

**Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН**

УПРАВЛЕНИЕ БОЛЬШИМИ СИСТЕМАМИ

Выпуск 36

Март 2012

**СБОРНИК
ТРУДОВ**

ISSN 1819-2467

Регистрационный номер Эл №ФС77-44158 от 09 марта 2011 г.

Москва – 2012

www.mtas.ru

**ИНТЕРНЕТ-сайт теории управления
организационными системами**

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ ОРГАНИЗАЦИОННЫМИ СИСТЕМАМИ

ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ УПРАВЛЕНИЯ ИМ. В.А. ТРАПЕЗНИКОВА РАН



Целью сайта является предоставление специалистам по теории и практике управления организационными системами (ученым, преподавателям, аспирантам, студентам, а также реальным управленцам) доступа к ресурсам, отражающим современное состояние теории и возможности обмена идеями и результатами.

На сайте имеются разделы:

Теория – с обзором теории управления организационными системами, глоссарием, информацией для аспирантов;

Практика – с обзором результатов внедрения механизмов управления в реальных организациях;

Библиография – около 2500 публикаций по теории управления, снабжена классификатором и аннотациями;

Электронная библиотека – около 700 полнотекстовых монографий, статей и учебных пособий;

а также многое другое.

На сайте работает **форум**, на котором можно обсудить вопросы, относящиеся к математике, экономике, управлению организациями, узнать новости теории управления и ознакомиться с планируемыми конференциями и семинарами.

ubs.mtas.ru

Интернет-сайт электронного периодического
научного издания «Управление большими
системами: сборник трудов»

УПРАВЛЕНИЕ БОЛЬШИМИ СИСТЕМАМИ

ЭЛЕКТРОННЫЙ СБОРНИК НАУЧНЫХ ТРУДОВ
ИНСТИТУТА ПРОБЛЕМ УПРАВЛЕНИЯ ИМ. В.А. ТРАПЕЗНИКОВА РАН

С 1998 года Институт проблем управления РАН выпускает периодический сборник трудов ученых, занимающихся разработкой и исследованием математических моделей управления большими (социально-экономическими, организационными, организационно-техническими и др.) системами. Все статьи, публикуемые в сборнике, проходят рецензирование ведущими специалистами по теории управления.

С 2006 года сборник "Управление большими системами" вместе с ведущим журналом ИПУ РАН "Проблемы управления" – включены в Российский индекс научного цитирования (РИНЦ).

С июля 2007 года Сборник входит в список ВАК (перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертации на соискание ученой степени доктора и кандидата наук):

* по управлению, вычислительной технике и информатике (для докторов наук);

* по электронике, измерительной технике, радиотехнике и связи; по энергетике (для кандидатов наук).

**Уважаемые коллеги! Приглашаем Вас опубликовать
Вашу статью в очередном выпуске сборника
"Управление большими системами"!**

Периодичность сборника - 4 раза в год. Время выхода прошедшей рецензирование статьи - 3-4 месяца. Плата с авторов за публикацию рукописей не взимается.

cmm.ipu.ru

3-я Российская конференция с международным участием «Технические и программные средства систем управления, контроля и измерения» (УКИ-12)

Уважаемые дамы и господа, приглашаем Вас принять участие в этой конференции, она состоится с 16 по 19 апреля 2012 года в Институте проблем управления РАН, г. Москва.

Тематика конференции

- Теория, методы исследования и проектирования, опыт применения технических средств (от датчиков до исполнительных механизмов), основанных на различных физических и схематических принципах.
- Теория, алгоритмы и программное обеспечение систем УКИ.
- Методы компьютерного и физического моделирования технических и программных средств и в целом систем автоматизации.
- более, смотрите на сайте конференции.

Принимаются предложения по пленарным докладам, по организации специальных заседаний конференции и тематике дискуссий за круглым столом.

Даты конференции

- 28 ноября 2011** - завершение приема заявок на участие и кратких текстов докладов
- 20 января 2012** - результаты рассмотрения докладов; последний срок подачи пленарных докладов.
- 10 марта 2012** - окончание приема финальных версий принятых докладов и внесения оргвзноса.
- 16-19 апреля 2012** - проведение конференции.

В качестве заявки на участие достаточно прислать по электронной почте **cmm-conf@mail.ru** краткую версию текста не менее 4 страниц.

Электронный адрес конференции: **cmm-conf@mail.ru**

Официальный сайт конференции: **<http://cmm.ipu.ru>**

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
*Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова*

**УПРАВЛЕНИЕ
БОЛЬШИМИ
СИСТЕМАМИ**

СБОРНИК ТРУДОВ

Выпуск 36

Москва – 2012

КООРДИНАЦИОННЫЙ СОВЕТ

Академики РАН: Васильев С.Н., Емельянов С.В., Коровин С.К., Куржанский А.Б., Федосов Е.А., Черноусько Ф.Л.; члены-корреспонденты РАН: Желтов С.Ю., Каляев И.А., Пархоменко П.П., Попков Ю.С.; д-ра техн. наук: Бутковский А.Г., Дорофеев А.А., Кузнецов О.П., Кульба В.В., Кротов В.Ф., Лотоцкий В.А., Павлов Б.В., Поляк Б.Т., Рутковский В.Ю.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор: член-корр. РАН Новиков Д.А. **Отв. секретарь:** к.т.н. Губко М.В.
Д-ра техн. наук: проф. Алескерев Ф.Т. (ГУ ВШЭ), проф. Артамонов Е.И. (ИПУ РАН), д-р экон. наук, проф. Архипова М.Ю. (ИПИ РАН), д-ра техн. наук: проф. Афанасьев В.Н. (МИЭМ), проф. Бахтадзе Н.Н. (ИПУ РАН), проф. Бурков В.Н. (ИПУ РАН), проф. Вишневский В.М. (ИППИ РАН), д-р экон. наук, проф. Голиченко О.Г. (ЦЭМИ РАН), д-р физ.-мат. наук, проф. Добровидов А.В. (ИПУ РАН), д-ра техн. наук: проф. Заложнев А.Ю. (ИПУ РАН), проф. Ириков В.А. (МФТИ), проф. Калянов Г.Н. (ИПУ РАН), проф. Касаткин С.И. (ИПУ РАН), проф. Каравай М.Ф. (ИПУ РАН), канд. техн. наук Квинто Я.И. (ИПУ РАН), д-р экон. наук, проф. Клочков В.В. (ИПУ РАН), д-ра техн. наук: проф. Кононенко А.Ф. (ВЦ РАН), канд. техн. наук Куливец С.Г. (ИПУ РАН), проф. Курдюков А.П. (ИПУ РАН), проф. Лебедев В.Г. (ИПУ РАН), к-т техн. наук, доцент Лебедев В.Н. (ИПУ РАН), д-р экон. наук, проф. Ловчиновский Э.В. (ИПУ РАН), д-р техн. наук, проф. Мандель А.С. (ИПУ РАН), д-р экон. наук, проф. Нижегородцев Р.М. (ИПУ РАН), д-ра техн. наук: проф. Новосельцев В.Н. (ИПУ РАН), проф. Орлов А.И. (МВТУ), д-р физ.-мат. наук, проф. Рапопорт Л.Б. (ИПУ РАН), д-р техн. наук, проф. Рыков А.С. (МИСИС), д-р экон. наук, проф. Секерин В.Д. (ИПУ РАН), д-ра техн. наук: проф. Сидельников Ю.В. (МАИ), проф. Совлуков А.С. (ИПУ РАН), д-р экон. наук, проф. Сухарев О.С. (Ин-т экономики РАН), д-ра техн. наук: проф. Уткин В.А. (ИПУ РАН), проф. Хоботов Е.Н. (МВТУ), д-ра физ.-мат. наук: доцент Чеботарев П.Ю. (ИПУ РАН), проф. Чхартишвили А.Г. (ИПУ РАН), проф. Щербаков П.С. (ИПУ РАН).

РЕГИОНАЛЬНЫЕ РЕДАКЦИОННЫЕ СОВЕТЫ

Волгоград – д-ра физ.-мат. наук: проф. Воронин А.А., проф. Лосев А.Г. (ВолГУ); **Воронеж** – д-р техн. наук, проф. Баркалов С.А., д-р физ.-мат. наук, проф. Головинский П.А. (ВГАСУ), д-р техн. наук, проф. Подвальный С.Л. (ВГТУ); **Ижевск** – д-р физ.-мат. наук, проф. Непейвода Н.Н., к-т физ.-мат. наук, проф. Родионов В.И. (УдмГУ); **Иркутск** – д-ра физ.-мат. наук: проф. Бычков И.В., проф. Лакеев А.В. (ИДСТУ СО РАН); **Казань** – д-р физ.-мат. наук, проф. Маликов А.И., д-р техн. наук, проф. Сиразетдинов Р.Т. (КГТУ-КАИ); **Липецк** – д-ра техн. наук: проф. Кузнецов Л.А., проф. Погодаев А.К. (ЛГТУ); **Самара** – д-ра экон. наук: проф. Богатырев В.Д., проф. Гераскин М.И., д-р техн. наук, проф. Засканов В.Г. (СГАУ); **Санкт-Петербург** – д-ра физ.-мат. наук: проф. Петросян Л.А. (СПбГУ), проф. Фрадков А.Л. (ИПМ РАН); **Старый Оскол** – д-р техн. наук, проф. Еременко Ю.И. (СТИ); **Тверь** – д-ра техн. наук: проф. Кузнецов В.Н., проф. Палюх Б.В. (ТГТУ).

Адрес редакции: 117997, г. Москва, ул. Профсоюзная, д. 65.

Адрес в Интернет: ubs.mtas.ru.

Номер гос. регистрации электронного научного издания (ЭНИ): 0421200023.

© ИПУ РАН, 2012

СОДЕРЖАНИЕ

Системный анализ

Моросанова Н. А., Соловьев С. Ю. <i>Формальные свойства схемы Шортлиффа</i>	5
Поздьяев В. В. <i>Атомная оптимизация, часть 1: трансформация пространства поиска и одномерные задачи</i>	39

Математическая теория управления

Агаев Р. П. <i>Об области сходимости дифференциальной модели достижения консенсуса</i>	81
Кондрашова Е. В. <i>Оптимизация функционала доходов в управляемой системе массового обслуживания</i>	93
Черных Н. В., Пакшин П. В. <i>Алгоритмы численного решения стохастических дифференциальных систем с переключаемой диффузией</i>	106

Управление в социально-экономических системах

Алгазин Г. И. <i>Централизация и децентрализация в базовых игровых моделях организационных систем</i>	144
Горошников Т. А. <i>Оптимизационная модель и алгоритмы поиска оптимального решения для анализа эффективности удаления неприбыльных предприятий из компании</i>	173
Коргин Н. А. <i>Представление механизма последовательного распределения ресурсов как неманипулируемого механизма многокритериальной активной экспертизы</i>	186

**Управление техническими системами
и технологическими процессами**

Романенко В. А.

Оптимизация управления технологическими процессами узлового аэропорта как системы массового обслуживания с нестационарными потоками и частичной взаимопомощью каналов 209

Салихов З. Г., Стрижко Л. С., Новаковская А. О.

Нейросетевой подход к разработке прогнозирующих моделей в системах управления процессами биосорбции серебра..... 248

Управление подвижными объектами и навигация

Туфанов И. Е. , Щербатюк А. Ф.

Разработка алгоритмов группового поведения АНПА в задаче обследования локальных неоднородностей морской среды..... 262

Технические и программные средства управления

Асратян Р. Э., Лебедев В. Н.

Организация защищенного http-взаимодействия в мульти-сетевой среде..... 285

Печников А. А., Чернобровкин Д. И.

Адаптивный краулер для поиска и сбора внешних гиперссылок .. 301

УДК 519.715
ББК 35.41

ФОРМАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА СХЕМЫ ШОРТЛИФФА

Моросанова Н. А.¹, Соловьев С. Ю.²

(факультет ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва)

Рассматриваются изоморфные отображения схемы Шортлиффа, способные существенно изменять составляющие эту схему функции вычисления коэффициентов уверенности. Исследуются вопросы конструирования изоморфизмов, порождающих схемы правдоподобных рассуждений с заданными свойствами.

Ключевые слова: продукционная система, схема Шортлиффа, комбинирование коэффициентов уверенности.

Введение

Когда-то инженерно-технические работники зачитывались книгой Д. Пойа [8] «Математика и правдоподобные рассуждения». Книга буквально подталкивала к конструированию формальных структур неформальных рассуждений, коих и было придумано весьма немало. Те времена миновали и оставили нам в пользование несколько вполне утвердившихся методов.

В наступившую эпоху инноваций длинная история применений стала едва ли не главным аргументом при выборе схем рассуждений и иных правдоподобных моделей и методов. Именно поэтому любая эвристическая модель, задействованная в десятках проектов, достойна стать предметом отдельного исследования.

В работе рассматривается весьма известная схема правдоподобных рассуждений Э. Шортлиффа³, именуемая также мо-

¹ Наталья Александровна Моросанова, аспирант (n-morosanova@gmail.com).

² Сергей Юрьевич Соловьев, доктор физико-математических наук, профессор (soloviev@glossary.ru).

³ См. разделы 1 и 2.

делью Шортлиффа–Бучанана и стэндфордской теорией фактора уверенности [7]. В качестве инструмента исследования выбраны изоморфные отображения⁴, позволяющие строить аналоги схемы Шортлиффа.

С функциональной точки зрения аналоги способны полноценно заменить в экспертной системе оригинал. С точки зрения инженерии знаний внутреннее устройство аналогов⁵ и сам факт их существования открывают новые возможности и порождают новые задачи. В части возможностей вскрывается, например, наличие «родственных связей» с другими областями информатики⁶, позволяющие привлечь для целей извлечения знаний наработанные там методы. Кроме того, располагая рядом аналогов, инженер по знаниям может буквально «по-гоголевски» реализовать уникальную схему правдоподобных рассуждений: ... губы аналога-1 да приставить к носу аналога-2 ... и т.д. А главной из вновь приобретенных задач является задача порождения аналога с заданными характеристиками⁷. Комплекс задач формального исследования схем правдоподобного вывода, изоморфных схеме Шортлиффа, и составляют основное содержание последующего изложения.

1. Схема Шортлиффа

Разработанный под руководством Шортлиффа обратный вывод экспертной системы *MYSIN* [17]

- вычисляет, используя продукционные правила, суждения о гипотезах на основании суждений о фактах;
- поддерживает «интеллектуальный» диалог экспертной системы с пользователем с целью получения оценочных суждений о фактах;
- существенно использует модель вычисления так называемых коэффициентов уверенности.

⁴ См. разделы 3 и 4.

⁵ См. разделы 5, 6, 10, 11 и 12.

⁶ См. комментарий к свойству 1 из раздела 6.

⁷ См. разделы 7, 8 и 9.

Коэффициенты уверенности – *certainty factors (CF)* – в русскоязычной литературе называются также коэффициентами доверия [12], коэффициентами определенности [9] и факторами уверенности [7]. Различают

- коэффициенты уверенности правил⁸ – числа из $(0, +1]$ и
- коэффициенты уверенности фактов и гипотез – числа из $[-1, +1]$.

Не отвлекаясь на несущественные для настоящего изложения детали, будем полагать, что продукционное правило R имеет вид:

if Антецедент *then* Гипотеза *with CF*, где:

- ▷ *if, then, with* – ключевые слова-разделители;
- ▷ Антецедент(R) – формула, построенная из фактов или гипотез с помощью операций конъюнкции, дизъюнкции и отрицания;
- ▷ конструкция «Гипотеза *with CF*» – консеквент правила R , и Гипотеза(R) – одна из гипотез продукционной системы, а $CF(R)$ – коэффициент уверенности правила.

Коэффициенты уверенности приписаны всем фактам и гипотезам, которыми оперирует экспертная система в ходе логического вывода. На множестве $[-1, +1]$ выделяют пять особых значений (пять особых точек):

- нейтральное значение 0, не позволяющее сформулировать заключение о достоверности гипотезы;
- значения $-0,2$ и $+0,2$, которые используются как пороги принятия решений об активизации продукционных правил;
- значения достоверного знания -1 и $+1$, соответствующие абсолютно опровергнутым и абсолютно установленным гипотезам/фактам.

При инициализации логического вывода все коэффициенты уверенности устанавливаются нулевыми. В процессе вывода коэффициенты уверенности

- влияют на выбор применяемых продукционных правил и
- могут изменяться
- либо пользователем,

⁸ Коэффициенты уверенности продукционных правил иногда именуется коэффициентами ослабления (*attenuation factors*) [12].

– либо в результате применения продукционных правил.

Схема Шортлиффа, как компонент обратного вывода на продукциях, представляет собой набор функций и отношений над числами из $[-1, +1]$. В ходе логического вывода из этих функций и отношений по определенным правилам конструируется многоуровневая сеть, вычисляющая коэффициенты уверенности гипотез на основании полученных от пользователя коэффициентов уверенности фактов.

В схеме Шортлиффа набор операций и отношений над коэффициентами уверенности – обозначим их a и b – фиксирован:

$$(1) \quad \min(a, b), \quad \max(a, b);$$

$$(2) \quad \text{not}(a) \stackrel{\text{def}}{=} -a;$$

$$(3) \quad \text{rge}(a) \stackrel{\text{def}}{=} (+0,2 \leq a);$$

$$\text{rle}(a) \stackrel{\text{def}}{=} (a < -0,2);$$

$$(4) \quad \text{tms}(a, b) \stackrel{\text{def}}{=} a \cdot b;$$

$$(5) \quad \text{cmb}(a, b) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} a + b - a \cdot b & \text{для } 0 \leq a, 0 \leq b, \\ \frac{a + b}{1 - \min(|a|, |b|)} & \text{для } a \cdot b < 0, \\ a + b + a \cdot b & \text{для } a < 0, b < 0. \end{cases}$$

Формулы (1) и (2) обобщают операции конъюнкции, дизъюнкции и отрицания на отрезок $[-1, +1]$. Отношения (3) используются для управления вычислительным процессом.

Функция ослабления (4) корректирует переход от коэффициента уверенности антецедента к коэффициенту уверенности гипотезы. Вообще говоря, в схеме Шортлиффа второй аргумент b функции ослабления есть положительное число – коэффициент уверенности некоторого продукционного правила. Однако здесь рассматривается общий случай умножения: $-1 \leq a, b \leq +1$.

Функция комбинирования (5) вычисляет сводный коэффициент уверенности гипотезы, оцененной двумя разными способами.

Пример 1. Пусть

- ▷ гипотеза H и факты E_1 и E_2 имеют коэффициенты уверенности 0,7, 0,3 и 0,5 соответственно;
- ▷ машина вывода MYCIN-подобной системы рассматривает правило *if E_1 and E_2 then H with 0,4.*

Схема исполнения этого правила представлена на рис. 1. •

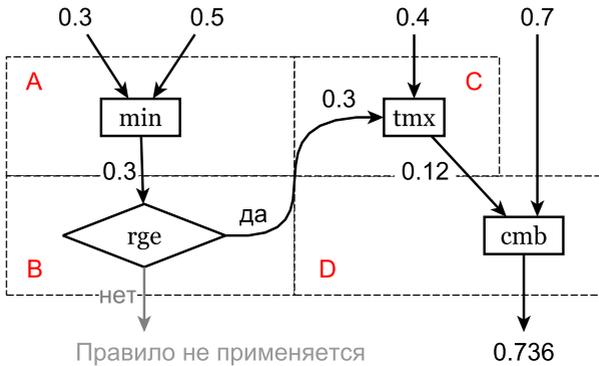


Рис. 1. Обработка правила *if E_1 and E_2 then H with 0,4*

По смыслу вычислений в схеме выделяются четыре зоны.

В зоне *A* вычисляется достоверность антецедента правила.

В зоне *B* принимается решение об активизации правила.

В зоне *C* обрабатывается консеквент правила.

В зоне *D* вычисляется комбинированная оценка гипотезы H на основании вновь полученной и имевшейся ранее оценок.

Отметим три обстоятельства.

Во-первых, в конкретных условиях примера 1 продукционное правило породило вычислительную сеть, построенную из операций *min*, *rge*, *tms* и *cmb*.

Во-вторых, в результате срабатывания этой сети коэффициент уверенности гипотезы H получает новое значение (0,736).

В-третьих, вычислительная сеть для отдельного продукционного правила является фрагментом общей вычислительной сети, конструируемой в ходе логического вывода.

При разработке экспертной системы, решившись на применение схемы правдоподобных рассуждений, инженер по знаниям должен зареэ подготовить для эксперта объяснение формул (1)–(5). Очевидно, что эксперту-нематематику некоторые формулы будут понятны, а другие вызовут непонимание, грозящее утратой интереса к разработке и последующим крахом всей разработки.

2. Функция комбинирования Шортлиффа

Договоримся в дальнейшем изложении использовать следующие специальные обозначения:

▷ $\hat{x} \stackrel{def}{=} (1/x);$

▷ $[a, b]^{(2)} \stackrel{def}{=} [a, b]^2 \setminus \{(a, b), (b, a)\};$

▷ метка \boxed{FP} эквивалентна фразе «нетрудно доказать» (фр. *facile à prouver*).

Кроме того, договоримся называть функции двух переменных

▷ моновариантными, если они задаются одной формулой;

▷ многовариантными, если они задаются разными формулами на разных участках области определения.

Функция $cmb(a, b)$ комбинирования коэффициентов уверенности одной и той же гипотезы

– играет в схеме Шортлиффа главную роль,

– является многовариантной,

– определена на множестве $[-1, +1]^{(2)}$.

Точки $(-1, +1)$ и $(+1, -1)$ не принадлежат области определения функции cmb . С практической точки зрения это означает, что создатель экспертной системы должен самостоятельно решить вопрос о ее поведении в случае полного подтверждения и полного опровержения некоторой гипотезы. Заметим, что попытки «насиленно» доопределить cmb в точках $(-1, +1)$ и $(+1, -1)$ выводят ее из класса непрерывных и ассоциативных [4] функций.

На рис. 2 предлагается иная запись функции комбинирования. За счет отказа от модулей функция cmb по разному задается

в шести разных секторах области определения. На границах секторов гарантирована непрерывность.

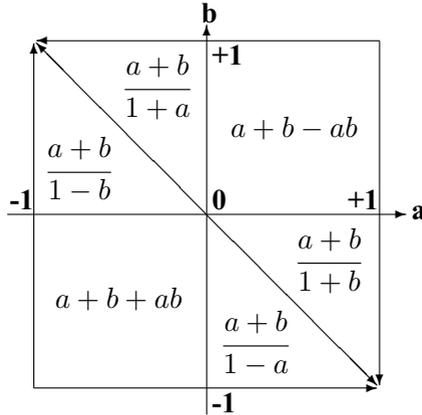


Рис. 2. Альтернативное представление функции $stb(a, b)$

Рассматривая $stb(a, b)$ как представителя класса подобных функций, перечислим ее основные свойства. Для $\varphi(a, b) = stb(a, b)$ имеет место:

- (6) область определения: $[-1, +1]^{(2)}$;
- (7) коммутативность: $\varphi(a, b) = \varphi(b, a)$;
- (8) ассоциативность: $\varphi(a, \varphi(b, c)) = \varphi(\varphi(a, b), c)$;
- (9) асимметричность: $\varphi(a, b) = -\varphi(-a, -b)$;
- (10) непрерывность;
- (11) монотонность: $\forall l \varphi(a, l) \leq \varphi(b, l)$, если $a \leq b$;
- (12) ограниченность: $-1 \leq \varphi(a, b) \leq +1$;
- (13) граничные условия: $\varphi(a, -a) = 0$, если $a \neq \pm 1$;
- (14) граничные условия: $\varphi(a, 0) = a$, $\varphi(0, a) = a$;
- (15) граничные условия: $\varphi(1, 1) = 1$, $\varphi(-1, -1) = -1$.

Очевидно, что список свойств функции комбинирования может быть продолжен. Известны работы [13], в которых на основании постулированных свойств выводится явный вид функ-

ции комбинирования. Здесь мы придерживаемся более «вольного» оценочного подхода, суть которого состоит в том, что

- любая функция комбинирования удовлетворяет обязательным свойствам (6), (12)–(15);
- очень хорошая функция комбинирования удовлетворяет свойствам (6)–(15);
- отчасти хорошая функция комбинирования может не удовлетворять некоторым необязательным свойствам.

3. Трансформации схемы Шортлиффа

Идея трансформации схемы Шортлиффа состоит в переходе от $[-1, +1]$ к некоторому другому множеству \mathfrak{R} . Если зафиксированный переход является взаимно однозначным, то алгоритм логического вывода без малейшего ущерба может оперировать не оригинальными значениями из $[-1, +1]$, а их образами в \mathfrak{R} .

Пусть h – взаимно однозначная монотонно возрастающая функция, отображающая отрезок $[-1, +1]$ на некоторое множество \mathfrak{R} : $h: [-1, +1] \rightarrow \mathfrak{R}$.

Будем полагать, что h можно использовать как имя функции. Тогда задействованные в схеме Шортлиффа функции min , max , not , rge , rle , tms и cmb однозначно порождают функции с именами $h|min$, $h|max$, $h|not$, $h|rge$, $h|rle$, $h|tms$ и $h|cmb$.

По определению для любых A, B из \mathfrak{R} имеет место:

$$\begin{aligned} h|max(A, B) &= h(max(h^{-1}(A), h^{-1}(B))); \\ h|min(A, B) &= h(min(h^{-1}(A), h^{-1}(B))); \\ h|not(A) &= h(not(h^{-1}(A))); \\ h|rge(A) &= 0,2 \leq h^{-1}(A); \\ h|rle(A) &= h^{-1}(A) < -0,2; \\ h|tms(A, B) &= h(tms(h^{-1}(A), h^{-1}(B))); \\ h|cmb(A, B) &= h(cmb(h^{-1}(A), h^{-1}(B))). \end{aligned}$$

Все перечисленные $h|$ функции устроены аналогичным образом, понятным из рис. 3.

Трансформация схемы Шортлиффа есть взаимно однозначное отображение $h: [-1, +1] \rightarrow \mathfrak{R}$ и порожденный им набор

функций $h|min$, $h|max$, $h|not$, $h|rge$, $h|rle$, $h|tms$ и $h|cmb$.

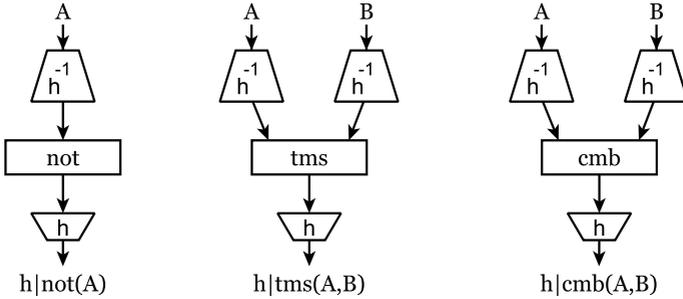


Рис. 3. Схемы вычислений $h|not(A)$, $h|tms(A, B)$ и $h|cmb(A, B)$

С алгебраической точки зрения [6, с. 19] результат трансформации есть схема, изоморфная схеме Шортлиффа. С практической точки зрения наличие разнообразных, но изоморфных представлений одной и той же схемы открывает новые возможности во всех аспектах ее применения. При изоморфном отображении свойства функции комбинирования (6)–(15) также подлежат изоморфному отображению.

Замечание 1. Из требования строгой монотонности функции h следует:

$$\begin{aligned}
 h|max(A, B) &\equiv max(A, B); \\
 h|min(A, B) &\equiv max(A, B); \\
 h|rge(A) &\equiv h(+0,2) \leq A; \\
 h|rle(A) &\equiv A < h(-0,2); \\
 h(-1) &= min \mathfrak{R}; \\
 h(+1) &= max \mathfrak{R}.
 \end{aligned}$$

То есть в любой трансформации схемы Шортлиффа, полученной посредством монотонно возрастающей функции h , интерес представляют

- значения $h(x)$ в особых точках $-0,2$, 0 , и $0,2$; а также
- формулы для вычисления $h|not(A)$, $h|tms(A, B)$ и $h|cmb(A, B)$.

Замечание 2. Для нечетных функций h в трансформации схемы Шортлиффа дополнительно выполняются тождества

$$\begin{aligned} h|not(A) &\equiv -A, \\ h(-0,2) &\equiv -h(0,2), \\ h(0) &\equiv 0. \end{aligned}$$

Поэтому для нечетных монотонно возрастающих функций h в трансформации схемы Шортлиффа интерес представляют

- значение $h(x)$ в точке $0,2$; а также
- формулы для вычисления $h|tms(A, B)$ и $h|cmb(A, B)$.

Замечание 3. Помимо особых точек $-0,2$ и $+0,2$ в системе *MUCIN* используются еще несколько пороговых значений a_i для коэффициентов уверенности [17, с. 114]. Эти пороги применяются интерфейсными блоками, отвечающими

- за перевод ответов пользователя в коэффициенты уверенности фактов; и
- за словесную интерпретацию коэффициентов уверенности гипотез в заключениях системы.

При использовании трансформированной схемы Шортлиффа пороги a_i заменяются на их образы $h(a_i)$.

Пример 2. Рассмотрим отображение $h_u: [-1, +1] \rightarrow [0, +1]$.

$$h_u(x) = (x + 1)/2, \quad h_u^{-1}(x) = 2x - 1.$$

Линейная функция h_u не является нечетной. В соответствии с замечанием 1 трансформация схемы Шортлиффа описывается

- значениями в особых точках:

$$h_u(-0,2) = 0,4, \quad h_u(0) = 0,5, \quad h_u(+0,2) = 0,6; \text{ и}$$

- функциями:

$$\begin{aligned} h_u|not(A) &= 1 - A, \\ h_u|tms(A, B) &= AB + (1 - A)(1 - B), \\ h_u|cmb(A, B) &\text{ – функция представлена на рис. 4. } \bullet \end{aligned}$$

Относительно простое отображение h_u из примера 2 порождает многовариантную функцию комбинирования. В разделе 12 рассматривается нелинейное отображение $[-1, +1]$ в $[0, +1]$, порождающее моновариантную функцию комбинирования.

Задача настоящей статьи состоит в исследовании изоморфных отображений схемы Шортлиффа с целью выявления

- ▷ отдельных классов отображений, удобных/интересных с той или иной точки зрения;
- ▷ общих подходов к построению трансформаций схемы Шортлиффа.

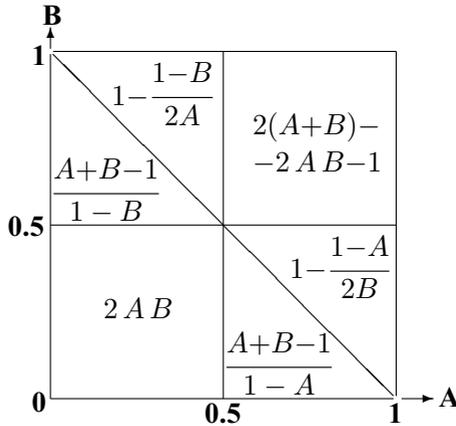


Рис. 4. Функция комбинирования $h_u|ctb(A, B)$

4. Расширенная числовая прямая

В настоящей работе используются подмножества расширенной числовой прямой $[-\infty, +\infty]$. Следуя [3, с. 237] и [5, с. 33], договоримся называть расширенной числовой прямой обычную числовую прямую $(-\infty, +\infty)$ с добавлением двух новых элементов $-\infty$ и $+\infty$, для которых определены следующие операции:

- $a + (+\infty) = (+\infty)$, $(+\infty) - a = (+\infty)$,
 $a + (-\infty) = (-\infty)$, $(-\infty) - a = (-\infty)$ для конечного a ;
- $a \cdot (+\infty) = (+\infty)$, $a \cdot (-\infty) = (-\infty)$ при $a > 0$,
 $d \cdot (+\infty) = (-\infty)$, $d \cdot (-\infty) = (+\infty)$ при $d < 0$;
- $(+\infty) + (+\infty) = (+\infty)$, $(-\infty) + (-\infty) = (-\infty)$,
 $(+\infty) - (-\infty) = (+\infty)$, $(-\infty) - (+\infty) = (-\infty)$,
 $(+\infty) \cdot (+\infty) = (+\infty)$, $(+\infty) \cdot (-\infty) = (-\infty)$,
 $(-\infty) \cdot (-\infty) = (+\infty)$;

- $\frac{\pm \infty}{a} = (\pm \infty) \cdot \frac{1}{a}$ при $a \neq 0$;
- $\frac{a}{\pm \infty} = 0$ и $-\infty < a < +\infty$ при любом конечном a .

Общее свойство перечисленных операций состоит в том, что значения $-\infty$ и $+\infty$ невозможно получить из конечных чисел с использованием четырех арифметических операций. Отсюда следует, что функция, принимающая значение $-\infty$ и $+\infty$ для некоторого конечного аргумента либо является многовариантной, либо (в конечном итоге) определяется через другую многовариантную функцию.

5. Семейство трансформаций # 1

- Определим семейство функций $G_1(\alpha)$, превращающих
- комбинирование в умножение;
 - умножение в его изоморфный образ «as is».

Пусть α – положительное вещественное число. Каждое фиксированное значение параметра α порождает элемент класса $G_1(\alpha)$ – суть монотонно возрастающую функцию $g_1: [-1, +1] \rightarrow [0, +\infty]$ следующего вида:

$$g_1(x) \stackrel{def}{=} \begin{cases} (1+x)^{+\alpha} & \text{для } -1 \leq x < 0; \\ (1-x)^{-\alpha} & \text{для } 0 \leq x < 1; \\ +\infty & \text{для } x = 1. \end{cases}$$

FP Обратная функция $g_1^{-1}: [0, +\infty] \rightarrow [-1, +1]$ выглядит так:

$$g_1^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt[\alpha]{x} - 1 & \text{для } 0 \leq x < 1; \\ 1 - \widehat{\sqrt[\alpha]{x}} & \text{для } 1 \leq x < +\infty; \\ 1 & \text{для } x = +\infty. \end{cases}$$

Графики функций g_1 и g_1^{-1} представлены на рис. 5.

FP В соответствии с замечанием 1 трансформация схемы Шортлиффа посредством функции g_1 описывается

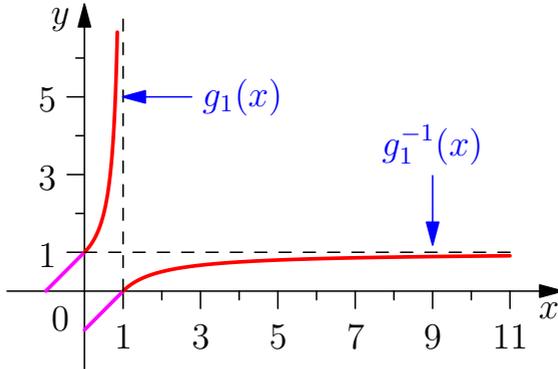


Рис. 5. Графики функций g_1 и g_1^{-1} при $\alpha = 1$

– значениями в особых точках $-0,2, 0$ и $+0,2$, приведенными в таблице 1;

– функциями:

$$g_1|not(A) = \begin{cases} +\infty & \text{для } A = 0; \\ \hat{A} & \text{для } 0 < A \leq +\infty; \end{cases}$$

$g_1|tms(A, B)$ – функция приводится на рис. 6;

$$g_1|cmb(A, B) = A \cdot B.$$

Областью определения функции $g_1|cmb(A, B)$ является множество $[0, +\infty)^{(2)}$.

Таблица 1. Значения g_1 в особых точках.

особые точки	значения g_1			
	α	$\alpha = 0,5$	$\alpha = 1$	$\alpha = 2$
$-0,2$	$0,8^{+\alpha}$	0,946	0,8	0,410
0	1	1	1	1
$+0,2$	$0,8^{-\alpha}$	1,057	1,250	2,441

Свойство 1. Отображения из семейства $G_1(\alpha)$ трансформируют многовариантную функцию комбинирования в произведение двух неотрицательных чисел.

Свойство 2. Отображения из семейства $G_1(\alpha)$ трансформируют моновариантную функцию ослабления в многовариантную функцию.

Фактически трансформация на основе функции из $G_1(\alpha)$ привела к «разменному» результату: комбинирование свелось к банальному умножению, но ослабление усложнилось.

	B	0	$(0, 1]$	$(1, +\infty)$	$+\infty$
A	$+\infty$	0	B		$+\infty$
$(1, +\infty)$	\hat{A}	$(\sqrt[\alpha]{\widehat{A}} + \sqrt[\alpha]{\widehat{B}} - \sqrt[\alpha]{\widehat{A}} \sqrt[\alpha]{\widehat{B}})^{\alpha}$		$(\sqrt[\alpha]{\widehat{A}} + \sqrt[\alpha]{\widehat{B}} - \sqrt[\alpha]{\widehat{A}} \sqrt[\alpha]{\widehat{B}})^{-\alpha}$	
$(0, 1]$		$(\sqrt[\alpha]{\widehat{A}} + \sqrt[\alpha]{\widehat{B}} - \sqrt[\alpha]{\widehat{A}} \sqrt[\alpha]{\widehat{B}})^{-\alpha}$		$(\sqrt[\alpha]{\widehat{A}} + \sqrt[\alpha]{\widehat{B}} - \sqrt[\alpha]{\widehat{A}} \sqrt[\alpha]{\widehat{B}})^{\alpha}$	
0	$+\infty$	\hat{B}			0

Рис. 6. Функция $g_1 | tms(A, B)$

Свойство 3. Всем коэффициентам уверенности соответствуют конечные вещественные числа. Единственное исключение – коэффициент $+1$, которому соответствует специальное значение $+\infty$. Другими словами, получение абсолютно достоверных знаний выделяется в особый случай.

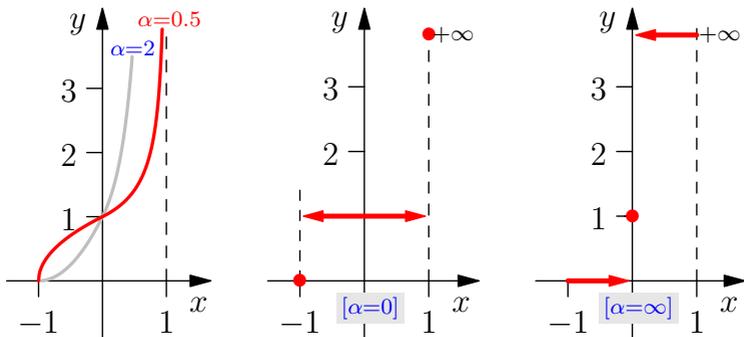


Рис. 7. Графики функций g_1 при разных α

Свойство 4. Изменяя параметр α , можно построить отображение схемы Шортлиффа с заранее заданным порогом принятия решений. При этом второй порог изменяется согласованно.

Свойство 5. При $\alpha = 0$ и $\alpha = +\infty$ формально построенные функции $g_1(x)$ – см. рис. 7 – перестают быть взаимно однозначными, но интересны тем, что реализуют разные способы определения трехзначной шкалы значений «опрровергнуто–не определено–установлено».

6. Семейство трансформаций # 2

Логарифмы превращают произведения в суммы, а суммирование как функция комбинирования выглядит предпочтительнее умножения.

Определим семейство функций $H_1(\beta)$, где параметр $\beta > 1$. Каждое фиксированное значение параметра β порождает элемент класса $H_1(\beta)$ – монотонно возрастающую нечетную функцию

$$h_1: [-1, +1] \rightarrow [-\infty, +\infty]$$

следующего вида:

$$h_1(x) \stackrel{def}{=} \begin{cases} -\infty & \text{для } x = -1; \\ +\log_{\beta}(1+x) & \text{для } -1 < x < 0; \\ -\log_{\beta}(1-x) & \text{для } 0 \leq x < 1; \\ +\infty & \text{для } x = 1. \end{cases}$$

FP Обратная функция $h_1^{-1}: [-\infty, +\infty] \rightarrow [-1, +1]$ выглядит так:

$$h_1^{-1}(x) = \begin{cases} -1 & \text{для } x = -\infty; \\ \beta^{+x} - 1 & \text{для } -\infty < x < 0; \\ 1 - \beta^{-x} & \text{для } 0 \leq x < +\infty; \\ +1 & \text{для } x = +\infty. \end{cases}$$

Графики функций h_1 и h_1^{-1} представлены на рис. 8.

FP В соответствии с замечанием 2 трансформация схемы Шортлиффа посредством функции h_1 описывается

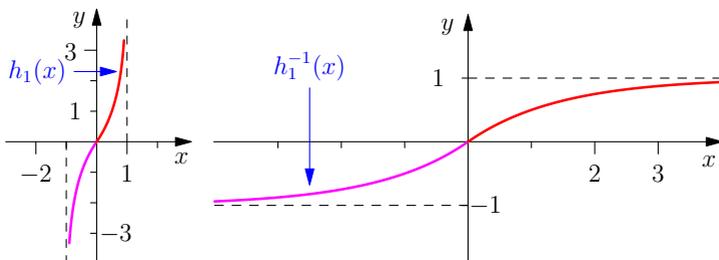


Рис. 8. Графики функций h_1 и h_1^{-1} при $\beta = 2$

- значением h_1 в особой точке $0,2$, $h_1(0,2) = \log_\beta(0,8)$,
 например: $h_1(0,2) = 2$ для $\beta = 1,118$,
 $h_1(0,2) = 1$ для $\beta = 1,25$,
 $h_1(0,2) = 0,322$ для $\beta = 2$;

– функциями:

$h_1|tms(A, B)$ – функция приводится на рис. 9,

$h_1|cmb(A, B) = A + B$

Областью определения функции $h_1|cmb(A, B)$ является множество $[-\infty, +\infty]^{(2)}$.

Приведем свойства семейства $H_1(\beta)$.

Свойство 1. Отображения из семейства $H_1(\alpha)$ трансформирует многовариантную функцию комбинирования в суммирование вещественных чисел.

Суммирование [баллов] – это характерный прием комбинирования свидетельств в скоринговых системах принятия решений [10]. Если образы коэффициентов уверенности переименовать в балльные оценки, то можно так подобрать отображения из $H_1(\beta)$, что схема Шортлиффа трансформируется в некоторый вариант метода скоринговых карт.

Свойство 2. Отображения из семейства $H_1(\alpha)$ трансформируют моновариантную функцию ослабления в многовариантную функцию.

Свойство 3. Коэффициентам уверенности -1 и $+1$ соответствуют специальные значения $-\infty$ и $+\infty$. Всем остальным коэф-

фициентам соответствуют конечные вещественные числа. Фактически это означает, что точные логические выводы выделяются в особый случай.

	B	$-\infty$	$(-\infty, 0]$	$(0, +\infty)$	$+\infty$
A	$-\infty$	$+B$			$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$+B$			$+\infty$
$(0, +\infty)$	$-A$	$\log_{\beta}(\widehat{\beta}^A + \beta^B - \widehat{\beta}^A \beta^B)$	$-\log_{\beta}(\widehat{\beta}^A + \widehat{\beta}^B - \widehat{\beta}^A \widehat{\beta}^B)$	$+A$	
$(-\infty, 0]$	$-A$	$-\log_{\beta}(\beta^A + \beta^B - \beta^A \beta^B)$	$\log_{\beta}(\beta^A + \widehat{\beta}^B - \beta^A \widehat{\beta}^B)$	$+A$	
$-\infty$	$+\infty$	$-B$			$-\infty$

Рис. 9. Функция $h_1|tms(A, B)$

Свойство 4. Изменяя параметр β , можно построить отображение схемы Шортлиффа с заранее заданным порогом принятия решений. Так, при $\beta = 3,05$ пороги $h_1(-0,2)$ и $h_1(+0,2)$ принимают значения $-0,2$ и $+0,2$ соответственно. Другими словами, при $\beta = 3,05$ получается псевдосхема Шортлиффа, отличающаяся от оригинала по трем пунктам:

- вместо* коэффициентов уверенности из $[-1, +1]$
используются псевдокоэффициенты из $[-\infty, +\infty]$;
- вместо* функции ослабления tms
используется более сложная функция $h_1|tms$;
- вместо* функции комбинирования stm
используется сложение псевдокоэффициентов.

Свойство 5. При $\beta = 1$ и $\beta = +\infty$ формально построенные функции $h_1(x)$ – см. рис. 10 – утрачивают свойство взаимной однозначности, но, так же как и для класса $G_1(\alpha)$, вырождаются в трехзначные шкалы.

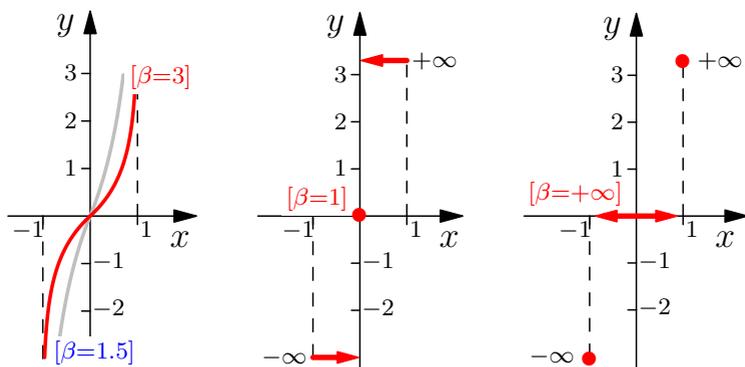


Рис. 10. Графики функций h_1 при разных β

7. Задачи выявления и доопределения

До настоящего момента изложение носило феноменологический характер: исследовались свойства аксиоматически заданных семейств отображений. В связи с многочисленными попытками усовершенствовать схему Шортлиффа возникает вопрос о способах выявления отображений⁹. Кроме того, в исследованиях [15] часто возникает близкая задача доопределения частично заданной функции комбинирования. Прежде чем приступить к анализу перечисленных задач, зафиксируем два обстоятельства.

Первое. Будем рассматривать

- кусочно-заданные отображения h и h^{-1} ;
- многовариантные функции комбинирования $\varphi(a, b)$, заданные разными формулами $\varphi_i(a, b)$ на разных участках δ_i , $i = 1, \dots, n$ области определения.

Второе. При вычислении значений многовариантных и кусочно-заданных функций выбор конкретного варианта и вычисленное значение определяются аргументом. Другими словами, аналитические выражения для $h(x)$ на δ_i и $h(x)$ на δ_j , по внешнему виду могут сильно отличаться.

⁹ Речь идет о неформальных технологиях, направляющих «ход мыслей».

Выявление и доопределение так или иначе сводятся к решению подзадач, именуемых

- задачей обнаружения отображений,
- задачей подтверждения формул и
- задачей конструирования формул.

Сформулируем эти подзадачи.

Задача 1. *Задача обнаружения отображений.*

По известной функции $\varphi(a, b) = \varphi_1(a, b)$, заданной на множестве δ_1 , построить взаимно однозначное отображение $h: [-1, +1] \rightarrow \mathfrak{R}$ такое, что $h|\varphi = h|\varphi_1$ – функция заданного вида.

Приемы обнаружения отображений рассматриваются в следующем разделе, а пока отметим, что при решении задачи обнаружения удастся найти только часть функции h – функцию h' , заданную на собственном подмножестве¹⁰ отрезка $[-1, +1]$. Исследователь должен ее доопределить на весь отрезок $[-1, +1]$, используя, скажем, соображения четности/нечетности.

Задача 2. *Задача подтверждения формул.*

По известным функциям h и $h|\varphi$, а также по функции $\varphi_i(a, b)$, заданной на δ_i , доказать:

$$\forall (a, b) \in \delta_i \quad h(\varphi_i(h^{-1}(a), h^{-1}(b))) = h|\varphi(a, b).$$

Задача 3. *Задача конструирования формул.*

По известным $h(x)$ и $h|\varphi(A, B)$ и области определения δ_i построить функцию $\varphi_i(a, b)$ такую, что

$$\forall (a, b) \in \delta_i \quad h|\varphi_i(A, B) = h|\varphi(A, B), \quad \text{где } A = h(a), B = h(b).$$

В отличие от задачи обнаружения задачи подтверждения и конструирования имеют точные математические формулировки.

Полагая известными методы решения задач обнаружения, подтверждения и конструирования, можно предложить подходы к решению целевых задач выявления и доопределения.

Задача 4. *Задача выявления отображений.*

По заданной функции $\varphi(a, b)$ найти взаимно однозначное отображение $h: [-1, +1] \rightarrow \mathfrak{R}$ такое, что $h|\varphi$ – сложение, умножение

¹⁰ Чаще всего h' определена на $[0, +1]$.

или иная заданная функция.

Общий подход к решению задачи 4 представлен на рис. 11. Сначала предлагается сфокусировать внимание на одном из вариантов функции φ – функции φ_1 , заданной на δ_1 , и обнаружить функции-кандидаты h и $h|\varphi$. Затем найденное решение следует подтвердить на остальных вариантах $\varphi_2(\cdot)$, $\varphi_3(\cdot)$,

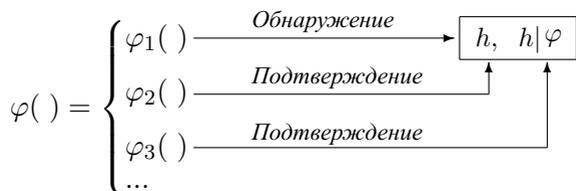


Рис. 11. Выявление отображений

В связи с конструированием схем рассуждений, подобных схеме Шортлиффа, возникает задача доопределения так или иначе обнаруженной функции φ_1 , заданной на $[0, +1]^2$, на всю область определения $[-1, +1]^{(2)}$.

Задача 5. *Задача доопределения функции комбинирования.*

По функции $\varphi(a, b) = \varphi_1(a, b)$, заданной на δ_1 , найти функции $\varphi_i(a, b)$, заданные на δ_i , $i = 2, \dots, n$.

Один из подходов к решению этой задачи представлен на рис. 12. Постулируется¹¹, что все неизвестные варианты функции φ должны посредством некоторого отображения h сводиться к единой функции $h|\varphi$. На первом этапе доопределения предлагается обнаружить пару функций h и $h|\varphi$. На втором этапе предлагается решить ряд конкретных задач конструирования функции φ в областях определения δ_2 , δ_3 ,

¹¹ Основанием для выдвижения такого постулата служит свойство 1 классов отображений из разделов 5 и 6.

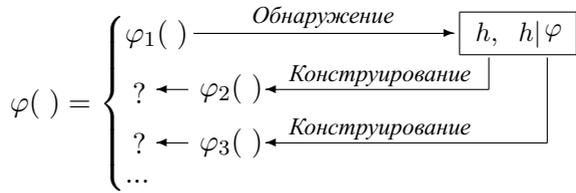


Рис. 12. Доопределение функции комбинирования

FP Решением задачи доопределения является функция

$$\varphi_i(a, b) = h^{-1}(h|\varphi(h(A), h(B))).$$

8. Задача обнаружения отображений

Подзадача обнаружения функций h и $h|\varphi$ по известной функции $\varphi(a, b)$,

$$(16) \quad \varphi(a, b) = \varphi_1(a, b),$$

скорее всего универсального решения не имеет, но можно указать два частных приема, рассчитанных на «творческое» применение.

Первый прием состоит в «улавливании сигналов», поступающих от равенства (16). Возможно, что при некоторых эквивалентных преобразованиях равенство (16) сводится к виду

$$h(\varphi(a, b)) = \Psi(h(a), h(b)),$$

где h и Ψ – некоторые формулы, и тогда:

если Ψ – сложение, то можно исследовать

случай h – логарифм, а $\varphi(a, b)$ – произведение;

если Ψ – умножение, то можно исследовать

случай h – степенная функция, а $\varphi(a, b)$ – суммирование;

если $\Psi = (a + b)/(1 - ab)$, то можно исследовать

случай h – тангенс, а $\varphi(a, b)$ – сложение и т.д.

Пример 3. Исследование варианта

$$\varphi_1(a, b) = a + b - ab \cdot (a + b - ab).$$

Этот вариант функции комбинирования для $(a, b) \in [0, 1]^2$ описан в работе [15], развивающей подход к конструированию функций комбинирования, предложенный в [13]. Отметим, что $\varphi_1(a, b)$ не является ассоциативной функцией, что не позволяет распространить на нее свойства полугрупп [14].

$$\begin{array}{l}
 \boxed{\text{FP}} \quad \varphi(a, b) = \varphi_1(a, b) \equiv 1 - (1 - a)(1 - b)(1 - ab). \\
 \\
 \begin{array}{cccc}
 \underbrace{1 - \varphi(a, b)} & = & \underbrace{(1 - a)} & \cdot & \underbrace{(1 - b)} & \cdot & \underbrace{(1 - ab)} \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \underbrace{F(\varphi(a, b))} & = & \underbrace{F(a)} & \cdot & \underbrace{F(b)} & \cdot & \underbrace{F(ab)} \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \beta^{h(\varphi(a, b))} & = & \beta^{h(a)} & \cdot & \beta^{h(b)} & \cdot & \beta^{h(ab)} = \beta^{h(a)+h(b)+h(ab)}
 \end{array}
 \end{array}$$

Из $1 - a = F(a) = \beta^{h(a)}$ имеем: $h(a) = \log_{\beta}(1 - a)$.

Доопределяя функцию h на множество $[-1, +1]$, получаем:

$$h(x) = h_1(x) \in H_1(\beta).$$

Из (17) имеем: $h(\varphi(a, b)) = h(a) + h(b) + h(ab)$.

Окончательно:

$$\begin{array}{l}
 h|\varphi(A, B) = A + B + h(h^{-1}(A) \cdot h^{-1}(B)) \text{ или} \\
 (18) \quad h|\varphi(A, B) = A + B + h_1|tms(A, B).
 \end{array}$$

В формуле (18) используется функция $h_1|tms$, приведенная на рис. 9. Заметим, что доопределение (18) на область $[-1, +1]^{(2)}$ порождает функцию комбинирования, которая не удовлетворяет свойствам (13) – (15) •

Второй прием состоит в обнаружении функции $y(x) = h^{-1}(x)$ для случая $h|\varphi(A, B) = A + B$. Функцию y предлагается находить как решение функционального уравнения

$$(19) \quad y(x + d) = \varphi_1(y(x), y(d)) \quad \text{при} \quad y(0) = 0.$$

Заметим, что условия (19) есть необходимые условия гомоморфизма абелевых групп [11, с. 21]. Один из способов решения функционального уравнения состоит в двухэтапном переходе к дифференциальному уравнению.

Этап 1. Представить функциональное уравнение в виде

$$\frac{y(x + d) - y(x)}{d} = \frac{\varphi_1(y(x), y(d)) - y(x)}{d}$$

Этап 2. При $d \rightarrow 0$ перейти к дифференциальному уравнению

$$y'(x) = \text{некоторая-правая-часть}$$

Иногда, но не всегда решение дифференциального уравнения является решением функционального уравнения (19) и тогда обнаружение h и $h|\varphi$ становится «делом техники».

9. Функции комбинирования Хамахера

Технологию выявления и доопределения функций комбинирования продемонстрируем на примере функций из семейства триангуляционных конорм Хамахера [1, с. 61], имеющих следующий вид:

$$\varphi_1(a, b) = \frac{a + b + (r - 2)ab}{1 + (r - 1)ab}, \quad \text{где параметр } r > 0.$$

При фиксированном параметре r приведенная функция $\varphi_1(a, b)$ удовлетворяет свойствам (7), (8), (10), (11), (14), (15) и вполне может использоваться в качестве одного из вариантов функции комбинирования $\varphi(a, b)$.

$$\varphi(a, b) = \begin{cases} \frac{a + b + (r - 2)ab}{1 + (r - 1)ab} & \text{для } (a, b) \in [0, +1]^2; \\ ? & \text{для } (a, b) \in [-1, 0] \times [0, +1]; \\ ? & \text{для } (a, b) \in [0, +1] \times [-1, 0]; \\ ? & \text{для } (a, b) \in [-1, 0]^2. \end{cases}$$

Для обнаружения h и $h|\varphi$ применим прием решения функционального уравнения.

Пусть $0 \leq x, 0 \leq d, 0 \leq y \leq 1, y(0) = 0,$

$$и \quad y(x+d) = \frac{y(x) + y(d) + (r-2)y(x)y(d)}{1 + (r-1)y(x)y(d)}.$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда} \quad \frac{y(x+d) - y(x)}{d} &= \\ &= \frac{y(d)}{d} \cdot (1 + (r-2)y(x) - (r-1)y(x+d)y(x)). \end{aligned}$$

При $d \rightarrow 0 \quad y' = y'(0)(1 + (r-2)y - (r-1)y^2).$

$$\text{Откуда} \quad y(x) = \frac{\beta^x - 1}{\beta^x + r - 1}, \quad \text{где } \beta = e^{ry'(0)}.$$

Доопределяя функцию y в точке $+1$ и отражая ее нечетным образом на $[-\infty, 0)$, а также учитывая, что $y(x)$ есть h_r^{-1} , получаем взаимно однозначное монотонное отображение

$$h_r(x) \stackrel{def}{=} \begin{cases} -\infty & \text{для } x = -1. \\ -\log_{\beta}\left(\frac{r}{1+x} + 1-r\right) & \text{для } -1 < x < 0; \\ +\log_{\beta}\left(\frac{r}{1-x} + 1-r\right) & \text{для } 0 \leq x < 1; \\ +\infty & \text{для } x = 1. \end{cases}$$

При каждом фиксированном r функции $h_r(x)$ зависят от параметра β и образуют семейство функций $H_r(\beta)$. При $r = 1$ семейство H_r превращается в семейство H_1 , описанное в разделе 6.

Обратное отображение выглядит так

$$h_r^{-1}(x) = \begin{cases} -1 & \text{для } x = -\infty; \\ -\frac{1 - \beta^x}{1 + (r-1)\beta^x} & \text{для } -\infty < x < 0; \\ +\frac{\beta^x - 1}{\beta^x + r - 1} & \text{для } 0 \leq x < +\infty; \\ +1 & \text{для } x = +\infty. \end{cases}$$

$\boxed{\text{FP}}$ $h_r|cmb_r(A, B) = A + B$ для $(A, B) \in [0, 1]^2$.

Задача доопределения функции cmb_r на множество $[-1, +1]^{(2)}$ состоит в решении пяти однотипных задач конструирования:

Выразить $cmb_r = h_r^{-1}(h_r(a) + h_r(b))$

- 1) для случая $a < 0 \leq b$ и $|a| \leq |b|$;
- 2) для случая $a < 0 \leq b$ и $|a| > |b|$;
- 3) для случая $b < 0 \leq a$ и $|a| \leq |b|$;
- 4) для случая $b < 0 \leq a$ и $|a| > |b|$;
- 5) для случая $a < 0$ и $b < 0$.

Рассмотрим, скажем, случай 1).

$a < 0$, следовательно $h_r(a) = -\log_\beta\left(\frac{r}{1+a} + 1 - r\right)$.

$0 \leq b$, следовательно $h_r(b) = +\log_\beta\left(\frac{r}{1-b} + 1 - r\right)$.

$$h_r(a) + h_r(b) = +\log_\beta \frac{(1-b+br)(1+a)}{(1+a-ar)(1-b)}.$$

$|a| \leq |b|$, следовательно $h_r^{-1}(h_r(a) + h_r(b)) =$

$$= \frac{\beta^{h_r(a)+h_r(b)} - 1}{\beta^{h_r(a)+h_r(b)} + r - 1} = \frac{a + b}{1 + (r-1)ab - (r-2)a} =$$

$$= \frac{a + b}{\theta - (r-2)a}, \quad \text{где } \theta = 1 + (r-1)ab.$$

Окончательный вид функции комбинирования $ctb_r(a, b)$ представлен на рис. 13.

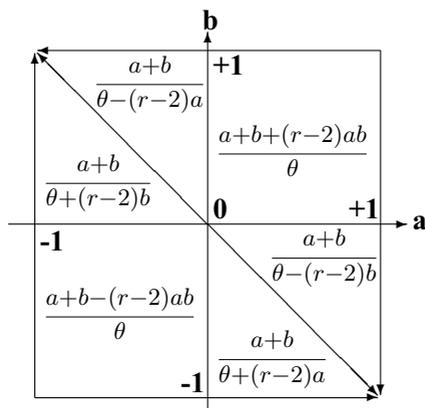


Рис. 13. Функция комбинирования Хамахера $ctb_r(a, b)$

Определенная таким образом функция $ctb_r(a, b)$ удовлетворяет обязательным свойствам для функций комбинирования. Остановимся на прочих свойствах функций ctb_r .

Во-первых, при $r = 1$ функция комбинирования Хамахера совпадает с функцией комбинирования Шортлиффа:

$$ctb_1(a, b) = ctb(a, b).$$

Во-вторых, только при $r = 2$ функция комбинирования Хамахера становится моновариантной:

$$\forall (a, b) \in [-1, +1]^{(2)} \quad ctb_2 = \frac{a + b}{1 + ab}.$$

10. Схемы Шортлиффа–Хамахера

В предыдущем разделе на основе семейства конорм Хамахера построено семейство функций комбинирования Хамахера ctb_r . Возникает естественный вопрос о соответствующих функциях tms_r и значениях в особых точках. Для ответа на этот вопрос сконструируем изоморфное отображение функции комбинирования Шортлиффа $ctb = ctb_1$ в ctb_r . Такое отображение и позволит построить искомые функции и значения в особых точках.

Отображение h_{1r} , трансформирующее функцию ctb_1 в ctb_r , строится как композиция отображений $h_r^{-1} \circ h_1$, где $h_1 \in H_1$ для некоторого $\beta = \beta_1$, $h_r \in H_r$ для некоторого $\beta = \beta_2$.

$$h_{1r}(x) = h_r^{-1}(h_1(x)).$$

Прежде всего введем удобные обозначения:

$$\Delta(z) = \frac{1-z}{1+(r-1)z}, \quad \Gamma(z) = \Delta(z^\gamma) \quad \text{и} \quad \delta(z) = \Delta^{1/\gamma}(|z|).$$

[FP] Допустимые композиции h_{1r} образуют семейство, зависящее от параметра $\gamma = \log_{\beta_1}\beta_2 > 0$.

$$h_{1r}(x) = \text{sign}(x) \cdot \Gamma(1 - |x|)$$

и $h_{1r}^{-1}(x) = \text{sign}(x) \cdot (1 - \delta(x)).$

В общем виде функциям комбинирования Хамакера ctb_r соответствуют:

- значение нечетной функции $h_{1r}(x)$ в точке 0,2 и
- функция $tms_r(A, B) = h_{1r}|tms(A, B) = h_{1r}(h_{1r}^{-1}(A) \cdot h_{1r}^{-1}(B)).$

С использованием конкретного вида h_{1r} и в соответствии с замечанием 2 искомая схема Шортлиффа–Хамакера – суть трансформация схемы Шортлиффа с функцией комбинирования ctb_r – описывается:

- значением в особой точке $h_{1r}(0,2) = \Gamma(0,8)$; и
- функциями:

$$(20) \quad tms_r(A, B) = \text{sign}(AB) \cdot \Gamma(\delta(A)+\delta(B)-\delta(A)\cdot\delta(B));$$

$$(21) \quad ctb_r(A, B) \text{ – функция приведена на рис. 13.}$$

Подчеркнем, что именно факт существования функций $h_{1r}(x)$, позволяет утверждать, что любая схема из семейства Шортлиффа–Хамакера является трансформацией схемы Шортлиффа.

При построении схем Шортлиффа–Хамакера использовались отображения из H_r , позволяющие также обобщить результаты раздела 6. Покажем это. Выберем функцию \tilde{h}_1 из семейства $H_1(\beta)$ и функцию \tilde{h}_r из семейства $H_r(\beta)$. Функция \tilde{h}_{1r} при этом определяется однозначно, $\tilde{h}_{1r} = \tilde{h}_r^{-1} \circ \tilde{h}_1$. Построенная с помощью \tilde{h}_{1r}

схема Шортлиффа–Хамахера определена на $[-1, +1]$ и ее трансформация на $[-\infty, +\infty]$ посредством \tilde{h}_r имеет вид:

- в особой точке $\tilde{h}_r(\tilde{h}_{1r}(0,2)) = \tilde{h}_1(0,2)$;
- $\tilde{h}_r|cmb_r(A, B) = \tilde{h}_1|cmb(A, B) = A + B$;
- $\tilde{h}_r|tms_r(A, B) = \tilde{h}_1|tms(A, B)$ (см. рис. 9).

11. Подвиды схемы Шортлиффа–Хамахера

Описанный в разделе 10 класс схем Шортлиффа–Хамахера является параметрическим. Каждая пара чисел r и γ порождает экземпляр схемы, из которых определенный интерес представляют схемы

- для $r = 1$ и $\gamma = 1$;
- для $r = 1$ и $\gamma = 2$;
- для $r = 1$ и $\gamma = 31$;
- для $r = 2$ и $\gamma = 1,82$;
- для $r = 2$ и $\gamma = 1,485$;
- для $r = 2$ и $\gamma = 1$.

При $r = 1$, как отмечалось в разделе 9, функция комбинирования Хамахера $cmb_r = cmb_1$ не зависит от параметра γ и совпадает с функцией комбинирования Шортлиффа.

В случае $r = 1$ и $\gamma = 1$ имеем: $h_{11}(x) = x$, и схема Шортлиффа–Хамахера совпадает с «классической» схемой Шортлиффа:

$$h_{11}(0,2) = 0,2, \quad cmb_r = cmb \text{ и } tms_r = tms.$$

В случае $r = 1$ и $\gamma = 2$ имеем: $h_{11}(x) = 2x - sign(x)x^2$, и схема Шортлиффа–Хамахера отличается от схемы Шортлиффа по двум позициям:

$$h_{11}(0,2) = 0,36, \text{ и } tms_r(A, B) = A \cdot B - 2 \cdot (A - h_{11}^{-1}(A)) \cdot (B - h_{11}^{-1}(B)).$$

В случае $r = 1$ и $\gamma = 31$ схема Шортлиффа–Хамахера также отличается от «классической» схемы Шортлиффа только по двум позициям:

$$h_{11}(0,2) = 0,999, \text{ а } tms_r(A, B) \text{ вычисляется по формуле (20).}$$

При $r = 2$ в схеме Шортлиффа-Хамахера функции h_{1r} , tms_r и cmb_r превращаются соответственно в h_{12} , tms_2 и cmb_2 , где

$$cmb_2(A, B) = \frac{A + B}{1 + A \cdot B}.$$

Функция cmb_2 определена на множестве $[-1, +1]^{(2)}$ и не зависит от вида h_{12} . В свою очередь функция tms_2 определена на множестве $[-1, +1]$ и зависит от h_{12} , т.е. зависит от значения параметра γ . На рис. 14 приводятся графики функций h_{12} для разных значений γ .

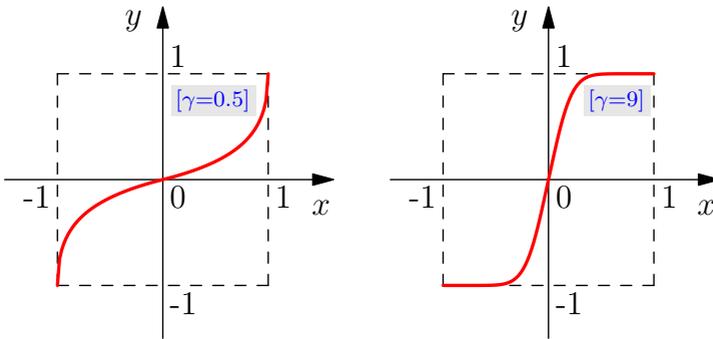


Рис. 14. Графики функций h_{12}

С вычислительной точки зрения интерес представляют функции h_{12} для $\gamma = 1,820$ и $\gamma = 1,495$ – см. рис. 15.

В случае $r = 2$ и $\gamma = 1,820$ образ порога 0,2 есть то же самое число¹² 0,2: $h_{12}(0,2) = 0,200$. При этом функция $h_{12}(x)$ не сильно отличается от тождественной трансформации:

$$|h_{12}(x) - x| < 0,102 \text{ и, соответственно,}$$

$$|tms_2(A, B) - A \cdot B| < 0,093.$$

В случае $r = 2$ и $\gamma = 1,495$ достигается наилучшее приближение:

$$|h_{12}(x) - x| < 0,040 \text{ и}$$

¹² Аналогичное соотношение верно также для псевдосхемы Шортлиффа из раздела 6.

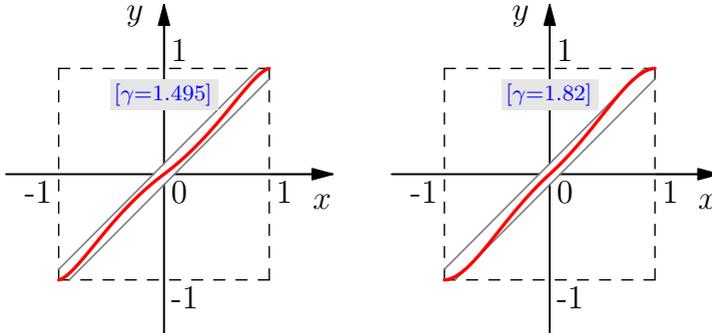


Рис. 15. Графики функций h_{12} для $\gamma = 1,495$ и $\gamma = 1,82$

$$|tms_2(A, B) - A \cdot B| < 0,054,$$

хотя в особой точке $h_{12}(0,2) = 0,165$

В случае $r = 2$ и $\gamma = 1$ функция h_{12} – рис. 16 – принимает наиболее простой вид.

$$h_{12}(x) = \frac{x}{2 - |x|} \quad h_{12}^{-1}(x) = \frac{2x}{1 + |x|}$$

В соответствующей схеме Шортлиффа–Хамахера:

$$h_{12}(0,2) = 1/9 \quad (\text{значение в особой точке});$$

$$tms_2(A, B) = \frac{2AB}{1 + |A| + |B| - |AB|};$$

$$cmb_2(A, B) = \frac{A + B}{1 + A \cdot B}$$

Трансформация, определяемая параметрами $r = 2$ и $\gamma = 1$, удобна для построения прочих изоморфных отображений на конечные отрезки действительной прямой.

12. Схема Шортлиффа на $[0, 1]$

Известно большое количество работ [1, 3, 14], в которых предлагаются и исследуются функции комбинирования для коэффициентов уверенности из отрезка $[0, 1]$. Простейший перенос схемы Шортлиффа на отрезок $[0, 1]$ описан в примере 2. Рас-

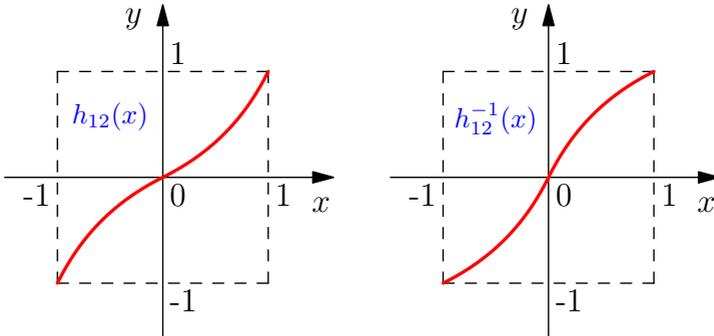


Рис. 16. Графики функций h_{12} и h_{12}^{-1} для $\gamma = 1$

смотрим изоморфный образ схемы Шортлиффа, определяемый композицией отображений $h_c = h_u \circ h_{12}$, где h_u – отображение из примера 2, h_{12} – преобразование из раздела 11.

$$h_c(x) = \begin{cases} 1 - 1/(2 + x) & \text{для } -1 \leq x < 0; \\ 1/(2 - x) & \text{для } 0 \leq x \leq +1, \end{cases}$$

$$h_c^{-1}(x) = \begin{cases} 2(x - 1)/(1 - x) & \text{для } 0 \leq x < 0,5; \\ 2(x - 1)/x & \text{для } 0,5 \leq x \leq +1. \end{cases}$$

При этом:

– в особых точках:

$$h_c(-0,2) = 4/9, \quad h_c(0) = 0,5, \quad h_c(0,2) = 5/9;$$

– функции: $h_c|not(A) = 1 - A \stackrel{def}{=} \bar{A}$,

$h_c|tms(A, B)$ – функция приводится на рис. 17,

$$h_c|cmb(A, B) = \frac{AB}{AB + \bar{A}\bar{B}} \quad \text{для } (A, B) \in [0, 1]^{(2)}.$$

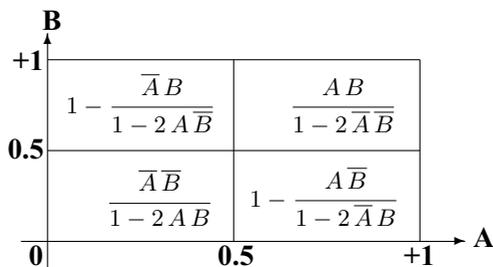


Рис. 17. Функция $h_c|tms(A, B)$

Построенную с помощью отображения h_c трансформацию можно считать «полномочным представителем» схемы Шортлиффа на отрезке $[0, 1]$. На этом же отрезке существуют и другие изоморфные образы схемы Шортлиффа. Они получаются из приведенной трансформации взаимно однозначными преобразованиями $h: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$. Все полученные при этом трансформации автоморфны между собой, хотя и имеют различные значения в контрольных точках, а также разные по виду образы функций отрицания, ослабления и комбинирования¹³.

13. Выводы и перспективы

Итак, схема Шортлиффа (и другие аналогичные системы функций) посредством изоморфных преобразований может изменять свое «обличие» весьма радикально. Однако при этом приходится считаться с тем, что трансформации функции комбинирования могут породить достаточно сложные трансформации функции ослабления. В развитие темы имеет смысл исследовать задачи поиска приемлемой пары трансформаций и/или выбора их допустимых приближений.

Литература

1. БАТЫРШИН И.З. *Основные операции нечеткой логики и их обобщения*. – Казань: Отечество, 2001. – 100 с.

¹³ В современной размытой логике установлено, что функция комбинирования Шортлиффа изоморфна так называемым униформам [16].

2. ДЮБУА Д., ПРАД А. *Теория возможностей. Приложения к представлению знаний в информатике.* – М.: Радио и связь, 1990. – 288 с.
3. ИЛЬИН В.А., ПОЗНЯК Э.Г. *Основы математического анализа: учеб. для вузов, часть II.* – 3-е изд. – М.: Наука, Физматлит, 1998. – 448 с.
4. КОНОНОВА И.Н., ЛЫЧАК О.А., ФАЙНШТЕЙН С.И. *О некоммутативности совместного использования коэффициентов определенности в схеме приближенных рассуждений системы МУСIN* // Материалы XI Всероссийского семинара «Нейроинформатика и ее приложения». – Красноярск: ИВМ СО РАН, 2003. – С. 88–89.
5. КУДРЯВЦЕВ Л.Д. *Курс математического анализа: том 1.* – М.: Высшая школа, 1981. – 687 с.
6. КУРОШ А.Г. *Теория групп.* – М.: Наука, 1967. – 648 с.
7. ЛЮГЕР ДЖ.Ф. *Искусственный интеллект: стратегии и методы решения сложных проблем.* – М.: И.Д. Вильямс, 2003. – 864 с.
8. ПОЙА П. *Математика и правдоподобные рассуждения.* – М.: Наука, 1975. – 462 с.
9. ПОПОВ Э.В. *Экспертные системы: Решение неформальных задач в диалоге с ЭВМ.* – М.: Наука, 1987. – 288 с.
10. *Руководство по кредитному скорингу* / Под ред. Э. Мэйз. – Минск: Гревцов Паблишер, 2008. – 464 с.
11. ТРОНИН С.Н. *Введение в теорию групп. Задачи и теоремы: часть 1.* – Казань: Казанский государственный университет, 2006. – 100 с.
12. *Экспертные системы: принципы разработки и программирование* / Ред. Дж. Джаррантано, Г. Райли. – М.: И.Д. Вильямс, 2007. – 1152 с.
13. СТЕФАНЮК В.Л. *Некоторые аспекты теории экспертных систем* // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. – 1987. – №2. – С. 85–91.
14. CHENG Y., KASHYAP R.L. *An Axiomatic Approach for Combining Evidence from a Variety of Sources* // Journal of

- Intelligent and Robotic Systems. – 1988. – №1. – P. 17–33.
15. JOHNSON N., KOTZ S. *Axiomatic Approach to Formulas for Combining Likelihoods or Evidence* // Journal of Statistical Computation and Simulation. – 1989. – №31. – P. 49–54.
 16. METCALFE G., OLIVETTI N., GABBAY D. *Proof Theory for Fuzzy Logics*. – Berlin: Springer, 2009. – 276 p.
 17. *Rule-Based Expert Systems: The MYCIN Experiments of the Stanford Heuristic Programming Project* /Edited by B.G. Buchanan, E.H. Shortliffe. – MA: Addison-Wesley, 1984. – 748 p.

FORMAL PROPERTIES OF THE SHORTLIFFE SCHEME

Natalia Morosanova, Moscow State University, Moscow, post-graduate (nmorosanova@gmail.com).

Sergey Soloviev, Moscow State University, Moscow, Doctor of Science, professor (soloviev@glossary.ru).

Abstract: We consider an isomorphic mapping of the Shortliffe scheme, which can significantly modify the functions of the scheme for calculating the certainty factors. We also investigate questions of construction of the isomorphisms generating schemes of plausible reasoning with desired properties.

Keywords: production systems, the Shortliffe scheme, combination of confidence factors .

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии А. С. Манделем

УДК 681.5.011 + 519.853.4
ББК 32.965 + 22.18

АТОМНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ, ЧАСТЬ 1: ТРАНСФОРМАЦИЯ ПРОСТРАНСТВА ПОИСКА И ОДНОМЕРНЫЕ ЗАДАЧИ

Поздяев В. В.¹

*(Арзамасский политехнический институт (филиал)
Нижегородского государственного технического университета
им. Р. Е. Алексеева, Арзамас)*

Рассмотрены задачи оптимизации с полиномиальными целевой функцией и ограничениями в виде неравенств. Представлена трансформация основанного на теории моментов метода их решения, позволяющая конструировать эквивалентные алгоритмы решения в расширенном исходном пространстве поиска вместо пространства моментов. Детально рассмотрен случай одномерных задач оптимизации.

Ключевые слова: нелинейное программирование, матричные неравенства, полиномиальные неравенства, теория моментов.

Введение

Рассмотрим задачу нахождения глобальных экстремумов полиномиальной целевой функции на множестве, заданном полиномиальными неравенствами (ПН):

$$(1) \quad \begin{aligned} f^* &= \min_x f(x), \\ g_i(x) &\geq 0, \\ x &\in \mathbb{R}^n, \quad i = 1, \dots, m, \end{aligned}$$

где $f(x)$ и $g_i(x)$ — (не обязательно выпуклые) полиномы. Далее систему таких неравенств $g_i(x)$ и саму данную задачу мы будем называть системой и задачей ПН соответственно; множество x ,

¹ Владимир Васильевич Поздяев, кандидат физико-математических наук, старший преподаватель (vprozduayev@gmail.com).

удовлетворяющих всем $g_i(x) \geq 0$, — областью поиска или допустимой областью.

В теории управления большую роль играет аналог задачи ПН с участием полиномиальных матричных неравенств (ПМН, а также система и задача ПМН соответственно):

$$(2) \quad \begin{aligned} f^* &= \min f(x), \\ G_i(x) &\geq 0, \\ x &\in \mathbb{R}^n, \quad i = 1, \dots, m, \end{aligned}$$

где $G_i(x)$ — матрицы, элементы которых являются полиномами от x , а знак неравенства понимается как требование положительной полуопределенности. Очевидно, что можно рассматривать ПН как частный случай ПМН, а ПМН сводить к системе ПН с помощью, например, критерия Сильвестра. Следовательно, данные представления являются взаимозаменяемыми. Тем не менее, если при формализации задачи естественным образом возникают ПМН, то работа с ними напрямую (без сведения к ПН) может существенно упростить вычисления.

Отметим, что в литературе зачастую рассматривается не указанная общая форма ПМН, а ориентированные на те или иные классы задач теории управления конкретные их разновидности, такие как билинейные матричные неравенства [10] и параметризованные линейные матричные неравенства [1].

Работа с системами ПН и ПМН представляет собой трудную вычислительную задачу, известные алгоритмы решения которой неизбежно обладают такими недостатками, как ограниченность сферы применения, малая эффективность, эвристичность и т.п. В отдельных частных случаях (таких как задача о статической обратной связи по состоянию, динамической обратной связи по выходу без ограничения на порядок регулятора) были найдены подходы, позволяющие сделать задачу выпуклой и найти эквивалентные формулировки в терминах систем линейных матричных неравенств (ЛМН); см., например, [3, 11]. Для других, не менее фундаментальных, задач, таких как проектирование ПИД-регулятора, одновременная стабилизация, стабилизация статической обратной связью по выходу, эквивалентные системы ЛМН

неизвестны.

Задачи ПН и ПМН могут решаться локальными или глобальными методами.

- Локальные методы. Чувствительны к выбору начального приближения и не гарантируют сходимость в ряде важных случаев. В литературе описаны — и реализованы в виде программного обеспечения — различные варианты локальных методов для разных типов задач. В частности, первой общедоступной реализацией решателя билинейных матричных неравенств является пакет PENBMI [10, 13, 12].
- Глобальные методы. Зачастую основаны на методе ветвей и границ, но есть и иные варианты; в данной статье рассматривается подход на базе проблемы моментов. Требуют значительных вычислительных ресурсов. Важную роль здесь играет представление отдельных этапов решения задачи в виде ЛМН. Его стратегия может сильно влиять на эффективность метода, но, к сожалению, в общем случае здесь невозможно избежать той или иной разновидности комбинаторного взрыва. Как следствие, применимость данных методов ограничена задачами относительно небольшого размера.

В серии работ [7, 8, 14] был предложен и реализован в виде пакета для MATLAB [9] метод глобальной оптимизации, фундамент которого образуют теория разложения полиномов в сумму квадратов и двойственная ей теория моментов. С их помощью для задач ПН и ПМН строится иерархия ЛМН-релаксаций в пространстве моментов переменных. Каждый следующий элемент иерархии имеет более высокую размерность, но при этом гарантирует более точную оценку величины экстремума. Более того, теоретическая гарантия асимптотической сходимости к глобальному экстремуму на практике зачастую превращается в сходимость за конечное число итераций². Для таких случаев предусмотрены

² Итераций верхнего уровня, каждая из которых заключается в построении и решении ЛМН-релаксации определенного порядка.

процедуры, позволяющие извлечь положение глобальных экстремумов из решений ЛМН-релаксаций.

Отметим следующие достоинства данного метода:

- Позволяет решать задачи со скалярными или матричными полиномиальными неравенствами.
- Гарантирует, что найденный экстремум действительно является глобальным.
- При наличии нескольких глобальных экстремумов находит их всех одновременно без привлечения дополнительных стратегий перебора, ветвления и т.п.
- Основная масса вычислений связана с решением систем ЛМН определенного вида, для чего могут быть использованы эффективные реализации известных алгоритмов.

Вместе с тем он имеет и существенные недостатки, в том числе:

- Он также не избежал комбинаторного взрыва: например, в [8] приводится пример задачи о стабилизации статической обратной связью по выходу линейной системы с 9 координатами состояния, 1 входом и 5 выходами, для которой попытка решения на основе неравенства Ляпунова привела бы к ЛМН с 33649 неизвестными уже в простейшей (первой) релаксации.
- Максимальный порядок моментов, задействованных в ЛМН-релаксации, растет вместе с ее номером, равно как и со степенью полиномов в исходной системе ПМН. При этом ухудшается обусловленность матриц, составляющих ЛМН-релаксации, что отрицательно влияет на точность решения. Эта проблема дополнительно усугубляется потенциально плохой обусловленностью самих ПМН; см., например, [6].

Автором была разработана трансформация данного метода, возвращающая нас из пространства моментов неизвестных (используемого в ЛМН-релаксациях) обратно в исходное пространство поиска (используемое в ПМН) с некоторыми дополнениями. Такой переход позволяет устранить оба указанных недостатка, сохранив при этом способность находить как локальные, так и глобальные экстремумы в задачах с невыпуклыми и даже несвязными областями поиска.

Отметим, что многие подвиды задачи ПМН, а следовательно, и она сама, являются *NP*-трудными [2]. Это не позволяет нам сконструировать алгоритм полиномиальной сложности, гарантирующий нахождение глобального минимума в общем случае. С другой стороны, если рассматривать не сформированные специальным образом, а возникающие на практике задачи, можно видеть, что даже в случае их невыпуклости рельеф целевой функции и вид области поиска могут оказаться относительно простыми (см. иллюстрацию к разделу III-E в [8]). Вышеуказанный метод лишен возможности воспользоваться этим обстоятельством, но предлагаемый в данной работе алгоритм имеет достаточную гибкость, чтобы, варьируя количество задействованных атомов, балансировать между объемом вычислений и результатами, характерными для локального поиска и для полноценного эквивалента исходных ЛМН-релаксаций (см. разделы 4 и 5).

В настоящей работе детально рассматривается случай скалярных неравенств и одномерного пространства поиска: задача ПН с $n = 1$. Несмотря на очевидную ограниченность, он позволяет полностью сформировать структуру нового алгоритма оптимизации, а также представить базовые формулы, получающие свое развитие в задачах с $n > 1$, в том числе и в ПМН общего вида.

В разделе 1 кратко описан исходный метод построения ЛМН-релаксаций для задач ПН. Раздел 2 содержит результаты, связанные с трансформацией пространства поиска данного метода. В разделах 3 и 4 представлено применение этих результатов к случаю $n = 1$, дающее вычислительную схему, значительно бо-

лее гибкую по сравнению с оригиналом и при этом имеющую аналогичные характеристики сходимости. Пример, сравнивающий базовый метод с его трансформацией, приведен в разделе 5.

В дальнейших работах схема, описанная в разделах 2–4, будет распространена на задачи ПН с $n > 1$, а также на задачи ПМН.

1. Известные результаты

Приведем основные положения метода решения задач ПН, опубликованного в [14] и расширенного в [7, 8].

Введем следующие обозначения. Пусть $b_r(x)$ — вектор, состоящий из одночленов, образующих базис пространства многочленов порядка не выше r :

$$b_r(x) = [1 \quad x_1 \quad \dots \quad x_n \quad x_1^2 \quad x_1 x_2 \quad \dots \quad x_n^2 \quad \dots \quad x_n^r]^T,$$

а $s_n(r) = C_{n+r}^r = \frac{(n+r)!}{n!r!}$ — его размерность. Каждому одночлену из $b_r(x)$ поставим в соответствие вектор $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $\sum_i \alpha_i \leq r$ (далее будем записывать как $\alpha \leq r$), показателей степеней x_1, x_2, \dots, x_n ; обозначим $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$. Для произвольного многочлена $p(x)$ степени не выше r будем индексировать вектор \mathbf{p} его координат в базисе $b_r(x)$ двумя взаимозаменяемыми способами: по номеру элемента и по вектору показателей степеней. Таким образом, $\mathbf{p} = [p_i]_{1 \leq i \leq s_n(r)} = [p_\alpha]_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n, \alpha \leq r}$, в том числе $p_1 = p_{[0,0,\dots,0]}$, $p_2 = p_{[1,0,\dots,0]}$ и т. д., при этом

$$p(x) = \langle \mathbf{p}, b_r(x) \rangle = \mathbf{p}^T b_r(x) = \sum_{\alpha \leq r} p_\alpha x^\alpha.$$

Аналогичным образом будем индексировать строки и столбцы матриц там, где это применимо.

Рассмотрим вектор $y = [y_\alpha]_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n, \alpha \leq 2k}$ и полином $g(x)$ степени не выше $2d$, $d \in \mathbb{N}_0$, $d \leq k$. Построим матрицу моментов $M_k(y) \in \mathbb{R}^{s_n(k) \times s_n(k)}$ и локализирующую матрицу $M_{k-d}(g, y) \in \mathbb{R}^{s_n(k-d) \times s_n(k-d)}$, строки и столбцы которых проиндексированы

соответственно базисам $b_k(x)$ и $b_{k-d}(x)$, а элементы заданы следующими формулами:

$$(3) \quad \begin{aligned} (M_k(y))_{\alpha\beta} &= y_{\alpha+\beta}, \\ (M_{k-d}(g, y))_{\alpha\beta} &= \sum_{\gamma \leq 2d} g_\gamma y_{\alpha+\beta+\gamma}, \end{aligned}$$

где $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}_0^n$, а g_γ — элементы вектора коэффициентов $g(x)$ в базисе $b_{2d}(x)$.

Нас интересуют ситуации, когда для y существует положительная Борелевская представляющая мера μ такая, что

$$y_\alpha = \int x^\alpha d\mu, \quad \alpha \in \mathbb{N}_0^n, \quad \alpha \leq r.$$

Величины y_α при этом являются моментами x , а сами векторы y принадлежат (усеченному) пространству моментов x . Матрицы $M_k(y)$ и $M_{k-d}(g, y)$ тогда равны

$$(4) \quad \begin{aligned} M_k(y) &= \int b_k(x)b_k(x)^T d\mu, \\ M_{k-d}(g, y) &= \int g(x)b_{k-d}(x)b_{k-d}(x)^T d\mu, \end{aligned}$$

и мы можем сформировать два условия, играющие центральную роль в дальнейших построениях.

- Необходимым условием существования меры с моментами y является $M_k(y) \geq 0$. В самом деле, для произвольного многочлена $p(x)$ степени не более k (так что \mathbf{p} — произвольный вектор из $\mathbb{R}^{s_n(k)}$) имеем:

$$\begin{aligned} \int p(x)^2 d\mu &= \\ &= \int \langle \mathbf{p}, b_k(x) \rangle^2 d\mu = \int (\mathbf{p}^T b_k(x)) (b_k(x)^T \mathbf{p}) d\mu = \\ &= \int \mathbf{p}^T (b_k(x)b_k(x)^T) \mathbf{p} d\mu = \mathbf{p}^T \left(\int b_k(x)b_k(x)^T d\mu \right) \mathbf{p} = \\ &= \mathbf{p}^T M_k(y) \mathbf{p}. \end{aligned}$$

Поскольку левая часть неотрицательна, правая должна представлять собой положительно полуопределенную квадратичную форму.

- Аналогично можно продемонстрировать, что для того чтобы носитель μ был подмножеством $\{x \in \mathbb{R}^n | g(x) \geq 0\}$, необходимо выполнение неравенства $M_{k-d}(g, y) \geq 0$:

$$\begin{aligned} \int g(x)p(x)^2 d\mu &= \int g(x) \langle \mathbf{p}, b_{k-d}(x) \rangle^2 d\mu = \\ &= \int g(x) (\mathbf{p}^T b_{k-d}(x)) (b_{k-d}(x)^T \mathbf{p}) d\mu = \\ &= \mathbf{p}^T \left(\int g(x) b_{k-d}(x) b_{k-d}(x)^T d\mu \right) \mathbf{p} = \\ &= \mathbf{p}^T M_{k-d}(g, y) \mathbf{p} \geq 0. \end{aligned}$$

Здесь $p(x)$ — произвольный многочлен степени не более $k - d$ (так что \mathbf{p} — произвольный вектор из $\mathbb{R}^{s_n(k-d)}$).

Вернемся к задаче (1). Пусть $d_i = \lceil \frac{1}{2} \deg g_i(x) \rceil$, а k удовлетворяет ограничениям $2k \geq \deg f(x)$, $k \geq d_i$. Пусть f_α — коэффициенты $f(x)$ в базисе $b_{2k}(x)$, так что

$$\int f(x) d\mu = \int \sum_{\alpha \leq 2k} f_\alpha x^\alpha d\mu = \sum_{\alpha \leq 2k} f_\alpha y_\alpha.$$

ЛМН-релаксацией (1) будем называть систему

$$\begin{aligned} f^* &= \min_y \sum_{\alpha \leq 2k} f_\alpha y_\alpha, \\ (5) \quad M_k(y) &\geq 0, \\ M_{k-d_i}(g_i, y) &\geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \\ y_{[0,0,\dots,0]} &= 1. \end{aligned}$$

В [14] (теорема 4.2) показано, что, с учетом некоторых неprincipиальных ограничений, при $k \rightarrow \infty$ величина экстремума ЛМН-релаксации стремится к величине экстремума исходной задачи

ПН. Более того, как правило, уже при конечных (и относительно небольших) значениях k данные величины становятся равны, а вектор моментов решения задачи ПН является решением соответствующей ЛМН-релаксации.

Согласно [5] (теорема 1.6), достаточным условием достижения вышеуказанного значения k является

$$r \equiv \text{rank } M_k(y^*) = \text{rank } M_{k-d}(y^*),$$

где y^* — решение ЛМН-релаксации, а $d = \max_i d_i$. Если оно выполняется, то y^* представляет собой вектор моментов r -атомной меры³, атомы которой x^{*j} , $j = 1, \dots, r$, соответствуют глобальным минимумам (1). Данные атомы могут быть найдены из системы полиномиальных уравнений, следующей из (4):

$$M_k(y^*) = \sum_{j=1}^r \lambda_j b_k(x^{*j}) b_k(x^{*j})^T,$$

где λ_j — неизвестные веса, удовлетворяющие условиям $\lambda_j \geq 0$, $\sum_{j=1}^r \lambda_j = 1$. В [7] представлен алгоритм эффективного решения таких систем с помощью базовых операций линейной алгебры.

В [8] показан способ построения аналогичных ЛМН-релаксаций для задач ПМН без предварительного перевода в форму ПН.

2. Трансформация пространства поиска

Изложенный в предыдущем разделе метод решения задач ПН включает три этапа (первые два шага могут повторяться, пока мы не найдем подходящее значение k).

- 1) Прямая трансформация пространства поиска из \mathbb{R}^n в $\mathbb{R}^{s_n(2k)}$: построение ЛМН-релаксации (5) с достаточно большим k .

³ N -атомная мера — мера, носитель которой является множеством из N точек («атомов»).

- 2) Решение вспомогательной задачи (полученной системы ЛМН).
- 3) Псевдообратная трансформация пространства поиска из $\mathbb{R}^{s_n(2k)}$ в $\mathbb{R}^{r \times (n+1)}$: восстановление экстремумов исходной задачи из полученного решения.

Таким образом, в решении задачи участвуют три различных пространства:

- исходное пространство поиска (\mathbb{R}^n);
- пространство моментов порядка до $2k$ ($\mathbb{R}^{s_n(2k)}$);
- пространство атомов, элементами которого являются кортежи из r пар «вектор исходного пространства; его вес» ($\mathbb{R}^{r \times (n+1)}$).

Выбор пространства моментов в качестве целевого пространства для этапа трансформации позволяет линейаризовать задачу оптимизации, но приводит к возникновению существенных затруднений нового характера:

- Размерность пространства моментов $s_n(2k)$ подвержена комбинаторному взрыву с ростом n и k .
- При увеличении k нередко возникает тенденция к появлению существенной разницы в порядках величин y_α , связанная с возведением элементов x в высокие степени. Это отрицательно сказывается на точности вычислений как на этапе решения ЛМН-релаксации, так и при извлечении атомов из найденного вектора моментов.

Чтобы справиться с ними, в настоящей работе мы предлагаем исключить из процедуры решения выход в данное промежуточное пространство. Для этого необходимо сформулировать (и решить) *напрямую в пространстве атомов* вспомогательную задачу оптимизации, в определенном смысле эквивалентную ЛМН-релаксации (5). При этом мы отказываемся от ЛМН-

представления исходной задачи, заменяя его на структуру, объединяющую непосредственно элементы (1) в рамках одной целевой функции, минимум которой находится с помощью модифицированного метода Ньютона.

2.1. АЛГОРИТМЫ ОПТИМИЗАЦИИ

Прежде чем формулировать задачу оптимизации, эквивалентную (5), определим, что подразумевается под «эквивалентностью» в данном контексте. Запишем систему ЛМН (5) в общем виде:

$$(6) \quad \begin{aligned} f^* &= \min_y c^T y, \\ F(y) &= \sum_{\alpha \leq 2k} F_\alpha y_\alpha \geq 0 \\ y_{[0,0,\dots,0]} &= 1, \end{aligned}$$

где вектор c состоит из f_α , а $F(y) = \text{diag}(M_k(y), M_{k-d_1}(g_1, y), \dots, M_{k-d_m}(g_m, y))$. Для ее решения существует множество алгоритмов, см. [4]. Далее мы будем использовать один из простейших вариантов метода внутренней точки в прямой форме с ньютоновским направлением поиска. Приведем его краткую схему.

Выберем⁴ вектор $y^{(0)}$, удовлетворяющий ограничениям (6), и монотонно невозрастающую сходящуюся к 0 вещественную последовательность $\{\mu^{(i)}\}$, $i = 0, 1, 2, \dots$. Сформируем семейство комбинаций целевой и барьерной функций вида

$$f^{(i)}(y) = c^T y - \mu^{(i)} \log \det F(y).$$

Для $i = 0, 1, 2, \dots$ положим $y^{(i+1)}$ равным результату решения подзадачи поиска минимума $f^{(i)}(y)$ на интервале прямой (с учетом ограничения $F(y) \geq 0$), проходящей через $y^{(i)}$ и имеющей направление, предписываемое методом Ньютона. Конструируемая таким образом последовательность $\{y^{(i)}\}$ сходится к искомому решению задачи (6).

⁴ Мы не останавливаемся на вопросах выбора начального приближения и стратегии формирования $\{\mu^{(i)}\}$, поскольку они подробно изучены в литературе.

Подзадача о линейном поиске представляет собой задачу одномерной оптимизации функции вида $f^{(i)}(y^{(i)} + t \Delta y(y^{(i)}))$ относительно t , где $\Delta y = \Delta y(y)$ — направление спуска. Отметим, что, поскольку $y_{[0,0,\dots,0]}$ является константой, при формировании Δy необходимо использовать градиент и гессиан $f^{(i)}(y)$ в подпространстве $\mathbb{R}^{s_n(2k)}$, соответствующем всем y_α для $\alpha \neq 0$:

$$\Delta y = [0 \mid \bar{\Delta} y],$$

$$\bar{\Delta} y = - \left(\bar{\nabla}^2 f^{(i)}(y) \right)^{-1} \bar{\nabla} f^{(i)}(y),$$

где $\bar{\nabla} f^{(i)}$ и $\bar{\nabla}^2 f^{(i)}$ — градиент и гессиан $f^{(i)}(y)$ в указанном подпространстве:

$$(7) \quad \begin{aligned} \left(\bar{\nabla} f^{(i)}(y) \right)_\alpha &= c_\alpha - \mu \operatorname{tr} (F(y)^{-1} F_\alpha), \\ \left(\bar{\nabla}^2 f^{(i)}(y) \right)_{\alpha\beta} &= \mu \operatorname{tr} (F(y)^{-1} F_\alpha F(y)^{-1} F_\beta). \end{aligned}$$

В силу неравенства $F(y + t \Delta y) = F(y) + t F(\Delta y) \geq 0$, интервал поиска ограничивается сверху и снизу ближайшими к 0 положительным и отрицательным обобщенными собственными значениями матриц $F(y)$ и $-F(\Delta y)$ (если таковые имеются).

В качестве результата решения данной подзадачи может использоваться вектор $y' = y + t^* \Delta y$, где t^* — найденное положение экстремума (исчерпывающий поиск), или же $y' = y + \alpha t^* \Delta y$ для некоторого $\alpha \in (0; 1)$ (демпфированный поиск). Последний вариант в некоторых случаях позволяет улучшить сходимость и устойчивость алгоритма.

Пусть теперь y является гладкой функцией вектора x той же размерности⁵: $y = y(x)$; матрица Якоби J с элементами

$$J_{ij} = \frac{dy_i}{dx_j}$$

⁵ Впоследствии в роли x будет выступать вектор из пространства атомов.

невырождена, и (конечные) минимумы $f^{(i)}(y)$ и $f^{(i)}(y(x))$ существуют. Для малых значений t имеем:

(8)

$$y_i(x+t \Delta x) = y_i(x) + \sum_j \frac{dy_i}{dx_j} \Delta x_j t + o(t) = y_i(x) + (J \Delta x)_i t + o(t).$$

Таким образом, движение от точки x в направлении Δx эквивалентно в малом движению от $y(x)$ в направлении $\Delta y = J \Delta x$.

Такое понятие эквивалентного направления естественным образом интегрируется в алгоритм оптимизации. А именно, построим алгоритм поиска экстремумов семейства функций $f^{(i)}(y(x))$ в пространстве векторов x , повторяющий вышеприведенную схему, в котором

- начальным приближением является вектор $x^{(0)}$ такой, что $y(x^{(0)}) = y^{(0)}$;
- направление спуска выбирается как $\Delta x = \Delta x(x) = J^{-1} \Delta y(y(x))$.

Данный алгоритм мы будем называть эквивалентным исходному алгоритму в контексте трансформации $y = y(x)$. Далее мы показываем, что, в дополнение к вычислению $f^{(i)}(y(x))$ как функции от x , вектор y можно также исключить из функции $\Delta x(x) = J^{-1} \Delta y(y(x))$, а следовательно, и из нового алгоритма в целом.

Отдельно отметим связь между производными целевых функций по x и по y :

$$\frac{d}{dx_i} f^{(i)} = \sum_j \frac{dy_j}{dx_i} \frac{d}{dy_j} f^{(i)},$$

или $\frac{d}{dx} f^{(i)} = J^T \frac{d}{dy} f^{(i)}$. Отсюда следует, что для найденного новым алгоритмом экстремума x^* (в котором $\frac{d}{dx} f^{(i)}(y(x^*)) = 0$) вектор $y^* = y(x^*)$ (для которого в силу невырожденности J необходимо имеем $\frac{d}{dy} f^{(i)}(y^*) = 0$) является решением задачи (6). Это верно для любого допустимого начального приближения — в том

числе и тогда, когда область поиска в исходной задаче (1) несвязна, а решение задачи и выбранное в качестве начального приближения множество атомов находятся в разных компонентах связности: см. раздел 5.

2.2. БАЗОВЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Прежде чем представлять формулу для нахождения $\Delta x(x)$, приведем два вспомогательных результата.

Для целевой функции $f(x)$, которая в окрестности некоторого x_0 имеет вид

$$f(x) = (x - x_0)^T A(x - x_0) + b^T(x - x_0) + c + o(\|x - x_0\|^2),$$

следующая лемма позволяет найти ньютоновское направление с учетом линейного ограничения в виде равенства.

Лемма 1. Пусть в задаче оптимизации

$$\begin{aligned} f^* &= \min f(x), \\ f(x) &= (x - x_0)^T A(x - x_0) + b^T(x - x_0) + c, \\ \nu^T x &= \nu^T x_0, \end{aligned}$$

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$; $x, x_0, b, \nu \in \mathbb{R}^n$; $c \in \mathbb{R}$, выполняются соотношения $b, \nu \in \text{col } A + A^T$; $A + A^T \geq 0$. Тогда вектор Δx , который необходимо прибавить к x_0 , чтобы попасть в точку минимума (одну из возможных, если $\det A + A^T = 0$), равен

$$\Delta x = H^- \left(-g + \frac{\nu^T H^- g}{\nu^T H^- \nu} \nu \right),$$

где $g = \nabla f(x_0) = b$, $H = \nabla^2 f(x_0) = A + A^T$, H^- — произвольная⁶ обобщенная обратная к H матрица.

⁶ Свободно выбирается из множества обобщенных обратных матриц при первом упоминании. Все дальнейшие вхождения этой матрицы имеют то же значение.

Доказательство. Воспользовавшись методом множителей Лагранжа, получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} H(x - x_0) + g + \lambda\nu &= 0, \\ \nu^T x &= \nu^T x_0, \end{aligned}$$

где x — искомая точка минимума, λ — множитель Лагранжа. Поскольку $g, \nu \in \text{col } H$, первое уравнение разрешимо относительно x :

$$x = x_0 - H^{-1}(g + \lambda\nu).$$

Подставив результат во второе уравнение, находим

$$\lambda = -\frac{\nu^T H^{-1}g}{\nu^T H^{-1}\nu},$$

откуда

$$x = x_0 + H^{-1}\left(-g + \frac{\nu^T H^{-1}g}{\nu^T H^{-1}\nu}\nu\right).$$

Учитывая, что $\Delta x = x - x_0$, получаем утверждение леммы.

Следующая лемма показывает влияние трансформации $y = y(x)$ на градиенты и гессианы функций.

Лемма 2. Пусть $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, и функции $y(x)$ и $f(y)$ достаточное количество раз дифференцируемы. Тогда

$$\begin{aligned} g_x &= J^T g_y, \\ H_x &= J^T H_y J + H_x^y, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} g_x &= \nabla_x f, & H_x &= \nabla_x^2 f, & H_x^y &= \sum_k \frac{df}{dy_k} (\nabla_x^2 y_k), \\ g_y &= \nabla_y f, & H_y &= \nabla_y^2 f, \\ J &= \left[\frac{dy_i}{dx_j} \right]_{ij}, \end{aligned}$$

∇ и ∇^2 с нижними индексами — полные градиент и гессиан по соответствующим переменным:

$$\nabla_p q \equiv \left[\frac{d}{dp_i} q \right]_i, \quad \nabla_p^2 q \equiv \left[\frac{d^2}{dp_i dp_j} q \right]_{ij},$$

и функции в правых частях вычисляются в точках x (для $y(x)$), $f(y(x))$ и их производных) и $y(x)$ (для $f(y)$ и ее производных).

Доказательство. Данные равенства являются матричной формой соотношений

$$\frac{df}{dx_i} = \sum_j \frac{df}{dy_j} \frac{dy_j}{dx_i}$$

и

$$\begin{aligned} \frac{d^2 f}{dx_i dx_j} &= \frac{d}{dx_i} \sum_k \frac{df}{dy_k} \frac{dy_k}{dx_j} = \\ &= \sum_k \left(\frac{d}{dx_i} \frac{df}{dy_k} \right) \frac{dy_k}{dx_j} + \frac{df}{dy_k} \frac{d^2 y_k}{dx_i dx_j} = \\ &= \sum_{k,l} \frac{d^2 f}{dy_l dy_k} \frac{dy_l}{dx_i} \frac{dy_k}{dx_j} + \sum_k \frac{df}{dy_k} \frac{d^2 y_k}{dx_i dx_j} \end{aligned}$$

(суммирование производится по всем допустимым значениям индексов).

Запишем решаемую методом внутренней точки подзадачу оптимизации в несколько более общей форме:

$$(9) \quad \begin{aligned} f^* &= \min_y f(y), \\ \nu_y^T y &= \nu_y^T y^{(0)}, \end{aligned}$$

где $f = f^{(i)}$, а $\nu_y = [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]$ (из (6) также следует, что $\nu_y^T y^{(0)} = 1$, но на данном этапе это не имеет значения). Тогда имеет место следующая теорема (мы продолжаем использовать обозначения из леммы 2).

Теорема 1. Пусть в точке $y = y(x)$ выполняются соотношения $g_y, \nu_y \in \text{col } H_y$; $H_y \geq 0$; $\det J \neq 0$. Тогда направление поиска Δx в алгоритме, эквивалентном методу внутренней точки в первичной форме с ньютоновским направлением поиска в контексте трансформации $y = y(x)$, применительно к (9) имеет следующий вид:

$$(10) \quad \Delta x = \tilde{H}_x^- \left(-g_x + \frac{\nu_x^\top \tilde{H}_x^- g_x}{\nu_x^\top \tilde{H}_x^- \nu_x} \nu_x \right),$$

где $\tilde{H}_x = H_x - H_x^y$; \tilde{H}_x^- — обобщенная обратная к \tilde{H}_x матрица; $\nu_x = J^\top \nu_y$; градиент g_x и модифицированный гессиан \tilde{H}_x вычисляются в текущей точке x .

Доказательство. Воспользуемся леммой 1:

$$\Delta y = H_y^- \left(-g_y + \frac{\nu_y^\top H_y^- g_y}{\nu_y^\top H_y^- \nu_y} \nu_y \right).$$

Подставим в $\Delta x = J^{-1} \Delta y$ выраженные из результатов леммы 2 величины $g_y = J^{-\top} g_x$ и $H_y = J^{-\top} (H_x - H_x^y) J^{-1} = J^{-\top} \tilde{H}_x J^{-1}$, а также $\nu_y = J^{-\top} \nu_x$:

$$\begin{aligned} \Delta x &= J^{-1} \left((J^{-\top} \tilde{H}_x J^{-1})^- (-J^{-\top} g_x + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(J^{-\top} \nu_x)^\top (J^{-\top} \tilde{H}_x J^{-1})^- (J^{-\top} g_x)}{(J^{-\top} \nu_x)^\top (J^{-\top} \tilde{H}_x J^{-1})^- (J^{-\top} \nu_x)} J^{-\top} \nu_x \right) = \\ &= J^{-1} (J \tilde{H}_x^- J^\top) \left(-J^{-\top} g_x + \frac{\nu_x^\top J^{-1} (J \tilde{H}_x^- J^\top) J^{-\top} g_x}{\nu_x^\top J^{-1} (J \tilde{H}_x^- J^\top) J^{-\top} \nu_x} J^{-\top} \nu_x \right) = \\ &= \tilde{H}_x^- \left(-g_x + \frac{\nu_x^\top \tilde{H}_x^- g_x}{\nu_x^\top \tilde{H}_x^- \nu_x} \nu_x \right). \end{aligned}$$

Здесь использован тот факт, что для произвольной обобщенной обратной к \tilde{H}_x матрицы \tilde{H}_x^- матрица $J \tilde{H}_x^- J^\top$ удовлетворяет соотношению

$$\begin{aligned} (J^{-\top} \tilde{H}_x J^{-1}) (J \tilde{H}_x^- J^\top) (J^{-\top} \tilde{H}_x J^{-1}) &= \\ &= J^{-\top} \tilde{H}_x \tilde{H}_x^- \tilde{H}_x J^{-1} = J^{-\top} \tilde{H}_x J^{-1}, \end{aligned}$$

а следовательно, является обобщенной обратной для $J^{-T} \tilde{H}_x J^{-1}$ — и наоборот, для произвольной обобщенной обратной к $J^{-T} \tilde{H}_x J^{-1}$ матрицы $(J^{-T} \tilde{H}_x J^{-1})^-$ найдется соответствующая обобщенная обратная к \tilde{H}_x матрица $\tilde{H}_x^- = J^{-1}(J^{-T} \tilde{H}_x J^{-1})^- J^{-T}$:

$$\begin{aligned} \tilde{H}_x \tilde{H}_x^- \tilde{H}_x &= (J^T J^{-T} \tilde{H}_x)(J^{-1}(J^{-T} \tilde{H}_x J^{-1})^- J^{-T})(\tilde{H}_x J^{-1} J) = \\ &= J^T (J^{-T} \tilde{H}_x J^{-1})(J^{-T} \tilde{H}_x J^{-1})^- (J^{-T} \tilde{H}_x J^{-1}) J = \\ &= J^T (J^{-T} \tilde{H}_x J^{-1}) J = \tilde{H}_x. \end{aligned}$$

В (10) есть только два элемента, которые содержат y или его производные в явном виде.

- Вектор $\nu_x = J^T \nu_y$. Если y — вектор моментов, то, как мы увидим в следующем разделе, ν_x почти столь же тривиален, как и ν_y .
- Матрица $H_x^y = \sum_k \frac{df}{dy_k} (\nabla_x^2 y_k)$. Чтобы исключить из данного выражения y , необходимо учесть фактический вид целевой функции:

$$f^{(i)}(y) = c^T y - \mu^{(i)} \log \det F(y),$$

откуда

$$H_y = \nabla_y^2 f^{(i)}(y) = -\mu^{(i)} \nabla_y^2 \log \det F(y).$$

Таким образом, линейная компонента $c^T y$ не входит в H_y , а следовательно, и в \tilde{H}_x . Вычисление H_x^y для единственной имеющей значение компоненты, а именно, $\log \det F(y)$, будем производить на основе следующей теоремы.

Теорема 2. Для функции f вида $f(y) = \log \det F(y)$, где $F(y)$ линейно зависит от y , поправка в модифицированном гесссиане \tilde{H}_x из теоремы 1 равна

$$H_x^y = \sum_k \frac{df}{dy_k} (\nabla_x^2 y_k) = \sum_{i,j} F_{ij}^{-T} (\nabla_x^2 F_{ij}),$$

где $F_{ij} = F(y(x))_{ij}$ и $F_{ij}^{-T} = F(y(x))_{ij}^{-T}$ — соответствующие элементы матриц F и F^{-T} (суммирование производится по всем допустимым значениям индексов).

Доказательство. Воспользовавшись известной формулой для матричной производной определителя (см., например, [15]), получаем:

$$\frac{df}{dy_k} = \text{tr} \left(F^{-1} \frac{dF}{dy_k} \right) = \sum_{i,j} F_{ij}^{-T} \frac{dF_{ij}}{dy_k},$$

откуда

$$\begin{aligned} \sum_k \frac{df}{dy_k} \frac{d^2 y_k}{dx_p dx_q} &= \sum_k \left(\sum_{i,j} F_{ij}^{-T} \frac{dF_{ij}}{dy_k} \right) \frac{d^2 y_k}{dx_p dx_q} = \\ &= \sum_{i,j} F_{ij}^{-T} \left(\sum_k \frac{dF_{ij}}{dy_k} \frac{d^2 y_k}{dx_p dx_q} \right) \end{aligned}$$

для всех допустимых p и q . Сравнивая последнее подвыражение в скобках с правой частью второй формулы из леммы 2 и учитывая, что $\nabla_y^2 F_{ij} = 0$ (поскольку F линейно зависит от y), видим, что данное подвыражение — не что иное, как $\frac{d^2 F_{ij}}{dx_p dx_q}$, откуда

$$\sum_k \frac{df}{dy_k} \frac{d^2 y_k}{dx_p dx_q} = \sum_{i,j} F_{ij}^{-T} \frac{d^2 F_{ij}}{dx_p dx_q}.$$

Доказываемая формула представляет собой матричную запись данного равенства.

3. Задачи одномерной оптимизации

Применим полученные в предыдущем разделе результаты к задаче (1) с $n = 1$ и ее ЛМН-релаксации (5), взяв в качестве трансформации пространства поиска переход из пространства атомов в пространство моментов. Элементы пространства

атомов будем обозначать как z , трансформацию — как $y = y(z)$, а направление поиска в новом пространстве, соответственно, как Δz .

Пусть z — вектор в пространстве атомов $\mathbb{R}^{r \times (n+1)} = \mathbb{R}^{2r}$, имеющий структуру

$$z = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_r \ p_1 \ p_2 \ \dots \ p_r] = [x^T \mid p^T]^T,$$

где $x_i \in \mathbb{R}$ — атомы, $p_i \in (0; 1)$ — их веса. Вектор моментов y имеет размерность $s_1(2k) = 2k + 1$ и состоит из элементов вида

$$y_j = y_{[j-1]} = \sum_{i=1}^r p_i x_i^{j-1}, \quad j = 1, 2, \dots, 2k + 1.$$

Вышеизложенные результаты неприменимы напрямую к векторам y и z , поскольку размерности последних не могут быть равны в силу различающейся четности. Чтобы исправить положение, необходимо или расширить теорему 1, распространив ее на случай отличающихся размерностей задействованных пространств, или модифицировать сами пространства. Наиболее адекватным вариантом нам представляется добавление еще одного момента — порядка $2k + 1$ — в вектор y в сочетании с условием $r = k + 1$. Новый момент не входит ни в (5), ни в Δy , и нужен исключительно для выполнения условий теоремы 1. Далее мы будем работать именно с таким расширенным вектором $y \in \mathbb{R}^{2k+2}$.

Отметим, что (при $n = 1$) для любой $M_k(y) \geq 0$ найдется соответствующая $\text{rank } M_k(y)$ -атомная мера: см. алгоритм, изложенный в [7]. Поскольку $\text{rank } M_k(y) \leq s_1(k) = k + 1 = r$, каждая такая мера — а следовательно, каждая такая $M_k(y)$ — может быть представлена некоторым вектором z (в котором, возможно, часть весов p_i равна 0).

Найдем матрицу Якоби $J = J(z)$ трансформации $y = y(z) =$

$y([x^T | p^T]^T)$, а также вектор $\nu_z = J^T \nu_y$ (здесь $\alpha = 2r - 1$):

$$J = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 \\ p_1 & \dots & p_r & x_1 & \dots & x_r \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha p_1 x_1^{\alpha-1} & \dots & \alpha p_r x_r^{\alpha-1} & x_1^\alpha & \dots & x_r^\alpha \end{bmatrix};$$

$$\nu_z = J^T [1 \ 0 \ \dots \ 0]^T = [0 \ \dots \ 0 \ 1 \ \dots \ 1]^T.$$

Последний вектор содержит r нулей и r единиц. Значения ν_y и ν_z естественным образом отображаются на ограничения в соответствующих задачах оптимизации:

$$\begin{aligned} \nu_y^T y = 1 &\Leftrightarrow y_{[0]} = 1, \\ \nu_z^T z = 1 &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^r p_i = 1. \end{aligned}$$

Для применения теоремы 1 необходимо выполнение условий $g_y, \nu_y \in \text{col } H_y$; $H_y \geq 0$; $\det J \neq 0$. Поскольку добавленный нами момент $y_{[2k+1]}$ не входит в (5), а следовательно, и в $f^{(i)}(y)$, градиент и гессиан последней имеют структуру

$$g_y = \begin{bmatrix} \bar{g}_y \\ 0 \end{bmatrix}, \quad H_y = \begin{bmatrix} \bar{H}_y & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

где $\bar{g}_y \in \mathbb{R}^{s_1(2k)}$ и $\bar{H}_y \in \mathbb{R}^{s_1(2k) \times s_1(2k)}$ — градиент и гессиан $f^{(i)}(y)$, какими они были бы при использовании оригинального вектора моментов. Метод внутренней точки применительно к (5) обеспечивает в допустимой области соотношение $\bar{H}_y > 0$, откуда получаем, что $H_y \geq 0$, а также что любой вектор из $\mathbb{R}^{s_1(2k+1)}$ с нулевым последним элементом — каковыми являются g_y и ν_y — принадлежит $\text{col } H_y$.

Формула для вычисления $\det J(z)$ приведена в следующем утверждении. Сравнивая ее с $\det M_k(y(z))$ из утверждения 3, видим, что $\det J(z) = 0$ тогда и только тогда, когда $\det M_k(y(z)) = 0$. Таким образом, внутри допустимой области $\det J(z) \neq 0$.

На ее границе данное неравенство может не выполняться, что способно привести к преждевременной сходимости алгоритма к неправильной точке, если последовательность приближений $\{z^{(i)}\}$ слишком быстро подходит к границе допустимой области. Последнее возможно при использовании последовательности $\{\mu^{(i)}\}$, излишне быстро сходящейся к 0. Таким образом, стратегия формирования $\{\mu^{(i)}\}$ в новом алгоритме не менее важна, чем в исходном методе внутренней точки.

Введем дополнительные обозначения:

- для множества s и натурального числа n обозначим как \mathcal{C}_s^n множество n -элементных подмножеств s ; пусть также $\mathcal{C}_{[r]}^n = \mathcal{C}_{\{1,2,\dots,r\}}^n$;
- для конечного числового множества s обозначим как s_i его i -й наименьший элемент: s_1 — минимальный элемент s , s_2 — следующий по величине и т. д.

Имеют место следующие утверждения.

Утверждение 1. *Якобиан $y(z)$ равен*

$$\det J(z) = (-1)^{\frac{r(r+1)}{2}} \left(\prod_{i=1}^r p_i \right) \left(\prod_{i \in \mathcal{C}_{[r]}^2} (x_{i_2} - x_{i_1})^4 \right)$$

(для $r = 1$ последнее произведение считаем равным 1).

Доказательство. Для $r = 1$ определитель находится непосредственным вычислением. Предположим теперь, что $r > 1$, и доказываемая формула верна для $r' = r - 1$. Применим к J ряд элементарных преобразований. (В каждом пункте указанные операции применяются к строкам/столбцам матрицы, полученной в предыдущем пункте.)

- Для $j = 2, \dots, r$: вычтем из столбца $j + r$ столбец $r + 1$.
- Для $j = 2, \dots, r$: вычтем из столбца j столбец $j + r$, умноженный на $\frac{p_j}{x_j - x_1}$.

- Для $i = 2, \dots, r$: вычтем из строки i строку $i - 1$, умноженную на x_1 .

В результате приходим к матрице следующего вида ($\alpha = 2r - 2$):

$$J' = \left(\begin{array}{c|c|c|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline p_1 & & 0 & \\ p_1 x_1 & & 0 & \\ \vdots & J'_1 & \vdots & J'_2 \\ \hline p_1 x_1^\alpha & & 0 & \end{array} \right),$$

где

$$J'_1 = \left(\begin{array}{ccc} 0 & \dots & 0 \\ p_2(x_2 - x_1) & \dots & p_r(x_r - x_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha p_2 x_2^{\alpha-1}(x_2 - x_1) & \dots & \alpha p_r x_r^{\alpha-1}(x_r - x_1) \end{array} \right),$$

$$J'_2 = \left(\begin{array}{ccc} x_2 - x_1 & \dots & x_r - x_1 \\ x_2(x_2 - x_1) & \dots & x_r(x_r - x_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_2^\alpha(x_2 - x_1) & \dots & x_r^\alpha(x_r - x_1) \end{array} \right).$$

Проделаем аналогичные манипуляции с целью упрощения не только первой, но и второй строки матрицы.

- Для $j = 2, \dots, r$: вычтем из столбца $j + r$ столбец 1, умноженный на $\frac{x_j - x_1}{p_1}$.
- Повторим последние два пункта из предыдущего списка.

Получаем финальную матрицу ($\alpha = 2r - 3$):

$$J'' = \left(\begin{array}{c|c|c|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline p_1 & 0 & -x_1 & 0 \\ \hline 0 & & 0 & \\ 0 & & 0 & \\ \vdots & J''_1 & \vdots & J''_2 \\ \hline 0 & & 0 & \end{array} \right),$$

где

$$J_1'' = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ p_2(x_2 - x_1)^2 & \dots & p_r(x_r - x_1)^2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha p_2 x_2^{\alpha-1} (x_2 - x_1)^2 & \dots & \alpha p_r x_r^{\alpha-1} (x_r - x_1)^2 \end{pmatrix},$$

$$J_2'' = \begin{pmatrix} (x_2 - x_1)^2 & \dots & (x_r - x_1)^2 \\ x_2(x_2 - x_1)^2 & \dots & x_r(x_r - x_1)^2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_2^\alpha(x_2 - x_1)^2 & \dots & x_r^\alpha(x_r - x_1)^2 \end{pmatrix}.$$

Разложив по первым двум строкам $\det J''$ и возникающий при этом минор, имеем ($\alpha = 2r - 3$, $z' = [x_2 \dots x_r p_2 \dots p_r]^T$):

$$\begin{aligned} \det J(z) = \det J'' &= (-1)^r p_1 \det \left(J_1'' \mid J_2'' \right) = (-1)^r p_1 \times \\ &\times \prod_{i=2}^r (x_i - x_1)^4 \det \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 \\ p_2 & \dots & p_r & x_2 & \dots & x_r \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha p_2 x_2^{\alpha-1} & \dots & \alpha p_r x_r^{\alpha-1} & x_2^\alpha & \dots & x_r^\alpha \end{pmatrix} = \\ &= (-1)^r p_1 \left(\prod_{i=2}^r (x_i - x_1)^4 \right) J(z') = \\ &= (-1)^{\frac{r(r+1)}{2}} \left(\prod_{i=1}^r p_i \right) \left(\prod_{i \in C_{[r]}^2} (x_{i_2} - x_{i_1})^4 \right), \end{aligned}$$

поскольку

$$J(z') = (-1)^{\frac{r(r-1)}{2}} \left(\prod_{i=2}^r p_i \right) \left(\prod_{i \in C_{\{2, \dots, r\}}^2} (x_{i_2} - x_{i_1})^4 \right).$$

Прежде чем перейти к вычислению остальных элементов Δz , отметим, что матрица моментов $M_k(y)$ может формально

рассматриваться как локализирующая матрица $M_{k-d_0}(g_0, y)$, где $g_0(x) = 1$, $d_0 = 0$. Кроме того, в силу структуры $F(y)$,

$$\log \det F(y) = \log \det M_k(y) + \sum_{i=1}^m \log \det M_{k-d_i}(g_i, y),$$

так что

$$f^{(i)}(y) = c^T y - \mu^{(i)} \left(\log \det M_k(y) + \sum_{i=1}^m \log \det M_{k-d_i}(g_i, y) \right),$$

и величины g_z и \tilde{H}_z , из которых с помощью теоремы 1 находится $\Delta z(z)$, равны значениям следующих функций в точке z :

(11)

$$\nabla_z f^{(i)} = \nabla_z f - \mu^{(i)} \left(\nabla_z \log \det M_k + \sum_{i=1}^m \nabla_z \log \det M_{k-d_i}(g_i, y) \right),$$

$$\tilde{\nabla}_z^2 f^{(i)} = -\mu^{(i)} \left(\tilde{\nabla}_z^2 \log \det M_k + \sum_{i=1}^m \tilde{\nabla}_z^2 \log \det M_{k-d_i}(g_i, y) \right),$$

где $\tilde{\nabla}_z^2 = \nabla_z^2 - \sum_i (\nabla_z^2 y_i) \frac{d}{dy_i}$. Чтобы вычислить правые части, необходимо найти сами матрицы $M_{k-d_i}(g_i, y(z))$, гессианы их элементов (в соответствии с теоремой 2), а также $\nabla_z \log \det M_{k-d_i}(g_i, y)$ и $\nabla_z^2 \log \det M_{k-d_i}(g_i, y)$. Соответствующие формулы, не требующие вычисления вектора моментов y , представлены в следующих утверждениях.

Утверждение 2. Локализирующая матрица $M_{k-d} = M_{k-d}(g, y(z))$ равна

$$M_{k-d} = \sum_{i=1}^r p_i g(x_i) b_{k-d}(x_i) b_{k-d}(x_i)^T.$$

Доказательство. Следует из (4) и того, что μ — r -атомная мера.

Утверждение 3. Определитель матрицы $M_{k-d} = M_{k-d}(g, y(z))$ имеет вид

$$\det M_{k-d} = \sum_{s \in \mathcal{S}} \mathcal{D}_s,$$

где $\mathcal{S} = \mathcal{C}_{[r]}^{r-d}$, и

$$\mathcal{D}_s = \left(\prod_{i \in s} p_i g(x_i) \right) \left(\prod_{i \in \mathcal{C}_s^2} (x_{i_2} - x_{i_1})^2 \right).$$

Доказательство. Пусть B_σ и \bar{B}_σ , где $\sigma \subset \{1, 2, \dots, r\}$, — матрицы $(r-d) \times |\sigma|$, i -е столбцы которых равны $b_{k-d}(x_{\sigma_i})$ и $\sqrt{p_{\sigma_i} g(x_{\sigma_i})} b_{k-d}(x_{\sigma_i})$, соответственно. Несложно убедиться, что

$$M_{k-d} = \bar{B}_{\{1,2,\dots,r\}} \bar{B}_{\{1,2,\dots,r\}}^\top$$

и

$$\bar{B}_\sigma \bar{B}_\sigma^\top = B_\sigma \operatorname{diag} (p_{\sigma_1} g(x_{\sigma_1}), p_{\sigma_2} g(x_{\sigma_2}), \dots) B_\sigma^\top.$$

Применяя формулу Бине-Коши, имеем:

$$(12) \quad \det M_{k-d} = \det \bar{B}_{\{1,2,\dots,r\}} \bar{B}_{\{1,2,\dots,r\}}^\top = \sum_{s \in \mathcal{S}} \det \bar{B}_s \det \bar{B}_s^\top = \\ = \sum_{s \in \mathcal{S}} \det B_s \left(\prod_{i \in s} p_i g(x_i) \right) \det B_s^\top.$$

Поскольку (для $n = 1$) $b_{k-d}(x_i) = [1 \ x_i \ \dots \ x_i^{k-d}]^\top$, матрица B_s является матрицей Вандермонда, и $\det B_s = \det B_s^\top = \prod_{i \in \mathcal{C}_s^2} (x_{i_2} - x_{i_1})$. Подставляя в (12), получаем доказываемую формулу.

Утверждение 4. *С учетом обозначений предыдущего утверждения, градиент матрицы $M_{k-d} = M_{k-d}(g, y(z))$ может быть представлен как*

$$\nabla_z \log \det M_{k-d} = \frac{g_z}{\det M_{k-d}},$$

где

$$g_z = \nabla_z \det M_{k-d} = \sum_{s \in \mathcal{S}} (\nabla_z \log \mathcal{D}_s) \mathcal{D}_s,$$

а ненулевые элементы $\nabla_z \log \mathcal{D}_s$ имеют вид

$$\frac{d}{dx_i} \log \mathcal{D}_s = \frac{g'(x_i)}{g(x_i)} + \left(\sum_{j \in s \setminus \{i\}} \frac{2}{x_i - x_j} \right), \quad i \in s;$$

$$\frac{d}{dp_i} \log \mathcal{D}_s = \frac{1}{p_i}, \quad i \in s.$$

Доказательство. Данные формулы получены непосредственным дифференцированием с использованием соотношений вида $(\log f)'_x = \frac{f'_x}{f}$ (применительно к $f = \log \det M_{k-d}$) и $(\exp f)'_x = (\exp f) f'_x$ (применительно к $f = \log \mathcal{D}_s$).

Утверждение 5. *С учетом обозначений предыдущего утверждения, гессиан матрицы $M_{k-d} = M_{k-d}(g, y(z))$ может быть представлен как*

$$\nabla_z^2 \log \det M_{k-d} = \frac{H_z}{\det M_{k-d}} - \frac{g_z g_z^T}{(\det M_{k-d})^2},$$

где

$$\begin{aligned} H_z &= \nabla_z^2 \det M_{k-d} = \\ &= \sum_{s \in \mathcal{S}} (\nabla_z^2 \log \mathcal{D}_s + (\nabla_z \log \mathcal{D}_s)(\nabla_z \log \mathcal{D}_s)^T) \mathcal{D}_s, \end{aligned}$$

а ненулевые элементы $\nabla_z^2 \log \mathcal{D}_s$ имеют вид

$$\frac{d^2}{dx_i dx_j} \log \mathcal{D}_s = \frac{g''(x_i)}{g(x_i)} - \left(\frac{g'(x_i)}{g(x_i)} \right)^2 - \left(\sum_{k \in s \setminus \{i\}} \frac{2}{(x_i - x_k)^2} \right),$$

$$\{i, j\} \subset s, \quad i = j;$$

$$\frac{d^2}{dx_i dx_j} \log \mathcal{D}_s = \frac{2}{(x_i - x_j)^2}, \quad \{i, j\} \subset s, \quad i \neq j;$$

$$\frac{d^2}{dp_i dp_j} \log \mathcal{D}_s = -\frac{1}{p_i^2}, \quad \{i, j\} \subset s, \quad i = j.$$

Доказательство. Данные формулы получены непосредственным дифференцированием с использованием соотношений вида $(\log f)''_{xy} = \frac{f''_{xy}}{f} - \frac{f'_x f'_y}{f^2}$ (применительно к $f = \log \det M_{k-d}$) и $(\exp f)''_{xy} = (\exp f)(f''_{xy} + f'_x f'_y)$ (применительно к $f = \log \mathcal{D}_s$).

Для матрицы моментов $M_k(y(z))$ данные результаты существенно упрощаются, поскольку $g_0(x) = 1$, $g'_0(x) = g''_0(x) = 0$, а соответствующее \mathcal{S} состоит из единственного элемента — множества $\{1, 2, \dots, r\}$. Приведем пример с $r = 3$, $k = 2$:

$$\det M_2(y) = p_1 p_2 p_3 (x_2 - x_1)^2 (x_3 - x_1)^2 (x_3 - x_2)^2,$$

$$\begin{aligned} \det M_1(g, y) &= g(x_1)g(x_2)p_1p_2(x_2 - x_1)^2 + \\ &+ g(x_1)g(x_3)p_1p_3(x_3 - x_1)^2 + g(x_2)g(x_3)p_2p_3(x_3 - x_2)^2, \end{aligned}$$

$$\nabla_z \log \det M_2(y) = \left[\begin{array}{ccc} \frac{2}{x_1 - x_2} + \frac{2}{x_1 - x_2} & \frac{2}{x_2 - x_1} + \frac{2}{x_2 - x_3} & \\ & \frac{2}{x_3 - x_1} + \frac{2}{x_3 - x_2} & \frac{1}{p_1} \quad \frac{1}{p_2} \quad \frac{1}{p_3} \end{array} \right]^T,$$

$$\nabla_z^2 \log \det M_2(y) = \left[\begin{array}{c|c} M_X & 0 \\ \hline 0 & M_P \end{array} \right],$$

где

$$M_X = \left[\begin{array}{ccc} -\frac{2}{(x_1 - x_2)^2} - \frac{2}{(x_1 - x_3)^2} & \cdots & \frac{2}{(x_1 - x_3)^2} \\ \frac{2}{(x_1 - x_2)^2} & \cdots & \frac{2}{(x_2 - x_3)^2} \\ \frac{2}{(x_1 - x_3)^2} & \cdots & -\frac{2}{(x_1 - x_3)^2} - \frac{2}{(x_2 - x_3)^2} \end{array} \right],$$

$$M_P = \text{diag} \left(-\frac{1}{p_1^2}, -\frac{1}{p_2^2}, -\frac{1}{p_3^2} \right).$$

Конечные выражения для градиента и гессиана $\log \det M_1(g, y)$ не приведены ввиду их размера. На практике вычислять их лучше не с помощью итоговых формул, а конструируя в соответствии с вышеприведенными утверждениями.

4. Обобщение результатов

Мы показали, что расчет Δz в эквиваленте изложенного ранее алгоритма решения ЛМН-релаксации (5) может быть произведен без вычисления моментов y . Вследствие этого ограничения, связывающие порядки полиномов в задаче ПН с размером

неравенств и количеством неизвестных в ЛМН-релаксации, а также количеством атомов в новом алгоритме оптимизации, более не являются неотъемлемой частью метода решения.

Если трактовать d_i не как $\lceil \frac{\deg g_i}{2} \rceil$, а как характеристику взаимодействия группы атомов с ограничением $g_i(x) \geq 0$,⁷ мы сможем взять в качестве данных ограничений полиномы произвольного порядка и даже достаточно гладкие неполиномиальные функции. Аналогичное наблюдение относится и к целевой функции $f(x)$. Таким образом, новый алгоритм естественным образом переносится на обобщение задачи (1) для более широкого класса функций. Конечно, гарантии нахождения глобального минимума для данной расширенной трактовки задачи и алгоритма оптимизации уже не будут иметь места: они по-прежнему будут относиться только к классу задач, для которых мы изначально строили ЛМН-релаксации. Тем не менее возможность одновременного исследования нескольких локальных минимумов в окрестности начального положения атомов — в том числе и минимумов, находящихся в других компонентах связности (см. раздел 5), — представляется достаточно ценной.

Расширенная трактовка задачи и алгоритма оптимизации лишает нас возможности рассматривать $M_{k-d_i}(g_i, y)$ как функции моментов в соответствии с (3), так как количество коэффициентов g_γ , а следовательно, и необходимых моментов, теперь может быть неограниченным. Поэтому альтернативную высокоуровневую интерпретацию необходимо дать также и целевым функциям

$$f^{(i)}(y) = c^T y - \mu^{(i)} \left(\log \det M_k(y) + \sum_{i=1}^m \log \det M_{k-d_i}(g_i, y) \right),$$

в которые входят данные матрицы. Рассмотрим компоненты данных функций по отдельности.

⁷ В силу структуры $\det M_{k-d_i}(g, y)$, задаваемой утверждением 3, данная величина гарантированно останется положительной (а значит, будет выполняться и условие $M_{k-d_i}(g, y) > 0$), если в процессе поиска не более d_i атомов одновременно окажутся на границе области $\{x | g_i(x) \geq 0\}$.

- Слагаемое

$$\begin{aligned}
 c^T y &= \sum_{i=0}^{2k} f_{[i]} \left(\sum_{j=1}^r p_j x_j^i \right) = \\
 &= \sum_{j=1}^r p_j \left(\sum_{i=0}^{2k} f_{[i]} x_j^i \right) = \sum_{j=1}^r p_j f(x_j)
 \end{aligned}$$

является взвешенным средним значением целевой функции по имеющейся группе атомов.

- В соответствии с утверждением 3,

$$\begin{aligned}
 \log \det M_k(y) &= \log \det M_k(1, y) = \\
 &= \left(\sum_{i=1}^r \log p_i \right) + \left(\sum_{i \in \mathcal{C}_{[r]}^2} 2 \log |x_{i_2} - x_{i_1}| \right).
 \end{aligned}$$

Соответствующее слагаемое играет роль своего рода потенциальной функции, отталкивающей веса p_i от 0, а атомы друг от друга.

- Аналогичным образом $\log \det M_{k-d_i}(g_i, y)$ играет роль потенциальной функции, дополнительно отталкивающей атомы от границы допустимой области $\{x | g_i(x) \geq 0\}$. Отметим, что последнее относится к группе атомов в целом; индивидуальные же атомы вполне способны выходить в запрещенную зону.

Для того чтобы можно было вычислять Δz с помощью формулы (10), по существу представляющей собой результат применения леммы 1 к функции с градиентом g_x (g_z) и модифицированным гессианом \tilde{H}_x (\tilde{H}_z), необходимо выполнение условий $g_z, \nu_z \in \text{col } \tilde{H}_z$; $\tilde{H}_z \geq 0$. Ранее эти соотношения следовали из $g_y, \nu_y \in \text{col } H_y$ и $H_y \geq 0$ и в теореме 1 отдельно не доказывались. Поскольку новая трактовка алгоритма подразумевает отказ

от использования вектора моментов, необходимо убедиться в выполнении данных условий без привлечения y и связанных с ним величин.

- В общем случае, если какая-либо из функций $g_i(x)$ является полиномом степени выше $2d_i$ или неполиномиальной функцией, матрица \tilde{H}_z невырождена, и требование $g_z, \nu_z \in \text{col } \tilde{H}_z$ выполняется. Отметим, что, несмотря на невырожденность, число обусловленности \tilde{H}_z может быть велико. Поэтому здесь целесообразно дополнительно применять метод Левенберга–Марквардта: использовать в (10) $\tilde{H}_z + \lambda I$ вместо \tilde{H}_z , где I – единичная матрица; λ – некоторый коэффициент.
- Следующая теорема, будучи применена к компонентам g_z и \tilde{H}_z (11), доказывает неравенство $\tilde{H}_z \geq 0$, а также дает альтернативные формулы для вычисления g_z и \tilde{H}_z , имеющие аналогичную (7) структуру. Особо отметим независимость модифицированного гессiana от вторых производных $F(x)$.

Теорема 3. Пусть $F = F(x)$ – симметричная вещественная матрица⁸ с дважды дифференцируемыми по x элементами, и $F(x_0) > 0$. Пусть⁹

$$g_x = \nabla \log \det F(x_0), \quad \tilde{H}_x = H_x - H_x^y,$$

$$H_x = \nabla^2 \log \det F(x_0), \quad H_x^y = \sum_{i,j} F_{ij}^{-T}(x_0) (\nabla^2 F_{ij}(x_0)).$$

⁸ Использование x вместо z имеет целью соблюдение соответствия обозначений теоремам 1 и 2.

⁹ Несмотря на использование введенного ранее обозначения H_x^y , вектор y не фигурирует ни в формулировке, ни в доказательстве данной теоремы.

Тогда $\tilde{H}_x \leq 0$, и

$$(g_x)_i = \text{tr} \left(F^{-1}(x_0) \left(\frac{d}{dx_i} F(x_0) \right) \right),$$

$$(\tilde{H}_x)_{ij} = -\text{tr} \left(F^{-1}(x_0) \left(\frac{d}{dx_i} F(x_0) \right) F^{-1}(x_0) \left(\frac{d}{dx_j} F(x_0) \right) \right).$$

Доказательство. Далее, если не указано обратное, все функции и производные вычисляются в точке x_0 .

В силу симметричности F найдется не зависящая от x ортогональная матрица Q такая, что $F(x) = Q^T G(x) Q$ (при этом матрица $G(x)$ также симметрична), и $G(x_0)$ — диагональная матрица (с положительными диагональными элементами). Тогда $H_x^y = \sum_i \frac{\nabla^2 g_{ii}}{g_{ii}}$. В самом деле,

$$(H_x^y)_{pq} = \sum_{i,j} F_{ij}^{-T} \left(\frac{d^2}{dx_p dx_q} F_{ij} \right) = \text{tr} \left(F^{-1} \frac{d^2}{dx_p dx_q} F \right) =$$

$$= \text{tr} \left(Q^T G^{-1} Q \frac{d^2}{dx_p dx_q} (Q^T G Q) \right) =$$

$$= \text{tr} \left(Q^T \left(G^{-1} \frac{d^2}{dx_p dx_q} G \right) Q \right) = \text{tr} \left(G^{-1} \frac{d^2}{dx_p dx_q} G \right).$$

Последнее выражение упрощается до $\left(\sum_i \frac{\nabla^2 g_{ii}}{g_{ii}} \right)_{pq}$ в силу диагональности $G(x_0)$.

Представим определитель $\det F$ как

$$\det F(x) = f_0(x) - f_1(x) + f_2(x),$$

$$f_0 = \prod_i g_{ii},$$

$$f_1 = \sum_{i < j} g_{ij} g_{ji} \prod_{k \notin \{i,j\}} g_{kk} = \sum_{i < j} g_{ij}^2 f_{1,ij}, \quad f_{1,ij} = \prod_{k \notin \{i,j\}} g_{kk},$$

$$f_2 = \sum_{\alpha \in A} (-1)^{N(\alpha)} \prod_i g_{i\alpha_i},$$

где A — множество перестановок, в которых более двух элементов находятся не на своих местах; $N(\alpha)$ — количество инверсий в α (f_0 соответствует тождественной перестановке в формуле Лейбница, f_1 — перестановкам с одной инверсией, f_2 — всем остальным). Поскольку $g_{ij}(x_0) = 0$ при $i \neq j$, имеем:

- Определитель $\det F(x_0) = f_0(x_0)$, так как $f_1(x_0) = 0$, $f_2(x_0) = 0$.
- Слагаемые, из которых состоят f_1 и f_2 , содержат не менее двух (с учетом степени) внедиагональных элементов G в качестве сомножителей. Их производные, в соответствии с формулой для производной произведения

$$(uvw \dots)' = u'vw \dots + uv'w \dots + uvw' \dots + \dots,$$

содержат в каждом своем слагаемом не менее одного внедиагонального элемента. Следовательно, $\nabla f_1(x_0) = 0$, $\nabla f_2(x_0) = 0$, и $\nabla \det F(x_0) = \nabla f_0(x_0)$.

- Для вторых производных, рассуждая аналогичным образом, получаем $\nabla^2 f_2(x_0) = 0$.

Для градиента g_x в точке x_0 получаем:

$$\begin{aligned} g_x = \nabla \log \det F &= \frac{\nabla \det F}{\det F} = \frac{\nabla f_0}{f_0} = \nabla \log f_0 = \\ &= \sum_i \nabla \log g_{ii} = \sum_i \frac{\nabla g_{ii}}{g_{ii}}, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} (g_x)_p &= \sum_i \frac{\frac{d}{dx_p} g_{ii}}{g_{ii}} = \text{tr} \left(G^{-1} \left(\frac{d}{dx_p} G \right) \right) = \\ &= \text{tr} \left(Q F^{-1} \left(\frac{d}{dx_p} F \right) Q^T \right) = \text{tr} \left(F^{-1} \left(\frac{d}{dx_p} F \right) \right). \end{aligned}$$

Перейдем теперь к вычислению модифицированного гессисана. Найдем $\nabla^2 \log f_0$ и $\nabla^2 f_1$ в точке x_0 :

$$\begin{aligned} \nabla^2 \log f_0 &= \sum_i \nabla^2 \log g_{ii} = \sum_i \left(\frac{\nabla^2 g_{ii}}{g_{ii}} - \frac{(\nabla g_{ii})(\nabla g_{ii})^T}{g_{ii}^2} \right); \\ \frac{d^2}{dx_p dx_q} g_{ij}^2 f_{1,ij} &= 2 \left(\frac{d}{dx_p} g_{ij} \right) \left(\frac{d}{dx_q} g_{ij} \right) f_{1,ij} + g_{ij}^2 \frac{d^2}{dx_p dx_q} f_{1,ij} + \\ &\quad + 2g_{ij} \left(\left(\frac{d^2}{dx_p dx_q} g_{ij} \right) f_{1,ij} + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{d}{dx_p} g_{ij} \right) \left(\frac{d}{dx_q} f_{1,ij} \right) + \left(\frac{d}{dx_q} g_{ij} \right) \left(\frac{d}{dx_p} f_{1,ij} \right) \right) = \\ &= 2 \left(\frac{d}{dx_p} g_{ij} \right) \left(\frac{d}{dx_q} g_{ij} \right) f_{1,ij} = \left(2 (\nabla g_{ij}) (\nabla g_{ij})^T f_{1,ij} \right)_{pq}, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} \nabla^2 f_1 &= 2 \sum_{i < j} (\nabla g_{ij}) (\nabla g_{ij})^T f_{1,ij} = \\ &= 2 \sum_{i < j} (\nabla g_{ij}) (\nabla g_{ij})^T \prod_{k \notin \{i,j\}} g_{kk} = 2f_0 \sum_{i < j} \frac{(\nabla g_{ij}) (\nabla g_{ij})^T}{g_{ii} g_{jj}}. \end{aligned}$$

Собирая найденные элементы вместе, в точке x_0 получаем:

$$\begin{aligned} \tilde{H}_x &= \nabla^2 \log \det F - H_x^y = \\ &= \frac{\nabla^2 \det F}{\det F} - \frac{(\nabla \det F)(\nabla \det F)^T}{(\det F)^2} - \sum_i \frac{\nabla^2 g_{ii}}{g_{ii}} = \\ &= \frac{\nabla^2 f_0 - \nabla^2 f_1}{f_0} - \frac{(\nabla f_0)(\nabla f_0)^T}{f_0^2} - \sum_i \frac{\nabla^2 g_{ii}}{g_{ii}} = \\ &= \left(\frac{\nabla^2 f_0}{f_0} - \frac{(\nabla f_0)(\nabla f_0)^T}{f_0^2} - \sum_i \frac{\nabla^2 g_{ii}}{g_{ii}} \right) - \frac{\nabla^2 f_1}{f_0} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(\nabla^2 \log f_0 - \sum_i \frac{\nabla^2 g_{ii}}{g_{ii}} \right) - \frac{\nabla^2 f_1}{f_0} = \\
 &= \left(- \sum_i \frac{(\nabla g_{ii})(\nabla g_{ii})^T}{g_{ii}^2} \right) - 2 \sum_{i < j} \frac{(\nabla g_{ij})(\nabla g_{ij})^T}{g_{ii}g_{jj}} = \\
 &= - \sum_{i,j} \frac{(\nabla g_{ij})(\nabla g_{ij})^T}{g_{ii}g_{jj}},
 \end{aligned}$$

откуда $\tilde{H}_x \leq 0$. Дальнейшие преобразования правой части приводят к финальной формуле:

$$\begin{aligned}
 (\tilde{H}_x)_{pq} &= - \left(\sum_{i,j} \frac{(\nabla g_{ij})(\nabla g_{ij})^T}{g_{ii}g_{jj}} \right)_{pq} = \\
 &= - \sum_{i,j} \frac{\left(\frac{d}{dx_p} g_{ij} \right) \left(\frac{d}{dx_q} g_{ij} \right)}{g_{ii}g_{jj}} = - \sum_{i,j} \frac{\frac{d}{dx_p} g_{ij}}{g_{ii}} \frac{\frac{d}{dx_q} g_{ij}}{g_{jj}} = \\
 &= - \sum_{i,j} \left(G^{-1} \left(\frac{d}{dx_p} G \right) \right)_{ij} \left(\left(\frac{d}{dx_q} G \right) G^{-1} \right)_{ij} = \\
 &= - \text{tr} \left(G^{-1} \left(\frac{d}{dx_p} G \right) G^{-1} \left(\frac{d}{dx_q} G \right) \right) = \\
 &= - \text{tr} \left(Q F^{-1} \left(\frac{d}{dx_p} F \right) F^{-1} \left(\frac{d}{dx_q} F \right) Q^T \right) = \\
 &= - \text{tr} \left(F^{-1} \left(\frac{d}{dx_p} F \right) F^{-1} \left(\frac{d}{dx_q} F \right) \right).
 \end{aligned}$$

5. Пример

Рассмотрим задачу (1) с $m = 1$, $f(x) = x^2$, $g_1(x) = -2x^4 + 4x^2 - 1$:

$$\begin{aligned}
 f^* &= \min_x x^2, \\
 -2x^4 + 4x^2 - 1 &\geq 0.
 \end{aligned}$$

Графики $f(x)$ и $g_1(x)$ приведены на рис. 1. Неравенство $g_1(x) \geq 0$ задает область поиска в виде двух отрезков, на которых $f(x)$ имеет по одному локальному минимуму в точках $\pm\sqrt{1 - \sqrt{2}/2} \approx \pm 0,5412$ соответственно.

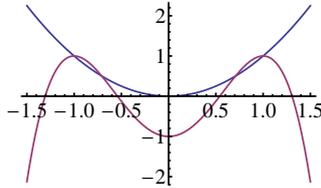


Рис. 1. Графики $f(x)$ и $g_1(x)$

Решим данную задачу методом моментов. Размеры матриц в ЛМН-релаксации определяются параметрами $d_1 = \lceil \frac{1}{2} \deg g_1(x) \rceil = 2$ и $k \geq \max\{\deg f(x), d_1\} = 2$. Согласно [7], мы должны решить ЛМН-релаксацию для двух последовательных значений k и, убедившись, что ранг получаемых матриц моментов совпадает, извлечь координаты минимумов согласно изложенному в данной работе алгоритму. В рассматриваемом случае достаточно взять $k = 2$ и $k = 3$. В частности, для $k = 3$ соответствующая ЛМН-релаксация (5) имеет вид

$$f^* = \min_y y[2],$$

$$M_3(y) = \begin{bmatrix} y[0] & y[1] & y[2] & y[3] \\ y[1] & y[2] & y[3] & y[4] \\ y[2] & y[3] & y[4] & y[5] \\ y[3] & y[4] & y[5] & y[6] \end{bmatrix} \geq 0,$$

$$M_1(g_1, y) = \begin{bmatrix} -2y[4] + 4y[2] - y[0] & -2y[5] + 4y[3] - y[1] \\ -2y[5] + 4y[3] - y[1] & -2y[6] + 4y[4] - y[2] \end{bmatrix} \geq 0,$$

$$y[0] = 1,$$

и решение $y^* = [y[0] \dots y[6]] = [1 \ 0 \ 0,2929 \ 0 \ 0,0858 \ 0 \ 0,0251]$. Ранг $M_3(y^*)$ равен 2, и извлеченные из нее координаты двух экстремумов совпадают с указанными выше.

Продemonстрируем теперь процесс решения той же задачи предлагаемым в данной работе методом. Как указано в разделе 4, здесь у нас больше свободы в выборе k и d_1 . Рассмотрим несколько вариантов.

- 1) Пусть $k = d_1 = 0$, а количество атомов $r = k + 1 = 1$. Тогда $z = [x_1 \ p_1]^T$,

$$M_0(y) = [\ p_1 \], \quad M_0(g_1, y) = [\ p_1(-2x_1^4 + 4x_1^2 - 1) \],$$

и целевые функции $f^{(i)}$ имеют вид

$$f^{(i)}(z) = p_1 x_1^2 - \mu^{(i)} (\log p_1 + \log (p_1(-2x_1^4 + 4x_1^2 - 1))).$$

В зависимости от того, какому из составляющих область поиска отрезков принадлежит начальное приближение, мы найдем один из двух экстремумов задачи. На рис. 2 показана траектория x_1 для начального приближения $x_1^{(0)} = 1$, $p_1^{(0)} = 1$.

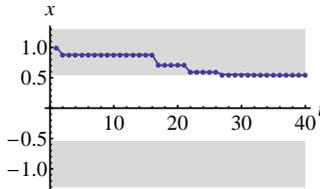


Рис. 2. График x_1 для $k = 0$, $d_1 = 0$. Серым цветом отмечена область $g_1(x) \geq 0$

Здесь и далее алгоритм делает серию из 15 шагов поиска с $\mu^{(i)} = 1$, а после нее — 5 серий по 5 шагов, уменьшая μ в 4 раза в каждой новой серии:

$$\mu^{(0...14)} = 1, \quad \mu^{(15...19)} = 1/4, \quad \dots, \quad \mu^{(35...39)} = 1/4^4.$$

(Из графика очевидно, что для выбранного значения k такое количество итераций является излишним; оно использовано здесь исключительно для единообразия масштаба.)

Таким образом, действие предложенного алгоритма в данном случае эквивалентно простому локальному поиску с использованием логарифмических барьерных функций и ньютоновским выбором направления — за исключением того, что мы используем модифицированный гессиан \tilde{H} , который всегда положительно полуопределен.

2) Пусть $k = d_1 = 1$, $r = 2$. Тогда $z = [x_1 \ x_2 \ p_1 \ p_2]^T$,

$$M_1(y) = \begin{bmatrix} p_1 + p_2 & p_1 x_1 + p_2 x_2 \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 & p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2 \end{bmatrix},$$

$$M_0(g_1, y) = [p_1(-2x_1^4 + 4x_1^2 - 1) + p_2(-2x_2^4 + 4x_2^2 - 1)],$$

и

$$f^{(i)}(z) = p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2 - \mu^{(i)} (\log (p_1 p_2 (x_2 - x_1)^2) + \log (p_1(-2x_1^4 + 4x_1^2 - 1) + p_2(-2x_2^4 + 4x_2^2 - 1))).$$

Выберем в качестве начального приближения случайный вектор $z^{(0)}$ такой, что $x_1^{(0)}$ и $x_2^{(0)}$ находятся вблизи точки 1, а веса принадлежат интервалу $(0; 1)$ и удовлетворяют ограничению $p_1^{(0)} + p_2^{(0)} = 1$. Траектории x_1 и x_2 показаны на рис. 3а; p_1 и p_2 — на рис. 3б. Особого внимания здесь заслуживает своеобразный «туннельный эффект»: один из атомов переходит через запрещенную область ($g_1(x) < 0$) в соседний допустимый отрезок, за счет чего мы находим оба экстремума. Последнее становится возможным при достаточно существенном уменьшении веса атома, позволяющем матрице $M_0(g_1, y)$ оставаться положительно определенной.

3) Дальнейшее увеличение количества атомов приводит к тому, что они разделяются на две группы:

- Атомы, попавшие в глобальные экстремумы, приобретают веса на интервале $(0; 1)$. При этом возможно попадание нескольких атомов в окрестность одного экстремума.

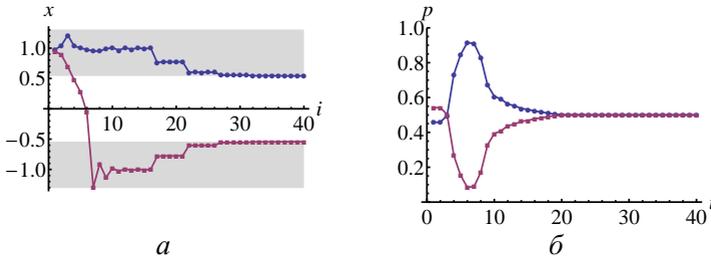


Рис. 3. Графики x_i и p_i для $k = 1, d_1 = 1$

- Веса прочих атомов, в том числе попавших в неглобальные экстремумы (отсутствующие в данной задаче) или вышедших за пределы допустимой области, стремятся к 0 при уменьшении $\mu^{(i)}$.

На рис. 4 показан пример траекторий x_i и p_i для $k = 2, d_1 = 1$.

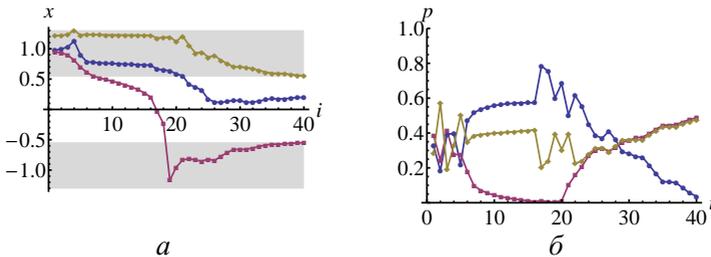


Рис. 4. Графики x_i и p_i для $k = 2, d_1 = 1$

При росте количества атомов растет объем вычислений, а также — как видно из графиков — замедляется сходимость алгоритма. Поэтому, как и в методе моментов, в новом алгоритме целесообразно использовать как можно меньшие значения k . Несмотря на это сходство, собственно критерии выбора k отличаются: если в методе моментов мы исходили из порядков поли-

номов $f(x)$ и $g_i(x)$, то в новом алгоритме основным фактором является ожидаемое количество экстремумов в области поиска.

6. Заключение

В данной работе представлена трансформация основанного на теории моментов метода решения оптимизационных задач с полиномиальными целевой функцией и ограничениями. Данная трансформация возвращает модифицированную задачу оптимизации («ЛМН-релаксацию») из пространства моментов обратно в пространство поиска исходной задачи, расширенное путем рассмотрения нескольких взаимодействующих «атомов» и их весов вместо единственной точки-аппроксимации. Это позволяет устранить наиболее существенные недостатки метода ЛМН-релаксаций, а также расширить круг решаемых задач.

В статье детально рассмотрено применение нового метода к задачам одномерной оптимизации. Последующие работы будут посвящены распространению полученных результатов на задачи многомерной оптимизации и системы полиномиальных матричных неравенств.

Литература

1. APKARIAN P., TUAN H.D. *Parameterized LMIs in control theory* // SIAM J. on Control and Optimization. – 2000. – Vol. 38, №4. – P. 1241–1264.
2. BLONDEL V., TSITSIKLIS J. *NP-hardness of some linear control design problems* // SIAM J. on Control and Optimization. – 1997. – Vol. 35, №6. – P. 2118–2127.
3. BOYD S., GHAOUI L.E., FERON E., BALAKRISHNAN V. *Linear matrix inequalities in system and control theory*. – SIAM, 1994.
4. BOYD S., VANDENBERGHE L. *Convex optimization*. – Cambridge University Press, 2004.

5. CURTO R.E., FIALKOW L.A. *The truncated complex K-moment problem* // Trans. AMS. – 2000. – Vol. 352, №6. – P. 2825–2856.
6. DELIBAŞI A., HENRION D. *Hermite matrix in Lagrange basis for scaling static output feedback polynomial matrix inequalities* // International J. of Control. – 2010. – Vol. 83, №12. – P. 2494–2505.
7. HENRION D., LASSERRE J.-B. *Detecting global optimality and extracting solutions in GloptiPoly* // Positive polynomials in control. – 2005. – P. 1–18.
8. HENRION D., LASSERRE J.-B. *Convergent relaxations of polynomial matrix inequalities and static output feedback* // IEEE Trans. Automatic Control. – 2006. – Vol. 51, №2. – P. 192–202.
9. HENRION D., LASSERRE J.-B., LÖFBERG J. *GloptiPoly 3: moments, optimization and semidefinite programming* // Optimization Methods and Software. – 2009. – Vol. 24, №4–5. – P. 761–779.
10. HENRION D., LÖFBERG J., KOČVARA M., STINGL M. *Solving polynomial static output feedback problems with PENBMI* // Proc. of the 44th IEEE Conference on Decision and Control. – 2005. – P. 7581–7586.
11. IWASAKI T., SKELTON R. *Parametrization of all stabilizing controllers via quadratic Lyapunov functions* // J. of Optimization Theory and Applications. – 1995. – Vol. 85. – P. 291–307.
12. <http://www.penopt.com> (дата обращения: 01.11.2011).
13. KOČVARA M., STINGL M. *PENNON: A code for convex nonlinear and semidefinite programming* // Optimization Methods and Software. – 2003. – Vol. 18, №3. – P. 317–333.
14. LASSERRE J.-B. *Global optimization with polynomials and the problem of moments* // SIAM J. on Optimization. – 2001. – Vol. 11, №3. – P. 796–817.
15. PETERSEN K.B., PEDERSEN M.S. *The matrix cookbook*. – 2008. – URL:

<http://citeseer.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.113.6244>
(дата обращения: 01.11.2011).

ATOMIC OPTIMIZATION, PART 1: SEARCH SPACE TRANSFORMATION AND ONE-DIMENSIONAL PROBLEMS

Vladimir Pozdyayev, Arzamas Polytechnical Institute of R. E. Alekseev Nizhny Novgorod State Technical University, Arzamas, Cand.Sc., assistant professor (vpozdyayev@gmail.ru).

Abstract: Optimization problems with polynomial objective function and inequality constraints are considered. A transformation of the moment theory-based solution method is presented, which allows to construct equivalent solution algorithms working in the augmented original search space instead of the moment space. One-dimensional problems are analyzed in detail.

Keywords: nonlinear programming, matrix inequalities, polynomial inequalities, moment theory.

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии П. С. Щербаковым*

УДК 519.177+519.217.2+517.977.1

ББК 22.18

ОБ ОБЛАСТИ СХОДИМОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ МОДЕЛИ ДОСТИЖЕНИЯ КОНСЕНСУСА¹

Агаев Р. П.²

*(Учреждение Российской академии наук Институт проблем
управления им. В. А. Трапезникова РАН, Москва)*

В статье рассмотрена непрерывная модель согласования характеристик в многоагентных системах, в которых соответствующая лапласовская матрица диагонализуема и нуль является ее простым собственным значением. Доказано, что матрица, через которую выражается предел решения системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющего начальным условиям, как и в случае дискретной модели согласования мнений является собственным проектором лапласовской матрицы.

Ключевые слова: многоагентные системы, децентрализованное управление, консенсус, лапласовская матрица, матрица Кирхгофа, модель Де Гроота, управление.

1. Введение

Стохастические матрицы и матрицы, связанные с ними, играют ключевую роль при моделировании и изучении социальных сетей. В [4, 6] в русле классических работ (таких, как [3]) раз-

¹ Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант №09-07-00371а и Программы Президиума РАН «Математическая теория управления».

² Рафиг Пашаевич Агаев, к.т.н., с.н.с. (agaraf@rambler.ru, Москва, ул. Профсоюзная, д. 65, тел. (495) 334-88-69).

работаны оптимизационные модели и методы информационного влияния и управления в социальных сетях. Согласно одной из таких моделей, модели Де Гроота [8], если $s(0) = (s_1^0, \dots, s_n^0)^T$ – вектор начальных мнений членов группы, а $s(k) = (s_1^k, \dots, s_n^k)^T$ – вектор мнений после k -го шага согласования, то $s(k) = Ps(k-1)$, $k = 1, 2, \dots$, где P – стохастическая матрица влияний, элемент p_{ij} которой задает степень влияния мнения j -го агента на мнение i -го. Необходимым и достаточным условием сходимости мнений агентов при любом векторе исходных мнений является регулярность матрицы P .

Отметим, что регулярность матрицы P тесно связана с наличием остовного исходящего дерева в орграфе влияний. Это условие в свою очередь гарантирует сходимость процедур согласования характеристик в более общих моделях управления многоагентными системами. В работе [2] предложено одно решение задачи дискретного согласования характеристик в случае, когда это условие нарушается, и описано подпространство T_P начальных мнений (где P – матрица влияний), обеспечивающих сходимость процедуры согласования в модели Де Гроота.

Для дифференциальной модели в [9] (теорема 3) доказано, что если орграф коммуникаций является сильно связным, то для любого вектора начальных мнений $s(0)$ консенсус определяется произведением $w_r w_l^T s(0)$, где w_r и w_l – правый и левый собственные вектора единственного нулевого собственного значения матрицы L соответственно. В недавно опубликованной работе [3] (лемма 3) этот результат был доказан для орграфа коммуникаций, содержащего исходящее дерево (не обязательно сильно связного).

Автор данной статьи не встречал работ, касающихся дифференциальной модели согласования характеристик в многоагентной системе, орграф коммуникаций которой не содержит исходящего дерева.

В настоящей работе рассматривается непрерывная модель согласования характеристик в многоагентных системах, в которых соответствующая лапласовская матрица диагонализуема и нуль является ее простым собственным значением. Конструктивные доказательства предложений могут быть использованы для более общего случая, когда лапласовская матрица орграфа коммуникаций не обязательно диагонализуема и нуль не является простым собственным значением.

Статья имеет следующую структуру. После введения приведены некоторые определения и обозначения. В разделе 3 доказано, что если матрица L диагонализуема и нуль является ее простым собственным числом, то одна из строк трансформирующей матрицы пропорциональна строкам нормированной матрицы максимальных исходящих лесов, которая является собственным проектором для лапласовской матрицы. Этот результат в разделе 4 применен для анализа асимптотического поведения многоагентной системы, и установлено, что если орграф коммуникаций системы состоит из не связанных базовых компонент, то области сходимости как для дискретных моделей, так и для непрерывных моделей определяются соответствующим собственным проектором.

2. Основные термины, обозначения и предварительные результаты

Орграф коммуникаций Γ определим множествами вершин $\{1, \dots, n\}$ и дуг с неотрицательными весами.

Лапласовская матрица³ $L = L(\Gamma) = (\ell_{ij})$ орграфа Γ определяется следующим образом: при $j \neq i$ полагают $\ell_{ij} = -w_{ji}$, где w_{ji} — вес дуги (j, i) , если в Γ имеется дуга (j, i) , и $\ell_{ij} = 0$ в

³ В литературе ее также называют матрицей Кирхгофа.

противном случае; $\ell_{ii} = \sum_{k \neq i} w_{ki}$, $i, j = 1, \dots, n$.

Пусть n – число агентов многоагентной системы, $x_i(t)$ – характеристика i -го агента, $a_{ij}(t) \geq 0$ – вес, с которым i -й агент учитывает расхождение в значении характеристики с j -м агентом. Рассмотрим дифференциальную модель:

$$(1) \quad \dot{x}_i(t) = - \sum_{j=1}^n a_{ij}(t) (x_i(t) - x_j(t)), \quad i = 1, \dots, n,$$

где $a_{ij} = w_{ji}$.

В матричной форме модель (1) можно представить как $\dot{x}(t) = -L(t)x(t)$.

Для любой лапласовской матрицы $L(\Gamma) = (\ell_{ij})$ взвешенного орграфа Γ (веса дуг – произвольные положительные числа) можно определить стохастическую матрицу влияний:

$$(2) \quad P = I - \varepsilon L,$$

где $\varepsilon < (\max \ell_{ii})^{-1}$.

Любой максимальный по включению сильный подграф орграфа называют его *сильной компонентой* или *бикомпонентой*. *Базовая бикомпонента* – такая бикомпонента, в которую не входят дуги извне.

Будем говорить, что *матрица имеет предел*, если последовательность ее степеней стремится к некоторой матрице.

Если стохастическая матрица P орграфа влияний имеет предел P^∞ , то

$$(3) \quad P^\infty = \bar{J},$$

где $\bar{J} = (j_{kr})$ – нормированная матрица максимальных исходящих лесов соответствующего взвешенного орграфа Γ (следствие матричной теоремы о деревьях для цепей Маркова [5], см. также теорему 7 из [1]). Отметим, что \bar{J} является собственным проектором для L . Элементы матрицы $\bar{J} = (j_{kr})$ определяются следующим образом:

$$(4) \quad j_{kr} = \frac{q_{kr}}{\sigma},$$

где q_{kr} – вес множества максимальных исходящих из вершины r лесов, в которых вершина k достижима из r ; σ – вес множества всех максимальных исходящих лесов в орграфе Γ .

В пространстве векторов $s(0)$ начальных мнений подпространство T_P назовем областью сходимости, если каждый вектор из T_P матрицей P^∞ преобразуется в вектор с одинаковыми компонентами.

В [2] следующая теорема доказана для дискретной модели.

Теорема 1. *Если степени стохастической матрицы P сходятся, то $T_P = \mathcal{R}(L) \oplus T_1$, где $\mathcal{R}(L)$ – образ матрицы $L = I - P$, T_1 – линейная оболочка вектора $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)^T$.*

3. О свойствах трансформирующей матрицы для L

Предположим, что матрица L орграфа диагонализуема и нуль является ее простым собственным значением. Такой орграф всегда содержит исходящее дерево. Через W обозначим невырожденную матрицу, все столбцы которой являются линейно независимыми собственными векторами L . Предположим, что вершины орграфа пронумерованы таким образом, что первая вершина принадлежит базовой бикомпоненте. Пусть первый столбец матрицы W является собственным вектором, соответствующим нулевому собственному значению матрицы L :

$$W = \begin{pmatrix} t & w_{12} & \dots & w_{1n} \\ t & w_{22} & \dots & w_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t & w_{n2} & \dots & w_{nn} \end{pmatrix}, \quad (t \neq 0).$$

Обозначим, через W_0 матрицу, полученную из W заменой всех столбцов кроме первого, соответствующего нулевому собственному значению, нулевым вектором. Столбец нулевого собственного значения не меняем.

W можно представить в виде

$$(5) \quad W = L_t K,$$

где

$$L_t = \begin{pmatrix} t & \ell_{12} & \dots & \ell_{1n} \\ t & \ell_{22} & \dots & \ell_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t & \ell_{n2} & \dots & \ell_{nn} \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & k_{n2} & \dots & k_{nn} \end{pmatrix}.$$

Из невырожденности матрицы W следует, что K – невырожденная матрица.⁴

Предложение 1. Если матрица L диагонализуема и нуль является ее простым собственным числом, то матрица $W_0 W^{-1}$ совпадает с нормированной матрицей максимальных исходящих лесов \bar{J} , т.е. с собственным проектором L и каждая строка \bar{J} пропорциональна первой строке матрицы W^{-1} .

Доказательство предложения 1. Согласно матричной теореме о деревьях (см., например, теорему 16.9' в [7], где результат формулируется для матрицы L^T и невзвешенных орграфов) алгебраическое дополнение любого элемента k -й строки матрицы L равно весу множества всех деревьев, исходящих из вершины k . Поскольку в матрице L_t все элементы первого столбца равны t , k -й элемент первой строки матрицы L_t^{-1} определяет нормированный вес множества всех исходящих деревьев, в которых k является корнем. Под нормированным мы понимаем долю веса множества деревьев, исходящих из вершины k .

Поскольку $W_0 K^{-1} = W_0$, а первая строка матрицы tL_t^{-1} совпадает со строками собственного проектора матрицы L , то получим:

$$W_0 W^{-1} = W_0 L_t^{-1} = \bar{J}.$$

□

⁴ L_t – невырожденная по построению.

4. Согласование характеристик в дифференциальной модели с начальным вектором состояний

Рассмотрим матричную запись дифференциальной модели, заданной уравнением (1):

$$(6) \quad x'(t) = -Lx(t),$$

где $x(t)$ – вектор характеристик агентов; L – диагонализуемая лапласовская матрица орграфа коммуникаций с единственным нулевым собственным значением.

Предложение 2. Если $x(t)$ – решение уравнения (6), удовлетворяющее начальному условию $x(0) = x_0$, то

$$(7) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \bar{J}x_0,$$

где \bar{J} – собственный проектор матрицы L .

Доказательство предложения 2. Общее решение (6) имеет вид

$$x(t) = X(t)C,$$

где $X(t)$ – фундаментальная матрица уравнения (6); C – произвольный постоянный вектор.

Находим решение (6), удовлетворяющее начальным условиям $x(0) = x_0$:

$$x(t) = X(t)X^{-1}(0)x_0.$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = X_\infty X^{-1}(0)x_0.$$

Заметим, что $X_\infty = W_0$ и $X(0) = W$. В силу предложения 1

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \bar{J}x(0).$$

□

Если лапласовская матрица диагонализуема и соответствующий орграф состоит только из базовых бикомпонент, то ее собственный проектор имеет вид

$$\bar{J} = \begin{pmatrix} \bar{J}_{11} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{J}_{22} & \dots & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \bar{J}_{ss} \end{pmatrix}.$$

В этом случае для согласования характеристик может быть применена процедура ортогональной проекции, предложенная в [2].

Пример. В качестве примера рассмотрим орграф коммуникаций, состоящий из бикомпоненты $\{5, 6\}$, доминируемой единственной базовой бикомпонентой на множестве вершин $\{1, 2, 3, 4\}$.

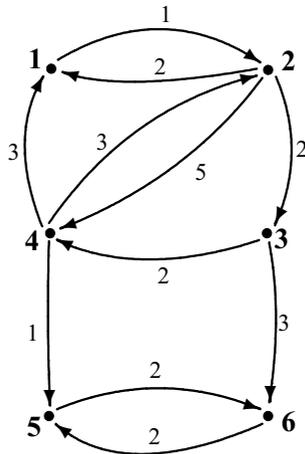


Рис. 1.

Рассмотрим лапласовскую матрицу этого орграфа:

$$L = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -2 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Собственные значения матрицы L :

$$(0; 9,162; 1,764; 2,838; 6; 6,236).$$

Поскольку все они различны, матрица L диагонализуема. Построим трансформирующую матрицу W , столбцы которой – собственные векторы, соответствующие найденным выше собственным значениям L :

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 0,395 & 0 & -0,209 & 0,684 & 0 \\ 1 & 0,395 & 0 & -0,209 & -0,049 & 0 \\ 1 & -0,110 & 0 & 0,498 & 0,024 & 0 \\ 1 & -0,812 & 0 & -0,011 & -0,196 & 0 \\ 1 & 0,126 & 0,851 & -0,813 & -0,342 & -0,526 \\ 1 & 0,019 & 0,526 & -0,060 & 0,611 & 0,851 \end{pmatrix}.$$

Поскольку матрица W – невырожденная, имеет место

$$X(t) = (w_1; w_2 e^{-9,162t}; w_3 e^{-1,764t}; w_4 e^{-2,838t}; w_5 e^{-6t}; w_5 e^{-6,236t}).$$

Тогда

$$X_\infty = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$X^{-1}(0) = W^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0,090 & 0,449 & 0,231 & 0,231 & 0 & 0 \\ -0,214 & 0,890 & 0,262 & -0,938 & 0 & 0 \\ -0,353 & -1,141 & 0,810 & -0,693 & 0,851 & 0,526 \\ -0,294 & -0,636 & 1,601 & -0,671 & 0 & 0 \\ 1,364 & -1,364 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,883 & 1,092 & -0,664 & 0,131 & -0,526 & 0,851 \end{pmatrix},$$

$$X_{\infty}W^{-1} = \begin{pmatrix} 0,090 & 0,449 & 0,231 & 0,231 & 0 & 0 \\ 0,090 & 0,449 & 0,231 & 0,231 & 0 & 0 \\ 0,090 & 0,449 & 0,231 & 0,231 & 0 & 0 \\ 0,090 & 0,449 & 0,231 & 0,231 & 0 & 0 \\ 0,090 & 0,449 & 0,231 & 0,231 & 0 & 0 \\ 0,090 & 0,449 & 0,231 & 0,231 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Заключение

В работе доказано предложение, согласно которому, если лапласовская матрица диагонализуема и нуль является ее единственным собственным значением, то одна из строк обратной трансформирующей матрицы пропорциональна строкам собственного проектора данной лапласовской матрицы. Это предложение применено для анализа дифференциальной модели согласования характеристик. Установлено, что величина, к которой сходятся характеристики агентов, равна скалярному произведению вектор-строки собственного проектора лапласовской матрицы и вектора начальных мнений агентов.

Более общий случай (когда лапласовская матрица орграфа коммуникаций не обязательно диагонализуема, за счет ненулевых собственных значений, и нуль не является простым собственным

значением) в настоящей статье не рассматривается. Можно высказать предположение, что для общего случая в непрерывных моделях согласования характеристик предельная матрица, входящая в решение системы уравнений, также совпадает с собственным проектором лапласовской матрицы, предельный случай обеих — непрерывной и дискретной моделей описывается единым механизмом, и область сходимости дифференциальной модели совпадает с $\mathcal{R}(L) \oplus T_1$.

Литература

1. АГАЕВ Р.П., ЧЕБОТАРЕВ П.Ю. *Матрица максимальных исходящих лесов орграфа и ее применения* // Автоматика и телемеханика. – 2000. – №9. – С. 15–43.
2. АГАЕВ Р.П., ЧЕБОТАРЕВ П.Ю. *Метод проекции в задаче о консенсусе и регуляризованный предел степеней стохастической матрицы* // Автоматика и телемеханика. – 2011. – №12. – С. 38–59.
3. АМЕЛИНА Н.А., ФРАДКОВ А.Л. *Метод усредненных моделей в задаче достижения консенсуса* // Стохастическая оптимизация в информатике. – 2012. – Вып. 8, №1. – С. 3–39.
4. БАРАБАНОВ И.Н., КОРГИН Н.А., НОВИКОВ Д.А., ЧХАРТИШВИЛИ А.Г. *Динамические модели информационного управления в социальных сетях* // Автоматика и телемеханика. – 2010. – №11. – С. 172–182.
5. ВЕНТЦЕЛЬ А.Д., ФРЕЙДЛИН М.И. *О малых случайных возмущениях динамических систем* // Успехи мат. наук. – 1970. – Т. 25. – С. 3–55.
6. ГУБАНОВ Д.А., НОВИКОВ Д.А., ЧХАРТИШВИЛИ А.Г. *Социальные сети: модели информационного влияния,*

- управление и противоборства.* – М.: Физматлит, 2010. – 228 с.
7. ХАРАФИ Ф. *Теория графов.* – М.: Мир, 1973. – 300 с.
 8. DeGROOT M.H. *Reaching a consensus* // J. Amer. Statist. Assoc. – 1974. – Vol. 69, No. 345. – P. 118–121.
 9. OLFATI-SABER R.M., MURRAY R.M. *Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays* // IEEE Transactions Automatic Control. – 2004. – Vol. 49, No. 9. – P. 1520–1533.

THE REGION OF CONVERGENCE OF THE DIFFERENTIAL MODEL OF CONSENSUS

Rafiq Agaev, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Candidate of Science, senior researcher (agaraf@rambler.ru, Moscow, Profsoyuznaya str., 65, (495)334-88-69).

Abstract: This paper is devoted to consensus problems in continuous multi-agent systems whose corresponding Kirchhoff matrix is diagonalizable and 0 is a simple eigenvalue of L . It is proved that the limiting matrix of the solution of the system of linear differential equations satisfying the initial condition is a eigenprojection of the Kirchhoff matrix L , which also determines and is defined the region of convergence to consensus of the DeGroot algorithm.

Keywords: multi-agent systems, decentralized control, consensus, Laplacian matrix, Kirchhoff matrix, DeGroot model, control.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии Б. Т. Поляком

УДК 519.248, 519.87

ББК 22.171

ОПТИМИЗАЦИЯ ФУНКЦИОНАЛА ДОХОДОВ В УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЕ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Кондрашова Е. В.¹

(Московский государственный институт электроники и математики (Технический университет), Москва)

Проводится исследование управляемой марковской системы массового обслуживания $M/M/n^/N^*$. На траекториях управляемого полумарковского процесса строится функционал доходов. Задача состоит в оптимизации функционала доходов. Оптимизация проводится при управлении структурой системы.*

Ключевые слова: управляемый полумарковский процесс, стратегия управления, функционал доходов, оптимизация.

1. Введение

В статье производится построение функционала доходов на траекториях управляемого полумарковского процесса при управлении структурой системы. В частности, осуществляется управление двумя параметрами системы. Задача состоит в поиске оптимальной стратегии управления в данной системе массового обслуживания. Предложенный алгоритм исследования также может быть использован для различных систем при управлении как дискретными, так и непрерывными параметрами системы. Результатом исследования функционала является выбор оптимальных стратегий управления для заданной системы.

¹ *Елизавета Владимировна Кондрашова, аспирантка (elizavetakondr@gmail.com).*

Целью теории массового обслуживания является выработка рекомендаций по обеспечению высокой эффективности функционирования системы. Для достижения этой цели ставятся задачи, состоящие в установлении зависимостей эффективности функционирования системы от её организации [4, 5, 6].

Важно отметить, что большой интерес представляет не только исследование стационарных характеристик (вероятность отказа, время пребывания требования в очереди и т.д.), но возможность изменения структуры системы и получения при этом оптимальных результатов, например, увеличения доходов от работы системы [2, 7].

При разработке математических моделей вводится понятие стратегии. Под стратегией подразумевается правило принятия конкретных решений, т.е. управление системой. Отметим, что повышение эффективности работы системы может быть достигнуто за счёт использования управления. В системе возможно управление длиной очереди, входящим потоком требований, длительностью обслуживания, количеством обслуживающих приборов. Наибольший интерес представляет управление несколькими параметрами системы, т.е. расширение пространства управлений.

Основной целью при изучении управляемых полумарковских процессов является нахождение оптимальной стратегии [3]. Считаем, что это стратегия – максимизирующая заданную целевую функцию, и определяем соответствующее максимальное значение.

2. Постановка задачи

Рассмотрим систему $M/M/n^*/N^*$ в обозначениях символики Кендалла. Входящий поток пуассоновский с параметром λ . Длительность обслуживания распределена экспоненциально с интенсивностью μ . Число каналов обслуживания и количество мест для ожидания являются параметрами управления.

Опишем систему более подробно и введём некоторые предположения.

Максимально возможное количество каналов обслуживания n , каждый из которых может одновременно обслуживать только одно требование. Число каналов является параметром управления и может изменяться от 0 до n .

Максимально возможное количество мест для ожидания N . Число мест для ожидания является параметром управления и может изменяться от 0 до N .

Управление осуществляется в специально подобранные моменты времени (моменты ухода требования из системы и моменты поступления требования) и зависит от состояния системы. В каждый момент перехода системы из одного состояния в другое управляем структурой системы: количеством доступных каналов обслуживания и количеством доступных мест для ожидания.

Под состоянием системы понимают пару параметров (i, j) , где i – число требований, которые находятся на обслуживании, $0 \leq i \leq n$; j – число требований, которые находятся на местах для ожидания (в очереди), $0 \leq j \leq N$.

Очевидно, что не рационально увеличивать число свободных мест в накопителе больше, чем на одно, так как если в накопителе имеется одно свободное место для ожидания, то в случае поступления требования в систему не может произойти потери этого требования.

В состоянии $(0, 0)$ либо включаем один прибор, либо добавляем одно свободное место для ожидания.

Если в накопителе отсутствуют требования и один канал обслуживания освобождается, тогда число доступных каналов обслуживания уменьшается на единицу.

Если в накопителе есть требования, а один из приборов освобождается, то требование из накопителя переходит на обслуживание. Заявки, находящиеся в очереди, могут быть переданы на обслуживание при добавлении новых каналов обслуживания.

Если в накопителе отсутствуют требования и один канал обслуживания освобождается, тогда число доступных каналов обслуживания уменьшается на единицу. Таким образом, когда один из каналов закончил обслуживание и в накопителе отсут-

ствуют требования, система переходит из состояния $(i, 0)$ в состояние $(i - 1, 0)$.

Отметим, что управление осуществляется в специально подобранные моменты времени (моменты ухода требования из системы и моменты поступления требования) и зависит от состояния системы. Аналогично, состояние системы, в которое осуществляется переход, зависит от принятого решения.

Задача состоит в поиске оптимальной стратегии управления. Под стратегией подразумевается правило принятия конкретных решений, т.е. управление системой.

3. Алгоритм исследования

Для решения задачи используется следующий алгоритм исследования.

Проводится построение управляемого полумарковского процесса. Для этого следует описать марковские моменты, пространство состояний, пространство управлений, полумарковское ядро.

Вычисляются дополнительные характеристики: условные математические ожидания времени непрерывного пребывания процесса в состоянии, условные математические ожидания накопленного дохода за полный период пребывания процесса в состоянии (i, j) , стационарные распределения.

Проводится построение функционала накопления. Используется теорема о вычислении функционала доходов для управляемых полумарковских процессов с конечным множеством состояний [1]. Из теоремы о дробно-линейности функционала накопления относительно распределений, определяющих структуру накопления, и теоремы о максимуме дробно-линейного функционала используем основной вывод: оптимальную стратегию можно искать в классе детерминированных стратегий управления [1].

Вычисляется значение показателя качества функционирования

$$(1) \quad S = \frac{\sum_{(i,j)} s_{(i,j)} \pi_{(i,j)}}{\sum_{k \in E} m_{(i,j)} \pi_{(i,j)}}.$$

где $s_{(i,j)}$ – условные математические ожидания накопленного дохода за полный период пребывания процесса в состоянии (i, j) ; $m_{(i,j)}$ – условные математические ожидания времени непрерывного пребывания процесса в состоянии (i, j) ; $\pi_{(i,j)}$ – стационарные распределения вложенной цепи маркова.

Проводится поиск стратегий, при которых достигается максимальное значение функционала S . То есть проводится поиск стратегии для каждого состояния, при которой значение функционала наилучшее.

4. Построение управляемого полумарковского процесса

4.1. МАРКОВСКИЕ МОМЕНТЫ

Марковскими моментами являются моменты прихода требований в систему и моменты окончания обслуживания требования. В марковские моменты принимаются решения. Между двумя соседними состояниями системы может произойти следующее: либо одно требование пришло в систему, либо одно требование покинуло систему.

4.2. МНОЖЕСТВО СОСТОЯНИЙ

Каждое состояние системы может быть описано парой параметров (i, j) , где i – число требований, которые находятся на обслуживании, $0 \leq i \leq n$; j – число требований, которые находятся на местах для ожидания (в очереди), $0 \leq j \leq N$.

4.3. МНОЖЕСТВО УПРАВЛЕНИЙ

Определим множество управлений.

Возможно управление количеством каналов обслуживания и управление количеством дополнительных мест для ожидания. Принятие решений проводится в марковские моменты.

Пусть множество управлений количеством каналов обслуживания $U = \{0, 1, \dots, u\}$, где:

0 – принято решение не ставить дополнительного канала обслуживания;

1 – принято решение добавить один дополнительный канал обслуживания;

... ..

u – принято решение поставить u дополнительных каналов обслуживания, где $1 \leq u \leq n - i$.

Обозначим множество управлений количеством мест для ожидания $V = \{0, 1\}$, где:

0 – принято решение не ставить свободного места для ожидания;

1 – принято решение добавить одно свободное место для ожидания.

Отметим, что в каждом состоянии может приниматься решение $\{u, v\}$, которое зависит от конкретного состояния системы, переход из состояния в состояние осуществляется только в марковские моменты.

Рассмотрим все возможные случаи принятия решений.

В состоянии $(0, 0)$ в системе нет требований ни на обслуживании, ни в очереди. В данном состоянии можно принять решение о добавлении дополнительного места для ожидания (либо включении прибора/добавлении канала обслуживания). Следовательно, в состоянии $(0, 0)$ возможны следующие управления $U = \{0, 1\}$, $V = \{0, 1\}$. Имеет смысл добавлять только одно место (либо в очередь, либо включать прибор).

В состоянии $(i, 0)$, $0 < i \leq n$, в системе нет требований в очереди, на обслуживании находится i требований. В данном состоянии можно принять решение о добавлении дополнительных мест для ожидания. Следовательно, в состоянии $(i, 0)$ возможны следующие управления $U = \{0, 1\}$, $V = \{0, 1\}$.

В состоянии $(0, j)$, $0 < j \leq N$, возможны следующие управления $U = \{0, u\}$, $V = \{0, 1\}$. Причём $0 \leq u \leq \min(j, n)$.

В состоянии (i, j) , $0 < i \leq n$, $0 < j < N$, возможны следующие управления $U = \{0, u\}$, $V = \{0, 1\}$. При этом $0 \leq u \leq \min(j, n - i)$.

В состоянии (i, N) , $i < n$, $U = \{0, u\}$, $V = \{0\}$. При этом $0 \leq u \leq \min(N, n - i)$.

В состоянии (n, j) , $0 < j < N$, $U = \{0\}$, $V = \{0, 1\}$.

В состоянии (n, N) в системе n требований на обслуживании (максимально возможное количество), на местах для ожидания находится N требований (максимально возможное количество), $U = \{0\}$, $V = \{0\}$.

4.4. ПОЛУМАРКОВСКОЕ ЯДРО

Построим полумарковское ядро для заданной системы. Вероятность поступления требования в систему до момента времени t имеет распределение Пуассона, следовательно, $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$.

Вероятность окончания обслуживания требования на канале обслуживания до момента t имеет экспоненциальное распределение, следовательно, $G(t) = 1 - e^{-\mu t}$.

Полумарковское ядро $Q_{(i,j)(i',j')}(t, u, v)$ – вероятность перехода системы из состояния (i, j) в состояние (i', j') за время t , при условии, что в состоянии (i, j) было принято решение (u, v) .

Заметим, что множество решений будет зависеть от данного состояния, в котором пребывает система. Чтобы исключить возможность пропуска какого-либо состояния необходимо рассмотреть все возможные состояния системы, включая граничные.

Например, в состоянии $(0, 0)$ возможны следующие управления $U_{(0,0)} = \{0, 1\}$, $V_{(0,0)} = \{0, 1\}$. Имеет смысл добавлять только одно место (либо в очередь, либо включать прибор).

$$\begin{aligned} Q_{(0,0)(0,1)}(t, 0, 1) &= Q_{(0,0)(1,0)}(t, 1, 0) = Q_{(0,0)(0,0)}(t, 0, 0) = \\ &= F(t) = 1 - e^{-\lambda t}. \end{aligned}$$

В состоянии (i, j) , $0 < i < n$, $0 < j < N$, в системе i требований на обслуживании, на местах для ожидания находится j требований. Возможны следующие управления:

$$U_{(i,j)} = \overline{\{0, \min(j, n - i)\}}, V_{(i,0)} = \{0, 1\}, u \in U_{(i,j)}.$$

Если $u = j, j \leq n - i$, то выполняется:

$$(2) \quad Q_{(i,j)(i,1)}(t, j, 1) = Q_{(i,j)(i+j,0)}(t, j, 0) = \frac{\lambda}{\lambda + (i + j)\mu} (1 - e^{-t(\lambda + (i+j)\mu)}),$$

$$(3) \quad Q_{(i,j)(i+j-1,0)}(t, j, 0) = Q_{(i,j)(i+j-1,1)}(t, j, 1) = \frac{(i + j)\mu}{\lambda + (i + j)\mu} (1 - e^{-t(\lambda + (i+j)\mu)}).$$

В остальных случаях выполняется:

$$(4) \quad Q_{(i,j)(i,j-u+1)}(t, u, 1) = Q_{(i,j)(i+u,j-u)}(t, u, 0) = \frac{\lambda}{\lambda + (i + u)\mu} (1 - e^{-t(\lambda + (i+u)\mu)}),$$

$$Q_{(i,j)(i+u,j-u-1)}(t, u, 0) = Q_{(i,j)(i+u,j-u-1)}(t, u, 1) = \frac{(i + u)\mu}{\lambda + (i + u)\mu} (1 - e^{-t(\lambda + (i+u)\mu)}).$$

Заметим, что случаи состояний $(0, j)$, (n, j) , (i, N) , (n, N) описываются формулами для случая (i, j) , учитывая множество управлений для каждого конкретного состояния.

5. Построение функционала доходов

Для построения функционала доходов необходимо вычислить дополнительные характеристики: условные математические ожидания времени непрерывного пребывания процесса в состоянии, условные математические ожидания накопленного дохода за полный период пребывания процесса в состоянии (i, j) , стационарные распределения.

Для построения условного математического ожидания накопленного дохода $R_{(i,j)(i',j')}(t, u, v)$ за весь период при условии, что процесс пребывает в состоянии (i, j) и через время t перейдет в состояние (i', j') и в состоянии (i, j) было принято решение $\{u, v\}$ введём константы, характеризующие доходы и расходы системы:

c_1 – доход от обслуживания одного требования;

$-c_2$ – плата за единицу времени на обслуживание одного требования на канале обслуживания;

$-c_3$ – плата за единицу времени на обслуживание одного требования на месте для ожидания (в очереди);

$-c_4$ – расход в единицу времени за неиспользуемое место для ожидания;

$-c_5$ – плата за одно потерянное требование;

$-c_6$ – расход в единицу времени на обслуживание канала работающего вхолостую (без обслуживания требования).

Вычисляются математические ожидания накопленного эффекта $R_{(i,j)(i',j')}(t, u, v)$ для всех пар состояний: $(0, j)$, (n, j) , (i, N) , (n, N) , (i, j) , $(i, 0)$ и всех возможных пар решений, принимаемых в данном состоянии.

Пример математического ожидания накопленного дохода при пребывании процесса в состоянии $(i, 0)$:

$$(5) \quad R_{(i,0)(i-1,0)}(t,0,1) = -(c_2i + c_4)t + c_1;$$

$$(6) \quad R_{(i,0)(i-1,0)}(t,0,0) = -c_2it + c_1;$$

$$(7) \quad R_{(i,0)(i,1)}(t,0,1) = -(c_2i + c_4)t;$$

$$(8) \quad R_{(i,0)(i,0)}(t,0,0) = -c_2it - c_5.$$

Математическое ожидание накопленного дохода при пребывании процесса в состоянии (n, j) :

$$(9) \quad R_{(n,j)(n,j)}(t,0,0) = -(c_2n + c_3j)t - c_5;$$

$$(10) \quad R_{(n,j)(n,j+1)}(t,0,1) = -(c_2n + c_3j + c_4)t;$$

$$(11) \quad R_{(n,j)(n,j-1)}(t,0,0) = -(c_2n + c_3j)t + c_1;$$

$$(12) \quad R_{(n,j)(n,j-1)}(t,0,1) = -(c_2n + c_3j + c_4)t + c_1.$$

Подсчёт $m_{(i,j)}$ – математического ожидания времени непрерывного пребывания процесса в состоянии (i, j) проводится также для всех состояний: $(0, j)$, (n, j) , (i, N) , (n, N) , (i, j) , $(i, 0)$, учитывая все возможные переходы:

$$(13) \quad m_{(i,j)} = \int_0^{\infty} \left[1 - \sum_{(i',j') \in E} Q_{(i,j)(i',j')}(t) \right] dt.$$

Учитывая, что максимум функционала доходов достигается на множестве вырожденных распределений, оптимальную стратегию можно искать в классе детерминированных стратегий управления, а значит, возможно вычисление характеристик при подстановке вырожденных распределений:

$$(14) \quad m_{(i,j)}(u, v) = \int_0^{\infty} \left[1 - \sum_{(i',j') \in E} \sum_{u,v} Q_{(i,j)(i',j')}(t, \{u, v\}) p_{u,v}^{[i,j]} \right] dt,$$

где $p_{u,v}^{[i,j]}$ – вероятность, что в состоянии (i, j) принято решение (u, v) .

Например, в состоянии (i, j) , $0 < i < n$, $0 < j < N$:

если $u = j, j \leq n - i$, выполняется

$$(15) \quad m_{(i,j)}(j,0) = \frac{1}{\lambda + (i+j)\mu},$$

$$(16) \quad m_{(i,j)}(j,1) = \frac{1}{\lambda + (i+j)\mu};$$

в остальных случаях выполняется:

$$(17) \quad m_{(i,j)}(u,0) = \frac{1}{\lambda + (i+u)\mu};$$

$$(18) \quad m_{(i,j)}(u,1) = \frac{1}{\lambda + (i+u)\mu}.$$

Для вычисления величины $s_{(i,j)}$ – математических ожиданий накопленного дохода за полный период пребывания процесса в состоянии (i, j) используем:

$$(19) \quad s_{(i,j)}(t, \{u, v\}) = \sum_{(i,j) \in E} \int_0^t R_{(i,j)(i',j')} (x, \{u, v\}) dQ_{(i,j)(i',j')} (x, \{u, v\}) +$$

$$+ \sum_{(i,j) \in E} \int_t^\infty R_{(i,j)(i',j')} (x, t, \{u, v\}) dQ_{(i,j)(i',j')} (x, \{u, v\}),$$

$$s_{(i,j)}(t) = \sum_{u,v} s_{(i,j)}(t, \{u, v\}) p_{u,v}^{[i,j]}.$$

Рассматриваем

$$s_{(i,j)}(u, v) = \lim_{t \rightarrow \infty} s_{(i,j)}(t, \{u, v\}).$$

Учитывая, что максимум дробно-линейного функционала достигается на множестве вырожденных распределений, можем записать вид $s_{(i,j)}$ при подстановке вырожденных распределений, а именно:

$$(20) \quad s_{(i,j)}(u, v) = \sum_{(i',j') \in E} \int_0^\infty R_{(i,j)(i',j')} (x, \{u^{[i,j]}, v^{[i,j]}\}) dQ_{(i,j)(i',j')} (x, \{u^{[i,j]}, v^{[i,j]}\}).$$

В состоянии $(i, 0)$ получаем следующие выражения:

$$(21) \quad s_{(i,0)}(0,1) = \frac{-c_2 i + c_1 i \mu - c_4}{i \mu + \lambda}$$

$$(22) \quad s_{(i,0)}(0,0) = \frac{-c_2 i + c_1 i \mu - c_5 \lambda}{\lambda + i \mu}.$$

Подсчёты проводятся для всех пар состояний: $(0, j)$, (n, j) , (i, N) , (n, N) , (i, j) , $(i, 0)$ и всех возможных пар решений, принимаемых в каждом состоянии.

Стационарные вероятности вложенной цепи Маркова определяются из уравнений:

$$(23) \quad \pi_{(i,j)} = \sum_{(i,j) \in E} \pi_{(i,j)} P_{(i,j)(i,j)},$$

$$(24) \quad \sum_{(i,j) \in E} \pi_{(i,j)} = 1,$$

где $p_{(i,j)(i,j)} = \lim_{t \rightarrow \infty} Q_{(i,j)(i,j)}(t, \{u, v\})$.

Для получения стационарных вероятностей надо найти решение систем для всех возможно управлений. Например, в системе $M/M/2^*/1^*$ возможны следующие состояния: $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 0)$, $(2, 1)$.

Множество решений для каждого состояния можно определить следующим образом. В состоянии $(0, 0)$ возможны решения $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$; в состоянии $(0, 1)$ возможны решения $(1, 1)$, $(1, 0)$; в состоянии $(1, 0)$ возможны решения $(0, 0)$, $(0, 1)$; в состоянии $(1, 1)$ возможны решения $(1, 0)$, $(1, 1)$; в состоянии $(2, 0)$ возможны решения $(0, 0)$, $(0, 1)$; в состоянии $(2, 1)$ возможно решение $(0, 0)$.

Тогда один из векторов стратегий для данной системы может выглядеть следующим образом: $((0, 1); (1, 1); (0, 1); (1, 1); (0, 1); (0, 0))$. При данных фиксированных стратегиях проводятся вычисления всех характеристик и S . Рассматриваются все возможные векторы стратегий и выбирается оптимальная, доставляющая максимум функционалу накопления (1).

Вышеизложенные вычисления могут быть автоматизированы, учитывая приведенный алгоритм.

Поиск максимума функционала доходов S осуществляется на вырожденных распределениях. Так как пространство управ-

лений конечно, и множество состояний конечно, то поиск оптимальных стратегий сводится к перебору всех возможных пар решений в каждом состоянии системы.

Выбор пары оптимальных решений в каждом состоянии определяет наиболее эффективную работу системы.

Как было отмечено, можно управлять и непрерывными параметрами системы. Например, было проведено исследование $M/G^*/1/N^*$ [8] с управлением длительностью обслуживания и структурой системы. Числовые примеры показывают, что расширение управления приводит к более эффективным результатам.

6. Заключение

Использование управляемых полумарковских процессов позволяет оптимизировать получаемый от системы доход, учитывая все доходы и расходы, которые имеют место в течение работы системы.

Дополнительно полученные за счёт рационального управления средства могут быть вложены в модернизацию оборудования, расширение областей производства и обслуживания, их улучшения и так далее. Аналогично можно оптимизировать системы массового обслуживания, используя как управления дискретными, так и непрерывными параметрами системы.

Литература

1. КАШТАНОВ В.А., МЕДВЕДЕВ А.И. *Теория надёжности сложных систем (теория и практика)*. – М: «Европейский центр по качеству», 2002.
2. КОНДРАШОВА Е.В. *Алгоритмизация исследования качества работы системы массового обслуживания* // «Качество. Инновации. Образование». – 2011. – №8. – С. 40–46.

3. МАЙН Х., ОСАКИ С. *Марковские процессы принятия решений*. – М: Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 1977.
4. BANIK A.D. *Queueing analysis and optimal control of BMAP/G(a,b)/1/N and BMAP/MSP(a,b)/1/N systems* // Computers & Industrial Engineering. – 2009. – No. 57. – P. 748–761.
5. BELLMAN R.A. *Markovian Decision Process* // J. Math. and Mech. – 1957. – No. 6. – P. 679.
6. JEWELL W.S. *Markov-renewal programming* // Operation Res. – 1967. – No. 11. – P. 938–971.
7. KASHTANOV V.A. *Controlled semi-markov processes in modeling of the reliability and redundancy maintenance of queueing systems* // Computer Modelling and New Technologies. – 2010. – Vol. 14, No. 1. – P. 26–30.
8. KASHTANOV V.A., KONDRASHOVA E.V. *Controlled semi-markov queueing model* // Proceedings of Third International Conference on Accelerated Life testing, Reliability-based Analysis and Design, Clermont-Ferrand, France, 2010. – P. 243–248.

OPTIMIZING INCOME FUNCTION IN CONTROLLED MARKOV QUEUEING MODEL

Elizaveta Kondrashova, Moscow State Institute of electronics and mathematics, Moscow, post-graduate student, (elizaveta-kondr@gmail.com).

Abstract: The controlled Markov queueing model $M/M/n^/N^*$ is studied. The income functional is being constructed on the trajectories of the controlled semi-markov process. The main problem is to optimize the income functional by adjusting the structure of the system.*

Keywords: semi-markov controlled process, control strategy, income functional, optimization.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии А. С. Манделем

УДК 519.6+004.94
ББК 22.193

АЛГОРИТМЫ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ С ПЕРЕКЛЮЧАЕМОЙ ДИФФУЗИЕЙ

Черных Н. В.¹, Пакшин П. В.²

*(Арзамасский политехнический институт (филиал)
Нижегородского государственного технического универ-
ситета им Р.Е. Алексеева)*

Рассматриваются математические модели сложных систем в виде стохастических дифференциальных уравнений с марковскими переключениями диффузионной составляющей. Предлагается обобщение известных численных схем Тейлора для аппроксимации решения таких уравнений. Представлены результаты численного моделирования в среде Scilab.

Ключевые слова: стохастические системы, диффузионные процессы, марковские переключения, схемы Тейлора, сходимость, устойчивость.

1. Введение

Стохастические дифференциальные уравнения служат фундаментом для многих разделов прикладных наук, т.к. успешно моделируют системы, функционирующие при наличии случайных возмущений. Они являются одним из основных объектов современной теории управления. Большое значение, которое приобрели стохастические дифференциальные уравнения, объяс-

¹ Надежда Валентиновна Черных, аспирантка (nadezdacher@mail.ru).

² Павел Владимирович Пакишин, доктор физико-математических наук, профессор (pakshinpv@gmail.com).

няется также их тесной связью с уравнениями математической физики.

Один из известных и перспективных подходов к численному интегрированию стохастических дифференциальных уравнений Ито основан на стохастических аналогах формулы Тейлора. Теоретически это разложение позволяет строить методы как угодно высокого порядка точности (при соответствующих предположениях о коэффициентах системы уравнений).

Важнейшей отличительной особенностью стохастических аналогов формулы Тейлора для решения стохастических дифференциальных уравнений Ито является присутствие в них, так называемых, повторных стохастических интегралов в форме Ито или Стратоновича, которые являются функционалами сложной структуры относительно компонент векторного винеровского процесса [3]. Аналогом обычных степеней винеровского процесса служат в теории Ито многочлены Эрмита, а обычную экспоненту от стохастического интеграла дублирует экспоненциальный супермартингал. Проблема совместного численного моделирования (исходя из среднеквадратического критерия сходимости) совокупностей повторных стохастических интегралов Ито является сложной как с теоретической, так и с вычислительной точки зрения.

В последнее время внимание исследователей привлекают математические модели в виде стохастических дифференциальных уравнений (СДУ) со скачкообразными изменениями диффузионной составляющей. Они получили название моделей с переключаемой диффузией и описывают сложные системы, которые могут испытывать резкие изменения структуры и параметров, вызванные возможными отказами, перерывами в поступлении информации и воздействиями внешней среды. Такие модели получают все более широкое распространение в современной теории управления и информации.

Исследование скачкообразных систем началось с работ I. Ya. Kats, N.N. Krasovskii, E.A. Lidskii (1960–1961), а затем T. Kazangey и D.D. Sworder (1971) представили скачкообразную систему, где макроэкономическая модель народного хозяйства использовалась, чтобы изучить эффект федеральной политики по

стабилизации жилищного сектора. Известна работа Г.Н. Мильштейна (1972) «Mean square stability of linear systems driven by Markov chain». A.S. Willsky и B.C. Levy рассматривали скачкообразные системы для моделирования систем электроэнергетики и управления солнечным тепловым центральным приемником. M. Mariton в своей работе «Jump Linear Systems in Automatic Control» поясняет, что скачкообразные системы появились как удобная математическая структура для моделирования разнообразных проблем в различных областях, таких как задачи слежения, контроля допустимых ошибок и производственных процессов. [11]

Как правило, рассматриваются переключения диффузии по закону марковской цепи с конечным числом состояний – марковские переключения.

При компьютерном моделировании таких систем возникает необходимость численного решения СДУ с марковскими переключениями.

Известны работы по изучению управляемости, устойчивости, стабилизации таких систем. Вопросы численного решения СДУ с марковскими переключениями изучены мало.

В работах [9, 10] рассмотрена известная численная схема Эйлера (для стохастических систем) в применении к решению стохастического дифференциального уравнения с марковскими переключениями, приведены доказательства некоторых результатов частного характера.

В данной работе рассматривается возможность применения численных схем, основанных на стохастических аналогах формулы Тейлора для аппроксимации решений таких уравнений. Теоретические выводы подтверждаются проведенными компьютерными экспериментами в среде SCILAB.

2. Предварительные сведения

Пусть (Ω, F, P) – вероятностное пространство, $F_t, t_0 \leq t \leq t_0 + T$ – *неубывающее семейство σ – подалгебр* F , $(\omega_r(t), F_t), r = 1, \dots, d$ – независимые винеровские процессы.

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение Ито

$$(1) \quad dX = a(t, X)dt + \sum_{r=1}^d \sigma_r(t, X)d\omega_r(t),$$

где X, a, σ_r - векторы размерности n . [4]

Предполагается, что функции $a(t, x)$ и $\sigma_r(t, x)$ определены и непрерывны при $t \in [t_0, t_0 + T]$, $x \in \mathfrak{R}^n$ и удовлетворяют условию Липшица при всех $t \in [t_0, t_0 + T]$, $x \in \mathfrak{R}^n$, $y \in \mathfrak{R}^n$:

$$(2) \quad |a(t, x) - a(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq K|x - y|. \quad [4]$$

Будем использовать далее следующие обозначения:

$|x|$ означает евклидову норму вектора x , xu – скалярное произведение векторов x и y ; K – положительная константа.

$X_{t,x}(t)$ или просто $X(t)$ - решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным данным $X_{t,x}(0) = x$. Разобьем промежуток $[t_0, t_0 + T]$ точками деления t_k на N равных частей, так что $t_{k+1} - t_k = h$, $k = 0, 1, \dots, N - 1$, $t_0 + T = t_N$, $h = T/N$. Приближение к $X(t_k)$ будем обозначать $\bar{X}(t_k)$, где $\bar{X}_0 = X(t_0)$. Далее пусть $X - F_{t_k}$ -измеримая случайная величина и $E|X|^2 < \infty$; $X_{t_k,x}(t)$ означает решение уравнения (1) для $t_k \leq t \leq t_0 + T$, удовлетворяющее начальным данным при $t = t_k$.

Пусть $(X(t), F(t))$, $t_0 \leq t \leq t_0 + T$ – некоторое решение уравнения (1), с начальным условием, удовлетворяющим неравенству $E|X(t_0)|^2 < \infty$.

Определим одношаговую аппроксимацию $\bar{X}_{t,x}(t+h)$, $t_0 \leq t \leq t+h \leq t_0 + T$, которая формируется в зависимости от x, t, h , и $\{\omega_1(\mathcal{G}) - \omega_1(t), \dots, \omega_d(\mathcal{G}) - \omega_d(t) : t \leq \mathcal{G} \leq t+h\}$:

$$(3) \quad \bar{X}_{t,x}(t+h) = x + f(t, x, h; \omega_i(\mathcal{G}) - \omega_i(t), i = 1, \dots, d, t \leq \mathcal{G} \leq t+h),$$

где функция f определяется конкретным методом нахождения решения.

На основании одношаговой аппроксимации рекуррентно построим приближение (\bar{X}_k, F_{t_k}) , $k = 0, \dots, N$, $t_{k+1} - t_k = h_{k+1}$, $t_N = t_0 + T$:

$$(4) \quad \bar{X}_0 = X_0 = X(t_0), \quad \bar{X}_{k+1} = X_{t_k, \bar{X}_k}(t_{k+1}) = \\ = \bar{X}_k + f(t_k, \bar{X}_k, h_{k+1}; \omega_i(\mathcal{G}) - \omega_i(t_k), i = 1, \dots, d, t_k \leq \mathcal{G} \leq t_{k+1}).$$

Для простоты считаем, что $t_{k+1} - t_k = h = T/N$. [4]

Теорема 1. Пусть одношаговая аппроксимация $\bar{X}_{t,x}(t+h)$ имеет порядок точности ρ_1 для математического ожидания отклонения и порядок точности ρ_2 для среднеквадратичного отклонения, т. е., при любых $t_0 \leq t \leq t_0 + T - h$, $x \in \mathfrak{R}^n$ выполняются неравенства

$$(5) \quad |E(X_{t,x}(t+h) - \bar{X}_{t,x}(t+h))| \leq K(1 + |x|^2)^{1/2} h^{\rho_1}$$

$$(6) \quad [E|X_{t,x}(t+h) - \bar{X}_{t,x}(t+h)|^2]^{1/2} \leq K(1 + |x|^2)^{1/2} h^{\rho_2}$$

и пусть

$$(7) \quad \rho_2 \geq 1/2, \quad \rho_1 \geq \rho_2 + \frac{1}{2}.$$

Тогда при любых N и $k = 0, 1, \dots, N$ выполняется неравенство

$$(8) \quad [E|X_{t_0, X_0}(t_k) - \bar{X}_{t_0, X_0}(t_k)|^2]^{1/2} \leq K(1 + E|X_0|^2)^{1/2} h^{\rho_2 - \frac{1}{2}},$$

т.е. порядок точности метода, построенного с использованием одношаговой аппроксимации $\bar{X}_{t,x}(t+h)$, равен $\rho = \rho_2 - \frac{1}{2}$.

Постоянные K не зависят от X_0 и N . [4]

3. Постановка задачи

Пусть (Ω, F, P) – вероятностное пространство, F_t , $t_0 \leq t \leq t_0 + T$ – неубывающее семейство σ – подалгебр F , $\omega_r(\cdot)$, $r = 1, \dots, d$ – независимые винеровские процессы. Пусть $M = \{1, \dots, m\}$ – конечное множество.

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение с марковскими переключениями в форме

$$(9) \quad dX(t) = a(\beta(t), X(t))dt + \sum_{r=1}^d \sigma_r(\beta(t), X(t))d\omega_r(t),$$

где $\beta(t)$ – однородный марковский процесс со счетным множеством состояний M , $\beta(0) = u_0, X(0) = x_0$.

$$(10) P(\beta(t+h) = l | \beta(t) = u, x(s), \beta(s), s \leq t) = q_{ul}(t)h + o(h), \quad u \neq l,$$

где $x(t) \in \mathfrak{R}^n$, $a(\cdot, \cdot): \mathfrak{R}^n \times M \mapsto \mathfrak{R}^n$ и $\sigma(\cdot, \cdot): \mathfrak{R}^n \times M \mapsto \mathfrak{R}^{n \times n}$.

Переходная функция такого процесса определяется набором функций $P(t, u, l) = p_{ul}(t)$, образующих стохастическую матрицу $P(t)$ переходных вероятностей ($p_{ul}(t) \geq 0, \sum_l p_{ul}(t) = 1$), где числа

p_{ul} имеют смысл вероятностей перехода из u в l за интервал h при условии, что процесс $\beta(t)$ на этом интервале покинул состояние u .

Эволюция процесса $\beta(t)$ целиком описывается с помощью чисел q_{ul} , q_l , образующих матрицу интенсивности переходов

$$Q(t) = (q_{ul}(t)) \in \mathfrak{R}^{m \times m}, \quad Q(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{P(t) - P(0)}{t},$$

$$q_{ul}(t) \geq 0 \text{ при } u \neq l, \quad q_{uu} = -q_u, \quad \sum_{l=1}^m q_{ul}(t) = 0 \text{ для каждого } u \in M; [1]$$

Предполагается, что функции $a(\beta(t), x(t))$ и $\sigma_r(\beta(t), x(t))$ определены и непрерывны при $t \in [t_0, t_0 + T]$, $x \in \mathfrak{R}^n$ и удовлетворяют условию Липшица при всех $t \in [t_0, t_0 + T]$, $x \in \mathfrak{R}^n$, $y \in \mathfrak{R}^n$, $u \in M$:

$$(11) |a(u, x) - a(u, y)| + |\sigma(u, x) - \sigma(u, y)| \leq K|x - y|,$$

а также условию:

$$(12) |a(u, x)| + |\sigma(u, x)| \leq K(1 + |x|),$$

которое накладывает ограничения на скорость изменения компонент функций по x .

При выполнении всех описанных выше условий уравнение (9) имеет единственное, непрерывное решение $X_{u, x}$ на интервале $t \geq 0$ для каждого начального значения. [8]

Поставим задачу численного решения уравнения (9), т. е. нахождения аппроксимации его решения на рассматриваемом временном интервале.

При такой постановке проблемы, когда матрица переходов Q не зависит от x , а зависит только от t , ее можно свести к известной задаче решения стохастического дифференциального уравнения вида (1) с помощью схем, описанных в [2, 4, 7] на совокуп-

ности случайных подынтервалов $[0, t_1), [t_1, t_1 + t_2), \dots$, где t_k – случайные моменты переключения марковской цепи, которые можно определить заранее. Так как следующий момент переключения t_k и состояние $\beta(t_k)$ есть случайные величины, распределение которых зависит лишь от $(\beta(t_k), t_k)$, можно предварительно сгенерировать совокупность $(\beta(t_k), t_k)$ правых частей уравнения (1) и решать уравнение (1) известными методами. При этом точность аппроксимации, которая зависит от выбора шага на отдельных подынтервалах, будет достижима и на всем рассматриваемом временном интервале.

Но можно предложить для решения уравнения (9) другой подход.

Для стохастического дифференциального уравнения вида (1) Е. Платен предложил очень простой вывод (использующий лишь формулу Ито) разложения решения $X_{t,x}(t+h)$ по степеням h и интегралам, зависящим от приращений $\omega_r(\vartheta) - \omega_r(t)$, где $t \leq \vartheta \leq t+h$, $r = 1, \dots, d$. Это разложение в детерминированном случае представляет собой формулу Тейлора для $X_{t,x}(t+h)$ по степеням h в окрестности точки (t, x) . [2, 4, 7]

Будем использовать разложение Платена, подробно рассмотренное в [4], для решения уравнения (9), заменив функцию $f(t, x)$ функцией $f(\beta(t), x(t))$ с переключаемой компонентой.

Пусть $X_{u,x}(s) = X(s)$ – решение уравнения (9) для всех $u \in M$; $f(\beta, x)$, где $\beta = \beta(t)$, $X = X(t)$ – достаточно гладкая функция (скалярная или векторная). Согласно формуле Ито имеем для $t_0 \leq t \leq \vartheta \leq t_0 + T$

$$(13) \quad f(\beta(\vartheta), X(\vartheta)) = f(\beta, x) + \sum_{r=1}^d \int_t^{\vartheta} \Lambda_r f(\beta(\vartheta_1), X(\vartheta_1)) d\omega_r(\vartheta_1) + \int_t^{\vartheta} Lf(\beta(\vartheta_1), X(\vartheta_1)) d\vartheta_1,$$

где операторы Λ_r , $r = 1, \dots, d$ и L определены как:

$$(14) \quad \Lambda_r = \left(\sigma_r, \frac{\partial}{\partial x} \right),$$

$$(15) L = \left(a, \frac{\partial}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \sum_{r=1}^q \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_r^i \sigma_r^j \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j},$$

Применим формулу (13) к функциям $\Lambda_r f$ и Lf , а затем полученные выражения для $\Lambda_r f(\beta(\vartheta), X(\vartheta))$ и $Lf(\beta(\vartheta), X(\vartheta))$ подставим в (13). Имеем

$$(16) f(\beta(s), x(s)) = f + \sum_{r=1}^d \Lambda_r f \int_t^s d\omega_r(\vartheta) + Lf \int_t^s d\vartheta + \\ + \sum_{r=1}^d \int_t^s \left(\sum_{s=1}^d \int_t^{\vartheta} \Lambda_s \Lambda_r f(\beta(\vartheta_1), X(\vartheta_1)) d\omega_s(\vartheta_1) d\omega_r(\vartheta) + \right. \\ \left. + \sum_{r=1}^d \int_t^s \left(\int_t^{\vartheta} L \Lambda_r f(\beta(\vartheta_1), X(\vartheta_1)) d\vartheta_1 \right) d\omega_r(\vartheta) + \right. \\ \left. + \sum_{r=1}^d \int_t^s \left(\int_t^{\vartheta} \Lambda_r Lf(\beta(\vartheta_1), X(\vartheta_1)) d\omega_r(\vartheta_1) \right) d\vartheta + \right. \\ \left. + \int_t^s \int_t^{\vartheta} L^2 f(\beta(\vartheta_1), X(\vartheta_1)) d\vartheta_1 d\vartheta, \right.$$

где, например, $\Lambda_r f$ вычисляется в точке (β, x) .

Поступая так дальше можно получить разложения для $f(\beta(t+h), X(t+h))$, где роль степеней выполняют случайные величины вида (которые не зависят от F_t)

$$(17) I_{i_1, \dots, i_j}(h) = \int_t^{t+h} d\omega_{i_j}(\vartheta) \int_t^{\vartheta} d\omega_{i_{j-1}}(\vartheta_1) \int_t^{\vartheta_1} \dots \int_t^{\vartheta_{j-2}} d\omega_{i_1}(\vartheta_{j-1}),$$

где i_1, \dots, i_j принимают значения из множества чисел $0, 1, \dots, d$, $t \leq \vartheta \leq \vartheta_1 \leq \vartheta_2 \leq \dots \leq \vartheta_{j-1} \leq t+h$ и под $d\omega_0(\vartheta_r)$ понимается $d\vartheta_r$.

Интеграл (17) соответствует j -степени параметра h в детерминированном разложении.

Очевидно, что $E I_{i_1, \dots, i_j} = 0$, если хотя бы одно из $i_k \neq 0$, $k = 1, \dots, j$, и $E I_{i_1, \dots, i_j} = O(h^j)$, если все $i_k = 0$, $k = 1, \dots, j$.

Рассмотрим примеры вычисления нескольких интегралов Ито. Для этого будем использовать формулы (18) из теории интегралов Ито ([4, 5, 6]):

$$(18) \int_0^t \omega(\mathcal{G})d\omega(\mathcal{G}) = \frac{\omega^2(t) - t}{2}; \quad \int_0^t \mathcal{G}d\omega(\mathcal{G}) = t\omega(t) - \int_0^t \omega(\mathcal{G})d\mathcal{G};$$

$$\int_0^t \omega^2(\mathcal{G})d\omega(\mathcal{G}) = \frac{\omega^3(t)}{3} - \int_0^t \omega(\mathcal{G})d\mathcal{G};$$

$$(19) I_0(h) = \int_t^{t+h} d\mathcal{G} = h; \quad I_1(h) = \int_t^{t+h} d\omega(\mathcal{G}) = \omega(t+h) - \omega(t) = \Delta\omega(h);$$

$$I_{0,0}(h) = \int_t^{t+h} d\omega_0(\mathcal{G}) \int_t^{\mathcal{G}} d\omega_0(\mathcal{G}_1) = \int_t^{t+h} d\mathcal{G} \int_t^{\mathcal{G}} d\mathcal{G}_1 = \int_t^{t+h} \mathcal{G}d\mathcal{G} = \frac{h^2}{2};$$

$$I_{1,1}(h) = \int_t^{t+h} d\omega(\mathcal{G}) \int_t^{\mathcal{G}} d\omega_1(\mathcal{G}_1) = \int_t^{t+h} \omega(\mathcal{G})d\omega(\mathcal{G}) = \frac{\Delta\omega^2(h) - h}{2};$$

$$I_{1,0}(h) = \int_t^{t+h} d\omega_0(\mathcal{G}) \int_t^{\mathcal{G}} d\omega(\mathcal{G}_1) = \int_t^{t+h} d\mathcal{G} \int_t^{\mathcal{G}} d\omega(\mathcal{G}_1) = \int_t^{t+h} \omega(\mathcal{G})d\mathcal{G};$$

$$I_{0,1}(h) = \int_t^{t+h} d\omega(\mathcal{G}) \int_t^{\mathcal{G}} d\omega_0(\mathcal{G}_1) = \int_t^{t+h} d\omega(\mathcal{G}) \int_t^{\mathcal{G}} d\mathcal{G} = \int_t^{t+h} \mathcal{G}d\omega(\mathcal{G}) =$$

$$= h\Delta\omega - \int_t^{t+h} \omega(\mathcal{G})d\mathcal{G} = h\Delta\omega(h) - I_{1,0};$$

$$I_{1,1,1}(h) = \int_t^{t+h} d\omega(\mathcal{G}) \int_t^{\mathcal{G}} d\omega_1(\mathcal{G}_1) \int_t^{\mathcal{G}_1} d\omega_2(\mathcal{G}_2) =$$

$$= \int_t^{t+h} d\omega(\mathcal{G}) \int_t^{\mathcal{G}} \omega_1(\mathcal{G}_1)d\omega_1(\mathcal{G}_1) = \int_t^{t+h} \frac{\omega^2(\mathcal{G}) - \mathcal{G}}{2} d\omega(\mathcal{G}) =$$

$$= \frac{\Delta\omega^3(h)}{6} - \frac{1}{2}h\Delta\omega(h);$$

В формулах (19) все рассмотренные повторные интегралы

Ито выражаются через случайные величины $\Delta\omega(h)$, $\int_t^{t+h} \omega(\mathcal{G})d\mathcal{G}$.

Вернемся к разложению (16) и выпишем формулу, которая получается путем ряда непосредственных подстановок:

$$\begin{aligned}
 (20) \quad f(\beta(t+h), X(t+h)) &= f + \sum_{r=1}^d \Lambda_r f \int_t^{t+h} d\omega_r(\mathcal{G}) + Lf \int_t^{t+h} d\mathcal{G} + \\
 &+ \sum_{r=1}^d \sum_{i=1}^d \Lambda_i \Lambda_r f \int_t^{t+h} d\omega_r(\mathcal{G}) \int_t^{\mathcal{G}} d\omega_i(\mathcal{G}_1) + \\
 &+ \sum_{r=1}^d \sum_{i=1}^d \sum_{s=1}^d \Lambda_s \Lambda_i \Lambda_r f \int_t^{t+h} d\omega_r(\mathcal{G}) \int_t^{\mathcal{G}} d\omega_i(\mathcal{G}_1) \int_t^{\mathcal{G}_1} d\omega_s(\mathcal{G}_2) + \\
 &+ \sum_{r=1}^d \Lambda_r Lf \int_t^{t+h} d\mathcal{G} \int_t^{\mathcal{G}} d\omega_r(\mathcal{G}_1) + \sum_{r=1}^d L\Lambda f \int_t^{t+h} d\omega_r(\mathcal{G}) \int_t^{\mathcal{G}} d\mathcal{G}_1 + \\
 &+ L^2 f \int_t^{t+h} d\mathcal{G} \int_t^{\mathcal{G}} d\mathcal{G}_1 + \rho, \quad \text{где } f \equiv f(\beta(t), x(t)),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (21) \quad \rho &= \sum_{r=1}^d \sum_{i=1}^d \sum_{s=1}^d \sum_{j=1}^d \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\mathcal{G}} \left(\int_t^{\mathcal{G}_1} \left(\int_t^{\mathcal{G}_2} \Lambda_j \Lambda_s \Lambda_i \Lambda_r f \times \right. \right. \right. \\
 &\times (\beta(\mathcal{G}_3), X(\mathcal{G}_3)) d\omega_j(\mathcal{G}_3)) d\omega_s(\mathcal{G}_2)) d\omega_i(\mathcal{G}_1)) d\omega_r(\mathcal{G}) + \\
 &+ \sum_{r=1}^d \sum_{i=1}^d \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\mathcal{G}} \left(\int_t^{\mathcal{G}_1} L\Lambda_i \Lambda_r f(\beta(\mathcal{G}_2), X(\mathcal{G}_2)) d\mathcal{G}_2 \right) d\omega_i(\mathcal{G}_1) \right) d\omega_r(\mathcal{G}) + \\
 &+ \sum_{r=1}^d \sum_{i=1}^d \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\mathcal{G}} \left(\int_t^{\mathcal{G}_1} \Lambda_i L\Lambda_r f(\beta(\mathcal{G}_2), X(\mathcal{G}_2)) d\omega_i(\mathcal{G}_2) \right) d\mathcal{G}_1 \right) d\omega_r(\mathcal{G}) + \\
 &+ \sum_{r=1}^d \sum_{i=1}^d \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\mathcal{G}} \left(\int_t^{\mathcal{G}_1} \Lambda_i \Lambda_r Lf(\beta(\mathcal{G}_2), X(\mathcal{G}_2)) d\omega_i(\mathcal{G}_2) \right) d\omega_r(\mathcal{G}_1) \right) d\mathcal{G} + \\
 &+ \sum_{r=1}^d \sum_{i=1}^d \sum_{s=1}^d \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\mathcal{G}} \left(\int_t^{\mathcal{G}_1} \left(\int_t^{\mathcal{G}_2} L\Lambda_s L_i \Lambda_r f(\beta(\mathcal{G}_3), X(\mathcal{G}_3)) d\mathcal{G}_3 \right) d\omega_s(\mathcal{G}_2) \right) \times \right. \\
 &\times d\omega_i(\mathcal{G}_1)) d\omega_r(\mathcal{G}) + \\
 &+ \sum_{r=1}^d \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\mathcal{G}} \left(\int_t^{\mathcal{G}_1} L^2 \Lambda_r f(\beta(\mathcal{G}_2), X(\mathcal{G}_2)) d\mathcal{G}_2 \right) d\mathcal{G}_1 \right) d\omega_r(\mathcal{G}) + \\
 &+ \sum_{r=1}^d \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\mathcal{G}} \left(\int_t^{\mathcal{G}_1} L\Lambda_r Lf(\beta(\mathcal{G}_2), X(\mathcal{G}_2)) d\mathcal{G}_2 \right) d\omega_r(\mathcal{G}_1) \right) d\mathcal{G} +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{r=1}^d \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\vartheta} \int_t^{\vartheta_1} \Lambda_r L^2 f(\beta(\vartheta_2), X(\vartheta_2)) d\omega_r(\vartheta_2) d\vartheta_1 \right) d\vartheta + \\
 & + \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\vartheta} \int_t^{\vartheta_1} L^3 f(\beta(\vartheta_2), X(\vartheta_2)) d\vartheta_2 \right) d\vartheta_1 d\vartheta.
 \end{aligned}$$

Рассмотрим леммы, доказанные в [4], применительно к разложению (20).

Лемма 1. *Справедливо соотношение*

$$(22) \quad \left(E \left(I_{i_1, \dots, i_j} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = O \left(h^{\sum_{k=1}^j \frac{2-i_k}{2}} \right).$$

Другими словами, при подсчете порядка малости интеграла (17) нужно руководствоваться правилом: $d\vartheta$ вносит в порядок малости единицу, а $d\omega_r(\vartheta)$, $r = 1, \dots, d$ – одну вторую.

Лемма 2. *Пусть*

$$(23) \quad \left| \Lambda_{i_j} \dots \Lambda_{i_1} f(\beta(t), x(t)) \right| \leq K \left(1 + |x|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Тогда величина

$$(24) \quad I_{i_1, \dots, i_j}(f, h) = \int_t^{t+h} d\omega_{i_j}(\vartheta) \int_t^{\vartheta} d\omega_{i_{j-1}}(\vartheta_1) \int_t^{\vartheta_1} \dots \int_t^{\vartheta_{j-2}} \Lambda_{i_j} \dots \Lambda_{i_1} f(\beta(\vartheta_{j-1}), X(\vartheta_{j-1})) d\omega_{i_1}(\vartheta_{j-1})$$

удовлетворяет неравенству

$$(25) \quad E \left| I_{i_1, \dots, i_j}(f, h) \right|^2 \leq K \left(1 + E |X(t)|^2 \right) h^{\sum_{k=1}^j (2-i_k)},$$

т. е., в частности, ее порядок малости тот же, что и у величины $I_{i_1, \dots, i_j}(h)$. Далее, если хотя бы один из индексов i_k ,

$k = 1, \dots, j$ отличен от нуля, то

$$(26) \quad E I_{i_1, \dots, i_j}(f, h) = 0, \quad \sum_{k=1}^j i_k^2 \neq 0.$$

Из этой леммы вытекает, что каждое слагаемое, составляющее ρ , имеет не более чем второй порядок малости. Более того, математическое ожидание всех членов второго порядка малости

и порядка малости 2,5 из ρ равно нулю согласно (26). Поэтому $|E\rho| = O(h^3)$ Разумеется, это верно, если для всех подынтегральных функций из ρ выполняется, например, (23).

Леммы 1, 2 справедливы для разложения (20) в силу того, что в формуле (20) интегралы Ито остались в том же виде, в котором они используются в разложении Платена (см. [4, 7]).

На основании этих лемм непосредственно подсчитывается порядок каждого слагаемого в разложениях вида (20).

Легко увидеть [4], что можно получить как разложения, содержащие все члены включительно до какого-то полуцелого порядка малости, так и до какого-то целого порядка.

Возьмем теперь в (20), (21) в качестве $f(\beta, x)$ вектор x . В этом случае $\Lambda_r f = \sigma_r$, $Lf = a$. Поэтому

$$\begin{aligned}
 (27) \quad X_{u,x}(t+h) &= x + \sum_{r=1}^d \sigma_r \int_t^{t+h} d\omega_r(\mathcal{G}) + ah + \\
 &+ \sum_{r=1}^d \sum_{i=1}^d \Lambda_i \sigma_r \int_t^{t+h} (\omega_i(\mathcal{G}) - \omega_i(t)) d\omega_r(\mathcal{G}) + \\
 &+ \sum_{r=1}^d L\sigma_r \int_t^{t+h} (\mathcal{G} - t) d\omega_r(\mathcal{G}) + \sum_{r=1}^d \Lambda_r a \int_t^{t+h} (\omega_r(\mathcal{G}) - \omega_r(t)) d\mathcal{G} + \\
 &+ \sum_{r=1}^d \sum_{i=1}^d \sum_{s=1}^d \Lambda_s \Lambda_i \sigma_r \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\mathcal{G}} (\omega_s(\mathcal{G}_1) - \omega_s(t)) d\omega_i(\mathcal{G}_1) \right) d\omega_r(\mathcal{G}) + La \frac{h^2}{2} + \rho.
 \end{aligned}$$

В формуле (27) все коэффициенты σ_r , a , $\Lambda_i \sigma_r$, $L\sigma_r$, $\Lambda_r a$, $\Lambda_s \Lambda_i \sigma_r$, $L a$ вычисляются в точке (β, x) , а остаток ρ равен

$$\begin{aligned}
 (28) \quad \rho &= \sum_{r=1}^d \sum_{i=1}^d \sum_{s=1}^d \sum_{j=1}^d \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\mathcal{G}_1} \int_t^{\mathcal{G}_2} (\int_t^{\mathcal{G}} \Lambda_j \Lambda_s \Lambda_i \sigma_r(\beta(\mathcal{G}_3), X(\mathcal{G}_3))) \times \right. \\
 &\times d\omega_j(\mathcal{G}_3)) d\omega_s(\mathcal{G}_2)) d\omega_i(\mathcal{G}_1)) d\omega_r(\mathcal{G}) + \\
 &+ \sum_{r=1}^d \sum_{i=1}^d \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\mathcal{G}} (L\Lambda_i \sigma_r(\beta(\mathcal{G}_2), X(\mathcal{G}_2))) d\mathcal{G}_2) d\omega_i(\mathcal{G}_1) \right) d\omega_r(\mathcal{G}) + \\
 &+ \sum_{r=1}^d \sum_{i=1}^d \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\mathcal{G}} (\Lambda_i L\sigma_r(\beta(\mathcal{G}_2), X(\mathcal{G}_2))) d\omega_i(\mathcal{G}_2)) d\mathcal{G}_1 \right) d\omega_r(\mathcal{G}) +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{r=1}^d \sum_{i=1}^d \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\vartheta} \Lambda_i \Lambda_r a(\beta(\vartheta_2), X(\vartheta_2)) d\omega_i(\vartheta_2) d\omega_r(\vartheta_1) \right) d\vartheta + \\
 & + \sum_{r=1}^d \sum_{i=1}^d \sum_{s=1}^d \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\vartheta} \left(\int_t^{\vartheta_1} \Lambda_s \Lambda_i \sigma_r(\beta(\vartheta_3), X(\vartheta_3)) d\vartheta_3 \right) d\omega_s(\vartheta_2) \right) \times \\
 & \times d\omega_i(\vartheta_1) d\omega_r(\vartheta) + \\
 & + \sum_{r=1}^d \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\vartheta} \left(\int_t^{\vartheta_1} L^2 \sigma_r(\beta(\vartheta_2), X(\vartheta_2)) d\vartheta_2 \right) d\vartheta_1 \right) d\omega_r(\vartheta) + \\
 & + \sum_{r=1}^d \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\vartheta} \left(\int_t^{\vartheta_1} \Lambda_r a(\beta(\vartheta_2), X(\vartheta_2)) d\vartheta_2 \right) d\omega_r(\vartheta_1) \right) + \\
 & + \sum_{r=1}^d \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\vartheta} \left(\int_t^{\vartheta_1} \Lambda_r L a(\beta(\vartheta_2), X(\vartheta_2)) d\omega_r(\vartheta_2) \right) d\vartheta_1 \right) d\vartheta + \\
 & + \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\vartheta} \left(\int_t^{\vartheta_1} L^2 a(\beta(\vartheta_2), X(\vartheta_2)) d\vartheta_2 \right) d\vartheta_1 \right) d\vartheta.
 \end{aligned}$$

В связи с формулами (27), (28) рассмотрим следующую одношаговую аппроксимацию:

$$\begin{aligned}
 (29) \quad \bar{X}_{u,x}(t+h) & = x + \sum_{r=1}^d \sigma_r(\omega_r(t+h) - \omega_r(t)) + ah + \\
 & + \sum_{r=1}^d \sum_{i=1}^d \Lambda_i \sigma_r \int_t^{t+h} (\omega_i(\vartheta) - \omega_i(t)) d\omega_r(\vartheta) + \sum_{r=1}^d L \sigma_r \int_t^{t+h} (\vartheta - t) d\omega_r(\vartheta) + \\
 & + \sum_{r=1}^d \Lambda_r a \int_t^{t+h} (\omega_r(\vartheta) - \omega_r(t)) d\vartheta + \\
 & + \sum_{r=1}^d \sum_{i=1}^d \sum_{s=1}^d \Lambda_s \Lambda_i \sigma_r \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\vartheta} (\omega_s(\vartheta_1) - \omega_s(t)) d\omega_i(\vartheta_1) \right) d\omega_r(\vartheta) + La \frac{h^2}{2},
 \end{aligned}$$

где $a = a(\beta(t), x(t))$, $\sigma_r = \sigma_r(\beta(t), x(t))$.

Пользуясь леммами 1 и 2, можно установить (при выполнении условия (23) для соответствующих функций), что для одношаговой аппроксимации (29)

$$|E\rho| = O(h^3), \quad E|\rho|^2 = O(h^4),$$

т. е. $\rho_1 = 3, \rho_2 = 2$, и этот метод имеет порядок сходимости равный $3/2$ (на основании Теоремы 1).

Общий результат построения одношаговых аппроксимаций обоснован и сформулирован в [4].

Все многократные интегралы Ито вида (17) имеют множителем $\Delta\omega(h)$ (см. формулы (19)), т. е. величины, способные принимать сколь угодно большие значения. Тем не менее, схемы, основанные на разложении Платена, обеспечивают хорошую аппроксимацию решений стохастических дифференциальных уравнений, что подтверждается компьютерными экспериментами, например в [7].

Обобщим теорему Платена (приведенную в [4]) на рассматриваемый случай решения стохастического дифференциального уравнения с марковскими переключениями (9). Все выводы теоремы Платена остаются в силе для разложения (27), так как выполняются леммы 1, 2.

Теорема 2 (обобщение теоремы Платена).

Пусть

$\bar{X}_{u,x}(t+h)$ содержит все слагаемые вида $\Lambda_{i_j} \dots \Lambda_{i_1} f \cdot I_{i_1, \dots, i_j}$, где $f \equiv x$, до целого порядка t включительно. Пусть все функции

$\Lambda_{i_j} \dots \Lambda_{i_1} f(\beta(t), x(t))$, где $f \equiv x$, $\sum_{k=1}^j \frac{2-i_k}{2} \leq t+1$, удовлетворяют

неравенству (23). Тогда среднеквадратичный порядок точности метода, основанный на такой аппроксимации, равен t .

Пусть $\bar{X}_{u,x}(t+h)$ содержит все слагаемые вида $\Lambda_{i_j} \dots \Lambda_{i_1} f \cdot I_{i_1, \dots, i_j}$, где $f \equiv x$, до полуцелого порядка $t + \frac{1}{2}$ включительно и слагаемое

$$L^m a \int_t^{t+h} d\mathcal{G} \int_t^{\mathcal{G}} d\mathcal{G}_1 \dots \int_t^{\mathcal{G}_{m-1}} d\mathcal{G}_m = L^m a \frac{h^{m+1}}{(m+1)!}.$$

Пусть все функции $\Lambda_{i_j} \dots \Lambda_{i_1} f(\beta(t), x(t))$, где $f \equiv x$,

$\sum_{k=1}^j \frac{2-i_k}{2} \leq t+2$, удовлетворяют неравенству (23). Тогда сред-

неквадратичный порядок точности метода, основанный на такой аппроксимации, равен $t + \frac{1}{2}$.

Для нахождения решения уравнения (9) предложим следующую численную схему, построенную на одношаговой аппроксимации (29), т. е. среднеквадратичного порядка точности 3 / 2.

$$\begin{aligned}
 (30) \quad \bar{X}_{t_{k+1}} = & \bar{X}_{t_k} + a(\bar{\beta}_{t_k}, \bar{X}_{t_k})h + \sigma(\bar{\beta}_{t_k}, \bar{X}_{t_k})\Delta\omega_k + \\
 & + \frac{1}{2}\sigma(\bar{\beta}_{t_k}, \bar{X}_{t_k})\sigma'(\bar{\beta}_{t_k}, \bar{X}_{t_k})\{(\Delta\omega_k)^2 - h\} + a'(\bar{\beta}_{t_k}, \bar{X}_{t_k})\sigma(\bar{\beta}_{t_k}, \bar{X}_{t_k})\Delta Z_k + \\
 & + \frac{1}{2}\left(a(\bar{\beta}_{t_k}, \bar{X}_{t_k})a'(\bar{\beta}_{t_k}, \bar{X}_{t_k}) + \frac{1}{2}\sigma^2(\bar{\beta}_{t_k}, \bar{X}_{t_k})a''(\bar{\beta}_{t_k}, \bar{X}_{t_k})\right)h^2 + \\
 & + \left(a(\bar{\beta}_{t_k}, \bar{X}_{t_k})\sigma'(\bar{\beta}_{t_k}, \bar{X}_{t_k}) + \frac{1}{2}\sigma^2(\bar{\beta}_{t_k}, \bar{X}_{t_k})\sigma''(\bar{\beta}_{t_k}, \bar{X}_{t_k})\right)\{\Delta\omega_k h - \Delta Z_k\} + \\
 & + \frac{1}{2}\sigma(\bar{\beta}_{t_k}, \bar{X}_{t_k})\left(\sigma(\bar{\beta}_{t_k}, \bar{X}_{t_k})\sigma''(\bar{\beta}_{t_k}, \bar{X}_{t_k}) + (\sigma'(\bar{\beta}_{t_k}, \bar{X}_{t_k}))^2\right) \times \\
 & \times \left\{\frac{1}{3}(\Delta\omega_k)^2 - h\right\}\Delta\omega_k,
 \end{aligned}$$

где $\beta = \beta(t)$, $x = x(t)$, $\Delta Z_k = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{t_k}^{s_2} d\omega_{s_1} ds_2$, $\Delta\omega_k$ - есть $N(0, h)$ гауссовски распределенных приращений винеровского процесса ω на подынтервалах $t_k \leq t \leq t_{k+1}$, $\bar{X}_{t_0} = x_0$.

Рассмотрим теперь модель переключения, зависящего от фазового состояния.

Вернемся к уравнению (9), где $\beta(t)$ - однородный марковский процесс со счетным множеством состояний M , $\beta(0) = u_0$, $X(0) = x_0$,

$$(31) \quad P(\beta(t+h) = l | \beta(t) = u, x(s), \beta(s), s \leq t) = q_{ul}(x)h + o(h), \quad u \neq l,$$

где $x(t) \in \mathfrak{R}^n$, $a(\cdot, \cdot): \mathfrak{R}^n \times M \mapsto \mathfrak{R}^n$ и $\sigma(\cdot, \cdot): \mathfrak{R}^n \times M \mapsto \mathfrak{R}^{n \times n}$.

(32) Пусть $Q(\cdot): \mathfrak{R}^n \mapsto \mathfrak{R}^{m \times m}$ - ограниченная и непрерывная функция. $Q(x) = (q_{ul}(x)) \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ для каждого x , $q_{ul}(x) \geq 0$ при $u \neq l$,

$$\sum_{l=1}^m q_{ul}(x) = 0 \text{ для каждого } u \in M.$$

Такая состояние - зависимая модель находит значительно большее применение в управлении и оптимизации. Если матрица Q зависит от состояния $x(t)$, то случай становится значительно

более сложным. Одна из главных трудностей - та, что из-за непрерывной состояния - обусловленной связи, $\beta(t)$ и $x(t)$ становятся зависимы. $\beta(t)$ – является цепью Маркова только для фиксированного x , то есть фактически не является марковской. [9, 10]

В отличие от обычных диффузионных процессов, моделируемых стохастическими дифференциальными уравнениями, распределение такой переключаемой диффузии имеет смешанный характер.

Суть задачи в следующем - рассмотреть пару процессов $\beta(t)$ и $x(t)$ совместно; т. е. процесс с двумя компонентами рассматривается как марковский. [9, 10]

Пусть переключаемая диффузия $(\beta(t), x(t))$ задана уравнением (9). Пусть первое начальное значение $(\beta(0), x(0)) = (u_0, x_0)$, также задано другое начальное значение $(\beta(0), y(0)) = (u_0, y_0)$ для $y \neq x$. Для состояние - зависимого случая $\beta^{u_0, x_0}(t) \neq \beta^{u_0, y_0}(t)$ бесконечно часто, даже при том, что первоначально $\beta^{u_0, x_0}(0) = \beta^{u_0, y_0}(0) = \beta$, где верхний индекс показывает начальное значение зависимости.

Будем считать, что $\beta(t)$ – стохастически непрерывный процесс, для которого $\beta(t+h) \xrightarrow{q} \beta(t)$ при $h \rightarrow 0$. В соответствии с требованием сепарабельности будем считать, что $\beta(t)$ не может менять свое состояние за «нулевое время» более одного раза. В этом случае траектории процесса будут кусочно – постоянными, т. е. временной интервал разбивается на подынтервалы $[0, t_1), [t_1, t_1 + t_2), \dots$, на которых $\beta(t)$ постоянно, t_k – случайные моменты переключения марковской цепи. [1]

Далее будем рассматривать последовательность $\bar{\beta}(t_k)$ как дискретно - временной стохастический процесс, аппроксимирующий $\beta(t)$ в соответствующем значении.

Используя функцию $Q(x)$ можно построить матрицу переходных вероятностей $P = e^{Q(x)h}$. Используя разложение функции в ряд Тейлора $I + \Delta Q(x) + O(\Delta^2)$ и отбросив $O(\Delta^2)$ ввиду ограниченности и непрерывности $Q(x)$, будем моделировать матрицу

переходных вероятностей как $P = I + \Delta Q(x)$, где I – единичная матрица.

Будем рассматривать пару процессов $\beta(t)$ и $x(t)$ совместно как марковскую цепь следующим образом.

Значения $\bar{X}_{t_{k+1}}$ генерируются рекурсивно согласно (30), используя предыдущие значение \bar{X}_{t_k} , и одновременно генерируются значения $\bar{\beta}_{t_{k+1}}$, также используя значение \bar{X}_{t_k} ($x = \bar{X}_{t_k}$ в матрице переходных вероятностей $P = I + \Delta Q(x)$).

При всех вышеописанных условиях Леммы 1, 2 и обобщенная теорема Платена выполняются для случая марковского процесса, зависящего от фазового состояния, т. е. схема (30) будет обеспечивать нахождение приближенного решения уравнения (9) с матрицей переходов $Q(x)$.

Подобный подход используется в [9, 10], где представлены леммы и теоремы частного характера (рассматриваемая в этих работах схема Эйлера является частным случаем схемы (30)).

Однако, при численном решении в модели с переключением, которое зависит от фазового состояния, моменты переключения и состояния после него, тоже определяются приближенно. При этом возникает ряд вопросов по поводу определения того, как приближенное решение отличается от точного. Возможно, нужно ввести какую-то меру отклонения приближенного распределения моментов скачков от точного распределения. Один из возможных подходов - сделать замену меры, то есть превратить все скачки в пуассоновские. Тогда проблема переходит в другую плоскость, где надо оценивать, как отклоняется эта мера от точной, и насколько будут отличаться вычисленные средние значения функционалов от траекторий и точные значения. Эти вопросы пока остаются открытыми.

4. Пример

Рассмотрим процесс Ито $X = \{X_t, t \geq 0\}$, удовлетворяющий линейному стохастическому уравнению

$$(33) \quad dX_t = f(\beta_t, X_t)X_t dt + g(\beta_t, X_t)X_t d\omega_t$$

на временном интервале $[0, T]$ при $T = 1, X_0 = 1$.

Пусть β_t - однородная марковская цепь, $M = \{1, 2\}$ - число состояний марковской цепи, Q - матрица интенсивности переходов, P - матрица переходных вероятностей.

$f(\beta_t, X_t)$ и $g(\beta_t, X_t)$ - непрерывные, ограниченные, дважды дифференцируемые функции, удовлетворяющие условиям (11), (12).

$$(34) \quad X_t = X_0 \exp\left(\left(f(\beta_t, x_t) - \frac{1}{2}g^2(\beta_t, x_t)\right)t + g(\beta_t, x_t)\omega_t\right)$$

есть решение уравнения (33) для $t \in [0, T]$ и данного винеровского процесса $\omega = \{\omega_t, t \geq 0\}$.

Перепишем схему (30) в виде

$$(35) \quad Y_{n+1} = Y_n + a(\beta_n, Y_n)\Delta_n + \sigma(\beta_n, Y_n)I_{(1)} + \\ + \sigma(\beta_n, Y_n)\sigma'(\beta_n, Y_n)I_{(1,1)} + a'(\beta_n, Y_n)\sigma(\beta_n, Y_n)I_{(1,0)} + \\ + \left(a(\beta_n, Y_n)a'(\beta_n, Y_n) + \frac{1}{2}\sigma^2(\beta_n, Y_n)a''(\beta_n, Y_n)\right)I_{(0,0)} + \\ + (a(\beta_n, Y_n)\sigma'(\beta_n, Y_n) + \frac{1}{2}\sigma^2(\beta_n, Y_n)\sigma''(\beta_n, Y_n))I_{(0,1)} + \\ + \sigma(\beta_n, Y_n)\left(\sigma(\beta_n, Y_n)\sigma''(\beta_n, Y_n) + (\sigma'(\beta_n, Y_n))^2\right)I_{(1,1)},$$

где $a(\beta_t, x_t) = f(\beta_t, x_t) x_t$, $\sigma(\beta_t, x_t) = g(\beta_t, x_t) x_t$ для рассматриваемого уравнения (33).

Для численного моделирования интегралов Ито введем в рассмотрение независимые $N(0, \Delta)$ - распределенные случайные величины

$$(36) \quad \xi_1 = \Delta_n^{-\frac{1}{2}}\Delta\omega_n \quad \text{и} \quad \xi_2 = \sqrt{12}\Delta_n^{-\frac{3}{2}}\left(\int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} (\omega(\vartheta) - \omega(\tau))d\vartheta - \frac{1}{2}\Delta_n\Delta\omega_n\right).$$

С помощью этих величин получим:

$$(37) \quad \Delta\omega_n = \Delta_n^{\frac{1}{2}}\xi_1, \quad \int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} (\omega(\vartheta) - \omega(\tau))d\vartheta = \Delta_n^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{2}\xi_1 + \frac{1}{\sqrt{12}}\xi_2\right).$$

Тогда формулы (19) можно переписать в виде:

$$I_{(1)} = \Delta\omega_n; \quad I_{(1,1)} = \frac{1}{2}(\Delta\omega_n^2 - \Delta_n); \quad I_{(0,0)} = \frac{1}{2}\Delta_n^2;$$

$$I_{(1,0)} = \frac{1}{2}\sqrt{\Delta_n}\Delta_n \cdot \left(\xi_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\xi_2 \right); \quad I_{(0,1)} = \Delta\omega_n\Delta_n - I_{(1,0)};$$

$$I_{(1,1,1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\Delta\omega_n^2 - \Delta_n\right)\Delta\omega_n; \text{ где } \Delta\omega_n = \Delta_n^{\frac{1}{2}}\xi_1;$$

Зададим начальные значения $Y_0 = X_0$, $\beta_0 = u_0$ и будем рекурсивно генерировать 100 значений Y_n с равным значением шага Δ согласно (35), где Δ_n - есть длина временного интервала дискретизации $t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_n < \dots < \tau_N = T$ на временном интервале $[t_0, T]$;

Для сравнения будем использовать (34), чтобы определить соответствующие значения точного решения, используя ту же примерную траекторию винеровского процесса ω_t на подынтервалах $\tau_n < t < \tau_{n+1}$, а именно

$$(38) X_{n+1} = X_0 \exp\left(\left(f(\beta_n, X_n) - \frac{1}{2}g^2(\beta_n, X_n)\right)\tau_n + g(\beta_n, X_n)\sum_{i=1}^n \Delta\omega_i\right)$$

Рассмотрим результаты численного решения уравнения (33), выбирая различные варианты задания матрицы переходов P , шага дискретизации Δ , значений функций $f(\beta_t, x_t)$, $g(\beta_t, x_t)$.

Случай 1.

Пусть $f(\beta_b, x_t)$ принимает два значения - $\{\alpha_1, \alpha_2\}$, соответствующие первому и второму состоянию марковской цепи. Положим $\alpha_1 = 1,5$, значение α_2 будет изменяться в ходе эксперимента. $g(\beta_b, x_t)$ принимает два значения - $\{\lambda_1, \lambda_2\}$. Положим $\lambda_1 = 0,1$, значение λ_2 будет изменяться в ходе эксперимента.

Будем полагать, что начальному моменту времени соответствуют значения α_1 и λ_1 .

$$1. \quad P = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}; \quad \alpha_2 = 10\alpha_1; \quad \lambda_2 = 50\lambda_1;$$

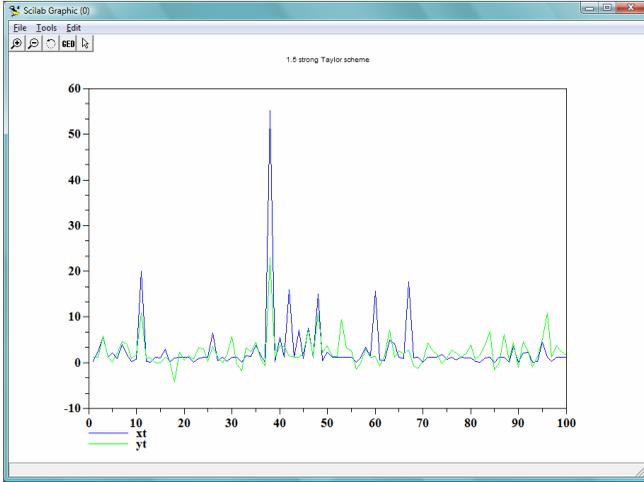


Рис. 1. $\Delta = 0,01$ ($t \in [0;0,1]$)

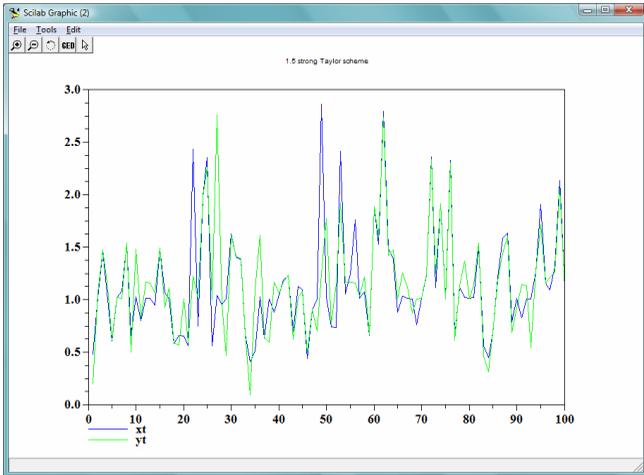


Рис. 2. $\Delta = 0,0001$ ($t \in [0;0,01]$)

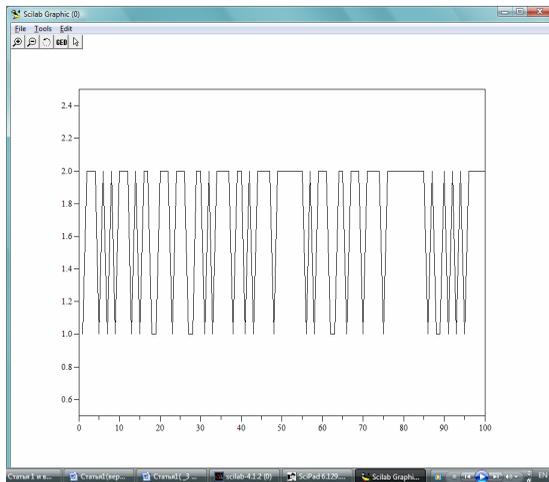


Рис. 3. Марковская цепь

В данном случае значения коэффициентов меняются не очень значительно, поэтому устойчивая аппроксимация решения уравнения наблюдается с размером шага дискретизации $\Delta = 0,01$.

$$2. \quad P = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}; \quad \alpha_2 = 100\alpha_1; \quad \lambda_2 = 200\lambda_1;$$

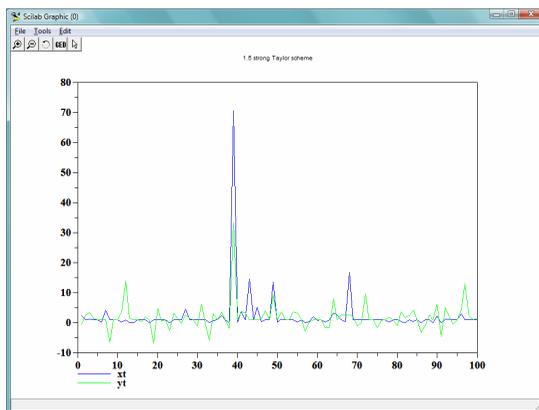


Рис. 4. $\Delta = 0,001$ ($t \in [0;0,01]$)

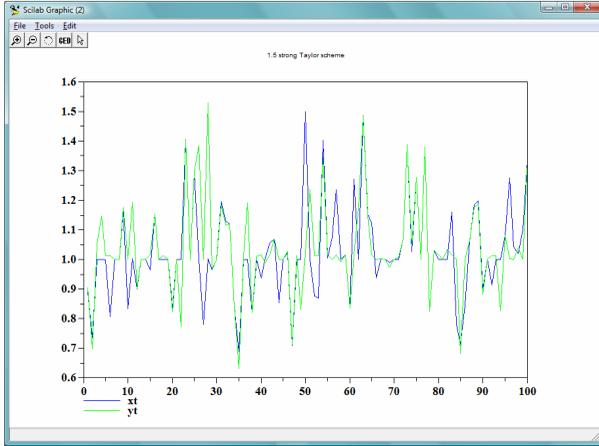


Рис. 5. $\Delta = 0,00001$ ($t \in [0; 0,0001]$)

В данном примере оба коэффициента увеличиваются значительно (в 100 и 200 раз), поэтому выбор меньшего шага дискретизации заметно повышает точность вычислений.

Случай 2.

$f(\beta, x_t)$ принимает два значения - $\{\alpha_1, \alpha_2\}$, соответствующие первому и второму состоянию марковской цепи. $g(\beta, x_t)$ принимает два значения - $\{\lambda_1, \lambda_2\}$. Будем полагать, что начальному моменту времени соответствуют значения α_1 и λ_1 .

$$3. \quad P = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}; \quad \alpha_1 = \cos x + \sin x; \quad \alpha_2 = 1 + \cos x;$$

$$\lambda_1 = 0,5x; \quad \lambda_2 = 0,2x;$$

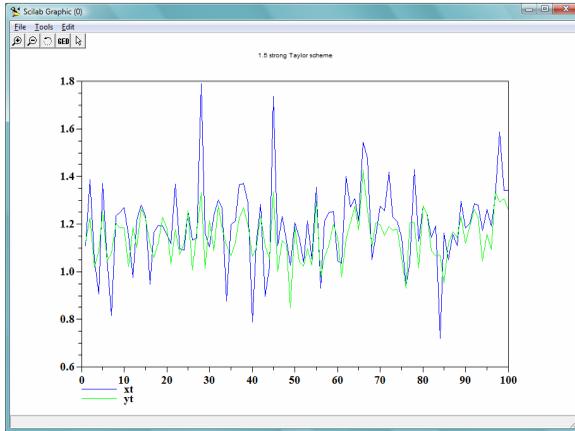


Рис. 6. $\Delta = 0,01$ ($t \in [0;0,1]$)

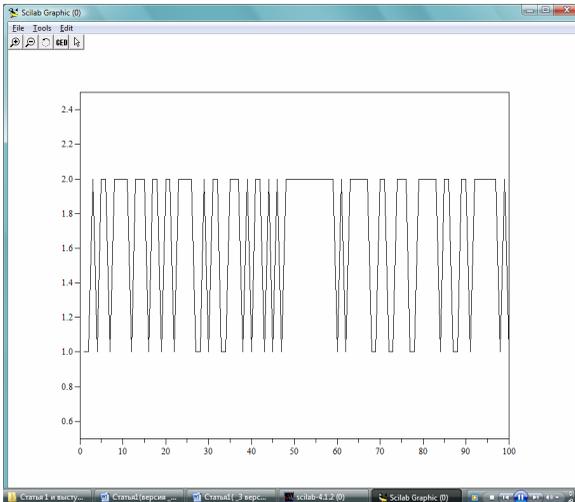


Рис. 7. Марковская цепь

$$4. \quad P = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix};$$

$$\alpha_1 = \cos x + \sin x; \quad \alpha_2 = 1 + \cos x;$$

$$\lambda_1 = 0,5x; \quad \lambda_2 = 2x;$$

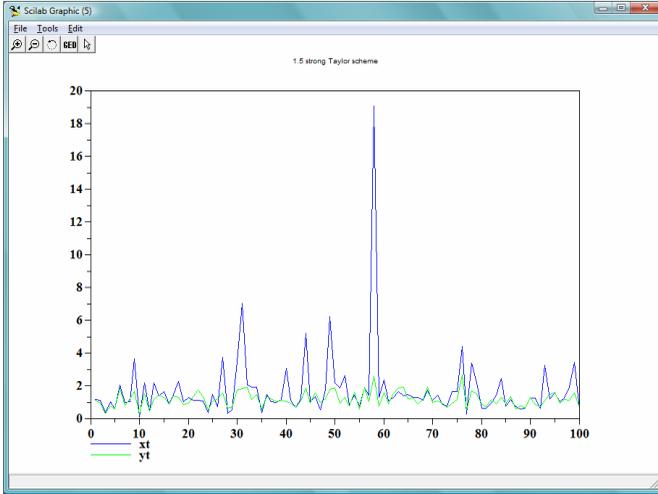


Рис. 8. $\Delta = 0,01$ ($t \in [0;0,1]$)

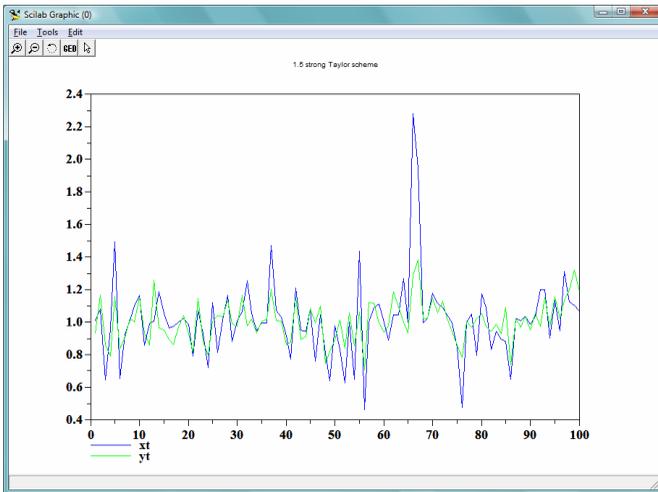


Рис. 9. $\Delta = 0,001$ ($t \in [0;0,1]$)

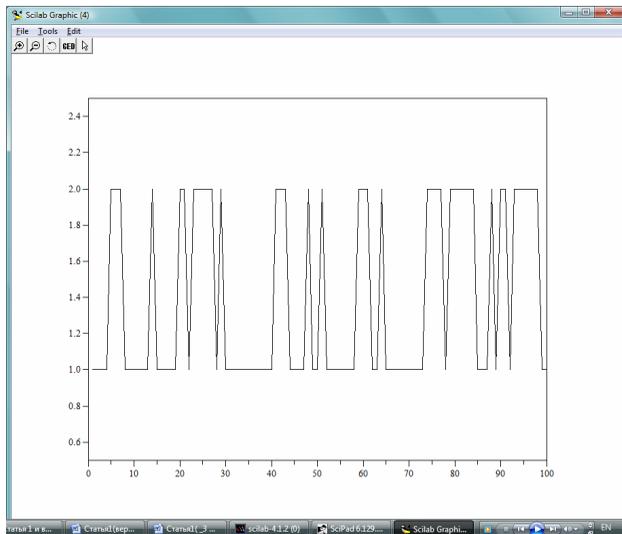


Рис. 10. Марковская цепь

Варианты 3, 4 численного моделирования отличаются матрицей переходов P и значением λ_2 .

Случай 3.

$$5. \quad Q = \begin{pmatrix} -50 \cos^3 x & 50 \cos^3 x \\ 10 \sin x & -10 \sin x \end{pmatrix}; \quad P = I + Q \Delta;$$

$$\alpha_1 = 2 + \sin x;$$

$$\alpha_2 = 1 + \sin x \cos x;$$

$$\lambda_1 = 0,5;$$

$$\lambda_2 = 0,1;$$

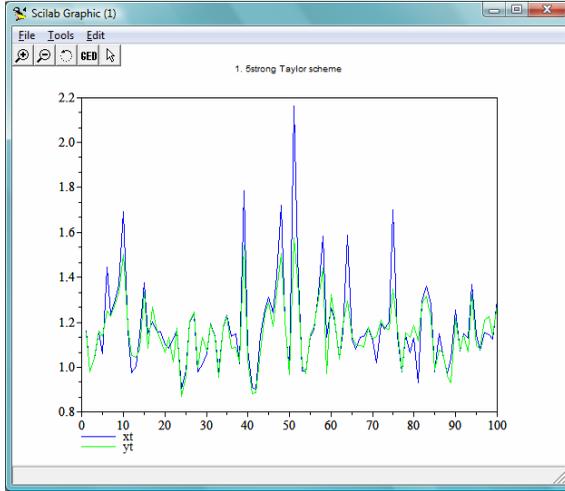


Рис. 11. $\Delta = 0,01$ ($t \in [0;0,1]$)

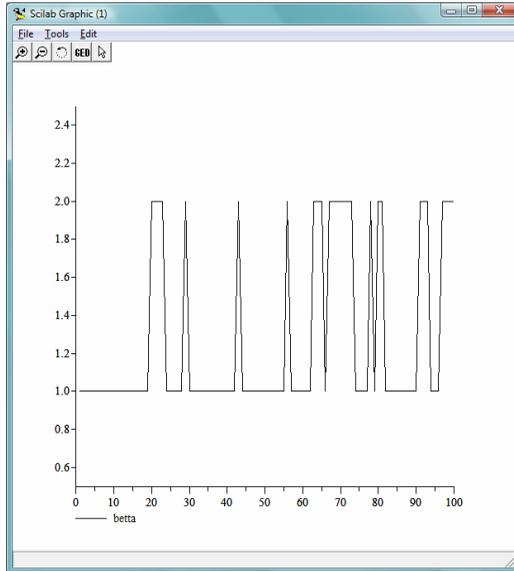


Рис. 12. Марковская цепь

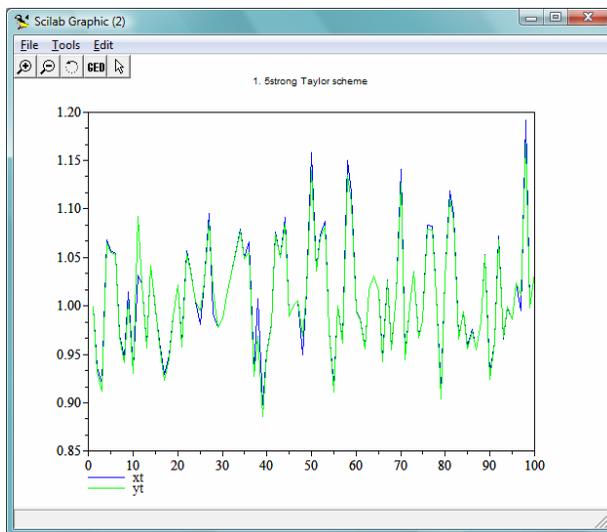


Рис. 13. $\Delta = 0,001$ ($t \in [0; 0,01]$)

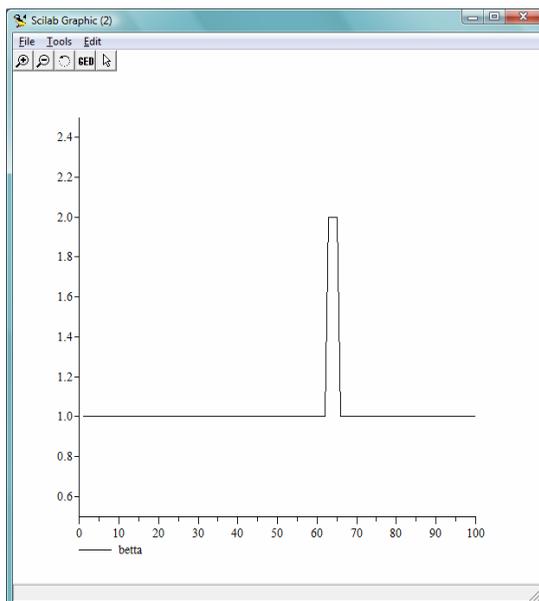


Рис. 14. Марковская цепь

$$6. \quad Q = \begin{pmatrix} -5 \cos^2 x & 5 \cos^2 x \\ 10 \cos^2 x & -10 \cos^2 x \end{pmatrix}; \quad P = I + Q \Delta;$$

$$\alpha_1 = 20 + \cos^2 x; \quad \alpha_2 = \sin x + 5 \cos 2x;$$

$$\lambda_1 = 0,2; \quad \lambda_2 = 3;$$

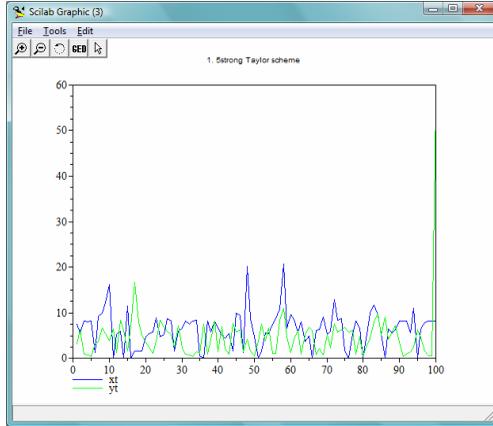


Рис. 15. $\Delta = 0,001$ ($t \in [0;0,01]$)

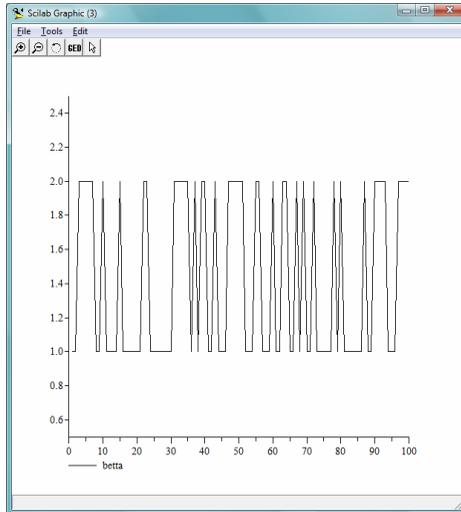


Рис. 16. Марковская цепь

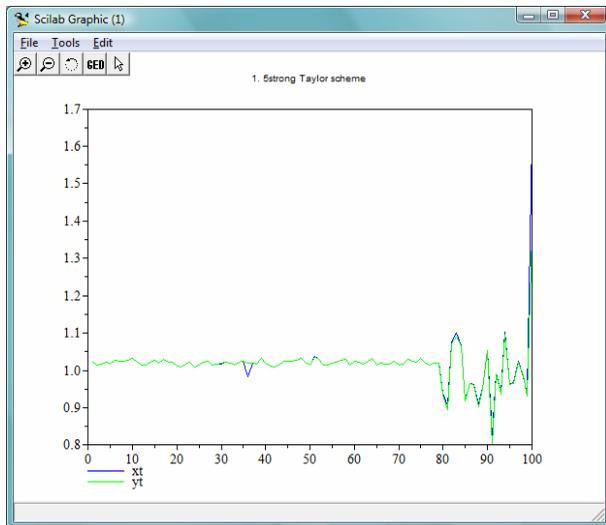


Рис. 17. $\Delta = 0,0001$ ($t \in [0;0,001]$)

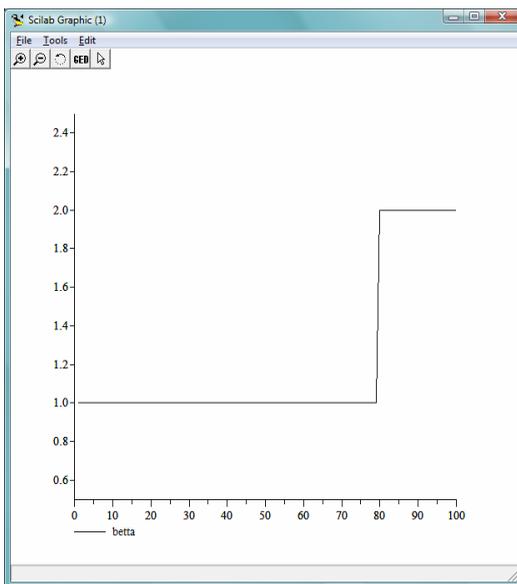


Рис. 18. Марковская цепь

Эксперимент показывает, что в случае состояние - зависимой модели переключения предложенная численная схема также позволяет найти приближенное решение уравнения (33).

$$\alpha_1 = 20 + \cos^2 x; \quad \alpha_2 = \sin x + 5 \cos 2x;$$

$$\lambda_1 = 0,2; \quad \lambda_2 = 0,3;$$

Этот вариант данных отличается от предыдущего значением λ_2 .

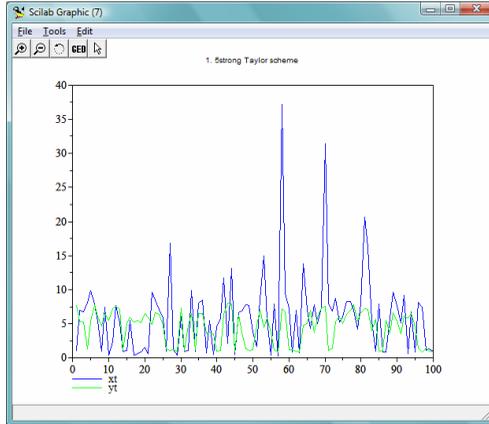


Рис. 19. $\Delta = 0,01$ ($t \in [0;0,1]$)

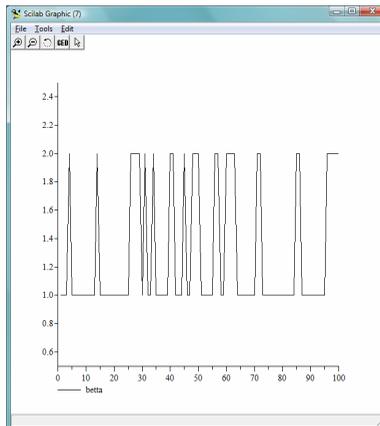


Рис. 20. Марковская цепь

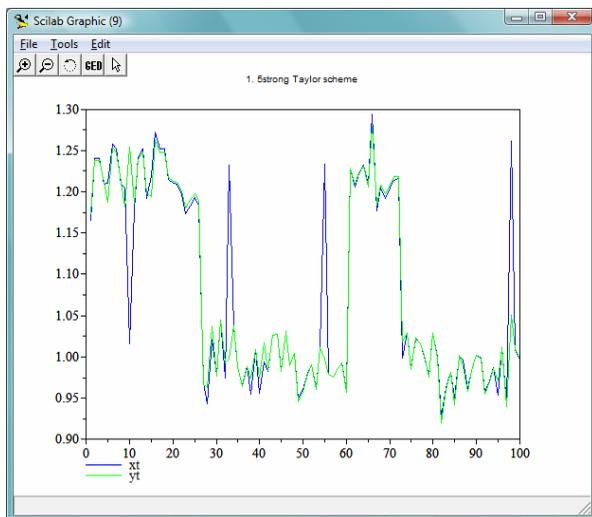


Рис. 21. $\Delta = 0,001$ ($t \in [0;0,01]$)

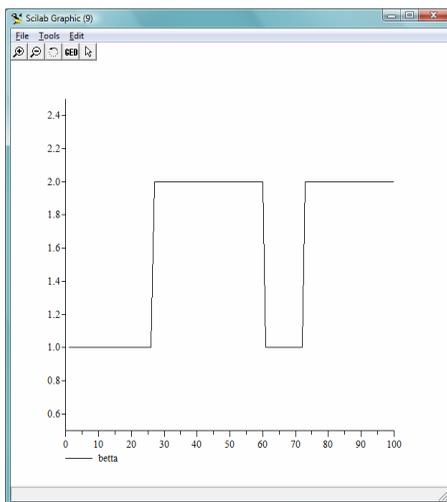


Рис. 22. Марковская цепь

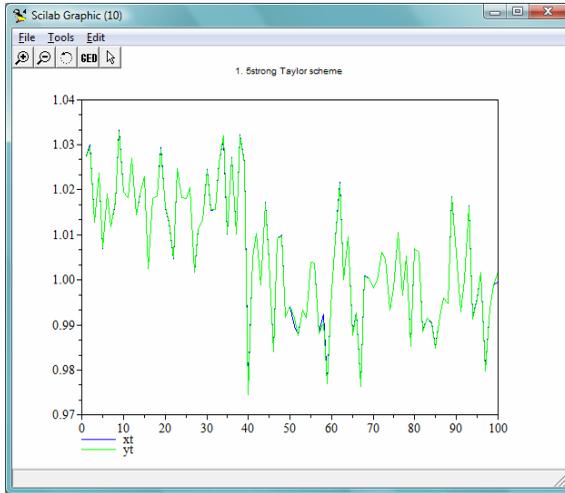


Рис. 23. $\Delta = 0,0001$ ($t \in [0;0,001]$)

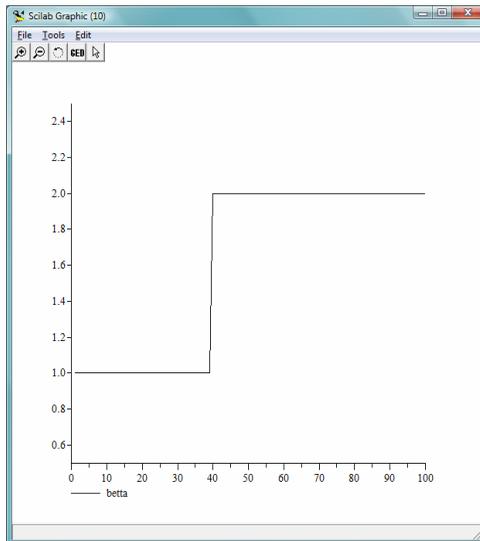


Рис. 24. Марковская цепь

$$7. P = \begin{pmatrix} -5 \cos^2 x & 5 \cos^2 x \\ 10 \cos^2 x & -10 \cos^2 x \end{pmatrix};$$

$$\alpha_1 = 3 + \cos x; \quad \alpha_2 = 20 - \sin x;$$

$$\lambda_1 = 0,5; \quad \lambda_2 = 0,1;$$

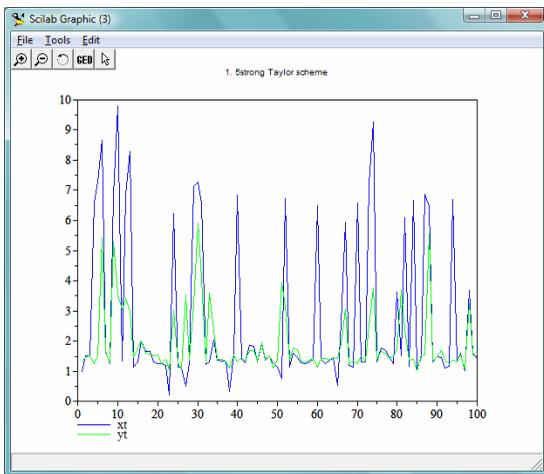


Рис. 25. $\Delta = 0,01$ ($t \in [0;0,1]$)

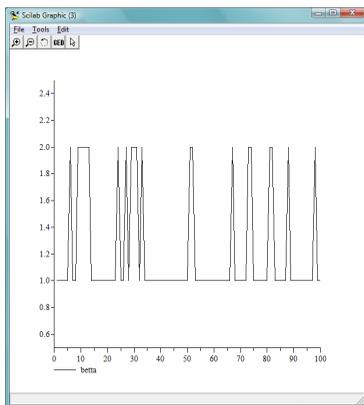


Рис. 26. Марковская цепь

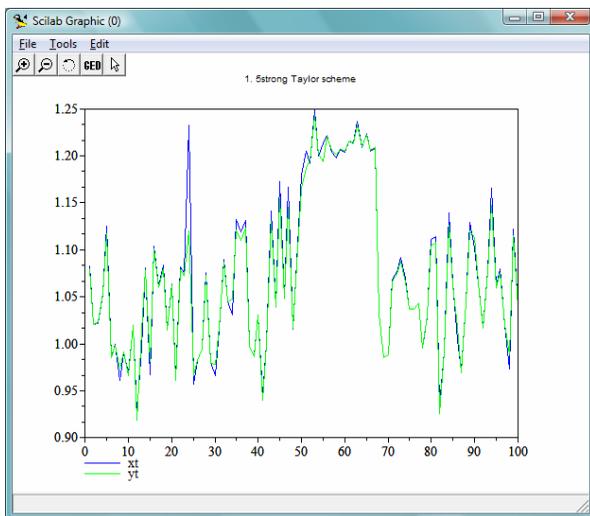


Рис. 27. $\Delta = 0,001$ ($t \in [0;0,01]$)

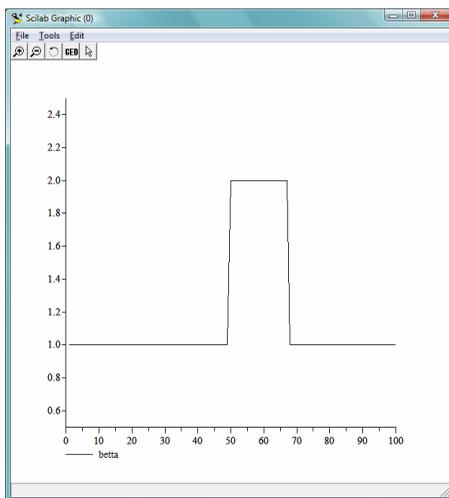


Рис. 28. Марковская цепь

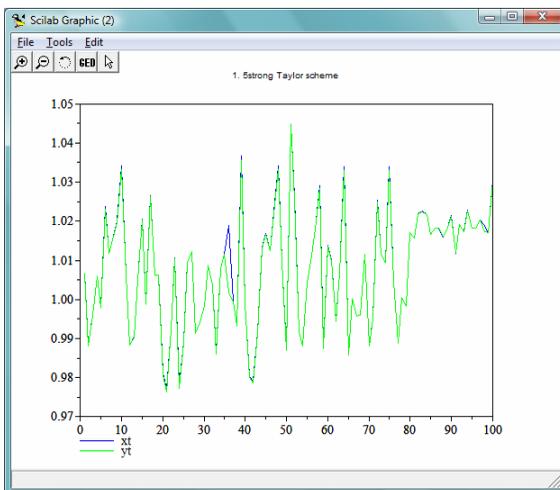


Рис. 29. $\Delta = 0,0001$ ($t \in [0;0,001]$)

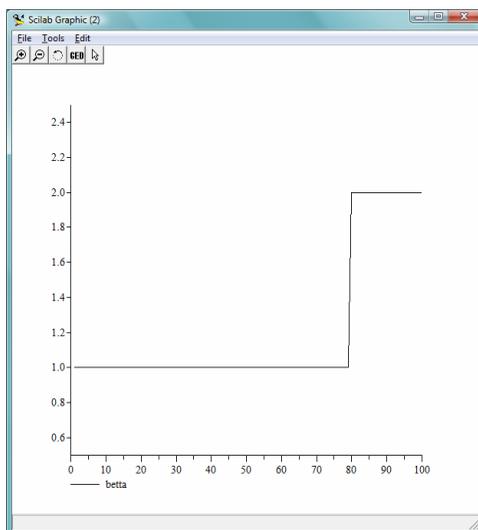


Рис. 30. Марковская цепь

5. Заключение

Теорему Платена можно обобщить на рассматриваемый случай диффузионной системы с марковскими переключениями, что подтверждает сходимость схем, основанных на стохастических аналогах формулы Тейлора к решению стохастических дифференциальных уравнений с марковскими переключениями при наложении определенных условий.

Возникающие вопросы устойчивости схем можно решить, учитывая, что во все слагаемые в той или иной степени входит множителем h . При достаточно малом h устойчивость схем будет обеспечена. Эксперименты показали, что для многих случаев подходящим является шаг дискретизации $h = 0,01$, но для случаев сильного колебания значений функций $a(\beta_t, X_t)$, $\sigma(\beta_t, X_t)$ в уравнении (9) устойчивость будет обеспечивать выбор более малого шага $h = 0,001$, $h = 0,0001$.

В случае состояние - зависимой модели переключений остается открытым вопрос – что считать точным решением и как определять меру отклонения от получаемых приближенных значений.

Также необходимо отметить, что для практических применений важнее оказывается не поиск решения, как реализации единственной траектории, хотя бы и с заданной точностью, а скорее нахождение значений функционалов от случайных траекторий, таких как математическое ожидание интегральных функционалов и/или вероятностей пребывания в заданном множестве. Нахождение этих величин с заданной точностью методом Монте-Карло требует предварительной оценки числа итераций, которое также должно быть связано с точностью аппроксимации.

Литература

1. БОРОВКОВ А.А. *Теория вероятностей: Учеб. пособие для вузов. - 2-е изд, перераб. и доп. - М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. – 432 с.*
2. КУЗНЕЦОВ Д.Ф. *Стохастические дифференциальные уравнения: теория и практика численного решения. - Спб.: Издательство Политехнического университета, 2007. – 800 с.*
3. КУЗНЕЦОВ Д.Ф. *Стохастические дифференциальные уравнения: теория и практика численного решения // Дифференциальные уравнения и процессы управления. -2008. - № 1.*
4. МИЛЬШТЕЙН Г.Н. *Численное интегрирование стохастических дифференциальных уравнений. - Свердловск: Изд-во Уральского университета, 1988. – 224 с.*
5. МИЛЛЕР Б.М., ПАНКОВ А.Р. *Теория случайных процессов в примерах и задачах. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 320 с.*
6. ОКЕНДАЛЬ Б. *Стохастические дифференциальные уравнения. Введение в теорию и приложения: Пер. с англ. – М.: Мир, ООО «Издательство АСТ», 2003. – 408 с.*
7. KLOEDEN P. E., PLATEN E., SCHURZ H. *Numerical Solution of SDE Through Computer Experiments. – Berlin: Springer – Verlag, 1994.*
8. MAO X. *Stability of stochastic differential equations with Markovian switching // Stoch. Proce. Appl. – 1999. – Vol. 79. – 45-67.*
9. YIN G., MAO X., YUAN C., AND CAO D. *Approximation methods for hybrid diffusion systems with state-dependent switching processes: numerical algorithms and existence and uniqueness of solutions// SIAM Journal on Mathematical Analysis – 2010. – Vol. 41, №6. - p. 2335-2352.*
10. YIN G., ZHU C. *Stochastic modeling and applied probability. Hybrid switching diffusions. Properties and applications. // Springer Science + Business Media, LLC 2010.*
11. YUAN C., LYGEROS J. *Stochastic markovian switching hybrid processes // Project IST-2001-38314, COLUMBUS. Design of Embedded Controllers for Safety Critical Systems, June 17, 2004.*

**ALGORITHMS FOR NUMERICAL SOLUTION OF
STOCHASTIC DIFFERENTIAL SYSTEMS WITH
SWITCHING DIFFUSION**

Nadezda Chernykh, post-graduate student, Arzamas Polytechnic Institute of R.E. Alekseev, Nizhny Novgorod State Technical University, 19, Kalinina Street, Arzamas, 607227, Russia, (nadezdacher@mail.ru).

Pavel Pakshin, Dr.Sci., professor, Arzamas Polytechnic Institute of R.E. Alekseev, Nizhny Novgorod State Technical University, 19, Kalinina Street, Arzamas, 607227, Russia, (pakshinpv@gmail.ru)

Abstract: Mathematical models are considered of hybrid systems in the form of stochastic differential equations with Markovian switching of the diffusion component. An extension of Taylor schemes for numerical approximation of their solutions is proposed. Modeling results in SCILAB are presented to demonstrate efficiency of the obtained algorithms.

Keywords: stochastic systems, diffusion process, Markovian switching, Taylor schemes, convergence, stability.

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии А. В. Добровидовым*

УДК 519.876 + 519.86

ББК 22.18

ЦЕНТРАЛИЗАЦИЯ И ДЕЦЕНТРАЛИЗАЦИЯ В БАЗОВЫХ ИГРОВЫХ МОДЕЛЯХ ОРГАНИЗАЦИОННЫХ СИСТЕМ

Алгазин Г. И.¹

(Алтайский государственный университет, г. Барнаул)

На основе двухуровневой модели организационных систем с неразделенными переменными и асимметрично информированными участниками приведена новая интерпретация централизации и децентрализации. Предложена и проведена классификация широкого спектра базовых модельных конструкций организационных систем, в основание которой положено различие приоритетов целей верхнего и нижнего уровней в выборе общих переменных.

Ключевые слова: организационная система, асимметрия информированности, неразделенные переменные, приоритеты целей, централизация, децентрализация, институциональное управление, модельные конструкции, классификация.

1. Введение

В современных математических исследованиях сложных организационных систем (ОС) важное место занимает проблема синтеза иерархического управления, в которой на первый план выступает вопрос об упорядочении представлений о централизации и децентрализации.

В ведущих научных школах России, занимающихся этой проблемой (Институт проблем управления РАН, Вычислительный центр РАН и др.), базовой для обсуждения вопроса о централизации-децентрализации часто используется следующая теоретико-игровая модельная конструкция (на примере игры двух лиц).

¹ Геннадий Иванович Алгазин, зав. кафедрой, доктор физико-математических наук, профессор (algazin@socio.asu.ru).

Функции $F: X_0 \times X \times \Theta \rightarrow R$ и $f: X_0 \times X \times \Theta \rightarrow R$ описывают интересы (выигрыш) первого и второго игроков, соответственно. Естественно полагать, что игроки стремятся максимизировать собственный выигрыш. Здесь Θ интерпретируется как множество неопределенных факторов, а X_0 и X – как множества управлений (стратегий) первого и второго игроков, соответственно.

Предполагается, что игрок 1 обладает правом первого хода, т.е. он первым выбирает свое управление $x_0 \in X_0$ и сообщает игроку 2 о своем выборе. Множество Θ моделирует неточность при выборе его представлений об игровой ситуации.

Предполагается также, что игрок 2 ведет себя рационально и в ответ выберет управление x из множества стратегий, максимизирующих его выигрыш f (в общем случае такое множество может содержать более одной стратегии). Допускается также, что игроку 2 в момент выбора своего управления известно реализовавшееся значение неопределенного фактора $\theta \in \Theta$.

Таким образом, при анализе игры с точки зрения субъективного описания ситуации игроком 1 допускается, что он способен оценить множество максимизирующих ответных стратегий игрока 2. Но выбор конкретной стратегии из этого множества ему неизвестен. Кроме того, он не знает действительного значения неопределенного фактора.

Если иерархическая система строится «сверху», то по [4] децентрализация – это когда «элемент верхнего уровня переуступает своим подчиненным право выбора своих управлений». Содержательно и в модельных конструкциях такие уступки реализуются следующим образом. Первый игрок сам выбирает лишь некоторое подмножество $X_0^* \subset X_0$. Второй игрок производит окончательный выбор управления первого игрока x_0 из этого подмножества X_0^* и, кроме того, выбирает свое управление $x \in X$. В соответствии с этим игроки получают свои выигрыши. Таким образом, при подходе «сверху», выбор управления из X_0 априори является правом верхнего уровня, которое он затем переуступает нижним уровням. В той же работе отмечается,

что соответствующие модельные конструкции формализуют идеи Ю.Б. Гермейера и Н.Н. Моисеева [3, 8].

Близкие по интерпретации модельные конструкции рассматриваются и в теории активных систем. Для сравнения возьмем модели, приведенные в работе [9]. В них есть следующие отличия:

1) множество управлений второго игрока X состоит только из одной точки. Поэтому его выбор x_0 ограничен только разрешенным первым игроком множеством стратегий X_0^\bullet ;

2) множество неопределенных факторов также состоит из одной точки, т.е. «природная» неопределенность отсутствует;

3) иерархическая система строится «снизу»: выбор управлений из X_0 изначально является правом нижнего уровня, а верхний уровень накладывает на этот выбор некие ограничения. Соответственно, в этом случае говорят не о децентрализации управления, а об институциональном управлении системой;

4) для учета в модели затрат на управление функция выигрыша первого игрока F зависит не только от выбранного управления x_0 , но и от ограничения X_0^\bullet , накладываемого первым игроком на выбор второго.

Другое, чисто формально-математическое, отличие выражено в том, что для пояснения децентрализации в [9, 10] используется параметрический способ задания системы множеств выбора стратегий. Параметрическая система множеств M_α определяется параметрами $\alpha \in [0, 1]$ и $x_0^\bullet \in X_0$ так, что $M_0 = x_0^\bullet$, $M_1 = X_0$ и $\forall 0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1 M_\alpha \subseteq M_\beta$.

Величина α интерпретируется как «степень централизации управления». Значение $\alpha = 0$ соответствует полной централизации («всё, кроме x_0^\bullet , запрещено»). Значение $\alpha = 1$ соответствует полной децентрализации («все разрешено»).

В статье также рассматривается авторская модель, которая, по мнению ее автора, является более общей и более естественной для формализованной интерпретации понятий «централизация» и «децентрализация», а также может являться основой для получения ряда качественно новых выводов [1].

2. Описание базовой модели

В модели предполагается, что интересы первого и второго игроков (максимизация собственных выигрышей) описываются функциями $F : X_0 \times X' \times \Theta \rightarrow R$ и $f : X_0 \times X'' \times \Theta \rightarrow R$ соответственно.

В этой модели есть ряд существенных особенностей:

1) $x_0 \in X_0$ – стратегия, которую выбирает только вышестоящий участник (первый игрок), т.е. верхний уровень никогда не переуступает своим подчиненным право выбора стратегий x_0 из X_0 . Именно это исключительное право выбора, наряду с правом первого хода, определяет подчиненное положение другого участника (игрока 2);

2) $x \in X$ – стратегия, которая совместно контролируется обоими игроками; X – полное множество выбора стратегий x , а X', X'' – множества выборов стратегий x для первого и второго игроков, соответственно. Полагается $X' \subseteq X$, $X'' \subseteq X$, т.е. полное множество стратегий может быть априори не известно никому из игроков. Информированность игрока 2 не ниже информированности игрока 1, что может быть выражено условием $X' \subseteq X'' \subseteq X$. В общем случае множество стратегий $X'' \setminus X'$ неизвестно первому игроку;

3) наряду с «природной» неопределенностью рассматривается и устранимая неопределенность, выражающаяся в различной информированности игроков относительно множества выбора стратегий X . Эта неопределенность может устраняться на основе обмена информацией как между игроками друг с другом, так и между игроками и средой (*примечание*: модели с обменом не обсуждаются в данной статье, но их можно посмотреть в [1]). Такая трактовка в модели информированности и обмена отличается от значительного числа работ по теории игр и теории активных систем. Так, в [4, 9 и др.] под информированностью понимается «та информация, которой обладают участники организационной системы на момент принятия решений о выбираемых стратегиях» или изучается «игровая неопределенность, отражающая совместное принятие решений несколькими агентами (при заданных управлениях со стороны центра), в рамках кото-

рой существенными являются предположения агента о множестве возможных значений обстановки игры (действий других агентов, выбираемых ими в рамках тех или иных неточно известных рассматриваемому агенту принципов поведения)».

В нашей интерпретации децентрализация характеризуется «ослаблением вмешательства верхних уровней в деятельность нижних и усилением роли экономических методов воздействия на них» [1, 11]. В математических конструкциях это находит отражение в смещении приоритетов целей в выборе управлений x с верхнего уровня на нижние.

При необходимости может быть использовано также и параметрическое задание множеств X' и X'' . Соответствующую формализацию можно посмотреть в [1].

В соответствии с этими положениями рассмотрен достаточно представительный спектр базовых моделей организационных систем, который можно разбить на три основных класса.

Централизованные системы. Модели этого класса предполагают приоритетное право верхнего уровня в выборе управлений x .

Децентрализованные системы. Главная особенность моделей этого класса состоит в признании приоритетного права нижнего уровня, вплоть до полного отрицания априорного критерия F верхнего уровня, при выборе управлений x .

Системы смешанного типа. Модельно-теоретическое описание таких систем предполагает, что критерии выбора решений x задают одновременно верхний и нижний уровни либо при выборе решений нет явного приоритета чьих-то интересов (критериев).

Видимо, нет особой необходимости объяснять определенную условность разбиения. Однако к этому уместно добавить двойственность исходной интерпретации постановки задачи синтеза управления в иерархических системах, которая вытекает из подходов «сверху» и «снизу». Как будет показано, эта двойственность может влиять на «размытость» границ между выделенными классами и будет учтена ниже в ряде модельных конструкций.

Далее чтобы не перегружать техническими деталями описание базисных моделей сделаем ряд упрощающих (но не принципиальных с точки зрения общей задачи исследования) предположений:

1) не будем принимать во внимание «природную» неопределенность ввиду того, что модели с ней стали уже «классикой» и более-менее изучены;

2) будем исходить из того, что участники организационных систем не несут никаких затрат, связанных с управлением. Например, в работе [9] учитывается, что «введение тех или иных ограничений может потребовать от центра определенных затрат»;

3) рассматриваемая ОС состоит из двух участников: центра и одного агента. Поэтому не учитываются связи между элементами нижнего уровня. Обобщения моделей для этих случаев можно найти, например, в работе [1];

4) полагаем, что множества X_0 и X', X'' наделены топологиями и компактны, а функции F и f непрерывны.

Итак, последующее изложение будет опираться на следующую формализацию ОС с неразделенными переменными и асимметрично информированными участниками.

Задача центра:

$$(1) \begin{cases} F(x_0, x) \rightarrow \max_{x_0, x}, \\ x_0 \in X_0, \\ x \in X'. \end{cases}$$

Задача агента:

$$(2) \begin{cases} f(x_0, x) \rightarrow \max_x, \\ x \in X''. \end{cases}$$

Между двумя полярными формами организации ОС – централизованной и рыночной – существует целый спектр организационных структур, характеризующихся последовательным ослаблением вмешательства верхних уровней в деятельность нижних и усилением роли экономических методов воздействия на них.

Основа нашей систематизации моделей ОС – спектр различных приоритетов целей участников, расположенных на различных уровнях иерархии, в выборе переменных x . При проведении систематизации адаптирована и обобщена классификация общих моделей экономики, предложенная в [11].

3. Централизованные системы

Можно выделить две основные формализации ОС, в разной степени выражающих концепцию централизованного управления.

В первой формализации исключается сама возможность участия нижнего уровня в выборе решений. Модели этой группы систем будем обозначать буквой Z . В Z -моделях управления x_0 и x выбираются центром. Он устанавливает (прогнозирует) каждому участнику на нижнем уровне точные значения стратегий x . По своей сути это означает, что центр сам вместо агентов осуществляет выбор решений и жестко следит за тем, чтобы они им следовали. Функции управляющих органов агентов сводятся лишь к исполнению решений центра.

В наиболее жесткой постановке Z -моделей полностью игнорируется существование локальных целей агентов либо они признаются лишь в индикативной форме (в обоих случаях из базовых моделей исключаются локальные критерии f). Обозначим такую модель как z_1 -модель

$$(3) \quad \begin{cases} F(x_0, x) \rightarrow \max_{x_0, x}, \\ x_0 \in X_0, \\ x \in X'. \end{cases}$$

В более мягкой формализации Z -моделей интересы агентов учитываются на верхнем уровне в форме ограничений $f(x_0, x) \geq L$ в задаче оптимизации, решаемой центром. Для базовых моделей эта задача имеет вид

$$(4) \begin{cases} F_0(x_0, x) \rightarrow \max_{x_0, x} \\ x_0 \in X_0, \\ x \in X', \\ f(x_0, x) \geq L. \end{cases}$$

Достаточно известны два подхода к выбору значений параметра L . При первом подходе реализуется так называемый «остаточный принцип» во взаимоотношениях участников различных уровней. В терминах Z -модели это означает, что подсистемы теряют свою целевую направленность, и их влияние на конечные результаты системы оценивается параметрически $f(x_0, x) \geq L$. Возможности задания более высоких «жизненных стандартов» L ограничены неизбежностью снижения уровня достижимости целей верхнего уровня F .

При втором подходе в основу выбора значений параметра L принимается один из принципов принятия решений в условиях неполной информации, широко используемых в теории игр и статистических решений. В условиях централизованного подхода, подчинения целей агентов целям более высокого порядка и неопределенности для нижнего уровня в выборе решений центром одним из возможных способов поведения агентов является ориентация на достижение гарантированного результата. «Для иерархических игр характерно использование максимального гарантированного результата в качестве базовой концепции игры» [10]. Математически гарантированный результат (критерий Вальда) записывается в виде $L = \max_x \min_{x_0} f(x_0, x)$.

Так как участники имеют различную информированность об условиях функционирования системы, то можно выделить два вида Z -моделей. В z_2 -модели оценка гарантированного результата агентов производится по информации центра, в z_3 -модели – по информации самих агентов.

Можно полагать, что в z_2 -модель реализован первый из рассмотренных выше случаев, когда выбор управления x изначально является правом верхнего уровня, когда как в z_3 -модели реализован второй случай – выбор управлений из X изначально яв-

ляется правом нижнего уровня, которое затем переуступается центру (институциональное управление).

В частном случае гарантированный результат может являться одним из пробных значений параметра L при реализации во взаимоотношениях участников «остаточного принципа».

Рассмотренные выше модели являются моделями выбора наилучших решений при неизменных целевых показателях центра и агентов. В таких моделях нельзя учесть влияние стимулов на общесистемные результаты.

Один из подходов к формализации мотивационных механизмов в централизованных системах состоит в доопределении модели оптимального выбора (4) следующим образом:

$$(5) \quad \begin{cases} F(x_0, x) - C \rightarrow \max_{x_0, x, C}, \\ x_0 \in X_0, \\ x \in X', \\ f(x_0, x) + C \geq L, \\ C \geq 0. \end{cases}$$

Параметр C представляет собой величину компенсации центром «недополучения» агентами гарантированного результата (или «жизненного стандарта»). В теории многоуровневых иерархических систем подобные модельные преобразования получили название линейных модификаций локальных функций качества с нулевой суммой [7].

Аналогичные конструкции используются и в теории иерархических игр, где получили название игр с «побочными платежами» [3]. Центр использует побочные платежи в качестве элемента своей стратегии в игре (используем обозначения и результаты работы [3])

$$w_1 = f_1(x_1, x_2), w_2 = f_2(x_1, x_2), x_1 \in X_1^0, x_2 \in X_2^0.$$

Тогда при передаче побочного платежа от первого игрока (центра) ко второму она приобретает вид

$$w_1 = f_1(x_1, x_2) - z, w_2 = f_2(x_1, x_2) + z, x_1 \in X_1^0, x_2 \in X_2^0, 0 \leq z \leq z^0.$$

Максимальный гарантированный результат первого игрока в игре Γ_2 с побочным платежом будет равен

$$\sup_{(x_1, x_2, z) \in D^{\Pi}(z^0)} [f_1(x_1, x_2) - z],$$

$$D^{\Pi}(z^0) = \{x_1, x_2, z \mid f_2(x_1, x_2) + z > L_2, \quad 0 \leq z \leq z^0\}.$$

Здесь L_2 – гарантированный результат второго игрока. Последняя модельная конструкция соответствует модели (5).

Как отмечает Ю.Б. Гермейер, побочные платежи между однотипными или сравнимыми критериями эффективности дают возможность расширения множества стратегий центра, в случае большого числа агентов значительно упрощают задачу центра, позволяют бороться с неопределенностью интересов агентов.

В теории активных систем идейно схожие конструкции применяются в задачах стимулирования в ОС [10]. Вместе с тем это не означает, что все похожие или близкие из указанных работ конструкции следует соотносить с централизованными системами. В разделе 4 будут показаны такие известные теоретико-игровые модели, которые по нашей классификации будут относиться к децентрализованным системам.

Очевидны следующие следствия перехода от модели (4) к (5):

1) всякое допустимое решение модели (4) допустимо и в модели (5); стимулирование ($C > 0$) расширяет множества допустимых состояний системы, а отсутствие стимулов ($C = 0$) ограничивает выбор решений сложившимся множеством допустимых состояний;

2) мотивационный механизм может дополнять централизованную систему отношениями, основанными на взаимной выгоде.

Модели типа (5) будем называть моделями с компенсациями и обозначать как ZC .

Ввиду малой освещенности в научной литературе таких механизмов для централизованных систем (что явно не соответствует практике их применения), в завершении статьи приведен модельный пример, иллюстрирующий эффективность перехода от задачи (4) к задаче (5).

Вторая формализация унитарных систем (H -модель) использует некоторые элементы децентрализованного подхода [11]. В ней могут в явном виде выделяться агенты в качестве

элементов, принимающих самостоятельные решения. Выбор управлений x осуществляется ими в условиях объективного конфликта двух видов целей: имманентных (априорных, собственных) целей агентов f и редуцированных (обозначим φ), полученных на основе проекции цели верхнего уровня на нижний, т.е. $\varphi(x_0, x) = \text{Pr}(F_0(x_0, x))$ (символом Pr обозначен оператор проектирования целей центра на агента). Целевые показатели φ являются локальным отображением целей центра и поэтому не выражают собственных интересов самих агентов. Поиск баланса интересов на нижнем уровне вносит в централизованные системы элементы реальной децентрализации. В общем случае существует область так называемых эффективных компромиссов критериев f и φ . Выбор решения в этой области требует дополнительных соображений о соотношении данных критериев. В классе H -моделей полагаем приоритет редуцированных целей перед имманентными.

В пользу H -моделей по сравнению с предыдущим классом Z -моделей можно указать, по крайней мере, четыре следующих обстоятельства:

– появляется принципиальная возможность для каждого уровня при выработке решений использовать информацию в наиболее соответствующей ему степени агрегированности (*примечание*: чтобы не перегружать работу деталями, мы не станем ниже в модельных конструкциях учитывать эти различия. Интересующимся такого рода техническими подробностями можно рекомендовать работы [1, 11]);

– при выработке решений используется большая информированность нижнего уровня о множестве выбора решений;

– происходит разгрузка центра, как за счет агрегирования информации, так и за счет того, что тяжесть проблем межуровневого и внутриуровневого (для взаимосвязанных агентов) согласования решений перекладывается на агенты;

– обеспечение согласованности решений участников, приведение последних к общесистемным результатам ведет к усилению стимулирующей функции экономического управления.

Ниже в (6) приведен общий вид базовых H -моделей:

$$(6) \quad \begin{cases} F(x_0, x) \rightarrow \max_{x_0} \\ x_0 \in X_0, \\ \left\{ \begin{array}{l} \varphi(x_0, x) \rightarrow \max_x, \\ f(x_0, x) \rightarrow \max_x, \end{array} \right. \\ x \in X'' \end{cases}$$

В качестве примера приведем *централизованную модель мотивации* [10], в которой задачу центра можно записать в виде

$$\begin{cases} F(x_0, x) = x_0 px \rightarrow \max_{x_0, x}, \\ x_0 \in [0, 1], \\ x \in [0, \alpha \bar{x}]. \end{cases}$$

Задачу агента запишем в виде

$$\begin{cases} f(x_0, x) = (1 - x_0) px - c(x) \rightarrow \max_x, \\ x \in [0, \bar{x}]. \end{cases}$$

В этой модели центр использует норматив $x_0 \in [0, 1]$ отчислений от дохода агентов; p – цена единицы продукции; \bar{x} – предельная активность агента, $\alpha \in (0, 1]$.

Пусть центр использует следующую централизованную схему – «забирает» себе весь доход от деятельности агентов, а затем компенсирует им затраты $c(y)$ от выбираемых ими действий y в случае выполнения плановых заданий x . Для этого на нижнем уровне решается задача вычисления оптимального с точки зрения центра действий x^* агента (задача оптимального согласованного планирования по [10]). В ней реализован один из вариантов решения задачи многокритериальной оптимизации в модели (6), когда баланс интересов находится из условия максимизации суммы критериальных функций:

$$\begin{cases} F(x_0, x) + f(x_0, x) = px - c(x) \rightarrow \max_x, \\ x \in [0, \bar{x}]. \end{cases}$$

Оптимальная для центра компенсаторная система стимулирования x_0^* определяется затем из задачи центра при естественном условии $f(x_0^*, x^*) = ((1 - x_0^*)px^* - c(x^*) \geq 0$. Выигрыш агента тождественно равен нулю, так как центр в точности компенсирует его затраты. Компенсация может учитывать не только затраты агента, но и гарантированную полезность и/или мотивированную надбавку.

Далее, крайним в модели (6) является случай, когда собственные цели агентов полностью подавляются верхним уровнем. Соответствующая h_1 -модель, являющаяся в указанном смысле аналогом z_1 -модели, представлена ниже:

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} F(x_0, x) \rightarrow \max_{x_0}, \\ x_0 \in X_0, \\ \left\{ \begin{array}{l} \varphi(x_0, x) \rightarrow \max_x, \\ x \in X'' \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Здесь в силу однонаправленности критериев F и φ для моделей h_1 не существует проблемы межуровневого согласования.

При различии целей f , φ и приоритете центра другим способом разрешения конфликта является уже упоминавшийся выше «остаточный принцип». Величины «жизненных стандартов» L для нижнего уровня оцениваются параметрически с помощью неравенств $f(x_0, x_k) \geq L$ исходя из уровня достижения общесистемных целей F , полученного в результате решения задач по моделям следующего вида:

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} F(x_0, x) \rightarrow \max_{x_0}, \\ x_0 \in X_0, \\ \left\{ \begin{array}{l} \varphi(x_0, x) \rightarrow \max_x, \\ x \in X'' \end{array} \right. \\ f(x_0, x) \geq L \end{array} \right.$$

Такой же вид принимают модели, если в основу выбора значений параметров L полагается принцип гарантированного результата. В h_2 -модели гарантированный результат каждого участника нижнего уровня рассчитывается по множеству X' выбора стратегий x , исходя из уровня информированности центра; в h_3 -модели – по множеству выбора агента X'' .

Введение мотивационных механизмов в H -модели позволяет выделить так же, как было показано выше, класс моделей с компенсациями – HC -модели.

4. Децентрализованные системы (D -модели)

Главная особенность крайней степени децентрализации (d_1 -модель) состоит в отрицании априорного критерия оптимальности верхнего уровня F при выборе управлений x [11]. Критерии выбора x задают агенты, а сами решения находятся из задач нижнего уровня:

$$(9) \quad \begin{cases} f(x_0, x) \rightarrow \max_x, \\ x \in X'' \end{cases}$$

Задача верхнего уровня для децентрализованных систем сводится к нахождению таких управлений $x_0^{d1} \in X_0$, которые вместе с локально-оптимальными решениями x^{d1} агентами своих задач (9) допустимы по общесистемным условиям

$$(10) \quad \langle x_0^{d1}, x^{d1} \rangle \in \Omega.$$

Общесистемные условия могут описывать область гомеостаза системы, различного рода балансовые соотношения (например, бюджетное ограничение в моделях потребления) и т.д. Оно является обязательным для центра, а не для участников f , хотя его обеспечение является результатом совместного выбора управлений центром и агентами, нарушения которого сказываются на результатах каждого участника.

Часто в ОС ограничения такого типа выражают требования натурально-стоимостной сбалансированности управлений. Тогда переменные агентов x являются измерителями физических величин (штуки, тонны и т.д.), а переменные центра x_0 имеют

стоимостную природу (цены, тарифы, процентные и налоговые ставки, параметры штрафа и поощрений и т.д.).

В качестве характерного примера подкласса *d1-моделей* приведем теоретико-игровую модель экономического равновесия, разработанную В.Л. Макаровым. «Имеются производители и потребители продуктов [экономические агенты], которые в основной модели описываются однообразно, т.е. формально производители и потребители никак не различаются. ... Допускается одновременный выбор потребительских наборов и производственных способов одним и тем же агентом, который является и потребителем, и производителем по определению» [6]. Тогда модель отдельного экономического агента может быть представлена в виде задачи вида (9). В этой модели x_0 – вектор цен на все продукты (в базовой модели каждому продукту соответствует только одна цена), а множество X'' интерпретируется как совокупность возможных стратегий агента как потребителя и допустимых стратегий агента как производителя, т.е. с каждым агентом связывается пара множеств Y и Z , соответственно $X'' = Y \times Z$. Например, вектор x можно понимать как набор продуктов, доступных для потребления и набор способ производства, где положительные компоненты показывают выпуск, а отрицательные – затраты соответствующих продуктов. Цели экономических агентов представлены в виде числовых функций f . Условия вида (10) представляют собой определение решения игры по Нэшу. Они включают: каждый агент действует наилучшим для себя образом согласно сложившейся ситуации, материальный баланс спроса и предложения по всем продуктам, выбор каждого агента сделан с учетом его бюджетных возможностей (расходы не превышают доход).

Другая формализация полной децентрализации (*d₂-модель*) основана на четком разделении в исходной модели прав выбора управлений из X_0 и X между центром и агентами, так что выбор управлений x является исключительным правом агента:

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} F(x_0, x) \rightarrow \max_{x_0}, \\ x_0 \in X_0, \\ \left\{ \begin{array}{l} f(x_0, x) \rightarrow \max_x, \\ x \in X'' \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Модельные конструкции такого типа традиционно изучаются теорией игр с непротивоположными интересами, теорией активных систем, теорией многоуровневых иерархических систем. В качестве решения выбирается та или иная концепция равновесия [3, 5, 7, 8, 10], Парето-оптимальные стратегии и пр.

Приведем ряд известных и зарекомендовавших себя базовых игровых моделей, относящихся к подклассу d_2 -моделей. При их описании будем следовать работе [10].

Модель стимулирования. Стратегией агента является выбор действия $y \in A$, принадлежащего множеству допустимых действий A . Стратегией центра является выбор функции стимулирования $\sigma(y) \in M$, принадлежащей допустимому множеству M и ставящей в соответствие действию агента некоторое неотрицательное вознаграждение, выплачиваемое ему центром.

Целевые функции представляют собой: для агента – разность между стимулированием и затратами:

$$f(\sigma, y) = \sigma(y) - c(y) \rightarrow \max_y,$$

а для центра – разность между доходом и затратами центра на стимулирование - вознаграждение, выплачиваемое агенту:

$$\Phi(\sigma, y) = H(y) - \sigma(y) \rightarrow \max_\sigma.$$

Полагается, что выбор действия $y \in A$ требует от агента затрат $c(y)$ и приносит центру доход $H(y)$.

В нашей формализации (11) этой модели соответствуют следующие обозначения: $x_0 = \sigma(\cdot)$, $X_0 = M$, $x = y$, $X'' = A$, $F \equiv \Phi$.

Модель планирования. Стратегией каждого из агентов является сообщение центру некоторой информации $s \in \Omega$. Последовательность функционирования следующая: центр выбирает процедуру планирования $\pi(\cdot)$ и сообщает ее агентам, агенты при

известной процедуре планирования сообщают центру информацию. На основании этой информации центр назначает агентам планы $x = \pi(s) \in X$. Функция предпочтения агента $\varphi(\pi(s), s)$, отражающая интересы агента в задачах планирования, зависит от назначенного центром плана и сообщаемой ему информации. Задача центра – выбор процедуры планирования, максимизирующей его целевую функцию $\Phi(\pi, s)$ на множестве планов. Считается, что агенты ведут себя некооперативно, выбирая доминантные или равновесные по Нэшу стратегии.

В нашей формализации (11) этой модели соответствуют следующие обозначения: $x_0 = \pi(\cdot)$, $X_0 = X$, $x = s$, $X'' = \Omega$, $F \equiv \Phi$.

Модель смешанного финансирования. Фирма (агент) предлагает для включения в программу социального развития региона проект, требующий суммарного финансирования S . Этот проект проходит экспертизу, в результате которой определяется его социальная ценность. Помимо социальной ценности предлагаемый фирмой проект имеет экономическую ценность $\varphi(S)$ для фирмы. На основе заявок фирм центр (например, руководство региона) определяет объемы финансирования проектов фирм x (как правило, $x \leq S$) исходя из ограниченного объема бюджетных средств R . Процедура $x = \pi(S)$ называется механизмом смешанного финансирования. Недостающие средства в объеме $S - x$ фирма обязуется обеспечить за свой счет. Таким образом, интересы фирмы описываются выражением

$$\varphi(S) - (S - \pi(S)) \rightarrow \max_S.$$

Задача центра заключается в том, чтобы разработать такой механизм $\pi(S)$ который обеспечит максимальный социальный эффект (суммарный по всем фирмам) $\Phi(\pi, S^*)$ где S^* – равновесные стратегии фирм (точка Нэша соответствующей игры).

Переход от этой модели к модели (11) можно провести при переобозначениях: $x_0 = \pi(\cdot)$, $x = S$, $X'' = \{S : S > 0\}$, $F \equiv \Phi$, а X_0 ограничивает выбор $x = \pi(S)$ по всем агентам так, чтобы не превысить объем бюджетных средств R .

Модель информационного управления. Рассмотрим ее на примере модели «Производитель и посредник», в которой участвуют агент, являющийся производителем некоторого вида

продукции, и центр, выступающий в роли посредника между агентом и рынком. Предполагается, что в отличие от производителя, посредник точно знает рыночную цену θ . Производитель и посредник заранее оговаривают пропорцию, в которой они будут делить доход $-\lambda$ и $1 - \lambda$ соответственно, $\lambda \in (0, 1)$; затем посредник сообщает производителю оценку $\tilde{\theta}$ (не обязательно достоверную) рыночной цены, и, наконец, производитель выбирает объем производства y продукта и передает его посреднику. Посредник реализует его по рыночной цене и передает производителю оговоренную долю дохода $\lambda\theta y$, а себе забирает $(1 - \lambda)\theta y$. Выбор посредником сообщения $\tilde{\theta}$ можно трактовать как осуществление информационного управления.

Производитель характеризуется функцией издержек $c(y)$, которая связывает объем продукции и затраты на его производство (считается, что ограничения на мощность отсутствуют, то есть может производиться любой объем продукции). Предполагается, что производитель изначально доверяет посреднику, причем у производителя нет возможности проверить, насколько сообщение посредника соответствует действительности. В этом случае посредник может сообщить значение $\tilde{\theta}$, не совпадающее, вообще говоря, с истинным значением рыночной цены θ . Выбор посредником сообщения $\tilde{\theta}$ можно трактовать как осуществление информационного управления.

Наконец, предполагается, что посредник стремится обеспечить производителю тот доход, который он ожидает получить исходя из значения $\tilde{\theta}$.

В рамках описанных выше предположений целевые функции посредника и производителя выглядят, соответственно, следующим образом:

$$f_0(\tilde{\theta}, y) = \theta y - \tilde{\theta} \lambda y, f(\tilde{\theta}, y) = \tilde{\theta} \lambda y - c(y).$$

Тогда сводимость этой модели к децентрализованной модели вида (11) обеспечивается с помощью следующих переобозначений: $x_0 = \tilde{\theta}, x = y, F \equiv f_0, X'' = (-\infty, +\infty)$.

Модель институционального управления. Полагается, что задано некоторое универсальное множество X и задачей инсти-

туционального управления центра (задачей управления ограничениями) является выбор ограничения $B \subseteq X$ множества допустимых действий агента с учетом того, что последний выберет действие, максимизирующее его целевую функцию $f(\cdot)$. Пусть предпочтения центра заданы функционалом

$$\Phi(B, y): 2^X \times X \rightarrow R^1,$$

позволяющим сравнивать пары «множество допустимых действий агента – действие агента». Зависимость предпочтений центра от множества B допустимых действий агента обусловлена тем, что введение тех или иных ограничений может потребовать от центра определенных затрат. Соответственно, задача институционального управления может быть представлена в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi(B, y) \rightarrow \max_B, \\ B \in 2^X, \\ \left\{ \begin{array}{l} f(B, y) = f(y) \rightarrow \max_y, \\ y \in B. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Здесь $f(B, y)$ – функционал, задающий предпочтения агента. Он введен для того, чтобы показать сводимость этой модели к модели вида (11). Для этого достаточно еще положить: $x_0 = B, X_0 = 2^X, X = X' = X'', x = y, F \equiv \Phi$.

Аналогичным образом сводится к модели (11) модель *институционального и мотивационного управления*

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi(B, y) = H(y) - c(B, y) - Q(B) \rightarrow \max_B, \\ B \in 2^X, \\ \left\{ \begin{array}{l} f(B, y) = f(y) + c(B, y) \rightarrow \max_y, \\ y \in B. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Здесь в $\Phi(B, y)$ – первое слагаемое – доход центра; второе слагаемое – затраты по обеспечению выбора агентом из множе-

ства B именно действия y ; третье слагаемое – затраты на институциональное управление.

Игра Γ_1 . Рассмотрим эту игру, основываясь на обозначениях модели (11). Если центр не ожидает информации о действии агента и это известно агенту, то стратегия центра состоит просто из выбора некоторого действия $x_0^* \in X_0$. Стратегия агента состоит в выборе $x = \tilde{x}(x_0^*) \in X''$ (он делает ход вторым, уже зная действие центра). Пара действий (x_0^*, x^*) называется решением (равновесием) в игре Γ_1 если

$$x_0^* \in \mathop{\text{Arg max}}_{x_0 \in X_0} \min_{x \in R(x_0)} F(x_0, x), x^* \in R(x_0^*) = \mathop{\text{Arg max}}_{x \in X''} f(x_0^*, x).$$

Здесь $R(x_0)$ – функция наилучшего ответа агента на действие центра x_0 .

Игра Γ_2 . Если агент (выбирающий стратегию вторым) не ожидает информации о действии центра, то реализация права первого хода центра может состоять в сообщении центром агенту функции $\tilde{x}_0(x)$. Такое сообщение может рассматриваться как обещание выбрать действие $\tilde{x}_0(x)$ при выборе агентом действия x . Тогда стратегия агента состоит в выборе действия в зависимости от сообщения центра, $x = \tilde{\tilde{x}}(\tilde{x}_0(\cdot))$. Если при этом агент доверяет сообщению центра, он должен выбрать действие x^* , реализующее решение задачи $\max_{x \in X''} f(\tilde{x}_0(x), x)$.

Запишем последнюю задачу в виде

$$\begin{cases} f(x_0, x) \rightarrow \max_x \\ x_0 = \tilde{x}_0(x), \\ x \in X''. \end{cases}$$

Аналогичная модельная конструкция встречалась в классе H -моделей (модель (6)), где полагался приоритет целей центра в выборе x . В нашем случае этот приоритет принадлежит целям агента, что и определило отнесение игры Γ_2 к классу децентрализованных систем. Однако если целевые функции сторон согласованы, то при выборе x по существу нет явного приоритета ни центра, ни агента. Тогда данную игру уже следует относить к

классу смешанных систем. Это обстоятельство говорит о тонкой грани между классами. В целом, следует добавить, что в этой игре передача агенту функции $\tilde{x}_0(x)$ оправдана для центра в случае согласованности его целей с целями агента, особенно при существенном различии его информированности и агента о множестве X .

Пусть в следующей формализации выбор управлений из X изначально является правом нижнего уровня, а центр вводит в модель (11) на этот выбор некие ограничения через его соотношения с заданным управлением x_0 . Такого рода вмешательство верхнего уровня в деятельность нижних уровней является разновидностью институционального управления системой, задачи которого сформулированы в [9, 10].

В частном случае, по аналогии с h_3 -моделями, децентрализованный выбор может быть реализован по модели вида

$$(12) \left\{ \begin{array}{l} F(x_0, x) \rightarrow \max_{x_0}, \\ x_0 \in X_0, \\ f(x_0, x) \rightarrow \max_x, \\ x \in X'', \\ F(x_0, x) \geq K. \end{array} \right.$$

Как один из вариантов в качестве значения K можно выбрать гарантированный результат центра. Исходя из уровня информированности центра, он рассчитывается по множеству стратегий X' , т.е. $K = \max_{x_0 \in X_0} \min_{x \in X'} F(x_0, x)$. Пусть гарантирован-

ный результат достигается при $x_0 = x_0^{d3}$. Тогда этому случаю соответствует следующая d_3 -модель:

$$(13) \begin{cases} f(x_0, x) \rightarrow \max_x, \\ x \in X'', \\ F(x_0, x) \geq \max_{x_0 \in X_0} \min_{x \in X'} F(x_0, x), \\ x_0 = x_0^{d3}. \end{cases}$$

Рассмотрим еще случай, когда выбор управления из X априори является правом верхнего уровня, а затем он переуступает нижним уровням право выбора своих управлений.

Обладая правом первого хода и возможностью оценки множества рациональных ответов агентов $X(f, x_0, X')$ на его стратегию x_0 , центр может рассчитывать на максимальный гарантированный результат $\max_{x_0 \in X_0} \min_{x \in X(f, x_0, X')} F(x_0, x)$. Пусть центр его получает при $x_0 = x_0^{d4}$. Окончательный выбор решения x находится по d_4 -модели

$$(14) \begin{cases} f(x_0, x) \rightarrow \max_x, \\ x \in X'', \\ F(x_0, x) \geq \max_{x_0 \in X_0} \min_{x \in X(f, x_0, X')} F(x_0, x), \\ x_0 = x_0^{d4}. \end{cases}$$

5. Системы смешанного типа (S-модели)

Рассмотрим две формализации ОС, выражающих одновременно (или в равной мере) концепции централизованного и децентрализованного управления.

В первой формализации модельно-теоретическое описание таких систем предполагает, что критерии выбора решений x задают одновременно и центр и агенты (s_1 -модель). Центр находит решение x^{**} задачи

$$(15) \begin{cases} F(x_0, x) \rightarrow \max_x, \\ x \in X'. \end{cases}$$

Соответственно, агенты находят решения x^* своих задач

$$(16) \begin{cases} f(x_0, x) \rightarrow \max_x, \\ x \in X'' \end{cases}$$

Согласованным является равновесное состояние системы, то есть когда решения центра x^{**} и агентов x^* принадлежат некоторому множеству допустимых соотношений между ними. В частном случае равновесное состояние системы определяется совпадением решений центра и агента.

Выбор решений x_0^{s1} , для которых существуют равновесные состояния, определяет суть задачи координации верхнего уровня.

В качестве примера модели (15), (16) приведем *модель франчайзинга* в условиях конкуренции на определенной территории нескольких франчайзи одной и той же сети и непосредственно самого франчайзера [2], включающую:

- задачу головной фирмы-франчайзера (центра):

$$\begin{cases} I(p, Q, q_0, k) = kpQ + pq_0 - \varphi_0(q_0) \rightarrow \max_{q_0}, \\ q_0 \geq 0; \end{cases}$$

- задачу фирмы-франчайзи (на примере одного агента):

$$\begin{cases} \Pi(p, q, k) = (1 - k) \cdot p \cdot q - \varphi(q) \rightarrow \max_q, \\ q \geq 0. \end{cases}$$

Здесь q – объем реализованной продукции одной фирмой-франчайзи; Q – суммарный объем реализованной продукции всеми франчайзи; q_0 – объем реализованной продукции франчайзером, а p – её цена; pQ – величина выручки (дохода) фирм-франчайзи, распределяемая между сторонами; kpQ – часть выручки, которую получает франчайзер, а $(1 - k)pq$ – часть выручки, которую получает фирма-франчайзи; k – коэффициент (параметр), определяющий сервисную плату (роялти), представляющую собой часть выручки, которую франчайзер устанавливает для франчайзи в обмен за права на бизнес $k \in [0, 1]$; pq_0 – дополнительный доход франчайзера, обусловленный его активностью на рынке.

Будем полагать, что издержки головной фирмы и издержки фирмы-франчайзи являются линейными функциями их выпуска

продукции: $\varphi_0(q_0) = c_0q_0 + d_0$ и $\varphi(q) = cq + d$ соответственно. Цена продукции с учетом деятельности на рынке головной фирмы определяется выражением $p = a - b(Q + q_0)$. Спрос на рынке не ограничен.

Будем полагать также, что на конкурентном рынке каждый их участников (головная компания-франчайзер и франчайзи) действуют по Курно. Показано [2], что тогда для равновесного состояния должно выполняться следующее равенство, связывающее решения центра и агентов:

$$q_0 = (n + 1) \cdot (Q + q_0) - \frac{na - \frac{C}{1-k}}{b},$$

где n – число фирм-франчайзи; C – суммарные предельные издержки фирм-франчайзи.

Важным параметром согласования интересов участников франшизы выступает роялти (в модели и последнем равенстве параметр k), правом выбора которого наделен только франчайзер (центр). Возможны различные варианты расчета этого параметра, в том числе вариант на основе стратегий Γ_1 , который дает наиболее выгодное для франчайзера значение этого параметра при условии, что франчайзи действуют оптимальным для себя образом.

В модели (15), (16) центр и подсистемы по-разному информированы о множестве X , и выбор агентов может не принадлежать множеству информированности центра.

Тогда в качестве альтернативы s_1 -модели может рассматриваться формализация (s_2 -модель), основанная на уже рассмотренных выше модельных конструкциях (6). Здесь в них предполагается, что при выборе решений x нет явного приоритета ни центра ни агентов.

Допустим, что в s_2 -модели центр, обладая правом первого хода, способен на его стратегию оценить множество рациональных ответов агентов, которые в его представлении находятся из решения задачи векторной оптимизации

$$(17) \begin{cases} \varphi(x_0, x) \rightarrow \max_x, \\ f(x_0, x) \rightarrow \max_x, \\ x \in X'. \end{cases}$$

В отличие от (6) в (17) выбор стратегии x осуществляется не из X'' , а из известному центру множества X' . Обозначим множество решений задачи (17) через $X(\varphi, f, x_0, X')$. Если центр осторожен по отношению к неопределенности выбора конкретной стратегии из $X(\varphi, f, x_0, X')$, то он может рассчитывать на получение максимального гарантированного выигрыша $\max_{x_0 \in X_0} \min_{x \in X(\varphi, f, x_0, X')} F(x_0, x)$. Пусть он этот выигрыш получает при $x_0 = x_0^{s2}$, а окончательный выбор решения x находится из решения задачи

$$(18) \begin{cases} \varphi(x_0^{s2}, x) \rightarrow \max_x, \\ f(x_0^{s2}, x) \rightarrow \max_x, \\ x \in X''. \end{cases}$$

В силу посылок относительного равенства приоритетов участников, решение этой задачи, если оно приходится на $X'' \setminus X'$, не должно уменьшать выигрыша никому из участников по оценке центра на X' (никто не намерен уступать). Поэтому такая процедура принятия решения в условиях различной информированности участников обеспечивает каждому участнику выигрыш не меньший, чем по оценке центра, а сам центр получает не менее максимального гарантированного выигрыша $\max_{x_0 \in X_0} \min_{x \in X(\varphi, f, x_0, X')} F(x_0, x)$.

6. Модельный пример эффективности механизмов с компенсациями

Для иллюстрации эффективности механизмов с компенсациями в централизованных системах (5) рассмотрим простой

модельный пример с интерпретацией из области охраны окружающей среды.

Пусть региональная система охраны окружающей среды состоит из двух участников: «Производственная сфера», выбросы которой загрязняют охраны окружающую среду, и «Окружающая среда».

Цель функционирования системы – выработка оптимальных соотношений между объемами производства и параметрами качества окружающей среды.

Критерием функционирования участника «Производственная сфера» является его прибыль, которую определим выражением

$$(19) F(x) = px - \varphi(x) \rightarrow \max_x.$$

Здесь x – выпуск продукции производственной системой в натуральном выражении; p – цена реализации единицы продукции; $\varphi(x)$ – функция затрат производителя на выпуск x .

Критерием функционирования участника «Окружающая среда» являются издержки загрязнения окружающей среды, названного «Производственной сферой», которые определим выражением

$$(20) f(x) = \alpha x \rightarrow \min_x.$$

Здесь α – затраты на ликвидацию последствий загрязнения окружающей среды, приходящиеся на единицу выпуска продукции.

Пусть конфликт между участниками решается на основе следующей централизованной модели:

$$(21) \begin{cases} F(x) = px - \varphi(x) \rightarrow \max_x, \\ \alpha x \leq R, \quad x \geq 0, \end{cases}$$

где R – лимит затрат на охрану окружающей среды.

Соответствующую этому примеру модель с компенсациями можно записать в виде

$$(22) \begin{cases} F(x, C) = px - \varphi(x) - C \rightarrow \max_{x, C}, \\ \alpha x \leq R + C, \quad x \geq 0, C \geq 0. \end{cases}$$

Здесь управляемый параметр C определяет часть прибыли производителя, которая направляется на увеличение лимита затрат на охрану окружающей среды.

Далее в расчетах положим, что $p = 10$, $\alpha = 5$, $R = 300$. Пусть также функция затрат имеет вид [3, 8]

$$(23) \quad \varphi(x) = \delta \left| \ln \left(1 - \frac{x}{\bar{x}} \right) \right|, \quad \delta > 0,$$

где \bar{x} – предельно возможный выпуск, положим $\bar{x} = 100$ и $\delta = 20$.

Так как $F'(x) = p - \delta \frac{1}{\bar{x} - x}$, то глобальный максимум функции $F(x)$ достигается при $x = x^* = 98$, а при $0 \leq x < 98$ имеем $F'(x) > 0$, т.е. она является монотонно возрастающей. Поэтому решение задачи (21), (23) надо определять из равенства $\alpha x = R$, т.е. $x = x^{**} = 60$.

Решение же по модели (22), (23) дает $x = x^{***} = 96$, $C^{***} = 180$.

Последнее решение дает заведомо лучший результат для системы, чем решение задачи (21), (23), так как $F(x^{***}, C^{***}) = 716 > F(x^{**}) = 581$.

Поэтому введение механизма с компенсациями существенным образом повышает результат системы при выполнении ограничений на множество выбора переменной x .

Вместе с тем полученный результат по модели (22), (23) уступает глобальному максимуму функции $F(x)$ когда не требуется выполнение каких-либо ограничений, равному $F(x^*) = 901$.

7. Заключение

В статье на основе двухуровневой модели с неразделенными переменными и асимметричной информированностью участников о множестве выбора этих переменных приведена новая интерпретация децентрализации. Предложена классификация моделей ОС, в основание которой положено различие приоритетов целей верхнего и нижнего уровней в выборе общих переменных. Проведена систематизация широкого спектра базовых игровых модельных конструкций ОС.

При этом старались расположить модели в классе централизованных систем в порядке ослабления степени централизации, а в классе децентрализованных систем – в обратном порядке, т.е. по мере усиления централизации.

В ряде модельных конструкций учтены две различные интерпретации постановок задач синтеза управления в иерархических системах «сверху» и «снизу», когда выбор управлений из X изначально является правом верхнего уровня или правом нижнего уровня. Показано, что различие информированности участников относительно множества стратегий X в моделях, интерпретирующих делегирование полномочий либо институциональное управление, влияет на окончательный выбор стратегий.

Вместе с тем автор отдает себе отчет в том, что предложенная классификация еще может потребовать своего уточнения.

Кроме того, автор признает неполноту рассмотренного многообразия, может быть даже основных, модельных конструкций. Поэтому не считает эту работу завершенной и надеется, что она будет иметь продолжение при признании научными коллегами сути самого подхода к рассматриваемой проблеме.

Заранее признателен всем, кто примет участие в форуме по вопросам, которым посвящена статья.

Литература

1. АЛГАЗИН Г.И. *Модели системного компромисса в социально-экономических исследованиях*: монография. – Барнаул: Азбука, 2009. – 239 с.
2. АЛГАЗИН Г.И., АЛГАЗИНА Д.Г. *Моделирование много-агентных франчайзинговых систем*. – Барнаул: АлтГУ, 2009. – 91 с.
3. ГЕРМЕЙЕР Ю.Б. *Игры с противоположными интересами*. – М.: Наука, 1976. – 328 с.
4. ГОРЕЛОВ М.А. *Модель институционального управления // Управление большими системами. Интернет-конференция.* – 2011. – <http://ubs.mtas.ru>.
5. ГУБКО М.В., НОВИКОВ Д.А. *Теория игр в управлении организационными системами*. – М.: Синтег, 2002. – 139 с.

6. МАКАРОВ В.Л. *Экономическое равновесие: существование и экстремальное свойство* // Современные проблемы математики. Т. 19 (Итоги науки техники, ВИНТИ АН СССР). – М., 1981. – С. 22–57.
7. МЕСАРОВИЧ М., МАКО Д., ТАКАХАРА И. *Теория многоуровневых иерархических систем*. – М.: Мир, 1973. – 344 с.
8. МОИСЕЕВ Н.Н. *Иерархические структуры и теория игр* // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. – 1973. – №6. – С. 1–11.
9. НОВИКОВ Д.А. *Институциональное управление организационными системами*. – М.: ИПУ РАН, 2004. – 68 с.
10. НОВИКОВ Д.А. *Теория управления организационными системами*. – М.: МПСИ, 2005. – 584 с.
11. СУСПИЦЫН С.А. *Общие модели экономики и экономическая реформа (опыт аксиоматических построений)* // Препринт. – Новосибирск: ИЭиОПП СО РАН, 1991. – 60 с.

CENTRALIZATION AND DECENTRALIZATION IN BASIC GAME-THEORETIC MODELS OF ORGANIZATIONAL SYSTEMS

Gennady Algazin, Altai State University, Barnaul, Doctor of Science, professor (algazin@socio.asu.ru).

Abstract: The new interpretation of centralization and decentralization is given on the basis of a two-level model of an organizational system with unshared variables and asymmetric information. The classification of a wide range of basic models of the organizational systems is suggested and described. The classification is based on the degree of divergence of higher and lower layers' goal priorities in their choice of shared variables.

Key words: organizational system, asymmetric information, unshared variables, priorities of purposes, centralization, decentralization, institutional management, model design, classification.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии М. В. Губко

УДК 338.2

ОПТИМИЗАЦИОННАЯ МОДЕЛЬ И АЛГОРИТМЫ ПОИСКА ОПТИМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ДЛЯ АНАЛИЗА ЭФФЕКТИВНОСТИ УДАЛЕНИЯ НЕПРИБЫЛЬНЫХ ПРЕДПРИЯТИЙ ИЗ КОМПАНИИ

Горошникова Т. А.¹

*(Учреждение Российской академии наук
Институт проблем управления РАН, Москва)*

Статья является продолжением работы по разработке практической методики анализа реструктуризации компании с точки зрения максимизации стоимости компании методом дисконтированных будущих потоков. Предложенные оптимизационные модели анализа эффективности слияний и поглощений опубликованы в [4].

Ключевые слова: разделение компании, продажа предприятия, оптимизационно-имитационный подход, оценка стоимости компании, метод «ветвей и границ», динамическое программирование.

1. Введение

Одна из возможностей, позволяющая компании добиться желаемых перспектив – улучшить свои позиции на рынке, преодолеть возможные финансовые трудности, увеличить стоимость компании – операция разделения компании, т.е. образование двух или более независимых компаний или продажа части компании. С юридической точки зрения разделение допустимая законодательством форма реорганизации предприятия, в результате которой компания утрачивает государственную регистрацию и на ее основе создаются новые юридические лица в количестве два и более. Все права и обязательства реорганизуемого

¹ Татьяна Аркадьевна Горошникова, научный сотрудник (tagora@list.ru).

юридического лица переходят к вновь создаваемым компаниям. Продажа предприятия чаще всего осуществляется путём отчуждения контрольного пакета акций или иного долевого участия в уставном фонде юридических лиц, произошедшие изменения регистрируются в государственных органах. Продажа долевого участия не всегда возможна по ряду причин, в этом случае применяется схема реорганизации всех важных договоров и объектов права собственности предприятия на нового собственника.

2. Общая постановка задачи удаления предприятия из группы

Задача по разделению группы – задача управления для принятия решения о перспективных возможностях на заданном отрезке времени. Как математическая задача, она допускает множество различных процедур решений, с последующим выбором из возможного множества решений лучшего по совокупности критериев их сравнения. Основные критерии оптимальности – *максимизация дисконтированного дохода*.

Разработка программы развития компании при разделении включает ряд предварительных этапов, связанных с анализом предприятий, для выявления:

- малоприбыльных предприятий, удаление которых возможно только при учете того, не является ли их деятельность жизненно необходимой для функционирования других предприятий компании;
- предприятий, варианты развития которых не вписываются в стратегический план развития компании;
- предприятий, подверженных высокому риску;
- предприятий, которые возможно будут более прибыльными как самостоятельные компании;

т. е. определяется множество предприятий Y , удовлетворяющих перечисленным признакам, производится оценка их стоимости (для возможной продажи). Разрабатывается множество вариантов развития каждого предприятия, отличающиеся дисконтированным доходом, объемами собственных и заемных средств, необходимых для финансирования. Формируются варианты развития группы, каждый из которых представляет комбинацию

вариантов предприятий без включения одного из предприятий $y \in Y$. Задача состоит в выборе оптимальной комбинации вариантов предприятий. Необходимо отметить, что при формировании вариантов развития группы все взаимозависимые проекты объединяются в один проект.

Поскольку множество Y составлено по условиям задачи таким образом, что в него входят не только малоприбыльные предприятия, т. е. нужно выбрать, какое предприятие удалить – малоприбыльное, высоко рисковое или не вписывающееся в стратегический план, то в качестве критерия используется PV (дисконтированный доход). В данном случае важно, что нулевое или даже отрицательное значение PV свидетельствует не об убыточности проекта как такового, а лишь об его убыточности при использовании данной ставки дисконтирования. Тот же проект, реализованный при инвестировании более дешевого капитала или с меньшей требуемой доходностью, может дать положительное значение приведенного дохода.

Предполагается, что в состав холдинга входит I предприятий. Для каждого разработано K_i вариантов развития. Определено множество Y предприятий для возможного удаления из группы, произведена оценка их стоимости P_i , и задача состоит в выборе удаления одного из предприятий холдинга по установленному критерию максимизации дисконтированного дохода группы.

Далее для выбора удаления одного предприятия из группы задача формализуется в виде задачи математического программирования:

найти значения переменных Z_{ik} , $A_{ik}(t)$, $K^+_{ik}(t)$ и $K^-_{ik}(t)$, P_i , доставляющие экстремум выбранному критерию $F(PV_{ik}, P_i) \rightarrow \text{extr}$, при выполнении множества аналитически и алгоритмически задаваемых ограничений и условий,

где $Z_{ik} \in \{0, 1\}$; $Z_{ik} = 1$, если в вариант развития группы включается k -вариант i -го предприятия, и $Z_{ik} = 0$ в противном случае;

$A_{ik}(t)$ – собственные средства i -го предприятия при реализации k -варианта развития;

$K^+_{ik}(t)$ и $K^-_{ik}(t)$ – объемы привлечения и погашения заемных

средств финансирования при реализации k -вариантом развития i -го предприятия;

P_i – рыночная стоимость i -го предприятия для возможной продажи;

величины $A_{ik}(t)$, $K^+_{ik}(t)$ и $K^-_{ik}(t)$, необходимы для вычисления величины денежного потока $CF(t)$;

$i = \overline{1, I}$ – индекс предприятия; $k = \overline{1, K_i}$ – индекс варианта развития предприятия;

Доход i -го предприятия при реализации k -варианта развития:

$$PV_{ik} = \sum_{t=1}^T \frac{CF(t)}{(1+E)^t}.$$

В качестве функционала $F(^{\circ})$ выступает показатель чистого дисконтированного дохода группы; $t = \overline{1, T}$ – горизонт планирования; E – ставка дисконтирования:

$$(1) \quad \sum_{i=1}^I \sum_{k=1}^{K_i} PV_{ik} \cdot Z_{ik} \rightarrow \max$$

при ограничениях:

$$(2) \quad \sum_{k=1}^{K_i} Z_{ik} \leq 1, \quad i = \overline{1, I},$$

на удаление предприятия из группы:

$$(3) \quad \sum_i \sum_k Z_{ik} = I - 1.$$

Множество алгоритмически задаваемых ограничений обязательно включает условие обеспечения финансовой реализуемости, требования к соблюдению условий привлечения, погашения и обслуживания внешних финансовых средств, требования к значениям финансовых и экономических показателей эффективности программы. Практическое решение описанной задачи о целесообразности выделения предприятия из состава компаний в виде единой задачи математического программирования с непрерывными и целочисленными переменными (которые отражают финансовые потоки, факт выделения отдельного предприятия, технологические и финансово-экономические связи) затруднено, так же как и решение задачи о слиянии/поглощении [5]. Основной проблемой является наличие алгоритмически

задаваемых условий, не поддающихся описанию посредством аналитических функций и не позволяющих решать задачу путем использования только оптимизационной модели. Решение задачи по сути не отличается от приведенного ранее подхода и получается на основе построения комплексов взаимосвязанных оптимизационных, имитационных и расчетных моделей и процедур по формированию, выбору и согласованию плановых решений [4].

Согласованность функционирования предприятий группы предполагает появление эффектов от удаления одного «элемента», эффекты могут быть как положительными, так и отрицательными. Для достижения положительных эффектов в выбранном варианте группы необходимо добиться восстановления возможных разорванных цепочек производственных или финансовых процессов, между предприятиями в группе.

Необходимо отметить, что размерность задачи увеличивается при большом количестве рассматриваемых вариантов. Для решения задачи большой размерности предлагается использовать специальные методы, позволяющие организовать направленный перебор множества вариантов, позволяющий значительно сократить число шагов в алгоритмах полного перебора всех комбинаций. Для частных случаев разработаны алгоритмы, основанные на направленном переборе и методе динамического программирования.

Рассмотрим задачу о выделении предприятия из группы по критерию максимизации PV при ограничении на общее финансирование и при учете ограничений (2)–(3), т. е. задачу вида:

$$(4) \quad \sum_{i=1}^I \sum_{k=1}^{K_i} NPV_{ik} \cdot Z_{ik} \rightarrow \max$$

$$(5) \quad \sum_{i=1}^I \sum_{k=1}^{K_i} A_{ik} \cdot Z_{ik} \leq R;$$

где A_{ik} – выделенные средства на реализацию k -варианта i -го предприятия;

Решения задачи начинается с рассмотрения максимальных элементов в каждой строке матрицы $|NPV_{ik}|$ и проверки условия (5) для соответствующих элементов матрицы коэффициентов

$|A_{ik}|$. Если условие (5) выполняется, то вектор максимальных элементов и будет оптимальным решением.

Алгоритм направленного перебора в применении к задаче без учета ограничения (3) состоит в движении по вершинам дерева, полученного фиксированием части переменных Z_{ik} , $Z_{ik} \in \{0, 1\}$. Вершины первого уровня получаем, фиксируя поочередно элементы первой строки матрицы системы (4), вершины второго уровня – фиксируя поочередно элементы второй строки матрицы системы (4), и т. д.

Для каждой вершины дерева находим значение зафиксированного элемента матрицы $|NPV_{ik}|$, оценки целевой функции и ограничения:

$$\sum_{i < i^*} NPV_{ik} + \sum_{i \geq i^*} \overline{NPV_{ik}},$$

где i^* – уровень ветвления; $\overline{NPV_{ik}}$ – максимальный элемент в соответствующей строке.

Ветвление продолжается из вершины уровня, имеющей максимальной значение оценки критерия и удовлетворяющей ограничениям.

Перебор можно сократить, учитывая ограничение (5): из матриц коэффициентов $|NPV_{ik}|$ и $|A_{ik}|$ исключить элементы, которые не могут войти ни в одно допустимое решение. Для каждого элемента матрицы $|A_{ik}|$ проверяется следующее условие:

$$\sum_{i=1}^{m-1} \overline{A_{ik}} + A_{mk} + \sum_{i=m+1}^l \overline{A_{ik}} \leq R, \quad m = \overline{1, I},$$

где $\overline{A_{ik}}$ – минимальный элемент в соответствующей строке.

Учет ограничения (3) допускает применение описанного метода введением последовательной процедуры, состоящей в направленном движении по вершинам дерева, полученного из матрицы (4), в которой удалена одна из строк, что соответствует удалению предприятия из группы. Полученные допустимые решения целесообразно сравнить по качественным характеристикам, соответствующим специфике задачи и выбрать оптимальное решение.

Динамическое программирование представляет подход, позволяющий получить оптимальное решение рассматриваемой задачи путем движения в обратном направлении – от конца за-

дачи к началу [2, 3]. Задача большой размерности заменяется серией задач меньшей размерности. Основное рекуррентное соотношение динамического программирования задачи отражает тот факт, что максимальное значение PV , необходимое, чтобы от шага i дойти до конца задачи, может быть получено максимизацией суммы значений PV шага i и максимальных значений PV , которые необходимы для того, чтобы от шага $i + 1$ дойти до конца задачи.

Для применения построим систему координат на плоскости, одна ось которой соответствует предприятиям группы, а вторая выделенным средствам на реализацию проектов предприятий (рис. 1). Любой путь в сети из начальной вершины соответствует некоторому набору вариантов предприятий. Если принять длины наклонных дуг равными значениям PV вариантов предприятий, включенных в вариант развития группы, а длины горизонтальных дуг, соответствующих «удаленному» предприятию, равными нулю, то длина пути, соединяющего начальную вершину с одной из конечных, будет равна суммарному значению PV , соответствующего этому пути варианта группы. Для учета ограничения (3) первый набор вариантов строим, проводя горизонтальную дугу от начала координат до единицы на оси предприятий, что соответствует удалению первого предприятия, далее строим наклонные дуги, соответствующие вариантам развития других предприятий. Во втором наборе вариантов горизонтальные дуги будут соответствовать удалению второго предприятия и т.д. Путь максимальной длины в каждом наборе вариантов будет соответствовать варианту группы, дающему максимальное значение PV , а оптимальный вариант набора получается фиксированием требуемой величины выделенных средств R . Решение о выделении предприятия принимается по критерию максимизации PV сравнения i оптимальных вариантов.

Пример.

$$NPV_{ik} = \begin{vmatrix} 110 & 130 \\ 200 & 220 \\ 90 & 95 \\ 60 & 70 \end{vmatrix}; A_{ik} = \begin{vmatrix} 5 & 10 \\ 30 & 40 \\ 10 & 15 \\ 20 & 25 \end{vmatrix}, R \leq 60.$$

На рис. 1 построены наборы вариантов, соответствующие удалению третьего и четвертого вариантов.

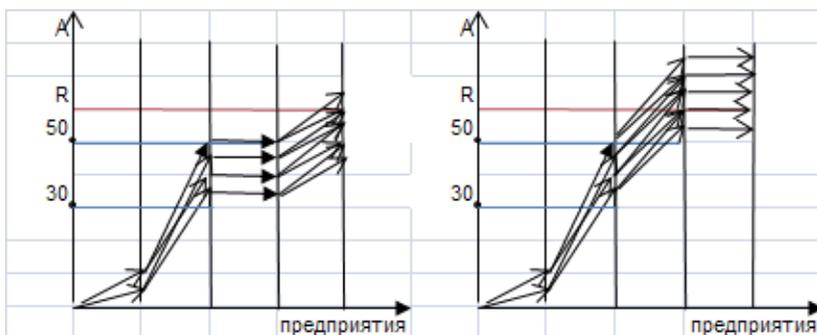


Рис. 1.

Сравниваем оптимальные варианты, соответствующие поочередному удалению вариантов:

$$PV_{21} + PV_{31} + PV_{41} = 350; PV_{12} + PV_{32} + PV_{42} = 295;$$

$$PV_{12} + PV_{22} + PV_{41} = 410; PV_{12} + PV_{21} + PV_{31} = 420;$$

приходим к выводу об удалении четвертого предприятия.

Метод динамического программирования в применении к данной задаче можно представить в виде матричного способа вычислений, удобного для сравнения с методом дихотомического программирования [1]. Действительно, и целевая функция, и функции, описывающие ограничения задачи, имеют одинаковые структуры сетевого представления, в данном случае дихотомического. В дихотомическом представлении задача, соответствующая вершинам сетевого представления, является задачей оптимизации функции двух переменных и в дискретном случае решается на основе матричного представления. Первая матрица соответствует второму слою сети (рис. 1). В верхней половине каждой клетки указывается величина затрат для различных вариантов двух первых предприятий, а в нижней – соответствующее значение суммы PV . Предполагается что вариант удаления предприятия, обозначается нулями в обеих половинах клетки. Вторая матрица соответствует третьему слою и т.д. Если в матрице имеется несколько клеток с одинаковыми затратами, то в

следующую матрицу для этого значения затрат берется максимальное значение PV . Это соответствует принципу оптимальности Беллмана для матричного представления метода динамического программирования. В последнюю матрицу (столбец) берутся оптимальные значения суммарного PV вариантов группы, состоящих из $i - 1$ предприятий, при ограничениях на затраты собственных средств.

Несмотря на то, что решением общей задачи является допустимый вариант, оптимизирующий значение целевой функции, ЛПР часто не удовлетворяет один оптимальный вариант. В большинстве случаев необходимо знать, за счет чего достигается оптимизация, и если «потери» по другим показателям велики, то в рассмотрение включаются варианты, достаточно близкие к оптимальному. Решение задачи разделения группы предприятий на последующих этапах заключается в выборе наиболее предпочтительного по совокупности критериев варианта из множества вариантов развития.

3. Задача об использовании средств вырученных от продажи предприятия

Задачу для выбора удаления одного предприятия из группы можно считать частью большой задачи реструктуризации компании. Используемый оптимизационно-имитационный подход подразумевает необходимое количество прогонов имитационной модели/моделей. Для сокращения большого расхода машинного времени используются методы направленного имитационного моделирования и специальные процедуры, позволяющие связывать оптимизационную имитационную модель не только последовательно-итеративно, но и предусматривающие еще и включение оптимизационных блоков в имитационную модель. Подобная комбинация, например, в рассматриваемой задаче удаления предприятия из группы, позволяет добавить к условию требование о вложении/распределении освободившихся средств (от возможной продажи) в имеющиеся проекты.

Задача решается двумя способами, отличающимися подбором схемы финансирования для сформированных вариантов группы. В соответствии с первым из них необходимая потреб-

ность в дополнительном финансировании определяется на предварительном этапе разработки проектов предприятий, т. е. предполагается, что у компании будет несколько кредитов, взятых под конкретный проект. Распределение средств от продажи предприятия не учитывает схему обслуживания долга, а определяет только величину вложений.

В соответствии со вторым способом в имитационных моделях проектов отдельных предприятий при анализе не учитывается потребность в дополнительном финансировании, поэтому при формировании варианта развития компании в некоторых периодах денежный поток может быть отрицателен. Соответствующая схема привлечения денежных средств и обслуживания долга определяется на уровне всей компании. Структура вариантов не изменяется. Освобожденные средства от продажи предприятия распределяются по предприятиям. В имитационную модель включается оптимизационный блок, позволяющий учесть и распределение средств по предприятиям, и обслуживание внешнего долга. Этот вариант предпочтителен, так как уже на момент планирования развития компании может проявиться синергетический эффект от объединения проектов предприятий, достигаемый за счет оптимизации использования денежных ресурсов по периодам. Нехватка денежных средств на одном предприятии компенсируется прибылью другого. Суммарный кредит обычно оказывается меньше, чем сумма кредитов предприятий. Синергия определяется как прирост показателя эффективности варианта при переходе от реализации кредита предприятия/проекта вне компании к реализации кредита в составе группы предприятий.

4. Продажа или вывод из кризиса?

Решение задачи по «оздоровлению жизнедеятельности» компании за счет удаления из ее состава элементов через механизмы передачи предприятий другим собственникам требует оценки стоимости предприятий $y \in Y$.

Определение стоимости неприбыльного предприятия или предприятия, подверженного высокому риску, не всегда связано с возможностью справедливой оценки в рамках классических

подходов. Подходы, основанные на определении стоимости имущества, могут приводить к недооценке предприятия, так как не учитывают возможности его развития, а также синергетического эффекта от совместного использования его активов с другими предприятиями группы. Подходы, основанные на цене акций, применимы только для открытых акционерных обществ, чьи акции котируются на рынке. В связи с этим результаты оценки в рамках затратных моделей следует рассматривать как минимальную стоимость предприятия и принимать во внимание при оценке в качестве справочного показателя. Ограничения в применении сравнительного подхода объясняются фактором неопределенности в предсказании возможности дальнейшего функционирования предприятия. При подборе аналога, как правило, выбирается убыточное предприятие со схожими финансовыми и производственными параметрами, что приводит к трудоемкому анализу параметров возникновения финансового риска. Основной недостаток использования сравнительного подхода для оценки неприбыльного предприятия – отсутствие прогнозов относительно будущих доходов. Доходный подход является наиболее гибким среди анализируемых методов оценки, позволяет учитывать будущие доходы и экономический риск инвестиций.

В заключение хочется отметить, что для принятия решения об удалении предприятия из компании неплохо проанализировать попытку провести его «трансформацию», «перепрофилирование» и/или попробовать восстановить его работоспособность, готовность к борьбе за выживание в рыночных условиях.

Причинами низкой рентабельности предприятий компании могут стать и общий спад рынка, и неправильно выбранная стратегия развития, и неэффективная работа менеджмента. Несмотря на то, что для всех предприятий причины возникновения финансового кризиса индивидуальны, выделяется несколько универсальных инструментов управления, позволяющих преодолеть кризис: снижение затрат; стимулирование продаж; оптимизация денежных потоков; работа с дебиторами и реформирование политики коммерческого кредитования; реструктуризация кредиторской задолженности.

Бизнес-план финансового оздоровления предприятия – пока еще новый документ для менеджмента на российских предприятиях. Его формы различаются для предприятий различных отраслей и сфер экономики. Известные приемы разработки планов модернизации, планы постановки продукции на производство и т.д. дополняются и видоизменяются с учетом новых условий хозяйствования: гибкого финансирования, ценообразования, стратегии и тактики сбыта продукции, элементов конкурентной борьбы. Для предприятий, оказавшихся в долговой яме, необходимы комплексные усилия по восстановлению платежеспособности с использованием законодательных процедур банкротства и методов антикризисного управления.

Принятый бизнес-план финансового оздоровления включает описание ожидаемых проблем, трудностей и способов их решения:

- Общая характеристика предприятия, потребители продукции, рынки сбыта и каналы продвижения продукции, поставщики, валовая выручка, количество работников, факторы, приведшие к несостоятельности предприятия.
- Анализ финансового состояния.
- Прогноз банкротства с помощью специальных моделей.
- План чрезвычайных мероприятий по преодолению неплатежеспособности предприятия.
- Стратегия финансового оздоровления.

Уникальность любого предприятия заключается в том, что оно может выжить и при очень слабых шансах и обанкротиться при больших шансах на выход из кризисного состояния. Единичность судьбы предприятия подталкивает специалиста присмотреться к предприятию, расшифровать его уникальность, его специфику, не использовать стандартные методы, не искать сходные черты, а, напротив, диагностировать и описывать отличия.

Литература

1. БУРКОВ В.Н., БУРКОВА И.В. *Задачи дихотомической оптимизации* / Материалы международной конференции «Системные проблемы качества, математического моделирова-

- ния, информационных и электронных технологий». – М: Радио и связь, 2003.
2. БУРКОВ В.Н., БУРКОВА И.В., КОЛЕСНИКОВ П.А., КАШЕНКОВ А.Р. *Структурно-эквивалентные функции в задачах дискретной оптимизации* // Проблемы управления. – 2007. – № 1. – С. 13–19.
 3. БУРКОВ В.Н., ЗАЛОЖНЕВ А.Ю., НОВИКОВ Д.А. *Теория графов в управлении организационными системами*. Серия «Управление организационными системами». – М.: СИНТЕГ, 2001. – 124 с.
 4. ГОРОШНИКОВА Т.А., СИНЮКОВ А.В. *Оптимизационные модели анализа эффективности слияний и поглощений* // Управление большими системами. – 2010. - № 31. – С. 177–191.
 5. ЦВИРКУН А.Д., АКИНФИЕВ В.К., ФИЛИППОВ В.А. *Имитационное моделирование в задачах синтеза структуры сложных систем (оптимизационно-имитационный подход)*. – М.: Наука, 1985.

OPTIMIZATION MODEL OF THE ANALYSIS OF REMOVAL OF THE NON-PROFITABLE ENTERPRISES FROM THE COMPANY WITH ALGORITHMS OF SEARCH OPTIMUM DECISIONS

Tatyana Goroshnikova, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, researcher (tagora@list.ru).

Abstract: In this article we continue developing the handy analytic technique of company restructuring for the sake of value maximization. The value of a company is assessed with the discounted cash flows technique. The underlying optimization models of mergers and acquisitions analysis and synthesis were published earlier in [4].

Keywords: company de-merger, enterprise sale, optimization-simulation approach, company value assessment, branch and bound method, dynamic programming.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии В. Н. Бурковым

УДК 519
ББК 32.81

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ МЕХАНИЗМА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ КАК НЕМАНИПУЛИРУЕМОГО МЕХАНИЗМА МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ АКТИВНОЙ ЭКСПЕРТИЗЫ¹

Коргин Н. А.²

(Институт проблем управления РАН, Москва)

Доказывается, что любой механизм последовательного распределения ресурса, который является неманипулируемым на классе однопиковых функций предпочтений агентов, может быть представлен как неманипулируемый механизм активной экспертизы для класса многомерных функций предпочтений агентов с одним плато – т. е. обобщенной медианной схемы и правила устранения многозначности.

Ключевые слова: неманипулируемые механизмы планирования, механизм последовательного распределения ресурсов, механизм многокритериальной активной экспертизы, обобщенные медианные схемы.

1. Введение

Неманипулируемость механизма планирования (т. е. механизма принятия решений центром на основе информации, поступающей от подчиненных – агентов) – это свойство, гарантирующее, что каждому агенту нет смысла исказить

¹ Работа выполнена в рамках гранта РФФИ № 09-07-00093-а

² Николай Андреевич Коргин, кандидат технических наук,
(nkorgin@ipu.ru).

передаваемую центру информацию. В работах [2, 8, 12] задача построения неманипулируемых механизмов распределения ресурсов решается для случая, когда каждый агент заинтересован только в том количестве ресурсов, которые получает он. В работах [3, 5] задача распределения ресурсов была сформулирована как задача многокритериальной активной экспертизы, в которой число направлений, по которым распределяется ресурс, отличается от числа агентов, для каждого из которых существенным является распределение ресурса по всем направлениям. В рамках данной работы устанавливается эквивалентность между этими двумя классами задач, которая до этого момента была доказана только для случая двух агентов [8].

2. Основные определения и предварительные результаты

2.1 ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДЛЯ ЗАДАЧИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ

Формально, задача распределения ресурсов записывается следующим образом. *Организационная система* состоит из одного *центра* и множества $N = \{1, \dots, n\}$ *агентов*. У центра имеются ресурсы в ограниченном количестве – $R \in \mathbb{R}_+^1$, которые должны быть распределены между агентами. *Предпочтения* каждого агента $i \in N$ относительно количества выделяемых ему ресурсов $x_i \in [0, R]$ определяются *однопиковой функцией* $u_i : \mathbb{R}_+^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$:

1. Существует единственная *точка пика*
$$\tau_i = \arg \max_{x \in \mathbb{R}_+^1} u_i(x) \quad \forall i \in N ;$$
2. $\forall z, z' \in \mathbb{R}^1$, если $\tau_i > z > z'$, то $u(z) \geq u(z')$, если $z > z' > \tau_i$, то $u(z) \leq u(z')$.

В случае, когда $\sum_{i \in N} \tau_i > R$, имеет место *дефицит ресурсов*.

Считается, что значения точек пика не известны центру, но являются общим знанием для агентов.

Для распределения ресурсов центр использует механизм планирования $x = \pi(s)$, определяя итоговое распределение ресурсов $x = \{x_1, \dots, x_n\}$, $x_i \geq 0$, $\sum_{i \in N} x_i \in [0, R]$ на основании сообщений (*заявок*) агентов $s = \{s_1, \dots, s_n\}$, $s_i \in S_i$, $i \in N$. S_i - множество допустимых заявок i -го агента. Если в качестве сообщения агента просят сообщить значение своей точки пика, то такой механизм является *прямым* [6].

Так как выделяемые каждому агенту центром ресурсы зависят от заявок всех агентов (которые они сообщают одновременно), то между агентами возникает *игра в нормальной форме*:

$$\Gamma_0 = (N, \{u_i(\pi_i(s))\}_{i \in N}, \{S_i\}_{i \in N}),$$

где $\pi_i(s)$ - количество ресурсов, выделяемое в соответствии с механизмом $\pi(s)$ агенту $i \in N$.

Если для механизма планирования $\pi(s)$ можно для каждого возможного вектора точек пика агентов $\tau = \{\tau_1, \dots, \tau_n\}$ определить *равновесные по Нэшу* заявки¹ - $s_\pi^*(\tau)$, то для него можно предъявить *соответствующий* прямой механизм $h(\tau)$:

$$x_i = h_i(\tau) = \pi_i(s_\pi^*(\tau)).$$

Прямой механизм планирования $h(\tau)$ называется *неманипулируемым*, если доминантной стратегией каждого агента является сообщение своей истинной точки пика:

$$\tau_i \in \operatorname{Arg} \max_{s_i} u_i(h_i(s_i, s_{-i})) \quad \forall s_{-i}, \quad \forall i \in N,$$

где s_{-i} обозначает сообщения всех агентов, кроме i -го.

¹ Следует отметить, что равновесия может не быть вообще, или их может быть несколько. Если равновесий несколько, то необходимо ввести правило отбора равновесий, позволяющее из любого множества равновесий выбрать единственное.

Механизмы $\pi(s)$ и $\varphi(s)$ считаются эквивалентными, если при заданном количестве ресурсов R для любого вектора точек пика агентов эти механизмы в равновесии дают одинаковое распределение ресурсов:

$$\pi(s_{\pi}^*(\tau)) = \varphi(s_{\varphi}^*(\tau)).$$

Соответствующий $\pi(s)$ прямой механизм $h(\tau)$ является эквивалентным $\pi(s)$, если он неманипулируем.

Механизм распределения ресурсов является *анонимным*, если он симметричен относительно перестановок агентов – итоговое распределение ресурсов зависит только от заявок агентов.

В работах [2, 8, 11] было показано, что любой неманипулируемый, эффективный по Парето и *монотонный в группах*¹ механизм распределения ресурсов – это *механизм последовательного распределения ресурсов* (МППР). Эффективность по Парето подразумевает, что при наличии дефицита ресурсов весь имеющийся в наличии ресурс должен быть распределен полностью между агентами.

В [5] получена его аналитическая запись для механизмов последовательного распределения ресурсов, эквивалентных механизмам *прямых* или *обратных приоритетов* [1, 6]:

$$(1) \quad x_i = \min\{\tau_i, \max_{S \subseteq N: i \in S} d_i(S)R(S)\}, \quad i \in N,$$

где $R(S) = R - \sum_{j \in N \setminus S} \tau_j$, а функции $d_i(\bullet): 2^N \setminus \emptyset \rightarrow [0,1]$

определяют «вес» агента $i \in S$ в группе $S \subseteq N$, причем $\forall S, V \in 2^N \setminus \emptyset$:

1. $\sum_{i \in S} d_i(S) = 1$;
2. если $S \subset V$ то $d_i(S) \geq d_i(V)$.

¹ Если количество ресурсов, распределяемое между группой агентов, увеличилось, то каждый из агентов этой группы получит не меньшее количество ресурсов, чем раньше.

В [1, 12] было показано, что существует единственный анонимный МПРР, аналитическая запись которого имеет следующий вид [4]:

$$(2) \quad x_i = \min \left\{ \tau_i, \frac{R - \sum_{j < i} x_j}{n - (i - 1)} \right\}, \quad i \in N.$$

2.2 ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДЛЯ ЗАДАЧИ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ АКТИВНОЙ ЭКСПЕРТИЗЫ

Задача многокритериального коллективного выбора (частным случаем которой является задача активной экспертизы) формулируется следующим образом. Заданы множество агентов $N = \{1, \dots, n\}$, $n \geq 2$ и множество координат $M = \{1, \dots, m\}$, $m \geq 2$. $Z \subset \mathbb{R}^m$ – множество допустимых альтернатив (результатов выбора), являющееся полноразмерным компактом. Обозначив проекцию Z на произвольную координату $k \in M$ как Z_k , определим понятие минимального блока для Z :

$$\hat{B}(Z) = \prod_{k \in M} [\min Z_k, \max Z_k]$$

Альтернативы из $\hat{B}(Z) \setminus Z$ являются *недопустимыми*.

Предпочтения агентов определяются *многомерно-однопиковой функцией* $u_i: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^1$:

1. Существует *единственная точка тика*
 $\tau_i = \arg \max_{x \in Z} u_i(x), \quad \tau_i \in Z \quad \forall i \in N;$
2. $\forall z, z' \in \mathbb{R}^m,$
 $[z' \in \hat{B}(\{z, \tau_i\}) \text{ и } z \neq z'] \Rightarrow [u_i(z') > u_i(z)].$

Обозначим класс допустимых предпочтений агентов U . Тогда функция *коллективного выбора* $F: U^n \rightarrow Z$ определяет выбор единственной альтернативы на основе информации о предпочтениях агентов. Функция коллективного выбора является *немаанипулируемой*, если доминантной стратегией каждого агента

будет достоверное сообщение своих предпочтений. В механизмах активной экспертизы применяются функции коллективного выбора, в которых агенты сообщают Центру лишь одну альтернативу – которую они хотят видеть в качестве результата выбора.

Доказано [7], что для описанной модели функция коллективного выбора неманипулируема тогда и только тогда, когда она является *обобщенной медианной схемой* обладающей *свойством пересечения*.

Обобщенная медианная схема записывается следующим образом. Для каждой координаты $k \in M$ на $Z_k \equiv [a_k, b_k]$ определим *систему правых коалиций* \mathfrak{R}_k , которая ставит в соответствие любому $z_k \in Z_k$ некоторые множества групп агентов $\mathfrak{R}_k(z_k)$ такие, что:

- 1) $\forall z_k \in (a_k, b_k], \mathfrak{R}_k(z_k) \neq \emptyset, \emptyset \not\subset \mathfrak{R}_k(z_k)$ и $\mathfrak{R}_k(a_k) = 2^N \setminus \emptyset$;
- 2) если $W \in \mathfrak{R}_k(z_k)$ и $W \subset W' \Rightarrow W' \in \mathfrak{R}_k(z_k)$.
- 3) Если $z'_k < z_k$ и $W \in \mathfrak{R}_k(z_k) \Rightarrow W \in \mathfrak{R}_k(z'_k)$.
- 4) $\forall W \subseteq N, \forall z_k \in Z_k$ и любой последовательности $\{z_k^t\} \subset Z_k$ такой что $\lim_{t \rightarrow \infty} z_k^t = z_k$ верно

$$[\forall t, W \in \mathfrak{R}_k(z_k^t)] \Rightarrow [W \in \mathfrak{R}_k(z_k)].$$

Семейство \mathfrak{R} систем правых коалиций для $\hat{B}(Z)$ – это набор $\{\mathfrak{R}_k\}_{k=1}^m$ где \mathfrak{R}_k – система правых коалиций для Z_k . Для каждой координаты $k \in M$, обозначим $\tau^k = (\tau_1^k, \dots, \tau_n^k)$ вектор проекций точек пиков агентов на нее. Тогда любая обобщенная медианная схема – это функция $F: Z^n \rightarrow \hat{B}(Z)$, определяемая следующим образом: $\forall u \in U^n, \forall k \in M$

$$F_k(\tau) = \max \{z_k \in Z_k \mid \{i \in N \mid \tau_i^k \geq z_k\} \in \mathfrak{R}_k(z_k)\}.$$

Важным свойством обобщенных медианных схем является то, что результат выбора зависит только от значений точек пика агентов, а не от функций предпочтений в целом.

Свойство пересечения гарантирует, что для любых возможных предпочтений агентов результат выбора будет принадлежать Z , т. е. $F: Z^n \rightarrow Z$. Подробно о проблеме реализуемости и

свойстве пересечения см. [4, 7], т.к. в рамках данной статьи оно применяться не будет.

В работе [11] было доказано, что, если размерность пространства множества выбора больше 2 то не существует оптимальных по Парето неманипулируемых механизмов коллективного выбора.

Рассмотренная в предыдущем разделе задача распределения ресурсов может быть представлена как частный случай задачи многокритериальной активной экспертизы ($n = m$), в которой центру необходимо определить значение некоторого параметра из множества его допустимых значений:

$$Z = \{x \in Z \subset \mathbb{R}_+^n \mid \sum_{j=1}^n x_j \leq R\}.$$

В работе [3] задача распределения ресурсов рассматривалась как задача многокритериальной активной экспертизы и было показано, что при $n \geq 3$ практически не существует обобщенных медианных схем, обеспечивающих распределение всего ресурса целиком, т.е. с множеством допустимых значений результатов выбора

$$\tilde{Z} = \{x \in \tilde{Z} \subset \mathbb{R}_+^n \mid \sum_{j=1}^n x_j = R\}.$$

При этом предполагалось, что пред-

почтения агентов – многомерно-однопиковые, т.е. каждому, агенту важно не только, сколько ресурсов получает лично он, но и остальные агенты.

Для одномерной задачи коллективного выбора в работе [9] было показано, что если предпочтения агентов вместо точки пика содержат *плато* – выпуклое множество наилучших альтернатив, то любой неманипулируемый механизм так же является обобщенной медианной схемой, дополненной *неманипулируемым правилом устранения многозначности*. Функции предпочтений агентов $v_i: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ с одним плато удовлетворяют следующим требованиям:

1. $[\underline{\tau}_i; \bar{\tau}_i] = \text{Arg max}_{x \in \mathbb{R}^1} v_i(x) \quad \forall i \in N;$

2. $\forall z, z' \in \mathbb{R}^1$, если $\underline{t}_i > z > z'$, то $v(z) \geq v(z')$, если $z > z' > \bar{t}_i$, то $v(z) \leq v(z')$.

Если обозначить множество всех функций предпочтений с плато как Π , то компонента правила устранения многозначности для агента $i \in N$ – это функция $t_i: \Pi^n \rightarrow \mathbb{R}^1$, такая, что

1. $\forall v \in \Pi^n \quad t_i(v) \in [\underline{t}_i; \bar{t}_i]$;
2. $\forall \tilde{v} \in \Pi^n$ если $\forall j \in N \quad \text{Arg max}_{x \in \mathbb{R}^1} v_j(x) = \text{Arg max}_{x \in \mathbb{R}^1} \tilde{v}_j(x)$, то

$$t_i(v) = t_i(\tilde{v}).$$

Неманипулируемость правила устранения многозначности означает, что $\forall i \in N \quad \forall v \in \Pi^n, \quad \forall j \in N \setminus \{i\}$ и $\forall \tilde{v}_j \in \Pi$
 $v_j(t_i(v)) \geq v_j(t_i(\tilde{v}_j, v_{-j}))$.

Обобщенная медианная схема, дополненная правилом выбора (для одномерного случая) это любая обобщенная медианная схема, в которую в качестве заявок агентов подставляются значения их компонентов правила устранения многозначности,

$$F(t(v)) = \max \{z \in Z \mid \{i \in N \mid t_i(v) \geq z\} \in \mathfrak{R}(z)\}.$$

Расширение данного результата на многомерный случай позволит установить, является ли МППР частным случаем ОМС или нет.

3. Представление механизма последовательного распределения ресурса в виде обобщенной медианной схемы с правилом выбора точек пика

Для решения поставленной задачи предлагается следующая последовательность действий. Опираясь на результат [5], покажем, что любой МППР представим в виде минимаксной схемы.

Затем покажем, что для любой полученной минимаксной схемы существует эквивалентная ОМС, дополненная многомерными правилами устранения многозначности. И докажем, что полученный механизм многокритериального выбора будет неманипулируемым.

3.1. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ МЕХАНИЗМА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ КАК МИНИМАКСНОЙ СХЕМЫ

Результаты, полученные в [5] для МПРР, эквивалентных приоритетным механизмам, могут быть обобщены на все МПРР.

Теорема 1. *Любой механизм последовательного распределения ресурсов представим в виде:*

$$(3) \quad x_i = \min \{ \tau_i, \max_{S \subseteq N: i \in S} q_i(S, R(S)) \}, \quad i \in N,$$

где функции $q_i(\bullet): 2^N \setminus \emptyset \times [0, R] \rightarrow [0, R]$ определяют, как ресурс $R(S) = R - \sum_{j \in N \setminus S} \tau_j$ может быть распределен между агентами в

группе $S \subseteq N$ и $\forall S, V \in 2^N \setminus \emptyset, \forall i \in S, \forall z \in [0, R]$:

$$T 1.1. \quad \sum_{i \in S} q_i(S, z) = z;$$

$$T 1.2. \quad \frac{\partial q_i(S, z)}{\partial z} \geq 0;$$

$$T 1.3. \quad \text{если } S \subset V \text{ то } q_i(S, z - Q_{V \setminus S}(V, z)) = q_i(V, z),$$

$$\text{где } Q_S(V, z) = \sum_{j \in S} q_j(V, z).$$

Доказательство теоремы 1 и других утверждений вынесено в приложение к статье.

То есть любой МПРР записывается в форме, аналогичной форме записи ОМС, что позволит доказать возможность представления произвольного МПРР в виде ОМС. Но аналитическая запись МПРР ценна сама по себе, вне контекста данной статьи, т.к. позволяет анализировать эффективность МПРР по различным критериям и другие их свойства (например, эквивалентность различных МПРР, как в [5]).

Выражение (3) позволяет записать в аналитической форме МПРР, для которого не существует эквивалентного приоритетного механизма распределения ресурсов. Приведем пример подобного механизма.

Пример 1. R единиц ресурса делится между тремя агентами. Заявка первого агента всегда удовлетворяется полностью. Если оставшийся для второго и третьего агента

ресурс $z_{23} \geq 2R/3$, то второй агент получает не более

$$x_2 = R/3 + 1/5(z_{23} - 2R/3),$$

а третий, -

$$x_3 = R/3 + 4/5(z_{23} - 2R/3).$$

В случае $z_{23} < 2R/3$ $x_2 = z_{23}/2$ и $x_3 = z_{23}/2$. Для данного МПРР функции $q_i(\bullet): 2^N \setminus \emptyset \times [0, R] \rightarrow [0, R]$, $i \in N$, описывающие его будут иметь следующий вид:

$$q_1(S \in \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1\}\}, z) = z;$$

$$q_2(S \in \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2\}, z\}) = 0;$$

$$q_2(S = \{2, 3\}, z) = \begin{cases} z/2, & z < 2R/3; \\ R/3 + 1/5(z - 2R/3), & z \geq 2R/3; \end{cases}$$

$$q_2(S = \{2\}, z) = z;$$

$$q_3(S \in \{\{1, 2, 3\}, \{1, 3\}, z\}) = 0;$$

$$q_3(S = \{2, 3\}, z) = \begin{cases} z/2, & z < 2R/3; \\ R/3 + 4/5(z - 2R/3), & z \geq 2R/3; \end{cases}$$

$$q_3(S = \{3\}, z) = z. \blacksquare$$

3.2. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ МЕХАНИЗМА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ КАК ОБОБЩЕННОЙ МЕДИАННОЙ СХЕМЫ ДОПОЛНЕННОЙ ПРАВИЛОМ УСТРАНЕНИЯ МНОГОЗНАЧНОСТИ

Покажем, что МПРР может быть представлен как ОМС, дополненная некоторым правилом устранения многозначности. Рассмотрим базовую постановку задачи распределения ресурсов из раздела 1.1. Для нее верно следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть МПРР $\pi(\tau)$ описывается набором функций $q_i(\bullet): 2^N \setminus \emptyset \times [0, R] \rightarrow [0, R]$, $i \in N$. Определим ОМС дополненную правилом устранения многозначности $F(\tau)$:

$$F_i(\tau) = \max \{z \in [0, R] \mid \{j \in N \mid s_j^i \geq z\} \in \mathfrak{R}_i(z)\}, \quad i \in N,$$

где

$$(4) \quad \mathfrak{R}_i(z) = \{S \cup \{i\} : S \subseteq N \setminus \{i\} \wedge q_i(N \setminus S, R) \geq z\},$$

$$(5) \quad s_j^i = \min\{\tau_i, \max_{S \subseteq N \setminus \{j\}; i \in S} q_i(S, R(S))\}, \quad j \in N \setminus \{i\},$$

$$s_i^i = \tau_i.$$

ОМС, дополненная правилом устранения многозначности, $F(\tau)$ эквивалентна МПРР.

Иными словами, (4) определяет систему коалиций, порождающую одномерную ОМС, с помощью которой определяется количество ресурсов, выделяемое агенту i , а (5) – это правило устранения многозначности: заявка агента j относительно количества ресурсов для остальных агентов определяется на основе того же МПРР $\pi(\tau)$ при условии, что самому агенту j выдано запрашиваемое им количество ресурсов τ_j или все R , если $\tau_j > R$.

Покажем, как получаются (4) и (5) для анонимного МПРР. В соответствии с (2), при упорядочении агентов по возрастанию

сообщенных заявок $q_i = \frac{1}{n - (i - 1)} (R - \sum_{j < i} \tau_j)$. При этом макси-

мум, что может получить агент i это $\bar{x}_i = R / (n + 1 - i)$ (при условии, что все агенты с индексами меньше i ничего не попросили себе вообще). Соответственно, система правых коалиций (которая будет одинаковой для всех агентов) записывается следующим образом:

$$\mathfrak{R}(z) = \{S \subseteq N : \#\{j \in N \mid s_j^i \geq z\} > \max(n + 1 - R / z, 0)\},$$

$$\mathfrak{R}(R) = \{N\}.$$

Иными словами, для того, что бы агент i получил ресурс в количестве z , число агентов, которые должны быть согласны с этим должно быть более $n + 1 - R / z$. То есть, если любому агенту нужно больше чем $R / 2$ ресурсов, то на это должны быть согласны все остальные агенты. А гарантировано каждый может получить R / n ресурсов, что полностью согласуется с результатами функционирования анонимного МПРР.

Таким образом, ОМС, эквивалентная анонимному МПРР (2) записывается следующим образом:

$$(6) \quad x_i = \max\{z \in [0, R] \mid \#\{j \in N \mid s_j^i \geq z\} > \max(n + 1 - R / z, 0)\}$$

$$i \in N.$$

Полученную ОМС можно проинтерпретировать в терминах *фантомных агентов*, первоначально предложенных Муленом [10]. Ресурс, выдаваемый агенту - это медиана в упорядочении заявок самих агентов и фантомных агентов. Количество фантомных агентов – $n - 1$. Вектор их заявок – $(\frac{R}{n}, \frac{R}{n-1}, \dots, \frac{R}{2})$.

Правило устранения многозначности будет следующим:

$$(7) \quad s_j^i = \min \left\{ \tau_i, \frac{R - \tau_j - \sum_{k < i_j} s_j^k}{n - i_j} \right\}, \quad i, j \in N,$$

где i_j - номер агента i в упорядочении агентов из $N \setminus \{j\}$ в порядке возрастания значений их точек пиков.

Пример 2. Ресурсы в количестве 10 условных единиц делятся между 5-ю агентами. Вектор сообщений агентов – (1, 2, 3, 4, 5). При использовании анонимного МПРР, на первом шаге каждому агенту будет предложено по $10 / 5 = 2$ ресурсов, соответственно, будут удовлетворены заявки первых двух агентов. На втором шаге оставшиеся ресурсы в количестве $10 - 3 = 7$ будут делиться между последними тремя агентами. Каждому будет предложено по $7 / 3$ единиц ресурсов. Это меньше, чем заявка любого из них. Таким образом, итоговое распределение будет (1, 2, $7 / 3$, $7 / 3$, $7 / 3$).

ОМС для анонимного механизма будет определяться фантомными агентами с точками пика (2, $10 / 4$, $10 / 3$, 5). Вектора заявок агентов по всем пяти направлениям распределения ресурсов в соответствии с правилом устранения многозначности (7) приведены в таблице 1. Номер строки соответствует номеру направления (кому давать), номер столбца – агенту (кто просит).

В таблице 2 приводится упорядочение заявок агентов и фантомных агентов для каждого из 5 направлений. Медиана каждого упорядочения выделена полужирным.

Таким образом, итоговое распределение ресурса при применении ОМС (6) с правилом устранения многозначности (7) будет также (1, 2, $7 / 3$, $7 / 3$, $7 / 3$). ■

Таблица 1. Заявки агентов.

	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	5 / 3	4 / 3
3	7 / 3	7 / 3	3	5 / 3	4 / 3
4	7 / 3	7 / 3	2	4	4 / 3
5	7 / 3	7 / 3	2	5 / 3	5

Таблица 2. Применение обобщенной медианной схемы.

x_1	1	1	1	1	1	2	10 / 4	10 / 3	5
x_2	4 / 3	5 / 3	2	2	2	2	10 / 4	10 / 3	5
x_3	4 / 3	5 / 3	2	7 / 3	7 / 3	10 / 4	3	10 / 3	5
x_4	4 / 3	2	2	7 / 3	7 / 3	10 / 4	10 / 3	4	5
x_5	5 / 3	2	2	7 / 3	7 / 3	10 / 4	10 / 3	5	5

3.3. АНАЛИЗ СВОЙСТВ МЕХАНИЗМОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ ДЛЯ СЛУЧАЯ, КОГДА АГЕНТЫ ЗАИНТЕРЕСОВАНЫ В РЕСУРСАХ ПО НЕСКОЛЬКИМ НАПРАВЛЕНИЯМ

Важным свойством любого МПРР была оптимальность по Парето. В то время как неманипулируемые механизмы многокритериального выбора, при размерности пространства выбора больше 2 этим свойством не обладают, если у всех агентов функции предпочтения зависят от всех координат. В рамках данной статьи не будем проводить полноценного исследования этого вопроса, ограничившись лишь иллюстрацией того, что если у агентов присутствует заинтересованность в том, сколько ресурсов будет выделено более чем на одно направление, и по одному направлению несколько агентов считают оптимальным разное количество ресурсов, то не существует анонимного механизма коллективного выбора, оптимального по Парето. Так как

анонимный МПРР один, то если показать, что он не применим в описанной постановке задачи, то это будет значить, что для нее нет анонимных, эффективных по Парето и неманипулируемых механизмов распределения ресурсов. Для этого приведем пример, в котором он даст недопустимое распределение ресурсов.

Модифицируем рассмотренный в предыдущем разделе анонимный МПРР следующим образом. Правило устранения многозначности (7) будет применяться только для тех направлений, количество выделяемых на которое ресурсов агенту безразлично.

Пример 3. R ресурсов делится между n направлениями на основе заявок от n агентов с помощью ОМС (6) с правилом устранения многозначности (7). Агенту 1 существенны два направления – свое и агента 2:

$$\tau_1^1 = (n-2)R / (n-1), \quad \tau_1^2 = R / (n-1).$$

Остальные агенты требуют отдать весь ресурс себе. Очевидно, что в этом случае правило (7) определит, что заявки каждого агента по другим направлениям, будут нулевыми.

Тогда по второму направлению упорядочение точек пиков реальных агентов и фантомных, соответствующих ОМС (6), будет следующим:

$$(0, \dots, 0, \frac{R}{n}, \frac{R}{n-1}, \frac{R}{n-1}, \frac{R}{n-2}, \dots, \frac{R}{2}, R),$$

где 0 сообщают $n-2$ агентов. Медианой этого упорядочения будет $R / (n-1)$. По остальным направлениям, легко убедиться, что медианой будет R / n .

Таким образом, механизм (6) с правилом устранения многозначности (7) даст недопустимое распределение ресурсов, т.к.

$$\sum_{i \in N} x_i = \left(\frac{n-1}{n} + \frac{1}{n-1} \right) R > R.$$

Иными словами, механизм будет *нереализуем*. Следует отметить, что ОМС (6) была бы *нереализуема* в данном примере не зависимо от того, какое правило устранения многозначности в ней используется. ■

3. Заключение

Основным результатом статьи является доказательство того, что неманипулируемые механизмы распределения ресурсов являются частным случаем неманипулируемых механизмов многокритериального выбора. Это позволяет распространить результаты, полученные для последних на первые, например анализ степени манипулируемости различных механизмов распределения ресурсов, который на данный момент удалось провести только для анонимного случая. Полученная аналитическая запись для механизмов последовательного распределения ресурсов ценна сама по себе, т.к. позволяет анализировать различные свойства данных механизмов, например, такие как их эквивалентность.

Отдельным перспективным направлением представляется полноценное расширение результатов, полученных для одномерных задач коллективного выбора для функций предпочтения агентов с плато [9] на многомерные задачи коллективного выбора.

4. Приложение

Доказательство теоремы 1. Обозначим:

$l \in [1, \dots, n]$ – номер шага алгоритма работы механизма последовательного распределения ресурса $\pi(\tau)$;

q_i^l – предлагаемое агенту i на шаге l количество ресурсов;

$K_l \subseteq N$ – множество агентов, чьи заявки удовлетворяются на шаге l ($i \in K_l : \tau_i \leq q_i^l$);

$N_l \subseteq N$ – множество агентов, чьи заявки остаются неудовлетворенными ($i \in N_l : \tau_i > q_i^l$);

R_l – доступные для распределения на шаге l ресурсы,
 $\sum_{i \in N_{l-1}} q_i^l = R_l$.

Перед началом работы алгоритма $K_0 = \emptyset$, $N_0 = N$, $R_1 = R$. На каждом шаге каждый агент $i \in N_{l-1}$ может получить ресурсы

$x_i^l = \min \{\tau_i, q_i^l\}$. В итоге работы алгоритма (подробное описание алгоритма приведено [2, 4, 6]) за число шагов $k \leq n$ формируется множество агентов $K = \bigcup_{l \leq k} K_l$ (т.н. *диктаторы*), чьи заявки

были удовлетворены, и множество агентов N_k , каждый из которых получает q_i^k : $\sum_{i \in N_k} q_i^k = R - \sum_{j \in K} \tau_j$. Очевидно, что $K \cup N_k = N$,

$K \cap N_k = \emptyset$. Из требования монотонности в группах, предъявляемого к МПРР следует, что $\forall l \leq k \quad \forall i \in N_l \quad q_i^l \leq q_i^2 \leq \dots \leq q_i^l$.

То есть для того, чтобы определить механизм, необходимо $\forall S \in 2^N \setminus \emptyset$ определить $q_i(S, z)$ – количество ресурса, предлагаемое агенту i если группа неудовлетворенных агентов составит S и для распределения в ней будет доступно количество ресурса z . Тогда итоговое распределение ресурса может быть записано в форме минимаксной схемы:

$$\pi_i(\tau) = \min \{ \tau_i, \max_{S \subseteq N: i \in S} q_i(S, z) \}.$$

Определим требования, которые должны предъявляться к $q_i(S, z)$.

Необходимость.

Во-первых, любое количество ресурса, доступное любой группе должно полностью предлагаться к распределению внутри группы, т. е.:

$$T 1.1. \quad \forall S \in 2^N \setminus \emptyset, \quad \forall i \in S, \quad \forall z \in [0, R] \quad \sum_{i \in S} q_i(S, z) = z.$$

В том числе $\forall i \in N \quad q_i(\{i\}, z) = z$.

Во-вторых, требование монотонности в группах означает, что $\forall S \in 2^N \setminus \emptyset, \quad \forall i \in S, \quad \forall z \in [0, R] \quad q_i(S, z)$ должна не убывать по z , т. е.

$$T 1.2. \quad \forall S \in 2^N \setminus \emptyset, \quad \forall i \in S, \quad \forall z \in [0, R] \quad \frac{\partial q_i(S, z)}{\partial z} \geq 0.^1$$

¹ Но производная может быть разрывной по z .

Следует отметить, что из условий Т 1.1. и Т 1.2. очевидным образом следует непрерывность $q_i(S, z)$ по z .

Перейдем к условию Т 1.3. Пусть для некоторых групп $V \subseteq N$ и $S \subset V \quad \exists k \in S$ т.ч. при некотором $\tilde{z} < R$ $q_k(S, \tilde{z} - Q_{V \setminus S}(V, \tilde{z})) \neq q_k(V, \tilde{z})$. Рассмотрим ситуацию, когда предпочтения агентов удовлетворяют следующим условиям

а. $\forall i \in N \setminus V \quad \tau_i \leq q_i(N, R)$ и $\sum_{i \in N \setminus V} \tau_i = R - \tilde{z}$;

б. $\forall i \in V \quad \tau_i > q_i(N, R)$;

в. $\forall i \in V \setminus S \quad \tau_i = q_i(V, \tilde{z})$;

г. $\forall i \in S \quad \tau_i > q_i(V, \tilde{z})$ и $\tau_i > q_i(S, \tilde{z} - Q_{V \setminus S}(V, \tilde{z}))$.

Для данного набора точек пиков агентов по результатам первого шага работы МПРР $N_1 = V$, $R_2 = \tilde{z}$. После второго шага $\forall i \in V \quad x_i^2 = q_i(V, \tilde{z})$, соответственно, все агенты из $V \setminus S$ получают ровно столько, сколько просили и $N_2 = S$, $R_3 = \tilde{z} - Q_{V \setminus S}(V, \tilde{z})$. Следует отметить, что на втором шаге агенты из S в сумме получали $Q_S(V, \tilde{z}) = \tilde{z} - Q_{V \setminus S}(V, \tilde{z})$ - т. е. $R_3 = Q_S(V, \tilde{z})$. На третьем шаге алгоритм остановится, т.к. $N_3 = N_2$ и $\forall i \in S$ получают по $x_i^3 = q_i(S, \tilde{z} - Q_{V \setminus S}(V, \tilde{z}))$.

Если $q_k(S, \tilde{z} - Q_{V \setminus S}(V, \tilde{z})) < q_k(V, \tilde{z})$ то это означает, что $x_k^3 < x_k^2$, что противоречит свойствам МПРР. Если $q_k(S, \tilde{z} - Q_{V \setminus S}(V, \tilde{z})) > q_k(V, \tilde{z})$, то из того, что количество ресурсов, распределяемое между агентами из S на втором и третьем шаге одинаковое, следует, что найдется хотя бы один агент $j \in S$, такой, что $x_j^3 < x_j^2$.

В заключение покажем, что для неманипулируемости механизма распределения ресурсов, определяемого (3) функции $q_i(\bullet)$ не могут зависеть от заявок агентов. В [8] доказано, что любой неманипулируемый механизм распределения ресурсов должен быть представим в виде $x_i = \min\{\tau_i, b_i(u_{-i})\}$, $i \in N$, где $b_i(u_{-i})$

должны обеспечивать $\sum_{i \in N} x_i = R$. Следовательно, $\forall i \in N$ функция $q_i(\bullet)$ не должна зависеть от u_i , т. е. от заявки самого агента.

Предположим, что $\exists k, j \in N$ т.ч. для некоторого множества агентов $S \subseteq N: k \in S$ $q_k(\bullet)$ зависит не только от z , но и от u_j .

Если $j \in S$ то, в соответствии с условием Т 1.3. $\forall i \in \{k, j\}$ $q_i(\{k, j\}, z - Q_{S \setminus \{k, j\}}(S, z)) = q_i(S, z)$. То есть для множества агентов $\{k, j\}$ так же должна зависеть от u_j . Но, так как $\forall z \in [0, R]$ $q_k(\{k, j\}, z) + q_j(\{k, j\}, z) = z$, то $q_j(\bullet)$ для множества $\{k, j\}$ зависит от u_j , что недопустимо.

Если $j \notin S$, то рассмотрим множество агентов $\tilde{S} = \{j\} \cup S$. Так как $q_k(S, z - Q_{\{j\}}(\tilde{S}, z)) = q_i(\tilde{S}, z)$, то для \tilde{S} $q_k(\bullet)$ так же зависит от u_j . Далее повторим выкладки предыдущего абзаца.

Таким образом, $\forall i \in N$ функция $q_i(\bullet)$ не может зависеть от заявок агентов, следовательно $q_i(\bullet): 2^N \setminus \emptyset \times [0, R] \rightarrow [0, R]$.

Достаточность.

Пусть задан набор функций $q_i(\bullet): 2^N \setminus \emptyset \times [0, R] \rightarrow [0, R]$, удовлетворяющий условиям Т 1.1.–Т 1.3. Необходимо показать, что механизм (3), определяемый этими функциями, является МПРР.

Проанализируем, на каких $S \subset N$ может достигаться $\max_{S: i \in S} \{q_i(S, R(S))\}$. Зафиксируем произвольную группу агентов $S \subset N$.

1. Покажем, что $\forall i, k \in S$

$$q_i(S, R(S)) \leq q_i(S \setminus \{k\}, R(S \setminus \{k\})) \Leftrightarrow \tau_k \leq q_k(S, R(S)) :$$

$$q_i(S, R(S)) ? q_i(S \setminus \{k\}, R(S \setminus \{k\}))^1,$$

⇕ в соответствии с условиями Т 1.1. и Т 1.3.,

$$q_i(S \setminus \{k\}, R(S) - q_k(S, R(S))) ? q_i(S \setminus \{k\}, R(S) - \tau_k),$$

¹ Знак ? обозначает искомое отношение между левой и правой частями (<, > и т.д.).

⇕ в соответствии с условием Т 1.2.,

$$R(S) - q_k(S, R(S)) \geq R(S) - \tau_k,$$

⇕

$$\tau_k \geq q_k(S, R(S)).$$

Следовательно, $\forall i \in N$ $\max_{S: i \in S} \{q_i(S, R(S))\}$ достигается, когда $\forall k \in S \setminus \{i\} \tau_k > q_k(S, R(S))$.

2. Покажем, что если $\tau_i > q_i(S, R(S))$, т. е. все множество S состоит из не-диктаторов, то во множестве $S \setminus i$ так же не возникнет новых диктаторов. Рассмотрим произвольного агента $j \in S \setminus i$. По построению $\tau_j > q_j(S, R(S))$. Так как $\tau_i > q_i(S, R(S))$, то из условия 2 следует, что

$$q_j(S \setminus \{i\}, R(S) - \tau_i) \leq q_j(S \setminus \{i\}, R(S) - q_i(S, R(S))).$$

Из условия 3 получаем, что

$$q_j(S, R(S)) \geq q_j(S \setminus \{i\}, R(S \setminus \{i\})).$$

Следовательно, $\forall S' \subset S, \forall j \in S' \tau_j > q_j(S', R(S'))$, т. е. в любом подмножестве S не найдется новых диктаторов.

3. Однако, если $\tau_i \leq q_i(S, R(S))$, то возможно, что $\exists k \in S \setminus i$, такой, что $\tau_k > q_k(S, R(S))$ но $\tau_k \leq q_k(S \setminus \{i\}, R(S \setminus \{i\}))$. Это соответствует ситуации, когда для некоторого шага алгоритма l агент $k \notin \bigcup_{j < l} K_j$, но $k \in K_l$ в то время как агент $i \in \bigcup_{j < l} K_j$. То есть

для агентов-диктаторов $\max_{S: i \in S} \{R(S)d_i(S)\}$ может достигаться на таком $S \subset N$, в которое входят другие диктаторы. Однако, так как $\tau_k \leq q_k(S \setminus \{i\}, R(S \setminus \{i\}))$, то $\min\{\tau_k, \max_{S: k \in S} \{R(S)d_k(S)\}\} = \tau_k$,

что соответствует работе алгоритма МПРР.

Таким образом, (3) определит единственную группу $S^* \subseteq N$, т.ч.:

$$1. \forall i \in S^* S^* = \arg \max_{S \subseteq N: i \in S} \{q_i(S, R(S))\} \text{ и } \tau_i > q_i(S^*, R(S^*));$$

$$2. \forall j \in N \setminus S^* \tau_j \leq q_j(S^* \cup \{j\}, R(S^* \cup \{j\})).$$

Что соответствует работе алгоритма МПРР.

Таким образом, рассматриваемый механизм (3) в котором функции $q_i(\cdot): 2^N \setminus \emptyset \times [0, R] \rightarrow [0, R]$, $i \in N$ удовлетворяют условиям Т 1.1.–Т 1.3., является механизмом последовательного распределения ресурсов.

Доказательство теоремы 2.

Эквивалентность механизмов означает, что при одинаковых заявках механизмы дают одинаковое распределение ресурсов и механизм $F(\tau)$ неманипулируем.

I. Покажем, что (4) удовлетворяет требованиям, предъявляемым к системам правых коалиций:

- 1) $\forall z \in (0, R]$:
 $\mathfrak{R}_i(z) \neq \emptyset$, т.к. $q_i(\{i\}, R) = R$;
 $\emptyset \not\subset \mathfrak{R}_i(z)$, т.к. $\forall W \in \mathfrak{R}_i(z) \quad i \in W$;
 $\mathfrak{R}_i(0) = 2^N \setminus \emptyset$ по определению.
- 2) В соответствии с теоремой 1 если $W \in \mathfrak{R}_i(z)$ и $W \subset W'$ то $\Rightarrow W' \in \mathfrak{R}_i(z)$ т.к.
 $q_i(\{i\} \cup N \setminus W', R) \leq q_i(\{i\} \cup N \setminus W, R)$.
- 3) Если $z' < z$ и $W \in \mathfrak{R}_i(z) \Rightarrow W \in \mathfrak{R}_i(z')$ т.к.
 $q_i(\{i\} \cup N \setminus W, R) \geq z > z'$.
- 4) $\forall W \subseteq N$, $\forall z \in Z$ и любой последовательности $\{z^t\} \subset Z$ такой что $\lim_{t \rightarrow \infty} z^t = z$ верно
- 5) $[\forall t, W \in \mathfrak{R}_i(z^t)] \Rightarrow [W \in \mathfrak{R}_i(z)]$ т.к.
 $[\forall t, q_i(\{i\} \cup N \setminus W, R) \geq z^t] \Rightarrow [q_i(\{i\} \cup N \setminus W, R) \geq z]$.

То есть (4) определяет ОМС, в соответствии с которой, для того, чтобы $x_i = z$, необходимо:

1. $z \leq \tau_i$;
2. $S = \{j \in N \setminus \{i\} : s_j^i \geq z\}$ удовлетворяла условию
 $q_i(N \setminus S, R(N \setminus S)) \geq z$.

II. Исследуем как формируются вектор s_j , $j \in N$ в соответствии с (5). Обозначим $K = \{j \in N : \pi_j(\tau) = \tau_j\}$.

Покажем, что $\forall i \in N$ и $\forall j \in K$ из (5) получаем, что $s_j^i = \pi_i(\tau)$. Для произвольного вектора точек пиков агентов $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n)$ обозначим $\tilde{\pi}^j(\tau_{-j})$ - механизм, распределяющий ресурсы $R - x_j$ между агентами из $N \setminus \{j\}$, и получаемый на основе тех же $q_i(\bullet)$, $i \in N \setminus \{j\}$ что и $\pi(\tau)$, где $x_j = \pi_j(\tau)$. В соответствии с условием монотонности по группам, которому удовлетворяет МПРР, $\forall i, j \in N$ $\tilde{\pi}_i^j(\tau_{-j}) = \pi_i(\tau)$. То есть

$$\pi_i(\tau) = \min\{\tau_i, \max_{S \subseteq N \setminus \{j\}; i \in S} q_i(S, R - \pi_j(\tau) - \sum_{k \in N \setminus (S \cup \{j\})} \tau_k)\}.$$

Следовательно, если $\pi_j(\tau) = \tau_j$, то

$$\pi_i(\tau) = \min\{\tau_i, \max_{S \subseteq N \setminus \{j\}; i \in S} q_i(S, R(S))\}.$$

То есть $s_j^i = \pi_i(\tau)$ если $j \in K$ и s_j^i определяется из (5).

Таким образом, $\forall j \in K$ $s_j = \pi(\tau)$. Из приведённых выкладок так же следует, что $\forall j \in N \setminus K$, $\forall i \neq j$ $s_j^i \leq \pi_i(\tau)$ т.к. $\tau_j > \pi_j(\tau)$.

III. В соответствии с (5) получаем, что $\forall i, j \in N$:

1. $s_j^i = \pi_i(\tau)$ если $\pi_j(\tau) = \tau_j$ или $j = i$
2. $s_j^i \leq \pi_i(\tau)$ если $\pi_j(\tau) < \tau_j$.

Отсюда получаем, что $\forall i \in N$

$$F_i(\tau) = \min\{\tau_i, q_i(N \setminus K, R(N \setminus K))\} = \pi_i(\tau).$$

То есть, если агенты достоверно сообщают свои точки пиков, то $\forall \tau : u \in U^n$ имеем $F(\tau) = \pi(\tau)$.

IV. Покажем, что механизм $F(\tau)$ неманипулируем. То есть, $\forall i \in N$ в случае, если $F_i(\tau) \neq \tau_i$ не существует $\tilde{\tau}_i$ т.ч. $u_i(F_i(\tilde{\tau}_i, \tau_{-i})) > u_i(F_i(\tau))$.

В соответствии с (4) возможен только случай, когда $F_i(\tau) \leq \tau_i$. Что означает, что $\forall j \neq i$ $s_j^i < \tau_i$. Это означает, что $\forall j \neq i$ $\max_{S \subseteq N \setminus \{j\}; i \in S} q_i(S, R(S)) < \tau_i$. Поэтому, сообщая $\tilde{\tau}_i > \tau_i$, агент i

не сумеет изменить заявки других агентов, а сообщая $\tilde{\tau}_i < \tau_i$ - может только уменьшить. То есть при сообщении $\tilde{\tau}_i \neq \tau_i$ получаем, что $u_i(F_i(\tilde{\tau}_i, \tau_{-i})) \leq u_i(F_i(\tau))$.

Таким образом, получаем, что ОМС $F(\tau)$, дополненная правилом устранения многозначности, эквивалентна МПРР $\pi(\tau)$.

Литература

1. БУРКОВ В.Н., ГОРГИДЗЕ И.И., НОВИКОВ Д.А., ЮСУПОВ Б.С. *Модели и механизмы распределения затрат и доходов в рыночной экономике*. – М.: ИПУ РАН, 1997. – 61 с.
2. БУРКОВ В.Н., ДАНЕВ Б., ЕНАЛЕЕВ А.К. и др. *Большие системы: моделирование организационных механизмов*. – М.: Наука, 1989. – 248 с.
3. БУРКОВ В.Н., ИСКАКОВ М.Б., КОРГИН Н.А. *Применение обобщенных медианных схем для построения неманипулируемого механизма многокритериальной активной экспертизы* // Проблемы управления. – 2008 г. – №4 – С. 38–47.
4. КОРГИН Н.А. *Анализ реализуемости результатов многокритериальной экспертизы - применение "свойства пересечения"* // Проблемы управления. – 2009 г. – №6 – С. 18–27.
5. КОРГИН Н.А. *Эквивалентность и неманипулируемость неанонимных приоритетных механизмов распределения ресурсов* // Управление большими системами. – 2009 г – № 26.1 – С. 319–347.
6. НОВИКОВ Д.А. *Теория управления организационными системами*. 2-е издание. – М.: Физматлит, 2007. – 584 с.
7. BARBERÁ S., MASSO J., SERIZAWA S. *Strategy-proof voting on compact ranges* // Games and Economic Behavior – 1998. – Vol. 25. – P. 272–291.
8. BARBERÁ S., JACKSON M., NEME A., *Strategy-Proof Allotment Rules* // Games and Economic Behavior – 1997. – Vol. 18, Issue 1. – P. 1–21.

9. BERGA D., *Strategy-proofness and single-plateaued preferences* // Mathematical Social Sciences – 1998. – Vol. 35., Issue 2. – P. 105–120.
10. MOULIN H. *On strategy-proofness and single-peakedness.* // Public Choice – 1980 – Vol. 35. – P. 437–455.
11. NEHRING K., PUPPE C. Efficient and strategy-proof voting rules: A characterization, Games and Economic Behavior. – 2007, vol 59, Issue 1. – P. 132–153.
12. SPRUMONT Y., *The division problem with single-peaked preferences: A characterization of the uniform rule* // Econometrica – 1991, vol 59. – P. 509–519.

REPRESENTING SEQUENTIAL RESOURCE ALLOCATION MECHANISM IN FORM OF STRATEGY-PROOF MECHANISM OF MULTI-CRITERIA ACTIVE EXPERTISE

Nikolay Korgin, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Cand.Sc., leading researcher (nkorgin@ipu.ru).

Abstract: We prove that any sequential resource allocation mechanism, which is strategy-proof for the domain of single-peaked preferences, may be represented as a strategy-proof mechanism of active expertise for the domain of multidimensional single-plateaued preferences – a generalized median voter scheme with a tie-breaking rule.

Keywords: strategy-proof mechanisms, sequential resource allocation mechanism, mechanism of multi-criteria active expertise, generalized median voter scheme.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии В. Н. Бурковым

УДК 519.248:656.71
ББК 22.18 39.513

ОПТИМИЗАЦИЯ УПРАВЛЕНИЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИМИ ПРОЦЕССАМИ УЗЛОВОГО АЭРОПОРТА КАК СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С НЕСТАЦИОНАРНЫМИ ПОТОКАМИ И ЧАСТИЧНОЙ ВЗАИМОПОМОЩЬЮ КАНАЛОВ

Романенко В. А.¹

*(Самарский государственный аэрокосмический
университет им. академика С.П. Королёва
(национальный исследовательский университет), Самара)*

Сформулированы и решены задачи формирования оптимальной программы управления параметрами системы обслуживания перевозок узлового аэропорта как системы массового обслуживания (СМО) с нестационарными потоками и частичной взаимопомощью между обслуживающими каналами. Рассмотрены результаты решения задач, на базе которых сформулированы рекомендации в адрес производственных подразделений узловых аэропортов.

Ключевые слова: оптимальное управление, система массового обслуживания, узловой аэропорт.

1. Введение

С позиции теории систем узловой аэропорт (хаб) представляет собой сложную динамическую стохастическую систему, в которую поступают существенно нестационарные потоки воздушных судов (ВС), пассажиров и др. Выраженные циклические

¹ Владимир Алексеевич Романенко, докторант, кандидат технических наук, доцент (vla_rom@mail.ru).

колебания интенсивности поступающих потоков обусловлены волновым характером расписания хаба, предполагающим организацию так называемых «волн» массовых прибытий–отправлений рейсов, в пределах которых выделяют три временных интервала, первый из которых соответствует «волне» (комплексу) прибытия рейсов, второй – периоду трансфера пассажиров и их багажа на стыковочные рейсы, третий – «волне» (комплексу) отправления рейсов.

Важной задачей хаба является сокращение времени посадки с рейса на рейс трансферных пассажиров. Для решения этой задачи расписание хаба строится таким образом, чтобы комплекс прибытия рейсов инициировали прилёты ВС большой пассажировместимости, обслуживание которых требует больших затрат времени, а завершали прилёты малых ВС. Поскольку среднее время обслуживания ВС в пределах интервала комплекса плавно уменьшается, нестационарным является не только входящий поток ВС хаба, но и поток их обслуживания.

Задачи сокращения времени трансфера пассажиров и длительности наземного простоя ВС в хабе определяют повышенные требования к численности и производительности средств обслуживания перевозок аэропортовых комплексов. Высокая насыщенность хаба обслуживающими средствами даёт возможность привлекать к выполнению технологических операций обслуживания отдельных ВС и их загрузки большее число перронных и терминальных средств по сравнению с «обычным», не узловым аэропортом. Так, например, использование двух средств вместо одного позволяет сократить время выполнения технологической операции, уменьшив тем самым как наземный простой ВС, так и время трансфера пассажиров. Недостаточное число обслуживающих средств приводит к вынужденным задержкам в обслуживании, образованию очередей из ожидающих обслуживания ВС, пассажиров и т.д. Длины таких очередей ограничены числом мест стоянки ВС, вместимостью пассажирского или грузового комплексов и другими параметрами.

Технологический график наземного обслуживания ВС предполагает последовательно-параллельное выполнение большого числа операций. Таким образом, в терминах теории массового обслуживания система обслуживания перевозок хаба представляет собой сеть массового обслуживания (СеМО), в которой заявками являются требующие обслуживания ВС, пассажиры, багаж и т.п., а обслуживающими приборами – персонал аэропорта, перронные и терминальные технические средства. Большинство узлов СеМО могут рассматриваться как многоканальные СМО с ожиданием в очереди ограниченной длины, нестационарными потоками заявок и обслуживания, частичной взаимопомощью между обслуживающими каналами, выражающейся в возможности одновременного использования двух каналов для обслуживания одной заявки. Исследование СеМО «в полном составе» методами теории массового обслуживания представляет весьма сложную задачу, поэтому ограничимся далее анализом только одной СМО, соответствующей одной выбранной технологической операции.

Методы теории случайных процессов и теории массового обслуживания широко применяются для исследования функционирования аэропортов с конца 50-х годов XX века [1, 17]. К этому времени были получены аналитические модели, описывающие установившиеся режимы СМО, которые используются для анализа и оптимизации параметров «обычных», не узловых, аэропортов, характеризующихся длительными интервалами стационарности потоков.

К 90-м годам XX века – времени широкого распространения в зарубежной аэропортовой деятельности хабовых технологий – был разработан ряд моделей СМО с нестационарными потоками. В работах [12, 14] содержится сводное описание имевшихся на тот момент моделей СМО с нестационарными пуассоновскими потоками заявок и различными распределениями длительности обслуживания (пуассоновским, Эрланга, произвольным и др.), используемых для анализа работы хабов. Как в [12, 14], так и в целом ряде других работ (например, [15]) анализ функционирования комплексов и подсистем хаба как

СМО производится на базе численного интегрирования уравнений Колмогорова.

В [8] для моделирования работы хаба предлагается расчетный алгоритм, не требующий численного интегрирования уравнений Колмогорова. Поступление ВС в аэропорт рассматривается как марковский либо полумарковский процесс, характеризующийся нестационарностью. Основными результатами являются вероятностно-временные характеристики очереди ВС, ожидающих разрешения на взлет или посадку.

В работе [18] циклические колебания интенсивности потока прибывающих в хаб ВС аппроксимируются синусоидой. Учитываются отклонения фактических моментов времени прибытия ВС от плановых, величины которых считаются подчиненными нормальному распределению с математическим ожиданием, равным нулю. Длительность обслуживания (занятость ВПП приземляющимся ВС) считается постоянной. Характеристики очереди определяются путем решения уравнения Линдли, описывающего одноканальную СМО с неэкспоненциальными потоками.

Следует отметить, что в настоящее время в общем потоке работ рассматриваемой тематики преобладают исследования, в которых в качестве метода анализа и оптимизации процессов и параметров узловых аэропортов выбрано имитационное компьютерное моделирование. Наиболее актуальными здесь представляются следующие задачи:

- моделирование процессов использования элементов летного поля, определяющих технические возможности хаба [7];
- моделирование и оптимизация производственного процесса обслуживания перевозок хаба [16];
- моделирование и оптимизация отдельных технологических процессов и систем (например, обработки багажа [6]) или отдельных технологических операций (регистрации пассажиров [11]) по критерию минимума времени пребывания трансферных пассажиров в хабе;

– оптимизация расписания хаба с целью «сглаживания» пиков интенсивности движения ВС и снижения нагрузки на аэропортовые комплексы [13].

При всей универсальности имитационного моделирования основным недостатком метода являются значительные затраты машинного времени, ограничивающие его применение при решении оптимизационных задач.

Несмотря на то, что в ряде статей [9, 10] обращается внимание на выраженные колебания не только интенсивности поступающего в узловой аэропорт потока заявок, но также и интенсивности их обслуживания, автору не известны работы, в которых этот фактор был бы учтен при исследовании функционирования узлового аэропорта ни методами теории массового обслуживания, ни методами имитационного моделирования. Также не учитывается такой важный момент как применяемое в аэропортовой практике совместное использование нескольких приборов для сокращения длительности обслуживания одной заявки.

В работах [9, 10] справедливо отмечается, что неравномерность загрузки производственных служб хаба, вызванная волновым характером потоков рейсов, может быть частично сглажена перераспределением ресурсов этих служб между прилетающими и вылетающими ВС. Практикуемое перераспределение ресурсов хаба, выражающееся в постепенном изменении числа обслуживающих средств, привлекаемых для выполнения определенной операции, определяет правомерность постановки задачи поиска оптимального управления числом обслуживающих средств в течение заданных интервалов времени. В известных автору работах (например, [7, 8, 13, 14] и др.), посвященных оптимизации численности обслуживающих средств хаба, речь идет только о поиске их наибольшего числа, потребного в течение «пиков» интенсивности потоков. Однако задача формирования адаптивного управления числом средств обслуживания представляет несомненный интерес. Решению указанной задачи с учетом особенностей исследуемого объекта, состоящих в нестационарности потоков заявок и обслуживания, а также частичной

взаимопомощи между обслуживающими каналами, и посвящена настоящей статье. Использование модели, полученной на базе теории массового обслуживания, позволяет надеяться на достижение оптимального решения на типовых персональных ЭВМ при приемлемых временных затратах.

Прежде чем детально формулировать задачи оптимизации и формировать математическую модель рассматриваемой СМО, дадим её краткое описание, остановившись на особенностях потоков заявок и обслуживания, а также на обосновании возможных критериев оптимальности функционирования системы.

2. Описание системы наземного обслуживания перевозок как СМО

2.1. ОБЩЕЕ ОПИСАНИЕ СМО

Ниже в качестве заявок рассматриваются только прилетающие или вылетающие ВС, поскольку характеристики потоков пассажиров, багажа, грузов в значительной степени определяются характеристиками потоков ВС.

Волновая система прилётов–вылетов хаба имеет, как правило, жесткую структуру с постоянным числом комплексов в течение суток, установленными интервалами между комплексами и фиксированной максимальной интенсивностью движения ВС. Примеры волновых систем трех аэропортов различного масштаба, работающих (или работавших ранее) по системе хаба, в виде графиков временных зависимостей интенсивностей потоков ВС $\lambda(t)$ приведены на рис. 1. Поскольку структура комплексов рассмотренных хабов постоянна для каждого дня недельного расписания и характер графиков интенсивности потоков ВС слабо зависит от дня недели, то на рис. 1 отображены значения интенсивностей, полученные усреднением по дням недели.

Анализ волновых систем хабов позволяет сделать следующие выводы

– потоки ВС удовлетворяют требованиям ординарности и отсутствия последействия и могут рассматриваться в качестве нестационарных пуассоновских потоков [4, 8, 18];

– потоки ВС хаба характеризуются высокой неравномерностью. Пиковые значения интенсивности потока в зависимости от масштаба хаба колеблются от 5 ВС/ч. и менее до 1–1,5 ВС/мин. и более, при существенно меньших значениях между комплексами;

– длительность комплексов прилётов и вылетов ВС не превышает двух часов, в противном случае время ожидания посадки может возрастать до неприемлемых для пассажиров величин;

– с уменьшением масштаба хаба сокращается число комплексов с одновременным ростом интервалов между ними до 10–12 ч.;

– графики интенсивности потоков ВС в течение комплексов прибытий и отправлений имеют сложную форму, в целом близкую к треугольной.

Учитывая, что волна прилетов–вылетов ВС хаба включает два комплекса, то далее под термином «комплекс» понимается либо комплекс прилётов ВС (если обслуживание выполняется по прилёту), либо комплекс вылетов ВС (если обслуживание выполняется по отправлению). Предполагается, что комплексы циклически повторяются через равные интервалы времени продолжительностью T_B . Мгновенная интенсивность потока $\lambda(t)$ является кусочно-непрерывной функцией времени с периодом T_B , в течение которого выделяются три следующих друг за другом временных отрезка:

1) отрезок длительностью T_1 с интенсивностью потока заявок, возрастающей линейно от минимального значения λ_{min} до максимального значения λ_{max} ;

2) отрезок длительностью T_2 с интенсивностью, линейно убывающей от λ_{max} до λ_{min} ;

3) отрезок длительностью $T_3 = T_B - (T_1 + T_2)$ с постоянной интенсивностью потока заявок λ_{min} .

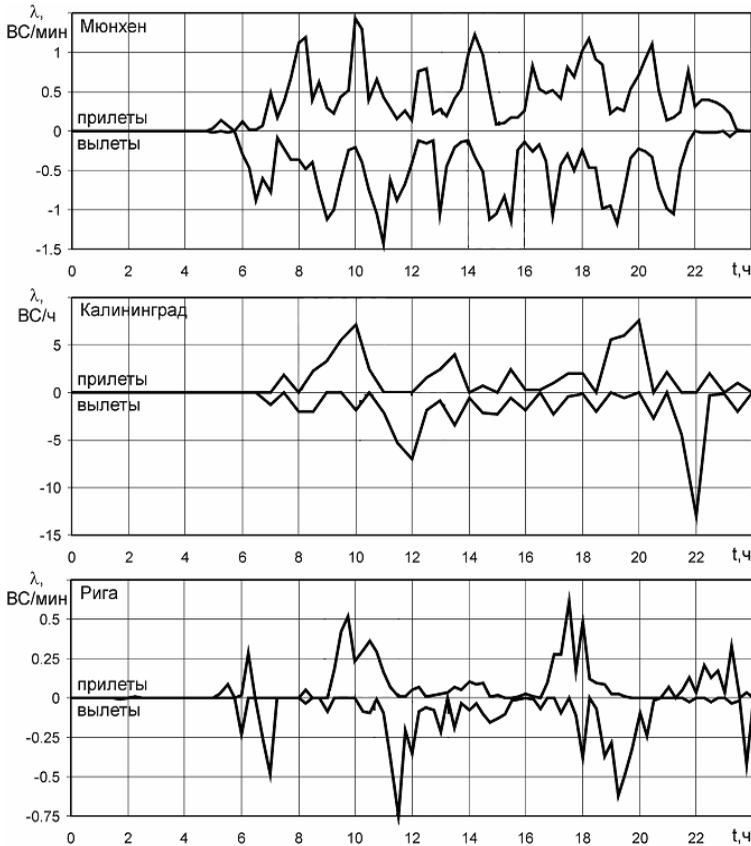


Рис. 1. Примеры волновых систем узловых аэропортов

2.2. ОПИСАНИЕ ПРОЦЕССА ОБСЛУЖИВАНИЯ

Предполагается, что технологические нормы аэропорта допускают возможность использования как одного, так и одновременно двух средств (стоек регистрации, авиатопливозаправщиков, спецмашин и т.п.) для выполнения определённой технологической операции технического или коммерческого обслуживания ВС. На практике число используемых средств зависит от типа ВС, компоновки его салона, категории рейса или перевозки, загруженности аэропортовых комплексов и

других факторов. Виртуальные (мгновенные) продолжительности обслуживания заявки как одним каналом $t_{\text{обсл } 1}(t)$, так и двумя – $t_{\text{обсл } 2}(t)$ считаются показательно распределёнными случайными функциями времени. Мгновенные интенсивности обслуживания заявки одним каналом $\mu_1(t)$ и одновременно двумя каналами $\mu_2(t)$ определяются как

$$\mu_1(t) = [T_{\text{обсл } 1}(t)]^{-1}, \quad \mu_2(t) = [T_{\text{обсл } 2}(t)]^{-1},$$

где $T_{\text{обсл } 1}(t) = M[t_{\text{обсл } 1}(t)]$, $T_{\text{обсл } 2}(t) = M[t_{\text{обсл } 2}(t)]$ – среднее виртуальное время обслуживания заявки одним каналом и двумя каналами соответственно.

Связь между величинами $\mu_1(t)$ и $\mu_2(t)$ задаётся соотношением

$$\mu_2(t) = \theta \mu_1(t),$$

где θ – коэффициент, учитывающий относительное увеличение интенсивности обслуживания при использовании двух каналов.

В условиях реального аэропорта связь между числом привлекаемых средств и интенсивностью обслуживания имеет довольно сложный характер, определяемый особенностями рассматриваемой операции обслуживания. Для операций, продолжительность которых связана с объёмом выполняемых работ (например, заправка ВС авиатопливом посредством авиатопливозаправщиков, посадка в ВС или высадка из ВС пассажиров и др.), зависимость интенсивности обслуживания от числа каналов приближается к прямо пропорциональной, не являясь, однако, строго таковой из-за наличия затрат времени на подготовительно-заключительные операции, на которые число средств не влияет. Для таких операций $\theta \leq 2$. Для ряда операций зависимость продолжительности выполнения от числа средств или исполнителей менее выражена (например, регистрация или предполётный досмотр пассажиров). В этом случае $\theta \approx 1$.

Поведение $T_{\text{обсл } 1}(t)$ и $T_{\text{обсл } 2}(t)$ как функций времени должно отражать наблюдаемые в течение комплекса изменения соотношения между численностью ВС, требующих более и менее длительного обслуживания. В связи с этим предполагается, что величина $T_{\text{обсл } 1}(t)$ (как и $T_{\text{обсл } 2}(t)$) является кусочно-непрерывной

функцией времени с периодом T_B , в течение которого последовательно выделяются четыре отрезка времени:

1) отрезок длительностью T_1' со значениями $T_{\text{обсл}1}(t)$, линейно убывающими от некоторого среднесуточного значения $T_{\text{обсл}1}^{\text{mid}}$ до минимального $T_{\text{обсл}1}^{\text{min}}$.

2) отрезок длительностью T_2' с функцией $T_{\text{обсл}1}(t)$, линейно возрастающей от $T_{\text{обсл}1}^{\text{min}}$ до $T_{\text{обсл}1}^{\text{max}}$;

3) отрезок длительностью T_3' с функцией $T_{\text{обсл}1}(t)$, линейно убывающей от $T_{\text{обсл}1}^{\text{max}}$ до исходного $T_{\text{обсл}1}^{\text{mid}}$;

4) отрезок длительностью $T_4' = T_B - (T_1' + T_2' + T_3')$ с постоянным $T_{\text{обсл}1}^{\text{mid}}$.

2.3. ФОРМИРОВАНИЕ СИСТЕМЫ КРИТЕРИЕВ ОПТИМАЛЬНОСТИ

Формирование совокупности критериев оптимальности рассматриваемой СМО, необходимых для решения задач оптимизации её параметров, производится с использованием несколько модифицированной модели эффективности сложной авиатранспортной системы, предложенной в работе [3]. Эффективность рассматривается как свойство системы выполнять заданные функции с заданными качеством и производительностью при минимальных затратах ресурсов. В формализованном виде модель записывается как

$$W(t) = (W_{\Pi}(t), W_{\Xi}(t), W_{\text{K}}(t)),$$

где $W(t)$ – обобщённый показатель эффективности системы; $W_{\Pi}(t)$ – комплексный показатель производительности системы; $W_{\Xi}(t)$ – комплексный показатель экономичности системы; $W_{\text{K}}(t)$ – комплексный показатель качества работы системы. Для рассматриваемой системы, потоки заявок и обслуживания в которой нестационарны, все перечисленные показатели зависят от времени.

Основное преимущество воздушной перевозки с точки зрения пользователей воздушного транспорта состоит в малых затратах времени на её выполнение. Важная роль в сокращении

этих затрат принадлежит аэропорту. Аэропортовое предприятие, способное обеспечить наземное обслуживание пассажиров, грузов и ВС за сравнительно короткое время, обладает серьезным преимуществом в конкурентной борьбе за привлечение клиентуры. Особое значение фактор затрат наземного времени имеет в случае хабов, для которых малая величина времени трансфера является одним из главных критериев их привлекательности с точки зрения пассажиров, грузоотправителей и авиаперевозчиков. Сокращение затрат наземного времени в хабе служит непосредственной причиной повышения числа отправок рейсов, уровня пассажиро- и грузопотоков, обеспечивающего рост доходов аэропорта от авиационной и неавиационной деятельности. Длительность пребывания в хабе должна быть небольшой для пассажира, ВС или груза, поступившего в хаб в любой, в том числе наиболее загруженный, момент времени.

Таким образом, в рамках целей исследования СМО предполагается, что производительность системы на выбранном этапе обслуживания непосредственно связана с затратами времени на пребывание заявки в СМО, возрастая с уменьшением этих затрат. В качестве показателя, выражающего уровень временных затрат, принято среднее виртуальное время пребывания заявки в СМО

$$T_{\text{преб}}[t] = M[t_{\text{преб}}(t)],$$

где $t_{\text{преб}}(t)$ – виртуальное время пребывания заявки в СМО, т.е. то время, в течение которого находилась бы в СМО гипотетическая заявка, вошедшая в СМО в момент времени t . Величина $t_{\text{преб}}(t)$ складывается из виртуального времени ожидания $t_{\text{ож}}(t)$ и виртуального времени обслуживания $t_{\text{обсл}}(t)$:

$$t_{\text{преб}}(t) = t_{\text{обсл}}(t) + t_{\text{ож}}(t),$$

откуда

$$(1) \quad T_{\text{преб}}(t) = T_{\text{обсл}}(t) + T_{\text{ож}}(t),$$

где $T_{\text{обсл}}(t) = M[t_{\text{обсл}}(t)]$, $T_{\text{ож}}(t) = M[t_{\text{ож}}(t)]$ – средние виртуальные значения времени обслуживания и времени ожидания, соответственно.

С учётом введенных обозначений, связь между производительностью системы и затратами времени на пребывание в ней в общем виде выразится как

$$W_{\Pi}(t) = f_{\Pi} \left(\frac{1}{T_{\text{преб}}(t)} \right),$$

Следует ожидать, что на производительности рассматриваемой системы отразится перераспределение каналов между индивидуальным и групповым обслуживанием, приводящее к изменению соотношения между временем обслуживания и временем ожидания. Так, увеличение доли заявок, обслуживаемых парами каналов, вызовет в общем случае сокращение затрат времени на обслуживание и рост времени ожидания. Напротив, увеличение доли заявок, обслуживаемых индивидуальными каналами, приведёт к противоположному эффекту.

Под показателем экономичности системы понимается числовая характеристика расхода ресурсов на получение заданного конечного результата функционирования системы. Чтобы упростить задачу с целью обеспечения возможности её решения методами теории массового обслуживания, далее предполагается, что экономичность производственных комплексов хаба зависит только от их насыщенности техническими средствами обслуживания перевозок. Действительно, численность аэропортовых технических средств влияет на уровень расходов аэропорта по целому ряду основных статей [5], таких как расходы на эксплуатацию и техническое обслуживание, в том числе на персонал и материалы; капитальные затраты, в том числе износ и/или амортизацию и др. Таким образом, правомерна следующая запись, означающая, что увеличение числа обслуживающих каналов на выбранном этапе обслуживания отрицательно влияет на степень экономичности СМО

$$W_{\text{Э}}(t) = f_{\text{Э}} \left(\frac{1}{N(t)} \right),$$

где $N(t)$ – численность средств обслуживания на выбранном этапе, имеющаяся в распоряжении СМО в момент времени t .

Зависимость от времени численности средств $N(t)$ объясняется спецификой расписания хаба, приводящей к временному сдвигу комплекса вылетов ВС относительно комплекса прилётов, и тем самым дающей возможность аэропортовым службам оперативно маневрировать своими ресурсами, перераспределяя их между отправляемыми и прибывающими рейсами.

Показатель качества работы СМО должен учитывать два аспекта. Первый связан с необходимостью обеспечения заданного качества обслуживания клиентуры хаба – авиакомпаний, пассажиров, грузоотправителей и т.д.; второй – с качеством использования трудовых, материальных и финансовых ресурсов аэропортового предприятия. Поскольку очевидно, что качество обслуживания тем выше, чем меньше время тратится клиентом аэропорта на непроизводительное ожидание, то количественный показатель качества обслуживания заявки в модели СМО должен быть определённым образом связан с временем ожидания обслуживания. Учитывая стохастичность как потока заявок, так и процесса обслуживания, невозможно полностью исключить вероятность образования очереди ни при каком уровне производительности системы, однако длительность ожидания начала обслуживания для большинства заявок должна быть достаточно мала. Таким образом, для описания качества обслуживания заявки введены два параметра, а именно $t_{\text{ож р}}$ – расчётное время ожидания заявкой обслуживания в очереди и $P_{\text{ож р}}$ – вероятность превышения расчётного времени фактическим временем ожидания.

В рамках рассматриваемой модели СМО качество использования ресурсов выражает мгновенный коэффициент загрузки системы

$$(2) \quad K_3(t) = \frac{\bar{N}_3(t)}{N(t)},$$

где $\bar{N}_3(t) = M[N_3(t)]$ – среднее мгновенное число занятых обслуживанием каналов.

Перечисленные показатели качества обслуживания представляется целесообразным использовать в качестве ограниче-

ний при решении формулируемой задачи оптимизации. В этом случае, как следует из изложенного выше, «претендентами» на роль критериев оптимальности выступают минимальное число обслуживающих каналов и минимальные затраты времени на пребывание в системе. Одновременный учёт обоих противоречивых критериев приводит к необходимости решения оптимизационной задачи в многокритериальной постановке. Выбор же единственного глобального критерия, включающего оба названных критерия, или их свёртка весьма затруднительны. В качестве такого единственного критерия могут выступать экономические результаты работы аэропорта (например, прибыль), влияние на которые оказывают как численность аэропортовых средств, так и затраты времени на пребывание в аэропорту. Однако оценить такое влияние, особенно со стороны второго фактора, без существенного усложнения модели невозможно. Чтобы исключить указанные трудности, здесь использован подход, основанный на выделении из общей многокритериальной задачи двух однокритериальных задач и выборе для каждой из них главного критерия.

2.4. ОБЩЕЕ ОПИСАНИЕ СМО

С учетом изложенного выше, уточним описание оптимизируемой системы. Рассматривается СМО с ожиданием в очереди ограниченной длины, содержащая однотипные обслуживающие каналы, число которых $N(t)$ с течением времени может меняться. Число заявок, находящихся в СМО, не должно превышать постоянной величины K , что может быть обусловлено техническими ограничениями по числу обустроенных в аэропорту мест стоянки ВС, вместимости аэровокзального или грузового комплекса и т.п. Частичная взаимопомощь каналов выражается в том, что обслуживание заявки может производиться каналом как индивидуально, так и в составе группы из двух каналов. В случае наличия не менее двух свободных каналов поступившая заявка с вероятностью v_1 занимает для обслуживания один из них и с вероятностью $v_2 = 1 - v_1$ — оба канала. Если же в момент поступления на обслуживание заявки СМО располагает только

одним свободным каналом, то эта заявка в любом случае занимает имеющийся единственный канал. В случае отсутствия незанятых каналов вновь поступившая заявка «становится в очередь» и ожидает обслуживания. Если число заявок, находящихся в очереди, составляет $K - N(t)$, то вновь прибывшая заявка покидает СМО необслуженной. Вероятность такого события должна быть малой. Потоки заявок и обслуживания относятся к категории нестационарных пуассоновских.

3. Постановка задач параметрической оптимизации СМО

Для решения задач оптимизации параметров исследуемой СМО должна быть получена математическая модель, связывающая её входные переменные через переменные состояния с выходными переменными. Вектор входных переменных $\mathbf{x}(t)$ в модели рассматриваемой СМО включает характеристики входящего потока заявок ($\lambda(t)$) и процесса обслуживания ($T_{\text{обсл}1}(t), T_{\text{обсл}2}(t), v_1(t)$), а также численность каналов $N(t)$ и мест K в СМО:

$$\mathbf{x} = (\lambda(t), T_{\text{обсл}1}(t), T_{\text{обсл}2}(t), v_1(t), N(t), K).$$

Выделим из состава компонентов вектора $\mathbf{x}(t)$ переменные, значения которых можно задавать по своему усмотрению – управляемые переменные. К их числу отнесём $v_1(t)$ и $N(t)$. Вектор управляемых переменных обозначим как $\mathbf{u}(t) = (v_1(t), N(t))$, $\mathbf{u}(t) \in U$, где U – область допустимых управлений, определяемая естественными ограничениями, накладываемыми на $v_1(t)$ и $N(t)$. Величина $v_1(t)$ может задаваться в пределах $0 \leq v_1(t) \leq 1$. Значения $N(t)$ должны быть целыми. Кроме того, логично предположить, что, несмотря на возможность манёвра ресурсами, аэропорт не может неограниченно наращивать $N(t)$ для выполнения рассматриваемой операции. Пусть заданы минимальное N_{\min} и максимальное N_{\max} значения числа средств обслуживания, которое может быть задействовано аэропортом для данной операции, тогда $N(t)$ должно удовлетворять условию $N_{\min} \leq N(t) \leq N_{\max}$.

Остальные компоненты $\mathbf{x}(t)$ будем считать неуправляемыми независимыми переменными и объединим их в вектор $\mathbf{x}'(t) = (\lambda(t), T_{\text{обсл } 1}(t), T_{\text{обсл } 2}(t), K)$.

Компонентами вектора переменных состояния \mathbf{P} являются вероятности состояний СМО $P_i, i = 0, 1, \dots, M$, зависящие в общем случае от начального состояния СМО, её входных управляемых и неуправляемых переменных и времени. Таким образом, сам вектор переменных состояния \mathbf{P} является вектор-функцией и может быть определён как

$$\mathbf{P}(\mathbf{P}^0, \mathbf{x}'(t), \mathbf{u}(t), t) = (P_0(\mathbf{P}^0, \mathbf{x}'(t), \mathbf{u}(t), t), P_1(\mathbf{P}^0, \mathbf{x}'(t), \mathbf{u}(t), t), \dots, P_M(\mathbf{P}^0, \mathbf{x}'(t), \mathbf{u}(t), t)),$$

где $M + 1$ – максимально возможное число состояний СМО; $\mathbf{P}^0 = (P_0^0, P_1^0, \dots, P_M^0)$ – вектор вероятностей состояний СМО в начальный момент времени $t = 0$.

Вероятности, составляющие вектор-функцию $\mathbf{P}(\mathbf{P}^0, \mathbf{x}'(t), \mathbf{u}(t), t)$, определяются путём численного интегрирования системы дифференциальных уравнений Колмогорова, описанной ниже.

В состав компонентов вектора выходных переменных $\mathbf{z}(t)$ должны быть включены основные вероятностно-временные характеристики СМО, необходимые для решения формулируемых оптимизационных задач:

$$\mathbf{z} = (T_{\text{обсл}}(t), T_{\text{ож}}(t), P\{t_{\text{ож}}(t) < \tau\}, P\{t_{\text{преб}}(t) < \tau\}, \bar{N}_3(t), P_{\text{отк}}(t)),$$

где $P\{t_{\text{ож}}(t) < \tau\}$ – функция распределения времени ожидания (вероятность того, что виртуальное время ожидания заявкой обслуживания $t_{\text{ож}}(t)$ не превысит величины τ); $P\{t_{\text{преб}}(t) < \tau\}$ – функция распределения времени пребывания в СМО (вероятность того, что виртуальное время пребывания заявки в СМО $t_{\text{преб}}(t)$ не превысит величины τ); $P_{\text{отк}}(t)$ – вероятность отказа очередной заявке в обслуживании.

Связи перечисленных выходных переменных с переменными состояния представим в виде

$$T_{\text{обсл}} = Z_{T_{\text{обсл}}}(\mathbf{P}(\mathbf{P}^0, \mathbf{x}'(t), \mathbf{u}(t), t)),$$

$$T_{\text{ож}} = Z_{T_{\text{ож}}}(\mathbf{P}(\mathbf{P}^0, \mathbf{x}'(t), \mathbf{u}(t), t)),$$

$$(3) \quad P\{t_{\text{ож}}(t) < \tau\} = Z_{P_{\text{ож}}}(\mathbf{P}(\mathbf{P}^0, \mathbf{x}'(t), \mathbf{u}(t), t), \tau),$$

$$P\{t_{\text{проб}}(t) < \tau\} = Z_{P_{\text{проб}}}(\mathbf{P}(\mathbf{P}^0, \mathbf{x}'(t), \mathbf{u}(t), t), \tau),$$

$$\bar{N}_3 = Z_{\bar{N}_3}(\mathbf{P}(\mathbf{P}^0, \mathbf{x}'(t), \mathbf{u}(t), t)),$$

$$P_{\text{отк}} = Z_{P_{\text{отк}}}(\mathbf{P}(\mathbf{P}^0, \mathbf{x}'(t), \mathbf{u}(t), t)),$$

где $Z_{T_{\text{обсл}}}(\cdot)$, $Z_{T_{\text{ож}}}(\cdot)$, $Z_{P_{\text{ож}}}(\cdot)$, $Z_{P_{\text{проб}}}(\cdot)$, $Z_{\bar{N}_3}(\cdot)$, $Z_{P_{\text{отк}}}(\cdot)$ – функциональные зависимости соответствующих выходных переменных от переменных состояния, которые определяются по приведённым в следующем пункте формулам. Формулы (1) и (3) позволяют определить виртуальное среднее время пребывания заявки в системе как

$$T_{\text{проб}}(t) = Z_{T_{\text{обсл}}}(\mathbf{P}(\mathbf{P}^0, \mathbf{x}'(t), \mathbf{u}(t), t)) + Z_{T_{\text{ож}}}(\mathbf{P}(\mathbf{P}^0, \mathbf{x}'(t), \mathbf{u}(t), t)).$$

Сформулируем теперь две упомянутые выше задачи оптимизации с различными критериями, решения которых можно рассматривать как некоторые предельные случаи решения многокритериальной задачи, когда значимость одного из критериев полностью превалирует над значимостью другого. Первая задача, в которой в роли критерия оптимальности выступает минимум численности аэропортовых средств обслуживания, соответствует ситуации, когда аэропортовое предприятие своей приоритетной целью ставит обеспечение экономичности перевозок. Вторая задача, где критерием является минимальное время пребывания в аэропорту, соответствует ситуации, когда аэропортом в качестве более важной выбрана цель сокращения временных затрат на перевозку.

Задача минимизации числа каналов (Задача А).

Для выбранной операции обслуживания на заданном временном интервале определить управление $\mathbf{u}(t)$, обеспечивающее минимум мгновенному потребному числу обслуживающих каналов $N(t)$ в СМО с заданными средними виртуальными продолжительностями индивидуального $T_{\text{обсл}1}(t)$ и группового $T_{\text{обсл}2}(t)$ обслуживания, в которую поступает нестационарный пуассоновский поток заявок заданной мгновенной интенсивности $\lambda(t)$:

$$\mathbf{u}^{opt}(t) = \underset{\mathbf{u}(t) \in U}{\operatorname{argmin}} N(t).$$

Временной интервал оптимизации определим, используя следующие соображения. Чтобы состояния СМО в течение некоторого комплекса не оказывали влияния на её состояния в течение последующего комплекса, необходимо, чтобы интервал времени T_B между двумя соседними комплексами был достаточно продолжительным для формирования в СМО близкого к установившемуся режима. При выполнении этого условия оптимальная программа управления $\mathbf{u}^{opt}(t)$, определённая для интервала одного комплекса, будет в неизменном виде воспроизводиться в течение интервалов всех других комплексов. Таким образом, при введении допущения о значительной продолжительности интервалов между комплексами задачу поиска оптимального управления достаточно будет решить только для одного интервала продолжительностью T_B , момент начала которого совпадает с моментом начала комплекса. К указанному моменту СМО уже должна пребывать в установившемся режиме, соответствующем постоянным λ_{min} , N_{min} , $T_{обсл}^{mid}$ и некоторому v_1 , например $v_1 = 0$.

Задача решается при следующих ограничениях.

1. Ограничение на длительность пребывания заявки в СМО, для задания которого вводятся два параметра: $t_{преб P}$ – заданное расчётное время пребывания заявки в системе, $P_{преб P}$ – заданная расчётная вероятность того, что фактическое виртуальное время пребывания заявки в системе $t_{преб}(t)$ не превысит расчётного времени пребывания $t_{преб P}$. С учётом введенных обозначений ограничение принимает вид:

$$(4) \quad P\{t_{преб}(t) < t_{преб P}\} = Z_{P_{преб}}(\mathbf{P}(\mathbf{P}^0, \mathbf{x}'(t), \mathbf{u}(t), t), t_{преб P}) > P_{преб P}.$$

2. Ограничение на нижнюю границу уровня качества обслуживания заявок. При заданных расчётном времени ожидания заявкой обслуживания в очереди $t_{ож P}$ и вероятности превышения расчётного времени фактическим временем ожидания $P_{ож P}$ это ограничение формулируется как

$$(5) \quad P\{t_{ож}(t) < t_{ож P}\} = Z_{P_{ож}}(\mathbf{P}(\mathbf{P}^0, \mathbf{x}'(t), \mathbf{u}(t), t), t_{ож P}) > P_{ож P}.$$

3. Ограничение на верхнюю границу вероятности отказов в обслуживании заявки.

$$(6) \quad P_{\text{отк}}(t) = Z_{P_{\text{отк}}}(\mathbf{P}(\mathbf{P}^0, \mathbf{x}'(t), \mathbf{u}(t), t)) < P_{\text{откP}},$$

где $P_{\text{откP}}$ – расчётная вероятность отказа, которая с учётом специфики объекта оптимизации должна задаваться весьма малой.

4. Ограничения на значения управляемых переменных:

$$(7) \quad N(t) - \text{целое}, \quad N_{\min} < N(t) \leq N_{\max}, \quad 0 \leq v_1 \leq 1.$$

Отметим важную особенность задачи А. Целочисленность $N(t)$ может приводить к ситуации, когда оптимальному значению этой величины соответствует не единственное оптимальное значение v_1 , а множество значений, принадлежащее некоторому диапазону, все точки которого удовлетворяют ограничениям (4)–(7). В этом случае оптимальным решением целесообразно считать то значение v_1 из указанного диапазона, которое обеспечивает минимум величине среднего виртуального времени пребывания в системе $T_{\text{преб}}(t)$.

Задача минимизации времени пребывания в системе (Задача Б).

Для выбранной операции обслуживания на описанном выше временном интервале продолжительностью T_B определить управление $\mathbf{u}(t)$, обеспечивающее минимум среднему виртуальному времени пребывания заявки $T_{\text{преб}}(t)$ в СМО с заданными средними продолжительностями индивидуального $T_{\text{обсл1}}(t)$ и группового $T_{\text{обсл2}}(t)$ обслуживания, в которую поступает нестационарный пуассоновский поток заявок заданной интенсивности $\lambda(t)$:

$$\mathbf{u}^{\text{opt}}(t) = \underset{\mathbf{u}(t) \in U}{\operatorname{argmin}} \left[Z_{T_{\text{обсл}}}(\mathbf{P}(\mathbf{P}^0, \mathbf{x}'(t), \mathbf{u}(t), t)) + Z_{T_{\text{ож}}}(\mathbf{P}(\mathbf{P}^0, \mathbf{x}'(t), \mathbf{u}(t), t)) \right].$$

Помимо используемых при решении задачи А ограничений (5)–(7), здесь учитывается ограничение на нижнюю границу уровня качества использования ресурсов, которое с учетом (2) записывается в виде

$$(8) \quad K_3(t) = \frac{\bar{N}_3(t)}{N(t)} = \frac{Z_{\bar{N}_3}(\mathbf{P}(\mathbf{P}^0, \mathbf{x}'(t), \mathbf{u}(t), t))}{N(t)} > K_{3P},$$

где $K_{зр}$ – расчётный коэффициент занятости системы, задаваемый таким образом, чтобы непроизводительные простои каналов обслуживания были достаточно малы.

Поскольку решение обеих сформулированных задач при наличии динамической модели СМО, позволяющей определять её вероятностно-временные характеристики, не предполагает особых затруднений, нет смысла подробно описывать здесь оптимизационный алгоритм. Отметим лишь, что оптимальные параметры управления определяются на каждом шаге численного интегрирования системы уравнений Колмогорова, входящей в модель СМО. На каждом шаге с последовательным увеличением перебираются значения $N(t)$, для каждого из которых делается попытка определить значение $v_1(t)$, минимизирующее критерий и удовлетворяющее ограничениям. В случае успеха найденные таким образом параметры $N(t)$, $v_1(t)$ и считаются оптимальными. Если для очередного $N(t)$ не удаётся найти удовлетворяющее ограничениям значение $v_1(t)$, то число каналов $N(t)$ увеличивается на единицу и расчёт повторяется. При этом используется ряд простых эвристических приёмов, учитывающих близкий к линейному характер зависимости вероятностно-временных параметров СМО от $v_1(t)$.

4. Модель СМО с нестационарными потоками и частичной взаимопомощью каналов

4.1. ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛИ СМО

Рассматриваемая СМО в произвольный момент времени t может находиться в одном из $b + 1$ дискретных состояний – S_0, S_1, \dots, S_b . Переход из состояния в состояние осуществляется в произвольный момент времени. В любой момент времени t для вероятностей $P_i(t)$ ($i=0, 1, \dots, b$) нахождения СМО в состоянии S_i ($i=0, 1, \dots, b$) должно выполняться условие нормировки

$$\sum_{i=0}^b P_i(t) = 1. \text{ Знание вероятностей } P_0(t), P_1(t), \dots, P_b(t) \text{ позволяет}$$

определять виртуальные вероятностно-временные характеристики

ки СМО, необходимые для решения задач её параметрической оптимизации.

Вероятности состояний $P_i(t)$ находятся путём решения системы дифференциальных уравнений Колмогорова, в общем виде записываемой как [2]

$$(9) \quad \frac{dP_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^b \varphi_{ji}(t)P_j(t) - P_i(t) \sum_{j=1}^b \varphi_{ij}(t), \quad i = 0, 1, \dots, b,$$

где $\varphi_{ij}(t)$ – интенсивности перехода из состояния с порядковым номером i в состояние с порядковым номером j . Величины $\varphi_{ij}(t)$ определяются по формуле

$$\varphi_{ij}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P_{ij}(t; \Delta t)}{\Delta t},$$

где $P_{ij}(t; \Delta t)$ – вероятность того, что СМО, пребывавшая в момент t в состоянии S_i , за время Δt перейдёт из него в состояние S_j ($i \neq j$).

Чтобы упростить составление уравнений Колмогорова, используют размеченный граф состояний СМО, в котором над стрелками, ведущими из S_i в S_j , проставляют соответствующие интенсивности φ_{ij} . Производная вероятности каждого состояния определяется как сумма всех потоков вероятности, идущих из других состояний в данное состояние, за вычетом суммы всех потоков вероятности, идущих из данного состояния в другие.

Начальные условия интегрирования системы уравнений Колмогорова, если в начальный момент времени $t = 0$ в СМО нет заявок, имеют вид:

$$(10) \quad P_0(0) = 1, \quad P_1(0) = P_2(0) = \dots = P_b(0) = 0.$$

Запись в общем виде (9) уравнений Колмогорова с граничными условиями (10) для рассматриваемой СМО, отличающейся переменным $N(t)$, программно труднореализуема. В соответствии с алгоритмическим подходом [2] рассмотрим методику формирования системы уравнений Колмогорова в виде, пригодном для компьютерных вычислений. Используем двойную систему обозначений состояний СМО, в которой i – число занятых обслуживанием каналов плюс длина очереди, j – число заявок в СМО.

Реализовано может быть не любое состояние из формальной совокупности S_{ij} ($i = 0, 1, \dots, K$; $j = 0, 1, \dots, K$). В частности, в рамках описываемой модели невозможны состояния, при которых две или более заявок одновременно обслуживаются одним каналом, т.е. $P_{ij}(t) = 0$, если $j > i$. Обозначим символом \mathbf{S} множество допустимых состояний СМО. Состояние S_{ij} существует и соответствующая ему вероятность $P_{ij}(t)$ может быть ненулевой, если выполняется одно из условий:

$$\left. \begin{array}{ll} 1) j \leq i \leq 2j, & \text{если } 2j \leq N, \\ 2) j \leq i \leq j + q - 1, & \text{если } \begin{cases} 2j > N, \\ j + q - 1 < K, \end{cases} \\ 3) j \leq i \leq K, & \text{если } j + q - 1 \geq K, \end{array} \right\} \begin{array}{l} i = 0, 1, \dots, K, \\ j = 0, 1, \dots, K, \end{array}$$

где q – максимальное число состояний с различным количеством обслуживающих каналов для заданного числа заявок, определяемое по формуле

$$q = N - [N/2].$$

Здесь скобки обозначают операцию отбрасывания дробной части. В формулах данного пункта обозначение функциональной зависимости числа каналов от времени опущено с целью экономии места.

Для реализации компьютерных вычислений с использованием системы уравнений Колмогорова с переменным N её уравнения должны быть приведены к некоторой универсальной форме, допускающей запись любого уравнения.

С целью выработки такой формы рассмотрим фрагмент графа состояний, отображающий одно произвольное состояние S_{ij} с ведущими из него стрелками интенсивностей. Обозначим римскими цифрами соседние состояния, непосредственно связанные с S_{ij} , так, как это показано на рис.2.

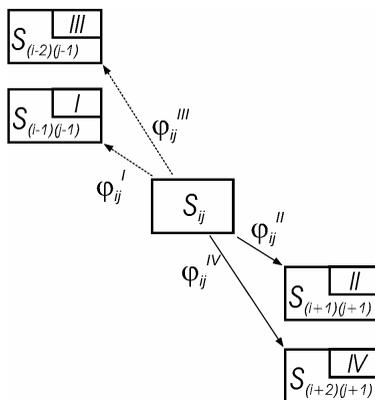


Рис. 2. Фрагмент графа состояний СМО

Для каждого состояния S_{ij} ($i = 0, 1, \dots, K; j = 0, 1, \dots, K$), такого, что $S_{ij} \in \mathbf{S}$, в момент времени t величины $\varphi_{ij}^I(t), \varphi_{ij}^{II}(t), \varphi_{ij}^{III}(t), \varphi_{ij}^{IV}(t)$ принимают различные значения (в том числе равные нулю). Однако при этом структура уравнения (11) сохраняется неизменной, что позволяет использовать его для компьютерной реализации системы уравнений Колмогорова произвольной размерности.

Интенсивности $\varphi_{ij}^{II}(t), \varphi_{ij}^{IV}(t)$, стремящиеся перевести СМО в состояния с большими значениями i и j , если наличие таких состояний является возможным, определяются исходя из ряда условий следующим образом:

$$\varphi_{ij}^{II}(t) = \left\{ \begin{array}{l} 0, \quad \text{если } S_{ij} \notin \mathbf{S} \text{ или } S_{(i+1)(j+1)} \notin \mathbf{S}, \\ \nu_1 \lambda(t), \text{ если } \left\{ \begin{array}{l} S_{ij} \in \mathbf{S}, \\ S_{(i+1)(j+1)} \in \mathbf{S}, \\ S_{(i+2)(j+1)} \in \mathbf{S}, \\ i \leq N-2, \end{array} \right. \\ 1, \text{ если } \left\{ \begin{array}{l} S_{ij} \in \mathbf{S}, \\ S_{(i+1)(j+1)} \in \mathbf{S}, \text{ или } \left\{ \begin{array}{l} S_{ij} \in \mathbf{S}, \\ S_{(i+1)(j+1)} \in \mathbf{S}, \\ i > N-A, \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} i = 0, 1, \dots, K, \\ j = 0, 1, \dots, K, \end{array} \right.$$

$$\varphi_{ij}^{IV}(t) = \left\{ \begin{array}{l} 0, \quad \text{если } \left. \begin{array}{l} S_{ij} \notin \mathbf{S} \text{ или} \\ S_{(i+1)(j+1)} \notin \mathbf{S} \text{ или } i > N - 2, \end{array} \right\} \\ v_2 \lambda(t), \quad \text{если } \left\{ \begin{array}{l} S_{ij} \in \mathbf{S}, \\ S_{(i+1)(j+1)} \in \mathbf{S}, \\ S_{(i+2)(j+1)} \in \mathbf{S}, \\ i \leq N - 2, \end{array} \right. \\ 1, \quad \text{если } \left\{ \begin{array}{l} S_{ij} \in \mathbf{S}, \\ S_{(i+1)(j+1)} \notin \mathbf{S}, \\ S_{(i+2)(j+1)} \in \mathbf{S}, \\ i \leq N - 2, \end{array} \right. \end{array} \right\} \begin{array}{l} i = 0, 1, \dots, K, \\ j = 0, 1, \dots, K. \end{array}$$

Интенсивности $\varphi_{ij}^I(t)$, $\varphi_{ij}^{III}(t)$, переводящие СМО из состояния S_{ij} в состояния с меньшими значениями i и j (если наличие таких состояний возможно), прямо пропорциональны задействованному числу каналов, обслуживающих находящиеся в СМО заявки различного типа (занимающие для обслуживания один или два канала). Группу из двух каналов, занятых обслуживанием одной заявки соответствующего типа, можно рассматривать в качестве одного канала. Поэтому в общем случае:

$$\varphi_{ij}^I(t) = k_{ij1} \mu_1(t), \quad \varphi_{ij}^{III}(t) = k_{ij2} \mu_2(t),$$

где k_{ij1} – число заявок, занимающих один канал, обслуживаемых СМО в состоянии S_{ij} ; k_{ij2} – число заявок, занимающих по два канала, обслуживаемых СМО в состоянии S_{ij} .

Через i и j указанные величины определяются следующим образом:

$$k_{ij1} = \begin{cases} 2j - i, & \text{если } i \leq N, \\ N - 2(i - j), & \text{если } i > N, \end{cases}$$

$$k_{ij2} = i - j.$$

С учетом ограничений по возможности существования состояний выражения для $\varphi_{ij}^I(t)$, $\varphi_{ij}^{III}(t)$ имеют вид

$$\varphi_{ij}^I(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } S_{ij} \notin \mathbf{S} \text{ или } S_{(i-1)(j-1)} \notin \mathbf{S}, \\ k_{ij1}\mu_1(t), & \text{если } \begin{cases} S_{ij} \in \mathbf{S}, \\ S_{(i-1)(j-1)} \in \mathbf{S}, \end{cases} \end{cases}$$

$$\varphi_{ij}^{III}(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } S_{ij} \notin \mathbf{S} \text{ или } S_{(i-1)(j-1)} \notin \mathbf{S}, \\ k_{ij2}\mu_2(t), & \text{если } \begin{cases} S_{ij} \in \mathbf{S}, \\ S_{(i-1)(j-1)} \in \mathbf{S}, \end{cases} \end{cases}$$

$i = 0, 1, \dots, K, \quad j = 0, 1, \dots, K.$

4.2. ПОКАЗАТЕЛИ ЭФФЕКТИВНОСТИ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ СМО

Описанная модель позволяет определить временные зависимости следующих показателей эффективности функционирования рассматриваемой СМО.

По очевидным формулам определяются **среднее мгновенное число занятых каналов** как

$$\bar{N}_s(t) = \sum_{i=0}^{N(t)} \sum_{j=0}^K iP_{ij}(t),$$

и **виртуальная вероятность отказа в обслуживании**

$$P_{\text{отк}}(t) = \sum_{j=K-q+1}^K P_{Kj}(t).$$

Может быть получено **распределение виртуального времени ожидания заявкой обслуживания** $W(\tau, t) = P\{t_{\text{ож}}(t) < \tau\}$, позволяющее характеризовать качество обслуживания рассматриваемой СМО. Поступившая в систему заявка вынуждена ожидать обслуживания в случае, если все каналы заняты обслуживанием заявок, поступивших ранее. Существует вероятность $P_{w=0}(t)$ немедленного обслуживания поступившей заявки при наличии свободного канала (или нескольких свободных каналов)

$$P_{w=0}(t) = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{K-1} P_{ij}(t), \quad P_{ij}(t) \equiv 0, \text{ если } S_{ij} \notin \mathbf{S}.$$

С учётом возможности отказа искомая величина функции распределения $W(\tau, t)$ определится как

$$W(\tau, t) = \frac{1}{1 - P_{\text{отк}}(t)} \left(P_{w=0}(t) + \sum_{i=N}^{K-1} \sum_{j=0}^{K-1} W(\tau, t | (i, j)) P_{ij}(t) \right),$$

$$P_{ij}(t) \equiv 0, \text{ если } S_{ij} \notin \mathbf{S}.$$

Здесь $W(\tau, t | (i, j))$ – условная функция распределения времени ожидания некоторой заявки при условии, что в момент своего поступления t она застала СМО в состоянии ij .

В рассматриваемой СМО длительность ожидания обслуживания входящей заявкой зависит не только от числа заявок, уже находящихся в СМО, но и от распределения каналов между групповым и индивидуальным обслуживанием имеющихся заявок. Если бы взаимопомощи между каналами не существовало, то рассматриваемая СМО представляла бы собой традиционную СМО с ожиданием в очереди ограниченной длины, для которой общее время ожидания начала обслуживания заявкой, заставшей в момент поступления m других заявок в очереди, имело бы распределение Эрланга $E_{m+1}^{N\mu(t)}(x)$ [2]. Здесь верхний индекс содержит интенсивность обслуживания заявок всеми N каналами, действующими при наличии очереди; нижний индекс – порядок распределения по закону Эрланга. В рассматриваемой здесь СМО описанный закон справедлив только в отношении заявок, вошедших в СМО в состояниях, когда заняты все каналы, причём все они обслуживают по одной заявке. Для этих состояний можно записать

$$(12) W(\tau, t | (N + m, N + m)) = E_{m+1}^{N\mu(t)}(\tau).$$

Обозначим как $E_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}^{y_1, y_2, \dots, y_n}(x)$ функцию распределения обобщённого закона Эрланга, имеющего порядок $\sum_{i=1}^n \alpha_i - 1$, где α_i – число случайных величин, распределённых по показательному закону с параметром y_i . Запишем выражения для функции распределения времени ожидания в других состояниях. С этой целью введём, вместо двух-, трёхиндексную систему обозначений, в которой состояние СМО в произвольный момент времени характеризуется тремя параметрами: числом занятых каналов n

$(n = 0, 1, \dots, N)$, числом заявок, обслуживаемых k ($k = 0, 1, \dots, K$) и ожидающих обслуживания m ($m = 0, 1, \dots, K - N$). Связи между системами обозначений выражают зависимости:

$$i = n + m, \quad j = k + m;$$

$$\begin{cases} n = i, \quad m = 0, \quad k = j, & \text{если } i \leq N \\ n = N, \quad m = i - j, \quad k = j - i + N, & \text{если } i > N. \end{cases}$$

Описываемую формулой (12) условную функцию распределения времени ожидания в состоянии, когда заняты все каналы, обслуживающие по одной заявке, и при этом m заявок находятся в очереди, с использованием трёх символов можно обозначить как $W(\tau, t | (n, k, m)) = W(\tau, t | (N, N, m)) = E_{m+1}^{N\mu_1(t)}(\tau)$.

Далее в качестве примера приведём выражения для функции распределения времени ожидания в трёх первых состояниях полной занятости каналов:

– к моменту входа заявки очереди нет, однако все каналы заняты:

$$W(\tau, t | (n, k, m)) =$$

$$= W(\tau, t | (N, N - g, 0)) = E_1^{H(N, N-g)}(\tau), \quad g = 0, 1, \dots, q,$$

где $H_{ij} = k_{ij_1}\mu_1(t) + k_{ij_2}\mu_2(t)$;

– к моменту входа заявки в очереди находится одна заявка:

$$W(\tau, t | (n, k, m)) = W(\tau, t | (N, N - g, 1)) =$$

$$= \frac{k_{ij_2}\mu_2(t)}{H_{(N), (N-g)}} E_1^{H(N, N-g)}(\tau) + \frac{k_{ij_1}\mu_1(t)}{H_{(N), (N-g)}} E_2^{H(N, N-g)}(\tau);$$

– к моменту входа заявки в очереди находятся две заявки:

$$W(\tau, t | (n, k, m)) = W(\tau, t | (N, N - g, 2)) =$$

$$= \frac{k_{ij_2}\mu_2(t)}{H_{(N), (N-g)}} E_{1,1}^{H(N, N-g), H(N, N-g+1)}(\tau) +$$

$$+ \frac{k_{ij_1}\mu_1(t)}{H_{(N), (N-g)}} \left[\frac{k_{ij_2}\mu_2(t)}{H_{(N), (N-g)}} E_2^{H(N, N-g)}(\tau) + \frac{k_{ij_1}\mu_1(t)}{H_{(N), (N-g)}} E_3^{H(N, N-g)}(\tau) \right].$$

По аналогии записываются выражения и для последующих состояний. С ростом значения параметра m вид выражений усложняется, что не мешает их программной реализации.

Среднее виртуальное время ожидания заявки $T_{ож}(t)$ определяется численно как

$$T_{ож}(t) = \int_0^{\infty} \tau dW(\tau, t).$$

Распределение виртуального времени обслуживания произвольно выбранной заявки $t_{обсл}(t)$ определяется следующим образом. Поскольку изменение $t_{обсл}(t)$ в рассматриваемой СМО является случайным процессом, представляющим собой смесь двух показательно распределённых случайных процессов $t_{обсл1}(t)$ и $t_{обсл2}(t)$, то распределение $V(\tau, t) = P\{t_{обсл}(t) < \tau\}$ не будет показательным. С учётом возможности отказа выражение для функции распределения $V(\tau, t)$ запишется в виде

$$V(\tau, t) = \frac{1}{1 - P_{отк}(t)} \left(\sum_{i=N}^{K-1} \sum_{j=0}^{K-1} V(\tau, t | (i, j)) P_{ij}(t) \right),$$

$$P_{ij}(t) \equiv 0, \text{ если } S_{ij} \notin S.$$

Здесь $V(\tau, t | (i, j))$ – условная функция распределения времени обслуживания некоторой заявки при условии, что в момент своего поступления она застала СМО в состоянии ij .

Если в момент начала обслуживания заявки СМО находится в состоянии, при котором возможно как групповое, так и индивидуальное обслуживание, то время обслуживания представляет собой смесь двух продолжительностей $t_{обсл1}(t)$ и $t_{обсл2}(t)$, распределённых показательно с параметрами $\mu_1(t)$ и $\mu_2(t)$, соответственно. Если же в этот момент нет возможности выделения двух каналов, то время обслуживания заявки распределено показательно с параметром $\mu_1(t)$. При подходе заявки к обслуживающим каналам в состоянии S_{ij} , переход к индивидуальному обслуживанию допустим при наличии возможности состояния $S_{(i+1)(j+1)}$, переход к групповому обслуживанию – при наличии возможности состояния $S_{(i+2)(j+1)}$ (рис.2). Таким образом, имеем:

$$V(\tau, t | (i, j)) = \begin{cases} 1 - e^{-\mu_1(t)\tau}, & \text{если } \begin{cases} S_{(i+1)(j+1)} \in \mathbf{S}, \\ S_{(i+2)(j+1)} \notin \mathbf{S}, \end{cases} \\ v_1(1 - e^{-\mu_1(t)\tau}) + \\ + v_2(1 - e^{-\mu_2(t)\tau}), & \text{если } \begin{cases} S_{(i+1)(j+1)} \in \mathbf{S}, \\ S_{(i+2)(j+1)} \in \mathbf{S}, \end{cases} \end{cases} \quad \begin{cases} i = 0, 1, \dots, N-1, \\ j = 0, 1, \dots, N-1. \end{cases}$$

Поскольку, при отсутствии двух свободных каналов, любая заявка обслуживается одним каналом, то фактическая вероятность $v_1^\Phi(t)$ выделения одного канала будет больше заданной $v_1(t)$. Функция $v_1^\Phi(t)$ определяется как

$$v_1^\Phi(t) = \frac{1}{1 - P_{\text{отк}}(t)} \left(\sum_{i=N}^{K-1} \sum_{j=0}^{K-1} v_1(i, j) P_{ij}(t) \right),$$

$$P_{ij}(t) \equiv 0, \text{ если } S_{ij} \notin \mathbf{S}.$$

Здесь $v_1(i, j)$ – вероятность выделения одного аппарата для обслуживания заявки, поступившей в СМО в состоянии ij :

$$v_1(i, j) = \begin{cases} 1, & S_{(i+1)(j+1)} \in \mathbf{S}, S_{(i+2)(j+1)} \notin \mathbf{S}, \\ v_1, & S_{(i+1)(j+1)} \in \mathbf{S}, S_{(i+2)(j+1)} \in \mathbf{S}, \end{cases} \quad \begin{cases} i = 0, 1, \dots, K-1, \\ j = 0, 1, \dots, K-1. \end{cases}$$

Средняя виртуальная продолжительность обслуживания заявки, вошедшей в СМО в момент t , может быть определена через $v_1^\Phi(t)$ как

$$T_{\text{обсл}}(t) = v_1^\Phi(t) T_{\text{обсл}_1}(t) + [1 - v_1^\Phi(t)] T_{\text{обсл}_2}(t).$$

Распределение виртуального времени пребывания заявки в СМО $U(\tau, t) = P\{t_{\text{преб}}(t) < \tau\}$ определяется с использованием полученных ранее выражений для функций распределения времени ожидания и времени обслуживания как

$$U(\tau, t) = \frac{1}{1 - P_{\text{отк}}(t)} \left(\sum_{i=N}^{K-1} \sum_{j=0}^{K-1} U(\tau, t | (i, j)) P_{ij}(t) \right),$$

$$P_{ij}(t) \equiv 0, \text{ если } S_{ij} \notin \mathbf{S}.$$

Здесь $U(\tau, t | (i, j))$ – условная функция распределения времени пребывания в СМО некоторой заявки при условии, что в момент своего поступления t она застало систему в состоянии ij .

Для состояний со свободными каналами время пребывания в СМО совпадает со временем обслуживания:

$$U(\tau, t|(i, j)) = \begin{cases} 1 - e^{-\mu_1(t)\tau}, & \text{если } \begin{cases} S_{(i+1)(j+1)} \in \mathbf{S}, \\ S_{(i+2)(j+1)} \notin \mathbf{S}, \end{cases} \\ v_1(1 - e^{-\mu_1(t)\tau}) + v_2(1 - e^{-\mu_2(t)\tau}), & \text{если } \begin{cases} S_{(i+1)(j+1)} \in \mathbf{S}, \\ S_{(i+2)(j+1)} \in \mathbf{S}, \end{cases} \end{cases} \begin{cases} i = 0, 1, \dots, N-1, \\ j = 0, 1, \dots, N-1. \end{cases}$$

Для других состояний формулы условной функции распределения записываются по аналогии с формулами для $W(\tau, t|(n, k, m))$ с использованием трёхсимвольной индексации. Ниже они приведены для трёх первых состояний полной занятости каналов:

- к моменту входа заявки очереди нет, все каналы заняты:

$$U(\tau, t|(n, k, m)) = U(\tau, t|(N, N-g, 0)) = E_{1,1}^{\mu_1(t), H_{(N),(N-g)}}(\tau), \quad g = 0, 1, \dots, q;$$

- к моменту входа заявки в очереди находится одна заявка:

$$U(\tau, t|(n, k, m)) = U(\tau, t|(N, N-g, 1)) = \frac{k_{ij_2}\mu_2(t)}{H_{(N),(N-g)}} E_{1,1}^{\mu_1(t), H_{(N),(N-g)}}(\tau) + \frac{k_{ij_1}\mu_1(t)}{H_{(N),(N-g)}} E_{1,2}^{\mu_1(t), H_{(N),(N-g)}}(\tau);$$

- к моменту входа заявки в очереди находятся две заявки:

$$U(\tau, t|(n, k, m)) = U(\tau, t|(N, N-g, 2)) = \frac{k_{ij_2}\mu_2(t)}{H_{(N),(N-g)}} E_{1,1,1}^{\mu_1(t), H_{(N),(N-g)}, H_{(N),(N-g+1)}}(\tau) + \frac{k_{ij_1}\mu_1(t)}{H_{(N),(N-g)}} \left[\frac{k_{ij_2}\mu_2(t)}{H_{(N),(N-g)}} E_{1,2}^{\mu_1(t), H_{(N),(N-g)}}(\tau) + \frac{k_{ij_1}\mu_1(t)}{H_{(N),(N-g)}} E_{1,3}^{\mu_1(t), H_{(N),(N-g)}}(\tau) \right].$$

Таким образом, получены все вероятностно-временные характеристики, необходимые для решения сформулированных выше оптимизационных задач.

5. Примеры решения задач параметрической оптимизации СМО

Рассматриваются результаты решения задач параметрической оптимизации системы обслуживания перевозок узлового аэропорта при выполнении одной технологической операции. Интервал между комплексами принят достаточно продолжительным для того, чтобы комплексы могли считаться независимыми, $T_B = 12$ ч. Остальные исходные данные, сгруппированные в три совокупности, приняты следующими:

– характеристики потока заявок в течение комплекса:

$$T_1 = T_2 = 60 \text{ мин.}, \lambda^{max} = 20 \text{ ВС/ч.}, \lambda^{min} = 5 \text{ ВС/ч.};$$

– характеристики обслуживания: $T_1' = T_3' = 30$ мин.,

$$T_2' = 30 \text{ мин.}, T_{обсл1}^{min} = 13,5 \text{ мин.}, T_{обсл1}^{max} = 16,5 \text{ мин.}, T_{обсл1}^{mid} = 15 \text{ мин.},$$

$$\theta = 1,9, K = 30, N_{min} = 4, N_{max} = 7;$$

– характеристики качества обслуживания и использования

$$\text{ресурсов: } t_{ож P} = 5 \text{ мин.}, P_{ож P} = 0,95, t_{преб P} = 2T_{обсл1}^{mid} = 30 \text{ мин.},$$

$$P_{преб P} = 0,85, K_{з P} = 0,3, P_{отк P} = 0,001.$$

Все принятые значения соответствуют расписанию регионального хаба и аэропортовым нормам обслуживания перевозок. Расчётный коэффициент занятости каналов принят сравнительно малым, поскольку невысокая загрузка каналов позволяет обеспечить более высокое качество обслуживания, сократив время ожидания в очереди. Вероятность отказа в обслуживании с учётом специфики исследуемой системы задана весьма малой. Графики зависимостей $\lambda(t)$ и $T_{обсл1}(t)$, построенные на интервале времени продолжительностью 3 ч., отмеряемом от момента начала комплекса, в качестве иллюстрации приведены на рис. 3.

Результаты решения обеих задач оптимизации в виде графиков зависимостей $N(t)$, $T_{преб}(t)$, $v_1(t)$, $P\{t_{ож}(t) < t_{ож P}\}$, $K_3(t)$ и $P\{t_{преб}(t) < t_{преб P}\}$, построенных на указанном интервале, приведены на рис. 4а–4е. Штриховыми линиями на рисунках отображён уровень ограничений. Как видно из рисунков, выбранная продолжительность интервала достаточна для того, чтобы в рассматриваемой СМО установился режим, характеристики

которого мало отличаются от стационарных.

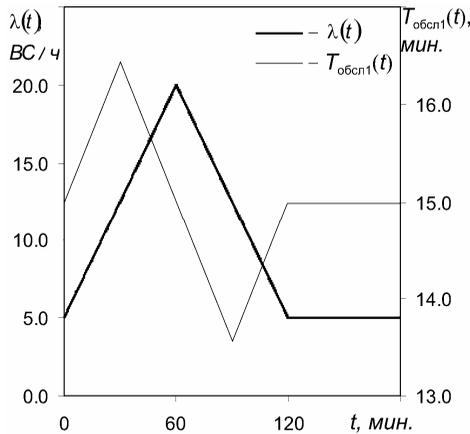


Рис. 3. Графики зависимостей $\lambda(t)$ и $T_{обсл1}(t)$

Сравнение графиков на рис. 4а позволяет сделать вывод о существенной экономии потребного числа каналов, достигаемой в результате решения задачи А. Так, время, в течение которого предполагается использование всех семи доступных системе каналов, для задачи А составляет около 57 мин. Аналогичный показатель для задачи Б значительно выше – около 100 мин. Таким образом, оптимизация численности обслуживающих каналов позволяет почти в два раза сократить время, в течение которого требуется задействовать максимальное число каналов.

Сокращение числа каналов достигается ценой роста времени пребывания заявки в системе. Сравнение результатов решения задач А и Б, приводимых на рис. 4б, говорит о том, что в первом случае наблюдаются семь временных интервалов, а во втором – только один интервал, в течение которых среднее виртуальное время пребывания заявки в системе превышает 11 мин. Суммарная продолжительность таких интервалов в задаче А составляет 54 мин., в задаче Б – лишь 19 мин.

Объяснить всплески среднего виртуального времени пребывания в системе в течение указанных интервалов позволяет

сопоставление рис. 4б, 4в, а также рис. 4г и 4е. Как видно из перечисленных рисунков, рассматриваемым всплескам величины $T_{\text{преб}}(t)$ соответствуют резкие колебания всех остальных параметров СМО. Рассмотрим природу всплесков на примере первого из них в результатах задачи А. На начальном этапе комплекса, когда минимального числа каналов $N_{\text{min}} = 4$ более чем достаточно для выполнения всех ограничений задачи А, оптимизирующий алгоритм, «стремясь» уменьшить значения $T_{\text{преб}}(t)$, «определяет» всем поступающим заявкам обслуживание с использованием двух каналов. На рис. 4в этому этапу соответствует краткий начальный интервал времени длительностью около 10 мин. с $v_1 = 0$.

Затем, с ростом интенсивности потока заявок и снижением интенсивности их обслуживания, минимального числа каналов, выделяемых попарно, становится недостаточно для обеспечения ограничения по времени ожидания (5). Алгоритм реагирует на это увеличением доли заявок, обслуживаемых индивидуально. Этот этап отражён на рисунках следующим образом. На рис. 4в отчётливо различим первый «скачок» величины $v_1(t)$ до значения $v_1 \approx 1$. На рис. 4г этапу соответствует участок постоянства величины $P\{t_{\text{ож}}(t) < t_{\text{ож P}}\}$ на уровне ограничения $P\{t_{\text{ож}}(t) < t_{\text{ож P}}\} > 0,95$. На рис. 4б и 4е отображены колебания, соответствующие резкому росту $T_{\text{преб}}(t)$. Когда имеющегося числа каналов при любом $v_1(t)$ становится недостаточно для выполнения одного из ограничений, алгоритм вводит в СМО ещё один канал. На рисунках это проявляется в виде резкого падения значений $v_1(t)$, $T_{\text{преб}}(t)$ и такого же резкого повышения вероятностей $P\{t_{\text{ож}}(t) < t_{\text{ож P}}\}$, $P\{t_{\text{преб}}(t) < t_{\text{преб P}}\}$. Описанный процесс предваряет каждое увеличение числа $N(t)$. На завершающем этапе комплекса при снижении $\lambda(t)$ похожий процесс в обратном порядке воспроизводится перед каждым уменьшением числа $N(t)$.

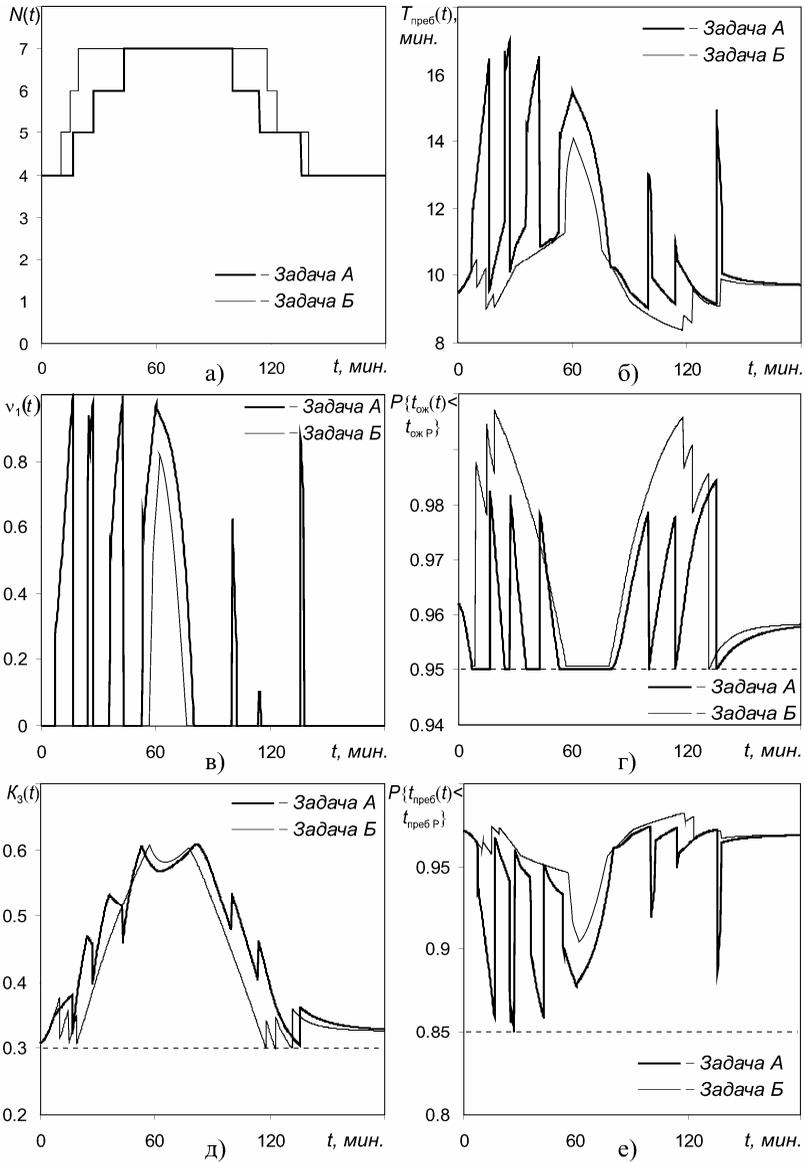


Рис. 4. Результаты решения задач оптимизации А и Б

Отметим, что интервалы всплесков на этапе роста интенсивности потока заявок имеют значительно большую продолжительность (в рассматриваемом примере от 3 до 10 мин.), чем на этапе её снижения (не более 2 мин.). Наибольшей продолжительностью (27 мин.) характеризуется всплеск во время пикового уровня интенсивности потока

Единственный всплеск $T_{\text{преб}}(t)$ в результатах задачи Б объясняется выходом процесса на ограничение по времени ожидания в очереди. Поскольку при $N(t) = N_{\text{max}}$ и значениях интенсивности потока заявок, близких к λ_{max} , обслуживание каждой заявки парой каналов не обеспечивает его требуемого качества, а введение дополнительных каналов невозможно, то оптимизирующий алгоритм реагирует на это увеличением $v_1(t)$ с соответствующим ростом $T_{\text{преб}}(t)$. Если бы возможность управления величиной $v_1(t)$ отсутствовала, то имеющимся числом средств обеспечить обслуживание заданного потока заявок при заданных требованиях к качеству обслуживания было бы нельзя.

Как и следовало ожидать, решение задачи А приводит к несколько большей загрузке каналов, по сравнению с задачей Б (см. рис. 4д). В целом уровень загрузки может считаться удовлетворительным, а различия в загрузке для обеих задач несущественными.

Полученные результаты позволяют сформулировать следующие рекомендации в адрес производственных подразделений аэропорта:

– в случае устойчиво повторяющихся колебаний интенсивности прилётов и вылетов представляется целесообразным выработать определённую программу управления численностью обслуживающих средств и персонала и их перераспределением как между различными операциями, так и между индивидуальным и групповым обслуживанием в пределах одной операции;

– управление перераспределением средств между индивидуальным и групповым обслуживанием позволит эффективно влиять как на потребную численность средств, так и на временные характеристики процесса технического и коммерческого обслуживания ВС в аэропорту;

– если приоритетной целью аэропорта является сокращение времени простоя ВС на техническом и коммерческом обслуживании, то представляется целесообразным максимально возможное число ВС обслуживать группами из двух средств. Выбор указанной цели требует от аэропорта повышения общей численности средств, что неизбежно влечёт снижение качества их использования между максимумами интенсивности комплексов. Ограничить увеличение численности средств можно применив во время пиков интенсивности управление, предполагающее повышение доли индивидуально обслуживаемых ВС;

– если приоритетной целью аэропорта является сокращение мгновенной численности используемых средств и персонала с ограничением времени простоя ВС, то программа управления должна быть более сложной. Между комплексами для обслуживания ВС средства желательно выделять попарно. На начальном этапе комплекса, предполагающем рост интенсивности потока ВС, введению «в дело» каждого дополнительного средства должен предшествовать сравнительно короткий (5–15 мин.) период, когда для обслуживания вновь прибывших ВС средства выделяются не парами, а индивидуально. Для конечного этапа комплекса с наблюдающимся снижением интенсивности зафиксировать краткосрочные интервалы с высокой долей индивидуального обслуживания на практике вряд ли возможно, поэтому здесь целесообразно использовать только групповое обслуживание. Во время пиков интенсивности рационально применять управление, предполагающее повышение доли индивидуально обслуживаемых ВС.

Приведённые результаты не только подтверждают правомерность постановки сформулированных оптимизационных задач и работоспособность алгоритма их решения, но и позволяют сформировать практические рекомендации по повышению эффективности управления ресурсами для такой перспективной группы аэропортов, как хабы с их нестационарными потоками рейсов и колеблющейся интенсивностью обслуживания.

Литература

1. АНДРОНОВ А.М. *Теория массового обслуживания и научная организация труда в гражданской авиации*. – М.: РИО МГА СССР, 1969. – 118 с.
2. БОЧАРОВ П.П., ПЕЧИНКИН А.В. *Теория массового обслуживания*. – М.: Изд-во РУДН, 1995. – 529 с.
3. ГОЛУБЕВ И.С. *Эффективность воздушного транспорта*. – М.: Транспорт, 1982. – 230 с.
4. РОМАНЕНКО В.А. *Математические модели функционирования узловых аэропортов в условиях современного авиатранспортного рынка*. – Самара: Изд-во «Ас Гард», 2010. – 224 с.
5. *Руководство по экономике аэропортов*. Документ ИКАО 9562. Второе издание. – Монреаль, 2006.
6. ABDELHANY A., ABDELHANY K., NARASIMHA R. *Scheduling baggage-handling facilities in congested airports // Journal of Air Transport Management*. – 2006. – №12. – P. 76–81.
7. ANDERSSON K., CARR F., FERON E., HALL W. D. *Analysis and modeling of ground operations at hub airports // 3-rd USA/Europe Air Traffic Management R&D Seminar, Napoli, 13–16 June 2000*.
8. BERTSIMAS D.J., ODONI A.R., PETERSON M.D. *Models and algorithms for queueing congestion at airports // Management Science*. – 1995. – №41. – P. 1279–1295.
9. BOOTSMA P.D. *Airline flight schedule development; analysis and design tools for European hinterland hubs*. – Utrecht: University of Twente, 1997.
10. BURGHOUWT G., DE WIT J. *Temporal configuration of European airline networks // Journal of Air Transport Management*. – 2005. – №11. – P. 185–198.
11. CHINNUSAMY P., HAFIZOGULLARI S., TUNASAR C. *Simulation reduces airline misconnections: a case study // Proceedings of the 2002 Winter Simulation Conference*. P. 1192–1198

12. FERNANDEZ DE LA VEGA M.E. *Approximate solution for multi-server queueing systems with Erlangian service times and an application to air traffic management*. PhD thesis. – Massachusetts Institute of Technology, 1998. – 213 p.
13. FRANK M., MEDERER M., STOLZ B., HANSCHKE T. *Depeaking – economic optimization of air traffic systems // Aerospace Science and Technology*. – 2007. – №9(8). – P. 738–744.
14. HORANGIC B.R. *Some queueing models of airport delays*. PhD thesis. – Massachusetts Institute of Technology. 1990. – 97 p.
15. JOSEPH D. *Congestion pricing and capacity of large hub airports: a bottleneck model with stochastic queues // Econometrika* – 1995. – №63. – P. 327–370.
16. KEMPPAINEN K., NIEMINEN J., VEPSALAINEN A.P.J. *Estimating the cost of airport congestion to fast connections // Journal of Air Transport Management*. – 2007. – Vol. 13, Issue 4. – P. 169–174.
17. LEE A.M., LONGTON P.A. *Queueing processes associated with airline passenger check-in // Operational research quart.* – 1959. – Vol. 10, №1. – P. 56–71.
18. SHERRY L., SHORTLE J.F. *The Relationship between rationalized schedules and reduced arrival variability // American Institute of Aeronautics and Astronautics: 10th AIAA Aviation Technology, Integration, and Operations (ATIO) Conference*, Sept. 2010.

OPTIMIZING TECHNOLOGICAL PROCESS CONTROL OF HUB AIRPORT AS QUEUEING SYSTEM WITH NON-STATIONARY FLOWS AND PARTIAL MUTUAL ASSISTANCE BETWEEN CHANNELS

Vladimir Romanenko, Samara State Aerospace University named after academician S.P.Korolyov (National Research University), Samara, Cand.Sci., associate professor, the person working for doctor's degree (vla_rom@mail.ru).

Abstract: We set and solve the problems of optimal control program formation for a transportation service system in a hub airport treated as a queuing system with non-stationary flows and partial mutual assistance between channels. Policy recommendations are formulated for production units of hub airports.

Keywords: optimal control, queuing system, hub airport.

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии В. В. Клочковым*

УДК 517.9, 004.032

ББК 78.34

НЕЙРОСЕТЕВОЙ ПОДХОД К РАЗРАБОТКЕ ПРОГНОЗИРУЮЩИХ МОДЕЛЕЙ В СИСТЕМАХ УПРАВЛЕНИЯ ПРОЦЕССАМИ БИОСОРБЦИИ СЕРЕБРА

Салихов З. Г.¹, Стрижко Л. С.², Новаковская А. О.³
(Московский институт стали и сплавов, Москва)

В работе рассматриваются особенности управления процессами извлечения серебра из вторичных растворов, основанными на отходах производства фармацевтической промышленности – биосорбентов. Математические модели, с помощью которых осуществляется прогноз состояний объекта управления, представлены в виде нейронов многослойной многовыходовой нейросети, в которой переключение путей следования между слоями подчинено логическим правилам переключения технологических агрегатов. При этом предусматривается, что конкретные начальные условия задачи Коши присущи каждой точке переключения.

Ключевые слова: автоматизация, технические процессы, производство.

1. Основная часть

Современные условия экономической деятельности предприятий определили необходимость применения новых недорогих типов сорбентов, позволяющих значительно сократить

¹ Зуфар Гарифуллович Салихов, доктор технических наук, профессор, (ec.misis@mail.ru).

² Леонид Семенович Стрижко, доктор технических наук, профессор, (sls_2007.47@mail.ru).

³ Анна Олеговна Новаковская, аспирант, (my_anna@mail.ru).

себестоимость процесса извлечения серебра из вторичных растворов. К таким материалам относятся отходы производства антибиотиков, антагонистичные серебру, которые применяются в качестве биологических сорбентов. Актуальной является разработка системы управления, позволяющей эффективно использовать биосорбенты во вторичной металлургии. Целью настоящей работы является разработка основных положений системы управления технологической линией извлечения серебра из вторичных растворов.

На сегодняшний день более 60% серебра извлекается из вторичных видов сырья. Традиционно для извлечения серебра из вторичных растворов использовались специально изготовленные сорбенты – смолы, селективные по отношению к серебру. Стоимость этих сорбентов достигает 2,5–3 тысяч долларов за тонну. При этом каждая партия использованной смолы рассчитана на 8–10 циклов поглощения–извлечения (сорбция и десорбция) серебра. При такой стоимости и условиях использования смол извлечение серебра из вторичных растворов становится экономически неэффективным, так как себестоимость получения серебра выше цены его реализации. В последние годы распространение получили биологические сорбенты [2], представляющие собой отходы производства антибиотиков. Биосорбенты содержат остаточные культуры плесени, которые являются природными антагонистами серебру и способны активно поглощать серебро из вторичных растворов. Стоимость таких материалов составляет 40–60 долларов за тонну. Использование биосорбентов в процессах извлечения серебра из растворов потребовало системных решений, которые позволяли бы сократить себестоимость производства серебра за счет наиболее эффективного использования свойств сорбирующих материалов. Системный анализ процессов, протекающих в биосорбентах, показал, что в зависимости от вида плесневой культуры, сорбирующий материал может воспринимать и усваивать серебро в течение 2–3 часов. При этом серебро в гранулах сорбента находится в виде органических соединений. Прекращение подачи раствора в колонну, содержащую биосорбент, на 6–8 часов

приводит к тому, что усвоенное серебро металлизировано. При этом в течение указанного времени способность биосорбента усваивать серебро восстанавливается на 80–90%. При каждом последующем рецикле (сорбция – технологическая пауза) способность биосорбента усваивать серебро уменьшается на 10–20%. Из этого следует, что, в зависимости от вида плесневой культуры, биосорбент экономически целесообразно использовать до тех пор, пока способность усваивать серебро не снизится до 50% от первоначальной. После осуществленной серии рециклов производится извлечение серебра из гранул биосорбента – десорбция. Анализ физико-химических и биохимических особенностей описываемого процесса позволил принять гипотезу о том, что плесневая культура содержит два типа клеток. Первый тип клеток – материнский – способен выращивать семенной материал (споры), который развивается в восстанавливаемую биологическую популяцию. Второй тип клеток содержит активные центры, антагонистичные серебру, способные усваивать его из растворов. Составная часть рецикла – технологическая пауза – соответствует росту восстанавливаемой плесневой популяции. Уменьшение способности плесневой культуры поглощать серебро от рецикла к рециклу может рассматриваться как затухание биологической популяции, основные положения которой описаны уравнениями Лотки–Вольтерра.

Исходя из вышеизложенного, для прогнозирования состояний объекта управления – колонн, содержащих биосорбент, через которые протекает вторичный серебряносодержащий раствор с примесями, разработаны математические модели процесса биосорбции [3], восстановления биологической популяции [1], десорбции [4].

2. Уравнения процесса биосорбции

Уравнения, характеризующие основные показатели процесса биосорбции, представлены в виде блоков.

Блок изменения количества исходных веществ в циркулирующем растворе представлен уравнениями

$$(1) \frac{dG^{Ag^+}}{dt} = \beta_2 F_2 \gamma_2 ([Ag^+]_2 - [Ag^+]_3) - g_1^{Ag^+} - g_2^{Ag^+} - g_3^{Ag^+},$$

$$(2) \frac{dG^{AgNO_3}}{dt} = \beta_2 F_2 \gamma_2 ([AgNO_3]_2 - [AgNO_3]_3) - \chi_3^4 g_3^{Ag^+},$$

где $\frac{dG^{Ag^+}}{dt}$ – скорость изменения количества Ag^+ , кг/с; β – коэффициент массопереноса между зонами, м/с, параметр; F – площадь поверхности контакта зон, м²; γ_2 – плотность зоны, кг/м³; $[Ag^+]$ – весовые концентрации катионов серебра в зонах; g^{Ag^+} – скорость усвоения катионов серебра в реакциях (1)–(3), г/с.

Блок изменения количества активных центров биосорбентов представлен уравнениями вида

$$(3) \frac{dG^{RCOOH}}{dt} = -\chi_1^3 g_1^{Ag^+},$$

где χ_j^i – коэффициенты стехиометрии компонент в реакциях; i – номер компоненты, $i = 1, 2, 3$; j – номер реакции, $j = 1, 2, 3$.

Расчет количества серебра, усваиваемого сорбентом в реакциях:

$$(4) g_1^{Ag^*} = k_1 g_{np}^{Ag^+} e^{-\frac{E_1}{RT}}.$$

Расчет концентраций компонент в третьей зоне:

$$(5) [Ag^+]_3(\tau_i) = [Ag^+]_3(\tau_{i-1}) + \frac{1}{G_3(\tau_i)} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \frac{dG_3^{Ag^+}(\tau_{i-1})}{dt} d\tau.$$

Плотность и вес зон рассчитывается следующим образом:

$$(6) \gamma(\tau_i) = \gamma_{Ag^+} [Ag^+]_3(\tau_i) + \gamma_{NO_3^-} [NO_3^-]_3(\tau_i) + \gamma_{H^+} [H^+]_3(\tau_i) + \gamma_{RCOOAg} [RCOOAg]_3(\tau_i),$$

$$(7) G(\tau_i) = \gamma_3(\tau_i) \cdot V_3.$$

Общее количество серебра, усвоенного сорбентом в колонне, рассчитывается по формуле

$$(8) G^{Ag^+} = N \cdot G_{i,j}^{Ag^+},$$

где N – количество гранул.

В общем случае система обыкновенных дифференциальных уравнений, составляющая математическую модель процесса, после подстановки нелинейностей из расчета правых частей, зафиксированных в численной процедуре метода Рунге–Кутта, описывается нелинейными уравнениями общего вида:

$$\begin{aligned} \frac{dG_3^{Ag^+}}{dt} &= \beta_2 F_2 \gamma_2 ([Ag^+]_2 - [Ag^+]_3) - g_1^{Ag^+} - g_2^{Ag^+} - g_3^{Ag^+} = \\ &= \beta_2 F_2 \left(\gamma_{Ag^+} [Ag^+]_2 + \gamma_{NO_3^-} [NO_3^-]_2 + \gamma_{H^+} [H^+]_2 + \gamma_{OH^-} [OH^-]_2 \right) \times \\ &\times \left([Ag^+]_2 - [Ag^+]_3 \right) - k_1 g_{np}^{Ag^+} e^{-\frac{E_1}{RT}} - k_2 g_{np}^{Ag^+} e^{-\frac{E_2}{RT}} - k_3 g_{np}^{Ag^+} e^{-\frac{E_3}{RT}} = \\ &= \beta_2 F_2 \left(\gamma_{Ag^+} \left([Ag^+]_2 + \frac{1}{\gamma_2 V_2} \int \frac{dG_2^{Ag^+}}{dt} d\tau \right) + \right. \\ &\quad \left. + \gamma_{NO_3^-} \left([NO_3^-]_2 + \frac{1}{\gamma_2 V_2} \int \frac{dG_2^{NO_3^-}}{dt} d\tau \right) + \right. \\ &\quad \left. + \gamma_{H^+} \left([H^+]_2 + \frac{1}{\gamma_2 V_2} \int \frac{dG_2^{H^+}}{dt} d\tau \right) + \right. \\ &\quad \left. + \gamma_{OH^-} \left([OH^-]_2 + \frac{1}{\gamma_2 V_2} \int \frac{dG_2^{OH^-}}{dt} d\tau \right) \right) \times \\ &\times \left([Ag^+]_2 + \frac{1}{\gamma_2 V_2} \int \frac{dG_2^{Ag^+}}{dt} d\tau - [Ag^+]_3 + \frac{1}{\gamma_3 V_3} \int \frac{dG_3^{Ag^+}}{dt} d\tau \right) - \\ &- k_1 g_{np}^{Ag^+} e^{-\frac{E_1}{RT}} - k_2 g_{np}^{Ag^+} e^{-\frac{E_2}{RT}} - k_3 g_{np}^{Ag^+} e^{-\frac{E_3}{RT}}. \end{aligned}$$

Модель, с помощью которой осуществляется прогноз процесса биосорбции, состоит из системы, содержащей 17 обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих состояние процессов, протекающих в технологическом агрегате – колонне. Решение этой системы уравнений осуществляется методом Рунге–Кутта–Гилла четвертого порядка в пакете *MATLAB*. При этом расчет нелинейностей правых частей диф-

ференциальных уравнений типа (5) вынесен в отдельный блок. Параметрическая идентификация модели-структуры осуществляется методом Ньютона–Рафсона, при этом расчет приращений (оценок частных производных) осуществляется по экспериментальным данным [1] с помощью метода двух моделей и метода чувствительности. Расчет поверхности гранул плесневой культуры (биосорбента) осуществляется по биномиальному закону распределения.

Технологически процесс биосорбции осуществляется в последовательно соединенной серии колонн, установленных с понижением уровня каждой последующей, через которые серебро содержащий раствор протекает самотеком.

Представленная математическая модель используется для прогнозирования кинетики процесса в каждой последующей колонне. При этом начальные условия задачи Коши соответствуют выходным показателям содержания серебра в растворе, выходящем из предыдущей колонны.

Аналогичным образом создана математическая модель восстановления активных свойств сорбента (регенерации технологических свойств) [1].

Уравнение роста активных центров:

$$(9) \quad \frac{dA_t}{dt} = r_n N_t \left(1 - \frac{P_t}{N_t} \right).$$

Уравнение роста центров размножения:

$$(10) \quad \frac{dP_t}{dt} = r_n N_t \left(1 - \frac{A_t}{N_t} \right),$$

$$(11) \quad r_n = k_4 \cdot e^{-\frac{E}{RT}},$$

где A_t – активные центры; P_t – центры размножения; N_t – количество центров плесневой культуры; r_n – скорость роста центров плесневой культуры, параметр.

Эта модель содержит восемь дифференциальных уравнений. Параметрическая идентификация и решение уравнений этой модели аналогичны методике решения уравнений модели сорбции.

Математическая модель извлечения серебра из биосорбента (десорбции), осуществляемая с помощью щелочных растворов, описывается уравнениями (12) и (13). Уравнение (12) показывает изменение количества десорбирующего раствора, а уравнение (13) – изменение количества сорбированного серебра.

$$(12) \frac{dG_1^{NH_4OH}}{dt} = g_{pr}^{NH_4OH} - \beta_1 F_1 \gamma_1 ([NH_4OH]_1 - [NH_4OH]_2),$$

где $\frac{dG_1^{NH_4OH}}{dt}$ – скорость изменения количества NH_4OH в 1 зоне,

кг/с; $g_{np}^{NH_4OH}$ – расход NH_4OH в циркулирующем растворе, кг/с;

β_1 – коэффициент массопереноса между 1 и 2 зонами, м/с, параметр; F_1 – площадь поверхности контакта зон, м²; γ_1 – плотность 1 зоны, кг/м³; $[NH_4OH]_1$, $[NH_4OH]_2$ – весовые концентрации NH_4OH в 1 и 2 зонах соответственно;

$$(13) \frac{dG_1^{[Ag(NH_3)_2]^+}}{dt} = \beta_1 F_1 \gamma_2 ([Ag(NH_3)_2]_1^+ - [Ag(NH_3)_2]_2^+).$$

Эта модель содержит четырнадцать обыкновенных дифференциальных уравнений с нелинейными правыми частями. Процедуры решения уравнений модели и параметрической идентификации аналогичны модели процесса биосорбции.

Таким образом, перечисленные модели дают возможность прогнозировать состояния объекта управления для всех трех составляющих технологического цикла. Состояния совокупности технологических агрегатов, соединенных в последовательно-параллельную схему, могут быть представлены многослойной многовходовой нейросетью [4], в которой каждый слой соответствует отдельно взятому технологическому агрегату – колонне. Каждый нейрон слоя отражает состояние компонент технологического процесса, протекающего в данной колонне.

Между слоями существуют взаимосвязи, определяемые прохождением серебрясодержащего раствора, протекающего от колонны к колонне, и десорбирующего раствора.

Для управления технологическим процессом предусмотрено два уровня. На нижнем уровне осуществляется управление

кинетикой процессов, протекающих в каждой колонне. На втором уровне предусмотрено дискретное управление режимами переключения в соответствии с составляющими технологического цикла. Переключающее управление подается в соответствующие узлы нейронов определенных слоев нейросети, т.е. управляет изменением состояний объекта управления и переключением последовательностью нейронов и слоев нейросети.

Нейрон каждого слоя отражает изменения характеристик (состояний) в конкретной колонне. Узлы нейронов соответствуют состояниям, рассчитанным по итеративным процедурам в фиксированные моменты времени технологического цикла. Связь между слоями (нейрон связи) осуществляется по траекториям, соответствующим оценке состояний раствора, перетекающего из колонны в колонну. Технологически процесс реализуется в девяти колоннах, установленных на четырех уровнях. Колонны каждого уровня установлены с таким расчетом, чтобы раствор перетекал из колонны в колонну. На первом уровне установлено три колонны, на остальных – по две колонны. Исходя из физико-химических особенностей процессов, протекающих на технологическом участке, содержащем девять разноразмерных колонн, схема перетекания раствора из колонны в колонну подчинена логическому условию

$$(14) \forall A_{ij} \exists C_k (G_{ij}^{Ag}): A_{ij} \wedge A_{lm} \wedge A_{ns}, A_{ij} \notin C_k \Rightarrow G_{ij}^{Ag} = G_{ip}^{Ag},$$

где A_{ij} – номер колонны; C_k – технологический цикл; G_{ij}^{Ag} – количество серебра, усвоенного колонной; G_{ip}^{Ag} – предельное значение серебра, усвоенного сорбентом; i – номер уровня, $i = 1, \dots, 4$, $l \in i$, $m \in j$, $s \in j$; j – номер колонны, $j = 1, \dots, 9$; k – номер цикла, $k = 1, \dots, 6$.

Циклограмма, характеризующая последовательность соединения колонн, соответствует матрице смежности (таблица 1). Эта матрица отражает технологические особенности длительности процессов сорбции, восстановления активных свойств сорбента и десорбции.

Таблица 1. Матрица смежности технологических циклов

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Технологи- ческий цикл
1	1	0	0	0	0	1	0	1	0	I цикл С1
2	0	1	0	0	0	1	0	1	0	
3	0	0	1	0	0	1	0	1	0	
4	0	0	0	1	0	0	1	1	0	
5	0	0	0	0	1	0	1	1	0	
1	1	0	0	0	0	0	1	1	0	II цикл С2
2	0	1	0	0	0	0	0	1	0	
3	0	0	1	0	0	1	0	1	0	
4	0	0	0	1	0	1	0	1	0	
5	0	0	0	0	1	1	0	1	0	
1	1	0	0	0	0	0	1	1	0	III цикл С3
2	0	1	0	0	0	0	1	1	0	
3	0	0	1	0	0	0	1	0	1	
4	0	0	0	1	0	0	0	0	1	
5	0	0	0	0	1	1	0	0	1	
1	1	0	0	0	0	1	0	0	1	IV цикл С4
2	0	1	0	0	0	1	0	0	1	
3	0	0	1	0	0	0	1	0	1	
4	0	0	0	1	0	0	1	0	1	
5	0	0	0	0	1	0	1	0	1	

1	1	0	0	0	0	0	1	0	1	V цикл C5
2	0	1	0	0	0	1	0	0	1	
3	0	0	1	0	0	1	0	0	1	
4	0	0	0	1	0	1	0	0	1	
5	0	0	0	0	1	0	0	1	0	
1	1	0	0	0	0	0	1	1	0	VI цикл C6
2	0	1	0	0	0	0	1	1	0	
3	0	0	1	0	0	0	1	1	0	
4	0	0	0	1	0	1	0	1	0	
5	0	0	0	0	1	1	0	1	0	

Режим переключения колонн каждого уровня по завершению процесса сорбции и переключению на режим восстановления активных свойств сорбента подчинен логическому правилу

$$(15) \quad \forall A_{ij} \quad \forall k \quad \exists G_{ij}^{Ag}(k) : G_{ij}^{Ag}(k) = G_H^{Ag}(k),$$

$$A_{ij} = A_{i+1,j} \vee A_{i,j+1},$$

где G_H^{Ag} – уровень насыщения биосорбента, прогнозируемый по модели.

Соответственно, после роста новой порции плесневой культуры, достаточной для продолжения технологического процесса биосорбции, осуществляется переключение колонн на биосорбцию согласно правилу

$$(16) \quad \forall A_{ij} \quad \forall k \quad \exists G_{i+1,j}^S(k) : (G_{i+1,j}^S(k) = D_{i+1,j}) \vee (G_{i,j+1}^S(k) = D_{i,j+1}(k)),$$

где $D_{i,j}$ – динамическая обменная емкость биосорбента, прогнозируемая по математической модели.

Предусмотрено, что порция биосорбента (плесневой культуры) используется до тех пор, пока способность поглощать

серебро после технологических пауз и определенного количества циклов (для каждого типа плесневой культуры) не понизится до уровня менее 50% от первоначальной. Это пороговое значение определяет эффективность использования биосорбента и, в зависимости от технологических условий, может быть ниже или выше. В соответствии с этим для колонн первых трех уровней (первой – седьмой) десорбция серебра и замена биосорбента в колонне подчинена логическим правилам

$$(17) \forall A_{ij} \forall k \exists G_{ij}^{Ag}(k) : G_{ij}^{Ag}(k) \leq 0,5G_{гр}^{Ag}, A_{ij} \notin C_k.$$

Восьмая – девятая колонны используются как вспомогательные, осуществляя доочистку растворов до норматива, соответствующего содержанию серебра в промышленных стоках. Замена сорбента в этих колоннах осуществляется через два–три раза после замены биосорбента в колоннах предыдущих уровней.

Функционирование системы управления предполагает, что идентифицированные математические модели вида (1)–(13) позволяют прогнозировать состояния объекта управления на каждый последующий момент времени. Каждый слой нейросети описывает процессы, протекающие в соответствующей колонне, включенной в технологический цикл согласно матрице смежности (таблица 1). Прогноз состояний в режиме биосорбции позволяет оценить количество активных центров, израсходованных на извлечение серебра. Если прогноз кинетики расходования активных центров биосорбента достигает заданного уровня, сигнал об этом состоянии поступает на второй уровень управления, где согласно логическому правилу (15) осуществляется переключение колонн в соответствии с матрицей смежности. При этом начальные условия задачи Коши поступают в точку переключения нейросети на другой слой в соответствии с прогнозом содержания серебра, выходящего из предыдущей колонны. Этот прогноз осуществляется по нейрону, соответствующему уравнению прогноза содержания серебра в растворе. После переключения нейронов соответствующего слоя на режим восстановления в этом слое согласно математической модели вида (9)–(11) осуществляется прогноз роста активных

центров биологической популяции. В этом слое связь между режимами сорбции и восстановления осуществляется по нейронам, прогнозирующим количество активных центров. По модели (9)–(11) рассчитывается количество восстановленных активных центров, данные о которых поступают на второй уровень системы управления. Если, согласно прогнозу по этой модели, достигнут заданный уровень роста активных центров, то по логическому правилу (16) со второго уровня поступает команда переключения колонны на режим сорбции в соответствии с матрицей смежности (таблица 1). В зависимости от типа биосорбента, каждый слой нейросети содержит 5–6 составных частей (циклов), прогнозирующих процессы сорбции и восстановления. Если после последнего цикла итоговая сорбционная способность биологических популяций снизилась ниже заданного уровня, со второго уровня согласно правилу (17) поступает команда переключения колонны на режим десорбции. В этом случае в данном слое нейросети функционируют нейроны, осуществляющие прогноз десорбции серебра согласно уравнениям типа (12)–(13). Кроме перечисленных особенностей функционирования нейросети, алгоритм второго уровня системы управления предусматривает связь между нейронами каждого слоя согласно логическому правилу (14).

Исходя из вышеизложенного, система управления второго уровня осуществляет переключение нейронов сети в соответствующих узлах каждого слоя.

3. Заключение

Научная новизна работы заключается в создании двухуровневой системы управления технологическим процессом биосорбции, в основу которой положено итеративное прогнозирование состояний объекта управления с помощью обыкновенных дифференциальных уравнений, решение которых рассматривается как нейроны и их узлы. Методологически предусмотрено, что алгоритм второго уровня иерархии, согласно логическим

правилам и матрице смежности, предусматривает послойное переключение нейронов в фиксированных узлах нейросети.

Практическая значимость работы определяется возможностью эффективного использования биосорбентов на технологических участках, предназначенных для извлечения серебра из вторичных растворов.

Литература

1. КРИВОДУБСКИЙ О.А., НОВАКОВСКАЯ А.О. *Математическая модель восстановления активных свойств сорбента* // Информатика, кибернетика та обчислювальна техніка: сб. наук. пр. Донецького нац. технічного ун-ту. – 2009. Вып. 10 (153). – С. 251–254.
2. СТРИЖКО Л.С. *Металлургия благородных металлов*. – М.: МИСиС, 2001. – 336 с.
3. СТРИЖКО Л.С., ЛОЛЕЙТ С.И., НОВАКОВСКАЯ А.О. *Динамическая модель процесса биосорбции серебра* // Известия высших учебных заведений. Цветная металлургия. –2009. – Вып. 4 (2009). – С. 55–60.
4. ХАЙКИН С. *Нейронные сети: полный курс*. – 2-е изд., испр. – М.: ООО «И.Д. Вильямс», 2006. – С. 1104.

NEURAL-NETWORK-BASED FORECATING MODEL FOR CONTROL OF SILVER BIOSORPTION PROCESSES

Zufar G. Salihov, National University of Science and Technology “MISIS”, Moscow, Doctor of Science, professor (Moscow, Leninskiy prospekt 4, (495)638-46-85, e-mail: ec.misis@mail.ru).

Leonid S. Strizhko, National University of Science and Technology “MISIS”, Moscow, Doctor of Science, professor (Moscow, Leninskiy prospekt 4, (495)638-46-85, e-mail: sls_2007.47@mail.ru).

Anna O. Novakovskaya, National University of Science and Technology “MISIS” (Moscow, Leninskiy prospekt 4, (495)638-46-85, e-mail: ec.misis@mail.ru).

Abstract: We study the specific features of control in course of silver biosorption from biosorbents – secondary solutions originated from pharmaceutical industry production wastes. The plant state forecasting model is implemented with a multi-layer multi-input neural network with inter-layer routing logic induced by logic of processing units switching. Existence of Koshi boundary conditions is assured at every switch point.

Keywords: automation, technology, manufacturing.

При этом предусматривается, что конкретные начальные условия задачи Коши присущи каждой точке переключения.

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии Н. Н. Бахтадзе*

УДК 551.46.077 + 629.584
ББК 32.965.7

РАЗРАБОТКА АЛГОРИТМОВ ГРУППОВОГО ПОВЕДЕНИЯ АНПА В ЗАДАЧЕ ОБСЛЕДОВАНИЯ ЛОКАЛЬНЫХ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ МОРСКОЙ СРЕДЫ

Туфанов И. Е.¹, Щербатюк А. Ф.²

*(Институт проблем морских технологий,
Дальневосточное отделение РАН, Владивосток)*

В статье рассмотрена задача поиска и оценки размеров локальных неоднородностей в заданной акватории. Изложен подход, позволяющий не только локализовать, но также оценить 3D-размеры локальных неоднородностей и массу содержащегося в них растворенного вещества. Описан метод планирования работы группы автономных необитаемых подводных аппаратов (АНПА) при решении указанной задачи. Поставлена соответствующая задача дискретной оптимизации и приводится сравнение двух алгоритмов её решения. Рассмотрен вопрос о перепланировании действий группы в случае возникновения внештатных ситуаций в процессе выполнения задания. Приведены результаты моделирования работы предложенных алгоритмов.

Ключевые слова: группа автономных необитаемых подводных аппаратов, групповое поведение, планирование, подводные локальные неоднородности.

¹ Игорь Евгеньевич Туфанов, аспирант (itufanov@gmail.com).

² Александр Федорович Щербатюк, чл.-корр. РАН, д.т.н., зав. лаб. (scherba@marine.febras.ru)

1. Введение

Одной из важных задач морского экологического мониторинга является поиск и обследование локальных неоднородностей (ЛН) в толще воды. Такие ЛН могут иметь как естественное происхождение (поле фитопланктона), так и быть вызванными антропогенным влиянием (поле загрязнения). Полагается, что на АНПА установлен датчик, позволяющий регистрировать концентрацию заданного вещества. Если концентрация вещества в некоторой точке превосходит некоторый порог, то предполагается, что эта точка принадлежит ЛН. Задача заключается в локализации ЛН и оценке ее размеров. Данная информация является важной для построения корректных моделей, как при организации контрмероприятий в случае загрязнения водных акваторий, так и при планировании рыбопромысловой деятельности на основе данных о полях фитопланктона.

Задаче обследования ЛН посвящены некоторые исследования и публикации. Например, в докладе [9] сравниваются параметрический и непараметрический подходы для оценки характеристик ЛН. В работах [1, 2] приводятся алгоритмы для оконтуривания областей ЛН и шлейфов, описаны способы формирования траектории движения АНПА, позволяющие построить локальную аппроксимацию границы области ЛН или оценить направление распространения шлейфа. В работе [6] рассмотрен алгоритм поиска и оценки размеров ЛН в заданной акватории для группы АНПА, который позволяет оценить объемы ЛН и количество растворённого в них вещества. В настоящей работе рассмотрены подходы к решению задачи эффективного планирования, которая возникает при выполнении указанного алгоритма группой АНПА. Имеется набор заданий и необходимо распределить их между аппаратами, указав для каждого аппарата план их выполнения, минимизирующий время миссии в целом. Поставлена соответствующая задача дискретной оптимизации. Рассмотрены вычислительно затрат-

ный точный алгоритм ее решения и вычислительно более эффективный эвристический алгоритм.

При выполнении АНПА заданий в динамической неструктурированной среде возможны непредвиденные ситуации и нарушения плана. Должен осуществляться постоянный контроль над выполнением плана и перепланирование в случае его нарушения. В настоящей работе рассмотрено перепланирование в случае выхода из строя одного из подводных аппаратов. При одновременной работе группы АНПА предполагается наличие постоянной акустической связи каждого исправного подводного аппарата с центральным узлом, которым может быть как судовой пост оператора, так и один из АНПА. Все АНПА оснащены навигационной системой, обеспечивающей требуемую точность определения местоположения АНПА.

2. Обзор существующих подходов

Вопрос распределения заданий внутри группы роботов (*multi-robot task allocation (MRTA)*) состоит в том, чтобы назначить имеющиеся задания (которые могут заключаться в требовании посетить заданную точку пространства, обследовать заданный участок и т. д.) роботам группы и определить порядок их выполнения. При этом необходимо минимизировать некоторый функционал, который может включать общее время выполнения задания, суммарный пройденный путь и т.д. В работе [15] приводится классификация задач *MRTA*. Показано, что, несмотря на разнообразие постановок, они чаще всего сводятся к широко известным задачам дискретной оптимизации, таким как задачи о назначениях или нескольких странствующих коммивояжёрах (*multiple travelling salesman problem (MTSP)* [25]).

Если весь набор заданий известен заранее, то может быть применено централизованное планирование. Так, в работе [23] рассматривается задача распределения неподвижных целей внутри группы летательных аппаратов. Необходимо посетить все цели, минимизировав функционал, который представляет собой взвешенную сумму максимального и суммарного време-

ни, затраченного всеми роботами. Задача формулируется в терминах целочисленного программирования, и предлагаются точный и приближённый методы решения задачи. Централизованное планирование в группе летательных аппаратов рассматривается и в работе [5], где решение похожей задачи предлагается разделить на три фазы: распределение заданий между аппаратами, решение задачи коммивояжёра для каждого аппарата, планирование пути между парами заданий. При этом задания разделены на точечные (их требуется посетить) и площадные (их обработка занимает некоторое время).

Другой класс алгоритмов — это алгоритмы коллективного планирования. Их использование целесообразно, например, для ситуаций, когда задания добавляются по мере работы группы или когда центральный узел недоступен. Такие алгоритмы предполагают некоторый процесс согласования при выборе заданий. Один из способов согласования в группировке роботов — аукционный метод. При появлении нового задания некоторые роботы делают «ставки», оценивая свои затраты для выполнения этого задания. Такие алгоритмы использованы в работах [17, 18]. Обзор аукционных методов проделан в работе [13]. В работах [3, 7, 10, 12, 14, 22, 24] приводятся алгоритмы решения специфических постановок задачи планирования и исследуются другие подходы.

Алгоритмы централизованного и коллективного планирования находят применение в системах управления группами роботов [8, 18, 20, 21, 26]. В системе *ALLIANCE* [21] рассматривается распределение заданий в группе разнородных роботов. Используются алгоритмы, основанные на «жадном» подходе, в котором каждый раз среди невыполненных заданий выбирается то, которое потребует наибольших или наименьших затрат. Развитие этой системы, *L-ALLIANCE*, использует механизмы машинного обучения для того, чтобы учитывать различия в способностях роботов. В работе [8] описана система *GRAMMPS*, в которой производится централизованное планирование. Для решения возникающих задач дискретной оптимизации предла-

гается использовать полные или частичные решения в зависимости от размера задачи.

Экспериментальный проект *CENTIBOTS* [20] посвящён управлению группой более чем из ста роботов для решения исследовательских задач в помещении. В каждый момент времени в системе имеется набор неподвижных целей, которые необходимо посетить. Планирование может осуществляться в двух режимах: централизованном и коллективном. В централизованном режиме план посещения целей строится на основе приближённого решения задачи *MTSP* с использованием «жадного» алгоритма. Коллективное планирование основано на методе аукционов. При этом отмечается, что в начале работы системы объем передаваемых об аукционах сообщений столь велик, что пропускная способность коммуникационной сети оказывается недостаточной. Система *MissionLab* используется в *Georgia Institute of Technology* для управления разнородными (летательными, наводными, подводными) аппаратами. Для решения задачи *MRTA* в ней используется аукционный метод [26].

Задача распределения заданий при управлении группой АНПА также рассмотрена в работах [4, 11, 19, 27]. В работе [4] исследована задача, в которой задано множество точечных целей на плоскости и необходимо разработать план посещения как можно большего их количества аппаратами группы. Ставится задача *MTSP*, для решения которой используется генетический алгоритм, позволяющий гибко задавать ограничения на траектории аппаратов. Работа [11] также посвящена построению плана для посещения группой АНПА нескольких точечных целей. При этом накладывается ограничение на кривизну траекторий АНПА и предлагается использовать аукционный метод. Алгоритм из этого семейства применён и в работе [27]. В [19] рассматривается решение задачи оптимизации порядка обследования с помощью АНПА нескольких площадных участков на основе метод оптимизации «колонией муравьёв».

3. Задача поиска локальных неоднородностей

Рассмотрим задачу обследования акватории на основе использования группы АНПА с целью выявления в ней локальных неоднородностей. Положим, что задана некоторая прямоугольная область $A = \{(x, y): x_1 \leq x \leq x_2, y_1 \leq y \leq y_2\}$, которую необходимо осмотреть с помощью группы из m подводных аппаратов на предмет наличия ЛН. Предлагаемый алгоритм обследования включает три этапа.

Этап 1. Предварительный осмотр «грубым» меандром. Область A разбивается на m частей в соответствии с числом имеющихся АНПА (рис. 1):

$$A_i = \{(x, y): x_1 \leq x \leq x_2, y_1 + \frac{i-1}{m}(y_2 - y_1) \leq y \leq y_1 + \frac{i}{m}(y_2 - y_1)\}.$$

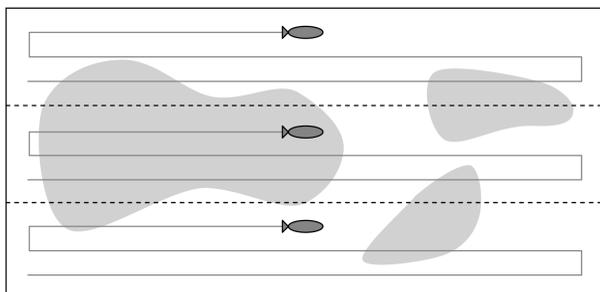


Рис. 1. Предварительный осмотр заданной области «грубым» меандром с помощью трех АНПА

Сформированные прямоугольные области распределяются между подводными аппаратами и организуется покрытие каждой области A_i горизонтальным меандром с шагом h между галсами. Шаг h выбирается равным половине размера минимальной области, которая может рассматриваться как ЛН.

Этап 2. На основе произведенных всеми подводными аппаратами измерений создается список точек пересечения границ ЛН. В данных точках траектории АНПА пересекают изолинии, соответствующие заданному порогу измеряемого параметра

водной среды. На основе данного набора точек грубо формируются связные области ЛН и оценивается их количество.

Используется следующий алгоритм формирования связных областей по набору параллельных сечений областей ЛН траекториями АНПА. Каждый принадлежащий области ЛН отрезок предыдущего параллельного галса меандра (верхний отрезок) сопоставляется с каждым принадлежащим области ЛН отрезком текущего параллельного галса меандра (нижний отрезок). Считается, что два отрезка принадлежат одной области, если выполнено условие $(A_1 - B_2) \cdot (A_2 - B_1) > 0$, где A_1, B_1 и A_2, B_2 – координаты левых и правых границ верхнего и нижнего отрезков. На рис. 2 приведена визуализация результатов после первых двух шагов работы группового алгоритма для примера на рис. 1.

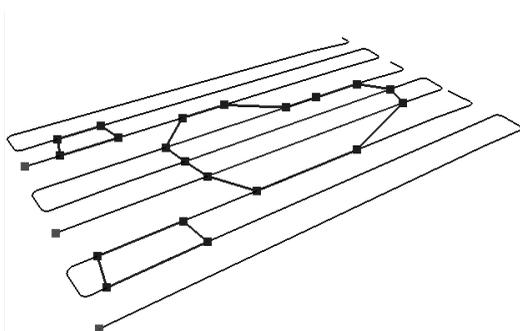


Рис. 2. Визуализация результатов после первых двух шагов работы группового алгоритма

Этап 3. Организуется детальное обследование выделенных ЛН с целью уточнения их размеров и местоположения. Для формирования траектории движения АНПА вдоль границ областей ЛН используется кусочная аппроксимация границы на основе нескольких последних точек пересечения границы. Оконтурирование области считается завершенным, если одновременно выполнены два условия: длина траектории оконтуривания больше некоторого заданного значения и расстояние от точки старта до точки окончания оконтуривания меньше некоторой константы.

Выделение трёхмерной области возможно выполнить путем локализации ее границ, полученных посредством сечения области ЛН несколькими параллельными плоскостями, соответствующими определенным фиксированным глубинам. Однако при этом продолжительность операции будет приблизительно линейно возрастать с количеством таких плоскостей. Вместо этого предполагается выполнить оконтуривание ЛН для некоторого наиболее вероятного значения глубины d_0 , которая пересекает интересующие нас области ЛН.

Каждый раз, когда заканчивается двумерное оконтуривание очередной ЛН, следует оценить ее объем и 3D-форму. Для этого используется следующая процедура. Предположим, что в процессе двумерного оконтуривания получена область Ω . Затем находится пара наиболее удаленных друг от друга точек границы области Ω (**a** и **b**). При этом отрезок, соединяющий **a** и **b**, должен быть целиком расположен внутри области ЛН. Далее производится двумерное оконтуривание в вертикальной плоскости, проходящей через точки **a** и **b**. Таким образом будет получено сечение искомой трехмерной области двумя перпендикулярными плоскостями (см. рис. 3).

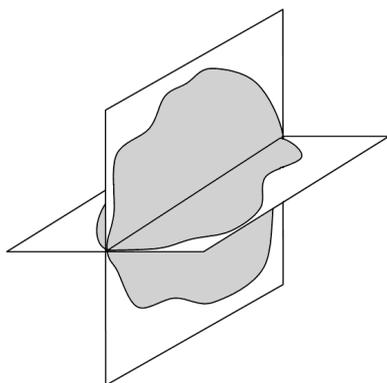


Рис. 3. Схема оконтуривания в двух перпендикулярных плоскостях

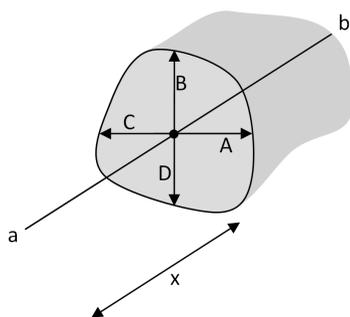


Рис. 4. Срез ЛН плоскостью, перпендикулярной диаметру

Для получения оперативной оценки объема ЛН выполняется аппроксимация границ фигур, образованных сечениями области ЛН вертикальными плоскостями, перпендикулярными оси Ox . При этом каждая линия сечения описывается функцией $\rho(\varphi)$, заданной отдельно в каждой четверти в полярных координатах. Она использует точки пересечения с осями Oy и Oz – $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$, $D(x)$ (см. рис. 4) и имеет вид

$$\rho(\varphi) = \sqrt{E^2 \cos^2 \varphi + F^2 \sin^2 \varphi},$$

где для первой четверти $E = A(x)$, $F = B(x)$, для второй – $E = B(x)$, $F = C(x)$, для третьей – $E = C(x)$, $F = D(x)$ и для четвертой – $E = D(x)$, $F = A(x)$.

Затем рассчитываются площади полученных фигур и далее оценивается объем области ЛН путем численного интегрирования. Для оценки количества растворенного в воде вещества подводные аппараты совершают дополнительные сквозные пересечения областей ЛН. На основе полученной аппроксимации функции концентрации растворенного вещества внутри областей ЛН выполняется оценка количества содержащегося в области ЛН вещества также посредством численного интегрирования.

4. Планирование групповой работы АНПА

В общем случае под планированием понимается процесс выработки последовательности действий, позволяющий выполнить поставленную задачу. В случае планирования действий группировки роботов этот процесс состоит из нескольких частей. При этом необходимо произвести «декомпозицию цели», разбив её на задания. Затем следует выработать последовательность выполнения заданий для каждого робота. Среди всех планов требуется выбрать тот, который минимизирует некоторый функционал (например, суммарный пробег всех АНПА). Наконец, следует осуществлять контроль над выполнением плана и его корректировку в случае возникновения непредвиденных ситуаций.

При решении рассматриваемой нами задачи (а именно, при выполнении этапа 3), целью является обследование всех найденных на предварительном этапе ЛН. Самая простая декомпозиция цели – это отдельное обследование каждой ЛН. Можно произвести ещё большую детализацию цели и рассмотреть обследование каждой ЛН как три независимых задания: горизонтальное оконтуривание, вертикальное оконтуривание и сквозной проход. Будем придерживаться принципа неделимости заданий: каждое задание требует непрерывного выполнения от начала до конца и один АНПА не может приступить к выполнению нового задания, не окончив предыдущего.

Имея набор неделимых заданий, необходимо распределить их между аппаратами и выбрать последовательность их выполнения. При работе нескольких аппаратов необходимо скоординировать их деятельность таким образом, чтобы по возможности минимизировать время, необходимое для выполнения всей миссии. Поскольку параметры ЛН заранее неизвестны, нельзя точно определить время, которое займёт выполнение каждого задания. Будем оценивать его, исходя из оценки размеров ЛН, полученных на этапе 2.

При постановке задачи оптимизации необходимо учесть, что имеется несколько вариантов выполнения. Например, не имеет значения, в каком направлении осуществлять сквозной проход. Таким образом, можно говорить о том, что при w локальных неоднородностях имеется $3w$ заданий, каждое из которых должно быть выполнено одним из аппаратов. При этом задания имеют различные варианты выполнения, отличающиеся начальными и конечными точками, и каждое задание имеет оценку времени его выполнения.

Пусть имеется m аппаратов и n заданий. Изначально q -й аппарат находится в точке \mathbf{s}_q трёхмерного пространства. Для i -го задания известно v_i вариантов его выполнения. Далее, j -й вариант выполнения i -го задания характеризуется начальной точкой \mathbf{a}_{ij} в трёхмерном пространстве, конечной точкой \mathbf{b}_{ij} и временем выполнения l_{ij} .

Назовём *планом* аппарата кортеж пар $p = (i_1, j_1), (i_2, j_2), \dots, (i_{|p|}, j_{|p|})$ такой, что $i_k \in \{1, \dots, n\}$, $j_k \in \{1, \dots, v_{i_k}\}$ для всех $k \in \{1, \dots, |p|\}$. Выполнение плана q -м аппаратом начинается в точке \mathbf{s}_q . Вначале аппарат переходит к точке $\mathbf{a}_{i_1 j_1}$ и выполняет j_1 -й вариант задания i_1 . Затем аппарат переходит к точке $\mathbf{a}_{i_2 j_2}$ и т.д. Выполнение плана заканчивается в точке $\mathbf{b}_{i_{|p|} j_{|p|}}$. Предполагается, что переход между точками пространства от одного задания к другому и от начальной точки выполняется по отрезку прямой (т.е. используется евклидово расстояние). Таким образом, время выполнения плана p аппаратом с номером q составляет:

$$t_q(p) = \sum_{k=1}^{|p|} l_{i_k j_k} + \frac{1}{V} (|\mathbf{s}_q - \mathbf{a}_{i_1 j_1}| + \sum_{k=2}^{|p|} |\mathbf{b}_{i_{k-1} j_{k-1}} - \mathbf{a}_{i_k j_k}|),$$

где V – скорость аппарата при свободном перемещении между точками пространства.

Назовём *общим планом* кортеж планов $P = (p_1, p_2, \dots, p_m)$ такой, что каждое задание встречается среди его планов ровно один раз и ровно в одном варианте. Временем выполнения общего плана назовем $t(P) = \max_{q \in 1..m} t_q(p_q)$, поскольку миссию

можно считать завершённой только после того как все аппараты завершили работу. Задача состоит в том, чтобы при известных начальных положениях аппаратов, известных заданиях и вариантах их выполнения найти общий план P , минимизирующий $t(P)$.

5. Решение задачи оптимизации

Задача составления плана сходна с задачей *MTSP*, для которой существуют методы получения как точных, так и приближённых решений, которые описаны, например в [25]. Рассмотрим два алгоритма решения данной задачи.

Первый алгоритм доставляет точное решение задачи. Он основан на идее динамического программирования и представ-

ляет собой модификацию алгоритма Хельда–Карпа [16], решающего задачу коммивояжера (*TSP*). Постановка этой задачи такова: имеется полный граф (с множеством вершин V), каждому ребру которого сопоставлено число – стоимость ребра. Необходимо построить цикл минимальной стоимости, проходящий по всем вершинам ровно один раз. В алгоритме Хельда–Карпа предлагается решать задачу методом динамического программирования. Не ограничивая общности, будем строить искомый цикл, начиная с некоторой вершины $r \in V$, каждый раз добавляя к пути новую, еще не взятую вершину. Состояние такого процесса описывается (для фиксированного r) парой (r', V') , где r' – последняя добавленная вершина, а V' – множество уже добавленных вершин ($V' \subseteq V$). Обозначим за $B(r', V')$ стоимость минимального пути, описываемого парой (r', V') . Очевидно, что $B(r, \{r\}) = 0$. Остальные значения могут быть найдены с использованием простых правил перехода. Зная все значения $B(r', V)$ легко найти длину кратчайшего цикла, которая составит $\min_{r' \in V} (B(r', V) + c(r', r))$, где $c(r', r)$ – стоимость ребра из r' в r .

Вернёмся к нашей задаче для нескольких аппаратов. С помощью двоичного поиска задача сводится к следующей: найти план со временем выполнения не более T либо установить, что его не существует. Для решения последней задачи применим метод динамического программирования. Рассмотрим последовательное составление плана для каждого подводного аппарата, при этом будем осуществлять лишь такие переходы, при которых время выполнения не превысит T . Состояние системы описывается тройкой (q, S, \mathbf{u}) , где q – номер текущего аппарата; S – подмножество заданий, которые уже включены в план; \mathbf{u} – точка, в которой в конце текущего плана будет находиться аппарат q (точка может быть любым из $\sum_{i \in \{1, \dots, n\}} v_i + m$ элементов множества $\{\mathbf{b}_{ij}\}_{i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, v_i\}} \cup \{\mathbf{s}_i\}_{i \in \{1, \dots, m\}}$).

Далее положим, что $t_T(q, S, \mathbf{u})$ обозначает минимальное время плана для q -го аппарата в состоянии (q, S, \mathbf{u}) . Переход в новое состояние – это либо выбор очередного задания, не при-

существующего в S , либо переход к составлению плана для аппарата $q + 1$. Таким образом, имеем:

$$t_T(q, S, \mathbf{s}_q) = \begin{cases} 0, & \text{если } \min_{\mathbf{u}} t_T(q-1, S, \mathbf{u}) \neq \infty, \\ \infty, & \text{если состояние не достижимо;} \end{cases}$$

$$t_T(q, S, \mathbf{b}_{ij}) = l_{ij} + \min(t_T(q, S \setminus \{i\}, \mathbf{s}_q) + \frac{1}{V} |\mathbf{s}_q - \mathbf{a}_{ij}|,$$

$$\min_{i \in S \setminus \{i\}} \min_{j_1 \in 1..v_{i_1}} (t_T(q, S \setminus \{i\}, b_{i_1 j_1}) + \frac{1}{V} |\mathbf{b}_{i_1 j_1} - \mathbf{a}_{ij}|)),$$

где $i \in S$. При этом переходы осуществляются только в том случае, если получаемое значение $t_T(q, S, \mathbf{u})$ не превосходит T .

Схема алгоритма для фиксированного T такова. Инициализируется значение $t_T(1, \{\}, \mathbf{s}_1) = 0$ и t_T для всех остальных индексов вычисляется в порядке неубывания q и неубывания $|S|$ для фиксированного q .

Второй алгоритм представляет собой модификацию аукционного метода для централизованного планирования. В данном случае все имеющиеся задания упорядочиваются. Каждое очередное задание во всех вариантах выполнения добавляется к уже существующему частичному плану каждого аппарата. Аппарат, имеющий минимальную стоимость частичного плана после вставки нового задания, объявляется выигравшим «аукцион», и задание назначается ему. Таким образом, для каждого задания перебирается:

- аппарат, которому следует назначить задание;
- позиция нового задания в текущем плане аппарата;
- вариант выполнения задания, который следует применить.

При работе в реальных условиях возможно возникновение непредвиденных ситуаций. К непредвиденным ситуациям можно отнести более долгое, чем планировалось время выполнения задания или отказ одного из аппаратов. Выход АНПА из строя (с последующим всплытием) случается по ряду причин: столкновение с рельефом, сбой ПО, аварийная ситуация на борту. В работе [22] излагается опыт выполнения поисковой операции с использованием трёх АНПА одновременно. При этом более чем

из сотни пусков приблизительно треть заканчивалась неудачно. При выходе аппарата из строя важно, чтобы остальные аппараты продолжили выполнять миссию, произведя перепланирование. Мы не рассматриваем ситуацию выхода из строя центрального узла.

Предполагается, что с некоторой периодичностью АНПА передают центральному узлу акустический сигнал. Если аппарат не передал сигнал в течение достаточно длительного времени, то принимается решение о перепланировании. При этом все ещё невыполненные задания перераспределяются, и новые планы рассылаются аппаратам.

В соответствии с принципом неделимости заданий, при перепланировании следует учесть, что некоторые аппараты могут быть доступны не сразу, а только после завершения их текущих заданий. Это влечёт к простым модификациям в приведённых выше алгоритмах планирования. В общем случае центральный узел должен осуществлять постоянный контроль над выполнением плана, и если происходит достаточно сильное от него отклонение, следует выполнять перепланирование.

6. Некоторые результаты моделирования

Для исследования предложенных алгоритмов было выполнено компьютерное моделирование их работы. При этом для расчета перемещения АНПА использовалась кинематическая модель с ограниченными линейной и угловыми скоростями. Локальные неоднородности были заданы аналитической формулой.

Моделирующая система представляет собой программную среду, в структуре которой имеются такие модули, как модель среды, модель аппарата, модель поведения и прочее. Таким образом, структура полученной системы позволяет ее модифицировать для применения к разным типам АНПА.

Рассмотрим работу модели в объеме, ограниченном параллелепипедом $\{(x, y, z): 0 \leq x \leq 700, 0 \leq y \leq 500, 0 \leq z \leq 300\}$.

Аналитическое выражение для описания ЛН имеет вид (рис. 5):

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^5 \frac{\alpha_i}{\beta_i + |\mathbf{x} - \gamma_i|^2},$$

где $\alpha = (5000, 5000, 5000, 4000, 5000)^T$,

$\beta = (5000, 5000, 5000, 5000, 5000)^T$,

$$\gamma_1 = \begin{pmatrix} 150 \\ 250 \\ 150 \end{pmatrix}, \gamma_2 = \begin{pmatrix} 350 \\ 320 \\ 150 \end{pmatrix}, \gamma_3 = \begin{pmatrix} 400 \\ 200 \\ 150 \end{pmatrix}, \gamma_4 = \begin{pmatrix} 610 \\ 100 \\ 120 \end{pmatrix}, \gamma_5 = \begin{pmatrix} 620 \\ 400 \\ 180 \end{pmatrix}.$$

Здесь α , β , γ_i – векторы числовых параметров; \mathbf{x} – точка трёхмерного пространства.

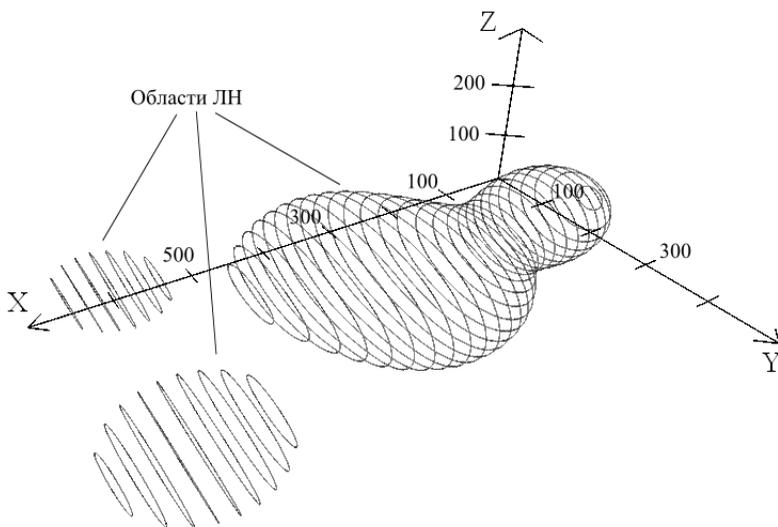


Рис. 5. Визуализация модельного примера. Области ЛН визуализированы с помощью сечений их границ плоскостями, параллельными друг другу и плоскости YZ

Для оконтуривания областей ЛН использовался порог значения поля на уровне 0,7, количество подводных аппаратов в

эксперименте было выбрано равным трем, шаг меандра был принят равным 50. В качестве рабочей глубины было выбрано значение $d_0 = 150$.

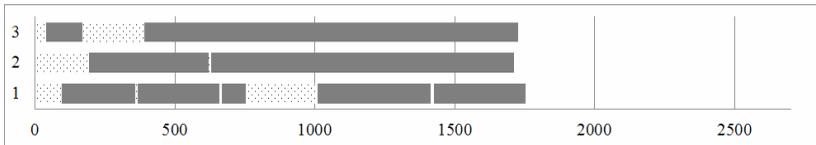
После предварительного прохода меандром было выявлено три области ЛН. Затем после горизонтального и вертикального оконтуривания и прохода через область ЛН на основе полученных модельных измерений была произведена оценка объемов выделенных областей ЛН и массы содержащегося в них растворенного вещества. Для этого использовались численные методы интегрирования.

Далее исследовалось, насколько точным является предложенный метод оценки указанных выше параметров. Получаемая ошибка складывается из ошибки оконтуривания (она зависит от траектории, которая получается после сглаживания) и от ошибки самого метода вычисления объема (эта ошибка зависит от выбранных плоскостей сечения и от формы области). Выяснено, что суммарная ошибка в среднем составляет около 12%. Следует отметить, что настоящая модель не учитывает погрешности измерений и навигации. Аналогичная ошибка оценки количеств растворенного в областях ЛН вещества оставляет около 20%. Данные точности являются достаточным для оперативной оценки параметров ЛН на предварительном этапе обследования.

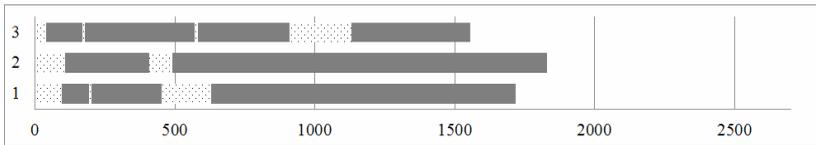
При решении задачи планирования длина пути при оконтуривании оценивалась как периметр многоугольника для каждой ЛН, полученной на этапе 2, длина сквозного прохода оценивалась как диаметр этого многоугольника, а длина пути при вертикальном оконтуривании – в π раз больше диаметра. На рис. 6 представлены результаты работы алгоритмов планирования для ЛН, описанной выше и состоящей из трех областей. В данном случае имеется девять неделимых заданий, включающих для каждой области горизонтальное и вертикальное оконтуривание, а также сквозное пересечение области. Вдоль временной шкале отображены результаты распределения заданий. Разрывы между некоторыми заданиями минимальны – это задания по оконтуриванию одной и той же ЛН. Можно заметить, что стоимость

плана, полученная алгоритмом 1 всего на ~4% ниже, чем стоимость плана по алгоритму 2.

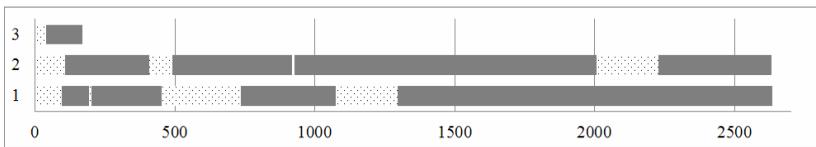
Далее рассматривается перепланирование в случае, когда аппарат 3 выходит из строя во время движения ко второму заданию. В соответствии с принципом неделимости заданий, аппараты 1 и 2 продолжают текущие работы, но дальнейшие их действия перепланируются полностью. Можно, например, заметить, что самое трудоёмкое задание (вертикальное оконтуривание самой большой ЛН) перемещается от второго аппарата первому. Следует отметить, что алгоритмы 1 и 2 в данном случае формируют одинаковые по стоимости планы.



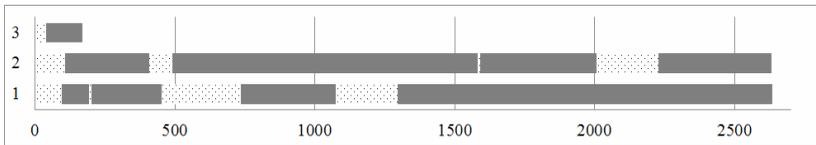
а)



б)



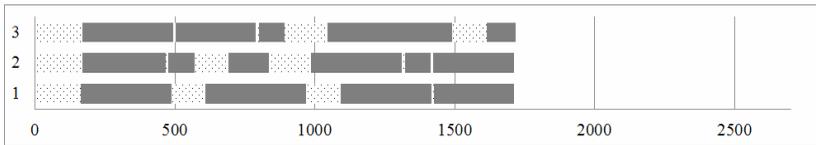
в)



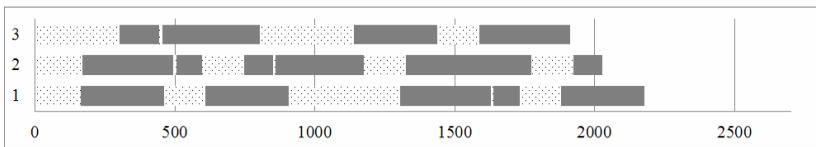
г)

Рис. 6. Планы, составленные предложенными алгоритмами для случая с тремя ЛН. По горизонтальной оси отложено время. Для каждого аппарата различными тонами отмечены промежутки времени для выполнения заданий и для перехода между заданиями: работа алгоритмов 1 и 2 в штатной ситуации [а) и б)], перепланирование по алгоритмам 1 и 2 при выходе аппарата 3 из строя в момент времени 300 [в) и г)]

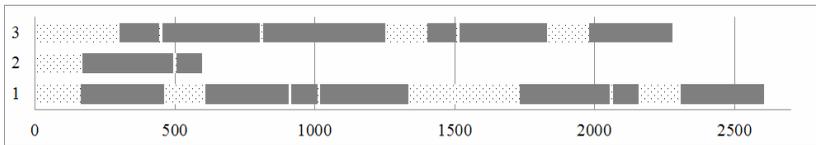
Затем было выполнено моделирование работы предложенных алгоритмов в случае, когда имеется пять приблизительно одинаковых по размеру ЛН. В данной ситуации имеется пятнадцать неделимых заданий. Результаты планирования при штатной работе ПА приведены на рис. 7 а) и б). В данном случае разница между эффективностью алгоритма 1 и алгоритма 2 более заметна. Ситуация с перепланированием в случае, когда аппарат 2 выходит из строя во время движения к третьему заданию приведена на рис. 7 в) и г).



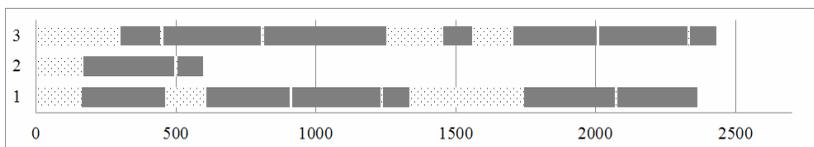
а)



б)



в)



г)

Рис. 7. Планы, составленные предложенными алгоритмами для случая с пятью ЛН. Работа алгоритмов 1 и 2 в штатной ситуации [а) и б)], перепланирование по алгоритмам 1 и 2 при выходе аппарата 2 из строя в момент времени 720 [в) и г)]

В обоих модельных примерах при использовании одного аппарата алгоритм 1 даёт решение со стоимостью приблизительно в 2,75 раза больше, чем при использовании трёх АНПА.

7. Выводы

Разработан и исследован метод для локализации и оценки размеров областей ЛН в заданной акватории с помощью группы АНПА. Для решения задачи обследования ЛН предложено два алгоритма планирования работы АНПА и произведено сравнение их эффективности на некоторых примерах. Приведены результаты работы алгоритмов в случае перепланирования. Следует отметить, что алгоритм 2 незначительно уступает алгоритму 1 по эффективности для рассмотренных примеров, но более прост в реализации и накладывает существенно меньшие требования к вычислительным ресурсам системы.

Отметим, что в настоящей статье рассмотрена централизованная схема управления группой аппаратов. Децентрализация является одним из альтернативных и перспективных путей дальнейшего развития алгоритмов группового управления.

Данная работа была выполнена при поддержке гранта РФФИ 100800249а.

Литература

1. БАБАК Л.Н., ЩЕРБАТЮК А.Ф. *Некоторые методы оценивания состояния водных акваторий с использованием ав-*

- тономных необитаемых подводных аппаратов // Мехатроника, автоматизация и управление. – 2010. – №5. – С. 74–78.
2. БАБАК Л.Н., ЩЕРБАТЮК А.Ф. *Об одном алгоритме поиска источника подводного шлейфа, основанном на использовании группы АНПА* // Управление большими системами. – 2010. – Вып. 30.1. – С. 536–548.
 3. КАПУСТЯН С.Г. *Алгоритмы коллективного улучшения плана при решении задачи распределения целей в группе роботов* // Искусственный интеллект – 2006. – №3. – С. 679–690.
 4. КИСЕЛЕВ Л.В., ИНЗАРЦЕВ А.В., БЫЧКОВ И.В. и др. *Ситуационное управление группировкой автономных подводных роботов на основе генетических алгоритмов* // Подводные исследования и робототехника. – 2009. – №2(8). – С. 34–43.
 5. ПОДЛИПЬЯН П.Е., МАКСМИМОВ Н.А. *Многофазный алгоритм решения задачи планирования полета группы беспилотных летательных аппаратов* // Труды МАИ. – 2011. – Вып. 43.
 6. ТУФАНОВ И.Е., ЩЕРБАТЮК А.Ф. *Об одном алгоритме обследования локальных неоднородностей морской среды с использованием группы АНПА* // Материалы 4-й всероссийской научно-технической конференции «Технические проблемы освоения мирового океана». – Владивосток, 2011. – С. 371–375.
 7. BATALIN M.A., SUKHTAME G.S. *Sensor Network-based Multi-Robot Task Allocation* // IEEE/RSJ Intl. Conf. on Intelligent Robots and Systems (IROS2003), October 27–31, 2003, Las Vegas, USA. – P. 1939–1944.
 8. BRUMITT B.L., STENTZ A. *GRAMMPS: a generalized mission planner for multiple mobile robots in unstructured environments* // IEEE International Conference on Robotics and Automation, May 16–20, 1998, Leuven, Belgium – Vol. 2 – P. 1564–1571.

9. CANNEL C.J., STILWELL D.J. *A comparison of two approaches for adaptive sampling of environmental processes using autonomous underwater vehicles* // Proceedings of the OCEANS 2005 MTS/IEEE Conference, September 18–23, 2005, Washington, USA. – Vol. 2 – P. 1514–1521.
10. CHATTY A., KALLEL I., ALIM I.A.M. *Counter-Ant Algorithm for Evolving Multirobot Collaboration* // Proceedings of the 5th international conference on Soft computing as transdisciplinary science and technology, Cergy-Pontoise, France, October 27–31, 2008. – P. 84–89.
11. CHOW B., CLARK C.M., HUISSOON J.P. *Assigning Closely Spaced Targets to Multiple Autonomous Underwater Vehicles* // Proceedings of 16th International Symposium on Unmanned Untethered Submersible Technology (UUST09), August 23–26, 2009, Durham, USA.
12. DAHL T.S., MATARIC M.J., SUKHTAME G.S. *Multi-Robot Task-Allocation through Vacancy Chains* // Proceedings of the 2003 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA'03), September 14–19, 2003, Taipei, Taiwan. – P. 2293–2298.
13. DIAS M.B., ZLOT R., KALRA N., STENTZ A. *Market-Based Multirobot Coordination: A Survey and Analysis* // Proceedings of the IEEE – Vol. 94, Issue 7. – 2006. – P. 1257–1270.
14. FURCY D., TOMAS G. *Designing Effective Heterogeneous Teams for Multiagent Routing Domains* // IEEE/WIC/ACM International Conference on Web Intelligence and Intelligent Agent Technology (WI-IAT), August 22–27, 2011, Lyon, France. – Vol. 2 – P. 341–348.
15. GERKEY B.P., MATARIC M.J. *A Formal Analysis and Taxonomy of Task Allocation in Multi-Robot Systems* // The International Journal of Robotics Research – 2004. – Vol. 23, No. 9. – P. 939–954.
16. HELD M., KARP R. *A Dynamic Programming Approach to Sequencing Problems* // Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics. – Vol. 10, No. 1. – 1962. – P. 196–210.

17. HOEING M., DASGUPTA P. *Dynamic Pricing Algorithms for Market based Distributed Task Selection in Multi-agent Swarms* // Proc. IEEE/WIC/ACM International Conference on Intelligent Agent Technology (IAT'06), Hong Kong. – 2006. – P. 113–116.
18. HOEING M., DASGUPTA P., PETROV P. et al. *Auction-based multi-robot task allocation in COMSTAR* // Proceedings of the 6th international joint conference on Autonomous agents and multiagent systems, May 14–18, 2007, Honolulu, USA.
19. HONG-JIAN W., LIN-LIN W., JUAN L. et al. *Autonomous Team Mission Planning for AUVs* // Proceedings of the OCEANS 2011 MTS/IEEE Conference, September 19–22, 2011, Kona, USA.
20. ORTIZ C.L., VINCENT R., MORISSE B. *Task Inference and Distributed Task Management in the Centibots Robotic System* // Proceedings of the fourth international joint conference on Autonomous agents and multiagent systems, July 25–29, 2005, Utrecht, Netherlands. – P. 860–867.
21. PARKER L.E. *ALLIANCE: an architecture for fault tolerant multirobot cooperation* // IEEE Transactions on Robotics and Automation. – 1998. – Vol. 14, Issue 2. – P. 220–240.
22. PURCELL M., GALLO D.; SHERRELL A. et al. *Use of REMUS 6000 in the Search for the Air France Flight 447 Wreckage* // Proceedings of the OCEANS 2011 MTS/IEEE Conference, September 19–22, 2011, Kona, USA.
23. RICHARDS A., BELLINGHAM J., TILLERSON M., HOW J. *Coordination and control of multiple UAVs* // AIAA Conference on Guidance, Navigation, and Control, August 5–8, 2002, Monterey, USA.
24. SUJIT P.B., SINHA A., GHOSE D. *Multiple UAV Task Allocation using Negotiation* // Proceedings of the fifth international joint conference on Autonomous agents and multiagent systems AAMAS-2006, Hakodate, Japan, May 8–12, 2006. – P. 471–478.
25. *The Travelling Salesman Problem and Its Variations* / G. Gutin, A.P. Punnen Eds. – Springer, 2002. – 830 p.

26. ULAM P., ENDO Y., WAGNER A. et al. *Integrated Mission Specification and Task Allocation for Robot Teams - Design and Implementation* // IEEE International Conference on Robotics and Automation, April 10–14, 2007, Roma, Italy – P. 4428–4435.
27. YUEYUE D., BEAUJEAN P., AN E. et al. *Task allocation and path planning for collaborative AUVs operating through an underwater acoustic network* // Proceedings of the OCEANS 2010 MTS/IEEE Conference, September 20–23, 2010, Dania Beach, USA.

DEVELOPING ALGORITHMS OF AUVS GROUP BEHAVIOUR FOR UNDERWATER LOCAL HETEROGENEITIES SURVEY PROBLEM

Igor Tuphanov, Institute for Marine Technology Problems FEB RAS, post-graduate student (ituphanov@gmail.com).

Alexander Scherbatyuk, Institute for Marine Technology Problems FEB RAS, PhD, head of laboratory (scherba@marine.febras.ru).

Abstract: A problem of search and size estimation of underwater local heterogeneities in a given area is considered. We introduce an approach to both localize heterogeneities and to estimate their dimensions and mass of substance dissolved. We suggest the method for planning work of a group of autonomous underwater vehicles /AUVs/, solving this problem. The corresponding discrete optimization problem is stated and two solution algorithms are considered. We also discuss a question of group actions re-planning in case of emergencies during an operation. The results of modeling for considered algorithms are provided.

Keywords: group of autonomous underwater vehicles, group behavior, planning, underwater local heterogeneities.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии В. Ю. Рутковским

УДК 004.738
ББК 30

ОРГАНИЗАЦИЯ ЗАЩИЩЕННОГО НТТР-ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В МУЛЬТИ-СЕТЕВОЙ СРЕДЕ

Асратян Р. Э.¹, Лебедев В. Н.²

(Учреждение Российской академии наук
Институт проблем управления РАН, Москва)

Рассматривается проблема организации информационного взаимодействия в территориально-распределенных информационно-управляющих системах, разрабатываемых на базе технологии .NET и ориентированных на работу в сложной мульти-сетевой среде, включающей множество частных сетей предприятий. Предлагается подход к решению этой проблемы, основанный на создании защищенных межсетевых каналов на базе системы прокси-серверов, оснащенных средствами маршрутизации НТТР-взаимодействий по символическим именам сетевых узлов и ресурсов.

Ключевые слова: распределенные системы, интернет-технологии, сетевые протоколы, веб-сервисы

1. Введение

В последние годы наблюдается все больший рост интереса к методам построения территориально-распределенных систем, обеспечивающих межведомственную и даже транснациональную интеграцию информационных ресурсов. Это, в свою очередь, привлекло внимание к методам организации информаци-

¹ Рубен Эзрасович Асратян, кандидат технических наук, доцент (rea@ipu.ru).

² Виталий Николаевич Лебедев, кандидат технических наук, доцент (lebvini@ipu.ru).

онного взаимодействия в сложной, мульти-сетевой среде, включающей множество частных сетей предприятий, соединенных ведомственными и интернациональными глобальными сетями.

Разработчики информационных систем, ориентированных на работу в таких средах, обычно сталкиваются с двумя противоречивыми требованиями, прямо связанными с обеспечением информационной безопасности:

- все информационные ресурсы системы (серверы приложений, серверы баз данных) должны быть «спрятаны» в частных сетях предприятий с исключением возможности прямого соединения с ними из глобальных сетей;
- должен быть обеспечен контролируемый доступ к каждому из этих ресурсов с клиентских рабочих мест, независимо от того, размещены ли они в разных частных сетях или в одной (и даже в том случае, если эти частные сети подсоединены к разным глобальным сетям).

Эти требования могут быть удовлетворены только путем решения двух взаимосвязанных проблем: проблемы маршрутизации данных в мульти-сетевой среде и проблемы их защиты от несанкционированного доступа. Данная работа главным образом посвящена методам решения проблемы маршрутизации информационных запросов в разработках распределенных мульти-сетевых систем на базе технологии *.NET* и сетевого протокола *HTTP/SOAP* [6, 9].

Долгое время казалось, что имеющиеся в Интернете средства *IP*-маршрутизации (вместе с такими мощными механизмами, как *DNS*, *NAT*, протоколы обмена маршрутной информацией *IGP*, *EGP* и т.п.) полностью решают проблему маршрутизации данных в сети вообще и в распределенных системах в частности. В самом деле, зачем нужно придумывать средства маршрутизации на транспортном уровне или уровне приложения, если они уже имеются на базисном сетевом уровне стека (иерархии) протоколов *TCP/IP* [4, 7]?

Возникшие в последние годы новые тенденции и приоритеты в подходах к построению распределенных систем показывают, что это не совсем так. Повышение внимания к структурам

множественных частных сетей все чаще приводит к ситуации, в которой затруднительно или даже невозможно обеспечить маршрутизацию и управление доступом на сетевом уровне – уровне управления *IP*-датаграмм. В такой ситуации могут оказаться востребованными средства маршрутизации по интернет-именам (или корпоративным именам) ресурсов, реализуемые на уровне приложения стека протоколов *TCP/IP*.

2. Средства поддержки взаимодействий между частными сетями

Как известно, Интернет является сетью с коммутацией пакетов и изначально построен как «сеть сетей» – его основу составляют локальные сети предприятий, соединенные с помощью межсетевых маршрутизаторов – выделенных компьютеров, присоединенных к двум или более сетям одновременно [4, 7]. Когда программа, работающая в одной локальной сети, открывает соединение и начинает информационный обмен с программой, работающей в другой локальной сети, возникает двунаправленный поток *IP*-датаграмм (пакетов), проходящий через один, два или целую цепочку маршрутизаторов. Хотя на пользовательском уровне используются символические (доменные) имена сетевых узлов и информационных ресурсов, обычная схема организации взаимодействия в Интернете включает трансляцию доменных имен в *IP*-адреса еще до открытия сетевого соединения. Собственно открытие соединения и маршрутизация данных целиком базируются на *IP*-адресах, которые заносятся в заголовок каждой датаграммы. Разумеется, уникальность *IP*-адреса любого узла сети в пределах всего Интернета является основой для процесса маршрутизации.

Разработчики стека (иерархии) протоколов *TCP/IP* придерживались твердого правила: любой сетевой механизм должен быть реализован на возможно более низком уровне стека для максимальной разгрузки вышестоящих уровней. Например, реализованные на сетевом уровне средства маршрутизации данных в сети (*IP*-датаграмм) стали наиболее фундаментальным

механизмом в Интернете и позволили избавиться все протоколы транспортного и прикладного уровня от необходимости решения этой задачи. (Фактически только средства электронной почты сегодня имеют еще и свой собственный прикладной механизм маршрутизации данных, сохранившийся еще с «доинтернетовских» времен.) Тем не менее, данный подход порождает проблемы, связанные с так называемыми частными сетями предприятий

Главная особенность частных сетей заключается в их изолированности от всемирной сети, т.е. в невозможности прямого взаимодействия между программами, если одна из них работает в частной сети, а другая вне нее, без применения специальных средств (даже при наличии физического соединения через маршрутизатор). Сама постановка вопроса о маршрутизации *IP*-датаграмм между Интернетом и частной сетью или между различными частными сетями является в значительной степени бессмысленной, так как частные сети используют одинаковые диапазоны *IP*-адресов, т.е. один и тот же сетевой адрес может использоваться во множестве частных сетей (особенно если они администрируются независимо). Первоначально применение частных сетей объяснялось в основном дефицитом уникальных *IP*-адресов, но с течением времени на первый план вышли сообщения информационной безопасности.

Рассмотрим в качестве примера мульти-сетевую среду, изображенную на рис. 1. Если сервер WS_2 в частной локальной сети LAN_2 имеет такой же *IP*-адрес, как сервер WS_3 в частной локальной сети LAN_3 , то одновременное взаимодействие с ними из рабочей станции *PC*, размещенной в частной локальной сети LAN_1 , попросту невозможно.

Для организации взаимодействия между частными сетями традиционно используются две основные сетевые технологии.

- *NAT (Network Address Translation)* [7, 8] – основная технология наведения «информационных мостов» между частными сетями и внешним миром. Технология основана на замене *IP*-адресов, содержащихся в заголовках *IP*-датаграмм, при прохождении ими сетевых маршрутизаторов. Чаще всего она использует

ется для обеспечения возможности обращения клиентов из частной сети к внешним серверам. Однако эта же технология может быть использована и для решения обратной задачи – доступа извне к серверам, размещенным в частной сети. Эта задача решается путем присваивания таким серверам «внешних» уникальных *IP*-адресов в дополнение к «внутренним» частным *IP*-адресам, что делает их доступными для внешних клиентов (т.е. клиентов, размещенных вне частной сети). Главный недостаток технологии лежит в области информационной защиты: присваивание внешнего *IP*-адреса открывает сервер для внешних атак, а передаваемые данные остаются незащищенными от несанкционированного доступа. Применение дополнительных средств защиты типа межсетевых экранов [8] способно лишь частично исправить положение. (Все сказанное можно в полной мере отнести и к технологии *Port forwarding*, основанной на присваивании «внешних» номеров портов внутренним ресурсам частной сети.)

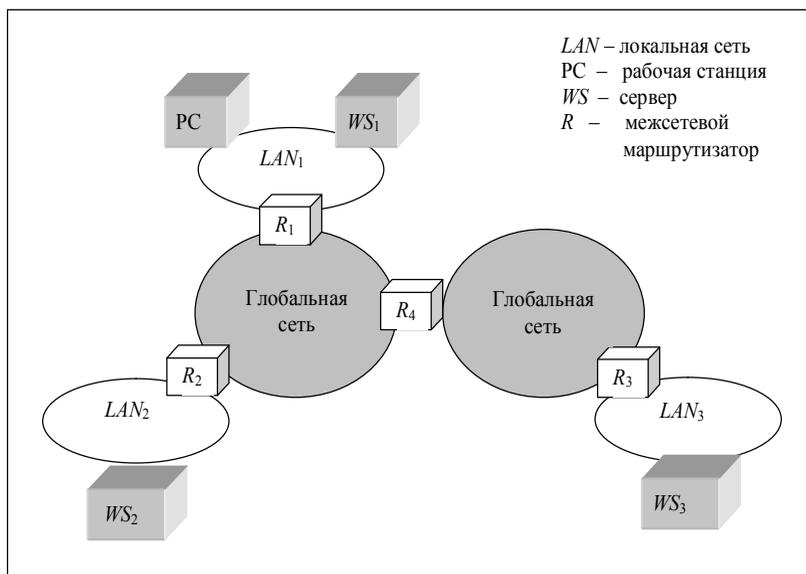


Рис. 1. Пример мульти-сетевой среды

- *VPN (Virtual Public Network)* [7, 8] – технология построения защищенных каналов взаимодействия через общедоступную глобальную сеть, позволяющая связать две или более удаленных локальных сетей в одну территориально-распределенную частную сеть с единым жестким администрированием, гарантирующем уникальность *IP*-адресов в пределах всей распределенной сети. Технология основана на передаче *IP*-датаграмм «поверх» другого протокола, оснащенного средствами информационной защиты (например, *PPP* или *IPSec*). В отличие от *NAT*, технология *VPN* содержит все необходимые средства защиты данных от несанкционированного доступа. Однако при наличии большого числа частных сетей, принадлежащих различным организациям, требование жесткого централизованного администрирования становится практически нереализуемым.

Можно констатировать, что вышеописанные технологии не вполне адекватны задаче организации информационного взаимодействия в мульти-сетевой среде. Поэтому на практике в рассматриваемой ситуации разработчики чаще всего прибегают к эвристическим приемам, привязанным к особенностям конкретной системы. Например, в разработках на базе технологии веб-сервисов [9] создают специальные межсетевые сервисы-ретрансляторы, приспособленные к конкретным спецификациям удаленных запросов.

Далее мы рассмотрим новое решение данной задачи, основанное на дополнении механизма маршрутизации *IP*-датаграмм по *IP*-адресу (реализуемого на сетевом уровне иерархии протоколов), новым механизмом маршрутизации, реализуемом на уровне протокола приложения (в данном случае – на уровне *HTTP*). Этот механизм маршрутизации основан не на *IP*-адресах, а на символических именах серверов и информационных ресурсов, что обеспечивает новые возможности при работе в мульти-сетевой среде. Разумеется, между двумя механизмами есть определенная аналогия, так как оба они используют адресную информацию, сопровождающую передаваемые данные: или *IP*-адрес, содержащийся в заголовке *IP*-датаграммы, или символическое имя сетевого информационного ресурса (*URL – Univer-*

sal Resource Locator), содержащееся в заголовке *HTTP*-запроса. Идея подхода заключается в создании специальных каналов межсетевого взаимодействия, основанных на маршрутизации запросов по символическим именам узлов и ресурсов.

3. Маршрутизация *HTTP*-взаимодействий по символическим именам

Описываемый подход к построению каналов межсетевого взаимодействия основан на технологии прокси-серверов. А эта технология, в свою очередь, основана на том, что в заголовке *HTTP*-запроса всегда сохраняется символическое наименование адресуемого сетевого информационного ресурса (*URL*).

Прокси-сервером называется сервер-посредник между *HTTP*-клиентом и *HTTP*-сервером, который позволяет осуществлять информационное взаимодействие в ситуации, когда прямое соединение между ними невозможно или нежелательно. Построение канала межсетевого взаимодействия основано на последовательном (каскадном) включении специализированных прокси-серверов и реализуется с использованием следующих принципов.

- Каждая частная сеть, могущая быть источником межсетевых *HTTP*-запросов (т.е. запросов, направленных в другие сети), оснащается так называемым выходным прокси-сервером, осуществляющим «перехват» запросов для передачи их во внешние сети. Каждая частная сеть, содержащая информационные ресурсы, доступные для внешних источников запросов, оснащается так называемым входным прокси-сервером, осуществляющим прием запросов из внешних сетей. Прокси-серверы размещаются на сетевом маршрутизаторе частной сети, причем выходной прокси-сервер «прослушивает» запросы на внутреннем сетевом интерфейсе маршрутизатора, а входной – на внешнем.

- Работа каждого прокси-сервера управляется соответствующей таблицей маршрутизации запросов. Таблица маршрутизации выходного прокси-сервера ставит в соответствие символическим именам удаленных узлов и/или информационных

ресурсов *IP*-адреса (или интернет-имена) входных прокси-серверов соответствующих частных сетей (точнее – адреса их внешних сетевых интерфейсов). Таблица маршрутизации входящего прокси-сервера связывает символические имена удаленных узлов и/или информационных ресурсов с *IP*-адресами или *URL* адресуемых ресурсов в частной сети.

- Обработка *HTTP*-запроса в межсетевом канале включает несколько этапов. Вначале каждый запрос попадает на вход выходного прокси-сервера (это обеспечивается или системной настройкой, общей для всех *HTTP*-клиентов в каждой рабочей станции, или с помощью соответствующей настройки маршрутизатора частной сети – технология «прозрачного» прокси). Дальнейшую «судьбу» запроса определяет анализ *URL* адресуемого информационного ресурса, содержащийся в его заголовке. Этот *URL* может быть основан или на анонсированном корпоративном, ведомственном или интернациональном имени узла или ресурса. Сопоставив это имя с таблицей маршрутизации, выходной сервер находит *IP*-адрес удаленного входного прокси-сервера, в котором должна быть продолжена обработка запроса. Продолжение обработки включает определение *IP*-адреса или *URL* адресуемого ресурса в частной сети, организацию обращения к ресурсу, получение *HTTP*-ответа и отправку его удаленному клиенту по тому же пути, но в противоположную сторону. Таким образом, маршрутизация всегда осуществляется, по крайней мере, в два этапа: сначала с точностью до удаленной частной сети (входного прокси-сервера), а затем – с точностью до конкретного ресурса в удаленной сети (если участвующие в обработке частные сети подсоединены к разным глобальным сетям, то могут понадобиться дополнительные прокси-серверы, размещенные на границах глобальных сетей).

- В течение всего времени обработки запроса вплоть до получения ответа соединение между клиентом и выходным прокси-сервером остается открытым, т.е. взаимодействие осуществляется без разрушения режима *on-line*.

Легко видеть, что поэтапная маршрутизация запроса оставляет значительную свободу в администрировании каждой част-

ной сети. Например, при перемещении информационного ресурса с одного узла на другой внутри сети администратору достаточно откорректировать таблицу маршрутизации собственного входного прокси-сервера (не ставя в известность об этой коррекции никого из удаленных клиентов).

Таблица маршрутизации подготавливается в форме текстового файла, каждая строка которого сопоставляет или имя удаленного узла или ресурса с его *IP*-адресом или же «внешнее» имя сетевого ресурса с альтернативным «внутренним» именем. Строку таблицы можно рассматривать как определение имени удаленного узла или ресурса. Поясним это на следующем коротком примере.

Рассмотрим ситуацию с тремя локальными частными сетями: LAN_1 , LAN_2 и LAN_3 (см. рис. 2). Каждая из частных сетей оснащена выходным (*O*) и входным (*I*) прокси-серверами, обеспечивающими взаимодействие LAN_1 с LAN_2 и LAN_3 .

Предположим, что в LAN_2 на узле с *IP*-адресом 192.168.0.1 установлен веб-сервер, в котором имеется веб-сервис с *URL* <http://192.168.0.1/Vehicle/Service.asmx>, а в таблице маршрутизации входного прокси-сервера имеется строка определения «внешнего» имени ресурса:

<http://federal.vehicledb.ws>

<http://192.168.0.1/Vehicle/Service.asmx>

Эта строка означает, что упомянутый веб-сервис анонсирован для внешних клиентов под именем <http://federal.vehicledb.ws>.

Предположим также, что в LAN_3 на узле с тем же *IP*-адресом 192.168.0.1 установлен веб-сервер, в котором имеется веб-сервис с *URL* <http://192.168.0.1/Person/Service.asmx>, а в таблице маршрутизации входного прокси-сервера имеется строка определения «внешнего» имени ресурса:

<http://omsk.persondb.ws>

<http://192.168.0.1/Person/Service.asmx>

Эта строка означает, что упомянутый веб-сервис анонсирован для внешних клиентов под именем <http://omsk.persondb.ws>.

Внесем в таблицу маршрутизации выходного прокси-сервера в LAN_1 две строки:

federal.vehicledb.ws 197.20.100.10

omsk.persondb.ws 194.88.200.11

где 197.20.100.10 и 194.88.200.11 – IP-адреса входных прокси-серверов LAN_2 и LAN_3 соответственно. С этого момента обращение клиентской программы из LAN_1 по URL **http://federal.vehicledb.ws** приведет к вызову веб-сервиса в LAN_2 , а обращение по URL **http://omsk.persondb.ws** приведет к вызову веб-сервиса в LAN_3 . Другими словами, совпадение IP-адресов обоих серверов в частных сетях в данном случае не является препятствием для одновременной работы с обоими веб-сервисами. Подчеркнем три важных обстоятельства.

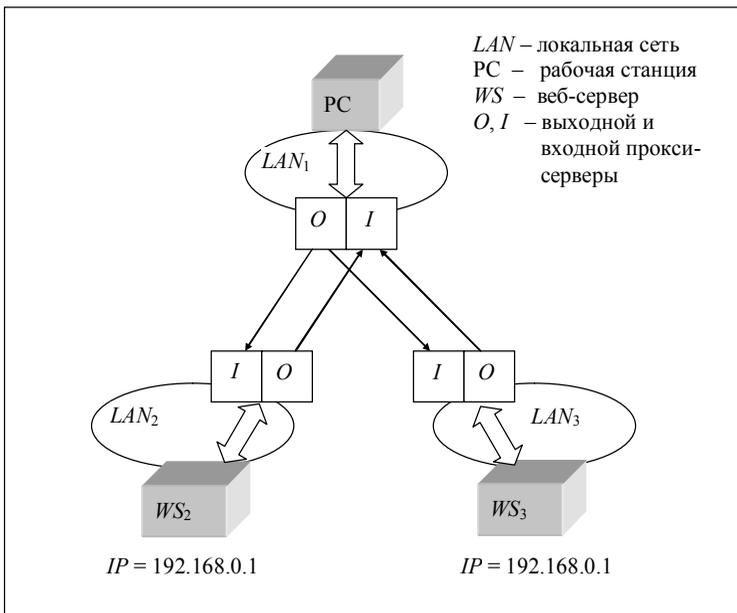


Рис. 2. Каналы межсетевого взаимодействия

- Обращение к удаленному ресурсу по имени, содержащему дополнительные спецификации, например, **http://federal.vehicledb.ws?wsdl**, в итоге приведет к обращению к ресурсу **http://192.168.0.1/Vehicle/Service.asmx?wsdl**. Другими словами, межсетевой канал вполне можно использовать не

только для обращения к методам удаленного веб-сервиса, но и для считывания метаданных и спецификаций функций в процессе проектирования клиентских приложений.

- В выходном прокси-сервере допускается определение маршрута для группы символических имен одной строкой. Если в таблице маршрутизации указан фрагмент имени, заканчивающийся символом «точка», то данная строка задает правило маршрутизации для всех имен, начинающихся с этого фрагмента. Например, если внести в таблицу маршрутизации выходного прокси-сервера в LAN_1 строку

tomsk. 195.88.210.21

то обращение клиентской программы по любому *URL*, начинающемуся со строки `http://tomsk.` (например, `http://tomsk.persondb.ws` или `http://tomsk.docdb.ws` и т.п.), будет «перенаправляться» на входной прокси-сервер по адресу 195.88.210.21. Данная возможность позволяет устранить необходимость корректировать таблицу маршрутизации выходного прокси-сервера при появлении каждого нового информационно-ресурса в удаленных частных сетях

- Если бы почему-либо понадобилось переместить, например, веб-сервис `http://192.168.0.1/Person/Service.asmx` на другой узел в той же частной сети, то простой коррекции таблицы маршрутизации входного прокси-сервера было бы достаточно, чтобы никто из внешних клиентов не заметил этого изменения.

4. Структура прокси-сервера

И входной и выходной прокси-серверы представляет собой постоянно активные программы, реализованные в форме системного сервиса (в платформе *Win32*) [1] и в форме «демона» (в платформе *UNIX*) [5]. Оба способа реализации используют одну и ту же общую структуру прокси-сервера, изображенную на рис. 3 (и даже общий исходный код на языке *C++*).

Любая деятельность в прокси-сервере инициируется функцией «Приемник соединений», в которой реализован «вечный цикл» прослушивания входящих соединений на специальном

выделенном порте. Обнаружив запрос на входящее соединение, «Приемник соединений» порождает обрабатывающую программную нить для обслуживания этого соединения, организует двунаправленный *TCP*-канал, связывающий созданную программную нить с программой клиента, и возвращается к прослушиванию входящих соединений. Вся содержательная обработка выполняется в рамках программной нити. Эта обработка включает прием *HTTP*-запроса по сети, его анализ и извлечение *URL* адресуемого ресурса из заголовка запроса (функция «Обработчик первичных соединений») и обращение к таблице маршрутизации для определения направления дальнейшего продвижения запроса. Функция «Обработчик вторичных соединений» обеспечивает установление соединения со следующим сервером (для выходного прокси-сервера это может быть входной прокси-сервер удаленной частной сети, а для входного прокси-сервера – веб-сервер, поддерживающий адресуемый сетевой ресурс) с помощью функции «Коннектор».

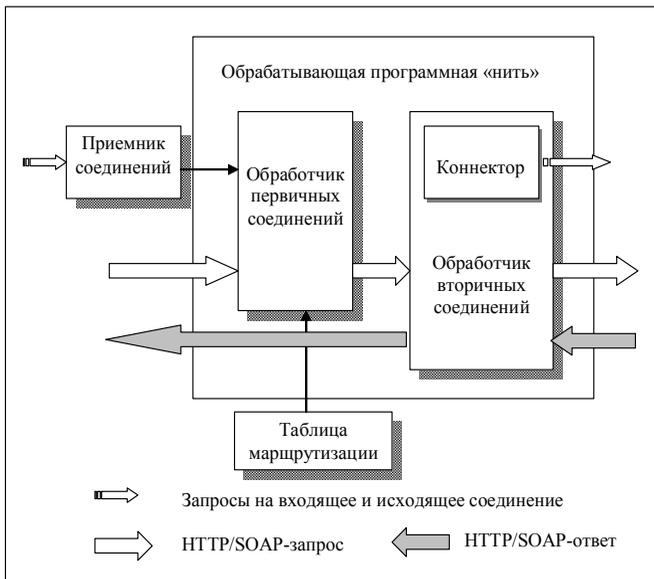


Рис. 3. Структура прокси-сервера

5. Взаимодействие между прокси-серверами

До сих пор мы намеренно не акцентировали внимание на вопросе о сетевом протоколе, используемом для взаимодействия между прокси-серверами. Вернее, предполагался простейший вариант: использование *HTTP* во всех «звеньях» межсетевого канала. Однако данный вариант не является ни единственно возможным, ни наиболее предпочтительным. Любой сетевой протокол, способный обеспечить передачу *HTTP*-запроса от одного сервера до другого и ответа в обратном направлении, может быть использован в этом звене без нарушения «прозрачности» канала для *HTTP*-клиента и *HTTP*-сервера.

Так как взаимодействие между прокси-серверами осуществляется через глобальную сеть, главным требованием к его организации является обеспечение защиты от несанкционированного доступа. С этой точки зрения данное взаимодействие может быть построено на базе целого ряда сетевых технологий.

- Протокол *HTTPS* представляет собой обычный протокол *HTTP*, организованный «поверх» защищенного *TCP*-соединения на базе технологии *SSL (Secure Socket Layer)*. *HTTPS* оснащен необходимыми средствами авторизации и криптозащиты данных и представляет собой одно из наиболее эффективных решений для организации межсетевых каналов.

- Протоколы *PPP* и *IPSec* уже упоминались в данной статье в качестве базовых технологий организации виртуальных частных сетей. Оба протокола предполагают шифрование потока данных на уровне отдельных *IP*-датаграмм и строгую авторизацию клиента, открывающего сетевое соединение. В сущности, применение этих технологий в данном случае означает связывание всех выходных и входных прокси-серверов в одну виртуальную частную сеть.

- Протокол *RFPP* представляет собой сетевую технологию, специально ориентированную на поддержку удаленного взаимодействия в распределенных системах. Главными его особенностями являются устойчивость к сетевым сбоям, наличие собственных средств защиты от несанкционированного доступа

и межсерверной маршрутизации данных, а также возможность совмещения передачи данных с их обработкой на разных серверах. Эти свойства *RFPP* могут быть эффективно использованы при построении каналов межсетевого обмена данными [2, 3].

6. Заключение

Задача организации информационного взаимодействия в мульти-сетевой среде, включающей множество частных сетей предприятий, все чаще «выходит на первый план» в разработках распределенных систем. Несмотря на более чем двадцатилетнюю историю развития Интернета, следует признать, что решение этой задачи совершенно недостаточно поддержано современными сетевыми технологиями.

Если необходимо обеспечить защищенное взаимодействие между большим количеством (десятки и сотни) независимо администрируемых частных сетей, то требование уникальности *IP*-адресов информационных ресурсов может оказаться невыполнимым, а использование *VPN* – невозможным. В подобной ситуации разработчик обычно бывает вынужден тратить время и силы на создание собственных средств решения этой проблемы, приспособленных к особенностям конкретного проекта.

Рассмотренный в данной статье метод организации удаленных взаимодействий в мульти-сетевой среде не относится к числу международно-признанных интернет-технологий, прошедших соответствующую стандартизацию. К его недостаткам можно отнести жесткую ориентацию на протокол *HTTP/SOAP* и дополнительную задержку, вносимую серверами-посредниками (хотя эта задержка измеряется долями секунды, она может заметно снизить производительность системы с высокой интенсивностью межсетевых запросов). Тем не менее, он может рассматриваться, как одно из возможных «общих решений» вышеупомянутой задачи, избавляющих разработчиков от необходимости создания собственных средств организации взаимодействия в мульти-сетевой среде в каждом конкретном проекте.

Опыт реализации описываемого подхода (на платформах *Win32* и *UNIX/Linux*) и его применения в разработках распределенных систем на базе технологии *.NET* показал его удобство для разработчика и достаточно высокую универсальность:

- подход может применяться в мульти-сетевых структурах самой различной размерности и сложности;
- однажды созданная система каналов межсетевого взаимодействия может быть использована различными автоматизированными системами, работающими в одной и той же сетевой среде.

Отметим, что межсетевой канал является абсолютно «прозрачным» и для *HTTP*-клиента и для *HTTP*-сервера (последние могут даже не подозревать о его существовании), а его работа совершенно не зависит от структуры и содержания передаваемых по нему информационных запросов (например, от набора веб-сервисов и спецификаций их методов).

Литература

1. АНДРЕЕВ А.Г., БЕЗЗУБОВ Е.Ю., ЕМЕЛЬЯНОВ М.М. и др. *Windows 2000: Server и Professional*. – СПб.: «БХВ-Санкт-Петербург», 2001. – 1055 с.
2. АСРАТЯН Р.Э., ЛЕБЕДЕВ В.Н. *Интернет-служба обеспечения информационного взаимодействия в современных распределенных гетерогенных системах*. – М.: ЛЕНАНД, 2009. – 128 с.
3. АСРАТЯН Р.Э. *Межсерверная маршрутизация HTTP/SOAP-взаимодействий в распределенных системах // Проблемы управления*. – 2008. – №5. – С. 57–61.
4. ДЖАМСА К., КОУП К. *Программирование для Интернет в среде Windows*. – СПб.: Питер, 1996. – 659 с.
5. КЕЛЛИ-БУТЛ С. *Введение в Unix*. – М.: ЛОРИ, 1995. – 596 с.
6. МАК-ДОНАЛЬД М., ШПУШТА М. *Microsoft ASP.NET 3.5 с примерами на C# 2008 и Silverlight 2 для профессионалов*. — М.: Вильямс, 2009 – 1408 с.

7. СНЕЙДЕР Й. *Эффективное программирование TCP/IP. Библиотека программиста.* – СПб.: Символ-Плюс, 2002. – 320 с.
8. ХАНТ К. *TCP/IP. Сетевое администрирование.* – СПб.: Питер, 2007. – 816 с.
9. ШАПОШНИКОВ И.В. *Web-сервисы Microsoft .NET.* – СПб.: «БХВ–Петербург», 2002. – 336 с.

ORGANIZATION OF PROTECTED HTTP-INTERACTION IN MULTI-NETWORK ENVIRONMENT

Ruben Asratian, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Cand.Sc., assistant professor (rea@ipu.ru).

Vitali Lebedev, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Cand.Sc., assistant professor (lebvini@ipu.ru).

Abstract: The problem is considered of information interchange in .NET-based geographically distributed information systems designed for complex multi-network environments consisting of several private enterprise networks. We suggest using the protected inter-network channels based on a system of proxy servers. The servers route HTTP-interactions using names of network nodes and resources.

Keywords: distributed systems, Internet-based technologies, network protocols, web-services.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии А. А. Печниковым

УДК 004.738.5:519.7

ББК 32.973-22.18

АДАПТИВНЫЙ КРАУЛЕР ДЛЯ ПОИСКА И СБОРА ВНЕШНИХ ГИПЕРССЫЛОК

Печников А. А.¹,

*(Учреждение Российской академии наук
Институт прикладных математических исследований
КарНЦ РАН, Петрозаводск)*

Чернобровкин Д. И.²

*(Факультет прикладной математики -
процессов управления Санкт-Петербургского
государственного университета, Санкт-Петербург)*

Описывается поисковый робот (краулер), предназначенный для сбора информации об исходящих гиперссылках с задаваемого множества сайтов, относящихся к одной тематике. Адаптивное поведение краулера сформулировано в терминах задачи о многоруком бандите. Проведенные эксперименты показывают, что выбор адаптивного алгоритма рационального поведения краулера зависит от тематики множества сайтов.

Ключевые слова: гиперссылка, поисковый робот, адаптивное поведение, задача о многоруком бандите, индексы Гиттинса.

1. Введение

Концептуальная модель фрагмента Веба [2] строится на основе задаваемого множества веб-сайтов, относящихся к одной тематике и являющихся регламентируемыми, т.е. создающихся и развивающихся по заранее сформулированным правилам, утвержденным в виде нормативных документов организаций-

¹ Андрей Анатольевич Печников, доктор технических наук, доцент (pechnikov@krc.karelia.ru).

² Денис Игоревич Чернобровкин, аспирант (denis_univer@mail.com).

владельцев ресурсов. Примерами тематических целевых множеств служат официальные веб-сайты институтов Санкт-Петербургского научного центра РАН и официальные веб-сайты высших учебных заведений Санкт-Петербурга. Анализ внешних гиперссылок, сделанных с веб-сайтов целевого множества, позволяет построить так называемое «сопутствующее множество» – множество сайтов, не входящих в целевое множество, на которые имеются гиперссылки с целевого множества. Сопутствующее множество разбивается на несколько непересекающихся подмножеств, в зависимости от степени связности входящих в них сайтов с сайтами целевого множества. Концептуальная модель фрагмента Веба представляет собой набор множеств, состоящий из целевого множества и подмножеств сопутствующего множества, заданных на них отношениями, определяющих структуру фрагмента Веба, а также атрибутов множеств и отношений, задающих их характеристики (термин «концептуальная модель» понимается в смысле работы [5]). Реализация концептуальных моделей для различных фрагментов российского Веба [1, 3, 4] позволяет сделать выводы об их организации и предложить решение ряда задач по улучшению их присутствия в Вебе.

В более широком контексте построение и исследование концептуальных моделей фрагментов Веба относится к такому направлению вебометрики, как гиперссылочный анализ (*link analysis*) [12], существенное место в котором отводится краулерам (поисковым роботам), – специализированным программам, использующим графовую структуру Веба для перемещения по страницам веб-сайтов с целью сбора требуемой информации. В общем случае задача краулинга может рассматриваться как многоцелевая задача поиска с ограничениями, где большое разнообразие целевых функций вместе с нехваткой соответствующих знаний о месте поиска делает задачу весьма сложной [9].

Возвращаясь к теме построения концептуальной модели фрагмента Веба для заданного тематического целевого множества, заметим, что её основой является база данных внешних гиперссылок, связывающих веб-сайты модели. Краулер, формирующий в процессе сканирования веб-сайтов такую базу дан-

ных, очевидно, должен быть избирательным и адаптивным [9]. Избирательность краулера в нашем случае определяется его направленностью на поиск внешних гиперссылок (с некоторой дополнительной информацией о них, например, контекстом гиперссылки). Адаптивность краулера заключается в том, что за заданное (ограниченное) время должно быть найдено максимально возможное количество внешних гиперссылок, что обеспечивает более полный охват веб-сайтов, входящих в сопутствующее множество.

В статье описана структура и базовые функции разработанного краулера *BeeBot* («робот-пчела»), предназначенного для сбора внешних гиперссылок с веб-сайтов заданного целевого множества. Задача о нахождении максимального количества внешних гиперссылок за конечный период времени сформулирована как задача о многоруком бандите [6] и предложены три алгоритма её решения. Были проведены сравнительные эксперименты на множестве официальных веб-сайтов университетов и научных институтов Санкт-Петербурга, показывающие, что выбор алгоритма рационального поведения краулера во многом зависит от тематики сканируемого множества сайтов. Этот результат затем используется для управления процессом сканирования *BeeBot*: для официальных веб-сайтов университетов и для веб-сайтов научных институтов используются различные алгоритмы адаптивного поведения.

2. *BeeBot* – краулер для сбора внешних гиперссылок

Работу краулера можно описать следующим образом [9]: сканирование сайта начинается с начальной страницы и затем робот использует ссылки, размещенные на ней, для перехода на другие страницы. Каждая страница сайта анализируется на наличие требуемой информации, которая копируется в соответствующее хранилище в случае обнаружения. Процесс повторяется до тех пор, пока не будет проанализировано требуемое число страниц либо пока не будет достигнута некая цель. Такое описание работы краулера является слишком общим, и далее мы

конкретизируем его для специфических моментов, связанных с разработкой и реализацией *BeeBot*.

Далее нам понадобится следующее определение уровня страницы веб-сайта: считаем, что начальная страница сайта имеет уровень 0, а уровень любой другой страницы сайта – это минимальное количество внутренних гиперссылок, ведущих от начальной страницы к данной.

BeeBot состоит из трех основных частей: база данных, блок управления краулером (включая интерфейс пользователя и представление результатов) и блок сканирования и обработки данных. В качестве основы для базы данных была выбрана бесплатная версия СУБД *Microsoft SQL Server 2008 R2 Express Edition*, поскольку с ней легко интегрируются приложения платформы *.NET*. В частности, используется технология *Entity Framework*, позволяющая представлять данные в виде объектов, что упрощает работу с БД.

Для хранения информации используется 5 таблиц: *Crawler Settings*, *Seeds*, *External Link*, *Internal Links*, *Bad Links*. В таблице *Crawler Settings* хранятся настройки для краулера. Например, значение одной из настроек ограничивает максимальный уровень страниц, до которого может дойти краулер в процессе сканировании веб-сайта. Это значение устанавливается по умолчанию и распространяется на все сканируемые сайты.

Таблица *Seeds* содержит начальную информацию обо всех сканируемых веб-сайтах. Начальная информация о каждом веб-сайте задается пользователем и представляет собой номер сайта, полное название сайта, его краткое название и начальный адрес – доменное имя сайта, с которого начинается сканирование. В таблице *Internal Links* хранятся сведения о внутренних ссылках, найденных на сканируемых сайтах. Они описываются собственно самой ссылкой, начальным адресом, страницей, на которой найдена внутренняя ссылка, уровнем этой страницы и её статусом, показывающим, обработана ли страница, соответствующая внутренней ссылке, краулером или нет. Таблица *External Links* содержит информацию обо всех найденных внешних гиперссылках. В этой таблице поля во многом анало-

гичны таблице *Internal Links*, за исключением того, что у внешней ссылки нет статуса обработки. Кроме того, добавлено поле, содержащее контекст гиперссылки (в частном случае – её анкор). Таблица *Bad Links* содержит так называемые «плохие ссылки». Например, это ссылка, которую краулер не смог воспринять, как корректную ссылку, хотя этот элемент был под тегом *href*. Также сюда могут попасть фрагменты *javascript*-кода, так как иногда веб-мастера вставляют его прямо в тело ссылки.

Рассмотрим блок управления *BeeBot* и пользовательский интерфейс. Пользователю предоставляются следующие возможности по управлению краулером: пуск/остановка работы краулера (надо отметить, что в случае прерывания краулер продолжит с места остановки, не потеряв ссылок), просмотр текущего списка сайтов, добавление новых и удаление ненужных сайтов. Также пользователю дается возможность просматривать собранные ссылки. Для этого разработано специальное окно, содержащее две отдельные страницы, где можно просматривать все собранные внешние и внутренние ссылки, фильтровать результаты и удалять выбранные ссылки. Просмотр результатов проходит в режиме «реального времени», т.е. прямо во время работы краулера: при нажатии на кнопку «*Refresh*» результаты будут обновлены.

Для управления последовательностью сканирования сайтов в состав блока управления входит модуль-планировщик, который в простейшем варианте работает следующим образом: после завершения сканирования очередного сайта из текущего списка выбирается следующий сайт. (Естественное завершение сканирования каждого сайта в этом случае возможно по двум причинам: сайт отсканирован полностью или отсканированы все его страницы до установленного максимального уровня).

Перейдем к блоку сканирования. Процесс сбора ссылок происходит следующим способом: из базы данных берутся начальные адреса всех сайтов и для каждого из них последовательно запускается процесс сканирования по обработке опреде-

ленного количества страниц с целью нахождения внешних гиперссылок.

Обработка страницы начинается с того, что краулер принимает попытку загрузки страницы и преобразует её в *XML*-документ с помощью библиотеки *HTMLAgilityPack*. Если в процессе стандартной процедуры загрузки произошел сбой или автоматически была выбрана неправильная кодировка, то страница загружается альтернативным методом, а именно, скачивается в бинарном формате и затем преобразуется в текстовый формат с уже определенной краулером кодировкой. Альтернативная загрузка нужна и в том случае, когда веб-сервер поддерживает кусочную (*chunked*) передачу данных [7, п. 3.6.1], поскольку стандартный загрузчик в данном случае скачивает только первый фрагмент данных, в котором может оказаться не весь *XML*-документ и неполная информация о странице.

Если процедура загрузки не выполняется, то сайт помечается в базе данных как *Not Available* и далее не обрабатывается. В случае если процедура загрузки прошла успешно, краулер считывает полученный *XML*-документ и собирает все доступные фреймы со страницы. Адреса фреймов, в свою очередь, также рассматриваются как внутренние ссылки и сохраняются в базе данных для будущей обработки.

После сбора фреймов краулер собирает все возможные ссылки со страницы (элементы с тегом «*href*»). Перед занесением в базу данных ссылка нормализуется. Как показано в [10], нормализация ссылки в виде приведения её как строки текста к нижнему регистру, а также удаления символа «\» в конце ссылки, приводит к потере менее процента уникальных ссылок, но при этом ведет к избавлению от 50% «семантических дубликатов» (ссылок, которые синтаксически не равны друг другу, но указывают на один и тот же ресурс). Такая нормализация используется в *BeeBot*, поскольку она не изменяет функционала гиперссылки.

Далее, в зависимости от того, к какому типу относится ссылка, она помещается в одну из таблиц *Internal Links* или *External Links* (есть и третий случай, когда «плохая» ссылка

помещается в таблицу *Bad Links*). Решение о том, в какую именно таблицу занести ссылку, краулер принимает на основе доменного имени, которое он извлекает из ссылки. Если доменное имя извлеченной ссылки совпадает с доменным именем сканируемого сейчас сайта, значит ссылка внутренняя, если нет, то внешняя. После завершения обработки страницы краулер извлекает из базы данных следующую необработанную внутреннюю ссылку с самым высоким уровнем для данного сайта. Таким образом, сканирование сайта можно представить как обход виртуального дерева сайта по принципу «вначале вширь».

В идеальном случае работа краулера завершается в том случае, когда будут полностью отсканированы все сайты из заданного списка. В реальности работа может быть завершена по истечении выделенного процессорного времени. На практике такой вариант завершения работы имеет недостатки. Например, если в списке сканируемых сайтов первым окажется сайт РАН (www.ras.ru), есть опасность затратить на него всё отведенное время. Естественным развитием модуля-планировщика является процедура управления последовательностью сканирования сайтов, последовательно выделяющая каждому сайту из текущего списка определенный квант времени для его сканирования. В этом случае даже по истечении выделенного процессорного времени будут частично (или полностью) отсканированы все сайты из списка.

3. Адаптивные алгоритмы

Вернемся к задаче, сформулированной во Введении: за ограниченное время необходимо найти максимально возможное количество внешних гиперссылок с веб-сайтов из заданного списка. Мы уже исключили из рассмотрения случай полного сканирования всех сайтов. Понятно также, что поведение краулера типа «на каждом сайте из целевого множества обрабатывается одинаковое количество страниц» вряд ли приводит к решению этой задачи. Количество внешних гиперссылок, находящихся на странице становится известным только после её обработки, поэтому выбор того или иного веб-сайта для скани-

рования его очередных страниц должен осуществляться на основе текущей (накапливаемой) информации. Таким образом, мы приходим к задаче, известной как задача о «многоруком бандите». Сформулируем её применительно к нашему случаю, используя обозначения и терминологию работ [6, 8].

В базовой формулировке задача о многоруком бандите определяется через случайные величины $X(i, j)$ для $1 \leq i \leq K$ и $j \geq 1$, где каждый индекс i соответствует игровому автомату, j – порядковому номеру игры с этим автоматом. Последовательная игра на автомате i приносит игроку доходы $X(i, 1), X(i, 2), \dots$, которые представляют независимые одинаково распределенные величины с неизвестным законом распределения и неизвестным математическим ожиданием. Независимость справедлива также и для выигрышей на различных машинах, т.е. $X(i, s)$ и $X(l, t)$ являются независимыми величинами (и обычно с различными распределениями) для любых $1 \leq i < l \leq K$ и $s, t \geq 1$. В нашем случае «игроком» является краулер, а переменные $X(i, 1), X(i, 2), \dots, X(i, j), \dots$, обозначают количество найденных на i -м сайте внешних гиперссылок на 1-й, 2-й, j -й и т.д. сканируемой странице (в порядке обхода «вначале вширь», как говорилось ранее), а K соответствует мощности сканируемого целевого множества. В такой постановке мы делаем допущение о том, что время сканирования любой страницы любого сайта одинаково, поэтому вместо суммарных затрат времени, выделяемых на сканирование всех сайтов, можно ввести суммарное количество планируемых для сканирования страниц, которое обозначим N . Из содержательной постановки следует, что $N \gg K$. Доход на одном шаге в этом случае равен количеству внешних гиперссылок, найденных на странице, поэтому $X(i, j) \geq 0$ для $1 \leq i \leq K$ и $1 \leq j \leq N$.

Решающее правило R – это алгоритм, который выбирает следующий сайт для сканирования, основываясь на последовательности предыдущих сканирований и полученного количества гиперссылок.

Пусть $T(i, n)$ означает количество страниц, отсканированных на сайте i за n сканирований на всех сайтах с использова-

нием правила R . Тогда суммарное количество внешних гиперссылок, найденных за n сканирований при использовании правила R , равно

$$S^R(n) = \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^{T(i,n)} X(i, j).$$

Задача заключается в разработке такого правила R^* , которое максимизирует значение функции $S^R(n)$ для заданного конечного горизонта сканирования N .

Известно, что в общем случае задача о многоруком бандите является \mathcal{NP} -полной задачей [12], поэтому для её решения предложены различные подходы с целью получения хороших результатов при относительно небольших затратах ресурсов. Далее мы описываем и сравниваем три решающих правила R_1 , R_2 и R_3 , первое из которых является тривиальным, второе построено с использованием индексов Гиттинса [8], а третье основано на алгоритме *UCB1*, предложенном в работе [6].

Правило R_1 («тривиальное правило»).

1. На каждом из K сайтов целевого множества последовательно сканировать первые $\lceil N/K \rceil$ страниц ($\lceil * \rceil$ – округление до ближайшего целого).

2. Оставшиеся $N - \lceil N/K \rceil$ страниц сканировать на сайте с номером i^* , для которого $i^* = \arg \max_{1 \leq i \leq K} \sum_{j=1}^{\lceil N/K \rceil} X(i, j)$.

$$3. S^{R_1}(N) := \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^{\lceil N/K \rceil} X(i, j) + \sum_{j=\lceil N/K \rceil+1}^{N-\lceil N/K \rceil} X(i^*, j).$$

4. Стоп.

Правило R_2 (индекс Гиттинса).

1. Задать шаг сканирования n ; $n \ll N$.

Для всех i : $s(i) := 0$ ($s(i)$ – промежуточные суммы, вспомогательные переменные).

2. На каждом сайте отсканировать n страниц.

3. Для всех i : $s(i) := s(i) + \sum_{j=1}^n X(i, j)$.

4. Для всех i : $Ind(i) := s(i)/n$; $t(i) := n$ ($Ind(i)$ – текущие значения индексов Гиттинса для каждого сайта; $t(i)$ – количество отсканированных страниц на каждом сайте).

5. Найти $i^* := \arg \max_{1 \leq i \leq K} Ind(i)$.

6. Отсканировать n страниц на сайте i^* .

7. $s(i^*) := s(i^*) + \sum_{j=t(i^*)}^{t(i^*)+n} X(i^*, j)$; $t(i^*) := t(i^*) + n$; $Ind(i^*) := s(i^*)/t(i^*)$.

8. Если $\sum_{i=1}^K t(i) < N$, то перейти к п. 5,

9. $S^{R2}(N) := \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^{t(i)} X(i, j)$

10. Стоп.

Правило R_3 (алгоритм $UCB1$).

1. Задать начальный шаг сканирования m ; $m \ll N$.

Для всех i : $s(i) := 0$ ($s(i)$ – промежуточные суммы, вспомогательные переменные).

2. На каждом сайте отсканировать m страниц.

3. Для всех i : $s(i) := s(i) + \sum_{j=1}^m X(i, j)$, $t(i) := m$.

4. Для всех i : $\bar{X}(i) := s(i)/t(i)$ ($\bar{X}(i)$ – промежуточные средние значения количества ссылок, собранных со страницы сайта).

5. $n := \sum_{i=1}^K t(i)$, $X_{\max} := \max_{\substack{1 \leq i \leq K \\ 1 \leq j \leq t(i)}} X(i, j)$.

6. Найти $i^* := \arg \max_{1 \leq i \leq K} \left(\frac{\bar{X}(i)}{X_{\max}} + \sqrt{\frac{2 \ln(n)}{t(i)}} \right)$.

7. $t(i^*) := t(i^*) + 1$.

8. Сканировать страницу $t(i^*)$ сайта i^* .

9. $s(i^*) := s(i^*) + X(i^*, t(i^*))$, $\bar{X}(i^*) := s(i^*)/t(i^*)$, $n := n + 1$.

10. Если $n \leq N$, то перейти к п. 5.

$$11. S^{R_2}(N) := \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^{t(i)} X(i, j).$$

12. Стоп.

4. Некоторые результаты

Для проведения эксперимента с целью апробации и сравнения трех решающих правил R_1 , R_2 и R_3 было взято 10 официальных веб-сайтов институтов Санкт-Петербургского научного центра РАН и 10 официальных веб-сайтов высших учебных заведений Санкт-Петербурга. Веб-сайты сканировались в период с 20 по 25 ноября 2011 г. на глубину до 5-го уровня включительно, общее количество обработанных *html*-страниц равняется 105711, а общее количество собранных внешних гиперссылок – 8990. В таблице 1 приведены сведения о некоторых сайтах (так называемое «выборочное множество», содержащее 5 научных и 5 вузовских сайтов), а в таблице 2 – итоговые результаты эксперимента.

В частности, из таблицы 1 можно увидеть, что веб-сайты существенно различаются по количеству *html*-страниц и внешних гиперссылок, причём это различие характерно как для научных, так и для вузовских сайтов.

Таблица 1. Выборочное множество

Название	Веб-сайт	Кол-во <i>html</i> -стр.	Кол-во внешних ссылок
Ботанический институт РАН	www.binran.ru	1298	29
Зоологический институт РАН	www.zin.ru	1100	69
Институт восточных рукописей РАН	www.orientalstudies.ru	2411	48

Таблица 1 (продолжение)

Институт русской литературы РАН (Пушкинский дом)	www.pushkinskijdom.ru	39292	3192
Институт лингвистических исследований РАН	www.iling.spb.ru	3523	129
Петербургский госуниверситет путей сообщения	www.pgups.ru	431	19
Российский государственный гидрометеорологический университет	www.rshu.ru	1766	409
Санкт-Петербургский государственный политехнический университет	www.spbstu.ru	1471	214
Санкт-Петербургский госуниверситет	www.spbu.ru	12935	903
Санкт-Петербургский госуниверситет экономики и финансов	www.finec.ru	7253	1048

Таблица 2. Результаты эксперимента

Множество	Количество сайтов	N	S^{R1}	S^{R2}	S^{R3}
Институты РАН	10	2000	417	816	457
Вузы	10	2000	1337	774	1447
Выборочное множество	10	2000	949	994	1078

5. Выводы и заключение

Следует сказать, что как вузовские, так и научные сайты в целом характеризуются достаточно большим разбросом значений как количества страниц, так и количества исходящих гиперссылок. При этом характер расположения внешних ссылок на страницах весьма различен: для официальных вузовских сайтов характерно небольшое количество гиперссылок, сделанных с большого количества страниц, а для официальных сайтов научных учреждений РАН сайтов отмечается большое количество страниц, не имеющих внешних гиперссылок вообще, и небольшое количество страниц, имеющих очень много ссылок. Сказанное может служить объяснением плохого результата алгоритма R_2 , основанного на индексах Гиттинса, применительно к вузовским сайтам. Этот алгоритм выбирает самые «привлекательные» сайты, и краулер сканирует их достаточно долго. Если же на первых страницах сайта очень мало внешних ссылок, то очередь до него дойдёт нескоро. Более того, если на первых n страницах внешних ссылок нет, то краулер не дойдет до этого сайта никогда. Если за базовый результат принять количество гиперссылок, найденных по варианту R_1 , то в случае научных институтов мы получаем почти двукратный рост найденных гиперссылок при использовании варианта R_2 , а для вузов – рост 10% при использовании варианта R_3 . Для выборочного множества также предпочтительнее вариант R_3 .

Полученные результаты используются в модуле-планировщике блока управления *BeeBot* следующим образом: если пользователь указывает, что сканируемое множество является множеством официальных вузовских сайтов, то используется правило R_3 , а для официальных сайтов РАН используется правило R_2 . Если пользователь не указывает информации о целевом множестве, то каждому сайту целевого множества последовательно выделяется определенный квант времени для его сканирования.

Таким образом, в статье описан адаптивный краулер, предназначенный для сбора исходящих гиперссылок с заданного целевого множества веб-сайтов. Адаптивное поведение крауле-

ра, заключающееся в том, что за ограниченное время он должен находить максимально возможное суммарное количество гиперссылок, моделируется как задача о многоруком бандите. Такая постановка задачи позволила применить для её решения известные алгоритмы, эксперименты с которыми показали их зависимость от тематики целевого множества.

Очевидно, что задача разработка «хороших» адаптивных алгоритмов рационального поведения краулера имеет много направлений для развития, начиная от эвристических подходов до статистического анализа размещения внешних гиперссылок на сайтах заданной тематики.

Литература

1. ВОРОНИН А.В., ПЕЧНИКОВ А.А. *Исследования сайтов органов власти Республики Карелия* // Век качества. – 2010. – №3. – С. 28–30.
2. ПЕЧНИКОВ А.А. *Методы исследования регламентируемых тематических фрагментов Web* // Труды Института системного анализа Российской академии наук. Серия: Прикладные проблемы управления макросистемами. – 2010. – Том 59. – С. 134–145.
3. ПЕЧНИКОВ А.А. *Модель университетского Веба* // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. – 2010. – №6. – С. 208–214.
4. ПЕЧНИКОВ А.А. *Исследование взаимосвязей между веб-сайтами научных библиотек университетов России* // Дистанционное и виртуальное обучение. – 2011. – №7. – С. 13–24.
5. СОВЕТОВ Б.Я., ЯКОВЛЕВ С.А. *Моделирование систем*. – М.: Высшая школа, 2001. – 344 с.
6. AUER P., CESA-BIANCHI N., FISHER P. *Finite-time Analysis of the Multiarmed Bandit Problem* // Machine Learning. – 2002. – №47. – С. 235–256.
7. FIELDING R., GETTYS J., MOGUL J., NIELSEN H., MASINTER L., LEACH P., BERNERS-LEE T. *RFC 2616: Hypertext Transfer Protocol – HTTP/1.1. June 1999*. – URL: <http://www.ietf.org/rfc/rfc2616.txt> (07.12.2011).

8. MAHAJAN A., TENEKETZIS T. *Multi-armed bandit problems* // In Foundations and Applications of Sensor Management. – A. Hero, D. Castanon, D. Cochran, K. Rastella, eds. – Springer, 2008. – P. 121–151.
9. PANT G., SRINIVASAN P., MENCZER F. *Crawling the Web* // In “Web Dynamics”. – M. Levene, Poulouvassilis, eds. – Springer, 2004. – P.153–178.
10. SANG HO LEE, SUNG JIN KIM *On URL Normalization* // Lecture Notes in Computer Science. – 2005. – Vol. 47. – P. 1076–1085.
11. TACKSEUNG J. *A survey on the bandit problem with switching costs* // De Economist. – 2004. – Vol. 152. – P. 513–541.
12. THELWALL M. *Link Analysis: An Information Science Approach*. – Amsterdam: Elsevier Academic Press, 2004. – 269 p.

ADAPTIVE CRAWLER FOR EXTERNAL HYPERLINKS SEARCH AND ACQUISITION

Andrey Pechnikov, Institute of Applied Mathematical Research Karelian Research Center of RAS, Petrozavodsk, Doctor of Science, assistant professor (pechnikov@krc.karelia.ru).

Denis Chernobrovkin, Faculty of applied mathematics and control processes Saint-Petersburg State University, graduate, Saint-Petersburg (8ezhikov@gmail.com).

Abstract: We consider the web-crawler designed to find information about outgoing hyperlinks from a set of monothematic web-sites. Adaptive behavior of the crawler is formulated in terms of the multi-armed bandit problem. The experiments show that the choice of the adaptive algorithm of rational behavior depends on the subject of the considered set of web-sites.

Keywords: hyperlink, crawler, adaptive behavior, multi-armed bandit problem, Gittins index.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии В. В. Мазаловым