL}$ ;  $J$  – момент инерции относительно центра тяжести;  $L$  – расстояние между осью и центром тяжести.

Система имеет следующие числовые параметры:  $J = 0,006$  кг·м<sup>2</sup>,  $l = 0,47$  м,  $m = 1$  кг,  $\Delta m = 0,05$  кг,  $g = 9,8$  м/с<sup>2</sup>,  $M = 1$  кг,  $L = 0,235$  м.

Задача состоит в стабилизации маятника при допущениях, что вибрации оси моделируются белым шумом. При этом масса груза может скачкообразно изменяться, принимая одно из трех возможных значений:  $m - \Delta m$ ,  $m$ ,  $m + \Delta m$ , что в сумме дает 3 возможных «режима» работы такой системы. Смена этих режимов

происходит в соответствии с изменением состояний марковской цепи (рис. 2).

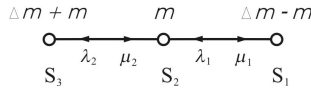


Рис. 2. Граф состояний для системы

Для графа, изображенного на рис. 2, уравнение Колмогорова имеет вид:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \\ p_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \mu_1 & 0 \\ \lambda_1 & -\mu_1 - \lambda_2 & \mu_2 \\ 0 & \lambda_2 & -\mu_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \\ p_3(t) \end{bmatrix}.$$

Интегрируя систему линейных дифференциальных уравнений с учетом начальных условий  $p(0) = (0, 1, 0)$  методом Рунге–Кутта, определяем распределение вероятностей системы в любой момент времени.

В результате вычислений с применением предложенного алгоритма были получены:

1) Весовая матрица  $Q_0$

$$Q_0 = 10^5 \begin{bmatrix} 1,61 & -0,03 & -0,64 & 0,02 & -0,40 & 0,10 \\ -0,03 & 0,04 & -0,01 & -0,26 & 0,03 & -0,04 \\ -0,65 & -0,01 & 5,43 & -0,01 & 0,23 & -1,21 \\ 0,02 & -0,03 & -0,01 & 2,55 & 0,43 & 0,03 \\ -0,40 & 0,02 & 0,23 & 0,43 & 4,51 & -2,06 \\ 0,10 & -0,04 & -0,19 & 0,03 & -2,06 & 0,98 \end{bmatrix}.$$

2) Матрицы обратной связи по выходу

$$F_1 = \begin{bmatrix} 875,9 & -174,6 & 42,1 & 44,6 \\ 112,0 & -320,4 & 792,7 & -350,6 \\ 358,8 & -873,2 & -342,5 & 198,6 \end{bmatrix},$$

$$F_2 = \begin{bmatrix} 972,7 & -186,8 & 33,1 & 49,2 \\ 112,0 & -326,6 & 791,0 & -349,8 \\ 390,1 & -905,1 & -344,8 & 199,0 \end{bmatrix},$$

$$F_3 = \begin{bmatrix} 989,7 & -183,7 & 30,5 & 48,6 \\ 115,5 & -316,9 & 791,0 & -349,8 \\ 379,5 & -896,7 & -344,7 & 199,0 \end{bmatrix}.$$

На рис. 3 показаны графики переходных функций замкнутой системы в случае изменения ее состояний в соответствии с реализацией марковской цепи, представленной на рис. 4, и при отсутствии параметрических шумов.

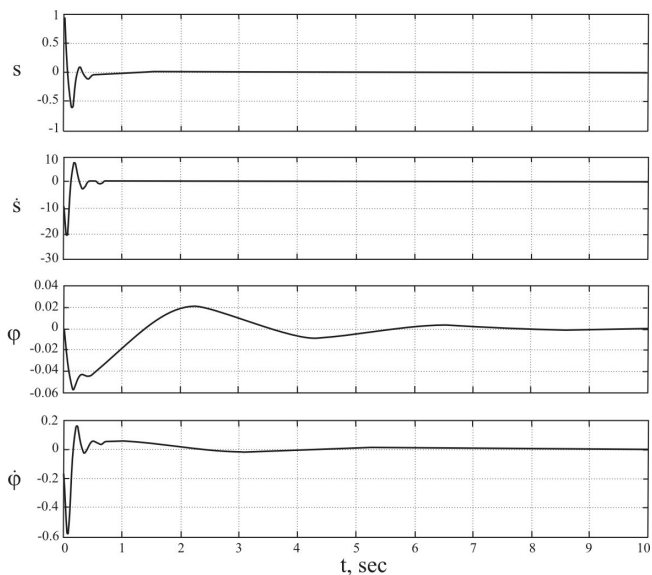


Рис. 3. Графики переходных функций замкнутой системы



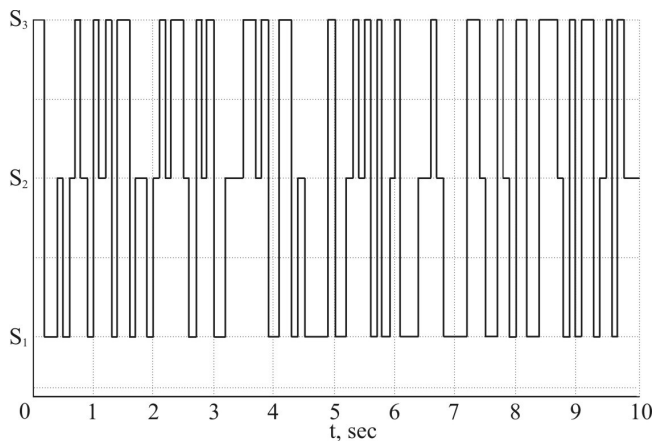


Рис. 4. Марковская цепь

В таблице 1 показаны результаты решения задачи в зависимости от интенсивности шума.

Из приведенной таблицы видно, что с возрастанием интенсивности шума норма матрицы усиления возрастает и при определенной интенсивности задача стабилизации становится неразрешимой с помощью указанного алгоритма. Вычисления проводились в среде *MATLAB* с применением пакетов *YALMIP* и *SEDUMI* при относительной погрешности  $\varepsilon = 1e - 7$ .

Таблица 1. Изменения интенсивности шума

интенсивность шума $\gamma$	матрица стабилизации $F_i$	время решения $t$ , сек.
0,01	$F_1 = \begin{bmatrix} 875,9 & -174,6 & 42,1 & 44,6 \\ 112,0 & -320,4 & 792,7 & -350,6 \\ 358,8 & -873,2 & -342,5 & 198,6 \end{bmatrix}$ $F_2 = \begin{bmatrix} 972,2 & -186,0 & 33,0 & 49,2 \\ 117,6 & -326,4 & 791,0 & -349,8 \\ 389,9 & -904,6 & -344,8 & 198,9 \end{bmatrix}$ $F_3 = \begin{bmatrix} 989,7 & -183,7 & 30,5 & 49,6 \\ 112,0 & -316,9 & 790,0 & -349,3 \\ 379,5 & -888,2 & -346,7 & 199,4 \end{bmatrix}$	1,6
0,1	$F_1 = \begin{bmatrix} 876,2 & -176,9 & 42,2 & 44,6 \\ 112,0 & -320,5 & 792,7 & -350,7 \\ 358,9 & -873,4 & -342,5 & 198,7 \end{bmatrix}$ $F_2 = \begin{bmatrix} 987,7 & -186,0 & 33,1 & 49,2 \\ 117,7 & -326,6 & 791,0 & -349,8 \\ 390,1 & -905,0 & -344,8 & 199,0 \end{bmatrix}$ $F_3 = \begin{bmatrix} 994,1 & -183,9 & 30,6 & 49,7 \\ 110,8 & -317,1 & 790,0 & -349,7 \\ 379,7 & -888,6 & -346,7 & 199,5 \end{bmatrix}$	2

продолжение таблицы 1

1	$F_1 = \begin{bmatrix} 998,7 & -178,4 & 43,6 & 44,1 \\ 123,0 & -334,2 & 792,2 & -349,7 \\ 381,0 & -901,1 & -343,5 & 200,1 \end{bmatrix}$ $F_2 = \begin{bmatrix} 1020,1 & -190,4 & 43,6 & 44,1 \\ 129,9 & -342,3 & 790,1 & -348,8 \\ 416,8 & -939,3 & -346,9 & 201,2 \end{bmatrix}$ $F_3 = \begin{bmatrix} 1002,3 & -187,9 & 35,4 & 48,1 \\ 127,4 & -339,0 & 790,0 & -348,9 \\ 409,0 & -929,7 & -346,7 & 201,1 \end{bmatrix}$	5
10	$F_1 = \begin{bmatrix} 11246,0 & -11800,6 & 132,3 & 21,2 \\ 2329,5 & -2503,2 & 774,3 & -318,0 \\ 3669,5 & -4043,0 & -422,2 & 276,0 \end{bmatrix}$ $F_2 = \begin{bmatrix} 15502,0 & -16071,5 & 119,4 & 28,2 \\ 2248,0 & -2397,3 & 755,7 & -311,3 \\ 3534,2 & -3869,5 & -450,0 & 286,6 \end{bmatrix}$ $F_3 = \begin{bmatrix} 14632,4 & -15200,7 & 122,0 & 27,0 \\ 2274,7 & -2427,0 & 758,1 & -311,9 \\ 3573,5 & -3913,1 & -446,2 & 285,0 \end{bmatrix}$	10,5
100	нет решения	нет решения

### Литература

1. КАЗАКОВ И.Е., АРТЕМЬЕВ В.М., БУХАЛЕВ В.А. *Анализ систем случайной структуры*. – М: Наука, 1993. – С. 270.
2. КАЦ И.Я. *Метод функций Ляпунова в задачах устойчивости и стабилизации систем случайной структуры*. – Екатеринбург: Изд-во Урал.гос.акад.путей сообщения, 1998.
3. КВАКЕРНААК Х., СИВАН Р. *Линейные оптимальные системы управления*. – М: Мир, 1977.
4. КРАСОВСКИЙ Н.Н., ЛИДСКИЙ Э.А. *Аналитическое конструирование регуляторов в системах со случайными свойствами* // Автоматика и телемеханика. – 1961. – №9. – С. 732–745; №11. – С. 1273–1278.
5. ПАКШИН П.В. *Дискретные системы со случайными параметрами и структурой*. – М.:Наука, 1994. – С. 304.
6. AIT RAMI M., GHAOUI L.EL *LMI optimization for nonstandard Riccati equation arising in stochastic control* // IEEE Trans. Automat. Control. – 1996. – №41. – P. 1666–1671.
7. BURKE J.C., HENRION D., LEWIS A.S. AND OVERTON M.L. *HIFOO – A MATLAB Package for Fixed-Order Controller Design and H-infinity Optimization* // Proceedings of the IFAC Symposium on Robust Control Design, Toulouse, France, – 2006. – URL: [www.cs.nyu.edu/overton/software/hifoo](http://www.cs.nyu.edu/overton/software/hifoo).
8. COSTA O., FRAGOZO M., MARQUES R. *Discrete-Time Markov Jump Linear Systems*. – Springer, London, 2004.
9. MARITON M. *Jump linear systems in automatic control*. – Marcel Dekker, New York.
10. ПАКШИН П.В., ПЕАУЦЕЛЛЕ Д., ЗИЛИНА Т.Е. *Stabilization of linear systems with state dependent noise via output feedback and its application to robust control design* // Proceedings of the 14th International Conference

- on Methods and Models in Automation and Robotics, Miedzyzdroje, Poland, 2009.
11. PAKSHIN P.V., PEAUCELLE D., ZHILINA T.YE. *Parametrization and convex approximation approach to stabilization via output feedback* // Journal of Cybernetics and Informatics. – 2010. – P. 29–38. – URL: <http://www.ifac-papersonline.net/Detailed/41105.html>.
  12. PAKSHIN P.V., SOLOVIEV S.G. *Parametrization of static output feedback controllers for Markovian switching systems and related robust control problems* // Kybernetes. – 2009. – №48. – P. 1106–1120.
  13. SKELTON R.E., IWASAKI T., GRIGORIADIS K.M. *A unified algebraic approach to linear control design*. – Taylor & Francis, London, 1997.
  14. YIN G.G., ZHU C. *Hybrid Switching Diffusions: Properties and Applications*. – New York: Springer Verlag, 2010.

## **SYNTHESIS OF STABILIZING CONTROL IN DIFFUSION SYSTEMS WITH MARKOVIAN SWITCHING**

**Tatiana Zhilina**, Arzamas Polytechnic Institute of R.E. Alekseev,  
Nizhny Novgorod State Technical University, Arzamas,  
post-graduate student (zhilina@apingtu.edu.ru).

*Abstract: We consider stochastic systems modeled by Ito differential equations with Markovian switching, and propose the parametric description (parametrization) of all static output feedback stabilizing controllers. This controllers provide exponential stability in the mean square of the closed-loop system. Using this parametrization we obtain sufficient conditions of stabilization, which allow to develop an LMI-based algorithm for gain matrixes computation of both static and a dynamic regulators. This algorithm is applied to the solution of a stabilization problem of the inverted pendulum on the moving platform under conditions of step-like mass change and random vibration of the platform.*

Keywords: stabilization, output feedback, diffusion systems.

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии П. С. Щербаковым*

УДК 519.7  
ББК Ж 50

## **РОБАСТНОЕ УПРАВЛЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫМИ ОБЪЕКТАМИ С НЕИЗВЕСТНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ ОТНОСИТЕЛЬНОЙ СТЕПЕНЬЮ<sup>1</sup>**

**Фуртат И. Б.<sup>2</sup>,**

*(Астраханский государственный технический  
университет, Астрахань, Российский государственный  
университет нефти и газа имени И.М. Губкина, Москва)*

**Цыкунов А. М.<sup>3</sup>**

*(Астраханский государственный технический  
университет, Астрахань)*

*Рассматривается задача робастного управления линейными нестационарными объектами по выходу в условиях действия внешних и внутренних неконтролируемых возмущений и отсутствия информации об относительной степени самого объекта, которая в процессе функционирования системы может меняться. Задача решена на базе робастного алгоритма, позволяющего компенсировать данные неопределенности с заданной точностью и за конечное время. Приводятся результаты компьютерного моделирования.*

Ключевые слова: робастное управление, структурно неопределенный объект, вспомогательный контур, наблюдатель, компенсация возмущений.

---

<sup>1</sup> Исследование проводится в рамках Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг.

<sup>2</sup> Игорь Борисович Фуртат, кандидат технических наук  
(cainenash@mail.ru).

<sup>3</sup> Александр Михайлович Цыкунов, доктор технических наук,  
профессор (tsykinov\_al@mail.ru).

## 1. Введение

Проблема адаптивного и робастного управления по выходу в условиях внешних и внутренних неопределенностей, а также при предположении о точном знании относительной степени объекта – одна из основных в современной теории управления. К наиболее распространенным методам адаптивного управления можно отнести: метод расширенной ошибки [7, 17], алгоритмы адаптации высокого порядка [7, 15, 18] и итеративные процедуры синтеза [7]. Наиболее распространенные методы робастного управления основаны на использовании регуляторов, обеспечивающих определенный запас устойчивости замкнутой системы [12], различные виды наблюдателей [1–4, 7, 9–11, 13, 14, 19] и т.д. Одним из эффективных способов управления неопределенными объектами является компенсация возмущений.

Проблеме компенсации неконтролируемых возмущений посвящен ряд работ [1–3, 6, 9–11, 13, 19], в которых рассмотрены различные схемы построения систем управления. Так, в [19] используется наблюдатель вектора состояния проблемно ориентируемой модели объекта управления. Задача компенсации постоянного внешнего возмущения в ней решена с использованием процедуры обратного обхода интегратора [19]. В [1, 2, 10, 11] используется метод внутренней модели. Предложен синтез наблюдателей внешних детерминированных возмущений, что позволяет в системе управления компенсировать неконтролируемые воздействия. В [3] предложено развитие результатов [1, 2] для управления нелинейными нестационарными объектами по выходу, подверженными влиянию внешнего неизвестного ограниченного возмущения. Полученный регулятор имеет динамический порядок, равный  $g-1$ , где  $g$  – относительная степень объекта управления. В [6] для решения поставленной задачи в модель объекта управления вводится новый сигнал управления, преобразующий объект к уравнению первого порядка с известным коэффициентом усиления. Возмущениями здесь являются неизвестные параметры объекта и внешние сигналы. С помощью наблюдателя производится оценка этих возмущений и их производных. Затем на базе оценочных функ-



ций формируется закон управления. Работа [12] посвящена созданию теории робастной устойчивости систем в зависимости от вида возмущений. На базе предложенных результатов разрабатываются робастные системы управления неопределенными объектами на основе регуляторов низких порядков. В [5] компенсация параметрических и внешних (сигнальных) возмущений, названных неэкстенсивными, основана на принципе инвариантности систем по выходу, или по ошибке, к данным воздействиям на базе метода вложения систем. Данный подход разработан для линейных объектов на основе теории матриц и касается получения класса регуляторов, обеспечивающих нечувствительность к неэкстенсивным возмущениям, исходя из следующих понятий: делители нуля (ядра) и делители единицы матрицы, эквивалентные преобразования матриц, методы канонизации, решение матричных уравнений и т.п. Наиболее близкой к предлагаемой работе по принципу построения является [13], где для компенсации неизвестного параметрического и внешнего возмущения предлагается использовать вспомогательный контур.

Все вышеперечисленные задачи решены при условии о точном знании относительной степени объекта управления и его порядка характеристического полинома. Однако на практике это зачастую трудоемкая, а иногда и невозможная задача. Работ по адаптивному и робастному управлению при отсутствии информации об относительной степени объекта мало [16, 20], по сравнению со всем классом задач этого направления. При этом полученные системы управления имеют сложную реализацию из-за высокого динамического порядка замкнутой системы. Так, в [16] задача управления при отсутствии информации об относительной постоянной степени и порядке характеристического многочлена решена с помощью особой параметризации уравнения объекта управления. Для получения передаточной функции замкнутой системы, как у эталонной модели, закон управления формировался в виде суммы классической схемы адаптивного управления [7] и некоторой передаточной функции, входным сигналом которой является задающее воздействие. Дальнейший синтез системы управления осуществлялся с применением особой схемы расширения с нормированными алгоритмами

адаптации. В работе [20] проблема управления объектами с неизвестной относительной степенью решена с использованием специального регулятора, коэффициенты передаточной функции которого являются произведением постоянных коэффициентов и настраиваемых функций. Формирование постоянных коэффициентов регулятора основано на определенной разности членов из последовательности Фибоначчи, а функции должны быть монотонно возрастающими с достаточно большим верхним пределом.

Стоит отметить, что в статьях [16, 20] при разработке систем управления порядка числителя и знаменателя передаточной функции объекта управления предполагались неизвестными и постоянными. Но, как отмечено в [5], в реальных ситуациях существуют возмущения, способные влиять не только на параметры объекта управления, но и на его динамический порядок. К таким возмущениям, как правило, относятся параметрические нестационарные неопределенности объекта. Именно в условиях действия таких возмущений решается задача управления в данной работе.

Статья построена следующим образом. Во втором разделе сформулированы постановка задачи и предположения, касающиеся объекта управления и ограничений на построение замкнутой системы. Рассматриваются линейные объекты, у которых порядок характеристического многочлена и относительная степень могут изменяться в процессе функционирования. Ставится цель управления – слежение выхода объекта управления за эталонным сигналом с точностью  $d$  за конечное время  $T$ . В третьем разделе предлагается алгоритм робастного управления такими объектами. Четвертый раздел посвящен обобщению предложенного подхода на линейные нестационарные объекты с запаздыванием по состоянию. В пятом разделе рассмотрены примеры численного моделирования предложенной системы управления.

## 2. Постановка задачи

Рассмотрим нестационарный линейный объект управления, динамика которого задана дифференциальным уравнением в операторной форме

$$(1) \quad Q(p, t)y(t) = R(p, t)u(t) + f(t), \quad p^i y(0) = y_i, \quad i = 0, \dots, n-1,$$

где  $y(t) \in R$ ,  $u(t) \in R$ ,  $u(t) \in R$  – регулирующее, управляющее и возмущающее воздействия соответственно;  $Q(p, t) = q_n(t)p^n + \dots + q_0(t)$ ,  $R(p, t) = r_m(t)p^m + \dots + r_0(t)$  – линейные нестационарные дифференциальные операторы;  $p = d/dt$  – оператор дифференцирования;  $y_i$  – неизвестные начальные условия.

Качество переходных процессов определим эталонной моделью, заданной уравнением

$$(2) \quad Q_0(p)y_m(t) = k_m r(t).$$

Здесь  $y_m(t) \in R$  – выход эталонной модели;  $r(t) \in R$  – задающее воздействие;  $k_m > 0$ ;  $Q_0(p)$  – известный линейный нормированный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами.

Целью управления является синтез замкнутой системы, обеспечивающей выполнение целевого условия

$$(3) \quad |e(t)| = |y(t) - y_m(t)| < d,$$

начиная с некоторого момента времени  $T$ , и ограниченность всех сигналов в замкнутой системе, где  $d > 0$  – достаточно малое число.

### Предположения А.

1. Полиномы  $Q(p, t)$ ,  $R(p, t)$ , их порядки  $\deg Q(p, t) \leq n$ ,  $\deg R(p, t) \leq m$  и относительная степень  $g = n - m \geq 1$  – неизвестны. Известны: а) множество  $\Xi$  возможных значений коэффициентов полиномов  $Q(p, t)$  и  $R(p, t)$ ; б) неизвестные коэффициенты операторов  $Q(p, t)$  и  $R(p, t)$  – ограниченные функции; в)  $g_u \geq g$  – верхняя граница относительной степени  $g$ ; г) коэффициенты при старших степенях операторов  $Q(p, t)$  и  $R(p, t)$  – неотрицательные функции.

2.  $\deg Q_0(p) = g_u$ .

3. Оператор  $R(p, t)$  устойчив и для любого фиксированного момента времени  $t$  полином  $R(p, t)$  гурвицев, где  $I$  – комплексная переменная в преобразовании Лапласа. Полином  $Q_0(I)$  гурвицев.

4. Задающее  $r(t)$  и возмущающее  $f(t)$  воздействия – ограниченные функции.

5. В системе управления не доступны измерению производные сигналов  $y(t)$ ,  $u(t)$  и  $r(t)$ .

Условия предположения А.1 указывают на то, что порядки  $Q(p, t)$ ,  $R(p, t)$  неизвестны и могут меняться, когда коэффициенты при старших степенях принимают значения, равные нулю. Предположение А.1.г необходимо для того, чтобы при разработке замкнутой системы управления не учитывать неопределенности знака в обратной связи по управлению. Рассмотрим примеры вышесказанного. Если в (1)  $q_n(t) = 0$  и  $q_{n-1}(t) \neq 0$ , то  $\deg Q(p, t) = n - 1$  и  $q_{n-1}(t) > 0$ ,  $r_m(t) > 0$ ; если  $q_n(t) = q_{n-1}(t) = 0$  и  $q_{n-2}(t) \neq 0$ , то  $\deg Q(p, t) = n - 2$ ,  $q_{n-2}(t) > 0$ ,  $r_m(t) > 0$  и т.д. Аналогично и для оператора  $R(p, t)$ : если  $r_m(t) = 0$  и  $r_{m-1}(t) \neq 0$ , то  $\deg R(p, t) = m - 1$  и  $q_n(t) > 0$ ,  $r_{m-1}(t) > 0$ ; если  $r_m(t) = r_{m-1}(t) = 0$  и  $r_{m-2}(t) \neq 0$ , то  $\deg R(p, t) = m - 2$ ,  $q_n(t) > 0$ ,  $r_{m-2}(t) > 0$  и т.д. А также возможно одновременное изменение порядков операторов  $Q(p, t)$  и  $R(p, t)$ .

Остальные условия предположений соответствуют классическим постановкам задач в теории управления [1–20, 22, 23] и связаны с технической реализуемостью замкнутой системы управления.

### 3. Метод решения

Из предположения А.1 следует, что динамический порядок объекта управления (1) неизвестен и подвержен изменению за счет действия на него нестационарных параметрических и внешних возмущений, поэтому параметризации [1–15, 17–19], разработанные для объектов с известными и постоянными порядками, здесь применять нельзя. В силу того, что  $R(p, t)$  и  $Q(p, t)$  – линейные дифференциальные операторы, для получения уравнения, удобного для дальнейшего синтеза замкнутой системы управления, представим эти операторы в виде сумм:

$$(4) \quad R(p, t) = R_m(p) + \Delta R(p, t), \quad Q(p, t) = Q_m(p) + \Delta Q(p, t).$$

Здесь  $R_m(p)$  и  $Q_m(p)$  – линейные стационарные дифференциальные операторы порядков  $\bar{n} - g_u$  и  $\bar{n}$  соответственно, выбранные таким образом, что  $Q_m(p) = R_m(p)Q_0(p)$ ,  $\bar{n} \geq n$  – верхняя граница  $n$ ,  $\Delta R(p, t)$  и  $\Delta Q(p, t)$  – нестационарные линейные дифференциальные операторы. Относительно первого выражения в (4) можно сказать, что всегда существует такой вектор  $c_{01}(t) \in R^{\bar{n}-1}$ , составленный из коэффициентов оператора  $R(p, t) - R_m(p)$ , что выполнено первое выражение (4), где  $\Delta R(p, t) = c_{01}^T(t)[1, p, \dots, p^{\bar{n}-2}]^T$ . Если  $m < \bar{n} - g_u$ , то  $\deg \Delta R(p, t) = \bar{n} - g_u$ ; если  $m = \bar{n} - g_u$ , то  $\deg \Delta R(p, t) \leq \bar{n} - g_u$ ; если  $m > \bar{n} - g_u$ , то  $\deg \Delta R(p, t) = m$ . Порядок  $\Delta Q(p, t)$  равен  $\bar{n}$ .

С учетом разложения (4), преобразуем уравнение (1) к виду

$$y(t) = \frac{1}{Q_0(p)} \left( u(t) + \frac{1}{R_m(p)} [\Delta R(p, t)u(t)] - \frac{1}{R_m(p)} [\Delta Q(p, t)y(t)] + \frac{1}{R_m(p)} f(t) \right)$$

Видно, что применение разложения (4) позволило получить новое представление объекта управления с постоянной, известной передаточной функцией  $1/Q_0(p)$ , как у эталонной модели (2), в условиях отсутствия информации о динамическом порядке (1) и при неконтролируемых возмущениях, действующих на объект.

Составим уравнение ошибки слежения  $e(t) = y(t) - y_m(t)$ , принимая во внимание последнее уравнение и эталонную модель (2):

$$(5) \quad e(t) = \frac{1}{Q_0(p)} (u(t) + j(t)),$$

где

$$j(t) = \frac{1}{R_m(p)} [\Delta R(p, t)u(t)] - \frac{1}{R_m(p)} [\Delta Q(p, t)y(t)] + \frac{1}{R_m(p)} f(t) - k_m r(t)$$

– функция, содержащая в себе параметрические, функциональные и структурные возмущения.

Введем закон управления

$$(6) \quad u(t) = aT(p)v(t),$$

где  $a > 0$ ;  $T(p)$  – линейный дифференциальный оператор степени  $g_u$ , такой, что в преобразовании Лапласа  $T(I)$  – гурвицев;  $v(t)$  – вспомогательное управляющее воздействие. Тогда уравнение ошибки слежения (5) преобразуется к виду

$$(7) \quad e(t) = \frac{T(p)}{Q_0(p)} (av(t) + T^{-1}(p)j(t)).$$

Рассмотрим вспомогательный контур

$$(8) \quad \bar{e}(t) = b \frac{T(p)}{Q_0(p)} v(t).$$

Здесь  $b > 0$ . С учетом (7) и (8), составим уравнение рассогласования  $z(t) = e(t) - \bar{e}(t)$

$$(9) \quad z(t) = \frac{T(p)}{Q_0(p)} j_1(t),$$

где  $\varphi_1(t) = (a - b)v(t) + T^{-1}(p)\varphi(t)$ .

Зададим закон вспомогательного управляющего воздействия  $v(t)$  в виде

$$(10) \quad v(t) = -\frac{1}{b} \frac{Q_0(p)}{T(p)} z(t) = -b^{-1} j_1(t).$$

Разрешив уравнение  $v(t) = -b^{-1} j_1(t)$  относительно переменной  $v(t)$ , получим  $v(t) = -a^{-1} T^{-1}(p) j(t)$ . Легко видеть, что, подставив последний результат в (7), имеем уравнение замкнутой системы по ошибке слежения:  $Q_0(p)e(t) = 0$ . Отсюда следует, что  $p^i e(t) = 0$ ,  $i = 0, \dots, g_u$ , – ограниченные функции. Однако для работоспособности системы управления необходимо показать, что и остальные сигналы в ней ограничены. Для этого рассмотрим функцию  $j_1(t)$ :

$$(11) \quad \begin{aligned} j_1(t) = (a - b)v(t) + \frac{1}{T(p)} \left( \frac{1}{R_m(p)} [\Delta R(p, t)u(t)] - \right. \\ \left. - \frac{1}{R_m(p)} [\Delta Q(p, t)y(t)] + \frac{1}{R_m(p)} f(t) - k_m r(t) \right) \end{aligned}$$

В силу предположений А.3 и А.4, а также о гурвицевости полинома  $T(I)$  и ограниченности функций  $e(t)$  и  $y_m(t)$ , следует ограниченность функций  $\frac{1}{R_m(p)T(p)} f(t)$ ,  $\frac{k_m}{T(p)} r(t)$  и  $\frac{1}{R_m(p)T(p)} [\Delta Q(p, t)y(t)]$ . Учитывая второе равенство в (10), разрешим уравнение (11) относительно  $v(t)$ :

$$v(t) = \frac{1}{aT(p)} \left( \frac{\Delta Q(p, t)}{R(p, t)} y(t) - \frac{1}{R(p, t)} f(t) + R_m(p) \left[ \frac{k_m}{R(p, t)} r(t) \right] \right).$$

Тогда, с учетом вышесказанного и устойчивости полинома  $R(p, t)$  (предположение А.3), следует ограниченность сигналов  $v(t)$  и  $u(t)$ , а вместе с ними и функции  $j_1(t)$ .

Однако из постановки задачи (предположение А.5) закон управления (6) реализовать невозможно. Поэтому сформируем сигнал  $u(t)$  как

$$(12) \quad u(t) = aT(p)\bar{v}(t).$$

Здесь  $\bar{v}(t)$  – оценка сигнала  $v(t)$ , формирование которой будет описано ниже. Перепишем уравнение ошибки слежения (7), с учетом (10) и (12):

$$(13) \quad Q_0(p)e(t) = aT(p)\bar{\Delta}(t),$$

где  $\bar{\Delta}(t) = \bar{v}(t) - v(t)$ .

Для реализации закона управления (12) необходимо измерение  $g_u$ -оценок производных функции  $\bar{v}(t)$ . Воспользуемся схемой, предложенной в [14]:

$$(14) \quad \dot{x}(t) = G_0 x(t) + D_0(\bar{v}(t) - v(t)), \quad \bar{v}(t) = Lx(t).$$

В уравнениях (14)  $x(t) \in R^{g_u}$ ,  $G_0 = \begin{bmatrix} 0 & I^{g_u-1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,

$I_{g_u-1} \in R^{(g_u-1) \times (g_u-1)}$  – единичная матрица,

$$D_0 = - \left[ \frac{d_1}{m}, \frac{d_2}{m^2}, \dots, \frac{d_{g_u}}{m^{g_u}} \right]^T, \text{ причем } d_1, d_2, \dots, d_{g_u} \text{ выбираются из}$$

условия гурвицевости матрицы  $G = G_0 - DL$ , где  $D = [d_1, d_2, \dots, d_{g_u}]^T$ ,  $\mu > 0$  – достаточно малая величина;  $L = [1, 0, \dots, 0]$ . Здесь и далее матрица  $L$  имеет размерность, соответствующую размерности рассматриваемой в тексте системе дифференциальных уравнений. Например, в (14)  $L \in R^{1 \times g_u}$ . Тогда закон управления (12) содержит переменные наблюдателя (14), а значит, при условиях предположения А.5, уравнение (12) технически реализуемо.

Введем в рассмотрение вектор отклонений  $\bar{h}(t) = \Gamma^{-1}(x(t) - \theta(t))$ , где  $\Gamma = \text{diag}\{m^{g_u-1}, m^{g_u-2}, \dots, m, 1\}$ ,  $q(t) = [v(t), \dot{v}(t), \dots, v^{(g_u)}(t)]^T$ . Продифференцировав  $\bar{h}(t)$  по времени с учетом уравнения (14), получим

$$\dot{\bar{h}}(t) = m^{-1}G\bar{h}(t) + \bar{b}v^{(g_u+1)}(t), \quad \bar{\Delta}(t) = m^{g_u-1}L\bar{h}(t),$$

где  $\bar{b} = [m^{1-g_u}, 0, \dots, 0]^T$ . Преобразуем предпоследнее уравнение в эквивалентное относительно выхода  $\bar{\Delta}(t)$ :

$$(15) \quad \dot{h}(t) = m^{-1}Gh(t) + b\dot{v}(t), \quad \bar{\Delta}(t) = m^{g_u-1}Lh(t).$$

Здесь  $h_i(t) = \bar{h}_i(t) - m^{1+i-g_u}v^{(i-1)}(t)$ ,  $i = 2, \dots, g_u$ ,  $h_1(t) = \bar{h}_1(t)$ ,  $b = [1, 0, \dots, 0]^T$ . Последние два уравнения эквивалентны относительно переменных  $h_1(t) = \bar{h}_1(t)$  ввиду того, что являются различными векторно-матричными формами записи одного уравнения

$$\left( p^{g_u} + \frac{d_1}{m} p^{g_u-1} + \dots + \frac{d_{g_u}}{m^{g_u}} \right) \bar{h}_1(t) = p^{g_u} v(t).$$

Тогда, принимая во внимание уравнения (8), (10), (12), (14) и (15), выпишем уравнения замкнутой системы управления



$$\begin{aligned}
 \bar{e}(t) &= -z(t), \\
 u(t) &= a\Gamma(p)\bar{v}(t), \\
 (16) \quad \dot{h}(t) &= m^{-1}Gh(t) + b\dot{v}(t), \quad \bar{\Delta}(t) = m^{g_u-1}Lh(t), \\
 \dot{e}(t) &= A_m e(t) + am^{g_u-1}b_R g\Delta(t), \quad e(t) = Le(t).
 \end{aligned}$$

где  $\varepsilon(t) \in R^{g_u}$ ;  $A_m \in R^{g_u \times g_u}$  – матрица в форме Фробениуса с характеристическим многочленом  $Q_0(\lambda)$ ;  $b_R^T = [0, \dots, 0, 1] \in R^{g_u}$ ;

$\Delta(t) = [h_1(t), \dot{h}_1(t), \dots, h_1^{(g_u)}(t)]^T$ ;  $g \in R^{1 \times (g_u+1)}$  – матрица, составленная из коэффициентов полинома  $T(\lambda)$ . Последнее уравнение в (16) является векторно-матричной формой записи уравнения (13), полученной при подстановке в (13) результатов (15).

*Утверждение 1.* Пусть выполнены условия предположений А. Тогда для любых  $Q(p, t)$  и  $R(p, t)$  из множества  $\Xi$  существуют числа  $T > 0$  и  $m_0 > 0$  такие, что при  $m \leq m_0$  система (16) диссипативна и выполнено целевое условие (3) при  $t \geq T$ .

Доказательство утверждения 1 приведено в Приложении.

Стоит заметить, что с учетом (10) закон управления  $u(t)$  можно сформировать как  $u(t) = -\alpha/\beta Q_0(p)z(t)$ . При выполнении предположения А.5 функция  $u(t)$  выбирается в виде  $u(t) = -\alpha/\beta Q_0(p)\bar{z}(t)$ , где  $\bar{z}(t)$  – оценка сигнала  $z(t)$ , поданного на вход фильтра (14). Дальнейшие рассуждения и результаты аналогичны проделанным выше.

#### 4. Обобщение на системы с запаздыванием по состоянию

Рассмотрим объект управления, динамические процессы в котором описываются дифференциальным уравнением с отклоняющимся аргументом:

$$(17) \quad Q(p, t)y(t) + N(p, t)y(t - t(t)) = R(p, t)u(t),$$

где  $u(t)$ ,  $y(t)$ ,  $Q(p, t)$  и  $R(p, t)$  – такие же, как в (1),  $N(p, t) = \tilde{n}_{\tilde{n}}(t)p^{\tilde{n}} + \tilde{n}_{\tilde{n}-1}(t)p^{\tilde{n}-1} + \dots + \tilde{n}_0(t)$  – дифференциальный оператор с неизвестными коэффициентами, являющимися ограниченными функциями,  $\tilde{n} \leq n-1$ ,  $t(t) > 0$  – неизвестное время

запаздывания, удовлетворяющее условию  $dt(t)/dt < 1$ . Причем в процессе функционирования системы при любом порядке оператора  $Q(p, t)$  порядок  $N(p, t)$  всегда должен быть хотя бы на единицу меньше  $\deg Q(p, t)$ . Эталонная модель задается уравнением (2), цель управления – неравенством (3).

Так как порядки операторов в (17) неизвестны и переменны из-за нестационарности их коэффициентов, то, как и в предыдущем пункте, возникает задача о виде представления уравнения (17), удобного для дальнейшего синтеза замкнутой системы управления. Для решения этой проблемы воспользуемся разложением (4) и преобразуем уравнение объекта (17) к форме

$$(18) \quad y(t) = \frac{1}{Q_0(p)} (u(t) + j(t) - u(t) + j(t) - \frac{1}{R_m(p)} [N(p, t)y(t - t(t))] + k_m r(t))$$

Сформируем ошибку слежения  $e(t) = y(t) - y_m(t)$ , принимая во внимания (2) и (18):

$$(19) \quad e(t) = \frac{1}{Q_0(p)} \left( u(t) + j(t) - \frac{1}{R_m(p)} [N(p, t)y(t - t(t))] \right)$$

Далее, следуя схеме построения замкнутой системы управления, как в предыдущем разделе, введем закон управления (6), вспомогательный контур (8) и составим ошибку рассогласования  $\zeta(t) = e(t) - \bar{e}(t)$ :

$$(20) \quad z(t) = \frac{T(p)}{Q_0(p)} j_2(t),$$

где  $\varphi_2(t) = (\alpha - \beta)v(t) + T^{-1}(p)(\varphi(t) - 1/R_m(p)[N(p, t)y(t - \tau(t))])$ .  
Зададим функцию  $v(t)$  в виде

$$(21) \quad v(t) = -\frac{1}{b} \frac{Q_0(p)}{T(p)} z(t) = -b^{-1} j_2(t).$$

Дальнейшие рассуждения аналогичны предыдущему пункту. Разрешив уравнение (21) относительно  $v(t)$  и подставив его в (19), получим уравнение замкнутой системы управления по ошибке слежения:  $Q_0(p)e(t) = 0$ . Причем доказательство ограниченности функции  $\varphi_2(t)$  совпадает с доказательством ограничен-

ности сигнала  $\varphi_1(t)$ . Однако в силу предположения А.5 использование закона управления (6) недопустимо. Поэтому зададим  $u(t)$  в виде (12), и перепишем уравнение ошибки слежения (19) как

$$(22) \quad e(t) = a \frac{T(p)}{Q_0(p)} \bar{\Delta}(t).$$

Реализацию  $g_u$ -производных сигнала  $\bar{v}(t)$  в законе управления (12) осуществим с помощью наблюдателя (14). Тогда результат (15) выполнен и здесь. Выпишем уравнения, входящие в состав замкнутой системы управления:

$$(23) \quad \begin{aligned} \bar{e}(t) &= -z(t), \\ u(t) &= aT(p)\bar{v}(t), \\ \dot{h}(t) &= m^{-1}Gh(t) + b\dot{v}(t), \quad \bar{\Delta}(t) = m^{g_u-1}Lh(t), \\ \dot{e}(t) &= A_m e(t) + am^{g_u-1}b_R g \Delta(t), \quad e(t) = Le(t). \end{aligned}$$

которые имеют такой же вид, как (16), где структуры векторов  $\varepsilon(t) \in R^{g_u \times 1}$ ,  $b_R$ ,  $\Delta(t)$  и  $g$  – как и в (16). Последнее уравнение в (23) является векторно-матричной формой записи уравнения (22), полученной при подстановке в (22) результатов (15).

*У т в е р ж д е н и е 2.* Пусть выполнены условия предположений А и дополнительные условия, наложенные на класс объектов (17). Тогда для любых  $Q(p, t)$ ,  $R(p, t)$  и  $N(p, t)$  из множества  $\Xi$  существуют числа  $T > 0$  и  $\mu_0 > 0$  такие, что при  $m \leq m_0$  система (23) диссипативна и выполнено целевое условие (3) при  $t \geq T$ .

Доказательство утверждения 2 аналогично доказательству утверждения 1, поэтому здесь не приводится.

## 5. Примеры

1. Рассмотрим линейный объект управления вида (1):

$$(24) \quad \begin{aligned} (q_4(t)p^4 + q_3(t)p^3 + q_2(t)p^2 + q_1(t)p + q_0(t))y(t) = \\ = (r_1(t)p + r_0(t))u(t) + f(t) \end{aligned}$$

Если коэффициенты при старших степенях  $q_4(t) \neq 0$  и  $r_1(t) \neq 0$ , то  $\deg Q(p, t) = n = 4$ ,  $\deg R(p, t) = m = 1$ , а значит  $g = 3$ .

Ниже рассмотрен пример, когда под действием нестационарных параметрических возмущений меняются параметры объекта и, как следствие, его динамический порядок (т.е. подвержены изменению  $n$ ,  $m$  и  $g$ ).

Пусть  $g_u = 4$  – верхняя оценка относительной степени объекта. Тогда  $\deg Q_0(p) = 4$ . Уравнение эталонной модели зададим в виде

$$(p + 1)^4 y_m(t) = r(t),$$

где  $k_m = 1$ ,  $R_m(p) = 1$ ,  $Q_m(p) = (p + 1)^4$  и  $r(t) = 2 + \sin 0,5t + 2\sin t + P_1(t)$ ,  $P_1(t)$  – импульсы с амплитудой 2, периодом 4 с и длительностью 2 с.

Выберем  $b = 50$  и  $T(p) = p^4 + 100p^3 + 200p^2 + p + 0,01$ . Учтывая (8) и (10), зададим уравнения вспомогательного управляющего воздействия и вспомогательного контура в форме

$$v(t) = -0,02 \frac{(p + 1)^4}{0,01p^4 + 2p^3 + 200p^2 + 200p + 100} z(t),$$

$$\bar{e}(t) = 50 \frac{0,01p^4 + 2p^3 + 200p^2 + 200p + 100}{(p + 1)^4} v(t).$$

Здесь  $\zeta(t) = e(t) - \bar{e}(t)$  – уравнение рассогласования и  $e(t) = y(t) - y_m(t)$  – ошибка слежения.

Для реализации закона управления (12) сформируем наблюдатель (14):

$$\dot{x}_i(t) = x_{i+1}(t) - \frac{d_i}{m^i} (x_1(t) - v(t)), \quad i = 1, \dots, 3,$$

$$\dot{x}_4(t) = -\frac{d_4}{m^4} (x_1(t) - v(t)),$$

$$\bar{v}(t) = x_1(t),$$

где матрица  $D$  выбрана как  $D = [20, 150, 500, 625]^T$ ,  $m = 10^{-2}$ .

Задав  $a = 50$ , закон управления (12) определится в виде  $u(t) = 50[0,01\bar{v}^{(4)}(t) + 2\bar{v}^{(3)}(t) + 200\bar{v}^{(2)}(t) + 200\bar{v}^{(1)}(t) + 100\bar{v}(t)]$ .

На рис. 1 приведены примеры моделирования при нулевых начальных условиях и следующих параметрах в объекте (24):

$$q_4(t) = \bar{P}_1(t)(1,5 + \cos t), \quad q_3(t) = 4\bar{P}_2(t)(1,5 + \cos t / 3),$$

$$q_2(t) = 4(3 + \sin 2t), \quad q_1(t) = -3 \sin 2t + 4 \sin 2t,$$

$$q_0(t) = -5 \sin 2t + 7 \sin 0,5t, \quad r_1(t) = \bar{P}_3(t)(2 + \cos t),$$

$$r_0(t) = 2 + \sin 3t, \quad f(t) = 2 + \sin 1,5t + P_2(t),$$

где  $\bar{P}_1(t)$ ,  $\bar{P}_2(t)$ ,  $\bar{P}_3(t)$  и  $P_2(t)$  – прямоугольные импульсы с амплитудами 1, периодами 25 с, длительностями 5, 8, 20 и 5 с.

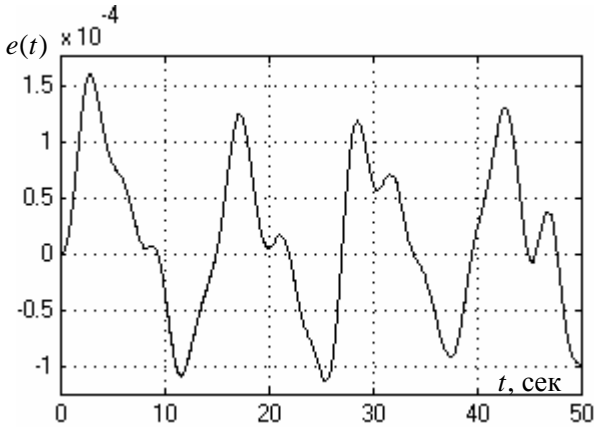


Рис. 1.

Для объекта в моменты времени:

- 1)  $t \in (0 + 25(k-1), 5 + 25(k-1))$ :  $q_4(t)r_1(t) > 0$ ,  
т.е.  $n = 4$  и  $g = 3$ ;
  - 2)  $t \in (5 + 25(k-1), 8 + 25(k-1))$ :  $q_4(t) = 0$  и  $q_3(t)r_1(t) > 0$ ,  
т.е.  $n = 3$  и  $g = 2$ ;
  - 3)  $t \in (8 + 25(k-1), 20 + 25(k-1))$ :  $q_4(t) = q_3(t) = 0$  и  
 $q_2(t)r_1(t) > 0$ , т.е.  $n = 2$  и  $g = 1$ ;
  - 4)  $t \in (20 + 25(k-1), 25 + 25(k-1))$ :  $q_4(t) = q_3(t) = r_1(t) = 0$  и  
 $q_2(t)r_0(t) > 0$ , т.е.  $n = 2$  и  $g = 2$ ,
- где  $k \in N$ ,  $N$  – множество натуральных чисел.

2. Пусть задан линейный нестационарный объект с запаздыванием по состоянию:

$$(q_4(t)p^4 + q_3(t)p^3 + q_2(t)p^2 + q_1(t)p + q_0(t))y(t) +$$

$$(25) + (\tilde{n}_2(t)p^2 + \tilde{n}_1(t)p + \tilde{n}_0(t))y(t-t) =$$

$$= (r_1(t)p + r_0(t))u(t) + f(t),$$

где, дополнительно к первому примеру, считаются еще неизвестными порядок и коэффициенты оператора  $N(p, t)$ , а также время запаздывания  $t(t)$ . Пусть верхняя оценка относительной степени объекта (25)  $g_u = 4$ . Структуру и параметры замкнутой системы управления зададим как в первом примере.

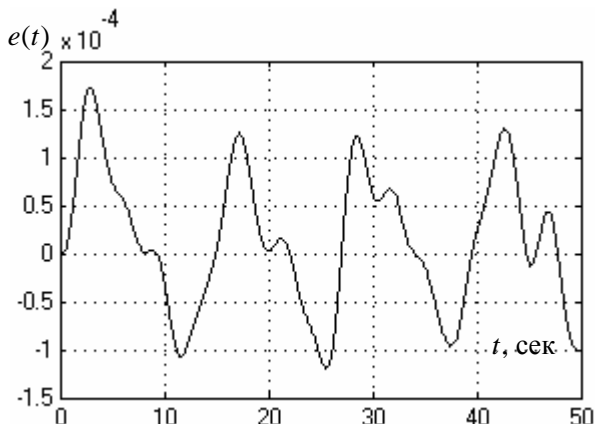


Рис. 2.

На рис. 2 приведены результаты моделирования при нулевых начальных условиях и следующих параметрах объекта (25): коэффициенты  $q_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , и  $r_j(t)$ ,  $j = 1, 2$ , – те же, что и в первом примере. Дополнительно  $\tilde{n}_1(t) = 4(1 + \cos t)$ ,  $\tilde{n}_2(t) = 1 + 2\sin 2t$  и  $t(t) = 1 + e^{-t}$ ;

Из результатов моделирования видно, что предложенный алгоритм компенсирует нестационарные параметрические и внешние возмущения, а также неопределенности порядков числителя и знаменателя объекта управления. При этом обеспечены хорошие показатели качества переходных процессов, т.е. возмущающие воздействия, влияющие как на параметры объекта управления, так и на его динамический порядок, мало сказыва-

ваются на качестве переходных процессов и устойчивости замкнутой системы. Численное моделирование показало, что качество переходных процессов зависит от точности оценок параметров объекта и в особенности от значений чисел  $m$  в (14),  $a$  и  $b$  в (8), (10), (12) и матрицы  $D$  в (14). Причем оценки, полученные в приложении относительно времени переходного процесса  $T$  по ошибке слежения и точности  $d$ , грубы по сравнению с результатами численных моделирований.

Отметим, что отсутствует аналитическое обоснование выбора параметров  $m$ ,  $a$  и  $b$ . Однако они легко подбираются на этапе проектирования при моделировании. На модели объекта (1) (модели (17)) выставляются минимально возможные коэффициенты операторов  $R(p, t)$ ,  $Q(p, t)$  ( $R(p, t)$ ,  $Q(p, t)$ ,  $N(p, t)$ ) и на вход подаются максимально возможные значения  $f(t)$  и  $r(t)$ . Подбираются числа  $m$ ,  $a$  и  $b$ , обеспечивающие заданную динамическую ошибку. Число  $m$  обычно колеблется в пределах от 0,005 до 0,05. При других значениях параметров и внешних воздействий из заданного класса неопределенности ошибка не будет превышать заданного значения.

## 6. Заключение

В статье предложен способ построения робастной системы управления, которая позволяет скомпенсировать неконтролируемые внешние воздействия и параметрическую нестационарную неопределенность, при условии, что порядки операторов  $Q(p, t)$ ,  $R(p, t)$  в (1) и  $N(p, t)$  в (17) неизвестны и могут изменяться в процессе функционирования. Компенсация осуществляется с точностью  $d$  за конечное время  $T$ . Причем величины  $d$  и  $T$  можно сделать достаточно малыми за счет соответствующего выбора параметров замкнутой системы: чисел  $m$  в (14),  $a$ ,  $b$  в (8), (10), (12) и матрицы  $D$  в (14).

Сравнивая предложенный робастный алгоритм с [1–14, 16–18] важно отметить, что для управления объектами вида (1) или (17) достаточно знания верхней оценок разности порядков операторов  $Q(p, t)$  и  $R(p, t)$ , а не их точных значений. При этом

данные порядки могут меняться в процессе функционирования системы.

Численные моделирования на ЭВМ показали, что качество переходных процессов несущественно зависит от порядков операторов в (1) и (17) и величины оценки  $g_u$ . Амплитуда управляющего воздействия зависит от параметров системы:  $m$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $D$  и в особенности от неизвестных начальных условий объекта управления. Так, чем больше разность между начальными условиями объекта управления и эталонной модели, тем больше амплитуда сигнала управления  $u(t)$  в начальный момент времени.

## Приложение

*Доказательство утверждения 1.* Перепишем последние четыре уравнения (16) в виде

$$(26) \quad \begin{aligned} m_1 \dot{h}(t) &= Gh(t) + m_2 b \dot{v}(t), \quad \bar{\Delta}(t) = m^{g_u-1} Lh(t), \\ \dot{e}(t) &= A_m e(t) + a m_2^{g_u-1} b_R g \Delta(t), \quad e(t) = Le(t), \end{aligned}$$

где  $m_1 = m_2 = m$ . Воспользуемся первой леммой в [4].

Выберем функцию Ляпунова для уравнений (26) в виде

$$(27) \quad V(t) = e^T(t) P e(t) + h^T(t) H h(t),$$

где матрицы  $P = P^T > 0$ ,  $H = H^T > 0$  определяются из решений уравнений  $A_m^T P + P A_m = -Q_1$ ,  $H^T G + G H = -Q_2$ ,  $Q_1 = Q_1^T > 0$ ,  $Q_2 = Q_2^T > 0$ . Возьмем от функции  $V(t)$  полную производную по времени вдоль траекторий (26) при  $\mu_2 = 0$ :

$$(28) \quad \dot{V}(t) = -e^T(t) Q_1 e(t) - h^T(t) Q_2 h(t).$$

Следовательно,  $\lim_{t \rightarrow \infty} |e(t)| = 0$  и  $\lim_{t \rightarrow \infty} |h(t)| = 0$ . Тогда, в силу условий второй леммы [18],  $|\Delta(t)| < k_1$ ,  $|\dot{v}(t)| < k_2$ .

Таким образом, при  $m_2 = 0$  получаем устойчивую систему уравнений (26). В соответствии с леммой [4], существует  $m_0 > 0$  такое, что при  $m \leq m_0$  область диссипативности системы (26) сохраняется. Пусть в (26)  $m_1 = m_2 = m_0$ . Возьмем снова функцию Ляпунова (27) и вычислим теперь полную производную от нее вдоль траекторий (26) с учетом результата (28):



$$\dot{V} = -e^T(t)Q_1e(t) + 2am_0^{g_u-1}e^T(t)Pb_Rg\Delta(t) - \\ -h^T(t)Q_2h(t) + 2m_0h^T(t)Hb\dot{v}(t).$$

Рассмотрим оценки:

$$2am_0^{g_u-1}e^T(t)Pb_Rg\Delta(t) \leq \\ \leq am_0^{g_u-1}e^T(t)Pb_Rgg^Tb_R^TPe(t) + am_0^{g_u-1}|\Delta(t)|^2 \leq \\ \leq am_0^{g_u-1}e^T(t)Pb_Rgg^Tb_R^TPe(t) + am_0^{g_u-1}k_1^2; \\ 2m_0h^T(t)Hb\dot{v}(t) \leq m_0h^T(t)Hbb^THh(t) + m_0\dot{v}^2(t) \leq \\ \leq m_0h^T(t)Hbb^THh(t) + m_0k_2^2.$$

Тогда, с учетом оценок, производная функции Ляпунова (28) примет вид

$$\dot{V} \leq -e^T(Q_1 - am_0^{g_u-1}Pb_Rgg^Tb_R^TP)e - h^T(Q_2 - m_0Hbb^TH)h + \\ + am_0^{g_u-1}k_1^2 + m_0k_2^2.$$

Очевидно, что существует число  $m_0 > 0$ , обеспечивающее выполнение матричных неравенств:

$$Q_1 - am_0^{g_u-1}Pb_Rgg^Tb_R^TP = Q_3 > 0 \text{ и } Q_2 - m_0Hbb^TH = Q_4 > 0.$$

В этом случае оценку производной функции Ляпунова можно записать как

$$\dot{V} \leq -cV + am_0^{g_u-1}k_1^2 + m_0k_2^2,$$

где  $\chi = \min\{\lambda_{\max}(Q_3)/\lambda_{\min}(P), \lambda_{\max}(Q_4)/\lambda_{\min}(H)\}$ . Решив последнее неравенство, получим

$$(29) V(t) \leq e^{-ct}V(0) + (1 - e^{-ct})(am_0^{g_u-1}k_1^2 + m_0k_2^2),$$

откуда следует, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(t) \leq am_0^{g_u-1}k_1^2 + m_0k_2^2.$$

Видно, что существует число  $m_0 > 0$ , обеспечивающее требуемую величину  $d$  в целевом условии (3). Приравняем правую часть (29) к  $d$ :

$$d \leq e^{-ct}V(0) + c^{-1}(1 - e^{-ct})(am_0^{g_u-1}k_1^2 + m_0k_2^2),$$

и рассмотрим верхнюю границу (29), заменив неравенство равенством, в момент времени  $t = T$ . Тогда

$$T = \frac{1}{c} \ln \frac{cV(0) - am_0^{g_u-1}k_1^2 - m_0k_2^2}{cd - am_0^{g_u-1}k_1^2 - m_0k_2^2}.$$

То есть по истечению времени  $t = T$  будет выполнено целевое условие (3) и все функции в замкнутой системе управления ограничены.

### Литература

1. БОБЦОВ А.А. *Алгоритм робастного управления линейными объектами по выходу с компенсацией неизвестного детерминированного возмущения* // Изв. РАН. Теория и системы управления. – 2003. – №2. – С. 93–97.
2. БОБЦОВ А.А. *Алгоритм робастного управления неопределенным объектом без измерения производных регулируемой переменной* // Автоматика и телемеханика. – 2003. – №8. – С. 82–96.
3. БОБЦОВ А.А., НАГОВИЦИНА А.Г. *Адаптивное управление по выходу линейными нестационарными объектами* // Автоматика и телемеханика. – 2006. – №12. – С. 163–174.
4. БРУСИН В.А. *Об одном классе сингулярно возмущенных адаптивных систем. 1* // Автоматика и телемеханика. – 1995. – №4. – С. 119–127.
5. БУКОВ В.Н. *Вложение систем. Аналитический подход к анализу и синтезу матричных систем.* – Калуга: Издательство научной литературы Н.Ф. Бочкаревой, 2006. – 720 с.
6. ВОРОНОВ К.В., НИКИФОРОВ В.О. *Динамический регулятор выходной переменной с компенсацией постоянных возмущений* // Автоматика и телемеханика. – 2003. – №2. – С. 11–21.
7. МИРОШНИК И.В., НИКИФОРОВ В.О., ФРАДКОВ А.Л. *Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами.* – СПб.: Наука, 2000. – 550 с.
8. НИКИФОРОВ В.О., ФРАДКОВ А.Л. *Схемы адаптивного управления с расширенной ошибкой* // Автоматика и телемеханика. – 1994. – №9. – С. 3–22.
9. НИКИФОРОВ В.О. *Нелинейная система управления с компенсацией внешних детерминированных возмущений* //

- Изв. РАН. Теория и системы управления. – 1997. – №4. – С. 69–73.
10. НИКИФОРОВ В.О. *Наблюдатели внешних детерминированных возмущений. 1. Объекты с известными параметрами* // Автоматика и телемеханика. – 2004. – №10. – С. 13–24.
  11. НИКИФОРОВ В.О. *Наблюдатели внешних детерминированных возмущений. 2. Объекты с известными параметрами* // Автоматика и телемеханика. – 2004. – №11. – С. 40–48.
  12. ПОЛЯК Б.Т., ЩЕРБАКОВ П.С. *Робастная устойчивость и управление*. – М.: Наука, 2002. – 303 с.
  13. ЦЫКУНОВ А.М. *Алгоритмы робастного управления с компенсацией ограниченных возмущений* // Автоматика и телемеханика. – 2007. – №7. – С. 103–115.
  14. ATASSI A.N., KHALIL H.K. *A separation principle for the stabilization of class of nonlinear systems* // IEEE Trans. Automat. Control. – 1999. – Vol. 44, №9. – P. 1672–1687.
  15. FEUER A., MORSE A.S. *Adaptive control of single input, single-output linear systems* // IEEE Trans. on Automat. Control. – 2000. – Vol. 45, №3. – P. 490–494.
  16. HOAGG J. B., DERNSTEIN D.S. *Direct adaptive command following and disturbance rejection for minimum phase systems with unknown relative degree* // Int. J. of Adaptive Control and Signal Processing. – 2007. – Vol. 21, №1. – P. 49–75.
  17. MONOPOLI R.V. *Model reference adaptive control with an augmented signal* // IEEE Trans. Automat. Control. – 1974. – Vol. 19, №5. – P. 474–484.
  18. MORSE A.S. *High-order parameter tuners for adaptive control on nonlinear system* // Isidori A., Tarn T.I. (eds). *Systems, Models and Feedback: Theory and Applications*. Birkhanser. – 1992. – P. 339–364.
  19. NIKIFOROV V.O. *Robust high-order tuner of simplified structure* // Automatica. – 1999. – Vol. 35, № 8. – P. 1409–1417.
  20. TAO G., IOANNOU P.A. *Model reference adaptive control for plants with unknown relative degree* // IEEE Trans. On Automatic Control. – 1993. – Vol. 38, №6. – P. 976–982.

## **ROBUST CONTROL OF TIME-VARYING PLANTS WITH UNKNOWN VARIABLE RELATIVE DEGREE**

**Igor Furtat**, Astrakhan State Technical University, Astrakhan, Gubkin Russian State University of Oil and Gas, Moscow, Cand.Sc. (cainenash@mail.ru).

**Alexander Tsykunov**, Astrakhan State Technical University, Astrakhan, Doctor of Science professor. (tsykunov\_al@mail.ru).

*Abstract: The problem is considered of robust output control of a linear time-varying plant under external and internal uncontrollable disturbances. The relative degree of the plant is unknown and can vary in the course of operation. The problem is solved on the basis of a robust algorithm, which allows compensating the uncertainties with the required accuracy in finite time. The results of computer simulation are provided.*

**Keywords:** robust control, plant with structural uncertainty, auxiliary plant, observer, disturbances compensation.

*Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии В. А. Уткиным*

УДК 62.50  
ББК Ж 30

## СТАБИЛИЗИРУЮЩЕЕ СЕТЕВОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМИ ДИСКРЕТНЫМИ СИСТЕМАМИ В УСЛОВИЯХ ПОТЕРИ ПАКЕТОВ ДАННЫХ<sup>1</sup>

Жучков Р. Н.<sup>2</sup>, Пакшин П. В.<sup>3</sup>

(Арзамасский политехнический институт (филиал)

Нижегородского государственного технического университета  
им. Р. Е. Алексеева)

*Рассматривается линейная система, в которой объект управления и регулятор обмениваются информацией через сетевой канал связи. Решается задача стабилизации в условиях возможных потерь пакетов данных, которые моделируются марковской цепью. Рассматриваются случаи обратной связи по состоянию и по измеряемому выходу. В обоих случаях эффективно используется техника линейных матричных неравенств.*

Ключевые слова: линейные дискретные системы, сетевое стабилизирующее управление, потери пакетов, марковская модель, линейные матричные неравенства.

### **Введение**

В классической теории управления предполагается, что информация об измеряемых координатах объекта управления может быть мгновенно получена и мгновенно использована для формирования управляющего воздействия. Однако в последние годы получили широкое распространение системы, в которых способ обмена данными играет существенную роль. К таким относятся

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, гранты 10-08-00843\_a, 11-01-97025-p\_поволжье\_a.

<sup>2</sup> Роман Николаевич Жучков, аспирант, (roman\_jkv@mail.ru)

<sup>3</sup> Павел Владимирович Пакшин, доктор физико-математических наук, профессор, (pakshinpv@gmail.com).

системы управления удаленными объектами по беспроводным каналам с ограниченной пропускной способностью, системы управления движением в транспортных сетях и т. д. [8]

В связи с этим в настоящее время стала активно развиваться теория сетевого управления, посвященная исследованию систем управления, в которых объект управления и регулятор обмениваются информацией через сетевой канал связи с ограниченной пропускной способностью.

Необходимость учета информационных ограничений при использовании сетевых каналов вносит существенные особенности в решение задачи синтеза стабилизирующего управления с обратной связью [1, 8]. В самом деле, если скорость передачи данных по каналу недостаточна, задача управления при использовании этого канала неразрешима в принципе. Таким образом, возникает глобальная задача определения границ скорости передачи данных в информационных каналах систем сетевого управления. После того как эта задача будет решена, необходимо учесть эффекты запаздывания, квантования и потери пакетов в процессе передачи квантованных сигналов. Перечисленные эффекты могут привести к существенному ухудшению качества переходных процессов и даже к неустойчивости [9].

В данной работе рассматривается дискретная система с управлением через сетевой информационный канал с учетом только одного фактора – потери пакетов данных. Процесс потери пакетов моделируется марковской цепью. Ставится задача синтеза управления с обратной связью по выходу, обеспечивающую экспоненциальную устойчивость системы в среднем квадратическом.

При решении задач синтеза с учетом этого фактора в настоящее время используются различные подходы: в работе [6] используются идеи выпуклого анализа для решения билинейного матричного неравенства, из которого находится стабилизирующее управление; в [7] используются идеи оптимизации; в [5] задача синтеза управления с обратной связью по вектору состояния сводится к решению линейного матричного неравенства. Суще-

ствующие результаты по синтезу управления с обратной связью по выходу не доведены до эффективных алгоритмов. В данной статье предлагается относительно простая идея искусственного разделения задач оценивания и управления для систем случайной структуры, которая сводит задачу синтеза стабилизирующего регулятора к решению линейных матричных неравенств.

## **1. Линейные системы с доступным измерению вектором состояния**

Рассмотрим линейную дискретную систему, описываемую разностным уравнением:

$$(1) \quad x_{k+1} = Ax_k + Bu_k,$$

где  $x_k$  –  $n$ -мерный вектор состояния;  $u_k$  –  $m$ -мерный вектор управления. Закон управления формируется в виде обратной связи по состоянию

$$(2) \quad u_k = -Gx_k$$

и обмен информацией между объектом (1) и регулятором (2) осуществляется через сетевой канал связи, в котором может происходить потеря пакета данных (рис. 1). Предполагается, что потерянный пакет не может позднее придти ни на сторону объекта ни на сторону регулятора, т.е. происходит абсолютная потеря. Задача состоит в нахождении такой матрицы усиления  $G$ , при которой управление в (2) обеспечивает устойчивость замкнутой системы при указанных условиях потери пакетов данных. При сделанных предположениях в каждый дискретный момент времени рассматриваемая система может находиться в двух структурных состояниях. В первом обмен информацией между объектом и регулятором осуществляется нормально, во втором пакет теряется либо при передаче на сторону объекта, либо при передаче на сторону регулятора. Будем считать, что в случае потери пакета управление на объект не подается и что переход из одного структурного состояния в другое описывается марковской цепью с известной стохастической матрицей. Таким образом, модель системы с учетом возможных потерь пакетов можно описать



Рис. 1. Схема сетевой системы управления

следующими уравнениями

$$(3) \quad \begin{aligned} S_1 : \quad x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k, \\ S_2 : \quad x_{k+1} &= Ax_k. \end{aligned}$$

Структурные состояния  $S_1$  и  $S_2$  будем рассматривать как возможные состояния марковской цепи  $r_k$ ,  $k = 0, 1, \dots$  с вероятностями перехода  $p_{ij} = P[r_{k+1} = S_j \mid r_k = S_i]$ . Относительно простая стратегия, приводящая к модели (3) представляется вполне разумной при достаточной надежности канала связи, даже если разомкнутая система неустойчива.

Поскольку модель (3) является стохастической, необходимо соответствующим образом ввести понятие устойчивости. Достаточно сильным и адекватным рассматриваемой задаче является понятие экспоненциальной устойчивости в среднем квадратическом (ЭУСК) [3].

**Определение 1.** Система (3) называется экспоненциально устойчивой в среднем квадратичном, если существуют числа  $\Theta > 0$  и  $0 < \zeta < 1$  такие, что

$$M[\|x_k\|^2 \mid x_0 = x] \leq \Theta \|x\|^2 \zeta^k,$$

где  $M$  – оператор математического ожидания.

Необходимые и достаточные условия ЭУСК дает следующее утверждение [3].



**Теорема 1.** Для экспоненциальной устойчивости в среднем квадратическом системы (3) необходимо и достаточно, чтобы существовала квадратичная форма  $V(x, i) = x^T H_i x$ ,  $H_i = H_i^T > 0$ ,  $i = 1, 2$ , такая, что

$$M[V(x_{k+1}, r_{k+1} \mid x_k = x, r_k = i)] - V(x, i) < 0, \quad i = 1, 2.$$

Будем искать управление (2) из условия ЭУСК системы (3). Применяя теорему 1, получим, что матрица усиления должна удовлетворять следующей системе матричных неравенств:

$$(4) \quad (A - BG)^T (H_1 p_{11} + H_2 p_{12}) (A - BG) - H_1 < 0$$

$$(5) \quad A^T (H_1 p_{21} + H_2 p_{22}) A - H_2 < 0,$$

где  $H_1, H_2$  – неизвестные симметричные положительно определенные матрицы; матрица  $G$  – искомая матрица усиления обратной связи.

Неравенство (4) может быть сведено к линейному умножением справа и слева на  $X_1 = H_1^{-1}$  и заменой  $X_2 = H_2, Y = GX_1$ . Применяя теорему о дополнении Шура, получим следующую систему линейных матричных неравенств:

$$\begin{bmatrix} X_1 & \sqrt{p_{11}}\Gamma(X_1, Y)^T & \sqrt{p_{12}}\Gamma(X_1, Y)^T \\ \sqrt{p_{11}}\Gamma(X_1, Y) & X_1 & 0 \\ \sqrt{p_{12}}\Gamma(X_1, Y) & 0 & X_2 \end{bmatrix} > 0,$$

$$\begin{bmatrix} -X_2 & \sqrt{p_{21}}X_2 A^T & \sqrt{p_{22}}X_2 A^T \\ \sqrt{p_{21}}AX_2 & -X_1 & 0 \\ \sqrt{p_{22}}AX_2 & 0 & -X_2 \end{bmatrix} < 0,$$

где  $\Gamma(X_1, Y) = AX_1 - BY$ . Неизвестные матрицы в данной системе могут быть легко найдены средствами существующих пакетов решения линейных матричных неравенств [4].

## 2. Линейные системы с управлением по вектору измерений

В данном разделе рассмотрим случай, когда вместо вектора состояния напрямую измерению доступен вектор

$$(6) \quad y_k = Cx_k.$$

В этом случае для построения стабилизирующего управления будем использовать обратную связь по оценке вектора состояния на основании доступных измерений.

Оценку вектора состояния будем искать в следующем виде:

$$(7) \quad \hat{x}_{k+1} = A\hat{x}_k + Bu_k + K(y_k - C\hat{x}_k),$$

где  $K$  – неизвестная матрица. Стабилизирующее управление запишется как

$$(8) \quad u_k = -G\hat{x}_k.$$

В каждый момент времени замкнутая система может находиться в одном из следующих структурных состояний:

$$(9) \quad S1 : \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ \tilde{x}_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (A - BG) & -BG \\ 0 & (A - KC) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ \tilde{x}_k \end{bmatrix},$$

$$(10) \quad S2 : \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ \tilde{x}_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ \tilde{x}_k \end{bmatrix},$$

где  $\tilde{x}_k = x_k - \hat{x}_k$ .

Примем далее гипотезу о возможности разделения переменных  $x$  и  $\tilde{x}$  для того, чтобы получить отдельные соотношения для матриц усиления и наблюдателя. Эта гипотеза, справедливая для линейных систем постоянной структуры [2], в рассматриваемом случае нуждается в проверке. После нахождения матриц  $K$  и  $G$  необходимо подставить их в (9)–(10) и проверить устойчивость полученной системы. Такой подход представляется вполне обоснованным с точки зрения эффективности использования аппарата линейных матричных неравенств.

После разделения переменных в системе (9)–(10) получим

$$(11) \quad S1 : x_{k+1} = (A - BG)x_k,$$

$$(12) \quad S2 : x_{k+1} = Ax_k,$$

$$(13) \quad S1: \quad \tilde{x}_{k+1} = (A - KC)\tilde{x}_k,$$

$$(14) \quad S2: \quad \tilde{x}_{k+1} = \tilde{x}_k.$$

Как и в предыдущем случае воспользуемся результатом теоремы 1. В результате получим следующие матричные неравенства для нахождения неизвестных матриц  $G$  и  $K$ :

$$(15) \quad (A - BG)^T(H_1 p_{11} + H_2 p_{12})(A - BG) - H_1 < 0,$$

$$(16) \quad A^T(H_1 p_{21} + H_2 p_{22})A - H_2 < 0;$$

$$(17) \quad (A - KC)^T(\tilde{H}_1 p_{11} + \tilde{H}_2 p_{12})(A - KC) - \tilde{H}_1 < 0,$$

$$(18) \quad (\tilde{H}_1 p_{21} + \tilde{H}_2 p_{22}) - \tilde{H}_2 < 0.$$

Неравенство (15) умножим справа и слева на  $H_1^{-1}$ , а в неравенстве (17) заменим  $\tilde{H}_1$  на  $\tilde{H}_1 \tilde{H}_1^{-1} \tilde{H}_1$ . После таких преобразований неравенства (15) и (17) примут следующий вид:

$$(19) \quad (AX_1 - BY)^T X_1^{-1} p_{11} (AX_1 - BY) + (AX_1 - BY)^T X_2^{-1} p_{12} (AX_1 - BY) - X_1 < 0,$$

$$(20) \quad (\tilde{H}_1 A - Y_1 C)^T \tilde{H}_1^{-1} p_{11} (\tilde{H}_1 A - Y_1 C) + (\tilde{H}_2 A - Y_2 C)^T \tilde{H}_2^{-1} p_{12} (\tilde{H}_2 A - Y_2 C) - \tilde{H}_1 < 0,$$

где  $X_1 = H_1^{-1}$ ,  $X_2 = H_2^{-1}$ ,  $Y = X_1 G$ ,  $Y_1 = \tilde{H}_1 K$ ,  $Y_2 = \tilde{H}_2 K$ .

Воспользуемся теоремой о дополнении Шура [4], чтобы привести неравенства (19)–(20) к линейным. В результате получим:

$$(21) \quad \begin{bmatrix} X_1 & p_{11}^{\frac{1}{2}} \Gamma(X_1, Y_1)^T & p_{12}^{\frac{1}{2}} \Gamma(X_1, Y_1)^T \\ p_{11}^{\frac{1}{2}} \Gamma(X_1, Y_1) & X_1 & 0 \\ p_{12}^{\frac{1}{2}} \Gamma(X_1, Y_1) & 0 & X_2 \end{bmatrix} > 0,$$

$$(22) \quad \begin{bmatrix} -X_2 & \sqrt{p_{21}} X_2 A^T & \sqrt{p_{22}} X_2 A^T \\ \sqrt{p_{21}} A X_2 & -X_1 & 0 \\ \sqrt{p_{22}} A X_2 & 0 & -X_2 \end{bmatrix} < 0,$$

$$(23) \quad \begin{bmatrix} \tilde{H}_1 & p_{11}^{\frac{1}{2}} \Lambda(\tilde{H}_1, Y)^T & p_{12}^{\frac{1}{2}} \Lambda(\tilde{H}_1, Y)^T \\ p_{11}^{\frac{1}{2}} \Lambda(\tilde{H}_1, Y) & \tilde{H}_1 & 0 \\ p_{12}^{\frac{1}{2}} \Lambda(\tilde{H}_1, Y) & 0 & \tilde{H}_2 \end{bmatrix} > 0,$$

$$(24) \quad (\tilde{H}_1 p_{21} + \tilde{H}_2 p_{22}) - \tilde{H}_2 < 0,$$

где  $\Lambda(\tilde{H}_1, Y) = \tilde{H}_1 A - YC$  и  $\Gamma(X_1, Y_1) = AX_1 - BY_1$ . Из линейных неравенств (21)–(24) теперь можно найти матрицы  $G$  и  $K$  для разделенной системы (11)–(14). Если при этом система (9)–(10) является устойчивой, то гипотеза о разделении справедлива и указанные матрицы являются искомыми матрицами усиления для исходной задачи. Для проверки устойчивости системы (9)–(10) подставим полученные матрицы в систему (9) и воспользуемся результатом теоремы 1 с функцией Ляпунова вида  $V(x, i) = z_k^T \hat{H} z_k$ , где  $z_k = [x_k \quad \tilde{x}_k]$  и  $\hat{H} = \hat{H}^T > 0$ . В итоге получим, что необходимо проверить совместность следующих линейных матричных неравенств:

$$(25) \quad p_{11} \tilde{A}^T \hat{H}_1 \tilde{A} + p_{12} \tilde{A}^T \hat{H}_2 \tilde{A} - \hat{H}_1 < 0,$$

$$(26) \quad p_{21} \hat{H}_1 < \hat{H}_2(1 - p_{22}),$$

где

$$(27) \quad \tilde{A} = \begin{bmatrix} (A - BG) & -BG \\ 0 & (A - KC) \end{bmatrix}.$$

Разрешимость полученных неравенств зависит от значений  $p_{ij}$ . Может оказаться, что при определенных значениях этих вероятностей построение стабилизирующего управления невозможно.

### 3. Пример

В качестве модельного примера была рассмотрена следующая система

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0,8 & 0 \\ 0,8 & 0 & 1 \\ -3,1 & -2,7 & 1,2 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 0,5 \\ 1 \\ 0,7 \end{bmatrix} u_k$$

$$y_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x_k$$

Матрица  $P$  задавалась в следующем виде:

$$(28) \quad P_{ij} = \begin{bmatrix} 1 - p_1 & p_1 \\ 1 - p_1 & p_1 \end{bmatrix},$$

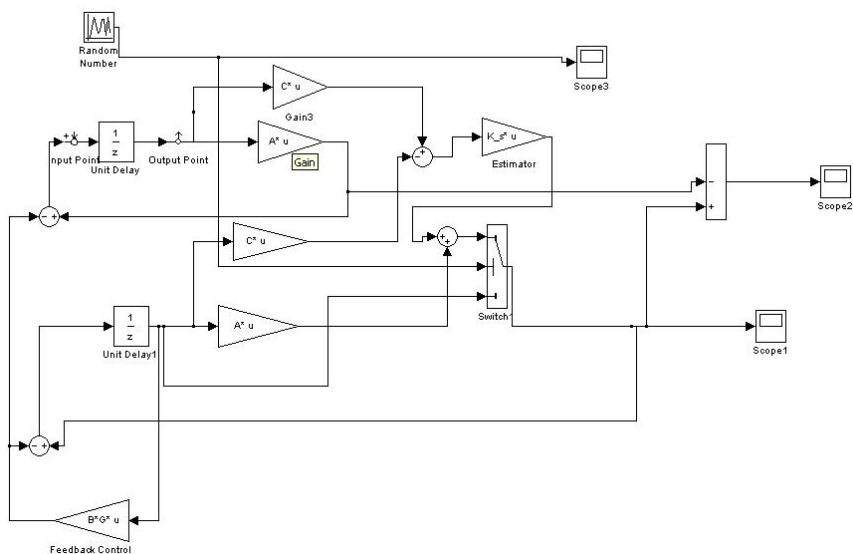


Рис. 2. Схема моделирования

т. е. предполагалось, что условные вероятности состояний  $S_1$  и  $S_2$  одинаковы.

Исходная система в разомкнутом состоянии является неустойчивой, вектор ее собственных значений равен  $[1,3532; -0,1766 - 1,2028i; -0,1766 + 1,2028i]^T$ .

На рис. 2 представлена схема моделирования в *SIMULINK*. Рис. 3–5 содержат графики переходных процессов моделируемой системы.

Были рассмотрены значения условной вероятности потери пакета  $p_1$  равные 0,1, 0,2 и 0,25, для них получены следующие матрицы усиления  $G$  и  $K$ :

$$G_{0,1} = [-0,3306 \quad 1,1745 \quad 0,7966],$$

$$K_{0,1}^T = \begin{bmatrix} 0,2475 & 0,9578 & 1,6791 \\ 0,7391 & 0,0103 & -2,8177 \end{bmatrix},$$

$$G_{0,2} = [-0,2221 \quad 1,1789 \quad 0,7597],$$

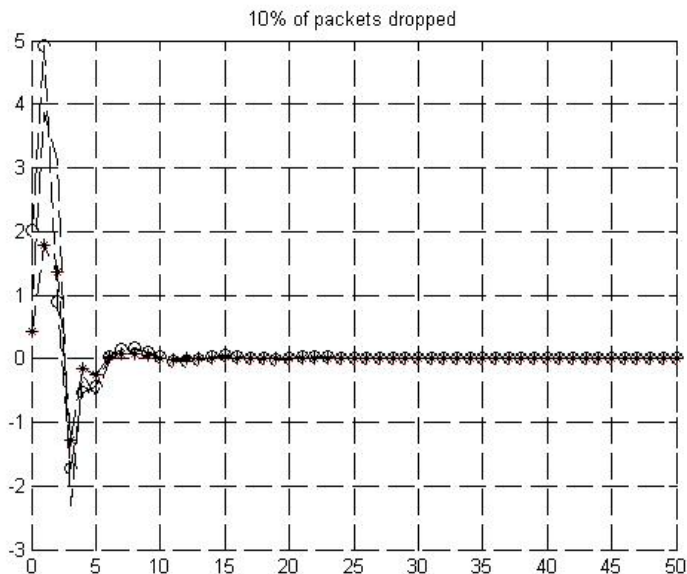


Рис. 3. Переходные процессы при вероятности потери пакета равной 0,1

$$K_{0,2}^T = \begin{bmatrix} 0,2450 & 0,9514 & 1,6555 \\ 0,8811 & -0,0173 & -2,5508 \end{bmatrix},$$

$$G_{0,25} = [0,0596 \quad 0,9601 \quad 0,7801],$$

$$K_{0,25}^T = \begin{bmatrix} 0,2625 & 0,9287 & 1,6924 \\ 0,9747 & -0,0726 & -2,2852 \end{bmatrix},$$

которым соответствуют следующие собственные значения матрицы  $(A - BG)$ :

$$E_{0,1} = [0,3455 - 0,5906i \quad 0,3455 + 0,5906i \quad -0,0577],$$

$$E_{0,2} = [0,5375 - 0,4708i \quad 0,3455 + 0,5906i \quad -0,2305],$$

$$E_{0,25} = [0,3326 - 0,8141i \quad 0,3326 + 0,8141i \quad -0,0012],$$

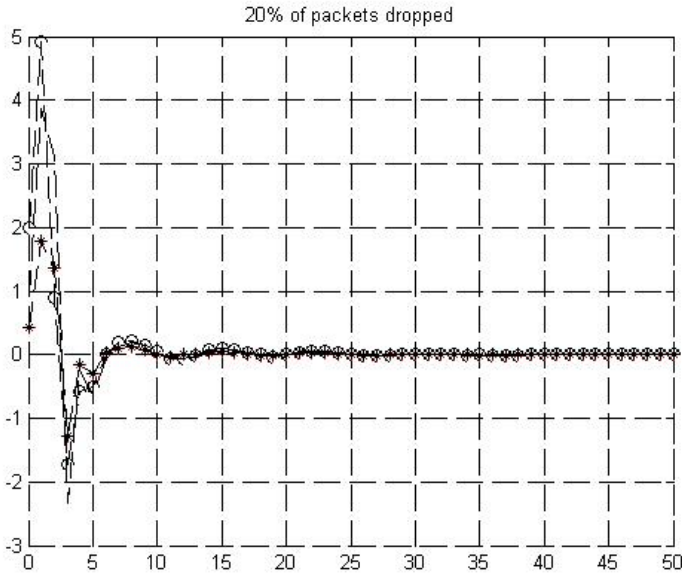


Рис. 4. Переходные процессы при вероятности потери пакета равной 0,2

и матрицы  $(A - BK)$ :

$$E_{0,1} = [0,2873 \quad -0,0247 \quad 0,0003],$$

$$E_{0,2} = [0,2809 \quad 0,0346 \quad 0,0013],$$

$$E_{0,25} = [0,2093 \quad 0,0541 - 0,0751i \quad 0,0541 + 0,0751i].$$

С увеличением условной вероятности потери пакета собственные значения замкнутой системы все более смещаются к границе устойчивости. При этом переходные процессы становятся более колебательными и увеличивается их время (рис. 3–5).

При условной вероятности потери пакета данных более 0,25 матричные неравенства (21)–(24) становятся несовместными, и система не может быть стабилизирована в рамках принятой структуры управления.

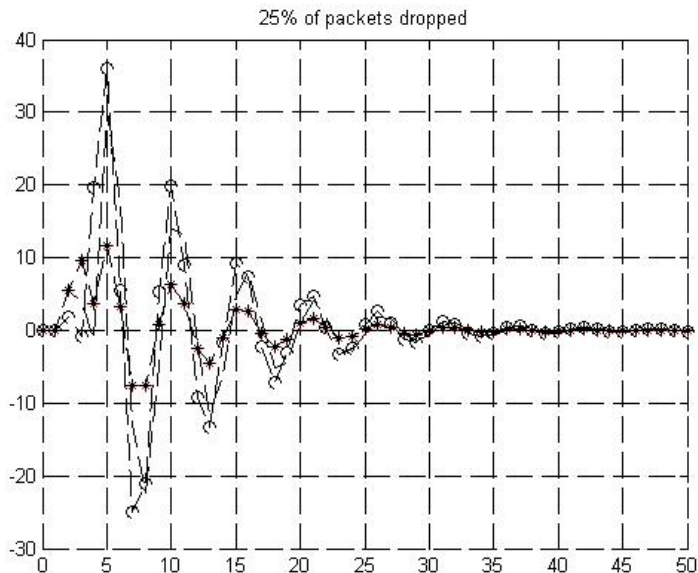


Рис. 5. Переходные процессы при вероятности потери пакета равной 0,25

### Литература

1. АНДРИЕВСКИЙ Б.Р., МАТВЕЕВ А.С., ФРАДКОВ А.Л. *Управление и оценивание при информационных ограничениях: к единой теории управления, вычислений и связи (обзор)* // Автоматика и телемеханика. – 2010. – №4. – С. 34–99.
2. ОСТРЕМ К.Ю. *Введение в стохастическую теорию управления*. – М.: Мир, 1973.
3. ПАКШИН П.В. *Дискретные системы со случайными параметрами и структурой*. – М.: Физматлит, 1994.
4. ЧУРИЛОВ А.Н., ГЕССЕН А.В. *Исследование линейных матричных неравенств. Путеводитель по программным*



- пакетам. – СПб.: Изд-во С.-Петербур. ун-та, 2004.
5. HONGO S., LI Y., ZHANG W. *Stabilization of Networked Control Systems with Communication Constraints and Packet Dropouts* // 48th IEEE Conference on Decision and Control. – 2009. – P. 7936–7941.
  6. DAČIĆ D., NEČSIĆ D. *Quadratic stabilization of linear networked control systems via simultaneous protocol and controller design* // Automatica. – 2007. – Vol. 43. – P. 1145–1155.
  7. NILSSON J., BERNHARDSSON B. *LQG Control Over a Markov Communication Network* // Proceedings of the 36th IEEE Conference on Decision and Control. – 1997. – Vol. 5. – P. 4586–4591.
  8. ZAMPIERI S. *Trends in Networked Control Systems* // 17th IFAC World Congress (IFAC'08). – 2008. – P. 2886–2894.
  9. ZHANG W., BRANICKY M., PHILIPS S. *Stability of Networked Control Systems* // IEEE Control Systems Magazine. – 2001. – P. 84–99.

## **STABILIZING NETWORKED CONTROL OF LINEAR DISCRETE-TIME SYSTEMS WITH PACKET DROPOUTS**

**Roman Zhuchkov**, post-graduate student (roman\_jkv@mail.ru),  
**Pavel Pakshin**, Dr.Sci., professor, Arzamas Polytechnic Institute of  
R.E. Alekseev, Nizhny Novgorod State Technical University, 19,  
Kalinina Street, Arzamas, 607227, Russia, (pakshinpv@gmail.com).

*Abstract: For a linear system where a plant and a regulator communicate over a network a stabilization problem is solved in the presence of possible packet dropouts. Dropouts are modeled with a Markovian chain. Cases of state-based and output-based feedback are studied. In both cases LMI technique proved to be efficient.*

**Keywords:** linear discrete systems, networked stabilizing control, packet dropouts, Markovian model, linear matrix inequalities.

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии А. П. Курдюковым*

УДК 517.951

ББК 22.161

## РЕАЛИЗАЦИЯ МУЛЬТИСКОБКИ КРУГЛИКОВА–ЛЫЧАГИНА В СИСТЕМЕ КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ MAPLE

Тычков С. Н.<sup>1</sup>

*(Учреждение Российской академии наук Институт проблем  
управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)*

*Описывается реализация мультискобки Кругликова–Лычагина в системе компьютерной алгебры Maple. Приводится пример использования мультискобки для исследования совместности системы дифференциальных уравнений в частных производных.*

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, мультискобка Кругликова–Лычагина, Maple.

### **Введение**

В работе предлагается реализация мультискобки Кругликова–Лычагина, которая используется для решения вопроса о формальной интегрируемости системы дифференциальных уравнений [1]. Такие задачи часто возникают в дифференциальной геометрии, теории дифференциальных уравнений и геометрической теории управления.

Рассмотрим систему  $m + 1$  дифференциального уравнения в частных производных порядка  $s$

$$(1) \quad \mathcal{E} : \left\{ F_i \left( x, u, \dots, \frac{\partial^{|\sigma|} u}{\partial x^\sigma}, \dots \right) = 0, \quad i = 1, \dots, m + 1, \right.$$

где  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  — вектор размерности  $n$ ;  $u = (u^1, u^2, \dots, u^m)$  — вектор-функция от  $x$ ;  $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$  — мультииндексы длины  $|\sigma| = \sigma_1 + \dots + \sigma_n$ . В этих обозначениях под

---

<sup>1</sup> Сергей Николаевич Тычков, аспирант, (sergey.lab06@live.ru).

$\partial^{|\sigma|} u^i / \partial x^\sigma$  мы понимаем частную производную

$$\frac{\partial^{|\sigma|} u^i}{\partial x_1^{\sigma_1} \partial x_2^{\sigma_2} \dots \partial x_n^{\sigma_n}}.$$

Для упрощения записи введем обозначение:

$$p_\sigma^k = \frac{\partial^{|\sigma|} u^k}{\partial x^\sigma}, \quad k = 1, \dots, m.$$

Под оператором полной производной мы понимаем оператор

$$\frac{d}{dx_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{k, \sigma} p_{\sigma+1_j}^k \frac{\partial}{\partial p_\sigma^k},$$

где  $\sigma + 1_j$  — мультииндекс, полученный из мультииндекса  $\sigma$  увеличением его  $j$ -й компоненты на единицу.

Рассмотрим дифференциальное уравнение порядка  $s$  вида

$$(2) \quad F(x, u, p_{\sigma_1}^1, \dots, p_{\sigma_m}^m) = 0.$$

**Определение 1.** *Линеаризацией [2] уравнения (2) называется вектор дифференциальных операторов*

$$(3) \quad \ell(F) = (L^1, \dots, L^m),$$

где

$$L^k = \sum_{\sigma} \frac{\partial F}{\partial p_\sigma^k} \frac{d^{|\sigma|}}{dx}, \quad k = 1, \dots, m,$$

$$\frac{d^{|\sigma|}}{dx} = \frac{d^{\sigma_1}}{dx_1} \circ \dots \circ \frac{d^{\sigma_n}}{dx_n},$$

$\circ$  — композиция дифференциальных операторов, а

$$\frac{d^{\sigma_j}}{dx_j}, \quad j = 1, \dots, n$$

— оператор полной производной порядка  $\sigma_j$  по переменной  $x_j$ .

Линеаризуя каждое уравнение системы (1), получим линеаризованную систему в виде:

$$(4) \quad \begin{pmatrix} L_1^1 & L_1^2 & \dots & L_1^m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_m^1 & L_m^2 & \dots & L_m^m \\ L_{m+1}^1 & L_{m+1}^2 & \dots & L_{m+1}^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

где  $L_i^j$  —  $j$ -я компонента вектора  $\ell(F_i)$ .

Пусть  $\mathcal{D}_i = (\mathcal{D}_i^1, \dots, \mathcal{D}_i^s)$ ,  $i = 1, \dots, s$ , где  $\mathcal{D}_i^j$  — линейный дифференциальный оператор. Множество линейных дифференциальных операторов образует некоммутативную алгебру относительно композиции.

**Определение 2.** Некоммутативным определителем  $\langle \mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_m \rangle$  называется любое (выбранное и зафиксированное) обобщение определителя для алгебры дифференциальных операторов:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_m \rangle &= \text{Ndet} \begin{pmatrix} \mathcal{D}_1^1 & \mathcal{D}_1^2 & \dots & \mathcal{D}_1^m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{D}_m^1 & \mathcal{D}_m^2 & \dots & \mathcal{D}_m^m \end{pmatrix} \\ &= \sum_{\alpha \in S_m} (-1)^\alpha \mathcal{D}_{\alpha(1)}^1 \dots \mathcal{D}_{\alpha(m)}^m, \end{aligned}$$

где  $S_m$  — множество всех перестановок из  $m$  элементов;  $(-1)^\alpha$  — четность перестановки  $\alpha \in S_m$ .

Впоследствии, вычисляя некоммутативный определитель, мы всегда будем раскладывать его по первому столбцу.

**Определение 3.** Мультискобкой Кругликова–Лычагина функций  $F_1, F_2, \dots, F_{m+1}$  называется функция на пространстве джетов [2]

$$(5) \quad \{F_1, F_2, \dots, F_{m+1}\} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{m+1} \langle L_1, \dots, \widehat{L}_i, \dots, L_{m+1} \rangle F_i,$$

где  $L_i = \ell(F_i) = (L_i^1, L_i^2, \dots, L_i^m)$ ,  $i = 1, \dots, m+1$ , а  $\widehat{L}_i$  означает пропуск  $i$ -й компоненты.

Основной результат, который мы используем для исследования формальной интегрируемости системы дифференциальных уравнений (1), состоит в следующем:

- 1) Если система  $\mathcal{E}$  формально интегрируема, то мультискобка

$$\{F_1, \dots, F_m, F_{m+1}\}$$

равна нулю в силу системы  $\mathcal{E}$ .

- 2) Если система  $\mathcal{E}$  находится в полном пересечении ([1, 3]), то  $\mathcal{E}$  формально интегрируема тогда и только тогда, когда мультискобка

$$\{F_1, \dots, F_m, F_{m+1}\}$$

равна нулю в силу системы  $\mathcal{E}$ .

Если рассматриваемая система состоит из более чем  $m + 1$  уравнений, то необходимо рассмотреть скобки для всевозможных наборов из  $m + 1$  уравнений. Подробное изложение этих результатов можно найти в [5].

## 1. Вспомогательные процедуры

Для реализации вычисления формулы (5) нам необходимы следующие процедуры:

- 1) операции над дифференциальными операторами: сложение, умножение на функцию и композиция;
- 2) вычисление некоммутативного определителя матрицы;
- 3) вычисление линеаризации системы дифференциальных уравнений.

### 1.1. Операции над дифференциальными операторами

Для представления дифференциальных операторов в программе мы выбрали определенный в *Maple* тип *table* [6], который представляет собой ассоциативный массив. Ключом в нашем массиве будет мультииндекс  $\sigma$ , а значением — алгебраическое выражение, стоящее перед соответствующей индексу частной производной.

Таким образом, каждая пара ключ-значение  $((\sigma_1, \dots, \sigma_n), F_\sigma(x_1, \dots, x_n))$  представляет оператор  $F_\sigma(x_1, \dots, x_n) \partial^{|\sigma|} / \partial x^\sigma$ . Тогда весь ассоциативный массив  $T$  представляет дифференциальный оператор

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{K}(T)} F_\sigma(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial^{|\sigma|}}{\partial x^\sigma},$$

где  $\mathcal{K}(T)$  — множество ключей массива. Далее в зависимости от контекста мы будем понимать под  $T$  и сам оператор, и ассоциативный массив, которым оператор представляется.

**Сложение дифференциальных операторов.** В выбранном представлении операторов сумма двух операторов

$$T_1 = \sum_{\sigma \in \mathcal{K}(T_1)} F_\sigma \frac{\partial^{|\sigma|}}{\partial x^\sigma} \quad \text{и} \quad T_2 = \sum_{\tau \in \mathcal{K}(T_2)} G_\tau \frac{\partial^{|\tau|}}{\partial x^\tau}$$

задается следующим образом:

$$\begin{aligned} T_1 + T_2 = & \sum_{\sigma \in \mathcal{K}(T_1) \setminus \mathcal{K}(T_2)} F_\sigma \frac{\partial^{|\sigma|}}{\partial x^\sigma} + \\ & + \sum_{\tau \in \mathcal{K}(T_2) \setminus \mathcal{K}(T_1)} G_\tau \frac{\partial^{|\tau|}}{\partial x^\tau} + \sum_{\sigma \in \mathcal{K}(T_1) \cap \mathcal{K}(T_2)} (F_\sigma + G_\sigma) \frac{\partial^{|\sigma|}}{\partial x^\sigma}. \end{aligned}$$

Формула для разности аналогична. Реализация сложения двух операторов на языке *Maple* представлена ниже.

```
diffopPlus := proc( diffop1::table, diffop2::table )::table;
local result::table, sigma::list;
result := copy( diffop1 );
for sigma in indices( diffop2 ) do
  if sigma in {indices( result )} then
    result[op( sigma )] := result[op( sigma )] + diffop2[op( sigma )];
  else
    result[op( sigma )] := diffop2[op( sigma )];
  end if;
end do;
return copy( result );
end proc;
```

**Умножение дифференциального оператора на функцию.**  
Умножение оператора

$$T = \sum_{\sigma \in \mathcal{K}(T)} F_\sigma \frac{\partial^{|\sigma|}}{\partial x^\sigma}$$

на функцию  $g(x_1, \dots, x_n)$  слева задается формулой

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{K}(T)} g F_\sigma \frac{\partial^{|\sigma|}}{\partial x^\sigma}.$$

Код, ее реализующий:

```
diffopMult := proc( diffOp::table, g )::table;
local result::table, sigma::list;
result := copy( diffOp );
for sigma in indices( diffOp ) do
  result[op( sigma )] := result[op( sigma )] * g;
end do;
return copy( result );
end proc;
```

**Композиция дифференцирования и дифференциального монома.** Пусть дан моном

$$M = f \frac{\partial^{|\tau|}}{\partial x^\tau},$$

где  $\tau$  — мультииндекс. Рассмотрим композицию дифференцирования по переменной  $x_i$  и монома  $M$ . Формула для вычисления композиции вытекает из правила Лейбница и выглядит так:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \circ M = \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial^{|\tau|}}{\partial x^\tau} + f \frac{\partial^{|\tau|+1}}{\partial x_1^{\tau_1} \dots \partial x_2^{\tau_2+1} \dots \partial x_n^{\tau_n}}$$

Процедура на *Maple*, вычисляющая данную композицию:

```
diffopDMonomial := proc( diffMon::table, varIndex::integer ):table;
local result::table, sigma::list, othersigma::list;
if nops( [indices( diffMon )] ) < 1 then
error "Incorrect monomial has size %1, indices=%2",
nops( [indices( diffMon )] ), [indices( diffMon )]
end if;
if ivarsCount < varIndex or varIndex < 1 then
error "Incorrect variable's index %1", varIndex;
end if;
sigma := indices( diffMon )[1];
othersigma := sigma;
othersigma[varIndex] := othersigma[varIndex] + 1;
result := copy( diffMon );
result[op( sigma )] := TDiff( diffMon[op( sigma )], varIndex );
result[op( othersigma )] := diffMon[op( sigma )];
return copy( result );
end proc;
```

**Композиция дифференцирования и дифференциального оператора.** Используя функцию *diffopDMonomial*, реализованную выше, мы можем построить композицию оператора взятия частной производной и дифференциального оператора. Пусть задан оператор

$$T = \sum_{\sigma \in \mathcal{K}(T)} M_\sigma,$$

где  $M_\sigma = F_\sigma \frac{\partial^{|\sigma|}}{\partial x^\sigma}$ . Формула для композиции записывается следующим способом:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \circ T = \sum_{\sigma \in \mathcal{K}(T)} \frac{\partial}{\partial x_i} \circ M_\sigma.$$

Исходный код этой процедуры на *Maple*:



```

diffopDOperator := proc( diffOp::table, varIndex::integer )::table;
local result::table, sigma::list, diffMon::table;
  if ivarsCount < varIndex or varIndex < 1 then
    error "Incorrect variable's index %1", varIndex;
  end if;
  result := table();
  for sigma in indices( diffOp ) do
    diffMon := table( [op( sigma ) = diffOp[op( sigma )]] );
    result := diffopPlus( result, diffopDMonomial( diffMon, varIndex ) );
  end do;
  return result;
end proc;

```

**Композиция дифференциального монома и дифференциального оператора.** Пусть

$$N = f \frac{\partial^{|\tau|}}{\partial x^\tau}$$

— дифференциальный моном, а

$$T = \sum_{\sigma \in \mathcal{K}(T)} M_\sigma$$

— дифференциальный оператор. Композиция  $N \circ T$  строится следующим образом:

$$N \circ T = N \circ \sum_{\sigma \in \mathcal{K}(T)} M_\sigma = \sum_{\sigma \in \mathcal{K}(T)} N \circ M_\sigma = f \sum_{\sigma \in \mathcal{K}(T)} \frac{\partial^{|\tau|}}{\partial x^\tau} \circ M_\sigma.$$

Реализация на *Maple*:

```

diffopComposeWithMonomial := proc( diffMon::table, diffOp::table )::table;
local result::table, diffs::list, f, diffIndex::integer, varIndex::integer;
  if nops( [indices(diffMon)] ) <> 1 then
    error "Incorrect monomial has size %1, indices=%2",
      nops( [indices(diffMon)] ), [indices(diffMon)];
  end if;
  result := copy( diffOp );
  diffs := indices( diffMon )[1];
  f := diffMon[op( diffs )];
  for varIndex from 1 to ivarsCount do
    for diffIndex from 1 to diffs[varIndex] do
      result := diffopDOperator( result, varIndex );
    end do;
  end do;
  result := diffopMult( result, f );
  return copy( result );
end proc;

```

**Композиция дифференциальных операторов.** Имея в распоряжении композицию монома и оператора, мы можем легко построить композицию двух операторов. Пусть даны операторы

$$T_1 = \sum_{\sigma \in \mathcal{K}(T_1)} M_\sigma$$

и  $T_2$ . Композицию  $T_1 \circ T_2$  мы запишем в виде:

$$T_1 \circ T_2 = \left( \sum_{\sigma \in \mathcal{K}(T_1)} M_\sigma \right) \circ T_2 = \sum_{\sigma \in \mathcal{K}(T_1)} (M_\sigma \circ T_2).$$

Процедура, реализующая композицию двух операторов, представлена ниже.

```
diffopCompose := proc( diffOp1::table, diffOp2::table )::table;
local result::table, sigma::list, diffMon::table;
result := table();
for sigma in indices( diffOp1 ) do
diffMon := table( [op( sigma ) = diffOp1[ op(sigma) ] ] );
result := diffopPlus( result,
diffopComposeWithMonomial( diffMon, diffOp2 ) );
end do;
diffopRemoveZeroes( result );
return copy( result );
end proc;
```

### Применение дифференциального оператора к уравнению.

При реализации мультискобки нам необходимо применять операторы к уравнениям из исходной системы (1). Поэтому мы реализуем следующую процедуру.

Определим действие дифференциального оператора

$$T = \sum_{\sigma \in \mathcal{K}(T)} F_\sigma \frac{\partial^{|\sigma|}}{\partial x^\sigma}$$

на функцию  $G(x_1, x_2, \dots, x_n)$  следующей формулой:

$$T(G) = \sum_{\sigma \in \mathcal{K}(T)} F_\sigma \frac{\partial^{|\sigma|} G}{\partial x^\sigma}.$$

Исходный код процедуры на *Maple*:

```
diffopOnEquation := proc( diffOp::table, eq )
local result, sigma::list, F, varIndex::integer, i::integer;
result := 0;
for sigma in indices( diffOp ) do
F := eq;
result := result + diffOp[op( sigma )] * TotDiff( F,
sigma2vars( sigma ) );
end do;
return result;
end proc;
```

## 1.2. Реализация некоммутативного определителя

Имея в распоряжении построенные вспомогательные процедуры, мы можем реализовать процедуру вычисления некоммутативного определителя в соответствии с определением 2. Мы будем вычислять определитель, раскладывая его по первому столбцу. Ниже мы приводим текст процедуры *Ndet* на языке *Maple*, вычисляющей определитель матрицы, используя рекурсивный алгоритм.

```
Ndet := proc( A::Matrix )::table;
local N::integer, temp::Matrix, result::table, row::integer,
      i::integer, j::integer, tempRow::integer, sign::boolean;
N := op( 1, A )[1];
if N <> op( 1, A )[2] then
  error "Matrix in Ndet is not square, %1 <> %2", N, op( 1, A )[2];
end if;
if N = 2 then
  return copy( diffopMinus( diffopCompose( A[1, 1], A[2, 2] ),
    diffopCompose( A[2, 1], A[1, 2] ) ) );
end if;
temp := Matrix( N - 1, N - 1 );
result := table();
sign := true;
for row from 1 to N do
  sign := not sign;
  tempRow := 0;
  for i from 1 to N do
    if i <> row then
      tempRow := tempRow + 1;
      for j from 2 to N do
        temp[tempRow, j - 1] := A[i, j];
      end do;
    end if;
  end do;
  if sign then
    result := diffopMinus( result, diffopCompose( A[row, 1],
      Ndet( temp ) ) );
  else
    result := diffopPlus( result, diffopCompose( A[row, 1],
      Ndet( temp ) ) );
  end if;
end do;
return copy( result );
end proc;
```

Входной параметр функции *Ndet* имеет тип *Matrix*, который определен в *Maple*. Этот тип позволяет хранить матрицу, элементы которой могут иметь любой тип. В качестве результата работы функция возвращает дифференциальный оператор, хранящийся в ассоциативном массиве типа *table*.

## 1.3. Линеаризация

Важным этапом алгоритма вычисления мультискобки Кругликова–Лычагина является вычисление линеаризации системы

уравнений (1). Чтобы линеаризовать систему дифференциальных уравнений, необходимо линеаризовать каждое из уравнений этой системы. Используя явную формулу из определения (1), реализуем на языке *Maple* линеаризацию одного уравнения.

```
linearizeEquation := proc( F )::Array;
local result::Array, i::integer, sigmas::set, sigma;
  result := Array( 1 .. dvarsCount );
  for i from 1 to dvarsCount do
    result[i] := table();
    sigmas := allSigmas( F, dvars[i] );
    for sigma in sigmas do
      result[i][op( sigma )] := diff( F, dvars[i][op( sigma )] );
    end do;
  end do;
  return result;
end proc;
```

Аргумент функции *linearizeEquation* — это выражение  $F$ , содержащее независимые переменные (хранятся в глобальном списке *ivars*) и координаты джетов, записанные через зависимые переменные (хранятся в глобальном списке *dvars*) с мультииндексом. Эта функция возвращает объект типа *Array* (определенный в *Maple* тип массива), содержащий дифференциальные операторы.

Размер возвращаемого массива в точности равен числу  $m$  — количеству неизвестных функций  $u_i$ , которое равно переменной *dvarsCount* — длине списка *dvars*. На  $i$ -й позиции в этом массиве стоит дифференциальный оператор при  $i$ -й функции в формуле (3).

Встречающаяся в приведенном тексте функция *allSigmas* — одна из вспомогательных функций, на реализации которых мы не останавливаемся. Данная функция, анализируя выражение, передаваемое ей в первом аргументе  $F$ , ищет все записанные джетами производные функции, имя которой было передано ей вторым аргументом *dvars[i]*, и возвращает список всех мультииндексов, стоящих при этом имени в выражении  $F$ .

Построенную линеаризацию уравнения мы применим для процедуры линеаризация системы уравнений вида (1):

```
linearizeSystem := proc( sys::list )::Matrix;
local result::Matrix, eq::Array, i::integer, j::integer, eqsCount::integer;
  eqsCount := nops( sys );
  result := Matrix( eqsCount, dvarsCount );
  for i from 1 to eqsCount do
    eq := linearizeEquation( sys[i] );
```

```

for j from 1 to dvarsCount do
  result[i, j] := copy( eq[j] );
end do;
end do;
return result;
end proc;

```

Процедура *linearizeSystem* линеаризует систему уравнений, переданную ей в списке *sys*. Находя линеаризацию каждого уравнения в этом списке, она строит матрицу дифференциальных операторов, имеющую *dvarsCount* столбцов и на единицу большее, чем число уравнений, количество строк.

## 2. Реализация мультискобки Кругликова–Лычагина

Реализовав все вспомогательные процедуры, мы переходим к реализации определения (3). Ниже представлен исходный текст процедуры *MultiBracket*.

```

MultiBracket := proc( eqSys::list )
local linearization::Matrix, Ndets::Array, result, i::integer;
  linearization := linearizeSystem( eqSys );
  Ndets := allNdets( linearization );
  result := 0;
  for i from 1 to dvarsCount + 1 do
    result := result + (-1)^( ( i + 1 ) mod 2 ) *
      diffopOnEquation( Ndets[i], eqSys[i] );
  end do;
  return simplify( result );
end proc;

```

Входной параметр *eqSys* — список уравнений исходной системы. Процедура возвращает выражение — вычисленную мультискобку. Процедура *allNdets* принимает на вход матрицу дифференциальных операторов размера  $m \times (m + 1)$ , а возвращает список из  $m$  некоммутативных определителей, полученных из входной матрицы.

**Замечание 1.** Оценим сложность вычисления нескольких реализованных функций. Функция *Ndet* вычисляет определитель матрицы разложением по столбцам, следовательно, выполняет  $m!$  операций композиции, где  $m$  — число неизвестных функций. Функция *MultiBracket* вызывает  $m + 1$  раз функцию *Ndet*, а затем применяет результат каждого вычисления  $m + 1$  раз уравнениям исходной системы, т.е. выполняет  $(m + 1)^2 m!$  композиций.

Несмотря на то, что формула вычисления мультискобки выполняет значительное количество операций, этот метод получения условий формальной интегрируемости является довольно быстрым, потому что задает *явную* формулу. Сравнение метода скобок с другим методом – дифференциальными базисами Гребнера – приведено в [4].

### 3. Пример

Рассмотрим следующую задачу: *описать все векторные поля без особых точек на плоскости, первые интегралы которых являются гармоническими функциями.*

Пусть векторные поля имеют вид:

$$X = a(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial}{\partial y}.$$

Задача сводится к исследованию совместности следующей системы дифференциальных уравнения в частных производных:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \\ X(u) = 0, \end{cases}$$

где  $\Delta = \partial_{xx} + \partial_{yy}$  – оператор Лапласа. Согласно условию Коши–Римана эта система эквивалентна следующей системе дифференциальных уравнений первого порядка:

$$(6) \quad \begin{cases} u_x - v_y = 0, \\ u_y + v_x = 0, \\ a(x, y)u_x + b(x, y)u_y = 0. \end{cases}$$

В силу того, что векторное поле  $X$  не имеет особых точек, можно считать, что функция  $a(x, y)$  нигде не обращается в ноль. Тогда без ограничения общности можно положить  $a(x, y) \equiv 1$ . Система (6) примет вид:

$$(7) \quad \begin{cases} u_x - v_y = 0, \\ u_y + v_x = 0, \\ u_x + b(x, y)u_y = 0. \end{cases}$$

Программа на *Maple*, вычисляющая скобку для системы (7):

```
# подключаем модуль Brackets
with( Brackets ):
# настраиваем внутренние параметры этого модуля:
# списки независимых и зависимых переменных
setup( [x, y], [u, v] ):
# задаем систему уравнений
S := [ u[1, 0] - v[0, 1], u[0, 1] + v[1, 0],
      u[1, 0] + b(x, y) * u[0, 1] ]:
# вычисляем скобку и группируем члены у производных u_x, u_y, u_xy
MBr := collect( MultiBracket( S ), [ u[0, 1], u[1, 1], u[0, 2] ] );
```

В результате компьютерных вычислений получим мультискобку Кругликова–Лычагина:

$$(8) \quad M = \Delta b u_y + 2b_y u_{yy} + 2b_x u_{xy},$$

где  $\Delta = \partial_{xx} + \partial_{yy}$  — оператор Лапласа. Ограничим скобку  $M$  на систему (7), используя третье уравнение  $u_x = -b(x, y)u_y$ . Дифференцируя его по  $y$ , получим  $u_{xy} = -b_y u_y - b u_{yy}$ . Ограниченную скобку обозначим

$$M_{\mathcal{E}} = (\Delta b - 2b_x b_y)u_y + 2(b_y - b b_x)u_{yy}.$$

Чтобы система (7) была формально интегрируема, необходимо и достаточно, чтобы  $M_{\mathcal{E}} \equiv 0$ . Видно, что это условие выполнено тогда и только тогда, когда коэффициенты при  $u_y$  и  $u_{yy}$  равны нулю. Это условие приводит к следующей системе уравнений:

$$(9) \quad \begin{cases} \Delta b = 2b_y b_x, \\ b_y = b b_x. \end{cases}$$

Решая ее, получим

$$b(x, y) = h_1(y)x + h_2(y),$$

где  $h_1, h_2$  — произвольные гладкие функции.

Чтобы исследовать совместность системы (7), перепишем ее в форме, не содержащей функцию  $v(x, y)$ , и добавим к ней уравнение  $M_{\mathcal{E}} = 0$ :

$$(10) \quad \begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, \\ u_x + b u_y = 0, \\ (\Delta b - 2b_x b_y)u_y + 2(b_y - b b_x)u_{yy} = 0. \end{cases}$$

Продифференцируем второе уравнение этой системы по  $x$  и по  $y$  и добавим полученные соотношения к системе (10):

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{xx} + u_{yy} = 0, \\ u_x + bu_y = 0, \\ u_{xx} + b_x u_y + bu_{xy} = 0, \\ u_{xy} + b_y u_y + bu_{yy} = 0, \\ (\Delta b - 2b_x b_y)u_y + 2(b_y - bb_x)u_{yy} = 0. \end{array} \right.$$

Эта система эквивалентна следующей системе:

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_{xx} + u_{yy} = 0, \\ u_x + bu_y = 0, \\ u_{xy} + b_y u_y + bu_{yy} = 0, \\ -(1 + b^2)u_{yy} + (b_x - bb_y)u_y = 0, \\ 2(b_y - bb_x)u_{yy} + (\Delta b - 2b_x b_y)u_y = 0. \end{array} \right.$$

Необходимо рассмотреть два случая.

В первом случае, когда  $u_y \neq 0$  и  $u_{yy} \neq 0$ , определитель системы, составленной из четвертого и пятого уравнений системы (11), должен быть равен нулю. Это условие дает следующее соотношение на функцию  $b(x, y)$ :

$$(12) \quad (b^2 + 1)\Delta b - 2b(b_x^2 + b_y^2) = 0.$$

С учетом соотношения (12) выразим из системы (11) производные  $u_{xx}$  и  $u_{xy}$  через  $u_y$ :

$$u_{xx} = -\frac{(b_x - bb_y)u_y}{b^2 + 1},$$

$$u_{xy} = -\left(b_y + \frac{b(b_x - bb_y)}{b^2 + 1}\right)u_y.$$

Используя эти соотношения, условие (12) и систему (11), можно показать, что условия формальной интегрируемости системы (11):

$$u_{yyx} = u_{xyy},$$

$$u_{xxy} = u_{xyx}$$

выполняются тождественно.



Рассмотрим второй случай. Пусть  $u_y = u_{yy} = 0$ . Тогда система (11) сводится к системе:

$$\begin{cases} u_y = 0, \\ u_x = 0, \end{cases}$$

решение которой  $u(x, y) = const$ . Таким образом мы приходим к следующей теореме.

**Теорема 1.** *Векторное поле*

$$X = \frac{\partial}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial}{\partial y}$$

обладает не равным константе гармоническим первым интегралом тогда и только тогда, когда функция  $b(x, y)$  удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению:

$$(b^2 + 1)\Delta b - 2b(b_x^2 + b_y^2) = 0.$$

### Литература

1. АЛЕКСЕЕВСКИЙ Д.В., ВИНОГРАДОВ А.М., ЛЫЧАГИН В.В. *Основные идеи и понятия дифференциальной геометрии* // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. – 1988. – Т. 28 (Итоги науки и техники ВИНТИ АН СССР). – С. 5–289.
2. ВИНОГРАДОВ А.М., КРАСИЛЬЩИК И.С., ЛЫЧАГИН В.В. *Введение в геометрию нелинейных дифференциальных уравнений*. – М.: Наука, 1986. – С. 336.
3. КОКС Д., ЛИТТЛ ДЖ., О’ШИ ДЖ. *Идеалы, многообразия и алгоритмы*. – М.: Мир, 2000. – С. 687.
4. KRUGLIKOV V. *Note on two compatibility criteria: Jacobi-Mayer bracket vs. differential Groebner basis* // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2006. – Vol. 23. – С. 57–70.
5. KRUGLIKOV V., LYCHAGIN V. *Multi-brackets of differential operators and compatibility of PDE systems* // C. R. Acad. Sci. Paris. – 2006. – Vol. 342. – С. 557–561.
6. *Maple Advanced Programming Guide* / Maplesoft, a division of Waterloo Maple Inc. 1996-2009. – URL: <http://www.maplesoft.com/view.aspx?sl=32470> (дата обращения: 12.02.2011).

## **IMPLEMENTATION OF THE KRUGLIKOV–LYCHAGIN MULTIBRACKET ON MAPLE**

**Sergey Tychkov**, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow,  
postgraduate student, (sergey.lab06@live.ru).

*Abstract: We describe implementation of Kruglikov–Lychagin multibracket on Maple. An example is given of application of Kruglikov–Lychagin multibracket for compatibility analysis of a specific system of partial differential equations.*

**Keywords:** differential equations, Kruglikov–Lychagin multibracket, Maple.

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии В. А. Уткиным*

УДК 021.8 + 025.1  
ББК 78.34

## **ОПТИМАЛЬНОСТЬ СОГЛАСОВАННЫХ МЕХАНИЗМОВ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ В АКТИВНЫХ СИСТЕМАХ**

**Еналеев А. К.<sup>1</sup>**

*(Учреждение Российской академии наук  
Институт проблем управления РАН, Москва)*

*Исследуются механизмы функционирования в двухуровневых активных системах, в которых на процедуры планирования и системы стимулирования накладываются дополнительные условия согласования предпочтений активных элементов с предпочтениями центра. При этих условиях обеспечивается выполнение планов и сообщение достоверной информации (неманипулируемость). Определяются достаточные условия оптимальности согласованных механизмов.*

Ключевые слова: процедура согласованного планирования, принцип открытого управления, достоверность информации, выполнение плана, согласование интересов, синтез оптимального механизма.

### **1. Введение**

Идея согласования интересов элементов иерархически организованных систем имеет давнюю историю. Не претендуя на указание самых первых работ по данной теме, отметим, что эта идея подробно обсуждалась еще в [10]. В теории активных систем идея согласования наиболее обстоятельно была рассмотрена в [1], в частности, предложены принцип совершенного согласования в задачах планирования и соответствующая ему

---

<sup>1</sup> Анвер Касимович Еналеев, кандидат технических наук, старший научный сотрудник (anver.en@gmail.com).

процедура открытого управления, обеспечивающая сообщение активными элементами достоверной информации. Первые результаты исследования оптимальности согласованных механизмов функционирования активных систем для случая полной информированности центра о моделях активных элементов были опубликованы в работах [3, 5]. Для случая неполной информированности центра в [2] доказана оптимальность принципа открытого управления при заданной системе стимулирования активного элемента, а в [4] исследована задача синтеза оптимального механизма в случае «сильных штрафов» за отклонение состояния активного элемента от плана. В работе [8] доказана оптимальность согласованных механизмов в случае, когда величина штрафа за отклонение состояния от плана ограничена фиксированной величиной.

В настоящей работе обобщены результаты работы [3, 5, 8], даны достаточные условия оптимальности согласованных механизмов функционирования активных систем для случаев полной и неполной информированности центра. Условия согласованности механизмов функционирования представлены путем введения дополнительных ограничений на выбор центром процедур планирования. Эти условия обеспечивают выполнение активными элементами назначаемых им планов и сообщение в центр достоверной информации. Получены решения задач синтеза оптимальных механизмов функционирования для ряда важных случаев, когда выполняются условия согласованности.

## **2. Модель и постановка задачи**

Модель рассматриваемой активной системы описана в [1, 8], поэтому здесь ограничимся сжатым представлением модели. Пусть активная система состоит из центра и активного элемента (АЭ).

Обозначим целевую функцию центра как  $\Phi(x, y, r)$  и предположим, что  $\Phi(y, y, r) \geq \Phi(x, y, r) \geq 0$ , где функция  $\Phi(y, y, r)$  непрерывна и строго квазивогнута по  $y$  при всех  $r \in A$ . Здесь  $x$  – назначаемый центром план;  $x \in X$  – множество допустимых планов;  $y$  – выбираемое активным элементом состояние;  $y \in Y$  –

множество допустимых состояний;  $r$  – параметр, характеризующий систему;  $r \in A$  – множество допустимых значений параметра. Далее для простоты примем  $X = Y$ . Предположим, что множества  $X$ ,  $Y$ , так же как и  $A$ , являются ограниченными замкнутыми множествами. Обозначим  $f(x, y, r)$  целевую функцию АЭ. Будем предполагать, что план  $x$  назначается центром в соответствии с некоторой процедурой планирования  $x = \pi(\cdot)$ , где  $\pi(\cdot)$  отображает множество  $A$  в множество  $X$ . Центр может назначать целевую функцию АЭ в рамках определенных ограничений:  $f(x, y, r) \in F$ . Здесь  $F$  обозначает заданное множество допустимых целевых функций (систем стимулирования).

Совокупность процедуры планирования  $x = \pi(\cdot)$  и целевой функции АЭ  $f(\cdot, \cdot, r)$  составляет механизм функционирования  $\mu = \{\pi(\cdot), f(\cdot, \cdot, r)\}$ . В теории активных систем, например [1, 2, 3], процедуру планирования принято называть также законом управления.

Введем предположения об информированности в рассматриваемой активной системе.

Активному элементу известно значение параметра  $r$ , а центру известно только множество  $A$  допустимых значений этого параметра. Предполагается также, что при заданном механизме функционирования  $\mu$  активный элемент сообщает центру оценку  $r$  параметра  $r$ ,  $r \in A$ .

Пусть задан механизм  $\mu$ , тогда функционирование рассматриваемой активной системы описывается следующим образом: АЭ сообщает оценку  $r$  параметра  $r$ , затем в соответствии с процедурой планирования  $\pi(\cdot)$  назначается план  $x = \pi(r)$ , затем АЭ выбирает состояние  $y$ , стремясь максимизировать по  $y$  свою целевую функцию  $f(x, y, r)$ .

Обозначим функцию предпочтения активного элемента  $j(x, r) = \max_{y \in Y} f(x, y, r)$  и функцию предпочтения центра

$$\Psi(x, r) = \min_{y \in Z(x, r)} \Phi(x, y, r),$$

где  $Z(x, r)$  – множество рациональных стратегий активного элемента при выборе состояния  $y$  (определение используемого в

данной работе множества рациональных стратегий  $Z(x, r)$  приведено ниже).

Здесь и далее для простоты записей предположим, что соответствующие операции  $\max$  и  $\min$  определены.

Для заданного механизма функционирования  $\mu$  определим показатель его эффективности

$$(1) \quad K(m) = \min_{r \in A} [ \min_{r \in R(r)} \Psi(p(r), r) / \Psi_g(r) ],$$

где  $R(r)$  – множество рациональных стратегий АЭ при выборе им сообщения  $r$  (определение множества  $R(r)$  приведено ниже),  $\Psi_b(r)$  – заданная нормирующая функция. В качестве нормирующей функции могут быть выбраны, например, следующие функции:  $\Psi_g(r) = \max_{x \in X} \Psi(x, r)$ , либо

$$\Psi_g(r) = \max_{x \in X} \Phi(x, x, r), \text{ либо } \Psi_g(r) = \text{const} > 0.$$

Далее будем предполагать выполнение «слабого условия благожелательности АЭ» [8], при котором множества рациональных стратегий АЭ принимают следующий вид:

$$Z(x, r) = \begin{cases} \{x\}, & \text{если } x \in \text{Arg max}_{y \in Y} f(x, y, r), \\ \text{Arg max}_{y \in Y} f(x, y, r) & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$R(r) = \begin{cases} \{r\}, & \text{если } r \in \text{Arg max}_{r \in A} j(p(r), r), \\ \text{Arg max}_{r \in A} j(p(r), r) & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Содержательно это условие означает, что если для АЭ сообщение достоверной информации является рациональной стратегией, то эта стратегия единственна, и, соответственно, если стратегия выполнения плана является рациональной, то она также единственна. Нетрудно убедиться, что «слабое условие благожелательности» выполняется, если справедливо «условие благожелательности», используемое в работах [6, 7].

Особый интерес представляют собой механизмы, которые обеспечивают выполнение планов и сообщение достоверной информации (неманипулируемость), т.е.

$$(2) \quad Z(x, r) = \{x\},$$

$$(3) \quad R(r) = \{r\}.$$

Такие механизмы  $\mu_{\text{пр}}$  в теории активных систем принято называть правильными. Заметим, что для правильных механизмов  $\mu_{\text{пр}}$  выражение для критерия эффективности существенно упрощается (по сравнению с (1))

$$(4) \quad K(\mu_{\text{пр}}) = \min_{r \in A} [\Phi(p(r), p(r), r) / \Psi_{\sigma}(r)].$$

Обозначим  $M_{\text{пр}}$  множество правильных механизмов (то, что множество  $M_{\text{пр}}$  может быть непусто, подтверждается, например, результатами работы [8]),

В теории активных систем ставится следующая общая задача синтеза оптимального механизма функционирования  $\mu^*$ :

$$(5) \quad K(\mu^*) = \max_{\mu \in M} K(\mu),$$

где  $M$  – некоторое заданное множество механизмов.

Итак, пусть задано некоторое множество  $M$  такое, что

$$M \cap M_{\text{пр}} \neq \emptyset.$$

*Задача.* Охарактеризовать множества допустимых механизмов  $M$ , для которых выполняется

$$K(\mu^*) = \max_{\mu \in M} K(\mu) = \max_{\mu \in M \cap M_{\text{пр}}} K(\mu),$$

т.е. оптимальный механизм на множестве  $M$  принадлежит множеству правильных механизмов,

$$(6) \quad \mu^* \in M \cap M_{\text{пр}}.$$

Ниже будут найдены и исследованы достаточные условия выполнения (6), характеризующие множество механизмов  $M$ .

Забегая вперед, скажем, что эти условия будут представлять собой некоторые условия согласованности механизмов функционирования.

### **3. Оптимальность согласованных механизмов при полной информированности центра**

При полной информированности центру известно значение параметра  $r$ , тогда критерий эффективности механизма принимает вид

$$K(m) = \Psi(p(r), r) = \min_{y \in Z(p, r)} \Phi(p(r), y, r),$$

а для правильного механизма  $K(m_{\text{пр}}) = \Phi(p(r), p(r), r)$ .

Оптимальные процедуры планирования.

Множество правильных механизмов  $M_{\text{пр}}$  при полной информированности характеризуется следующим условием: план должен быть «выгодным» для АЭ, т.е.

$$f(\pi, y, r) \leq f(\pi, \pi, r).$$

В этом случае будет выполняться (2).

Обозначим множество выгодных для АЭ планов, а значит планов, согласованных с интересами АЭ,

$$P(r) = \{x \in X \mid f(x, y, r) \leq f(x, x, r), \forall y \in Y\}.$$

Таким образом, центр, назначая планы из множества  $P(r)$ , некоторым образом согласовывает свои интересы с интересами АЭ. Это множество будем называть *множеством согласованных планов*.

Введем в рассмотрение множество всех возможных рациональных стратегий АЭ  $Z(r) = \bigcup_{x \in X} Z(x, r)$ . Очевидно, что

$$P(r) \subseteq Z(r).$$

Таким образом, задача определения условий оптимальности согласованного механизма сводится к нахождению такого механизма  $\mu$ , для которого выполняется условие

$$(7) \quad K(m) = \max_{x \in X} \min_{y \in Z(x, r)} \Phi(x, y, r) = \max_{x \in P(r)} \Phi(x, x, r).$$

*Утверждение 1.* Достаточным условием выполнения (7) является выполнение

$$(8) \quad P(r) = Z(r).$$

Соотношение (8) означает, что множество согласованных планов максимально «широко», т.е. включает в себя все возможные рациональные стратегии АЭ. Принимая во внимание этот факт, систему стимулирования, для которой выполняется (8), будем называть *максимально согласованной*, условия (8) – условиями максимального согласования, а процедуру вычисления оптимального плана  $x^* = \arg \max_{x \in P(r)} \Phi(x, x, r)$  – процедурой оптимального согласованного планирования.



Непосредственная проверка условия (8) в общем случае представляет достаточно трудную задачу. Поэтому хотелось бы иметь представление о свойствах целевых функций АЭ, для которых обеспечивается выполнение условий максимальной согласованности (8).

Такие свойства описывает следующее утверждение.

**Теорема 1.** Для максимальной согласованности (8) достаточно выполнения неравенства

$$(9) \quad f(\mathbf{p}, \mathbf{p}, r) + f(x, y, r) \geq f(x, \mathbf{p}, r) + f(\mathbf{p}, y, r)$$

для  $\forall \mathbf{p}, y \in Z(r), \forall x \in X$ .

*Доказательство теоремы 1 приведено в приложении.*

Заметим, что утверждение теоремы тем более справедливо, если (9) выполняется для  $\forall \mathbf{p}, y, x \in X$ . В этом случае проверка достаточных условий максимальной согласованности существенно упрощается.

Отметим, что в условиях согласованности (8) или (9) не используются свойства целевой функции центра. Эти условия характеризуют только свойства целевой функции АЭ. Целевые функции, удовлетворяющие условиям теоремы 1, назовем *сильно согласованными*.

Таким образом, показано, что при сильно согласованной целевой функции АЭ согласованное планирование является оптимальным и АЭ выбирает состояния, совпадающие с планом.

Предположим теперь, что целевая функция АЭ представима в виде

$$(10) \quad f(x, y, r) = h(y, r) + \sigma(x) - \chi(x, y),$$

где  $h(y, r)$  – функция, отражающая величину дохода или затрат АЭ при выборе состояния  $y$ ; функцию  $\sigma(x)$  можно интерпретировать как поощрение за величину («напряженность») плана, а  $\chi(x, y)$  – функция штрафов за отклонение состояния  $y$  от плана  $x$ , причем

$$(11) \quad \chi(x, y) \geq 0, \quad \chi(y, y) = 0.$$

В этом случае справедливо следствие из теоремы 1.

*Следствие 1.* Для максимальной согласованности достаточно выполнения неравенства «треугольника»

$$(12) \quad \chi(x, y) \leq \chi(x, \pi) + \chi(\pi, y)$$

для  $\forall p, y \in Z(r), \forall x \in X$ .

По аналогии, функции штрафов, удовлетворяющие условию (12), назовем *сильно согласованными функциями штрафов*.

В теореме 1 и ее следствии определены достаточные условия оптимальности процедур *согласованного планирования*. Определим теперь условия оптимальности сильно согласованных функций стимулирования (целевых функций АЭ).

Оптимальные системы стимулирования.

Пусть задана сильно согласованная целевая функция  $f^*(x, y, r)$ . Определим множество  $F^*(r)$  допустимых целевых функций АЭ  $f(x, y, r)$  следующего вида:

$$F^*(r) = \{f(x, y, r) \mid f(x, y, r) - f(x, y', r) \leq f^*(y, y, r) - f^*(y, y', r), \\ \text{где } x, y' \in X, y \in P^*(r)\}.$$

Здесь  $P^*(r) = \{x \in X \mid f^*(x, y, r) \leq f^*(x, x, r) \quad \forall y \in Y\}$  – множество согласованных планов для целевой функции АЭ  $f^*(x, y, r)$ .

**Теорема 2.** Сильно согласованная целевая функция  $f^*(x, y, r)$  оптимальна на множестве  $F^*(r)$ .

*Доказательство теоремы приведено в приложении.*

В случае, когда целевые функции АЭ имеют вид (10), (11) и функция штрафа  $\chi^*(x, y)$  сильно согласована, т.е. удовлетворяет неравенству «треугольника» (12), при  $\forall p, y, x \in Y, Y = X$ , справедливо важное

**Следствие 2.** Функция штрафа  $\chi^*(x, y)$  оптимальна на множестве функций штрафов

$$\Omega = \left\{ c(x, y) \mid c(x, \hat{y}) - c(x, y) \leq c^*(y, \hat{y}), \text{ где } x, y, \hat{y} \in Y \right\}.$$

Рассмотрим произвольную целевую функцию  $f(x, y, r)$ , достигающую своих экстремумов по  $x \in X$  при всех  $y \in Y, r \in A$ , и определим для нее показатель *максимального роста* при изменении состояния от  $y$  до  $\hat{y}$ :

$$(13) \quad u_f(\hat{y}, y, r) = \max_{x \in X} [f(x, \hat{y}, r) - f(x, y, r)].$$

Покажем, что функция  $u_f(y, \hat{y}, r)$  обладает свойствами сильно согласованной функции штрафа АЭ. Для этого проверим выполнение неравенства (12).

Пусть  $u_f(\hat{y}, y, r) = f(x^*, \hat{y}, r) - f(x^*, y, r)$ , где  $x^*$  – план, при котором достигается максимум в выражении (13). Рассмотрим цепочку соотношений

$$\begin{aligned} u_f(x, z, r) + u_f(z, y, r) &= \max_{t \in X} [f(t, z, r) - f(t, x, r)] + \\ &+ \max_{t \in X} [f(t, y, r) - f(t, z, r)] \geq f(x^*, z, r) - f(x^*, x, r) + \\ &+ f(x^*, y, r) - f(x^*, z, r) = f(x^*, y, r) - f(x^*, x, r) = \\ &= \max_{t \in X} [f(t, y, r) - f(t, x, r)] = u_f(x, y, r), \end{aligned}$$

т.е. для  $u_f(y, \hat{y}, r)$  выполняются свойства (11), (12).

По аналогии с определением показателя максимального роста целевой функции АЭ введем в рассмотрение показатель максимального роста функции штрафов при изменении состояния от  $y$  до  $\hat{y}$ :

$$(14) \quad u_c(y, \hat{y}) = \max_{x \in X} [c(x, \hat{y}) - c(x, y)].$$

Показатель максимального роста функции штрафов  $u_c(y, \hat{y})$  также удовлетворяет условиям (11), (12), т.е. представляет сильно согласованную функцию штрафа (доказательство этого утверждения аналогично доказательству свойств показателя  $u_f(y, \hat{y}, r)$ ).

Отметим, что если целевые функции АЭ имеют вид (11), то  $u_f(y, \hat{y}, r) = u_c(y, \hat{y})$ .

Таким образом, путем преобразования (14) для любой функции штрафа  $\chi(x, y)$  можно построить соответствующую ей сильно согласованную функцию штрафа  $u_c(y, \hat{y})$ .

Заметим, что если функция штрафов  $\chi(x, y)$  сильно согласована, то она совпадает со своим показателем максимального роста,  $\chi(x, y) = u_\chi(x, y)$ .

Действительно, так как  $\chi(x, y)$  – сильно согласованная функция штрафа, то из (11) следует соотношение  $\chi(z, y) - \chi(z, x) \leq \chi(x, y)$ , причем равенство в нем достигается при  $z = x$ .

Таким образом, сильно согласованную можно определить как функцию штрафов, совпадающую со своим показателем максимального роста.

Следствие из теоремы 2 в таком случае можно переформулировать следующим образом: если функция штрафов  $\chi^*(x, y)$  сильно согласована, то она оптимальна в классе всех функций штрафов  $\chi(x, y)$ , имеющих при всех  $x, y \in Y$  не большее значение показателя максимального роста, чем  $\chi^*(x, y)$ , т.е.  $u_\chi(x, y) \leq \chi^*(x, y)$ .

#### **4. Оптимальность согласованных механизмов при неполной информированности центра**

##### Оптимальные процедуры планирования.

В [2] показано, что оптимальная процедура планирования содержится в множестве *процедур открытого управления*.

По определению процедура открытого управления  $\pi^{\text{OY}}(\cdot)$  задается условием «совершенного согласования» [2]:

$$(15) \forall r \in A: j(p^{\text{OY}}(r), r) = \max_{x \in X_c} j(x, r),$$

где  $X_c$  – устанавливаемое центром замкнутое подмножество множества  $X$ , не зависящее от сообщаемой АЭ оценки  $r$ .

Заметим, что условия совершенного согласования являются более «жесткими» по сравнению с введенными выше условиями сильной согласованности (9), если множество  $X_c$  достаточно «широко», т.е., например,  $X_c = X$ .

В [2] доказано, что процедура открытого управления стимулирует АЭ сообщать достоверную информацию  $r = r$ , так как  $\forall r, r \in A: j(\pi^{\text{OY}}(r), r) \leq j(p^{\text{OY}}(r), r)$ .

Отсюда следует, что для процедур открытого управления функция предпочтения центра имеет вид  $\Psi(\pi^{\text{OY}}(r), r)$ .

Из этого свойства, а также из (1), вытекает

*Утверждение 2.* Для процедуры открытого управления, критерий эффективности (1) имеет вид

$$K(m) = \min_{r \in A} [\Phi(p^{\text{OY}}(r), p^{\text{OY}}(r), r) / \Psi_r(r)].$$

##### Оптимальные системы стимулирования.

Дальнейшее изложение потребует дополнительных предположений о свойствах модели АЭ.

Во-первых, будем предполагать, что  $Y = X = [x^H, x^B]$ ,  $A = [r^H, r^B]$ , т.е. множества допустимых состояний, планов и значений параметра  $r$  представляют собой отрезки на числовой оси.

Во-вторых, целевая функция АЭ имеет вид (10), (11), где  $h(y, r) = -z(y, r)$ . Функция  $z(y, r)$  представляет собой функцию затрат АЭ, а  $s(y, x) = \sigma(x) - \chi(x, y)$  определим как систему стимулирования, которую центр может выбирать из заданного множества допустимых систем стимулирования.

В качестве множества допустимых систем стимулирования примем

$S = \{s(y, x) \mid 0 \leq \sigma(x) \leq g, \chi(x, y') - \chi(x, y) \leq u_\chi(y, y'), x, y, y' \in Y\}$ , где  $g$  – заданное положительное число, а  $u_\chi(y, y')$  – заданный показатель максимального роста функции штрафов за невыполнение плана.

Предположим, что функция затрат  $z(x, r)$  дважды дифференцируема по  $x$ , дифференцируема по  $r$  и

$$z'_x(x, r) > 0, z''_{xx}(x, r) > 0, z'_r(x, r) < 0, z''_{xr}(x, r) < 0$$

при всех  $x \in X, r \in A$ .

Первые два неравенства указывают на возрастание функции затрат и ее выпуклость соответственно. Третье неравенство характеризует монотонность функции затрат по параметру  $r$ . Четвертое неравенство соответствует хорошо известным в микроэкономике условиям *Спенса–Мирлиса* [12] и характеризует упорядоченность АЭ по возможным значениям параметра  $r$ , причем с увеличением  $r$  происходит снижение затрат и темпа роста затрат с увеличением  $x$ .

Поскольку оптимальной процедурой планирования при произвольной фиксированной целевой функции АЭ является процедура открытого управления, то определение оптимального механизма сводится к нахождению оптимальной системы стимулирования  $S^*(y, x) = \sigma^*(x) - \chi^*(x, y)$ ,

Таким образом, для рассматриваемого случая неполной информированности центра ниже будет исследована задача (5) синтеза оптимального механизма  $\mu^*$  на множестве

$$M = \{\mu / s(y, x) \in S, x = \pi(\rho), x, y \in X, \rho \in A\},$$

где  $\pi(\rho)$  – кусочно-непрерывные функции, определенные на множестве  $A$  и принимающие значения в  $X$ .

*Лемма 1.* Множество согласованных планов  $P(r)$  является выпуклым, если  $h(y, r)$  вогнутая функция на отрезке  $Y$ , а функция штрафов удовлетворяет условиям (11), (12).

*Доказательство леммы 1* приведено в приложении.

*Лемма 2.* Пусть функция затрат АЭ удовлетворяет условиям Спенса–Мирлиса, а функция штрафов удовлетворяет условиям (11), (12), тогда  $P(r_1) \subseteq P(r_2)$ , если  $r_1 < r_2$ .

*Доказательство леммы 2* приведено в приложении.

Из лемм 1 и 2 следует, что множество согласованных планов  $P(r)$  при сделанных предположениях о свойствах функции затрат представимо в виде отрезка  $P(r) = [x^H, x^P(r)]$ , где  $x^P(r)$  – неубывающая функция.

Обозначим  $y^* = y^*(x)$  – выбор состояния АЭ при плане  $x$ , т.е.  $y^* \in Z(x, r)$ . Если функция штрафов является сильно согласованной, т.е. выполнены условия (11), (12), и план  $x^c$  удовлетворяет условию согласования  $x^c \in P(r)$ , то  $y^* = x^c$ , если же  $x \notin P(r) = [x^H, x^P(r)]$ , то  $y^* \in P(r) = [x^H, x^P(r)]$ .

Тогда функцию предпочтения АЭ можно записать в виде

$$j(x, r) = \begin{cases} s(x) - z(x, r), & \text{если } x \in P(r), \\ s(x) - z(x, r) - c(x, y^*), & \text{если } x \notin P(r). \end{cases}$$

Соответственно, функцию предпочтения центра можно представить в виде

$$\Psi(x, r) = \begin{cases} \Phi(x, x, r), & \text{если } x \in P(r), \\ \Phi(x, y^*, r), & \text{если } x \notin P(r). \end{cases}$$

Заметим, что в силу предположения  $\Phi(y, y, r) \geq \Phi(x, y, r)$  имеет место  $\Phi(y^*, y^*, r) \geq \Phi(x, y^*, r)$ . Но так как  $y^* \in P(r)$ , то выбором плана  $x = y^*$  всегда можно обеспечить выбор активным элементом состояния  $y^*$ , т.е. функцию предпочтения центра достаточно рассматривать в области определения  $x \in P(r)$ , а

следовательно, достаточно рассматривать только те процедуры планирования  $\pi(\cdot)$ , значение которых принадлежит множеству  $P(r)$ .

Отметим, что из принятых выше предположений о свойствах функции затрат АЭ вытекает справедливость следующего утверждения (доказательство см. в [8]).

*Утверждение 3.* Процедура открытого управления  $\pi^{oy}(r)$  представляет собой неубывающую функцию, принимающую значения в множестве согласованных планов  $P(r)$ .

Отсюда следует, что оптимальную процедуру планирования достаточно искать на множестве неубывающих функций.

*Оптимальные система стимулирования и механизм в целом.*

Зафиксируем некоторое значение  $g$  показателя эффективности механизма  $\mu$ . Введем в рассмотрение множество  $L_g$  всех неубывающих непрерывных функций  $\pi_g(\cdot)$  таких, что

$$\forall r \in A, x = p_g(r) \in X : \Psi(x, r) \geq g \Psi_g(r),$$

и множество  $Q_g$  неубывающих непрерывных функций при выполнении также условия согласования  $x \in P(r)$ , т.е.

$$\forall r \in A, x = p_g(r) \in P(r) : \Phi(x, x, r) \geq g \Psi_g(r).$$

Справедливо следующее утверждение [8].

*Утверждение 4.* Предположим, что функция  $\Phi(x, x, r)$  непрерывна и строго квазивогнута по  $x$ , и пусть  $g$  таково, что неравенство  $\Phi(x, x, r) \geq g \Psi_g(r)$  разрешимо в множестве  $X$   $\forall r \in A$ , тогда множество всех точек  $(x, r)$ , удовлетворяющих этому неравенству, можно представить в виде  $\{(x, r) \mid q_1(g, r) \leq x \leq q_2(g, r), r \in A, x \in X\}$ , где  $q_1(g, r)$  и  $q_2(g, r)$  – непрерывные функции.

Рассмотрим функции

$$\bar{q}_1(g, r) = \max_{r'' \leq p \leq r} q_1(g, p), \quad \underline{q}_2(g, r) = \min_{r \leq p \leq r''} q_2^P(g, p),$$

где  $q_2^P(g, p) = \min\{q_2(g, p), x^P(p)\}$ .

Очевидно, что  $\overline{q_1}(g, r)$  и  $\underline{q_2}(g, r)$  – неубывающие непрерывные функции.

Справедливо также следующее утверждение (доказательство приведено в [8])

*Утверждение 5.* Если  $Q_g \neq \emptyset$ , то

1)  $\overline{q_1}(g, r) \leq \underline{q_2}(g, r)$  при всех  $r \in A$ ,

2)  $Q_g = N_g$ , где

$$N_g = \{x(r) \mid \overline{q_1}(g, r) \leq x(r) \leq \underline{q_2}(g, r), x(r) \in Q_g, r \in A\}.$$

Заметим, что  $N_{g_1} \subseteq N_{g_2}$ , если  $g_1 > g_2$ .

Пусть  $g$  такое, что  $N_g \neq \emptyset$ . Обозначим  $a = \underline{q_2}(g, r^h)$ .

Рассмотрим процедуру планирования

$$p_g^*(r) = \begin{cases} a, & \text{если } r^h \leq r \leq b \\ \overline{q_1}(g, r), & \text{если } b < r \leq r^b \end{cases},$$

где  $b = r^b$ , если  $a \geq \overline{q_1}(g, r^b)$ , либо  $b$  определяется как решение уравнения  $\overline{q_1}(g, b) = a$ , если  $a < \overline{q_1}(g, r^b)$ .

Заметим, что по построению  $p_g^*(r)$  является неубывающей непрерывной функцией и ее график является связным множеством. Отсюда следует, что существует функция  $\tilde{r}_g^*(x)$ , обратная к  $p_g^*(r)$ , определенная на множестве допустимых планов  $X$  за исключением, быть может, счетного числа точек, при этом  $\tilde{r}_g^*(x)$  является неубывающей.

**Теорема 3.** Оптимальный механизм функционирования  $\mu^*$  определяется следующими выражениями

$$K(m^*) = g^*,$$

$$(16) \quad x = p_{g^*}^*(r) = \begin{cases} a, & \text{если } r^h \leq r \leq b, \\ \overline{q_1}(g^*, r), & \text{если } b < r \leq r^b, \end{cases}$$



$$c^*(x, y) = u_c(x, y),$$

$$s^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x^H \leq x \leq a, \\ \int_a^x z'_t(t, \tilde{r}_g^*(t)) dt & \text{при } a < x \leq p_{g^*}^*(r^B), \\ \bar{g} & \text{при } p_{g^*}^*(r^B) < x \leq x^B. \end{cases}$$

При этом показатель эффективности оптимального механизма функционирования  $g^*$  удовлетворяет условию  $g^* = \max \{g \mid Q_g \neq \emptyset\}$ , откуда, в частности, следует требование выполнения неравенства  $a \geq \bar{q}_1(g^*, r^H)$ , а величина  $\bar{g}$  должна удовлетворять условию

$$\bar{g} = \int_a^{p_{g^*}^*(r^B)} z'_t(t, \tilde{r}_g^*(t)) dt \leq g.$$

*Примечание.* В математических выражениях в формулировке теоремы  $z'_t(t, \tilde{r}_g^*(t))$  обозначает частную производную по первой переменной функции затрат АЭ.

*Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы, приведенной в работе [8].*

Из теоремы также получаем два следствия.

*Следствие 1.*  $S^*(x)$  – неубывающая непрерывная функция.

*Следствие 2.* Величина  $K(\mu^*) = g^*$  не убывает с увеличением  $g$ .

В содержательных терминах теорема показывает, что для рассмотренной модели активной системы, как и в условиях полной информированности центра, выполнение планов обеспечивается применением штрафов с максимальным показателем роста, а процедура планирования конструируется таким образом, чтобы наиболее «экономично» использовался фонд стимулирования для обеспечения «выгодности» назначаемых планов.

Примерами показателя максимального роста функции штрафов являются

- 1) «линейная» функция

$$u_c(x, y) = u'(x, y) = \begin{cases} d_1(y - x), & \text{если } y \geq x, \\ d_2(x - y), & \text{если } y < x, \end{cases}$$

где  $d_1 \geq 0, d_2 \geq 0$ ;

2) «ограниченная» функция

$$u_c(x, y) = u^c(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } y = x, \\ C(y), & \text{если } y \neq x, \end{cases}$$

где  $C(y) \geq 0$ .

Из второго примера показателя максимального роста следует, что теорема 3, в частности, дает решение задачи синтеза оптимального механизма функционирования на множестве допустимых механизмов

$$M = \{ \mu / s(y, x) \in S^C, x = \pi(\rho), x, y \in X, \rho \in A \},$$

где  $S^C = \{ s(y, x) \mid 0 \leq \sigma(x) \leq g, \chi(x, y) \leq C(y), x, y \in X \}$ ,

так как из  $\chi(x, y) \leq C(y)$  следует  $\chi(x, y) - \chi(x, y') \leq \chi(x, y) \leq C(y)$  при всех  $x, y, y' \in X$  и  $u_\chi(x, y) = u^c(x, y)$ .

При  $C(y) = const$  из теоремы 3 как следствие получаем результат теоремы из [8] об оптимальном механизме при ограниченных функциях штрафов.

В [7, 9] задача синтеза оптимальной стратегии первого игрока (центра) решена для случая, когда целевая функция центра не зависит от значения неизвестного параметра  $r$ , но в гораздо более слабых предположениях о свойствах целевых функций игроков (центра и АЭ), а именно, в этих работах предполагалась только непрерывность целевых функций игроков. Полученное в [7, 9] при таких слабых предположениях решение задачи выглядит достаточно громоздким и сведено к решению серии задач поиска экстремумов целевых функций игроков на специально построенных множествах, которые могут иметь очень сложную структуру. Использование в настоящей статье ряда предположений о свойствах целевой функции АЭ: разделение целевой функции на систему стимулирования и функцию затрат, предположение о свойствах первых и вторых производных функции затрат АЭ, позволило доказать монотонность решений (утверждения 1 и 3). Эти свойства решений позволили найти в достаточно конструктивном виде решение задачи синтеза оптималь-

ного механизма функционирования для рассмотренной модели активной системы.

## 5. Заключение

Полученные результаты определяют условия эффективности применения на практике механизмов с так называемым «встречным» планированием [1, 11]. Действительно, поскольку в оптимальном механизме используется процедура открытого управления, активному элементу назначается наиболее «выгодный» для него план. Зная это, АЭ может сам сообщать центру вместо значения параметра  $\rho$  значение этого плана, освободив тем самым центр от трудоемкого вычисления плана в соответствии с процедурой открытого управления. Это значительно облегчает реализацию оптимальных механизмов на практике. Результаты теоремы 3 дают также определенное обоснование систем стимулирования, рекомендуемых при «встречном» планировании [11].

Заметим, что в некоторых приложениях в случае необходимости дополнительного поощрения перевыполнения «встречного» плана более естественно в качестве функции стимулирования за напряженность плана использовать функцию

$$\bar{s}^*(x, y) = \begin{cases} s^*(y), & \text{если } y \geq x, \\ s^*(x), & \text{если } y < x. \end{cases}$$

На рис. 1 и рис. 2 проиллюстрированы примеры использования «линейных» штрафов за отклонение реализации от плана в системах стимулирования при «встречном» планировании для различных значений параметра функции штрафа  $d_1$ .

Из рис. 1 видно, что при «слабых» штрафах система стимулирования может поощрять перевыполнение плана.

Дальнейшее развитие результатов (теоремы 3) даст возможность исследовать и решать задачи синтеза эффективных систем стимулирования при «встречном» планировании для случаев неполной (например, вероятностной) информированности, в том числе и АЭ о параметре  $r$ .

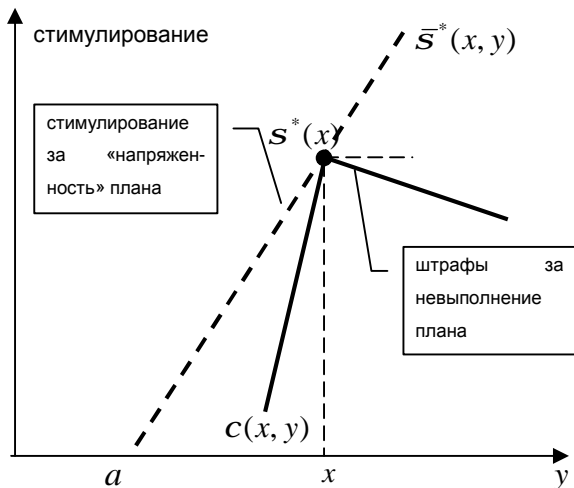


Рис. 1. Вид функции стимулирования при большом значении параметра  $d_1$  («сильный» штраф)

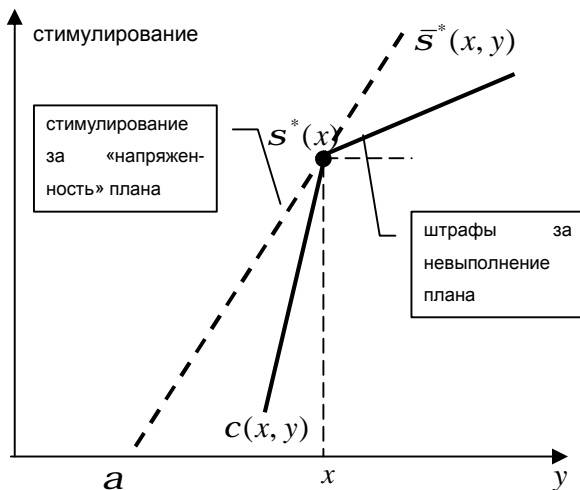


Рис. 2. Вид функции стимулирования при малом значении параметра  $d_1$  («слабый» штраф)

## Приложение

*Доказательство теоремы 1.* Покажем, что из (9) следует  $Z(r) \subseteq P(r)$ .

Предположим противное, т.е.  $Z(r) \not\subseteq P(r)$ . Это означает, что АЭ для некоторого плана  $\pi$  такого, что  $\pi \in Z(r) \setminus P(r)$ , выберет локально-оптимальное для себя состояние  $y$ , такое что  $y \neq \pi$ . Так как  $y$  – локально оптимальное состояние, то  $y \in Z(r)$ , т.е.

$$f(\pi, y, r) > f(\pi, \pi, r).$$

Здесь знак строгого неравенства записан в силу предположения о благожелательности АЭ.

С другой стороны, по определению множества  $Z(r)$  и того, что  $\pi \in Z(r)$ , должен найтись план  $x \in X$ , при котором АЭ выберет локально-оптимальное состояние  $y' = \pi$ . То есть должно выполняться неравенство

$$f(x, \pi, r) \geq f(x, y, r).$$

Складывая приведенные выше два неравенства, получим

$$f(\pi, \pi, r) + f(x, y, r) < f(x, \pi, r) + f(\pi, y, r),$$

что противоречит предположению (9). Следовательно, предположение  $Z(r) \not\subseteq P(r)$  неверно. Таким образом, доказано, что при выполнении условия (9) имеет место  $Z(r) \subseteq P(r)$ . Отсюда, кстати, следует что  $P(r) \neq \emptyset$ . По определению множества согласованных планов  $P(r)$  имеем  $P(r) \subseteq Z(r)$ , следовательно,  $P(r) = Z(r)$ . Теорема доказана.

*Доказательство теоремы 2.* Заметим сначала, что множество всех рациональных стратегий для целевой функции  $f^*(x, y, r)$  АЭ имеет вид  $Z^*(r) = \bigcup_{x \in X} Z^*(x, r)$ , где

$$Z^*(x, r) = \begin{cases} \{x\}, & \text{если } x \in \text{Arg max}_{y \in Y} f^*(x, y, r), \\ \text{Arg max}_{y \in Y} f^*(x, y, r) & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

В силу (8) и теоремы 1 множество  $Z^*(r)$  совпадает с множеством согласованных планов:  $Z^*(r) = P^*(r)$ , так как  $f^*(x, y, r)$  – сильно согласованная функция.

Итак, пусть для АЭ заданы два варианта целевой функции:  $f(x, y, r)$  и  $f^*(x, y, r)$  из множества  $F^*(r)$ . Покажем, что

$$(17) K(\mu^*) \geq K(\mu),$$

где  $K(m) = \max_{x \in X} \min_{y \in Z(x, r)} \Phi(x, y, r)$  – максимальная эффективность

механизма функционирования для первого варианта целевой функции АЭ,  $K(m^*) = \max_{x \in X} \min_{y \in Z^*(x, r)} \Phi(x, y, r) = \max_{x \in P^*(r)} \Phi(x, x, r)$  –

максимальная эффективность механизма функционирования для второго варианта целевой функции АЭ.

Рассмотрим сначала АЭ с первым вариантом целевой функции  $f(x, y, r)$ . Пусть при выборе центром некоторого произвольного плана  $x \in X$  АЭ выбирает состояние  $y, y \in Z(x, r)$ , т.е. для всех  $y' \in Y$  справедливо

$$(18) f(x, y, r) \geq f(x, y', r).$$

Покажем, что из  $y \in \tilde{I}Z(x, r)$  следует  $y \in P^*(r)$ , где  $P^*(r)$  – множество согласованных планов для целевой функции АЭ  $f^*(x, y, r)$ .

Предположим противное, т.е.  $y \notin P^*(r)$ , следовательно

$$(19) \exists y' \in X, f^*(y', y, r) > f^*(y, y, r).$$

Сложив неравенства (18) и (19), получим

$$(20) f(x, y, r) + f^*(y', y, r) > f(x, y', r) + f^*(y, y, r),$$

или неравенство

$$(21) f(x, y, r) - f(x, y', r) > f^*(y, y, r) - f^*(y', y, r),$$

которое противоречит предположению теоремы.

Следовательно,  $y \in P^*(r)$ . Отсюда и из  $\Phi(y, y, r) \geq \Phi(x, y, r)$  следует (17). Теорема доказана.

*Доказательство леммы 1.* Обозначим  $P$  множество согласованных планов:

$$P = \{x \in X \mid h(x) \geq h(y) - c(y, x), \forall y \in Y\}.$$

Очевидно  $P \neq \emptyset$ , поскольку  $y^* \in P$ , где  $y^* = \arg \max_{y \in Y} h(y)$ .

Предположим, что множество согласованных планов состоит из более чем одной точки.

Рассмотрим некоторое произвольное состояние  $\tilde{y}$ , не принадлежащее множеству согласованных планов:

$$(22) \tilde{y} \notin P.$$

Из (22) следует, что при плане, равном  $\tilde{y}$ , АЭ выберет некоторое состояние (реализацию)  $y'$ , неравное  $\tilde{y}$ , и будет выполнено неравенство

$$(23) h(\tilde{y}) < h(y') - c(y', \tilde{y}).$$

Заметим, что в силу выполнения неравенства треугольника для функции штрафов состояние  $y'$  должно принадлежать множеству согласованных планов, т.е.  $y' \in P$ .

Предположим противное, т.е. что множество согласованных планов  $P$  невыпукло, тогда  $\exists \tilde{y} \notin P$  и соответствующее ему  $y' \in P$  такие, что  $\exists y^0 \in P$  и  $\exists a, 0 < a < 1$ , что  $\tilde{y} = ay^0 + (1-a)y'$ .

Из  $y^0 \in P$  следует

$$(24) h(y^0) \geq h(y') - c(y', y^0).$$

В силу  $c(y', y^0) \geq 0$  справедливо

$$(25) h(y') \geq h(y^0) + c(y', y^0).$$

Сложив неравенства (24) и (25) с некоторыми произвольными из отрезка  $a \in [0, 1]$  весовыми коэффициентами  $a$  и  $1 - a$ , получим

$$(26) ah(y^0) + (1-a)h(y') \geq h(y') - c(y', y^0).$$

В силу вогнутости функции  $h(y)$  выполняется неравенство

$$(27) h(\tilde{y}) \geq ah(y^0) + (1-a)h(y').$$

Сравнивая (26) и (27) для  $a = \tilde{a}$ , получим неравенство

$$h(\tilde{y}) \geq h(y') - c(y', \tilde{y}),$$

которое противоречит неравенству (23). Полученное противоречие доказывает справедливость леммы.

*Доказательство леммы 2.* Множества согласованных планов для  $r_1$  и  $r_2$  можно представить в виде

$$P(r_1) = \{x \in X / -\zeta(x, r_1) \geq -\zeta(y, r_1) - \chi(y, x), \forall y \in Y\},$$

$$P(r_2) = \{x \in X / -\zeta(x, r_2) \geq -\zeta(y, r_2) - \chi(y, x), \forall y \in Y\}.$$

Покажем, что если  $x \in P(r_1)$ , то  $x \in P(r_2)$ , т.е. для  $\forall y \in Y$  из

$$(28) -z(x, r_1) \geq -z(y, r_1) - c(y, x)$$

следует

$$(29) -z(x, r_2) \geq -z(y, r_2) - c(y, x).$$

Заметим, что  $x^H \in P(r_1)$  и  $x^H \in P(r_2)$  в силу вогнутости и убывания функции затрат.

Из леммы 1 следует, что существуют такие числа  $x^*(r_1)$  и  $x^*(r_2)$ , что

$$P(r_1) = [x^H, x^*(r_1)] \text{ и } P(r_2) = [x^H, x^*(r_2)].$$

Предположим противное, т.е. из (28) не следует (29), что означает  $\exists \tilde{y}$  такое, что  $\tilde{y} < x$  и

$$(30) -z(x, r_2) < -z(\tilde{y}, r_2) - c(\tilde{y}, x).$$

Заметим, что здесь условие  $\tilde{y} < x$  справедливо в силу того, что  $-z(x, r_2) \geq -z(y, r_2)$  при всех  $y \geq x$ .

Вычтем (30) из (28) и примем  $y = \tilde{y}$ . Отсюда получим

$$(31) z(x, r_2) - z(\tilde{y}, r_2) > z(x, r_1) - z(\tilde{y}, r_1).$$

Из условий Спенса–Мирлиса,  $z''_{xr}(x, r) < 0$ , следует

$$z'_x(x, r_2) - z'_x(x, r_1) < 0,$$

но это противоречит (31) в силу  $z'_x(x, r) > 0$ .

Полученное противоречие доказывает справедливость леммы.

### Литература

1. БУРКОВ В.Н. *Основы математической теории активных систем*. – М.: Наука, 1977. – 256 с.
2. БУРКОВ В.Н., ЕНАЛЕЕВ А.К. *Оптимальность принципа открытого управления. Необходимые и достаточные условия достоверности информации в активных системах* // Автоматика и телемеханика. – 1985. – №3. – С. 73–80.
3. БУРКОВ В.Н., ЕНАЛЕЕВ А.К., КОНДРАТЬЕВ В.В. *Двухуровневые активные системы. IV. Цена децентрализации механизмов функционирования* // Автоматика и телемеханика. – 1980. – №6. – С. 110–116.
4. БУРКОВ В.Н., ЕНАЛЕЕВ А.К., ЛАВРОВ Ю.Г. *Синтез оптимальных механизмов планирования и стимулирования в*



- активной системе* // Автоматика и телемеханика. – 1992. – №10. – С. 113–120.
5. БУРКОВ В.Н., КОНДРАТЬЕВ В.В. *Механизмы функционирования организационных систем*. – М.: Наука. 1981. – 384 с.
  6. ГЕРМЕЙЕР Ю.Б. *Игры с противоположными интересами*. – М.: Наука, 1978. – 327 с.
  7. ГОРЕЛИК В.А., КОНОНЕНКО А.Ф. *Теоретико-игровые модели принятия решений в эколого-экономических системах*. – М.: Радио и связь, 1982.
  8. ЕНАЛДЕЕВ А.К. *Оптимальный механизм функционирования в активной системе с обменом информацией* // Сборник трудов «Управление большими системами». Выпуск 29. – М.: ИПУ РАН, 2010. – С. 108–127.
  9. КОНОНЕНКО А.Ф. *Роль информации о функции цели противника в играх двух лиц с фиксированной последовательностью ходов* //ЖВМиМФ. – 1973. – №2. – С. 311–317.
  10. МЕСАРОВИЧ М., МАКО Д., ТАКАХАРА И. *Теория иерархических многоуровневых систем*. – М.: Мир, 1973.
  11. *Механизмы управления: Учебное пособие* / Под ред. Д.А. Новикова. – М.: ЛЕНАНД, 2011. – 192 с.
  12. MAS-COLLEL A., WHINSTON M. D. GREEN J. R. *Microeconomic theory*. – N.Y.: Oxford Univ. Press, 1995.

## **OPTIMAL INCENTIVE COMPATIBLE MECHANISMS IN ACTIVE SYSTEMS**

**Anver Enaleev**, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Cand.Sc., chief research officer ([anver.en@gmail.com](mailto:anver.en@gmail.com)).

*A problem of incentive compatible mechanism design is studied. Conjoint design of a planning rule and an incentive scheme is considered. Sufficient conditions are obtained for optimality of incentive compatible mechanisms.*

Keywords: coordinated planning routine, open control principle, information reliability, plan fulfillment, coordination of interests, optimal mechanism design.

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии В.Н. Бурковым*

---

---

---

---

**XI - международная конференция  
Системы проектирования, технологической  
подготовки производства и управления эта-  
пами жизненного цикла промышленного  
продукта (CAD/CAM/PDM-2011)**

*Уважаемые дамы и господа, приглашаем Вас при-  
нять участие в десятой международной конферен-  
ции "Системы проектирования, технологической  
подготовки производства и управления этапами  
жизненного цикла промышленного продукта  
(CAD/CAM/PDM-2011)", которую планируется про-  
вести с 18 по 20 октября 2011 года в Москве, в Ин-  
ституте проблем управления им. В.А. Трапезникова  
РАН.*

<http://lab18.ipu.rssi.ru>

УДК 001.38

ББК 72.4

## **ИНСТИТУЦИОНАЛЬНЫЕ АСПЕКТЫ УПРАВЛЕНИЯ ГЕНЕРАЦИЕЙ ЗНАНИЙ В НАУЧНОМ СООБЩЕСТВЕ**

**Клочков В. В.<sup>1</sup>, Панин Б. А.<sup>2</sup>**

*(Учреждение Российской академии наук  
Институт проблем управления РАН, Москва)*

*В работе предлагается экономико-математическая модель выбора направления научных исследований с учетом риска дублирования работ других ученых. С помощью данной модели исследуется влияние институтов научного сообщества на эффективность генерации знаний.*

Ключевые слова: экономическая наука, эффективность, генерация знаний, оригинальность, институты, экономико-математическая модель.

### **1. Введение**

В данной работе основное внимание уделяется не директивному управлению, администрированию научной деятельности, осуществляемому чиновниками, а институтам, регулирующим ее (нормам, традициям, правилам), т.е. самоуправлению внутри научного сообщества. Действующие в нем традиции и моральные нормы – это важнейшие институты, регулирующие процессы генерации новых знаний и влияющие на эффективность этих процессов. Поскольку миссией науки является создание новых знаний, особая роль принадлежит таким специфически присущим ей институциональным нормам, как стандарты новизны научных работ, принятое в научной среде отношение к

---

<sup>1</sup> Владислав Валерьевич Клочков, доктор экономических наук ([vladislavklochkov@yandex.ru](mailto:vladislavklochkov@yandex.ru), тел. (495) 334-79-00).

<sup>2</sup> Борис Александрович Панин, аспирант ([boris.panin@gmail.com](mailto:boris.panin@gmail.com), тел. (909) 686-89-80).

плагиату и непреднамеренному дублированию ранее выполненных исследований. Именно последнее явление является предметом интереса данной работы. Можно заметить, что вплоть до недавнего времени мировое научное сообщество толерантно относилось к дублированию исследований, обычной была формулировка «открыл... независимо от...». Например, несмотря на приоритет советского ученого Л.В. Канторовича в постановке задачи и развитии методов линейного программирования, считается общепризнанным, что американские ученые Д. Данциг, Т. Купманс и др. независимо от него разрабатывали методы решения таких задач и применяли разработанный инструментарий в экономических исследованиях. Л.В. Канторович и Т. Купманс разделили Нобелевскую премию по экономике в 1975 г. То есть ситуации, когда было официально признано независимое (хотя и не синхронное) достижение научного результата разными исследователями, имели место и в XX веке. Отчасти это оправдывалось слабым развитием научной прессы и коммуникаций. С одной стороны, в настоящее время развитые информационные технологии теоретически позволяют мгновенно получить доступ ко всем опубликованным научным результатам, но, с другой стороны, лавинообразно нарастает сам объем накопленных знаний.

Обсуждаемая проблема чрезвычайно актуальна, прежде всего, для современной экономической науки в России. Если представители естественных и технических наук и в советское время активно поддерживали научные контакты с зарубежными учеными, то общественные науки находились в определенной изоляции от зарубежного научного сообщества. В связи с кардинальными политическими изменениями в нашей стране, российские представители общественных наук начали интегрироваться (в роли догоняющих) в мировую экономическую науку, накопившую на протяжении XX века огромный объем научных результатов [ 10]. Одно лишь знакомство с результатами в собственной узкой области знаний требует даже от профессионального ученого многих лет работы. Нельзя сбрасывать со счетов и еще действующий (в особенности в среде высококвалифицированных исследователей старшего поколения) языковой барьер. Несмотря на усилия ученых и специалистов, рабо-

тающих в сфере информационного обеспечения научной деятельности [ 3, 6], большие массивы накопленных научных знаний еще не кодифицированы должным образом. Кроме того, современное научное сообщество фрагментировано; в силу ряда причин, ученые зачастую и не заинтересованы в четкой и прозрачной кодификации результатов своих исследований – возникают так называемые *навигационные фильтры*, затрудняющие поиск релевантных работ. В итоге, выбирая направление исследований (в особенности, если речь идет об инициативных теоретических разработках), исследователь не может быть до конца уверен в том, что аналогичная работа уже не была выполнена. И весьма вероятна ситуация, когда добросовестные и весьма квалифицированные российские ученые будут выполнять исследования, аналогичные выполненным ранее за рубежом (с точностью до страновой специфики, которая, впрочем, может оказаться принципиально важной). Тем более что критерии «аналогичности» ужесточаются. Заметная и все более влиятельная часть научного сообщества пропагандирует ужесточение стандартов научной новизны – в особенности представители российской научной диаспоры, получившие опыт работы за рубежом, см., например, [ 4]. Наука все в большей мере воспринимается обществом и самими учеными как конкурентный бизнес, причем конкуренция в нем еще жестче, чем на рынках товаров и услуг, поскольку первооткрыватель получает всё, а «второе место не присуждается». Насколько такие институты научного сообщества эффективны с общественной точки зрения? Этот вопрос является ключевым с точки зрения управления научной сферой. Предполагается вначале рассмотреть поведение исследователя, принимающего решение о начале работы в определенной области науки и выбирающего конкретную тематику исследований. При этом особое внимание будет уделяться влиянию принятых стандартов научной новизны и принципов стимулирования научного поиска. Затем будет рассмотрена проблема оптимизации этих институтов с точки зрения общественной эффективности функционирования науки.

## 2. Формализация уровня новизны научных работ

Предположим, что в некоторой области науки над определенной проблемой работает  $N$  независимых исследователей или исследовательских групп. Пока будем считать для простоты, что каждый участник может реализовать одну определенную *исследовательскую программу*. Под таковой подразумевается определенное направление инициативных исследований (прежде всего теоретических), а не проект, претендующий, например, на грантовую поддержку (в последнем случае еще на стадии постановки задач проводилась бы и внешняя экспертиза на предмет новизны поставленных задач). Предположим, что каждая исследовательская программа описывается набором из  $i = 1, 2, \dots, k$  квалифицирующих признаков, каждый из которых в свою очередь может принимать одно из  $j_i = 1, 2, \dots, l_i$  возможных значений. Признаками могут быть, например, подход к построению модели (эконометрический анализ, имитационное моделирование, прямое экономико-математическое моделирование и т.п.), метод исследования, спецификация модели и т.п. Применительно к новым технологиям и изобретениям такие информационные модели развиты достаточно давно и даже используются в практической деятельности – например, в сфере патентной экспертизы. Подобный подход используется в работе [ 7], посвященной именно экономическим моделям. Там предлагается типовая структура *паспорта экономической модели*, содержащего такие квалифицирующие признаки, как объект моделирования, черты объекта, которые необходимо отразить, вопросы, на которые необходимо получить ответы с помощью данной модели (поскольку даже для относительно простого объекта нельзя построить универсальную модель) и т.п.

Пусть общее количество возможных вариантов, отличающихся друг от друга хотя бы по одному признаку исследовательских программ, равно  $M$  (это число можно получить путем комбинаторных расчетов при заданных  $\{l_i\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ ). Естественно, должно выполняться неравенство  $N < M$ , иначе неко-

которые исследователи будут априорно вынуждены полностью дублировать работы друг друга<sup>1</sup>.

В идеале целесообразно оценивать новизну не постановки задачи или методологии ее решения (а именно этих аспектов касаются описанные квалифицирующие признаки), а результатов. Однако научная значимость результатов, во-первых, оценивается весьма субъективно (особенно в столь политизированных областях знания, как общественные науки), и, во-вторых, нередко осознается в полной мере спустя много лет или даже столетий после их получения. Поэтому текущая оценка работ в научном сообществе нередко происходит по вышеописанным формальным критериям. До сих пор мы считали данную работу оригинальной, если она отличалась от известных хотя бы по одному квалифицирующему признаку. Однако, как правило, такого отличия недостаточно для обоснования научной новизны. Традиции, принятые в научном сообществе, могут подразумевать более жесткое требование: отличными от известных должны быть не менее  $k_{min} > 1$ ,  $k_{min} < k$  квалифицирующих признаков. Обозначим  $N_{max}$  максимально возможное число работ в данной области, удовлетворяющих установленным требованиям к новизне. Оно, в свою очередь, может быть определено путем комбинаторных расчетов при заданных  $\{l_i\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$  и  $k_{min}$ . Итоговые выражения могут быть весьма громоздкими, однако в любом случае по мере ужесточения требований к оригинальности исследовательских программ возможное количество работ, удовлетворяющих этим требованиям, сокращается. Именно эту качественную особенность и призвана отражать предложенная здесь модель формализации научных работ. Здесь не ставилось задачи разработать корректную методологию такой формализации – в этом направлении достигнуты значительные результаты учеными, работающими в сфере научной информатики, информационного обеспечения научной деятельности, см. [ 6].

---

<sup>1</sup> Здесь не рассматривается динамика процесса исследования, с учетом которой такое дублирование, в принципе, допускается изначально, но участник, первым достигший результата, получает приоритет над конкурентами, шедшими тем же путем.

В относительном выражении не менее  $\alpha_{min}\% = k_{min}/k \cdot 100\%$  квалифицирующих признаков исследования должны отличаться от известных – в противном случае его автор не будет обладать приоритетом (считаем, что предшествующие  $N$  работ априори удовлетворяют такому, более жесткому требованию). Более того, в этом случае ему угрожают определенные санкции – возможно, менее жесткие, чем те, что применяются к сознательным плагиаторам, однако и титул «изобретателя велосипеда» считается малопочетным в научной среде. Заметим, что в случае  $k_{min} > 1$  даже при  $N < M$  возможны ситуации, когда уже невозможно предложить решение, удовлетворяющее описанным требованиям к новизне. В общем случае вероятность того, что случайно выбранный вариант очередной исследовательской программы будет содержать не менее  $k_{min}$  оригинальных признаков, определяется следующим образом:

$$(1) \quad P\{k \geq k_{min}\} = 1 - \frac{N}{N_{max}(k_{min})}.$$

### 3. Модель выбора тематики исследований

Рассмотрим поведение нового,  $(N + 1)$ -го участника, считая, что все выполненные до него  $N$  работ различаются между собой не менее чем  $k_{min}$  признаками, т.е.  $N$  заведомо ниже  $N_{max}$ . Если он выбирает исследовательскую программу абсолютно случайным образом, не учитывая результатов предшествующих работ, с вероятностью  $N/N_{max}$  он выберет вариант, уже реализованный до него. Соответственно, вероятность выбрать «вслепую» оригинальный путь исследований равна  $1 - N/N_{max}$ , см. формулу (1). Естественно, по мере приближения  $N$  к  $N_{max}$  возможность получения оригинального результата исчезает.

Для простоты будем считать, что все возможные выгоды, потери и затраты, связанные с научной деятельностью, выражаются единообразно в определенных условных единицах (возможно, в денежном эквиваленте). Это допущение в современном мире недалеко от истины, поскольку, с одной стороны, научные исследования требуют значительных затрат, а с другой – в научную сферу привносится все больше элементов рыноч-



ной экономики. Следует сразу оговорить важное допущение. Предлагаемая здесь модель описывает рациональный выбор игрока, максимизирующего определенную целевую функцию. Однако на практике ученые (в том числе экономисты) нередко действуют крайне иррационально в повседневной жизни и в планировании собственной профессиональной деятельности. Рациональный выбор затрудняется еще и тем, что в реальности исследователю сложно оценить даже число ранее выполненных в данной области работ  $N$ , а тем более – максимально возможное число оригинальных исследовательских программ  $N_{max}$ .

Обозначим  $C_{doubt}$  потери автора исследования, дублирующего какое-то из ранее известных (точнее, слабо отличающегося от известных). Наиболее очевидный способ избежать этих потерь – провести заранее проверку оригинальности избранной исследовательской программы. Строго говоря, она подразумевает знакомство (хотя бы в общих чертах, на уровне вышеописанных квалифицирующих признаков) со всеми ранее выполненными работами на данную тему. Если обозначить  $C_{check}$  выраженные в стоимостном эквиваленте затраты времени и средств, сопряженные с анализом одной предшествующей работы, суммарные затраты на проверку составят  $C_{check} \cdot N$ . В современных условиях соответствующие затраты могут принимать чрезвычайно большие значения в силу обширности массива накопленных знаний, высокой трудоемкости не только анализа, но даже поиска всех релевантных работ и т.п. Это, как уже неоднократно было отмечено другими исследователями [ 2, 5, 9], представляет собой серьезное препятствие на пути развития многих отраслей науки.

Наконец, необходимо описать затраты собственно на выполнение исследований, а также выгоды, сопутствующие их успешному завершению. Последние определяются научной ценностью полученного научного результата, которая на этапе выбора исследовательской программы, строго говоря, непредсказуема. Будем считать, что она измерима количественно, и обозначим ее  $V$ . Поскольку научные результаты обладают большой общественной значимостью, большая часть этой величины представляет собой внешний эффект (строго говоря, не всегда положительный). Тем не менее автор научной работы

получает и частные выгоды, которые мы обозначим  $R$ ,  $R \leq V$ . Эти выгоды имеют как материальную, так и нематериальную природу; могут выражаться в повышении статуса ученого, моральном удовлетворении, появлении возможности преподавать и пропагандировать свои достижения, публиковать и продавать книги и т.п. Они зависят от общественной ценности результата, а также от общего числа работающих в данной области исследователей:  $R = R(V, N)$ , причем частный выигрыш возрастает по мере повышения общественной значимости результата, но сокращается с ростом общего числа выполненных в данной области работ  $N$ . Это объясняется тем, что с ростом числа ученых, работающих в той же области, статус отдельного игрока (его «рыночная власть») снижается. Помимо материального вознаграждения, в научной работе чрезвычайно важно и моральное. Естественно, с ростом числа исследователей, работающих в той же области, ощущение собственной исключительности, являющееся для многих ученых важным моральным стимулом, ослабевает.

На этапе выбора направления исследований участник может лишь предполагать, что выигрыш  $R$ , получаемый им в случае успешного завершения выбранной исследовательской программы (разумеется, удовлетворяющей вышеописанным требованиям к новизне), распределен случайным образом по некоторому закону с известным математическим ожиданием  $\bar{R}$ , зависящим от  $N$  как от параметра (зависимость, как сказано выше, убывающая). Что касается затрат на проведение исследований, различные исследовательские программы характеризуются разными объемами потребных времени и средств, и квалифицированный исследователь способен оценить эти объемы весьма точно и достоверно. Это означает, что игрок может выбирать, например, наиболее «дешевые» варианты (тем более что нередко трудоемкость исследования и ценность получаемого научного результата слабо связаны между собой, что является важной особенностью экономики знаний). В принципе, существуют и стимулы в пользу выбора более «дорогих» программ, поскольку это повышает вероятность того, что избранный путь окажется оригинальным, а стоимость проверки оригинальности

может превысить прирост стоимости более сложной программы. Однако в дальнейшем для простоты не будем учитывать различия стоимости разных исследовательских программ (тем более что для каждого потенциального участника эта оценка, строго говоря, индивидуальна и определяется его опытом, образованием, связями с коллегами и т.п.), и будем оперировать просто усредненной стоимостью проведения исследований и разработок  $\bar{c}_{R\&D}$  (в расчете на одну программу).

Таким образом, игрок может принять одно из следующих решений:

- вообще не начинать исследований в данной области (а);
- добросовестно провести анализ всех выполненных ранее работ<sup>1</sup>, сформулировать гарантированно оригинальную исследовательскую программу, реализовать ее и получить новый научный результат (более или менее ценный, чем предыдущие) (b);
- не проводя анализа предшествующих работ, выбрать направление поиска случайным образом (точнее, исходя из собственных склонностей и возможностей) и провести соответствующие исследования. В итоге он с вероятностью  $1 - N/N_{max}$  получит оригинальный научный результат (и все сопутствующие ему выгоды), а с вероятностью  $N/N_{max}$  – «изобретет велосипед» (и понесет соответствующие потери) (c).

Ниже приведены суммы ожидаемых затрат и выгод исследователя для стратегий (b) и (c):

$$(2) \quad \bar{W}_b = -c_{check} \cdot N - \bar{c}_{R\&D} + \bar{R}(N);$$

$$(3) \quad \bar{W}_c = -\bar{c}_{R\&D} - \frac{N}{N_{max}} \cdot C_{doubl} + \left(1 - \frac{N}{N_{max}}\right) \cdot \bar{R}(N).$$

В случае отказа от проведения исследований в данной области игрок не несет никаких затрат и потерь, но, разумеется, и

---

<sup>1</sup> Разумеется, в реальности никогда нельзя быть уверенным в том, что исследователь ознакомился со всеми релевантными работами, по причинам, перечисленным во введении. В этом отношении модель содержит важное упрощение.

не получает никаких выигрышей, т.е.  $W_a \equiv 0$ . Сопоставляя приведенные выражения, найдем наилучшую из трех описанных стратегий. Если  $\bar{W}_b > 0$  и  $\bar{W}_c > 0$ , игрок приступит к работе в данной области науки, причем при  $\bar{W}_b < \bar{W}_c$  не будет тратить время и средства на тщательный анализ ранее выполненных исследований, а начнет свою работу, лишь надеясь на то, что она окажется оригинальной. Сравнение выражений для  $\bar{W}_b$  и  $\bar{W}_c$  показывает, что стратегия (с) окажется выгоднее стратегии (b) при следующем условии:

$$(4) \quad N > \frac{N}{N_{max}} \cdot \frac{\bar{R} + C_{doubl}}{c_{check}}, \Rightarrow \bar{R}(N) < N_{max} \cdot c_{check} - C_{doubl},$$

или:

$$(5) \quad N > \bar{R}^{-1}(N_{max} \cdot c_{check} - C_{doubl}) = N_{observ},$$

где индекс «<sup>-1</sup>» обозначает обратную функцию, а  $N_{observ}$  (от англ. *observable* – обозримый) – максимальное число предшествующих работ, при котором целесообразно предварительно ознакомиться с ними, а не начинать свое исследование наудачу. Согласно полученной формуле и свойствам функции  $\bar{R}(N)$ ,  $N_{observ}$  сокращается с ростом затрат на проверку новизны постановки задачи  $c_{check}$  и возрастает при увеличении «штрафа» за «изобретение велосипеда»  $C_{doubl}$ .

Заметим, что, если новый участник собирается реализовать не одну исследовательскую программу, как предполагается в данной упрощенной модели, а несколько (т.е. диверсифицировать портфель направлений поиска в данной области), он получит преимущество экономии на масштабах, поскольку в любом случае придется проводить анализ  $N$  предшествующих работ. Это позволяет при прочих равных исходных условиях повысить порог  $c_{check}$ , при котором происходит «переключение» со стратегии (b) на стратегию (с). На практике такая ситуация возможна, если программа работы коллектива исследователей (пусть даже проводящих поиск независимо) координируется централизованно и координатор берет на себя проведение анализа ранее выполненных работ. Таким образом, организованные научные

коллективы имеют больше экономических стимулов и возможностей придерживаться «добросовестной» стратегии, а исследователи-одиночки чаще будут вынуждены рисковать оказаться «изобретателями велосипеда».

Чтобы игрок следовал стратегии (с), она должна быть выгоднее не только стратегии (b), но и бездействия, т.е.  $\bar{W}_c > 0$ , или:

$$(6) \quad \bar{R}(N) > \frac{\bar{c}_{R\&D} + (N/N_{max}) \cdot C_{doubl}}{1 - (N/N_{max})}, \text{ или:}$$

$$(7) \quad N < \bar{R}^{-1} \left( \frac{\bar{c}_{R\&D} + (N/N_{max}) \cdot C_{doubl}}{1 - (N/N_{max})} \right).$$

Пороговое число работ в данной области, удовлетворяющее неравенству (7) и обозначаемое далее  $N_{sat}$  (от англ. *saturation* – насыщение, в данном случае – насыщение рассматриваемой области исследований), заведомо меньше  $N_{max}$ , т.е. вход новых исследователей в данную область будет блокирован еще до того, как будут исчерпаны все возможности получения оригинальных результатов. Согласно полученной формуле,  $N_{sat}$  тем ниже, чем выше «штраф» за «изобретение велосипеда»  $C_{doubl}$  и чем выше затраты на проведение исследований  $\bar{c}_{R\&D}$ .

В случае, когда выгоднее «добросовестная» стратегия (b) (что требует, как показано выше, выполнения условия  $N < N_{observ} = \bar{R}^{-1}(N_{max} \cdot c_{check} - C_{doubl})$ , противоположного неравенству (5)), необходимо проверить выполнение условия  $\bar{W}_b > 0$ , или:

$$(8) \quad N < \bar{R}^{-1}(c_{check} \cdot N + \bar{c}_{R\&D}).$$

Пороговое значение  $N$ , удовлетворяющее данному неравенству, также имеет смысл уровня насыщения данной области знаний  $N_{sat}$ .

По мере приближения  $N$  к пороговым значениям  $N_{sat}$ , определяемым неравенствами (7)–(8), генерация новых знаний в данной области блокируется.

Разумеется, в реальности исследователь может, принимая решение, руководствоваться не ожидаемой суммой затрат и

выгод, а более жесткими критериями, отражающими его нерасположенность к риску. Например, даже при малой вероятности «изобретения велосипеда» соответствующие репутационные и другие потери могут оказаться неприемлемыми для исследователя. В этом случае, даже если  $\bar{W}_b < \bar{W}_c$ , но  $\bar{W}_b > 0$ , исследователь выберет «добросовестную» стратегию (b). Но если  $\bar{W}_b < 0$ , такой осторожный игрок вообще откажется от проведения исследований в данной области, даже при выполнении неравенства  $\bar{W}_c > 0$ . Такая ситуация складывается, прежде всего, при высоких издержках проверки оригинальности выбранной исследовательской программы ( $c_{check} \cdot N \approx \bar{R}$ ), что, как уже было отмечено выше, имеет место во многих отраслях современной науки. При этом ни в коем случае не подвергается сомнению актуальность снижения соответствующих издержек путем совершенствования научных баз данных и систем поиска, формализации, кодификации и каталогизации научных результатов и т.п., подробнее см. [ 3, 6]. Заметим, что, помимо новых информационных технологий, это требует и институциональных изменений в научной сфере, ослабляющих действие навигационных фильтров. Например, целесообразно повышение открытости не только результатов, но и применяемых методов (что, в свою очередь, потребует открытой публикации в сети Интернет полных текстов научных работ, а не только аннотаций, что наиболее характерно для зарубежной научной прессы) и т.п.

#### **4. Задача оптимального управления генерацией знаний**

Как показано в предыдущем разделе, при большом количестве ранее выполненных исследований, при высоких требованиях к оригинальности исследовательских программ и высоких репутационных потерях в случае «изобретения велосипеда» большинство потенциальных участников предпочтет не принимать участие в исследованиях в данной области, не рассчитывая на получение оригинального результата. Немногочисленные игроки, все-таки решившие работать над данной проблемой, будут вынуждены затратить большую часть времени и средств

не собственно на проведение исследований, а на проверку оригинальности поставленной задачи. Традиционно принято считать, что это неизбежно и даже желательно, свидетельствует о высоком уровне морально-этических стандартов научного сообщества, способствует повышению добросовестности ученых и т.п. Фактически, параметры  $k_{min}$  и  $C_{doubl}$  определяют важнейшие институты, регулирующие функционирование научного сообщества. Ужесточение описанных институциональных ограничений, на котором настаивает определенная часть научного сообщества (мотивируя свои предложения исключительно моральными соображениями), является, безусловно, выгодным для авторов уже выполненных (и, что немаловажно, оперативно опубликованных в ведущих научных журналах) работ, блокируя продолжение научного поиска в соответствующих областях. Помимо чисто арифметического сокращения числа исследователей, которое обеспечивает первопроходцам данного научного направления более высокий статус (большую рыночную власть), при этом снижается риск достижения новым игроком более значимого научного результата, который угрожает обесценить предшествующие. Однако зададимся вопросом: насколько эффективны такие институты научной сферы с точки зрения общественных интересов?

Прежде всего, необходимо формализовать целевую функцию общества в сфере управления наукой. Предположим, что  $M$  различных результатов, которые могут быть получены в данной области, характеризуются апостериорными значениями общественной ценности  $\{V_j\}$ ,  $j = 1, 2, \dots, M$ , причем для простоты упорядочим исследовательские программы в порядке возрастания ценности:  $V_1 \leq V_2 \leq \dots \leq V_M$ . Будем считать, что польза обществу от результатов исследований в данной области определяется научной ценностью наилучшего из полученных  $m$  результатов  $V_{max}(m) = \max_{j=1, \dots, m} V_j$ . Поскольку на стадии планирова-

ния исследований будущие результаты и их ценность априорно неизвестны, в лучшем случае можно говорить лишь об ожидаемом максимуме научной ценности результатов. Если реализуется единственная научная программа, научная ценность ее результатов автоматически становится максимальной из числа

реализованных, а ее ожидаемое значение равно средней ценности научного результата в данной области:

$$(9) \quad \bar{V}_{max}(1) = \bar{V} = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M V_j.$$

Если же, напротив, будут реализованы все  $M$  возможных исследовательских программ, в одной из них гарантированно будет достигнут наиболее ценный из возможных результатов в данной области, т.е.

$$(10) \quad V_{max}(M) \equiv V_M.$$

В промежуточных случаях соответствующая величина монотонно возрастает от  $\bar{V}$  до  $V_M$  по мере увеличения количества работ в данной области. Для определения конкретного значения  $\bar{V}_{max}(m)$  необходимо найти математическое ожидание максимального числа в случайной выборке, содержащей  $m$  элементов, взятой из массива  $(V_1, \dots, V_M)$ . Оно определяется следующим образом:

$$(11) \quad \bar{V}_{max}(m) = \sum_{j=1}^M V_j \cdot P \left\{ \max_{j'=1, \dots, m} V_{j'} = V_j \right\},$$

где  $P \left\{ \max_{j'=1, \dots, m} V_{j'} = V_j \right\}$  – вероятность того, что максимальная

ценность результатов  $m$  реализованных программ составит  $V_j$ . Важно подчеркнуть, что множители  $\{V_j\}$  в этом выражении определяются научной ценностью результатов соответствующих исследований, но вероятности

$\left\{ P \left\{ \max_{j'=1, \dots, m} V_{j'} = V_j \right\} \right\}$  не зависят от конкретных значений этих чисел и однозначно определяются для заданных  $m$ ,  $M$  и  $j$  по правилам комбинаторики.

Фактически  $P \left\{ \max_{j'=1, \dots, m} V_{j'} = V_j \right\}$  – это вероятность того, что мак-

симальное из  $m$  чисел, извлеченных случайным образом из  $M$  натуральных чисел от 1 до  $M$ , окажется равным  $j$  (очевидно, что максимальное из этих чисел не может быть меньше  $m$ ):



$$(12) P\left\{\max_{j'=1,\dots,m} V_{j'} = V_j\right\} = \begin{cases} \frac{m}{M} \cdot \frac{(j-1)!}{(j-m)!} \cdot \frac{(M-m)!}{(M-1)!}, & j = m, \dots, M, \\ 0, & j = 1, \dots, m-1. \end{cases}$$

Можно заметить, что вероятности  $P\left\{\max_{j'=1,\dots,m} V_{j'} = V_j\right\}$  монотонно возрастают с ростом  $j$ , т.е. вероятность получить при  $m > 1$  более ценные результаты выше, чем вероятность получения менее ценных результатов. Однако даже для  $j = M$  соответствующая вероятность равна  $m/M$ , т.е. доле реализованных научных программ. Поскольку искомая функция  $\bar{V}_{max}(m)$  представляет собой сумму произведений вероятностей достижения результатов  $\left\{P\left\{\max_{j'=1,\dots,m} V_{j'} = V_j\right\}\right\}$  на ценности этих результатов  $\{V_j\}$ , упорядоченные по возрастанию, и даже зависимость  $P\left\{\max_{j'=1,\dots,m} V_{j'} = V_j\right\}$  от  $m$  является строго возрастающей, то  $\bar{V}_{max}(m)$  – тем более строго возрастающая функция. Причем относительный прирост ожидаемого выигрыша с увеличением числа выполненных в данной области исследований тем выше, чем больше неоднородность ценности различных научных результатов. Если научная ценность результатов реализации различных исследовательских программ сильно варьирует, могут представлять интерес лишь наиболее удачные результаты, или даже единственный, ценность которого максимально возможна и обозначена  $V_M$ <sup>1</sup>. В этом предельном случае (т.е. при  $V_j = 0, j = 1, \dots, M-1; V_M > 0$ ), функция  $\bar{V}_{max}(m)$  становится линейной:

$$(13) \bar{V}_{max}(m) = \frac{m}{M} \cdot V_M.$$

---

<sup>1</sup> Заметим, что в этом случае, несмотря на то, что лишь один результат обладает общественной ценностью, частное вознаграждение получают авторы каждой оригинальной работы.

В составе целевой функции общества необходимо также учесть затраты на проведение исследований, включая затраты на проверку оригинальности исследовательских программ, но без учета потерь «изобретателей велосипеда», поскольку последние несут эти потери уже в частном порядке, а не за счет государства и общества. Обозначим средние затраты общества на реализацию одной исследовательской программы  $\bar{Z}_{R\&D}$ . Они выше, чем частные затраты исследователя, использованные в моделях его поведения:  $\bar{Z}_{R\&D} > \bar{c}_{R\&D}$ , причем если в теоретических исследованиях эти величины, как правило – одного порядка, то сложные и дорогостоящие экспериментальные исследования требуют гораздо больших затрат на материально-техническую базу и тому подобное, то есть  $\bar{Z}_{R\&D} \gg \bar{c}_{R\&D}$ .

Учтем, что из общего количества выполненных в данной области исследований  $N_{sat}$  первые  $N_{observ}$  будут реализованы в рамках «добросовестной» стратегии (b), т.е. с соответствующей проверкой «патентной чистоты» постановки задачи, а начиная с  $N = N_{observ} + 1$  и до  $N = N_{sat}$  – согласно «рискованной» стратегии (c). С вероятностью  $N/N_{max}$  результаты каждого из последней категории исследований не окажутся оригинальными, хотя их получение и потребует соответствующих затрат. То есть при  $N \geq N_{observ} + 1$  для получения каждого оригинального результата придется профинансировать в среднем  $(1 - N/N_{max})^{-1} = N_{max}/(N_{max} - N)$  исследований,  $N = N_{observ} + 1, \dots, N_{sat}$ . Что касается первых  $N_{observ}$  исследований, то перед началом  $N$ -го исследования придется ознакомиться с предшествующими  $N - 1$  работами,  $N = 1, \dots, N_{observ}$ .

Таким образом, целевая функция общества в сфере управления наукой (чистый выигрыш) принимает следующий вид:

$$(14) \quad U = \bar{V}_{max}(N_{sat}) - c_{check} \cdot \sum_{N=1}^{N_{observ}} (N-1) - \\ - \bar{Z}_{R\&D} \cdot \left( N_{observ} + \sum_{N=N_{observ}+1}^{N_{sat}} \frac{N_{max}}{N_{max} - N} \right) =$$

$$= \bar{V}_{max}(N_{sat}) - c_{check} \cdot \frac{N_{observ} \cdot (N_{observ} - 1)}{2} - \bar{Z}_{R\&D} \cdot \left( N_{observ} + \sum_{N=N_{observ}+1}^{N_{sat}} \frac{N_{max}}{N_{max} - N} \right),$$

а управляющими переменными являются принятые в научном сообществе стандарты научной новизны и отношения к дублированию исследований, описываемые в предлагаемых моделях параметрами  $k_{min}$  и  $C_{doubl}$ . Далее рассматривается задача их оптимизации:  $U \rightarrow \max_{k_{min}, C_{doubl}} |N_{max} \leq N_{don}$ , где  $N_{don}$  – максимально

допустимое, с точки зрения возможностей общества, число направлений поиска (для дорогостоящих экспериментальных исследований оно может быть близко или равно 1).

При этом используются описанные выше зависимости  $\bar{V}_{max}(N)$ ,  $N_{sat}(c_{check}; C_{doubl}; \bar{c}_{R\&D}; N_{max})$ ,  $N_{observ}(c_{check}; C_{doubl})$ ,  $N_{max}(k_{min})$ . Поскольку в некоторых из них используются значения обратных функций  $\bar{R}^{-1}$ , даже вычисление значения целевой функции  $U$  в конкретной точке, не говоря уже о ее максимизации, является весьма трудоемким. В общем случае поставленная оптимизационная задача решается только численно.

С целью анализа качественных особенностей целевой функции, рассмотрим поведение входящих в нее слагаемых. Поскольку  $N_{max}$ ,  $N_{sat}$ ,  $N_{observ}$ , как правило, существенно больше единицы, можно приближенно считать, что

$$\frac{N_{observ} \cdot (N_{observ} - 1)}{2} \approx \frac{N_{observ}^2}{2},$$

а сумму заменить интегралом:

$$\begin{aligned} \sum_{N=N_{observ}+1}^{N_{sat}} \frac{N_{max}}{N_{max} - N} &\approx N_{max} \cdot \int_{N_{observ}}^{N_{sat}} \frac{dN}{N_{max} - N} = \\ &= N_{max} \cdot \left( -\ln(N_{max} - N) \Big|_{N_{observ}}^{N_{sat}} \right) = N_{max} \cdot \ln \frac{N_{max} - N_{observ}}{N_{max} - N_{sat}}. \end{aligned}$$

Тогда целевую функцию можно приближенно представить в следующей форме:

$$(15) U \approx \bar{V}_{max} (N_{sat}) - c_{check} \cdot \frac{N_{observ}^2}{2} - \bar{Z}_{R\&D} \cdot \left( N_{observ} + N_{max} \cdot \ln \frac{N_{max} - N_{observ}}{N_{max} - N_{sat}} \right).$$

Обозначим для краткости  $C_{check}$  суммарные затраты на проверку новизны постановки исследовательских задач, а  $C_{R\&D}$  – суммарные затраты собственно на выполнение исследований. Итак,  $C_{check}$  возрастает приблизительно пропорционально квадрату  $N_{observ}$ .  $C_{R\&D}$  увеличивается с ростом  $N_{max}$  и  $N_{sat}$ , а с ростом  $N_{observ}$  убывает, но по логарифмическому закону, т.е. медленнее, чем возрастает квадратичная функция. Иначе говоря, при сравнимых по порядку величины затратах на выполнение исследования  $\bar{Z}_{R\&D}$  и на проверку его оригинальности  $c_{check}$  (что характерно для многих теоретических областей науки) увеличение порога  $N_{observ}$ , до которого проводится добросовестный анализ всех предшествующих работ, гораздо сильнее влияет на стоимость этой проверки, чем на объем и стоимость проведения дублирующих исследований. И, вопреки распространенному стереотипу, прирост затрат на проведение дублирующих исследований будет сравнительно невелик.

## 5. Пример расчета по предлагаемым моделям

В общем случае расчет по модели (1–15), а тем более решение оптимизационной задачи даже для одного набора значений модельных параметров является чрезвычайно трудоемким. Однако для получения качественных выводов достаточно рассмотреть следующий упрощенный иллюстративный пример. Пусть научной ценностью обладает лишь один результат из  $M$  возможных, т.е.  $\bar{V}_{max}(m) = V_M \cdot N_{sat} / M$  (см. формулу (13)). Для простоты не будем учитывать убывания частных выгод исследователя с ростом числа его коллег-соперников. Тогда в формулах (5), (7), (8) нет необходимости вычислять значения обратных функций. Неравенство (4) примет следующий вид:

$$(16) \bar{R} + C_{doubl} < N_{max} \cdot c_{check} ,$$

и величина  $N_{observ}$  теряет смысл. Если полученное неравенство выполняется, выполнять проверку оригинальности исследовательской программы заведомо невыгодно при любом количестве ранее выполненных работ. В этом случае, согласно условию (6), будет выгодно проводить исследования до тех пор, пока выполняется следующее неравенство:

$$(17) \bar{R}(N) > \frac{\bar{c}_{R\&D} + (N/N_{max}) \cdot C_{doubl}}{1 - (N/N_{max})}.$$

Соответственно, насыщение данной области знаний наступит при следующем количестве выполненных работ:

$$(18) N_{sat} = \frac{\bar{R} - \bar{c}_{R\&D}}{\bar{R} + C_{doubl}} \cdot N_{max}.$$

Поскольку проверка оригинальности исследовательских программ не проводится, целевая функция общества принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} (19) U &\approx \bar{V}_{max}(N_{sat}) - \bar{Z}_{R\&D} \cdot N_{max} \cdot \ln \frac{N_{max}}{N_{max} - N_{sat}} = \\ &= \frac{N_{sat}}{M} \cdot V_M + \bar{Z}_{R\&D} \cdot N_{max} \cdot \ln \left( 1 - \frac{N_{sat}}{N_{max}} \right) = \\ &= \frac{\bar{R} - \bar{c}_{R\&D}}{\bar{R} + C_{doubl}} \cdot \frac{N_{max}}{M} \cdot V_M + \bar{Z}_{R\&D} \cdot N_{max} \cdot \ln \left( \frac{C_{doubl} + \bar{c}_{R\&D}}{C_{doubl} + \bar{R}} \right). \end{aligned}$$

Если же выполняется противоположное неравенство

$$(20) \bar{R} + C_{doubl} > N_{max} \cdot c_{check},$$

проверка оригинальности постановки задачи предшествует выполнению всех работ, и выполняться они будут до тех пор, пока остается в силе следующее условие (см. формулу (8)):

$$(21) \bar{R} - \bar{c}_{R\&D} > c_{check} \cdot N,$$

и насыщение данной области знаний наступит при следующем количестве выполненных работ:

$$(22) N_{sat} = \frac{\bar{R} - \bar{c}_{R\&D}}{c_{check}}.$$

Целевая функция общества принимает следующий вид:

$$\begin{aligned}
 (23) \quad U &\approx \bar{V}_{max} (N_{sat}) - c_{check} \cdot \frac{N_{sat} \cdot (N_{sat} - 1)}{2} - \bar{Z}_{R\&D} \cdot N_{sat} = \\
 &= \left( \frac{V_M}{M} - \bar{Z}_{R\&D} \right) \cdot N_{sat} - c_{check} \cdot \frac{N_{sat} \cdot (N_{sat} - 1)}{2} \\
 &= \left( \frac{V_M}{M} - \bar{Z}_{R\&D} \right) \cdot \frac{\bar{R} - \bar{c}_{R\&D}}{c_{check}} - \frac{c_{check}}{2} \cdot \frac{\bar{R} - \bar{c}_{R\&D}}{c_{check}} \cdot \\
 &\quad \cdot \frac{\bar{R} - \bar{c}_{R\&D} - c_{check}}{c_{check}}.
 \end{aligned}$$

Исследуем зависимость значения целевой функции от уровня штрафа за дублирование исследований  $C_{doubl}$  и жесткости требований к новизне, которая выражается, в конечном счете, максимально возможным количеством оригинальных работ  $N_{max}$ . Примем в качестве исходных следующие значения модельных параметров:  $M = 100$ ;  $V_M = 4000$ ;  $\bar{Z}_{R\&D} = 20$ ;  $\bar{R} = 7$ ;  $\bar{c}_{R\&D} = 5$ ;  $c_{check} = 1$ . Такое соотношение модельных параметров соответствует теоретическим, а не экспериментальным исследованиям ( $\bar{Z}_{R\&D}$  и  $\bar{c}_{R\&D}$  – одного порядка), и означает, что научная деятельность является весьма рискованной и низкодоходной ( $\bar{R}$  лишь незначительно превосходит  $\bar{c}_{R\&D}$ ). На рис. 1 изображены графики зависимости чистого выигрыша общества  $U$  от уровня штрафа за дублирование предшествующих работ  $C_{doubl}$ , который изменяется от 0 до 15 (т.е. приблизительно вдвое превышает ожидаемый частный выигрыш ученого, выполнившего оригинальную работу). При этом требования к уровню оригинальности исследовательских программ таковы, что максимально возможное количество удовлетворяющих им работ в данной области  $N_{max}$  принимает значения 10, 20 и 40 (им соответствуют различные кривые).

Сравнение графиков показывает, что с ростом штрафа за «изобретение велосипеда», а также по мере ужесточения требований к оригинальности исследовательских программ, целевая функция общества убывает. Наличие горизонтальных участков графиков соответствует выполнению условия (20), т.е. ученым становится выгоднее проверять оригинальность постановки

задач до начала исследований, и общество не несет избыточных затрат на дублирование ранее выполненных работ.

Рис. 2 аналогичен предыдущему, однако, в отличие от исходных значений параметров модели, при его построении считалось, что стоимость ознакомления с одной предшествующей работой вдвое ниже:  $c_{check} = 0,5$ .

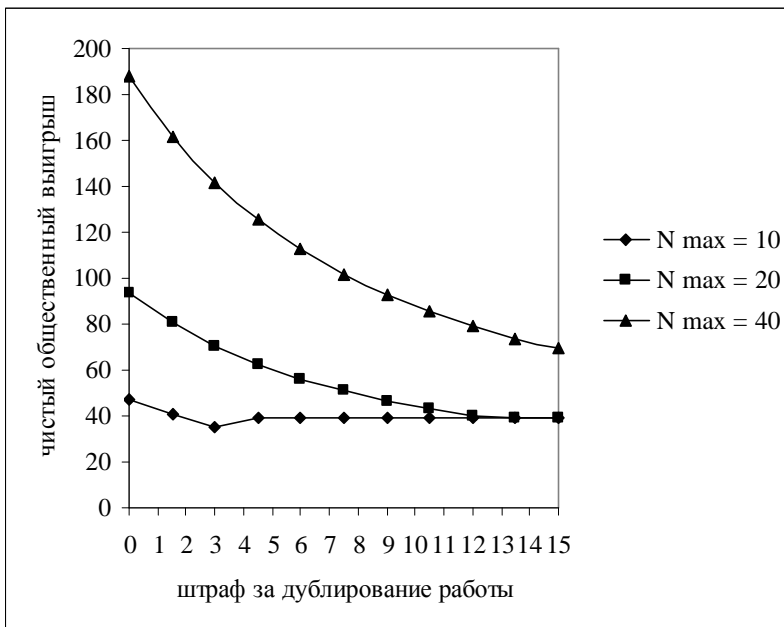


Рис. 1. Зависимость чистого выигрыша общества от уровня штрафа за дублирование ранее выполненных работ

По сравнению с исходным случаем, возросла эффективность научных исследований при жестких требованиях к новизне (т.е. при  $N_{max} = 10$  или 20). Существенно расширились и поднялись горизонтальные участки соответствующих графиков, поскольку стало существенно дешевле придерживаться «добросовестной» стратегии. Также можно заметить, что в определенном диапазоне значений  $C_{doubl}$  чистый выигрыш при более жест-

ких требованиях к оригинальности ( $N_{max} = 10$ ) даже выше, чем при менее жестких ( $N_{max} = 20$ ). Причина в том, что в этой области параметров при меньших  $N_{max}$  уже выполняется условие (20), и ученые, приступая к работе, добросовестно проверяют новизну поставленной задачи, а в противном случае возможны большие избыточные затраты общества на дублирование ранее выполненных исследований.

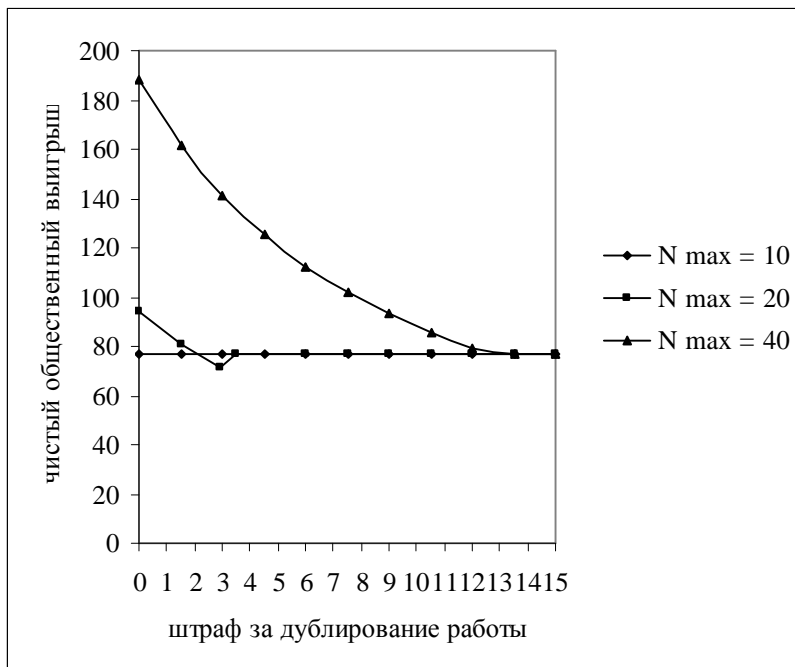


Рис. 2. Зависимость чистого выигрыша общества от уровня штрафа за дублирование ранее выполненных работ (снижена стоимость проверки оригинальности поставленных задач)

На рис. 3, в отличие от исходного рис. 1, принято большее значение частного выигрыша при выполнении оригинальной работы:  $\bar{R} = 15$ .

По сравнению с ранее рассмотренными случаями, ожидаемая продуктивность научной сферы существенно возросла, поскольку увеличение вознаграждения (более чем вдвое) стиму-



лировало значительный рост научной активности. Как и в предыдущем случае, при  $N_{max} = 20$  увеличение штрафа за «изобретение велосипеда» даже повышает чистый выигрыш общества, дисциплинируя исследователей и заставляя их добросовестно выбирать направления поиска, не дублируя предшествующие работы. Еще ярче этот эффект проявляется при  $N_{max} = 40$ . Можно видеть, что существует некоторая общественно оптимальная ставка штрафа, которая ограничивает неоправданный рост числа дублирующих работ и соответствующих затрат общества. Однако превышение этой оптимальной ставки подавляет исследовательскую активность, что приводит к сокращению ожидаемого выигрыша общества.

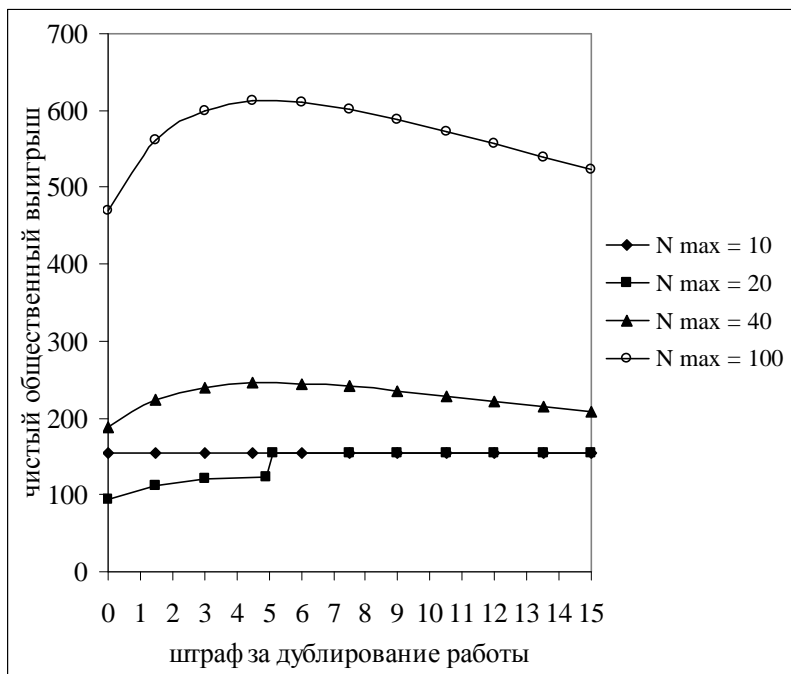


Рис. 3. Зависимость чистого выигрыша общества от уровня штрафа за дублирование ранее выполненных работ (увеличен ожидаемый частный выигрыш при успешном выполнении работы)

На рис. 3 дополнительно построен график для  $N_{max} = 100$ , т.е.  $N_{max} = M$ . В этом случае любая работа, отличающаяся от предшествующих хотя бы одним квалифицирующим признаком, считается оригинальной. Из рисунка видно, что такое увеличение свободы выбора направления исследований позволило реализовать существенно большее их количество, что положительно повлияло на продуктивность данной области науки. Заметим, что если бы все исследования координировались централизованно, с общественной точки зрения было бы оптимальным реализовать все 100 исследовательских программ, и чистый выигрыш общества составил бы  $(4000 - 20 \cdot 100) = 2000$ , что существенно выше максимальных значений, полученных выше даже в самых благоприятных случаях. Однако в предлагаемой модели учитываются затраты на самостоятельную проверку учеными оригинальности поставленных ими задач либо затраты на выполнение дублирующих исследований (в этом случае, чтобы реализовать все 100 различных исследовательских программ, фактически придется выполнить в несколько раз больше исследований). Централизованный выбор направления исследований для каждого ученого является настолько существенным ограничением свободы научного творчества, что в реальности скорее приведет к блокированию производства новых знаний, чем факторы, учтенные в предлагаемой модели.

Также можно заметить, что ослабление требований к оригинальности научных работ (т.е. увеличение  $N_{max}$  вплоть до  $M$ ) сильнее влияет на значение целевой функции общества, чем изменение штрафа за дублирование ранее выполненных работ. Анализ показывает, что в определенных, весьма реалистичных условиях с общественной точки зрения целесообразно ослабление жесткости требований к научной новизне исследовательских программ, а также наказания «изобретателей велосипеда» – более того, последних иногда целесообразно поощрять (или по крайней мере поддерживать соответствующие исследования в объеме потребных частных затрат  $\bar{c}_{R\&D}$ ). С общественной точки зрения, может быть выгоднее финансировать многократное дублирование исследований, чем тщательную проверку оригинальности поставленных задач, поглощающую все больше

времени и средств. Разумеется, в первую очередь это справедливо для теоретических исследований, а дублирование масштабных экспериментов, требующих уникального дорогостоящего оборудования и т.п., не только неэффективно (даже с точки зрения используемого здесь весьма схематичного критерия), но и в принципе нереализуемо в рамках экономических возможностей общества.

Может последовать резонный вопрос: какой смысл имеет выполнение дублирующих исследований, если даже ознакомление с  $N$  ранее выполненными работами является неоправданно трудоемким? Можно ли в этом случае рассчитывать на то, что очередная  $(N + 1)$ -я работа в данной сфере не останется без внимания? Однако следует различать ознакомление с результатами и с полным описанием процесса исследования, методов и др. Последнее (неизбежно выполняемое в рамках проверки оригинальности исследовательской программы) существенно более трудоемко. Поэтому обоснованная выше практическая рекомендация не лишена смысла.

## **6. Рекомендации по корректировке институтов научного сообщества**

Прежде всего, необходимо выработать рекомендации по корректировке институтов российского научного сообщества, для которого, как отмечено во введении, проблема дублирования ранее выполненных исследований особенно актуальна. Ряд ученых российского происхождения, тесно интегрированных в зарубежное научное сообщество, считает нецелесообразным сохранение российской науки именно под предлогом ее «вторичности», обилия дублирующих исследований, см. [ 4]. В свете полученных выше выводов этот тезис представляется отнюдь не бесспорным. Разумеется, авторы ни в коем случае не призывают целенаправленно заниматься «изобретением велосипеда». Однако добросовестное выполнение исследований, возможно, дублирующих предшествующие, является гораздо более экономичным и быстрым способом повышения квалификации имеющейся подготовленной и работоспособной части отечественных ученых, по сравнению с фактически предлагаемой

ликвидацией российского экономического научного сообщества и созданием его заново из студентов, которых предлагается обучить передовой экономической науке за рубежом. Заметим, что, помимо собственно выполнения научных работ, «изобретатель велосипеда» самостоятельно ставит научную проблему и планирует ее решение, а сохранение таких компетенций может быть даже важнее повышения «технической» квалификации, позволяющей непосредственно выполнять исследования по заданной программе. Кроме того, в сфере прикладных экономических исследований и разработок, проводимых в интересах конкретных регионов, предприятий и отраслей, вероятность «изобрести велосипед» принципиально невелика в силу специфики объектов приложения.

Некоторые качественные выводы данной работы могут быть актуальными не только для российского, но и для мирового научного сообщества. По мере усиления роли математического аппарата в экономических исследованиях, некоторые исследователи склонны придавать математическим структурам значение решающего признака научной новизны, безотносительно к предметной области, где эти структуры применяются, качественной интерпретации результатов расчета и т.п. Однако математический аппарат является лишь инструментом исследования, а модели и методы служат лишь элементами, из которых вполне могут складываться принципиально разные работы. Наглядным примером такого «модульного» подхода является модель оптимального спроса на деньги и предложения депозитов Баумоля–Тобина, см. [ 12]. Несмотря на то, что в основе этой модели, с математической точки зрения, лежит простейшая модель управления запасами, известная как *модель Уилсона* (см., например, [ 11]) с 1915 г., и признание этого факта отражено в названии статьи У. Баумоля [ 12], мировое научное сообщество высоко оценило вклад ее авторов в науку. Один из них был удостоен в 1981 г. Нобелевской премии по экономике, в том числе «за анализ состояния финансовых рынков», в котором важную роль сыграла упомянутая модель. Широко известная математическая структура была применена для ответа на новый вопрос – для оптимизации запасов не товаров, а наличных денег в портфелях активов. Можно привести множество подобных

примеров из самых разных областей науки и техники. Интересно заметить, что к аналогичной математической структуре, т.е.

оптимизационной задаче вида  $a \cdot x + \frac{b}{x} \rightarrow \min_x$ , свелась в конеч-

ном счете разработанная одним из авторов модель оптимального спроса на услуги по патрулированию магистралей и территорий, а также на патрульные летательные аппараты, см. [ 8]. Следует ли считать ее на этом основании неоригинальной? Следовало ли автору, занимаясь прогнозированием спроса в новых сегментах рынка авиатехники, прежде ознакомиться с теорией управления запасами и теорией рынка денег? Эти риторические вопросы показывают, что само понятие релевантных работ теряет смысл, если считать математические структуры значимым признаком оригинальности исследований (за исключением собственно математических). Разумеется, авторы не отрицают благотворности научной эрудиции и не предлагают априори отказаться от знакомства с ранее выполненными работами. Однако, как подтверждает хотя бы приведенный пример, такое ознакомление никогда не может быть гарантированно полным – аналогичные математические структуры (и, шире – аналогичные методологические подходы) могут встречаться в самых разных областях науки.

Кроме того, необходимо учитывать, что многие экономико-математические модели являются, по выражению П. Самуэльсона, *моделями «качественного исчисления»* [ 13], и их реальная ценность ограничивается возможностью получения приближенных оценок и качественных выводов. Такие модели должны быть *«мягкими»*, или *структурно устойчивыми* (подробнее см. [ 1]), т.е. использование тех или иных классов функциональных зависимостей, при сохранении качественного характера их поведения, не должно оказывать влияния на качественные выводы и порядки величины модельных оценок. Следовательно, многообразие конкретных вариантов математической спецификации таких моделей не приносит содержательной новизны в результаты исследований. Таким образом, с одной стороны, сходство спецификации математических моделей еще не означает сходства научных работ, а с другой стороны

– различие спецификации моделей не гарантирует принципиального различия работ. Поэтому абсолютизация математических структур как решающего признака научной новизны и неправомерна, и неэффективна с точки зрения развития науки. Более того, ужесточение требований к новизне работ именно в отношении математической спецификации моделей, как ни парадоксально, стимулирует «изобретение велосипеда», причем непродуктивное. Стремясь обойти формальные ограничения на применение ранее использованных математических структур, исследователи будут вынуждены, отражая те же качественные закономерности, изобретать новую спецификацию, по существу, одной и той же «мягкой» модели. В принципе, авторы модели Баумоля–Тобина могли разработать новую модель управления запасами, более сложную, чем модель Уилсона, однако это не повысило бы научной ценности предложенной ими модели спроса на деньги и не изменило бы качественного характера выводов.

Ученые, занимающиеся реальными исследованиями в той или иной области, обратят внимание на сильное упрощение, содержащееся в предпосылках предложенной выше модели выбора научной программы. Предшественники данного исследователя рассматриваются здесь как его конкуренты, а предшествующие работы – как ограничители свободы научного поиска. Более естественная и продуктивная организация исследований подразумевает не конкуренцию, а кооперацию в научном сообществе. Как обосновано, например, в [ 5], предшествующие работы следует рассматривать как фундамент будущих исследований, источник знаний и плодотворных творческих идей, а их авторов – как коллег и союзников, а не соперников. Тем не менее, ужесточение конкуренции сокращает возможность таких, безусловно, более здоровых отношений в научном сообществе. В итоге знакомство ученых с чужими работами все в большей степени является проверкой «патентной чистоты», а не взаимным обогащением плодотворными идеями. В современную науку привносятся стандарты конкуренции, свойственные даже не бизнесу, а профессиональному спорту. Проведенный анализ дает определенные основания утверждать, что это – непродуктивный путь развития институтов научного сообщества.

## 7. Заключение

С помощью экономико-математических моделей показано, что для повышения общественной эффективности генерации знаний при определенных условиях может быть целесообразным ослабить:

- требования к оригинальности научных работ (в особенности формальные, касающиеся спецификации математических моделей), что позволит избежать блокирования генерации новых знаний задолго до получения наиболее значимых результатов в данной области науки;
- наказание за дублирование ранее выполненных исследований, что позволит направить силы и средства непосредственно на поиск новых знаний, а не на проверку и доказательство оригинальности постановки научных задач, поглощающую все больше ресурсов.

Предложенные в данной работе модели, а также полученные с их помощью качественные выводы и рекомендации сами, в свою очередь, могут оказаться неоригинальными, в силу простоты используемого инструментария и актуальности изучаемой проблемы для многих исследователей (как в России, так и за рубежом). Однако, как показывает проведенный выше анализ, это не снижает их практической значимости.

### Литература

1. АРНОЛЬД В.И. *«Жесткие» и «мягкие» математические модели*. – М.: МЦНМО, 2000. – 32с.
2. БАЛАЦКИЙ Е.В. *Мировая экономическая наука на современном этапе: кризис или прорыв? // Наукосведение*. – 2001. – №2. – С. 68–72.
3. БАРАХНИН В.Б. *Программные системы информационного обеспечения научной деятельности: модели, структуры и алгоритмы*: Автореферат дисс. докт. техн. наук. – Новосибирск, 2010. – 35 с.

4. ГУРИЕВ С.М., ЛИВАНОВ Д.В., СЕВЕРИНОВ К.В. *Шесть мифов Академии наук* // Эксперт. – 2009. – №48(685).
5. ЗАЙМАН ДЖ. *Информация, связи, знание* // Успехи физических наук. – 1970. – Т. 101, вып. 1. – С. 53–69.
6. ИЛЬИН В.Д. *Технология научной деятельности: подход к повышению продуктивности* // Управление большими системами. Выпуск 29. – 2010. – С. 88–107.
7. КЛЕЙНЕР Г.Б. *Экономико-математическое моделирование и экономическая теория* // Экономика и математические методы. – 2001. – Т. 37, №3. – С. 111–126.
8. КЛОЧКОВ В.В., НИКИТОВА А.К. *Методы прогнозирования спроса на беспилотные летательные аппараты и работы по воздушному патрулированию* // Проблемы прогнозирования. – 2007. – №6. – С. 144–151.
9. ПОЛТЕРОВИЧ В.М. *Кризис экономической теории* // Экономическая наука современной России. – 1998. – №1. – С. 46–66.
10. ПОЛТЕРОВИЧ В.М., ФРИДМАН А.А. *Экономическая наука и экономическое образование в России: проблема интеграции* // Экономическая наука современной России. – 1998. – №2. – С. 112–122.
11. РЫЖИКОВ Ю.И. *Теория очередей и управление запасами*. – СПб.: Питер, 2001. – 384 с.
12. BAUMOL W. *The Transactions Demand for Cash: An Inventory-Theoretic Approach* // Quarterly Journal of Economics. – November, 1952. – Vol. 6. – P. 545–556.
13. SAMUELSON P. *Foundations of Economic Analysis*. – Cambridge: Cambridge University Press, 1948.



## **INSTITUTIONAL ASPECTS OF NEW KNOWLEDGE CREATION BY SCIENTIFIC COMMUNITY**

**Vladislav Klochkov**, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Doctor of Science (vladislavklochkov@yandex.ru)

**Boris Panin**, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, post-graduate student (boris.panin@gmail.com)

*Abstract: An economic-mathematical model of scientific research direction chosen subject to risk of other scientists' works copying is proposed. By means of this model the influence of scientific community standards on research efficiency is considered.*

**Keywords:** economic theory, efficiency, new scientific knowledge creation process, novelty requirements, institutions, economic-mathematical model.

*Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии В. Д. Секериным*

УДК 681.513.5

ББК 34

## ОПТИМИЗАЦИЯ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ ПРЕДСТАВЛЕННЫХ СЕТЯМИ ПЕТРИ СИСТЕМ С ПОМОЩЬЮ ИСКУССТВЕННЫХ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ

Сочнев А. Н.<sup>1</sup>

(Сибирский федеральный университет, Красноярск)

*Статья содержит описание метода оптимизации систем, представленных моделями на основе сетей Петри. В качестве оптимизатора предполагается применение обученной в соответствии с выбранным критерием оптимальности искусственной нейронной сети. Приводится пример использования предлагаемого метода управления имитацией сети Петри.*

Ключевые слова: сеть Петри, правила приоритета, искусственная нейронная сеть.

### 1. Введение

Организация управления сложными техническими системами предполагает, как правило, использование имитационных моделей, которые позволяют предварительно исследовать систему и выявить ее основные свойства. Использование сетевых моделей в системах управления с эталонной моделью ограничивается недостаточной гибкостью сетей Петри и их неспособностью учитывать быстро изменяющиеся условия внешней среды и требования к качеству процессов в системе. Типичный метод оптимизации – использование приоритетов операций не позволяет достаточно эффективно управлять имитацией сети. Исходя из этого, разработка новых методов оптимизации систем, пред-

---

<sup>1</sup> Алексей Николаевич Сочнев, кандидат технических наук, доцент (lesek@mail.ru).

ставленных сетями Петри, представляется актуальной научной и практической задачей.

## **2. Описание исследуемой производственной системы**

В качестве объекта исследования рассматривается Учебно-исследовательский гибкий производственный комплекс (УИ ГПК), входящий в структуру Политехнического института ФГАОУ ВПО «Сибирский федеральный университет» и предназначенный для обучения студентов элементам *CAD/CAM*-технологий, методам автоматизированного управления и программирования устройств числового программного управления (ЧПУ) оборудования. В состав УИ ГПК входят: автоматизированный складской комплекс РСК-250, два токарно-винторезных станка 16К20Ф3 с системой ЧПУ 2Р22, токарный станок *Haas TL-1*, фрезерный станок *Haas TM-1* и обрабатывающий центр 2254ВМФ4.

Для дальнейшего исследования процессов в системе пронумеруем технологическое оборудование следующим образом:

- токарные станки 16К20Ф3 – №1 и №2;
- обрабатывающий центр 2254ВМФ4 – №3;
- токарный станок *HAAS TL-1* – №4;
- вертикальный фрезерный станок *HAAS TM-1* - №5.

В структуре учебно-исследовательского роботизированного технологического комплекса можно выделить две производственные ячейки, первая из которых содержит станки №1–3, вторая – станки №4, 5.

Для составления плана – графика производственного процесса задается номенклатура деталей, производимых УИ ГПК. Предусматривается обработка деталей тридцати типов. Время обработки представлено в единицах (тактах), равных 0,1 минуты. Задается также и необходимый объем производства каждого вида деталей. Одни детали требуют только токарной обработки, другие – токарной и фрезерной. Предполагается, что тара с заготовками присутствует в роботизированном складском ком-

плексе. Готовые изделия также направляются в ячейки склада. Приоритет всех изделий установлен одинаковым.

При формировании оптимального производственного процесса необходимо предварительно определить возможные траектории перемещения изделий внутри рассматриваемой производственной системы. Все изделия можно разделить на три вида: требующие токарной обработки (Т), требующие фрезерной обработки (Ф) и требующие последовательно токарной и фрезерной обработки (ТФ).

В рассматриваемой системе можно выделить возможные траектории перемещения изделий (рис. 1). Эти траектории определяются технологом с учетом свойств станков и технологических процессов изделий.

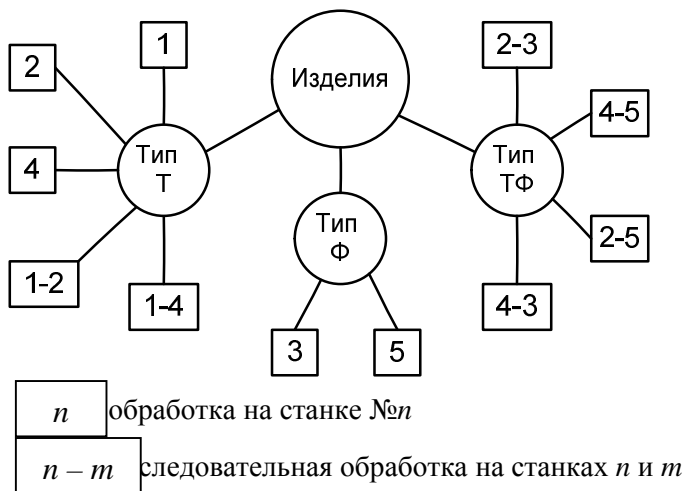


Рис. 1. Структура технологических маршрутов внутри УИ ГПК

Общее количество возможных технологических маршрутов в системе  $5 + 2 + 4 = 11$ .

В соответствии с технологическими процессами первую группу изделий (Т) условно разделим на две подгруппы: первая (Т1) содержит изделия, обрабатываемые с одной установки, вторая (Т2) – изделия, требующие переустановку.

### 3. Формирование сетевой модели системы

Представленная выше структура технологических маршрутов является основой для формирования имитационной модели системы на основе сети Петри. Сети Петри являются удобным и достаточно универсальным средством представления дискретных систем. Это проявляется в частности в том, что они позволяют формировать модели с требуемой степенью детализации. Для задачи предварительного планирования производственного процесса степень детализации может быть меньше, чем при непосредственном согласованном управлении оборудованием в реальном времени. В рассматриваемом случае для распределения изделий по элементам системы можно операции обработки представить обобщенно, без выделения вспомогательных и транспортных операций.

Из всех классов сетей Петри для моделирования дискретного производства наилучшим образом подходят цветные (раскрашенные) сети Петри, поскольку они позволяют наглядно и компактно представить системы, в которых присутствует большое количество разнотипных объектов (изделий) [4].

Структура модели формируется на основе структуры технологических маршрутов, представленной ранее. Выделяются три позиции (P0, P10, P14), в которые помещаются маркеры, соответствующие изделиям типа Т, Ф и ТФ соответственно. Начальная маркировка соответствует требуемому объему производства каждого типа. Формируются позиции, представляющие доступность каждого агрегата производственной системы в отдельные моменты времени: P2 – токарный станок 16K20Ф3 (№1); P17 – токарный станок 16K20Ф3 (№2); P15 – обрабатывающий центр 2254ВМФ4 (№3); P19 – токарный станок *HAAS TL-1* (№4); P18 – фрезерный станок *HAAS TM-1* (№5). В позициях сети P9, P13 и P27 скапливаются готовые изделия типа Т, Ф и ТФ соответственно. Остальные позиции модели представляют движение объектов производства внутри системы (незавершенное производство).

Основная часть переходов сети разработанной модели представляет обобщенные операции производственного процес-

са. Переходы T7–T11, T15, T16, T24–T27 не имеют интерпретации в реальной системе и предназначены для организации накопления маркеров, приходящих по разным траекториям в сети в выходные позиции P9, P13 и P27.

Количество цветов в модели составляет  $n + 1$ , где  $n$  – количество изделий. Цвет  $n + 1$  выбран для представления в модели доступности ресурсов, он отображает занятость станков. При необходимости можно ввести различимые маркеры и для каждой единицы оборудования.

Сеть, представленная на рис. 2, может являться иерархической и в общем случае содержит три уровня. Каждый из переходов, отображающий обработку, может быть представлен подсетью, содержащей три последовательно выполняющихся перехода, отображающие установку на станок и связанные с ней операции, собственно обработку изделия и удаление со станка готовой детали (рис. 3).

При необходимости реализации системы группового диспетчерского управления производством модель может быть детализирована до уровня каждого технологического перехода и операции (рис. 4).

#### **4. Постановка задачи оптимизации**

Оптимизация процессов в рассматриваемой системе содержит в своей основе перераспределение потоков заявок на обработку между отдельными производственными ячейками и агрегатами. Задача распределения изделий по отдельным структурным единицам является сложной, учитывающей многие факторы и условия, и в большинстве случаев решается человеком. В то же время в настоящее время существуют математические методы, позволяющие решать подобные задачи. В данной статье предлагается дополнить сеть Петри механизмом принятия решений на основе искусственной нейронной сети, которая позволит принимать решения о выборе активируемых переходов сети. Правила работы нейронной сети предполагается заложить на этапе обучения перед имитацией сети Петри.

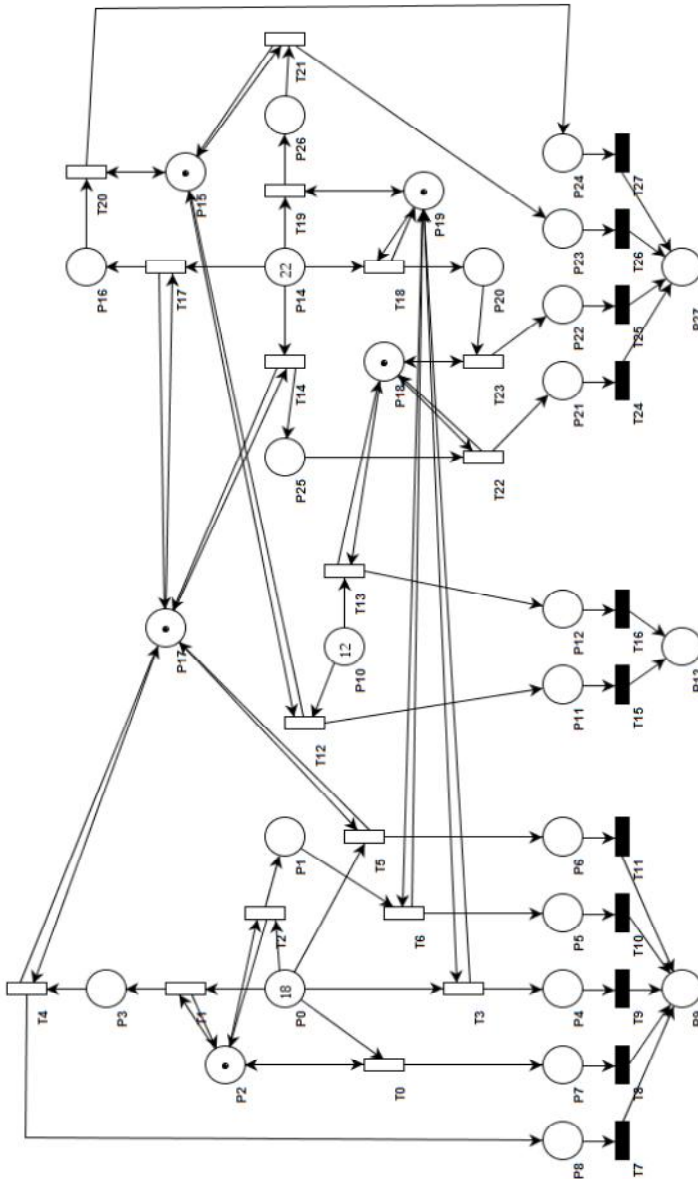


Рис.2. Имитационная модель производственного процесса

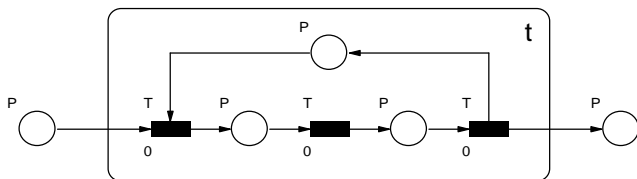


Рис. 3. Структура подсети обработки

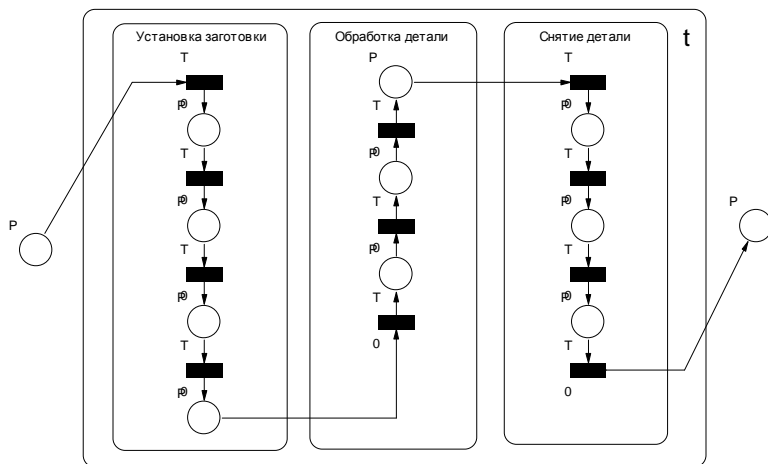


Рис. 4. Структура подсети обработки (детализированная)

Исследования показывают, что применение нейросетей в задачах классификации и распознавания дает очень хорошие результаты. Рассматриваемая задача по сути является аналогичной, так как нейросеть фактически должна классифицировать состояние (маркировку сети или другие переменные), предъявляемое на ее вход. Это позволяет прогнозировать хорошие результаты применения нейронной сети для данной задачи.

Оптимизация функционирования производственных систем может осуществляться по различным критериям. Наиболее часто используемыми критериями являются: максимизация объемов выпуска продукции, максимизация загрузки оборудования, минимизация времени производственного процесса и другие [2].



Выбор критерия эффективности осуществляется индивидуально для каждого конкретного производственного подразделения по результатам анализа его экономических, организационных и технических особенностей. Наиболее часто используют в качестве критерия эффективности минимизацию времени выпуска заданного объема продукции

$$(1) \quad T = \max_{j \in J} [T_{jB} + T_{jПЕР} + T_{jПР}] \rightarrow \min_{P \in \Omega_p},$$

где  $\Omega_p = \{P : G = (L_{i_1}; L_{i_2}; \dots; L_{i_{m_j}}), t_{ij}^k = t_{ij}^0 + t_{ij}, t_{i_1 j_1}^0 \leq t_{i_2 j_2}^0, i = \overline{1, m_j}, j = \overline{1, n}\}$ ;

$J$  – множество единиц оборудования;  $T_{jB}$  – суммарное время выполнения операций  $j$ -й единицы оборудования;  $T_{jПЕР}$  и  $T_{jПР}$  – суммарное время соответственно переналадок и простоя  $j$ -й единицы оборудования;  $L_{ij} = (q_{ij}, t_{ij})$  – операция с номером  $i$ ,  $i = 1, \dots, m_j$ , которая выполняется над  $j$ -й деталью,  $j = 1, \dots, n$ ;  $m_j$  – число операций, которое необходимо выполнить над  $j$ -й деталью;  $q_{ij}$  – номер группы оборудования, настроенного на выполнение операции  $L_{ij}$ ;  $t_{ij}$  – номинальная продолжительность выполнения операций  $L_{ij}$ .

Иногда используют частные случаи указанного критерия, например:

– минимизация максимального времени простоя

$$(2) \quad T = \max_{j \in J} [T_{jПР}] \rightarrow \min_{P \in \Omega_p},$$

где  $\Omega_p = \{P : G = (L_{i_1}; L_{i_2}; \dots; L_{i_{m_j}}), t_{ij}^k = t_{ij}^0 + t_{ij}, t_{i_1 j_1}^0 \leq t_{i_2 j_2}^0, i = \overline{1, m_j}, j = \overline{1, n}\}$ ,

– максимизация загрузки оборудования

$$(3) \quad K = \min_{j \in J} \left[ \frac{T_{jB}}{T_{jB} + T_{jПЕР} + T_{jПР}} \right] \rightarrow \max_{P \in \Omega_p},$$

где  $\Omega_p = \{P : G = (L_{i_1}; L_{i_2}; \dots; L_{i_{m_j}}), t_{ij}^k = t_{ij}^0 + t_{ij}, t_{i_1 j_1}^0 \leq t_{i_2 j_2}^0, i = \overline{1, m_j}, j = \overline{1, n}\}$ ;

$Y = Y'$ ;  $Y'$  – заданный объем выпускаемой продукции.

Часто в реальных производственных условиях целесообразно решать задачу календарного планирования с одновременным учетом нескольких критериев, т.е. как многокритериальную. Один из способов многокритериальной постановки задачи – составление компромиссного критерия. Пусть выбрано  $r$

локальных критериев  $(F_1, F_2, \dots, F_r)$ , которые предполагается включить в компромиссный. Ими могут быть, например, перечисленные выше. Для каждого из локальных критериев решается задача оптимизации и вычисляется его экстремальное значение  $F_i^* (i = \overline{1, r})$ . На основе аналитического выражения каждого критерия записывается уравнение отклонений от оптимального значения

$$(4) \quad Q_i = F_i - F_i^*, i = \overline{1, r}.$$

Задаются также весовые коэффициенты  $I_i$  для каждого критерия.

Для построения компромиссного критерия используют различные выражения, например либо аддитивную функцию свертки

$$(5) \quad Q = \sum_{i=1}^r Q_i I_i \rightarrow \min,$$

либо функцию, обеспечивающую равномерность отклонения каждого критерия от экстремального значения (с учетом веса)

$$(6) \quad Q = \sum_{i=1}^r I_i \frac{Q_i}{F_i^*}.$$

Ограничения. Кроме очевидных ограничений по времени операций при решении задач календарного планирования приходится учитывать еще ряд других, например по структуре сети транспортных маршрутов или директивные сроки окончания обработки определенных деталей.

Для каждого критерия оптимальности нейросеть должна быть обучена индивидуально. Таким образом, в распоряжении диспетчера должна появиться библиотека искусственных нейронных сетей, из которой будет осуществляться выбор при планировании производства.

В рассматриваемой производственной системе задачу оптимизации будем решать как многокритериальную. Первый критерий – минимизация объема незавершенного производства в системе, второй – минимизация времени процесса за счет выравнивания загрузки станков.

Следует заметить, что использование нейросети позволяет отказаться от формирования компромиссного критерия. В этом случае достаточно того, чтобы предъявляемые на вход сети обучающие примеры учитывали оба критерия. Важность (весомость) каждого из критериев также должна быть учтена в значениях элементов входных векторов. Учитывая это обстоятельство, выбирается такой тип нейронной сети, который предусматривает обучение с учителем.

## **5. Формирование структуры искусственной нейронной сети**

В настоящее время теория искусственных нейронных сетей достаточно развита. Для различных задач разработаны разные классы нейросетей. Соответственно, первая стадия – это выбор типа нейронной сети. В данном случае выберем наиболее распространенный тип – многослойный персептрон. Формирование структуры искусственной нейронной сети представляется трудноформализуемой и итерационной задачей.

Нейронная сеть содержит входной слой, выходной и один скрытый слой. Скрытый слой существенно улучшает свойства нейронной сети [1, 3, 5]. Количество нейронов входного слоя соответствует числу учитываемых факторов. Для рассматриваемой системы входные нейроны воспринимают информацию о текущих значениях коэффициентов загрузки основного технологического оборудования и объеме незавершенного производства каждого типа изделий (Т, Ф и ТФ).

Система содержит пять металлообрабатывающих станков и три типа изделий, поэтому количество нейронов входного слоя в нейросети  $N = 8$ . Количество нейронов промежуточного слоя  $K$  рекомендуется выбирать от  $N$  до  $3N$ . Экспериментально было подобрано  $K = 16$ . При данном значении обеспечивается высокая скорость обучения, а также обобщающие свойства сети не ухудшают качество классификации состояний. Функция активации нейрона для каждого нейрона сигмоидальная (логистическая). Количество нейронов в выходном слое равно количеству переходов сети Петри, которые управляются нейросетью. Рас-

сматриваемая модель содержит одиннадцать управляемых переходов, поэтому количество нейронов выходного слоя  $M = 11$ . Управляемые переходы сети: T0, T1, T2, T3, T5, T12, T13, T14, T17, T18, T19.

Создание, обучение и исследование нейросетей осуществляется в пакете *Neural Network Toolbox*. Листинг программы *Matlab* представлен ниже.

Основные обозначения:  $p$  – обучающий вектор ( $p_1, p_2, \dots, p_5$  – коэффициенты загрузки соответствующих единиц оборудования,  $p_6, p_7, p_8$  – относительное количество заготовок типа Т, Ф и ТФ;  $t$  – вектор выходных состояний нейросети, соответствующих компонентам обучающего вектора;  $a$  – тестовый вектор;  $y$  – выходной вектор нейронной сети.

Элементы выходного вектора нейронной сети интерпретируются как приоритеты соответствующих управляемых переходов сети Петри.

```
p=[[0;0.1;0.5;0.2;0.8;0.2;0.1;0.7] [0.5;0;0.8;0.3;0.1;0.3;0.5;0.2]
[0.1;0.3;0.5;0.1;0.1;0.4;0.2;0.4] [0.2;0.4;0.3;0.6;0.2;0.8;0.1;0.1]
[0.8;0.8;0.2;0.7;0.5;0.4;0.3;0.3]
[0.1;0.2;0.1;0.4;0.2;0.6;0.1;0.3]];
p
t=[[1;1;1;0.7;0.7;0.7;1;0.5;0.5;0.2;0.2]
[0.3;0.3;0.3;1;1;1;0.4;0.5;0.5;0.8;0.8]
[0.9;0.9;0.9;0.6;0.6;0.6;0.2;1;1;1;1]
[1;1;1;0.8;0.8;0.8;0;0.6;0.6;0.3;0.3]
[0.4;0.4;0.4;0.3;0.3;0.3;1;0.9;0.9;0.7;0.7]
[1;1;1;0.8;0.8;0.8;0.2;0.6;0.6;0.7;0.7] ];
t
net = newff([0 1; 0 1; 0 1; 0 1; 0 1; 0 1; 0 1; 0 1; 0 1],[8 16
11],{'logsig' 'logsig' 'logsig'},'traingdx');
net.trainParam.epochs = 10000;
net.trainParam.goal = 1e-5;
net=train(net,p,t);
a=[[0;0.8;0.5;0.8;0.8;0.2;0.1;0.7] [0.5;0;0.1;0.2;0.4;0.7;0.1;0.2]
[0.1;0.3;0.8;0.1;0.6;0.2;0.2;0.6]
[0.2;0.04;0.1;0.9;0.2;0.2;0.7;0.1]
```

```
[0.8;0.3;0.2;0.7;0.05;0.6;0.3;0.1]  
[0.2;0.2;0.1;0.2;0.2;0.2;0.6;0.2] ];  
y=sim(net,p); y  
y=sim(net,a); y  
gensim(net);
```

По завершению работы приведенной программы формируется структура сети создаются структурные модели нейронной сети в пакете *Simulink* (рис. 5) и производится её обучение (рис. 6). Точность обучения нейронной сети выбрана равной  $10^{-5}$ . Она достигается за 3360 шагов.

Обучающие примеры сформированы таким образом, что маркеры должны направляться в те участки сети, в которых переходы наименее загружены. Второй фактор, применяемый для решения, – текущее количество заготовок каждого типа. В первую очередь выбираются маркеры, моделирующие заготовки изделий, которых больше чем других во входном накопителе.

Реакция нейронной сети на тестовый вектор соответствует ожидаемой (столбцы – номера векторов):

y = 0,2921	0,9992	0,7748	0,0814	0,9725	0,9894
0,2595	0,9980	0,2660	0,9827	0,9920	0,9875
0,2170	0,9982	0,3678	0,9509	0,9896	0,9939
0,6449	0,6291	0,6792	0,9744	0,8264	0,7590
0,6201	0,6247	0,7572	0,9957	0,7900	0,8820
0,6185	0,7011	0,5534	0,9684	0,7019	0,6454
0,9998	0,0787	0,9518	0,7418	0,0064	0,8944
0,6642	0,8318	0,9348	0,0399	0,8644	0,4828
0,5359	0,8641	0,9834	0,0580	0,7872	0,5504
0,1530	0,8439	0,9833	0,3712	0,7251	0,6110
0,5455	0,7763	0,9796	0,0270	0,5728	0,6028

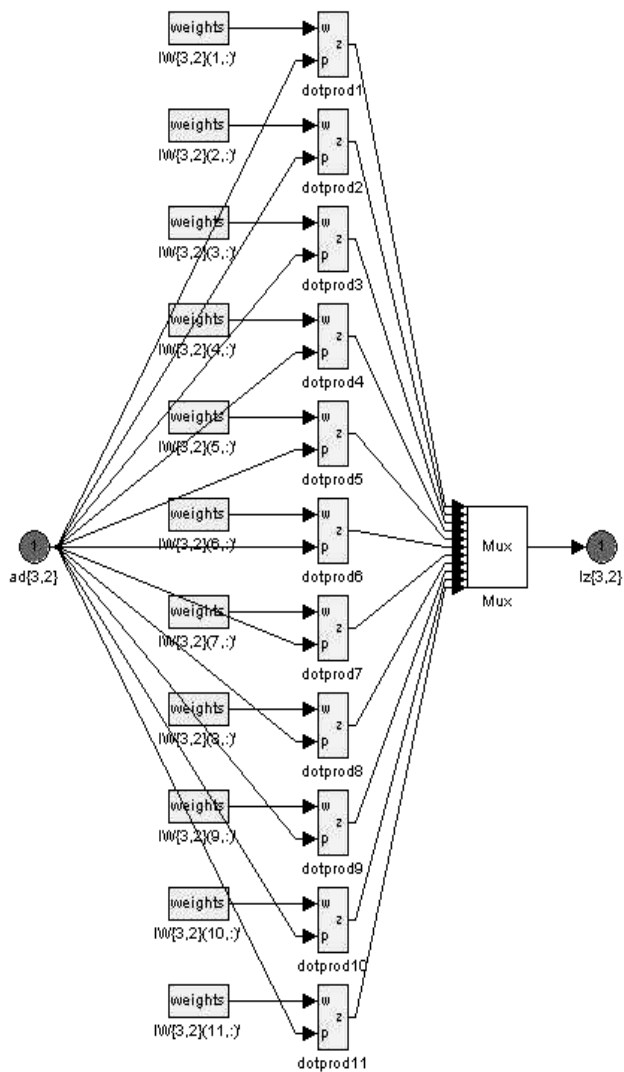


Рис. 5. Структура выходного слоя нейронной сети

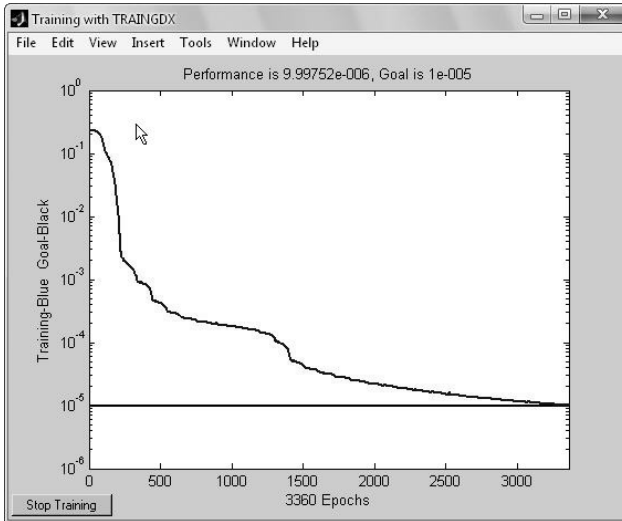


Рис.6. Процесс обучения нейронной сети

## 6. Исследование эффективности предложенного метода

Задача практической реализации совместного функционирования раскрашенной сети Петри и искусственной нейронной сети потребовала разработки программы на алгоритмическом языке программирования, поскольку известные программные продукты не позволяют ее решить. Программа сформирована на основе алгоритмического языка Паскаль, имеет модульную структуру (рис. 7) и разные режимы работы: с последовательным выбором активируемых переходов, со случайным выбором и режим активации, управляемый нейронной сетью. Программа позволяет оценить качество работы системы расчетом суммарного времени выполнения процесса, коэффициентов загрузки каждого перехода и загрузки каждого станка.

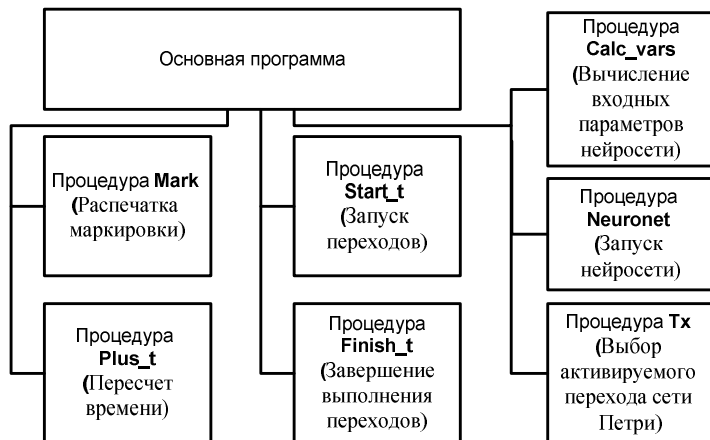


Рис. 7. Модульная структура разработанной программы

Исследование эффективности предлагаемого подхода выполнено путем сравнения режимов работы сети со случайным выбором активируемых переходов и выбором на основе решений нейросети. Выходной вектор нейросети анализируется следующим образом:

- 1) активируется такой переход  $t_j$ , для которого элемент вектора  $u_j$  максимален;
- 2) значение элемента  $u_j$  заменяется на ноль;
- 3) выбирается из оставшихся элементов вектора  $u$  максимальный элемент и активируется соответствующий переход;
- 4) процесс повторяется до тех пор, пока все элементы вектора  $u$  не станут нулевыми.

Если поставить цель некоторого ускорения работы приведенного алгоритма, то можно ограничиться неполным перебором элементов выходного вектора нейросети. В таблице 1 приведены результаты экспериментов для случая, когда из выходного вектора нейронной сети последовательно выбираются три наиболее предпочтительных перехода сети Петри. Всего в таблице представлены результаты имитационных экспериментов для трёх вариантов работы системы: вариант 1 – случайный выбор активируемых переходов; вариант 2 – выбор наименее

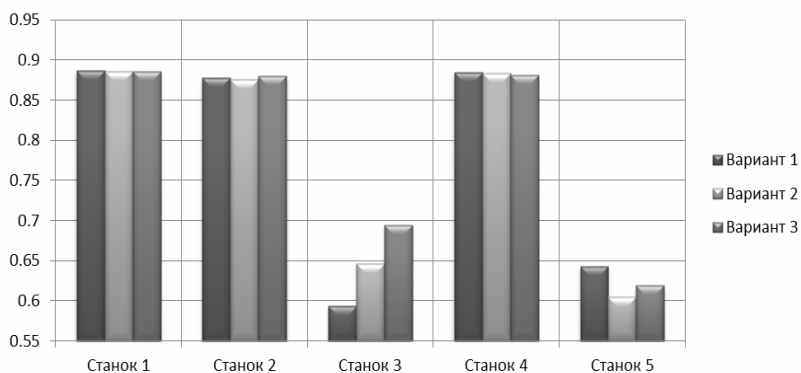


загруженных переходов; вариант 3 – выбор переходов нейронной сетью.

*Таблица 1. Результаты моделирования*

	Вариант №1	Вариант №2	Вариант №3
Общее время процесса (такты)	618,6	610,4	552
Коэффициенты загрузки:			
Станок №1	0,887165	0,885813	0,886051
Станок №2	0,877627	0,875655	0,880616
Станок №3	0,594083	0,646134	0,694746
Станок №4	0,884578	0,88401	0,881159
Станок №5	0,643065	0,605505	0,619384
Средний коэффициент загрузки	0,777303	0,779423	0,792391
Дисперсия коэффициента загрузки	0,021307	0,019882	0,015975

На рис. 8, 9 представлены показатели качества производственного процесса. Длительность производственного процесса сокращается примерно на 10%.



*Рис. 8. Загрузка оборудования производственной системы*

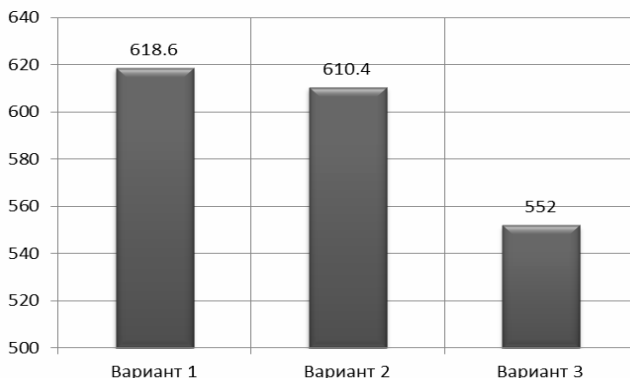


Рис. 9. Длительность производственного процесса (в минутах)

Исследуем эффективность предложенного метода управления сетью Петри. Для этого в структуре производственной программы существенно увеличим долю изделий токарного типа. Ниже приведены результаты моделирования для такого варианта работы системы (таблица 2, рис. 10, 11).

Получены результаты, схожие с предыдущим вариантом работы системы. Нейронная сеть стремится выровнять загрузку оборудования и уменьшает длительность производственного процесса.

Таблица 2. Результаты моделирования модифицированного варианта работы

	Вариант №1	Вариант №2	Вариант №3
Общее время процесса	1074,1	1073,3	1065,1
Коэффициенты загрузки:			
Станок №1	0,861838	0,864996	0,865271
Станок №2	0,856252	0,854561	0,863205
Станок №3	0,354622	0,367465	0,159985
Станок №4	0,859696	0,859312	0,861515
Станок №5	0,358812	0,344359	0,560041
Средний коэффициент загрузки	0,658244	0,658139	0,662003
Дисперсия коэффициента загрузки	0,075772	0,076198	0,096006

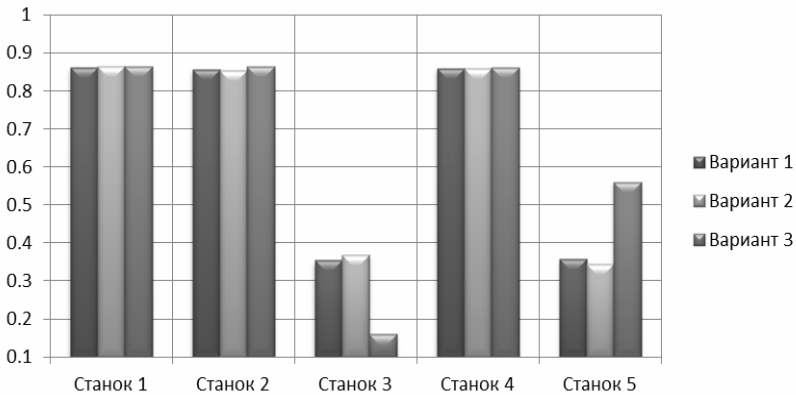


Рис. 10. Загрузка оборудования производственной системы  
(модифицированный вариант)

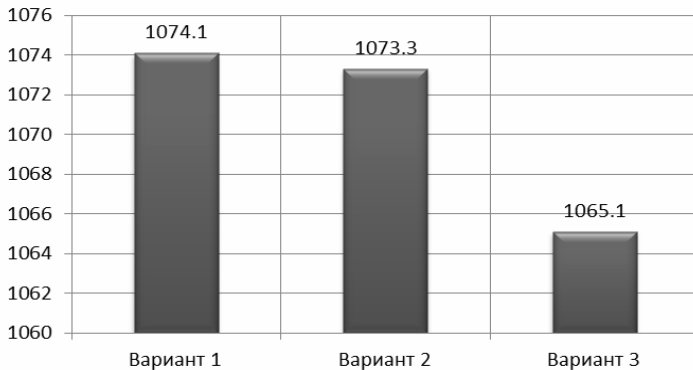


Рис. 11. Длительность производственного процесса  
(модифицированный вариант)

Для оценки эффективности предлагаемого подхода были также проведены эксперименты с различными наборами исходных данных: с увеличенной долей фрезерных изделий, а также с увеличенной долей токарно-фрезерных изделий. Нейронная сеть также улучшает показатели качества работы системы, и улучшение составляет от 1 до 3%. Это объясняется тем, что элемен-

ты обучающего вектора нейросети описывают наиболее вероятные распределения количества изделий разного типа, к которым относится исходный вариант.

## **7. Заключение**

На основе анализа результатов работы можно отметить следующие основные преимущества предложенного метода оптимизации в отличие от оптимизации правилами приоритета.

1. Искусственная нейронная сеть выступает как элемент, запоминающий опыт эксперта при обучении с учителем. Учитывая особенности исследуемой системы, это является важным обстоятельством, поскольку при планировании производственного процесса на предприятии со временем накапливается опыт его оптимальной организации.
2. Возможность реализации сложных правил выбора переходов, зависящих от множества факторов и возможно меняющихся во времени. В производственных системах, как правило, требуется осуществлять многокритериальную оптимизацию. Использование нейронной сети позволяет отказаться от формирования общего критерия с определением весомости отдельных критериев.
3. Существует структурная прямая взаимосвязь критерия оптимальности и факторов, оказывающих на него влияние.
4. Возможность выбора периода перенастройки параметров (переобучения) нейронной сети.

Дальнейшие исследования по тематике статьи представляются актуальными по следующим вопросам.

1. Обучение нейросети в течение имитационного эксперимента на основе текущих значений показателей качества процесса.
2. Использования иных типов нейронных сетей для оптимизации.

## **Литература**

1. БОДЯНСКИЙ Е.В., КУЧЕРЕНКО Е.И., МИХАЛЕВ А.И. *Нейро-фаззи сети Петри в задачах моделирования слож-*

- ных систем. – Днепропетровск: Системные технологии, 2005. – 311 с.
2. ГОРНЕВ В.Ф., ЕМЕЛЬЯНОВ В.В., ОВСЯННИКОВ М.В. *Оперативное управление в ГПС.* – М.: Машиностроение, 1990. – 256 с.
  3. КРУГЛОВ В.В., БОРИСОВ В.В. *Искусственные нейронные сети. Теория и практика.* – М.: Горячая линия – Телеком, 2001. – 382 с.
  4. МАКАРОВ И.М., РАХМАНКУЛОВ В.З., НАЗАРЕТОВ В.М. *Робототехника и гибкие автоматизированные производства. В 9-ти кн. Кн. 5. Моделирование робототехнических систем и гибких автоматизированных производств: учеб. пособие для втузов.* – М.: Высш. шк., 1986. – 175 с.
  5. ОСОВСКИЙ С. *Нейронные сети для обработки информации* / Пер. с польского И.Д. Рудинского. – М.: Финансы и статистика, 2004. – 344 с.

## **PETRI NETS PRESENTED SYSTEMS OPTIMIZATION USING ARTIFICIAL NEURAL NETWORKS**

**Alexey Sochnev**, Siberian Federal University, senior lecturer at department «Robotics and Technical Cybernetics» (lesek@mail.ru)

*Abstract: The method is suggested for optimization of systems modeled by Petri nets. The optimizer is based on the artificial neural network learned to adhere to the specific optimality criterion. An example is given of using the proposed method to control a Petri net simulation.*

**Keywords:** Petri net, priority rules, artificial neural network.

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии О. П. Кузнецовым*

УДК 519.715

ББК 35.41 + 32.813

## **ПОСТРОЕНИЕ БАЗЫ ЗНАНИЙ ДЛЯ ПОИСКА ПРИЧИН АВАРИЙНЫХ СИТУАЦИЙ ПРИ ФОРМОВАНИИ ЛИСТОВОГО СТЕКЛА**

**Домнич В. С.<sup>1</sup>, Иващенко В. А.<sup>2</sup>**

*(Учреждение Российской академии наук*

*Институт проблем точной механики и управления РАН,  
Саратов)*

*Предложен подход к построению и структуризации продукционной базы знаний для поиска причин аварийных ситуаций при формовании листового стекла флоат-способом.*

Ключевые слова: стекольное производство, флоат-процесс, аварийная ситуация, продукционная база знаний.

### **1. Введение**

Трудности формализации технологического процесса (ТП) производства листового стекла и идентификации аварийных ситуаций, возникающих при этом, связаны со сложностью физико-химических процессов, многоуровневостью и многосвязностью факторов, влияющих на его качество [2, 3]. Задача построения математических моделей для таких процессов осложняется еще и тем, что решения по управлению должны приниматься оперативно, в реальном режиме времени.

Это делает практически невозможным применение для описания аварийных ситуаций при производстве листового стекла классической теории принятия решений, базирующейся на

---

<sup>1</sup> Владимир Сергеевич Домнич, аспирант (stevvns@yandex.ru, тел. +7903-384-78-28).

<sup>2</sup> Владимир Андреевич Иващенко, доктор технических наук, ученый секретарь (iptmiran@san.ru).

аппарате математических уравнений (алгебраических, дифференциальных, функциональных, логических и др.) и формальных системах (логико-лингвистических моделях, основанных на языках, порождаемых контекстно-свободными и трансформационными грамматиками) [5]. Данные затруднения приводят к тому, что идентифицировать причины аварийных ситуаций и производить диагностику дефектов стекла в большинстве случаев приходится на основе интуиции оперативного персонала.

На предприятиях с непрерывным характером производства, к которым относятся предприятия стекольной промышленности, остро стоит вопрос об оперативности ликвидации аварийных ситуаций, так как при их возникновении предприятия терпят значительный ущерб:

- от брака, вызванного аварийной ситуацией;
- от повышенного износа технологического оборудования, вызванного последствиями устранения аварийной ситуации (освобождение ванны расплава от застывшей стекломассы, освобождение печи отжига от остатков стекла и др.);
- от недоиспользования производственной мощности;
- от расхода топлива и энергоносителей;
- от простоя рабочей силы.

Поэтому необходимо прогнозировать наступление аварийных ситуаций и сокращать время на ликвидацию в случае их возникновения. В настоящее время при ручном поиске причин аварийных ситуаций их ликвидация занимает 10–30 минут.

Указанные обстоятельства обуславливают актуальность разработки новых подходов к анализу аварийных ситуаций при производстве листового стекла. Один из таких подходов основан на использовании продукционных правил для описания процессов их возникновения и развития.

В статье рассматриваются вопросы построения и структуризации продукционной базы знаний (БЗ) для поиска причин аварийных ситуаций при формовании листового стекла флоат-способом.

## 2. Постановка задачи поиска причин аварийных ситуаций при формировании листового стекла

Пусть  $S = S_1 \times \dots \times S_p$  – пространство состояний ТП формирования листового стекла;  $s(t) = (s_1(t), \dots, s_p(t)) \in S$  – вектор состояний ТП, где  $t = l\Delta t$ ,  $l = 1, \dots, n$ ,  $\Delta t$  – интервал дискретности по времени;  $s_1(t), \dots, s_p(t)$  – составляющие вектора, характеризующие количественные и качественные ингредиенты ТП: оборудование, исполнители, энергетическое обеспечение и др.);  $X = X_1 \times \dots \times X_q$  – пространство внешних воздействий на ТП;  $x(t) = (x_1(t), \dots, x_q(t)) \in X$  – вектор внешних воздействий на ТП;  $F: S \times X \rightarrow S$  – функция, определяющая динамику ТП:  $s(t_{l+1}) = F(s(t_l), x(t_l))$ .

Оперативная информация об аварии задается в виде частично заполненных векторов (векторов, отдельные компоненты которых могут отсутствовать) состояний  $\tilde{s}(t_{l'_u}), \dots, \tilde{s}(t_{l''_u})$  и внешних воздействий  $\tilde{x}(t_{l'_v}), \dots, \tilde{x}(t_{l''_v})$ , где  $1 \leq l'_1 < \dots < l'_u \leq n$ ,  $1 \leq u \leq n$ ,  $1 \leq l''_1 < \dots < l''_v \leq n$ ,  $1 \leq v \leq n$ .

Необходимо найти все возможные пары последовательностей  $s^{(h)}(t_1), \dots, s^{(h)}(t_n)$  и  $x^{(h)}(t_1), \dots, x^{(h)}(t_n)$ ,  $h \in N$ , такие, что при каждом  $h$  выполняются условия:

1.  $(\forall w, 1 \leq w \leq u)$   $s^{(h)}(t_{l'_w})$  согласуется с  $\tilde{s}(t_{l'_w})$  (соответствующие координаты векторов равны);
2.  $(\forall w, 1 \leq w \leq v)$   $x^{(h)}(t_{l''_w})$  согласуется с  $\tilde{x}(t_{l''_w})$ ;
3.  $(\forall w, 1 \leq w < n)$   $s^{(h)}(t_{w+1}) = F(s^{(h)}(t_w), x^{(h)}(t_w))$ .

По данному описанию выявляются причины аварий, как отклонения координат векторов состояний ТП  $s^{(h)}(t_1), \dots, s^{(h)}(t_n)$  и  $x^{(h)}(t_1), \dots, x^{(h)}(t_n)$  от их допустимых значений, заданных регламентом ТП.

## 3. Описание процесса формирования листового стекла

Процесс формирования ленты стекла в ванне расплава заключается в придании заданных физических характеристик (толщи-



на, ширина, твердость, хрупкость, термостойкость и т.п.) стекломассе и формализуется в БЗ на основе представлений в виде троек «класс объектов–атрибут–значение».

Для описания ТП формования будем использовать классы объектов  $o_1, \dots, o_r$ ,  $r=28$ :  $o_1$  – «заданный технологический режим»: «температура сводовых нагревателей», «расход защитной атмосферы», «расход сернистого антигидрида», «положение дозирующего шибера», «положение и скорости бортоудерживающих устройств», «количество холодильников», «положение ограничителей», «скорость лера»;  $o_2$  – «оператор»: «квалификация», «внимательность»;  $o_3$  – «отсекающий шибер»: «степень износа»;  $o_4$  – «дозированный шибер»: «степень износа», «время существования пристывшей стекломассы»;  $o_5$  – «сливной лоток»: «степень износа»;  $o_6$  – «сводовые огнеупоры»: «степень износа»;  $o_7$  – «огнеупорная кладка узла питания»: «разгерметизация в огнеупорной кладке»;  $o_8$  – «ограничители растекания»;  $o_9$  – «задний смачиваемый брус»;  $o_{10}$  – «каналы подачи защитной атмосферы»: «скорость подачи защитной атмосферы»;  $o_{11}$  – «сводовые нагреватели»: «температура»;  $o_{12}$  – «холодильники»: «количество холодильников»;  $o_{13}$  – «ванна расплава»: «разгерметизация огнеупорной кладки», «разгерметизация корпуса», «разгерметизация в технологических проемах»;  $o_{14}$  – «электропитание привода шиберов»: «напряжение», «емкость источника питания»;  $o_{15}$  – «электроэнергия»: «напряжение», «емкость источника питания»;  $o_{16}$  – «холодная вода»: «температура»;  $o_{17}$  – «стекломасса»: «температура», «дефекты стекломассы»;  $o_{18}$  – «защитная атмосфера»: «объем в головной зоне», «объем в зоне активного формования», «объем в зоне стабилизации формы», «горение водорода в щелях между шибером и боковой стенкой»;  $o_{19}$  – «бортоудерживающие устройства»: «положение», «угол», «заглубление звездочки», «скорость вращения»;  $o_{20}$  – «лента стекла»: «стекломасса», «ширина ленты»;  $o_{21}$  – «расплав олова»: «объем в головной зоне», «объем в зоне активного формования», «объем в зоне стабилизации формы»;  $o_{22}$  – «дефекты стекломассы»: «пузыри типа "мошка"», «деформированные участки», «оксид олова SnO», «микроморщинистый слой», «локальное подстуживание нижнего слоя»,

«перепады коэффициента термического расширения в нижнем поверхностном слое»;  $o_{23}$  – «пузыри типа "мошка"»: «размер», «положение по глубине», «положение по ширине»;  $o_{24}$  – «деформированные участки»: «положение по глубине», «ширина», «длина», «внешний вид»;  $o_{25}$  – «оксид олова SnO»: «концентрация», «положение по глубине»;  $o_{26}$  – «микроморщинистый слой»: «положение по глубине», «высота», «внешний вид»;  $o_{27}$  – «объем защитной атмосферы»: «концентрация кислорода», «концентрация водорода», «концентрация оксидов олова»;  $o_{28}$  – «объем расплавленного олова»: «температура», «концентрация кислорода».

Для выделения конкретного экземпляра объекта из класса  $o_i$  используется обозначение  $o_{i,m}$  ( $m$  – номер экземпляра в классе):  $o_{27.1}$  – «объем защитной атмосферы в головной зоне»;  $o_{27.2}$  – «объем защитной атмосферы в зоне активного формования»;  $o_{27.3}$  – «объем защитной атмосферы в зоне стабилизации формы»;  $o_{28.1}$  – «объем расплавленного олова в головной зоне»;  $o_{28.2}$  – «объем расплавленного олова в зоне активного формования»;  $o_{28.3}$  – «объем расплавленного олова в зоне стабилизации формы».

Использование классов объектов позволяет для некоторых взаимодействий ТП сформировать универсальное представление, которое может быть использовано для описания взаимодействия на различных стадиях ТП. Иначе говоря, классы избавляют от необходимости в создании дубликатов представлений взаимодействий, различающихся лишь обозначениями взаимодействующих объектов.

Известные данные о состоянии конкретного объекта  $o_i$  представляются в виде множества троек:

$\{(o_i, a_{j_l}, v_{k_l}) \mid l = 1, \dots, m\}$ , где  $a_{j_1}, \dots, a_{j_m}$  – атрибуты  $i$ -го объекта, а  $v_{k_1}, \dots, v_{k_m}$  – значения этих атрибутов. Для задания значения атрибута  $a_j$  объекта  $o_i$  используется обозначение  $(o_i, a_j)$ , а для задания значений атрибутов  $a_{j_1}, \dots, a_{j_m}$  объекта  $o_i$  –  $(o_i : (a_{j_1}, v_{k_1}), \dots, (a_{j_m}, v_{k_m}))$ .

#### 4. Структура базы знаний

Взаимодействия, реализуемые в ТП формирования, описываются следующей системой продукционных правил.

1. ЕСЛИ ( $o_{27.1}$ , Концентрация водорода, Высокая) И ( $o_4$ , Неплотности по кромке дозирующего шибера, Да) И ( $o_{13}$ , Разгерметизация в корпусе ванны, Да) ИЛИ ( $o_7$ , Разгерметизация в огнеупорной кладке, Да) ИЛИ ( $o_{13}$ , Разгерметизация в технических проемах, Да)) ТО ( $o_{18}$ , Горение водорода в щелях между шибером и боковой стенкой, Да).

2. ЕСЛИ ( $o_{18}$ , Горение водорода в щелях между шибером и боковой стенкой, Да) ТО ( $o_{17}$ , Дефекты, ( $o_{23}$ : (Размер, 0,1–0,15 мм); (Положение по глубине, На верхней поверхности); (Положение по ширине, У боковых стенок ванны расплава))).

.....

67. ЕСЛИ ( $o_{28.1}$ , Температура, Низкая) ТО ( $o_{17}$ , Локальное подстуживание нижнего слоя, Да).

68. ЕСЛИ ( $o_{17}$ , Локальное подстуживание нижнего слоя, Да) ТО ( $o_{17}$ , Дефекты, ( $o_{24}$ : (Положение по глубине, 10–20 мкм на нижней поверхности); (Ширина, 2–20 мм); (Длина, Более 1 м); (Внешний вид, Прерывистые линии))).

.....

82. ЕСЛИ ( $o_{17}$ , Дефекты, ( $o_{23}$ : (Размер, 0,1–0,15 мм); (Положение по глубине, На верхней поверхности); (Положение по ширине, У боковых стенок ванны расплава))) ТО ( $o_{23}$ , Положение по ширине, В виде полосы или отдельных скоплений, локализованных по ширине ленты стекла).

83. ЕСЛИ ( $o_{17}$ , Температура, Средняя) И ( $o_{28}$ , Концентрация кислорода, Высокая) ТО ( $o_{17}$ , Дефекты, ( $o_{25}$ : (Концентрация, Высокая); (Положение по глубине, В тонком слое на нижней поверхности))).

.....

119. ЕСЛИ ( $o_{17}$ , Температура, Низкая) И ( $o_{28}$ , Концентрация кислорода, Высокая) ТО ( $o_{17}$ , Дефекты, ( $o_{25}$ : (Концентрация, высокая); (Положение по глубине, В тонком слое на нижней поверхности))).

120. ЕСЛИ ( $o_{17}$ , Дефекты, ( $o_{25}$ : (Концентрация, Высокая);

(Положение по глубине, В тонком слое на нижней поверхности)) И ( $o_{17}$ , Температура, «больше» 7000 С) ТО ( $o_{17}$ , Дефекты, Перепады коэффициента термического расширения).

121. ЕСЛИ ( $o_{17}$ , Дефекты, Перепады коэффициента термического расширения) И ( $o_{18}$ , Температура) «значительно меньше, чем» ( $o_{17}$ , Температура) ТО ( $o_{17}$ , Дефекты, ( $o_{26}$ : (Положение по глубине, На нижней поверхности); (Высота, 2–3 мм); (Внешний вид, Ирризирующая пленка))).

Производственные правила группируются в блоки, соответствующие различным этапам процесса формования. Так, этапу «движение стекломассы в узле питания» соответствуют правила 1, 2 и т.д., этапу «движение стекломассы в затеке» – 67, 68 и т.д., этапу «активное формование ленты стекла» – 67, 68, 82, 83 и т.д., этапу «стабилизация формы ленты стекла» – 119, 120, 121 и т.д. Данная градация производственных правил упрощает их восприятие экспертом и повышает эффективность поиска причин аварий.

В приведенном выше списке присутствуют производственные правила, относящиеся к каждому из выделенных этапов ТП формования стекла.

Построение базы знаний и группировка производственных правил в блоки осуществляется экспертами вручную, а структурирование правил в базе знаний – автоматически.

## **5. Структура и состав программно-информационного комплекса**

Взаимодействия, образующие ТП формования стекла, являются определенными, четкими, однако условия и результаты их реализации в основном определяются нечеткими ограничениями на значения технологических параметров. В связи с этим, для атрибутов, характеризующих объекты  $o_1, \dots, o_r$ , используются нечеткие значения, а условия производственных правил строятся в виде нечетких логических выражений.

Механизм вывода реализуется следующим образом: для нечеткого условия вычисляется уровень отсечения (с использованием операций «min» и «max» для конъюнкции и дизъюнкции соответственно), условие считается выполненным тогда и толь-

ко тогда, когда уровень отсечения оказывается выше порогового значения 0,5. Реализация продукционного правила сводится к изменению атрибутов объектов на значения, фигурирующие в заключении правила. В отличие от классических алгоритмов нечеткого вывода, уровень отсечения не участвует в формировании результата продукционного правила, что отражает четкий характер взаимодействий ТП.

Поиск причин аварийных ситуаций на основе данной БЗ реализуется в программно-информационном комплексе (ПИК), который предоставляет пользователю интерфейс для ввода оперативной информации об аварии, интерфейс, отображающий результаты поиска причин аварий, в автоматическом режиме осуществляет получение информации из базы данных, содержащей измеряемые в ходе производства значения параметров ТП. Схема взаимодействия экспертов с программным комплексом представлена на рис. 1.



Рис. 1. Структура и состав программно-информационного комплекса

Оперативная информация об аварии формализуется в виде троек «объект–атрибут–значение» и заносится в рабочую память ПИК. Для идентификации причин аварии используется прямой логический вывод в каждом блоке продукционных правил.

В случае если необходимые для вывода значения атрибутов неизвестны, они доопределяются гипотезами.

## **6. Организация поиска причин аварийных ситуаций**

### **6.1. КЛАССИЧЕСКИЙ АЛГОРИТМ ПОИСКА**

Данный алгоритм основан на использовании классического алгоритма прямого вывода, который на каждой итерации проверяет условия всех продукционных правил, которые не были реализованы в текущем блоке. Если условие правила выполнено (уровень отсечения выше порогового значения), то оно заносится в список правил, которые должны быть применены на данной итерации вывода, и исключается из списка нереализованных правил. Работа алгоритма заканчивается, когда на очередной итерации не может быть реализовано ни одно правило.

Для проверки условия каждого правила алгоритм находит в рабочей памяти значения представленных в условии атрибутов и по ним вычисляет значения функций принадлежности. Поиск нужного атрибута реализуется путем последовательного просмотра атрибутов в рабочей памяти, на что требуется значительное количество времени. Кроме того, классический алгоритм будет на каждой итерации проверять условия правил, в которых ни одна компонента не выполняется. Эти вычисления являются бесполезными, но с ростом числа продукционных правил могут существенно замедлять процедуру логического вывода.

### **6.2. АЛГОРИТМ ПОИСКА НА СТРУКТУРИРОВАННОЙ БАЗЕ ЗНАНИЙ**

В [1] предложена специальная модель продукционной БЗ, использование которой позволяет существенно увеличить быстродействие логического вывода. Модель представляет продукционную БЗ в виде мультиграфа  $G = (V, E)$ , где  $V$  – множество

вершин, а  $E$  – множество дуг. Множество  $V$  является объединением двух непересекающихся множеств:  $A$  – вершин-атрибутов и  $B$  – вершин-ветвлений.

Пусть продукционное правило имеет вид

ЕСЛИ	$(o_1, a_1, v_1)$ И ... И $(o_2, a_2, v_2)$	ИЛИ
	...	ИЛИ
	$(o_3, a_3, v_3)$ И ... И $(o_4, a_4, v_4)$	
ТО	$(o_5, a_5, v_5)$ .	

Здесь условие правила представляется в виде объединения нескольких ИЛИ-компонент, каждая из которых является набором элементарных условий (троек), соединенных логической связкой И. Далее каждая ИЛИ-компонента интерпретируется как вершина-ветвление  $b$ . Множество всех вершин-ветвлений образует множество  $B$ .

Вершина-атрибут  $a \in A$  является иерархической, в нее входят вершина нулевого уровня  $(o_i, a_j)$  и конечное число вершин первого уровня  $v_{k_1}, \dots, v_{k_m}$ , взаимно однозначно соответствующих возможным значениям атрибута  $a_j$ .

Представленному выше продукционному правилу в мультиграфе  $G$  будет соответствовать подграф, конструируемый следующим образом. Среди вершин множества  $A$  выбирается вершина-атрибут  $(o_5, a_5)$ , фигурирующая в заключении продукционного правила, и из вершины первого уровня  $v_5$  проводятся дуги во все вершины-ветвления, порождаемые данным правилом. Дальнейшие построения рассмотрим на примере вершины-ветвления  $b = \{(o_1, a_1, v_1), \dots, (o_2, a_2, v_2)\}$ . Для каждого элементарного условия  $(o_i, a_j, v_k)$ , входящего в  $b$ , проводится дуга из  $b$  в вершину первого уровня  $v_k$  вершины-атрибута  $(o_i, a_j)$ . Аналогичные построения проводятся для всех остальных вершин ветвлений.

Модель БЗ в целом представляет собой объединение всех подграфов такого вида, каждый из которых соответствует некоторой продукции, входящей в состав БЗ.

Данная модель позволяет существенно повысить скорость логического вывода по сравнению с традиционным представлением БЗ, поскольку непосредственно связывает условия правил

со значениями атрибутов в рабочей памяти и в явном виде представляет влияние результатов одних продукционных правил на условия реализации других.

Модель естественным образом обобщается на случай нечетких значений атрибутов. Для этого необходимо из каждого элементарного условия  $(o_i, a_j, v_k)$  построить дуги не только в вершину  $v_k$ , но и во все остальные вершины  $v_l$  первого уровня вершины-атрибута  $(o_i, a_j)$ , при которых выполняется равенство  $(o_i, a_j) = v_k | v_l$ . Условное равенство  $x = y|z$ , где  $x$  – атрибут объекта, а  $y$  и  $z$  – нечеткие множества, считается выполненным, если  $r(y, z) > r(y, \bar{z})$ , где  $\rho$  – расстояние Хэмминга [4].

Работа алгоритма, основанного на такой структуризации БЗ, выглядит следующим образом. На первой итерации строится список измененных вершин-атрибутов, в который включаются все вершины, значения которых были занесены в рабочую память. Для каждой измененной вершины-атрибута окрашиваются все дуги, исходящие из ее текущего значения. Если для некоторой вершины-ветвления  $b$ , в которую ведут только что окрашенные дуги, все ведущие в нее дуги являются окрашенными, то связанное с  $b$  правило заносится в список правил, реализуемых на данной итерации, а вершина-атрибут, фигурирующая в заключении этого правила, отмечается как измененная. Если после завершения цикла по атрибутам с измененными значениями список правил, выбранных для реализации, пуст, то работа алгоритма завершается. В противном случае правила из данного списка реализуются, а для каждой вершины-атрибута, измененной ими, все дуги, которые исходят из ее предыдущего значения, отмечаются как неокрашенные. После этого алгоритм переходит к следующей итерации логического вывода.

### 6.3. ПРЕДЛАГАЕМЫЙ АЛГОРИТМ ПОИСКА

Недостатком модели, предложенной в [1], является слабая выразительность условий, входящих в вершины ветвления. Так, чтобы представить логическое условие «температура стекло-массы не низкая», необходимо построить столько вершин-ветвлений, сколько нечетких значений, отличных от «низкого»,



существует у атрибута «температура». Этот недостаток может быть преодолен за счет расширения троек  $(o_i, a_j, v_k)$  путем включения четвертого элемента «отношение», который связывает реальное значение атрибута  $(o_i, a_j)$  со значением  $v_k$ . Элемент «отношение» может принимать одно из следующих значений: «равно», «не равно», «больше», «меньше».

Сокращение числа вершин-ветвлений уменьшает общее количество дуг в мультиграфе и упрощает исключение вершин-ветвлений в процессе поиска.

Модель [1] оказывается наиболее эффективной при большом числе продукционных правил. В условиях небольшого числа правил интерес представляет алгоритм, который, подобно классическому алгоритму, анализирует условия, исходя из продукционных правил, а не из значений в рабочем пространстве. Устранение недостатков классического алгоритма при этом обеспечивается структуризацией, сходной с моделью, предложенной в [1]. Каждое продукционное правило представляется подграфом  $G$  специального вида. В  $G$  включается вершина  $(o_5, a_5, v_5)$ , фигурирующая в заключении продукционного правила, и из нее проводятся дуги во все вершины-ветвления, порождаемые данным правилом. Из каждой вершины-ветвления, из каждой вершины элементарного условия  $(o_i, a_j, v_k, r_m)$  строится дуга в вершину-атрибут  $(o_i, a_j)$ . Эта дуга помечается номерами  $l$  всех вершин  $v_l$  первого уровня, входящих в  $(o_i, a_j)$ , при которых выполняется условие  $r_m((o_i, a_j), v_k) | v_l$ . Также вершина  $(o_5, a_5, v_5)$  соединяется дугами с вершинами, представляющими заключения всех правил, у которых хотя бы в одной вершине-ветвлении есть элементарное условие, удовлетворяемое при значении  $(o_5, a_5, v_5)$ .

Работа алгоритма при этом сводится к следующему. На первой итерации проверяются условия всех правил в БЗ и реализуются те правила, условия которых были выполнены. На последующих итерациях проверяются условия тех и только тех правил, в которые заходит дуга их хотя бы одного правила, реализованного на предыдущей итерации.

Способ построения разработанного алгоритма инвариантен к исследуемому объекту, однако адаптация самого алгоритма

для другого объекта повлечет за собой смену правил продукционной базы знаний.

Для сравнения эффективности рассмотренных алгоритмов разработан программно-информационный комплекс, осуществляющий прямой вывод по блоку продукционных правил «активное формирование ленты стекла». Полученные с помощью программно-информационного комплекса значения временных затрат на реализацию алгоритмов приведены в таблице 1.

Таблица 1. Быстродействие исследованных алгоритмов поиска

Итерация	Время выбора продукционных правил (мс)		
	Классический алгоритм	Алгоритм поиска на структурированной БЗ	Предложенный алгоритм
Итерация 1	0,311	0,058	0,068
Итерация 2	0,046	0,038	0,008
Итерация 3	0,018	0,011	0,003
Общее время вывода	0,375	0,107	0,079

Из результатов вычислительных экспериментов следует, что предложенный алгоритм оказывается наиболее эффективным с точки зрения временных затрат на выполнение расчетов.

При поиске причин аварийной ситуации алгоритм логического вывода реализуется в цикле с количеством итераций, составляющим в среднем  $10^5$ . Приведенные в таблице времена при этом соответственно составят 10, 3 и 2 минуты.

Продукционные правила отражают отдельные взаимодействия в ТП. Объединяемые алгоритмом логического вывода, они образуют композиции, некоторые из которых не были известны экспертам. Это позволяет при помощи БЗ обнаружить новые причины возникновения аварийных ситуаций и заранее разработать мероприятия по их ликвидации.

## 7. Заключение

Предложена структуризация базы знаний, позволившая построить алгоритм, обладающий в 4 раза большим быстродействием по сравнению с классическим алгоритмом и в 1,5 раза – по сравнению с алгоритмом, приведенным в [1], что существенно для поиска причин аварийных ситуаций при формировании листового стекла флоат-способом, осуществляемого в режиме реального времени.

### Литература

1. ИВАНОВ А.С. *Модель представления производственных баз знаний на ЭВМ // Известия Саратовского университета. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2007. – Т. 7., вып. 1. – С. 83–88.*
2. МАКАРОВ Р.И., ХОРОШЕВА Е.Р., ЛУКАШКИН С.А. *Автоматизация производства листового стекла : учеб. пособие. – М.: АСВ, 2002. – 192 с.*
3. МАКАРОВ Р.И., ТАРБЕЕВ В.В., ХОРОШЕВА Е.Р. *Управление качеством листового стекла (флоат-способ). – М.: АСВ, 2004. – 152 с.*
4. МОРЕЛОС-САРАГОСА Р. *Искусство помехоустойчивого кодирования. Методы, алгоритмы, применение. – М.: Техносфера, 2005. – 171 с.*
5. ТЕЙЗ А., ГРИБОМОН П., ЛУИ Ж. и др. *Логический подход к искусственному интеллекту: от классической логики к логическому программированию. – М.: Мир, 1990. – 432 с.*

## **DEVELOPMENT OF THE KNOWLEDGE BASE TO SEARCH AN ACCIDENT REASONS AT FLOAT GLASS FORMING**

**Vladimir Domnich**, Establishment of the Russian Academy of Sciences Institute of Precision Mechanics and Control of RAS, Saratov, post-graduate (stevvns@yandex.ru, +7903-384-78-28).

**Vladimir Ivaschenko**, Establishment of the Russian Academy of Sciences Institute of Precision Mechanics and Control of RAS, Saratov, Doctor of Science, Scientific Secretary (iptmuran@san.ru).

*Abstract: An approach is suggested to development and structuring of the knowledge base to search reasons of accidents during the float glass forming process.*

Keywords: glass production, float process, accident, production knowledge base.

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии М.Ф. Караваем*

УДК 541.135.6 + 51-72

ББК 22.19

## МОДЕЛИРОВАНИЕ И РАСЧЕТ КОНЦЕНТРАЦИИ ЭЛЕКТРОАКТИВНОГО КОМПОНЕНТА В ПРОЦЕССЕ ЭЛЕКТРОЛИЗА

Кошев А. Н.<sup>1</sup>, Кузина В. В.<sup>2</sup>

(Пензенский государственный университет архитектуры  
и строительства, Пенза)

*Представлен численный полуаналитический метод расчёта концентрации ионов металла в электролите, как одного из основных управляющих параметров процесса электролиза. Проведен анализ и сравнение методов регрессии и физико-математического моделирования процессов на примерах вольтамперометрического определения концентрации цинка в сернокислом электролите цинкования и меди в сернокислом электролите меднения.*

Ключевые слова: математическая модель, вольтамперометрия, концентрация, уравнение диффузии, управление процессами электролиза, обратная задача.

### 1. Введение

Процессы с использованием электрохимических технологий, как правило, сопровождаются реакциями превращения реагентов, например, электрохимическим осаждением металлов из электролитов на катоды электрохимических реакторов. При

---

<sup>1</sup> Александр Николаевич Кошев, заведующий кафедрой «Информационные системы и компьютерное моделирование» ПГУАС, доктор химических наук, профессор (koshev@pguas.ru).

<sup>2</sup> Валентина Владимировна Кузина, доцент кафедры «Информационные системы и компьютерное моделирование» ПГУАС (kuzina@pguas.ru).

этом происходит обеднение (обогащение) электролита по ионам веществ, участвующих в электролизе.

Для организации эффективного управления технологическим процессом электролиза необходимы постоянный контроль и коррекция состава электролита по его определяющим компонентам. Одним из наиболее важных компонентов электролиза является концентрация ионов металла (металлов), который участвует в электролитической реакции.

Аналитические методы современной электрохимии позволяют разрабатывать и конструировать автоматические и полуавтоматические приборы для определения и поддержания стабильности концентраций основных компонентов электролита и, за счет этого, управления электрохимическим процессом, однако математический аппарат для такого рода устройств разработан недостаточно.

Для контроля состава электролитов электрохимических производств, а также для определения остаточных концентраций ионов металлов в промышленных и сточных водах удобно использовать методы вольтамперометрии, такие как полярография, хроновольтамперометрия, хронопотенциометрия, циклическая хроновольтамперометрия, циклическая хронопотенциометрия и т.п.

Суть метода вольтамперометрии состоит в использовании явления поляризации микроэлектрода, получении и интерпретации поляризационных кривых, которые отражают зависимость силы тока от приложенного напряжения. Различное методическое и приборное оформление систем вольтамперометрического контроля порождает многообразие методов математической обработки экспериментальной информации [4, 5].

Известен, например, способ математической обработки хроновольтамперных кривых с помощью регрессионного анализа и экспериментальных данных [1, 2].

Для реализации метода вольтамперометрии можно использовать автоматизированную установку, состоящую из электрохимического датчика, сконструированного на основе электрода с периодическим обновлением его рабочей поверхности, блока программно-управляемого регулятора развертки потенциала и ЭВМ для обработки данных вольтамперометрических измере-

ний [1, 2]. Программное обеспечение установки позволяет в автоматическом режиме обновлять поверхность электрода, поляризовать его линейно изменяющимся потенциалом с заданным интервалом и скоростью развертки, регистрировать вольт-амперные зависимости и проводить оперативную статистическую обработку полученных результатов. При этом в качестве основной оперативно измеряемой величины, отражающей состояние электрохимической системы, выбирается пик силы тока на вольтамперной характеристике и значение потенциала пика. Для построения регрессионных зависимостей функции отклика от факторов, в качестве которых выбраны определяемые концентрации, используются методы планирования факторного эксперимента [3].

Заметим, что регрессионный анализ требует проведения большого числа экспериментальных исследований для построения значимых регрессионных соотношений. Кроме того, в результирующих уравнениях возможна потеря точности, обусловленная как погрешностями эксперимента, так и погрешностями построения регрессионной модели для расчёта искомых концентраций.

Недостатком метода является и то, что при построении регрессионной модели не используются физико-математические представления об исследуемом процессе. В то же время существующая теория математического моделирования электрохимических процессов позволяет достаточно полно описать процессы, происходящие при вольтамперометрии. При этом и сами процессы, и их математические описания сложны и нелинейны, что говорит о слабых интер- и экстраполяционных свойствах регрессионных уравнений первого и второго порядка, а также о целесообразности сочетания методов планирования эксперимента и методов физико-математического моделирования.

## **2. Постановка задачи**

Электродные и диффузионные процессы при вольтамперометрии в простом электролите можно с определенной степенью точности описать следующими уравнениями:

$$(1) \quad \frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}; \quad C(x,0) = C_0; \quad C(d,t) = C_0; \quad \frac{\partial C}{\partial x}(0,t) = \frac{i(t)}{ZFD};$$

$$(2) \quad i(t) = i_0 \left( \frac{C(0,t)}{C_0} e^{\frac{aZF}{RT}(E(t)-E_0)} - e^{\frac{(a-1)ZF}{RT}(E(t)-E_0)} \right),$$

где  $C(x, t)$  – концентрация электроактивного компонента в точке  $x$  ( $0 \leq x \leq d$ ) диффузионного слоя  $[0, d]$  в момент времени  $t$ ;  $C_0$  – концентрация этого компонента в глубине раствора;  $i(t)$  – плотность тока на электроде;  $a, z, F, R, T$  – константы;  $D$  – коэффициент диффузии;  $E(t)$  – потенциал системы;  $E_0$  – равновесный потенциал электрода;  $i_0$  – ток обмена.

Будем считать, что теоретическая зависимость при хроновольтамперометрии в координатах  $(E, i)$  описывается уравнением (2). Экспериментально полученная вольтамперометрическая кривая для простого сернокислого электролита имеет вид, приведенный на рис. 1, а.

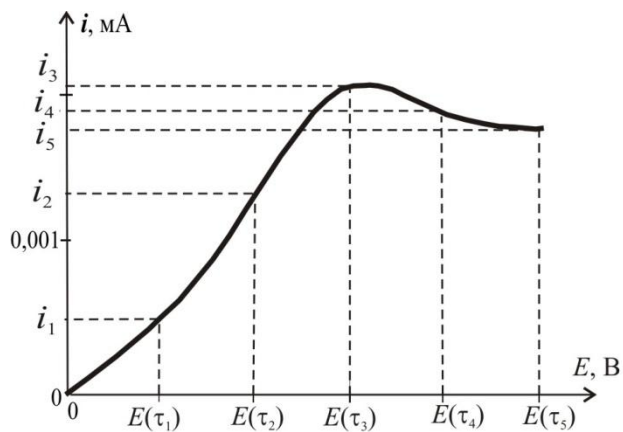
Цель данной работы заключается в создании алгоритма, позволяющего по заданным электрохимическим параметрам и кривой «ток–потенциал» рассчитать концентрацию  $C_0$  интересующего нас компонента. Такая задача является обратной задачей математической физики.

Известно, что обратные задачи представляют собой классический пример некорректно поставленных задач. Специфика обратной задачи состоит в том, что её постановку нельзя воспроизвести в реальном эксперименте и в этом смысле она не соответствует физически реализуемым событиям, что позволяет говорить о физической некорректности задачи. Естественно, что при математической формализации проявляется математическая некорректность, чаще всего неустойчивость решения, обратной задачи.

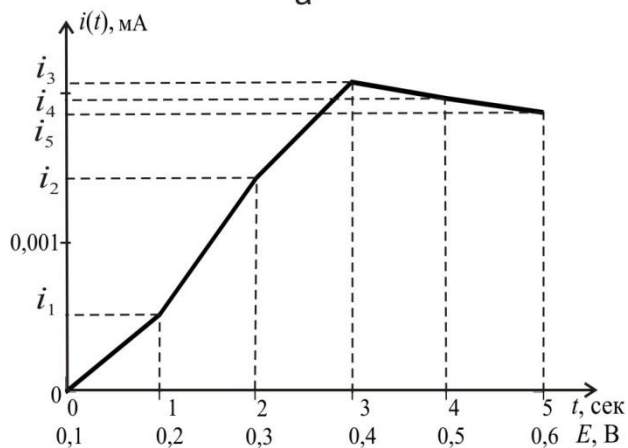
Обычно первоначальная цель при рассмотрении обратной задачи – доказательство единственности её решения. В данном случае вопрос единственности решения обратной задачи вольтамперометрии чрезвычайно важен не только для теории, но и для практики оперативного определения концентраций. Если вопрос единственности не решен, то любое математическое моделирование, в том числе и регрессионное, может привести к



моделям, применимость которых либо существенно ограничена, либо вообще невозможна.



а



б

Рис. 1. Вольтамперные кривые сернокислого электролита меднения: а – экспериментальная; б – линейризованная

Таким образом, специфика обратной задачи приводит к трудностям разработки методов и алгоритмов, дающих досто-

верные результаты, которые, тем не менее, при строгом соблюдении требований теории вполне преодолимы.

Приведем обоснование единственности решения обратной задачи по определению величины  $C_0$ . Положим, что существуют решения  $C'_0$  и  $C''_0$ , не равные между собой. Обозначим  $\Delta C = C' - C''$ , где  $C'$  и  $C''$  – соответственно решения задачи (1)–(2) для  $C'_0$  и  $C''_0$ . Тогда относительно разности концентраций можно сформулировать следующую задачу:

$$(3) \quad \frac{\partial \Delta C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \Delta C}{\partial x^2};$$

$$(4) \quad \Delta C(d, t) = C'_0 - C''_0;$$

$$(5) \quad \Delta C(x, 0) = C'_0 - C''_0;$$

$$(6) \quad \frac{\partial \Delta C}{\partial x}(0, t) = 0.$$

Введем в рассмотрение функцию  $J(t) = \frac{1}{2} \int_0^d \Delta C(x, t)^2 dx$ .

Заметим, что  $J(t) \geq 0$  при всех  $t$ . Рассмотрим цепочку равенств:

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{dt} &= \int_0^d \Delta C \frac{\partial \Delta C}{\partial t} dx = \int_0^d \Delta C \frac{\partial^2 \Delta C}{\partial x^2} dx = \int_0^d \Delta C d \frac{\partial \Delta C}{\partial x} = \\ &= \Delta C \frac{\partial \Delta C}{\partial x} \Big|_0^d - \int_0^d \frac{\partial \Delta C}{\partial x} d \frac{\partial \Delta C}{\partial x} = \Delta C \frac{\partial \Delta C}{\partial x} \Big|_0^d - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \Delta C}{\partial x} \right)^2 \Big|_0^d. \end{aligned}$$

Здесь использовано общепринятое обозначение  $f(x) \Big|_a^b = f(b) - f(a)$ .

Определим значение последнего выражения в цепочке равенств. По условию (6) имеем:  $\partial \Delta C(0, t) / \partial x = 0$ . Кроме того,  $\partial \Delta C(d, t) / \partial x = 0$ , так как на расстоянии большем либо равном  $d$  от электрода значения  $C'(x, t)$  и  $C''(x, t)$  являются постоянными величинами, равными значению концентрации электроактивных ионов в глубине раствора. Это означает, что  $dJ/dt = 0$ , следовательно,  $J(t)$  – постоянная величина. Поскольку

$$J(0) = \frac{1}{2} \int_0^d (\Delta C(x, 0))^2 dx = \frac{1}{2} (C'_0 - C''_0)^2 d, \text{ то } J(t) = \frac{1}{2} (C'_0 - C''_0)^2 d.$$

Следовательно,  $\int_0^d (C'(x, t) - C''(x, t))^2 dx = (C'_0 - C''_0)^2 d$  при любом

значении  $t$ .

Это означает, что разность функций  $C'(x, t) - C''(x, t)$  не зависит от величины  $t$ . И так как  $C'(x, 0) - C''(x, 0) = C'_0 - C''_0$ , то  $C'(x, t) - C''(x, t) = C'_0 - C''_0$  или  $C''(x, t) = C'(x, t) - C'_0 + C''_0$ .

Из уравнения (2) нетрудно получить соотношение  $\frac{C'(0, t)}{C'_0} - \frac{C''(0, t)}{C''_0} = 0$ , которое, с учетом предыдущего соотно-

шения, приводит к тождествам  $C'(0, t) = C'_0$  и  $C''(0, t) = C''_0$ , что противоречит третьему условию для уравнения (1). Следовательно, предположение о существовании двух решений задачи по отысканию начальной концентрации с использованием уравнений (1)–(2), неверно. То есть, если метод решения обратной граничной задачи по расчету  $C_0$  основывается на уравнениях (1)–(2) и экспериментальной вольтамперометрической кривой в координатах  $(E, i)$ , то он приводит к единственному решению.

Определим физический смысл единственности решения. Для этого рассмотрим задачу (3)–(6) как самостоятельную задачу диффузии. Заметим еще раз, что за пределами диффузионного слоя (при  $x \geq d$ )  $\Delta C(x, d) \equiv 0$  и, следовательно, можно записать дополнительное условие  $\partial \Delta C(d, t) / \partial x = 0$ . Это означает, что граница диффузионного слоя  $d$  находится в условиях концентрационной изоляции и неравенство  $\partial \Delta C(0, t) / \partial x \neq 0$  означало бы, что внутри диффузионного слоя существуют концентрационные источники, что в предположении о простой электрохимической реакции невозможно.

Следующая проблема состоит в разработке метода решения задачи и создании устойчивого алгоритма расчета искомых концентраций электроактивных компонентов раствора электролита и других электрохимических величин. Как уже было отмечено, классическая некорректность обратной задачи математической физики не позволяет применять для её решения обычные методы решения краевых задач для систем дифференциальных

уравнений. Необходима разработка регуляризирующих алгоритмов, основанных как на классических приёмах решения некорректных задач, так и на принципе наиболее полного использования априорной информации о физических свойствах решения. Известно, что использование определенных свойств решения задачи при разработке метода решения, например, в виде ограничений, или при выборе шага итерационного процесса, как правило, оказывает регуляризирующее воздействие на решение задачи. При разработке метода численного интегрирования обратной гранично-коэффициентной задачи типа (1)–(2) предлагается использовать специфические положения теории электродной диффузии. В частности, известный в теоретической электрохимии факт, что время наступления стационарного концентрационного профиля зависит только от диффузионных характеристик электрохимического процесса и не зависит от тока, подаваемого на электроды. Это позволяет расщепить задачу на суперпозицию двух – отдельно учесть влияние диффузионных и токовых режимов на результирующее изменение концентрации [3].

### 3. Метод решения

Рассмотрим основанный на этом принципе численный полуаналитический метод решения задачи (1)–(2).

Требуется по заданным электрохимическим параметрам и кривой «ток–потенциал» определить такое значение концентрации электроактивного компонента  $C_0$ , чтобы теоретическая и экспериментальная кривые были наиболее близки друг к другу,

т.е.  $\sum_{k=1}^n (i(t_k) - i_k)^2 \rightarrow \min_{C_0}$ , где  $i(t_k)$  – значения плотности тока,

полученные из теоретической зависимости, а  $i_k$  – экспериментальные значения в тех же точках  $t_k$ , то есть  $S(1/C_0) \rightarrow \min$ :

$$(7) \quad S\left(\frac{1}{C_0}\right) = \sum_{k=1}^n \left\{ i_0 \left[ \frac{C(0, t_k)}{C_0} \cdot e^{\frac{aZF}{RT}(E(t_k) - E_0)} - e^{\frac{(a-1)ZF}{RT}(E(t_k) - E_0)} \right] - i_k \right\}^2.$$

Положим, что на интервалах  $[t_i, t_{i+1}]$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , вольт-амперная кривая в координатах  $(E, i)$  допускает линейное приближение (рис. 1, б).

Рассмотрим вспомогательные функции (рис. 2).

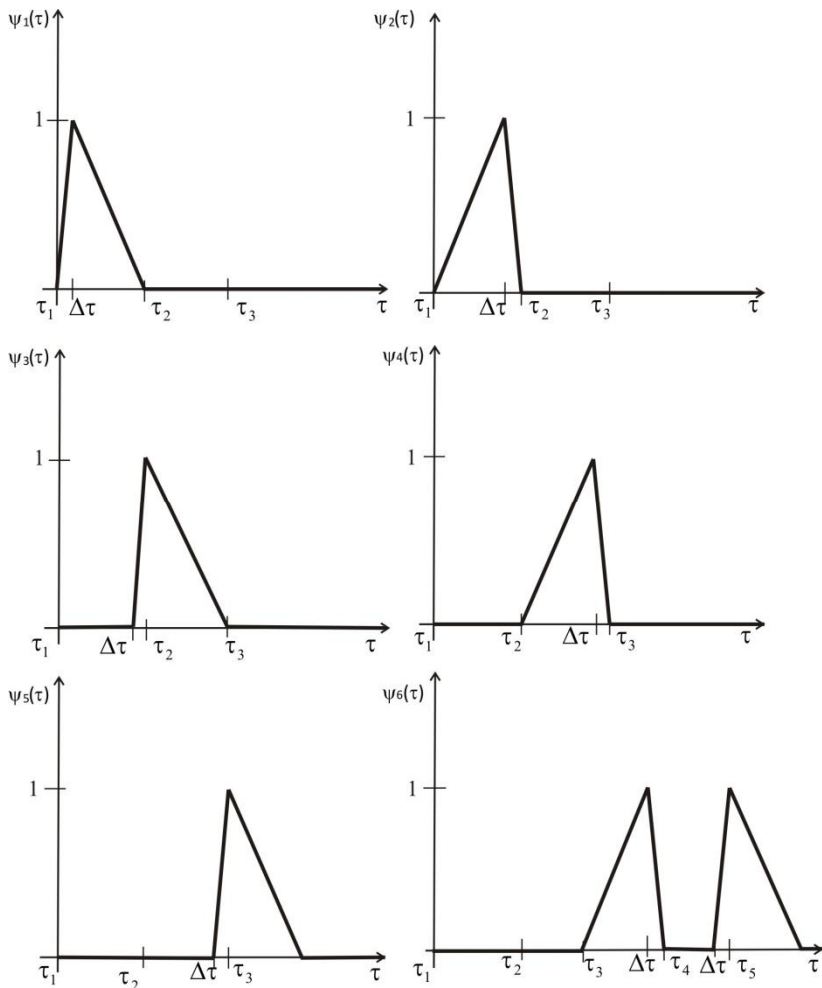


Рис. 2. Вспомогательные функции для линейного приближения теоретической и экспериментальной зависимостей

Можно показать, что кусочно-линейная функция  $i(t)$  (рис. 1, б) представима в виде

$$i(t) = i_1 y_1 + i_2 y_2 + i_2 y_3 + i_3 y_4 + i_3 y_5 + i_4 y_6 + i_4 y_7 + i_5 y_8 + \dots = \\ = i_1 y_1(x, t) + \sum_{k=2}^{n-1} i_k (y_{2k-2} + y_{2k-1}) + i_n y_{2(n-1)}.$$

Для доказательства рассмотрим некоторую линейную на интервале  $[t_1, t_2]$  функцию  $f(t)$  и две линейных функции  $y_1(t)$ ,  $y_2(t)$ , изображенные на рис. 3.

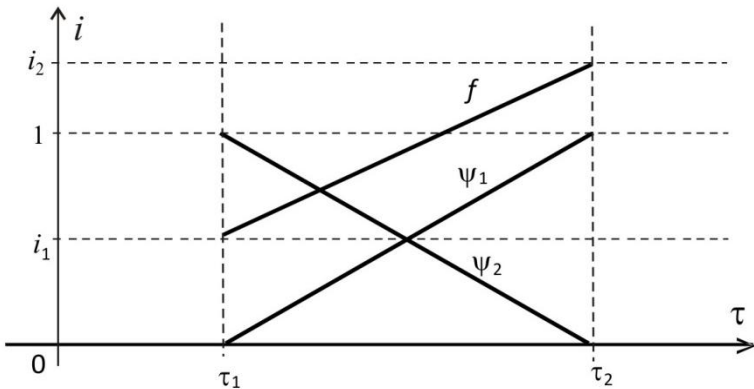


Рис. 3. Представление произвольной линейной функции на некотором интервале в виде суммы возрастающей и убывающей линейных функций

Покажем, что  $f(t) = i_1 \cdot y_1(t) + i_2 \cdot y_2(t)$ .

Для функции  $f$  имеем:

$$\frac{f - i_1}{t - t_1} = \frac{i_2 - i_1}{t_2 - t_1} \Rightarrow f = \frac{(i_2 - i_1)(t - t_1)}{(t_2 - t_1)} + i_1; \\ f = \frac{i_2 - i_1}{t_2 - t_1} \cdot t + \frac{i_2 - i_1}{t_2 - t_1} \cdot (-t_1) + i_1 \cdot \frac{t_2 - t_1}{t_2 - t_1} = \frac{i_2 - i_1}{t_2 - t_1} \cdot t + \\ + \frac{-i_2 t_1 + i_1 t_1 + i_1 t_2 - i_1 t_1}{t_2 - t_1} = \frac{i_2 - i_1}{t_2 - t_1} \cdot t + \frac{i_1 t_2 - i_2 t_1}{t_2 - t_1}.$$

Для функции  $y_1$  имеем:

$$\frac{y_1 - 1}{t - t_1} = \frac{0 - 1}{t_2 - t_1} \Rightarrow y_1 = \frac{-t + t_1}{t_2 - t_1} + 1 = \frac{-t + t_1 + t_2 - t_1}{t_2 - t_1} =$$

$$= \frac{t_2 - t}{t_2 - t_1}; \quad y_1 = -\frac{1}{t_2 - t_1} \cdot t + \frac{t_2}{t_2 - t_1}.$$

Аналогично для функции  $y_2$  имеем:

$$\frac{y_2 - 0}{t - t_1} = \frac{1 - 0}{t_2 - t_1} \Rightarrow y_2 = \frac{t - t_1}{t_2 - t_1};$$

$$y_2 = \frac{1}{t_2 - t_1} \cdot t - \frac{t_1}{t_2 - t_1}.$$

Тогда

$$f = i_1 \cdot y_1 + i_2 \cdot y_2 =$$

$$= -\frac{i_1}{t_2 - t_1} \cdot t + i_1 \cdot \frac{t_2}{t_2 - t_1} + \frac{i_2 t}{t_2 - t_1} - \frac{i_2 t_1}{t_2 - t_1} =$$

$$= \frac{i_2 - i_1}{t_2 - t_1} \cdot t + \frac{i_1 t_2 - i_2 t_1}{t_2 - t_1}.$$

Следовательно,  $f = i_1 \cdot y_1 + i_2 \cdot y_2$ .

Точно так же представима кусочно-линейная функция  $i(t)$  (рис. 1, б) на каждом интервале  $[t_i, t_{i+1}]$ :  $i(t) = i_k \cdot y_{2k-1} + i_{k+1} \cdot y_{2k}$ , откуда следует доказываемое равенство.

Функция  $C(x, t)$  из задачи (1)–(2) представима в виде

$$C(x, t) = C_0 + i j_1(x, t) + \sum_{k=2}^{n-1} i_k (j_{2k-2} + j_{2k-1}) + i_n j_{2(n-1)},$$

где  $j_k$  – решения задачи:

$$\frac{\partial j_k}{\partial t} = D \frac{\partial^2 j_k}{\partial x^2}; \quad j_k(x, 0) = 0; \quad j_k(d, t) = 0; \quad \frac{\partial j_k}{\partial x}(0, t) = \frac{y_k(t)}{zFD}.$$

Докажем это.

$$(8) \quad \frac{\partial C}{\partial t} = i_1 \frac{\partial j_1(x_1 t)}{\partial t} + \sum_{k=2}^{n-1} i_k \left( \frac{\partial j_{2k-2}}{\partial t} + \frac{\partial j_{2k-1}}{\partial t} \right) + i_n \frac{\partial j_{2(n-1)}}{\partial t};$$

$$(9) \quad D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = D \left[ i_1 \frac{\partial^2 j_1}{\partial x^2} + \sum_{k=2}^{n-1} i_k \left( \frac{\partial^2 j_{2k-2}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 j_{2k-1}}{\partial x^2} \right) + i_n \frac{\partial^2 j_{2(n-1)}}{\partial x^2} \right].$$

В силу того, что  $\frac{\partial j_i}{\partial t} = D \frac{\partial^2 j_i}{\partial x^2}$ , нетрудно видеть, что левые части выражений (8) и (9) равны между собой. Кроме того,

$$C(x,0) = C_0 \quad (\text{так как } j_i(x,0) = 0);$$

$$C(d,t) = C_0 \quad (\text{так как } j_i(d,t) = 0);$$

$$(10) \quad \begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial x}(0,t) &= i_1 \frac{\partial j_1(0,t)}{\partial x} + \sum_{k=2}^n i_k \left( \frac{\partial j_{2k-2}}{\partial x} + \frac{\partial j_{2k-1}}{\partial x} \right) + i_n \frac{\partial j_{2(n-1)}}{\partial x} = \\ &= i_1 \frac{Y_1(t)}{ZFD} + \sum_{k=2}^n i_k \left( \frac{Y_{2k-2}}{ZFD} - \frac{Y_{2k-1}}{ZFD} \right) + i_n \frac{Y_{2(n-1)}}{ZFD} = \frac{i(t)}{ZFD}. \end{aligned}$$

Подставив выражение для  $C(x, t)$  из формулы (10) в формулу (7), получим:

$$S\left(\frac{1}{C_0}\right) = \sum_{k=1}^n i_0 \left\{ \left[ \left( \frac{i_1 j_1 + \sum_{k=2}^{n-1} i_k (j_{2k-2} - j_{2k-1}) + i_n j_{2(n-1)}}{C_0} \right) e^{\frac{aZF}{RT}(E(t_k) - E_0)} - \left[ -i_k \right] \right]^2 - e^{\frac{(a-1)ZF}{RT}(E(t_k) - E_0)} \right\}.$$

Обозначим  $x = 1/C_0$ . Значение  $\min S(x)$  можно найти, если решить уравнение  $\partial S/\partial x = 0$ .

Получим это уравнение, для чего выполним следующие преобразования.

$$\begin{aligned} \frac{\partial S(x)}{\partial x} &= \sum_{k=1}^n 2 \left\{ i_0 \left[ \left( \left( 1 + x \left( i_1 j_1 + \sum_{k=2}^{n-1} i_k (j_{2k-2} + j_{2k-1}) + i_n j_{2(n-1)} \right) \right) \times \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. \times e^{\frac{aZF(E(t_k) - E_0)}{RT}} - e^{\frac{(a-1)ZF(E(t_k) - E_0)}{RT}} \right) \right] - i_k \right\} \times \\ &\quad \times i_0 \left( i_1 j_1 + \sum_{k=2}^{n-1} i_k (j_{2k-2} + j_{2k-1}) + i_n j_{2(n-1)} \right) e^{\frac{aZF}{RT}(E(t_k) - E_0)} = 0. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n x i_0 \left( i_j j_1 + \sum_{k=2}^{n-1} i_k (j_{2k-2} + j_{2k-1}) + i_n j_{2(n-1)} \right) e^{\frac{aZF}{RT}(E(t_k) - E_0)} \times \\ & \times i_0 \left( i_j j_1 + \sum_{k=2}^{n-1} i_k (j_{2k-2} + j_{2k-1}) + i_n j_{2(n-1)} \right) e^{\frac{aZF}{RT}(E(t_k) - E_0)} = \\ & = i_0 e^{\frac{(a-1)ZF}{RT}(E(t_k) - E_0)} + i_0 i_k \left( i_j j_1 + \sum_{k=2}^{n-1} i_k (j_{2k-2} + j_{2k-1}) + i_n j_{2(n-1)} \right) \end{aligned}$$

Обозначим

$$N_1 = \frac{aZF}{RT} \cdot (E(t_k) - E_0); \quad N_2 = \frac{(a-1)ZF}{RT} \cdot (E(t_k) - E_0).$$

Тогда

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{k=1}^n (i_0(xC(0, t_k) e^{N_1} - e^{N_2}) - i_k)^2; \\ \frac{\partial S}{\partial x} &= \sum_{k=1}^n 2(i_0(xC(0, t_k) e^{N_1} - e^{N_2}) - i_k) \cdot (i_0 C(0, t_k) e^{N_1}) = \\ &= \sum_{k=1}^n [2i_0 x C(0, t_k) e^{N_1} \cdot i_0 C(0, t_k) e^{N_1} - (2i_0 e^{N_2} + 2i_k) i_0 C(0, t_k) e^{N_1}] = \\ &= \sum_{k=1}^n x [(2i_0 C(0, t_k) e^{N_1} \cdot i_0 C(0, t_k) e^{N_1}) - (2i_0 e^{N_2} + 2i_k) i_0 C(0, t_k) e^{N_1}] = \\ &= x \sum_{k=1}^n (2i_0 C(0, t_k) e^{N_1} \cdot i_0 C(0, t_k) e^{N_1}) - \\ &- \sum_{k=1}^n (2i_0 e^{N_2} + 2i_k) i_0 C(0, t_k) e^{N_1} = 0. \end{aligned}$$

Из последнего равенства получим:

$$x = \frac{\sum_{k=1}^n (i_0 e^{N_2} + i_k) C(0, t_k) e^{N_1}}{\sum_{k=1}^n i_0 C^2(0, t_k) e^{2N_1}}, \quad C_0 = \frac{\sum_{k=1}^n i_0 C(0, t_k) e^{\frac{aZF}{RT}(E(t_k) - E_0)}}{\sum_{k=1}^n i_0 e^{\frac{(a-1)ZF}{RT}(E(t_k) - E_0)} + i_k}.$$

Рассмотрим решение задач по отысканию  $j_k$ :

$$\frac{\partial j_k}{\partial t} = D \frac{\partial^2 j_k}{\partial x^2}; \quad j_k(x, 0) = 0; \quad j_k(d, t) = 0; \quad \frac{\partial j_k}{\partial t}(0, t) = \frac{y_k(t)}{ZFD}.$$

Функции  $y_k$  можно разделить на два вида (рис. 4):

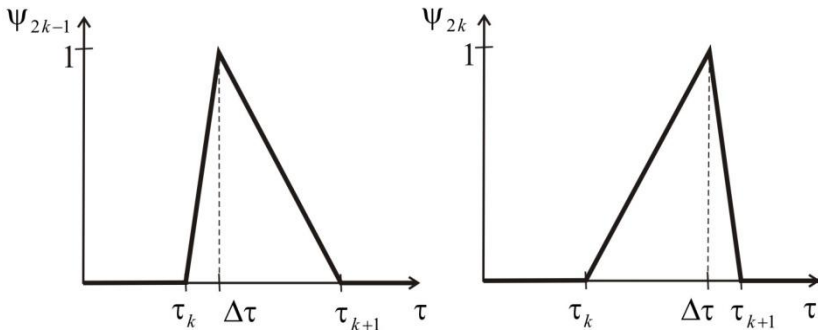


Рис. 4. Схемы вспомогательных функций

1.  $y_{2k-1}$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ), т.е.

$$y_{2k-1}(t) = \begin{cases} 0 & \text{для } \forall t \notin [t_{k+1}, t_k]; \\ \text{возрастает от } 0 \text{ до } 1 & \text{на интервале } [t_k, t_k + \Delta t]; \\ \text{убывает от } 1 \text{ до } 0 & \text{на интервале } [t_k + \Delta t, t_{k+1}]. \end{cases}$$

2.  $y_{2k}$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ), т.е.

$$y_{2k}(t) = \begin{cases} 0 & \text{для } \forall t \notin [t_{k+1}, t_k]; \\ \text{возрастает от } 0 \text{ до } 1 & \text{на интервале } [t_k, t_{k+1} - \Delta t]; \\ \text{убывает от } 1 \text{ до } 0 & \text{на интервале } [t_{k+1} - \Delta t, t_{k+1}]. \end{cases}$$

Будем считать, что  $\Delta t$  – малая величина, такая что  $\int_t^{t+\Delta t} y_i(t) dt$  – величина, незначительная по сравнению с величи-

ной  $\int_{t_k}^{t_{k+1}} y_i(t) dt$  и ею можно пренебречь, т.е. можно пренебречь ошибкой, вносимой в результаты интегрирования каждой функции  $y_i$ , если считать  $\int_t^{t+\Delta t} y_i(t) dt = 0$ .

Нетрудно видеть, что  $y_i'(t) \cdot \Delta t = 1$  (или  $-1$ ) на участках быстрого возрастания (соответственно, убывания) функции  $y_i$ .

Таким образом определенная функция  $y$  является непрерывной, и для решения краевой задачи по отысканию функций  $j$

можно использовать методы, использующие функции источника [7].

Для этого введем в рассмотрение функцию  $\bar{j} = j \cdot ZFD$ , переменную  $x = x/d$ ,  $0 \leq x \leq 1$ , и функцию  $h$ , равную  $h(x, t) = \bar{j}(x, t) - (x-1)y(t)$  (индекс  $k$  опускаем, так как все задачи решаются однотипно).

Для функции  $h$  получим следующую краевую задачу:

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial j}{\partial t} - (x-1)y'(t); \\ \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 j}{\partial x^2} \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial h}{\partial x^2} + (x-1)y'(t);$$

$$h(x, 0) = 0; \quad h(1, t) = 0; \quad \frac{\partial h}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial \bar{j}}{\partial x} - \frac{y(t)}{ZFD} = 0.$$

Общий вид решения задачи выглядит следующим образом [7]:

$$h(x, t) = \int_0^t dt \int_0^1 (1-y)y'(t) \left( 2 \sum_{n=0}^{\infty} e^{-I_n^2 D(t-t)} \cos I_n y \cos I_n dy \right),$$

где  $G(x, y, t) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} e^{-I_n^2 D t} \cos I_n y \cos I_n x$  — функция источника,

$$I_n = \frac{(2n+1)p}{2}.$$

Следовательно,

$$h(x, t) = \int_0^t dt y'(t) \cdot 2 \sum_{n=0}^{\infty} e^{-I_n^2 D(t-t)} \cos I_n x \int_0^1 (1-y) \cos I_n y dy.$$

Рассмотрим выражение

$$\begin{aligned} \int_0^1 (1-y) \cos I_n y dy &= -\frac{1}{I_n^2} [\cos I_n y + I_n y \sin I_n y] \Big|_0^1 + \frac{1}{I_n} \sin I_n y \Big|_0^1 = \\ &= -\frac{1}{I_n^2} (0 + I_n (-1)^n) + \frac{1}{I_n^2} (1 + 0) + \frac{1}{I_n} (-1)^n = \frac{1}{I_n^2}. \end{aligned}$$

$$h(0, t) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{I_n^2} e^{-I_n^2 D t} \int_0^t y'(t) e^{I_n^2 D t} dt.$$

Рассмотрим  $y(t) = y_{2k-1}(t)$ .

$y_{2k-1} = 1$  на интервале  $[t_k, t_k + \Delta t]$ ,

$$y_{2k-1} = -\frac{1}{t_{k+1} - t_k}.$$

Так как  $\Delta t$  мало, будем считать, что  $e^{I_n^2 D t} = e^{I_n^2 D t_k}$  на интервале  $[t_k, t_k + \Delta t]$ .

Следовательно,

$$\begin{aligned} h_{2k-1}(0, t) &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{I_n^2} e^{-I_n^2 D t} \left[ \int_{t_k}^{t_k + \Delta t} e^{I_n^2 D t} dt + \int_{t_k + \Delta t}^{t_{k+1}} -\frac{1}{t_{k+1} - t_k} e^{I_n^2 D t} dt \right] = \\ &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{I_n^2} e^{-I_n^2 D t} \left[ e^{I_n^2 D t_k} \Delta t - \frac{1}{t_{k+1} - t_k} + \int_{t_k + \Delta t}^{t_{k+1}} e^{I_n^2 D t} dt \right] = \\ &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{I_n^2} e^{-I_n^2 D t} \left[ \Delta t e^{I_n^2 D t_k} - \frac{1}{t_{k+1} - t_k} \cdot \frac{1}{I_n^2 D} e^{I_n^2 D t} \Big|_{t_k}^{t_{k+1}} \right] = \\ &= -2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{I_n^2} e^{-I_n^2 D t} \cdot \frac{1}{t_{k+1} - t_k} \cdot \frac{1}{I_n^2 D} \left[ e^{I_n^2 D t_{k+1}} - e^{I_n^2 D t_k} \right]. \end{aligned}$$

В преобразовании принято  $t_k + \Delta t \sim t_k$ , так как считается, что  $\Delta t$  мало в сравнении с  $t_k$ .

Таким образом,

$$h_{2k-1}(0, t) = -2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{I_n^2 D (t_{k+1} - t)} - e^{I_n^2 D (t_k - t)}}{I_n^4 D (t_{k+1} - t_k)}.$$

Аналогично,

$$h_{2k}(0, t) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{I_n^2 D (t_{k+1} - t)} - e^{I_n^2 D (t_k - t)}}{I_n^4 D (t_{k+1} - t_k)}.$$

$$h(0, t) = \bar{j}(0, t) + y(t),$$

$$j(0, t) = \frac{\bar{j}(0, t)}{ZFD} = \frac{1}{ZFD} [h(0, t) - y(t)].$$

Следовательно,

$$j_{2k-1}(0,t) = \frac{1}{ZFD(t_{k+1} - t_k)} \cdot \left[ -2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{I_n^4 D} \left[ e^{I_n^2 D(t_{k+1}-t)} - e^{I_n^2 D(t_k - t)} \right] - \right]$$

Аналогично,

$$j_{2k}(0,t) = \frac{1}{ZFD(t_{k+1} - t_k)} \cdot \left[ 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{I_n^4 D} \left[ e^{J_n^2 D(t_{k+1}-t)} - e^{J_n^2 D(t_k - t)} \right] - \right]$$

Таким образом, кусочно-линейная зависимость  $i(t)$  позволяет представить обратную задачу по нахождению  $C_0$  и других неизвестных электрохимических параметров в виде систем нелинейных алгебраических уравнений. При этом порядок системы и точность вычислений зависит от количества неизвестных электрохимических параметров реакции и количества интервалов линеаризации хроновольтамперометрической кривой.

#### 4. Результаты численных расчетов и экспериментальных данных

Расчеты концентраций ионов металлов, приведенные в данной работе, были выполнены в соответствии с формулами (7), (10) в интегрированной системе *MathCAD* для двух различных электрохимических систем, близких к практически используемым в технологии электрохимических производств.

1. Расчет концентрации меди в сернокислом электролите меднения состава:  $\text{CuSO}_4 \cdot 5\text{H}_2\text{O} - 60,93 \text{ г/л}$ ;  $\text{H}_2 \text{SO}_4 - 70 \text{ г/л}$ .

Экспериментально полученная кривая для выбранного электролита имеет вид, приведенный на рис. 1, а. Кусочно-линейная зависимость  $i(t)$  представлена на рис. 1, б. Для её получения использовался медный электрод диаметром 1 мм, скорость развертки потенциала – 10 мВ/с.

Значения электрохимических параметров взяты близкими к значениям, приведенным в «Справочнике по электрохимии» [6]:  $z = 2$ ,  $F = 96500$ ;  $D = 5 \cdot 10^{-5}$ ;  $a = 0,3$ ;  $R = 8,1$ ;  $T = 298$ ,  $i_0 = 10^{-5}$ ;  $E_0 = 0,386$ .

Рассчитанная по формулам (7), (10) концентрация ионов меди имеет значение, равное 1,012 моль/л. Это незначительно отличается от величины истинной концентрации ( $\sim 1$  моль/л).

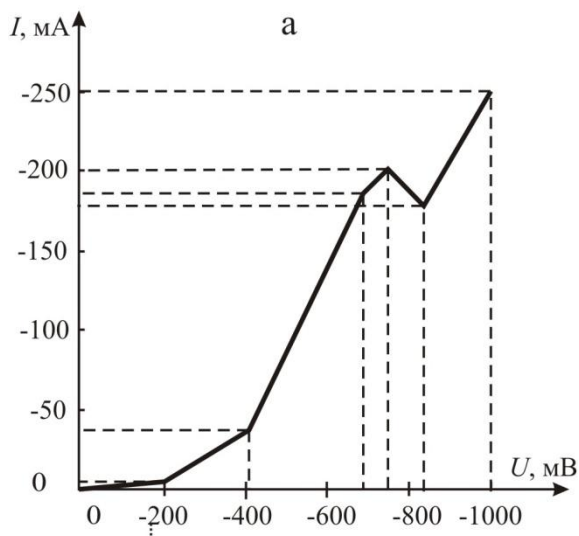
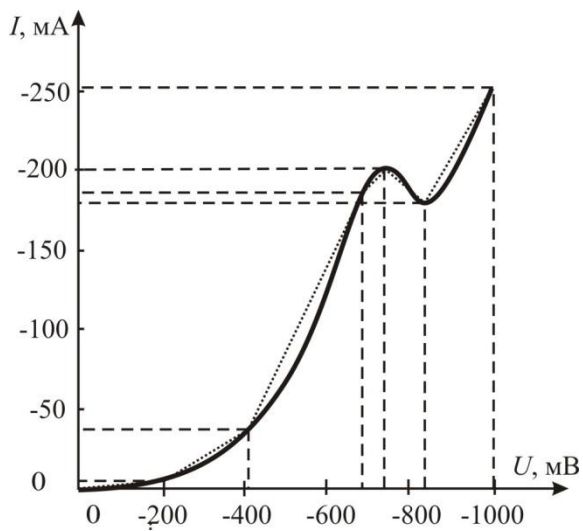
2. Расчет концентрации цинка в сернокислом электролите цинкования состава: сернокислый цинк  $\text{ZnSO}_4 \cdot 7\text{H}_2\text{O}$  – 300 г/л; сернокислый алюминий  $\text{Al}_2(\text{SO}_4)_3 \cdot 18\text{H}_2\text{O}$  – 30 г/л; сернокислый натрий  $\text{Na}_2\text{SO}_4 \cdot 10\text{H}_2\text{O}$  – 75 г/л; декстрин – 10 г/л; pH раствора – 3,5. Экспериментальная зависимость представлена на рис. 5, а. Кусочно-линейная зависимость  $i(t)$ , использованная в расчетах, приведена на рис. 5, б. Для её получения был выбран медный электрод диаметром 1 мм, скорость развертки потенциала – 5 мВ/с.

Для расчета выбраны следующие значения электрохимических параметров:  $z = 2$ ,  $F = 96500$ ;  $D = 0,6 \cdot 10^{-5}$ ;  $a = 0,15$ ;  $R = 8,1$ ;  $T = 298$ ,  $i_0 = 1 \cdot 10^{-5}$ ;  $E_0 = -0,762$ .

Расчетная концентрация имеет значение, равное 1,049, что незначительно отличается от величины истинной концентрации (1,045 М/л), что свидетельствует о достаточной точности расчетных формул.

## 5. Заключение

Таким образом, приведенные результаты расчетов свидетельствуют о работоспособности и достаточной точности представленного метода. В силу несложной алгоритмической структуры, данный метод расчета может быть использован при создании программного обеспечения в автоматических приборах, предназначенных для контроля и коррекции электролитов металлизации. Дальнейшее развитие алгоритма позволит рассчитывать концентрации многокомпонентных электролитов, а также и другие электрохимические параметры процессов электролиза по экспериментальным хроновольтамперометрическим зависимостям.



б

Рис. 5. а – схема вольтамперной кривой с участками линеаризации; б – линеаризованная вольтамперная кривая сернокислого электролита

### Литература

1. ГОРОБЕЦ А.И., ПЕТРОВА Н.Я., САЛИХДЖАНОВА Р.М-Ф. *Программное обеспечение для вольтамперометрического анализа* // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. – 1997. – № 9. – С. 6.
2. ЗАМЯТИН А.П., БЕК Р.Ю. *Компьютерная диагностика свойств и комплексный анализ состава технологических растворов при оптимизации процессов гальванических производств* // Химия в интересах устойчивого развития. – 1997. – Т. 5. – С. 479–490.
3. КОШЕВ А.Н., ПОДДУБНЫЙ Н.П. *Метод расчета устойчивого распределения тока по поверхности электродов ячеек сравнения в случае нестационарного электролиза* // Электрохимия. – 1980. – № 6. – С. 902–906.
4. МЯСОЕДОВ Б.Ф., ДАВЫДОВ А.В. *Химические сенсоры: возможности и перспективы* // Журнал аналитической химии. – 1990. – Т.45, вып. 7. – С. 1259–1266.
5. ПЕТРОВА Н.Я., САЛИХДЖАНОВА Р.М-Ф., ГОРОБЕЦ А.И. *Информационная система вольтамперометрических методов* // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. – 1997. – № 6. – С. 7.
6. *Справочник по электрохимии* / Под ред. А.М. Сухотина. – Л.: Химия, 1981.
7. ТИХОНОВ А.Н., САМАРСКИЙ А.А. *Уравнения математической физики*. Изд. 3-е, испр. и доп. – М.: Наука, 1966.

### MODELING AND CALCULATION OF ELECTROACTIVE COMPONENT CONCENTRATION IN ELECTROLYSIS PROCESS

**Alexander Koshev**, Doctor of Science, professor, Penza State University of Architecture and Construction (koshev@pguas.ru),

**Valentina Kuzina**, assistant professor, Penza State University of Architecture and Construction, Penza, Beljaeva str., 28 (kuzina@pguas.ru).



*Abstract: We suggest a computational semi-analytical method for metal ions concentration in electrolyte. Metal ions concentration is one of major control variables for the process of electrolysis. We analyze and compare the method of regression and that of physical and mathematical process modeling on examples of voltammetric measurement of zinc and copper concentration in sulfuric acid electrolyte of copper-plating.*

Keywords: mathematical model, voltammetric, concentration, diffusion equation, control of electrolysis process, reverse control problem.

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии Н.Н. Бахтадзе*