УДК 519
ББК 22.183.43 + 65в641

СВОЙСТВА ОПТИМАЛЬНОГО ДЕЛЕГИРОВАНИЯ УПРАВЛЕНИЯ В ОРГАНИЗАЦИИ[1]

Мишин С. П.[2]
(*Учреждение Российской академии наук
Институт проблем управления РАН, Москва*)

Рассмотрена задача минимизации функции затрат выбором оптимального делегирования – распределения управленческого воздействия, оказываемого на производственную подсистему, между менеджерами управленческой подсистемы, с учетом их сложной взаимосвязи, заключающейся в дублировании управлений друг друга. Математически данная постановка эквивалентна задаче оптимального распределения заданного объема выпуска между взаимосвязанными предприятиями с многопродуктовыми функциями затрат. Исследованы общие свойства оптимального решения, позволяющие находить оптимальное делегирование для различных классов функций затрат. Показано, что ключевые свойства функции затрат отдельных менеджеров сохраняются и для функции затрат всей управленческой подсистемы при оптимальном делегировании.

Ключевые слова: оптимальное делегирование управления, менеджер, затраты, организация.

1. Введение

Иерархическая организация (основанная на ассиметричном отношении элементов «начальник – подчиненный») характерна для

---

[1] *Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований* (*проект* 10-07-00129).

[2] *Сергей Петрович Мишин, кандидат физико-математических наук* (*smishin78@mail.ru*).

самых различных сфер практической деятельности людей. Бóльшая часть современной экономики состоит из иерархических организаций, которые позволяют повысить эффективность производства за счет разделения труда, порождая в то же время организационные издержки сложной *системы управления* с *иерархической структурой* (*иерархией*), состоящей из менеджеров, которые управляют производственной системой. Выделим *производственную и управленческую подсистемы*, изображенные на рис. 1.

Исполнители производственной подсистемы W (обозначаемые $w_1,\dots,w_n$) могут влиять на управленческую подсистему сколь угодно сложным образом. Например, затраты менеджеров могут зависеть от количества исполнителей n, от характеристик отдельных исполнителей, от взаимодействия в *группах* (множествах) исполнителей размера 2, 3 и т.д. В соответствии с системным подходом на рис. 1 *влияние управленческой подсистемы на производственную ограничивается* p *видами управления – управленческого воздействия в объемах* $x = (x^1,\dots,x^p)^T \geq 0$. В вектор x могут входить, например, такие виды управления, как *обработка и передача информации, принятие решений, планирование и контроль, прием и увольнение*, *обучение и разъяснение*, *решение проблем* и т.п.

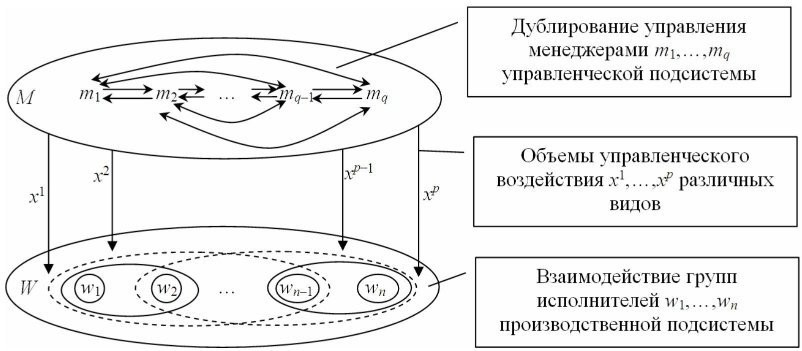

Рис. 1. Производственная и управленческая подсистемы

Подход с выделением аддитивных объемных характеристик управленческого воздействия является достаточно общим. Увеличивая размерность p, можно описать и прочие характеристики управленческого воздействия, например, качество (на-сколько эффективно управленческое воздействие) и время (когда оказывается управленческое воздействие), а также конкретизировать, на каких исполнителей или их группы это воздействие оказывается.

Критерий эффективности всей организации можно представить как функцию выручки за вычетом функции затрат производственной подсистемы W *и функции затрат управленческой подсистемы* M, причем первые две функции зависят только от управления x, но не от деталей организации подсистемы M (поскольку ее влияние на подсистему W ограничивается компонентами вектора x):

(1) $P(x, W, M) = S(x, W) - C_{prod}(x, W) - C_{manag}(x, W, M)$.

В результате обоснована общность следующего подхода. Фиксируется некоторая производственная система и *вектор управления* x (который называется *вектором управления производственной подсистемой*). На первом этапе решается задача об оптимальной управленческой подсистеме M (включая иерархию, полномочия менеджеров и т.п.), оказывающей заданное управленческое воздействие x с минимальными затратами. На втором этапе оптимизируется производственная подсистема и вектор управления x с учетом функции минимальных затрат на его реализацию управленческой подсистемой. Наиболее сложным является первый этап – *задача оптимизации управленческой подсистемы* M*, оказывающей заданное управленческое воздействие* x *с минимальными затратами*, называемая ниже *задачей об оптимальной организации*:

(2) $C^*_{manag}(x) = \min\limits_{M \in \mathbf{M}} C_{manag}(x, M)$,

где через $\mathbf{M}$ обозначено *множество допустимых организаций*, а подсистема $M^*(x) \in \mathbf{M}$, доставляющая минимум (2), *оптимальной организацией*, *реализующей* x (фиксированный аргумент W для краткости опускается). На рис. 1 задачу (2) можно проиллюстрировать как построение минимально затратной управленческой подсистемы M внутри верхнего эллипса при условии реализации управления x.

Задача об оптимальной организации (2) может включать в себя оптимизацию разнообразных характеристик управленческой подсистемы: количества и состава менеджеров, их взаимной подчиненности (вида иерархии), правил взаимодействия, стимулирования и т.п. В настоящей работе рассматривается лишь одна[1] из подзадач задачи об оптимальной организации (2): *задача об оптимальном делегировании в организации*: каждый из q менеджеров вносит свой вклад в управление x, то есть менеджерам $m_1, \ldots, m_q$ *делегированы* такие векторы управления $y_1, \ldots, y_q$, что выполнено *балансовое условие* $y_1 + \ldots + y_q = x$ и каждый менеджер оказывает неотрицательное управленческое воздействие ($y_1, \ldots, y_q \geq 0$, то есть неотрицательны все компоненты векторов). Подобное аддитивное распределение управления между менеджерами возможно, поскольку рассматриваются лишь объемные виды управления (как указано выше, это не ограничивает общности). Для краткости распределение вектора x на сумму векторов $y_1, \ldots, y_q$ называется *делегированием*, а конкретный вектор y_i – *делегированием менеджера* m_i.

В настоящей работе классические методы непрерывной оптимизации применены для исследования задачи об оптимальном делегировании. В разделе 2 определен вид функции затрат управленческой подсистемы. В разделе 3 поставлена задача об оптимальном делегировании и обосновано, что результаты настоящей работы позволяют исследовать дальнейшие этапы оптимизации организации (иерархии, типов и состава менеджеров и т.п.), опираясь на свойства функции минимальных затрат, доказанные в последующих разделах в зависимости от свойств функций затрат отдельных менеджеров. В заключении сформулированы основные математические результаты работы.

Кроме того, в разделах 2 и 3 отмечено, что за последнее десятилетие произошел резкий рост количества работ, в которых проводится идентификация многопродуктовых функций затрат предприятия на выпуск набора продуктов в заданных объемах. Показано, что математический аппарат, предложенный в на-

---

[1] *Общее исследование задачи об оптимальной организации проведено в* [3]. *Там же изложена одна из частных моделей совместной оптимизации производственной и управленческой подсистем.*

стоящей работе, может использоваться для поиска оптимального распределения общего объема выпуска между предприятиями (отрасли, холдинга и т.п.), которые обмениваются продуктами производства по обобщенной модели многопродуктового межотраслевого баланса и описываются нелинейными многопродуктовыми функциями затрат.

2. Функция затрат управленческой подсистемы

Если управленческая подсистема состоит из единственного менеджера m, оказывающего весь объем управленческого воздействия x, то функцию затрат менеджера $C_m(x) = C_{manag}(x, M)$ (равную функции затрат управленческой подсистемы) можно моделировать по аналогии с затратами любого предприятия, выпускающего заданный объем «продукции» x (под «продукцией» менеджера понимается оказанное им управленческое воздействие). Для этого используются *многопродуктовые функции затрат*, которые начали применяться в эконометрических исследованиях в 1970-х для учета разнообразия производимых продуктов, количества заказчиков, размера территории и прочих аддитивных характеристик, влияющих на затраты.

При построении многопродуктовой функции затрат главной проблемой является недостаточность данных для достоверной статистической оценки большого количества параметров. Несмотря на разработку специальных методов «обхода» этой проблемы (например, Positive Mathematical Programming, см. [11]), до последнего десятилетия в основном удавалось статистически идентифицировать только иллюстративные двух-трехпродуктовые функции затрат. Ситуация кардинально изменилась в 2000-е годы в связи с качественным скачком уровня информатизации экономики, позволяющим накапливать достаточное количество статистических данных. Достаточно сказать, что поисковая система «Google» по запросу «multi-output cost function» выдает несколько миллионов ссылок (на 2011 год). Не претендуя на сколько-нибудь полный обзор работ по этой тематике, отметим, что в любой отрасли, характеризующейся возможностью выбора множества выпускаемых продуктов, можно без труда найти прикладные исследования, в которых идентифицированы многопродуктовые функции затрат (например, коммунальное хозяйство [9], сельское хозяйство – [9], [8]; телекоммуникации и связь [14], [6]; транспорт – [15]; образование – [7]).

В настоящей работе предполагается лишь непрерывная дифференцируемость функции затрат $C_m(x)$ (существование и непрерывность функций предельных затрат). Конкретный вид функции не фиксируется, так же, как и свойства выпуклости, однородности, неотрицательности и монотонности, существенность которых явно оговаривается ниже.

Увеличение количества менеджеров приводит к усложнению управленческой подсистемы. Чем она сложнее, тем большую долю управления, реализуемого одними менеджерами, вынуждены *дублировать* другие менеджеры. В настоящей работе рассматривается модель с линейным дублированием, что не ограничивает общности, поскольку рассматриваются широкие классы функций затрат, возможно увеличение размерности управления и замена переменных.[1]

Модель с линейным дублированием базируется на понятии коэффициентов дублирования. При единственном виде управления $p = 1$ коэффициент $d_{i,j}$ показывает, какую долю управления y_j, делегированного менеджеру m_j, вынужден повторять («дублировать») менеджер m_i, то есть задана *матрица дублирования* $D = (d_{i,j})$ размера $q \times q$. При нескольких видах управления $p > 1$ коэффициент $d_{i,j}^{k,l}$ показывает, какую долю управления вида l менеджера m_j дублирует менеджер m_i при управлении вида k. Соответственно, пара менеджеров m_i, m_j характеризуется матрицей $D_{i,j} = (d_{i,j}^{k,l})$ размера $p \times p$, а вся *матрица дублирования* $D = (D_{i,j})$ состоит из q^2 таких блоков, то есть D имеет размер $pq \times pq$ и состоит из элементов $d_{i,j}^{k,l}$, в которых нижние индексы

[1] *В [3] доказано, что в рамках рассматриваемой модели можно описать и нелинейное дублирование, и любую функцию затрат, зависящую от составного вектора делегирования* y.

определяют положение блока (i – во вертикали, j – по горизонтали), а верхние индексы определяют положение элемента в блоке (k – по вертикали, l - по горизонтали).

В результате вместо функции затрат $C_m(x)$ единственного менеджера рассматривается *функция затрат управленческой подсистемы* M: $C_{manag}(x, D, y) = C_{m_1}(\tilde{y}_1) + ... + C_{m_q}(\tilde{y}_q)$, равная сумме функций затрат q менеджеров, зависящих от *векторов нагрузки менеджеров* $\tilde{y}_1, ..., \tilde{y}_q$ *с учетом дублирования менеджерами делегирований друг друга*. Нагрузка вычисляется следующим образом: $\tilde{y} = Dy$, где вектор делегирования y составлен из векторов делегирования менеджеров $y_1, …, y_q$, а вектор $\tilde{y}$ составлен из векторов нагрузки менеджеров $\tilde{y}_1, ..., \tilde{y}_q$). Функция $C_{manag}(x, D, y)$ зависит от своих аргументов неявным образом, с учетом равенств $\tilde{y} = Dy$, $y_1 + … + y_q = x$, подобная запись используется ниже для удобства и единообразия изложения.

Обратная матрица D^{-1}, называемая *матрицей продуктивности*, представляет собой многопродуктовое обобщение матрицы межотраслевого баланса в леонтьевской модели. Отрицательные элементы D^{-1}, стоящие вне главной диагонали[1], характеризуют объемы различных видов управленческого воздействия различных менеджеров, которые дополнительно требуются для того, чтобы данный менеджер оказал единицу объема управленческого воздействия данного вида. Эта дополнительная нагрузка соответствует организационным издержкам сложной подсистемы управления, например, необходимости контроля подчиненных и отчетов перед начальниками. При $p = 1$ сумма $\hat{d}_i$ элементов i-го столбца D^{-1} характеризует *продуктивность менеджера* m_i, то есть вклад единицы нагрузки в итоговое «чистое» управление x, оказываемое на производственную подсистему: $\hat{d}_1\tilde{y}_1 + ... + \hat{d}_q\tilde{y}_q = x$. В многомерном случае $\hat{D}_1\tilde{y}_1 + ... + \hat{D}_q\tilde{y}_q = x$,

---

[1] *В рассматриваемой модели, в отличие от леонтьевской, внедиагональные элементы D^{-1} могут быть и положительными.*

где $\hat{D}_j = D_{1,j}^{-1} + ... + D_{q,j}^{-1}$ – *матрица продуктивности менеджера* m_j (сумма блоков D^{-1} размера $p \times p$).

Если под менеджерами (элементами подсистемы управления) понимать произвольные предприятия, каждое из которых описывается многопродуктовой функцией затрат, то матрица дублирования определяет обмен предприятий продуктами производства по обобщенной модели межотраслевого баланса (сколько сырья определенного вида, производимого одним предприятием, нужно для производства единицы продукции другого). Векторы нагрузки $\tilde{y}_1, ..., \tilde{y}_q$ соответствуют суммарному выпуску предприятий, а векторы $y_1, \ldots, y_q$ – «чистому» выпуску, остающемуся после внутреннего потребления предприятиями продукции друг друга. Если при этом имеются r сугубо «внутренних» продуктов видов $p + 1, \ldots, p + r$ (виды управления, не требующиеся производственной подсистемы), то их легко учесть в рамках модели, увеличивая размерность вектора x на r и полагая $x_{p+1} = 0, \ldots, x_{p+r} = 0$. В результате, рассматриваемая функция $C_{manag}(x, D, y) = C_{m_1}(\tilde{y}_1) + ... + C_{m_q}(\tilde{y}_q)$ определяет затраты всех предприятий (отрасли, холдинга и т.п.) с учетом сложного обмена продуктами производства по обобщенной модели многопродуктового межотраслевого баланса и сложных нелинейных многопродуктовых функций затрат.

3. Задача об оптимальном делегировании

С учетом вида функции затрат управленческой подсистемы, определенной в предыдущем разделе, задача *об оптимальном делегировании* имеет вид:

(3) $$C_{manag}^*(x, D) = \min_{y_1 \ge 0, \ldots, y_q \ge 0:\, y_1 + \ldots + y_q = x} C_{manag}(x, D, y) = \min_{y_1 \ge 0, \ldots, y_q \ge 0:\, y_1 + \ldots + y_q = x} \sum_{i=1}^{q} C_{m_i}(D_i y).$$

Результатом решения задачи (3) является *функция* $C_{manag}^*(x, D)$*, характеризующая минимальные затраты на оказание управленческого воздействия* x *при условии его оптимального распределения между менеджерами с функциями затрат*

$C_{m_1}(\cdot),...,C_{m_q}(\cdot)$, *входящими в управленческую подсистему с матрицей дублирования D*. Всевозможные характеристики управленческой подсистемы и отдельных менеджеров (типы менеджеров, иерархия менеджеров, порядок взаимодействия менеджеров, стимулирование менеджеров и т.п.) могут гибко моделироваться с помощью матрицы дублирования и параметров функции затрат.[1] Для оптимизации вышеупомянутых характеристик организации необходима дальнейшая минимизация функции $C^*_{manag}(x,D)$, например, по элементам матрицы D. Для подобной оптимизации необходимо опираться на *общие свойства функции* $C^*_{manag}(x,D)$ (*основным из которых является непрерывная дифференцируемость, а дополнительными – выпуклость, однородность и монотонность*), *проверке которых и посвящена настоящая работа*. Кроме технических свойств, необходимых для оптимизации, *результаты настоящей работы устанавливают взаимосвязь между свойствами функций затрат отдельных менеджеров и всей управленческой подсистемы при условии оптимального делегирования*.

В терминах оптимального распределения объемов производства (см. раздел 2), результаты работы позволяют установить взаимосвязь между функциями затрат отдельных предприятий (взаимодействующих по модели многопродуктового межотраслевого баланса) и функцией затрат всей отрасли (объединения, холдинга и.т.п.). Это дает возможность далее оптимизировать структуру отрасли (определяющую матрицу дублирования D и параметры функции затрат), минимизируя функцию $C^*_{manag}(x,D)$ с учетом ее свойств, доказанных в настоящей работе.

4. Общие свойства оптимального делегирования

Задача минимизации затрат (3) решается на ограниченном ($0 \le y_i^k \le x^k$) и замкнутом множестве допустимых делегирований. Поэтому для того, чтобы минимум (3) достигался, достаточно

---

[1] *См. соответствующие модели в* [3].

непрерывности функций затрат $C_{m_1}(\cdot)$, …, $C_{m_q}(\cdot)$ (теорема Вейерштрасса, [5]). Следовательно, задача об оптимальном делегировании имеет решение, поскольку рассматриваются непрерывно-дифференцируемые функции затрат менеджеров, которые очевидно непрерывны.

С учетом покоординатных ограничений $x^k - y_1^k - ... - y_q^k = 0$, $-y_i^k \le 0$ запишем лагранжиан задачи (3):

(4) $L = l_0 \sum_{i=1}^{q} C_{m_i}(D_i y) + \sum_{k=1}^{p} l^k (x^k - y_1^k - .. - y_q^k) + \sum_{k=1}^{p} \sum_{i=1}^{q} q_i^k (-y_i^k)$,

где *коэффициенты Лагранжа* $l_0 \ge 0$, $l = (l^1, ..., l^p)^T \in R^p$, $q_i^k \ge 0$, $q_i = (q_i^1, ..., q_i^p)^T \in R_+^p$. Вектор частных производных функции затрат $C_{m_i}(D_i y)$ менеджера m_i по делегированию менеджера m_j:

(5) $(\partial C_{m_i}(D_i y) / \partial y_j^1, ..., \partial C_{m_i}(D_i y) / \partial y_j^p)^T = D_{i,j}^T \nabla C_{m_i}(\tilde{y}_i)$,

где в правой части равенства стоит вектор частных производных по переменным $\tilde{y}_i^1, ..., \tilde{y}_i^p$, то есть градиент функции затрат $C_{m_i}(\cdot)$ менеджера m_i при нагрузке $\tilde{y}_i = D_i y$.[1] pq условий равенства нулю частных производных лагранжиана (4) примут вид:

(6) $l_0 \sum_{i=\overline{1.q}} D_{i,j}^T \nabla C_{m_i}(\tilde{y}_i) = l + q_j$ для всех $j = \overline{1,q}$.

Обозначим через $g = (\nabla C_{m_1}(\tilde{y}_1)^T, ..., \nabla C_{m_q}(\tilde{y}_q)^T)^T$ вектор-столбец, составленный из стоящих «друг под другом» векторов градиентов; через $\overline{l} = (l^T, ..., l^T)^T$ – вектор, составленный из q повторяющихся векторов λ, $q = (q_1^T, ..., q_q^T)^T$ – вектор, составленный из компонент векторов θ_1, …, θ_q. *Условия равенства нулю производных лагранжиана* (6) в компактной форме примут вид:

(7) $l_0 D^T g = \overline{l} + q$.

---

[1] *Формула* (5) *преобразования градиента при линейной замене переменных широко известна* (*см., например,* [13]): $\partial C_{m_i}(D_i y) / \partial y_j^l = \sum_{k=\overline{1,p}} d_{i,j}^{k,l} \partial C_{m_i}(D_i y) / \partial x^k = (d_{i,j}^{\cdot,l}, \nabla C_{m_i}(\tilde{y}_i))$, *где* $d_{i,j}^{\cdot,l}$ – l-й *столбец матрицы* $D_{i,j}$. *Таким образом, левая часть* (5) *есть скалярное произведение столбцов* $D_{i,j}$ *на* $\nabla C_{m_i}(\tilde{y}_i)$, *то есть* $D_{i,j}^T \nabla C_{m_i}(\tilde{y}_i)$.

Делегирование допустимо, если $y_1 \geq 0,..., y_q \geq 0$ и выполнены *балансовые условия*:

(8) $y_1 + \ldots + y_q = x$.

Кроме того, выпишем *условия дополняющей нежесткости*, связывающие компоненту делегирования y_i^k с соответствующим ей коэффициентом Лагранжа $q_i^k \geq 0$:

(9) $q_i^k y_i^k = 0$ для всех $i = \overline{1, q}$, $k = \overline{1, p}$.

Критической точкой назовем делегирование и коэффициенты Лагранжа, удовлетворяющие условию (7) равенства нулю производных лагранжиана (или в развернутой форме – условию (6)), условию допустимости делегирования (8) и условию дополняющей нежесткости (9). Достаточно искать оптимальное делегирование среди критических точек, что подтверждается следующей классической теоремой, справедливой для непрерывно дифференцируемых целевых функций.

Теорема 1 (Каруша-Куна-Таккера,[1] см., например, [1]). *Если y – оптимальное правило делегирования, доставляющее минимум затрат в задаче* (3)*, то найдутся такие коэффициенты Лагранжа* $l_0 \geq 0$, $l \in R^p$, $q_i \in R_+^p$*, не все равные нулю, которые совместно с делегированием y являются критической точкой* (*выполнены условия* (7), (8), (9)).

Итак, при поиске оптимального делегирования можно ограничиться решениями системы уравнений (7), (8), (9) при ограничении неотрицательности *y* и θ. Решения со строго положительными компонентами вектора *y* будем называть *внутренними*, прочие решения – *краевыми*. Из условий (9) следует, что для любого внутреннего решения $\theta = 0$. Для краевого решения с $y_i^k = 0$ коэффициент Лагранжа q_i^k может быть положительным, в этом случае ограничение-неравенство $y_i^k \geq 0$ называется *напряженным*. Для внутреннего решения все ограничения-неравенства будут ненапряженными.

---

[1] *Иногда эта теорема еще называется теоремой Каруша-Джона.*

Коэффициент λ_0 может быть равен нулю или единице (при прочих $\lambda_0 > 0$ коэффициенты Лагранжа в (4) можно разделить на λ_0 и перейти к новым переменным, что, очевидно, не повлияет на выполнение условий (7), (8), (9)). В случае $\lambda_0 = 1$ имеет место так называемый *регулярный случай*, при $\lambda_0 = 0$ вырожденный. Линейность ограничений является достаточным условием регулярности оптимизационной задачи, то есть в теореме 1 можно считать $\lambda_0 = 1$. В рассматриваемой задаче этот факт легко доказать непосредственно.

Следствие 1. *В условиях теоремы* 1 *достаточно рассматривать только регулярный случай* $l_0 = 1$, *то есть найдутся такие коэффициенты Лагранжа* $l \in R^p$, $q_i \in R_+^p$, *которые совместно с делегированием* **y** *являются критической точкой*.

Доказательство. В вырожденном случае $\lambda_0 = 0$ из (6) имеем $q_1^k = ... = q_q^k = -l^k$ для всех $k = \overline{1, p}$. При $l_k \neq 0$ условия дополняющей нежесткости (9) дают $y_1^k = ... = y_q^k = 0$, что с учетом условия баланса даст $x^k = 0$. Поэтому в случае $x^k > 0$ имеем $q_1^k = ... = q_q^k = -l^k = 0$. Таким образом, при $x > 0$ (требуется реализация положительного объема управленческого воздействия любого вида) из $\lambda_0 = 0$ следует равенство нулю всех коэффициентов Лагранжа, что противоречит условиям теоремы 1. Поэтому для случая $x > 0$ следствие доказано.

В общем случае считаем $x^1 > 0, ..., x^{p_0} > 0, x^{p_0+1} = 0, ..., x^p = 0$, что не ограничивает общности, поскольку виды управления можно перенумеровать так, чтобы нулевые компоненты вектора x были последними. Тогда $y_1^l = ... = y_q^l = 0$ для всех $l > p_0$. Рассмотрим задачу (3) с оставшимися переменными $y_1^k \geq 0, ..., y_q^k \geq 0$ для всех $k \leq p_0$, то есть рассмотрим p_0-мерные векторы неизвестных $y_1 + ... + y_q = (x^1, ..., x^{p_0})^T$. Рассмотрим векторное уравнение (6):

(*) $\quad l_0 \sum_{i=1}^{q} D_{i,j}^T \nabla C_{m_i}(\tilde{y}_i) = l + q_j$ для всех $j = \overline{1, q}$.

В (*) должны выполняться только первые p_0 скалярных уравнений, поскольку в (5) дифференцирование ведется только по $y_j^1,\dots,y_j^{p_0}$. При этом в (6) «задействованы» только первые p_0 строк матрицы $D_{i,j}^T$, то есть только первые p_0 столбцов матрицы $D_{i,j}$ (остальные столбцы не играют роли в функции затрат, поскольку умножаются на нулевое делегирование).

Для рассмотренной задачи запишем любое оптимальное решение $y_1^k \ge 0,\dots,y_q^k \ge 0$, $k \le p_0$, $y_1^k + \dots + y_q^k = x^k$ обеспечивающее минимум затрат. Для него также верна теорема 1, причем с учетом $x^1 > 0,\dots,x^{p_0} > 0$ по доказанному выше $\lambda_0 = 1$ и найдутся такие $l^1,\dots,l^{p_0}$, $q_i^1 \ge 0,\dots,q_i^{p_0} \ge 0$, что при каждом j выполнены p_0 первых уравнений (*) и $q_i^k y_i^k = 0$ для всех $i=\overline{1,q}$, $k=\overline{1,p_0}$. Продолжим это решение. Для этого через $d_{i,j}^{\cdot,l}$ обозначим l-й столбец матрицы $D_{i,j}$ (или l-ю строку $D_{i,j}^T$), $l=\overline{p_0+1,p}$. l-е уравнение (*) имеет вид $\sum_{i=1}^{q}(d_{i,j}^{\cdot,l},\nabla C_{m_i}(\tilde{y}_i)) = l^l + q_j^l$. Положим $l^l = \min_{1\le j\le q}\sum_{i=1}^{q}(d_{i,j}^{\cdot,l},\nabla C_{m_i}(\tilde{y}_i))$, $q_j^l = \sum_{i=1}^{q}(d_{i,j}^{\cdot,l},\nabla C_{m_i}(\tilde{y}_i)) - l^l$, что при каждом $j=\overline{1,q}$ обеспечит выполнение всех p уравнений (*) и неравенство $q_j^l \ge 0$. В силу $y_1^l = \dots = y_q^l = 0$ выполнено $q_i^l y_i^l = 0$, а также условие баланса $y_1^l + \dots + y_q^l = x^l = 0$.

Найденными решениями вида $y_i = (y_i^1,\dots,y_i^{p_0},0\dots,0)^T$, $i=\overline{1,q}$ исчерпываются все оптимальные решения исходной задачи (3). Для любого такого решения при $\lambda_0 = 1$ найдены коэффициенты Лагранжа $l \in R^p$, $q_i \in R_+^p$, обеспечивающие выполнение условий (6) и условий дополняющей нежесткости $q_i^k y_i^k = 0$ для всех $i=\overline{1,q}$, $k=\overline{1,p}$. Следствие доказано. ■[1]

[1] *Символ «■» здесь и далее обозначает окончание доказательства.*

Ниже без дополнительных оговорок будем считать, что $l_0 = 1$. В результате для определения pq неизвестных y_i^k, p неизвестных $l^1,\dots, l^p$ и pq неизвестных q_i^k теорема 1 и следствие 1 дают соответствующее количество уравнений: pq условий равенства нулю производных лагранжиана (7), p балансовых ограничений (8) и pq условий дополняющей нежесткости (9). Совпадение числа уравнений и числа неизвестных в общем случае не гарантирует единственности делегирования. В случае нескольких решений требуется еще минимизация затрат по всем делегированиям, для которых нашлась критическая точка.

Докажем следствие, гарантирующее при $x^k > 0$ единственность коэффициентов Лагранжа, определяемых по заданному оптимальному делегированию.

Следствие 2. *Если y – оптимальное правило делегирования, доставляющее минимум затрат в задаче* (3)*, то при $x^k > 0$ однозначно определяются коэффициенты Лагранжа $l^k = \min_j \sum_i (d_{i,j}^{\cdot,k}, \nabla C_{m_i}(\tilde{y}_i))$*,[1] *$q_j^k = \sum_i (d_{i,j}^{\cdot,k}, \nabla C_{m_i}(\tilde{y}_i)) - l^k$, которые совместно с делегированием y являются критической точкой. При $x^k = 0$ можно выбрать любое $l^k \le \min_j \sum_i (d_{i,j}^{\cdot,k}, \nabla C_{m_i}(\tilde{y}_i))$, после чего q_j^k определяется аналогичным образом.*

Доказательство. Из уравнения (6) (детализирующего уравнения критической точки (7)), при $q_j^k = 0$ получаем $l^k = \sum_i (d_{i,j}^{\cdot,k}, \nabla C_{m_i}(\tilde{y}_i))$, а при $q_j^k > 0$ получаем $l^k < \sum_i (d_{i,j}^{\cdot,k}, \nabla C_{m_i}(\tilde{y}_i))$. При $x^k > 0$ найдется j, для которого $y_j^k > 0$, поэтому $q_j^k = 0$ и коэффициент Лагранжа $l^k = \min_j \sum_i (d_{i,j}^{\cdot,k}, \nabla C_{m_i}(\tilde{y}_i))$ однозначно определяется по оптимальному делегированию y. При $x^k = 0$ выполнено $l^k \le \min_j \sum_i (d_{i,j}^{\cdot,k}, \nabla C_{m_i}(\tilde{y}_i))$ (иначе нарушается условие $q \ge 0$), однако $y_1^k = \dots = y_q^k = 0$, поэтому λ^k можно сделать

[1] *Напомним, что нагрузка вычисляется по формуле $\tilde{y} = Dy$, через $d_{i,j}^{\cdot,k}$ обозначается k-й столбец матрицы $D_{i,j}$.*

произвольно малым, соответственно увеличивая $q_1^k,...,q_q^k$ (условия дополняющей нежесткости (9) при этом удовлетворены). Поэтому можно выбрать любое $l^k \le \min\limits_j \sum_i (d_{i,j}^{\cdot,k}, \nabla C_{m_i}(\tilde{y}_i))$. ■

5. Непрерывность и дифференцируемость

В результате решения задачи об оптимальном делегировании (3) вычисляется функция оптимальных затрат $C^*_{manag}(x,D)$. Для дальнейшей оптимизации управленческой подсистемы по типам менеджеров, иерархии, порядку взаимодействия менеджеров, их стимулированию и т.п. (см. раздел 3) необходимо оптимизировать $C^*_{manag}(x,D)$ по параметрам x, D. Для решения этой задачи методами непрерывной оптимизации необходимо проверить непрерывность и непрерывную дифференцируемость функции $C^*_{manag}(x,D)$, чему и посвящен настоящий раздел.

Обозначим через $y(x, D)$ некоторое оптимальное решение задачи (3), принадлежащее множеству всех оптимальных решений: $y(x,D) \in Y^*(x,D)$. Функция $C^*_{manag}(x,D) = C_{manag}(x,D,y(x,D))$ не зависит от того, какое именно оптимальное решение $y(x,D) \in Y^*(x,D)$ выбрано при каждом значении параметров x и D. По следствию 1 из теоремы 1 найдутся коэффициенты $\lambda(x, D)$, $\theta(x, D)$, которые совместно с $y(x, D)$ обеспечивают выполнение условий (7), (8), (9) (являются критической точкой).

Для исследования вопроса о непрерывной дифференцируемости $C^*_{manag}(x,D)$ по x и D нельзя напрямую применять известную из экономической литературы теорему об огибающей, поскольку она требует не только единственности, но и непрерывной дифференцируемости решения $y(x, D)$. В общем случае множество $Y^*(x, D)$ может содержать более одного решения, например, при нестрого выпуклых функциях затрат. Кроме того, даже в случае строго выпуклых функций затрат, гарантирующих единственное решение (см. ниже), функция $y(x, D)$ может быть недифференцируемой (производная $y(x, D)$ по коэффициенту дублирования может терпеть разрыв при смене внутреннего решения краевым, хотя функция $C^*_{manag}(x,D)$ остается непрерывно дифференцируемой).[1]

Поэтому при доказательстве результатов настоящего раздела использована более общая версия теоремы об огибающей, доказанная сравнительно недавно в статье [12].[2]

Вопрос непрерывной дифференцируемости по коэффициентам дублирования решается следующей леммой.

Лемма 1. *Левосторонняя и правосторонняя производные функции $C^*_{manag}(x,D)$ по $d^{k,l}_{i,j}$ существуют, совпадают почти всюду и равны соответственно минимуму и максимуму $y^l_j \partial C_{m_i}(D_i y)/\partial x^k$ по всем $y(x,D) \in Y^*(x,D)$. Если левосторонняя и правосторонняя производные совпадают (в частности, если функции затрат менеджеров выпуклы или $y(x, D)$ единственно), то функция $C^*_{manag}(x,D)$ непрерывно дифференцируема по $d^{k,l}_{i,j}$ и $\partial C^*_{manag}(x,D)/\partial d^{k,l}_{i,j} = y^l_j \partial C_{m_i}(D_i y)/\partial x^k$.*

Доказательство. Задача об оптимальном делегировании (3) представляет собой задачу минимизации на непустом выпуклом компакте ($y_1 + ... + y_q = x$, $y_1 \geq 0, ..., y_q \geq 0$) целевой функции $C_{manag}(x,D,y) = \sum_{t=\overline{1,q}} C_{m_t}(D_t y)$. Очевидно, что эта функция непрерывно дифференцируема по любому элементу матрицы D, поскольку функция каждого менеджера непрерывно дифференцируема и зависит от линейной комбинации элементов D. В статье [12] доказано, что непрерывная дифференцируемость целевой функции по параметрам D и по переменным y, принадлежащим непустому выпуклому компакту, достаточна для дифференцируемости функции $C^*_{manag}(x,D)$ по $d^{k,l}_{i,j}$ почти всюду (для существования производной во всех точках, за исключением, может быть, множества точек нулевой меры). Кроме того, во всех без исключения точках существует левосторонняя и право-

---

[1] *Подробнее см.* [3].

[2] *Там же имеются ссылки на более ранние математические работы, в которых доказаны схожие теоремы.*

сторонняя производные, равные соответственно минимуму и максимуму по всем $y(x,D)\in Y^*(x,D)$ производной целевой функции $\partial C_{manag}(x,D,y)/\partial d_{i,j}^{k,l}$. В выражении $C_{manag}(x,D,y)=\sum_{t=\overline{1,q}} C_{m_t}(D_t y)$ только k-й аргумент функции $C_{m_i}(D_i y)$ зависит от $d_{i,j}^{k,l}$, поэтому по правилу вычисления сложной функции $\partial C_{manag}(x,D,y)/\partial d_{i,j}^{k,l} = y_j^l \partial C_{m_i}(D_i y)/\partial x^k$, что и доказывает первую часть леммы.

Если левосторонняя и правосторонняя производные совпадают всюду (значение $y_j^l \partial C_{m_i}(D_i y)/\partial x^k$ одинаково при всех $y(x,D)\in Y^*(x,D)$), то функция $C_{manag}^*(x,D)$ дифференцируема по элементам матрицы дублирования $d_{i,j}^{k,l}$ – производная $\partial C_{manag}^*(x,D)/\partial d_{i,j}^{k,l} = y_j^l \partial C_{m_i}(D_i y)/\partial x^k$ существует во всех точках. Докажем непрерывность производной по всем параметрам (в [12] показана непрерывность только по параметру $d_{i,j}^{k,l}$, по которому ведется дифференцирование). По теореме Бержа (см., например, [2]) многозначное отображение $Y^*(x, D)$ полунепрерывно сверху: для любого $e > 0$ найдется достаточно малая окрестность точки x, D, такая, что для любой точки $\hat{x},\hat{D}$ из этой окрестности множество $Y^*(\hat{x},\hat{D})$ будет вложено в e-расширение множества $Y^*(x, D)$ (то есть во множество точек, лежащих на расстоянии не более e от множества $Y^*(x, D)$ в смысле некоторой метрики). Поэтому найдутся точки $y(x,D)\in Y^*(x,D)$ и $y(\hat{x},\hat{D})\in Y^*(\hat{x},\hat{D})$, расстояние между которыми не превышает e. В силу непрерывности $\partial C_{m_i}(\cdot)/\partial x^k$ при достаточно малом e значения $y_j^l(x,D)\partial C_{m_i}(D_i y(x,D))/\partial x^k$ и $y_j^l(\hat{x},\hat{D})\partial C_{m_i}(\hat{D}_i y(\hat{x},\hat{D}))/\partial x^k$ произвольно мало отличаются друг от друга, что и доказывает непрерывность производной $\partial C_{manag}^*(x,D)/\partial d_{i,j}^{k,l}$.

Если решение задачи об оптимальном делегировании $y(x, D)$ единственно, то $Y^*(x, D)$ состоит из одной точки, левосторонняя и правосторонняя производные совпадают, поскольку минимум $y_j^l \partial C_{m_i}(D_i y)/\partial x^k$ по $y(x,D)\in Y^*(x,D)$ равен максимуму. Однако и в случае множественности решений минимум и максимум могут совпадать. Например, при выпуклых функциях затрат менеджеров целевая функция задачи об оптимальном делегировании $C_{manag}(x, D, y) = \sum_{t=\overline{1,q}} C_{m_t}(D_t y)$ также будет выпуклой (каждое слагаемое выпукло, поскольку зависит от линейной комбинации переменных, сумма выпуклых функций выпукла, см., например, [13]). Для задачи минимизации выпуклой функции на компакте в работе [12] доказано,[1] что функция оптимальных затрат $C^*_{manag}(x, D)$ дифференцируема по $d^{k,l}_{i,j}$, поэтому левосторонняя и правосторонняя производные совпадают (хотя решение $y(x, D) \in Y^*(x, D)$ может быть множественным при нестрогой выпуклости). ■

Следующая лемма 2 использует результат леммы 1 для доказательства непрерывности функции $C^*_{manag}(x, D)$ по элементам матрицы дублирования D. Непрерывность по x доказывается непосредственно.

Лемма 2. *Функция $C^*_{manag}(x, D)$ непрерывна по параметрам x и D.*

Доказательство. Согласно лемме 1 существуют левосторонняя и правосторонняя производные функции $C^*_{manag}(x, D)$ по $d^{k,l}_{i,j}$, равные соответственно минимуму и максимуму $y^l_j \partial C_{m_i}(D_i y) / \partial x^k$ по всем $y(x, D) \in Y^*(x, D)$. Эти односторонние производные конечны, поскольку частные производные $\partial C_{m_i}(\cdot) / \partial x^k$ ограничены, как и любая непрерывная функция на компакте $y_1 + ... + y_q = x$, $y_1 \geq 0, ..., y_q \geq 0$, на котором решается задача оптимизации (3). Если бы функция $C^*_{manag}(x, D)$ не была непрерывной слева (справа) в точке $d^{k,l}_{i,j}$, то левосторонняя (правосторонняя) частная производная не существовала бы или

[1] *Точнее, это утверждение доказано в* [12] *для задачи максимизации вогнутой функции, эквивалентной задаче минимизации выпуклой функции* (*после умножения на* –1).

была бы бесконечной. Отсюда следует непрерывность функции $C^*_{manag}(x,D)$ по элементам матрицы дублирования D.

Докажем непрерывность $C^*_{manag}(x,D)$ по x непосредственно. Предположим противное: найдется такое $e > 0$, что для любого $d > 0$ существует $\hat{x}_d$, лежащее на расстоянии не более d от x (в смысле некоторой метрики), и $\left|C^*_{manag}(x,D)-C^*_{manag}(\hat{x},D)\right|>e$. Рассмотрим $y(x,D)\in Y^*(x,D)$ и определим делегирование $\hat{y}^k_i = y^k_i(x,D)\cdot \hat{x}^k / x^k$ при $x^k > 0$, $\hat{y}^k_i = \hat{x}^k / q$ при $x^k = 0$. Выполнено $\hat{y}_1 + ... + \hat{y}_q = \hat{x}$, и при достаточно малом d точка $\hat{y}$ лежит сколь угодно близко к точке $y(x, D)$, поэтому в силу непрерывности целевой функции $\left|C_{manag}(\hat{x},D,\hat{y})-C_{manag}(x,D,y(x,D))\right|<e$ или $\left|C_{manag}(\hat{x},D,\hat{y})-C^*_{manag}(x,D)\right|<e$. Если $C^*_{manag}(\hat{x},D)>C^*_{manag}(x,D)+e$, то получаем противоречие с оптимальностью $C^*_{manag}(\hat{x},D)$, поскольку затраты $C_{manag}(\hat{x},D,\hat{y})$ меньше $C^*_{manag}(\hat{x},D)$. Если $C^*_{manag}(x,D)>C^*_{manag}(\hat{x},D)+e$, то рассмотрим точку $y(\hat{x},D)\in Y^*(\hat{x},D)$ и аналогично определим делегирование y, $y_1 + ... + y_1 = x$, лежащее сколь угодно близко к точке $y(\hat{x},D)$, поэтому $\left|C_{manag}(\hat{x},D,y(\hat{x},D))-C_{manag}(x,D,y)\right|<e$, $\left|C^*_{manag}(\hat{x},D)-C_{manag}(x,D,y)\right|<e$. Получаем противоречие с оптимальностью $C^*_{manag}(x,D)$, поскольку затраты $C_{manag}(x,D,y)$ меньше $C^*_{manag}(x,D)$. ■

В случае выпуклых функций затрат менеджеров лемма 1 исчерпывающим образом решает вопрос о непрерывной дифференцируемости функции оптимальных затрат $C^*_{manag}(x,D)$ по элементам матрицы дублирования. Для невыпуклых функций необходима дополнительная проверка совпадения левосторонней и правосторонней производной (например, проверка единственности оптимального делегирования $y(x, D)$). Кроме того заметим, что в статье [12] доказан следующий факт: если $d^{k,l}_{i,j}$ – точка локального минимума функции $C^*_{manag}(x,D)$ по $d^{k,l}_{i,j}$, то левостороняя и правосторонняя производная по $d_{i,j}^{k,l}$ в этой точке совпадают и равны нулю. Это может быть полезно при дальнейшей минимизации затрат организации $C_{manag}^{*}(x, D)$ по параметрам дублирования (которые зависят от иерархии, порядка взаимодействия менеджеров и т.п.), поскольку в точке оптимума производная существует и равна нулю при любых рассматриваемых функциях затрат.

Исследуем непрерывную дифференцируемость по суммарному управленческому воздействию x, которое оказывается на производственную подсистему. Если решение задачи об оптимальном делегировании (3) $y(x, D) \in Y^{*}(x, D)$ единственно и непрерывно дифференцируемо по компонентам управления x, то функция $C_{manag}^{*}(x, D) = C_{manag}(x, D, y(x, D))$ также непрерывно дифференцируема. Если при этом решение внутреннее, то все ограничения-неравенства ненапряженные и ими можно пренебречь ($\theta = 0$). Для задачи минимизации с ограничениями-равенствами, применяя правило дифференцирования сложной функции, можно показать (см., например, [1]):

(10) $\partial C_{manag}^{*}(x, D) / \partial x^k = l^k(x, D)$,

где $\lambda(x,D)$ – множители Лагранжа, которые совместно с $y(x, D)$ являются критической точкой лагранжиана, то есть удовлетворяют условиям (7), (8), (9). Таким образом, *коэффициент Лагранжа $\lambda^k(x, D)$ можно интерпретировать как предельные затраты на реализацию управления вида k.*

Приведенное выше обоснование выражения (10) предполагает выполненным весьма обременительное требование единственности и непрерывной дифференцируемости внутреннего решения $y(x, D)$. Без этого требования в случае выпуклых функций затрат вопрос непрерывной дифференцируемости по x решается следующей леммой.

Лемма 3. *Если функции затрат менеджеров выпуклы, то левосторонняя (при $x^k > 0$) и правосторонняя производные функции $C_{manag}^{*}(x, D)$ по x^k существуют, совпадают почти всюду* *и равны соответственно минимуму и максимуму* $l^k(x,D) = \min_j \sum_i (d_{i,j}^{\cdot,k}, \nabla C_{m_i}(\tilde{y}_i))$ *по всем* $y(x,D) \in Y^*(x,D)$.[1]

Если при $x^k > 0$ *левосторонняя и правосторонняя производные по* x^k *совпадают, то функция* $C^*_{manag}(x,D)$ *непрерывно дифференцируема по* x^k *и* $\partial C^*_{manag}(x,D)/\partial x^k = l^k(x,D)$ *при всех* $x^k \geq 0$. *Условие совпадения односторонних производных выполнено при единственном* $y(x, D)$, *в частности, если функции затрат менеджеров строго выпуклы и* $\det D \neq 0$.

Доказательство. При выпуклых функциях затрат менеджеров целевая функция задачи об оптимальном делегировании $C_{manag}(x,D,y) = \sum_{t=\overline{1,n}} C_{m_t}(D_t y)$ также будет выпуклой (каждое слагаемое выпукло, поскольку зависит от линейной комбинации переменных, сумма выпуклых функций выпукла, см., например, [13]). Для задачи минимизации выпуклой функции на компакте в работе [12] доказано[2], что при $x^k > 0$ функция $C^*_{manag}(x,D)$ дифференцируема по x^k почти всюду (производная существует во всех внутренних точках, за исключением, может быть, множества точек нулевой меры). Кроме того, во всех без исключения точках существует левосторонняя (при $x^k > 0$) и правосто-

---

[1] *Напомним, что нагрузка вычисляется по формуле* $\tilde{y} = Dy$, *через* $d_{i,j}^{\cdot,k}$ *обозначается* k*-й столбец матрицы* $D_{i,j}$. *Оговорка существования левосторонней производной лишь при* $x^k > 0$ *необходима, поскольку слева от* $x^k = 0$ *задача об оптимальной организации не определена.*

[2] *Точнее, в* [12] *рассматривается задача максимизации вогнутой функции* $f(y)$ *при наличии ограничений вида* $g(y) \geq 0$ *с вогнутой функцией* $g(\cdot)$ *при выполнении условия Слейтера (существование допустимой точки, в которой все ограничения выполнены строго). Очевидно, что это аналогично задаче минимизации выпуклой функции* $-f(y)$ *с выпуклыми ограничениями* $-g(y) \leq 0$. *Условие Слейтера используется только для того, чтобы, сославшись на* Rockafellar R.T. (1970) [13], *показать представимость оптимума в виде седловой точки лагранжиана. Однако в* [13] *показано выполнение этого свойства и в случае линейных ограничений-равенств совместно с выпуклыми ограничениями-неравенствами, что соответствует рассматриваемой задаче.*

ронняя производные, равные соответственно минимуму и максимуму производной лагранжиана $\partial L / \partial x^k = l^k(x, D)$ (см. выражение (4)) по всем оптимальным делегированиям $y(x, D) \in Y^*(x, D)$ и по во всем $\lambda(x, D)$, которые совместно с $y(x, D)$ являются критической точкой. По следствию 2 из теоремы 1 $l^k(x, D) = \min\limits_j \sum_i (d_{i,j}^{\cdot,k}, \nabla C_{m_i}(\tilde{y}_i))$ определяется однозначно при $x^k > 0$, а при $x^k = 0$ максимум $\lambda^k(x, D)$, необходимый для вычисления правосторонней производной, также равен $\min\limits_j \sum_i (d_{i,j}^{\cdot,k}, \nabla C_{m_i}(\tilde{y}_i))$. Первая часть леммы доказана.

Если левосторонняя и правосторонняя производные совпадают при всех $x^k > 0$ (значение $l^k(x, D) = \min\limits_j \sum_i (d_{i,j}^{\cdot,k}, \nabla C_{m_i}(\tilde{y}_i))$ одинаково при всех $y(x, D) \in Y^*(x, D)$), то функция $C^*_{manag}(x, D)$ дифференцируема – производная $\partial C^*_{manag}(x, D) / \partial x^k = l^k(x, D)$ существует во всех точках. Докажем непрерывность производной по всем параметрам. Аналогично доказательству леммы 1 для любой точки x, D и любого $e > 0$ найдется достаточно малая окрестность, такая, что для любой точки $\hat{x}, \hat{D}$ из этой окрестности найдутся точки $y(x, D) \in Y^*(x, D)$ и $y(\hat{x}, \hat{D}) \in Y^*(\hat{x}, \hat{D})$, расстояние между которыми не превышает e. В силу непрерывности функции $\min\limits_j \sum_i (d_{i,j}^{\cdot,k}, \nabla C_{m_i}(\tilde{y}_i))$ при достаточно малом e значения $l^k(x, D)$ и $l^k(\hat{x}, \hat{D})$ произвольно мало отличаются друг от друга, что и доказывает непрерывность производной $\partial C^*_{manag}(x, D) / \partial x^k$. Правосторонняя производная определяется выражением $\min\limits_j \sum_i (d_{i,j}^{\cdot,k}, \nabla C_{m_i}(\tilde{y}_i))$ и при $x^k = 0$, поэтому ее значение в нуле совпадает с пределом производной при $x^k \to 0$. Таким образом, производная $\partial C^*_{manag}(x, D) / \partial x^k = l^k(x, D)$ непрерывно дифференцируема при всех $x^k \geq 0$.

Если оптимальное делегирование единственно, то $Y^*(x, D)$ состоит из одной точки, левосторонняя и правосторонняя производные совпадают, поскольку минимум

$l^k(x,D) = \min\limits_j \sum_i (d_{i,j}^{\cdot,k}, \nabla C_{m_i}(\tilde{y}_i))$ по $y(x,D) \in Y^*(x,D)$ равен максимуму. Если функции затрат менеджеров строго выпуклы и $det\, D \neq 0$ (матрица D невырождена), то оптимальное делегирование y единственно (см. следствие из теоремы 2 ниже). ■

Лемма 3 показывает, что в выпуклом случае почти во всех точках справедливо выражение (10), поэтому функцию $l^k(x,D) = \min\limits_j \sum_i (d_{i,j}^{\cdot,k}, \nabla C_{m_i}(\tilde{y}_i))$ можно интерпретировать как предельные затраты на реализацию управления вида k. В отдельных точках (множество которых имеет нулевую меру) производная (10) может не существовать, поскольку при различных оптимальных делегированиях $y(x, D)$ возможны различные значения коэффициента $\lambda^k(x, D)$, минимум и максимум которых соответственно определяют левостороннюю и правостороннюю производную. Единственность $y(x, D)$ (в частности, строгая выпуклость функций затрат менеджеров и невырожденность матрицы дублирования) гарантирует непрерывную дифференцируемость. В случае нестрогой выпуклости и множественного решения $y(x, D)$ необходимо дополнительно проверять совпадение левосторонней и правосторонней производных.

Таким образом, лемма 2 показывает, что после решения задачи об оптимальном делегировании при дальнейшей оптимизации организации $C^*_{manag}(x) = \min\limits_{M \in \mathbf{M}} C^*_{manag}(x,D)$ можно пользоваться непрерывностью функции минимальных затрат $C^*_{manag}(x,D)$ по параметрам D и x. Выпуклость функций затрат менеджеров достаточна для непрерывной дифференцируемости $C^*_{manag}(x,D)$ по элементам D, в общем случае лемма 1 дает конструктивный способ расчета односторонних производных и проверки непрерывной дифференцируемости. Строгая выпуклость функций затрат менеджеров и невырожденность матрицы дублирования достаточны для непрерывной дифференцируемости $C^*_{manag}(x,D)$ по $x^1, \ldots, x^p$, для выпуклых функций и любой D лемма 3 дает конструктивный способ расчета односторонних производных и проверки непрерывной дифференцируемости.

6. Однородные функции затрат

Запишем функцию затрат менеджера $C_m(x) = C_m^v(x) + C_m^f$ в виде суммы *функции переменных затрат* $C_m^v(x)$ и величины *постоянных затрат* C_m^f, где $C_m^v(0) = 0$. Функцию затрат менеджера $C_m(x)$ назовем *однородной*,[1] если для любого $x \in R_+^p$ и любого $\xi \geq 0$ выполнено

(11) $C_m^v(\xi x) = f(\xi) C_m^v(x)$,

то есть увеличение всех компонент произвольного управления x в ξ раз приведет к росту переменных затрат в $f(\xi)$ раз независимо от x. Функция $f(\xi)$ описывает *зависимость от масштаба*.

Известно, что $f(\xi) = \xi^\gamma$ для некоторой *степени однородности* $\gamma \in (-\infty; +\infty)$, $C_m^v(\xi x) = \xi^\gamma C_m^v(x)$; частные производные функции затрат однородны степени $\gamma - 1$, $\nabla C_m(\xi x) = \xi^{\gamma-1} \nabla C_m(x)$,[2] поэтому для выполнения условия непрерывной дифференцируемости рассматриваем только $\gamma \geq 1$, что соответствует выпуклости затрат по масштабу; однородность (11) обеспечивает постоянную *эластичность переменных затрат по масштабу* (при изменении всех компонент x на 1 % переменные затраты изменяются на γ %); для одномерного случая ($p = 1$) функция затрат однородна тогда и только тогда, когда ее можно представить в виде *степенной функции вида*:

(12) $C_m(x) = x^\gamma / \gamma + C_m^f$.

В настоящем разделе предположим, что функции переменных затрат всех менеджеров однородны и имеют одинаковую степень $\gamma \geq 1$, то есть одинаково изменяются при изменении масштаба управления. Тогда в задаче об оптимальном делегировании (3) переменная часть целевой функции $C_{manag}(x, D, y)$

---

[1] *Строго говоря, следовало бы назвать ее однородной с точностью до константы постоянных затрат, однако для краткости в этом смысле ниже используется термин «однородная».*

[2] *Подробные выкладки приведены, например, в* [3].

также однородна $C_{manag}(xx, D, xy) = x^g C^v_{manag}(x, D, y) + C^f_{manag}$, что позволяет доказать следующую лемму.

Лемма 4. *Если функции переменных затрат всех менеджеров однородны одинаковой степени* $\gamma \geq 1$, *то*:

1. *критическое делегирование* $y(x, D)$ *однородно степени* 1 *по* x, *а соответствующие коэффициенты Лагранжа*[1] $\lambda(x, D)$, $\theta(x, D)$ *однородны степени* $\gamma - 1$ *по* x;[2]

2. *делегирование* $y(x, D)$ *оптимально при суммарном управлении* x *тогда и только тогда, когда для любого* $\xi > 0$ *делегирование* $\xi y(x, D)$ *оптимально при суммарном управлении* ξx;

3. *при любом критическом делегировании* y *и соответствующих* λ *выполнено*:

$$C_{manag}(x, D, y) = (l^1 x^1 + \ldots + l^p x^p)/g + \sum_{i=\overline{1,q}} C^f_{m_i} ;$$

4. *функция оптимальных затрат* $C^*_{manag}(x, D)$ *однородна степени* γ *по* x:

$$C^*_{manag}(xx, D) = C^{*,v}_{manag}(xx, D) + C^{*,f}_{manag} = x^g C^{*,v}_{manag}(x, D) + C^{*,f}_{manag} .$$

Доказательство. По теореме Эйлера для однородных функций затрат менеджеров выполнено $(\nabla C^v_{m_i}(x), x) = g C^v_{m_i}(x)$ (см., например, [5]), поэтому:

$$C^v_{m_i}(\tilde{y}_i) = \frac{1}{g}\left(\tilde{y}^1_i \frac{\partial C_{m_i}(\tilde{y}_i)}{\partial \tilde{y}^1_i} + \ldots + \tilde{y}^p_i \frac{\partial C_{m_i}(\tilde{y}_i)}{\partial \tilde{y}^p_i}\right) = \frac{1}{g}(\tilde{y}_i, \nabla C_{m_i}(\tilde{y}_i)),$$

$$C_{manag}(x, D, y) = \tilde{y}^T g / g + \sum_{i=\overline{1,q}} C^f_{m_i} ,$$

где g – «составной» вектор градиентов затрат всех q менеджеров при нагрузке $\tilde{y}$ (см. выражение (7)). Докажем свойство 3. Пусть

---

[1] *Напомним, что по следствию 2 из теоремы 1 при* $x^k > 0$ *коэффициенты* $\lambda^k(x, D)$, $q^k_j(x, D)$ *однозначно определяются по* $y(x, D)$, *а при* $x^k = 0$ *однозначно определяется максимум* $\lambda^k(x, D)$ *и минимум* $q^k_j(x, D)$.

[2] *Под однородностью критической точки понимается, что если векторы* $y(x, D)$, $\lambda(x, D)$, $\theta(x, D)$ *являются критической точкой при управлении* x, *то для любого* $\xi > 0$ *векторы* $\xi y(x, D)$ $x^{g-1}\lambda(x, D)$, $x^{g-1}\theta(x, D)$ *являются критической точкой при управлении* ξx.

y и λ являются критической точкой, тогда с учетом $\tilde{y} = Dy$ и уравнений критической точки (7) справедливо равенство $\tilde{y}^T g = (Dy)^T g = y^T D^T g = y^T(\overline{l} + q)$. В силу условий дополняющей нежесткости (9) имеем $y^T q = 0$, в силу балансовых условий (8) имеем $y^T \overline{l} = \sum_{j,k} y_j^k l^k = \sum_k l^k \sum_j y_j^k = \sum_k l^k x^k$, что и доказывает равенство свойства 3.

Докажем свойство 1. Предположим, что $y(x, D)$, $\lambda(x, D)$, $\theta(x, D)$ – критическая точка в задаче об оптимальном делегировании (3) с некоторым суммарным управлением x. Рассмотрим ту же задачу, но с вектором x, умноженным на произвольную величину $\xi \geq 0$: $x' = xx$. Покажем, что в этой задаче точка $y' = xy$, $l' = x^{g-1} l$, $q' = x^{g-1} q$ также будет критической,[1] проверив условия (7), (8), (9). Балансовые условия (8) выполнены по построению в силу $y' = xy$, аналогично выполнены и условия дополняющей нежесткости (9), поскольку нулевые компоненты y, q останутся нулевыми и в y', q'. Кроме того, $\tilde{y}' = x\tilde{y}$, $\nabla C_{m_i}(xx) = x^{g-1} \nabla C_{m_i}(x)$, поэтому $g(\tilde{y}') = x^{g-1} g(\tilde{y})$. В результате равенство (7) $x^{g-1} D^T g(\tilde{y}) = \overline{l'} + q' = x^{g-1}\overline{l} + x^{g-1} q$ выполнено, поскольку в исходной критической точке $D^T g(\tilde{y}) = \overline{l} + q$. Свойство 1 доказано.

Докажем свойство 2. Пусть делегирование $y = y(x, D)$ оптимально при суммарном управлении x. Рассмотрим произвольное $\xi > 0$ и предположим, что делегирование ξy неоптимально при суммарном управлении ξx. Тогда для некоторого делегирования $\hat{y} \neq xy$ выполнено $C_{manag}(xx, D, \hat{y}) < C_{manag}(xx, D, xy)$. Отсюда, игнорируя постоянные затраты и учитывая однородность переменных затрат целевой функции $C_{manag}(x, D, y)$, получим:

$x^g C^v_{manag}(x, D, \hat{y}/x) = C^v_{manag}(xx, D, \hat{y}) < C^v_{manag}(xx, D, xy) = x^g C^v_{manag}(x, D, y)$,

что противоречит оптимальности y (делегирование $\hat{y}/x$ имеет

---

[1] *При* $\xi = 0$ *и* $g = 1$ *выражение* ξ^{g-1} *считается равным* 1 *по определению.*

меньшие затраты). Поэтому из оптимальности делегирования y при суммарном управлении x для любого $\xi > 0$ следует оптимальность делегирования ξy при суммарном управлении ξx. Обратно, рассмотрев делегирование $y' = xy$, оптимальное при суммарном управлении $x' = xx$, и $x' = 1/x$, аналогично докажем оптимальность делегирования y при суммарном управлении x. Свойство 2 доказано.

Осталось доказать свойство 4. Зафиксируем произвольное суммарное управление x и соответствующее оптимальное делегирование y. Тогда по свойству 2 при $\xi > 0$ делегирование ξy оптимально при суммарном управлении ξx, при $\xi = 0$ это также верно, поскольку для $x = 0$ оптимально единственное возможное делегирование $y = 0$. С учетом однородности $C_{manag}(x, D, y)$ имеем $C^*_{manag}(xx, D) = C_{manag}(xx, D, xy) = x^g C^v_{manag}(x, D, y) + C^f_{manag}$. Обозначив $C^{*,f}_{manag} = C^f_{manag}$, $C^{*,v}_{manag}(xx, D) \equiv C^v_{manag}(xx, D, xy)$ при любом ξ, $C^*_{manag}(xx, D) = C^{*,v}_{manag}(xx, D) + C^{*,f}_{manag} = x^g C^{*,v}_{manag}(x, D) + C^{*,f}_{manag}$, что и доказывает лемму. ■

Лемма 4 показывает, что все критические точки (включая и делегирование и коэффициенты Лагранжа) являются однородными функциями суммарного управления x (свойство 1). То же верно и для оптимальных критических точек (свойство 2), что позволяет доказать однородность функции оптимальных затрат $C^*_{manag}(x, D)$ по x (свойство 4).

В частном случае эквивалентность свойств 3 и 4 следует из теоремы Эйлера. Для строго выпуклых функций затрат менеджеров и невырожденной матрицы D коэффициент Лагранжа λ^k равен предельным затратам $l^k(x, D) = \partial C^*_{manag}(x, D) / \partial x^k$ и непрерывен (см. лемму 3). По теореме Эйлера (см. [5]) однородность функции $C^*_{manag}(x, D)$ эквивалентна ее записи в виде $C^*_{manag}(x, D) = (\nabla C^*_{manag}(x, D), x) / g + C^{*,f}_{manag}$, то есть в виде равенства свойства 3. Лемма 4 показывает, что равенство свойства 3 справедливо и в общем случае, независимо ни от выпуклости, ни от оптимальности рассматриваемого критического делегирования y, λ.

7. Выпуклые функции затрат

Выпуклость затрат сотрудника по нагрузке подтверждается статистическими исследованиями, например, в [4] показан строго выпуклый рост желательного вознаграждения (зарплаты) в зависимости от отрабатываемого количества часов. Поэтому в одномерном случае ($p = 1$) или при линейном росте масштаба управления ξx, $x \neq 0$ функция затрат менеджера $f_x(\xi) = C_m(\xi x)$ при $\xi \geq 0$ обычно растет строго выпукло: для любых $\xi_1, \xi_2 \geq 0$, $\xi_1 \neq \xi_2$ и любого $\theta \in (0; 1)$ выполнено неравенство $f_x(qx_1 + (1-q)x_2) < qf_x(x_1) + (1-q) f_x(x_2)$, то есть график функции $f_x(\xi)$ лежит ниже прямой, соединяющей любые две точки этого графика. Из строгой выпуклости следует рост предельных затрат – каждый лишний час отработанного времени требует все бо́льших усилий.

В многомерном случае функцию затрат менеджера назовем *выпуклой*, если для любых $q \in (0;1)$, $x_1 \in R_+^p$, $x_2 \in R_+^p$ выполнено:

(13) $C_m(qx_1 + (1-q)x_2) \leq qC_m(x_1) + (1-q)C_m(x_2)$,

функцию затрат менеджера назовем *строго выпуклой*, если неравенство (13) выполнено строго при любых векторах $x_1 \neq x_2$.

Содержательно выпуклость (13) означает аспециализацию[1], например, выгоднее поручить каждому из двух менеджеров планирование и контроль половины исполнителей, чем поручать одному менеджеру планирование, а второму – контроль исполнения этих планов.

В случае выпуклых функций затрат менеджеров целевая функция $C_{manag}(x, D, y) = \sum_i C_{m_i}(D_i y)$ задачи об оптимальном делегировании (3) также выпукла по y, поскольку выпуклая функция от линейной комбинации аргументов выпукла, сумма выпуклых функций выпукла, см., например, [13]. Классический аппарат выпуклого анализа [13] позволяет показать, что для выпуклой целевой функции затрат не только оптимальное решение задачи (3) будет критической точкой, но и наоборот –

---

[1] *Подробнее см.* [3].

любая критическая точка (с $l_0 = 1$) будет оптимальным решением. В результате теорема 1 примет следующий вид.

Теорема 2 (Куна-Таккера, см., например, [13]). *Если функции затрат менеджеров выпуклы, то y – оптимальное делегирование, доставляющее минимум в задаче* (3), *тогда и только тогда, когда найдутся такие коэффициенты Лагранжа* $l_0 = 1$, $l \in R^p$, $q_i \in R_+^p$, *которые совместно с делегированием y являются критической точкой* (*выполнены условия* (7), (8), (9)).

Докажем следствие, обеспечивающее строгую выпуклость целевой функции и единственность критической точки.

Следствие. *Если функции затрат менеджеров строго выпуклы и* $\det D \neq 0$, *то целевая функция* $C_{manag}(x, D, y)$ *строго выпукла по y, оптимальное делегирование y единственно и только для него найдутся такие коэффициенты Лагранжа* $l_0 = 1$, $l \in R^p$, $q_i \in R_+^p$, *которые совместно с делегированием y являются критической точкой* (*выполнены условия* (7), (8), (9)).

Доказательство. Докажем строгую выпуклость по y целевой функции $C_{manag}(x, D, y) = \sum_i C_{m_i}(D_i y)$ задачи об оптимальном делегировании (3). Рассмотрим произвольные делегирования y, z, $y \neq z$ и любое $q \in (0;1)$. Поскольку выпуклая функция линейной комбинации аргументов выпукла (Rockafellar R.T. (1970) [13]) неравенство $C_{m_i}(D_i\{qy + (1-q)z\}) \leq qC_{m_i}(D_i y) + (1-q)C_{m_i}(D_i z)$ выполнено для всех $i = \overline{1, q}$. В силу $\det D \neq 0$ и $y \neq z$ выполнено $D(y - z) \neq 0$. Следовательно, $D_i y \neq D_i z$ хотя бы для одного i, поэтому из строгой выпуклости $C_{m_i}(\cdot)$ следует $C_{m_i}(qD_i y + (1-q)D_i z) < qC_{m_i}(D_i y) + (1-q)C_{m_i}(D_i z)$, что и доказывает $C_{manag}(x(y+z), D, qy + (1-q)z) < qC_{manag}(x(y), D, y) + (1-q)C_{manag}(x(z), D, z)$.

Легко показать (см., например, [13]), что в случае строго выпуклой целевой функции задача минимизации (3) имеет единственное решение (при наличии двух решений значение функции на соединяющем их отрезке не может быть меньше минимума, что противоречит строгой выпуклости). По теореме 2 любая критическая точка является оптимальным решением задачи (3), поэтому во всех критических точках вектор оптимального делегирования y одинаков, и только для этого вектора найдутся коэффициенты Лагранжа $l_0 = 1$, $l \in R^p$, $q_i \in R_+^p$, которые совместно с делегированием y являются критической точкой, то есть выполнены условия (7), (8), (9). ■

Докажем лемму, определяющую свойства функции оптимальных затрат $C^*_{manag}(x, D)$.

Лемма 5. *Если функции затрат менеджеров выпуклы, то функция оптимальных затрат $C^*_{manag}(x, D)$ выпукла по x. Если функции затрат менеджеров строго выпуклы и $\det D \neq 0$, то функция оптимальных затрат $C^*_{manag}(x, D)$ строго выпукла по x.*

Доказательство. Рассмотрим два произвольных вектора $x', x'' \in R_+^p$. Пусть y', y'' – соответствующие оптимальные делегирования: $C^*_{manag}(x', D) = C_{manag}(x', D, y')$, $C^*_{manag}(x'', D) = C_{manag}(x'', D, y'')$. Тогда для любого $\theta \in (0; 1)$ делегирование $y = qy' + (1-q)y''$ является допустимым в задаче минимизации $C_{manag}(x, D, y)$ с суммарным управлением $x = qx' + (1-q)x''$. Отсюда с учетом выпуклости целевой функции $C_{manag}(x, D, y)$ по y:

$$C^*_{manag}(qx' + (1-q)x'', D) = C^*_{manag}(x, D) \le C_{manag}(x, D, y) =$$
$$C_{manag}(qx' + (1-q)x'', D, qy' + (1-q)y'') \le qC_{manag}(x', D, y') +$$
$$+ (1-q)C_{manag}(x'', D, y'') = qC^*_{manag}(x', D) + (1-q)C^*_{manag}(x'', D).$$

В итоге доказано, что выпуклость функций затрат менеджеров влечет выпуклость функции минимальных затрат $C^*_{manag}(x, D)$ по суммарному управлению x. Если функции затрат менеджеров строго выпуклы и $\det D \neq 0$, то по следствию из теоремы 2 целевая функция $C_{manag}(x, D, y)$ строго выпукла по y, при $x' \neq x''$ выполнено $y' \neq y''$, потому доказанное выше неравенство будет строгим. Поэтому функция оптимальных затрат $C^*_{manag}(x, D)$ строго выпукла по x. Лемма доказана. ■

Таким образом, теорема 2 гарантирует, что в выпуклом случае решение системы уравнений (7), (8), (9) дает оптимальное делегирование. Следствие гарантирует, что в строго выпуклом случае при невырожденной матрице дублирования решение системы уравнений дает единственное оптимальное делегирование. Лемма 5 позволяет доказать, что выпуклость функций затрат менеджеров влечет выпуклость функции оптимальных затрат $C^*_{manag}(x, D)$ по x (а строгая совместно с невырожденностью матрицы D влечет строгую выпуклость $C^*_{manag}(x, D)$).

8. Монотонные функции затрат

Предположим, что функции затрат всех менеджеров монотонны, то есть затраты не убывают при росте любой из компонент нагрузки. Тогда в задаче об оптимальном делегировании (3) целевая функция $C_{manag}(x, D, y) = \sum_i C_{m_i}(D_i y)$ монотонна и по компонентам делегирования y, и по коэффициентам дублирования (неотрицательным элементам матрицы D). Монотонность целевой функции позволяет доказать следующую лемму.

Лемма 6. *Если функции затрат менеджеров монотонны, то*:

1. *для любого оптимального делегирования* y *найдутся такие коэффициенты Лагранжа* $l^1 \geq 0, \ldots, l^p \geq 0$, $q_i \in R^p_+$, *которые совместно с делегированием* y *являются критической точкой* (*удовлетворяют условиям* (7), (8), (9));
2. *функция оптимальных затрат* $C^*_{manag}(x, D)$ *монотонна как по компонентам управления* x, *так и по элементам матрицы дублирования* D;
3. *для строго монотонных функций затрат менеджеров и матрицы* D *без нулевых столбцов функция оптимальных затрат* $C^*_{manag}(x, D)$ *строго монотонна по компонентам* x.

Доказательство. По следствию 2 из теоремы 1 при $x^k > 0$ выполнено $l^k = \min_j \sum_i (d^{\cdot,k}_{i,j}, \nabla C_{m_i}(\tilde{y}_i))$, а при $x^k = 0$ можно выбрать такое же l^k. Монотонность функций затрат менеджера m_i влечет неотрицательность компонент градиента $\nabla C_{m_i}(\tilde{y}_i)$. В результате с учетом неотрицательности $d^{k,l}_{i,j}$ имеем $l^k \geq 0$. Поэтому в следствии 1 из теоремы 1 можно считать $l^1 \geq 0$, …, $l^p \geq 0$, что и доказывает свойство 1.

Для доказательства свойства 2 рассмотрим $x \leq \hat{x}$, $D \leq \hat{D}$, соответствующие оптимальные затраты $C^*_{manag}(x, D)$, $C^*_{manag}(\hat{x}, \hat{D})$ и оптимальное делегирование $\hat{y}$, для которого $C_{manag}(\hat{x}, \hat{D}, \hat{y}) = C^*_{manag}(\hat{x}, \hat{D})$. Построим вектор делегирования z по следующему правилу: $z_i^k = \hat{y}_i^k \cdot x^k / \hat{x}^k$ при $\hat{x}^k > 0$ и $z_i^k = 0$ при $\hat{x}_k = 0$. Очевидно $z \leq \hat{y}$, $z_1 + \ldots + z_q = x$, то есть z – допустимое делегирование с суммарным управлением x. В силу $D \leq \hat{D}$ и неотрицательности элементов матриц дублирования имеем $Dz \leq \hat{D}\hat{y}$, поэтому нагрузки менеджеров при делегировании z с D не превышают нагрузок при делегировании $\hat{y}$ с $\hat{D}$. В силу монотонности функций затрат менеджеров выполнено неравенство $C_{manag}(x, D, z) \leq C_{manag}(\hat{x}, \hat{D}, \hat{y}) = C^*_{manag}(\hat{x}, \hat{D})$. В силу $C^*_{manag}(x, D) \leq C_{manag}(x, D, z)$ имеем $C^*_{manag}(x, D) \leq C^*_{manag}(\hat{x}, \hat{D})$, что и доказывает свойство 2.

Для доказательства свойства 3 рассмотрим такие $x \leq \hat{x}$, что для некоторого k выполнено $x^k < \hat{x}^k$, $D = \hat{D}$, и сохраним остальные обозначения из доказательства свойства 2. Тогда в силу $\hat{x}^k > 0$ для некоторого i выполнено $\hat{y}_i^k > 0$, поэтому $z_i^k < \hat{y}_i^k$. Поскольку в векторном неравенстве $Dz \leq D\hat{y}$ компоненты z_i^k и $\hat{y}_i^k$ умножаются на один и тот же ненулевой столбец, хотя бы одно скалярное неравенство выполнено строго, то есть хотя бы у одного менеджера хотя бы один вид нагрузки строго меньше при делегировании z, чем при делегировании $\hat{y}$, а остальные нагрузки не больше. В силу строгой монотонности функций затрат менеджеров выполнено $C_{manag}(x, D, z) < C_{manag}(\hat{x}, D, \hat{y})$, откуда $C^*_{manag}(x, D) < C^*_{manag}(\hat{x}, D)$. Лемма доказана. ∎

Лемма 6 доказывает, что для монотонных функций затрат можно рассматривать только критические точки с неотрицательными коэффициентами Лагранжа l (свойство 1), функция оптимальных затрат $C^*_{manag}(x, D)$ монотонна по параметрам x и D (свойство 2), а строгая монотонность и отсутствие нулевых столбцов в матрице дублирования приводит к строгой монотонности $C^*_{manag}(x, D)$ по суммарному управлению x.

9. Заключение

В целом в настоящей работе доказано, что *функция минимальных суммарных затрат управленческой подсистемы* (при оптимальном делегировании) будет зависеть от параметров (управления x и коэффициентов дублирования) непрерывно, а во многих случаях и непрерывно дифференцируемо по параметрам. Также доказано, что свойства однородности, выпуклости, монотонности функций затрат менеджеров, зависящих от управленческой нагрузки, приводят соответственно к тем же свойствам функции минимальных затрат, зависящей от суммарного управленческого воздействия, оказываемого всей управленческой подсистемой.

Таким образом, предполагая весьма общие, хорошо известные в экономике свойства функций затрат отдельных менеджеров, можно устанавливать наличие этих свойств для функции затрат сложной управленческой подсистемы, состоящий из множества взаимодействующих друг с другом менеджеров.

Полученные результаты позволяют применить методы непрерывной оптимизации и для поиска оптимального делегирования, и для дальнейшей минимизации затрат управленческой подсистемы выбором иерархии, типов и состава менеджеров, стимулирования и т. п.

Кроме того, математический аппарат, предложенный в настоящей работе, может использоваться для поиска оптимального распределения общего объема выпуска между предприятиями (отрасли, холдинга и т.п.), которые обмениваются продуктами производства по обобщенной модели многопродуктового межотраслевого баланса и описываются нелинейными многопродуктовыми функциями затрат.

Литература

1. БОСС В. *Лекции по математике: оптимизация*. Том 7. М.: КомКнига, 2007.
2. БУСЫГИН В.П., ЖЕЛОБОДЬКО Е.В., ЦЫПЛАКОВ А.А. *Микроэкономика – третий уровень*. Новосибирск: СО РАН, 2003.
3. МИШИН С.П. *Модели и методы оптимизации иерархических организаций*: Диссертация на соискание ученой степени доктора технических наук. М.: ИПУ РАН, 2011.
4. НОВИКОВ Д.А. *Экспериментальное исследование индивидуальных стратегий предложения труда*. М.: Эгвес, 2010.
5. ФИХТЕНГОЛЬЦ Г.М. *Курс дифференциального и интегрального исчисления (в 3-х томах)*. М.: Физматлит, 2001.
6. BLOCH H., MADDEN G. AND SAVAGE S.J. *Economies of Scale and Scope in Australian Telecommunications* // Review of Industrial Organization. 2001. 18. P. 219 – 227.
7. COHN E., RHINE S., SANTOS M. *Institutions of Higher Education as Multi-Product Firms: Economies of Scale and Scope* // The Review of Economics and Statistics. 1989. Vol. 71(2). P. 284 – 290.
8. DUONG T.M., MCLAREN N.K., ZHAO X. *Multi-output Broadacre Agricultural Production: Estimating a Cost Function Using Quasi-Micro Farm Level Data from Australia* / Proceedings of AARES 52nd Annual Conference, February 5-8, 2008, Canberra, Australia (http://purl.umn.edu/6009).
9. POLOME P., FERNAGUT P.P., HARMIGNIE B., O. DE FRAHAN, BRUNO H. *Multi-input Multi-output Farm-level Cost Function: A Comparison of Least Squares and Entropy Estimators* / Proceedings of European Association of Agricultural Economists, International Congress, August 23-27, 2005, Copenhagen, Denmark (http://purl.umn.edu/24727).
10. FILIPPINI M., FARSI M. *Cost Efficiency and Scope Economies in Multi-output Utilities in Switzerland* / Study on behalf of the State Secretariat for Economic Affairs SECO. Berne, 2008.
11. HOWITT R.E. *Positive mathematical programming* // American Journal of Agricultural Economics. 1995. 77(2). P. 329 – 342.

12. MILGROM P., SEGAL I. *Envelope Theorems for Arbitrary Choice Sets* // Econometrica. 2002. Vol. 70. No.2. P. 583 – 601.
13. ROCKAFELLAR R.T. *Convex Analysis*. N.J., Princeton: Princeton University Press, 1970.
14. ROLLER L.H. *Proper Quadratic Cost Functions with an Application to the Bell System* // Review of Economics and Statistics. 1990. 72. P. 202 – 210.
15. TOVAR B., JARA-DIAZ S.R., TRUJILLO L. *A Multioutput Cost Function for Port Terminals: Some Guidelines for Regulation*. Paper provided by The World Bank in its series Policy Research Working Paper Series with number 3151. 2003 (http://www-wds.worldbank.org/servlet/WDSContentServer /WDSP/IB/2003/10/27/000160016_20031027124418/Rendered/PDF/wps3151.pdf).

PROPERTIES OF OPTIMAL DELEGATION OF AUTHORITY IN FIRMS

Sergei Mishin, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Cand.Sc. (smishin78@mail.ru).

Abstract: *We minimize a cost function by choosing an optimal delegation of authority (DoA). DoA means distribution of management actions needed for a production subsystem between managers with complicated duplication of each others' efforts. Formally this problem is equivalent to optimization of production volume distribution between firms with complicated exchange of products and multi-output cost functions. We have proved general properties of optimal solution which allow finding out optimal DoA for several classes of cost function. Key properties of managers' cost functions hold true for a cost function of a whole management subsystem with optimal DoA.*

Keywords: optimal delegation of authority, manager, cost, firm.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии М.В. Губко