

УДК 519.6+004.94
ББК 22.193

АЛГОРИТМЫ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ С ПЕРЕКЛЮЧАЕМОЙ ДИФФУЗИЕЙ

Черных Н. В.¹, Пакшин П. В.²

*(Арзамасский политехнический институт (филиал)
Нижегородского государственного технического универ-
ситета им Р.Е. Алексеева)*

Рассматриваются математические модели сложных систем в виде стохастических дифференциальных уравнений с марковскими переключениями диффузионной составляющей. Предлагается обобщение известных численных схем Тейлора для аппроксимации решения таких уравнений. Представлены результаты численного моделирования в среде Scilab.

Ключевые слова: стохастические системы, диффузионные процессы, марковские переключения, схемы Тейлора, сходимость, устойчивость.

1. Введение

Стохастические дифференциальные уравнения служат фундаментом для многих разделов прикладных наук, т.к. успешно моделируют системы, функционирующие при наличии случайных возмущений. Они являются одним из основных объектов современной теории управления. Большое значение, которое приобрели стохастические дифференциальные уравнения, объяс-

¹ Надежда Валентиновна Черных, аспирантка (nadezdacher@mail.ru).

² Павел Владимирович Пакишин, доктор физико-математических наук, профессор (pakshinpv@gmail.com).

няется также их тесной связью с уравнениями математической физики.

Один из известных и перспективных подходов к численному интегрированию стохастических дифференциальных уравнений Ито основан на стохастических аналогах формулы Тейлора. Теоретически это разложение позволяет строить методы как угодно высокого порядка точности (при соответствующих предположениях о коэффициентах системы уравнений).

Важнейшей отличительной особенностью стохастических аналогов формулы Тейлора для решения стохастических дифференциальных уравнений Ито является присутствие в них, так называемых, повторных стохастических интегралов в форме Ито или Стратоновича, которые являются функционалами сложной структуры относительно компонент векторного винеровского процесса [3]. Аналогом обычных степеней винеровского процесса служат в теории Ито многочлены Эрмита, а обычную экспоненту от стохастического интеграла дублирует экспоненциальный супермартингал. Проблема совместного численного моделирования (исходя из среднеквадратического критерия сходимости) совокупностей повторных стохастических интегралов Ито является сложной как с теоретической, так и с вычислительной точки зрения.

В последнее время внимание исследователей привлекают математические модели в виде стохастических дифференциальных уравнений (СДУ) со скачкообразными изменениями диффузионной составляющей. Они получили название моделей с переключаемой диффузией и описывают сложные системы, которые могут испытывать резкие изменения структуры и параметров, вызванные возможными отказами, перерывами в поступлении информации и воздействиями внешней среды. Такие модели получают все более широкое распространение в современной теории управления и информации.

Исследование скачкообразных систем началось с работ I. Ya. Kats, N.N. Krasovskii, E.A. Lidskii (1960–1961), а затем T. Kazangey и D.D. Sworder (1971) представили скачкообразную систему, где макроэкономическая модель народного хозяйства использовалась, чтобы изучить эффект федеральной политики по

стабилизации жилищного сектора. Известна работа Г.Н. Мильштейна (1972) «Mean square stability of linear systems driven by Markov chain». A.S. Willsky и B.C. Levy рассматривали скачкообразные системы для моделирования систем электроэнергетики и управления солнечным тепловым центральным приемником. M. Mariton в своей работе «Jump Linear Systems in Automatic Control» поясняет, что скачкообразные системы появились как удобная математическая структура для моделирования разнообразных проблем в различных областях, таких как задачи слежения, контроля допустимых ошибок и производственных процессов. [11]

Как правило, рассматриваются переключения диффузии по закону марковской цепи с конечным числом состояний – марковские переключения.

При компьютерном моделировании таких систем возникает необходимость численного решения СДУ с марковскими переключениями.

Известны работы по изучению управляемости, устойчивости, стабилизации таких систем. Вопросы численного решения СДУ с марковскими переключениями изучены мало.

В работах [9, 10] рассмотрена известная численная схема Эйлера (для стохастических систем) в применении к решению стохастического дифференциального уравнения с марковскими переключениями, приведены доказательства некоторых результатов частного характера.

В данной работе рассматривается возможность применения численных схем, основанных на стохастических аналогах формулы Тейлора для аппроксимации решений таких уравнений. Теоретические выводы подтверждаются проведенными компьютерными экспериментами в среде SCILAB.

2. Предварительные сведения

Пусть (Ω, F, P) – вероятностное пространство, $F_t, t_0 \leq t \leq t_0 + T$ – *неубывающее семейство σ – подалгебр* F , $(\omega_r(t), F_t), r = 1, \dots, d$ – независимые винеровские процессы.

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение Ито

$$(1) \quad dX = a(t, X)dt + \sum_{r=1}^d \sigma_r(t, X)d\omega_r(t),$$

где X, a, σ_r - векторы размерности n . [4]

Предполагается, что функции $a(t, x)$ и $\sigma_r(t, x)$ определены и непрерывны при $t \in [t_0, t_0 + T]$, $x \in \mathfrak{R}^n$ и удовлетворяют условию Липшица при всех $t \in [t_0, t_0 + T]$, $x \in \mathfrak{R}^n$, $y \in \mathfrak{R}^n$:

$$(2) \quad |a(t, x) - a(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq K|x - y|. \quad [4]$$

Будем использовать далее следующие обозначения:

$|x|$ означает евклидову норму вектора x , xu – скалярное произведение векторов x и y ; K – положительная константа.

$X_{t,x}(t)$ или просто $X(t)$ - решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным данным $X_{t,x}(0) = x$. Разобьем промежуток $[t_0, t_0 + T]$ точками деления t_k на N равных частей, так что $t_{k+1} - t_k = h$, $k = 0, 1, \dots, N - 1$, $t_0 + T = t_N$, $h = T/N$. Приближение к $X(t_k)$ будем обозначать $\bar{X}(t_k)$, где $\bar{X}_0 = X(t_0)$. Далее пусть $X - F_{t_k}$ -измеримая случайная величина и $E|X|^2 < \infty$; $X_{t_k,x}(t)$ означает решение уравнения (1) для $t_k \leq t \leq t_0 + T$, удовлетворяющее начальным данным при $t = t_k$.

Пусть $(X(t), F(t))$, $t_0 \leq t \leq t_0 + T$ – некоторое решение уравнения (1), с начальным условием, удовлетворяющим неравенству $E|X(t_0)|^2 < \infty$.

Определим одношаговую аппроксимацию $\bar{X}_{t,x}(t+h)$, $t_0 \leq t \leq t+h \leq t_0 + T$, которая формируется в зависимости от x, t, h , и $\{\omega_1(\mathcal{G}) - \omega_1(t), \dots, \omega_d(\mathcal{G}) - \omega_d(t) : t \leq \mathcal{G} \leq t+h\}$:

$$(3) \quad \bar{X}_{t,x}(t+h) = x + f(t, x, h; \omega_i(\mathcal{G}) - \omega_i(t), i = 1, \dots, d, t \leq \mathcal{G} \leq t+h),$$

где функция f определяется конкретным методом нахождения решения.

На основании одношаговой аппроксимации рекуррентно построим приближение (\bar{X}_k, F_{t_k}) , $k = 0, \dots, N$, $t_{k+1} - t_k = h_{k+1}$, $t_N = t_0 + T$:

$$(4) \quad \bar{X}_0 = X_0 = X(t_0), \quad \bar{X}_{k+1} = X_{t_k, \bar{X}_k}(t_{k+1}) = \\ = \bar{X}_k + f(t_k, \bar{X}_k, h_{k+1}; \omega_i(\mathcal{G}) - \omega_i(t_k), i = 1, \dots, d, t_k \leq \mathcal{G} \leq t_{k+1}).$$

Для простоты считаем, что $t_{k+1} - t_k = h = T/N$. [4]

Теорема 1. Пусть одношаговая аппроксимация $\bar{X}_{t,x}(t+h)$ имеет порядок точности ρ_1 для математического ожидания отклонения и порядок точности ρ_2 для среднеквадратичного отклонения, т. е., при любых $t_0 \leq t \leq t_0 + T - h$, $x \in \mathfrak{R}^n$ выполняются неравенства

$$(5) \quad |E(X_{t,x}(t+h) - \bar{X}_{t,x}(t+h))| \leq K(1 + |x|^2)^{1/2} h^{\rho_1}$$

$$(6) \quad [E|X_{t,x}(t+h) - \bar{X}_{t,x}(t+h)|^2]^{1/2} \leq K(1 + |x|^2)^{1/2} h^{\rho_2}$$

и пусть

$$(7) \quad \rho_2 \geq 1/2, \quad \rho_1 \geq \rho_2 + \frac{1}{2}.$$

Тогда при любых N и $k = 0, 1, \dots, N$ выполняется неравенство

$$(8) \quad [E|X_{t_0, X_0}(t_k) - \bar{X}_{t_0, X_0}(t_k)|^2]^{1/2} \leq K(1 + E|X_0|^2)^{1/2} h^{\rho_2 - \frac{1}{2}},$$

т.е. порядок точности метода, построенного с использованием одношаговой аппроксимации $\bar{X}_{t,x}(t+h)$, равен $\rho = \rho_2 - \frac{1}{2}$.

Постоянные K не зависят от X_0 и N . [4]

3. Постановка задачи

Пусть (Ω, F, P) – вероятностное пространство, F_t , $t_0 \leq t \leq t_0 + T$ – неубывающее семейство σ – подалгебр F , $\omega_r(\cdot)$, $r = 1, \dots, d$ – независимые винеровские процессы. Пусть $M = \{1, \dots, m\}$ – конечное множество.

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение с марковскими переключениями в форме

$$(9) \quad dX(t) = a(\beta(t), X(t))dt + \sum_{r=1}^d \sigma_r(\beta(t), X(t))d\omega_r(t),$$

где $\beta(t)$ – однородный марковский процесс со счетным множеством состояний M , $\beta(0) = u_0, X(0) = x_0$.

$$(10) P(\beta(t+h) = l | \beta(t) = u, x(s), \beta(s), s \leq t) = q_{ul}(t)h + o(h), \quad u \neq l,$$

где $x(t) \in \mathfrak{R}^n$, $a(\cdot, \cdot): \mathfrak{R}^n \times M \mapsto \mathfrak{R}^n$ и $\sigma(\cdot, \cdot): \mathfrak{R}^n \times M \mapsto \mathfrak{R}^{n \times n}$.

Переходная функция такого процесса определяется набором функций $P(t, u, l) = p_{ul}(t)$, образующих стохастическую матрицу $P(t)$ переходных вероятностей ($p_{ul}(t) \geq 0, \sum_l p_{ul}(t) = 1$), где числа

p_{ul} имеют смысл вероятностей перехода из u в l за интервал h при условии, что процесс $\beta(t)$ на этом интервале покинул состояние u .

Эволюция процесса $\beta(t)$ целиком описывается с помощью чисел q_{ul} , q_l , образующих матрицу интенсивности переходов

$$Q(t) = (q_{ul}(t)) \in \mathfrak{R}^{m \times m}, \quad Q(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{P(t) - P(0)}{t},$$

$$q_{ul}(t) \geq 0 \text{ при } u \neq l, \quad q_{uu} = -q_u, \quad \sum_{l=1}^m q_{ul}(t) = 0 \text{ для каждого } u \in M; [1]$$

Предполагается, что функции $a(\beta(t), x(t))$ и $\sigma_r(\beta(t), x(t))$ определены и непрерывны при $t \in [t_0, t_0 + T]$, $x \in \mathfrak{R}^n$ и удовлетворяют условию Липшица при всех $t \in [t_0, t_0 + T]$, $x \in \mathfrak{R}^n$, $y \in \mathfrak{R}^n$, $u \in M$:

$$(11) |a(u, x) - a(u, y)| + |\sigma(u, x) - \sigma(u, y)| \leq K|x - y|,$$

а также условию:

$$(12) |a(u, x)| + |\sigma(u, x)| \leq K(1 + |x|),$$

которое накладывает ограничения на скорость изменения компонент функций по x .

При выполнении всех описанных выше условий уравнение (9) имеет единственное, непрерывное решение $X_{u, x}$ на интервале $t \geq 0$ для каждого начального значения. [8]

Поставим задачу численного решения уравнения (9), т. е. нахождения аппроксимации его решения на рассматриваемом временном интервале.

При такой постановке проблемы, когда матрица переходов Q не зависит от x , а зависит только от t , ее можно свести к известной задаче решения стохастического дифференциального уравнения вида (1) с помощью схем, описанных в [2, 4, 7] на совокуп-

ности случайных подынтервалов $[0, t_1), [t_1, t_1 + t_2), \dots$, где t_k – случайные моменты переключения марковской цепи, которые можно определить заранее. Так как следующий момент переключения t_k и состояние $\beta(t_k)$ есть случайные величины, распределение которых зависит лишь от $(\beta(t_k), t_k)$, можно предварительно сгенерировать совокупность $(\beta(t_k), t_k)$ правых частей уравнения (1) и решать уравнение (1) известными методами. При этом точность аппроксимации, которая зависит от выбора шага на отдельных подынтервалах, будет достижима и на всем рассматриваемом временном интервале.

Но можно предложить для решения уравнения (9) другой подход.

Для стохастического дифференциального уравнения вида (1) Е. Платен предложил очень простой вывод (использующий лишь формулу Ито) разложения решения $X_{t,x}(t+h)$ по степеням h и интегралам, зависящим от приращений $\omega_r(\vartheta) - \omega_r(t)$, где $t \leq \vartheta \leq t+h$, $r = 1, \dots, d$. Это разложение в детерминированном случае представляет собой формулу Тейлора для $X_{t,x}(t+h)$ по степеням h в окрестности точки (t, x) . [2, 4, 7]

Будем использовать разложение Платена, подробно рассмотренное в [4], для решения уравнения (9), заменив функцию $f(t, x)$ функцией $f(\beta(t), x(t))$ с переключаемой компонентой.

Пусть $X_{u,x}(s) = X(s)$ – решение уравнения (9) для всех $u \in M$; $f(\beta, x)$, где $\beta = \beta(t)$, $X = X(t)$ – достаточно гладкая функция (скалярная или векторная). Согласно формуле Ито имеем для $t_0 \leq t \leq \vartheta \leq t_0 + T$

$$(13) \quad f(\beta(\vartheta), X(\vartheta)) = f(\beta, x) + \sum_{r=1}^d \int_t^{\vartheta} \Lambda_r f(\beta(\vartheta_1), X(\vartheta_1)) d\omega_r(\vartheta_1) + \int_t^{\vartheta} Lf(\beta(\vartheta_1), X(\vartheta_1)) d\vartheta_1,$$

где операторы Λ_r , $r = 1, \dots, d$ и L определены как:

$$(14) \quad \Lambda_r = \left(\sigma_r, \frac{\partial}{\partial x} \right),$$

$$(15) L = \left(a, \frac{\partial}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \sum_{r=1}^q \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_r^i \sigma_r^j \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j},$$

Применим формулу (13) к функциям $\Lambda_r f$ и Lf , а затем полученные выражения для $\Lambda_r f(\beta(\vartheta), X(\vartheta))$ и $Lf(\beta(\vartheta), X(\vartheta))$ подставим в (13). Имеем

$$(16) f(\beta(s), x(s)) = f + \sum_{r=1}^d \Lambda_r f \int_t^s d\omega_r(\vartheta) + Lf \int_t^s d\vartheta + \\ + \sum_{r=1}^d \int_t^s \left(\sum_{s=1}^d \int_t^{\vartheta} \Lambda_s \Lambda_r f(\beta(\vartheta_1), X(\vartheta_1)) d\omega_s(\vartheta_1) d\omega_r(\vartheta) + \right. \\ \left. + \sum_{r=1}^d \int_t^s \left(\int_t^{\vartheta} L \Lambda_r f(\beta(\vartheta_1), X(\vartheta_1)) d\vartheta_1 \right) d\omega_r(\vartheta) + \right. \\ \left. + \sum_{r=1}^d \int_t^s \left(\int_t^{\vartheta} \Lambda_r Lf(\beta(\vartheta_1), X(\vartheta_1)) d\omega_r(\vartheta_1) \right) d\vartheta + \right. \\ \left. + \int_t^s \int_t^{\vartheta} L^2 f(\beta(\vartheta_1), X(\vartheta_1)) d\vartheta_1 d\vartheta \right),$$

где, например, $\Lambda_r f$ вычисляется в точке (β, x) .

Поступая так дальше можно получить разложения для $f(\beta(t+h), X(t+h))$, где роль степеней выполняют случайные величины вида (которые не зависят от F_t)

$$(17) I_{i_1, \dots, i_j}(h) = \int_t^{t+h} d\omega_{i_j}(\vartheta) \int_t^{\vartheta} d\omega_{i_{j-1}}(\vartheta_1) \int_t^{\vartheta_1} \dots \int_t^{\vartheta_{j-2}} d\omega_{i_1}(\vartheta_{j-1}),$$

где i_1, \dots, i_j принимают значения из множества чисел $0, 1, \dots, d$, $t \leq \vartheta \leq \vartheta_1 \leq \vartheta_2 \leq \dots \leq \vartheta_{j-1} \leq t+h$ и под $d\omega_0(\vartheta_r)$ понимается $d\vartheta_r$.

Интеграл (17) соответствует j -степени параметра h в детерминированном разложении.

Очевидно, что $E I_{i_1, \dots, i_j} = 0$, если хотя бы одно из $i_k \neq 0$, $k = 1, \dots, j$, и $E I_{i_1, \dots, i_j} = O(h^j)$, если все $i_k = 0$, $k = 1, \dots, j$.

Рассмотрим примеры вычисления нескольких интегралов Ито. Для этого будем использовать формулы (18) из теории интегралов Ито ([4, 5, 6]):

$$(18) \int_0^t \omega(\mathcal{G})d\omega(\mathcal{G}) = \frac{\omega^2(t) - t}{2}; \quad \int_0^t \mathcal{G}d\omega(\mathcal{G}) = t\omega(t) - \int_0^t \omega(\mathcal{G})d\mathcal{G};$$

$$\int_0^t \omega^2(\mathcal{G})d\omega(\mathcal{G}) = \frac{\omega^3(t)}{3} - \int_0^t \omega(\mathcal{G})d\mathcal{G};$$

$$(19) I_0(h) = \int_t^{t+h} d\mathcal{G} = h; \quad I_1(h) = \int_t^{t+h} d\omega(\mathcal{G}) = \omega(t+h) - \omega(t) = \Delta\omega(h);$$

$$I_{0,0}(h) = \int_t^{t+h} d\omega_0(\mathcal{G}) \int_t^{\mathcal{G}} d\omega_0(\mathcal{G}_1) = \int_t^{t+h} d\mathcal{G} \int_t^{\mathcal{G}} d\mathcal{G}_1 = \int_t^{t+h} \mathcal{G}d\mathcal{G} = \frac{h^2}{2};$$

$$I_{1,1}(h) = \int_t^{t+h} d\omega(\mathcal{G}) \int_t^{\mathcal{G}} d\omega_1(\mathcal{G}_1) = \int_t^{t+h} \omega(\mathcal{G})d\omega(\mathcal{G}) = \frac{\Delta\omega^2(h) - h}{2};$$

$$I_{1,0}(h) = \int_t^{t+h} d\omega_0(\mathcal{G}) \int_t^{\mathcal{G}} d\omega(\mathcal{G}_1) = \int_t^{t+h} d\mathcal{G} \int_t^{\mathcal{G}} d\omega(\mathcal{G}_1) = \int_t^{t+h} \omega(\mathcal{G})d\mathcal{G};$$

$$I_{0,1}(h) = \int_t^{t+h} d\omega(\mathcal{G}) \int_t^{\mathcal{G}} d\omega_0(\mathcal{G}_1) = \int_t^{t+h} d\omega(\mathcal{G}) \int_t^{\mathcal{G}} d\mathcal{G} = \int_t^{t+h} \mathcal{G}d\omega(\mathcal{G}) =$$

$$= h\Delta\omega - \int_t^{t+h} \omega(\mathcal{G})d\mathcal{G} = h\Delta\omega(h) - I_{1,0};$$

$$I_{1,1,1}(h) = \int_t^{t+h} d\omega(\mathcal{G}) \int_t^{\mathcal{G}} d\omega_1(\mathcal{G}_1) \int_t^{\mathcal{G}_1} d\omega_2(\mathcal{G}_2) =$$

$$= \int_t^{t+h} d\omega(\mathcal{G}) \int_t^{\mathcal{G}} \omega_1(\mathcal{G}_1)d\omega_1(\mathcal{G}_1) = \int_t^{t+h} \frac{\omega^2(\mathcal{G}) - \mathcal{G}}{2} d\omega(\mathcal{G}) =$$

$$= \frac{\Delta\omega^3(h)}{6} - \frac{1}{2}h\Delta\omega(h);$$

В формулах (19) все рассмотренные повторные интегралы

Ито выражаются через случайные величины $\Delta\omega(h)$, $\int_t^{t+h} \omega(\mathcal{G})d\mathcal{G}$.

Вернемся к разложению (16) и выпишем формулу, которая получается путем ряда непосредственных подстановок:

$$\begin{aligned}
 (20) \quad f(\beta(t+h), X(t+h)) = & f + \sum_{r=1}^d \Lambda_r f \int_t^{t+h} d\omega_r(\mathcal{G}) + Lf \int_t^{t+h} d\mathcal{G} + \\
 & + \sum_{r=1}^d \sum_{i=1}^d \Lambda_i \Lambda_r f \int_t^{t+h} d\omega_r(\mathcal{G}) \int_t^{\mathcal{G}} d\omega_i(\mathcal{G}_1) + \\
 & + \sum_{r=1}^d \sum_{i=1}^d \sum_{s=1}^d \Lambda_s \Lambda_i \Lambda_r f \int_t^{t+h} d\omega_r(\mathcal{G}) \int_t^{\mathcal{G}} d\omega_i(\mathcal{G}_1) \int_t^{\mathcal{G}_1} d\omega_s(\mathcal{G}_2) + \\
 & + \sum_{r=1}^d \Lambda_r Lf \int_t^{t+h} d\mathcal{G} \int_t^{\mathcal{G}} d\omega_r(\mathcal{G}_1) + \sum_{r=1}^d L\Lambda f \int_t^{t+h} d\omega_r(\mathcal{G}) \int_t^{\mathcal{G}} d\mathcal{G}_1 + \\
 & + L^2 f \int_t^{t+h} d\mathcal{G} \int_t^{\mathcal{G}} d\mathcal{G}_1 + \rho, \quad \text{где } f \equiv f(\beta(t), x(t)),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (21) \quad \rho = & \sum_{r=1}^d \sum_{i=1}^d \sum_{s=1}^d \sum_{j=1}^d \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\mathcal{G}} \left(\int_t^{\mathcal{G}_1} \left(\int_t^{\mathcal{G}_2} \Lambda_j \Lambda_s \Lambda_i \Lambda_r f \times \right. \right. \right. \\
 & \times (\beta(\mathcal{G}_3), X(\mathcal{G}_3)) d\omega_j(\mathcal{G}_3)) d\omega_s(\mathcal{G}_2)) d\omega_i(\mathcal{G}_1)) d\omega_r(\mathcal{G}) + \\
 & + \sum_{r=1}^d \sum_{i=1}^d \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\mathcal{G}} \left(\int_t^{\mathcal{G}_1} L\Lambda_i \Lambda_r f(\beta(\mathcal{G}_2), X(\mathcal{G}_2)) d\mathcal{G}_2 \right) d\omega_i(\mathcal{G}_1) \right) d\omega_r(\mathcal{G}) + \\
 & + \sum_{r=1}^d \sum_{i=1}^d \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\mathcal{G}} \left(\int_t^{\mathcal{G}_1} \Lambda_i L\Lambda_r f(\beta(\mathcal{G}_2), X(\mathcal{G}_2)) d\omega_i(\mathcal{G}_2) \right) d\mathcal{G}_1 \right) d\omega_r(\mathcal{G}) + \\
 & + \sum_{r=1}^d \sum_{i=1}^d \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\mathcal{G}} \left(\int_t^{\mathcal{G}_1} \Lambda_i \Lambda_r Lf(\beta(\mathcal{G}_2), X(\mathcal{G}_2)) d\omega_i(\mathcal{G}_2) \right) d\omega_r(\mathcal{G}_1) \right) d\mathcal{G} + \\
 & + \sum_{r=1}^d \sum_{i=1}^d \sum_{s=1}^d \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\mathcal{G}} \left(\int_t^{\mathcal{G}_1} \left(\int_t^{\mathcal{G}_2} L\Lambda_s L_i \Lambda_r f(\beta(\mathcal{G}_3), X(\mathcal{G}_3)) d\mathcal{G}_3 \right) d\omega_s(\mathcal{G}_2) \right) \times \right. \\
 & \times d\omega_i(\mathcal{G}_1) \left. \right) d\omega_r(\mathcal{G}) + \\
 & + \sum_{r=1}^d \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\mathcal{G}} \left(\int_t^{\mathcal{G}_1} L^2 \Lambda_r f(\beta(\mathcal{G}_2), X(\mathcal{G}_2)) d\mathcal{G}_2 \right) d\mathcal{G}_1 \right) d\omega_r(\mathcal{G}) + \\
 & + \sum_{r=1}^d \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\mathcal{G}} \left(\int_t^{\mathcal{G}_1} L\Lambda_r Lf(\beta(\mathcal{G}_2), X(\mathcal{G}_2)) d\mathcal{G}_2 \right) d\omega_r(\mathcal{G}_1) \right) d\mathcal{G} +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{r=1}^d \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\vartheta} \int_t^{\vartheta_1} \Lambda_r L^2 f(\beta(\vartheta_2), X(\vartheta_2)) d\omega_r(\vartheta_2) d\vartheta_1 \right) d\vartheta + \\
 & + \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\vartheta} \int_t^{\vartheta_1} L^3 f(\beta(\vartheta_2), X(\vartheta_2)) d\vartheta_2 \right) d\vartheta_1 d\vartheta.
 \end{aligned}$$

Рассмотрим леммы, доказанные в [4], применительно к разложению (20).

Лемма 1. *Справедливо соотношение*

$$(22) \quad \left(E \left(I_{i_1, \dots, i_j} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = O \left(h^{\sum_{k=1}^j \frac{2-i_k}{2}} \right).$$

Другими словами, при подсчете порядка малости интеграла (17) нужно руководствоваться правилом: $d\vartheta$ вносит в порядок малости единицу, а $d\omega_r(\vartheta)$, $r = 1, \dots, d$ – одну вторую.

Лемма 2. *Пусть*

$$(23) \quad \left| \Lambda_{i_j} \dots \Lambda_{i_1} f(\beta(t), x(t)) \right| \leq K \left(1 + |x|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Тогда величина

$$(24) \quad I_{i_1, \dots, i_j}(f, h) = \int_t^{t+h} d\omega_{i_j}(\vartheta) \int_t^{\vartheta} d\omega_{i_{j-1}}(\vartheta_1) \int_t^{\vartheta_1} \dots \int_t^{\vartheta_{j-2}} \Lambda_{i_j} \dots \Lambda_{i_1} f(\beta(\vartheta_{j-1}), X(\vartheta_{j-1})) d\omega_{i_1}(\vartheta_{j-1})$$

удовлетворяет неравенству

$$(25) \quad E \left| I_{i_1, \dots, i_j}(f, h) \right|^2 \leq K \left(1 + E |X(t)|^2 \right) h^{\sum_{k=1}^j (2-i_k)},$$

т. е., в частности, ее порядок малости тот же, что и у величины $I_{i_1, \dots, i_j}(h)$. Далее, если хотя бы один из индексов i_k , $k = 1, \dots, j$ отличен от нуля, то

$$(26) \quad E I_{i_1, \dots, i_j}(f, h) = 0, \quad \sum_{k=1}^j i_k^2 \neq 0.$$

Из этой леммы вытекает, что каждое слагаемое, составляющее ρ , имеет не более чем второй порядок малости. Более того, математическое ожидание всех членов второго порядка малости

и порядка малости 2,5 из ρ равно нулю согласно (26). Поэтому $|E\rho| = O(h^3)$ Разумеется, это верно, если для всех подынтегральных функций из ρ выполняется, например, (23).

Леммы 1, 2 справедливы для разложения (20) в силу того, что в формуле (20) интегралы Ито остались в том же виде, в котором они используются в разложении Платена (см. [4, 7]).

На основании этих лемм непосредственно подсчитывается порядок каждого слагаемого в разложениях вида (20).

Легко увидеть [4], что можно получить как разложения, содержащие все члены включительно до какого-то полуцелого порядка малости, так и до какого-то целого порядка.

Возьмем теперь в (20), (21) в качестве $f(\beta, x)$ вектор x . В этом случае $\Lambda_r f = \sigma_r$, $Lf = a$. Поэтому

$$\begin{aligned}
 (27) \quad X_{u,x}(t+h) &= x + \sum_{r=1}^d \sigma_r \int_t^{t+h} d\omega_r(\mathcal{G}) + ah + \\
 &+ \sum_{r=1}^d \sum_{i=1}^d \Lambda_i \sigma_r \int_t^{t+h} (\omega_i(\mathcal{G}) - \omega_i(t)) d\omega_r(\mathcal{G}) + \\
 &+ \sum_{r=1}^d L\sigma_r \int_t^{t+h} (\mathcal{G} - t) d\omega_r(\mathcal{G}) + \sum_{r=1}^d \Lambda_r a \int_t^{t+h} (\omega_r(\mathcal{G}) - \omega_r(t)) d\mathcal{G} + \\
 &+ \sum_{r=1}^d \sum_{i=1}^d \sum_{s=1}^d \Lambda_s \Lambda_i \sigma_r \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\mathcal{G}} (\omega_s(\mathcal{G}_1) - \omega_s(t)) d\omega_i(\mathcal{G}_1) \right) d\omega_r(\mathcal{G}) + La \frac{h^2}{2} + \rho.
 \end{aligned}$$

В формуле (27) все коэффициенты σ_r , a , $\Lambda_i \sigma_r$, $L\sigma_r$, $\Lambda_r a$, $\Lambda_s \Lambda_i \sigma_r$, $L a$ вычисляются в точке (β, x) , а остаток ρ равен

$$\begin{aligned}
 (28) \quad \rho &= \sum_{r=1}^d \sum_{i=1}^d \sum_{s=1}^d \sum_{j=1}^d \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\mathcal{G}_1} \int_t^{\mathcal{G}_2} (\int_t^{\mathcal{G}} \Lambda_j \Lambda_s \Lambda_i \sigma_r(\beta(\mathcal{G}_3), X(\mathcal{G}_3))) \times \right. \\
 &\times d\omega_j(\mathcal{G}_3)) d\omega_s(\mathcal{G}_2)) d\omega_i(\mathcal{G}_1)) d\omega_r(\mathcal{G}) + \\
 &+ \sum_{r=1}^d \sum_{i=1}^d \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\mathcal{G}} (\int_t^{\mathcal{G}_1} L\Lambda_i \sigma_r(\beta(\mathcal{G}_2), X(\mathcal{G}_2)) d\mathcal{G}_2) d\omega_i(\mathcal{G}_1)) d\omega_r(\mathcal{G}) + \right. \\
 &+ \sum_{r=1}^d \sum_{i=1}^d \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\mathcal{G}} (\int_t^{\mathcal{G}_1} \Lambda_i L\sigma_r(\beta(\mathcal{G}_2), X(\mathcal{G}_2)) d\omega_i(\mathcal{G}_2)) d\mathcal{G}_1) d\omega_r(\mathcal{G}) + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{r=1}^d \sum_{i=1}^d \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\vartheta_1} \left(\int_t^{\vartheta_2} \Lambda_i \Lambda_r a(\beta(\vartheta_2), X(\vartheta_2)) d\omega_i(\vartheta_2) d\omega_r(\vartheta_1) \right) d\vartheta + \right. \\
 & + \sum_{r=1}^d \sum_{i=1}^d \sum_{s=1}^d \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\vartheta_1} \left(\int_t^{\vartheta_2} \left(\int_t^{\vartheta_3} L \Lambda_s \Lambda_i \sigma_r(\beta(\vartheta_3), X(\vartheta_3)) d\vartheta_3 \right) d\omega_s(\vartheta_2) \right) \times \right. \\
 & \times d\omega_i(\vartheta_1) d\omega_r(\vartheta) + \\
 & + \sum_{r=1}^d \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\vartheta_1} \left(\int_t^{\vartheta_2} L^2 \sigma_r(\beta(\vartheta_2), X(\vartheta_2)) d\vartheta_2 \right) d\vartheta_1 \right) d\omega_r(\vartheta) + \\
 & + \sum_{r=1}^d \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\vartheta_1} \left(\int_t^{\vartheta_2} L \Lambda_r a(\beta(\vartheta_2), X(\vartheta_2)) d\vartheta_2 \right) d\omega_r(\vartheta_1) \right) + \\
 & + \sum_{r=1}^d \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\vartheta_1} \left(\int_t^{\vartheta_2} \Lambda_r L a(\beta(\vartheta_2), X(\vartheta_2)) d\omega_r(\vartheta_2) \right) d\vartheta_1 \right) d\vartheta + \\
 & + \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\vartheta_1} \left(\int_t^{\vartheta_2} L^2 a(\beta(\vartheta_2), X(\vartheta_2)) d\vartheta_2 \right) d\vartheta_1 \right) d\vartheta.
 \end{aligned}$$

В связи с формулами (27), (28) рассмотрим следующую одношаговую аппроксимацию:

$$\begin{aligned}
 (29) \quad \bar{X}_{u,x}(t+h) & = x + \sum_{r=1}^d \sigma_r(\omega_r(t+h) - \omega_r(t)) + ah + \\
 & + \sum_{r=1}^d \sum_{i=1}^d \Lambda_i \sigma_r \int_t^{t+h} (\omega_i(\vartheta) - \omega_i(t)) d\omega_r(\vartheta) + \sum_{r=1}^d L \sigma_r \int_t^{t+h} (\vartheta - t) d\omega_r(\vartheta) + \\
 & + \sum_{r=1}^d \Lambda_r a \int_t^{t+h} (\omega_r(\vartheta) - \omega_r(t)) d\vartheta + \\
 & + \sum_{r=1}^d \sum_{i=1}^d \sum_{s=1}^d \Lambda_s \Lambda_i \sigma_r \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\vartheta} (\omega_s(\vartheta_1) - \omega_s(t)) d\omega_i(\vartheta_1) \right) d\omega_r(\vartheta) + La \frac{h^2}{2},
 \end{aligned}$$

где $a = a(\beta(t), x(t))$, $\sigma_r = \sigma_r(\beta(t), x(t))$.

Пользуясь леммами 1 и 2, можно установить (при выполнении условия (23) для соответствующих функций), что для одношаговой аппроксимации (29)

$$|E\rho| = O(h^3), \quad E|\rho|^2 = O(h^4),$$

т. е. $\rho_1 = 3, \rho_2 = 2$, и этот метод имеет порядок сходимости равный $3/2$ (на основании Теоремы 1).

Общий результат построения одношаговых аппроксимаций обоснован и сформулирован в [4].

Все многократные интегралы Ито вида (17) имеют множителем $\Delta\omega(h)$ (см. формулы (19)), т. е. величины, способные принимать сколь угодно большие значения. Тем не менее, схемы, основанные на разложении Платена, обеспечивают хорошую аппроксимацию решений стохастических дифференциальных уравнений, что подтверждается компьютерными экспериментами, например в [7].

Обобщим теорему Платена (приведенную в [4]) на рассматриваемый случай решения стохастического дифференциального уравнения с марковскими переключениями (9). Все выводы теоремы Платена остаются в силе для разложения (27), так как выполняются леммы 1, 2.

Теорема 2 (обобщение теоремы Платена).

Пусть

$\bar{X}_{u,x}(t+h)$ содержит все слагаемые вида $\Lambda_{i_j} \dots \Lambda_{i_1} f \cdot I_{i_1, \dots, i_j}$, где $f \equiv x$, до целого порядка t включительно. Пусть все функции

$\Lambda_{i_j} \dots \Lambda_{i_1} f(\beta(t), x(t))$, где $f \equiv x$, $\sum_{k=1}^j \frac{2-i_k}{2} \leq t+1$, удовлетворяют

неравенству (23). Тогда среднеквадратичный порядок точности метода, основанный на такой аппроксимации, равен t .

Пусть $\bar{X}_{u,x}(t+h)$ содержит все слагаемые вида $\Lambda_{i_j} \dots \Lambda_{i_1} f \cdot I_{i_1, \dots, i_j}$, где $f \equiv x$, до полуцелого порядка $t + \frac{1}{2}$ включительно и слагаемое

$$L^m a \int_t^{t+h} d\mathcal{G} \int_t^{\mathcal{G}} d\mathcal{G}_1 \dots \int_t^{\mathcal{G}_{m-1}} d\mathcal{G}_m = L^m a \frac{h^{m+1}}{(m+1)!}.$$

Пусть все функции $\Lambda_{i_j} \dots \Lambda_{i_1} f(\beta(t), x(t))$, где $f \equiv x$,

$\sum_{k=1}^j \frac{2-i_k}{2} \leq t+2$, удовлетворяют неравенству (23). Тогда сред-

неквадратичный порядок точности метода, основанный на такой аппроксимации, равен $t + \frac{1}{2}$.

Для нахождения решения уравнения (9) предложим следующую численную схему, построенную на одношаговой аппроксимации (29), т. е. среднеквадратичного порядка точности 3 / 2.

$$\begin{aligned}
 (30) \quad \bar{X}_{t_{k+1}} = & \bar{X}_{t_k} + a(\bar{\beta}_{t_k}, \bar{X}_{t_k})h + \sigma(\bar{\beta}_{t_k}, \bar{X}_{t_k})\Delta\omega_k + \\
 & + \frac{1}{2}\sigma(\bar{\beta}_{t_k}, \bar{X}_{t_k})\sigma'(\bar{\beta}_{t_k}, \bar{X}_{t_k})\left\{(\Delta\omega_k)^2 - h\right\} + a'(\bar{\beta}_{t_k}, \bar{X}_{t_k})\sigma(\bar{\beta}_{t_k}, \bar{X}_{t_k})\Delta Z_k + \\
 & + \frac{1}{2}\left(a(\bar{\beta}_{t_k}, \bar{X}_{t_k})a'(\bar{\beta}_{t_k}, \bar{X}_{t_k}) + \frac{1}{2}\sigma^2(\bar{\beta}_{t_k}, \bar{X}_{t_k})a''(\bar{\beta}_{t_k}, \bar{X}_{t_k})\right)h^2 + \\
 & + \left(a(\bar{\beta}_{t_k}, \bar{X}_{t_k})\sigma'(\bar{\beta}_{t_k}, \bar{X}_{t_k}) + \frac{1}{2}\sigma^2(\bar{\beta}_{t_k}, \bar{X}_{t_k})\sigma''(\bar{\beta}_{t_k}, \bar{X}_{t_k})\right)\left\{\Delta\omega_k h - \Delta Z_k\right\} + \\
 & + \frac{1}{2}\sigma(\bar{\beta}_{t_k}, \bar{X}_{t_k})\left(\sigma(\bar{\beta}_{t_k}, \bar{X}_{t_k})\sigma''(\bar{\beta}_{t_k}, \bar{X}_{t_k}) + \left(\sigma'(\bar{\beta}_{t_k}, \bar{X}_{t_k})\right)^2\right) \times \\
 & \times \left\{\frac{1}{3}(\Delta\omega_k)^2 - h\right\}\Delta\omega_k,
 \end{aligned}$$

где $\beta = \beta(t)$, $x = x(t)$, $\Delta Z_k = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{t_k}^{s_2} d\omega_{s_1} ds_2$, $\Delta\omega_k$ - есть $N(0, h)$ гауссовски распределенных приращений винеровского процесса ω на подынтервалах $t_k \leq t \leq t_{k+1}$, $\bar{X}_{t_0} = x_0$.

Рассмотрим теперь модель переключения, зависящего от фазового состояния.

Вернемся к уравнению (9), где $\beta(t)$ - однородный марковский процесс со счетным множеством состояний M , $\beta(0) = u_0$, $X(0) = x_0$,

$$(31) \quad P(\beta(t+h) = l | \beta(t) = u, x(s), \beta(s), s \leq t) = q_{ul}(x)h + o(h), \quad u \neq l,$$

где $x(t) \in \mathfrak{R}^n$, $a(\cdot, \cdot): \mathfrak{R}^n \times M \mapsto \mathfrak{R}^n$ и $\sigma(\cdot, \cdot): \mathfrak{R}^n \times M \mapsto \mathfrak{R}^{n \times n}$.

(32) Пусть $Q(\cdot): \mathfrak{R}^n \mapsto \mathfrak{R}^{m \times m}$ - ограниченная и непрерывная функция. $Q(x) = (q_{ul}(x)) \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ для каждого x , $q_{ul}(x) \geq 0$ при $u \neq l$,

$$\sum_{l=1}^m q_{ul}(x) = 0 \text{ для каждого } u \in M.$$

Такая состояние - зависимая модель находит значительно большее применение в управлении и оптимизации. Если матрица Q зависит от состояния $x(t)$, то случай становится значительно

более сложным. Одна из главных трудностей - та, что из-за непрерывной состояния - обусловленной связи, $\beta(t)$ и $x(t)$ становятся зависимы. $\beta(t)$ – является цепью Маркова только для фиксированного x , то есть фактически не является марковской. [9, 10]

В отличие от обычных диффузионных процессов, моделируемых стохастическими дифференциальными уравнениями, распределение такой переключаемой диффузии имеет смешанный характер.

Суть задачи в следующем - рассмотреть пару процессов $\beta(t)$ и $x(t)$ совместно; т. е. процесс с двумя компонентами рассматривается как марковский. [9, 10]

Пусть переключаемая диффузия $(\beta(t), x(t))$ задана уравнением (9). Пусть первое начальное значение $(\beta(0), x(0)) = (u_0, x_0)$, также задано другое начальное значение $(\beta(0), y(0)) = (u_0, y_0)$ для $y \neq x$. Для состояние - зависимого случая $\beta^{u_0, x_0}(t) \neq \beta^{u_0, y_0}(t)$ бесконечно часто, даже при том, что первоначально $\beta^{u_0, x_0}(0) = \beta^{u_0, y_0}(0) = \beta$, где верхний индекс показывает начальное значение зависимости.

Будем считать, что $\beta(t)$ – стохастически непрерывный процесс, для которого $\beta(t+h) \xrightarrow[q]{\rightarrow} \beta(t)$ при $h \rightarrow 0$. В соответствии с требованием сепарабельности будем считать, что $\beta(t)$ не может менять свое состояние за «нулевое время» более одного раза. В этом случае траектории процесса будут кусочно – постоянными, т. е. временной интервал разбивается на подынтервалы $[0, t_1), [t_1, t_1 + t_2), \dots$, на которых $\beta(t)$ постоянно, t_k – случайные моменты переключения марковской цепи. [1]

Далее будем рассматривать последовательность $\bar{\beta}(t_k)$ как дискретно - временной стохастический процесс, аппроксимирующий $\beta(t)$ в соответствующем значении.

Используя функцию $Q(x)$ можно построить матрицу переходных вероятностей $P = e^{Q(x)h}$. Используя разложение функции в ряд Тейлора $I + \Delta Q(x) + O(\Delta^2)$ и отбросив $O(\Delta^2)$ ввиду ограниченности и непрерывности $Q(x)$, будем моделировать матрицу

переходных вероятностей как $P = I + \Delta Q(x)$, где I – единичная матрица.

Будем рассматривать пару процессов $\beta(t)$ и $x(t)$ совместно как марковскую цепь следующим образом.

Значения $\bar{X}_{t_{k+1}}$ генерируются рекурсивно согласно (30), используя предыдущие значение \bar{X}_{t_k} , и одновременно генерируются значения $\bar{\beta}_{t_{k+1}}$, также используя значение \bar{X}_{t_k} ($x = \bar{X}_{t_k}$ в матрице переходных вероятностей $P = I + \Delta Q(x)$).

При всех вышеописанных условиях Леммы 1, 2 и обобщенная теорема Платена выполняются для случая марковского процесса, зависящего от фазового состояния, т. е. схема (30) будет обеспечивать нахождение приближенного решения уравнения (9) с матрицей переходов $Q(x)$.

Подобный подход используется в [9, 10], где представлены леммы и теоремы частного характера (рассматриваемая в этих работах схема Эйлера является частным случаем схемы (30)).

Однако, при численном решении в модели с переключением, которое зависит от фазового состояния, моменты переключения и состояния после него, тоже определяются приближенно. При этом возникает ряд вопросов по поводу определения того, как приближенное решение отличается от точного. Возможно, нужно ввести какую-то меру отклонения приближенного распределения моментов скачков от точного распределения. Один из возможных подходов - сделать замену меры, то есть превратить все скачки в пуассоновские. Тогда проблема переходит в другую плоскость, где надо оценивать, как отклоняется эта мера от точной, и насколько будут отличаться вычисленные средние значения функционалов от траекторий и точные значения. Эти вопросы пока остаются открытыми.

4. Пример

Рассмотрим процесс Ито $X = \{X_t, t \geq 0\}$, удовлетворяющий линейному стохастическому уравнению

$$(33) \quad dX_t = f(\beta_t, X_t)X_t dt + g(\beta_t, X_t)X_t d\omega_t$$

на временном интервале $[0, T]$ при $T = 1, X_0 = 1$.

Пусть β_t - однородная марковская цепь, $M = \{1, 2\}$ - число состояний марковской цепи, Q - матрица интенсивности переходов, P - матрица переходных вероятностей.

$f(\beta_t, X_t)$ и $g(\beta_t, X_t)$ - непрерывные, ограниченные, дважды дифференцируемые функции, удовлетворяющие условиям (11), (12).

$$(34) \quad X_t = X_0 \exp\left(\left(f(\beta_t, x_t) - \frac{1}{2}g^2(\beta_t, x_t)\right)t + g(\beta_t, x_t)\omega_t\right)$$

есть решение уравнения (33) для $t \in [0, T]$ и данного винеровского процесса $\omega = \{\omega_t, t \geq 0\}$.

Перепишем схему (30) в виде

$$(35) \quad Y_{n+1} = Y_n + a(\beta_n, Y_n)\Delta_n + \sigma(\beta_n, Y_n)I_{(1)} + \\ + \sigma(\beta_n, Y_n)\sigma'(\beta_n, Y_n)I_{(1,1)} + a'(\beta_n, Y_n)\sigma(\beta_n, Y_n)I_{(1,0)} + \\ + \left(a(\beta_n, Y_n)a'(\beta_n, Y_n) + \frac{1}{2}\sigma^2(\beta_n, Y_n)a''(\beta_n, Y_n)\right)I_{(0,0)} + \\ + (a(\beta_n, Y_n)\sigma'(\beta_n, Y_n) + \frac{1}{2}\sigma^2(\beta_n, Y_n)\sigma''(\beta_n, Y_n))I_{(0,1)} + \\ + \sigma(\beta_n, Y_n)\left(\sigma(\beta_n, Y_n)\sigma''(\beta_n, Y_n) + (\sigma'(\beta_n, Y_n))^2\right)I_{(1,1)},$$

где $a(\beta_t, x_t) = f(\beta_t, x_t) x_t$, $\sigma(\beta_t, x_t) = g(\beta_t, x_t) x_t$ для рассматриваемого уравнения (33).

Для численного моделирования интегралов Ито введем в рассмотрение независимые $N(0, \Delta)$ - распределенные случайные величины

$$(36) \quad \xi_1 = \Delta_n^{-\frac{1}{2}}\Delta\omega_n \quad \text{и} \quad \xi_2 = \sqrt{12}\Delta_n^{-\frac{3}{2}}\left(\int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} (\omega(\vartheta) - \omega(\tau))d\vartheta - \frac{1}{2}\Delta_n\Delta\omega_n\right).$$

С помощью этих величин получим:

$$(37) \quad \Delta\omega_n = \Delta_n^{\frac{1}{2}}\xi_1, \quad \int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} (\omega(\vartheta) - \omega(\tau))d\vartheta = \Delta_n^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{2}\xi_1 + \frac{1}{\sqrt{12}}\xi_2\right).$$

Тогда формулы (19) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned}
 I_{(1)} &= \Delta\omega_n; & I_{(1,1)} &= \frac{1}{2}(\Delta\omega_n^2 - \Delta_n); & I_{(0,0)} &= \frac{1}{2}\Delta_n^2; \\
 I_{(1,0)} &= \frac{1}{2}\sqrt{\Delta_n}\Delta_n \cdot \left(\xi_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\xi_2 \right); & I_{(0,1)} &= \Delta\omega_n\Delta_n - I_{(1,0)}; \\
 I_{(1,1,1)} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\Delta\omega_n^2 - \Delta_n\right)\Delta\omega_n; & \text{где } \Delta\omega_n &= \Delta_n^{\frac{1}{2}}\xi_1;
 \end{aligned}$$

Зададим начальные значения $Y_0 = X_0$, $\beta_0 = u_0$ и будем рекурсивно генерировать 100 значений Y_n с равным значением шага Δ согласно (35), где Δ_n - есть длина временного интервала дискретизации $t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_n < \dots < \tau_N = T$ на временном интервале $[t_0, T]$;

Для сравнения будем использовать (34), чтобы определить соответствующие значения точного решения, используя ту же примерную траекторию винеровского процесса ω_t на подынтервалах $\tau_n < t < \tau_{n+1}$, а именно

$$(38) X_{n+1} = X_0 \exp\left(\left(f(\beta_n, X_n) - \frac{1}{2}g^2(\beta_n, X_n)\right)\tau_n + g(\beta_n, X_n)\sum_{i=1}^n \Delta\omega_i\right)$$

Рассмотрим результаты численного решения уравнения (33), выбирая различные варианты задания матрицы переходов P , шага дискретизации Δ , значений функций $f(\beta_t, x_t)$, $g(\beta_t, x_t)$.

Случай 1.

Пусть $f(\beta_b, x_t)$ принимает два значения - $\{\alpha_1, \alpha_2\}$, соответствующие первому и второму состоянию марковской цепи. Положим $\alpha_1 = 1,5$, значение α_2 будет изменяться в ходе эксперимента. $g(\beta_b, x_t)$ принимает два значения - $\{\lambda_1, \lambda_2\}$. Положим $\lambda_1 = 0,1$, значение λ_2 будет изменяться в ходе эксперимента.

Будем полагать, что начальному моменту времени соответствуют значения α_1 и λ_1 .

$$1. P = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}; \quad \alpha_2 = 10\alpha_1; \quad \lambda_2 = 50\lambda_1;$$

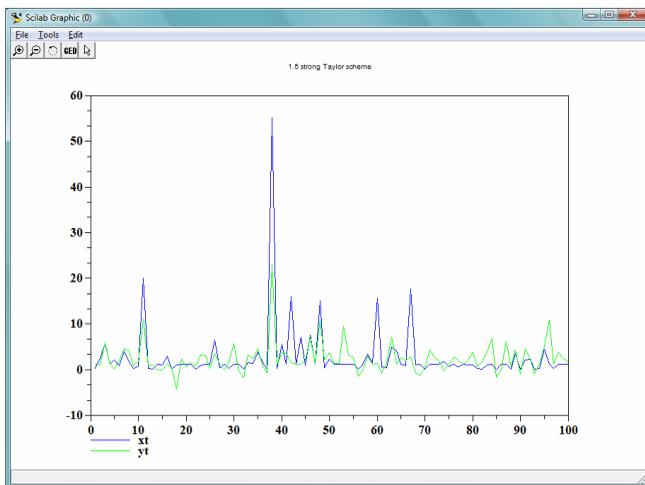


Рис. 1. $\Delta = 0,01$ ($t \in [0;0,1]$)

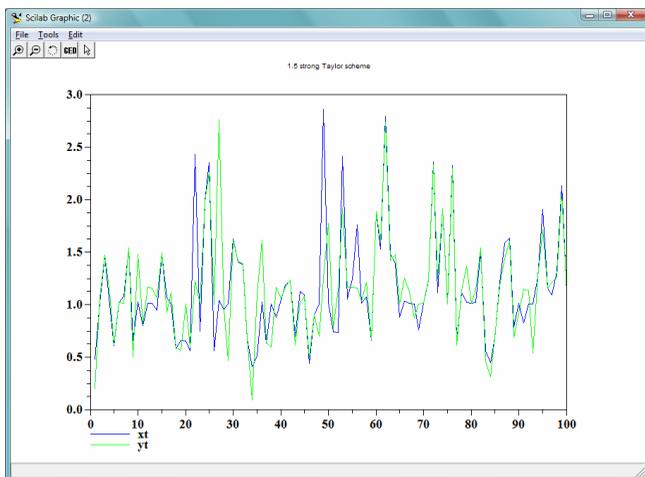


Рис. 2. $\Delta = 0,0001$ ($t \in [0;0,01]$)

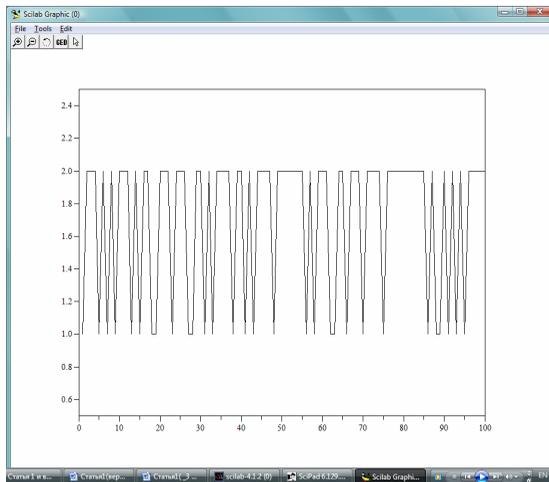


Рис. 3. Марковская цепь

В данном случае значения коэффициентов меняются не очень значительно, поэтому устойчивая аппроксимация решения уравнения наблюдается с размером шага дискретизации $\Delta = 0,01$.

$$2. \quad P = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}; \quad \alpha_2 = 100\alpha_1; \quad \lambda_2 = 200\lambda_1;$$

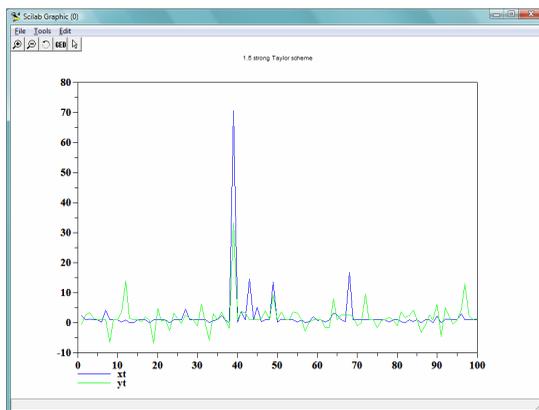


Рис. 4. $\Delta = 0,001$ ($t \in [0;0,01]$)

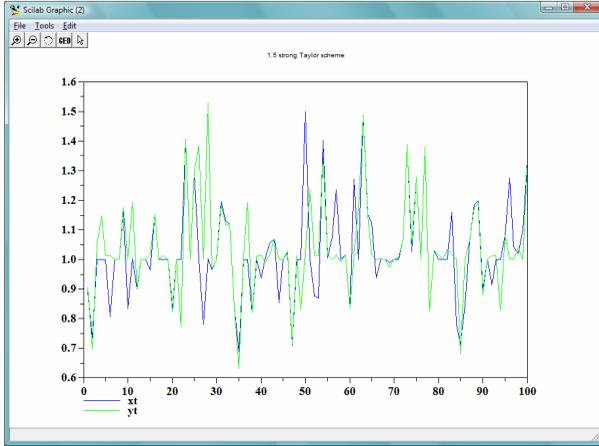


Рис. 5. $\Delta = 0,00001$ ($t \in [0; 0,0001]$)

В данном примере оба коэффициента увеличиваются значительно (в 100 и 200 раз), поэтому выбор меньшего шага дискретизации заметно повышает точность вычислений.

Случай 2.

$f(\beta, x_t)$ принимает два значения - $\{\alpha_1, \alpha_2\}$, соответствующие первому и второму состоянию марковской цепи. $g(\beta, x_t)$ принимает два значения - $\{\lambda_1, \lambda_2\}$. Будем полагать, что начальному моменту времени соответствуют значения α_1 и λ_1 .

$$3. \quad P = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}; \quad \alpha_1 = \cos x + \sin x; \quad \alpha_2 = 1 + \cos x;$$

$$\lambda_1 = 0,5x; \quad \lambda_2 = 0,2x;$$

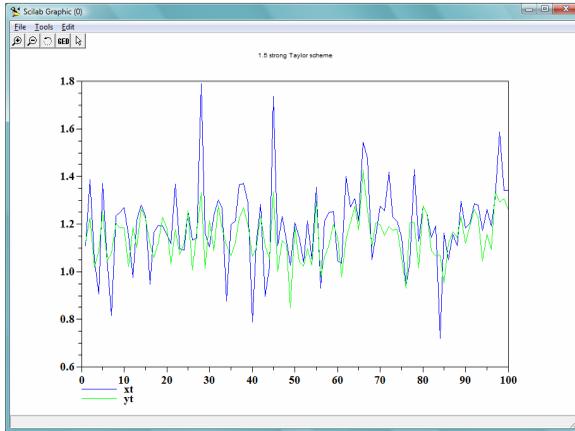


Рис. 6. $\Delta = 0,01$ ($t \in [0;0,1]$)

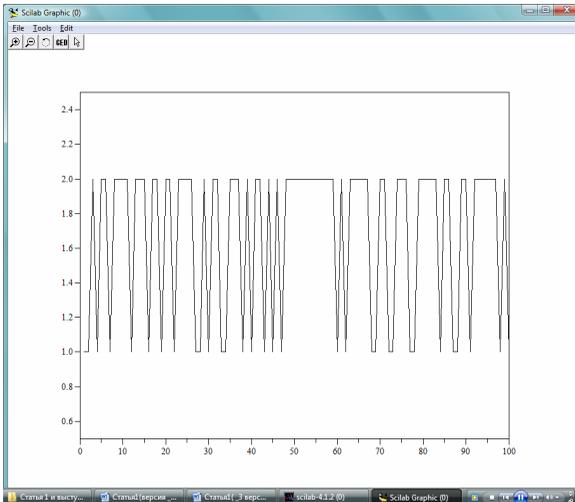


Рис. 7. Марковская цепь

$$4. \quad P = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix};$$

$$\alpha_1 = \cos x + \sin x; \quad \alpha_2 = 1 + \cos x;$$

$$\lambda_1 = 0,5x; \quad \lambda_2 = 2x;$$

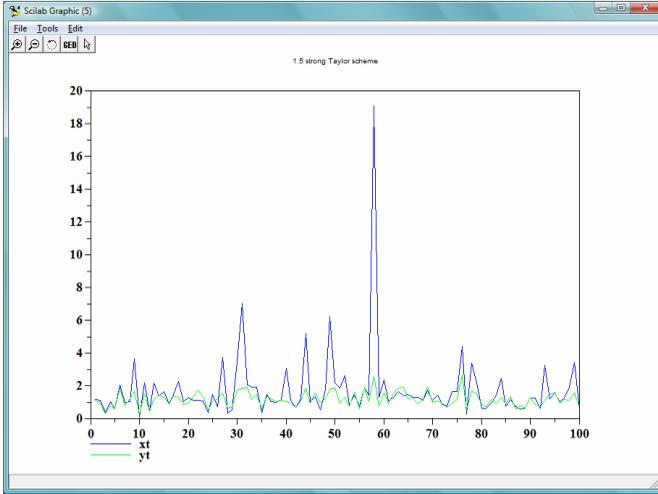


Рис. 8. $\Delta = 0,01$ ($t \in [0;0,1]$)

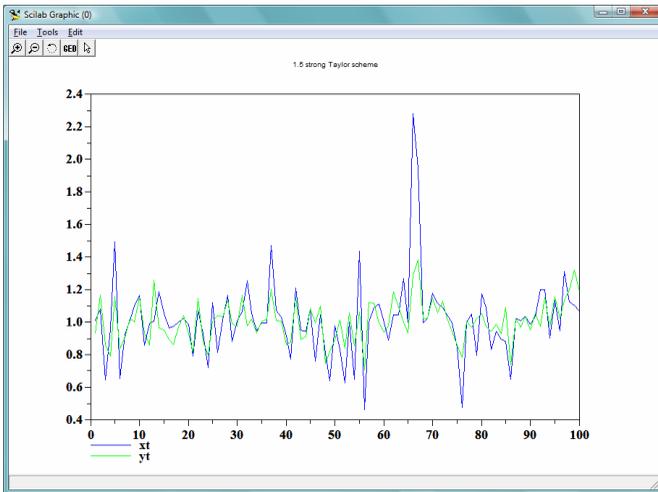


Рис. 9. $\Delta = 0,001$ ($t \in [0;0,1]$)

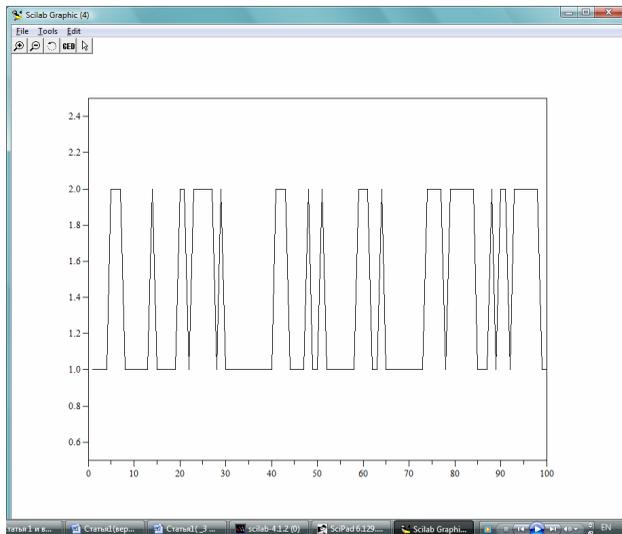


Рис. 10. Марковская цепь

Варианты 3, 4 численного моделирования отличаются матрицей переходов P и значением λ_2 .

Случай 3.

$$5. \quad Q = \begin{pmatrix} -50 \cos^3 x & 50 \cos^3 x \\ 10 \sin x & -10 \sin x \end{pmatrix}; \quad P = I + Q \Delta;$$

$$\alpha_1 = 2 + \sin x;$$

$$\alpha_2 = 1 + \sin x \cos x;$$

$$\lambda_1 = 0,5;$$

$$\lambda_2 = 0,1;$$

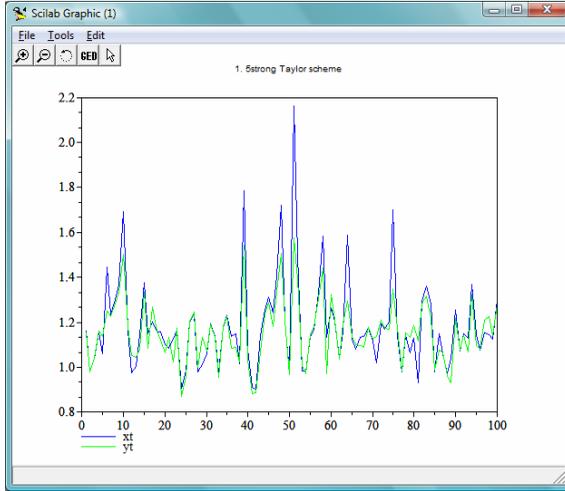


Рис. 11. $\Delta = 0,01$ ($t \in [0;0,1]$)

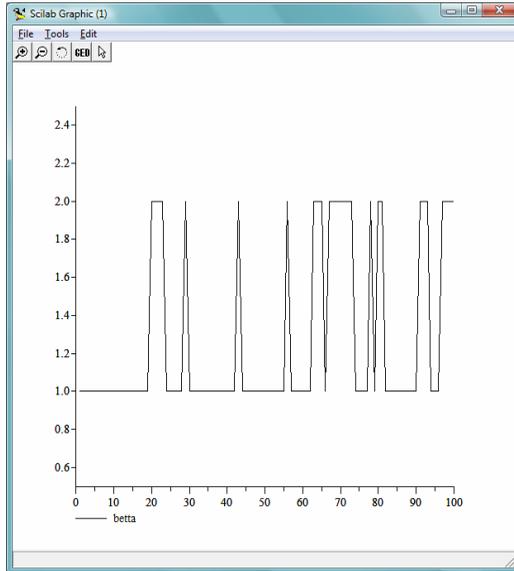


Рис. 12. Марковская цепь

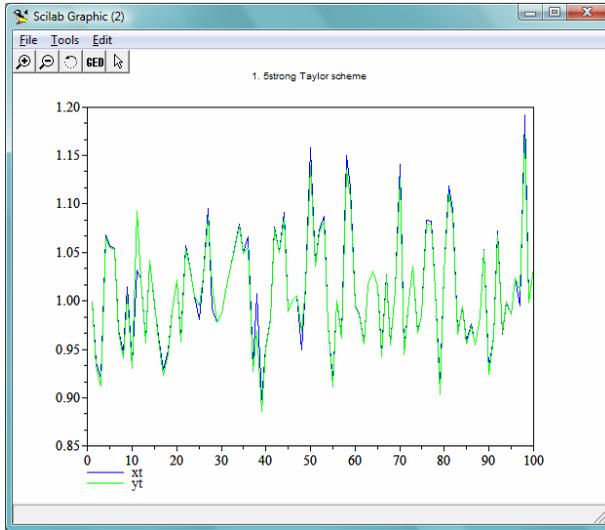


Рис. 13. $\Delta = 0,001$ ($t \in [0; 101]$)

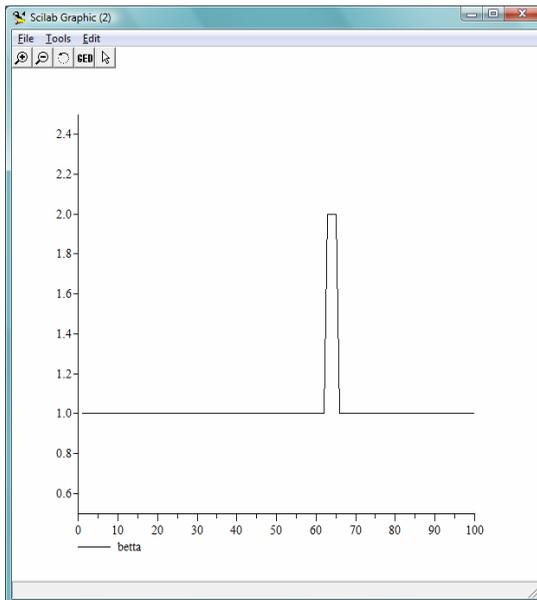


Рис. 14. Марковская цепь

$$6. \quad Q = \begin{pmatrix} -5 \cos^2 x & 5 \cos^2 x \\ 10 \cos^2 x & -10 \cos^2 x \end{pmatrix}; \quad P = I + Q \Delta;$$

$$\alpha_1 = 20 + \cos^2 x; \quad \alpha_2 = \sin x + 5 \cos 2x;$$

$$\lambda_1 = 0,2; \quad \lambda_2 = 3;$$

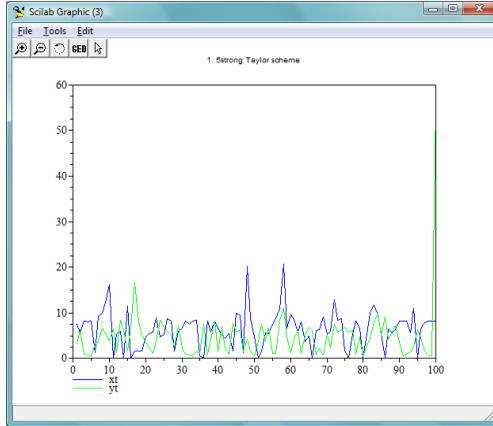


Рис. 15. $\Delta = 0,001$ ($t \in [0;0,01]$)

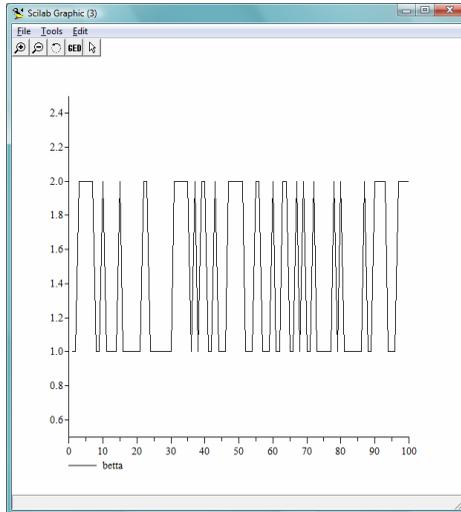


Рис. 16. Марковская цепь

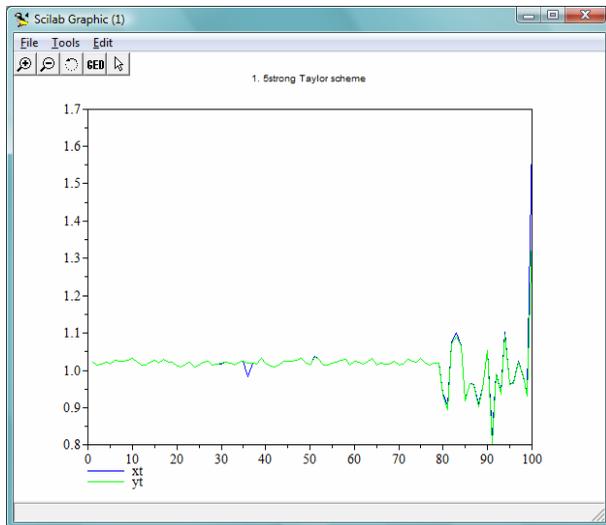


Рис. 17. $\Delta = 0,0001$ ($t \in [0;0,001]$)

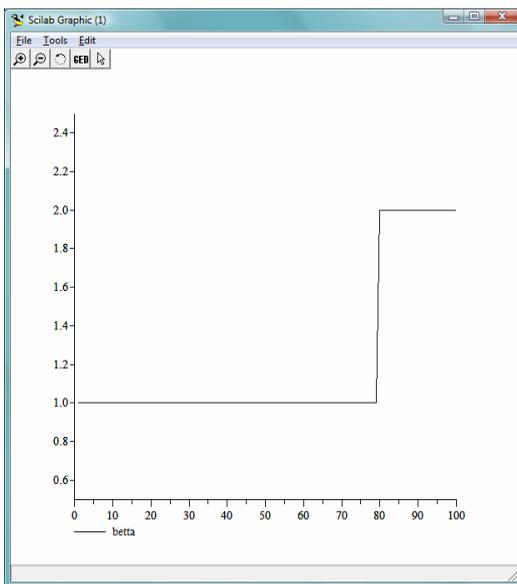


Рис. 18. Марковская цепь

Эксперимент показывает, что в случае состояние - зависимой модели переключения предложенная численная схема также позволяет найти приближенное решение уравнения (33).

$$\alpha_1 = 20 + \cos^2 x; \quad \alpha_2 = \sin x + 5 \cos 2x;$$

$$\lambda_1 = 0,2; \quad \lambda_2 = 0,3;$$

Этот вариант данных отличается от предыдущего значением λ_2 .

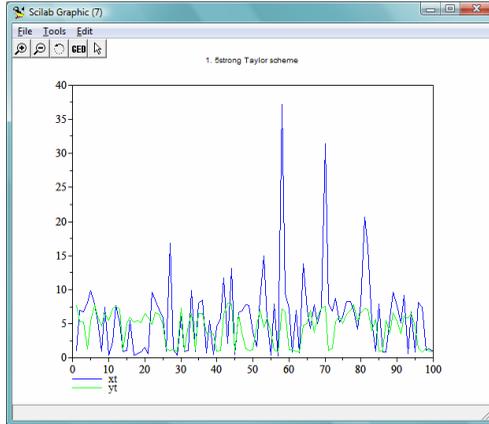


Рис. 19. $\Delta = 0,01$ ($t \in [0;0,1]$)

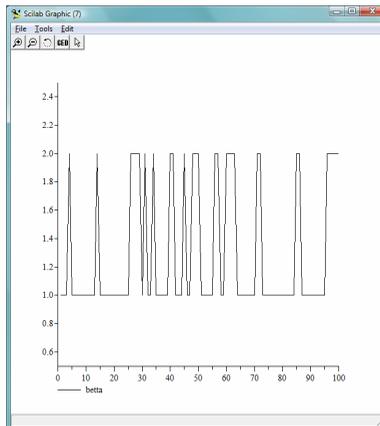


Рис. 20. Марковская цепь

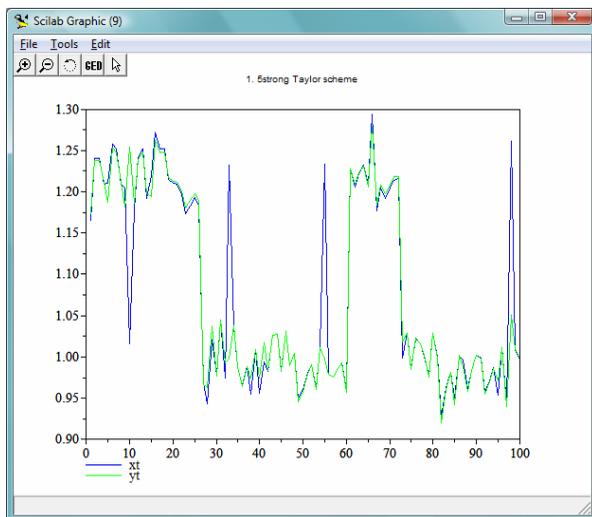


Рис. 21. $\Delta = 0,001$ ($t \in [0;0,01]$)

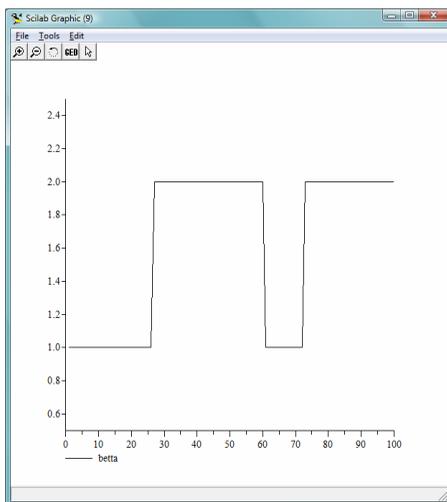


Рис. 22. Марковская цепь

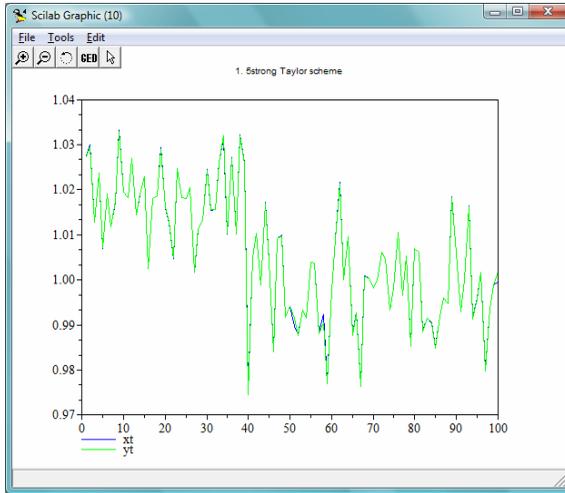


Рис. 23. $\Delta = 0,0001$ ($t \in [0;0,001]$)

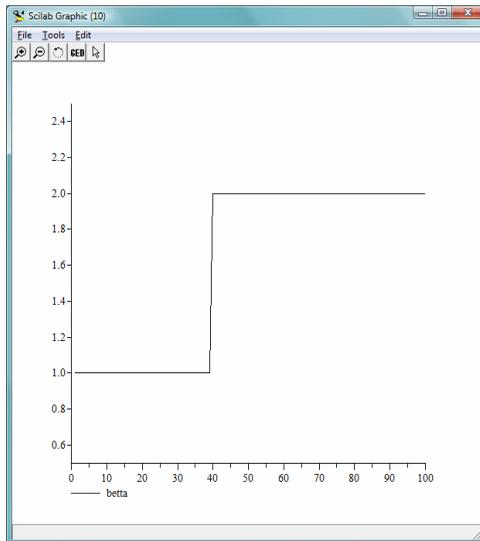


Рис. 24. Марковская цепь

$$7. P = \begin{pmatrix} -5 \cos^2 x & 5 \cos^2 x \\ 10 \cos^2 x & -10 \cos^2 x \end{pmatrix};$$

$$\alpha_1 = 3 + \cos x; \quad \alpha_2 = 20 - \sin x;$$

$$\lambda_1 = 0,5; \quad \lambda_2 = 0,1;$$

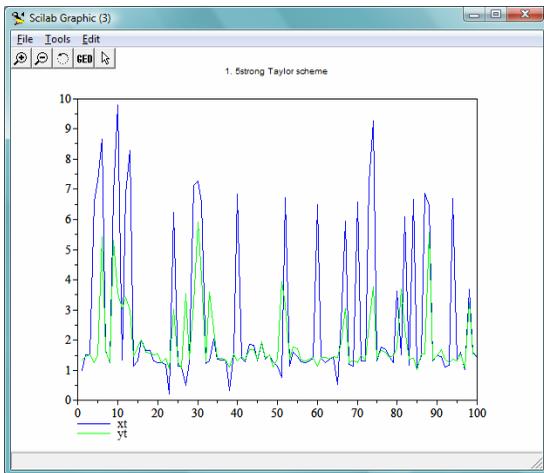


Рис. 25. $\Delta = 0,01$ ($t \in [0;0,1]$)

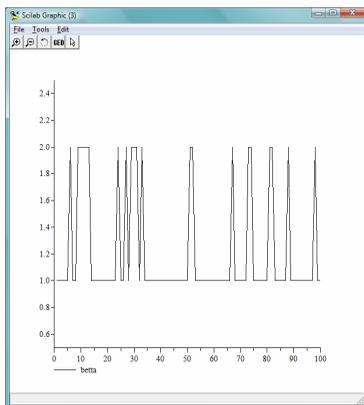


Рис. 26. Марковская цепь

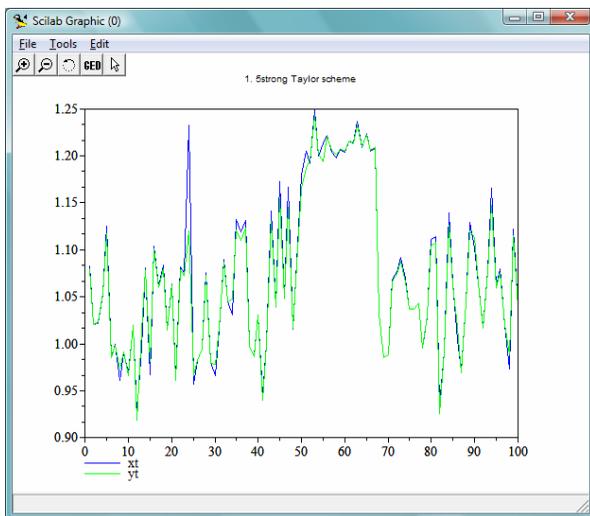


Рис. 27. $\Delta = 0,001$ ($t \in [0;0,01]$)

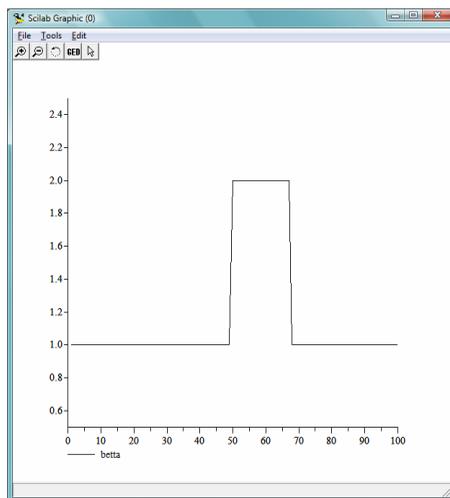


Рис. 28. Марковская цепь

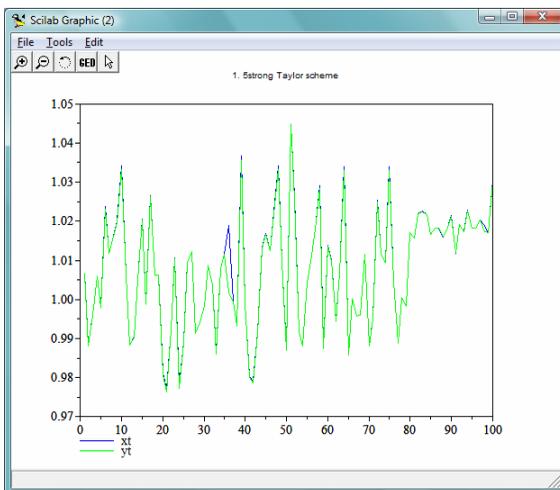


Рис. 29. $\Delta = 0,0001$ ($t \in [0;0,001]$)

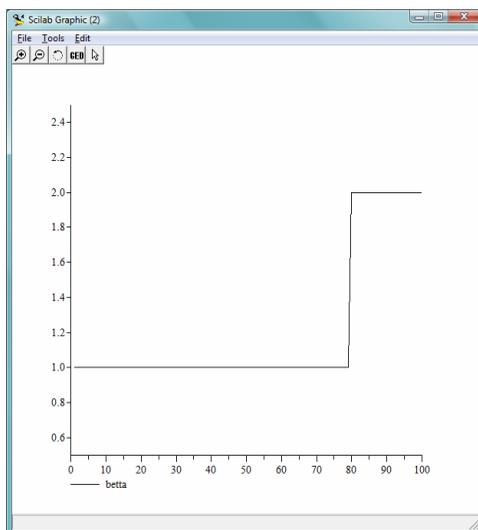


Рис. 30. Марковская цепь

5. Заключение

Теорему Платена можно обобщить на рассматриваемый случай диффузионной системы с марковскими переключениями, что подтверждает сходимость схем, основанных на стохастических аналогах формулы Тейлора к решению стохастических дифференциальных уравнений с марковскими переключениями при наложении определенных условий.

Возникающие вопросы устойчивости схем можно решить, учитывая, что во все слагаемые в той или иной степени входит множителем h . При достаточно малом h устойчивость схем будет обеспечена. Эксперименты показали, что для многих случаев подходящим является шаг дискретизации $h = 0,01$, но для случаев сильного колебания значений функций $a(\beta_t, X_t)$, $\sigma(\beta_t, X_t)$ в уравнении (9) устойчивость будет обеспечивать выбор более малого шага $h = 0,001$, $h = 0,0001$.

В случае состояние - зависимой модели переключений остается открытым вопрос – что считать точным решением и как определять меру отклонения от получаемых приближенных значений.

Также необходимо отметить, что для практических применений важнее оказывается не поиск решения, как реализации единственной траектории, хотя бы и с заданной точностью, а скорее нахождение значений функционалов от случайных траекторий, таких как математическое ожидание интегральных функционалов и/или вероятностей пребывания в заданном множестве. Нахождение этих величин с заданной точностью методом Монте-Карло требует предварительной оценки числа итераций, которое также должно быть связано с точностью аппроксимации.

Литература

1. БОРОВКОВ А.А. *Теория вероятностей: Учеб. пособие для вузов. - 2-е изд, перераб. и доп. - М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. – 432 с.*
2. КУЗНЕЦОВ Д.Ф. *Стохастические дифференциальные уравнения: теория и практика численного решения. - Спб.: Издательство Политехнического университета, 2007. – 800 с.*
3. КУЗНЕЦОВ Д.Ф. *Стохастические дифференциальные уравнения: теория и практика численного решения // Дифференциальные уравнения и процессы управления. -2008. - № 1.*
4. МИЛЬШТЕЙН Г.Н. *Численное интегрирование стохастических дифференциальных уравнений. - Свердловск: Изд-во Уральского университета, 1988. – 224 с.*
5. МИЛЛЕР Б.М., ПАНКОВ А.Р. *Теория случайных процессов в примерах и задачах. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 320 с.*
6. ОКЕНДАЛЬ Б. *Стохастические дифференциальные уравнения. Введение в теорию и приложения: Пер. с англ. – М.: Мир, ООО «Издательство АСТ», 2003. – 408 с.*
7. KLOEDEN P. E., PLATEN E., SCHURZ H. *Numerical Solution of SDE Through Computer Experiments. – Berlin: Springer – Verlag, 1994.*
8. MAO X. *Stability of stochastic differential equations with Markovian switching // Stoch. Proce. Appl. – 1999. – Vol. 79. – 45-67.*
9. YIN G., MAO X., YUAN C., AND CAO D. *Approximation methods for hybrid diffusion systems with state-dependent switching processes: numerical algorithms and existence and uniqueness of solutions// SIAM Journal on Mathematical Analysis – 2010. – Vol. 41, №6. - p. 2335-2352.*
10. YIN G., ZHU C. *Stochastic modeling and applied probability. Hybrid switching diffusions. Properties and applications. // Springer Science + Business Media, LLC 2010.*
11. YUAN C., LYGEROS J. *Stochastic markovian switching hybrid processes // Project IST-2001-38314, COLUMBUS. Design of Embedded Controllers for Safety Critical Systems, June 17, 2004.*

**ALGORITHMS FOR NUMERICAL SOLUTION OF
STOCHASTIC DIFFERENTIAL SYSTEMS WITH
SWITCHING DIFFUSION**

Nadezda Chernykh, post-graduate student, Arzamas Polytechnic Institute of R.E. Alekseev, Nizhny Novgorod State Technical University, 19, Kalinina Street, Arzamas, 607227, Russia, (nadezdacher@mail.ru).

Pavel Pakshin, Dr.Sci., professor, Arzamas Polytechnic Institute of R.E. Alekseev, Nizhny Novgorod State Technical University, 19, Kalinina Street, Arzamas, 607227, Russia, (pakshinpv@gmail.ru)

Abstract: Mathematical models are considered of hybrid systems in the form of stochastic differential equations with Markovian switching of the diffusion component. An extension of Taylor schemes for numerical approximation of their solutions is proposed. Modeling results in SCILAB are presented to demonstrate efficiency of the obtained algorithms.

Keywords: stochastic systems, diffusion process, Markovian switching, Taylor schemes, convergence, stability.

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии А. В. Добровиловым*