

УДК 62.50
ББК Ж 30

МЕТОД ПАССИФИКАЦИИ В ЗАДАЧАХ СИНХРОНИЗАЦИИ И ОЦЕНИВАНИЯ СОСТОЯНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ПО ЦИФРОВОМУ КАНАЛУ СВЯЗИ¹

Андриевский Б. Р.², Фрадков А. Л.³

*(Учреждение Российской академии наук Институт проблем
машиноведения РАН, Санкт-Петербург,*

*Государственное образовательное учреждение высшего
профессионального образования Санкт-Петербургский
государственный университет информационных технологий,
механики и оптики и Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего профессионального
образования «Санкт-Петербургский государственный
университет»)*

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты №№ 09-08-00803, 11-08-01218), Межсекционной программы фундаментальных исследований ОЭММПУ РАН «Проблемы управления и безопасности энергетики и технических систем» и Российской федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (контракты №№ 16.740.11.0042, 14.740.11.0942). Используются материалы выступления А.Л. Фрадкова «Пассификация в задачах управления» на семинаре «Современные методы навигации и управления», организованном Академией навигации и управления и ИПУ РАН, 31 марта 2011 г., ИПУ РАН, Москва, и доклада авторов на 18-м Всемирном Конгрессе ИФАК, 28 августа–2 сентября 2011, Милан, Италия [40].

² Борис Ростиславич Андриевский, доктор технических наук, ведущий научный сотрудник (boris.andrievsky@gmail.com).

³ Александр Львович Фрадков, доктор технических наук, заведующий лабораторией (fradkov@mail.ru).

Систематизированы результаты применения метода пассивификации для синхронизации и оценивания состояния нелинейных систем через канал связи с ограниченной пропускной способностью. Показана значимость условия пассивифицируемости в задачах синхронизации и наблюдения нелинейных систем через цифровой канал связи. Приведены результаты экспериментальных исследований на многомаятниковом мехатронном комплексе.

Ключевые слова: пассивность, пассивификация, нелинейные системы, синхронизация, оценивание состояния, коммуникационные ограничения, мехатронный комплекс.

Введение

В последние годы большое внимание уделяется исследованию ограничений на пропускную способность канала связи, входящего в контур систем управления и оценивания (см. монографию [66], обзоры [4, 6, 73] и имеющиеся в них ссылки). В результате исследований показано, что при наличии указанных коммуникационных ограничений линейную систему можно стабилизировать тогда и только тогда, когда пропускная способность информационного канала превосходит скорость роста энтропии в системе в окрестности положения равновесия (т.н. *теорема о скорости передачи данных*) [67, 68, 71]. В [61] высказано общее утверждение, согласно которому разница скорости производства энтропии разомкнутой и замкнутой системами не может превосходить скорости изменения количества информации, создаваемой регулятором, с учетом скорости передачи данных по каналу связи в системе.

В литературе по теории управления имеется значительный интерес к задачам управления колебаниями, в частности – к задачам управляемой синхронизации [2, 18, 30, 52, 58, 62, 63]. Результаты большинства работ по управлению и оцениванию при коммуникационных ограничениях непосредственно не могут быть применены к задачам синхронизации, так как при синхронизации обеспечивается сходимость траекторий к некоторому множеству

(многообразию) в пространстве состояний, а не к точке. Следовательно задачу синхронизации нельзя редуцировать к простой задаче стабилизации. Кроме того, имеются сложности в распространении теоремы о скорости передачи данных на нелинейные системы. Первые результаты по синхронизации при коммуникационных ограничениях получены в [5, 19, 43, 44], где использован т.н. «наблюдательный» (*observer-based*) подход работ [47, 75]. Этот результат распространен в [42] на случай векторного входного воздействия. Задача управляемой синхронизации ведущей и ведомой нелинейных систем через канал связи рассмотрена в [39].

В [45] результаты [39] распространены на управляемую синхронизацию двух нелинейных систем с обратной связью по выходу в предположении, что сигнал ошибки, используемый для согласования ведущей и ведомой систем, передается по каналу связи с ограниченной полосой пропускания. Основными инструментами, используемыми для решения задачи являются методы квадратичных функций Ляпунова и пассивации [1, 7, 12, 15–17, 46]. В данной статье дано систематическое изложение результатов [5, 19, 39, 40, 43–45]. Статья организована следующим образом. Метод пассивации кратко описан в разделе 1. Различные схемы синхронизации нелинейных пассивируемых систем Лурье при коммуникационных ограничениях рассматриваются в разделе 2. Задача оценивания состояния для данного класса систем рассмотрена в разделе 3.

1. Предварительные сведения. Метод пассивации

Следуя [22], определим *пассивность* для динамической системы, представленной уравнениями состояния

$$(1) \quad \dot{x}(t) = f(x, u), \quad y = h(x, u)$$

со входом $u(t) \in \mathbb{R}^p$, выходом $y(t) \in \mathbb{R}^p$, вектором состояния $x(t) \in \mathbb{R}^n$, где $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ – локально липшицева функция, $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ – непрерывная функция и $f(0, 0) = 0$, $h(0, 0) = 0$.

Определение 1. Система (1) называется *пассивной*, если существует непрерывно дифференцируемая положительно полу-

определенная функция $V(x)$ (называемая функцией запаса, storage function), такая что

$$(2) \quad u^T y \geq \dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x} f(x, u), \quad \forall (x, u) \in \mathbb{R}^n \in \mathbb{R}^p.$$

Далее используется следующее понятие положительно вещественных передаточных функций.

Определение 2. [22]. *Рациональная матричная передаточная функция $W(s)$ размерности $p \times p$ называется положительно вещественной, если*

– полюса всех элементов матрицы $W(s)$ расположены в $Re[s] \leq 0$;

– для любой вещественной ω , для которой $j\omega$ не является полюсом какого-либо из элементов матрицы $W(s)$, матрица $W(j\omega) + W(-j\omega)^T$ является положительно полуопределенной;

– любой чисто мнимый полюс $j\omega$ любого из элементов матрицы $W(s)$ является простым полюсом и матрица вычетов $\lim_{s \rightarrow j\omega} (s - j\omega)W(s)$ является положительно полуопределенной и эрмитовой.

Определение 3. [22]. *Передаточная функция $W(s)$ называется строго положительно вещественной (СПВ), если $W(s - \varepsilon)$ является положительно вещественной для некоторого $\varepsilon > 0$.*

Заметим, что при $p = 1$ (системы с одним входом и выходом) второе условие определения 2 сводится к неравенству $Re(W(j\omega)) \geq 0$ для всех $\omega \in \mathbb{R}$, то есть если диаграмма Найквиста (АФХ) для $W(j\omega)$ лежит внутри замкнутой правой половины комплексной плоскости. Это условие, в свою очередь, может быть выполнено, только если относительная степень передаточной функции (разность степеней многочленов знаменателя и числителя $W(s)$) равна нулю или единице.

Рассмотрим теперь следующую линейную систему с постоянными параметрами и скалярным управлением

$$(3) \quad \dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx,$$

где $x = x(t) \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния, $u = u(t) \in \mathbb{R}^1$ – скалярная управляющая переменная, $y = y(t) \in \mathbb{R}^l$ – измеряемый вектор

выходных переменных, A, B, C – постоянные вещественные матрицы размеров $n \times n, n \times 1, l \times n$ соответственно.

Задача пассивфикации для системы (3) понимается как нахождение $(l \times 1)$ -матрицы K такой, чтобы система, замкнутая обратной связью $u = -K^T y + v$, была строго пассивной по отношению к некоторому дополнительному выходу $\sigma = Gy$ (где G – матрица размера $(1 \times l)$), то есть неравенство $\int_0^T (\sigma v - \rho |x|^2) dt > 0$ выполнялось при некотором $\rho > 0$ и всех $T > 0$ для любых траекторий при $x(0) = 0$.⁴ Как следует из леммы Якубовича–Калмана (*Kalman–Yakubovich–Popov Lemma*) [8, 13, 23], это эквивалентно существованию матрицы K , для которой выполнено следующее свойство строгой положительной вещественности (СПВ): передаточная функция $W(\lambda) = GC(\lambda I_n - A + BK^T C)^{-1} B$ системы⁵ с обратной связью $u = -K^T y + v$ от входа v к выходу $\sigma = Gy$ удовлетворяет условиям:

$$(4) \quad \begin{aligned} & \text{i) } \operatorname{Re} W(i\omega) > 0 \quad \text{для всех } \omega \in \mathbb{R}^1, \quad i^2 = -1, \\ & \text{ii) } \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \omega^2 \operatorname{Re} W(i\omega) > 0. \end{aligned}$$

Определение 4. Система (3) называется минимально-фазовой по отношению к выходу $\sigma = Gz$, если многочлен

$$(5) \quad \varphi_0(s) = \det \begin{bmatrix} sI_n - A & -B \\ GC & 0 \end{bmatrix}$$

гурвицев (т. е. не имеет корней с неотрицательными вещественными частями) и гипер-минимальнофазовой (ГМФ), если она минимальнофазовая и $GCB > 0$.

Теорема 1. (Теорема о пассивфикации, или лемма Якубовича–Калмана для систем с обратной связью) [12, 17, 46]. Следующие утверждения эквивалентны:

а) Существуют положительно определенная $(n \times n)$ -матрица H и $(l \times 1)$ -матрица K такие, что справедливы выражения

$$(6) \quad H(A - BK^T C) + (A - BK^T C)^T H < 0, \quad HB = C^T G^T;$$

⁴ Обзор работ по пассивности и диссипативности в задачах управления нелинейными системами можно найти в [14].

⁵ I_n – единичная матрица порядка n .

б) Система (3) гипер-минимальнофазовая по отношению к выходу $\sigma = Gy$;

с) Существует обратная связь

$$(7) \quad u = -K^T y + v,$$

при которой замкнутая система (3), (7) строго-пассивна по отношению к выходу $\sigma = Gy$.

Замечание 1. Если условие а) выполнено, то матрица K в (6) может быть найдена в виде $K = \kappa G^T$, где κ – достаточно большое положительное число.

Распространение теоремы 1 на системы с несколькими входами и выходами можно найти в [17, 46].

Теорема о пассивации дает условия разрешимости матричных неравенств, относящихся к версии классической леммы Якубовича–Калмана для систем с обратной связью [17, 46]. Она дает также условие разрешимости задачи пассивации систем статической обратной связью. Начиная с 1970-х эта теорема использовалась для решения многих задач управления [1, 7], в том числе – для представленных ниже задач синхронизации при коммуникационных ограничениях.

2. Управление, наблюдение и синхронизация через каналы связи с ограниченной пропускной способностью

Хотя реальным каналам связи свойственно запаздывание и искажение при передаче данных, в данной работе мы предполагаем, что запаздывание в канале отсутствует, то есть кодированные символы принимаются на стороне декодера в тот же самый момент времени, в какой они генерируются кодером, а также что передача данных по каналу связи происходит без искажений.

2.1. ПРОЦЕДУРЫ КОДИРОВАНИЯ ДАННЫХ

Рассмотрим вначале статический (без памяти о предыстории) квантователь сигнала с равномерным шагом и фиксированным

диапазоном. Зададимся вещественным значением $M > 0$, натуральным ν , интервалом квантования $\mathcal{I} = [-M, M]$ размера $2M$. Определим шаг дискретности $\delta = 2^{1-\nu}M$ и введем функцию квантования $q_{\nu, M} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ вида

$$(8) \quad q_{\nu, M}(y) = \begin{cases} \delta \cdot \langle \delta^{-1}y \rangle, & \text{если } |y| \leq M, \\ M \operatorname{sign}(y), & \text{иначе,} \end{cases}$$

где $\langle \cdot \rangle$ означает операцию округления до ближайшего целого, $\operatorname{sign}(\cdot)$ – функция знака (сигнум-функция): $\operatorname{sign}(y) = 1$, при $y \geq 0$, $\operatorname{sign}(y) = -1$, если $y < 0$. Очевидно, что для всех y таких что $|y| \leq M + \delta/2$ и всех значений $q_{\nu, M}(y)$, принадлежащих интервалу квантования \mathcal{I} , выполнено неравенство $|y - q_{\nu, M}(y)| \leq \delta/2$. Интервал \mathcal{I} равномерно разбивается на 2^ν отрезков. Таким образом, кардинальное число образа отображения $q_{\nu, M}$ равно $2^\nu + 1$, так что каждый кодированный символ содержит $R = \log_2(2^\nu + 1) = \log_2(2M/\delta + 1)$ бит информации.⁶

Статический квантователь (8) является частью кодера с памятью и переменным диапазоном квантования [28, 43, 56, 68, 73, 78]. Такие кодеры строятся на основе двух основных идей: введения в кодер памяти, что позволяет получить на шаге k прогноз $\hat{y}[k + 1]$ для $(k + 1)$ -го наблюдения величины $y[k + 1]$, а также уменьшение диапазона квантования M так, чтобы охватить некоторую убывающую по размерам окрестность $\mathcal{Y}[k + 1]$ прогнозируемого значения, $\hat{y}[k + 1] \in \mathcal{Y}[k + 1]$. Благодаря введению памяти, кодированию и передаче через канал связи подлежит только сигнал обновления (инноваций) отклонения значения $y[k + 1]$ от прогноза $\hat{y}[k + 1]$, а процедура масштабирования (зуминга) позволяет получить все более точные оценки $y[k + 1]$ при значительной начальной неопределенности.

⁶ Обычно информация, содержащаяся в кодовом слове, определяется на основе распределения вероятностей значений исходного процесса [31]. Так как в настоящей работе нас интересует загрузка канала связи передаваемыми данными, используется не вероятностное, а комбинаторное определение информации [11].

Задача синхронизации нелинейных систем при коммуникационных ограничениях на основе наблюдателей и кодера с памятью на один шаг рассмотрена в [43], где показано, что если имеется возможность выбирать интервал квантования по времени, то минимизация потребной скорости передачи данных достигается при двоичном (бинарном) кодировании, и также найдено соотношение между требуемой точностью синхронизации и оптимальным интервалом квантования. Аналогичный результат по стабилизируемости систем первого порядка получен в [27, 53], где показано, что даже при *бинарном управлении* можно достичь нижней потребной границы скорости передачи данных. Поэтому, исходя из указанных результатов, далее основное внимание уделяем *двоичному* кодированию, при котором (8) принимает вид

$$(9) \quad q(y, M) = M \operatorname{sign}(y).$$

Как обычно, предполагаем выполненным «условие равноосведомленности» (в английском оригинале – *equi-memory condition*), согласно которому как кодер, так и декодер принимают решения на основе одной и той же информации [48]. Соблюдение этого условия является важным, так как дает возможность кодеру наблюдать за ошибкой между истинным состоянием объекта (известным на стороне кодера) и его оценкой, вырабатываемой декодером [4].

Ниже рассматриваются кодеры двух типов: *кодер первого порядка*, для которого прогноз совпадает с текущим значением, $\hat{y}[k+1] = y[k]$, и *кодер полного порядка*, в котором прогноз $\hat{y}[k+1]$ вычисляется на основе оценки вектора состояния источника сигнала (объекта наблюдений) с использованием модели его динамики. Рассмотрим вначале кодер первого порядка [43, 77, 78]. Для его описания введем последовательность *центральных значений* $c[k]$, $k = 0, 1, 2, \dots$ с нулевым начальным условием, $c[0] = 0$. На шаге k в кодере сравнивается текущее измеренное значение передаваемой величины $y[k]$ с числом $c[k]$, вырабатывая сигнал рассогласования $\partial y[k] = y[k] - c[k]$. Затем этот сигнал квантуется

согласно (8) с заданным значением $M = M[k]$. Выход

$$(10) \quad \bar{\partial}y[k] = q(\partial y[k], M[k])$$

представляется R -битным символом из выбранного алфавита кодирования и передается через канал связи в декодер. Затем центральное значение $c[k+1]$ пересчитывается на основе полученных данных. В предположении, что величина y изменяется медленно (по сравнению с интервалом дискретности по времени), то есть что $y[k+1] \approx y[k]$, используем следующий алгоритм пересчета $c[k]$:

$$(11) \quad c[k+1] = c[k] + \bar{\partial}y[k], \quad c[0] = 0, \quad k = 0, 1, \dots$$

Заметим, что хотя на стороне кодера известно точное значение рассогласования $\partial y[k]$, в алгоритме (11) используется квантованный сигнал $\bar{\partial}y[k]$ для выполнения указанного условия равноосведомленности, так как декодеру передается именно сигнал $\bar{\partial}y[k]$, а не $\partial y[k]$.

Изменение $M[k]$ (зуминг) в задачах стабилизации позволяет (в идеальном случае) привести систему асимптотически в нулевое состояние несмотря на квантование выхода объекта [4, 28, 32, 33, 37, 54–57, 66–68, 72]. В задачах оценивания состояния (наблюдения) через канал связи диапазон квантования в начале процесса, пока неопределенность значений передаваемого сигнала велика, должен быть достаточно большим, чтобы «охватить» область возможных начальных значений и предотвратить насыщение кодера. Далее, по мере получения информации, этот диапазон имеет смысл уменьшать с целью повышения точности передачи. Для кодеров полного порядка в идеальном случае зуминг позволяет обеспечить асимптотически точное оценивание [4, 24, 28, 38, 59, 64–66, 69, 70, 77, 79]. Наиболее простой вид имеет следующая программный во времени (*time-based*) алгоритм зуминга:

$$(12) \quad M[k] = (M_0 - M_\infty)\rho^k + M_\infty, \quad k = 0, 1, \dots,$$

где $0 < \rho \leq 1$ – параметр затухания, M_∞ – асимптотически предельное (конечное) значение $M[k]$, M_0 – его начальная величина. Чтобы избежать возведения ρ в степень, на практике вместо (12) целесообразно использовать следующий рекуррентный алгоритм

$$(13) \quad M[k+1] = \rho M[k] + m, \quad M[0] = M_0, \quad k = 0, 1, \dots,$$

где $m = (1 - \rho)M_\infty$.

Предлагаются и более сложные алгоритмы, основанные на текущей информации о процессе (зуминг, определяемый событиями, *event-based zooming*), в том числе – адаптивный зуминг [24–26, 49–51]. Так, для бинарного кодера в [24–26] предложен и исследован алгоритм

$$(14) \quad \begin{aligned} \lambda_k &= (\bar{\partial}y_k + \bar{\partial}y_{k-1})/2, \\ M_{k+1} &= m + \begin{cases} \rho M_k, & \text{при } |\lambda_k| \leq 0.5 \\ M_k/\rho, & \text{иначе,} \end{cases} \end{aligned}$$

где $m = (1 - \rho)M_\infty$, $k = 1, 2, \dots$.

Выражения (8), (10), (12) описывают алгоритм, реализуемый кодером. Такие же вычисления выполняются в декодере, а именно – там вычисляются переменные $\tilde{c}[k]$, $\tilde{M}[k]$ на основе поступивших через канал кодовых слов по формулам (10), (12), используемым для вычисления $c[k]$, $M[k]$. Кодеры полного порядка обычно содержат в своем составе «встроенный» наблюдатель [24, 29, 34, 35, 38, 76, 78], синтез которого выполняется на основе модели динамики источника сигнала. Согласно [24, 38], для нелинейной системы

$$(15) \quad \dot{x} = Ax + \varphi(y), \quad y = Cx,$$

используется нелинейный наблюдатель вида

$$(16) \quad \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + \varphi(\hat{y}) + L\bar{\varepsilon}(t), \quad \hat{y} = C\hat{x},$$

где $\bar{\varepsilon}(t) = \bar{\varepsilon}[k]$ при $t \in [kT, (k+1)T)$, $\bar{\varepsilon}[k]$ – квантованное значение *ошибки по выходу*, то есть рассогласование между выходами

объекта (источника сигнала) и наблюдателя $\varepsilon(t_k) = y(t_k) - \hat{y}(t_k)$, полученное на выходе квантователя; L – матрица параметров наблюдателя размера $(n \times l)$ (матричный коэффициент передачи); $\hat{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ – оценка состояния объекта. В кодерах этого типа через канал связи передается только ошибка $\varepsilon(t_k)$ (которая является скалярным сигналом для объектов с одним выходом), а не весь вектор состояния. Наблюдатель (16) включается в состав как кодера, так и декодера, причем начальные условия $\hat{x}(0)$ обоих наблюдателей должны быть одинаковыми. Условия сходимости ошибки к нулю приведены в [45].

2.2. УПРАВЛЯЕМАЯ СИНХРОНИЗАЦИЯ ПАССИФИЦИРУЕМЫХ СИСТЕМ ЛУРЬЕ

В [39, 45] рассматривается следующая задача *управляемой синхронизации* нелинейных систем при коммуникационных ограничениях.

Две нелинейные динамические системы описываются уравнениями в форме Лурье (линейная динамическая подсистема, замкнутая статической нелинейностью в обратной связи по выходу) и имеют одинаковую динамику. Одна из них – *ведущая система*, совершает свободные (неуправляемые) движения. Другая – *ведомая система*, имеет скалярное управление $u(t)$, поступающее аддитивно с выходом нелинейности:

$$(17) \quad \dot{x}(t) = Ax(t) + B\varphi(y_1), \quad y_1(t) = Cx(t),$$

$$(18) \quad \dot{z}(t) = Az(t) + B(\varphi(y_2) + u(t)), \quad y_2(t) = Cz(t).$$

Здесь $x(t)$, $z(t)$ – n -мерные векторы состояния; $y_1(t)$, $y_2(t)$ – скалярные выходы; A – квадратная матрица порядка n ; B – матрица размера $(n \times 1)$; C – матрица размера $(1 \times n)$; $\varphi(y)$ – непрерывная нелинейная функция.

2.2.1. Управляемая синхронизация по выходу ведущей системы

Управляемая синхронизация нелинейных систем, при которой измеренные на стороне источника значения выхода $y_1(t)$ ве-



Рис. 1. Структурная схема системы управляемой синхронизации ведомой и ведущей систем. По каналу связи передается выход ведущей системы

дущей системы кодируются символами конечного алфавита и в дискретные моменты времени $t_k = kT_s$ ($k = 0, 1, 2, \dots$; а T_s – интервал дискретизации) передаются по цифровому каналу связи, рассмотрена в [39]. Структурная схема системы представлена на рис. 1.

Ставится задача нахождения функции управления $\mathcal{U}(\cdot)$, зависящей от измеряемых переменных и обеспечивающей затухание со временем ошибки синхронизации $e(t) = x(t) - z(t)$. Дан анализ предельной ошибки синхронизации, вызванной ограниченностью скорости передачи информации через канал связи. Поскольку на вход регулятора поступает дискретная последовательность $\bar{y}_1[k]$, $k = 0, 1, \dots$, а управляющее воздействие $u(t)$ – процесс непрерывного времени, требуется установить способ преобразования $\bar{y}_1[k]$ в функцию непрерывного времени $t \in \mathbb{R}$. Пусть для преоб-

разования дискретной последовательности $\bar{y}_1[k]$ в процесс непрерывного времени $\bar{y}_1(t)$ используется *экстраполятор нулевого порядка*, то есть $\bar{y}_1(t) = \bar{y}_1[k]$ при $t_k \leq t < t_{k+1}$. Тогда *погрешность передачи данных по каналу* определяется выражением

$$(19) \quad \delta_y(t) = y_1(t) - \bar{y}_1(t).$$

Исследуем влияние этой ошибки на точность синхронизации. Вместо сигнала $y_1(t)$ на вход регулятора поступает сигнал $\bar{y}_1(t) = y_1(t) + \delta_y(t)$, содержащий погрешность $\delta_y(t)$. Выберем статический закон управления в виде линейной обратной связи по рассогласованию:

$$(20) \quad u(t) = -K\bar{\varepsilon}(t),$$

где $\bar{\varepsilon}(t) = y_2(t) - \bar{y}_1(t)$, а K – скалярный коэффициент передачи.

В [39] предполагается, что скорость изменения $y_1(t)$ равномерно ограничена. Точная верхняя граница L_y определяется выражением $L_y = \sup_{x \in \Omega} |C\dot{x}|$, где \dot{x} находится из (17), Ω есть множество, содержащее все траектории ведущей системы (17), выходящие из множества начальных условий Ω_0 . Исследуем сначала погрешность $\delta_y(t)$, вызванную кодированием–декодированием данных. Оценим ее верхнюю границу $\Delta = \sup_t |\delta_y(t)|$. Рассматривая изменение $y_1(t)$ на интервале дискретности $[t_k, t_{k+1}]$, с учетом сделанного предположения об ограниченности скорости изменения $y_1(t)$ и погрешности квантования нетрудно получить, что на каждом интервале $[t_k, t_{k+1}]$ полная ошибка квантования удовлетворяет неравенству

$$(21) \quad |\delta_y(t)| \leq M + L_y T_s$$

Как следует из (21), для выполнения неравенства $|\delta_y(t)| \leq \Delta = 2M$ при всех t интервал квантования T_s должен удовлетворять условию

$$(22) \quad T_s < \Delta/L_y.$$

На практике L_y обычно неизвестна, и в (22) следует использовать ее оценку сверху \bar{L}_y . Из (17), (18), (20) получим следующее уравнение для ошибки синхронизации

$$(23) \quad \dot{e}(t) = A_K e(t) + B\zeta(t) - BK\delta_y(t),$$

где $A_K = A + BKC$, $\zeta(t) = \varphi(y_2(t)) - \varphi(y_1(t))$.

Оценим общую ошибку синхронизации, которая вызвана ошибкой передачи данных, «трансформированной» через ведомую систему, то есть величину $Q = \sup_{t \rightarrow \infty} \overline{\|e(t)\|}$, где $\|\cdot\|$ – эвклидова норма вектора, а супремум берется по всем возможным значениям ошибки передачи данных $\delta_y(t)$, не превосходящих по модулю значения Δ . Введем относительную ошибку синхронизации $C_e = Q/\Delta$. Для упрощения выкладок предположим, что нелинейность удовлетворяет условию Липшица вдоль всех решений ведущей системы (18), то есть будем считать, что имеется значение $L_\varphi > 0$ такое, что

$$(24) \quad |\varphi(y) - \varphi(y + \delta)| \leq L_\varphi |\delta|$$

для всех δ , $y = Cx$, $x \in \Omega$. Очевидно что функция $\zeta(t)$ удовлетворяет тогда неравенству $|\zeta(t)| \leq L_\varphi |\varepsilon(t)|$. Заменой $K \rightarrow R + L_\varphi$, представим уравнение ошибки (23) в виде

$$(25) \quad \dot{e}(t) = A_K e(t) + B\xi(t) + B(K + L_\varphi)\delta_y(t),$$

где $\xi(t) = L_\varphi \varepsilon(t) + \zeta$, очевидно, удовлетворяет секторному неравенству $\xi(t)\varepsilon(t) \geq 0$ для всех $t \geq 0$. Таким образом, задача сводится к исследованию поведения (25) при ограниченном входе $\delta_y(t)$. Сначала рассмотрим случай $\delta_y(t) = 0$. Для этого найдем условия существования квадратичной функции Ляпунова $V(e) = e^T P e$ и коэффициента передачи регулятора K , при которых выполнено неравенство $\dot{V}(e) \leq -\mu V(e)$ при некотором $\mu > 0$, $\delta_y(t) = 0$ и для всех ξ , удовлетворяющих квадратичному неравенству $\xi\varepsilon \geq 0$. В [39] показано, что такие V и K существуют тогда и только тогда, когда линейная часть систем (17), (18) $W(\lambda) = C(\lambda I - A)^{-1} B$ гипер-минимальнофазовая. Предполагая, что условие ГМФ выполнено, матрицы P , K выбраны

надлежащим образом и для некоторого $\mu > 0$ выполнено модифицированное неравенство Ляпунова $PA_K + A_K^T P \leq -\mu P$, получена оценка $\dot{V} \leq -\mu V + |e^T P B (K + L_\varphi) \delta_y| \leq -\mu V + \sqrt{V} \nu$, где $\nu = \sqrt{V(B)}(|K| + L_\varphi)\Delta$. Отсюда следует неравенство

$$(26) \quad \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \|e(t)\| \leq C_e \Delta,$$

где $C_e = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)} \frac{L_\varphi + |K|}{\mu}}$. Неравенство (26) показывает, что полная ошибка синхронизации пропорциональна величине Δ – верхней границе ошибки передачи данных.

Замечание 2. Как отмечено и продемонстрировано на численном примере в [39], наиболее существенным является именно выполнение условия ГМФ. Аддитивность сигнала управления с выходом нелинейности использована при аналитическом исследовании и не является определяющей. Синхронизация может иметь место и для ведомых систем более общего вида, чем (18), а именно, для систем

$$(27) \quad \dot{z}(t) = Az(t) + B(\varphi(y_2)) + Du(t), \quad y_2(t) = Cz(t).$$

где D – $(n \times 1)$ -матрица, отличная от B .

2.2.2. Управляемая синхронизация по рассогласованию между выходами ведущей и ведомой систем

Структура системы синхронизации, в которой через канал связи передается сигнал ошибки между выходами ведущей и ведомой систем, рассмотрена в [45]. Для этого случая сигнал управления имеет вид

$$(28) \quad u(t) = -K\bar{\varepsilon}(t),$$

где $\bar{\varepsilon}(t) = \bar{\varepsilon}[k]$ при $t_k < t < t_{k+1}$, а $\bar{\varepsilon}[k]$ – восстановленный декодером сигнал ошибки синхронизации $\varepsilon(t) = y_2(t) - y_1(t)$, переданный через канал связи, $t_k = kT_s$, $k = 0, 1, \dots$. Структурная схема системы представлена на рисунке 2.

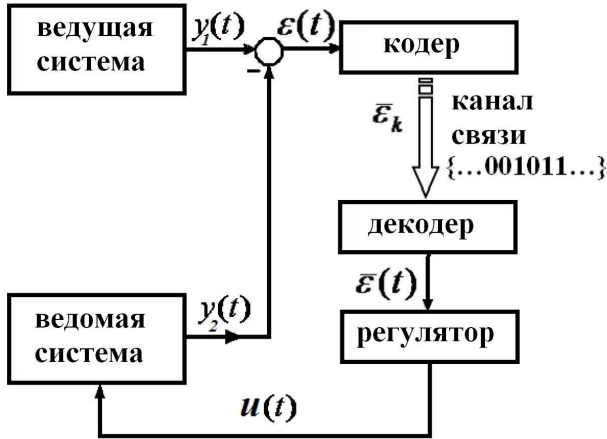


Рис. 2. Структурная схема системы управляемой синхронизации ведомой и ведущей систем. По каналу связи передается сигнал ошибки между выходами ведущей и ведомой систем

Согласно алгоритму двоичного квантования (9), ошибка кодирования имеет вид $\bar{\varepsilon}[k]$

$$(29) \quad \bar{\varepsilon}[k] = M[k] \operatorname{sign}(\varepsilon(t_k)),$$

где диапазон $M[k]$ определяется (12) (или (13)). Ключевым подходом к анализу динамических свойств системы является применение для исследования гибридных (непрерывно-дискретных) систем *метода непрерывных моделей*, состоящего в континуализации уравнений дискретной системы и переходу к ее непрерывной (во времени) модели [9, 10], см. также [60]. Анализ ошибки синхронизации выполняется при следующих предположениях:

- а) Нелинейность $\varphi(y)$ непрерывно-липшицева, см. (24).
- б) Линейная часть (17) строго пассивифицируема.

Как следует из условия б) и теоремы 1, степень устойчивости η_0 многочлена $\beta(\lambda)$ положительная и для любого η , такого что $0 < \eta < \eta_0$, существуют положительно-определенная матрица $P = P^T > 0$ и число K такие, что выполнены следующие матричные

неравенства

$$(30) \quad PA_K + A_K^T P \leq -2\eta P, \quad PB = C^T, \quad A_K = A - BK C.$$

В качестве значения K может быть выбрано любое достаточно большое число. Основной результат [45] формулируется в виде следующей теоремы.

Теорема 2. Пусть выполнены условия а) и б), коэффициент передачи регулятора K удовлетворяет условиям пассивности (30), а параметры кодера ρ , T выбраны так, чтобы выполнялись неравенства

$$(31) \quad \exp(\eta T) (\exp(L_F T) - 1) \leq \frac{L_F}{\|C\| (K\|B\| + L_F)},$$

$$(32) \quad \exp(-\eta T) < \rho < 1,$$

где $L_F = \|A\| + L_\varphi \|B\| \cdot \|C\|$, η — из (30). Пусть диапазон кодирования $M[k]$ определен выражением

$$(33) \quad M[k] = M_0 \rho^k.$$

Тогда для всех начальных условий $e(0)$ таких, что $e(0)^T P e(0) \leq M_0^2$ ошибка синхронизации экспоненциально затухает:

$$(34) \quad |\varepsilon[k]| \leq \|e[k]\| \leq M_0 \rho^k.$$

Кроме того, $|\varepsilon(t)| \leq |\varepsilon[k]|$ при $t_k \leq t \leq t_{k+1}$.

Замечание 3. На практике параметр кодера $M[k]$ целесообразно отделять от нуля и применять для зуминга (12) вместо (33). При таком выборе $M[k]$, экспоненциальное стремление ошибки к нулю (34) обеспечено быть не может, а только стремление ее в некоторую окрестность нуля, но предотвращается «срыв» синхронизации из-за действия неучтенных помех, искажений и ограниченности разрядной сетки вычислителя. Более гибкий способ заключается в адаптивном изменении $M[k]$ по текущему поведению процесса согласно (14).

2.3. АДАПТИВНАЯ синхронизация ПАССИФИЦИРУЕМЫХ СИСТЕМ ЛУРЬЕ ПРИ КОММУНИКАЦИОННЫХ ОГРАНИЧЕНИЯХ

Метод синхронизации нелинейных систем при параметрической неопределенности, основанный на адаптивных наблюдателях, предложен и исследован в [5, 19, 44]. Рассматривается нелинейная ведущая система, заданная уравнениями состояния

$$(35) \quad \dot{x} = Ax + \varphi_0(y) + B \sum_{i=1}^m \theta_i \varphi_i(y), \quad y = Cx,$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния; $y \in \mathbb{R}^l$ – вектор выходов (подлежащий передаче по каналу связи); $\theta = [\theta_1, \dots, \theta_m]^T$ – вектор априорно неизвестных (на стороне ведомой системы) постоянных параметров. Нелинейные зависимости $\varphi_i(\cdot)$, $i = 0, 1, \dots, m$, матрицы A , C и вектор B считаются известными. Принято, что только выход $y(t)$ (а не состояние $x(t)$) измеряется датчиками. Ведомая система строится как *адаптивный наблюдатель* [47, 74], и включает в себя собственно *настраиваемый наблюдатель* и *блок адаптации*. Уравнения ведомой системы имеют вид

$$(36) \quad \begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + \varphi_0(\bar{y}(t)) + B \sum_{i=1}^m \hat{\theta}_i(t) \varphi_i(\bar{y}(t)) + \\ &+ L(\bar{y}(t) - \hat{y}(t)), \quad \hat{y}(t) = C\hat{x}(t), \end{aligned}$$

Здесь $\bar{y}(t) = \bar{y}[k]$ при $t \in [t_{k-1}, t_k)$, $t_k = kT_s$, $k = 0, 1, \dots$, $\bar{y}[k]$ – восстановленный декодером результат преобразования $y(t)$ по (9)–(12). Вектор параметров $\hat{\theta}(t)$ настраивается по алгоритму

$$(37) \quad \dot{\hat{\theta}}_i = -\gamma(\bar{y} - \hat{y})\varphi_i(\bar{y}) - \alpha\hat{\theta}_i, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

где $\gamma > 0$ – коэффициент адаптации, α – коэффициент регуляризации. Регуляризация (отрицательная обратная связь по $\hat{\theta}_i$ в (37)) позволяет избежать неограниченного роста настраиваемых параметров при погрешности в данных (таких как ошибки измерения, погрешности кодирования и передачи данных по каналу

связи).⁷ Из-за влияния ошибок передачи данных, а также введения регуляризующей добавки в алгоритм адаптации *ошибка синхронизации* $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ не стремится к нулю. Поэтому естественно определить цель синхронизации в виде $Q \leq \Delta_x$, где Δ_x – заданное положительная величина, а *установившаяся ошибка синхронизации* определяется как

$$(38) \quad Q = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - \hat{x}(t)\|.$$

Поведение адаптивной системы синхронизации (35)–(37) исследовано в [5, 44] в предположении, что насыщения кодера не происходит и полная ошибка передачи данных по каналу связи равномерно ограничена, то есть что $\|\delta_y(t)\| \leq \Delta$ для всех $t \geq 0$. Верхняя граница ошибки синхронизации дана следующей теоремой [44].

Теорема 3. Пусть выполнены следующие предположения:

а) Матрица коэффициентов обратной связи наблюдателя L выбрана так, что передаточная функция $W_L(\lambda) = C(\lambda I - A + LC)^{-1}B$ строго пассивна.

б) Система (35) имеет ограниченное инвариантное множество $\Omega_\theta \subset \mathbb{R}^n$ при любом $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^m$, где Θ – множество возможных значений параметров θ и $x(0) \in \Omega_\theta$.

с) Функции $\varphi_i(y)$, $i = 0, 1, \dots, m$, ограничены и непрерывно-липшицевы в замкнутой Δ -области множества Ω_θ , то есть выполнены неравенства

$$(39) \quad |\varphi_i(y)| \leq L_\varphi, \quad |\varphi_i(y') - \varphi_i(y)| \leq L'_\varphi$$

для некоторых L_φ , L'_φ и всех $y = Cx$, $x \in S_\Delta(\Omega_\theta)$, где $S_\Delta(\Omega_\theta) = \{x : \exists z \in \Omega_\theta : \|x - z\| \leq \Delta\}$.

Тогда существуют постоянные $C_1 > 0$, $C_2 > 0$ такие, что для любого $\Delta > 0$ выбор параметров алгоритма $\alpha = \Delta^2$, $\gamma =$

⁷ Регуляризованные алгоритмы адаптации вида (37) подробно описаны в [15, 17].

C_2/Δ^2 обеспечивает выполнение цели синхронизации $Q \leq \Delta_x$ для

$$(40) \quad \Delta_x = C_1 \Delta,$$

то есть что предельная ошибка синхронизации Δ_x пропорциональна ошибке передачи данных Δ .

Доказательство теоремы 3 приведено в [44, приложение].

Замечание 4. Согласно версии теоремы о пассивации для наблюдателей [36], вектор L удовлетворяющий предположению а) существует тогда, и только тогда, когда передаточная функция $W(\lambda) = C(\lambda I - A)^{-1}B$ гипер-минимальнофазовая. Чтобы найти L , удовлетворяющий а) при выполнении условия ГМФ, достаточно выбрать его в виде $L = -\kappa C$, где $\kappa > 0$ достаточно велико.

Числовой пример исследования системы (9)–(12), (35), (36), (37) для адаптивной синхронизации хаотических осцилляторов Чуа через канал связи приведен в [5, 44].

3. Оценивание состояния пассивируемых систем Лурье при коммуникационных ограничениях на основе кодеров полного порядка

Приведенные в параграфе 2.2 методы управляемой синхронизации могут быть использованы и в задаче *наблюдения* (оценивания состояния) нелинейных систем Лурье с пассивируемой линейной частью при передаче данных через канал связи. Рассмотрим это подробнее.

3.1. НАБЛЮДЕНИЕ НА ОСНОВЕ КОДЕРОВ ПОЛНОГО ПОРЯДКА ПРИ ПЕРЕДАЧЕ ПО КАНАЛУ СВЯЗИ ЗНАЧЕНИЙ ВЫХОДА ОБЪЕКТА

Рассмотрим задачу оценивания состояния удаленного объекта считая вначале, что по каналу связи передаются квантованные значения его выхода. Пусть наблюдаемый процесс порождается системой имеющей следующую форму Лурье:

$$(41) \quad \dot{x}(t) = Ax(t) + B\varphi(y), \quad y(t) = Cx(t),$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния, $y(t)$ – скалярный выходной сигнал (собственно наблюдаемый процесс), A – квадратная матрица порядка n , B – матрица размера $(n \times 1)$, C – матрица размера $(1 \times n)$, $\varphi(y)$ – непрерывная нелинейная функция. Только сигнал $y(t)$ (а не весь вектор состояния процесса) измеряется сенсорами. Ставится задача получения оценки процесса $x(t)$ удаленным наблюдателем на основе измерений выхода, переданных через канал связи. Используем нелинейный наблюдатель

$$(42) \quad \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + B\varphi(\bar{y}(t)) + L(\bar{y}(t) - \hat{y}(t)), \quad \hat{y}(t) = C\hat{x}(t).$$

Здесь $\hat{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ – оценка вектора состояния, $\bar{y}(t) = \bar{y}[k]$ при $t \in [t_{k-1}, t_k)$, $t_k = kT_s$, $k = 0, 1, \dots$, $\bar{y}[k]$ – восстановленный декодером результат преобразования $y(t)$ по (8)–(12). Для анализа процесса наблюдения запишем уравнение ошибки $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$. Вычитая (42) из (41), получим

$$(43) \quad \dot{e}(t) = Ae(t) + B\varphi(\bar{y}(t)) - L(\bar{y}(t) - \hat{y}(t)).$$

Введем матрицу наблюдателя $A_L = A - LC$ и переменные $\delta_y(t) = y(t) - \bar{y}(t)$, $\zeta(t) = \varphi(\bar{y}(t)) - \varphi(y(t))$. Тогда (43) принимает вид

$$(44) \quad \dot{e}(t) = A_L e(t) + B\zeta(t) - L\delta_y(t).$$

Полученное выражение с точностью до обозначений совпадает с (23), следовательно, выполненный в параграфе 2.2 анализ управляемой синхронизации применим и к рассматриваемой задаче наблюдения. Более детально, будем считать что скорость изменения $y(t)$ равномерно ограничена и дана ее точная верхняя граница L_y . Ошибка квантования $\delta_y(t)$ удовлетворяет тогда неравенству (21): $|\delta_y(t)| \leq M + L_y T$ и для выполнения неравенства $|\delta_y(t)| \leq \Delta = 2M$ при всех t интервал квантования T_s должен удовлетворять условию (22), то есть должно выполняться $T_s < \Delta/L_y$. На практике рекомендуется выбирать $T_s = \Delta/\bar{L}_y$, где \bar{L}_y – оценка сверху значения L_y .

Рассмотрим теперь применение к задаче наблюдения другой схемы управляемой синхронизации, в которой кодируется и

передается через канал связи не наблюдаемый процесс, а рассогласование между значениями этого процесса и оценкой, выработанной на стороне кодера («сигнал инноваций») [21, 24, 38]. Снова рассмотрим модель (41) источника наблюдаемого процесса, вновь считая, что измеряется только выход $y(t)$ и требуется получить оценку $\hat{x}(t)$ всего вектора состояния $x(t)$ на основе доступных измерений с учетом коммуникационных ограничений. Предполагая, что на передающей стороне имеются достаточные вычислительные ресурсы (например, используется «интеллектуальный датчик», *smart sensor*), включим в состав кодера следующий нелинейный наблюдатель полного порядка

$$(45) \quad \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + B\varphi(\hat{y}) + L\bar{\varepsilon}(t), \quad \hat{y}(t) = C\hat{x}(t), \quad \hat{x}(0) = \hat{x}_0$$

где $\hat{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ – вектор оценок состояния, \hat{x}_0 – его начальное значение; $\hat{y}(t)$ – скалярный выход наблюдателя; $\bar{\varepsilon}(t) = \bar{\varepsilon}[k]$ при $t \in [t_k, t_{k+1})$, $t_k = kT_s$, $k = 0, 1, \dots$, а $\bar{\varepsilon}[k]$ есть результат квантования по (29) (или, в более общем случае, по (8)) сигнала рассогласования $\varepsilon(t) = y(t) - \hat{y}(t)$ между значениями процесса, измеренными датчиком на стороне кодера, и его оценкой; L – $(n \times 1)$ -матрица коэффициентов передачи наблюдателя, подлежащая выбору при синтезе. Значения $\bar{\varepsilon}[k]$ кодируются и передаются на сторону приемника, где воспроизводится процесс оценивания состояния, а именно, в декодере, на основе принятой последовательности $\bar{\varepsilon}[k]$, реализуется процедура

$$(46) \quad \begin{aligned} \dot{\hat{x}}_d(t) &= A\hat{x}_d(t) + B\varphi(\hat{y}_d) + L\bar{\varepsilon}(t), \quad \hat{y}_d(t) = C\hat{x}_d(t), \\ \bar{\varepsilon}(t) &= \bar{\varepsilon}[k] \quad \text{при } t \in [t_k, t_{k+1}), \end{aligned}$$

где $\hat{y}_d(t)$, $\hat{x}_d \in \mathbb{R}^n$ – соответственно, оценки значения и состояния процесса, вырабатываемые декодером. Должно соблюдаться условие $\hat{x}_d(0) = \hat{x}(0)$. Заметим, что наблюдатель (45), в отличие от нелинейного наблюдателя, описанного в [74], использует сигнал «коррекции» в виде обратной связи по квантованному процессу $\bar{\varepsilon}(t)$, а не непосредственно по рассогласованию $\varepsilon(t)$ несмотря на то, что последний сигнал может быть сформирован на стороне

кодера по выходу датчика $y(t)$. Это отличие связано с упомянутым условием равноосведомленности, согласно которому кодер и декодер должны использовать одинаковые данные, чтобы процесс, проходящий в кодере, мог воспроизводиться декодером. Используя результаты исследования управляемой синхронизации по ошибке (теорема 2), нетрудно получить, что при выполнении условия ГМФ на линейную часть, липшицевости нелинейной части и соответствующем выборе T , ρ , обеспечивается асимптотически точное оценивание состояния процесса. Как и в параграфе 2.2, на практике, во избежание «срыва» наблюдения процесса при малых $M[k]$ вследствие действия погрешностей разного рода, рекомендуется изменять $M[k]$ согласно (12), а не (33), поступаясь асимптотически точным оцениванием.

4. Экспериментальное исследование процедуры кодирования на мехатронном комплексе

Приведем некоторые результаты использования описанных выше алгоритмов для кодирования и оценивания состояния многомассовой колебательной системы, входящей в состав многомаятникового мехатронного комплекса (ММК) Института проблем машиноведения РАН [3, 20, 21, 41].

4.1. МНОГОМАЯТНИКОВЫЙ МЕХАТРОННЫЙ КОМПЛЕКС

4.1.1. Мехатронный комплекс

Комплекс ММК включает в себя многосекционную маятниковую систему, состоящую из двигателя возбуждения и маятниковых секций (до пятидесяти), последовательно связанных между собой торсионными пружинами и управляющую вычислительную машину (УВМ) для управления в реальном времени, обработки и визуализации результатов экспериментов. Каждый маятник подвешен на опоре, через специальные отверстия которой проходит ось вращения маятника, и имеет одну (вращательную) степень свободы. Маятники отдельных секций соединены между собой торсионными пружинами, смонтированными вдоль осей

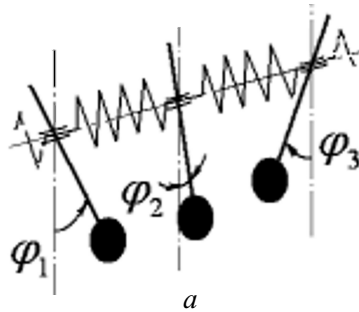


Рис. 3. Схематическое изображение участка цепи маятников (а) и фотография стенда (б)

вращения маятников. Схематический чертеж цепочки связанных маятников и фотография механической части мехатронного комплекса приведены на рисунке 3. Маятниковые секции имеют в основании прямоугольную коробку, в которой расположен электромагнит для подачи управляющих импульсов и локальное вычислительное устройство (ЛВУ). ЛВУ предназначены для разгрузки центрального управляющего компьютера от рутинной работы по формированию сигналов управления и непроизводительного

коэффициент вязкого трения; ω_0 – частота собственных угловых колебаний малой амплитуды изолированного маятника; k – параметр связи между маятниками (коэффициент упругости торсионной пружины). Путем обработки экспериментальных данных и применения поисковой процедуры идентификации получены следующие значения параметров системы (47): $\mu = 0.95 \text{ с}^{-1}$, $\omega_0 = 5.5^{-1}$, $k = 5.8 \text{ с}^{-2}$.

4.1.3. Процедура кодирования–декодирования

При большом числе маятников актуальна задача снижения объема передаваемых по шине данных. Рассмотрим применение изложенных выше методов для ее решения. В наших экспериментах использовалась цепь из четырех маятников и двигателя, присоединенного через пружину к маятнику № 1. На двигатель подавалось гармоническое управляющее напряжение с периодом 0.7 с. Углы поворота ротора двигателя и маятников измерялись оптическими сенсорами с частотой 500 Гц и точностью 2° . Результаты измерений кодировались с помощью описанных выше алгоритмов для передачи по шине данных в центральный компьютер. Поскольку модель динамики двигателя не использовалась при построении кодера, то угол поворота его ротора в данной схеме является внешним воздействием, и для него использовалась процедура (8)–(12) с кодером первого порядка. Интервалы квантования по времени T_s выбирались одинаковыми для маятниковых секций из промежутка [10, 100] мс. Из этого же промежутка брался интервал T_m квантования по времени для двигателя. Параметр дискретности ν квантователя (8) устанавливался в пределах $\nu = 0$ (двоичный квантователь (9)) до $\nu = 8$ одинаково для всех каналов. Скорость передачи данных в бит/с по каждому каналу вычислялась по формуле $R = T_s \log_2(2^\nu + 1)$.

Для построения наблюдателей (45), (46), входящих в состав процедуры кодирования–декодирования данных, использована модель (47). Для рассматриваемой задачи наблюдатель (45) строился путем декомпозиции модели (47) на четыре взаимосвязанные подсистемы второго порядка, откуда получены следую-

где принято $t_{\text{beg}} = 10$ с для устранения влияния переходных процессов на показатели точности $Q_i(R, \nu)$.

Результаты экспериментов отражены на рисунках 4–6. На рисунках 4, 5 приведены графики процессов оценивания углов поворота первого и второго маятников, а также соответствующих ошибок оценивания при различных значениях ν , R_m и $R_{\varphi,1} = R_{\varphi,2}$. Как видно из полученных графиков, время пере-

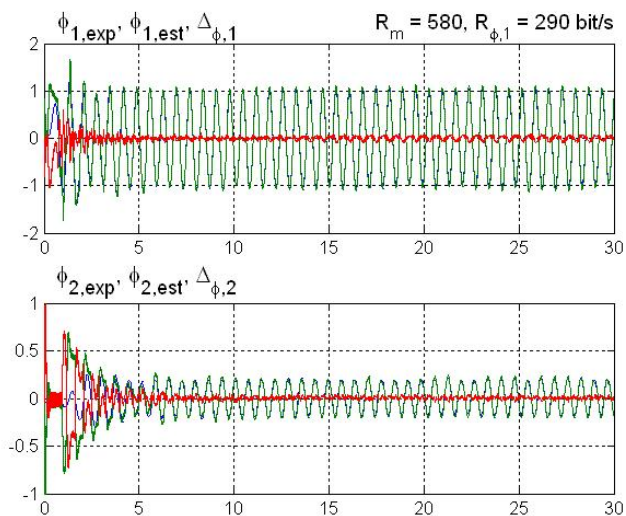


Рис. 4. Процессы оценивания углов поворота маятников №1,2 и ошибки оценивания при $\nu = 0$ (бинарный кодер), $R_m = 580$ бит/с, $R_{\varphi,1} = R_{\varphi,2} = 290$ бит/с

ходного процесса оценивания составляет менее 5 с. На рисунке 6 показана зависимость установившейся среднеквадратической относительной ошибки Q передачи угла маятника № 1 от загрузки канала R (в бит/с) при разных значениях параметра ν . Полученные результаты позволяют оценить минимально требуемую скорость передачи данных для восстановления состояния на стороне декодера и соответствуют теоретическим результатам [38,42,43],

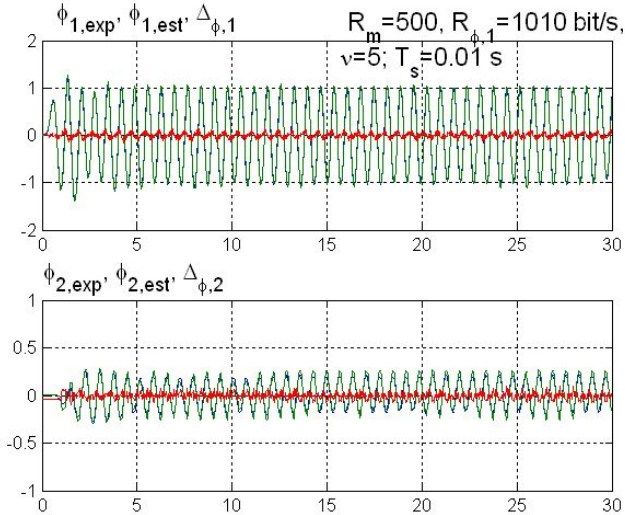


Рис. 5. Процессы оценивания углов поворота маятников №1,2 и ошибки оценивания при $\nu = 5$, $R_m = 500 \text{ бит/с}$,
 $R_{\varphi,1} = R_{\varphi,2} = 1010 \text{ бит/с}$

согласно которым двоичный кодер оптимален с точки зрения потребности скорости передачи данных R , а также, что для кодеров полного порядка имеется определенный порог значения R , ниже которого передача данных неосуществима.

5. Заключение

В статье дано систематическое изложение результатов применения метода пассивации для синхронизации и оценивания состояния нелинейных систем через канал связи с ограниченной пропускной способностью. Показана значимость условия пассивируемости для управляемой синхронизации ведомой нелинейной системы с кодером-декодером первого и полного порядка в канале связи. Описан метод адаптивной синхронизации с использованием двоичных квантователей. Приведенные в рабо-

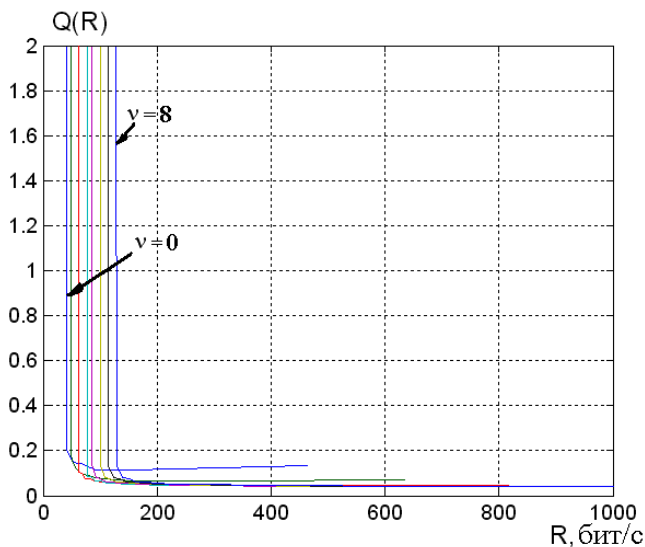


Рис. 6. Зависимость среднеквадратической относительной ошибки Q передачи угла маятника № 1 от R при разных ν

те результаты экспериментов на многомаятниковом мехатронном комплексе подтверждают теоретические результаты и позволяют количественно оценить возможности изложенных процедур передачи данных.

Литература

1. ФРАДКОВ А. Л., АНДРИЕВСКИЙ Б. Р. *Метод пассивации в задачах адаптивного управления, наблюдения и синхронизации* // Андриевский Б. Р., Барабанов А. Е., Бондарко В. А. и др. *Нелинейные системы. Частотные и матричные неравенства*. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. – С. 452–499.
2. АНДРИЕВСКИЙ Б. Р., БЛЕХМАН И. И., БОРЦОВ Ю. А. и др. *Управление мехатронными вибрационными установками* / под ред. И. И. Блехмана и А. Л. Фрадкова, – СПб.: Наука, 2001.

3. АНДРИЕВСКИЙ Б. Р., БОЙКОВ К. Б., ЛАВРОВ Б. П., ФРАДКОВ А. Л. *Многомаятниковый мехатронный комплекс* / Сб.: *Нелинейные проблемы теории колебаний и теории управления*. В. В. Белецкий, Д. А. Индейцев, А. Л. Фрадков (ред.) – СПб.: Наука, 2009. – С. 129–140.
4. АНДРИЕВСКИЙ Б. Р., МАТВЕЕВ А. С., ФРАДКОВ А. Л. *Управление и оценивание при информационных ограничениях: к единой теории управления, вычислений и связи* // *Автоматика и телемеханика*. – 2010. – № 4, – С. 34–99.
5. АНДРИЕВСКИЙ Б. Р., ФРАДКОВ А. Л. *Адаптивная синхронизация нелинейных систем одного класса при ограниченной пропускной способности канала связи* // *Управление большими системами*. Выпуск 25, – М.: ИПУ РАН, 2009. – С. 48–83.
6. АНДРИЕВСКИЙ Б. Р., ФРАДКОВ А. Л. *Управление и наблюдение через каналы связи с ограниченной пропускной способностью* // *Гироскопия и навигация*. – 2009. – Т. 4. – С. 103–114.
7. АНДРИЕВСКИЙ Б. Р., ФРАДКОВ А. Л. *Метод пассивации в задачах адаптивного управления, оценивания и синхронизации* // *Автоматика и телемеханика*. – 2006. – № 11. – С. 3–37.
8. ГЕЛИГ А. Х., ЛЕОНОВ Г. А., ЯКУБОВИЧ В. А., *Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия*. – М.: Наука, 1978.
9. ДЕРЕВИЦКИЙ Д. П., ФРАДКОВ А. Л. *Две модели для анализа динамики алгоритмов адаптации* // *Автоматика и телемеханика*. – 1974. – № 1. – С. 67–75.
10. ДЕРЕВИЦКИЙ Д. П., ФРАДКОВ А. Л. *Прикладная теория дискретных адаптивных систем управления*. – М.: Наука, 1981.
11. КОЛМОГОРОВ А. Н. *Три подхода к определению понятия «количество информации»* // *Пробл. передачи информ.* – 1965. – № 1. – С. 3–11.
12. МИРОШНИК И. В., НИКИФОРОВ В. О., ФРАДКОВ А. Л.

- Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами.* – СПб.: Наука, 2000.
13. *Нелинейные системы. Частотные и матричные неравенства* / Под ред. А. Х. Гелига, Г. А. Леонова, А. Л. Фрадкова. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008.
 14. ПОЛУШИН И. Г., ФРАДКОВ А. Л., ХИЛЛ Д. Д. *Пассивность и пассивфикация нелинейных систем (обзор)* // Автоматика и телемеханика. – 2000. – № 3. – С. 3–37.
 15. ФОМИН В. Н., ФРАДКОВ А. Л., ЯКУБОВИЧ В. А. *Адаптивное управление динамическими объектами.* – М.: Наука, 1981.
 16. ФРАДКОВ А. Л. *Синтез адаптивной системы стабилизации линейного динамического объекта* // Автоматика и телемеханика. – 1974. – № 12. – С. 96–103.
 17. ФРАДКОВ А. Л. *Адаптивное управление в сложных системах.* – М.: Наука, 1990.
 18. ФРАДКОВ А. Л. *Исследование физических систем при помощи обратных связей.* // Автоматика и телемеханика. – 1999. – № 3. – С. 213–230.
 19. ФРАДКОВ А. Л., АНДРИЕВСКИЙ Б. Р. *Адаптивная синхронизация нелинейных систем* // Изв. вузов. Приборостроение. – 2007. – № 10. – С. 17–23.
 20. ФРАДКОВ А. Л., АНДРИЕВСКИЙ Б. Р., БОЙКОВ К. Б., АНДРИЕВСКИЙ А. Б. *Многомаятниковый мехатронный комплекс* // Мехатроника, Автоматизация, Управление. – 2011. – № 1. – С. 41–54.
 21. ФРАДКОВ А. Л., АНДРИЕВСКИЙ Б. Р., АНДРИЕВСКИЙ А. Б. *Оценивание состояния пассивируемых нелинейных систем при коммуникационных ограничениях* // Информационно-управляющие системы. – 2011, – № 1. – С. 28–33.
 22. ХАЛИЛ Х. К. *Нелинейные системы.* – М.: Ин-т компьютер. исслед. – Ижевск: РХД, 2009.
 23. ЯКУБОВИЧ В. А. *Метод матричных неравенств в теории устойчивости нелинейных регулируемых систем. I.*

- Абсолютная устойчивость вынужденных колебаний* // Автоматика и телемеханика. – 1964. – № 7. – С. 1017–1029.
24. FRADKOV A. L., ANDRIEVSKY B., PEAUCELLE D. *Estimation and control under information constraints for LAAS helicopter benchmark* // IEEE Trans. Contr. Syst. Tech. – 2010. – V. 18, – No 5. – P. 1180–1187.
 25. ANDRIEVSKY B. *Adaptive coding for transmission of position information over the limited-band communication channel* // Proc. 9th IFAC Workshop Adaptation and Learning in Control and Signal Processing (ALCOSP'2007), Saint Petersburg, August 29–31, 2007.
 26. ANDRIEVSKY B., FRADKOV A. L., PEAUCELLE D. *State estimation over the limited-band communication channel for pitch motion control of LAAS Helicopter benchmark* // Proc. 17th IFAC Symp. Aut. Contr. Aerospace (ACA'2007), Toulouse, France, June 2007.
 27. BAILLIEUL J. *Feedback designs for controlling device arrays with communication channel bandwidth constraints* // ARO Workshop on Smart Structures, University Park, PA, August 16–18, 1999.
 28. BROCKETT R. W., LIBERZON D. *Quantized feedback stabilization of linear systems* // IEEE Trans. Automat. Contr. – 2000. – V. 45, – No 7. – P. 1279–1289.
 29. CHENG T. M., SAVKIN A. V. *Output feedback stabilisation of nonlinear networked control systems with non-decreasing nonlinearities: A matrix inequalities approach.* // Int. J. Robust Nonlinear Control. – 2007. – No 17. – P. 387–404.
 30. CHOPRA N., SPONG M. W. *Output synchronization of nonlinear systems with time delay in communication* // Proc. 45th IEEE Conf. on Dec. Control, San Diego, USA, December 2006. – P. 4986–4992.
 31. COVER TH. M., THOMAS J. A. *Elements of Information Theory.* – New York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore: John Wiley & Sons, Inc, 1991.
 32. DELCHAMPS D F. *Stabilizing a linear system with quantized*

- state feedback* // IEEE Trans. Automat. Contr., – 1990. – V. 35. – No 8. – P. 916–924.
33. DE PERSIS C. *n-Bit stabilization of n-dimensional nonlinear systems in feedforward form* // IEEE Trans. Automat. Contr., – 2005. – V. 50. – No 3. – P. 299–311.
34. DE PERSIS C. *On stabilization of nonlinear systems under data rate constraints using output measurements* // Int. J. Robust Nonlinear Control. – 2006. – V. 16. – P. 315–332.
35. DE PERSIS C., NEŠIĆ D. *Practical encoders for controlling nonlinear systems under communication constraints* // Proc. 44th IEEE Conference on Decision & Control, and European Control Conference, Seville, Spain, December 2005. – P. 434–439.
36. EFIMOV D. V., FRADKOV A. L. *Adaptive tuning to bifurcation for time-varying nonlinear systems* // Automatica. – 2006. – V. 42. – P. 417–425.
37. FAGNANI F., ZAMPIERI S. *Quantized stabilization of linear systems: Complexity versus performance* // IEEE Trans. Automat. Contr. – 2004. – V. 49, – No 9. – P. 534–1548.
38. FRADKOV A. L., ANDRIEVSKY B. *State estimation of passifiable Lurie systems via limited-capacity communication channel* // Proc. 35th Annual Conf. IEEE Industrial Electronics Society, IECON 2009, Porto, Portugal, November 3–5, – 2009.
39. FRADKOV A. L., ANDRIEVSKY B., EVANS R. J. *Controlled synchronization under information constraints* // Physical Review E. – 2008. – V. 78. – P. 036210 1–6.
40. FRADKOV A. L. ANDRIEVSKY B. *Passification based synchronization of nonlinear systems under communication constraints.* // Prepr. 18th IFAC World Congress, Milano, Italy, Aug. 28 – Sept. 2, 2011. – P. 6562–6566.
41. FRADKOV A. L., ANDRIEVSKY B., BOYKOV K. B., LAVROV B. P. *Multipendulum mechatronic setup for studying control and synchronization* / In Dynamics and control of hybrid mechanical systems. World Scientific Series on Nonlinear Science, Series B – V. 14, G. Leonov, H. Nijmeijer,

- A. Pogromsky, and A. Fradkov, Eds. – Singapore: World Scientific, 2010, – P. 211–222.
42. FRADKOV A. L., ANDRIEVSKY B., EVANS R. J. *Hybrid quantised observer for multi-input-multi-output nonlinear systems* // Proc. 17th IEEE Int. Conf. Control Applications (CCA 2008), San Antonio, Texas, USA, September 3–5, 2008. – P. 1195–1200.
 43. FRADKOV A. L., ANDRIEVSKY B., EVANS R. J. *Chaotic observer-based synchronization under information constraints* // Physical Review E. – 2006. – V. 73. – P. 066209.
 44. FRADKOV A. L., ANDRIEVSKY B., EVANS R. J. *Adaptive observer-based synchronization of chaotic systems with first-order coder in presence of information constraints* // IEEE Trans. Circuits Syst. I. – 2008. – V. 55, – No 6. – P. 1685–1694.
 45. FRADKOV A. L., ANDRIEVSKY B., EVANS R. J. *Synchronization of passifiable Lurie systems via limited-capacity communication channel* // IEEE Trans. Circuits Syst. I. – 2009. – V. 56, – No 2. – P. 430–439.
 46. FRADKOV A. L. *Passification of nonsquare linear systems and Feedback Kalman–Yakubovich–Popov Lemma* // European J. of Control – 2003. – V. 9, – No 11. – P. 573–582.
 47. FRADKOV A. L., NIJMEIJER H., MARKOV A. Y. *Adaptive observer-based synchronization for communication* // Int. J. Bifurcations Chaos, – 2000. – V. 10, – No. 12. – P. 2807–2813.
 48. GABOR G., GYORFI Z. *Recursive Source Coding*. – New York: Springer-Verlag. 1986.
 49. GOMEZ-ESTERN F., CANUDAS DE WIT C., F.R. RUBIO, J.M. FORNÉS. *Adaptive delta-modulation coding for networked controlled systems*. // Proc. Amer. Contr. Conf. (ACC'07), N.Y., USA, July 11–13, 2007. – P. 4911–4916.
 50. GOMEZ-ESTERN F., CANUDAS DE WIT C., RUBIO F. R. *Adaptive delta modulation in networked controlled systems with bounded disturbances* // IEEE Trans. Automat. Contr., –

2011. – V. 56, – No 1. – P. 129–134.
51. GOODMAN D.G., A. GERSHO. *Theory of an adaptive quantizer* // IEEE Trans. Commun., COM-22. – V. 8, August 1974. P. 1037–1045.
 52. HAN Q.L. *On designing time-varying delay feedback controllers for master-slave synchronization of Lur'e systems* // IEEE Trans. Circuits Syst. I. – 2007. – V. 54, – No 7. – P. 1573–1583.
 53. LI K., BAILLIEU J. *Robust quantization for digital finite communication bandwidth (DFCB) control* // IEEE Trans. Automat. Contr., – 2004. – V. 49, – No 9. – P. 1573–1584.
 54. LIBERZON D. *On stabilization of linear systems with limited information* // IEEE Trans. Automat. Contr., – 2003. – V. 39. – No 2. – P. 304–307.
 55. LIBERZON D. *Stabilizing a nonlinear system with limited information feedback* // Proc. 42nd IEEE Conference on Decision and Control, – V. TuA06, Maui, Hawaii USA, December 2003. IEEE. – P. 182–186.
 56. LIBERZON D. *Hybrid feedback stabilization of systems with quantized signals* // Automatica. – 2003. – V. 39. – P. 1543–1554.
 57. LIBERZON D., HESPANHA J.P. *Stabilization of nonlinear systems with limited information feedback* // IEEE Trans. Automat. Contr., – 2005. – V. 50. – No 6. – P. 910–915.
 58. LI C.G., CHEN L.N., AIHARA K. *Stability of genetic networks with SUM regulatory logic: Lur'e system and LMI approach* // IEEE Trans. Circuits Syst. I, – 2006. – V. 53, – No 11. – P. 2451–2458.
 59. LI X., WONG W.SH. *State estimation with communication constraints* // Systems & Control Letters, – No 28. – 1996. – P. 49–54.
 60. LJUNG L. *Analysis of recursive stochastic algorithms* // IEEE Trans. Automat. Contr., – 1977. – V. 22. – No. 4. – P. 551–575.
 61. TOUCHETTE H., LLOYD S. *Information-theoretic approach to the study of control systems* // Physica A – Statistical

- Mechanics and its Applications, – 2004. – V. 331 No. 1–2, – P. 140–172.
62. A. LORÍA A. ZAVALA-RÍO. *Adaptive tracking control of chaotic systems with applications to synchronization* // IEEE Trans. Circuits Syst. I, – 2007. – V. 54, – No 9. – P. 2019–2029.
63. LU J. G., HILL D. J. *Impulsive synchronization of chaotic Lur'e systems by linear static measurement feedback: An LMI approach* // IEEE Trans. Circuits Syst. II, – 2007. – V. 54. – No 8. – P. 710–714.
64. MALYAVEJ V., SAVKIN A. V. *The problem of optimal robust Kalman state estimation via limited capacity digital communication channels* // Systems & Control Letters, – 2005. – V. 54, – P. 283–292.
65. MATVEEV A. S., SAVKIN A. V. *The problem of state estimation via asynchronous communication channels with irregular transmission times* // IEEE Trans. Automat. Contr., – 2003. – V. 48, – No 4. – P. 670–676.
66. MATVEEV A. S., SAVKIN A. V. *Estimation and Control over Communication Networks*. – Boston: Birkhäuser, 2009.
67. NAIR G. N., EVANS R. J., MAREELS I. M. Y., MORAN W. *Topological feedback entropy and nonlinear stabilization* // IEEE Trans. Automat. Contr., – 2004. – V. 49. – No. 9. – P. 1585–1597.
68. NAIR G. N., EVANS R. J. *Exponential stabilisability of finite-dimensional linear systems with limited data rates* // Automatica, – 2003. – V. 39, – No 4. – P. 585–593.
69. NAIR G. N., EVANS R. J.. *State estimation via a capacity-limited communication channel* // Proc. 36th IEEE Conference on Decision Control, V. WM09, San Diego, California USA, December 1997. IEEE. – P. 866–871.
70. NAIR G. N., EVANS R. J. *State estimation under bit-rate constraints* // Proc. 37th IEEE Conference on Decision Control, V. WA09, Tampa, Florida USA, December 1998. IEEE. – P. 251–256.
71. NAIR G. N., EVANS R. J. *Stabilizability of stochastic linear*

- systems with finite feedback data rates* // SIAM J. Control Optim., – V. 43. – No 2. – 2004. – P. 413–436.
72. NAIR G. N., EVANS R.J., CAINES P. E. *Stabilising decentralised linear systems under data rate constraints*// Proc. 43rd IEEE Conference on Decision Control, V. ThC10, Atlantis, Paradise Island, Bahamas, December 2004. IEEE. – P. 3992–3997.
73. NAIR G. N., FAGNANI F., ZAMPIERI S., EVANS R.J. *Feedback control under data rate constraints: an overview* // Proc. IEEE, – 2007. – V. 95. – No 1. – P. 108–137.
74. NIJMEIJER H, MAREELS I. M. Y. *An observer looks at synchronization* // IEEE Trans. on Circuits and Systems I, – 1997. – V. 44. – No 10. – P. 882–890.
75. PECORA L. M., CARROLL T. L. *Synchronization in chaotic systems* // Phys. Rev. Lett., – 1990. – V. 64. – P. 821–824.
76. DE PERSIS C., ISIDORI A. *Stabilizability by state feedback implies stabilizability by encoded state feedback.* // Systems & Control Letters, – 2004. – V. 53. – P. 249–258.
77. SAVKIN A. V., PETERSEN I. R. *Set-valued state estimation via a limited capacity communication channel* // IEEE Trans. Automat. Contr., – 2003. – V. 48. – No. 4. – P. 676–680.
78. TATIKONDA S., MITTER S. *Control under communication constraints* // IEEE Trans. Automat. Contr., – 2004. – V. 49. – No 7. – P. 1056–1068.
79. WONG W. SH., BROCKETT R. W. *Systems with finite communication bandwidth constraints – Part I: State estimation problems* // IEEE Trans. Automat. Contr., – 1997. – V. 42. – No 9. – P. 1294–1299.

PASSIFICATION METHOD IN THE PROBLEMS OF SYNCHRONIZATION AND STATE ESTIMATION OF NONLINEAR SYSTEMS OVER THE DIGITAL COMMUNICATION CHANNEL

Boris Andrievsky, Institute for Problems of Mechanical Engineering of RAS, Saint Petersburg, Doctor of Science, leading research fellow (boris.andrievsky@gmail.com),

Alexander L. Fradkov, Institute for Problems of Mechanical Engineering of RAS, Doctor of Science, head of the laboratory, (IPME RAS, 61, V.O. Bolshoy Av., Saint Petersburg, (812) 321-47-66, fradkov@mail.ru).

Abstract: Results of application of the passification method for synchronization and state estimation of nonlinear systems over the limited-band communication are overviewed. Relevance of the passifiability condition the problems of synchronization and state estimation over the digital communication channel is demonstrated. The experimental results obtained on the multipendulum mechatronic setup are presented.

Keywords: passivity, passification, nonlinear systems, synchronization, state estimation, communication constraints, mechatronic setup.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии Б. Т. Поляком