

**Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН**

УПРАВЛЕНИЕ БОЛЬШИМИ СИСТЕМАМИ

Выпуск 37

Май 2012

**СБОРНИК
ТРУДОВ**

ISSN 1819-2467

Регистрационный номер Эл №ФС77-44158 от 09 марта 2011 г.

Москва – 2012

www.mtas.ru

ИНТЕРНЕТ-сайт теории управления организационными системами

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ ОРГАНИЗАЦИОННЫМИ СИСТЕМАМИ

ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ УПРАВЛЕНИЯ ИМ. В.А. ТРАПЕЗНИКОВА РАН



Целью сайта является предоставление специалистам по теории и практике управления организационными системами (ученым, преподавателям, аспирантам, студентам, а также реальным управленцам) доступа к ресурсам, отражающим современное состояние теории и возможности обмена идеями и результатами.

На сайте имеются разделы:

Теория – с обзором теории управления организационными системами, глоссарием, информацией для аспирантов;

Практика – с обзором результатов внедрения механизмов управления в реальных организациях;

Библиография – около 2500 публикаций по теории управления, снабжена классификатором и аннотациями;

Электронная библиотека – около 700 полнотекстовых монографий, статей и учебных пособий;

а также многое другое.

На сайте работает **форум**, на котором можно обсудить вопросы, относящиеся к математике, экономике, управлению организациями, узнать новости теории управления и ознакомиться с планируемыми конференциями и семинарами.

ubs.mtas.ru

Интернет-сайт электронного периодического
научного издания «Управление большими
системами: сборник трудов»

УПРАВЛЕНИЕ БОЛЬШИМИ СИСТЕМАМИ

ЭЛЕКТРОННЫЙ СБОРНИК НАУЧНЫХ ТРУДОВ
ИНСТИТУТА ПРОБЛЕМ УПРАВЛЕНИЯ ИМ. В.А. ТРАПЕЗНИКОВА РАН

С 1998 года Институт проблем управления РАН выпускает периодический сборник трудов ученых, занимающихся разработкой и исследованием математических моделей управления большими (социально-экономическими, организационными, организационно-техническими и др.) системами. Все статьи, публикуемые в сборнике, проходят рецензирование ведущими специалистами по теории управления.

С 2006 года сборник "Управление большими системами" вместе с ведущим журналом ИПУ РАН "Проблемы управления" – включены в Российский индекс научного цитирования (РИНЦ).

С июля 2007 года Сборник входит в список ВАК (перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертации на соискание ученой степени доктора и кандидата наук):

- * по управлению, вычислительной технике и информатике (для докторов наук);

- * по электронике, измерительной технике, радиотехнике и связи; по энергетике (для кандидатов наук).

**Уважаемые коллеги! Приглашаем Вас опубликовать
Вашу статью в очередном выпуске сборника
"Управление большими системами"!**

Периодичность сборника - 4 раза в год. Время выхода прошедшей рецензирование статьи - 3-4 месяца. Плата с авторов за публикацию рукописей не взимается.

Конференция «Управление в технических, эргатических, организационных и сетевых системах» (УТЭОСС-2012)

Уважаемые коллеги!

С 9 по 11 октября 2012 г. в Санкт-Петербурге в рамках 5-ой Мультиконференции по проблемам управления (МКПУ-2012) состоится конференция «Управление в технических, эргатических, организационных и сетевых системах» (УТЭОСС-2012). Конференция посвящена памяти академика РАН В.М. Матросова. Конференция проводится ОАО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор» и Институтом проблем управления имени В.А. Трапезникова РАН при поддержке РФФИ, Отделения энергетики, машиностроения, механики и процессов управления Российской академии наук, Российского национального комитета по автоматическому управлению, Академии навигации и управления движением, Объединенного научного совета по комплексной проблеме «Процессы управления и автоматизация» РАН, Научного совета РАН по теории управляемых процессов и автоматизации, Совета по мехатронике и робототехнике РАН.

НАУЧНЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ КОНФЕРЕНЦИИ

1. Управление в технических системах
2. Мехатронные и эргатические системы
3. Организационные системы
4. Адаптивное, коммуникационно-сетевое и интеллектуальное управление

Официальный язык конференции — русский.

Приглашаем Вас и Ваших коллег принять участие в работе конференции и выступить с докладом.

Авторам, желающим принять участие в конференции, необходимо не позднее 15 июня 2012 г. зарегистрироваться на сайте конференции по адресу <http://uteoss2012.ipu.ru/> и отправить через систему подачи статей доклад, оформленный в соответствии с Правилами оформления докладов (см. указанный сайт). Одновременно с докладом необходимо представить (также через систему подачи докладов на сайте) отсканированный электронный вариант экспертного заключения о возможности опубликования материала.

Подробная информация о конференции находится на сайте <http://uteoss2012.ipu.ru/>.

Контактная информация:

Иван Николаевич Барабанов, ученый секретарь Программного комитета УТЭОСС-2012:

Тел.: (495) 335-23-53

E-Mail: ivbar@ipu.ru

XII - международная конференция
Системы проектирования, технологической подготовки производства и управления
этапами жизненного цикла промышленного продукта
(CAD/CAM/PDM-2012)



Уважаемые дамы и господа, приглашаем Вас принять участие в десятой международной конференции "Системы проектирования, технологической подготовки производства и управления этапами жизненного цикла промышленного продукта (CAD/CAM/PDM-2012)", которую планируется провести с 16 по 18 октября 2012 года в Москве, в ИПУ РАН.

ТЕМАТИКА КОНФЕРЕНЦИИ:

- Организация структур технических и программных средств проектирования и управления. Средства взаимодействия, структуры данных, международные стандарты.
- Компьютерная графика и CAD/CAM/PDM-системы в учебных процессах (программы обучения по дисциплинам, методические материалы, тестирование). Средства виртуальной реальности в промышленных системах.
- Интегрированные производственные системы и управление технологическими процессами. PDM-системы.
- Проектирование в машиностроении и строительстве.
- Проектирование в радиоэлектронике.

ОРГАНИЗАТОРЫ:

- Российский фонд фундаментальных исследований (РФФИ)
- Российская Академия Наук (РАН).
- Министерство образования и науки РФ.
- Международная академия информатизации.
- Научный совет РАН по теории управляемых процессов и автоматизации
- ИПУ РАН
- Государственный космический научно-производственный центр им. М.В. Хруничева (ФГУП КНЦ)
- Ракетно-космический центр "Энергия" (РКЦ)
- МГТУ "Станкин"
- Московский технический университет связи и информатики (МТУСИ)

КЛЮЧЕВЫЕ ДАТЫ:

До 5 сентября 2012 года - заявка на участие в конференции и/или выставке, перевод оргвзноса, тезисы докладов (объём не более 1-ой страницы формата А-5).

До 15 сентября 2012 года - полные тексты докладов.

Заявки, тезисы и доклады высылаются по e-mail: conf18@spm.ipu.ru

ТЕКУЩАЯ ИНФОРМАЦИЯ (формы заявок, правила оформления докладов и т.п.) на сайте: <http://lab18.ipu.ru>

ЯЗЫКИ КОНФЕРЕНЦИИ: русский, английский

АДРЕС ОРГКОМИТЕТА:

117997, Россия, г. Москва, ул. Профсоюзная 65, ИПУ РАН, Оргкомитет конференции CAD/CAM/PDM-2012.

Телефон для справок: (495) 334 – 93-50; факс (495) 334 – 91-29.

Председатель: Артамонов Евгений Иванович - д.т.н., проф.

Учёный секретарь: Смирнов Сергей Владимирович - к.т.н., с.н.с.

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова

**УПРАВЛЕНИЕ
БОЛЬШИМИ
СИСТЕМАМИ**

СБОРНИК ТРУДОВ

Выпуск 37

Москва – 2012

КООРДИНАЦИОННЫЙ СОВЕТ

Академики РАН: Васильев С.Н., Емельянов С.В., Коровин С.К., Куржанский А.Б., Федосов Е.А., Черноусько Ф.Л.; члены-корреспонденты РАН: Желтов С.Ю., Каляев И.А., Пархоменко П.П., Попков Ю.С.; д-ра техн. наук: Бутковский А.Г., Дорофеев А.А., Кузнецов О.П., Кульба В.В., Кротов В.Ф., Лотоцкий В.А., Павлов Б.В., Поляк Б.Т., Рутковский В.Ю.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор: член-корр. РАН Новиков Д.А. **Отв. секретарь:** к.т.н. Губко М.В.
Д-ра техн. наук: проф. Алескерев Ф.Т. (ГУ ВШЭ), проф. Артамонов Е.И. (ИПУ РАН), д-р экон. наук, проф. Архипова М.Ю. (ИПИ РАН), д-ра техн. наук: проф. Афанасьев В.Н. (МИЭМ), проф. Бахтадзе Н.Н. (ИПУ РАН), проф. Бурков В.Н. (ИПУ РАН), проф. Вишневский В.М. (ИППИ РАН), д-р экон. наук, проф. Голиченко О.Г. (ЦЭМИ РАН), д-р физ.-мат. наук, проф. Добровидов А.В. (ИПУ РАН), д-ра техн. наук: проф. Заложнев А.Ю. (ИПУ РАН), проф. Ириков В.А. (МФТИ), проф. Калянов Г.Н. (ИПУ РАН), проф. Касаткин С.И. (ИПУ РАН), проф. Каравай М.Ф. (ИПУ РАН), канд. техн. наук Квинто Я.И. (ИПУ РАН), д-р экон. наук, проф. Клочков В.В. (ИПУ РАН), д-ра техн. наук: проф. Кононенко А.Ф. (ВЦ РАН), канд. техн. наук Куливец С.Г. (ИПУ РАН), проф. Курдюков А.П. (ИПУ РАН), проф. Лебедев В.Г. (ИПУ РАН), к-т техн. наук, доцент Лебедев В.Н. (ИПУ РАН), д-р экон. наук, проф. Ловчиновский Э.В. (ИПУ РАН), д-р техн. наук, проф. Мандель А.С. (ИПУ РАН), д-р экон. наук, проф. Нижегородцев Р.М. (ИПУ РАН), д-ра техн. наук: проф. Новосельцев В.Н. (ИПУ РАН), проф. Орлов А.И. (МВТУ), д-р физ.-мат. наук, проф. Рапопорт Л.Б. (ИПУ РАН), д-р техн. наук, проф. Рыков А.С. (МИСИС), д-р экон. наук, проф. Секерин В.Д. (ИПУ РАН), д-ра техн. наук: проф. Сидельников Ю.В. (МАИ), проф. Совлуков А.С. (ИПУ РАН), д-р экон. наук, проф. Сухарев О.С. (Ин-т экономики РАН), д-ра техн. наук: проф. Уткин В.А. (ИПУ РАН), проф. Хоботов Е.Н. (МВТУ), д-ра физ.-мат. наук: доцент Чеботарев П.Ю. (ИПУ РАН), проф. Чхартишвили А.Г. (ИПУ РАН), проф. Щербаков П.С. (ИПУ РАН).

РЕГИОНАЛЬНЫЕ РЕДАКЦИОННЫЕ СОВЕТЫ

Волгоград – д-ра физ.-мат. наук: проф. Воронин А.А., проф. Лосев А.Г. (ВолГУ); **Воронеж** – д-р техн. наук, проф. Баркалов С.А., д-р физ.-мат. наук, проф. Головинский П.А. (ВГАСУ), д-р техн. наук, проф. Подвальный С.Л. (ВГТУ); **Ижевск** – д-р физ.-мат. наук, проф. Непейвода Н.Н., к-т физ.-мат. наук, проф. Родионов В.И. (УдмГУ); **Иркутск** – д-ра физ.-мат. наук: проф. Бычков И.В., проф. Лакеев А.В. (ИДСТУ СО РАН); **Казань** – д-р физ.-мат. наук, проф. Маликов А.И., д-р техн. наук, проф. Сиразетдинов Р.Т. (КГТУ-КАИ); **Липецк** – д-ра техн. наук: проф. Кузнецов Л.А., проф. Погодаев А.К. (ЛГТУ); **Самара** – д-ра экон. наук: проф. Богатырев В.Д., проф. Гераскин М.И., д-р техн. наук, проф. Засканов В.Г. (СГАУ); **Санкт-Петербург** – д-ра физ.-мат. наук: проф. Петросян Л.А. (СПбГУ), проф. Фрадков А.Л. (ИПМ РАН); **Старый Оскол** – д-р техн. наук, проф. Еременко Ю.И. (СТИ); **Тверь** – д-ра техн. наук: проф. Кузнецов В.Н., проф. Палюх Б.В. (ТГТУ).

Адрес редакции: 117997, г. Москва, ул. Профсоюзная, д. 65.

Адрес в Интернет: ubs.mtas.ru.

Номер гос. регистрации электронного научного издания (ЭНИ): 0421200023.

© ИПУ РАН, 2012

СОДЕРЖАНИЕ

Системный анализ

Горелик В. А., Золотова Т. В. <i>Общий подход к моделированию процедур управления риском и его применение к стохастическим и иерархическим системам...</i>	5
Новиков Д. А. <i>Иерархические модели военных действий.....</i>	25

Математическая теория управления

Рудько И. М. <i>Применение порядковых статистик в задачах обнаружения.....</i>	63
------------------------------------------------------------------------------------------	----

Информационные технологии в управлении

Лотоцкий А. В. <i>Особенности разработки имитатора целевой обстановки при создании распределенного моделирующего комплекса.....</i>	84
Тукубаев З. Б., Умаров А. А. <i>Модель управления качеством образования в вузе.....</i>	95

Управление в социально-экономических системах

Астанин С. В., Жуковская Н. К. <i>Управление бизнес-процессами на основе их моделирования нечеткими ситуационными сетями.....</i>	145
Васильева Т. П., Мызникова Б. И., Русаков С. В. <i>Стохастическое моделирование процесса формирования городов</i>	164
Ратнер С. В., Михайлов В. О. <i>Управление развитием энергетических компаний в ситуации технологического разрыва.....</i>	180

*Управление в медико-биологических и
экологических системах*

Миронюк В. П., Цыплаков В. Ю.

Модель формирования системы двухэтапного транспортирования твердых муниципальных отходов 208

*Управление техническими системами и
технологическими процессами*

Кошев А. Н., Гвоздева И. Г., Кошев Н. А., Варенцов В. К.

Расчет оптимальной электропроводности проточных объемно-пористых катодов 232

Технические и программные средства управления

Каршаков Е. В.

Задача калибровки электромагнитной системы относительного позиционирования 250

УДК 517.977.5

ББК 22.18

ОБЩИЙ ПОДХОД К МОДЕЛИРОВАНИЮ ПРОЦЕДУР УПРАВЛЕНИЯ РИСКОМ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ К СТОХАСТИЧЕСКИМ И ИЕРАРХИЧЕСКИМ СИСТЕМАМ

Горелик В. А.¹

*(Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН,
Москва)*

Золотова Т. В.²

*(Государственный университет
Министерства Финансов РФ, Москва)*

Описана общая модель управления риском, включающая две подмодели: модель оценки эффективности системы и модель оценки риска ее функционирования. Рассмотрены задачи управления стохастическими системами, а также сложными системами, имеющими иерархическую структуру, функционирующими в условиях внутрисистемной неопределенности. Предложены методы решения этих задач, позволяющие находить оптимальную стратегию управления с точки зрения эффективности и устойчивости.

Ключевые слова: неконтролируемые факторы, минимизация риска, случайные процессы, функция риска, иерархия, цена децентрализации.

¹ Виктор Александрович Горелик, доктор физико-математических наук, профессор (gorelik@ccas.ru).

² Татьяна Валерьяновна Золотова, доктор физико-математических наук, доцент (tgold11@mail.ru).

1. Введение

При моделировании процессов управления в сложных системах неизбежно возникает вопрос о соотношении эффективности и устойчивости их функционирования. В теории управления существуют различные понятия устойчивости (или гомеостаза) системы. Представляется интересной задачей развитие концептуального подхода к формализации и решению проблемы устойчивости сложных систем и процессов на основе понятия риска.

При управлении сложными системами или процессами устойчивость и эффективность их функционирования может быть достигнута путем обработки и использования информации при выборе управляющих параметров так, чтобы в пределах области гомеостаза критерий эффективности принимал оптимальное значение.

Риск в широком смысле – это непредсказуемость состояния системы или течения процесса как результат неполноты информации при принятии решения. При этом под обеспечением устойчивости системы подразумевается достижение достаточно низкого уровня риска, оцениваемого величиной возможных потерь, связанных с принятием решений в условиях неполной информации. Это в свою очередь требует применения процедуры управления риском. Под управлением риском понимается управление системой или процессом, неизменным атрибутом которого являются процедуры учета и оценки факторов риска в целях максимального снижения неопределенности при принятии решений и обеспечения устойчивости системы.

Ситуация риска связана с возможностью возникновения некоторых событий, которые нарушают текущее состояние системы или естественное (прогнозируемое) течение процесса. Поэтому проблему управления риском целесообразно рассматривать в двух вариантах: при «естественном» ходе процессов и при нарушении существующих тенденций. Соответственно, общая модель управления риском включает модель функционирования системы при прогнозируемых значениях внешних

факторов (плановый сценарий) и модель функционирования системы при отклонении от прогноза. Под общей моделью управления риском, естественно, понимается не общая модель управления вообще, а ее конкретизация применительно к задачам управления риском. В то же время рассмотренные в данной работе стохастические задачи управления риском и задачи управления в иерархических системах, а также целый ряд других задач управления риском (см. [3, 4]) получаются из этой модели как частные случаи.

Математические модели и, соответственно, методы управления различными сложными системами и процессами имеют разные аспекты. В моделях управления присутствуют такие характеристики, как иерархия, многокритериальность, случайность, неопределенность. Модели управления могут затрагивать организационные, экономические, экологические аспекты и предлагать разные механизмы управления. Общим для таких разнообразных моделей является то, что проблема устойчивости для них может быть решена на основе управления риском, а совместное рассмотрение управленческих решений с точки зрения эффективности и риска в процессах и системах позволяет принимать рациональные решения, создающие условия для их устойчивого функционирования.

2. Общая модель управления риском в сложных системах

Общими чертами модели управления деятельностью любой сложной системы в условиях неполной информации, а значит в условиях риска, является сочетание стремления к увеличению эффективности и, одновременно, снижению риска. Соответственно, общая модель управления должна включать две подмодели: модель оценки эффективности и модель оценки риска функционирования системы. Основными компонентами обеих моделей являются описания процессов функционирования системы, т.е. изменения фазового состояния под влиянием внутренних и внешних воздействий, процедур управления

(схема управления, вид управления, критерии эффективности, функции риска, ограничения), внешнего воздействия на систему и информационных процессов в системе (наличие случайных или неопределенных факторов, процедур обмена информацией). Отметим, что классическая модель исследования операций предполагает рассмотрение только оценки эффективности функционирования системы [2]. Это не значит, что в ней не учитывается возможность наличия ситуаций риска. Просто риск предполагается включать в оценку эффективности (например, принцип гарантированного результата). На наш взгляд, разделение оценок эффективности и риска позволяет более детально анализировать ситуации риска, рассчитывать их последствия и учитывать риск при выборе управления.

Предлагается модель управления риском, которая задается оператором

$$(1) \quad \Psi(F(x, u, y, I), G(x, u, y, I)),$$

определяющим принцип оптимальности управления на основе соизмерения оценок эффективности и риска, являющихся выходами подмодели оценки эффективности $F(x, u, y, I)$ и подмодели оценки риска $G(x, u, y, I)$. Оператор Ψ отображает совокупность выходов подмоделей оценок эффективности и риска во множество U_I^0 , определяемое как множество оптимальных управлений.

В (1) x, u, y – переменные в моделях $F(\cdot)$ и $G(\cdot)$; x – состояние системы или процесса в некотором фазовом пространстве; u – управление; y – неконтролируемые факторы, влияющие на функционирование системы. Исходные данные моделей определяются информационной компонентой I , включающей описание вида неконтролируемых факторов и информированности управляющего органа системы (законы распределения случайных параметров, область значений неопределенных факторов, схемы передачи информации в системе, процедуры обработки информации).

Отметим, что мы используем понятие критерия эффективности как характеристику степени соответствия процесса функционирования системы поставленной цели и синоним целевой функции или функции выигрыша [2]. Именно в этом смысле понимается данный

термин в разделе «Многокритериальная оптимизация». Критерий эффективности зависит от управления и неконтролируемых факторов, поэтому он непосредственно не может служить для сравнения различных управлений (стратегий). На основании критерия эффективности обычно строят оценку эффективности, которая зависит только от управления и позволяет сравнивать разные управления по эффективности. Аналогично мы используем понятия функция риска и оценка риска. Функция риска может совпадать с критерием эффективности (например, при управлении портфелем критерий эффективности и он же функция риска – случайная величина доходности, из него получаем оценку эффективности – математическое ожидание и оценку риска – дисперсию), а может и отличаться (например, критерий эффективности – время полета ракеты до цели, а функция риска – вероятность ее перехвата). Оптимальное же управление определяется принципом оптимальности. Иногда вместо принципа говорят критерий оптимальности, но при этом следует отличать его от критерия эффективности. При предлагаемом подходе принцип оптимальности связан, в частности, с проблемой многокритериальности, так как мы имеем как минимум два критерия (эффективность и риск).

Переменные x , y , u моделей $F(\cdot)$ и $G(\cdot)$ являются, в общем случае, взаимосвязанными величинами. На выбор управления u оказывает влияние состояние x , в котором находится система, а также внешние факторы y , для описания которых используется информационная компонента I . Управление $u(x, y)$ для любых значений x и y должно удовлетворять ограничению $u(x, y) \in U$. При этом закон управления $u(\cdot, \cdot)$ принадлежит некоторому классу функций U_I , определяемому согласно имеющейся информации: $u(\cdot, \cdot) \in U_I$. Состояние x системы в свою очередь определяется выбираемым управлением и зависит от воздействия на систему внешних факторов, т.е. является некоторой функцией управления и значений внешних факторов: $x = \varphi(u, y)$. Заметим, что в статических моделях нет смысла разделять параметры на фазовые переменные и управления, поэтому в статическом случае управление (или стратегию) будем обозначать, как правило, переменной x .

Если внешние факторы u носят случайный характер и имеется статистическая информация об их значениях, то информационная компонента I включает описание закона распределения случайной величины $P(y)$. Если внешние факторы u неопределенные и информация о них представляет собой только описание области возможных значений Y , то информационная компонента включает условие вида $y \in Y$. Возможно сочетание случайных и неопределенных факторов, в том числе неточного знания закона распределения, параметры которого при этом оказываются неопределенными факторами. Если в системе осуществляется обмен информацией между подсистемами, для каждой из которых переданная информация является внешним фактором, то информационная компонента включает схемы передачи и содержание информации для каждой подсистемы. При этом схема управления может носить децентрализованный характер, а управление подсистем представлять собой функции от управлений других элементов системы, определяемые поступающей к ним информацией.

Модель оценки эффективности системы $F(x, u, y, I)$ включает описание целей функционирования системы, прогнозируемого состояния системы и внешней среды и определяет значение эффективности в случае планового функционирования системы. Пусть дана оценка значения внешнего фактора \bar{y}_I согласно имеющейся информации (прогноз, математическое ожидание и т.п.). Тогда оценку эффективности (выход модели $F(x, u, y, I)$) при плановом варианте функционирования системы (базовый сценарий, среднее значение, текущее состояние и т.д.) можно представить в виде

$$(2) \quad \bar{w}(u) = f(x, u, \bar{y}_I) \quad \forall u, \text{ где } x = \varphi(u, \bar{y}_I).$$

Модель оценки риска функционирования системы $G(x, u, y, I)$ включает определение области гомеостазиса системы X , задаваемой ограничениями на параметры системы или мерой устойчивости на множестве значений параметров (нарушение этих ограничений или малое значение меры устойчивости приводит к потере гомеостазиса системы, т.е. к появлению ситуации

риска), процесса функционирования системы при любых значениях неконтролируемых факторов и множества допустимых управлений D_u , обеспечивающих условие гомеостаза. Например, в случае воздействия на систему неопределенных неконтролируемых факторов $y \in Y$ множество D_u имеет вид $D_u = \{u(\cdot, \cdot) \in U_I \mid u(x, y) \in U, x = \varphi(u, y) \in X \forall y \in Y\}$.

Модель $G(\cdot)$ оценивает также возможный разброс показателей эффективности при различных значениях неконтролируемых факторов. Введем также в рассмотрение величину потерь $W_I(u, y)$ как результат воздействия неконтролируемых факторов y и оценку потерь в сравнении с плановым вариантом функционирования системы при имеющейся информации о неконтролируемых факторах (вероятности внешних воздействий, пессимистические, оптимистические сценарии и т.д.):

$$(3) \quad \bar{W}_I(u) = W_I(u, \bar{y}_I) \quad \forall u.$$

Оценка риска (выход модели $G(x, u, y, I)$) включает множество допустимых управлений D_u , оценку потерь (3) и может определяться выходом модели оценки эффективности $F(x, u, y, I)$.

Тогда оператор Ψ конкретизируется как отображение совокупности $(\{\bar{w}(u(\cdot, \cdot))\}_{u(\cdot, \cdot) \in U_I}, \{\bar{W}_I(u(\cdot, \cdot))\}_{u(\cdot, \cdot) \in U_I}, D_u)$ в подмножество оптимальных управлений U_I^0 множества допустимых управлений:

$$(4) \quad \Psi: (\{\bar{w}(u(\cdot, \cdot))\}_{u(\cdot, \cdot) \in U_I}, \{\bar{W}_I(u(\cdot, \cdot))\}_{u(\cdot, \cdot) \in U_I}, D_u) \rightarrow U_I^0.$$

Отметим, что отображение Ψ может зависеть только от части представленной совокупности, а некоторые из компонент этой совокупности могут быть константами (не зависеть от u).

Конкретизируем модель (4) для некоторых систем.

3. Задачи управления риском в стохастических системах

Для систем, функционирующих в условиях случайного воздействия внешней среды, внешние факторы y считаются случайными величинами, информационная компонента I представ-

ляет собой описание их законов распределения. Модель $F(\cdot)$ задает оценку эффективности системы как вектор математических ожиданий критериев эффективности подсистем или значений этих критериев эффективности при среднем значении неконтролируемых факторов \bar{y}_i (в линейном случае это одно и то же). Модель $G(\cdot)$ определяет величину потерь $W_I(u, y)$ как множество значений отклонения эффективности системы от ее математического ожидания при всевозможных значениях y (отличных, вообще говоря, от \bar{y}_i) и в соответствии с вероятностной мерой некоторую оценку риска.

Если оценка риска присутствует в ограничениях, то область гомеостазиса представляет собой множество состояний системы, для которых возможные потери не превосходят в среднем некоторого заданного значения или вероятность того, что возможные потери превосходят заданное значение, меньше заданной малой величины. Множество D_u в этом случае представляет собой множество таких управлений из U , для которых мера риска не превосходит некоторого значения (в данном случае устойчивость системы понимается в вероятностном смысле). Если в задаче не накладываются ограничения на значения риска, то оценка риска понимается как мера устойчивости системы с «размытой» областью гомеостазиса. Принцип оптимальности Ψ предполагает оптимизацию различных сверток оценок эффективности и риска на множестве допустимых управлений, т.е. отображает оценки эффективности и риска во множество точек экстремума конкретной свертки.

Рассмотрим задачи управления риском для коррелированных стохастических процессов. Модель $F(\cdot)$ определяет в данном случае ожидаемый результат деятельности системы (математическое ожидание эффективности), модель $G(\cdot)$ – функцию риска, заданную в метрике l_2^2 (дисперсия), или l_2 (СКО), или как вероятностную функцию (VAR).

Пусть y_i – случайная величина эффективности деятельности i -й подсистемы (неконтролируемые факторы); \bar{y}_i – математическое ожидание эффективности деятельности i -й подсистемы

(оценка значений неконтролируемого фактора), $i = 1, \dots, n$; σ_{ij} – ковариация результатов деятельности i -й и j -й подсистем; $x = (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$ – управление в системе (например, x_i – доля средств, вкладываемая в развитие i -й подсистемы; в соответствии с ранее сделанным замечанием здесь и далее в статических задачах управление обозначено x). Если использовать свертку типа отношения оценки системного риска как СКО эффективности системы в целом и оценки эффективности как математического ожидания, то задачу управления риском всей системы можно представить в виде

$$(5) \min_{x \in X} \frac{\left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} x_i x_j \right)^{1/2}}{\sum_{i=1}^n \bar{y}_i x_i},$$

где $X = \{x \mid x_i \geq 0, i = 1, \dots, n, \sum_{i=1}^n x_i = 1\}$.

Теорема 1. В задаче (5) свертка критериев эффективности и риска достигает минимума на заданном множестве X в точке

$x = (x_1^0, \dots, x_i^0, \dots, x_n^0)$ такой, что $x_i^0 = \frac{\xi_i^0}{\sum_{i=1}^n \xi_i^0}$, $i = 1, \dots, n$, а

$\xi^0 = (\xi_1^0, \dots, \xi_n^0)$ является решением задачи квадратичного программирования:

$$(6) \min_{\xi} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} \xi_i \xi_j \mid \xi_i \geq 0, i = 1, \dots, n, \sum_{i=1}^n \bar{y}_i \xi_i = 1 \right\}.$$

Доказательство. Введем обозначение $z = \left(\sum_{i=1}^n \bar{y}_i x_i \right)^{-1}$. Тогда

задача (5) примет вид

$$\min_{x, z} \left\{ \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} (zx_i)(zx_j) \right)^{1/2} \mid \sum_{i=1}^n \bar{y}_i (zx_i) = 1, \sum_{i=1}^n x_i = 1, x_i \geq 0, i = 1, \dots, n \right\}.$$

Далее, приняв $\xi_i = zx_i$ и введя коэффициент 0,5 в критерии, получаем задачу квадратичного программирования (6). Пусть

$\xi^0 = (\xi_1^0, \dots, \xi_n^0)$ – решение задачи (6), тогда $x_i^0 = \frac{\xi_i^0}{\sum_{i=1}^n \xi_i^0}$,

$i = 1, \dots, n$, – компоненты решения задачи (5). Теорема доказана.

Необходимые и достаточные условия экстремума для ненулевых ξ_i , $i = 1, \dots, n$, сводятся к системе линейных алгебраических уравнений:

$$(7) \quad \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} \xi_j - \lambda \bar{y}_i = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad \sum_{j=1}^n \bar{y}_j \xi_j = 1.$$

Если часть переменных принимает нулевое значение, то система (7) становится меньшего порядка.

Для коррелированных стохастических процессов предлагается рассматривать следующие вероятностные функции риска: $R_{probp}(x) = P(r(x) < r_p)$, $R_{probd}(x) = P(r(x) < d(x))$, $R_{probd}(x) = P(d(x) - r(x) \geq \delta)$, $\delta > 0$, где через $y = r(x)$ обозначена функция, определяющая случайное значение эффективности системы при управлении x как результат внешних воздействий, а через $\bar{y} = d(x)$ – функция, определяющая ожидаемое значение эффективности. Если в качестве оценки системного риска использовать функцию риска, представляющую собой вероятность того, что случайное значение эффективности системы $\sum_{i=1}^n y_i x_i$ меньше тре-

буемого (планового) значения r_p , а область значений оператора Ψ – множество точек экстремума этой функции, то задача управления риском имеет вид

$$(8) \quad \min_x \left\{ P \left(\sum_{i=1}^n y_i x_i < r_p \right) \mid x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad \sum_{i=1}^n x_i = 1 \right\}.$$

Для задачи (8) справедлив следующий результат.

Теорема 2. Пусть $\{y_i\}$ – система нормально распределенных случайных величин с математическими ожиданиями \bar{y}_i и ковариационной матрицей $[\sigma_{ij}]$. Тогда в задаче (8) критерий эффективности достигает минимума на заданном множестве X в

точке $x = (x_1^0, \dots, x_i^0, \dots, x_n^0)$ такой, что $x_i^0 = \frac{\hat{\xi}_i^0}{\sum_{i=1}^n \hat{\xi}_i^0}$, $i = 1, \dots, n$, а

$\hat{\xi}^0 = (\hat{\xi}_1^0, \dots, \hat{\xi}_n^0)$ является решением задачи квадратичного программирования:

$$(9) \quad \min_{\hat{\xi}} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} \hat{\xi}_i \hat{\xi}_j \mid \hat{\xi}_i \geq 0, i=1, \dots, n, \sum_{i=1}^n \bar{y}_i \hat{\xi}_i - r_p \sum_{i=1}^n \hat{\xi}_i = 1 \right\}.$$

Доказательство. Случайная величина $\sum_{i=1}^n y_i x_i$ нормально распределена, т.е.

$$P\left(\sum_{i=1}^n y_i x_i < r_p\right) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{r_p} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt,$$

где $a = \sum_{i=1}^n \bar{y}_i x_i$ – математическое ожидание; $\sigma = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} x_i x_j\right)^{\frac{1}{2}}$ –

СКО случайной величины $\sum_{i=1}^n y_i x_i$. Для вычисления величины

$P\left(\sum_{i=1}^n y_i x_i < r_p\right)$ воспользуемся функцией Лапласа

$$\Phi(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\zeta} e^{-\frac{t^2}{2}} dt :$$

$$P\left(\sum_{i=1}^n y_i x_i < r_p\right) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{r_p} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{r_p-a}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz,$$

где $z = \frac{t-a}{\sigma}$ или $t = a + \sigma z$. Далее имеем $P\left(\sum_{i=1}^n y_i x_i < r_p\right) =$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{z^2}{2}} dz + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{r_p - a}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{1}{2} + \Phi(0) - \Phi\left(\frac{a - r_p}{\sigma}\right) = \\
 &= \frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{a - r_p}{\sigma}\right). \text{ Тогда задача, эквивалентная (8), имеет вид}
 \end{aligned}$$

$$(10) \quad \frac{\sigma}{a - r_p} \rightarrow \min.$$

Возвращаясь к переменной x , окончательно получаем

$$(11) \quad \min_{x \in X} \frac{\left(\sum_{i,j=1}^n \sigma_{ij} x_i x_j \right)^{\frac{1}{2}}}{\sum_{i=1}^n \bar{y}_i x_i - r_p},$$

$$\text{где } X = \left\{ x \mid \sum_{i=1}^n x_i = 1, x_i \geq 0, i = 1, \dots, n \right\}.$$

Далее задача (10) сводится к задаче квадратичного программирования и, в конечном счете, к системе линейных алгебраических уравнений. Действительно, введем обозначение

$$\hat{z} = \left(\sum_{i=1}^n \bar{y}_i x_i - r_p \right)^{-1}. \text{ Тогда задача (11) примет вид}$$

$$\min_{x, \hat{z}} \left\{ \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} (\hat{z} x_i) (\hat{z} x_j) \right)^{\frac{1}{2}} \mid \sum_{i=1}^n \bar{r}_i (\hat{z} x_i) - \hat{z} r_p = 1, \sum_{i=1}^n x_i = 1, x_i \geq 0, i = 1, \dots, n \right\}.$$

Приняв $\hat{\xi}_i = \hat{z} x_i$, имеем $\sum_{i=1}^n \hat{\xi}_i = \hat{z}$ и получаем задачу (9). Пусть

$$\hat{\xi}^0 = (\hat{\xi}_1^0, \dots, \hat{\xi}_n^0) \text{ — решение задачи (9), тогда } x_i^0 = \frac{\hat{\xi}_i^0}{\sum_{i=1}^n \hat{\xi}_i^0},$$

$i = 1, \dots, n$, — компоненты решения задачи (8). Теорема доказана.

Необходимые и достаточные условия экстремума для ненулевых ξ_i , $i = 1, \dots, n$, приводят к системе линейных алгебраических уравнений, аналогичной системе (7).

В отличие от традиционных задач с использованием *VAR*, заключающихся в нахождении такого значения случайной величины, которое обеспечивается с заданной вероятностью, в задаче (8) минимизируется вероятность того, что случайная величина будет меньше требуемого значения (гомеостазис в вероятностном смысле).

4. Задачи управления риском в иерархических системах

Рассмотрим системы, функционирующие в условиях внутрисистемной неопределенности, связанной с различной информированностью подсистем в условиях децентрализованного управления. Принцип оптимальности управления Ψ в иерархической системе объединяет стремление к увеличению значения критерия эффективности центра и к достижению устойчивости (или гомеостаза) функционирования системы, которая описывается совместными ограничениями на параметры подсистем. Основным условием устойчивости и эффективности функционирования в иерархической системе является согласованность интересов всех ее элементов. Интересы элементов согласуемы, если центр может обеспечить устойчивое функционирование системы. Если при этом центр может достичь абсолютного максимума своего критерия эффективности, то интересы элементов системы идеально согласуемы. Таким образом, риск здесь связан не только со случайным воздействием внешней среды, но и что специфично с возможными несоординированными действиями подсистем, приводящими к нарушению гомеостаза системы. Информационные аспекты здесь включают вопросы взаимной информированности центра и подсистем, схемы передачи информации, виды и способы описания внешних факторов. Близкие вопросы в рамках теории организационных систем отражены в работах [1, 6].

Обозначим управление верхнего уровня (центра) через u , считая его точкой некоторого пространства U . Управления элементов нижнего уровня (подсистем) обозначим $v_i, i = 1, \dots, n$, а управление нижнего уровня в целом через $v = (v_1, \dots, v_n)$, также считая его точкой некоторого пространства V . Пространства управлений подсистем $V_i(u)$ зависят от управления центра, т.е. центр имеет возможность в определенных пределах регламентировать свободу их действий. При выборе центром управления и передаче некоторой фиксированной информации об этом выборе множество возможных управлений нижнего уровня есть $R(u) \subseteq V$, т.е. v является для центра неопределенным неконтролируемым фактором с областью значений $R(u)$. Если фазовое состояние системы x однозначно определяется управлениями u, v , т.е. $x = f(u, v)$, то условие устойчивости системы $x \in X$, где X – область гомеостазиса системы, может быть представлено в виде

$$(12) (u, v) \in \Gamma,$$

где множество $\Gamma \subseteq U \times V$ представляет собой совокупность управлений, приводящих к устойчивым состояниям (в случае неоднозначности состояний системы множество Γ определяется условиями включения или пересечения множества достижимости с областью гомеостазиса). Множество допустимых управлений центра, гарантирующих выполнение условия устойчивости (12) (сильная устойчивость), есть

$$(13) D_{\text{сн}} = \{u \in U \mid (u, v) \in \Gamma \quad \forall v \in R(u)\},$$

а множество управлений, возможно обеспечивающих (вообще говоря, при некоторых дополнительных предположениях относительно стремления подсистем к достижению гомеостазиса) условие устойчивости (слабая устойчивость) есть

$$(14) D_{\text{сл}} = \{u \in U \mid (u, v) \in \Gamma \quad \exists v \in R(u)\}.$$

В качестве оценки эффективности системы принимается нижняя грань функционала центра $F(u, v)$: $\inf_{v \in R(u)} F(u, v)$. Это

гарантированное значение эффективности зависит от реакции подсистем на управление центра, определяемой центром на основе исходной информации. Отношение центра к риску (выход модели $G(\cdot)$) заключается в определении множества допус-

тимых управлений, обеспечивающих гомеостазис системы, и оценки разброса значений эффективности в результате самостоятельных действий подсистем и, возможно, воздействия внешних факторов. В качестве такой оценки будем использовать разность между глобальным максимумом критерия эффективности центра $F_{\text{гл}}^0$ при централизованной схеме управления и гарантированным его значением в данной иерархической структуре $F_{\text{гл}}^0 - \inf_{v \in R(u)} F(u, v)$.

Предположим, что подсистемы независимы, т.е. их целевые функционалы зависят только от управлений центра и данной подсистемы: $G_i(u, v_i)$, $i = 1, \dots, n$.

Будем считать, что подсистема при выборе управления стремится максимизировать $G_i(u, v_i)$. Тогда оптимальная стратегия i -й подсистемы $v_i^0(u)$ определяется из условия

$$(15) \quad G_i(u, v_i^0(u)) = \max_{v_i \in V_i(u)} G_i(u, v_i).$$

При этом реакция i -й подсистемы есть $R_i(u) = \text{Arg} \max_{v_i \in V_i(u)} G_i(u, v_i)$. Множество возможных управлений

нижнего уровня имеет вид $R(u) = \prod_{i=1}^n R_i(u)$. При гарантированном

подходе к оценке эффективности и риска выбор управления должен осуществляется из множества (13), а задача нахождения оптимального управления u^0 и результата F^0 центра имеет вид

$$(16) \quad F^0 = \max_{u \in D_{\text{сн}}} \inf_{v \in R(u)} F(u, v).$$

Оператор Ψ здесь есть отображение оценки эффективности $\inf_{v \in R(u)} F(u, v)$ и множества $D_{\text{сн}}$ во множество решений максимальной задачи (16). Если максимум в задаче (16) определяется однозначно или центру известен выбор нижнего уровня, т.е. имеет место $R_i(u) = \text{arg} \max_{v_i \in V_i(u)} G_i(u, v_i)$, то

$$(17) \quad F^0 = \max_{u \in D_{\text{сн}}} F(u, v^0(u)).$$

Минимальный риск от самостоятельных действий подсистем (неконтролируемых факторов) равен $F_{\text{гл}}^0 - F^0$ (цена децен-

трализации). Далее для модели регулируемого равновесия предлагается механизм управления, обеспечивающих идеальную согласованность интересов, при которой цена децентрализации равна нулю.

Под управлением центра можно понимать передачу информации, которую подсистемы самостоятельно добывать не могут, о прогнозируемых значениях факторов, влияющих на функционирование всей системы и ее подсистем. Если управление центра сводится только к передаче информации нижнему уровню о значениях некоторых параметров, то такое управление называется информационным регулированием. Двухуровневую иерархическую систему, в которой управление центра представляет собой информационное регулирование и после сообщения центра нижний уровень достигает ситуации равновесия, называют моделью регулируемого равновесия. В такой модели задача центра состоит в переводе системы в наиболее эффективную для него ситуацию равновесия, определяемую информированностью подсистем. Рассмотрим модель территориальной корпорации с горизонтальными связями на нижнем уровне.

Пусть система погружена во внешнюю среду, состояние которой характеризуется параметрами K и ξ . Для нижнего уровня K является неопределенным неконтролируемым фактором. Величину ξ будем считать случайным неконтролируемым фактором, принимающим конечное число значений. Центр имеет возможность точно определять K и вероятности появления тех или иных значений ξ (например, ущерба от техногенных катастроф). Регулирующее воздействие (управление) центра состоит в передаче на нижний уровень информации о значении K и векторе вероятностей случайной величины ξ : $\bar{p} = (p_1, \dots, p_n)$, где p_i – вектор вероятностей, сообщаемый i -й подсистеме. Будем выделять такие векторы вероятностей, что $p_1 = p_2 = \dots = p_n = p$, и называть их однородными. Определено шесть типов передачи информации, носящих как случайный, так и неопределенный характер, $K = \hat{K}$ – действительное значение K , $p = \hat{p}$ – дейст-

вительные однородные векторы вероятностей случайных событий.

Рассмотрим вопрос существования ситуаций регулируемого равновесия и оптимальных стратегий информационного регулирования центра с критериями эффективности нижнего уровня

$$(18) \quad W_j(x_1, \dots, x_n, K, p_i) = \begin{cases} c_j b_j x_j^r - w x_j^{2r} - R(K, p_i) \frac{\alpha_j b_j x_j^r}{\sum_{j=1}^n \alpha_j b_j x_j^r}, & x_j > 0, j = 1, \dots, n, \\ 0, & x_j = 0, j = 1, \dots, n, \end{cases}$$

где x_i – объем некоторого фактора производства, используемого i -м предприятием, связанного с отравляющим воздействием на окружающую среду, $i = 1, \dots, n$; $f_i(x_i) = b_i x_i^r$, $0 < r \leq 1$, – производственная функция; $w g_i(x_i) x_i$ – функция затрат для каждого предприятия; w – «базовая» цена единицы фактора; $g_i(x_i) = x_i^{2r-1}$ – функция, корректирующая стоимость единицы фактора (предполагается, что стоимость единицы фактора может изменяться в зависимости от объема затрачиваемого ресурса).

Если

c_i – стоимость единицы продукции предприятия, то $c_i f_i(x_i) - w g_i(x_i) x_i$ – прибыль i -го предприятия в результате его производственной деятельности; $R(K, p_i) \alpha_j b_j x_j^r \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j b_j x_j^r \right)^{-1}$ – размер

компенсации для i -го предприятия, пропорциональный величине ущерба $R(K, p_i)$; α_i – непосредственный ущерб в виде загрязнения территории.

Условия существования точки равновесия для функций (18) сформулированы в следующей теореме.

Теорема 3. При выполнении условий

$$(19) \quad R(K, p_i) \alpha_j b_j - c_j b_j A < 0, \quad R(K, p_i) (\alpha_j b_j)^2 - w A^2 < 0,$$

$j = 1, \dots, n$, существует единственная точка равновесия для набора функций $W_j(x_1, \dots, x_n, K, p_i)$, $j = 1, \dots, n$, в неотрицатель-

ном органте $x_j > 0$, $j = 1, \dots, n$, которая при фиксированных K, p_i и $0 < r \leq 1$ определяется по формулам

$$(20) \quad x_j^0(K, p_i) = \left(\frac{R(K, p_i) \alpha_j b_j A - c_j b_j A^2}{R(K, p_i) (\alpha_j b_j)^2 - 2wA^2} \right)^{\frac{1}{r}}, \quad j = 1, \dots, n,$$

где A является решением уравнения

$$(21) \quad \sum_{j=1}^n \left(R(K, p_i) - \frac{c_j}{\alpha_j} A \right) \left(R(K, p_i) - \frac{2w}{(\alpha_j b_j)^2} A^2 \right)^{-1} = 1.$$

Доказательство теоремы 3 приведено в [5].

Интересы центра описываются в виде функции

$$(22) \quad F_0(x_1, \dots, x_n, K, \xi) = \sum_{i=1}^n \beta_i F_i(x_1, \dots, x_n, K, \xi),$$

где $\beta_i > 0$, $i = 1, \dots, n$, (β_i можно интерпретировать как проценты налоговых отчислений с прибыли).

Рассмотрен вопрос, какая стратегия центра является оптимальной, если центр использует однородные векторы вероятностей и неоднородные векторы вероятностей.

Теорема 4. Оптимальная стратегия центра (K^0, p^0) существует и является решением уравнения

$$(23) \quad \sum_{j=1}^n \left(R(K^0, p^0) - \frac{c_j}{\alpha_j} A^0 \right) \left(R(K^0, p^0) - \frac{2w}{(\alpha_j b_j)^2} A^{02} \right)^{-1} = 1,$$

где $(A^0, z_1^0, \dots, z_n^0) > 0$ определяется из условий

$$(24) \quad \sum_{i=1}^n \frac{\beta_i c_i z_i^0}{\alpha_i} - 2A^0 \sum_{i=1}^n \frac{\beta_i w z_i^{02}}{(\alpha_i b_i)^2} = 0,$$

$$A^0 \frac{\beta_i c_i}{\alpha_i} - 2A^{02} \frac{\beta_i w z_i^0}{(\alpha_i b_i)^2} = R(\hat{K}, \hat{p}) \beta_i + \lambda, \quad i = 1, \dots, n, \quad \sum_{i=1}^n z_i^0 = 1.$$

Теорема 5. Оптимальная для центра ситуация неоднородного равновесия при любых положительных коэффициентах β_1, \dots, β_n является паретовской точкой для нижнего уровня и глобальным максимумом для центра, т.е. данный механизм управления исключает риск, связанный с децентрализацией управления.

Доказательства теорем 4 и 5 приведены в [5].

Таким образом, предложенные механизмы информационного регулирования позволяют согласовывать интересы в иерархических системах. При этом разная информированность подсистем приводит не просто к снижению риска, а к его нейтрализации (цена децентрализации равна нулю).

Литература

1. БУРКОВ В.Н., НОВИКОВ Д.А. *Как управлять организациями*. – М.: Синтег, 2004. – 400 с.
2. ГЕРМЕЙЕР Ю.Б. *Введение в теорию исследования операций*. – М.: Наука, 1971. – 384 с.
3. ГОРЕЛИК В.А., ЗОЛотова Т.В. *Критерии оценки и оптимальности риска в сложных организационных системах*. – М.: ВЦ РАН, 2009. – 162 с.
4. ГОРЕЛИК В.А., ЗОЛотова Т.В. *Модели оценки коллективного и системного риска*. – М.: ВЦ РАН, 2011. – 163 с.
5. ЗОЛотова Т.В. *Механизм информационного регулирования в иерархической модели управления корпорацией // Системы управления и информационные технологии*. – 2010. – №1. – С. 58–63.
6. НОВИКОВ Д.А. *Теория управления организационными системами*. – М.: Физматлит, 2007. – 583 с.

GENERAL APPROACH TO MODELLING PROCEDURES OF RISK MANAGEMENT AND ITS APPLICATION TO STOCHASTIC HIERARCHICAL SYSTEMS

Viktor Gorelik, Computer Center n. a. A.A. Dorodnitsyn of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Doctor of Science, professor (gorelik@ccas.ru).

Tatiana Zolotova, State University of the Ministry of Finance of the Russian Federation, Moscow, Doctor of Science, assistant professor (tgold11@mail.ru).

Abstract: The general model of risk management is suggested, which consists of two sub-models: the model of system efficiency estimation and that of risk estimation. The problems of management in stochastic systems, and also in complex hierarchical systems under internal uncertainty, are considered. The methods to find the solution for these problems are developed, which allow finding the optimum control strategy to balance efficiency and stability.

Key words: uncontrollable factors, risk minimization, stochastic process, function of risk, hierarchy, the price of anarchy.

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии А. Ф. Кононенко*

УДК 519
ББК 32.81

ИЕРАРХИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ВОЕННЫХ ДЕЙСТВИЙ

Новиков Д. А.¹

(ФГБУН Институт проблем управления РАН, Москва)

Обсуждаются современные тенденции построения комплексных иерархических моделей военных действий. Для этого сначала приводится краткий навигатор по описанным в открытых источниках математическим моделям военных действий, включая описательные, имитационные, оптимизационные и теоретико-игровые модели. Затем в качестве «примеров» несколько более подробно рассматриваются два хрестоматийных класса моделей – игра полковника Блотто и ланчестеровские модели. И, наконец, обсуждается собственно иерархический подход к моделированию.

Ключевые слова: математическое моделирование, игра полковника Блотто, ланчестеровские модели, мультиагентные системы, иерархия моделей.

1. История

С исторической точки зрения одним из первых приложений «исследования операций» к военному делу считается (см. [22]) деятельность Архимеда при организации обороны Сиракуз. Ключевыми вехами уже нашего времени являются модели Ф. Ланчестера и разработки Т. Эдисона периода Первой Мировой войны, затем – количественные (в основном вероятностные) методы оценки боевой эффективности различных видов вооружения (см. краткий обзор в [13]), получившие активное развитие, начиная с 1939 г. (т.е. с начала Второй Мировой войны), и

¹ Дмитрий Александрович Новиков, доктор технических наук, профессор (novikov@ipu.ru).

приведшие к формированию такого самостоятельного научного направления как *исследование операций* (см., например, классические учебники [11, 13, 56, 76, 79, 87, 88] и современные учебники [126, 152]).

2. Классификация

Условно можно выделить четыре общих класса *математических моделей* военных действий (основанием выделения являются функции моделирования [58]):

- описательные модели;
- имитационные модели;
- оптимизационные модели;
- модели принятия решений.

Каждый из этих классов (возможны и другие основания классификации – см., например, [158]) включает значительное число подклассов, различающихся используемым математическим аппаратом – см. рис. 1.

Так, *описательные модели* военных действий основываются на методах теории вероятностей и статистической теории решений (принятие решений в условиях «природной» неопределенности) [74, 82], теории надежности и теории массового обслуживания [13, 83, 87], теории экспертных оценок [82]. К описательным моделям можно отнести и качественный анализ соответствующих динамических систем, исследование их структурной устойчивости [3, 5].

Имитационные модели военных действий основываются на аппарате марковских цепей, дифференциальных уравнений, конечных автоматов или методах распределенного искусственного интеллекта (так называемые мультиагентные системы – МАС).



Рис. 1. Классификация математических моделей военных действий

Наиболее известными и получившими широкое развитие являются так называемые *ланчестеровские модели* (см. также раздел 5), использующие аппарат дифференциальных уравнений для описания динамики численности сил участников военных конфликтов (первая модель Ланчестера описана в [131], ее развитие, например – в [56, 109]).

Значительное место занимают так называемые *военные игры* (деловые, имитационные), основывающиеся на тех или иных математических моделях [22, 90, 108]. На сегодняшний день создаются и эксплуатируются многочисленные компьютерные системы (включая среды имитационного моделирования и специальные языки – например, *Battle Management Language* и т.п.) и имитационные модели (включая элементы систем поддержки принятия решений (СППР)) по управлению военными действиями – в авиации [12, 69], на флоте [10, 18].

Оптимизационные модели военных действий используют аппарат линейного и динамического программирования [13, 82, 87], теории оптимального управления [13, 83, 87], дискретной оптимизации (включая теорию графов и методы календарно-сетевое планирования и управления (КСПУ) применительно к планированию боевых действий и управлению войсками [78, 82, 87]) и отчасти теории массового обслуживания и теории управления запасами [13, 82, 83, 87].

Модели принятия решений можно условно разделить на модели индивидуального и коллективного принятия решений. В первых основной акцент обычно делается на многокритериальное принятие решений [13], во вторых – на использование *теории игр* (принятие решений в условиях игровой неопределенности). Теоретико-игровые модели военных действий более подробно рассматриваются в третьем разделе ниже.

Другим возможным основанием классификации моделей военных действий являются *области применения* моделей военных действий – их приложения к авиации [29, 31, 56, 85, 120], флоту [22, 56, 80], сухопутным операциям [74, 82, 87], пограничной безопасности [89] и др.

3. Теоретико-игровые модели военных действий

Теория игр (в основном антагонистических) активно используется для моделирования военных действий начиная с конца 40-х – начала 50-х годов XX века и до наших дней (информативными с исторической точки зрения являются многочисленные отчеты *RAND Corporation*, например, [93, 124] и [120]).

Интересно, что первоначально учебники и монографии по теории игр содержали примеры приложений этой теории в основном именно к военному делу [14, 29, 147], а начиная с конца 80-х годов XX века большинство примеров стало браться из области экономики [20, 135] (в середине 80-х годов примеры приводились, как правило, из обеих областей – см., например, [32]). Сейчас эта тенденция абсолютно доминирует – см. современные учебники по теории игр [114, 136] (хороший обзор середины 1990-х годов приведен в [137]), в которых почти нет содержательных примеров из военной области.

Многие авторы ограничиваются, в основном, рассмотрением *антагонистических игр* (игра двух лиц с нулевой суммой) – см. ставшие хрестоматийными работы [14, 29, 74, 98, 123].

Классическая теория игр (некооперативные, в первую очередь – биматричные игры) [14, 20, 28, 32] используется в приложении к задачам организации, планирования и проведения военных операций [158], выбора оптимальных группировок вооруженных сил и систем вооружения [13, 29, 82, 87]. Сюда же следует, наверное, отнести:

- задачу распределения ограниченных ресурсов обороны и нападения (обобщенное название – игра полковника Блотто, рассматриваемая более подробно ниже) [74], в том числе – с разведкой (игра в развернутой форме сводится к матричной игре [29]);

- *игры типа дуэлей* (выбор оптимальных моментов или оптимальных дистанций открытия огня) [29, 83];

- «политологические» модели анализа причин войн – см. обзоры [99, 118];

– модели гонки вооружений и международного сотрудничества в военной сфере [137].

Вторым обширным классом теоретико-игровых моделей, нашедших широкое применение в военном деле, являются *дифференциальные игры* [1, 12, 35, 44, 72, 73] и *игры поиска* [70, 87], включая современные задачи управления движением в конфликтной среде (см. [1, 21, 30] и ссылки в них).

Задачи поиска подвижного объекта, активно противодействующего обнаружению поисковой системой, получили название «*поиск в условиях конфликта*». Можно выделить две основные группы постановок задач, в зависимости от характера противодействия:

– поиск истинной цели в наблюдаемом составе группы целей, включающей ложные цели; идеологически эти задачи близки к задачам о распределении ресурсов, и, в частности, к задаче о коммивояжере;

– поиск цели при подавленном канале наблюдений.

Задачи второй группы формулируются как дифференциальные игры в смешанных стратегиях с критерием «вероятность обнаружения». Конструктивных решений на сегодняшний день немного; они получены для случаев, когда удается свести дифференциальную игру к игре на компакте [71, 92, 115, 151].

Другие «неклассические» (пока) разделы теории игр также имеют отдельные (далеко не массовые) примеры приложений в моделировании военных действий и принятии решений по управлению силами и средствами в военных конфликтах:

– иерархические игры [23, 40], включая динамические иерархические игры [26, 38];

– модели коллективного поведения [39–41];

– повторяющиеся игры и игры в развернутой форме [32, 49, 72, 161];

– рефлексивные игры [48, 60, 67] и метаигры [40, 128] для моделирования принятия стратегических и оперативных военных решений;

– игры на сетях и сетевые игры [49, 59, 77, 119, 144];

– алгоритмическая (вычислительная) теория игр [91, 133];

– поведенческая теория игр (экспериментальная экономика) [100];

– когнитивные игры, позволяющие осуществлять прогноз стратегического взаимодействия факторов и субъектов [46, 47, 61].

Одним из примеров приложений являются теоретико-игровые модели информационного противоборства в социальных сетях [27], где используется аппарат и иерархических, и рефлексивных игр.

Эмпирической основой теоретико-игрового моделирования обычно являются стратагемы [16, 50] и их рефлексивный анализ [7, 67]. При этом очень популярен опыт Древнего Китая [81] и Древнего Рима [84], а также история европейских войн [33, 36].

Ниже мы приведем краткий обзор результатов построения и исследования двух упоминавшихся выше классов моделей – игра полковника Блотто (раздел 4) и ланчестеровские модели (раздел 5).

4. Игра полковника Блотто

Игрой полковника Блотто (ИПБ), впервые рассмотренной в [95], называется игра двух лиц, в которой игроки однократно, одновременно и независимо (не зная выбора оппонента) распределяют свои ограниченные ресурсы между конечным числом объектов (полей сражений или объектов защиты/нападения [117], одновременных конкурсов/аукционов [130], групп избирателей [132] и т.п.).

Обозначим через $N = \{1, \dots, n\}$ множество объектов, через $x = (x_1, \dots, x_n)$ – действие первого игрока, через $y = (y_1, \dots, y_n)$ – действие второго игрока, где $x_i \geq 0$ ($y_i \geq 0$) – количество ресурса, выделенного первым (вторым) игроком на i -й объект, $i = \overline{1, n}$.

Ограниченность ресурсов отражена условиями

$$(1) \quad \sum_{i \in N} x_i \leq R_x, \quad \sum_{i \in N} y_i \leq R_y.$$

4.1. АУКЦИОННАЯ МОДЕЛЬ

В рамках аукционной модели победу на объекте одерживает игрок, выделивший на него большее количество ресурсов (в случае равенства ресурсов каждый из игроков одерживает победу с вероятностью 1/2). Ценность i -го объекта для первого (второго) игрока обозначим через X_i (Y_i). Тогда выигрыши игроков в аукционной модели будут определяться следующим образом:

$$(2) \quad f_x(x, y) = \sum_{i \in N} X_i I(x_i > y_i) + \frac{1}{2} \sum_{i \in N} X_i I(x_i = y_i),$$

$$f_y(x, y) = \sum_{i \in N} Y_i I(y_i > x_i) + \frac{1}{2} \sum_{i \in N} Y_i I(x_i = y_i),$$

где $I(\cdot)$ – функция-индикатор. Более общим является случай, когда ограничения типа (1) отсутствуют, но из выигрыша (2) вычитаются затраты, монотонные по суммарному количеству использованного игроком ресурса.

Случаи $n = 1$ и $n = 2$ являются тривиальными. Действительно, при $n = 1$ побеждает игрок, обладающий большим количеством ресурса (в случае равенства ресурсов победа каждого равновероятна). При $n = 2$ оптимальной стратегией каждого игрока является приоритетное выделение ресурса на наиболее ценный для него объект (см., например [130]).

Простейшим является симметричный ($X_i = Y_i$, $i \in N$, $R_x = R_y$) вариант дискретной (ресурсы игроков дискретны) ИПБ, являющейся матричной игрой (с нулевой суммой). Впервые решение этой игры (равновесие Нэша в смешанных стратегиях) для случая $n = 3$ было описано в [96]; в [117] были найдены решения для симметричного случая для произвольного конечного n и для случая $X_i = Y_i$, $i \in N$, $R_x \neq R_y$ при $n = 2$. Следующим шагом была частичная характеристика равновесия Нэша для случая $X_i = Y_i$, $i \in N$, $R_x \neq R_y$ при произвольном конечном n [112]. В дальнейшем, как правило (см. обзор в [142]), исследователи ограничивались либо дискретным, либо симметричным непрерывным случаями.

Существенное продвижение в характеристике равновесия в аукционной модели было получено в [142], следующими шага-

ми можно считать статью [127], где исследуется равновесие Нэша в чистых стратегиях для несимметричного случая, и [121], где произведено обобщение ИПБ на стохастический случай.

Описание экспериментальных исследований ИПБ можно найти в [102, 134].

В [130] ИПБ интерпретируется в терминах одновременных конкурсов (применяется аукционное решение), причем учитываются затраты на используемые игроками ресурсы. Динамическое обобщение ИПБ – *многоэтапный конкурс (Dynamic Contest)* [113], в котором игроки на каждом шаге выбирают количество расходуемого ресурса, победитель определяется вероятностной моделью (см. ниже), а оставшийся ресурс уменьшается на долю израсходованного (в игре Блотто эта доля равна единице) [148].

4.2. ВЕРОЯТНОСТНАЯ МОДЕЛЬ

В *вероятностной модели* ИПБ вероятность $p_x(x_i, y_i)$ победы первого игрока на i -м объекте не зависит от других объектов и «пропорциональна» количеству выделенного им на этот объект ресурса и «обратно пропорциональна» взвешенной сумме ресурсов, выделенных на этот объект обоими игроками:

$$(3) \quad p_x(x_i, y_i) = \frac{\alpha_i(x_i)^{r_i}}{\alpha_i(x_i)^{r_i} + (y_i)^{r_i}}, \quad p_y(x_i, y_i) = 1 - p_x(x_i, y_i),$$

$$\text{где } r_i \in (0; 1], \quad \alpha_i > 0, \quad p_x(x_i = 0, y_i = 0) = \frac{\alpha_i}{\alpha_i + 1} \quad [102, 112, 134]$$

(см. общее обсуждение свойств подобных зависимостей в [116, 143, 156], а также обзор [104]). Содержательно коэффициенты $\{\alpha_i\}$ позволяют соизмерять эффективности использования игроками ресурсов на одном и том же объекте.

Выигрыши игроков в вероятностной модели определяются следующим образом:

$$(4) \quad F_x(x, y) = \sum_{i \in N} X_i p_x(x_i, y_i), \quad F_y(x, y) = \sum_{i \in N} Y_i p_y(x_i, y_i).$$

Равновесием Нэша в чистых стратегиях (x^*, y^*) является пара векторов, удовлетворяющих условиям (1), таких, что $\forall (x, y)$, также удовлетворяющих условиям (1), выполнено

$$(5) \quad F_x(x^*, y^*) \geq F_x(x, y^*), \quad F_y(x^*, y^*) \geq F_y(x^*, y).$$

Вероятностная модель в определенном смысле «проще», чем аукционная: как показано в [112], единственным равновесием Нэша для случая $X_i = Y_i = \text{Const}$, $r_i = 1$, $\alpha_i = 1$, $i \in N$, $R_x \neq R_y$ при произвольном конечном n (см. выражение (2)) является использование игроками чистых стратегий, заключающихся в равном распределении имеющихся у них ресурсов между объектами.

В [143] в рамках вероятностной модели найдено равновесие в чистых стратегиях для случая $X_i = Y_i$ при произвольных $r_i \in (0; 1]$, $\alpha_i > 0$, $i \in N$. Приведем аналогичный результат для случая, когда ценность победы на объекте для различных игроков различна (в общем случае $X_i \neq Y_i$, $i \in N$).

Условиями первого порядка для игроков являются (легко показать, что условия (1) в равновесии выполняются как равенства)

$$(6) \quad \frac{\alpha_i r_i (x_i^*)^{r_i-1} (y_i^*)^{r_i}}{[\alpha_i (x_i^*)^{r_i} + (y_i^*)^{r_i}]^2} X_i = \lambda_x, \quad i \in N,$$

$$(7) \quad \frac{\alpha_i r_i (x_i^*)^{r_i} (y_i^*)^{r_i-1}}{[\alpha_i (x_i^*)^{r_i} + (y_i^*)^{r_i}]^2} Y_i = \lambda_y, \quad i \in N,$$

где λ_x и λ_y – множители Лагранжа, соответствующие первому и второму условиям выражения (1).

Разделив (6) на (7), получим

$$(8) \quad \frac{y_i}{x_i} \frac{X_i}{Y_i} = \frac{\lambda_x}{\lambda_y}, \quad i \in N.$$

В частном случае, когда $X_i = Y_i = V_i$, из (8) и (3) (с учетом монотонности (1) по действию игрока) следует, что (см. также [143])

$$(9) \quad \frac{\lambda_x}{\lambda_y} = \frac{R_y}{R_x}.$$

Из (6) и (8) получаем:

$$(10) \quad x_i^* = \frac{\alpha_i r_i \left(\frac{X_i \lambda_x}{Y_i \lambda_y} \right)^{r_i} X_i}{\lambda_x \left[\alpha_i + \left(\frac{X_i \lambda_x}{Y_i \lambda_y} \right)^{r_i} \right]^2}, \quad i \in N,$$

$$(11) \quad y_i^* = \frac{\alpha_i r_i \left(\frac{X_i \lambda_x}{Y_i \lambda_y} \right)^{r_i} Y_i}{\lambda_y \left[\alpha_i + \left(\frac{X_i \lambda_x}{Y_i \lambda_y} \right)^{r_i} \right]^2}, \quad i \in N.$$

Условия первого порядка (10) и (11) являются общей характеристикой равновесия Нэша. В частном случае – при $X_i = Y_i = V_i$, $\alpha_i = r_i = 1$, $i \in N$ – из (10) и (11) с учетом (8) следуют выражения для равновесных действий и выигрышей, полученные в [112]:

$$(12) \quad x_i^* = \frac{V_i}{V} R_x, \quad y_i^* = \frac{V_i}{V} R_y, \quad i \in N,$$

$$(13) \quad F_x(x^*, y^*) = \frac{R_x}{R_x + R_y} V, \quad F_y(x^*, y^*) = \frac{R_y}{R_x + R_y} V,$$

где $V = \sum_{i=1}^n V_i$, т.е. агенты делят свой ресурс пропорционально

ценности объектов и получают выигрыш, пропорциональный их суммарным ресурсам. Отметим, что при этом равновесные действия каждого из игроков зависят только от «их собственных» параметров – так, например, действия первого игрока x^* не зависят от суммарного количества ресурса R_y , имеющегося у второго игрока, и т.п.

При $X_i = Y_i = V_i$, $i \in N$, из (10) и (11) с учетом (8) следуют выражения для равновесных выигрышей, полученные в [143] (там же приведены и аналитические выражения для равновесных действий игроков):

$$(14) \quad F_x(x^*, y^*) = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i (R_x)^{r_i}}{\alpha_i (R_x)^{r_i} + (R_y)^{r_i}} V_i,$$

$$F_y(x^*, y^*) = \sum_{i=1}^n \frac{(R_y)^i}{\alpha_i (R_x)^i + (R_y)^i} V_i.$$

Отметим, что выражения (12)–(14) можно интерпретировать как пропорциональный механизм распределения ресурса (механизм прямых приоритетов) [65].

Система (1), (10), (11) состоит из $2n + 2$ уравнений и содержит столько же неизвестных, однако записать ее решение в аналитическом виде представляется затруднительным (в отличие от [143], где предполагалось, что $X_i = Y_i = V_i$, $i \in N$).

Самостоятельный интерес представляет исследование различий в оценках игроками одних и тех же объектов – модели *стратегической и информационной рефлексии* в ИПБ описаны в [42].

5. Ланчестеровские модели

Общеизвестными и получившими широкое развитие являются так называемые ланчестеровские модели, использующие аппарат дифференциальных уравнений для описания динамики численности сил участников военных конфликтов – первая модель Ланчестера [131] и ее развитие (см. обзоры в [56, 109, 154]). Следует также обратить внимание на наличие тесных аналогий между ланчестеровскими моделями военных действий и популяционными моделями в биологии и экологии (см., например, [19]).

Пусть имеются две противоборствующие стороны. Обозначим через $x(t)$ ($y(t)$) численность войск первой (второй) стороны в момент времени $t \geq 0$. Начальные условия (численности в нулевой момент времени) – x_0 и y_0 соответственно. Скорость изменения численности войск каждой из сторон определяется тремя факторами:

- операционными потерями (пропорциональными численности своих войск);
- боевыми потерями (пропорциональными численности войск противника или произведению численностей войск обеих сторон);
- вводом резервов (выводом в резерв).

Обычное сражение описывается следующей системой дифференциальных уравнений (слагаемые соответствуют вышеперечисленным факторам):

$$(15) \dot{x}(t) = -ax(t) - by(t) + u(t),$$

$$(16) \dot{y}(t) = -cx(t) - dy(t) + v(t),$$

где a , b , c и d – положительные константы; $u(t)$ и $v(t)$ – темпы ввода резервов.

Аналогично описывается *партизанская война* (многие современные войны приобрели иррегулярный «партизанский» характер [52]):

$$(17) \dot{x}(t) = -ax(t) - gx(t)y(t) + u(t),$$

$$(18) \dot{y}(t) = -dy(t) - hx(t)y(t) + v(t),$$

где g и h – положительные константы, и *смешанная война*:

$$(19) \dot{x}(t) = -ax(t) - gx(t)y(t) + u(t),$$

$$(20) \dot{y}(t) = -cx(t) - dy(t) + v(t).$$

Модели отличаются учетом боевых потерь. Предполагается, что в обычном сражении каждая сторона в единицу времени поражает число противников, пропорциональное своей численности – коэффициенты b и c , называемые *коэффициентами боевой эффективности*, могут измеряться как число выстрелов, произведенное одним сражающимся в единицу времени, умноженное на вероятность поражения одним выстрелом одного противника (именно такую модель первоначально и предложил Ф. Ланчестер в [131]). Другой тип сражения – «партизанский», или «стрельбы по площадям», когда потери противника зависят как от интенсивности огня, так и от концентрации его войск, что отражается «смешанными» слагаемыми, пропорциональными $x(t)y(t)$. Существует и другая (так называемая *дуэльная*) интерпретация модели (17)–(18), в соответствии с которой сражение рассматривается как война в древнем мире – набор индивидуальных попарных поединков между воинами (в условиях невозможности локализации и концентрации поражающих факторов). Можно говорить не о типах сражений, а о типах ведения огня:

1. Прицельный огонь по рассредоточенным целям.

2. Прицельный огонь по сосредоточенным целям.

3. Стрельба по площадям [43].

Отметим, что возможно рассмотрение более общих моделей, т.е. таких, в которых скорости изменения численностей пропорциональны произведению численностей, возведенных в определенные степени (эти степени могут быть и дробными – так называемые фрактальные модели Ланчестера [138]).

Следует подчеркнуть, что выше речь идет только о традиционном оружии (боевых единицах с низкой вероятностью поражения в отдельном выстреле): применение современного высокоточного оружия, разведывательно-огневых и разведывательно-ударных комплексов описывают другими моделями.

Самым простым (ставшим хрестоматийным) случаем является случай отсутствия операционных потерь и резервов, когда (15)–(16) превращается в

$$(21) \quad \dot{x}(t) = -by(t), \quad \dot{y}(t) = -cx(t).$$

Решением системы (21) является так называемая квадратичная модель динамики численности войск:

$$(22) \quad b(y^2(t) - y_0^2) = c(x^2(t) - x_0^2).$$

Траекториями (22) в координатах (x, y) будут гиперболы (прямая при $b y_0^2 = c x_0^2$). Проигравшей будет сторона, чья численность войск первая обратится в ноль (поэтому ланчестеровские модели иногда называют *моделями истощения*). Если $b y_0^2 > c x_0^2$, то побеждает вторая сторона, при $b y_0^2 < c x_0^2$ побеждает первая. Условие «равенства сил» имеет вид

$$(23) \quad y_0 = \sqrt{\frac{c}{b}} x_0.$$

Следует отметить некоторую условность выражений типа (23), которые не учитывают известного факта, что существует определенный критический процент потерь, при которых сторона отказывается от продолжения боя (см., например, [17, 25]).

По аналогии, рассмотрев (17)–(18) в отсутствии операционных потерь и резервов, получим

$$(24) \quad \dot{x}(t) = -gx(t)y(t), \quad \dot{y}(t) = -hx(t)y(t).$$

Решением системы (24) является прямая $g(y(t) - y_0) = h(x(t) - x_0)$, а условием «равенства сил»

$$(25) y_0 = \frac{h}{g} x_0.$$

Смешанная война (см. (19)–(20)) в отсутствии операционных потерь и резервов описывается системой

$$(26) \dot{x}(t) = -gx(t)y(t), \quad \dot{y}(t) = -cx(t).$$

Решением системы (26) является $g(y^2(t) - y_0^2) = 2c(x(t) - x_0)$. Результаты идентификации модели (26) для действия регулярных войск против партизанских движений приведены в [107].

Рассмотрим ситуацию, когда стороны могут делить свои войска на части и осуществлять последовательный боевой контакт своих частей с частями противника.

Из условия (25) можно получить следующее выражение численности войск первой стороны, оставшейся после победы над противником:

$$(27) x(x_0, y_0) = x_0 - \delta y_0,$$

где $\delta = g/h$ – отношение коэффициентов боевой эффективности соответственно второй и первой сторон в модели (24). В силу линейности выражения (27) исход боя определяется только начальными количествами войск и отношением δ и не зависит от того, как стороны разделили свои войска на части, какие части сражаются с какими и в какой последовательности. Ситуация становится несколько более разнообразной в рамках модели (21).

Из условия (22) можно получить следующее выражение численности войск первой стороны, оставшейся после победы над противником:

$$(28) x(x_0, y_0) = \sqrt{x_0^2 - \gamma y_0^2},$$

где $\gamma = b/c$ – отношение коэффициентов боевой эффективности соответственно второй и первой сторон в модели (21). Пусть $\gamma < 1$ и $x_0 < \sqrt{\gamma} y_0$, т.е. первая сторона более эффективна, но обладает начальной численностью войск, недостаточной для

того, чтобы одержать победу над второй стороной при вводе ими в действие одновременно всех своих сил.

Предположим, что имеется n плацдармов, по которым вторая сторона уже распределила свои силы. Обозначим через $y_i \geq 0$ численность войск второй стороны на i -м плацдарме, $i = \overline{1, n}$,

$$\sum_{i=1}^n y_i = y_0. \text{ Без ограничения общности предположим, что плацдармы пронумерованы так, что } y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_n.$$

Пусть первая сторона, используя все имеющиеся у нее на текущий момент силы, может последовательно сражаться на различных плацдармах. Определим, какова оптимальная для первой стороны последовательность сражений и при каких условиях (значениях x_0 и γ , а также векторе $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$) она может последовательно победить на всех плацдармах. Ответ на этот вопрос тривиален – конечная численность войск первой стороны не зависит от последовательности плацдармов, а победа в рамках модели (28) возможна в случае, когда

$$(29) \quad x_0 \geq \sqrt{\gamma \sum_{i=1}^n (y_i)^2}.$$

Так как сумма квадратов неотрицательных чисел не превышает квадрата их суммы, то из (29) следует, что первой стороне в рассматриваемой модели всегда выгодно дробление войск противника – их равное деление между n плацдармами снижает их «эффективную численность» в \sqrt{n} раз. Хрестоматийным примером последовательного разгрома превосходящих сил противника является Графальгарская битва.

Легко убедиться, что вывод о том, что конечная численность войск первой стороны не зависит от последовательности плацдармов, справедлив и для общего случая так называемых «степенных» уравнений Ланчестера:

$$\dot{x}(t) = -gx^p(t)y^q(t),$$

$$\dot{y}(t) = -hx^q(t)y^p(t).$$

Существует множество разновидностей задач оптимизации распределения сил обороны и нападения в рамках ланчестеров-

ских моделей (см. также обзор и результаты в [146]), т.е. модель Ланчестера имеет массу вариаций и обобщений:

- введение переменных (зависящих от времени) коэффициентов боевой эффективности [153];
- учет особенностей боевых действий различных типов – засад, перестрелок, осад и т.д. [145];
- рассмотрение дискретных моделей залпового огня [129];
- многоуровневые модели [103], в которых на нижнем уровне методом Монте-Карло имитируется взаимодействие отдельных боевых единиц, на среднем уровне взаимодействие описывается марковскими моделями, а на верхнем (агрегированном, детерминированном) уровне используются дифференциальные уравнения [155]. Такой подход удобен для идентификации реальных задач и более адекватного учета специфики конкретной моделируемой ситуации;
- рассмотрение дифференциальных игр, в которых управлениями игроков являются темпы ввода резервов $u(t)$ и $v(t)$, а критериями эффективности – разность между численностями войск в заданный момент времени [101];
- анализ моделей длительных (многостадийных) конфликтов с учетом ввода резервов [7, 74, 88];
- модели агрегированного описания театра военных действий, состоящего из нескольких областей, сражения в каждой из которых описываются квадратичным законом Ланчестера [106] (учет и оптимизация распределения сил и средств в пространстве и во времени (см. обзор в [138], а также модели многостадийных конфликтов);
- модели военных конфликтов с использованием нескольких видов вооружений [125];
- модели разоружений Ричардсона [141];
- модели, учитывающие неопределенность в виде стохастических слагаемых – переход к марковским моделям [13, 74, 94, 154, 158], стохастическим дифференциальным уравнениям, и др.

Множество работ посвящены идентификации конфликтов (подбору параметров модели) [54, 97, 105, 110, 111, 122].

Добавление в уравнения типа Ланчестера управляющих переменных (отражающих ввод резервов, распределение сил и средств и т.д. [34]) приводит уже к оптимизационным моделям, т.е. к соответствующим задачам оптимального управления. Перспективным представляется использование подобного «надстроечного» подхода для перехода к иерархиям моделей – теоретико-игровым «надстройкам» над ланчестеровскими моделями.

6. Иерархии моделей

Сложность и многообразие реальных ситуаций требуют для их адекватного отражения в математических моделях гибкости и универсальности последних. Эти свойства неизбежно приходят в противоречие с общностью и обоснованностью результатов моделирования – см. функции и свойства моделей, а также «принцип неопределенности» в [58]. Поэтому при решении тех или иных реальных задач неизбежно использование комплексов моделей, в которых «выход» одной модели является «входом» для другой и т.д. Совокупность подобных моделей может рассматриваться в виде *иерархии* (обычно более низким уровням иерархии соответствует более высокая степень детализации описания моделируемых систем) или *горизонтальной цепочки*, в каждом элементе которой степень детализации примерно одинакова. Подобный подход к моделированию зародился и активно развивался в 60–70-х годах XX века [8, 51, 57].

Начнем с нескольких примеров иерархий математических моделей, описывающих ситуации противоборства в военной, информационной и др. сферах. Описывать эти примеры будем единообразно, на каждом уровне иерархии указывая моделируемые явления и процессы, а также аппарат моделирования.

6.1. МОДЕЛЬ БОЕВЫХ ДЕЙСТВИЙ

Если противники однократно и одновременно принимают решения о распределении своих сил «в пространстве» (между плацдармами), то получаем игру полковника Блотто – см. раздел 4 и [42] – в которой победитель на каждом из плацдармов опре-

деляется в результате решения соответствующих уравнений Ланчестера. Другими словами, можно рассматривать «иерархическую» модель, в которой на верхнем уровне иерархии игроки распределяют свои силы между плацдармами в рамках той или иной вариации теоретико-игровой модели ИПБ, а на нижнем уровне исход сражения на каждом из плацдармов описывается той или иной вариацией модели Ланчестера. Сложность аналитического исследования таких иерархических моделей обусловлена тем, что в большинстве случаев для ИПБ трудно найти аналитическое решение (см. [42]).

Для моделей Ланчестера также можно использовать иерархический подход (см. раздел 5) – на нижнем уровне методом Монте-Карло имитируется взаимодействие отдельных боевых единиц, на среднем уровне взаимодействие описывается марковскими моделями, а на верхнем (агрегированном, детерминированном) уровне используются собственно дифференциальные уравнения ланчестеровского типа. «Над» этими моделями, вводя в них управляемые параметры (распределение сил и средств во времени – ввод резервов и т.д.), можно надстраивать задачи управления в терминах управляемых динамических систем, дифференциальных и/или повторяющихся игр и др.

В результате получим следующую иерархическую модель:

Таблица 1. Модель боевых действий

Уровень иерархии	Моделируемые явления/процессы	Аппарат моделирования
5	Распределение сил и средств в пространстве	Игра полковника Блотто и ее модификации
4	Распределение сил и средств во времени	Оптимальное управление, повторяющиеся игры и др.
3	Динамика численности	Уравнения Ланчестера и их модификации
2	«Локальное» взаимодействие подразделений	Марковские модели

Уровень иерархии	Моделируемые явления/процессы	Аппарат моделирования
1	Взаимодействие отдельных боевых единиц	Имитационное моделирование, метод Монте-Карло

6.2. МОДЕЛЬ РАСПРЕДЕЛЕННОГО ПРЕОДОЛЕНИЯ СИСТЕМЫ ОБОРОНЫ (ТАК НАЗЫВАЕМАЯ ЗАДАЧА О ДИФФУЗНОЙ БОМБЕ)

Модель распределенного преодоления системы обороны (так называемая *задача о диффузной бомбе*) [40]. Одной из современных тенденций в теории и практике управления является стремление к «миниатюризации», «децентрализации» и «интеллектуализации». Как следствие, в последнее десятилетие все большее внимание исследователей привлекает такой объект управления, как *мультиагентные системы*, состоящие из большого числа взаимодействующих между собой автономных агентов социальной, технической или информационной природы [37, 39, 139, 140, 149, 159, 160]. Такие свойства мультиагентных систем, как децентрализованность взаимодействия и множественность агентов, с одной стороны, дают их качественно новые эмерджентные свойства, важные во многих приложениях, в том числе – в задачах оборон и безопасности (колесные и др. роботы, беспилотные летательные аппараты, автономные подводные аппараты и т.п.). С другой стороны, новые свойства объекта управления ставят новые задачи – в частности, необходимость совместного решения задач управления, реализации вычислений и организации коммуникаций (связи) в реальном времени.

Примером является задача о диффузной бомбе, которая заключается в следующем: группа автономных подвижных агентов должна поразить цель с заданными координатами. В каждый такт времени каждый агент может быть с определенной вероятностью обнаружен и уничтожен системой обороны. Вероятность обнаружения/уничтожения зависит от координат агента,

его скорости и расположения относительно других агентов. Задача заключается в синтезе таких алгоритмов децентрализованного взаимодействия агентов и принятия ими решений о направлении и скорости движения, чтобы максимизировать число агентов, достигших цели. «Интеллектуальность» агентов заключается, в том числе, в том, что часть агентов-разведчиков, может оперативно получать информацию о параметрах системы обороны. Остальные агенты, наблюдая за поведением разведчиков (в условиях ограничений на коммуникации между агентами), «рефлексируя» получают оценку опасной области и решают поставленную задачу.

В целях оценки и выбора наиболее эффективных алгоритмов поведения используется следующая иерархическая модель:

Таблица 2. Модель диффузной бомбы

Уровень иерархии	Моделируемые явления/ процессы	Аппарат моделирования
6	Выбор состава группы агентов и их свойств	Методы дискретной оптимизации
5	Выбор агентами траекторий и скоростей движения	Оптимальное управление
4	Прогноз агентом поведения других агентов	Рефлексивные игры. Метод рефлексивных разбиений
3	Минимизация вероятности обнаружения на основании текущей информации	Алгоритмы выбора направления движения
2	Избежание столкновений, обход препятствий	Алгоритмы выбора локальных траекторий
1	Движение агента к цели	Уравнения динамики движения

В мультиагентных системах иерархия моделей порождается, в том числе, функциональной структурой самого агента, которая имеет несколько иерархических уровней – см. рис. 2 [39, 66]. На нижнем (*операционном*) уровне осуществляется

реализация действий, например – стабилизация движения по заданной траектории. На *тактическом уровне* осуществляется выбор действий, в том числе – с учетом взаимодействия с другими агентами. *Стратегический уровень* отвечает за принятие решений, обучение и адаптивность поведения. И, наконец, высший уровень (*целеполагания*) соответствует принципам выбора целей и механизмов функционирования агентов.

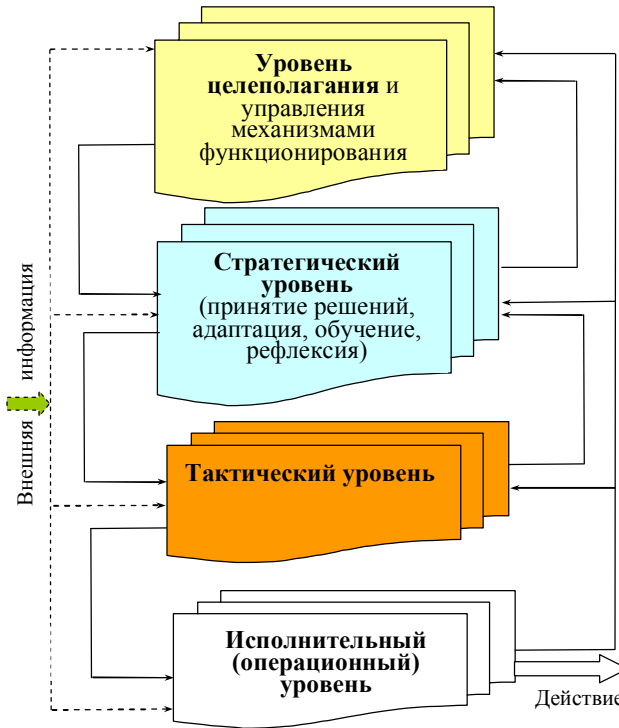


Рис. 2. Обобщенная архитектура агента

Приведенная на рис. 2 структура является достаточно универсальной. Но в то же время большинство реализаций мультиагентных систем ограничивается двумя нижними уровнями. Поэтому одной из современных тенденций и теории мультиагентных систем, и теории игр, и искусственного интеллекта

(последние два научных направления ориентированы на верхние уровни архитектуры агента) является стремление к их интеграции [63].

6.3. МОДЕЛЬ ИНФОРМАЦИОННОГО ПРОТИВОБОРСТВА

Объектом и средством управления в данном примере является социальная сеть или другой «сетевой» объект [27, 47, 59, 61, 77].

Можно выделить несколько уровней описания и анализа социальных сетей. На первом (нижнем) уровне сеть рассматривается «в целом» (данное описание, хотя и не является детализированным, обычно необходимо для экспресс-анализа общих свойств объекта). Здесь для агрегированного описания сети используются статистические методы, методы семантического анализа и др. На втором уровне с использованием аппарата теории графов производится анализ структурных свойств сети. На третьем уровне анализируется информационное взаимодействие агентов. Здесь спектр возможных моделей наиболее широк – марковские модели, конечные автоматы, модели диффузии инноваций, модели заражения и многие другие. На четвертом уровне с использованием аппарата оптимального управления или дискретной оптимизации ставятся и решаются задачи управления. И, наконец, на пятом уровне для описания взаимодействия субъектов, воздействующих на социальную сеть каждый в своих интересах, как правило, используется аппарат теории игр, в том числе – рефлексивных игр.

В результате получим следующую иерархическую модель:

Таблица 3. Модель информационного противоборства

Уровень иерархии	Моделируемые явления/ процессы	Аппарат моделирования
5	Информационное противоборство	Теория игр, теория принятия решений
4	Информационное управление	Оптимальное управление, дискретная оптимизация
3	Информационное	Марковские модели, конеч-

Уровень иерархии	Моделируемые явления/ процессы	Аппарат моделирования
	взаимодействие агентов	ные автоматы, модели диффузии инноваций, модели заражения и др.
2	Анализ структурных свойств сети	Теория графов
1	Анализ сети в целом	Статистические методы, методы семантического анализа и др.

То есть на каждом уровне имеется большой набор возможных моделей и методов, совокупность которых может рассматриваться как своеобразный конструктор, пользуясь элементами которого исследователь собирает инструмент для решения поставленной перед ним задачи. С одной стороны, возможно адаптированное использование тех или иных известных моделей и методов. С другой стороны, специфика объекта заставляет на каждом уровне разрабатывать и развивать свои специфические методы, учитывающие большую размерность объекта управления, его распределенность и неполную наблюдаемость, наличие многих взаимодействующих объектов и субъектов управления, обладающих различными интересами и т.д.

В заключение настоящего раздела отметим, что иерархические модели используются, естественно, не только в военных приложениях. Широко распространены они практически во всех областях науки и практической человеческой деятельности: организационное управление [53], коллективное поведение [39, 62], экономико-математические модели [6, 77, 86], биология и медицина – см. обзор [4], технические и производственные системы [8] и др.

7. Перспективы

На сегодняшний день издаются несколько десятков журналов по исследованию операций, имитационному моделирова-

нию и т.д., в которых нередко встречаются статьи по применению соответствующих моделей и методов к описанию военных действий, оптимизации принимаемых решений (обзоры применения теории игр и имитационного моделирования можно найти в [108, 157]). Существуют сообщества ученых, занимающихся соответствующими задачами – например, *Military Operations Research Society* со своими журналами, конференциями и т.д.

Если говорить о перспективных направлениях развития теории игр и ее приложений к описанию военных действий, то, наверное, в будущем можно ждать активного развития приложений к военному делу «неклассических» разделов теории игр – иерархических, эволюционных, когнитивных и других игр. В рамках теории игр и теории коллективного поведения развито множество моделей, учитывающих адаптацию, обучение и другие интеллектуальные свойства игроков (см. [39, 60, 62]), использование которых в моделировании военных действий, наверное, позволит более адекватно отражать многие реальные ситуации.

Перспективным также представляется, во-первых, использование комплексных иерархических интеллектуальных моделей (см. шестой раздел) с соответствующей компьютерной реализацией. Во-вторых – моделирование и учет в системах поддержки принятия решений стратегических и рефлексивных рассуждений ЛПР (командиров соответствующего уровня) на тактическом, оперативном и стратегическом уровнях (с учетом ограничений, накладываемых господствующей военной доктриной, находящей отражение в уставах и учебниках – см., например, [55, 75]). В третьих, столь «модная» сейчас сетцентрическая концепция организации управления войсками и боевыми действиями пока мало находит отражение в соответствующих оптимизационных (теория графов) и игровых (теория игр) моделях. Относительно этого направления можно высказать гипотезу о возможности и целесообразности использования моделей сетевых игр [59, 64, 119].

Автор признателен за конструктивные ценные замечания д.т.н. Е.П. Маслову и к.т.н. В.В. Шумову.

Литература

1. АБРАМЯНЦ Т.Г., МАСЛОВ Е.П., ЯХНО В.П. Уклонение подвижного объекта от обнаружения группой наблюдателей // Проблемы управления. – 2010. – №5. – С. 73–79.
2. АЙЗЕКС Р. Дифференциальные игры. – М.: Мир, 1967. – 480 с.
3. АМЕЛЬКИН В.В. Дифференциальные уравнения в приложениях. – М.: Наука, 1987. – 188 с.
4. АПОНИН Ю.М., АПОНИНА Е.А. Иерархия моделей математической биологии и численно-аналитические методы их исследования // Математическая биология и биоинформатика. – 2007. – Том 2, №2. – С. 347–360.
5. АРНОЛЬД В.И. «Жесткие» и «мягкие» модели / Математическое моделирование социальных процессов. – М.: МГУ, 1998. – С. 29–51.
6. БЕЛОТЕЛОВ Н.В., БРОДСКИЙ Ю.И., ПАВЛОВСКИЙ Ю.Н. Сложность. Математическое моделирование. Гуманитарный анализ: Исследование исторических, военных, социально-экономических и политических процессов. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. – 320 с.
7. БИРШТЕЙН Б.И., БОРШЕВИЧ В.И. Стратегемы рефлексивного управления в западной и восточных культурах // Рефлексивные процессы и управление. – 2002. – Т. 2, №1. – С. 27–44.
8. БУСЛЕНКО Н.П. Моделирование сложных систем. – М.: Наука, 1968. – 356 с.
9. БУЯНОВ Б.Б., ЛУБКОВ Н.В., ПОЛЯК Г.Л. Математическая модель длительного вооруженного конфликта // Проблемы управления. – 2007. – №5. – С. 48–51.
10. БУЯНОВ Б.Б., ЛУБКОВ Н.В., ПОЛЯК Г.Л. Система поддержки принятия управленческих решений с применением имитационного моделирования // Проблемы управления. – 2006. – №6. – С. 43–49.
11. ВАГНЕР Г. Основы исследования операций. – М.: Мир, 1972. Т. 1. – 335 с.; Т. 2. – 488 с.; Т. 3. – 501 с.

12. ВАЙСБОРД Э.М., ЖУКОВСКИЙ В.И. *Введение в дифференциальные игры нескольких лиц и их приложения*. – М.: Советское радио, 1980. – 304 с.
13. ВЕНТЦЕЛЬ Е.С. *Введение в исследование операций*. – М.: Советское радио, 1964. – 388 с.
14. ВЕНТЦЕЛЬ Е.С. *Элементы теории игр*. – М.: Физматгиз, 1961. – 68 с.
15. ВИШНЯКОВА Л.В., ДЕГТЯРЕВ О.В., СЛАТИН А.В. *Имитационное операционное моделирование процессов функционирования сложных авиационных систем и комплексов моделирования* / Труды конференции «Имитационное моделирование. Теория и практика». Том 1.– СПб.: СПИИРАН, 2011. – С. 30–41.
16. ВОЕВОДИН А.И. *Стратегемы – стратегии войны, манипуляции, обмана*. – М.: Белые Альвы, 2002. – 256 с.
17. *Война и мир в терминах и определениях* / Под общей ред. Д.О. Рогозина. – М.: Изд. дом «ПоРог», 2004. – 624 с.
18. ВОЛГИН Н.С. *Исследование операций*. – Санкт-Петербург: ВМА им. Н.Г. Кузнецова, 1999. – Часть 1 – 366 с.; Часть 2 – 334 с.
19. ВОЛЬТЕРА В. *Математическая теория борьбы за существование*. – М.: Наука, 1976. – 288 с.
20. ВОРОБЬЕВ Н.Н. *Теория игр для экономистов-кибернетиков*. – М.: Наука, 1985. – 272 с.
21. ГАЛЯЕВ А.А., МАСЛОВ Е.П., РУБИНОВИЧ Е.Я. *Об одной задаче управления движением объекта в конфликтной среде* // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2009. – №3. – С. 134–140.
22. ГАРРЕТ Р., ЛОНДОН Д. *Основы анализа операций на море*. – М.: Воениздат, 1974. – 270 с.
23. ГЕРМЕЙЕР Ю.Б. *Игры с противоположными интересами*. – М.: Наука, 1976. – 327 с.
24. ГЛУШКОВ И.Н. *Выбор математической схемы при построении модели боевых действий* // Программные продукты и системы. – 2010. – №10. – С. 2–5.

25. ГОЛОВИН Н.Н. *Наука о войне. О социологическом изучении войны.* – Париж: Издательство газеты «Сигнал», 1938. – 248 с.
26. ГОРЕЛИК В.А., ГОРЕЛОВ М.А., КОНОНЕНКО А.Ф. *Анализ конфликтных ситуаций в системах управления.* – М.: Радио и связь, 1991. – 288 с.
27. ГУБАНОВ Д.А., НОВИКОВ Д.А., ЧХАРТИШВИЛИ А.Г. *Социальные сети: модели информационного влияния, управления и противоборства.* – М.: Физматлит, 2010. – 244 с.
28. ГУБКО М.В., НОВИКОВ Д.А. *Теория игр в управлении организационными системами.* – 2-е изд. – М.: Синтег, 2005. – 136 с.
29. ДРЕШЕР М. *Стратегические игры. Теория и приложения.* – М.: Советское радио, 1964. – 353 с. (На англ. языке: DRESHER M. *Games of Strategy: Theory and Applications.* – Santa Monica: RAND, Prentice Hall, 1961.)
30. ДОБРОВИДОВ А.В., КУЛИДА Е.Л., РУДЬКО И.М. *Выбор траектории движения объекта в конфликтной среде // Проблемы управления.* – 2011. – №2. – С. 64–75.
31. ДУРОВ В.Р. *Боевое применение и боевая эффективность истребителей-перехватчиков.* – М.: Воениздат, 1972. – 280 с.
32. ДЮБИН Г.Н., СУЗДАЛЬ В.Г. *Введение в прикладную теорию игр.* – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981. – 336 с.
33. ДЮПУИ Р., ДЮПУИ Т. *Всемирная история войн.* – М.: Полигон, 1997. – 3968 с.
34. ЖЕРЕБИН А.М., ЗУРАБЬЯН Н.И. *Модель боевых действий для оценки эффективности перспективного авиационного вооружения // Вестник МАИ.* – 2009. – № 11 – С. 8–13.
35. ЖУКОВСКИЙ В.И., САЛУКВАДЗЕ М.Е. *Некоторые игровые задачи управления и их приложения.* – Тбилиси: Мецниереба, 1998. – 462 с.
36. *История военной стратегии России /* Под ред. В.А. Золотарева. – М.: Кучково поле, 2000. – 592 с.

37. КАЛЯЕВ И.А., ГАЙДУК А.Р., КАПУСТЯН С.Г. *Модели и алгоритмы коллективного управления в группах роботов.* – М.: Физматлит, 2009. – 280 с.
38. КОНОНЕНКО А.Ф., ХАЛЕЗОВ А.Д., ЧУМАКОВ В.В. *Принятие решений в условиях неопределенности.* – М.: ВЦ АН СССР, 1991. – 211 с.
39. КОРЕПАНОВ В.О. *Модели рефлексивного группового поведения и управления.* – М.: ИПУ РАН, 2011. – 133 с.
40. КОРЕПАНОВ В.О., НОВИКОВ Д.А. *Задача о диффузной бомбе // Проблемы управления.* – 2011. – №5. – С. 66–73.
41. КОРЕПАНОВ В.О., НОВИКОВ Д.А. *Метод рефлексивных разбиений в моделях группового поведения и управления // Проблемы управления.* – 2011. – №1. – С. 21–32.
42. КОРЕПАНОВ В.О., НОВИКОВ Д.А. *Рефлексивная игра полковника Блотто // Системы управления и информационные технологии.* – 2012. – №1(47). – С. 55–62.
43. КРАСНОЩЕКОВ П.С., ПЕТРОВ А.А. *Принципы построения моделей.* – М.: Изд-во МГУ, 1983. – 264 с.
44. КРАСОВСКИЙ Н.Н. *Игровые задачи о встрече движений.* – М.: Наука, 1970. – 420 с.
45. КУКУШКИН Н.С., МОРОЗОВ В.В. *Теория неантагонистических игр.* – М.: МГУ, 1984. – 104 с.
46. КУЛИВЕЦ С.Г. *Моделирование конфликтных ситуаций с несогласованными представлениями у агентов на основе игр на линейных когнитивных картах // Проблемы управления.* – 2010. – №4. – С. 42–48.
47. КУЛЬБА В.В., КОНОНОВ Д.А., КОСЯЧЕНКО С.А., ШУБИН А.Н. *Методы формирования сценариев развития социально-экономических систем.* – М.: Синтег, 2004. – 296 с.
48. ЛЕФЕВР В.А. *Конфликтующие структуры.* – М.: Сов. радио, 1973. – 159 с.
49. МАЗАЛОВ В.В. *Математическая теория игр и приложения.* – СПб.: Лань, 2010. – 448 с.
50. МАЛЯВИН В.В. (перевод с кит.) *Китайская наука стратегии.* – М.: Белые Альвы, 1999. – 414 с.

51. МЕСАРОВИЧ М., МАКО Д., ТАКАХАРА И. *Теория иерархических многоуровневых систем.* – М.: Мир, 1973. – 344 с.
52. МЕССНЕР Е.Э. *Всемирная мятеже-война.* – Жуковский; М.: Кучково поле. 2004. – 512 с.
53. *Механизмы управления* / Под ред. Д.А. Новикова. – М.: Ленанд, 2011. – 192 с.
54. МИТЮКОВ Н.В. *Определение жертв войн через Ланчестерские модели* // Историческая психология и социология истории. – 2009. – №2. – С. 122–140.
55. МИХАЛЕВ С.Н. *Военная стратегия. Подготовка и ведение войн Нового и Новейшего времени.* – М.: Кучково поле, 2003. – 947 с.
56. МОРЗ Ф., КИМБЕЛЛ Д. *Методы исследования операций.* – М.: Советское радио, 1956. – 307 с.
57. НЕЙМАРК Ю.И. *Математические модели естествознания и техники.* – Нижний Новгород: ННГУ. – Вып. 1. –1994. – 83 с.; Вып. 2. –1996. –154 с.
58. НОВИКОВ А.М., НОВИКОВ Д.А. *Методология.* – М.: Синтег, 2007. – 668 с.
59. НОВИКОВ Д.А. *Игры и сети* // Математическая теория игр и ее приложения. – 2010. – Том 2, Выпуск 1. – С. 107–124.
60. НОВИКОВ Д.А. *Модели стратегической рефлексии* // Автоматика и телемеханика. – 2012. – №1. – С. 3–22.
61. НОВИКОВ Д.А. *«Когнитивные игры»: линейная импульсная модель* // Проблемы управления. – 2008. – №3. – С. 14–22.
62. НОВИКОВ Д.А. *Математические модели формирования и функционирования команд.* – М.: Физматлит, 2008. – 184 с.
63. НОВИКОВ Д.А. *Рациональная интеллектуализация мультиагентных систем* // Труды международной научно-практической мультиконференции «Управление большими системами-2011». – Т. 3. – М.: ИПУ РАН, 2011. – С. 233–238.
64. НОВИКОВ Д.А. *Сетевые структуры и организационные системы.* – М.: ИПУ РАН, 2003. – 103 с.

65. НОВИКОВ Д.А. *Теория управления организационными системами.* – 2-е изд. – М.: Физматлит, 2007. – 584 с.
66. НОВИКОВ Д.А. *Управление системами междисциплинарной природы: результаты и перспективы* // Труды IV Международной конференции по проблемам управления. – М.: ИПУ РАН, 2009. – С. 997–1003.
67. НОВИКОВ Д.А., ЧХАРТИШВИЛИ А.Г. *Рефлексивные игры.* – М.: Синтег, 2003. – 149 с.
68. ПАВЛОВСКИЙ Ю.Н. *О сохранении структуры вооруженных сил в процессе вооруженной борьбы* // Дискретный анализ и исследование операций. – 1998. – Сер. 2, Т. 5, №1. – С. 40–55.
69. ПАНЬКОВСКИЙ Ю.И., БОБИН А.В., СЛАТИН А.В. *Технология построения имитационной математической модели воспроизведения хода боевых действий* // Труды конференции «Имитационное моделирование. Теория и практика». – Т. 1.– СПб.: СПИИРАН, 2011. – С. 229–233.
70. ПЕТРОСЯН Л.А., ГАРНАЕВ А.Ю. *Игры поиска.* – СПб.: Изд-во СПбГУ, 1992. – 216 с.
71. ПЕТРОСЯН Л.А., ЗЕНКЕВИЧ Н.А. *Оптимальный поиск в условиях конфликта.* – Л.: Изд-во ЛГУ, 1987. – 77 с.
72. ПЕТРОСЯН Л.А., ЗЕНКЕВИЧ Н.А., СЕМИНА Е.А. *Теория игр.* – М.: Высшая школа, 1998. – 304 с.
73. ПЕТРОСЯН Л.А., ТОМСКИЙ Г.В. *Динамические игры и их приложения.* – Л.: Изд-во ЛГУ, 1982. – 252 с.
74. *Применение теории игр в военном деле* / Сборник переводов. – М.: Советское радио, 1961. – 360 с.
75. РЕЗНИЧЕНКО В.Г. и др. *Тактика.* – М.: Воениздат, 1987. – 496 с.
76. СААТИ Т. *Математические модели конфликтных ситуаций.* – М.: Советское радио, 1977. – 304 с.
77. *Сетевые модели в управлении* / Под ред. Д.А. Новикова, О.П. Кузнецова, М.В. Губко. – М.: Эгвес, 2011. – 443 с.
78. СКАЧКО П.Г., ВОЛКОВ Г.Т., КУЛИКОВ В.М. *Планирование боевых действий и управление войсками с помощью сетевых графов.* – М.: Воениздат, 1968. – 145 с.

79. *Справочник по исследованию операций* / Под общ. ред. Ф.А. Матвейчука. – М.: Воениздат, 1979. – 368 с.
80. СУЗДАЛЬ В.Г. *Теория игр для флота*. – М.: Воениздат, 1976. – 317 с.
81. СУНЬ-ЦЗЫ, У-ЦЗЫ. *Трактат о военном искусстве*. – М.: АСТ, 2002. – 560 с.
82. ТАРАКАНОВ К.В. *Математика и вооруженная борьба*. – М.: Воениздат, 1974. – 250 с.
83. ТКАЧЕНКО П.Н. и др. *Математические модели боевых действий*. – М.: Советское радио, 1969. – 240 с.
84. ФРОНТИН С.Ю. *Военные хитрости (Стратегемы)*. – СПб.: Алетейя, 1996. – 160 с.
85. ХРИПУНОВ С.П. *Методы аналитико-эвристического прогнозирования поведения противника в групповом воздушном бою* // Информационно-измерительные и управляющие системы. – 2008. – №7. – С. 61–72.
86. *Человеческий фактор в управлении* / Под ред. Н.А. Абрамовой, Д.А. Новикова. – М.: КомКнига, 2006. – 496 с.
87. ЧУЕВ Ю.В. *Исследование операций в военном деле*. – М.: Воениздат, 1970. – 256 с.
88. ЧУЕВ Ю.В., МЕЛЬНИКОВ П.М. и др. *Основы исследования операций в военной технике*. – М.: Советское радио, 1965. – 592 с.
89. ШУМОВ В.В. *Введение в общую погранометрику*. – М.: Либроком, 2011. – 240 с.
90. ЩЕПКИН А.В. *Деловые имитационные игры в организации и управлении*. – Воронеж: ВГАСУ, 2001. – 384 с.
91. *Algorithmic Game Theory* / Eds. Nisan N., Roughgarden T., Tardos E., and Vazirani V. – N.Y.: Cambridge University Press, 2009. – 776 p.
92. BENKOSKI S. et al. *A Survey of the Search Theory Literature* // Naval Research Logistics. – 1991. – Vol. 38. – P. 469–494.
93. BERKOVITZ D, DRESHER M. *RAND Report №P-1592*. – Santa Monica: RAND, 1959. – 49 p.
94. BLANK L., ENOMOTO C., GEGAX D., MCGUCKIN T., SIMMONS C. *A Dynamic Model of Insurgency: The Case of*

- the War in Iraq* // Peace Economics, Peace Science and Public Policy. – 2008. – Vol. 14, №2. – P. 1–26.
95. BOREL E. *La théorie du jeu les équations intégrales à noyau symétrique* // Comptes Rendus de l'Académie. – 1921. – Vol. 173. – P. 1304–1308.
96. BOREL E., VILLE J. *Application de la théorie des probabilités aux jeux de hasard*. – Paris: Gauthier-Villars, 1938. – P. 105–113.
97. BRACKEN J. *Lanchester Models of the Ardennes Campaign* // Naval Research Logistics. – 1995. – Vol. 42. – P. 559–577.
98. BRAMS S., KILGOUR D. *National Security Games* // Synthese. – 1988. – Vol. 76. – P. 185–200.
99. BUENO DE MESQUITA B. *Game Theory, Political Economy and the Evolving Study of War and Peace* // American Political Science Review. – 2006. – Vol. 100, №4. – P. 637–642.
100. CAMERER C. *Behavioral Game Theory: Experiments in Strategic Interactions*. – Princeton: Princeton University Press, 2003. – 544 p.
101. CHEN X., JIANG N., JING Y., STOJANOVSKI G., DIMIROVSKI G. *Differential Game Model and Its Solutions for Force Resource Complementary via Lanchester Square Law Equation* // Preprints of the 18th IFAC World Congress, Milano, Italy, 2011. – P. 14229–14233.
102. CHOWDHURY S., KOVENOCK D., SHEREMETA R. *An Experimental Investigation of Colonel Blotto Game* // CESifo Working Paper Series № 2688, 2009. – 31 p.
103. CLARK G. *The Combat Analysis Model*: Ph.D. Thesis. – Columbus: Ohio State University, 1969. – 138 p.
104. CORCHÓN L. *The Theory of Contests: a Survey* // Review of Economic Design. – 2007. – Vol. 11. – P. 69–100.
105. DAVID I. *Lanchester Modeling and the Biblical Account of the Battles of Gibeah* // Naval Research Logistics. – 1995. – Vol. 42. – P. 579–584.
106. DAVIS P. *Aggregation, Disaggregation and 3:1 Rule in Ground Combat*. – RAND Research MR-638-AF/A/OSD, 1995. – 52 p.

107. DEITCHMAN S. *A Lanchester Model of Guerilla Warfare* // Operations Research. – 1962. – № 10. – P. 818–827.
108. DUNNIGAN J. *The Complete Wargames Handbook*. – N.Y.: Quill, 1992. – 333 p.
109. DUPUY T. *Understanding War. History and Theory of Combat*. 2nd ed. – Nova Publishers, 1998. – 312 p.
110. ENGEL J. *A Verification of Lanchester's Law* // Operations Research. – 1954. – Vol. 2. № 2. – P. 163–171.
111. FRICKER R. *Attrition Models of the Ardennes Campaign* // Naval Research Logistics. – 1998. – Vol. 45. – P. 1–22.
112. FRIEDMAN L. *Game-theory Models in the Allocation of Advertising Expenditure* // Operations Research. – 1958. – Vol. 6. – P. 699–709.
113. FU Q., LU J. *The Optimal Multi-Stage Contest* // MPRA Paper. – 2007 – №946. – 22 p.
114. FUDENBERG D., TIROLE J. *Game Theory*. – Cambridge: MIT Press, 1995. – 579 p.
115. GAL S. *Search Games*. – N.Y.: Academic Press, 1980. – 216 p.
116. GARFINKEL M., SKAPERDAS S. *Economics of Conflict: An Overview* // Handbook of Defense Economics. Chapter 3 / Eds. T. Sandler, K. Hartley. – Santa Monica, 2006. – 65 p.
117. GROSS O., WAGNER R. *A Continuous Colonel Blotto Game*. – RAND Corporation RM-408, 1950. – 13 p.
118. JACKSON M., MORELLI M. *The Reasons for Wars* // Handbook on the Political Economy of War / Eds. C. Coyne, R. Mathers. – Northampton: Elgar Publishing, 2011. – 704 p.
119. JACKSON M. O. *Social and Economic Networks*. – Princeton: Princeton University Press, 2008. – 648 p.
120. HAMILTON T., MESIC R. *A Simple Game-Theoretic Approach to Suppression of Enemy Defenses and Other Time Critical Target Analyses* // RAND Report DB-385-AF. – Santa Monica: RAND, 2004. – 65 p.
121. HART S. *Discrete Colonel Blotto and General Lotto Games* // International Journal of Game Theory. – 2008. – Vol. 36. – P. 441–460.

122. HARTLEY D., HELMBOLD R. *Validating Lanchester's Square Law and Other Attrition Models* // Naval Research Logistics. – 1995. – Vol. 42. – P. 609–633.
123. HAYWOOD O. *Military Decision and Game theory* // Journal of the Operations Research Society of America. – 1954. – Vol. 2. №3. – P. 365–385.
124. HAYWOOD O. *Military Doctrine of Decision and the von Neumann Theory of Games* // RAND Report ATI 210383. – Santa Monica: RAND, 1950. – 107 p.
125. HILLESTAD R., OWEN J. *Experiments in Variable-Resolution Combat Modeling. RAND Note № 3631-DARPA*. – Santa Monica: RAND, 1993. – 46 p.
126. HILLIER F., LIEBERMAN G. *Introduction to Operations Research*. – 8th ed. – Boston. McGraw-Hill, 2005. – 1061 p.
127. HORTALA-VALLVE R., LLORENTE-SAGUER A. *Pure Strategy Nash Equilibria in Non-zero Sum Colonel Blotto Games* // International Journal of Game Theory. – 2011 (forthcoming).
128. HOWARD N. *Theory of Meta-Games* // General systems. – 1966. – №11. – P. 187–200.
129. HUGHES W. *A Salvo Model of Warships in Missile Combat Used to Evaluate Their Staying Power* // Naval Research Logistics. – 1995. – Vol. 42, №2. – P. 267–289.
130. KVASOV D. *Contests with Limited Resources* // Journal of Economic Theory. – 2007. – Vol. 136. – P. 738–748.
131. LANCHESTER F. *Aircraft in Warfare: the Dawn of the Fourth Arm*. – London: Constable and Co, 1916. – 243 p.
132. LASLIER J., PICARD N. *Distributive Politics and Electoral Competition* // Journal of Economic Theory. – 2002. – Vol. 103. – P. 106–130.
133. MANSOUR Y. *Computational Game Theory*. – Tel Aviv: Tel Aviv University, 2003. – 150 p.
134. MODZELEWSKI K., STEIN J., YU J. *An Experimental Study of Classic Colonel Blotto Games* // MIT Report №6.207/14.15, 2009. – 19 p.

135. MOULIN H. *Game Theory for Social Sciences*. – NY: New York University Press, 1986. – 356 p.
136. MYERSON R.B. *Game Theory: Analysis of Conflict*. – London: Harvard University Press, 1991. – 568 p.
137. O'NEILL B. *A Survey of Game Theory Models on Peace and War*. – Toronto: York University, Centre for International and Strategic Studies, 1990. – 57 p.
138. PERRY N. *Fractal Effects in Lanchester Models of Combat* // Australian Joint Operations Division Defense Science and Technology Organization Report DSTO-TR-2331, 2008. – 23 p.
139. REN W., BEARD R. *Distributed Consensus in Multi-vehicle Cooperative Control*. – London: Springer, 2008. – 319 p.
140. REN W., YONGCAN C. *Distributed Coordination of Multi-agent Networks*. – London: Springer, 2011. – 307 p.
141. RICHARDSON L. *Arms and Insecurity: A Mathematical Study of Causes and Origins of Wars*. – Pittsburgh: Boxwood Press, 1960. – 307 p.
142. ROBERSON B. *The Colonel Blotto Game* // Economic Theory. – 2006. – Vol. 29. – P. 1–24.
143. ROBSON R.W. *Multi-Item Contest* // Australian National University. Working Paper. – 2005 – №446. – 27 p.
144. ROUGHGARDEN T. *Selfish Routing and the Price of Anarchy*. – MIT Press, 2005. – 196 p.
145. SCHAFFER M. *Lanchester Models of Guerrilla Engagements* – RAND Memorandum RM-5053-ARPA. – Santa Monica: RAND, 1967. – 56 p.
146. SCHEEBA P., GHOSE D. *Optimal Resource Partitioning in Conflicts based on Lanchester Attrition Model* // Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control, and the European Control Conference. – Seville, 2005. – P. 5859–5864.
147. SCHELLING T. *The Strategy of Conflict*. – Oxford: Oxford University Press, 1963. – 309 p.
148. SELA A., EREZ E. *Dynamic Contests with Resource Constraints* // Proc. of International Conference “Tournaments, Contests and Relative Performance Evaluation” – North Carolina State University, 2011. – 19 p.

149. SHOHAM Y., LEYTON-BROWN K. *Multiagent Systems: Algorithmic, Game-Theoretic, and Logical Foundations*. – N.Y.: Cambridge University Press, 2008. – 513 p.
150. SNYDER J. *Election Goals and the Allocation of Campaign Resources* // *Econometrica*. – 1989. – Vol. 57, №3. – P. 637–660.
151. STONE L.D. *Theory of Optimal Search*. – N.Y.: Academic Press, 1998. – 279 p.
152. TAHA H. *Operations Research: An Introduction*. – 9th ed. – NY: Prentice Hall, 2011. – 813 p.
153. TAYLOR J., BROWN G. *Canonical Methods in the Solution of Variable-Coefficient Lanchester-Type Equations of Modern Warfare* // *Operations research*. – 1976. – Vol. 24. – P. 44–69.
154. TAYLOR J. *Lanchester Models of Warfare*. – Arlington: Operations Research Society of America, 1983. Vol. 1. – 570 p; Vol 2. – 815 p.
155. TAYLOR J., YILDIRIM U., MURPHY W. *Hierarchy-of-Models Approach for Aggregated-Force Attrition* // *Proceedings of the 2000 Winter Simulation Conference*. – Orlando, 2000. – P. 925–932.
156. TULLOCK G. *Efficient rent seeking / Toward a theory of rent-seeking society*. – College Station: Texas A&M University Press, 1980. – P. 97–112.
157. *Wargame Bibliography*. – URL: <http://australie.uco.fr/~cbourles/GERSAFE/Wargames/Wgbibl.pdf>. Дата доступа 31.05.2012.
158. WASHBURN A., KRESS M. *Combat Modeling*. – London: Springer, 2009. – 281 p.
159. WEISS G. *Multiagent Systems: a Modern Approach to Distributed Artificial Intelligence*. – Massachusetts: MIT Press, 1999. – 619 c.
160. WOOLDRIDGE M. *An Introduction to Multi-Agent Systems*. – NY: John Wiley and Sons, 2002. – 376 p.
161. YARED P. *A Dynamic Theory of War and Peace* // *Journal of Economic Theory*. – 2009. – Vol. 145. – P. 1921–1950.

HIERARCHICAL MODELS OF COMBAT

Dmitry Novikov, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Dr of Sc., Deputy Director (novikov@ipu.ru).

Abstract: Modern trends in the design of complex hierarchical models of combat are discussed. First the brief navigator of the mathematical models of combat (including descriptive, simulation, optimization and game-theoretical models) is given. Two canonical models and their extensions are considered in more detail, being the typical examples – Lanchester’s equations and colonel Blotto games. Finally, the hierarchical approach to combat modeling is described and analyzed.

Keywords: combat modeling, colonel Blotto game, Lanchester’s equations, multi-agent system, hierarchy of models.

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии В. Н. Бурковым*

УДК 621.396

ББК 22.172

ПРИМЕНЕНИЕ ПОРЯДКОВЫХ СТАТИСТИК В ЗАДАЧАХ ОБНАРУЖЕНИЯ

Рудько И. М.¹

(Учреждение Российской академии наук
Институт проблем управления РАН, Москва)

Введено понятие усеченной порядковой статистики. Выведены аналитические выражения для математических ожиданий и дисперсий усеченных порядковых статистик для порога отсеечения, фиксированного по заданному номеру члена вариационного ряда. Для систем обнаружения, реализующих алгоритм проверки двух статистических гипотез и использующих энергетический критерий обнаружения, разработан алгоритм обнаружения сигналов на фоне шума, основанный на статистических свойствах усеченных порядковых статистик.

Ключевые слова: порядковая статистика, проверка статистических гипотез, системы обнаружения, вероятности обнаружения и ложной тревоги, математическое моделирование.

1. Введение

Во многих системах обработки локационной информации, работающих в пассивном режиме, системах спектрального анализа и анализа вибраций решаются задачи обнаружения сигнала на фоне помехи, причем статистические свойства сигнала и помехи одинаковы и единственным их отличием являются энергии (дисперсии). В простейшей форме операция обнаружения – это задача проверки двух статистических гипотез: нулевой гипотезы H_0 , когда данные относятся только к шуму, и

¹ Игорь Михайлович Рудько, кандидат технических наук, с.н.с.
(igor-rudko@mail.ru).

альтернативной гипотезы H_1 , когда данные относятся к совместному воздействию сигнала и шума. При решении задачи обнаружения приемник вычисляет отношение правдоподобия, которое представляет собой отношение плотностей распределения вероятностей для гипотез H_1 и H_0 .

При этом, например, в пассивных локационных системах [1] сигнал появляется в случайные моменты времени, его продолжительность также случайна, известными параметрами являются только статистические свойства помехи, и даже энергетические спектры шума и сигнала близки по форме. Модель обнаружения в этих задачах обычно представляется как энергетический порог, установленный над средним значением помехи.

В системах спектрального анализа бывает необходимо решать задачу поиска «звукорядов» [6], т.е. узкополосных компонент энергетического спектра, кратных основной частоте. Так как очень часто «звукоряд» является неполным, т.е. в нем отсутствуют многие составляющие (но шумовая составляющая присутствует), обычно производится поиск отдельных узкополосных компонент, из которых затем формируют «звукоряд».

Таким образом, и в первой, и во второй из рассмотренных выше задач представляют интерес лишь случаи превышения порога, а шумовой фон лишь «забывает» тракт обработки, особенно при принятии решения оператором. Поэтому представляет интерес создание алгоритмов, осуществляющих поиск сигнала непосредственно, с отбрасыванием шумовых составляющих.

2. Усеченные порядковые статистики

2.1. МОМЕНТЫ УСЕЧЕННОЙ ПОРЯДКОВОЙ СТАТИСТИКИ

Рассмотрим выборку, состоящую из m случайных величин X_i : $\{X_1, \dots, X_i, \dots, X_m\}$. Пусть случайная величина X_i описывается плотностью распределения:

$$(1) \quad f(x) = \frac{1}{\sigma^2} k_n \left(\frac{x}{\sigma^2} \right), \quad x \geq 0,$$

где $k_n(\cdot)$ – плотность центрального χ^2 -распределения с n степенями свободы; σ^2 – дисперсия. Функция распределения случайной величины X_i описывается формулой

$$(2) \quad K_n(x) = \frac{1}{2^{n/2} \Gamma(n/2)} e^{-1/2\sigma^2} \int_0^x t^{n/2-1} e^{-1/2\sigma^2 t} dt.$$

Сравним статистические свойства случайных величин Z и W , сформированных из случайной выборки X_i , $1 \leq i \leq m$, двумя различными способами:

- $Z = \sum_{i=1}^m X_i$ – имеет центральное χ^2 -распределение с nm степенями свободы и математическим ожиданием

(3) $\mu_Z = nm\sigma^2$

и дисперсией

$$(4) \quad \sigma_Z^2 = 2nm\sigma^4,$$

и в силу центральной предельной теоремы для достаточно больших значений m ее функция плотности распределения нормализуется

$$Z \sim N(\mu_Z, \sigma_Z^2).$$

- $W = \sum_{i=1}^m X_{(i)}$, где $X_{(i)}$, $1 \leq i \leq m$, – упорядоченные величины

(порядковые статистики) статистики X_i , такие, что $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(i)} \leq \dots \leq X_{(m)}$. Если случайные величины X_i статистически независимы и одинаково распределены, то случайные величины $X_{(i)}$ зависимы из-за неравенств между ними. В дальнейшем будем называть статистику W усеченной порядковой статистикой (УПС), а параметр k – порогом отсечения.

В работе [3] приведены выражения для вычисления моментов порядковых статистик, которые в общем случае имеют следующий вид:

– математическое ожидание μ_j величины $X_{(j)}$ определяется по формуле

$$\mu_j = \int_{-\infty}^{\infty} x f_j(x) dx,$$

– дисперсия

$$\sigma_j^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_j)^2 f_j(x) dx,$$

– ковариация

$$\sigma_{jk} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^y (x - \mu_j)(y - \mu_k) f_{jk}(x, y) dx dy, \quad 1 \leq j < k \leq m,$$

где плотность распределения величины $X_{(j)}$:

$$f_j(x) = \frac{m!}{(m-j)!(j-1)!} P(x)^{j-1} [1 - P(x)]^{m-j} p(x),$$

совместная плотность распределения величин $X_{(j)}, X_{(k)}$:

$$f_{jk}(x, y) = \frac{m! p(x) p(y)}{(m-k)!(k-j-1)!(j-1)!} \times \\ \times P(x)^{j-1} [P(y) - P(x)]^{k-j-1} [1 - P(y)]^{m-k},$$

а $p(\cdot)$ и $P(\cdot)$ – плотность и функция распределения случайной величины соответственно.

Для выборки, описываемой формулами (1) и (2), т.е. плотностью распределения $f(x)$ и функцией распределения $K_n(x)$, формулы для определения μ_j, σ_j^2 и σ_{jk} приобретают следующий вид:

$$(5) \quad \mu_j = \frac{m!}{(j-1)!(m-j)!} \int_0^{\infty} K_n\left(\frac{x}{\sigma^2}\right)^{j-1} \left[1 - K_n\left(\frac{x}{\sigma^2}\right)\right]^{m-j} x f(x) dx$$

$$\sigma_j^2 = \frac{m!}{(j-1)!(m-j)!} \times,$$

$$\times \int_0^{\infty} K_n\left(\frac{x}{\sigma^2}\right)^{j-1} \left[1 - K_n\left(\frac{x}{\sigma^2}\right)\right]^{m-j} (x - \mu_j)^2 f(x) dx,$$

$$\sigma_{jk} = E[X_{(j)} X_{(k)}] =$$

$$= \frac{m!}{(m-k)!(k-j-1)!(j-1)!} \int_0^{\infty} \left[\int_0^y C(x, y) x y f(x) f(y) dx \right] dy,$$

где

$$C(x, y) = K_n\left(\frac{x}{\sigma^2}\right)^{j-1} \left[K_n\left(\frac{y}{\sigma^2}\right) - K_n\left(\frac{x}{\sigma^2}\right) \right]^{k-j-1} \left[1 - K_n\left(\frac{y}{\sigma^2}\right) \right]^{m-k}.$$

Для случайной величины W математическое ожидание определяется по формуле

$$(6) \quad \mu_W(k) = \sum_{j=k}^m \mu_j, \quad 1 \leq k \leq m,$$

а дисперсия с учетом зависимости случайных величин $X_{(i)}$ [4]:

$$(7) \quad \sigma_W^2(k) = \sum_{l=k}^m \sigma_l^2 + 2 \sum_{k \leq j < l \leq m} \sigma_{jl}, \quad 1 \leq k \leq m,$$

и в силу центральной предельной теоремы при достаточно больших значениях m ее функция плотности распределения также нормализуется:

$$W \sim N(\mu_W, \sigma_W^2).$$

Аналитические исследования статистических свойств случайной величины W очень сложны, и поэтому большинство последующих результатов получено на ПК с использованием символьного программирования в среде *MATLAB*.

На рис. 1 приведены рассчитанные по формулам (6) и (7) зависимости математических ожиданий $\mu_W(k)$ и с.к.о. $\sigma_W(k)$ от порога при следующих значениях параметров: $n = 8$, $m = 12$, $\sigma = 1$. Для случайной величины W порог k дискретный, $1 \leq k \leq m$. Из графиков видно, что $\mu_W(k)$ и $\sigma_W(k)$ монотонно убывающие функции, причем $\mu_W(1) = \mu_Z = nm$ и $\sigma_W(1) = \sigma_Z = (2nm)^{1/2}$.

На рис. 2 приведены рассчитанные по формулам (3), (4), (6) и (7) плотности распределения случайных величин Z и W и гистограммы этих плотностей, полученные на моделях с параметрами $n = 8$, $m = 100$, $\sigma = 1$. (Размеры массивов для построения гистограмм – 5000). Наблюдается достаточно близкое совпадение между теоретическими и модельными результатами.

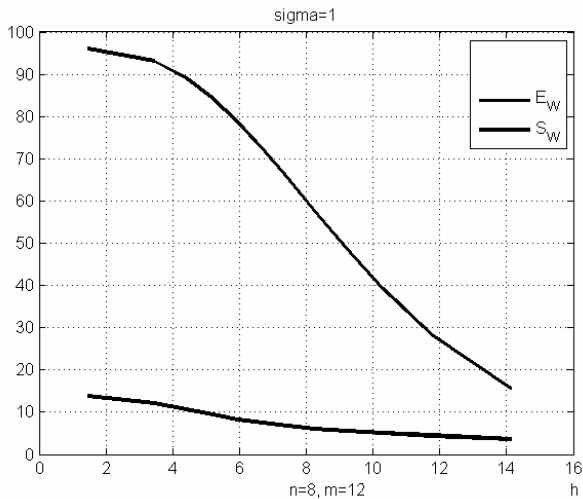


Рис. 1. Зависимости математических ожиданий $\mu_W(k)$ (на рис. – E_W) и с.к.о. $\sigma_W(k)$ (на рис. – S_W) от порога k

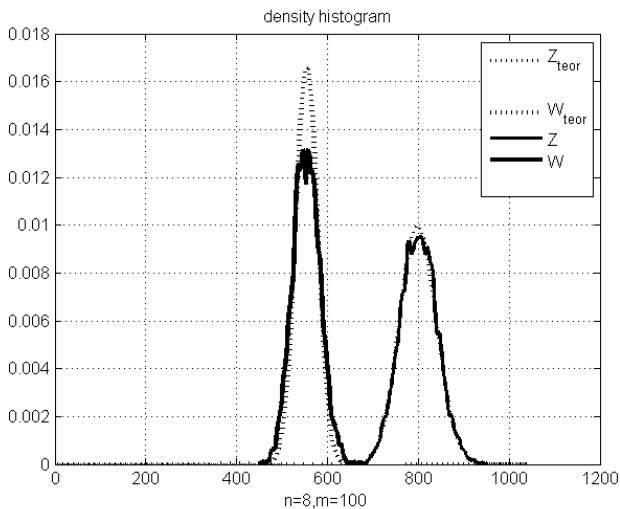


Рис. 2. Плотности распределения (на рис. – Z_{teor} и W_{teor}) и гистограммы случайных величин Z и W

2.2. ФОРМУЛЫ АППРОКСИМАЦИИ ДЛЯ УПС

Точный расчет математического ожидания μ_w и дисперсии σ_w требует очень большого машинного времени (например, уже при $n = 8$ и $m = 12$ время вычисления $\mu_w(k)$ и $\sigma_w(k)$ составляет около 2 часов). Поэтому при больших значениях параметров n и m интерес представляют формулы аппроксимации для вычисления $\mu_w(k)$ и $\sigma_w(k)$.

Известно [3], что при больших значениях m достаточно точным приближением к μ_j является значение, удовлетворяющее уравнению

$$P(x) = \frac{j}{m+1}.$$

Если ввести в рассмотрение функцию Q , такую, что $Q[P(x)] = x$, то получим асимптотическую формулу

$$(8) \quad \mu_j \sim Q\left(\frac{j}{m+1}\right),$$

где $1 \leq j \leq m$, т.е. математические ожидания μ_j приближенно равны квантилям функции распределения $P(x)$, взятым с равномерным шагом. Математические ожидания $\mu_w(k)$ определяются по формуле (6). На рис. 3 приведены значения μ_j , рассчитанные по формулам (5) и (8), из которых видно, что расхождения между значениями μ_j , рассчитанными по аппроксимирующей формуле (8), и точными значениями (5) наблюдаются только на «хвостах».

Как уже указывалось выше, для малых значений m ($m \leq 12$) можно рассчитать точные значения $\mu_w(k)$ и $\sigma_w^2(k)$ для $1 \leq k \leq m$. Как следует из формулы аппроксимации (8), при увеличении m достаточно рассчитать большее число квантилей μ_j , по которым, используя формулу (6), можно подсчитать приблизительные значения для $\mu_w(k)$.

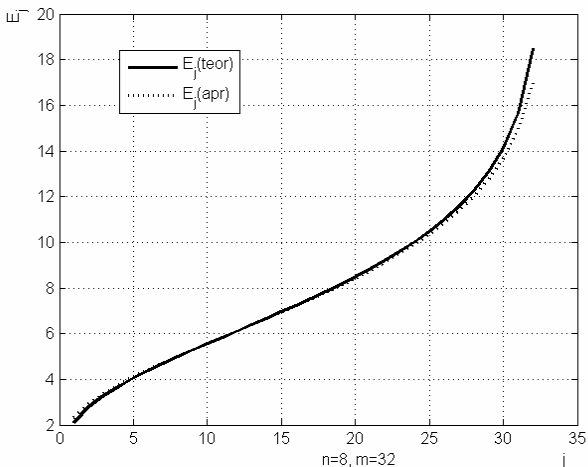


Рис. 3. Значения μ_j , рассчитанные по точной (на рис. – $E_{(teor)}$) и по аппроксимирующей (на рис. – $E_{(apr)}$) формулам

При аппроксимации дисперсии $\sigma_w^2(j)$ для больших значений m практически возможно рассчитать только крайние точки функции дисперсии $\sigma_w^2(j)$, а именно,

$$\sigma_w^2(1) = 2nm,$$

$$\sigma_w^2(m) = \sigma_m^2 = m \int_0^{\infty} K_n \left(\frac{x}{\sigma^2} \right)^{m-1} (x - \mu_m)^2 f(x) dx,$$

где μ_m определяется по формуле (5), и несколько промежуточных точек $\sigma_w^2(k)$ для малого числа m_k ($m_k \ll m$). Аппроксимацию проще всего проводить, используя значения в этих точках и учитывая, что $\sigma_w^2(k)$ монотонно убывающая функция.

Рассмотрим аппроксимацию экспоненциальной функцией $y = Y_0 e^{-\alpha x}$.

Пусть $y_1 = Y_0 \exp(-\alpha x_1)$ и $y_2 = Y_0 \exp(-\alpha x_2)$. Тогда $y_1 \exp(-\alpha x_2) = y_2 \exp(-\alpha x_1)$ и

$$\alpha = \frac{\ln y_1 - \ln y_2}{x_2 - x_1},$$

а формула аппроксимации приобретает вид:

$$\tilde{\sigma}_W^2(j) = \sigma_W^2(k) \exp(-\alpha_k \mu_j),$$

где $\alpha_k = \frac{\ln \sigma_W^2(k) - \ln \sigma_W^2(k+1)}{\mu_{k+1} - \mu_k},$

а k выбирается из условия $k/m_k < j/m < (k+1)/m_k.$

В случае простейшей аппроксимации (аппроксимации по двум крайним точкам)

$$(9) \quad \tilde{\sigma}_W^2(j) = nm \exp(-\alpha \mu_j),$$

где $\alpha = \frac{\ln \sigma_W^2(1) - \ln \sigma_W^2(m)}{\mu_m - \mu_1}.$

На рис. 4 приведены значения $\sigma_W^2(j)$, рассчитанные по формулам (7) и (9), из которых видно, что значения $\tilde{\sigma}_W^2(j)$, рассчитанные по формуле аппроксимации (9) могут являться оценками сверху теоретических значений $\sigma_W^2(j)$.

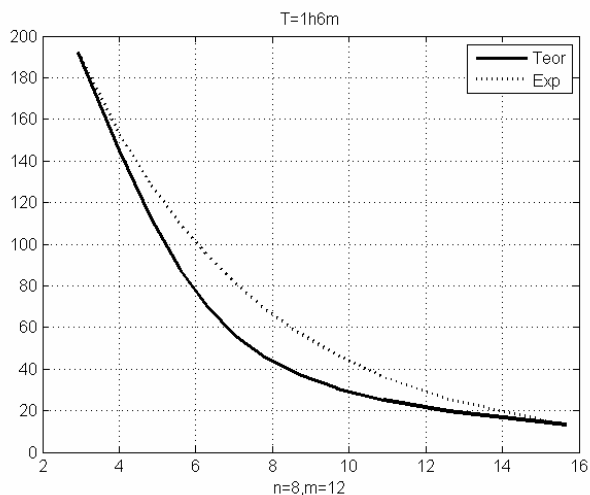


Рис. 4. Значения $\sigma_W^2(j)$, рассчитанные по точной (Теор) и по аппроксимирующей (Exp) формулам

3. Применение УПС в задачах обнаружения

3.1. «КЛАССИЧЕСКАЯ» ЗАДАЧА ПРОВЕРКИ ДВУХ ГИПОТЕЗ

Пусть на входе системы обнаружения принимается сигнал $S(t) = \eta(t) + \zeta(t)$, состоящий из аддитивной смеси сигнала $\eta(t)$ и помехи $\zeta(t)$. Математической моделью сигнала и помехи служит случайный процесс, так что задача обнаружения сигнала на фоне помех решается на основе статистической теории оптимальных решений. Чаще всего в расчетах распределение сигнала на входе системы обнаружения предполагается гауссовским с нулевым математическим ожиданием как в случае одной помехи (гипотеза $H_0: N(0, \sigma_{\text{ш}}^2)$), так и в случае смеси сигнала с помехой (гипотеза $H_1: N(0, \sigma_{\text{ш}}^2 + \sigma_c^2)$). Распределения для помехи (шума) и смеси сигнала с шумом различаются только дисперсией (мощностью) наблюдаемых сигналов $S(t)$.

Достаточно часто в качестве статистики от наблюдений выбирают энергию сигнала, наблюдаемого на интервале $[0, T_0]$, – энергетический критерий обнаружения [1, 5]:

$$(10) \quad X = \sum_{i=1}^n S^2(i\Delta t),$$

где $T_0 = n\Delta t$; $\Delta t = 1/2\Delta F$; Δt – интервал дискретизации по времени; ΔF – полоса пропускания входного фильтра системы обнаружения.

Закон распределения энергии принимаемого сигнала, заданный плотностью вероятности $f(x)$ случайной величины X , позволяет математически описать вероятностные характеристики обнаружения: вероятность правильного обнаружения и вероятность ложной тревоги:

$$(11) \quad P_{\text{пт}} = \int_h^{\infty} f_{\text{ш}}(x)dx, \quad P_{\text{обн}} = \int_h^{\infty} f_{\text{с+ш}}(x)dx,$$

где h – порог обнаружения; $f_{\text{ш}}(x)$ – плотность вероятности случайной величины X при гипотезе H_0 ; $f_{\text{с+ш}}(x)$ – плотность вероятности X при гипотезе H_1 .

Плотность распределения статистики X для гауссовского процесса $S(t)$ описывается плотностью распределения (1). По-

сколькx распределение для гипотезы H_0 отличается от распределения для гипотезы H_1 только величиной дисперсии, то дисперсия σ^2 статистики X с плотностью распределения (1) равна:

– в случае гипотезы H_0 :

$$(12) \sigma_0^2 = 2n\sigma_{ш}^4,$$

– в случае гипотезы H_1 :

$$\sigma_1^2 = 2n(\sigma_{ш}^2 + \sigma_c^2)^2.$$

Здесь n – число степеней свободы, которое в случае цифровой обработки равно числу слагаемых в сумме (10), а в случае аналоговой обработки определяется как $n = 2T_0\Delta F$.

Определим отношение сигнал/помеха в полосе ΔF как

$$(13) \rho = \frac{\sigma_c^2}{\sigma_{ш}^2}.$$

Тогда дисперсия в случае гипотезы H_1 запишется в виде

$$\sigma_1^2 = 2n[\sigma_{ш}^2(1+\rho)]^2 = 2n\sigma_{ш}^4(1+\rho)^2.$$

Таким образом, для гипотезы H_0 вероятность ложной тревоги $P_{лт}$ является функцией от $\sigma_{ш}^2$ и n , а для гипотезы H_1 вероятность правильного обнаружения $P_{обн}$ является функцией от $\sigma_{ш}^2$, n и ρ .

Определим вероятность обнаружения как $P_{обн} = \beta$, тогда $P_{необн} = 1 - \beta$, и в соответствии с (2) и (4)

$$(14) P_{необн} = 1 - \beta = \int_0^h \frac{1}{\sigma_1^2} k_n \left(\frac{x}{\sigma_1^2} \right) dx = \int_0^{h/\sigma_1^2} k_n(u) du = K_n(h/\sigma_1^2).$$

Здесь порог h определяется из первого уравнения (11) путем задания вероятности ложной тревоги $P_{лт} = \alpha$. Тогда аналогично формуле (14)

$$1 - \alpha = \int_0^{h/\sigma_0^2} k_n(u) du = K_n(h/\sigma_0^2).$$

В работе [2] приведены соотношения, связывающие между собой величины $P_{лт}$, $P_{обн}$ и ρ . Если

$$P_{\text{лт}} = \alpha = 1 - \int_0^{h/\sigma_0^2} k_n(u) du = K_n(h/\sigma_0^2) = 1 - K_n(h_0),$$

то вероятность обнаружения согласно (14) определяется выражением:

$$P_{\text{обн}} = \beta = 1 - K_n\left(\frac{h}{\sigma_1}\right) = 1 - K_n(h_1) = 1 - K_n\left(\frac{h}{(1+\rho)}\right).$$

Часто в литературе заменяют χ^2 -распределение нормальным распределением, так как уже при $n \geq 30$ χ^2 -распределение с большой точностью аппроксимируется гауссовским распределением со следующими параметрами:

– гипотеза H_0 :

$$(15) \mu_0 = n\sigma_{\text{ш}}^2, \sigma_0^2 = 2n\sigma_{\text{ш}}^4,$$

– гипотеза H_1 :

$$\mu_1 = n(\sigma_{\text{ш}}^2 + \sigma_c^2), \sigma_1^2 = 2n(\sigma_{\text{ш}}^2 + \sigma_c^2)^2.$$

При использовании гауссовского приближения для гипотезы H_0 при заданной вероятности ложной тревоги $P_{\text{лт}} = \alpha$ квантиль \tilde{h}_0 уровня $(1 - \alpha)$ определяется из уравнения

$$(1 - \alpha) = \Phi\left(\frac{h - m_0}{\sigma_0}\right) = \Phi(\tilde{h}_0),$$

а для гипотезы H_1 при заданной вероятности обнаружения $P_{\text{обн}} = \beta$ квантиль \tilde{h}_1 уровня $(1 - \beta)$ – из уравнения

$$(1 - \beta) = \Phi\left(\frac{h - m_1}{\sigma_1}\right) = \Phi(\tilde{h}_1),$$

где $\Phi(\cdot)$ – функция нормального распределения.

В одиночном акте наблюдения (испытании) в нашем распоряжении имеется выборка из m результатов наблюдений – выборка (вектор) X . Выписав отношение правдоподобия для гипотез H_1 и H_0 , получаем достаточную статистику

$$\Lambda(X) = \sum_{i=1}^m X_i.$$

Приведенный выше «классический» алгоритм базируется на существовании равномерно наиболее мощного критерия для

проверки гипотезы H_0 против альтернативы H_1 . При этом используется вся информация, содержащаяся в оцениваемой выборке X .

3.2. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ УПС В ЗАДАЧЕ ПРОВЕРКИ ДВУХ ГИПОТЕЗ

Вернемся опять к задаче проверки двух гипотез. Рассмотрим, как изменяется $P_{лт}$, $P_{обн}$ и ρ в зависимости от порога отсеечения k УПС W . Математическое ожидание $\mu_W(k)$ и дисперсия $\sigma^2_W(k)$ определяются формулами (6) и (7) и так же как для случайной величины X зависят только от дисперсии σ^2 . Таким образом, распределения случайной величины W для шума (H_0) и смеси сигнала с шумом (H_1) различаются только дисперсией (мощностью) σ^2 наблюдаемого сигнала $S(t)$.

Обычно для исследования зависимостей $P_{лт}$, $P_{обн}$ и ρ используют рабочие характеристики приемника (систему номограмм) [4], что требует много достаточно трудоемких расчетов. В настоящей работе предлагается более простой способ сравнения статистик для гипотез H_0 и H_1 , если статистики могут быть описаны нормальными распределениями: $N_0(\mu_0, \sigma_0^2)$ и $N_1(\mu_1, \sigma_1^2)$.

Обозначим – порог h , тогда после замены переменных в плотности нормального распределения получаем

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^h e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{(h-\mu)/\sigma} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = \Phi\left(\frac{h-\mu}{\sigma}\right),$$

где $t = (x - \mu)/\sigma$, а $\Phi(\cdot)$ – функция нормального распределения. При условии равенства ошибок первого (ложная тревога) и второго (пропуск цели) рода получаем уравнение

$$P_{ош} = P_{пр} = P_{лт} = \Phi\left(\frac{h-\mu_1}{\sigma_1}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{h-\mu_0}{\sigma_0}\right) = \Phi\left(-\frac{h-\mu_0}{\sigma_0}\right).$$

Решая это уравнение, определяем порог

$$h = \frac{\mu_0\sigma_1 + \mu_1\sigma_0}{\sigma_1 + \sigma_0},$$

и, подставляя h в выражение для $P_{пр}$, получаем

$$P_{ош} = \Phi\left(\frac{h-\mu_1}{\sigma_1}\right) = \Phi\left(\frac{\mu_0-\mu_1}{\sigma_0+\sigma_1}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{\mu_1-\mu_0}{\sigma_0+\sigma_1}\right) = 1 - \Phi(\gamma),$$

где γ – коэффициент разделимости. Очевидно, что чем больше γ , тем меньше $P_{\text{ош}}$. Таким образом, определяем коэффициент разделимости как

$$(16) \gamma = \frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma_0 + \sigma_1}.$$

На рис. 5 приведены рассчитанные по формулам (6) и (7) значения $\mu_W(k)$ и $\sigma_W(k)$, и соответствующие значения γ , рассчитанные по формуле (16) для гипотез H_0 и H_1 , для следующих значений параметров: $n = 8, m = 12, \rho = 0,1$. При $k = 1$ $\mu_W(1) = \mu_Z, \sigma_W(1) = \sigma_Z$ и, следовательно, $\gamma_W(1) = \gamma_Z$. Существует также оптимальное значение порога отсечения $k - k_{\text{опт}}$, обеспечивающее максимальную разделимость (параметр γ) статистик W для гипотез H_0 и H_1 , что объясняется тем, что числитель в формуле (16) – монотонно убывающая выпуклая функция, а знаменатель – монотонно убывающая вогнутая функция.

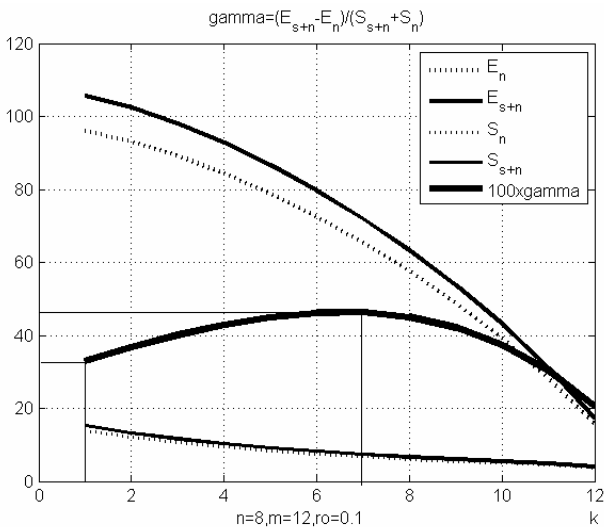


Рис. 5. Значения $\mu_W(k)$ и $\sigma_W(k)$, и соответствующие значения $\gamma(k)$, для гипотез H_0 (E_n и S_n) и H_1 (E_{s+n} и S_{s+n})

Таким образом, процесс принятия решения при использовании УПС W является двухшаговым:

– на первом шаге по случайной выборке X_i , $1 \leq i \leq m$, строится порядковая статистика $X_{(i)}$, по которой для заданного порога отсечения k (первый порог) формируется УПС W ;

– на втором шаге процесс принятия решения тот же, что и в «классическом» алгоритме: а именно, по заданной $P_{лт}$ выставляется порог обнаружения (второй порог), в случае превышения которого принимается решение о справедливости гипотезы H_1 .

Как уже указывалось выше, известными параметрами являются только статистические свойства помехи, а именно, математическое ожидание μ_0 и дисперсия σ_0^2 (см. (12) или (15)). Поэтому порог h определяется согласно формуле (11) из следующего уравнения:

$$(17) \alpha = \int_0^h f_{ш}(x) dx = \frac{1}{2^{n/2} \sigma_0^n \Gamma(n/2)} \int_0^h x^{n/2-1} e^{-x^2/2\sigma_0^2} dx,$$

где α – заданный квантиль, который, как следует из рис. 5, должен быть близок к медиане шума.

Рассмотрим вопрос о выборе порога отсечения k (первый порог). Для того чтобы сформировать УПС W , необходимо обеспечить условие $k = const$ для нескольких реализаций. Чтобы выполнить это условие необходимо иметь несколько выборок $\{X_1, \dots, X_i, \dots, X_m\}_j$, где $1 \leq j \leq r$, из которых строится матрица X_{ij} размерностью m строк на r столбцов. В каждом столбце матрицы X_{ij} строится порядковая статистика $X_{(i)j}$, затем в каждой строке полученной матрицы $X_{(i)j}$ определяются оценки математических ожиданий (вектор \hat{m})

$$\hat{m}_i = \frac{1}{r} \sum_{j=1}^r X_{(i)j}, \text{ где } 1 \leq i \leq m.$$

Порог отсечения k (первый порог) определяется из условия:

$$k = \arg \min_i |h - \hat{m}_i|, \text{ где } 1 \leq i \leq m.$$

И уже по этому порогу отсечения k по матрице порядковых статистик $X_{(i)j}$ вычисляются УПС W_j , где $1 \leq j \leq r$.

Таким образом, для реализации предлагаемого алгоритма обнаружения необходимо предварительное накопление выборок $\{X_1, \dots, X_i, \dots, X_m\}_j$, где $1 \leq j \leq r$ (в отличие от «классического»

алгоритма), что приводит к задержке в принятии решения на время $T = jtT_0$, где $1 \leq j \leq r$. Такая задержка во многих задачах не является существенной.

Еще раз подчеркиваем, что если в «классическом» алгоритме для принятия решения используется только вектор \mathbf{X} , то в предлагаемом алгоритме – матрица $X_{(ij)}$, в которой текущий вектор \mathbf{X} является одним из столбцов.

На рис. 6 приведены результаты математического моделирования с.к.о. УПС W в зависимости от «глубины» памяти r , содержащей матрицу порядковых статистик $X_{(ij)}$ для следующих значений параметров: $n = 8$, $m = 100$. При $r = 1$ $\sigma_W > \sigma_Z$, затем σ_W спадает и уже при $r > 4$ $\sigma_W < \sigma_Z$ и быстро стремится к своему теоретическому значению, т.е. к значению, когда «глубина» памяти велика (стремится к бесконечности).

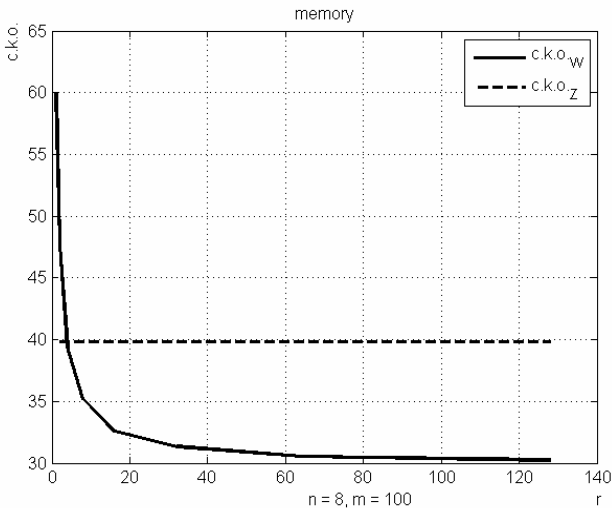


Рис. 6. Зависимость σ_W от «глубины» памяти r

На рис. 7 приведены результаты математического моделирования систем обнаружения, реализующих «однопороговый» и «двухпороговый» алгоритмы, а именно: теоретические значения плотностей $f_Z(\sigma_n)$, $f_Z(\sigma_{n+s})$ и $f_W(\sigma_n)$, $f_W(\sigma_{n+s})$ и их гистограммы,

построенные по математической модели. Параметры модели имеют следующие значения: $n = 8$, $m = 32$, $\rho = 0,1$, первый порог равен медиане порядковой статистики $X_{(i)}$, $k = 17$. (Размеры массивов для построения гистограмм – 5000). Коэффициенты разделимости γ , полученные при моделировании: $\gamma_z = 0,27$ и $\gamma_w = 0,48$, что близко к теоретическим значениям.

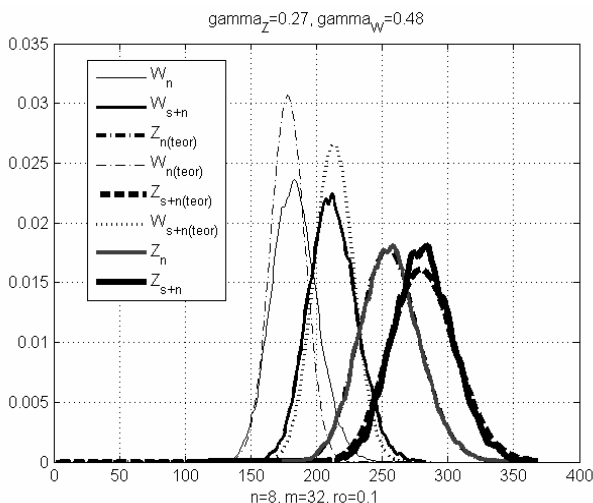


Рис. 7. Теоретические значения (на рис. – $Z_n(teor)$, $Z_{n+s}(teor)$ и $W_n(teor)$, $W_{n+s}(teor)$) и гистограммы (на рис. – Z_n , Z_{s+n} и W_n , W_{s+n}) плотностей $f_z(\sigma_n)$, $f_z(\sigma_{n+s})$ и $f_w(\sigma_n)$, $f_w(\sigma_{n+s})$

Далее приведены результаты моделирования системы обнаружения, реализующей «классический» (однопороговый) алгоритм и системы обнаружения, реализующей алгоритм на основе УПС (двухпороговый). На рис. 8 приведены зависимости вероятности обнаружения $P_{обн}$ от отношения сигнал/помеха ρ (13) для «однопорогового» и «двухпорогового» алгоритмов для разных размеров «глубины» памяти r (memory). Параметры модели имеют следующие значения: $n = 10$, $m = 32$, $P_{лт} = 0,05$, первый порог равен медиане статистики X_i (в формуле(17) $\alpha = 0,5$). Размеры массивов для набора статистик – 10 000. Из приведенных графиков видно, что, например, при $\rho = 0,075$ для

«классического» алгоритма $P_{\text{обн}} = 0,2$, а для «двухпорогового» алгоритма $P_{\text{обн}} = 0,58$ при $r = 16$, т.е. «двухпороговый» алгоритм обеспечивает существенный выигрыш по сравнению с «классическим» (однопороговым) алгоритмом.

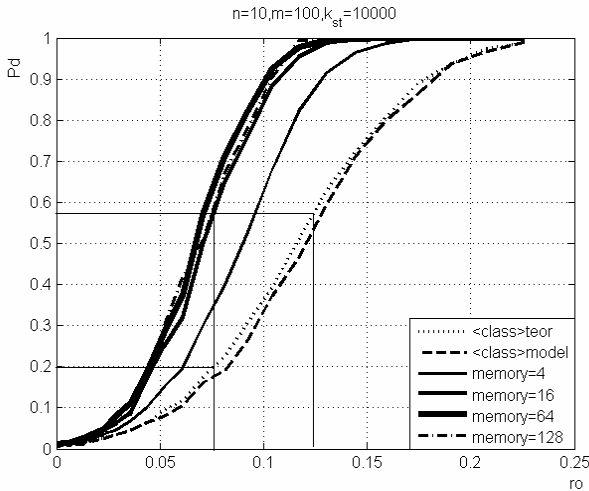


Рис. 8. Сравнение $P_{\text{обн}}$ для «двухпорогового» и «однопорогового» алгоритмов

Рассмотрим, как влияет на вероятность обнаружения задержка в принятии решения на j шагов. Пусть r – «глубина» памяти, содержащей выборки $\{X_1, \dots, X_i, \dots, X_m\}_j$, где $1 \leq j \leq r$, соответствующие гипотезе H_0 .

Пусть в момент времени t_0 появляется сигнал (гипотеза H_1), который постепенно заполняет матрицу памяти $\{X_1, \dots, X_i, \dots, X_m\}_j$, где $1 \leq j \leq r$. Для j независимых испытаний вероятность того, что произойдет хотя бы одно обнаружение (суммарная вероятность обнаружения) определяется по формуле

$$(18) P_{\Sigma \text{обн}} = 1 - \prod_{i=1}^j (1 - P_{\text{обн}i}),$$

где $P_{\text{обн}i}$ – вероятность обнаружения в единичном (i -м) испытании. Для «однопорогового» алгоритма обнаружения вероятность

обнаружения в единичном испытании постоянна и равна β , и суммарная вероятность обнаружения определяется по формуле (19) $P_{\Sigma\text{обн}} = 1 - (1 - \beta)^j$.

Для «двухпорогового» алгоритма по мере заполнения матрицы памяти вероятность обнаружения в единичном испытании $P_{\text{обн } i}$ будет увеличиваться, стремясь к своему теоретическому значению, а суммарная вероятность обнаружения определяется по формуле (18).

На рис. 9 приведены результаты моделирования.

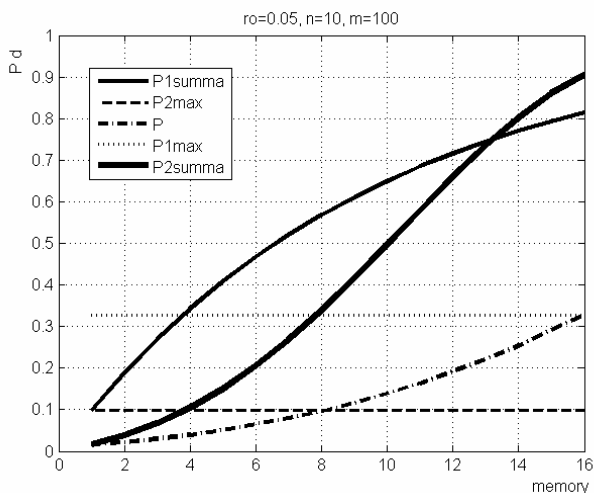


Рис. 9. Сравнение $P_{\Sigma\text{обн}}$ для «двухпорогового» ($P2summa$) и «однопорогового» ($P1summa$) алгоритмов

Из приведенных графиков видно, что для «однопорогового» алгоритма обнаружения суммарная вероятность обнаружения, как следует из формулы (19), экспоненциально увеличивается, а для «двухпорогового» алгоритма суммарная вероятность обнаружения на первых шагах проигрывает «однопороговому» алгоритму, но затем из-за быстрого роста $P_{\text{обн } i}$ (на рис. – P) превышает его, обеспечивая выигрыш в суммарной вероятности обнаружения $P_{\Sigma\text{обн}}$ для «двухпорогового» алгоритма.

4. Заключение

Получены аналитические выражения для математических ожиданий и дисперсий для усеченных порядковых статистик. Показано, что фиксированный порог отсеечения в УПС обеспечивает меньшую дисперсию, чем дисперсия исходной статистики.

Разработан алгоритм обнаружения сигналов на фоне шума, основанный на свойствах усеченных порядковых статистик, который позволяет обеспечить большую вероятность обнаружения $P_{\text{обн}}$ при заданной вероятности ложной тревоги $P_{\text{лт}}$ по сравнению с «классическим» алгоритмом проверки двух гипотез. Выигрыш достигается за счет введения дополнительного порога, отсекающего малые значения обрабатываемого сигнала, и использования информации, содержащейся в предыдущих реализациях сигнала, которая в «классическом» алгоритме не используется.

Приводятся результаты математического моделирования.

Предварительные результаты настоящей работы докладывались на конференциях [7] и [8].

Выражаю благодарность с.н.с. Л.П. Сысоеву за плодотворные дискуссии и помощь в получении некоторых математических результатов.

Литература

1. БУРДИК В.С. *Анализ гидроакустических систем*. – Л.: Судостроение, 1988. – 392 с.
2. ДОБРОВИДОВ А.В., КУЛИДА Е.Л., РУДЬКО И.М. *Выбор траектории движения объекта в конфликтной среде* // Системы управления – 2011. – №3. – С. 64–75.
3. ДЭЙВИД Г. *Порядковые статистики*. – М.: Наука, 1979. – 336 с.
4. ЛЕВИН Б.Р. *Теоретические основы статистической радиотехники*. – Т. 1. – М.: Советское радио, 1969. – 752 с.
5. ЛЕВИН Б.Р. *Теоретические основы статистической радиотехники*. – Т. 2. – М.: Советское радио, 1968. – 504 с.

6. НАЙТ У.С., ПРИДЭМ Р.Г., КЭЙ С.М. *Цифровая обработка сигналов в гидролокационных системах* // ТИИЭР – 1981. – Т. 69, №11. – С. 84–154.
7. РУДЬКО И.М. *Исследование методами математического моделирования двухпороговой системы обнаружения сигналов* // Материалы VIII Всероссийской научно-практической конференции с международным участием «Информационные технологии и математическое моделирование». Ч. 1. – Томск: Изд.-во Томского университета, 2009. – С. 82–86.
8. РУДЬКО И.М. *Применение порядковых статистик в задачах обнаружения* // IX Международная конференция «Идентификация систем и задачи управления» SICPRO'12. – Москва, 2012. – С. 1101–1116.

APPLYING ORDER STATISTIC TO DETECTION PROBLEMS

Igor Rudko, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Cand.Sc. (igor-rudko@mail.ru).

Abstract: The concept of truncated order statistic is introduced. Analytical expressions are derived for the mean value and the variance of truncated order statistic for a threshold determined by the number of the variation series member. The algorithm of noisy signal detection is developed for detection systems, which employ the algorithm of statistical hypotheses testing and energy criterion of detection. The algorithm uses statistical characteristics of the order statistic.

Keywords: order statistics, statistical hypotheses testing, detection systems, probabilities of detection and false emergence, mathematical modeling.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии О. И. Орловым

УДК 004.75

ББК 32.973.26-018.2

ОСОБЕННОСТИ РАЗРАБОТКИ ИМИТАТОРА ЦЕЛЕВОЙ ОБСТАНОВКИ ПРИ СОЗДАНИИ РАСПРЕДЕЛЕННОГО МОДЕЛИРУЮЩЕГО КОМПЛЕКСА

Лотоцкий А. В.¹

(Межгосударственная акционерная
корпорация «Вымпел», Москва)

При разработке программных комплексов и систем, осуществляющих имитационное моделирование с применением распределенных вычислений, одной из ключевых количественных характеристик системы является быстродействие. На примере имитатора целевой обстановки как центрального элемента целого класса подобных систем рассмотрены основные проблемы, влияющие на быстродействие как отдельных элементов, так и системы в целом. Предложен ряд решений и рекомендаций по проектированию таких систем, позволяющих существенно увеличить быстродействие и повысить эффективность системы.

Ключевые слова: многопоточность, *select()*-сервер, синхронный, асинхронный и блокирующий ввод/вывод.

1. Введение

Разработка комплексов и систем распределенного моделирования в подавляющем большинстве случаев осуществляется с использованием клиент-серверного подхода разработки программного обеспечения. Например, при реализации распределенной модели взаимодействия различных средств наблюдения (радиолокационных, оптических и т.д.), коммуникации и управления в качестве сервера может выступать имитатор целевой

¹ Алексей Владимирович Лотоцкий (alototsky@it-omega.com).

обстановки, а в качестве клиентов – соответствующие средства и системы. Центральным элементом такого моделирующего комплекса является имитатор, обеспечивающий, в частности:

- взаимодействие других элементов системы с сервером и друг с другом;
- синхронизацию модельного времени.

Распределение вычислительных ресурсов между несколькими модулями позволяет повысить быстродействие и эффективность системы в целом и подразумевает организацию взаимодействия между такими модулями и сервером. Такое взаимодействие осуществляется средствами межмашинного и межпроцессного взаимодействия (как правило, используются сетевые протоколы семейства *TCP/IP*, а также именованные каналы, разделяемая память и т.д.). Таким образом, при условии использования всеми модулями единого модельного времени производительность системы в целом определяется как производительностью используемого коммуникационного оборудования, так и производительностью отдельных модулей комплекса и собственно сервера.

При условии, что аппаратная инфраструктура неизменна², повышение производительности системы в целом можно достичь повышением производительности либо сервера, либо **всех** модулей, участвующих в распределенном моделировании. Важно отметить, что повышения производительности одного или нескольких модулей в составе комплекса может оказаться недостаточным в силу ограничений, накладываемых единым модельным временем. Если хотя бы один из модулей «заставляет себя ждать», вся система будет время от времени простаивать и её производительность будет снижена. Повышения производительности сервера можно добиться уменьшением времени, за-

² Как правило, так оно и есть. Например, при использовании сетевого взаимодействия между модулями комплекса повышение пропускной способности сети зачастую связано с дорогостоящей заменой оборудования. Если же модули взаимодействуют посредством разделяемой памяти, то при прочих равных увеличение скорости обмена можно достичь только путем замены модулей памяти, а это дорого и не всегда возможно.

трачиваемого сервером на выборку данных из коммуникационного канала (например, сети или разделяемой памяти) и обработку клиентских запросов. Этот вопрос достаточно подробно рассмотрен, например, в [1] или в [2], однако традиционно быстроедействие серверов рассматривается в контексте межсетевого взаимодействия при создании *Web*- или *Intranet*-приложений. В таких приложениях в первую очередь рассматриваются вопросы, связанные с количеством одновременно обслуживаемых клиентов, величиной используемой памяти, задержками при подключении очередного клиента и т.д. Вопросы снижения затрат на обслуживание каждого клиента в таких приложениях рассматриваются в последнюю очередь.

В интересующем нас случае без ограничения общности рассуждений можно считать, что количество подключений к серверу фиксировано и ограничено моделируемым сценарием. Рассмотрим различные варианты реализации сервера при реализации такого моделирующего комплекса.

2. Различные варианты реализации сервера

По большому счету существует всего три варианта реализации подобного сервера:

- однопоточный сервер, использующий неблокирующие или асинхронные функции ввода/вывода операционной системы (далее – ОС) и обслуживающий всех имеющихся клиентов;
- многопоточный сервер, использующий блокирующие функции ввода/вывода ОС (при этом каждый поток обслуживает одного клиента);
- сервер, у которого взаимодействие с клиентами реализовано с помощью специально разработанных для этого функций ядра ОС.

Все остальные варианты реализаций сервера представляют собой сочетания или комбинации упомянутых выше вариантов.

Рассмотрим эти реализации более подробно на примере сетевого взаимодействия между модулями системы.

Обслуживание группы или всех клиентов сервера в *единственном* потоке (или процессе) с использованием *неблокирующих* и/или *асинхронных* функций ввода/вывода предполагает нали-

чие на сервере бесконечного цикла, в котором происходит постоянный опрос состояний соответствующих сетевых дескрипторов. Если в течение определенного времени один или несколько дескрипторов перешли в состояние готовности к чтению/записи, то данные из этих дескрипторов обрабатываются. Важно отметить, что обработка этих данных происходит последовательно. Опрос готовности дескрипторов может осуществляться с помощью:

- ***select()/poll()***. В этом случае ОС осуществляет перебор всех переданных ей дескрипторов и возвращает список тех из них, которые готовы для чтения или записи.
 - Плюсами такого подхода является:
 - очевидная простота реализации;
 - переносимость между различными ОС.
 - Минусы такого подхода:
 - отсутствие масштабируемости (из-за наличия единственного цикла);
 - последовательная обработка данных (один клиент может «тормозить» всех остальных);
 - дополнительные накладные расходы (необходимость опрашивать дескриптор даже если он «не готов»).
 - ***/dev/poll*** – функционирующий аналогично *poll()*, но в отличие от последнего позволяющий одновременно указывать операционной системе список интересующих дескрипторов. К сожалению, удачных переносимых реализаций этой замены *poll()* нет и вряд ли будет.
 - ***kqueue()*** – решение, аналогичное */dev/poll* в том смысле, что операционной системе явно указывается список дескрипторов, состояние которых необходимо отслеживать. Плюсом такого решения является возможность избежать накладных расходов, свойственных традиционному *poll()*, но есть и существенные минусы. Например, некоторые реализации *kqueue()* не поддерживают многопоточную модель, и вызов этой функции блокирует не только сам поток, но и весь процесс, что весьма пагубно сказывается на производительности сервера в целом.

- *epoll()* – альтернативный вариант сигналов реального времени. Это решение предполагает, что ОС формирует список дескрипторов, «готовых» к чтению/записи и возвращает его в вызывающую подпрограмму по запросу.
- *sigwaitinfo()* – накопление и обработка сигналов реального времени. Фактически это решение позволяет накапливать в ОС, а затем при необходимости получить у неё список всех модифицированных дескрипторов. Таким образом, появляется возможность опрашивать только те дескрипторы, состояние которых изменялось за последнее время. Обработка данных, т.е. собственно чтение и запись этих дескрипторов по-прежнему осуществляется последовательно.

Базовая реализация *многопоточного* сервера предполагает, каждый клиент обслуживается на стороне сервера соответствующим потоком с использованием *блокирующих* функций типа *read()/write()/recv()/send()*. К недостаткам такого подхода часто относят необходимость дополнительных затрат по памяти для каждого из создаваемых потоков. Этот недостаток действительно является существенным для *Web*-подобных систем, однако в описываемом случае рассматривается фиксированное и ограниченное количество потоков. Кроме того, современные ОС позволяют управлять количеством памяти, выделяемой потоку, что позволяет снизить негативное влияние указанного недостатка. Важным преимуществом многопоточной реализации является масштабируемость сервера в зависимости от количества используемых процессоров и процессорных ядер и относительно легкая переносимость между ОС. Использование высокоуровневых библиотек типа *Qt*, *wxWidgets* или им подобных позволяет реализовать полностью платформенно-независимый код.

Встраивание серверного кода в ядро ОС достаточно трудоемкая операция сама по себе и, как минимум, предполагает наличие достаточно хорошо формализованного протокола, что редко имеет место при разработке исследовательских моделей. Имеющиеся реализации встраиваемого кода (например, для протоколов *NFS* и *HTTP*) плохо переносимы между различными ОС и мало полезны сами по себе, если речь идет о разработке при-

кладных моделирующих комплексов с высокими требованиями к производительности. Поэтому вариант встраивания серверного кода в ядро ОС в дальнейшем рассматриваться не будет.

3. Сравнение многопоточного и *select()*-ориентированного сервера

Для определения наиболее эффективного варианта реализации сервера была разработана простейшая модель, в рамках которой клиенты производили подготовку модельных данных, передавали их имитатору и принимали от него ответ, после чего обмен повторялся. Модельные данные на клиентах готовились посредством специальной функции, выполняющей некоторое количество (N) тригонометрических операций. Фактически этот параметр соответствует вычислительной сложности клиентской модели и определяет количество процессорного времени, затрачиваемого на подготовку модельных данных в одной итерации обмена с имитатором. По условиям эксперимента суммарное количество обращений к серверу оставалось постоянным и составляло 10 000 обращений. Эксперимент проводился на ЭВМ с процессором *Core 2Duo 2,2* ГГц. Наблюдалось суммарное время, затрачиваемое сервером на обработку всех запросов от всех клиентов в зависимости от количества клиентов и количества операций, выполняемых на сервере. Время, затрачиваемое ОС на открытие сетевых соединений, передачу данных, создание и инициализацию потоков, не учитывалось. Синхронизация модельного времени не производилась для большей наглядности результатов. Результаты серий экспериментов для N , равного 500 000 и 10 000, приведены ниже на рис. 1 и рис. 2 соответственно.

Из результатов первой серии экспериментов ($N = 500\,000$) видно, что при единственном подключении производительность сервера (как величина обратная к времени, затрачиваемому на обработку запросов) одинакова как для *select()*, так и для многопоточной реализации сервера. Как только количество подключений к серверу становится два и более, производительность *select()*-сервера падает в два раза, а точнее, в количество раз равное количеству ядер процессора. Большое значение N также

означает, что время для подготовки данных на клиенте достаточно велико (много больше, чем обработка данных на сервере), поэтому запросы к серверу происходят достаточно ритмично и продолжительность их обработки мало зависит от количества подключенных клиентов.

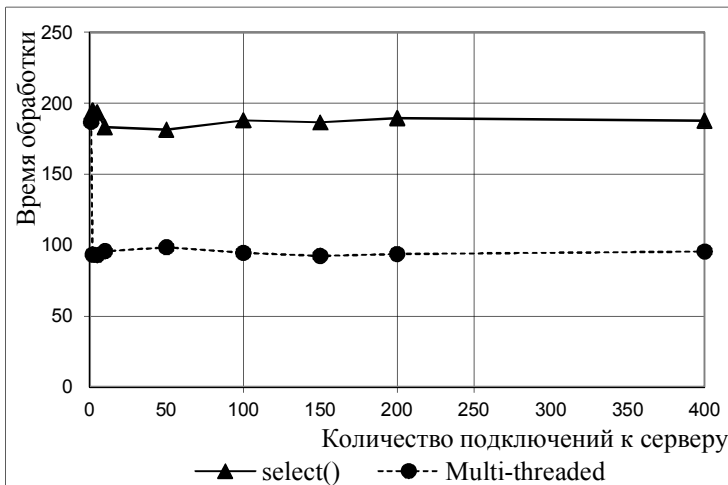


Рис. 1. Время обработки запросов ($N = 500\,000$)

Вторая серия экспериментов проводилась с меньшим количеством вычислений на клиентах ($N = 10\,000$) и, следовательно, большей частотой запросов к серверу. Из приведенных на рис. 2 результатов видно, что в этом случае выигрыш в производительности у многопоточной реализации сервера значительно больше, чем у *select()*-сервера. Связано это с дополнительными накладными расходами, возникающими при осуществлении перебора сетевых дескрипторов для определения «готовых». Пока количество подключений невелико, время, затрачиваемое на обработку, растет почти линейно из-за того, что обработка запросов происходит достаточно быстро, перебираемые дескрипторы в основном «не готовы» и цикл работает вхолостую тем дольше, чем больше таких дескрипторов. При увеличении количества подключений одновременно готовых дескрипторов ста-

новится больше и тем самым снижается длительность холостого цикла.

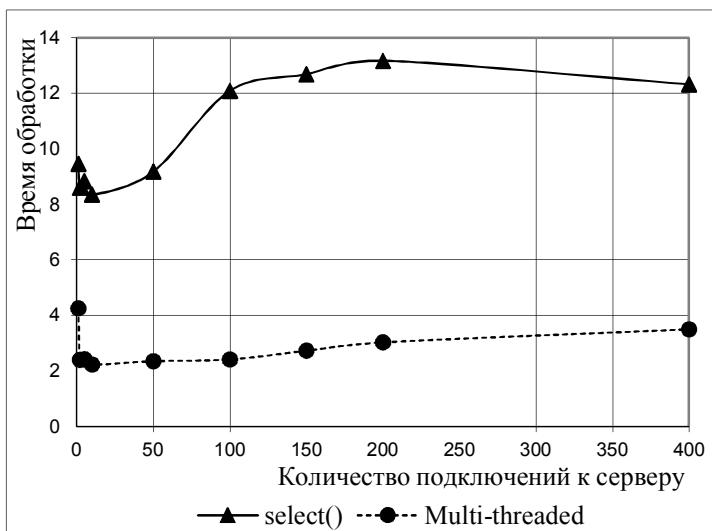


Рис. 2. Время обработки запросов ($N = 10\,000$)

Дополнительно следует отметить еще одно немаловажное наблюдение. Часто возникает необходимость размещать все приложения моделирующего комплекса на одной ЭВМ. В этом случае и сервер, и клиенты используют одни и те же вычислительные ресурсы. В описанных выше экспериментах это приводило к тому, что в случае *select()*-сервера одно из ядер процессора нагружалось примерно на 80%, а второе на 20% (вне зависимости от N). При использовании многопоточной реализации сервера оба ядра нагружались на 100%. Таким образом, многопоточная реализация сервера позволяет более полно использовать имеющиеся вычислительные ресурсы.

4. Вопросы синхронизации

При проектировании многопоточных приложений особое внимание следует уделять защите от ситуаций, в которых возможно возникновение состояния гонки (*race condition*). Для того чтобы этого избежать, необходимо синхронизировать доступ различных потоков к общим данным. Вне зависимости от выбранного способа взаимодействия между имитатором целевой обстановки и другими модулями комплекса общими данными являются:

- модельное время (считывается подключаемыми к имитатору модулями; обновляется только имитатором);
- сценарий моделирования и связанные с ним данные (считывается подключаемыми к имитатору модулями; обновляется только имитатором);
- текущее состояние каждого модуля, подключенного к имитатору (считывается имитатором и, быть может, некоторыми другими модулями; обновляется только непосредственно данным модулем).

Обращение к этим данным должно быть организовано таким образом, чтобы гарантировать их целостность и непротиворечивость. Для этого в соответствующих блоках программного кода (критических секциях) используются специальные блокирующие примитивы (*mutex*, *read/write lock* и т.д.) либо элементы неблокирующей синхронизации (*lock-free* структуры). Определение критических секций и выбор конкретного способа синхронизации в общем случае определяется особенностями проектируемой системы и, в частности, выбранным способом межпроцессного взаимодействия. Кроме того, выбранный способ синхронизации определяет и величину накладных расходов при работе потоков (связанных, например, с ожиданием блокируемых потоков) и тем самым влияет на производительность сервера в целом. В этой статье мы не будем подробно рассматривать вопросы синхронизации. Наша задача учесть влияние накладных расходов при проведении экспериментов.

В описанных выше экспериментах при многопоточной реализации сервера использовался сетевой обмен между клиентами

и имитатором. В этом случае каждый из участников обмена оперирует с копиями данных, снижая тем самым количество критических секций и, как следствие, количество блокировок. Для оставшихся критических секций использовались *read/write* блокировки. Наблюдаемое снижение производительности в этом случае было менее 1%.

5. Заключение

Использование многопоточной парадигмы при создании клиент-серверных приложений делает процесс проектирования и разработки таких систем более сложным, чем при использовании *select()*-ориентированного подхода или его модификаций. Вместе с тем, при создании исследовательских моделей такой подход позволяет наиболее полно использовать имеющиеся вычислительные ресурсы и дает возможность создавать более эффективные, масштабируемые и высокопроизводительные приложения.

На основании изложенного выше материала можно рекомендовать построение имитатора целевой обстановки по следующей схеме:

- каждому клиенту выделяется соответствующий серверный поток, в котором используются средства межпроцессного взаимодействия непосредственно с клиентом. Количество подключений определяется конфигурацией моделируемого сценария;
- каждому клиенту выделяется структура данных на стороне имитатора, которая описывает текущее состояние клиента и может обновляться с течением модельного времени. Доступ к этим данным необходимо синхронизовать;
- при наступлении очередного момента модельного времени имитатор передает в межпроцессный канал клиента соответствующий признак. Прочитав этот признак, клиент выполняет обработку данных очередного шага имитации. Поскольку используются блокирующие операции ввода/вывода, то при отсутствии данных в канале клиент будет ожидать. Таким образом, для клиента синхронизация модельного времени выполняется автоматически без дополнительных накладных расходов.

Литература

1. CHANDRA A., MOSBERGER D. *Scalability of Linux Event-Dispatch Mechanisms* // HP Labs Technical Reports. – 2000. – С. 2–20. URL – <http://www.hpl.hp.com/techreports/2000/HPL-2000-174.html>.
2. STEVENS W.R. *UNIX Network Programming: Networking APIs: Sockets and XTI*. – Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1998 – 1009 p.

SOME ASPECTS OF TARGET ENVIRONMENT SIMULATOR DESIGN DURING DEVELOPMENT OF DISTRIBUTED MODELING SYSTEM

Aleksey Lototsky, Interstate Stock Corporation “Vimpel”, Moscow.

Abstract: Performance is one of the most important quantitative indicators of simulation software based on distributed calculations. For a target environment simulator (being the main element of the whole class of such systems) major performance related problems are discussed. Using solutions and proposals provided one can increase overall system efficiency and performance.

Keywords: multithreading, select()-based server, synchronous/asynchronous/blocking IO.

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии Н. Н. Бахтадзе*

УДК 519,330.341(063) + 338,24(063),681,3

ББК 32,817

МОДЕЛЬ УПРАВЛЕНИЯ КАЧЕСТВОМ ОБРАЗОВАНИЯ В ВУЗЕ

Тукубаев З. Б.¹, Умаров А. А.²

*(Международный казахско-турецкий университет
им. А. Ясауи, Казахстан, г. Туркестан)*

Рассматривается проблема повышения качества образования в высшей школе применительно к вузам Казахстана. В данной работе предлагается один из путей решения поставленной задачи на основе системы стимулирования сотрудников вуза. Работа предназначена для сотрудников управления образованием.

Ключевые слова: автоматизированная система управления, управление качеством образования, многокритериальные задачи, комплексная оценка, стимулирование труда профессорско-преподавательского состава.

1. Актуальность проблемы качества в вузе и различные подходы к решению проблемы

Проблема повышения качества образования – большая социальная проблема, решаемая на уровне государства. *Качество образования* не есть некое абстрактное свойство; высокое (достаточное) качество – это максимальное (достаточное) соответствие той задаче, которая должна быть решена в ходе подготовки специалиста данного уровня [14].

¹ Тукубаев Зукурхан Бейсекович, кандидат технических наук, доцент (*ibrahim19899@mail.ru*).

² Умаров Амантур Амангельдыевич, магистр информатики, старший преподаватель (*unix77@yandex.ru*).

От уровня подготовки специалистов, их потребности в стране в большой степени зависит экономическое и социальное состояние государства в целом. К сожалению, в последнее время наблюдается заметное снижение качества подготовки научных и педагогических кадров в Казахстане. В Послании Президента Республики Казахстан Н.А. Назарбаева народу Казахстана от 28.01.2011 г. приводится факт, говорящий о том, что 200 диссертационных советов в стране «штампуют» кандидатов и докторов наук, и в науку идёт 1 из 60 кандидатов наук и 1 из 37 докторов наук. В связи с этим с этого года была прекращена работа этих советов. Президент также подчеркнул, что **качественное образование** должно стать основой индустриализации и инновационного развития Казахстана.

В современном мире – мире информационных технологий и глобализации общества – требования к качеству образования значительно повышаются. И, в конечном счете, это – признание дипломов, полученных в одной стране международным сообществом, требования международных образовательных стандартов (требований участников Болонского процесса) и т.д. Глава Республики Казахстан Нурсултан Назарбаев придает большое значение вопросу образования; это обеспечивается созданием открытого экономического пространства в Европе и Азии [16], а также поддержкой образовательной программы Темпус.

Важность решения данной проблемы на уровне государства подтверждается следующими Правительственными документами: Государственной программой развития образования Республики Казахстан на 2011–2020 годы [4] и другими источниками [9, 13, 17].

Большую роль в повышении качества образования играет Президентская международная образовательная программа «Болашак», направленная на подготовку специалистов в ведущих вузах мира. В частности, один из авторов – А.А. Умаров прошел научную стажировку в Институте проблем управления РАН (ИПУ РАН) в рамках этой программы.

Одной из причин заметного снижения качества образования в высшей школе является *уход наиболее квалифицированных*

кадров в другие области деятельности (в основном, в бизнес) из-за недостаточной социальной и финансовой оценки их труда. Другой причиной является *отсутствие связи вузов с производством и наукой*. Для компенсации такого недостатка в Казахстане и реализуется программа «Болашак», а также строятся технопарки по различным направлениям.

Выход из этой ситуации видится в следующем:

1) в подготовке кадров за рубежом в рамках программы «Болашак»;

2) в возрождении Академии Наук Казахстана совместно с отделениями РАН в рамках ОДКБ (Организация добровольной коллективной безопасности), Таможенного союза (ТС) и ШОС (Шанхайская организация Содружества);

3) в возрождении связи треугольника ВУЗ–НАУКА–ПРОИЗВОДСТВО в стране согласованно с Российской академией наук.

В настоящее время идет процесс реализации Государственной Программы [4]. Разработка Программы вызвана необходимостью кардинальных преобразований, направленных на *повышение качества образования*, решение стратегических задач, стоящих перед казахстанской системой образования в новых экономических и социокультурных условиях. Согласно этой программе образовательная система Республики Казахстан предполагает переход на пятиступенчатую систему обучения: начальное образование – среднее образование – послесреднее образование – высшее образование – послевысшее образование.

Подробно остановимся на высшем образовании (ВО). Система высшего образования Республики Казахстан представлена 180-ю высшими учебными заведениями и 86-ю филиалами вузов. Девять ведущих университетов имеют особый статус (всего 5% от общего количества). Общий показатель качества ВО в целом будет зависеть от обобщенного показателя всех 180-ти вузов по всей стране. Поэтому целесообразным является точечное рассмотрение каждого отдельного учреждения с целью повышения качества образования в целом.

Вуз, как любая большая кибернетическая система, имеет сложную структуру, функциональность и поведение. Характеристика поставленной задачи имеет многоцелевую, междисциплинарную природу, имеющую цель определения обобщенного критерия – показателя качества образования. Этот показатель, по мнению авторов, может быть достигнут путем совместного решения трех задач различной природы: социально-экономической, технической и педагогической. Здесь сложным является построение целевой функции оптимизации. Это обусловлено, во-первых, тем, что все эти три составляющие имеют различные измерения и природу. Тут целесообразно было бы применить нечеткую логику при оценке обобщенного критерия [10, 11]. Обобщенный критерий включает в себя три подкритерия: *педагогический, методический и творческий*.

С социально-экономической точки зрения, это создание **эффективной системы стимулирования** труда профессорско-преподавательского состава (ППС), которое является важной задачей в современных условиях развития Высшего профессионального образования в Казахстане и адаптации вузов к требованиям международной образовательной системы.

С технической точки зрения, это разработка **автоматизированной системы управления** (АСУ) вуза, позволяющей оперативно выполнять анализ состояния вуза и в результате обработки данных получать объективную оценку для принятия решений (принцип «прозрачного» управления).

С педагогической точки зрения, это создание **эффективной методики оценки знания** студентов, позволяющей повысить уровень заинтересованности в знаниях.

Применение системного подхода к решению проблемы позволяет обобщить все эти составляющие в одно целое и рассмотреть настоящую проблему с единой точки зрения.

Сделаем небольшой обзор работ по системам оценки в образовании. Поскольку объект настоящего исследования – вуз – является одним из видов организационных систем (ОС), то рассмотрение начнем с них. В России управлением ОС занима-

ется школа В.Н. Буркова [1] и Д.А. Новикова [10–12] (Институт проблем управления РАН).

В работе Д.А. Новикова [11] четко определены главные направления модернизации системы управления образованием, это:

- управление качеством;
- управление доступностью;
- управление эффективностью.

Эти три ключевых направления и являются основными критериями эффективности управления. Далее автором выдвигаются следующие важные подзадачи, решение которых должно обеспечить требуемое качество образования:

- изучение потребностей рынков труда и образовательных услуг;
- набор абитуриентов;
- формирование программ и методов обучения;
- организация процесса обучения;
- обеспечение обучения ресурсами;
- аттестация выпускников, присвоение квалификации выпускам;
- мониторинг трудоустройства выпускников;
- анализ результатов и начало нового витка «петли качества».

Приведем еще ряд трудов российских ученых по системам оценки качества образования в Высшей школе. Например, в [2] описывается рейтинговая система оценки знаний студентов, деятельности преподавателей и подразделений вуза. В работе [14] качество образовательной деятельности характеризуется следующими требованиями, как: наличие государственного стандарта высшего профессионального образования и качество его реализации; качество профессионально-преподавательского состава вуза; качество организации процесса обучения; качество методического обеспечения учебного процесса, а также качество субъектов обучения.

В мировой практике применяются различные подходы к оценке качества работы вузов: репутационный, результативный

и общий. *Репутационный подход* использует экспертный механизм для оценки уровня профессиональных образовательных программ и учебных заведений в целом. *Результативный* основан на измерении количественных показателей деятельности вуза. *Общий подход* базируется на принципах «всеобщего управления качеством» (*Total Quality Management, TQM*) и требований к системам менеджмента качества Международной организации по стандартизации (*International Organization for Standardization, OSI*).

Наряду с подходами выделяются внешняя и внутренняя системы оценки качества образования [15]. *Внешняя система* («французская модель») оценки качества образования представлена государственными институтами лицензирования, аттестации и аккредитации учебных заведений и сертификации определенных компонентов профессионального образования. Кроме того, происходит формирование общественных институтов аккредитации на базе различных научно-педагогических и научных ассоциаций и объединений. *Внутренняя система* («английская модель») оценки качества образования организуется в образовательных учреждениях в формах итоговой и поэтапной аттестации (самоаттестации) обучаемых, систем оценки абитуриентов, систем психодиагностики и социодиагностики в учебных заведениях, а также в системах самооценки и самоаттестации учебных заведений и их подразделений.

Отдельную тему исследований охватывает проблема стимулирования ОС. Острый вопрос касается финансирования перспективных научных направлений и проектов. Например, в России действует эффективная и достаточно гибкая система оценки показателей результативности научной деятельности (ПРНД) [7]. В работе О.Г. Дмитриевой построена система стимулирования сотрудников вуза на основе достигнутых результатов [6].

Основы построения АСУ в народном хозяйстве и проблемы их технической реализации широко освещаются в работе академика В.М. Глушкова. Особо известны технические решения российских компаний «Нейман» и «Галактика» в области авто-

матизации управления предприятием (в том числе для вузов). В системах принятия решений используется аппарат математической статистики и дисперсионного анализа, реализуемый с помощью технологий извлечения данных *DM (Data Mining)*, функционируемой на основе средств многомерного анализа данных – *OLAP (On-Line Analytical Processing)* [3].

2. Постановка задачи управления качеством образования в вузе путем выбора вида функции и параметров системы стимулирования

Системный подход к решению проблемы заключается в создании модели такой человеко-машинной системы, позволяющей выполнять всесторонний анализ учебной работы вуза и на основе своевременного анализа и обработки данных принимать объективные решения по стимулированию ППС, что в конечном итоге должно обеспечить улучшение качества образования. При комплексной оценке должны быть учтены и человеческий фактор (в социально-экономическом, педагогическом и методическом аспекте). Вышеотмеченные множества различных факторов образуют сложную многокритериальную задачу [10].

Система стимулирования сотрудников существует практически в каждой организации. Однако немногим организациям удается добиться с ее помощью желаемых целей: повысить производительность труда, заинтересовать в результатах деятельности компании рядовых сотрудников и т.д. В большинстве случаев причина подобных неудач в том, что система стимулирования не учитывает особенностей конкретной организации.

Следовательно, необходима тщательная проработка системы стимулирования с учетом индивидуальных особенностей организации. Нужно быть готовым к тому, что это трудоемкий процесс, который потребует немало времени (на крупных предприятиях – несколько месяцев).

Теперь перейдем к конкретной организации – Международному Казахско-турецкому университету им. А. Ясауи (далее

МКТУ). В системе менеджмента качества (СМК) МКТУ приняты следующие нормы [17] (см. таблицы 1–4):

Таблица 1. Диапазон значений оценок качества образования¹

Уровень качества	Качественная оценка	Буквенное значение балла
10	Отлично (A+)	A
9	Отлично (A–)	
8	Хорошо (B+)	B
7	Хорошо (B)	
6	Хорошо (B–)	
5	Удовлетворительно (C+)	C
4	Удовлетворительно (C)	
3	Удовлетворительно (C–)	
2	Плохо (D)	D
1	Плохо (D–)	

Таблица 2. Методическая оценка занятия у преподавателя

№ внутреннего критерия	Показатели	Диапазон значений оценок
K_{21}	Достижение цели урока	1÷10
K_{22}	Организация урока	1÷10
K_{23}	Межпредметные связи (примеры)	1÷10
K_{24}	Выполнение заданий и результативность	1÷10
K_{25}	Объективность в оценке студентов	1÷10
K_{26}	Применение технических средств	1÷10
K_{27}	Уровень знаний студента и ее применение ¹	1÷10
K_{28}	Домашнее задание	1÷10

¹ Приводится система *Grade Point Average (GPA)*, основанная на кредитной технологии обучения.

Таблица 3. План показателей творческой работы ППС

№	Творческая работа (r_k)	Балл (b_k)
1	Доклад, статья, утвержденная ученым советом вуза (внутри)	1
2	Учебное пособие, утвержденное ученым советом вуза (внутри)	4
3	Доклад, статья, опубликованная в Республике Казахстан и за рубежом	5
4	Учебное пособие, утвержденное грифом Министерства Республики Казахстан	10
5	Участие в Международных конкурсах, Государственных программах и проектах (программа «Болашак»)	15
6	Защита диссертации	20
7	Участие в проектах технопарков	20
8	Победа в Международных конкурсах, Государственных программах и проектах (программа «Болашак»)	25

Таблица 4. План показателей творческой работы студентов (критерий K_3)

№	Творческая работа (r_k)	Балл (b_k)
1	Участие с докладом на конференции вуза (внутри)	5
2	Участие с докладом на конференции в вузах масштаба страны	10
3	Статья в журнале (можно и в соавторстве с руководителем)	15
4	Участие в программах, олимпиадах и проектах масштаба вуза или масштаба страны	20
5	Победа в программах, олимпиадах и	25

¹ Данный критерий определяет уровень теоретических и практических знаний у студента и вычисляет балл по критерию K_2 у студентов.

№	Творческая работа (r_k)	Балл (b_k)
	проектах масштаба страны (например, в программе «Болашак»)	

Требования к системе стимулирования

Определен следующий набор ряд требований для систем оплаты труда:

– объективность: размер вознаграждения работника должен определяться на основе объективной оценки результатов его труда;

– прозрачность: работник должен знать, какое вознаграждение он получит в зависимости от результатов своего труда;

– адекватность: вознаграждение должно быть адекватно трудовому вкладу каждого работника в результат деятельности всего коллектива, его опыту и уровню квалификации;

– своевременность: вознаграждение должно следовать за достижением результата как можно быстрее (если не в форме прямого вознаграждения, то хотя бы в виде учета для последующего вознаграждения);

– значимость: вознаграждение должно быть для сотрудника значимым;

– справедливость: правила определения вознаграждения должны быть понятны каждому сотруднику организации и быть справедливыми, в том числе с его точки зрения.

Основные этапы построения системы стимулирования

Для того чтобы система стимулирования организации принесла ощутимый положительный эффект, при ее создании рекомендуется последовательное выполнение следующих шагов:

– формирование структуры персонала организации (выделение однородных групп);

– декомпозиция стратегических целей на уровень подразделений и отдельных сотрудников (выделение ключевых показателей эффективности деятельности для расчета переменной части заработной платы).

Разработка механизмов стимулирования (определение правил расчета переменной части вознаграждения сотрудников).

Модели систем оплаты труда подробно исследованы в монографии [8]. Одной из распространенных систем оплаты труда считается *тарифно-премиальная система (ТПС)*, которая представляет собой выплату постоянной части вознаграждения (ежемесячно) и его переменной части (по результатам труда). В ее рамках постоянную составляющую вознаграждения называют *тарифной*, которая зависит от тарифного разряда агента, а переменную составляющую – *премиальной*, зависящей от результатов деятельности агента в соотношении с результатами деятельности его коллег.

В МКТУ вознаграждение сотрудников состоит из постоянной и переменной частей. Постоянная часть – оклад, как правило, минимальный (финансируется из Государственного бюджета). Переменная часть (финансируется из собственного бюджета) – премия по итогам года, учитывающая только результаты научной деятельности.

Проектируемая система оплаты труда должна учитывать, как было сказано выше, три составляющие – педагогическую, методическую и творческую. К тому же быть объективной, адекватной и по возможности прозрачной и справедливой по отношению ко всем сотрудникам организации.

Таким образом, *цель настоящей работы* заключается в построении эффективной системы качества оценки качества образования вуза, основанной на стимулировании ППС/студентов (точнее, *премиальной составляющей* системы ТПС) согласно вышеуказанным требованиям с учетом финансовых ограничений. Это актуальная и практически важная задача для руководства любого вуза. С глобальной точки зрения, если результаты настоящей работы будут плодотворными, то их в будущем можно будет рекомендовать к внедрению во все вузы Казахстана.

2.2. ОБЩАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Приведем общую постановку задачи из [8]. Рассмотрим модель n – агентной ОС, в которой деятельность i -го агента, характеризуемого типом $r_i \geq 0$ (следует отметить, что в

конкретной модели тип агента равна 1), описывается его скалярным действием $z_i \geq 0$, $i \in N = \{1, 2, \dots, n\}$ – множество агентов. Обозначим тарифную составляющую заработной платы $t(r_i)$, премиальный фонд $R \geq 0$. Отметим, что в здесь в конкретной модели тарифная составляющая не учитывается и равна 0.

Предположим, что функция затрат i -го агента $c_i(y_i, r_i)$ зависит только от его собственного действия и является гладкой, выпуклой и неубывающей по *действию* z_i , невозрастающей по *типу* r_i функцией, т.е. $c_z \geq 0$, $c_{zz} \geq 0$, $c_r \leq 0$, $c_{rx} \leq 0$.

Типы агентов упорядочены по возрастанию, т.е. $r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_n$.

Премиальную составляющую заработной платы i -го агента обозначим $\pi_i(z)$, $i \in N$, где $z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathfrak{R}_+^n$ – вектор действий агентов.

Таким образом, общее вознаграждение i -го агента имеет вид:

$$\sigma_i(z, r_i) = t(r_i) + \pi_i(z), \quad i \in N.$$

Введем ограничение резервной полезности $u(\cdot)$, которое определяет минимальное значение целевой функции агента, которое должно быть ему обеспечено, т.е. $u(r_i)$ – *резервная полезность* i -го агента, $i \in N$.

Обозначим $r = (r_1, r_2, \dots, r_n)$ – вектор типов агентов; $\pi(z) = (\pi_1(z), \pi_2(z), \dots, \pi_n(z))$ – вектор-функцию премиального стимулирования.

Целевая функция агента имеет вид:

$$(1) \quad f_i(z_i, \pi_i(\cdot), t(\cdot), r_i) = t(r_i) + \pi_i(z) - c_i(z_i, r_i), \quad i \in N.$$

Целевая функция центра имеет вид:

$$(2) \quad \Phi(z, \pi(\cdot), t(\cdot), r_i) = H(z) - \sum_{i \in N} \pi_i(z) - \sum_{i \in N} t(r_i).$$

Пусть $P(r, \pi(\cdot))$ – множество равновесий Нэша игры агентов при заданной тарифно-премиальной системе стимулирования;

$$S(r, R) = \left\{ \pi(\cdot) \mid \forall z \in P(r, \pi(\cdot)) \left| \sum_{i \in N} \pi_i(z) \leq R \right. \right\} - \text{множество премиальных систем стимулирования, таких, что для любого соответствующего равновесного вектора действий агентов суммарное премиальное стимулирование не превышает премиального фонда;}$$

ных систем стимулирования, таких, что для любого соответствующего равновесного вектора действий агентов суммарное премиальное стимулирование не превышает премиального фонда;

$$U(r, \pi(\cdot), t(\cdot)) = \left\{ z \in \mathfrak{R}_+^n \mid t(r_i) + \pi_i(z) - c_i(z_i, r_i) \geq u(r_i), i \in N \right\} -$$

множество векторов действий агентов, при которых значения их целевых функций удовлетворяют ограничениям резервной полезности.

Эффективность ТПС определим как гарантированное значение целевой функции центра на множестве решений агентов:

$$(3) \quad K(t(\cdot), \pi(\cdot), r) = \min_{z \in P(\pi(\cdot)) \cap U(r, \pi(\cdot), t(\cdot))} [H(z) - \sum_{i \in N} \pi_i(z) - \sum_{i \in N} t(r_i)].$$

Общая постановка задачи синтеза оптимальной ТПС имеет вид:

$$(4) \quad K(t(\cdot), \pi(\cdot), r) \rightarrow \max_{\pi(\cdot) \in S(r, R), t(\cdot), R \geq 0},$$

т. е. требуется найти оптимальные тарифные выплаты $t(\cdot)$, премиальный фонд R и правила его распределения (премиальную систему стимулирования $\pi(\cdot)$), которые обеспечивали бы всем агентам в равновесии резервную полезность.

Задачу (4) вряд ли возможно решить в общем виде. Обычно на практике ее решение разбивается на три этапа. Первым этапом является задача синтеза тарифной составляющей системы стимулирования. Этот этап мы пропускаем, так как в настоящем случае в вузе уже используется, установленная государством, единая тарифная сетка.

Вторым этапом является выбор премиальной составляющей оплаты труда при фиксированной тарифной составляющей и фиксированном размере премиального фонда. В настоящей работе рассматривается именно второй этап.

Третьим этапом является выбор оптимального премиального фонда. Этот этап также не входит в задачу настоящего исследования.

2.2. ПОСТРОЕНИЕ СИСТЕМЫ ОЦЕНКИ КАЧЕСТВА ОБРАЗОВАНИЯ В ВУЗЕ

Перейдем от общей постановки к конкретной задаче построения системы качества. Как было сказано выше, цель задачи заключается в выборе оптимальной премиальной системы оплаты труда при фиксированной тарифной составляющей и фиксированной размере премиального фонда для конкретной ОС¹.

Система оценки качества описывается следующим образом²:

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi(z, \pi(\cdot)) = [H(z) - \sum_{i \in N} \pi_i(z)] \rightarrow \max_z \\ f_i(z_i, \pi_i(\cdot)) = \pi_i(z) - c_i(z_i), \\ \sum_{i \in N} C_i(z) \leq R; \end{array} \right.$$

где $z_i = f(A(a_1, a_2, a_3), I(I_1, I_2, I_3), K(K_1, K_2, K_3))$ – обобщенная оценка³ (показатель) качества работы для i -го преподавателя/студента определяется обобщенным критерием качества K (таблица 3), определяемая функциями:

$$z_i(A, I, K) = a_1 I_1 K_1 + a_2 I_2 K_2 + a_3 I_3 K_3,$$

$$A(a_1, a_2, a_3) = a_1 + a_2 + a_3 = 1;$$

$$(6) \quad I_1 = \begin{cases} 1, & \text{если удовлетворяется условие } P_1, \\ 0 & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

¹ В настоящей модели рассматривается стимулирование со слабо связанными агентами.

² В целях понятности изложения в обобщенной модели системы (5) использована единая система обозначений как для ППС, так и для студентов.

³ Содержательно действие i -го агента и будет оценкой работы его труда.

$$(7) \quad I_2 = \begin{cases} 1, \text{ если удовлетворяется условие } P_2, \\ 0 \text{ в противном случае;} \end{cases}$$

$$(8) \quad I_3 = \begin{cases} 1, \text{ если удовлетворяется условие } P_3, \\ 0 \text{ в противном случае;} \end{cases}$$

где P_1, P_2, P_3 – условия стимулирования у преподавателей/студентов по трем критериям; I_1, I_2, I_3 – функции – индикаторы выполнения условий по критериям K_1, K_2 и K_3 соответственно; $c_i(z_i)$ – функция затрат i -го преподавателя/студента имеет вид (функция затрат из [13]):

$$(9) \quad c_i(z_i) = \frac{z_i^2}{2}.$$

$H(z)$ – функция дохода центра, она имеет вид:

$$(10) \quad H(z) = \sum_{i \in N} z_i.$$

C – затраты на стимулирование. В модели они равны

$$(11) \quad C = C^{\text{ППС}} + C^{\text{СТУД}};$$

$$(12) \quad C^{\text{ППС}} = C_{\text{ППС}}^{\text{H}} \cdot m_{\text{ППС}}^{\text{H}} + (C_{\text{ППС}}^{\text{M1}} \cdot m_{\text{ППС}}^{\text{M1}} + C_{\text{ППС}}^{\text{M2}} \cdot m_{\text{ППС}}^{\text{M2}});$$

$$(13) \quad C^{\text{СТУД}} = C_{\text{СТУД}}^{\text{H}} \cdot m_{\text{СТУД}}^{\text{H}} + (C_{\text{СТУД}}^{\text{M1}} \cdot m_{\text{СТУД}}^{\text{M1}} + C_{\text{СТУД}}^{\text{M2}} \cdot m_{\text{СТУД}}^{\text{M2}}).$$

Здесь

$C^{\text{ППС}}$ – затраты на преподавателей;

$C^{\text{СТУД}}$ – затраты на студентов;

$m_{\text{ППС}}^{\text{H}}$ – число выбранных преподавателей на нематериальное стимулирование;

$m_{\text{ППС}}^{\text{M1}}$ – число выбранных преподавателей на материальное стимулирование по методической работе;

$m_{\text{ППС}}^{\text{M2}}$ – число выбранных преподавателей на нематериальное стимулирование по творческой работе;

$m_{\text{СТУД}}^{\text{H}}$ – число выбранных студентов на нематериальное стимулирование;

$m_{\text{СТУД}}^{\text{M1}}$ – число выбранных студентов на нематериальное стимулирование по методической работе;

$m_{\text{СТУД}}^{\text{М2}}$ – число выбранных студентов на материальное стимулирование по творческой работе.

Далее, в (5) $\pi(z)$ – функция стимулирования системы, которая, как было указано выше, должна объединять три составляющие, учитывающие педагогический, методический и творческий фактор:

$$(14) \pi(z, C) = \pi^{(1)} + \pi^{(2)} + \pi^{(3)}.$$

Обозначим функцию стимулирования относительно ППС как $\pi^{\text{ППС}}(z)$, относительно студентов – $\pi^{\text{СТУД}}(z)$.

Задача настоящего исследования состоит в определении (выборе) оптимальной функции $\pi(z)$, максимизирующей целевую функцию центра $H(z)$ с учетом финансовых ограничений $C(R)$.

Определены также переменные:

$K(K_1, K_2, K_3)$ – обобщенный критерий качества работы преподавателей/студентов, определяется тройкой значений критериев: K_1 – педагогический критерий; K_2 – методический критерий; K_3 – творческий критерий;

a_1, a_2, a_3 – весовые коэффициенты критериев K_1, K_2 и K_3 соответственно; значения весов задаются экспертно [13, 14];

R – фонд стимулирования.

3. Решение задачи

3.1. ОПИСАНИЕ СТРУКТУРЫ СИСТЕМЫ

Предлагается следующая структура модели управления системы, которую условно можно представить, состоящей из двух уровней: внешней и внутренней моделей. **Внешняя модель** характеризует управление со стороны ВЫСШЕГО органа управления (в лице начальника учебного отдела). В качестве управляемой системы являются:

- деканат (в лице декана);
- кафедра (в лице зав. кафедрой);
- преподаватель;
- группа студентов.

Внутренняя модель характеризует сам процесс (учебное занятие).

Критерий оценки управления внешней модели – показатель выполнения/невыполнения (срыв) урока у преподавателя (факультета, кафедры). Это КОЛИЧЕСТВЕННАЯ ОЦЕНКА.

Критерий оценки управления внутренней модели включает: показатели посещаемости и успеваемости студента (также количественная оценка);

показатели экспертной комиссии¹, которые определяются восемью критериями качества урока. Это КАЧЕСТВЕННАЯ ОЦЕНКА.

Так как основной функцией вуза является ОБУЧЕНИЕ [11], основным процессом в вузе является учебный процесс. Процесс обучения (**учебный процесс (УП)**), по мнению авторов, это процесс проведения занятий определенным преподавателем над определенной группой студентов в определенном интервале времени (семестра/учебного года). Единицей измерения УП является **учебное занятие**.

Иерархическая структура управления модели приведена в таблице 5.

Таблица 5. Иерархическая структура образовательной деятельности

Уровень управления	Начальник	Подчиненный	Функция управления	
			ВНЕШНЯЯ МОДЕЛЬ	ВНУТРЕННЯЯ МОДЕЛЬ
0	Начальник учебного отдела	Декан Зав. кафедрой Преподаватель	Контроль и учет: – проведения занятий преподавателя	1) Контроль и учет: – посещаемости – успеваемости студентов
1	Декан	Зав. кафедрой Преподаватель		

¹ Следует подчеркнуть, что показатели посещаемости (критерий K_{11}) и успеваемости (критерий K_{12}) определяются и анализируются оперативно (с помощью АСУ) для всех ППС; а показатель качества урока (критерий K_2) определяется экспертами.

Уровень управления	Начальник	Подчиненный	Функция управления	
			ВНЕШНЯЯ МОДЕЛЬ	ВНУТРЕННЯЯ МОДЕЛЬ
2	Зав. кафедрой	Преподаватель		2) Экспертная оценка
3	Преподаватель	Студент		

Состояние учебного процесса в целом определяется в результате сбора статистики занятий за определенный интервал времени. Каждое занятие характеризуется:

Преподавателем, ведущим занятие (КТО ОБУЧАЕТ?)

Группой обучения (КОГО ОБУЧАЕТ?)

Предметом (темой занятия) (ЧТО?)

Аудиторией (ГДЕ?)

Временем проведения занятия (КОГДА?).

В результате сбора статистики накапливаются данные о состоянии вуза; и по этим данным вычисляются критерии оценки модели.

3.2. ОПИСАНИЕ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ СИСТЕМЫ СТИМУЛИРОВАНИЯ

Исходные данные для построения системы (5) хранятся в так называемых справочниках, содержащих нормативы планов. К ним относятся:

диапазон значений оценок по успеваемости у студента (см. таблицу 1);

методическая оценка занятия у преподавателя (см. таблицу 2);

план показателей творческой работы (для ППС – см. таблицу 3, для студентов – см. таблицу 4).

В ходе проектирования системы были получены следующие результаты, которые приведены в таблицах:

1. Иерархическая структура системы (см. таблицу 5);
2. Показатели работы ППС/студентов (см. таблицу 6);
3. Нормативы и процесс стимулирования (см. таблицу 7);

4. Таблица перевода балла по методической работе в оценку по критерию K_2 (см. таблицу 8);

5. Таблица перевода балла по творческой работе в оценку по критерию K_3 и в величину материального вознаграждения (см. таблицу 10);

6. Список выполненных творческих работ у ППС (см. таблицу 11);

7. Принадлежность выполненных работ определенному рангу из множества плана работ (результат выполнения шага 3.1) (см. таблицу 12);

8. Вознаграждения преподавателей/студентов (см. таблицу 15).

Промежуточные результаты и свод данных заносятся в таблицы:

1. Оценка ППС по критерию K_2 (см. таблицу 9);

2. Оценка ППС по критерию K_3 (см. таблицу 13);

3. Оценка ППС по обобщенному критерию $K(K_1, K_2, K_3)$ (см. таблицу 14).

Результаты внедрения системы в учебный процесс записаны в таблицы:

1. Проверка системы по критерию K_1 (см. таблицу 16);

2. Проверка системы по критерию K_2 (см. таблицу 17);

3. Проверка системы по критерию K_3 (см. таблицу 18);

4. Сравнительные диаграммы экспериментов по критериям K_1, K_2, K_3 и обобщенному критерию K .

Обобщенная оценка качества образования $K(K_1, K_2, K_3)$ имеет в составе три оценки по трем критериям соответственно, шкала оценок которых состоит из десяти уровней (см. таблицу 1).

Опишем систему критериев в общей модели (см. таблицу 6). Критерий K – обобщенный критерий, он включает в себя критерии K_1, K_2, K_3 для ППС и критерии K_1 и K_2 для студентов. K_1 – педагогический критерий, он состоит из двух критериев – оценки выполнения учебного плана K_1 и оценки экспертной комиссии K_2 . Критерий K_1 является внешним, критерии K_{11} и K_{12} внутренние, т. е. $K_1(K_{11}, K_{12})$. Они определяются на основе обработки статистических данных (с помощью АСУ), и, по итогам

выполнения K_1 система осуществляет выбор преподавателей/студентов для нематериального стимулирования.

Дальнейшая оценка (качественная оценка) урока осуществляется экспертной комиссией по критерию K_2 – методическому критерию. Он включает в себя восемь внутренних оценок (см. таблицу 2); в случае необходимости можно добавлять и другие критерии оценки.

При экспертной оценке занятия немалую роль играет фактор объективности мнений комиссии; это поддерживается тем обстоятельством, что занятие должно проводиться в виде открытого урока, тем самым обеспечивая «прозрачность» процедуры. По итогам оценки по критерию K_2 преподаватели/студенты получают материальное стимулирование $C_{ППС}^{M1}$ ($C_{СТУД}^{M1}$).

Таблица 6. Показатели работы преподавателя/студента

ОБОБЩЕННЫЙ КРИТЕРИЙ K				
Учебная работа			Творческая работа	
1) Выполнение плана у ППС – $x^{ППС}$	K_1 (показатель плана)	K_{11} (показатель посещаемости)	Задается ранг (норматив работ)	Критерий K_3
		K_{12} (показатель успеваемости)		
2) Экспертная оценка урока	Критерий K_2 1) для ППС ($K_{21}, K_{22}, K_{23}, K_{24}, K_{25}, K_{26}, K_{27}, K_{28}$) 2) для студентов только K_{27}			
Выполнение плана у студентов – $x^{СТУД}$	K_1 (показатель плана)	K_{11} (показатель посещаемости)	Задается ранг (норматив работ)	
		K_{12} (показатель успеваемости)		

По итоговым данным оценок критерия K_2 ППС заслуживают нематериальное (моральное) вознаграждение, которое заключается в рекомендации их на республиканские конкурсы типа «Учитель года», «Лучший преподаватель» и т.п.

По критерию K_3 (для ППС см. таблицу 3; для студентов см. таблицу 4) определяются показатели творческой работы преподавателей/студентов (творческий критерий) – $C_{ППС}^{M2}$ и $C_{СТУД}^{M2}$ соответственно; и по ним вычисляется величина материального вознаграждения (см. таблицу 12).

Таблица 7. Нормативы и процесс стимулирования

№ шага	ППС			СТУДЕНТЫ		
	Вид стимулирования	Число стимулируемых	Содержатся во множестве	Вид стимулирования	Число стимулируемых	Содержатся во множестве
Шаг 0 (начальное состояние)	–	Общее число N	$\Omega_1^{ППС}$	–	Общее число Q	$\Omega_1^{СТУД}$
Шаг 1 (выбор по условию P_1)	Нематериальное $\pi^{(1)}$ ($C_{ППС}^H$)	$m_{ППС}^H$	$\Omega_2^{ППС}$	Нематериальное $\pi^{(1)}$ ($C_{СТУД}^H$)	$m_{СТУД}^H$	$\Omega_2^{СТУД}$
Шаг 2 (выбор по условию P_2)	Материальное $\pi^{(2)}$ ($C_{ППС}^{M1}$)	$m_{ППС}^{M1}$	$\Omega_3^{ППС}$	Материальное $\pi^{(2)}$ ($C_{СТУД}^{M1}$)	$m_{СТУД}^{M1}$	$\Omega_3^{СТУД}$
Шаг 3 (выбор по условию P_3)	Материальное $\pi^{(3)}$ ($C_{ППС}^{M2}$)	$m_{ППС}^{M2}$	$\Omega_4^{ППС}$	Материальное $\pi^{(3)}$ ($C_{СТУД}^{M2}$)	$m_{СТУД}^{M2}$	$\Omega_4^{СТУД}$

№ шага	ППС			СТУДЕНТЫ		
	Вид стимулирувания	Число стимулируемых	Содержатся во множестве	Вид стимулирувания	Число стимулируемых	Содержатся во множестве
Шаг 4 (условие выбора – сортировка по убыванию)	Определение обобщенной оценки ППС $K^{ППС}(K_1, K_2, K_3)$ по итогам выполнения первых трех шагов и составление рейтинга ППС			Определение обобщенной оценки студентов $K^{СТУД}(K_1, K_2, K_3)$ по итогам выполнения первых трех шагов и составление рейтинга студентов		
Шаг 5	Определение общего размера вознаграждений $C_i^{ППС}$			Определение общего размера вознаграждений $C_i^{СТУД}$		

Нужно подчеркнуть, что с каждым шагом число стимулируемых преподавателей/студентов «сужается» и должно удовлетворять условиям P_1 :

$$(15) \quad m_{ППС}^{M1} \subseteq m_{ППС}^H \subseteq N; \quad m_{ППС}^{M2} \subseteq m_{ППС}^H \subseteq N \quad (\text{для ППС});$$

$$(16) \quad m_{СТУД}^{M1} \subseteq m_{СТУД}^H \subseteq Q; \quad m_{СТУД}^{M2} \subseteq m_{СТУД}^H \subseteq Q \quad (\text{для студентов}),$$

где N – общее число преподавателей; Q – общее число студентов; $m_{ППС}^{M1}$ ($m_{ППС}^{M2}$) и $m_{ППС}^H$ – число выбранных преподавателей соответственно для материального и нематериального стимулирования; $m_{СТУД}^{M1}$ ($m_{СТУД}^{M2}$) и $m_{СТУД}^H$ – число выбранных студентов соответственно для материального и нематериального стимулирования.

3.3. ВЫБОР ВИДА ФУНКЦИИ СТИМУЛИРОВАНИЯ И ИХ ПАРАМЕТРОВ

На практике существуют четыре основных вида ТПС: компенсаторная, линейная, аккордная (ранговая) и бригадная. В

¹ Значения $m_{ППС}^H$ для ППС и значения $m_{СТУД}^H$ задаются экспертным путем.

монографии [13] подробно описан анализ и сравнительная эффективность этих систем. По результатам этого исследования эффективность компенсаторной системы стимулирования является самой высокой. Эффективность остальных же систем сравнительно одинаковая и зависит от конкретных обстоятельств.

В качестве СС в настоящей модели были использованы две системы стимулирования (СС): *квазикомпенсаторная система* (система *КК-типа*) и *унифицированная нормативная ранговая система* (*УНРСС*). Чем был обоснован этот выбор?

Выбор ККСС на первом этапе стимулирования обоснован, во-первых, тем, что именно этот вид стимулирования считается наиболее эффективным. Во-вторых, первый этап (нематериальное стимулирование) является самым важным и определяющим этапом системы.

Выбор УНРСС был сделан на основе двух причин. Во-первых, руководством вуза на основании стандарта ОСОКО принята определенная норма рангов для оценки научной деятельности ППС. Во-вторых, в [14] для стимулирования новаторского (творческого) труда была выбрана система рангов; в ней утверждается, что именно она позволяет «увязать» оплату труда и логику бизнеса и идеально подходит различным организациям, обеспечивая требуемую прозрачность, а также широко апробирована в западных организациях.

Подробно объясним, как организуется применение этих систем. На первом шаге используется *ККСС* (для нематериального стимулирования), на втором – *УНРСС* (для материального стимулирования). Материальное стимулирование представляет надбавку к окладу (премия, повышение в должности), нематериальное – грамоты, награды и почетные звания. Преподаватели/студенты, качественно выполнившие основной или учебный план количественно (проведение/посещение занятий и выполнение заданий в составе учебного плана, включающие практические, лабораторные задания), получают нематериальное вознаграждение, и, соответственно, за хорошо выполненную

вспомогательную (творческую работу) преподаватели /студенты получают материальное вознаграждение.

Объясним, каким образом были выбраны параметры функции стимулирования.

Выбор весовых коэффициентов a_1 , a_2 и a_3 зависит от руководства вуза. Варьируя эти коэффициенты можно влиять на качество управления ОС. В МКТУ приняты следующие нормы весов: $a_1 = a_2 = a_3 = 0,3333$ (равноценная оценка).

К основным параметрам относятся параметры P_1, P_2, P_3 . Эти параметры определяют условия выбора преподавателей/студентов для соответствующих критериев стимулирования. Параметр P_1 является переменным числом, и зависит от количества выбранных преподавателей/студентов для нематериального стимулирования и фиксированной нематериальной составляющей фонда стимулирования. Остальные параметры (P_2 и P_3) имеют постоянные значения. Эти параметры были определены по результатам статистической обработки данных вуза за 2011 год по требованию стандарта НСОКО, заключающегося в определении рейтинга всех вузов Казахстана, учитывающем ключевые факторы деятельности вуза. Исходя из этих сведений, параметры имеют следующие значения: $P_2 = 8$; $P_3 = 3$.

Например, МКТУ заняло пятое место среди многопрофильных вузов Казахстана (комплексная оценка по всем критериям) по результатам этого рейтинга в 2011 году. Надеемся, что после внедрения настоящей системы МКТУ поднимется еще выше!

НЕМАТЕРИАЛЬНОЕ СТИМУЛИРОВАНИЕ.

Шаг 1: определение $C_{\text{ППС}}^{\text{H}}$ и $C_{\text{студ}}^{\text{H}}$ для преподавателей/студентов соответственно (педагогический критерий K_1).

По данным результатов исследований [8, 10] эффективной СС за индивидуальные результаты является система *КК-типа*, основанная на компенсации затрат агента, в данном случае преподавателя/студента. Принцип компенсации затрат является достаточным условием реализации требуемого действия:

$$(17) \sigma_{kk}(x, y) = \begin{cases} \sigma(x), y = x, \\ 0, y \neq x; \end{cases}$$

где x – план (задан из центра), постоянное число; y – выполнение (действие агента), случайное число.

Например, в производственных отношениях определение этого значения не вызывает особых проблем, так как показатель объема производства – количественная оценка.

Показатель вуза определяется не только количеством выпущенных студентов, но и их полученным качественным знанием. Именно *качественная оценка* считается важной характеристикой вуза.

Сложность определения точного значения качества образования в вузе – в неадекватной оценке работы вуза, которая проявляется в техническом аспекте, т. е. в *отсутствии автоматизации* управления вуза.

Также, ввиду многих случайных факторов (праздники, болезни ППС и т.д.) точное выполнение плана маловероятно, поэтому, целесообразно внести некоторое изменение в выражение (17), которое заключается в замене величины несоответствия ее дисперсией:

$$(18) z(x, y) = D(x, y)$$

– функция дисперсии несоответствия плана x и выполнения y ;

$$(19) z^*(x, y) = \arg \min_z \{z(x, y)\}$$

– показатель оптимального плана для центра, т.е. минимального (допустимого) отклонения.

$$(20) \sigma_{kk}(z) = \begin{cases} C, z = z^*, \\ 0, z \neq z^*. \end{cases}$$

Здесь C – величина стимулирования (надбавка к окладу). В модели используются два вида стимулирования: нематериальное и материальное.

Подробно опишем порядок выполнения расчета выражения (18). Для этого следует определить групповую дисперсию [13]:

$$(21) D_{i\text{гр}}(y, \bar{y}) = \sum n_k (y_k - \bar{y}_k)^2 / N_i,$$

где n_k – частота значений y_k ; i – номер группы; \bar{y}_k – среднее значение группы i ; $k = 1, 2, \dots, 10$ – уровни качества; $N_i = \sum n_k$ – число студентов в группе i ; $N = \sum N_i$ – число преподавателей.

Следует подчеркнуть, что выражение (21) в настоящей модели авторами было преобразовано в следующее:

$$(22) D_{i_{гр}}(y, x) = \sum_{k=1}^{10} n_{ki}(y_{ki} - x) / N_i.$$

Содержательно значение $D_{i_{гр}}$ в (22) представляет собой дисперсию отклонения случайной величины (выполнения) y_k от **плана** x , а не дисперсию отклонения случайной величины от среднего значения \bar{y}_k , как принято. Итак, вместо значения \bar{y}_k в (22) было подставлено фиксированное значение плана x . Далее по итогам анализа действий преподавателей/студентов система определяет те объекты, которые минимально отклонились от плана (19).

Опишем выражения (18)–(19) с учетом двух показателей (успеваемости и посещаемости):

$$z^{ппс}(x_i, y_i) = D(x_i^{ппс}, y_i^{ппс}) = z^{ппс}(x_i(x_j^{пос}, x_j^{усп}), y_i(y_j^{пос}, y_j^{усп}))$$

– функция качества урока (дисперсия отклонения от плана) i -го преподавателя, $i = \overline{1, N}$;

$$z_j^{ппс*} = \arg \min_{D_j(x_i^{ппс}, y_i^{ппс})} \{z^{ппс}(x_i(x_j^{пос}, x_j^{усп}), y_i(y_j^{пос}, y_j^{усп}))\}$$

– подмножество выбора преподавателей для нематериального стимулирования.

Функция качества урока зависит $z^{ппс}(x_i, y_i)$ от двух аргументов: от агрегированной оценки выполнения y i -го преподавателя $y_i(y_j^{пос}, y_j^{усп})$ и от агрегированной оценки плана

i -го преподавателя¹ $x_i(x_j^{ПОР}, x_j^{УСП})$. Расчет этой функции производится по методике из [23].

Далее, по известным агрегированным оценкам плана и выполнения определяется дисперсия отклонения от плана у i -го преподавателя (в ее основе лежит выражение (20)):

$$(23) z^{ППС}(x_i, y_i) = \sum_{p=1}^{pp} \left(\sum_{q=1}^{qp} n_{qp}^{(i)} (y_{qp}^{(i)} - x_p^{(i)}) / N_p^{(i)} \right);$$

$$q = \overline{1, qp}; \quad p = \overline{1, pp}.$$

Следует подчеркнуть, что по учебному плану у каждого ППС имеются qp студентов и pp предметов, по которым он ведет занятие. Значения отклонений $z^{ППС}(x_i, y_i)$ по всем pp предметам у i -го преподавателя складываются (21), затем нормируются коэффициентом нормировки по количеству предметов:

$$(24) z^{ППС}(x_i, y_i) \times \frac{1}{pp}.$$

Функция качества урока для студентов определяется аналогично, как у ППС:

$$(25) z^{СТУД}(x_i, y_i) = D(x_i^{СТУД}, y_i^{СТУД}) = z^{СТУД}(x_i(x_j^{ПОР}, x_j^{УСП}), y_i(y_j^{ПОР}, y_j^{УСП}))$$

– функция качества урока у i -го студента, $i = \overline{1, Q}$

$$(26) z_j^{СТУД*} = \arg \min_{D_j(x_i^{СТУД}, y_i^{СТУД})} \{z^{СТУД}(x_i(x_j^{ПОР}, x_j^{УСП}), y_i(y_j^{ПОР}, y_j^{УСП}))\}$$

– функция минимизации дисперсии (качества) у j -го студента,

$$j = \overline{1, m_{СТУД}^H}.$$

Процедура агрегирования оценок для студентов выполняется аналогично (см. таблицу 5).

В явном виде функция качества урока для студентов вычисляется следующим образом:

¹ План по успеваемости по специальным предметам должен быть выше, чем по сервисным предметам.

$$(27) z^{\text{СТУД}}(x_i, y_i) = \sum_{p=1}^{ps} n_{p_i} (y_{p_i} - x_{p_i}) / N_i; p = \overline{1, ps},$$

где ps – номер предмета.

Опишем условия выбора преподавателя. На шаге 0 (см. таблицу 4), когда не производилось стимулирование, общее число участвующих в конкурсе агентов было N преподавателей и Q студентов, и все N агентов принадлежали множеству $\Omega_1^{\text{ППС}}$, т. е. $\forall z_i^{\text{ППС}} \in \Omega_1^{\text{ППС}}$. Далее, на шаге 1 – при нематериальном стимулировании их число уже сократилось, т. е. $\forall z_j^{\text{ППС}} \in \Omega_2^{\text{ППС}}$ (причем $\Omega_2^{\text{ППС}} \in \Omega_1^{\text{ППС}}$). Дальше, при материальном стимулировании число стимулируемых также будет сокращаться, причем два раза: при выборе критерия K_2 (шаг 2) и при выборе критерия K_3 (шаг 3). И в конце процесса, на шаге 4, находится обобщенная оценка преподавателей/студентов и по этим оценкам составляется их рейтинг.

$$(28) P_1 \rightarrow I_1(m_{\text{ППС}}^{\text{Н}}) = \begin{cases} 1, z_i^{\text{ППС}} \in \Omega_2^{\text{ППС}}, & (\text{условие } P_1 \text{ для ППС}); \\ 0, z_i^{\text{ППС}} \notin \Omega_2^{\text{ППС}}; \end{cases}$$

$$(29) P_1 \rightarrow I_1(m_{\text{СТУД}}^{\text{Н}}) = \begin{cases} 1, z_i^{\text{СТУД}} \in \Omega_2^{\text{СТУД}}, & (\text{условие } P_1 \text{ для студен-} \\ 0, z_i^{\text{СТУД}} \notin \Omega_2^{\text{СТУД}}; \end{cases}$$

тов).

Число выбранных преподавателей для нематериального стимулирования равно $m_{\text{ППС}}^{\text{Н}}$, число выбранных студентов – $m_{\text{СТУД}}^{\text{Н}}$. Результаты обработки записываются в таблицу, содержащую следующие значения:

- $z^{\text{СТУД}}(x_i, y_i)$ (дисперсия отклонения от плана);
- $K(K_1, 0, 0)$ (оценка по критерию K_1);
- I_1 (функция выбора по условию P_1);
- $m_{\text{ППС}}^{\text{Н}}$ (число выбранных преподавателей по условию P_1).

Определение оценки у ППС по критерию K_1 :

$$(30) K^{\text{ППС}}(K_1, 0, 0) = \frac{1}{z^{\text{ППС}}(x_i, y_i)} \quad (\text{для ППС}).$$

$$(31) K^{\text{СТУД}}(K_1, 0, 0) = \frac{1}{z^{\text{СТУД}}(x_i, y_i)} \quad (\text{для студентов}).$$

Опишем смысл ранговых систем, широко используемых на практике [13, 14]. Их преимуществом является то, что центру необязательно знать все действия агента/агентов, а достаточно знать только критерий (диапазон) принадлежности агента/агентов. Для реализации материального стимулирования в работе используется унифицированная нормативная ранговая система стимулирования (УНРСС), в которой величина вознаграждения определяется принадлежностью показателя его работы наперед заданному множеству – нормативу.

МАТЕРИАЛЬНОЕ СТИМУЛИРОВАНИЕ

Шаг 2: определение $C_{\text{ППС}}^{\text{M1}}$ и $C_{\text{СТУД}}^{\text{M1}}$ для ППС/студентов соответственно (критерий по методической работе K_2).

Задается множество показателей урока (см. таблицу 2). Пусть имеется команда экспертов в составе m человек. Они должны дать оценку проведенного занятия для $m_{\text{ППС}}^{\text{H}}$ преподавателей, отобранных на предыдущем этапе.

$$(32) B_1 = (\sum_{l=1}^m b_{1l}) / m, B_2 = (\sum_{l=1}^m b_{2l}) / m, \dots, B_8 = (\sum_{l=1}^m b_{8l}) / m$$

– средний балл экспертов по h -му критерию;

$$(33) B_{\text{метод}}^{\text{ППС}} = \frac{B_1 + B_2 + \dots + B_8}{8}$$

– общая оценка экспертов за урок у ППС.

$B_{\text{метод}}^{\text{ППС}} = B_{27}$ – оценка экспертов за урок у студента, здесь учитывается только критерий K_{27} . Во время оценки экспертов одновременно выявляются оценки студентов по уровню знаний и применению их на практике (внутренний критерий K_{27}).

Условие выбора преподавателей/студентов для материального стимулирования P_2 определяется следующим образом:

$$(34) P_2 \rightarrow I_2(P) = \begin{cases} 1, & B_{\text{метод}}^{\text{ППС}} \geq P, \\ 0, & B_{\text{метод}}^{\text{ППС}} < P; \end{cases} \quad (\text{условие } P_2 \text{ для ППС});$$

$$(35) P_2 \rightarrow I_2(P) = \begin{cases} 1, & B_{\text{метод}}^{\text{СТУД}} \geq P, \\ 0, & B_{\text{метод}}^{\text{СТУД}} < P; \end{cases} \quad (\text{условие } P_2 \text{ для студентов}),$$

где P_2 – функция – индикатор, зависящий от величины «порога» P (задается экспертами). По содержанию это означает, что только те преподаватели/студенты имеют право на материальное вознаграждение $C_{\text{ППС}}^{\text{МИ}}$ и $C_{\text{СТУД}}^{\text{МИ}}$ соответственно, у кого был набран балл выше указанного «порога». Величина вознаграждения $C_{\text{ППС}}^{\text{МИ}}$ ($C_{\text{СТУД}}^{\text{МИ}}$) является одинаковой для всех преподавателей (и одинаковой для всех студентов), подлежащих стимулированию по методическому критерию.

Как было сказано выше, показатель качества работы $K(K_1, K_2, K_3)$ имеет 10-балльную шкалу оценок (см. таблицу 1). Перевод балла по методической работе $B_{\text{метод}}$ в этот показатель качества по критерию K_2 производится по таблице 8 (состоит из 10 рангов¹). Далее, результаты обработки данных для ППС записываются в таблицу 9. Для студентов выполняется аналогично.

Таблица 8. Перевод балла $B_{\text{метод}}$ преподавателей/студентов в оценку по критерию K_2

Балл по методической работе $B_{\text{метод}}$	Оценка по критерию $K(0, K_2, 0)$	Качественная оценка
0–1 баллов	1	Плохо
1–2 баллов	2	Плохо
2–3 баллов	3	Удовлетворительно
3–4 баллов	4	Удовлетворительно
4–5 баллов	5	Удовлетворительно
5–6 баллов	6	Хорошо

¹ Ранжирование оценок производится аналогично системе рангов $\Gamma_3 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ (см. шаг 3 настоящего раздела) с той разницей, что в первом случае – размерность $B_{\text{метод}}$ находится в диапазоне $[0 \div 10]$, в то время как во втором $B_{\text{твор}}$ находится в диапазоне $[0 \div 100]$.

Балл по методической работе $V_{\text{метод}}$	Оценка по критерию $K(0, K_2, 0)$	Качественная оценка
6–7 баллов	7	Хорошо
7–8 баллов	8	Хорошо
8–9 баллов	9	Отлично
9–10 баллов	10	Отлично

Таблица 9. Оценка ППС по критерию K_2

№ ППС	Балл по методической работе $V_{\text{метод}}^{\text{ППС}}$	Обобщенная оценка $K(0, K_2, 0)$ по критерию K_2	Функция выбора I_2	Выбор $t_{\text{ППС}}^{\text{M1}}$ преподавателей по условию P_2	Величина вознаграждения ¹ $C_{\text{ППС}}^{\text{M1}}$
...

Шаг 3: определение $C_{\text{ППС}}^{\text{M2}}$ и $C_{\text{студ}}^{\text{M2}}$ для преподавателей / студентов соответственно (критерий по творческой работе K_3).

Задаются следующие системы множеств:

- множество планов работ для ППС (8 рангов, см. таблицу 3) и для студентов (5 рангов, см. таблицу 4);
- множество показателей стимулирования ППС (10 рангов) и студентов (10 рангов) (см. таблицу 8).

Таблица 10. Перевод балла $V_{\text{твор}}$ преподавателей/студентов в оценку по критерию K_3 и в величину материального вознаграждения²

¹ Величина вознаграждения $C_{\text{ППС}}^{\text{M1}}$ у всех ППС одинаковая. У студентов аналогично.

² Система перевода баллов творческой работы ППС/студентов утверждена Учебно-методическим советом МКТУ им. А. Ясауи

Нижняя граница	Верхняя граница	Ранг (Балл по критерию K_3)	Материальное вознаграждение для ППС	Материальное вознаграждение для студентов
0	10	1	$C_{ППС_1}^{M2}$	$C_{СТУД_1}^{M2}$
10	20	2	$C_{ППС_2}^{M2}$	$C_{СТУД_2}^{M2}$
21	30	3	$C_{ППС_3}^{M2}$	$C_{СТУД_3}^{M2}$
31	40	4	$C_{ППС_4}^{M2}$	$C_{СТУД_4}^{M2}$
41	50	5	$C_{ППС_5}^{M2}$	$C_{СТУД_5}^{M2}$
51	60	6	$C_{ППС_6}^{M2}$	$C_{СТУД_6}^{M2}$
61	70	7	$C_{ППС_7}^{M2}$	$C_{СТУД_7}^{M2}$
71	80	8	$C_{ППС_8}^{M2}$	$C_{СТУД_8}^{M2}$
81	90	9	$C_{ППС_9}^{M2}$	$C_{СТУД_9}^{M2}$
90	100 и выше	10	$C_{ППС_{10}}^{M2}$	$C_{СТУД_{10}}^{M2}$

Таблица 11. Список выполненных творческих работ у ППС (на примере одного преподавателя)

№	Творческая работа (r_k)
1	Доклад по теме «Внутренняя система качества образования в вузе» на Международной научно-методической конференции «Инновационное обучение физике, математике и информатике: актуальные вопросы и перспективы», г. Шымкент, 2010 г.
2	Доклад по теме «Корпоративная сеть вуза» на Международной конференции «Роль и значение телекоммуникации и информационных технологий в современном обществе», г. Ташкент, 2010 г.
3	Системы оценки качеством образования // Учебное пособие, г. Астана, 2010 г. Министерство Образования Республики Казахстан

№	Творческая работа (r_k)
4	Сертификат о завершении научной стажировки в ИПУ РАН, Договор №184 от 17.09.2009 г. Программы Болашак, г. Астана
5	Статья на тему «Особенности разработки АСУ вуза» в научном журнале «Поиск», г. Алматы, 2011

Таблица 12. Принадлежность выполненных работ определенному рангу из множества плана работ (результат выполнения шага 3.1) (на примере одного преподавателя)

№	Творческая работа (r_k)	Ранг (k)	Число (n_k)	Балл (b_k)
1	Доклад по теме «Внутренняя система качества образования в вузе» на Международной научно-методической конференции «Инновационное обучение физике, математике и информатике: актуальные вопросы и перспективы», г. Шымкент, 2010 г.	3	3 работы по 3-му рангу	5
2	Доклад по теме «Корпоративная сеть вуза» на Международной конференции «Роль и значение телекоммуникации и информационных технологий в современном обществе», г. Ташкент, 2010 г.	3		5
3	Статья на тему «Особенности разработки АСУ вуза» в научном журнале «Поиск», г. Алматы, 2011 г.	3		5
4	Системы оценки	4	1 работа	10

№	Творческая работа (r_k)	Ранг (k)	Число (n_k)	Балл (b_k)
	качеством образования // Учебное пособие, г. Астана, 2010 г. Министерство Образования Республики Казахстан		по 4-му рангу	
5	Сертификат о завершении научной стажировки в ИПУ РАН, Договор № 184 от 17.09.2009 Программы Болашак, г. Астана	5	1 работа по 5-му рангу	15
Общий балл ($B_{\text{твор}}^{\text{ППС}}$)		40		

Алгоритм определения состоит из двух внутренних шагов:

Определение принадлежности выполненных работ преподавателей/студентов определенному рангу из множества плана работ, который включает выбор вектора принадлежности $T(k)$, вычисление числа работ для каждого ранга $n(k)$ и определение общего балла выполнения творческой работы $B_{\text{твор}}^{\text{ППС}}$ и $B_{\text{твор}}^{\text{СТУД}}$ соответственно.

Результаты обработки записываются в таблицу 13.

Определение принадлежности уже известного общего балла выполнения $B_{\text{твор}}^{\text{ППС}}$ и $B_{\text{твор}}^{\text{СТУД}}$ соответственно определенному рангу из множества показателей стимулирования, которое включает определение балла по критерию K_3 и величины стимулирования $C_{\text{ППС}}^{\text{M2}}$ и $C_{\text{СТУД}}^{\text{M2}}$ соответственно. Результаты обработки записываются в таблицу 15.

Шаг 3.1.

Введем обозначения:

$\Gamma_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ – множество возможных рангов для работ для ППС (см. таблицу 3);

$\Gamma_2 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ – множество возможных рангов для работ для студентов (см. таблицу 4);

$\{b^{ППС}_k\}, k = \overline{1,8}$, – совокупность неотрицательных чисел, соответствующих баллам ППС за «попадание» в различные ранги;

$\{b^{СТУД}_k\}, k = \overline{1,5}$, – совокупность неотрицательных чисел, соответствующих баллам студентов за «попадание» в различные ранги;

$\{y_k^{ППС^{M^2}}\} \rightarrow \Gamma_1$ – функция выполнения (действий) творческой работы ППС по k -му рангу (для студентов соответственно $\{y_k^{СТУД^{M^2}}\} \rightarrow \Gamma_2$;

$\{n_k\}$ – число работ по рангу k .

Модель УНРСС задается в виде кортежа:

$\{\Gamma_1, \{y_k^{ППС^{M^2}}\}, \{n_k\}, \{b^{ППС}_k\}\}$ – для ППС,

$\{\Gamma_2, \{y_k^{СТУД^{M^2}}\}, \{n_k\}, \{b^{СТУД}_k\}\}$ – для студентов.

Размерность шкалы показателей (рангов) работы для ППС равно 8, для студентов – 5.

Введем вектор $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_8)$ такой, что $0 \leq Y_1 \leq Y_2 \leq \dots \leq Y_8$, который определяет некоторое разбиение множества действий ППС. Для студентов введем вектор $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_5)$ такой, что $0 \leq Y_1 \leq Y_2 \leq \dots \leq Y_5$. Балл по критерию K_3 для преподавателей/студентов соответственно определяется выражением:

$$(36) B_{\text{твор}}^{ППС}(y_k^{ППС^{M^2}}, n_k, b_k^{ППС}) = \sum_{k=1}^8 n_k b_k^{ППС} T(k); \quad y_k^{ППС^{M^2}} \in [Y_{k-1}, Y_k],$$

$$(37) B_{\text{твор}}^{СТУД}(y_k^{СТУД^{M^2}}, n_k, b_k^{СТУД}) = \sum_{k=1}^5 n_k b_k^{СТУД} T(k); \quad y_k^{СТУД^{M^2}} \in [Y_{k-1}, Y_k],$$

$$T(k) = \begin{cases} 1, & k \in Y_k \\ 0, & k \notin Y_k \end{cases} \text{ – функция-индикатор,}$$

$$Y_0 = 0; \quad b^{ППС}_0 = 0 \text{ (для ППС);}$$

$$Y_0 = 0; \quad b^{СТУД}_0 = 0 \text{ (для студентов).}$$

Результаты обработки данных для ППС записываются в следующую таблицу:

Таблица 13. Оценка ППС по критерию K_3 (результат выполнения шага 3.2)

№ППС	Балл по творческой работе $B_{твор}^{ППС}$	Обобщенная оценка $K(0, 0, K_3)$ по критерию K_3	Функция выбора I_3	Выбор преподавателей по условию P_3 $m_{ППС}^{M2}$	Величина вознаграждения $C_{ППС}^{M2}$
...

Шаг 3.2.

Введем обозначения:

$i = \{1, 2, \dots, m_{ППС}^{M2}\}$ – множество преподавателей/студентов для стимулирования с соответствующим баллом $B_{твор}^{ППС}$ и $B_{твор}^{СТУД}$ соответственно (для студентов $i = \{1, 2, \dots, m_{СТУД}^{M2}\}$);

$\Gamma_3 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ – множество возможных рангов для преподавателей/студентов (см. таблицу 10);

$\{C_{ППС}^{M2_j}\}, j = \overline{1, m_{ППС}^{M2}}$ – совокупность $m_{ППС}^{M2}$ неотрицательных чисел, соответствующих вознаграждениям за «попадание» в различные ранги (для студентов $\{C_{СТУД}^{M2_j}\}$);

$\{x_{ППС}^{M2_j}\}$ – функция плана по творческой работе (для студентов $\{x_{СТУД}^{M2_j}\}$);

$\{y_{ППС}^{M2_j}\} \rightarrow \Gamma_3$ – функция выполнения (действий) научной работы у i -го преподавателя; $i = \overline{1, m_{ППС}^{M2}}$ (для студентов $\{y_{СТУД}^{M2_j}\}; i = \overline{1, m_{СТУД}^{M2}}$).

Модель УНРСС для ППС задается в виде кортежа

$\{\Gamma_3, \{m_{ППС}^{M2}\}, \{x_{ППС}^{M2_j}\}, \{y_{ППС}^{M2_j}\}\}$ – для ППС,

$\{\Gamma_3, \{m_{СТУД}^{M2}\}, \{x_{СТУД}^{M2_j}\}, \{y_{СТУД}^{M2_j}\}\}$ – для студентов.

Размерность УНРСС (число рангов) здесь и для ППС и для студентов равно 10.

Введем вектор $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_{m_{\text{ППС}}})$ такой, что $0 \leq Y_1 \leq Y_2 \leq \dots \leq Y_{m_{\text{ППС}}} < +\infty$, который определяет некоторое разбиение множества действий ППС. Балл по критерию K_3 для преподавателей/студентов определяется как:

$$(38) K(0, 0, K_3) = B_{\text{твор}}^{\text{ППС}} T(\cdot); \quad y_{\text{ППС}}^{M2_i} \in [Y_j, Y_{j+1}) \text{ (для ППС);}$$

$$(39) K(0, 0, K_3) = B_{\text{твор}}^{\text{СТУД}} T(\cdot); \quad y_{\text{СТУД}}^{M2_i} \in [Y_j, Y_{j+1}) \text{ (для студентов).}$$

Вознаграждение для преподавателей/студентов определяется выражением:

$$(40) \sigma_i(y_{\text{ППС}}^{M2_j}(B_{\text{твор}}^{\text{ППС}}), C_{\text{ППС}}^{M2_j}) = C_{\text{ППС}}^{M2_j} T(\cdot), \quad y_{\text{ППС}}^{M2_i} \in [Y_j, Y_{j+1}) \text{ (для ППС),}$$

$$(41) \sigma_i(y_{\text{СТУД}}^{M2_j}(B_{\text{твор}}^{\text{СТУД}}), C_{\text{СТУД}}^{M2_j}) = C_{\text{СТУД}}^{M2_j} T(\cdot),$$

$$y_{\text{СТУД}}^{M2_i} \in [Y_j, Y_{j+1}) \text{ (для студентов),}$$

где $T(\cdot)$ – функция-индикатор,

$$(42) T(\cdot) = \begin{cases} 1, & B_{\text{твор}}^{\text{ППС}} \in Y_j, \\ 0, & B_{\text{твор}}^{\text{ППС}} \notin Y_j; \end{cases} \text{ (для ППС);}$$

$$(43) T(\cdot) = \begin{cases} 1, & B_{\text{твор}}^{\text{СТУД}} \in Y_j, \\ 0, & B_{\text{твор}}^{\text{СТУД}} \notin Y_j; \end{cases} \text{ (для студентов).}$$

$$T(\cdot) = \begin{cases} 1, & B_{\text{твор}}^{\text{ППС}} \in Y_j, \\ 0, & B_{\text{твор}}^{\text{ППС}} \notin Y_j; \end{cases} \text{ Здесь } Y_0 = 0, \quad C_{\text{ППС}}^{M2_0} = 0 \text{ (для ППС) и}$$

$$Y_0 = 0, \quad C_{\text{СТУД}}^{M2_0} = 0 \text{ (для студентов).}$$

Условие выбора преподавателя/студентов для материального стимулирования P_3 определяется следующим образом:

$$(44) P_3 \rightarrow I_3(P) = \begin{cases} 1, & B_{\text{метод}}^{\text{ППС}} \geq P, \\ 0, & B_{\text{метод}}^{\text{ППС}} < P; \end{cases} \text{ (для ППС);}$$

$$(45) P_3 \rightarrow I_3(P) = \begin{cases} 1, & B_{\text{метод}}^{\text{СТУД}} \geq P, \\ 0, & B_{\text{метод}}^{\text{СТУД}} < P; \end{cases} \text{ (для студентов).}$$

где P_3 – функция – индикатор, зависящий от величины «порога» P (задается экспертами). По содержанию это означает, что

только те преподаватели/студенты имеют право на материальное вознаграждение $C_{\text{ППС}}^{\text{M2}}$ и $C_{\text{СТУД}}^{\text{M2}}$ соответственно, у кого был набран балл выше указанного «порога».

Обобщенная оценка определяется следующим образом:

$$(46) Z_i^{\text{ППС}} = a_1 * I_1 * K^{\text{ППС}}(K_1, 0, 0) + a_2 * I_2 * K^{\text{ППС}}(0, K_2, 0) + a_2 * I_2 * K^{\text{ППС}}(0, K_2, 0) + a_3 * I_3 * K^{\text{ППС}}(0, 0, K_3) \quad (\text{для ППС});$$

$$(47) Z_i^{\text{СТУД}} = a_1 * I_1 * K^{\text{СТУД}}(K_1, 0, 0) + a_2 * I_2 * K^{\text{СТУД}}(0, K_2, 0) + a_2 * I_2 * K^{\text{СТУД}}(0, K_2, 0) + a_3 * I_3 * K^{\text{СТУД}}(0, 0, K_3)$$

(для студентов).

Результаты обработки записываются в следующую таблицу:

Таблица 14. Итоговая таблица качества работы ППС (Оценка по обобщенному критерию $K(K_1, K_2, K_3)$)

№ ППС	$K(K_1, K_2, K_3)$			$I(I_1, I_2, I_3)$			$Z(A, I, K)$
	K_1	K_2	K_3	I_1	I_2	I_3	
...

Шаг 5: Определение размеров вознаграждений c_i .

Теперь определим размеры вознаграждений для преподавателей/студентов. Они зависят от результатов деятельности агентов (от полученных оценок z) и должны удовлетворять соответствующим финансовым ограничениям (см. таблицу 15).

Для студентов размеры вознаграждений определяются аналогично.

Определим величину вознаграждения для ППС, в зависимости от ранга r :

$$(48) C_{\text{ППС}}^{r, \text{M1}} = \alpha_r c_i^{\text{ППС}(2)},$$

где α_r – вес ранга по творческой работе. В МКТУ приняты следующие нормы: $\alpha_1 = 0,05$; $\alpha_2 = 0,1$; $\alpha_3 = 0,05$; $\alpha_4 = 0,2$; $\alpha_5 = 0,12$; $\alpha_6 = 0,16$; $\alpha_7 = 0,14$ и $\alpha_8 = 0,18$ $\left(\sum_{r=1}^8 \alpha_r = 1 \right)$.

Общий размер вознаграждения (премии) у i -го преподавателя/студента образуется в результате объединения вознаграждений по трем составляющим:

$$(49) c_i^{\text{ппс}} = c_i^{\text{ппс}(1)} + c_i^{\text{ппс}(2)} + c_i^{\text{ппс}(3)};$$

$$(50) c_i^{\text{студ}} = c_i^{\text{студ}(1)} + c_i^{\text{студ}(2)} + c_i^{\text{студ}(3)}.$$

Таблица 15. Размеры вознаграждений ППС

Виды стимулирования	Выбранная система (функция) стимулирования	Вознаграждение
Нематериальное	Компенсаторная $\pi_{\text{ППС}_j}^{(1)}(z^{\text{ППС}}(K_1), c_i^{\text{ППС}(1)})$	$c_i^{\text{ппс}(1)} = \frac{C_{\text{ППС}}^{\text{H}}}{m_{\text{ППС}}^{\text{H}}}$
Материальное 1	Ранговая ¹ $\pi_{\text{ППС}_j}^{(2)}(z^{\text{ППС}}(K_2), c_i^{\text{ППС}(2)})$	$c_i^{\text{ппс}(2)} = \frac{C_{\text{ППС}}^{\text{M1}}}{m_{\text{ППС}}^{\text{M1}}}$
Материальное 2	Ранговая $\pi_{\text{ППС}_j}^{(3)}(z^{\text{ППС}}(K_3), c_i^{\text{ППС}(3)})$	$c_i^{\text{ппс}(3)} = \frac{C_{\text{ППС}}^{\text{M2}}}{m_{\text{ППС}}^{\text{M2}}}$
Общий фонд стимулирования для ППС	$C_{\text{ППС}} = C_{\text{ППС}}^{\text{H}} + C_{\text{ППС}}^{\text{M1}} + C_{\text{ППС}}^{\text{M2}}$	

4. Описание алгоритма системы

1) Выбор преподавателей/студентов для нематериального стимулирования² (шаг 1, см. таблицу 4):

1.1. Задание выполненных баллов по успеваемости и посещаемости:

$$- y_i(y^{\text{пос}}, y^{\text{усп}}) \text{ для ППС};$$

¹ Ранговая система для этого вида стимулирования, как было указано выше, имеет только 2 ранга (выполнившие план получают вознаграждение ($r = 1$), невыполнившие – нет ($r = 0$)).

² Для реализации нематериального стимулирования в модели используется квазикомпенсаторная СС (ККСС).

– $y_i(y^{\text{ПОС}}, y^{\text{УСП}})$ для студентов.

1.2. Определение агрегированной оценки y_i для преподавателя/студентов по схеме из [23].

1.3. Определение дисперсии отклонения от плана:

– $z^{\text{ППС}}(x_i, y_i)$ для ППС по (23) и нормировка по (24);

– $z^{\text{СТУД}}(x_i, y_i)$ для студентов по (27).

1.4. Определение оценки $K(K_1, 0, 0)$ по критерию K_1 :

– $K^{\text{ППС}}(K_1, 0, 0)$ по (30);

– $K^{\text{СТУД}}(K_1, 0, 0)$ по (31).

1.5. Выбор преподавателей/студентов, подлежащих стимулированию:

– $m_{\text{ППС}}^{\text{Н}}$ из N по условию P_1 по (28);

– $m_{\text{СТУД}}^{\text{Н}}$ из Q по условию P_1 по (29).

1.6. Запись результатов обработки.

2) Выбор преподавателей/студентов для материального стимулирования¹:

2.1. Материальное стимулирование ППС по методическому критерию (шаг 2, см. таблицу 4).

2.1.1. Экспертная оценка проведения урока $m_{\text{ППС}}^{\text{Н}}$ преподавателей.

2.1.2. Определение балла по методической работе:

– $B_{\text{метод}}^{\text{ППС}}$ для ППС по (32)–(33);

– $B_{\text{метод}}^{\text{СТУД}}$ для студентов по (34).

2.1.3. Определение оценки $K(0, K_2, 0)$ по критерию K_2 (см. таблицу 8).

2.1.4. Выбор преподавателей/студентов, подлежащих стимулированию:

– $m_{\text{ППС}}^{\text{М1}}$ из $m_{\text{ППС}}^{\text{Н}}$ по условию P_2 по (34);

– $m_{\text{СТУД}}^{\text{М1}}$ из $m_{\text{СТУД}}^{\text{Н}}$ по условию P_2 по (35).

¹ Для реализации материального стимулирования в модели используется унифицированная нормативная ранговая СС (УНРСС).

2.2. Материальное стимулирование ППС по творческому критерию (шаг 3, см. таблицу 4).

2.2.1. Задание плана работ для ППС (8 рангов) по таблице 3 и для студентов (5 рангов) по таблице 4.

2.2.2. Задание списка выполненных работ у преподавателей/студентов (см. примерную таблицу 11).

2.2.3. Задание показателей стимулирования преподавателей/студентов по таблице 12.

2.2.4. Определение балла по творческой работе:

– $B_{\text{метод}}^{\text{ППС}}$ для ППС по (36);

– $B_{\text{метод}}^{\text{СТУД}}$ для студентов по (37).

2.2.5. Определение принадлежности преподавателя/студента определенному рангу по таблице 12.

2.2.6. Определение оценки $K(0, 0, K_3)$ по критерию K_3 по баллу из таблицы 11:

– $K^{\text{ППС}}(0, 0, K_3)$ для ППС по (28);

– $K^{\text{СТУД}}(0, 0, K_3)$ для студентов по (29).

2.2.7. Выбор преподавателей/студентов, подлежащих стимулированию:

– $m_{\text{ППС}}^{\text{М2}}$ из $m_{\text{ППС}}^{\text{Н}}$ по условию P_3 по (34);

– $m_{\text{СТУД}}^{\text{М2}}$ из $m_{\text{СТУД}}^{\text{Н}}$ по условию P_3 по (35).

2.2.8. Определение величины вознаграждения:

– $C_{\text{ППС}}^{\text{М2}}$ для ППС по (38);

– $C_{\text{ППС}}^{\text{М2}}$ для студентов по (39).

2.2.9. Запись результатов обработки в таблицу 13, для студентов – аналогично.

3) Определение обобщенной оценки $Z(K)$ по обобщенному критерию $K(K_1, K_2, K_3)$ (шаг 4, см. таблицу 4).

3.1. Объединение результатов таблиц 9, 13 для ППС в итоговую таблицу 14, для студентов – аналогично.

3.2. Определение обобщенной оценки $Z(K)$:

– $Z_i^{\text{ППС}}$ по (46) для ППС,

– $Z_i^{\text{СТУД}}$ по (47) для студентов.

3.3. Сортировка по убыванию обобщенных оценок для всех преподавателей и студентов соответственно (получение общего рейтинга ППС и студентов соответственно).

4) Определение общего размера вознаграждения (шаг 5, см. таблицу 15).

4.1. Определение общего размера вознаграждения:

- $c_i^{\text{ППС}}$ по (49) для ППС,
- $c_i^{\text{студ}}$ по (50) для студентов.

5. Описание результатов внедрения системы

Для оценки достоверности системы используется методика расчета из программы «Педагогическая статистика», разработанной в ИПУ РАН и доступной по адресу <http://www.mtas.ru/uploads/stat.zip> [12].

Для оценки достоверности общей системы следует проверить достоверность оценок по каждому критерию (K_1 , K_2 и K_3).

В педагогике иногда t -критерий Стьюдента заменяют более простым критерием Крамера–Уэлча. Следует заметить, что эмпирическое значение критерия Крамера–Уэлча есть приближенное значение эмпирического значения t -критерия Стьюдента [12]. Исходя из этого, для оценки всех трех критериев используется критерий Крамера–Уэлча (T -критерий).

Для оценки достоверности системы стимулирования воспользуемся результатами внедрения настоящей системы в учебный процесс вуза. Для этого проведем педагогический эксперимент в равных по уровню знаний группах АБА-911 (экспериментальной) и АБА-915 (контрольной) по предмету «Системы управления базой данных» в период с 02.02.2011 г. по 30.04.2011 г. Результаты эксперимента (результаты наблюдений до и после внедрения системы) приведены в таблицах 16–18.

В таблице 16 отражены агрегированные данные об успеваемости и посещаемости (критерий K_1), в таблице 17 – баллы по методической работе (критерий K_2), в таблице 18 – баллы по

творческой работе (критерий K_3) у студентов двух групп соответственно.

Таблица 16. Проверка системы по критерию K_1

Контрольная группа		Экспериментальная группа	
До начала эксперимента	После окончания эксперимента	До начала эксперимента	После окончания эксперимента
9	9	9	10
8	8	10	10
8	9	8	8
8	8	8	9
8	9	8	8
9	8	9	9
9	9	8	9
9	9	8	9
9	8	8	10
8	8	9	9
		8	9
		9	10

Таблица 17. Проверка системы по критерию K_2

Контрольная группа		Экспериментальная группа	
До начала эксперимента	После окончания эксперимента	До начала эксперимента	После окончания эксперимента
8,2	7,4	8	8,3
8,4	7,8	8,2	8,8
8	8,6	8	8,7
8,2	8	9	9
8	8,3	8,4	9
8,6	8,4	8,4	8,8
7,3	8,8	8	8,5
8,2	8,8	8,7	8,5

Таблица 18. Проверка системы по критерию K_3

Контрольная группа		Экспериментальная группа	
До начала эксперимента	После окончания эксперимента	До начала эксперимента	После окончания эксперимента
4	3	2	3

Контрольная группа		Экспериментальная группа	
До начала эксперимента	После окончания эксперимента	До начала эксперимента	После окончания эксперимента
8	4	8	8
5	5	5	5
0	0	0	10
0	0	0	15
0	0	0	20
0	0	0	0
0	0	0	0

По итогам проверки критериев получены следующие результаты:

– по критерию K_1 :

эмпирическое значение критерия Крамера–Уэлча ($T_{\text{эсп}}$) равно 0, критическое значение ($T_{\text{кр}}$) равно 1,96, что дает право утверждать о том, что характеристики контрольной группы до начала эксперимента совпадают на уровне значимости 0,05 с характеристиками контрольной группы после эксперимента. Такой же вывод можно сделать и относительно экспериментальной группы до начала эксперимента, так как $T_{\text{эсп}} = 0$; $T_{\text{кр}} = 1,96$;

эмпирическое значение критерия Крамера–Уэлча равно 2,5071, критическое значение равно 1,96; что дает право утверждать о том, что достоверность различий характеристики экспериментальной группы после эксперимента составляет 95% по сравнению с характеристиками контрольной группы до и после эксперимента. Такой же вывод можно сделать относительно контрольной группы после эксперимента, так как $T_{\text{эсп}} = 2,3452$; $T_{\text{кр}} = 1,96$;

– по критерию K_2 :

эмпирическое значение критерия Крамера–Уэлча равно 0,6747, критическое значение равно 1,96; что дает право утверждать о том, что характеристики контрольной группы до начала эксперимента совпадают на уровне значимости 0,05 с характеристиками контрольной группы после эксперимента. Такой же

вывод можно сделать и относительно экспериментальной группы до начала эксперимента, так как $T_{\text{эксп}} = 1,2004$; $T_{\text{кр}} = 1,96$;

эмпирическое значение критерия Крамера–Уэлча равно 3,6277, критическое значение равно 1,96; что дает право утверждать о том, что достоверность различий характеристики экспериментальной группы после эксперимента составляет 95% по сравнению с характеристиками контрольной группы до эксперимента. Такой же вывод можно сделать относительно контрольной группы после эксперимента, так как $T_{\text{эксп}} = 2,218$; $T_{\text{кр}} = 1,96$; и также относительно экспериментальной группы до начала эксперимента, так как $T_{\text{эксп}} = 2,3103$; $T_{\text{кр}} = 1,96$;

– по критерию K_3 :

эмпирическое значение критерия Крамера–Уэлча равно 0,4657, критическое значение равно 1,96; что дает право утверждать о том, что характеристики контрольной группы до начала эксперимента совпадают на уровне значимости 0,05 с характеристиками контрольной группы после эксперимента. Такой же вывод можно сделать и относительно экспериментальной группы до начала эксперимента, так как $T_{\text{эксп}} = 0,1618$; $T_{\text{кр}} = 1,96$;

эмпирическое значение критерия Крамера–Уэлча равно 1,9924, критическое значение равно 1,96; что дает право утверждать о том, что достоверность различий характеристики экспериментальной группы после эксперимента составляет 95% по сравнению с характеристиками контрольной группы до эксперимента. Такой же вывод можно сделать относительно контрольной группы после эксперимента, так как $T_{\text{эксп}} = 2,3213$; $T_{\text{кр}} = 1,96$, а также относительно экспериментальной группы до начала эксперимента, так как $T_{\text{эксп}} = 2,0928$; $T_{\text{кр}} = 1,96$.

Итак, начальные состояния (до начала эксперимента) экспериментальной и контрольных групп совпадают, а конечные (после эксперимента) – различаются. Следовательно, можно сделать вывод, что положительный эффект изменений обусловлен применением настоящей методики управления качеством образования в вузе (посредством механизмов нематериального и материального стимулирования преподавателей и студентов).

6. Заключение

Рассмотренная в работе модель управления качеством образования имеет следующие особенности:

кибернетический подход к решению проблемы;

многокритериальная оптимизация в управлении качеством образования;

использование эффективной системы стимулирования ППС, на основе сочетания индивидуальной системы компенсаторного типа и унифицированной ранговой системы стимулирования;

использование новых ИТ-технологий (DM), которые дают возможность быстрого сбора и обработки данных, а также позволяют выполнять всесторонний и многомерный анализ состояния системы;

применение прозрачной системы управления, не позволяющей появлению негативных явлений (приписки, ложные отчеты, и т.д.) и обеспечивающей принцип открытого управления [1, 11, 15]; все это дает возможность обеспечения открытого доступа к информации центру, любому сотруднику вуза и студенту;

рейтинговая система оценки качества работы преподавателей/студентов позволяет произвести их ранжирование по обобщенному критерию, рассмотренному в работе системы.

Разработка АСУ для принятия решений вуза является сложной технической задачей. Следует сказать, что составные подзадачи этого проекта были подробно рассмотрены в следующих трудах автора и его научного руководителя:

вопросы проектирования АСУ в [20, 24];

вопросы технического обеспечения в [19, 20];

вопросы информационного обеспечения в [20, 23];

вопросы программного обеспечения в [23];

вопросы стимулирования студентов (педагогический аспект, внутренняя модель) в [22];

вопросы производительности и обслуживания в [18];

вопросы реализации АСУ в [19, 21].

Приведенная в работе комплексная оценка критериев в достаточной степени адекватно отражает состояние образовательной системы. Для повышения точности анализа можно добавлять другие критерии, учитывающие также и другие стороны социально-экономического, педагогического (методологического), технического характера. Тогда задача будет иметь более сложную постановку, но современные технические средства и информационные технологии позволяют реализовать такие решения. При этом повышается стоимость разработки системы.

Необходимо подчеркнуть, настоящая система используется в учебной работе ряда вузов Казахстана и защищена авторским правом [21]. В результате использования настоящей системы производительности труда сотрудников повысилась на 28%. Исходя из этого, авторами рекомендуется внедрить настоящую систему в другие вузы Казахстана.

Литература

1. БУРКОВ В.Н. и др. *Механизмы управления (Умное управление)*. – М.: Ленанд, 2011.
2. ВЕРЕЦАГИН Ю.Ф., ЕРУНОВ В.П. *Рейтинговая система оценки знаний студентов, деятельности преподавателей и подразделений вуза* : учеб. пособие. – Оренбург: ОГУ, 2003. – 105 с.
3. ГВОЗДЕВА В.А., ЛАВРЕНТЬЕВА И.Ю. *Основы построения автоматизированных информационных систем*. – М.: ИД «Форум», Инфра, 2009. – 320 с.
4. *Государственная программа развития образования Республики Казахстан на 2011-2020 годы* [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.edu.gov.kz/ru/zakonodatelstvo/gosudarstvennaja_programma_razvitija_obrazovanija/.
5. *Декларация о формировании Единого экономического пространства Республики Беларусь, Республики Казахстан и Российской Федерации* [Электронный ресурс]. – Режим

- доступа: <http://www.fas.gov.ru/international-partnership/common-economic-space/documents/>.
6. ДМИТРИЕВА О.В. *Построение системы стимулирования сотрудников вуза на основе достигнутых результатов* [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://giab-online.ru/catalog/934>.
 7. ЕРЕМЕНКО Г.О. *ПРНД или особенности оценки национальной науки*. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://archive.ipgg.nsc.ru/>.
 8. ЗАЛОЖНЕВ Д.А, НОВИКОВ Д.А. *Модели систем оплаты труда*. – М.: ПМСОФТ, 2009. – 192 с.
 9. *Концепция стратегического развития Республики Казахстан «Казахстан – 2030»* [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://ndp-nurotan.kz/new/documents/>.
 10. НОВИКОВ Д.А. *Теория управления организационными системами* : учеб. для вузов. – М.: Физматгиз, 2007. – 584 с.
 11. НОВИКОВ Д.А. *Теория управления образовательными системами*: учебно-методическое пособие. – М.: Народное образование, 2009. – 452 с.
 12. НОВИКОВ Д.А. *Статистические методы в педагогических исследованиях (типовые случаи)*: учебно-методическое пособие. – М.: МЗ-Пресс, 2004. – 67 с.
 13. «Об образовании»: *Закон Республики Казахстан от 27 июля 2007 года*. №319-III, Астана, 2007.
 14. СПИВАК А.В. *Стимулирование новаторского труда в инновационной организации*: Автореф. дис. канд. эк. наук. – Санкт-Петербург, 2010. – 19 с.
 15. *Обеспечение и оценка качества высшего образования* // Электронный журнал «Высшее образование в России». – 2004. – №2. – С. 12–28.
 16. *Сборник приказов, должностных инструкций и учебно-методических документов Международного Казахско-турецкого университета им. А. Ясауи* / Межд. казахско-тур. ун-т; Туркестан: Изд-во МКТУ, 2005. – 347 с.
 17. *Стратегический план развития Международного Казахско-турецкого университета им. А. Ясауи на 2009–*

- 2013 г. / Межд. казахско-тур. ун-т; Туркестан: Изд-во МКТУ, 2010. – 150 с.
18. ТУКУБАЕВ З.Б., УМАРОВ А.А. *Оптимизация распределения ресурсов и скорости обработки данных (на примере Международного казахско-турецкого Университета им. А. Ясауи)* // «Вычислительные сети, теория и практика»: электронный журнал, ВС/NW 2010. – №1(16). – URL: <http://network-journal.mpei.ac.ru/cgi-bin/>.
 19. ТУКУБАЕВ З.Б., УМАРОВ А.А. *Корпоративная сеть вуза* // Вычислительные сети, теория и практика: электронный журнал, ВС/NW 2010. – №2(17). –URL: <http://network-journal.mpei.ac.ru/cgi-bin/>.
 20. УМАРОВ А.А. *Проектирование информационной системы управления вузом* // Сб. трудов I Международной научно-практической конференции «Современные тенденции в экономике и управлении: новый взгляд». – Новосибирск, 2010. – С. 142–158.
 21. УМАРОВ А., УМАРОВ А.А., ТУКУБАЕВ З.Б. *Внутренняя оценка качества образования в вузе на основе рейтинга ИПС/студентов (программа для ЭВМ – база данных)* // Авт. свидетельство Республики Казахстан № 0007766. – 2012. – Бюл. №018.
 22. УМАРОВ А.А., КАДЫРБАЕВА Г.П. *Методика оценки успеваемости студентов в вузе* // Межд. казахско-тур. ун-т; Туркестан: Вестник МКТУ им. А. Ясауи. – 2011. – №1. – С. 168–171.
 23. УМАРОВ А.А., КАДЫРБАЕВА Г.П. *Модель управления образовательной деятельностью вуза* // Сб. трудов Респ. научно-методической конференции ЕНУ им. Л.Н.Гумилева «Повышение квалификации профессорско-преподавательского состава в рамках реализации Президентской международной программы «Болашақ»: опыт методической работы». – Астана, 2011. – С. 172–182.
 24. УМАРОВ А.А., ТУКУБАЕВ З.Б. *Системный анализ деятельности МКТУ им. А. Ясауи как объекта управления и ее*

комплексная автоматизация // Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук. – 2010. – №4. – С. 31–48.

MODEL OF EDUCATION QUALITY MANAGEMENT IN HIGH SCHOOL

Zukurhan Tukubayev, International Kazakh-turkish University, Kazakhstan, Turkistan, Doctor of science, (ibrahim19899@mail.ru).

Amantur Umarov, International Kazakh-turkish University, Kazakhstan, Turkistan (unix77@yandex.ru).

Abstract: The problem is considered of higher education quality increase in the context of Kazakhstan universities. We suggest an approach based on an incentive scheme for employees of a university. The article is intended for education management personnel.

Keywords: management information system, education quality management, multi-criteria problem, complex assessment, academic staff incentive scheme.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии М. В. Губко

УДК 519.81

ББК 22.18

УПРАВЛЕНИЕ БИЗНЕС-ПРОЦЕССАМИ НА ОСНОВЕ ИХ МОДЕЛИРОВАНИЯ НЕЧЕТКИМИ СИТУАЦИОННЫМИ СЕТЯМИ¹

Астанин С. В.²

(ФГОУ ВПО «Таганрогский государственный педагогический институт имени А.П.Чехова», Таганрог)

Жуковская Н. К.³

*(НОУ ВПО «Российский Новый университет»,
Таганрогский филиал, Таганрог)*

Рассмотрен подход к моделированию бизнес-процессов и проектов в условиях неопределенности. Предложены подходы к построению нечеткой ситуационной сети как модели возможных стратегий реализации бизнес-процесса (проекта), а также процедуры анализа данных стратегий.

Ключевые слова: ситуационное моделирование, нечеткие ситуационные сети, нечеткая аналогия, анализ стратегий.

1. Введение

В настоящее время выделяют два подхода к управлению современными организациями: процессный и проектный. Как правило, считается, что процессный подход хорош для организаций с уже сложившимися (регулярными) бизнес-процессами, и которые возможно описать последовательностью выполняе-

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №12-01-00766-а).

² Сергей Васильевич Астанин, доктор технических наук, профессор (astser@mail.ru).

³ Наталья Константиновна Жуковская, кандидат технических наук, доцент (nasha-0207yandex.ru).

мых функций определенными исполнителями. Проектный подход более подходит для предприятий, которые выполняют неповторяющиеся заказы, контракты или услуги. Вместе с тем для ряда организаций характерно применение проектно-процессного подхода, что может определяться как неопределенностью внутрифирменных механизмов управления отдельных служб (например, ИТ-подразделений), так и неопределенностью внешней среды (увеличение ассортимента товаров или услуг в условиях конкуренции как инновационного проекта). В этих случаях можно рассматривать бизнес-процесс как решение задачи различными способами, в зависимости от сложившейся ситуации и использовать ситуационное моделирование бизнес-процесса, течение которого во времени может меняться в зависимости от возможных факторов (объема ресурсов, управляющих воздействий, внешней среды и т.п.) определенного уровня управления предприятия. Фактически речь идет об оптимизации реинжиниринга бизнес-процесса на основе построения его ситуационной модели в условиях неопределенности и риска. Согласно концепции реинжиниринга М. Хаммера деятельность предприятия представляет собой процесс, который совершает фирма из начального состояния (заказ) в целевое состояние (продукт), минуя ряд промежуточных состояний [7]. Для описания такой деятельности используются как методологии графических описаний бизнес-процессов (*IDEF0*, *IDEF3*, *BPMN*), так и формальные подходы, основанные на применении графов, гиперграфов и метаграфов [4, 8]. В отличие от этих подходов, в настоящей работе в качестве инструмента ситуационного моделирования предлагаются методы построения нечетких ситуационных сетей (НСС), анализа синтезированных бизнес-процессов как путей из начального состояния в целевое состояние, а также идентификации состояний. Первая группа методов позволяет синтезировать НСС, как многомерный граф, особенность которого состоит в том, что каждая его вершина может быть сконструирована по типу матрешки: самая большая матрешка является гиперребром, охватывающим некоторую графовую структуру. В свою очередь любая вершина этой структуры может являться

гиперребром внутренней структуры и т.д. В частности метаграф, на основе иерархического графа, может являться моделью вершины исходной НСС. При таком описании каждая вершина НСС определяет состояние бизнес-процесса, а структура состояния – ситуацию бизнес-процесса. В НСС вершины связаны дугами, маркированными управляющими решениями и, возможно, весами, определяющими возможность или риск перехода из одного состояния в другое состояние. Вторая группа методов может представлять и классические подходы к анализу графов, в зависимости от поставленной задачи (например, поиск кратчайшего или поиск наименее рискованного пути).

Задача идентификации состояний НСС является нетривиальной задачей определения изоморфизма нечетких графов.

2. Формализованное описание бизнес-процесса

В соответствии со стандартом *SADT* в каждый контролируемый момент времени бизнес-процесс представим схемой, изображенной на рис. 1. В таком представлении бизнес-процесс, по сути, является черным ящиком, преобразующим ресурс в готовое изделие при ограничениях, вносимых управляющими воздействиями и владельцем (механизмом реализации) процесса.

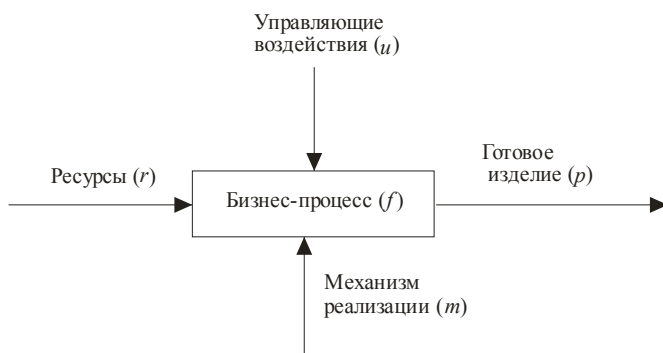


Рис. 1. Представление бизнес-процесса в стандарте *SADT*

Для определенных процессов функция (задача) f элементарна и поэтому нет необходимости вникать в «устройство» черного ящика, а переход к последующим функциям бизнес-процесса также не вызывает затруднений. Для неопределенных бизнес-процессов и проектов в лучшем случае удастся описать целевую и исходную составляющие, а для построения промежуточных составляющих необходимо знать механизм преобразования ресурсов в готовое изделие.

Реально подобный механизм можно (или целесообразнее) описать приближенно, используя процедуры нечеткой логики и теории графов. Так, неопределенный бизнес-процесс или проект в некоторый момент времени t представим следующим образом (рис. 2).

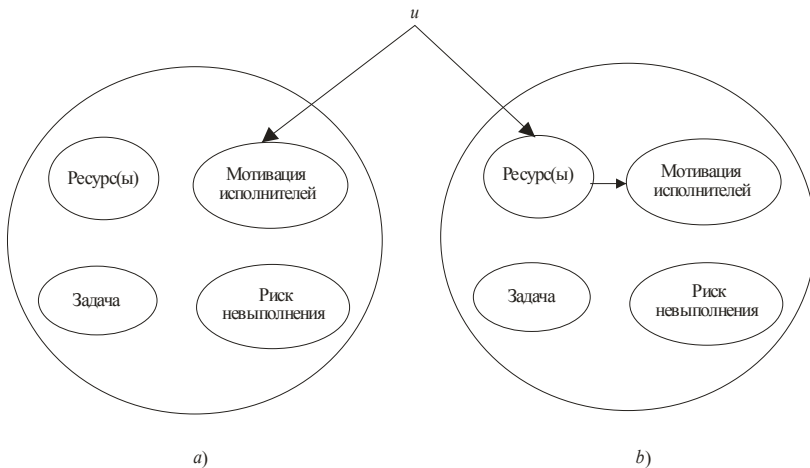


Рис. 2. Текущий неопределенный бизнес-процесс или проект в момент времени t : а) – независимые составляющие; б) – зависимые составляющие)

В отличие от рис. 1 здесь ресурсы не являются неким полуфабрикатом, из которого, посредством управляющих воздействий, механизм реализации получает готовое изделие. Здесь и ресурсы, и готовое изделие входят в понятие «задача», которая в каждый момент времени может иметь разное состояние. В ис-

ходном описании состояние задачи как раз и будет соответствовать состоянию ресурса в виде полуфабриката, а в целевом описании состояние задачи представляет готовый продукт. Соответственно, под ресурсами подразумеваются средства (финансы, кадры, материалы, оборудование), необходимые и достаточные для решения задачи. Использование других составляющих бизнес-процесса (проекта) определяется точностью его описания. В частности под мотивацией персонала имеется в виду текущая мотивация механизма реализации m . При описании управляющих воздействий предлагается использовать два типа: внешние и внутренние управления. Внешние управления воздействуют на конкретную составляющую бизнес-процесса (проекта), изменяя его состояние. Внутренние управления характерны для бизнес-процессов с взаимосвязанными составляющими: изменение состояния одной из них может повлечь изменение состояний других составляющих.

Например, руководство решило купить готовый проект вместо запланированной реализации проекта силами некоторого отдела (рис. 2, *b*). Использование других составляющих бизнес-процесса (проекта) определяется точностью его описания. В частности под мотивацией персонала имеется в виду текущая мотивация механизма реализации m . Решение о покупке является внешним управлением, воздействующим на составляющую «ресурс» и изменяющим его уровень с высокого на низкий. В свою очередь полное использование ресурсов означает окончательное решение задачи, т.е. изменение уровня ее решения с низкого на высокий. В то же время такое управление, связанное с отсутствием стимулирования собственных сотрудников, отрицательно скажется на их мотивации.

При таком представлении достаточно описать исходные (хорошо известные) и возможные целевые (планируемые) состояния бизнес-процессов (проектов), а также возможные внешние и внутренние управления. Процесс моделирования будет заключаться в переходе одного состояния бизнес-процесса в другое состояние под влиянием управляющих воздействий, причем возможно наличие как нескольких исходных, так и

нескольких целевых состояний бизнес-процесса, а также множества путей из исходных состояний в целевые состояния.

Формально опишем текущее состояние S бизнес-процесса с зависимыми составляющими следующим образом:

$$(1) \quad S = (Y, U, N, M, \mu_S(y_i)),$$

где – $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ – множество лингвистических переменных (составляющих) бизнес-процесса, причем $y_i = \{T_i^1, T_i^2, \dots\}$, $i = 1, 2, \dots, n$;

– $\{T_i^1, T_i^2, \dots\}$ – терм-множество нечетких переменных, определяющих значения (свойства) лингвистических переменных;

– $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ – внешние управляющие воздействия;

– $N = \{N(u_j) = T_i \times T_j\}$, $j = 1, 2, \dots, m$, – матрицы изменений значений лингвистических переменных под воздействием управления u_j ;

– $M_{i,k} = \{(T_i^1, T_i^2, \dots) \times T_k^1, T_k^2, \dots\}$ – матрицы взаимодействия значений лингвистических переменных, $i, k = 1, 2, \dots, n$, $i \neq k$;

– $\mu_S(y_i)/y_i = \{\langle \mu_S(T_i) \rangle / T_i\}$ – нечеткая ситуация бизнес-процесса с функциями принадлежности нечетких значений лингвистических переменных.

3. Ситуационная сеть как модель бизнес-процесса (проекта)

Пусть $S_1 = \{S_n, S_2, \dots, S_p = S_n\}$ – совокупность состояний бизнес-процесса, причем S_1 – начальное состояние, а S_p – целевое состояние. Имея начальные и целевые описания состояний бизнес-процесса в виде (1) достаточно применить к начальным состояниям различные комбинации управляющих воздействий U , чтобы получить промежуточные состояния S_2, S_3, \dots . В свою очередь, воздействуя на промежуточные состояния можно получить новые состояния до тех пор, пока получим (или не получим) целевое состояние. В целом процесс перехода из одного состояния в другое удобно представить в виде ориентированного графа $G = (S, V)$, где $S = \{S_1, S_2, \dots, S_p\}$ – множество вершин, $V = \{V_1, V_2, \dots, V_l\}$ – множество дуг (комбинаций управляющих

воздействий). В связи с тем, что $S_h = (Y, \mu_S(y_i), M_{i,k})$, $h = 1, 2, \dots, p$, в каждый момент времени t описывается нечеткой структурой (графом) $S_h = (Y, \mu_S(y_i)/y_i, e)$, где Y – множество нечетких вершин с функциями принадлежности $\mu_S(y_i)/y_i$; e – множество ориентированных ребер, то граф G называется нечеткой ситуационной сетью (НСС), которая определяет переход от одной нечеткой ситуации $\mu_S(y_i)/y_i$ к другой $\mu_S(y_r)/y_r$ [5].

Для большого числа состояний построение ситуационной сети посредством декларативного описания трудоемко. В этой связи целесообразно применение процедурного подхода на основе имеющихся состояний и управляющих воздействий. Процедурный подход основан на прямом и обратном методах синтеза НСС, состояния которых определяются зависимыми составляющими [1], в отличие от методов, предложенных в [5], где состояния описываются независимыми признаками. Суть прямого метода заключается в следующем. Пусть начальные состояния составляют первый уровень ситуационной сети. Применяя к ним различные комбинации управляющих воздействий, получим состояния второго уровня и т.д., до тех пор, пока новых состояний не возникает. Обратный метод заключается в попытке построения связей, т.е. комбинаций управляющих воздействий, между состояниями различных уровней, полученных при использовании прямого метода.

Формально прямой метод реализуется следующим образом. Для простоты будем считать известными одно начальное состояние S_1 и одно управляющее воздействие u_1 . Нечеткая ситуация, связанная с S_1 , имеет вид:

$$\mu_{S_1} = (\mu(T_1^l), \mu(T_2^r), \dots).$$

Тогда нечеткая ситуация μ_{S_2} второго уровня ситуационной сети образуется посредством применения операции «композиция» к составляющим, входящих в описание состояния S_1 , т. е.

$$(2) \quad \mu_{S_2} = (\mu_{S_1} \circ N_{1,1}) \cup (\mu_{S_1} \circ N_{1,1} \circ M_{1,2}) \cup \\ \cup (\mu_{S_1} \circ N_{1,1} \circ M_{1,3}) \cup \dots = (\mu(T_1^v), \mu(T_2^w), \mu(T_3^d), \dots)'$$

где « \circ » – операция максиминной композиции.

Для определения структуры состояния S_2 , т.е. определения дуг e , используются нечеткие матрицы $M_{i,k}$, или для нашего случая матрицы $M_{1,2}, M_{1,3}, \dots, M_{2,1}, M_{2,3}, \dots, M_{3,1}, M_{3,2}, \dots$.

Обратный метод основан на анализе отношений взаимозависимости значений признаков состояний, сформированных прямым методом и заданных в виде нечетких матриц $M_S(Y, Y)$ с $\mu_S(T_i^g, T_k^q) > 0,5$. Матрицы строятся следующим образом. Среди элементов терм-множеств каждого признака выбираются элементы с функциями принадлежности, большими 0,5. Данные элементы и составляют значения строк и столбцов матриц $M_S(Y, Y)$. На пересечении строк и столбцов в соответствие матрицам N и $M_{i,k}$ ставятся функции принадлежности $\mu_S(T_i^g, T_k^q) > 0,5$. Смысл построенных матриц заключается в том, что применение управляющего воздействия u_i к i -му признаку конкретного состояния может изменить значения других признаков с возможностью, определяемой функцией $\mu_S(T_i^g, T_k^q)$. Другими словами, чем больше функций $\mu_S(T_i^g, T_k^q) > 0,5$ находится на пересечении i -й строки с k -ми столбцами, тем большее число признаков может одновременно изменить управляющее воздействие u_i .

Пусть необходимо определить возможное управляющее воздействие, переводящее состояние S_3 в состояние S_2 при известных матрицах $M_{S_3}(T_i^l, T_k^r)$ и $M_{S_2}(T_i^v, T_k^w)$. В матрице $M_{S_2}(T_i^v, T_k^w)$ найдем такую строку i , в которой находится наибольшее число элементов $\mu_{S_2}(T_i^v, T_k^w)$, отличных от нуля. Среди множества управляющих воздействий применим воздействие u к i -му признаку состояния S_3 , предполагая изменение этого признака на значение, соответствующее значению i -го признака состояния S_2 , т.е. $\mu_{S_2}(T_i^v) = \mu_{S_3}(T_i^r) \circ N_{i,i}$, где $\mu_{S_2}(T_i^v)$ – часть нечеткой ситуации состояния S_2 , связанная с описанием i -го признака. Если u действительно изменяет значение i -го признака состояния S_3 на значение i -го признака состояния S_2 , то в соответствии с (2) определяются остальные

части нечеткой ситуации состояния S_2 , связанные с определением оставшихся значений признаков. Если в результате (2) получена ситуация, значения признаков которой полностью совпадают со значениями признаков состояния S_2 , то задача решена, т.е. сформировано управляющее воздействие u , переводящее состояние S_3 в состояние S_2 . Если u изменяет значение i -го признака состояния S_3 на значение i -го признака состояния S_2 , но при этом, на основании матриц $M_{i,k}$, i -й признак не влияет на k -е признаки, то в матрице $M_{S_2}(T_i^v, T_k^w)$ среди оставшихся строк находится строка h , в которой находится наибольшее число элементов $\mu_{S_2}(T_h^v, T_k^w)$, отличных от нуля. Далее выбирается управляющее воздействие u_h и доопределяется нечеткая ситуация μ_{S_2} , в соответствии с (2). Вышеописанная процедура повторяется до тех пор, пока задача не будет решена, т.е. до формирования управляющего решения $\langle u_i, u_h, \dots \rangle$, преобразующего состояние S_3 в состояние S_2 .

Если в результате (2) получена ситуация, значения признаков которой не совпадают со значениями признаков состояния S_2 , то выбор управляющего воздействия u_i оказался неудачным. В этом случае в матрице $M_{S_2}(T_i^v, T_k^w)$ среди оставшихся строк находится строка h , в которой находится наибольшее число элементов $\mu_{S_2}(T_h^v, T_k^w)$, отличных от нуля. Далее выбирается управляющее воздействие u_h и повторяется процедура определения нечеткой ситуации μ_{S_2} в соответствии с (2) до формирования комбинации управляющих воздействий, преобразующих состояние S_3 в состояние S_2 .

Описанный подход повторяется до тех пор, пока не найдется решение задачи. При этом в последнюю очередь осуществляется выбор строк матрицы $M_{S_2}(T_i^v, T_k^w)$ с функциями принадлежности равными нулю. Если же при анализе матрицы оказалось несколько строк с равным числом элементов, отличных от нуля, то среди них выбирается любое.

Если использование процедуры обратного метода не приводит к решению, то это означает отсутствие связи между состояниями НСС.

Рассмотренный подход позволяет синтезировать НСС при наличии исходного множества известных состояний и различных комбинаций из набора управляющих воздействий, но не отвечает на вопрос: существует ли в сформированном множестве состояний НСС целевое состояние? Для ответа на этот вопрос необходимо использовать некоторую процедуру сравнения имеющегося описания целевого состояния бизнес-процесса с состояниями НСС – кандидатами на роль целевого состояния.

Выбор меры сравнения зависит от особенностей моделируемого бизнес-процесса (проекта): в одних случаях взаимосвязь составляющих целевого состояния бизнес-процесса не важна, в других случаях структура составляющих целевого состояния является определяющей для его идентификации.

Если составляющие целевого состояния независимы, то в качестве меры для определения степени близости состояния $S_h \in S$ целевому состоянию $S_{ц}$ могут использоваться степень нечеткого включения нечеткой ситуации в нечеткую ситуацию $\mu_{S_{ц}}$ и степень нечеткого равенства $\mu_{S_{ц}}$ и μ_{S_h} [5].

Более сложные процедуры сопоставления состояний применяются при учете структур составляющих состояний бизнес-процесса, в особенности наличия значительного их количества. В этом случае речь идет о сравнении двух нечетких графов $s_h = (Y_h, \mu_{S_h}(y_i)/y_i, e_h)$ и $s_{ц} = (Y_{ц}, \mu_{S_{ц}}(y_i)/y_i, e_{ц})$. В теории графов для сравнения неориентированных графов используется понятие изоморфизма. В случае если понятие изоморфизма применяется к ориентированным или взвешенным графам, накладываются дополнительные ограничения на сохранение ориентации дуг и значений весов. В математике изоморфизм уточняет более широкое понятие «аналогия» и определяет отношение между абстрактными объектами, выражающее тождество их структуры. Однако НСС является моделью конкретного, пусть и неопределенного, бизнес-процесса, состояния которого представляют конкретные объекты. С другой стороны, состояния

НСС – кандидаты на роль целевого состояния построены на основе приложения выбранных управляющих воздействий к исходным в данный момент времени, и предшествующим состояниям. Из-за неполноты знаний описание целевого состояния может быть сформировано на основе общих представлений о результате бизнес-процесса, без привязки к имеющимся условиям (исходным состояниям и управляющим воздействиям). Иными словами, такое целевое состояние в действительности может быть исходом других управлений, воздействующие на другие, возможно и близкие, исходные состояния. В этой связи, использования структурного изоморфизма, связанного с установлением взаимного соответствия элементов структур графов s_h и $s_{ц}$, недостаточно. Процедура сопоставления должна учитывать эти факты и «уметь» сопоставлять состояния, подобные с точки зрения отображаемых функций, результатов, отношений и т.п. В таком смысле близким к сопоставлению понятием является понятие аналогии, используемое в биологии для установления сходства каких-либо структур, не имеющих общего происхождения. Действительно, происхождение состояний НСС – кандидатов на роль целевого состояния может быть иным, чем происхождение целевого состояния, но более важно то, что все они дают одинаковый результат или позволяют выполнять одинаковые функции.

В этой связи в качестве процедуры сравнения графов s_h и $s_{ц}$ воспользуемся механизмом установления структурно-содержательной аналогии между нечеткими графами [2]. Исходными понятиями структурно-содержательной аналогии являются понятия формы и содержания моделируемого объекта. Признаки, черты или свойства объекта, характеризующие его единичное (частное) проявление, называются внутренним содержанием объекта. Внутреннее содержание структурно организовано, т.е. имеется способ взаимосвязи признаков, который выступает внутренней формой объекта и определяет общее проявление объекта. Кроме внутреннего содержания и внутренней формы объект может обладать внешним содержанием, т.е. совокупностью свойств (структурно организованных или нет), характеризующих внутреннюю форму объекта. Таким образом,

моделируемый объект определяется внутренним содержанием (частное проявление объекта), внутренней формой (общее проявление частного) и внешним содержанием как характеристикой внутренней формы.

Метод нахождения аналогии между объектами основан на выделении базовых множеств внутренних форм объектов и определении сходства между базовыми множествами [2]. Пусть $s_h = (Y_h, e_h)$ – граф внутренней формы состояния S_h ; $y_i \in Y_h$, $i \in I = \{1, \dots, n\}$ – множество вершин; $e_j \in e_h$, $j \in J = \{1, \dots, m\}$ – множество помеченных ребер.

Множество ребер $\{e_j/y_k\} \in e_h$ графа s_h , инцидентных вершинам $y_i \in Y_1 \subset Y$, называется базовым множеством, если в результате их удаления происходит разрушение структуры состояния S_h , т.е. по крайней мере любые две не смежные вершины оказываются не связанными.

Графы $s_h = (Y_h, e_h)$ и $s_u = (Y_u, e_u)$ с базовыми множествами $\{e_{s_h}/y_k\} \subset Y_1$ и $\{e_{s_u}/y_p\} \subset Y_2$ называются сходными, если для всех $y_k \in Y_1, y_p \in Y_2$ выполняется одно из следующих условий:

$$(\{e_{s_h}/y_k\} \subseteq \{e_{s_u}/y_p\}) \vee (\{e_{s_u}/y_p\} \subseteq \{e_{s_h}/y_k\});$$

$$(\{e_{s_h}/y_k\} \subseteq \{e_{s_u}/y_p\}) \& (\{e_{s_u}/y_p\} \subseteq \{e_{s_h}/y_k\}),$$

Рассмотрим два подхода к выделению базовых множеств внутренних форм состояний. Во-первых, внутреннюю форму любого состояния S можно описать слабо связным ориентированным нечетким графом $s = (Y, e, met)$, где Y – конечное множество вершин (термов); $e = \{\mu_e(y_i, y_l)/(y_i, y_l)\}$, $(y_i, y_l) \in e$ – нечеткое множество дуг с функцией принадлежности $\mu_e(y_i, y_l)$, определяющей степень истинности отношения вершин y_i и y_l ; $met: e \rightarrow Q$ – функция, сопоставляющая каждой дуге графа метку $q \in Q$. Модель состояния описывается в виде тройки (s, W^*, λ) , где s – внутренняя форма состояния; W^* – множество оценок (свойств), определяющих внешнее содержание объекта; $\lambda: Y \rightarrow W^*$ – соответствие между множеством вершин графа и внешним содержанием состояния.

Согласно [2] выделение базовых множеств внутренних форм объектов осуществляется следующим образом. Для каждой вершины $y_i \in Y$ необходимо определить нечеткий образ $\Gamma(y_i) = \{\mu(e)/y_r\}$, где $\mu(e) = \mu_e(y_i, y_r)$; y_r – множество вершин, смежных y_i при нечетком соответствии $\Gamma(Y, Y, e)$.

Пусть существует функция $f: Y \rightarrow C$, где $C = \{C_1, C_2, \dots, C_l\}$ – семейство подмножеств, такое что

$$\begin{aligned} C_1 &= f_1(\Gamma(y_1)); \\ C_2 &= f_2(\Gamma(y_i), \Gamma(y_k)), i \neq k; \\ C_3 &= f_3(\Gamma(y_i), \Gamma(y_k), \Gamma(y_l)), i \neq k \neq l; \\ &\dots \\ C_l &= f_l(\Gamma(y_i), \dots, \Gamma(y_n)). \end{aligned}$$

Если C образовано посредством функции f_i , соответствующей операции пересечения « \cap », такой что

$$f_i(\Gamma(y_1), \dots, \Gamma(y_n)) = \min_{e \in e_y} \mu(e)/y_r,$$

где e_y – множество ребер инцидентных y_r , то C является полугруппой с операцией « \cap ».

Выделим в C непустое подмножество $I = \{\mu(e_s)/y_r^j\}$, $j \in \{1, 2, \dots, l\}$, где l – число элементов I ; e_s – множество ребер, инцидентных вершине y_r , которое обладает следующими свойствами:

- элементы подмножества I образованы непустым замыканием относительно операции « \cap » вне зависимости от ориентации дуг слабо связного графа s ;

- для любого элемента $c \in C$ и любого элемента $i \in I$, $c \cap i = i \cap c$ принадлежит I ;

- среди элементов I нет элементов с вершинами, которым инцидентны только выходящие дуги.

Подмножество I с указанными свойствами является базовым множеством графа s .

На I выделяем два подмножества: подмножество вершин $Y_1 = \{y_r^j\} \subset Y$ и подмножество ребер $e_1 \subset e$, инцидентных Y_1 . Очевидно, что Y_1 является множеством внешней устойчивости графа I . Поскольку I отлично от \emptyset , то для любого элемента $c \in C$ $C \cap I \neq \emptyset$ Так как любой $i \in I$ имеет вид $\mu(e)/y_r$, то удале-

ние e аналогично выполнению условия $c \cap I = \emptyset$. Это означает, что между вершинами графа $y_k \in Y_1$ и $Y_v \in Y \setminus Y_1$ не существует связей, что равносильно разрушению структуры состояния, представленного графом s . Окрестностью базового множества I называется подмножество вершин графа s , смежных вершинам множества Y_1 .

Второй подход основан на определении минимального ядра графа Y^c и выделении подмножества ребер $e^c \subset e$, инцидентных Y^c . При этом Y^c называется ядром графа $s = (Y, e, met)$, если оно является одновременно внутренне и внешне устойчивым множеством графа, т.е.

$$\forall y_i \in Y^c \quad Y^c \cap \Gamma(y_i) = \emptyset, \quad \forall y_i \notin Y^c \quad Y^c \cap \Gamma(y_i) \neq \emptyset.$$

Тогда $Y = Y_1 \cap Y_2$, где Y_1 – внешне устойчивое множество графа; Y_2 – внутренне устойчивое множество графа, т.е. любая вершина $y_i \notin Y^c$ связана по крайней мере с одной вершиной из Y^c ребром, начало которого лежит в $Y \setminus Y^c$ и при этом никакие две вершины из Y^c не являются смежными.

Процедура отыскания ядер графа основана на обобщении метода Магу для нечетких графов и подробно изложена в [3].

Пусть $s_h = (Y_h, e_h)$ и $s_{ц} = (Y_{ц}, e_{ц})$ – внутренние формы состояний S_h и $S_{ц}$, и для них выделены базовые множества $I_h, I_{ц}$. Тогда состояния S_h и $S_{ц}$ являются сходными, если для элемента $\mu_f = \mu(e_{ц})/y_p^f$ из $I_{ц}$ найдется элемент $\mu_j = \mu(e_h)/y_r^j$ из I_h , такой что $u_{G_1} = u_{G_2}$ (или наоборот) и среди дуг e_h нет таких, которые бы отличались по типу (входящие, выходящие) от дуг из $e_{ц}$.

Выделим в s_h и $s_{ц}$ подграфы $s_{h,1} = (Y_{h,1}, e_{h,1})$, $Y_{h,1} \subset Y_h$, и $s_{ц,1} = (Y_{ц,1}, e_{ц,1})$, $Y_{ц,1} \subset Y_{ц}$, и установим соответствие Ψ между вершинами $Y_{h,1}$ и $Y_{ц,1}$ относительно инцидентных им дуг $e_{h,1} = e_{ц,1}$ с учетом ориентации. Легко видеть, что $Y_{h,1}$ и $Y_{ц,1}$ образованы вершинами базовых множеств и их окрестностями. Аналогией между графами s_h и $s_{ц}$, сходными относительно своих базовых множеств, называется граф конъюнкции $A = (Y, e)$, где $e = e_{h,1} = e_{ц,1}$, а любая вершина $y \in Y$ образована парой вершин $y_i \in Y_{h,1}$, $y_j \in Y_{ц,1}$, между которыми определено соответствие Ψ . Таким образом, аналогия строится на основе операции обобще-

ния вершин базовых множеств и их окрестностей, а соответствие Ψ определяет изоморфное вложение графа s_{Π} в граф s_h (или наоборот).

В том случае, когда значение $\mu_e(y_i, y_j)$ характеризует степень доверия к высказыванию y_j при наличии факта y_i , для отражения фактического сходства степеней доверия изоморфных отношений $e_{h,1}$ и $e_{\Pi,1}$ (вычисления степени аналогии графов s_h и s_{Π}) применяется формула [2]:

$$\alpha_A(s_h, s_{\Pi}) = 1 - \sum_{k=1}^t \left(\left| \mu_{e_{h,k}}(y_i, y_j) - \mu_{e_{\Pi,k}}(y_p, y_l) \right| \right),$$

где $y_i, y_j \in Y_{h,1}$, $e_{h,k} \in e$, $k \in T = \{1, \dots, t\}$, а t – число изоморфных отношений, для всех $\left| \mu_{e_{h,k}}(y_i, y_j) - \mu_{e_{\Pi,k}}(y_p, y_l) \right| \neq 0$.

Формула показывает, на какую среднюю относительную величину отличаются степени доверия к отношениям $e_{h,1}$ и $e_{\Pi,1}$. Будем считать, что между графами s_h и s_{Π} существует аналогия, если $\alpha_A(s_h, s_{\Pi}) \in [0,6; 1]$.

4. Анализ нечеткой ситуационной сети

Основной задачей анализа НСС является построение возможных путей перехода из начального состояния в целевое состояние. При значительном числе состояний НСС желательно иметь автоматическую процедуру подобного анализа. Опишем НСС системой продукций $W = \{W_1, \dots, W_k, \dots, W_m\}$, где k -я продукция представляет собой выражение вида

$$W_k: S_i \Rightarrow S_j,$$

где $S_i, S_j \in S = \{S_1, \dots, S_p\}$ – нечеткие формулы; $\langle \Rightarrow \rangle$ – знак секвенции, в логическом смысле истолковываемый как знак логического следования S_j из истинного S_i [6]. При таком представлении НСС возможна организация логического вывода, позволяющего на основе исходных данных делать заключения относительно возможности перевода системы из одного состояния в другое. Иными словами, задача определения пути перехода из S_i в S_j сводится к задаче доказательства теоремы $S_i, \Gamma \Rightarrow S_j$ в исчислении секвенций, где S_i в S_j – предикаты, определяющие

начальное и целевое состояния; Γ – база знаний НСС, состоящая из нечетких формул, связывающих между собой состояния и управляющие воздействия. При доказательстве используются стандартные правила преобразования секвенций для бескванторных формул вида [6]. Логический вывод в нечетком исчислении секвенций основан на построении дерева, получаемого посредством последовательного применения таких правил. Для организации процедуры построения дерева вывода необходимо вначале построить исходную секвенцию. Исходная секвенция, как правило, имеет вид: $S_n, \Gamma \Rightarrow G, S_c$, где S_n – предикат, определяющий начальное состояние; Γ – база знаний в виде набора нечетких формул; S_c – предикат, определяющий целевое состояние НСС. Нечеткость формул базы знаний может определяться как нечеткостью предикатов, описывающих начальные состояния, так и нечеткостью предикатов, используемых для определения управляющих воздействий. В первом случае нечеткость может быть выражена оценкой нечеткого равенства между начальной ситуацией и той ситуацией, которая использовалась в качестве исходной ситуации при построении НСС. Второй случай связан с оценкой использования управляющего воздействия в конкретной ситуации. Отличие доказательства от стандартной процедуры заключается в изменении условий анализа аксиом при закрытии ветвей дерева вывода. При различных истинностях формул A_F и A_T некоторой конечной секвенции $A_F, \Gamma \Rightarrow G, A_T$ аксиома считается выполненной по A , но с ограничением истинности, равной минимуму истинностей A_F и A_T . Если все ветви дерева окажутся закрытыми, то доказательство перехода в целевое состояние является успешным при тех значениях истинности формул, по которым осуществлялось закрытие ветвей дерева нечеткого вывода.

В общем случае стратегия доказательства заключается в следующем. Бескванторную формулу, не содержащую операторов, назовем атомом, т.е. атом является нечетким предикатом или нечетким высказыванием (фактом). С каждым логическим оператором связано соответствующее правило преобразования. Исходная задача формулируется как теорема: доказать существование нечет-

кой формулы S при известных данных Q , где Q – множество нечетких атомов. Будем считать, что множество Q добавляется в базу знаний, а S попадает в рабочую область и сравнивается с заключениями нечетких продукций базы знаний. Таким образом, база знаний рассматривается как антицедент секвенции, а рабочая область – как сукцедент секвенции. Если в базе знаний не найдется заключения, совпадающего с S , то вывод считается неуспешным. В противном случае в базе знаний отыскиваются все продукции, правые части которых совпадают с S . Среди этих продукций выделяются такие, левые части которых содержат предикаты $q \subseteq Q$. Если таких продукций нет, то дальнейший анализ начинается с любой из выделенных продукций. Анализ заключается в декомпозиции продукции, в соответствии с правилом преобразования импликации. В результате декомпозиции формируются две секвенции, одна из которых закрывается по S , в соответствии с аксиомой исчисления, а вторая содержит антицедент в виде базы знаний и сукцедент, дополненный левой частью рассматриваемой продукции. Если эта секвенция является аксиомой, то вывод успешно завершен. Если секвенция не является аксиомой, а левая часть продукции представляет собой атом, не являющийся заключением никакой продукции из базы знаний, то выбор исходной продукции, правая часть которой совпала с S , считается неудачным, а созданная ветвь дерева решений – тупиковой. В этом случае выбирается другая продукция, левая часть которой совпадает с S . Если таких продукций не обнаружено, то вывод считается неуспешным. В противном случае левая часть продукции является формулой, к которой в зависимости от вида логического оператора применяется соответствующее правило преобразования, а дальнейший анализ осуществляется описанным выше способом.

Если левая часть продукции является атомом, то в базе знаний выделяется продукция, заключение которой совпадает с атомом. К этой продукции также применяется правило преобразования импликации. В результате опять получаем две секвенции, одна из которых закрывается по заключению продукции, а вторая анализируется в соответствии с вышеизложенной процедурой.

Рассмотренная стратегия доказательства теоремы определяет, по аналогии с анализом продукционной базы знаний, обратную цепочку логического вывода от цели к исходным данным. Таким же образом может быть сформулирована прямая стратегия вывода. В этом случае анализ начинается с выделения продукций в базе знаний, левые части которых совпадают с $q \subseteq Q$.

5. Заключение

Ситуационное моделирование с использованием НСС позволяет осуществить описание неопределенных бизнес-процессов и проектов, что характерно для многих реальных ситуаций. Методы построения НСС по сути являются процедурным подходом к моделированию и направлены на исследование разнообразные стратегий построения проектов с учетом их возможностных характеристик. На практике из-за того, что при построении моделей процессов и проектов изначально невозможно учесть все ограничения, очень часто приходится сталкиваться с необходимостью решении задач динамического моделирования в условиях неопределенности. В этих условиях для отражения изменяющейся и адаптируемой к внешней среде сущности организационной системы схемы бизнес-процессов должны постоянно актуализироваться в соответствии с изменениями, происходящими в процессе управления. Одним из инструментов является создание «сценариев» процессов или проектов на основе ситуационного моделирования и анализа полученных моделей.

Литература

1. АСТАНИН С.В., ЗАХАРЕВИЧ В.Г. *Обработка и представление знаний в информационно-советующих комплексах систем гибридного интеллекта*. – Таганрог: ТРТУ, 1997. – 136 с.
2. АСТАНИН С.В. *Правдоподобные рассуждения в системах принятия решений*. Ч.2. – Таганрог: ТРТУ, 2000. – 110 с.

3. БЕРШТЕЙН Л.С., БОЖЕНЮК А.В. Нечеткая раскраска и оценка степени изоморфизма нечетких графов // Известия академии наук. Теория и системы управления. – 2002. – №3. – С. 116–122.
4. БУРКОВ В.Н., ЗАЛОЖНЕВ А.Ю., НОВИКОВ Д.А. *Теория графов в управлении организационными системами.* – М.: Синтег, 2001. – 124 с.
5. МЕЛИХОВ А.Н., БЕРШТЕЙН Л.С., КОРОВИН С.Я. *Ситуационные советующие системы с нечеткой логикой.* – М.: Наука, 1990. – 272 с.
6. ТАКЕУТИ Г. *Теория доказательств.* – М.: Мир, 1978. – 412 с.
7. ХАММЕР М., ЧАМПИ Д. *Реинжиниринг корпорации. Манифест революции в бизнесе.* – М.: Манн, Иванов и Фербер, 2011. – 288 с.
8. BASU A., BLANNING R. *Metagraphs and Their Applications.* – New York: Springer, 2007. – 173 p.

USING FUZZY GRAPH MODELS FOR BUSINESS-PROCESS CONTROL

Sergey Astanin, State Pedagogical Institute, Taganrog, Doctor of Science, professor (astser@mail.ru).

Natalia Zhukovskaja, Russian New University, Taganrog, Ph.D (nasha-0207@yandex.ru).

Abstract: An approach is considered to model business processes and projects under uncertainty. We suggest the procedures for fuzzy situational network construction, which models possible strategies of business process (or project) implementation. Our approach also includes the procedures for the analysis of a strategy.

Keywords: situational modeling, fuzzy situational networks, fuzzy analogy, the analysis of a strategy.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии А. К. Погодаевым

УДК 51-77
ББК 22.18

СТОХАСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ФОРМИРОВАНИЯ ГОРОДОВ

Васильева Т. П.¹, Мызникова Б. И.², Русаков С. В.³
(Пермский государственный национальный исследова-
тельский университет, Пермь)

Предложена математическая модель, включающая описание двух взаимодействующих подсистем городского хозяйства. Дана интерпретация результатов моделирования, полученных с помощью реальных статистических данных.

Ключевые слова: математическое программирование, вероятностная технология, городская система.

1. Введение

Эволюция городской системы определяется рядом условий экономического, политического, культурного, исторического характера. Ее стратегическое планирование должно учитывать, в числе первоочередных, обстоятельства, связанные с эффективным функционированием индустриальных объектов, влияющим на миграционные потоки, уровень взаимодействия с научно-образовательными центрами, состояние сети учреждений здравоохранения и многое другое.

В данной работе предложена математическая модель, включающая описание двух взаимодействующих подсистем – «насе-

¹ Татьяна Павловна Васильева, аспирант (vasilyeva_09@mail.ru, тел. 89026447820).

² Бэла Исаковна Мызникова, кандидат физико-математических наук, доцент (тел. (342) 239-63-41).

³ Сергей Владимирович Русаков, доктор физико-математических наук, профессор (тел. (342) 239-64-09).

ление» и «градообразующая база». По результатам моделирования на основе реальных статистических данных построены матрицы вероятностей распределения потоков продукции между отраслевыми блоками и миграционных потоков.

2. Математическая модель городской системы хозяйства

2.1. МАКРОСИСТЕМНЫЙ ПОДХОД К МОДЕЛИРОВАНИЮ ГОРОДА

Город характеризуется множеством различных факторов, определяющих процессы, происходящие в его системе. Краткий аналитический обзор компьютерных технологий моделирования городского хозяйства приведен в [1, 2]. Стохастичность его эволюции является естественным качеством, которое необходимо учитывать при решении проблем муниципального управления, что делает город весьма специфическим объектом исследования.

Городская система относится к классу сложных динамических систем. Одно из направлений моделирования ее развития основано на концепциях социальной физики [5], интерпретирующей и изучающей целеустремленные системы с помощью общих физических закономерностей. Многие из них являются следствием фундаментальных экстремальных принципов [6]. Суть подхода состоит в том, что движение динамической системы рассматривается в направлении максимизации (минимизации) некоторого функционала. Экстремальные принципы не являются единственным основанием моделирования механизмов взаимодействия подсистем. Другим, не менее распространенным, подходом к построению моделей является феноменологический подход, предлагающий описание процессов в подсистемах городского хозяйства в виде балансовых уравнений. Можно ожидать, что наибольший эффект при моделировании города обеспечит сочетание какого-либо экстремального принципа с феноменологией изучаемых явлений [4].

2.2. МОДЕЛЬ ПОДСИСТЕМЫ «ГРАДООБРАЗУЮЩАЯ БАЗА»

Рассмотрим модель городской подсистемы, называемой в дальнейшем «градообразующая база» [9]. Эта подсистема включает объекты, распределенные по городской территории, которые могут быть объединены в группы, например, в соответствии с отраслевой принадлежностью: группы машиностроительных предприятий, предприятий строительной индустрии, научно-исследовательских и проектных организаций и т.п.

Объекты отраслей размещены на городской территории и могут изменяться с течением времени, поэтому показатели ее состояния зависят от пространственной переменной x и от времени t . Считается, что рассматриваемая подсистема включает группы объектов из A отраслей, обменивающихся произведенной продукцией через товарный рынок, который формирует соответствующие цены $p_1^*(x, t), \dots, p_A^*(x, t)$. Каждая отрасль производит один продукт, количество которого характеризуется объемом выпуска $Y_i(x, t)$, $i = 1, 2, \dots, A$, используя для этого основные фонды (производственные мощности) $M_i(x, t)$ и трудовые ресурсы $R_i^E(x, t)$.

Каждая отрасль для производства собственного продукта использует выпуск других отраслей, предприятия которых локализованы на территории города. Если технология требует употребления продукции отраслей, чьи предприятия расположены вне городской черты, то соответствующие районы считаются присоединенными к городу, что позволяет рассматривать данную подсистему как замкнутую (самодостаточную). Сделанные предположения соответствуют концепции межотраслевого баланса [7].

Межотраслевое взаимодействие через товарный рынок порождает потоки продуктов $y_{ki}(x, t)$, $k, i = 1, 2, \dots, A$.

Произвольная i -я отрасль, $i = 1, 2, \dots, A$, представляется совокупностью производственных единиц. Под производственной единицей понимается ячейка предприятия, производящая единицу продукции i -й отрасли. Эффективность соответствующего производственно-технологического процесса измеряется количеством работников λ_i , обеспечивающих выпуск единицы продук-

ции. Тогда лучшей считается технология (λ_i^0) , которая использует меньшее количество работников, а худшей – технология (λ_i^1) , требующая более высоких затрат трудовых ресурсов.

Переменная λ_i предполагается непрерывной.

Отсортируем все производственные единицы по технологическому уровню, т.е. по количеству работников, занятых в процессе производства единицы продукта. Получившееся распределение производственных единиц по технологиям, зависящее также от пространственной координаты и времени, обозначим $m_i(x, \lambda, t)$.

Из определения функции $m_i(x, \lambda, t)$ следует соотношение

$$(1) \quad \int_{\lambda_i^0}^{\lambda_i^1} m_i(x, \lambda, t) d\lambda = M_i(x, t),$$

где $M_i(x, t)$ – общее количество производственных единиц i -й отрасли (производственная мощность отрасли), размещенных в точке x городской территории в момент времени t .

Введем функцию технологической структуры

$$(2) \quad \psi_i(x, \lambda, t) = \frac{m_i(x, \lambda, t)}{M_i(x, t)},$$

характеризующую распределение долей производственных единиц по технологиям. Функция $\psi_i(x, \lambda, t)$ определена на интервале $\lambda_i^0 \leq \lambda_i \leq \lambda_i^1$ и нормирована по «технологической» переменной λ_i :

$$(3) \quad \int_{\lambda_i^0}^{\lambda_i^1} \psi_i(x, \lambda, t) d\lambda = 1.$$

Поскольку в рыночной экономике успешно функционируют только рентабельные производства, то не все производственные единицы с технологиями из интервала $\lambda_i^0 \leq \lambda_i \leq \lambda_i^1$ оказываются реально задействованными. Существует пороговый уровень рентабельности технологии λ_i^* , такой, что производственные

единицы, уровень рентабельности которых больше, чем λ_i^* , не выживают в рыночных условиях.

Показатель рентабельности будем оценивать, исходя из уровня дохода и структуры затрат производственной единицы. В простейшем случае доход производственной единицы определяется рыночной ценой $p_i(x, t)$. Затраты отрасли обычно разделяют на производственные и непроизводственные. Производственные затраты связаны с потреблением в процессе производства части собственного выпуска, а также продукции других отраслей. В стоимостном выражении это означает, что производственные затраты равны суммарной стоимости продуктов всех отраслей, используемых производственными единицами i -ой отрасли. Введем величину

$$(4) \quad \tilde{y}_{ki}(x, t) = \frac{y_{ki}(x, t)}{M_i(x, t)},$$

описывающую количество продукта k -й отрасли, используемое производственной единицей i -й отрасли. Стоимостное выражение этой компоненты производственных затрат рассчитывается по правилу $p_k(x, t) \cdot \tilde{y}_{ki}(x, t)$. Непроизводственные затраты определяются заработной платой $s_i(x, t)$ и количеством работающих λ_i в производственной единице i -й отрасли.

Таким образом, уровень рентабельности производственной единицы i -й отрасли может быть определен из следующего условия:

$$(5) \quad p_i(x, t) - \sum_{k=1}^A p_k(x, t) \frac{y_{ki}(x, t)}{M_i(x, t)} - \lambda_i s_i(x, t) \geq 0.$$

Основные фонды $M_i(x, t)$ также имеют определенную динамику, обусловленную факторами старения и обновления. Считается, что скорость их старения пропорциональна размерам основных фондов в данный момент времени. Коэффициент пропорциональности обозначим β_i . Обновление основных фондов происходит за счет собственных средств отрасли и за счет внешних инвестиций. Часть собственного выпуска, которая направляется на обновление основных фондов, равна $b_i Y_i(x, t)$.

Внешние инвестиции обозначим $I_i(x, t)$. Тогда в линейном приближении динамику основных средств можно описать следующим дифференциальным уравнением:

$$(6) \quad \frac{dM_i(x, t)}{dt} = \beta_i M_i(x, t) + b_i Y_i(t) + I_i(x, t).$$

Важным параметром, от которого зависит уровень рентабельности, а следовательно, и объем выпуска и количество занятых в процессе производства, является рыночная цена $p_i(x, t)$ продукта, выпускаемого производственной единицей i -й отрасли. Проблема формирования рыночной цены довольно сложна, поскольку этот показатель зависит от комплексного влияния рыночных факторов. В ходе моделирования будем предполагать, что отрасли являются участниками рынка и равновесная рыночная цена устанавливается достаточно быстро. Равновесные цены на товарном рынке обычно определяются из условий баланса доходов и расходов отрасли. В этом смысле условия равновесия выводятся аналогично условиям рентабельности производственной единицы. Однако структура расходов отрасли отличается от той, которая типична для производственной единицы. В частности, производственные расходы отрасли включают расходы на обновление производства. Считается, что эти расходы реализуются из собственных средств отрасли, т.е. из ее дохода. Расходы на инновации рассчитываются по правилу $b_i p_i(x, t) Y_i(x, t)$, где b_i – доля дохода, расходуемая на обновление производства. Остальные компоненты производственных и непроизводственных издержек те же, что и в определяющем соотношении для рентабельности производственной единицы.

Отсутствие прибыли баланс доходов и расходов отраслей описывается следующей системой линейных алгебраических уравнений:

$$(7) \quad (1 - b_i) p_i(x, t) Y_i(x, t) - \sum_{k=1}^A p_k(x, t) y_{ki}(x, t) - R_i^E(x, t) s_i(x, t) = 0,$$

$$i = 1, \dots, A.$$

Представим систему (7) в векторно-матричной форме:

$$(8) \quad G(x, t) p(x, t) = r(x, t),$$

где введены следующие обозначения:

$$G(x, t) =$$

$$(9) \quad = \begin{bmatrix} (1-b_1)Y_1 - y_{11}(x, t) & -y_{12}(x, t) & \cdots & -y_{1A}(x, t) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ -y_{A1}(x, t) & -y_{A2}(x, t) & \cdots & (1-b_A)Y_A - y_{AA}(x, t) \end{bmatrix},$$

$$r(x, t) = \begin{pmatrix} R_1^E(x, t)s_1(x, t) \\ \vdots \\ R_A^E(x, t)s_A(x, t) \end{pmatrix}.$$

Решение системы (7) – вектор равновесных цен – имеет вид

$$(10) \quad p^*(x, t) = G^{-1}(x, t)r(x, t).$$

Условия (5) и выражение (10) определяют уровень рентабельности производственной единицы и равновесные цены реализуемой продукции.

В модели (5), (10) все отрасли взаимосвязаны через потоки продукции $y_{ki}(x, t)$ и используемые в процессе производства доли выпусков $Y_i(x, t)$, $i = 1, 2, \dots, A$, которые, в свою очередь, зависят от уровней рентабельности λ_i^* производственных единиц и цен $p_i^*(x, t)$.

Рыночный межотраслевой обмен произведенной продукцией носит случайный характер с элементами внешнего регулирования, что обусловлено невозможностью планирования спроса на продукт отрасли, конъюнктурой рынка, стратегией менеджеров и другими причинами.

В соответствии со стохастической концепцией рынка, доли выпуска k -й отрасли могут случайным образом, с априорной вероятностью $a_{ki}(x, t)$, попасть в технологический процесс i -й отрасли. Наличие априорных вероятностей вносит элемент регуляризации в товарный обмен. Они зависят от текущего состояния выпусков отраслей, т.е. $a_{ki}(x, t) = a_{ki}(x; Y_1, \dots, Y_A)$, и предопределяют возможное распределение продукта одной отрасли среди продукции других отраслей. В качестве вероятностной характеристики указанного распределительного процесса может быть использована энтропийная функция:

$$(11) H(y, Y) = \sum_{k,i=1}^A y_{ki}(x, t) \ln \frac{y_{ki}(x, t)}{a_{ki}(Y(x, t))},$$

где $y(x, t) = [y_{ki}(x, t) \mid k, i = 1, \dots, A]$ – матрица потоков продуктов, которыми обмениваются отрасли. Компоненты этой матрицы должны удовлетворять следующим ограничениям:

$$(12) \sum_{i=1}^A y_{ki}(x, t) \leq Y_k(x, t), \quad k = 1, \dots, A.$$

Реализуемое распределение потоков продуктов среди A отраслей определяется следующей задачей максимизации энтропии:

$$(13) y^*(x, t) = \operatorname{argmax}(H(y, Y) \mid y \in D(Y)),$$

где допустимое множество D определяется системой неравенств (12).

Таким образом, построена замкнутая модель градообразующей базы, в формировании которой использована комбинация макросистемного и феноменологического подходов. Входными переменными в этой модели являются внешние инвестиции I_1, \dots, I_A и заработные платы s_1, \dots, s_A в отраслях производственно-технологического сектора экономики города.

2.3. МОДЕЛЬ ПОДСИСТЕМЫ «НАСЕЛЕНИЕ»

Эта подсистема занимает особое положение в городской системе, поскольку ее элементами являются люди, обладающие собственными целями и интересами. Поэтому предполагается, что целенаправленное изменение состояния подсистемы «население» осуществляется косвенно, посредством изменений состояния других городских подсистем.

Рассмотрим задачу о распределении населения по N регионам. Считается, что между регионами происходит обмен людскими ресурсами. В результате возникают миграционные потоки y_{nj} (n, j – номера регионов), при этом $y_{nj} > 0$. Состояние миграционного процесса характеризуется матрицей потоков $Y(t) = [y_{nj}(t) \mid n, j = 1, \dots, N]$. Интенсивность миграционных потоков может изменяться во времени в зависимости от состояния регионов (экономического, экологического и др.). Однако

считается, что при возникновении каких-либо условий, стимулирующих такие изменения, новое состояние миграционного процесса устанавливается достаточно быстро, а именно, быстрее, чем происходят изменения в процессе воспроизводства. Эта особенность миграции позволяет использовать методику макро-системного моделирования динамических процессов, которая изложена при описании подсистемы «градообразующая база».

Полагая, что миграционный процесс имеет стохастическую природу, для характеристики возможных его состояний введем функцию энтропии:

$$(14) H(y, Y) = - \sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^N y_{nj} \ln \frac{y_{nj}}{a_{nj}},$$

где a_{nj} – априорные вероятности перемещения жителя из n -го региона в регион с номером j , при этом $a_{nj} > 0$. Эти вероятности зависят от факторов, определяющих интерес к перемене региона проживания. Ресурсные возможности приема новых жителей регионов ограничены. Поэтому миграционные потоки y_{nj} должны удовлетворять следующим условиям:

$$(15) \sum_{n=1}^N y_{nj} \leq F(j, t), \quad j = 1, \dots, N,$$

где $F(j, t)$ – предельное количество населения, которое может принять регион j .

Поскольку миграционный процесс протекает достаточно быстро, его стационарное состояние $Y^*(t)$ может быть определено следующим образом:

$$(16) Y^*(t) = \arg \max \{H(Y) | Y \in D\},$$

где D – допустимое множество, описанное выше.

Таким образом, к моделированию подсистемы «население», аналогично подсистеме «градообразующая база», применим макросистемный подход, использующий энтропию в качестве характеристики распределения элементов подсистемы.

2.4. РЕШЕНИЕ ОПТИМИЗАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ

Опишем решение задачи (13) максимизации энтропии для подсистемы «градообразующая база», функция цели которой

определяется выражением (11), а условия допустимости решения – балансовыми ограничениями (12). Модель (11)–(13) представляет собой оптимизационную задачу нелинейного программирования. Как известно [8], относительный оптимум задачи математического программирования, при определенных условиях, совпадает с абсолютным экстремумом функции Лагранжа исходной задачи:

$$(17) \quad L(y, \lambda) = -H(y, Y) + \sum_{i=1}^A \lambda_i \left[Y_i(x, t) - \sum_{k=1}^A y_{ki}(x, t) \right] = \\ - \sum_{k,i=1}^A y_{ki}(x, t) \ln \frac{y_{ki}(x, t)}{a_{ki}(Y(x, t))} + \sum_{k=1}^A \lambda_k \left[Y_k(x, t) - \sum_{i=1}^A y_{ki}(x, t) \right],$$

где λ_k – неизвестные множители.

В соответствии с теоремой Каруша–Джона [8], необходимые условия экстремума функции Лагранжа приводят к системе уравнений:

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L(y, Y)}{\partial y_{ki}} = 0, \\ \lambda_k (Y_k(x, t) - \sum_{i=1}^A y_{ki}(x, t)) = 0, \\ \lambda_k \geq 0, \\ k, i = 1, \dots, A. \end{array} \right.$$

Решение данной системы имеет вид:

$$(19) \quad y_{ki} = a_{ki} \frac{Y_{ki}}{\sum_{i=1}^A a_{ki}(Y(x, t))}, \quad k, i = 1, \dots, A$$

Для найденной критической точки проверка достаточного условия локального максимума состоит в исследовании отрицательной определенности матрицы Гессе, элементами которой являются вторые производные функции Лагранжа, вычисленные в критической точке. Критерием отрицательной определенности матрицы является чередование знаков ее главных миноров, начиная с минуса. Поскольку матрица Гессе для функции Лагранжа задачи (11)–(13) представляет собой диагональную матрицу, элементы которой отрицательны:

$$(20) \frac{\partial^2 L}{\partial y_{ki}^2}(y_{ki}^*, \lambda^*) = -\frac{1}{y_{ki}} = -1 / \left[a_{ki} \frac{Y_k}{\sum_{i=1}^A a_{ki}(Y(x, t))} \right] < 0,$$

то достаточное условие экстремума также выполняется.

Таким образом, с помощью (19) можно найти распределение потоков продукции между отраслями региона согласно принятым априорным вероятностям. Аналогичное решение имеет задача для подсистемы «население».

3. Стохастическое моделирование региональной подсистемы

Для иллюстрации возможностей описанного подхода применим его к моделированию ситуации в ряде регионов Российской Федерации. Отметим, что для построения матриц вероятностей рассматривается промежуток времени до экономического кризиса 2008 г. в России, поскольку стационарное состояние исследуемых процессов возможно только в условиях стабильного развития страны. При этом данные рассматривались на временном интервале 2000–2006 гг., на котором и было установлено стационарное состояние, то есть на данном периоде значения приведенных далее матриц меняются незначительно.

Выделим следующие отраслевые блоки: отрасли промышленности (машиностроение, энергетика и т.п.; объем выпуска Y_1), обслуживающие отрасли (транспорт и связь, жилищно-коммунальное хозяйство и т.п.; объем выпуска Y_2), социальная сфера (здравоохранение, образование и т.п.; объем выпуска Y_3).

Для определения матрицы вероятностей распределения продукции между тремя указанными отраслевыми блоками будем использовать прием районирования технологических коэффициентов межотраслевого баланса, построенного для национальной экономики, что является своего рода привязкой общегосударственных коэффициентов к изучаемому региону. Такой метод используется в ситуациях, когда данных прямых обследований недостаточно для оценки коэффициентов прямых

затрат и необходимо привлекать макроэкономическую информацию [3].

Начиная с 1992 года Госкомстат России публикует межотраслевые балансы в концепции системы национальных счетов [10], представляющие собой симметричные таблицы «Затраты–выпуск». По столбцам отражается стоимостный состав валового выпуска отраслей экономики по элементам промежуточного потребления и добавленной стоимости, а по строкам – направления использования ресурсов каждой отрасли.

Для экономики России в разрезе трех указанных отраслевых блоков по данным Госкомстата за 2003 год [10] построим матрицу $y_{рф}$ потоков продукции и матрицу $Y_{рф}$ выпусков (в стоимостном выражении, тыс. руб.):

$$(21) \quad y_{рф} = \begin{pmatrix} 3620489904 & 2073951469 & 2400822224 \\ 2134963423 & 3354036982 & 254483242 \\ 4697961 & 9974228 & 22494534 \end{pmatrix},$$

$$Y_{рф} = \begin{pmatrix} 5934523597 \\ 5743483647 \\ 37166723 \end{pmatrix}.$$

Элемент y_{ki} показывает, сколько продукции k -го отраслевого блока необходимо для производства продукции отраслевого блока номер i . С помощью (19) получим матрицу вероятностей распределения продукции:

$$(22) \quad a_{рф} = \begin{pmatrix} 0,61071 & 0,3495 & 0,0405 \\ 0,3717 & 0,5840 & 0,0443 \\ 0,1264 & 0,2684 & 0,6052 \end{pmatrix}.$$

Значения элементов этой матрицы практически постоянны в рамках анализируемого промежутка времени, равного 6 годам.

Проанализируем показатели по видам экономической деятельности в Пермском крае в 2006 году [11]. По данным Госкомстата России, матрица выпусков продукции по рассматриваемым отраслевым блокам (в млрд. руб.) имеет следующий вид:

$$(23) Y_{\text{Перм}} = \begin{pmatrix} 466,6 \\ 199,5 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Используя матрицу вероятностей (22), найдем матрицу потоков продукции в тех же денежных единицах:

$$(24) y_{\text{Перм}} = \begin{pmatrix} 284,660 & 163,064 & 18,876 \\ 74,158 & 116,503 & 8,839 \\ 0,885 & 1,879 & 4,237 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, получен аналитический инструмент, позволяющий оценить потребности рассматриваемых блоков отраслей в продукции друг друга, применительно к любому региону России, что особенно актуально в ситуации, когда нет опубликованной информации о межотраслевом балансе в региональном разрезе. С другой стороны, данный подход является альтернативой прямому обследованию состояния предприятий, которое не всегда возможно.

Обсудим результаты моделирования подсистемы «население». Рассмотрим процесс миграции населения между федеральными округами Российской Федерации. Госкомстат ежегодно публикует данные внутривосрийской миграции по территориям прибытия и выбытия населения в виде симметричной таблицы. В таблице 1 приведено число мигрантов по федеральным округам за 2004 год [12].

Таблица 1. Внутривосрийская миграция по территориям прибытия и выбытия за 2004 г., тыс. чел.

	Ц.	С.-З.	Юж.	Пр.	Ур.	С.	Д.
Цен.	311,2	17,1	13,8	14,7	6,1	6,3	4,5
С.-З.	25,6	126,5	7,6	9,3	2,9	2,8	1,8
Юж.	33,7	9,7	22,2	10,4	10,1	6,0	3,7
Пр.	36,7	11,7	11,6	331,3	25,2	6,7	3,6
Ур.	14,2	5,1	10,3	22,4	145,4	8,3	1,5
Сиб.	19,5	6,8	10,5	9,2	11,3	315,0	9,1
Дал.	16,3	4,7	7,1	5,6	2,6	9,9	91,7

Недиагональные элементы каждого столбца таблицы 1 характеризуют соответствующий федеральный округ с точки зрения его потенциальной привлекательности для проживания, а элементы строк – наоборот, в смысле потенциальной готовности жителей переехать в другой округ. Элементы, стоящие вдоль главной диагонали таблицы, представляют численность населения округа за вычетом эмигрировавших. Общее число выбывших жителей из указанных федеральных округов сведено в таблице 2.

Таблица 2. Число жителей, выбывших из федеральных округов России в 2004 г., тыс. чел.

Центральный ф. о.	373,7
Северо-Западный ф. о.	176,4
Южный ф. о.	295,2
Приволжский ф. о.	426,7
Уральский ф. о.	207,0
Сибирский ф. о.	381,3
Дальневосточный ф. о.	137,9

Используя полученную информацию в качестве исходной для моделирования подсистемы «население», построим матрицу вероятностей миграции населения между рассматриваемыми федеральными округами:

$$(25) \quad a_{\text{нас}} = \begin{pmatrix} 0,833 & 0,046 & 0,037 & 0,039 & 0,016 & 0,017 & 0,012 \\ 0,145 & 0,717 & 0,043 & 0,053 & 0,016 & 0,016 & 0,010 \\ 0,114 & 0,033 & 0,751 & 0,035 & 0,034 & 0,020 & 0,012 \\ 0,086 & 0,027 & 0,027 & 0,776 & 0,059 & 0,016 & 0,008 \\ 0,068 & 0,024 & 0,050 & 0,108 & 0,702 & 0,040 & 0,007 \\ 0,051 & 0,018 & 0,027 & 0,024 & 0,030 & 0,826 & 0,024 \\ 0,118 & 0,034 & 0,052 & 0,041 & 0,019 & 0,072 & 0,665 \end{pmatrix}.$$

Значения элементов данной матрицы с течением времени также изменяются незначительно. С ее помощью по форму-

ле (19) можно получить распределение миграционных потоков между рассматриваемыми федеральными округами.

4. Заключение

Проведенное исследование процесса градоформирования с помощью стохастического подхода демонстрирует возможности инструмента моделирования в виде матриц вероятностей распределений продукции производственно-технологического сектора экономики и миграции населения между федеральными округами. Применение разработанной методики к анализу конкретных ситуаций позволяет изучить актуальные социально-экономические процессы и явления, в частности, описать стационарные состояния в ряде функциональных сфер городского хозяйства.

Литература

1. ВАСИЛЬЕВА Т.П., МЫЗНИКОВА Б.И. *Математическое моделирование процесса градоформирования: детерминированный подход* // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Информатика. Телекоммуникации. Управление. – 2010. – №5(108). – С. 171–179.
2. ВАСИЛЬЕВА Т.П., МЫЗНИКОВА Б.И., РУСАКОВ С.В. *О возможности моделирования процесса градообразования с помощью клеточных автоматов* // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Информатика. Телекоммуникации. Управление. – 2011. – №6–2(138). – С. 128–134.
3. *Моделирование социо-эколого-экономической системы региона*. [под ред. В.И. Гурман, Е.В. Рюминой]. М.: Наука, 2003. – 175 с.
4. ЕМЕЛЬЯНОВ С.В., ПОПКОВ Ю.С., ОЛЕЙНИК А.Г., ПУТИЛОВ В.А. *Информационные технологии регионально-го управления*. – М.: УРСС, 2004. – 400 с.
5. ЗОТОВ А.Ф., МЕЛЬВИЛЬ Ю.К. *Буржуазная философия середины XIX – начала XX века* – М.: Высшая школа, 1988. – 520 с.
6. ЛАВЕНДА Б. *Статистическая физика. Вероятностный подход*: пер. с англ. – М.: Мир, 1999. – 432 с.

7. ЛЕОНТЬЕВ В.В. *Межотраслевая экономика*. – М.: Экономика, 1997. – 315 с.
8. ЛУТМАНОВ С.В. *Курс лекций по методам оптимизации*. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 363 с.
9. РЕСИН В.И., ПОПКОВ Ю.С. *Вероятностные технологии в управлении развитием города*. – М: УРСС, 2003. – 352 с.
10. Система таблиц «Затраты–выпуск» России за 2003 г. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.gks.ru/doc_2006/Zatrat06.zip (дата обращения: 01.07.2010).
11. Регионы России. Социально-экономические показатели. 2007. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.gks.ru/doc_2007/region/soc-pok.zip (дата обращения: 01.07.2010).
12. Демографический ежегодник России. 2005. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.gks.ru/doc_2005/DEMO.zip (дата обращения: 01.07.2010).

STOCHASTIC MODELS OF URBAN DEVELOPMENT

Tatyana Vasilyeva, Perm state national research university, Perm, Candidate (vasilyeva_09@mail.ru, (902) 644-78-20).

Bela Myznikova, Perm state national research university, Perm, Cand.Sci., assistant professor ((342) 239-63-41).

Sergey Rusakov, Perm state national research university, Perm, Doctor of Science, professor ((342) 239-64-09).

Abstract: An approach to stochastic modeling of interaction between two subsystems of an urban economy is developed and applied to the analysis of real-world statistical data.

Keywords: mathematical programming, probability technology, urban system.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии Д. А. Новиковым

УДК 338.2
ББК 65.05.3

УПРАВЛЕНИЕ РАЗВИТИЕМ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ КОМПАНИЙ В СИТУАЦИИ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО РАЗРЫВА

Ратнер С. В.¹, Михайлов В. О.²

(ФГБУН Институт проблем управления РАН, Москва)

В работе предлагается имитационная модель выбора направления инвестиционного развития нефтегазового предприятия с учетом сценария постепенного вытеснения традиционных технологий производства энергии инновационными, в том числе альтернативными. С помощью данной модели исследуется влияние интенсивности инвестиционного процесса и распределения инвестиционных ресурсов на динамику прибыли компании.

Ключевые слова: энергетическая компания, технологическая сложность, альтернативная энергетика, диверсификация, имитационная модель.

1. Введение

В настоящее время энергетические компании всего мира (в том числе и нефтегазовые) находятся в ситуации так называемого «технологического разрыва». Существующие технологии, основанные на использовании в качестве первичных источников энергии топливно-энергетических полезных ископаемых (технологии группы А) все меньше и меньше удовлетворяют требованиям восполнения общественных потребностей с минимальными издержками по затратам и ресурсам, снижения негативного воздействия на окружающую среду и сохранения

¹ Светлана Валерьевна Ратнер, доктор экономических наук (laparat@mail.ru, тел. (495) 334-79-00).

² Валерий Олегович Михайлов, аспирант (mihailovval25@mail.ru, тел. (928) 262-80-06)

целостности экосистем [8]. Однако для большинства новых технологий в области развития энергетики (технологии группы *B*) их коммерческий потенциал еще до конца не ясен, а стоимость перехода на новые технологии чрезвычайно высока. Известно, что экономический агент, первым начавший в нужный момент освоение технологии *B* и соответствующие капиталовложения в нее, получает весомые шансы повысить свою конкурентоспособность в будущем за счет достижения высокого уровня технологической сложности своих производственных процессов, выхода на новые рынки и установления своего лидерства на них, в том числе и посредством введения новых стандартов энергоэффективности. Неопределенность ситуации заключается в том, что агенты не знают, когда начинать вкладывать в технологию *B*, в каком объеме это необходимо делать и как поступить с возможностями технологии *A* с точки зрения сохранения финансового потенциала компании [7].

Поэтому для определения порогового уровня технологической сложности проектных систем нефтегазовой компании [5] необходимо идентифицировать комплекс технологий *A*, комплекс технологий *B* и путем сравнительного анализа динамики их развития установить точку равновесия между их совокупностями в портфеле инвестиционных проектов, позволяющую осуществить плавный переход от *A* к *B* с минимальными финансовыми потерями. Кроме критерия снижения финансовых потерь и максимизации прибыли при переходе от технологий группы *A* к технологиям группы *B* также необходимо учитывать требования международного сообщества по снижению выбросов в атмосферу CO₂. Учитывая глобальные тенденции развития энергетики, данное требование может стать даже более важным, чем требование коммерческой эффективности. Поэтому соотношение долей проектов различной технологической сложности в структуре инвестиционного портфеля компании, по нашему мнению, следует определять на основе требований сценария карты *BLUE*, разработанного Международным энергетическим агентством и предполагающего активные приложения управленческих воздействий к энергетическим (в том числе нефтегазовым компаниям как кластерооб-

разующим предприятиям) для достижения цели снижения выбросов CO_2 к 2050 году вдвое по сравнению с 2005 годом.

Эксперты различных уровней и стран едины в своем мнении о том, что следующий технологический уклад развития экономики будет базироваться на использовании возобновляемых источников энергии. Весь комплекс технологий, относящийся к получению тепловой, электрической энергии и топлива за счет возобновимых источников, определим как комплекс технологий *B*. Технологии, закрепляющие использование нефти и газа как основных источников энергии, определим как комплекс технологий *A*.

Основой комплекса технологий *A* в настоящее время являются инновационные технологии, направленные на повышение эффективности производства энергии и топлива из нефти и газа. ТНК и образующиеся вокруг них кластеры энергетических компаний в силу своей ведущей роли в процессе смены существующего технологического уклада экономики вынуждены сочетать различные виды инвестиционных стратегий и вводить в свои портфели проекты, ориентированные на развитие промежуточных (между *A* и *B*) или конвергентных технологий. К таким технологиям можно отнести комплекс низкоуглеродных технологий, которые, наряду с альтернативной энергетикой, в настоящее время становятся инвестиционно привлекательными.

В настоящей работе построена и реализована на языке программирования *Perl* имитационная модель, позволяющая прогнозировать динамику развития нефтегазовой компании в условиях реализации сценария *BLUE* в зависимости от стратегии распределения инвестиционных ресурсов на развитие технологий типа *A* и технологий типа *B* и интенсивности инвестиционного процесса.

В настоящее время имитационное моделирование достаточно часто применяется в решении задач об управлении инвестиционными проектами или их портфелями. При этом, как правило, основное внимание уделяется риску и неопределенности внешней среды, которые моделируются как случайные возмущения в моделях Монте-Карло [4, 9]. Более сложные стохастические сетевые модели класса *GERT* для оценки рисков

в отношении сроков реализации и стоимости отдельных проектов компании допускают циклические операции и неопределенность в порядке их выполнения [1, 3].

В отличие от указанных подходов в настоящей работе рассматривается процесс параллельной реализации двух последовательностей нескольких различных проектов, в каждой из которых проекты относятся к одному технологическому классу и схожи по срокам окупаемости и средней норме рентабельности. Поскольку индивидуальные особенности проектов, принадлежащих одной и той же последовательности, никак не учитываются, а все процессы деятельности компании описываются в терминах накопителей, потоков и информации, которая определяет величину этих потоков, данную имитационную модель можно отнести к классу моделей системной динамики [10]. Кроме того, в модели учтена возможность введения управленческого воздействия, заключающегося в изменении инвестиционной стратегии компании (информации, определяющей величину инвестиционных потоков), что позволяет провести аналогию с имитационными моделями, построенными на основе использования знаковых ориентированных графов, аппарат которых позволяет формально строить траектории движения моделируемой системы и вводить управляющее воздействие в фазовом пространстве ее переменных на основе информации о программах ее развития в виде импульсных процессов. Однако в отличие от реализаций данного подхода в работах [2, 6], включающих возможность выбора нескольких альтернативных сценариев развития системы только на первых шагах импульсного процесса, в предложенной модели управленческое воздействие может быть приложено на любом шаге имитационного цикла по выбору исследователя.

На основе результатов имитационного моделирования разработаны сценарии развития нефтегазовых компаний при использовании ими различных инвестиционных стратегий, определены зависимости между интенсивностью инвестирования и распределением инвестиционных ресурсов, позволяющие максимизировать среднее значение прибыли компании за весь период прогнозирования.

2. Моделирование развития нефтегазовой компании в зависимости от выбираемой ею стратегии формирования проектного портфеля

Для определения зависимости цены основных видов продукции нефтегазовой компании от рыночного спроса используем уравнение рыночного равновесия в линейной форме

$$P_g = A + b \cdot D_g$$

$$P_o = B + c \cdot D_o,$$

где P_g, P_o – цена на природный газ и нефтепродукты соответственно; A, B – их текущая себестоимость; D_g, D_o – спрос на природный газ и нефтепродукты; b, c – коэффициенты эластичности.

Рассмотрим основные компоненты себестоимости продукции нефтегазовых компаний. Не учитывая компоненты, связанные с управлением, себестоимость природного газа можно представить как

$$A = C_p + C_e + C_t,$$

где C_p – затраты на геологоразведку; C_e – затраты на добычу; C_t – затраты на транспортировку.

А себестоимость нефтепродуктов представим как

$$B = C_{rm} + C_{proc} + C_t,$$

где C_{rm} – стоимость сырья; C_{proc} – затраты на переработку; C_t – затраты на транспортировку.

Введем параметр Π – прибыль компании, определяемый в упрощенном случае, не включающем другие виды производственной деятельности компании, как

$$\Pi = (P_g - A) \cdot V_g + (P_o - B) \cdot V_o + \text{ПП},$$

где ПП – потенциальная прибыль от внедрения технологий нового технологического уклада (технологий типа B); V_g, V_o – объем производства газа и нефтепродуктов соответственно, для простоты принятые константами, соответствующими текущему уровню объемов производства той или иной компании.

Заметим, что при циклических снижениях спроса на продукцию, связанных с колебаниями деловой активности в миро-

вой экономике, нефтегазовые компании обычно сокращают добычу, стремясь сохранить установившийся уровень цен. Однако в нашем случае природа снижения спроса совершенно иная, определяемая сменой технологического уклада и представляемая в виде долгосрочного нисходящего тренда. Поэтому будем считать, что компании-производители поддерживают текущие объемы производства, чтобы максимальным образом «выжать» прибыль из существующих технологий.

Будем считать, что определенную долю прибыли Π (нераспределенная прибыль) компания реинвестирует в разработку новых технологий по следующим направлениям: альтернативная энергетика (технология B); инновационные технологии разведки и добычи (технология A); инновационные технологии транспортировки (технология A /конвергентные технологии); инновационные технологии переработки (конвергентные технологии).

Справедливость предположения об инвестировании части собственных средств в разработку и внедрение инновационных технологий подтверждается эмпирическими данными официальной статистики и отчетности крупных нефтегазовых корпораций [7].

Будем считать, что распределение инвестиционных ресурсов компании по данным направлениям происходит в процентном соотношении, соответствующем приоритетам, заложенным в ее стратегии или в энергетической стратегии государства, если основным собственником компании является государство. Учитывая данные соображения, инвестиции компании ОАО «Газпром» в разработку и внедрение новых технологий можно оценить следующим образом:

$$(1) \quad I(i) = k \cdot \Pi(i-1) = ITT(i) + IAT(i),$$

$$(2) \quad ITT(i) = 0,95 \cdot I(i), \quad IAT(i) = 0,05 \cdot I(i)$$

где $I(i)$ – инвестиции компании на i -м шаге имитационного цикла (имитационный цикл – весь период работы модели, определяемый исследователем; один шаг приблизительно равен одному году); k – коэффициент интенсивности инвестирования (доля прибыли, направляемой на развитие инновационных технологий всех трех рассматриваемых типов); $ITT(i)$ – инве-

стиции компании в разработку и внедрение технологий типа A и конвергентных технологий на i -м шаге имитационного цикла; $IAT(i)$ – инвестиции компании в разработку и внедрение технологий типа B на i -м шаге имитационного цикла.

Будем считать, что инвестиции в указанные выше технологии через определенный период времени (равный периоду окупаемости инвестиционных проектов, направленных на разработку и внедрение инновационных технологий) снижают величину соответствующего компонента себестоимости продукции (в процентном соотношении, равном рентабельности инвестиций), что в свою очередь ведет к увеличению прибыли и инвестиционных возможностей компании. Отразим это введением дополнительного члена в выражение, описывающее прибыль компании:

$$(3) \quad \Pi = (P_g - A) \cdot V_g + (P_o - B) \cdot V_o + \text{ПП} + \Pi_{_ITT}$$

Здесь $\Pi_{_ITT} = \Delta A \cdot V_g + \Delta B \cdot V_o$ – прибыль от инвестиций в разработку инновационных решений по направлениям A и конвергентных технологий.

Чтобы оценить величину $\Pi_{_ITT}$ на каждом шаге имитационного цикла необходимо знать период окупаемости инвестиционных проектов по разработке и внедрению инновационных технологий в выбранных направлениях, а также их рентабельность, что определяется на основе эмпирических данных по нефтегазовой отрасли в целом и по деятельности исследуемой компании в частности.

3. Определение эндогенных и экзогенных параметров модели на основе эмпирических данных по отрасли

Рентабельность инвестиционных проектов по различным направлениям деятельности компании ОАО «Газпром», связанным с разработкой и внедрением технологий типа A и конвергентных технологий на основе эмпирических данных, представленных в открытом доступе, к сожалению, оценить не представляется возможным. Однако можно оценить их рентабельность в целом, без разбивки на направления. Так, по данным члена Правления

ОАО «Газпром» О.Е. Аксютина, суммарные затраты Программы энергосбережения компании, направленной на развитие инновационных технологий в области разведки, добычи, транспортировки газа и переработки нефтепродуктов в период 2011–2013, составляют 4920,8 млн. руб., тогда как ожидаемая экономия составит 11880,9 млн. руб. Таким образом, можно приблизительно считать период окупаемости инвестиций в технологии типа *A* и конвергентные технологии равным 3 шагам имитационного цикла (что является нижней оценкой срока окупаемости), а коэффициент *IR* приблизительно равным 2,4.

В качестве внешних условий развития компании рассматривается реализация сценария *BLUE* развития мировой экономики, изученного в первой главе работы. Заложенные в него цифры использованы для калибровки модели. Так, например, согласно сценарию *BLUE*, снижение спроса на нефтепродукты в период 2012–2050 составит 1,3% в год в предположении о линейном характере данного процесса. Правдоподобность данного предположения подтверждается динамикой снижения специальных тарифов на электроэнергию, получаемую из альтернативных источников, заложенной в *Renewable Energy Sources Act* (Германия), которая также является линейной и составляет 5% в год, начиная с 2015 года [11]. В соответствии с тем же сценарием *BLUE* снижение спроса на природный газ составит 0,3% в год.

Так как согласно прогнозам *Renewable Energy Sources Act* (Германия) и других документов по развитию альтернативной энергетики рентабельность технологий типа *B* в среднем через 15 лет сравнивается с текущей рентабельностью технологий типа *A*, для оценки роста значений величины ПП в выражении (3), необходимо оценить среднюю рентабельность технологий типа *A* в настоящее время. Рентабельность продукции топливно-энергетических компаний, полученной в основном за счет использования технологий типа *A*, в период с 2005 по 2009 гг. снизилась с 35% до 28%. Однако несмотря на снижение рентабельности компаний добывающего сектора, произошедшее за последние годы, рентабельность их продукции остается намного выше, чем в других отраслях экономики. Снижение рентабельности добычи компенсируется у крупных энергетических кон-

цернов типа ОАО «Газпром» увеличением рентабельности производства нефтепродуктов. Характер изменений рентабельности активов компаний по добыче топливно-энергетических полезных ископаемых полностью совпадает с характером изменений рентабельности компаний по производству кокса и нефтепродуктов, которая на период 2005–2009 гг возросла с 21 до 26%.

Таким образом в качестве средней оценки показателя рентабельности инвестиций в технологии типа *A* можно принять 30% ($IR = 1,3$). Кроме того, используя данные *Renewable Energy Sources Act* по бонусным тарифам на электроэнергию, полученную с помощью альтернативных источников [4], которые как минимум в 4,8 раз выше, нежели обычные, нетрудно рассчитать, что в настоящее время рентабельность технологий типа *B* отрицательна, а коэффициент IR колеблется в пределах 0,2–0,27.

Тогда получим следующие выражения для пошаговой оценки показателя возврата инвестиций:

$$(4) \quad \Pi_ITT(i) = RIT(i) = 2,4 \cdot ITT(i - 3)$$

$$(5) \quad \Pi\Pi(i) = (0,2 + 0,073 \cdot (i - 1)) \cdot IAT(i)$$

Разработанная имитационная модель позволяет осуществить прогноз различных показателей деятельности нефтегазовой компании в зависимости от избранной ею инвестиционной стратегии на период до 2050 года в предположении реализации сценария *BLUE*. Формулы (1)–(5) полностью задают алгоритм преобразований эндогенных и экзогенных параметров модели при переходе от одного ее состояния к другому. Программная реализация модели выполнена на языке *Perl*, относящемся к классу открытого программного обеспечения.

Следует отметить, что модель позволяет определить качественные закономерности развития компаний и оценить относительные показатели роста в динамике, но не их абсолютные величины. Экзогенными параметрами, вводимыми в модель, являются текущие цена единицы основной продукции компании и объем реализации продукции. Учитывая качественный характер построений, при задании данных параметров на «входе» модели необходимо лишь правильно оценить их порядок. Однако при этом результаты, полученные на «выходе» нуждаются в

осторожной интерпретации: полученные количественные оценки имеют смысл лишь в сравнении с их первоначальными значениями. Так, полученные количественные оценки прибыли можно правильно интерпретировать лишь в процентном соотношении с первоначальной прибылью, полученной на нулевом имитационном цикле.

В процессе моделирования под традиционной инвестиционной стратегией понимается стратегия инвестирования 95% инвестиционных ресурсов в разработку и внедрение инновационных технологий типа *A* и конвергентных технологий и 5% – в разработку и внедрение альтернативных технологий. Под комбинированной инвестиционной стратегией понимается стратегия формирования проектного портфеля компании, при которой 80% инвестиционных ресурсов направляется на развитие технологий типа *A*, а 20% – на развитие технологий типа *B*. Под альтернативной стратегией понимается стратегия формирования проектного портфеля компании, при которой 50% инвестиционных ресурсов направляется на развитие технологий типа *B*.

Доля нераспределенной прибыли, инвестируемой в разработку технологий всех типов (коэффициент интенсивности инвестирования k , $0 < k \leq 1$), может варьироваться на «входе модели», но сохраняется постоянной на протяжении всего периода имитации. Теоретически компания может инвестировать всю прибыль в развитие, однако исходя из анализа эмпирических данных, представленных в отчетности крупных нефтегазовых компаний, значение коэффициента интенсивности инвестирования больше 0,5 маловероятно.

4. Прогнозирование динамики прибыли нефтегазовой компании на основе имитационного моделирования

На рис. 1 представлен график, отражающий динамику прибыли компании при реализации традиционной инвестиционной стратегии. Резкий скачок показателей прибыли компании на интервале между 3 и 5-м шагом имитационного цикла с момента осуществления первоначальных инвестиций связан с достижением периода окупаемости инновационных решений, принад-

лежащих группе технологий *A* и конвергентных технологий. Подобный, но гораздо менее резкий скачок, также наблюдается между 9 и 11-м шагом с момента осуществления первоначальных инвестиций. В последующий период происходит медленное снижение показателей прибыли за счет снижения спроса на ископаемые источники энергии и цены на продукцию компании. Падение прибыли к концу имитационного цикла составляет приблизительно 10,5% от первоначальных показателей.

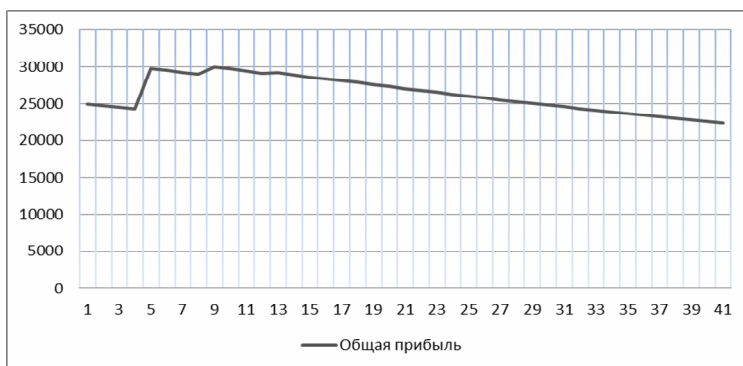


Рис. 1. Динамика снижения прибыли нефтегазовой компании при использовании традиционной инвестиционной стратегии, $k = 0,1$

Исследование структуры прибыли компании показывает, что в течение первых двух лет (имитационных циклов) прибыль компании достигается только за счет реализации традиционных видов продукции. Начиная с третьего года (шага имитационного цикла) с момента инвестирования в энергосберегающие технологии, значительная часть прибыли компании (от 17 до 25%) формируется за счет более эффективного использования энергетических ресурсов при добыче и транспортировке традиционных видов продукции. Данная компонента в общей структуре прибыли является наиболее стабильной и, начиная с 10-го года, держится практически на постоянном уровне, несмотря на снижение общей прибыли компании вследствие падения спроса на традиционные виды продукции. Доля прибыли, получаемая за счет внедрения технологий типа *B*, сначала имитационного

цикла ничтожно мала, тем не менее с течением времени она постоянно возрастает линейным образом (в полном соответствии с заложенным в модель линейным характером процесса достижения окупаемости инвестиций в альтернативную энергетику).

Исследуем вопрос о том, как будет изменяться прибыль нефтегазовой компании при использовании комбинированной инвестиционной стратегии, когда доля инвестиционных ресурсов, направляемых на разработку и внедрение инновационных технологий типа *A* и конвергентных технологий, составляет 80%, а на разработку и внедрение альтернативных технологий – 20% (что равносильно изменению в модели коэффициентов в формулах (2) на 0,8 и 0,2).

Как видно из сравнения графиков, представленных на рис. 1–2, динамика снижения общей прибыли нефтегазовой компании при использовании традиционной и комбинированной инвестиционных стратегий изменяется незначительно. Сохраняются такие общие тенденции, как скачкообразный рост прибыли на 3–5 шаге имитационного цикла, менее заметный скачок между 8–9 шагами и последующий плавный спад. Однако кривая прибыли при использовании комбинированной стратегии несколько более сглаженная – пик прибыли между 3 и 5 шагами имитационного цикла меньше по абсолютному значению, но и падение в конце имитационного цикла также меньше. По сравнению с первоначальными показателями оно составляет 9,6%.

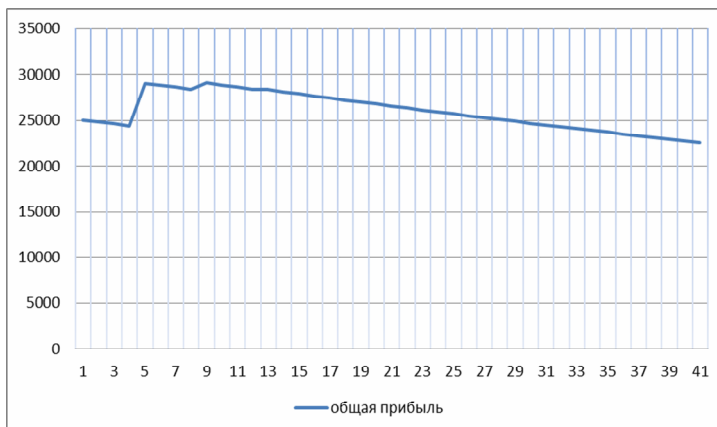


Рис. 2. Динамика снижения прибыли нефтегазовой компании при использовании комбинированной инвестиционной стратегии, $k = 0,1$

Далее проведем исследование динамики прибыли нефтегазовой компании в том случае, если она будет направлять более значительную долю своих инвестиционных ресурсов на разработку и внедрение альтернативных технологий. Назовем стратегию инвестирования, при которой 50% инвестиционных ресурсов направляются на разработку и внедрение альтернативных технологий, альтернативной стратегией инвестирования. При этом коэффициенты в формулах (2) положим по 0,5.

Как видно из графика, представленного на рис. 3, динамика снижения прибыли при использовании альтернативной стратегии инвестирования является еще более гладкой, падение в конце имитационного цикла составляет всего 7,65% от первоначальных значений. Однако если сравнить средние значения прибыли компании при использовании различных инвестиционных стратегий на протяжении имитационного цикла, то средняя прибыль за весь период будет все же больше при использовании традиционной стратегии инвестирования (рис. 4), что достигается, в основном, за счет резкого роста отдачи от инвестиций на первых 10–12 шагах.

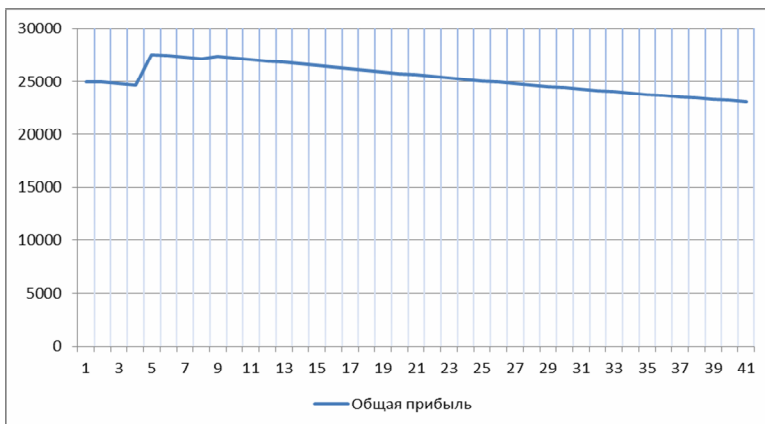


Рис. 3. Динамика снижения прибыли при использовании альтернативной стратегии инвестирования, $k = 0,1$

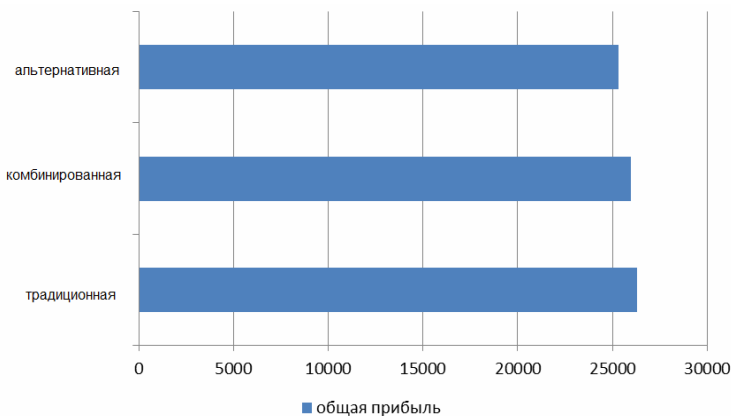


Рис. 4. Сравнение средней за период прибыли компании при использовании различных инвестиционных стратегий

Однако разница в средней прибыли при использовании трех различных видов инвестиционных стратегий невелика: между традиционной и комбинированной стратегией она составляет всего лишь 1%, а между традиционной и альтернативной – 3,5%.

Исследование изменений структуры общей прибыли при использовании альтернативной стратегии инвестирования показывает, что приблизительно на 15-м шаге имитационного цикла

вклад традиционных и альтернативных технологий в общую прибыль компании сравнивается, а начиная с 31-го шага рост прибыли достигается в основном за счет внедрения альтернативных технологий (рис. 5).

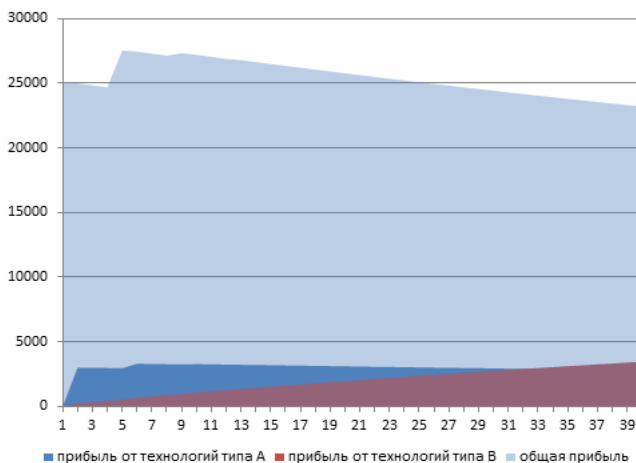


Рис. 5. Структура прибыли при реализации альтернативной стратегии, $k = 0,1$

Следует заметить, что данный результат свидетельствует о правильности калибровки модели и, следовательно, о корректности ее работы, а также о том, что ее можно использовать для построения прогнозов развития компаний.

5. Формирование оптимальной инвестиционной стратегии нефтегазовой компании

Исследуем вопрос о том, как будет изменяться прибыль компании при увеличении коэффициента интенсивности инвестирования. Построим графики, отражающие динамику изменения прибыли компании и ее структуру при использовании традиционной, комбинированной и альтернативной стратегий инвестирования при $k = 0,2$.

Главной отличительной чертой построенных графиков от предыдущего случая с коэффициентом интенсивности инвести-

рования, равным 0,1, является то, что на исследуемом временном горизонте прибыль компании вообще не падает ниже уровня первоначального значения (рис. 6). При использовании традиционной и комбинированной инвестиционной стратегии прибыль компании сначала демонстрирует скачкообразный рост в несколько этапов, объясняемый резким увеличением эффективности используемых технологий на 3–5, 7–9 и 11–13 шагах имитационного цикла. Затем следует плавный спад прибыли, тем не менее ее уровень остается выше первоначальных значений на 34,5% выше при традиционной стратегии и на 37,3% при комбинированной стратегии.

Структура прибыли при использовании традиционной и комбинированной стратегии с коэффициентом интенсивности инвестирования $k = 0,2$ в общих чертах повторяет структуру прибыли при коэффициенте интенсивности инвестирования $k = 0,1$.

А вот использование альтернативной стратегии инвестирования с коэффициентом интенсивности инвестиций $k = 0,2$ уже приводит к качественно иным результатам. Как видно из графика, представленного на рис. 6, прибыль компании в данном случае является возрастающей функцией на протяжении всего имитационного цикла. После скачкообразного роста на 3–5 и 7–9 шагах, еще более сглаженном по сравнению с динамикой изменений прибыли при использовании комбинированной инвестиционной стратегии, прибыль компании на последующих шагах имитационного цикла демонстрирует плавный рост, близкий по характеру к линейному. Общая прибыль компании на последнем шаге возрастает по сравнению с первоначальным значением на 45%.

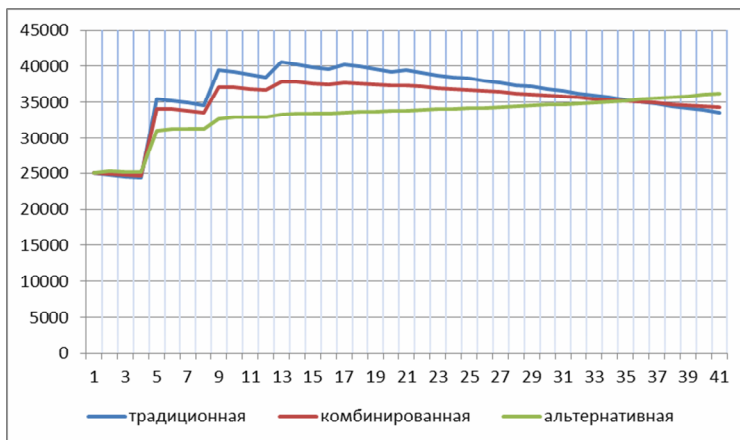


Рис. 6. Сравнительная динамика общей прибыли компании при использовании инвестиционных стратегий различного типа, $k = 0,2$

На диаграмме, отражающей структуру прибыли (рис. 7) можно заметить, что начиная с 15-го шага имитационного цикла основной вклад в рост прибыли вносят альтернативные технологии, а на последних 8–9 шагах они определяют и характер роста прибыли компании.

Однако, несмотря на явную предпочтительность динамики изменений прибыли при альтернативной стратегии инвестирования, средняя прибыль за исследуемый период по-прежнему остается наибольшей при использовании традиционной стратегии инвестирования (рис. 8)

Кроме того, разница в средней прибыли за период при использовании различных типов инвестиционных стратегий с коэффициентом интенсивности $k = 0,2$ уже гораздо больше, чем в случае $k = 0,1$: между традиционной и комбинированной стратегией она составляет 3,1%, а между традиционной и альтернативной – 8,3%.

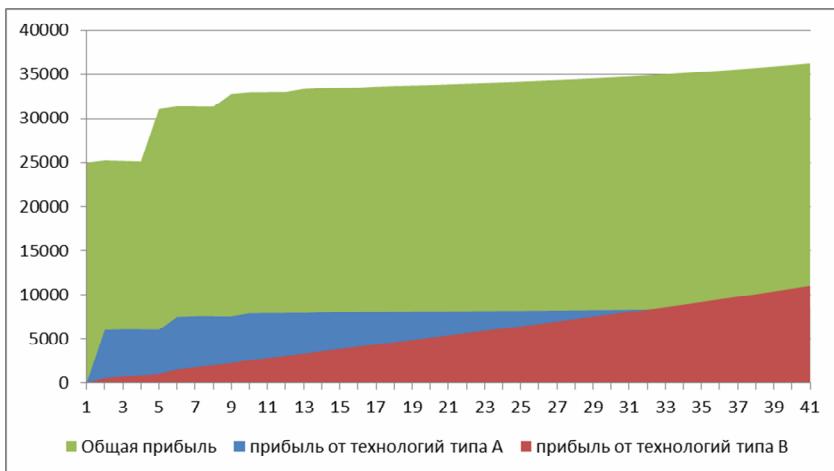


Рис. 7. Структура прибыли при использовании альтернативной инвестиционной стратегии, $k = 0,2$

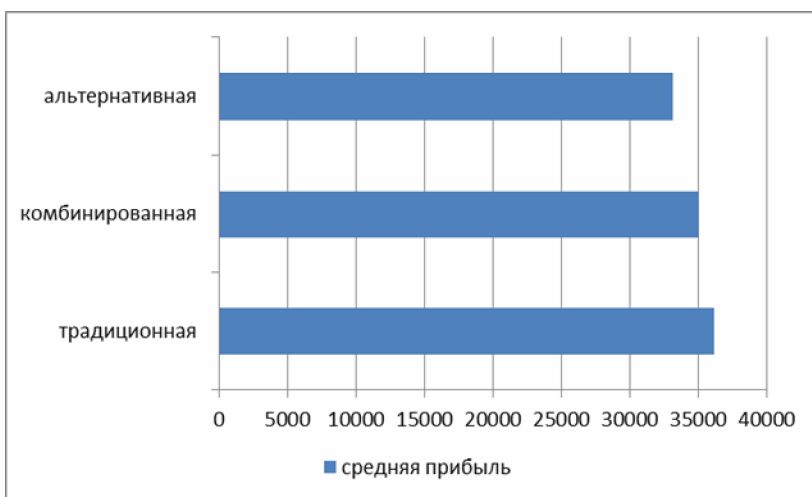


Рис. 8. Сравнение средней за период прибыли компании при использовании различных инвестиционных стратегий, $k = 0,2$

Дальнейшее увеличение коэффициента интенсивности инвестирования приводит к уменьшению выпуклости кривых прибыли при традиционной и комбинированной стратегии

инвестирования и увеличению количества в них скачкообразных участков роста, более резких для традиционной стратегии и менее выраженных для комбинированной стратегии инвестирования. Кривая прибыли, соответствующая альтернативной стратегии, наоборот, становится все более выпуклой вниз, приближаясь по форме к экспоненциальной кривой по мере продвижения к концу периода имитации (рис. 9).

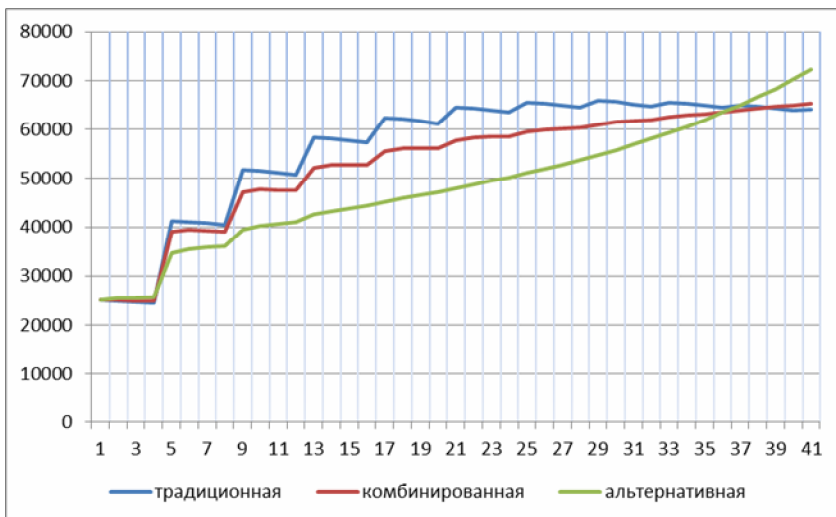


Рис. 9 Сравнительная динамика общей прибыли компании при использовании инвестиционных стратегий различного типа, $k = 0,3$

Что же касается среднего значения прибыли при использовании различных стратегий за весь моделируемый период, то сначала разница между этими величинами увеличивается, а потом, наоборот, сокращается. Так, разница между значениями средней за период прибыли традиционной и комбинированной стратегией при коэффициенте интенсивности инвестирования $k = 0,3$ составляет 5,68%, а между традиционной и альтернативной – более 14%.

При $k = 0,4$ традиционная стратегия превосходит комбинированную по среднему значению прибыли за период на 7,8%, а альтернативную – почти на 17,5%.

При коэффициенте интенсивности инвестирования $k = 0,5$ разница между значениями средней за период прибыли традиционной и комбинированной стратегией составляет 5,9%, а между традиционной и альтернативной – 7,5%. С увеличением коэффициента интенсивности инвестиций до 0,6 среднее значение прибыли за период при традиционной стратегии инвестирования уступает аналогичному показателю при комбинированной стратегии на 2,5%, а при альтернативной стратегии – аж на 35% (благодаря росту отдачи от технологий типа *B*, близкому к экспоненциальному) (рис. 10).

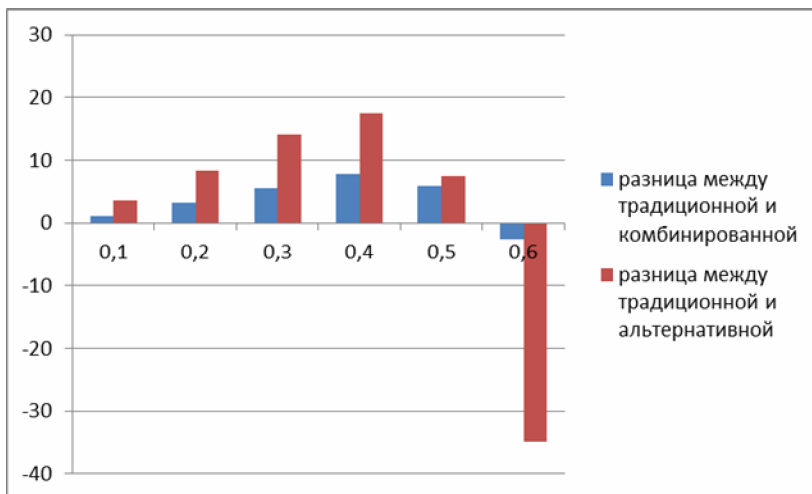


Рис. 10. Разница в значениях средней за период прибыли между традиционной, комбинированной и альтернативной стратегиями

Данный результат объясняется тем, что с увеличением количества инвестиционных ресурсов, вложенных на первоначальных стадиях имитационного цикла, экономическая отдача от них многократно возрастает быстрыми темпами и позволяет вкладывать все больше средств как в технологии типа *A*, так и в

технологии типа *B* на последующих стадиях имитационного цикла.

Полученные прогнозные результаты могут быть использованы нефтегазовыми компаниями при разработке инвестиционной стратегии. Зная долю прибыли, которая направляется на инвестиции в разработку и внедрение инновационных технологий типа *A* и *B*, компания может подобрать для себя оптимальную по динамике или по среднему значению прибыли инвестиционную стратегию. И, наоборот, выбрав определенную инвестиционную стратегию, компания может определить оптимальный коэффициент интенсивности инвестирования в разработку и внедрение инновационных технологий, позволяющий достичь нужной динамики прибыли и ее среднего за период значения.

6. Выбор временного интервала для смены инвестиционной стратегии

Анализ динамики прибыли компании при использовании различных стратегий инвестирования позволяет выдвинуть следующее предположение: добиться максимальных значений средней за период прибыли компании возможно путем смены инвестиционной стратегии от традиционной или комбинированной к альтернативной на определенном шаге имитационного цикла. При этом номер шага не должен быть слишком маленьким – чтобы позволить компании получить максимальную отдачу от вложений в инновационные технологии типа *A* (скачкообразный рост прибыли между 3–5 и 7–9 шагами имитационного цикла), и не слишком большим, чтобы успеть во время перестроиться на все более эффективные альтернативные технологии.

Проверим данное предположение, вводя в модель (1)–(5) в качестве экзогенного параметра номер шага, на котором происходит смена инвестиционных стратегий, и возможность повторного выбора инвестиционной стратегии после данного шага.

Как видно из графика, представленного на рис. 11 смена инвестиционной стратегии на альтернативную раньше 15 шага имитационного цикла не дает компании выигрыша по показате-

лю средней прибыли за рассматриваемый период. Более того, ранняя смена инвестиционной стратегии приводит к небольшому проигрышу по показателю среднего значения прибыли, который составляет приблизительно 1,7% при коэффициенте интенсивности инвестирования 0,1. Очевидно, это объясняется тем, что окупаемость альтернативных технологий в предположениях, на основе которых построена модель, достигается только через 15 лет после начала инвестиционного процесса. Смена инвестиционной стратегии на 25–35 шагах имитационного цикла дает наилучший результат по средней за период прибыли (выигрыш в 1,4%). Более поздний переход к альтернативной стратегии инвестирования также уменьшает среднюю прибыль компании.

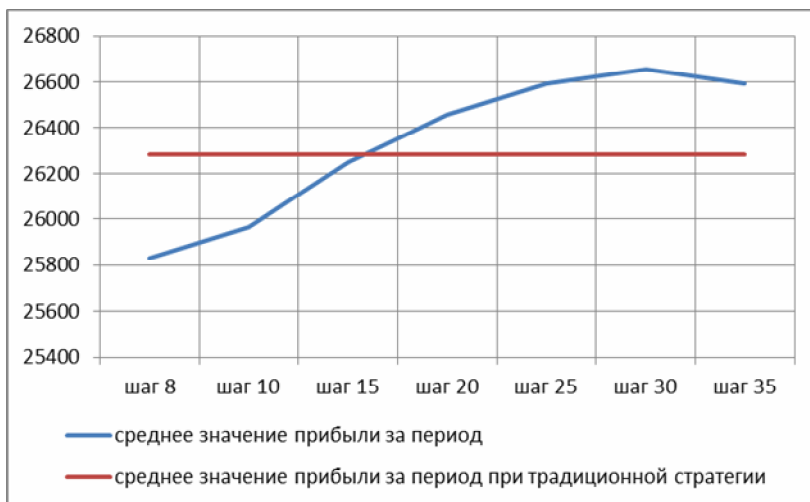


Рис. 11. Сравнение средних за период значений прибыли при традиционной стратегии и при переходе от традиционной к альтернативной стратегии, $k = 0,1$

Независимо от номера шага, на котором происходит смена инвестиционной стратегии, первые несколько лет наблюдается резкий скачок общей прибыли компании. Это связано с тем, что компания практически сразу после смены стратегии начинает получать более заметную прибыль от инвестиций в технологии

типа B , продолжая также в течение нескольких лет получать прибыль от инвестиций в технологии типа B , сделанные в предыдущие годы. Поэтому чем выше к данному периоду времени рентабельность технологий типа B , тем более резкий скачок прибыли наблюдается.

При увеличении значения коэффициента инвестирования общая картина перехода от традиционной стратегии к альтернативной в зависимости от шага имитационного цикла становится еще более выраженной (рис. 12)

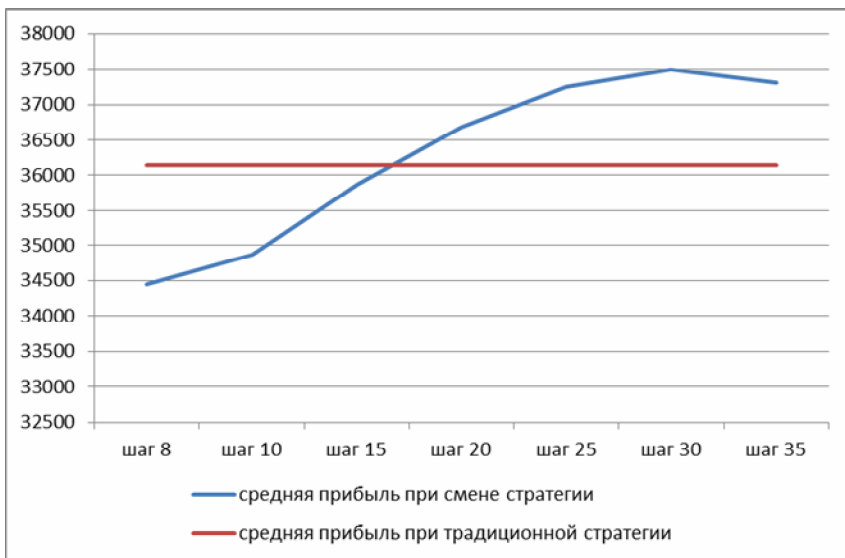


Рис. 12. Сравнение средних за период значений прибыли при традиционной стратегии и при переходе от традиционной к альтернативной стратегии, $k = 0,2$

Слишком ранний (значительно раньше 15-го шага) или слишком поздний переход (позже 30-го шага) к альтернативной стратегии приводит к еще более существенной потере в средней прибыли компании. Так, разница значений средней прибыли при традиционной стратегии и стратегии, включающий переход к альтернативной на 8-м шаге, дает проигрыш в 4,7%. Переход

на 30-м шаге дает выигрыш по сравнению с традиционной стратегией в 3,7%.

Анализ структуры прибыли позволяет определить причины возникновения более существенных отличий в значениях средней прибыли при том или ином выборе точки смены инвестиционных стратегий. Более интенсивные вложения в технологии типа *A* и конвергентные технологии приносят более значимые результаты, которые определяют скачкообразный рост общей прибыли компании не только на 3–5 и 7–9 шагах имитационного цикла, но и на более поздних. Поэтому при переходе к альтернативной инвестиционной стратегии ранее 15-го шага, компания несет более ощутимые потери от недоинвестирования в технологии типа *A*, которые все еще являются рентабельными.

Переход к альтернативной инвестиционной стратегии сначала также вызывает резкий скачок общей прибыли в силу того, что компания на протяжении нескольких лет получает прибыль от вложений в технологии типа *A*, сделанных тремя годами ранее, и одновременно получает не столь значительную, но все же прибыль от вложений в технологии типа *B*, рентабельность которых из года в год возрастает линейным образом.

При коэффициенте интенсивности инвестирования $k = 0,3$ разница при раннем переходе в альтернативной инвестиционной стратегии составляет 8,7% от среднего значения прибыли за имитационный цикл (проигрыш), а при оптимальном (30-й шаг имитационного цикла) – 9,7% (выигрыш).

Дальнейшее увеличение значения коэффициента интенсивности инвестирования приводит к результатам, аналогичным полученным в предыдущем параграфе – «цена» принятия неверного решения относительно выбора инвестиционной стратегии резко возрастает. Так, при коэффициенте интенсивности инвестирования, равном 0,4, проигрыш при слишком раннем переходе (на 8-м шаге имитационного цикла) к альтернативной стратегии инвестирования составляет более 10% от среднего значения прибыли за весь имитационный цикл, а выигрыш в случае оптимального времени перехода (25–30 шаг имитационного цикла) составляет 26,5%.

При значении коэффициента интенсивности инвестирования $k = 0,5$ оптимальное время перехода к альтернативной

инвестиционной стратегии достаточно резко смещается ближе к началу имитационного цикла. Так, результаты моделирования свидетельствуют о том, что значение средней за период прибыли компании при использовании традиционной стратегии в чистом виде и прибыли, полученной при смене инвестиционных стратегий от традиционной к альтернативной, сравниваются на 6-м шаге имитационного цикла. Переход к альтернативной стратегии позднее 8-го шага приводит к резкому увеличению потери в значениях средней прибыли. Так, если на 8-м шаге эти потери составляют 6,3% от значения средней прибыли, то на 30-м шаге (который при более низких значениях коэффициента интенсивности инвестирования был признан оптимальным), эти потери составят уже более 68%.

7. Заключение

По результатам проведенного имитационного моделирования можно сделать следующие выводы:

1. В условиях сохранения существующих тенденций в развитии технологий типа *A* и типа *B* (текущей рентабельности, линейной динамики выхода технологий типа *B* на уровень рентабельности традиционных технологий и т.д.) чем большую долю инвестиционных ресурсов компания направляет на развитие технологий типа *B*, тем более устойчивое развитие она демонстрирует на протяжении всего имитационного цикла, снижая падение прибыли, обусловленное снижением спроса на природный газ и нефтепродукты. Динамика снижения прибыли при распределении инвестиционных ресурсов 50 на 50 (50% на развитие технологий типа *A*, 50% на развитие технологий типа *B*) является еще более гладкой, падение в конце имитационного периода составляет всего 7,65% от первоначальных значений.

2. Сравнение средних значений прибыли компании при использовании различных инвестиционных стратегий на протяжении имитационного цикла показывает, что средняя прибыль за весь период наибольшая при использовании традиционной стратегии инвестирования, что достигается в основном за счет резкого роста отдачи от инвестиций в технологии типа *A* и

конвергентные технологии на первых 10–12 шагах имитационного цикла.

3. При увеличении доли прибыли, направляемой на реализацию проектов развития, до 20% от значений предыдущего временного периода общая прибыль не падает ниже первоначальных значений вслед за падением спроса на традиционные продукты компании на протяжении всего имитационного цикла. При использовании альтернативной стратегии инвестирования, когда доля инвестиционных ресурсов, направляемых на развитие технологий типа *B* равна половине от всех инвестиционных ресурсов, прибыль является возрастающей функцией на протяжении всего имитационного периода. После скачкообразного роста на 3–5 и 7–9 шагах имитационного цикла прибыль компании на последующих имитационных циклах демонстрирует плавный рост, близкий по характеру к линейному. Общая прибыль компании на последнем шаге имитационного цикла возрастает по сравнению с первоначальным значением на 45%.

4. Анализ динамики прибыли компании при использовании различных стратегий инвестирования позволяет выдвинуть следующее предположение: добиться максимальных значений средней за период прибыли компании возможно путем смены инвестиционной стратегии от традиционной или комбинированной к альтернативной на определенном шаге имитационного цикла. Проверка данного предположения показала, что при небольших значениях коэффициента интенсивности инвестиций оптимальным временем перехода компании от традиционной инвестиционной стратегии к альтернативной является 20–30 шаг от начала имитационного периода.

5. При более высоких значениях коэффициента интенсивности инвестирования оптимальное время перехода к альтернативной инвестиционной стратегии достаточно резко смещается ближе к началу имитационного периода. Так, результаты моделирования при $k = 0,5$ свидетельствуют о том, что значение средней за период прибыли компании при использовании традиционной стратегии в чистом виде и прибыли, полученной при смене инвестиционных стратегий от традиционной к альтернативной, сравниваются на 6-м шаге имитационного периода. Переход к альтернативной стратегии позднее 8-го шага приво-

дит к резкому увеличению потери в значениях средней прибыли.

Литература

1. АХБЮДЖА Х. *Сетевые методы в проектировании и производстве*. – М.: Наука, 1979. – 640 с.
2. ГРИБОВА Е.Н., НИЖЕГОРОДЦЕВ Р.М. *Управление развитием территорий: имитационное моделирование катастроф и преодоления их последствий* // Управление большими системами: Сб. трудов мол.уч. / Под общ. ред. Д.А. Новикова. – 2003. – №5. – С. 21–34.
3. ДЕМКИН И.В. *Управление инновационным риском на основе имитационного моделирования* // Проблемы анализа риска. – 2005. – Т.2, №3. – С. 249–273.
4. ДЕМКИН И.В., ПЕРЦЕВ Д.В. *Метод оценки интерпретированного риска портфеля инновационных проектов* // Проблемы управления. – 2009. – №3 – С. 54–60.
5. КЛЕЙНЕР Г.Б. *Микроэкономика знаний в свете системной парадигмы* // Инновационное развитие: экономика, интеллектуальные ресурсы, управление знаниями / Под ред. Б.З. Мильнера. – М.: ИНФРА-М, 2010. – С. 624 .
6. НИЖЕГОРОДЦЕВ Р.М., ГРИБОВА Е.Н., ЗАНЬКОВА Л.П., ХАТЬКО А.Ю. *Нелинейные методы прогнозирования экономической динамики региона*. – Харьков: ИД «Инжэк», 2008. – 320 с.
7. РАТНЕР С.В., АКИНИНА М.М. *Методика оценки инновационного потенциала компаний регионального нефтегазового кластера (на примере Краснодарского края)* // Экономический анализ: теория и практика. – 2011. – №4 – С. 2–10.
8. СУХАРЕВ О.С. *Экономика технологического развития*. – М.: Финансы и статистика, 2008 – 480 с.
9. BETTER M., GLOVER F. *Selecting project portfolios by optimizing simulations* // The Engineering Economist. – 2007. – №51. – P. 81–97.
10. FORRESTER J. *Industrial Dynamics*. – Cambridge, MA: MIT Press, 1961. – 464 p.

11. *The Wind Energy Industry in Germany*. Issue 2010/2011. – Berlin: Germany Trade and Invest, 2010. – 16 p.

DEVELOPMENT OF OIL&GAS COMPANIES IN SITUATION OF “TECHNOLOGICAL GAP”

Svetlana Ratner, Institute of Control Science, RAS, Moscow, Doctor of Science (lanarat@mail.ru).

Valery Michaylov, Kuban State University, Krasnodar, graduate student (michalovval25@mail.ru).

Abstract: We suggest a simulation model for choosing a strategic direction of oil&gas company development under a scenario of gradual displacement of traditional energy generation technologies with innovative renewable energy sources. We use this model to investigate influence of innovations intensity and details of funds distribution on company income.

Key words: energy company, technological complexity, clean energy, diversification, simulation model.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии Р. М. Нижегородцевым

УДК 658.7.01
ББК 39.38

МОДЕЛЬ ФОРМИРОВАНИЯ СИСТЕМЫ ДВУХЭТАПНОГО ТРАНСПОРТИРОВАНИЯ ТВЕРДЫХ МУНИЦИПАЛЬНЫХ ОТХОДОВ

Миронюк В. П.¹, Цыплаков В. Ю.²

*(Ростовский государственный строительный
университет, Ростов-на-Дону)*

Представлена модель формирования системы двухэтапного транспортирования твердых муниципальных отходов, позволяющая получить информацию об оптимальном размещении и количестве мусороперегрузочных станций. Особенностью модели является возможность адаптации формируемой системы двухэтапного транспортирования твердых муниципальных отходов к местным условиям исследуемой территории.

Ключевые слова: твердые муниципальные отходы, технологический процесс перевозки, пункт сбора, пункт ликвидации, мусороперегрузочная станция.

1. Введение

Под твердыми муниципальными отходами (далее ТМО) понимаются остатки веществ, материалов, предметов, изделий, товаров, частично или полностью утративших свои первоначальные потребительские свойства для использования по прямому или косвенному назначению, образующиеся в бытовых условиях в результате жизнедеятельности населения, а также в офисах, торговых предприятиях, мелких промышленных объек-

¹ Виталий Петрович Миронюк, доктор экономических наук, профессор тел.(863) 227-04-75.

² Владимир Юрьевич Цыплаков, аспирант, тел. (863) 227-04-68, (vu.tsyplakov@mail.ru).

тах, школах, больницах, других муниципальных учреждениях [3].

В настоящее время в условиях высокой концентрации населения на небольших территориях скорость образования ТМО больше скорости их естественной переработки окружающей природной средой. Поэтому рациональное управление муниципальными отходами, их вовлечение в народное хозяйство в качестве вторичных ресурсов крайне необходимо для снижения загрязнения окружающей среды.

Кроме того, сейчас во всем мире проблема управления ТМО является одной из приоритетнейших, занимая второе место по затратам и инвестициям после сектора водоснабжения и канализации в системе муниципального хозяйства [1].

Согласно материалам проекта Европейского Сообщества *INTERREG IIIA (International Regeneration)* самую существенную долю в общей структуре затрат на удаление отходов составляют транспортные затраты и составляют от 20 до 35% от общих расходов на обращение [11].

В мировой практике одним из звеньев процесса повышения эффективности ликвидации ТМО является внедрение технологического процесса перевозки ТМО с двухэтапным транспортированием (далее ДЭТ). Суть этого процесса заключается в использовании мусоросборных машин малой грузоподъемности на первом этапе транспортирования, транспортировочных мусоровозов большой грузоподъемности – на втором этапе и промежуточной перегрузки ТМО на мусороперегрузочных станциях (далее МПС).

Основное предназначение МПС заключается в сокращении транспортных затрат в системе обращения с твердыми муниципальными отходами (далее СОО) за счет уменьшения плеча вывоза подвижным составом малой грузоподъемности на первом этапе транспортирования и обеспечения перевозок ТМО укрупненными партиями подвижным составом большой грузоподъемности на втором этапе транспортирования.

Основной функцией МПС является обеспечение смешанного автомобильного сообщения. МПС, как элемент транспортно-

логистической системы перемещения ТМО, является промежуточным пунктом в логистическом канале продвижения потоков ТМО от пунктов зарождения/сбора (мусоросборные площадки) до пунктов поглощения/ликвидации (мусороперерабатывающие предприятия, пункты приема вторсырья, полигоны захоронения ТБО, свалки) потоков (см. рис. 1). Поэтому вышеуказанные пункты, как элементы транспортно-логистической системы перемещения ТМО, должны быть включены в общую процедуру формирования этой системы исходя из принципов «интеграции отдельных звеньев логистической цепи в единую систему, обеспечения эффективного взаимодействия и согласованности построения и функционирования всех элементов логистической системы» [9]. Методика формирования подсистемы сбора и подсистемы ликвидации ТМО разрабатывается отдельными блоками, но на основе требований к транспортно-логистической системе, исходящих из целей функционирования общей СОО.



Рис. 1. Схема логистического канала при реализации технологического процесса перевозки ТМО с двухэтапным транспортированием

Основными вопросами при формировании системы ДЭТ ТМО являются определение местоположения и количества МПС при условии обеспечения минимальных затрат в СОО.

Анализ существующих методов и математических моделей по оптимизации систем ДЭТ ТМО [4, 5, 6, 7, 10] показал, что каждый из них имеет те или иные недостатки для применения в задаче формирования системы (см. таблицу 1). Принципиально все эти методы и модели можно подразделить на два отличающихся друг от друга подхода:

1. Без ограничения при выборе места – позволяет найти координаты оптимальной точки размещения МПС на исследуемой территории муниципального образования (муниципальный район, городской округ и т.д., далее МО), при этом вводится допущение, что ограничений при выборе места размещения МПС не существует.

2. Из множества пригодных для размещения мест на территории МО определяется множество возможных для размещения мест и из них выбираются наилучшие.

Таблица 1. Основные недостатки существующих методов по оптимизации системы ДЭТ ТМО

Подход	Метод	Недостаток
Без ограничения при выборе места	Модель Шульца [4]	1. Не решен вопрос об определении оптимального количества МПС. 2. При определении местоположения МПС не учитываются местные условия территории МО, влияющие на выбор места. 3. Не учитываются различия в капитальных и эксплуатационных расходах на разных объектах.
	Алгоритм Бейкера. Модели: – Вебера; – Д. Маркса; – Валкера; – Ярового В.Ф. [4] – Северовой Е.С. [6]	1. Не решен вопрос об определении оптимального количества МПС. 2. При определении местоположения МПС не учитываются местные условия территории МО, влияющие на выбор места.
Из множества пригодных для размещения мест	Модель Сергеевой В.Г. [7]	1. Не решен вопрос об определении оптимального количества МПС. 2. Местоположение МПС определяется на основе экспертной оценки территории.
	Модель Академии коммунального хозяйства им. К.Д. Памфилова [5]	1. Количество МПС определяется только на основе экспертной оценки территории. 2. Местоположение МПС определяется на основе экспертной оценки территории.

Подход	Метод	Недостаток
	Модель [10]	<i>Местоположение МПС</i> определяется на основе экспертной оценки территории.

Из таблицы 1 видно, что недостатками при определении оптимального местоположения МПС всех методов первого подхода является неучет местных условий территории МО. К местным условиям территории МО, которые влияют на выбор местоположения объектов сети, относятся: рельеф земельного участка, расположение жилых зданий и организаций различных отраслей экономики, положение и качество инженерных сетей, категория земель и др.

Все вышеперечисленные местные условия, влияющие на выбор местоположения объектов сети, потенциально учитываются в методах второго подхода. Однако подбор таких мест производится экспертами – лицами принимающими решения (далее ЛПР) без должного использования математических средств. Это приводит порой к тому, что ЛПР, а главным ЛПР относительно таких вопросов в нашей стране является муниципалитет, пригодными местами для расположения МПС объявляются земельные участки, которые выгодно отдать под размещение исходя из интересов самого ЛПР (муниципалитета). Поэтому не всегда такой подход к решению задачи близок к оптимальному результату выбора местоположения МПС.

Кроме этого почти ни одним из методов вышеперечисленных подходов нельзя определить оптимальное количество МПС для обеспечения наиболее благоприятных условий в системе при достижении компромисса между снижением транспортных затрат и уменьшением издержек на строительство и эксплуатацию перегрузочных станций.

Очевидно, что задачу формирования сети МПС необходимо решать совместно с оптимизацией использования земель на территории МО. При решении задачи в такой постановке помимо вопросов оптимального размещения объектов сети важно учитывать возможность их размещения с учетом воздействия на окружающую среду, существующей застройки и категории земель.

Такого рода задачи возникают при разработке схем оптимального размещения МПС в рамках отдельно взятого МО.

Однако тенденция к созданию укрупненных объектов ликвидации ТМО, которые должны обслуживать несколько МО одновременно [2], требует включать порой в рамки исследования территории не только одного МО, а двух, трех и т.д. МО, которые тяготеют к объекту ликвидации ТМО. Таким образом, объектом исследования при формировании системы ДЭТ ТМО должна быть зона функционирования СОО, включающая территории исследуемых МО.

На основе всего вышеуказанного предлагается разработать модель формирования системы ДЭТ ТМО на базе двух вышеперечисленных подходов: «без ограничения при выборе места» и «из множества пригодных для размещения мест». Первый подход должен позволить найти оптимальную точку размещения МПС, а второй – подходящее место для размещения МПС у найденной точки. Таким образом, второй подход будет являться логическим продолжением первого. Такая модель должна позволить решить задачу не только нахождения оптимального местоположения, но и оптимального количества МПС с учетом местных условий территории МО, влияющих на СОО.

2. Определение оптимального местоположения и количества МПС

Модель (см. рис. 2) состоит из трех блоков (поиск оптимальных точек размещения МПС в зоне СОО, корректировка местоположения МПС в зоне СОО, повышение эффективности ДЭТ в зоне СОО).

Первый блок модели реализован на базе подхода «без ограничения при выборе места». Здесь при помощи математических методов производится нахождение множества оптимальных точек размещения МПС в исследуемой зоне СОО. Критерием оптимальности является минимум суммарных затрат на продвижение потоков ТМО от пунктов зарождения к пунктам поглощения в СОО.

Второй блок реализован на базе подхода «из множества пригодных для размещения мест». Здесь, исходя из местных условий исследуемой территории МО (рельеф земельного участка, расположение существующей застройки и др.), путем многоатрибутного оценивания места, лицом принимающим решение производится корректировка местоположения МПС в исследуемой зоне СОО относительно оптимальных точек, которые найдены в предыдущем блоке.



Рис. 2. Блок-схема модели формирования системы двухэтапного транспортирования ТМО

Необходимость реализации **третьего блока** модели связана с возможным увеличением суммарных расходов на транспортировку, а также капитальных и эксплуатационных затрат МПС при корректировке позиций перегрузочных станций относительно оптимальных точек из-за невозможности размещения МПС в этих точках в силу местных условий территории МО. Рост затрат в системе связан, с одной стороны, с возможным изменением величины пробега при сборе и вывозе ТМО, с другой – с местными условиями, влияющим на размеры тарифов перевалки (стоимость земельного участка, затраты на подключение к инженерным сетям, стоимость пользования инженерными коммуникациями и т.п.). Поэтому данный блок необходим для проверки решения, принятого при реализации предыдущих двух блоков, и возможного повышения экономической эффективности системы ДЭТ ТМО. Этот блок реализован на базе совместного использования подходов: «без ограничения при выборе места» и «из множества пригодных для размещения мест».

2.1. ПОИСК ОПТИМАЛЬНЫХ ТОЧЕК РАЗМЕЩЕНИЯ МПС В ЗОНЕ СИСТЕМЫ ОБРАЩЕНИЯ С ТВЕРДЫМИ МУНИЦИПАЛЬНЫМИ ОТХОДАМИ (БЛОК №1)

В данном блоке вводятся первичные исходные данные, характеризующие размеры транспортных затрат, параметры МПС, потоки отходов и касающиеся позиций пунктов сбора и ликвидации ТМО, в том числе в перспективе.

Причем выбор пунктов сбора производится при условии экономической целесообразности вывоза из них по двухэтапной схеме. Если сбор и вывоз ТМО из пункта по такой схеме невыгоден, то его параметры исключаются из набора информации, и вывоз ТМО из него должен выполняться по прямой схеме: пункт сбора – пункт ликвидации. При этом планирование перевозок ТМО осуществляется при помощи решения транспортной задачи линейного программирования с учетом стоимости ликвидации ТМО.

Отбор пунктов сбора, подходящих для включения в двух-этапную схему, производится путем *ВЕР (break-even point)* – анализа нахождения критического расстояния ($L_{кр}$) и сравнения с ним расстояний от пунктов сбора до пунктов ликвидации ТМО. Если расстояние от пункта сбора до пункта ликвидации строго больше чем $L_{кр}$, то параметры пункта сбора включаются в набор данных, если не более чем $L_{кр}$, то параметры пункта не включаются в набор и перевозка осуществляется по прямой схеме.

Расчет $L_{кр}$ осуществляется по формуле (1) [7]:

$$(1) \quad L_{кр} = \frac{T_b - T_a + B_b - B_a}{A_a - A_b};$$

где T_b, T_a – затраты на загрузку мусоровозов большой и малой вместимости соответственно, руб.; A_b, A_a – эксплуатационные затраты, зависящие от расстояния перевозки отходов, которые возникают при работе мусоровозов большой и малой вместимости соответственно, руб./км; B_b, B_a – эксплуатационные затраты, не зависящие от расстояния перевозки отходов, которые возникают при работе мусоровозов большой и малой вместимости соответственно, руб.

Основной целью формирования сети МПС является минимизация суммарных затрат на продвижение потоков ТМО от пунктов зарождения к пунктам поглощения в зоне СОО. Данные суммарные затраты C_m (m – количество МПС) состоят из:

- 1) транспортных затрат на перемещение ТМО от пунктов сбора до МПС $C^{(1)}$;
- 2) транспортных затрат на перемещение ТМО от МПС до пунктов ликвидации $C^{(2)}$;
- 3) затрат на перевалку ТМО через МПС $C^{(3)}$;
- 4) затрат на ликвидацию ТМО $C^{(4)}$.

Целевой функцией формирования сети МПС в общем виде является:

$$(2) \quad C_m = C^{(1)} + C^{(2)} + C^{(3)} + C^{(4)} \rightarrow \min$$

Такая задача сводится к совместному решению двух задач линейного программирования (транспортных задач): находже-

ния оптимального плана перевозки ТМО и одной задачи нелинейного программирования – определения координат МПС по критерию минимума суммарных затрат на продвижение потоков ТМО на выпуклой области определения переменных.

Постановка задачи. В зоне СОО имеется n пунктов сбора ТМО, объем образования ТМО в i -м пункте сбора составляет Q_i м³/мес, $i = 1, \dots, n$. Имеется K пунктов ликвидации ТМО, которые могут принять не более чем W_k^{\max} единиц ТМО, $k = 1, \dots, K$. Ограничение на пропускную способность МПС W_j^{\max} , $j = 1, \dots, m$, отсутствует. Количество пунктов перевалки ТМО (МПС) m задается. Далее везде индекс « i » используется для пунктов сбора ТМО, индекс « j » – для МПС, индекс « k » – для пунктов ликвидации ТМО. Известны:

1) тариф на транспортирование ТМО от пункта сбора к МПС, равный T_a , руб./км;

2) тариф на транспортирование ТМО от МПС к пункту ликвидации, равный T_b , руб./км;

3) средний тариф на перевалку ТМО через МПС, равный P , руб./м³;

4) тариф на утилизацию ТМО в пункте ликвидации, равный U_k , $k = 1, \dots, K$, руб./м³;

5) средние постоянные затраты на МПС, не зависящие от объемов перевалки, равные S , руб.;

6) грузопместимость автомобиля, выполняющего перевозки от пунктов сбора ТМО до МПС, q_a , м³;

7) грузопместимость автомобиля, выполняющего перевозки от МПС до пунктов ликвидации, q_b , м³;

8) коэффициент уплотнения ТМО на МПС γ .

Транспортные затраты на перемещение ТМО от пунктов сбора к МПС $C^{(1)}$ зависят от расстояния транспортировки L_{ij}^a (км) и от объема перевозок Q_{ij}^a (м³/мес.):

$$(3) \quad C^{(1)} \left(\left\{ L_{ij}^a \right\}_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, m}}, \left\{ Q_{ij}^a \right\}_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, m}} \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{T_a Q_{ij}^a L_{ij}^a}{q_a};$$

где

$$(4) L_{ij}^a = \sqrt{|X_i^a - X_j|^2 + |Y_i^a - Y_j|^2};$$

X_i^a, Y_i^a, X_j, Y_j – координаты соответствующих пунктов, $i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m$.

Аналогично транспортные затраты на перемещение ТМО от МПС до пунктов ликвидации $C^{(2)}$ зависят от расстояния транспортировки L_{jk}^b (км) и от объема перевозок Q_{jk}^b (м³/мес.):

$$(5) C^{(2)} \left(\left\{ L_{jk}^b \right\}_{\substack{j=1, \dots, m \\ k=1, \dots, K}}, \left\{ Q_{jk}^b \right\}_{\substack{j=1, \dots, m \\ k=1, \dots, K}} \right) = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^K \frac{T_b Q_{jk}^b L_{jk}^b}{q_b};$$

где

$$(6) L_{jk}^b = \sqrt{|X_j - X_k^b|^2 + |Y_j - Y_k^b|^2};$$

X_j, Y_j, X_k^b, Y_k^b – координаты соответствующих пунктов, $j = 1, \dots, m; k = 1, \dots, K$.

Затраты на перевалку ТМО через МПС $C^{(3)}$ зависят от объема перевозок Q_{ij}^a (м³/мес.) и постоянных затрат S :

$$(7) C^{(3)} \left(\left\{ Q_{ij}^a \right\}_{\substack{j=1, \dots, m \\ i=1, \dots, n}} \right) = P \cdot \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m Q_{ij}^a + m \cdot S.$$

Затраты на ликвидацию ТМО $C^{(4)}$ зависят от объема перевозок Q_{jk}^b (м³/мес.):

$$(8) C^{(4)} \left(\left\{ Q_{jk}^b \right\}_{\substack{j=1, \dots, m \\ k=1, \dots, K}} \right) = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^K U_k Q_{jk}^b.$$

Ограничения:

– неотрицательность объемов перевозок ТМО от пунктов сбора к МПС:

$$(9) Q_{ij}^a \geq 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m;$$

– неотрицательность объемов перевозок ТМО от МПС к пункту ликвидации:

$$(10) Q_{jk}^b \geq 0, \quad j = 1, \dots, m, \quad k = 1, \dots, K;$$

– полное удовлетворение потребности в сборе и вывозе ТМО из пунктов сбора:

$$(11) \sum_{j=1}^m Q_{ij}^a = Q_i, \quad i = 1, \dots, n;$$

– суммарное количество ТМО, перемещаемое в пункт ликвидации, не должно превышать его максимальной мощности:

$$(12) \sum_{j=1}^m Q_{jk}^b \leq W_k^{\max}, \quad k = 1, \dots, K;$$

– необходимость соответствия между суммарным количеством ТМО, завезенных в пункты ликвидации, и суммарным количеством отходов, вывезенных из пунктов сбора, через достигаемое на каждой МПС уплотнение:

$$(13) \sum_{k=1}^K Q_{jk}^b = \gamma \cdot \sum_{i=1}^n Q_{ij}^a, \quad j = 1, \dots, m.$$

Требуется определить такие планы перевозки ТМО от пунктов сбора ТМО к МПС $\left\{ Q_{ij}^{a*} \right\}_{\substack{i=1,n \\ j=1,m}}$ и от МПС к пунктам ликвидации ТМО $\left\{ Q_{jk}^{b*} \right\}_{\substack{j=1,m \\ k=1,K}}$, а также координаты МПС $\left\{ X_j^*, Y_j^* \right\}_{j=1,m}$, которые бы полностью удовлетворяли потребности в перевозке ТМО, а суммарные расходы на продвижение потоков ТМО от пунктов сбора к пунктам ликвидации в зоне СОО были минимальными.

Целевая функция задачи (2) записывается в виде:

$$(14) \begin{aligned} C_m \left(\left\{ X_j, Y_j \right\}_{j=1,m}, \left\{ Q_{ij}^a \right\}_{\substack{i=1,n \\ j=1,m}}, \left\{ Q_{jk}^b \right\}_{\substack{j=1,m \\ k=1,K}} \right) = \\ = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \left(\frac{T_a \sqrt{|X_i^a - X_j|^2 + |Y_i^a - Y_j|^2}}{q_a} + P \right) Q_{ij}^a + \\ + \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^K \left(\frac{T_b \sqrt{|X_j - X_k^b|^2 + |Y_j - Y_k^b|^2}}{q_b} + U_k \right) Q_{jk}^b + m \cdot S \rightarrow \min_{\{X_j, Y_j\}}. \end{aligned}$$

Отметим, что задача (9)–(14) может быть решена численно для каждого значения m .

Задача поиска множества оптимальных точек размещения МПС решается при совместном определении оптимального количества и оптимального местоположения точек. Критерием

оптимальности такой задачи является достижение компромисса между снижением транспортных затрат и уменьшением издержек на строительство и эксплуатацию перегрузочных станций.

При увеличении количества перегрузочных станций в зоне СОО сокращаются транспортные затраты, т.е. функция транспортных затрат является монотонно убывающей, однако растут затраты на строительство и эксплуатацию МПС, т.е. функция затрат на МПС является монотонно возрастающей. При уменьшении количества МПС, наоборот транспортные затраты растут, а затраты на перегрузку МПС сокращаются. Поэтому поиск оптимальных точек размещения МПС в зоне СОО предлагается производить методом простого перебора поиска точки экстремума целевой функции (14) с ограничениями (9)–(13) при пошаговом увеличении количества МПС $m = 0, 1, 2, \dots$, до тех пор, пока целевая функция не начнет возрастать после точки минимума. Количество МПС (m), при котором целевая функция C_m достигнет минимума (C_m^*), будет оптимальным (m^*).

Описание алгоритма решения задачи графическим способом представлено схемой алгоритма на рис. 3.

Замечание: при $m = 0$ математическая модель (9)–(14) преобразуется в классическую транспортную задачу (15)–(16):

$$(15) \quad C_0 \left(\left\{ Q_{ik} \right\}_{\substack{i=1,\dots,n \\ k=1,\dots,K}} \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^K \left(\frac{T \cdot L_{ik}}{q} + U_k \right) Q_{ik} \rightarrow \min;$$

ограничения:

$$(16) \quad \begin{cases} Q_{ik} \geq 0, & i=1,\dots,n, \quad k=1,\dots,K; \\ \sum_{i=1}^n Q_{ik} \leq W_k^{\max}, & k=1,\dots,K; \\ \sum_{k=1}^K Q_{ik} = Q_i, & i=1,\dots,n \end{cases}$$

где T – тариф на транспортирование ТМО, руб./км; q – грузопместимость автомобиля, м³.

В результате реализации алгоритма (рис. 3) определяются:

- координаты МПС $\{X_j^*, Y_j^*\}_{j=1, \overline{m}}$;
- количество МПС m^* ;
- планы перевозки ТМО $\{Q_{ij}^{a*}\}_{j=1, \overline{m}}, \{Q_{jk}^{b*}\}_{j=1, \overline{m}, k=1, \overline{K}}$ ($M^3/\text{мес.}$);
- значение затрат C_m^* в системе ДЭТ ТМО (руб./мес.);
- величины пропускных способностей МПС $\{W_j\}_{j=1, \overline{m}}$ ($M^3/\text{мес.}$), которые равняются суммарному объему перевозок в j -ю МПС:

$$(17) W_j = \sum_{i=1}^n Q_{ij}, j = 1, \dots, m.$$

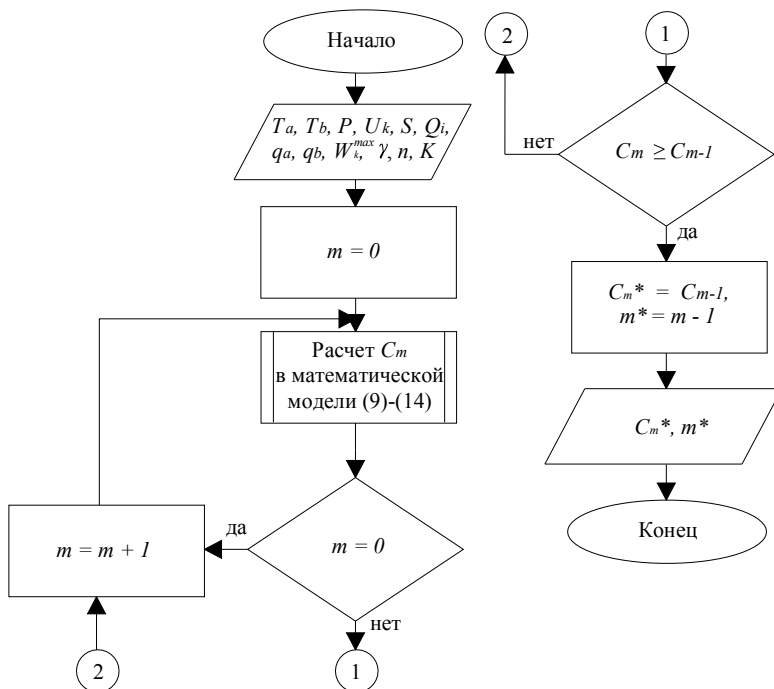


Рис. 3. Блок-схема поиска оптимальных точек размещения МПС в зоне СОО

2.2. КОРРЕКТИРОВКА МЕСТОПОЛОЖЕНИЯ МПС В ЗОНЕ СИСТЕМЫ ОБРАЩЕНИЯ С ТВЕРДЫМИ МУНИЦИПАЛЬНЫМИ ОТХОДАМИ (БЛОК №2)

Решение задачи на этом уровне связано с представлениями о том, что при формировании сети МПС в зоне СОО фактическое местоположение объекта не всегда совпадает с оптимальной точкой его размещения. Это связано с местными условиями территорий тех МО, где производится формирование сети.

Действительно, при размещении объектов строительства на местности должны учитываться градостроительные требования к использованию земельных участков, а также ряд стоимостных и других факторов, которые оказывают влияние на принятие окончательного решения. Иногда, а порой и в большинстве случаев, оптимальное с точки зрения транспортных (или других) показателей место для размещения объекта не может использоваться. Так как попадает, например, на сложный рельеф, в жилую застройку, в зону с особыми условиями использования территорий или на особо охраняемую природную территорию, т.е. на территорию где нельзя, либо нежелательно возводить МПС.

Таким образом, на выбор оптимального местоположения МПС влияют не только стоимостные показатели, но и показатели, которые порой трудно выразить в количественном виде.

Анализ территории МО удобно проводить, в том числе с использованием компьютерно-информационных средств для исследования пространственных данных – географических информационных систем (ГИС), которые используются для хранения, запроса и визуализации данных, относящихся к территории МО. В качестве такой ГИС при анализе территории МО предлагается СУБД *FreeReeson*, особенностью которой является наличие трехмерной топологической структуры с предварительной пространственной подсортировкой графических данных и чертежно-графовой схемы базы данных, которая позволяет отобразить объекты, их характеристики и связи между ними [8].

Процедура выбора окончательного местоположения МПС носит многокритериальный характер. Корректировка местоположения МПС производится при помощи аналитического иерархического метода (*Analytic Hierarchy Process*), который относится к методам решения задач многокритериальной оптимизации и позволяет определять наилучший вариант исходя из многоцелевой оценки как количественных, так и качественных критериев выбора места.

2.3. ПОВЫШЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ ДВУХЭТАПНОГО ТРАНСПОРТИРОВАНИЯ В ЗОНЕ СИСТЕМЫ ОБРАЩЕНИЯ С ТВЕРДЫМИ МУНИЦИПАЛЬНЫМИ ОТХОДАМИ (БЛОК №3)

Повышение экономической эффективности системы ДЭТ ТМО предлагается осуществлять путем пошагового добавления или вычитания перегрузочных станций до нахождения варианта с минимальным значением целевой функции. Добавление МПС осуществляется методом простого перебора поиска экстремума целевой функции, вычитание – методом полного перебора всех возможных сочетаний при поиске экстремума целевой функции.

В связи со сложностью задачи алгоритм повышения эффективности системы ДЭТ ТМО предлагается описать словесно-формульным способом.

Описание алгоритма:

А) Добавление МПС

При добавлении МПС систему с одной новой МПС будем называть «после добавления МПС», а систему, сформированную на предыдущем шаге – «до добавления МПС».

1. Выполняется расчет затрат в системе «до добавления МПС».

Замечание: так как система «до добавления МПС» является предварительно сформированной путем реализации блоков №№ 1, 2, то известны координатные привязки МПС к местности $\{X_j, Y_j\}_{j=1, \overline{m}}$. Поэтому расстояния между МПС и пунктами

сбора/ликвидации ТМО $\{L_{ij}^a\}_{\substack{i=1, \overline{n} \\ j=1, \overline{m}}}$, $\{L_{jk}^b\}_{\substack{j=1, \overline{m} \\ k=1, \overline{K}}}$ считаем тоже известными, определяемыми по дорожной сети. При расчете за-

трат в системе «до добавления МПС» модель (9)–(14) преобразуется в двухуровневую транспортную задачу (18)–(19), которую можно решить методами решения задач линейного программирования (например, методом потенциалов).

$$(18) \quad C'_m \left(\left\{ Q_{ij}^a \right\}_{\substack{j=1,\dots,n \\ j=1,m}}, \left\{ Q_{jk}^b \right\}_{\substack{j=1,m \\ k=1,K}} \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \left(\frac{T_a L_{ij}^a}{q_a} + P_j \right) Q_{ij}^a + \\ + \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^K \left(\frac{T_b L_{jk}^b}{q_b} + U_k \right) Q_{jk}^b + m \cdot S \rightarrow \min$$

ограничения:

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{l} Q_{ij}^a \geq 0, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m; \\ Q_{jk}^b \geq 0, j = 1, \dots, m, k = 1, \dots, K; \\ \sum_{j=1}^m Q_{ij}^a = Q_i, i = 1, \dots, n; \\ \sum_{j=1}^m Q_{jk}^b \leq W_k^{\max}, k = 1, \dots, K; \\ \sum_{k=1}^K Q_{jk}^b = \gamma_j \cdot \sum_{i=1}^n Q_{ij}^a, j = 1, \dots, m; \\ \sum_{i=1}^n Q_{ij} \leq W_j^{\max}. \end{array} \right.$$

2. Добавляется одна МПС. Эта МПС будет иметь номер d . Параметры объемов перевозок ТМО между соответствующими пунктами – Q_{id}^a, Q_{dk}^b ($\text{м}^3/\text{мес.}$). Аналогично:

$$(20) \quad L_{id}^a = \sqrt{|X_i^a - X_d|^2 + |Y_i^a - Y_d|^2};$$

$$(21) \quad L_{dk}^b = \sqrt{|X_d - X_k^b|^2 + |Y_d - Y_k^b|^2};$$

где X_d, Y_d – координаты МПС;

Необходимо определить координаты d -й МПС при условии минимума суммарных затрат на продвижение потоков ТМО.

Целевая функция такой задачи записывается в виде:

$$\begin{aligned}
 C_{m+1} \left(X_d, Y_d, \left\{ Q_{ij}^a \right\}_{i=1, \dots, n, j=1, \dots, m}, \left\{ Q_{jk}^b \right\}_{j=1, \dots, m, k=1, \dots, K} \right) = \\
 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \left(\frac{T_a L_{ij}^a}{q_a} + P \right) Q_{ij}^a + \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^K \left(\frac{T_b L_{jk}^b}{q_b} + U_k \right) Q_{jk}^b + \\
 (22) \quad + \sum_{i=1}^n \left(\frac{T_a \sqrt{|X_i^a - X_d|^2 + |Y_i^a - Y_d|^2}}{q_a} + P \right) Q_{id}^a + \\
 + \sum_{k=1}^K \left(\frac{T_b \sqrt{|X_d - X_k^b|^2 + |Y_d - Y_k^b|^2}}{q_b} + U_k \right) Q_{dk}^b + (m+1)S \rightarrow \min_{X_d, Y_d}
 \end{aligned}$$

при ограничениях

$$(23) \quad \left\{ \begin{array}{l}
 Q_{ij} \geq 0, \quad i=1, \dots, n, \quad j=1, \dots, m; \\
 Q_{jk} \geq 0, \quad j=1, \dots, m, \quad k=1, \dots, K; \\
 Q_{id} \geq 0, \quad i=1, \dots, n; \\
 Q_{dk} \geq 0, \quad k=1, \dots, K; \\
 \sum_{j=1}^m Q_{ij} + Q_{id} = Q_i, \quad i=1, \dots, n; \\
 \sum_{j=1}^m Q_{jk} + Q_{dk} = W_k, \quad k=1, \dots, K; \\
 \sum_{i=1}^n Q_{ij} = W_j, \quad j=1, \dots, m; \\
 W_k \leq W_k^{\max}, \quad k=1, \dots, K; \\
 W_j \leq W_j^{\max}, \quad j=1, \dots, m; \\
 \sum_{k=1}^K Q_{jk} = \gamma_j \sum_{i=1}^n Q_{ij}, \quad j=1, \dots, m; \\
 \sum_{k=1}^K Q_{jd} = \gamma \sum_{i=1}^n Q_{id}
 \end{array} \right.$$

Задача (22)–(23) может быть решена численно для каждого значения m .

3. Сравниваются затраты в системах «до добавления МПС» (C'_m) и «после добавления МПС» (C_{m+1}). Если C'_m не больше чем C_{m+1} , то осуществляется переход к вычитанию МПС из системы (шаги 8–12).

4. Иначе производится корректировка местоположения d -й МПС по методике блока № 2.

5. В (18), (19) вычисляются затраты C'_{m+1} в системе «после добавления МПС».

6. Сравниваются затраты в системах «до добавления МПС» (C'_m) и «после добавления МПС» (C'_{m+1}). Если затраты C'_m больше затрат C'_{m+1} , то значению затрат C'_m присваивается значение затрат C'_{m+1} . В систему вновь добавляется одна станция и процедура проходит новый цикл (1)–(6).

7. Иначе вариант системы «до добавления МПС» объявляется оптимальным, $C^* = C'_m$, $m^* = m$

Примечание: если принято решение о добавлении станции, то пропускная способность станций в уже сформированной системе (после реализации второго блока) должна быть уменьшена на величину разности пропускных способностей «до добавления МПС» и «после добавления МПС» ΔW_j^d :

$$(24) \Delta W_j^d = W_j - W_j^{(1)},$$

где W_j – пропускная способность j -й МПС «до добавления МПС», $j = 1, \dots, m$; $W_j^{(1)}$ – пропускная способность j -й МПС «после добавления МПС», $j = 1, \dots, m$.

Вычитание МПС.

При вычитании МПС систему без одной МПС будем называть «после вычитания МПС», а систему на предыдущем шаге – «до вычитания МПС».

8. Из системы вычитается одна МПС и вычисляются затраты C_m^e (e – номер МПС, которая вычитается из системы, $e = 1, \dots, m$) всех возможных сочетаний МПС в наборе из $m - 1$, выбранного из m МПС.

Целевая функция задачи записывается в виде:

$$(25) \quad C_m^e \left(\left\{ Q_{ij}^a \right\}_{\substack{i=1,n \\ j=1,m \\ j \neq e}}, \left\{ Q_{jk}^b \right\}_{\substack{j=1,m \\ k=1,K \\ j \neq e}} \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq e}}^m \left(\frac{T_a L_{ij}^a}{q_a} + P_j \right) Q_{ij}^a + \\ + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq e}}^{m-1} \sum_{k=1}^K \left(\frac{T_b L_{jk}^b}{q_b} + U_k \right) Q_{jk}^b + m \cdot S \rightarrow \min$$

при ограничениях

$$(26) \quad \left\{ \begin{array}{l} Q_{ij} \geq 0, \quad i=1, \dots, n, \quad j=1, \dots, m, \quad j \neq e; \\ Q_{jk} \geq 0, \quad j=1, \dots, m, \quad j \neq e, \quad k=1, \dots, K; \\ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq e}}^m Q_{ij} = Q_i, \quad i=1, \dots, n; \\ \sum_{i=1}^n Q_{ij} = W_j; \quad j=1, \dots, m, \quad j \neq e; \\ W_j \leq W_j^{\max}, \quad j=1, \dots, m, \quad j \neq e; \\ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq e}}^m Q_{jk} \leq W_k^{\max}, \quad k=1, \dots, K; \\ \sum_{k=1}^K Q_{jk} = \sum_{i=1}^n \gamma_j \cdot Q_{ij}, \quad j=1, \dots, m, \quad j \neq e \end{array} \right.$$

Примечания:

а) задача (25), (26) может быть решена численно для каждого значения m ;

б) значения расстояний $\left\{ L_{ij}^a \right\}_{\substack{i=1,n \\ j=1,m \\ j \neq e}}, \left\{ L_{jk}^b \right\}_{\substack{j=1,m \\ k=1,K \\ j \neq e}}$ определяются по

фактической дорожной сети;

в) из всех значений модели (25), (26), рассчитанной по всем возможным сочетаниям «после вычитания МПС», выбирается самое минимальное. Это значение будет опорным для последующих шагов вычисления алгоритма

9. Сравняются затраты в системах «до вычитания МПС» (C'_m) и «после вычитания МПС» (C_m^e). Если C'_m не больше C_m^e , то система «до вычитания МПС» объявляется оптимальной. $C^* = C'_m$, $m^* = m$.

10. Иначе вычисляются разности пропускных способностей каждой перегрузочной станции сети ΔW_j^0 , $j = 1, \dots, m$, $j \neq e$. От пропускной способности j -й станции «после вычитания МПС» вычитается пропускная способность j -й станции «до вычитания МПС»:

$$(27) \Delta W_j^0 = W_j^{(2)} - W_j;$$

где $W_j^{(2)}$ – пропускная способность j -й МПС «после вычитания МПС», $j = 1, \dots, m$, $j \neq e$; W_j – пропускная способность j -й МПС «до вычитания МПС», $j = 1, \dots, m$.

11. Если есть возможность увеличить производительность каждой перегрузочной станции на величину ΔW_j^0 соответственно, то значению затрат в системе «до вычитания МПС» (C'_m) присваивается значение затрат «после вычитания МПС» (C_m^e), из сети отнимается одна МПС и процедура проходит новый цикл (8)–(11).

12. Иначе сеть «до вычитания МПС» объявляется оптимальной. $C^* = C'_m$, $m^* = m$.

3. Заключение

Система двухэтапного транспортирования является одним из звеньев процесса повышения эффективности ликвидации твердых муниципальных отходов, управление которыми остается злободневной проблемой муниципальных хозяйств. Элементами данной системы являются: пункты сбора, пункты ликвидации, специализированные транспортные средства и потоки отходов, а самыми основными элементами, без которых невозможного организовать двухэтапный процесс транспортирования отходов – пункты перегрузки твердых муниципальных отходов с одного подвижного состава на другой (МПС).

Проведено исследование процедур формирования систем двухэтапного транспортирования. Основная проблема здесь

заключается в отсутствии математических моделей и методов, способных адаптировать построение сети мусороперегрузочных станций к местным условиям рассматриваемой территории муниципальных образований.

Разработана модель формирования систем двухэтапного транспортирования твердых муниципальных отходов, ее особенностями являются:

1. Определение как оптимального местоположения, так и оптимального количества МПС.

2. Адаптация формируемой системы двухэтапного транспортирования ТМО к местным условиям территории за счет корректировки местоположения МПС при помощи аналитического иерархического метода (*Analytic Hierarchy Process*), который относится к методам решения задач многокритериальной оптимизации и позволяет определять наилучший вариант исходя из многоцелевой оценки как количественных, так и качественных критериев выбора места.

3. Повышение эффективности сформированной системы, необходимость в котором связано с возможным увеличением суммарных расходов при смещении позиций перегрузочных станций относительно оптимальных точек в силу местных условий территории муниципального образования.

Разработанная модель применялась при формировании системы двухэтапного транспортирования твердых муниципальных отходов городского округа Горячий Ключ Краснодарского края в 2012 г. Модель реализовывалась в программной среде и ГИС. В результате реализации модели были оптимизированы потоки ТМО из 156 пунктов сбора в 2 пункта ликвидации, определены места и принято решение строительства 3 мусороперегрузочных станций. Данные мероприятия позволят сэкономить около 25% денежных средств на продвижение потоков ТМО в городском округе Горячий Ключ.

Литература

1. АНИСИМОВ А.В. *Прикладная экология и экономика природопользования*. – Ростов-на-Дону: Феникс, 2007. – 317 с.
2. ГАГАРИНА М.В., ШАТРОВ Д.Н. *Оптимизация технологической схемы обращения с отходами потребления. На примере Пермского края // Экология и промышленность России*. – 2008. – авг. – С. 46–50.
3. ГОСТ 30772-2001 «Ресурсосбережение. Обращение с отходами. Термины и определения».
4. ЖУРКОВИЧ В.В., ПОТАПОВ А.И. *Отходы: Научное и учебно-методическое справочное пособие*. – СПб.: Гуманистика, 2001. – 356 с.
5. *Рекомендации по выбору методов и организации удаления бытовых отходов*. – М.: ОНТИ АКХ им. К.Д. Памфилова, 1985. – 18 с.
6. СЕВЕРОВА Е.С. *Разработка методики планирования перевозок твердых коммунальных отходов автомобильным транспортом*: Дис. канд. техн. наук. – СПб, 2006. – 129 с.
7. СЕРГЕЕВА В.Г. *Формирование комплексной организационно – экономической системы управления санитарной очисткой в регионе*: Автореф. дис. докт. экон. наук. – СПб, 2005. – 35 с.
8. *Система управления базами данных. Руководство пользователя. Руководство программиста. Руководство администратора*. – Free Reason Group, 2004. – 235 с.
9. *Транспортная логистика* / Под общей редакцией Л.Б. Миротина. – М.: Издательство «Экзамен», 2002. – 512 с.
10. ТРОФИМЕНКО Ю.В., ПРОСОВ С.Н., КОМКОВ В.И. *Типовая модель управления процессом транспортирования ТБО в муниципальных образованиях // Экология и промышленность России*. – 2008. – окт. – С. 57–61.
11. *Управление твердыми бытовыми отходами*. Проект Европейского Сообщества INTERREG IIIA «Кооперация в совместном создании системы управления отходами в Псковской области», 2008.

DESIGN OF TWO-STAGE SYSTEM FOR SOLID MUNICIPAL WASTE TRANSPORTATION

Vitaly Mironyuk, Rostov State Civil of Engineering University, Rostov-on-Don, Ph. D. (Econ.), professor, phone (863) 227-04-75.

Vladimir Tsyplakov, Rostov State Civil of Engineering University, Rostov-on-Don, post-graduate student (vu.tsyplakov@mail.ru).

Abstract: We solve the problem of design of a two-stage system for solid municipal waste transportation to derive the optimum number and location of waste transfer stations. The specific feature of the model is that the constructed system is adapted to local conditions of the considered territory.

Keywords: solid municipal waste, transportation technology, collecting point, elimination point, waste transfer station.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии А. С. Манделем

УДК 541.135.5

ББК 24.57К76

РАСЧЕТ ОПТИМАЛЬНОЙ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТИ ПРОТОЧНЫХ ОБЪЕМНО-ПОРИСТЫХ КАТОДОВ

Кошев А. Н.¹, Гвоздева И. Г.², Кошев Н. А.³

*(Пензенский государственный университет архитектуры
и строительства, Пенза)*

Варенцов В. К.⁴

*(Новосибирский государственный технический
университет, Новосибирск)*

Рассматривается возможность управления электрохимическим реактором с проточными объемно-пористыми электродами из углеграфитового волокнистого материала по критерию равномерности распределения электроактивных компонентов по толщине электрода за счет выбора меняющейся по толщине электропроводности основы. Осуществлена постановка и определены пути решения задачи оптимального управления, показан алгоритм решения. Приведены результаты расчетов и экспериментальных исследований.

Ключевые слова: электрохимическая система, пористый электрод, математическая модель, оптимизация, алгоритм расчета.

¹ Александр Николаевич Кошев, доктор химических наук, зав. кафедрой информационных систем и компьютерного моделирования, профессор (koshev@pguas.ru).

² Ирина Геннадьевна Гвоздева, старший преподаватель (gvozdeva-irina@bk.ru).

³ Николай Александрович Кошев, аспирант.

⁴ Валерий Константинович Варенцов, доктор технических наук, зав. кафедрой химии, профессор.

1. Введение

Углеродные волокнистые материалы (УВМ) используются как для извлечения металлов из разбавленных растворов, так и для интенсификации окислительно-восстановительных электрохимических процессов, не сопровождающихся осаждением металлов [2–5]. В результате теоретических и экспериментальных исследований показано, что эффективность работы углеродных волокнистых электродов (УВЭ) существенно зависит от их удельной электропроводности [7, 9, 12, 14]. Распределение электрохимического процесса в УВЭ определяется профилем потенциала по толщине электрода, который, очевидно, зависит от профиля электропроводности электрода. Задание определенного профиля электропроводности по толщине электрода и токового режима позволяет реализовать требуемое распределение потенциала. Достичь этого можно, используя «наборные» электроды из нескольких слоев УВМ с различной исходной удельной электропроводностью. При этом электропроводность электрода по его толщине будет изменяться скачкообразно на границах слоев УВМ с различной электропроводностью. Удельная электропроводность УВМ зависит от температуры и химического состава среды, в которой проводится термическая обработка исходного материала, что определяет содержание углерода в УВМ. Содержание углерода в этих материалах существенно влияет на их физико-химические свойства [10, 18, 20, 21].

Использование химических методов обработки УВМ в растворах различных окислителей позволяет изменять их удельную электропроводность, не меняя существенно состава УВМ, а также создавать материалы с переменной электропроводностью по толщине электрода.

Перспективным направлением является электрохимическая обработка материала электрода. При этом изменение удельной электропроводности УВМ возможно следующими способами: 1) электродной поляризацией в растворах кислот, щелочей или индифферентных солей; 2) осаждением определенного количества металла или его сплава; 3) осаждением соединений метал-

ла, например, гидроксида. Профиль электропроводности по толщине электрода обеспечивается режимом электролиза, природой и составом электролита, а также видом исходного УВМ [6].

Возможность получения материала проточного трехмерного электрода (ПТЭ), обладающего требуемым распределением электропроводности электрода по его толщине, позволяет ставить и решать задачи по оптимальному выбору такого распределения в зависимости от принятого критерия оптимизации. Очевидно, что наиболее эффективным аппаратом исследования и подбора оптимальных условий функционирования трехмерных проточных электродов является математическое моделирование. В настоящее время существуют достаточно развитые математические модели процессов, протекающих в ПТЭ, в том числе и модели, описывающие процессы с распределенной электропроводностью электрода [8, 13].

В работе [8] приведено построение алгоритма расчета электропроводности твердой фазы системы как функции координаты по толщине электрода для обеспечения равномерного распределения электрохимического процесса по толщине ПТЭ, при этом задача решена как задача математического программирования. Вид функции распределения электропроводности УВМ по толщине пористого электрода при проведении численных расчетов принимался как постоянная, линейная и квадратичная зависимость электропроводности от координаты. В данном исследовании результаты работы [8] используются для построения первого приближения к расчету оптимальной зависимости электропроводности от координаты точки на электроде – $\chi_T(x)$. Дальнейшие шаги по оптимизации предлагается проводить с использованием теории оптимального математического управления, где за управляющее воздействие принята функция $\chi_T(x)$.

2. Постановка задачи

В большинстве электрохимических систем поток заряженных частиц i -го сорта N_i , $i = 1, \dots, n$, в объеме электролита определяется миграционной и конвективной составляющими [16]:

$$(1) \quad N_i = z_i u_i F C_i \text{grad}(E) + C_i V,$$

где z_i , C_i , u_i – соответственно заряд, концентрация и подвижность i -го электроактивного компонента в гомогенной или псевдогомогенной среде; $\text{grad}(E)$ – градиент потенциала электрического поля; V – вектор скорости конвективного переноса раствора. Уравнение (1) необходимо дополнить условием материального баланса в отсутствие гомогенной электрохимической реакции:

$$(2) \quad \frac{\partial C_i}{\partial t} = -\text{div}(N_i).$$

Таким образом:

$$(3) \quad \frac{\partial C_i}{\partial t} = -\text{div}(z_i u_i F C_i \text{grad}(E) + C_i V).$$

В одномерном случае дивергенция вектора (div) совпадает с производной, следовательно:

$$(4) \quad \frac{\partial C_i}{\partial t} = \frac{-\partial(z_i u_i F C_i \text{grad}(E) + C_i V)}{\partial x}.$$

После умножения обеих частей каждого из уравнений (4) на Fz_i и их суммирования получим:

$$(5) \quad F \sum z_i \frac{\partial C_i}{\partial t} = \frac{-\partial\left(\chi \frac{dE}{dx}\right)}{\partial x} - V \cdot F \sum z_i \frac{\partial C_i}{\partial x},$$

где $\chi = \sum z_i^2 u_i F^2 C_i$ – величина, характеризующая электропроводные свойства системы.

Используя известное соотношение [7]

$$(6) \quad \frac{\partial C_i}{\partial x} = -\frac{S_V}{|V|z_i F} J_{Si},$$

где S_V – реакционная поверхность; J_{Si} – плотность поляризующего тока по i -му компоненту, а также соотношения

$$\chi = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_T + \rho_J}, \quad \rho_T = \frac{1}{\chi_T}; \quad \rho_J = \frac{1}{\chi_J},$$

характеризующие электропроводности твердой и жидкой фаз электрохимической системы из (5) получим:

$$(7) \quad F \sum z_i \frac{\partial C_i}{\partial t} = \frac{-\partial \left(\chi \frac{dE}{dx} \right)}{\partial x} + S_v \sum J_{Si}$$

Система уравнений (6), (7) дополняется известными кинетическими уравнениями, связывающими J_{Si} и E в каждой точке электрода x [1]:

$$(8) \quad J_{Si} = j_{0i} \frac{e^{\alpha_i z_i F (E - \varphi_{Ri}) / RT} - e^{(\alpha_i - 1) z_i F (E - \varphi_{Ri}) / RT}}{1 + j_{0i} \cdot e^{\alpha_i z_i F (E - \varphi_{Ri}) / RT} / z_i F K_m C_i},$$

а также естественными граничными условиями:

$$(9) \quad C_i(0, \tau) = C_{0i}, \quad C_i(x, 0) = C_{0i}, \quad \frac{\partial E}{\partial x}(0, t) = \rho_T I(t),$$

$$\frac{\partial E}{\partial x}(L, t) = \rho_{ж} I(t), \quad E(0, x) = \varphi_{Ri}$$

В соотношениях (8), (9) j_{0i} , α_i , φ_{Ri} – соответственно ток обмена, коэффициент переноса и равновесный потенциал i -й электрохимической реакции; R – универсальная газовая постоянная; T – абсолютная температура; K_m – коэффициент массопереноса; I – габаритная плотность тока, подаваемого на электрод.

Для стационарного процесса электролиза металла на ПТЭ уравнение (7) упрощается:

$$(10) \quad \frac{d^2 E}{dx^2} = - \frac{\chi_{ж} \frac{d\chi_T}{dx}}{\chi_T(x)(\chi_T(x) + \chi_{ж})} \frac{dE}{dx} + S_v \left(\frac{1}{\chi_T(x)} + \frac{1}{\chi_{ж}} \right) \sum J_{Si}(x),$$

а граничные условия примут следующий вид:

$$(11) \quad C_i(0) = C_{0i}, \quad \frac{\partial E}{\partial x}(0) = \rho_T I, \quad \frac{\partial E}{\partial x}(L) = \rho_{ж} I,$$

где $\rho_T = \frac{1}{\chi_T(0)}$.

Таким образом, для расчета процесса электролиза из n -компонентного раствора в проточном трехмерном электроде в стационарном случае необходимо решить систему из $(n + 1)$ -го обыкновенного дифференциального уравнения (6), (10) (n уравнений первого и одно уравнение второго порядков) с граничными условиями (11).

Решение задачи в приведенной постановке позволяет достаточно полно описать электрохимические закономерности распределения процесса электролиза в ПТЭ. Однако при непосредственном численном решении задачи могут возникнуть проблемы, связанные с точностью расчетов и в первую очередь классической неустойчивостью системы уравнений, описывающих процесс.

Приведем доказательство классической неустойчивости обобщаемой системы для простейшего случая – выделения из раствора на ПТЭ одного компонента (металла). Обозначим

$$(12) \quad A = \frac{zF}{RT}, \quad B = \frac{j_0}{zFKm}, \quad D = \frac{Sv}{|V|zF}, \quad G = S_v \left(\frac{1}{\chi_{\Gamma}} + \frac{1}{\chi_{\kappa}} \right);$$

$$Y_1(x) = E(x) - \varphi_R + Y_1^0; \quad Y_2(x) = \frac{dE}{dx}(x) + Y_2^0; \quad Y_3(x) = C(x);$$

$$Y_1^0 = E(0); \quad Y_2^0 = \left. \frac{dE}{dx} \right|_{x=0}; \quad Y_3^0 = C_0.$$

Тогда система, описывающая процесс электролитического выделения металла в порах проточного объемно-пористого электрода, будет иметь вид:

$$\frac{dY_1}{dx} = Y_2 - Y_2^0 = f_1(Y_1, Y_2, Y_3);$$

$$(13) \quad \frac{dY_2}{dx} = G \left(j_0 \frac{e^{A\alpha(Y_1 - Y_1^0)} - e^{A(\alpha-1)(Y_1 - Y_1^0)}}{1 + \left(\frac{B}{Y_3} \right) e^{A\alpha(Y_1 - Y_1^0)}} \right) = f_2(Y_1, Y_2, Y_3);$$

$$\frac{dY_3}{dx} = D \left(j_0 \frac{e^{A\alpha(Y_1 - Y_1^0)} - e^{A(\alpha-1)(Y_1 - Y_1^0)}}{1 + \left(\frac{B}{Y_3} \right) e^{A\alpha(Y_1 - Y_1^0)}} \right) = f_3(Y_1, Y_2, Y_3)$$

Известно [17], что автономная система дифференциальных уравнений, каковой является система (13), имеет неустойчивое тривиальное равновесное решение ($Y_i(t) = Y_i^0$, $i = 1, 2, 3$), соответствующее точке покоя (Y_1, Y_2, Y_3 – точка покоя, если

$f(Y_1, Y_2, Y_3) = 0$), если характеристическое уравнение линеаризованной системы

$$\frac{dY_i}{dt} = \sum_{K=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial Y_K} (Y_K - Y_K^0), \quad i = 1, \dots, n,$$

$$(14) \quad \det \left[\frac{\partial f_i}{\partial Y_K} \Big|_{Y=Y_i^0} - \lambda \delta_K^i \right] = 0;$$

(δ_K^i – символ Кронекера) имеет хотя бы один корень с положительной действительной частью. В нашем случае характеристическим будет уравнение относительно λ :

$$\lambda^3 - \frac{\partial f_2}{\partial Y_1} \lambda = 0,$$

а решение этого уравнения

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_{2,3} = \pm \sqrt{\frac{\partial f_2}{\partial Y_1}}.$$

Из вида функции f_2 нетрудно заключить, что $\frac{\partial f_2}{\partial Y_1} > 0$.

Наличие корня характеристического уравнения (14) с положительной действительной частью, свидетельствует о неустойчивости системы дифференциальных уравнений (13), а следовательно, и всей системы (6), (10), (11).

Для постановки и решения задачи оптимального математического управления ОПЭ за счет выбора оптимальной зависимости электропроводности электрода от координаты $\Pi_T(x)$ приведем систему дифференциальных уравнений, моделирующих процесс электроосаждения n компонент в стационарных условиях. При этом будем использовать систему обозначений, аналогичную (11), дополненную следующими выражениями:

$$(15) \quad A_i = \frac{z_i F}{RT}; \quad B_i = \frac{j_{0i}}{z_i F K_{mi}}; \quad D_i = \frac{S_v}{uz_i F}; \quad G = \left(\frac{1}{\chi_T} + \frac{1}{\chi_{ж}} \right);$$

$$Y_{2+i}(x) = C_i(x); \quad Y_{2+i}^0 = C_{0i}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Получим систему из $n + 3$ обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$(16) \quad \frac{dY_1}{dx} = Y_2 = f_1(Y_1, Y_2, \dots, Y_{n+2}, Y_{n+3}),$$

$$\frac{dY_2}{dx} = -Y_2 u(x) \frac{\chi_{\text{ж}}}{Y_{n+3}(x)(Y_{n+3}(x) + \chi_{\text{ж}})} + G \sum_{i=1}^n j_{0i} \frac{e^{A_i \alpha_i (Y_1 - Y_1^0)} - e^{A_i (\alpha_i - 1)(Y_1 - Y_1^0)}}{1 + \left(\frac{B_i}{Y_{2+i}} \right) e^{A_i \alpha_i (Y_1 - Y_1^0)}} =$$

$$= f_2(Y_1, Y_2, \dots, Y_{n+2}, Y_{n+3}),$$

$$\frac{dY_{2+i}}{dx} = D_i \left(j_{0i} \frac{e^{A_i \alpha_i (Y_1 - Y_1^0)} - e^{A_i (\alpha_i - 1)(Y_1 - Y_1^0)}}{1 + \left(\frac{B_i}{Y_{2+i}} \right) e^{A_i \alpha_i (Y_1 - Y_1^0)}} \right) = f_{2+i}(Y_1, Y_2, \dots, Y_{n+2}, Y_{n+3}),$$

$$\frac{dY_{n+3}}{dx} = u(x) = f_{n+3}(Y_1, Y_2, \dots, Y_{n+2}, Y_{n+3}).$$

С граничными условиями:

$$(17) \quad Y_2(0) = \rho_{\Gamma} I; \quad Y_2(L) = \rho_{\text{ж}} I; \quad Y_{2+i}(0) = Y_{2+i}^0; \quad i = 1, \dots, n;$$

$$Y_{n+3}(0) = \chi_{\Gamma}(0).$$

Замена $u(x) = d\chi_{\Gamma}(x)/dx$ сделана нами из соображений упрощения расчетов. Нам представляется удобным считать искомой управляющей функцией функцию $u(x) = d\chi_{\Gamma}(x)/dx$. Зная величину $d\chi_{\Gamma}(x)/dx$ в каждой точке электрода и некоторое начальное значение $\Pi_{\Gamma}(0)$, которое подбирается на начальной стадии оптимизации по методу, описанному в [8], легко рассчитать

$$\chi_{\Gamma}(x) = \chi_{\Gamma}(0) + \int_0^x \frac{d\chi_{\Gamma}}{dx} dx.$$

Введение в систему (20) дифференциального уравнения относительно неизвестной функции $Y_{n+3} = \chi_{\Gamma}(x)$ позволит нам в дальнейшем сформулировать задачу оптимального математического управления и использовать для ее решения принцип максимума С.Л. Понтрягина.

Таким образом, задача заключается в определении функции $u(x)$, такой, чтобы решение уравнений (16)–(17) удовлетворяло критерию наилучшей равномерности распределения плотности тока по толщине ПТЭ. В качестве критерия равномерности предлагается использовать следующий интегральный критерий:

$$(18) \sigma = \int_0^L \left(\frac{I}{L} - \sum J_{Si}(Y_1, Y_3, \dots, Y_{n+2}) \right)^2 dx \rightarrow \min .$$

Использование такого критерия предполагает решение задачи по оптимизации равномерности процесса на ПТЭ по всем электроактивным компонентам процесса. В случае, когда необходимо добиться равномерности распределения парциальных плотностей тока и металла для отдельных компонентов электролита, во втором слагаемом под знаком интеграла должны суммироваться только интересующие нас плотности тока.

2.1. МЕТОД РЕШЕНИЯ

Задачу (16)–(18) будем решать при помощи принципа максимума Л.С. Понтрягина. Для этого, согласно методу, добавим к системе (16)–(17) еще одно уравнение, соответствующее критерию оптимального управления:

$$(19) \frac{dY_0}{dx} = \left[\frac{I}{L} - \sum J_{Si}(Y_1, Y_2, \dots, Y_{n+2}, Y_{n+3}, u) \right]^2 = \\ = f_0(Y_1, Y_2, Y_3, \dots, Y_{n+2}, Y_{n+3}) \\ Y(0) = 0 .$$

Далее, следуя принципу максимума, запишем сопряженную систему дифференциальных уравнений относительно вновь вводимых в рассмотрение функций $\psi_i(x)$, $i = 0, \dots, n + 3$, с соответствующими начальными условиями согласно следующим формулам [15]:

$$(20) \frac{d\psi_i}{dx} = - \sum_{j=0}^{n+2} \psi_j \frac{\partial f_j}{\partial Y_i}, \quad i = 0, \dots, n + 3 ; \\ \psi_0(0) = 1; \quad \psi_1(L) = \psi_2(L) = \dots = \psi_{n+3}(L) = 0 .$$

Функции f_j имеют следующий вид:

$$f_0(Y_1, Y_2, \dots, Y_{n+2}, Y_{n+3}) = \left[\frac{I}{L} - \sum J_{Si}(Y_1, Y_2, \dots, Y_{n+2}, Y_{n+3}, u) \right]^2, \\ f_1(Y_1, Y_2, \dots, Y_{n+2}, Y_{n+3}) = Y_2,$$

$$f_2(Y_1, Y_2, \dots, Y_{n+2}, Y_{n+3}) = -Y_2 u(x) \frac{\chi_{\text{ж}}}{Y_{n+3}(x)(Y_{n+3}(x) + \chi_{\text{ж}})} +$$

$$+ G \sum_{i=1}^n j_{0i} \frac{e^{A_i \alpha_i (Y_1 - Y_1^0)} - e^{A_i (\alpha_i - 1)(Y_1 - Y_1^0)}}{1 + \left(\frac{B_i}{Y_{2+i}} \right) e^{A_i \alpha_i (Y_1 - Y_1^0)}},$$

$$f_{2+i}(Y_1, Y_2, \dots, Y_{n+2}, Y_{n+3}) = D_i \left(j_{0i} \frac{e^{A_i \alpha_i (Y_1 - Y_1^0)} - e^{A_i (\alpha_i - 1)(Y_1 - Y_1^0)}}{1 + \left(\frac{B_i}{Y_{2+i}} \right) e^{A_i \alpha_i (Y_1 - Y_1^0)}} \right),$$

$$i = 1, \dots, n, f_{n+3}(Y_1, Y_2, \dots, Y_{n+2}, Y_{n+3}) = u(x).$$

Нетрудно видеть, что выражения $d\psi_i/dx$ не сложны в вычислении, но получаются достаточно громоздкими, и по этой причине их окончательный вид не приводится в данной работе. По той же причине мы опускаем окончательное выражение для функции Гамильтона, минимизация которой по управляющему воздействию $u(x)$ позволяет рассчитывать оптимальное распределение электропроводности ПТЭ как функции координаты по толщине электрода. При этом функция Гамильтона строится по формуле:

$$(21) H(x, Y_0(x), \dots, Y_{n+3}(x), \psi_0(x), \dots, \psi_{n+3}(x), u(x)) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n+3} \psi_i(x, Y_i, u) f_i(x, \psi_i, u)$$

Согласно принципу максимума С.Л. Понтрягина, если управление

$$(22) \tilde{u} = (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \dots, \tilde{u}_m), \tilde{u}_i = \tilde{u}(x_i), x_0 = 0, x_m = L, i = 1, \dots, m,$$

и, соответственно, решения $Y_i(x)$ системы (16)–(17) доставляют минимум функционалу (18), то существуют решения $\psi_i(x)$ системы (20) такие, что точка \tilde{u} является стационарной точкой функции Гамильтона по u при всех $x \in [0, L]$.

2.2. АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ

Последняя теорема позволяет записать следующий итерационный алгоритм решения задачи, использующий метод градиентного спуска для минимизации функции Гамильтона.

Предположим, что нами уже выполнены k итераций и определены значения функции управления на k -м шаге минимизации $u^k(x) = (u_1^k, u_2^k, \dots, u_m^k)$, где нижний индекс соответствует координате x_i на электроде. Тогда $(k + 1)$ -ю итерацию осуществим следующим образом:

$u^{k+1}(x) = (u_1^{k+1}, u_2^{k+1}, \dots, u_m^{k+1})$ вычисляем по формуле:

$$(23) \quad u_j^{k+1} = u_j^k + \lambda \left(\frac{\partial H}{\partial u} \right)_{ij}^k, \quad j = 1, \dots, m.$$

При этом частная производная $\partial H / \partial u$ нами предварительно аналитически вычислена, что не сложно было получить из выражения (21), однако аналитическое выражение градиента громоздко и здесь не приводится.

При заданных значениях $u^{k+1}(x)$ интегрируем систему (16)–(17). Интегрирование системы проводилось по методам *GEAR* и Рунге–Кутта (*RK*) [11, 22] при этом использовался метод «стрельб», посредством которого задача (16)–(17) сводится к задаче Коши.

Используя найденные функции Y^{k+1} , интегрируем систему (20), находим P^{k+1} .

Вычисляем функционал Φ^{k+1} и сравниваем с Φ^k . Должно выполняться $\sigma^{k+1} \leq \sigma^k$, в противном случае в формуле (23) уменьшаем значение λ и расчет повторяем.

Вычисляем функцию H при известных значениях Y^{k+1} и P^{k+1} .

По формуле (18) находим u^{k+2} , и если оно отличается от u^{k+1} на величину, большую некоторой заданной, продолжаем вычислительный процесс по той же схеме, п. 1)–6); если u^{k+2} и u^{k+1} отличаются мало, то процесс решения заканчивается.

Искомую функцию распределения электропроводности твердой фазы $\chi_T(x) = \frac{dY_{n+3}}{dx}$ считаем решением задачи оптимального выбора переменной электропроводности по толщине электрода.

Очевидно, как и в большинстве задач оптимизации и оптимального управления, успех в решении практической задачи зависит от начального значения управляющего воздействия, которое мы находим в соответствии с методом, опубликованным в работе [8].

Приведенный метод и алгоритм решения задачи оптимального управления достаточно сложен в реализации при проведении численных расчетов по причинам классической некорректности задачи, неустойчивости ее по правой части и начальным данным, указанным ранее. Кроме того, заметим, что система дифференциальных уравнений (6), (10), (11), являющаяся математической моделью рассматриваемого электрохимического процесса, представляет собой краевую задачу с граничными условиями, заданными как на левом, так и на правом конце интервала изменения свободной переменной процесса – координаты по толщине электрода. Это приводит при интегрировании системы к решению двухточечной граничной задачи методом «стрельбы», что естественно осложняет расчеты.

2.3. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЁТОВ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Экспериментальные исследования проводились для процесса электроосаждения меди из сернокислого электролита состава (г/л): Cu – 0,16; H₂SO₄ – 25; (NH₄)₂SO₄ – 80; объемом 250 мл, циркулирующего между промежуточной емкостью и электролизером с проточным электродом из углеграфитовых волокнистых материалов (УВМ). Электроосаждение меди проводили в гальваностатических условиях. Катод толщиной 6 мм состоял из 5 слоев УВМ, анод – платиновая проволока, токоподвод – пластина из перфорированного титана, покрытая тонким слоем меди. Использовалась схема тыльной по отношению к противо-

электроду подачи раствора с тыльным токоподводом (рис. 1). Массу металла, выделившегося на каждый слой, определяли по разнице массы слоя УВМ до и после электролиза.

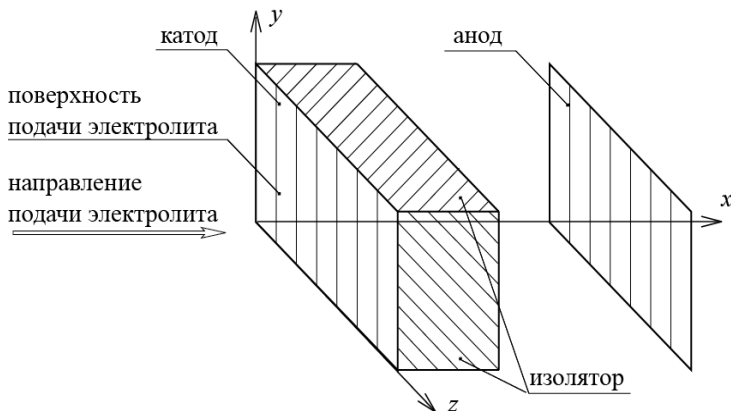


Рис. 1. Схема проточного объемно-пористого электрода

При проведении экспериментальных исследований и расчетов были использованы проточные трехмерные электроды (ПТЭ) из УВМ, марки и свойства которых приведены в таблице 1.

Параметры процесса были приняты следующими: $v(0) = 0,4$ см/с; $\chi_{ж} = 0,1$ См./см; $I = 0,05$ А/см². Электрохимические константы процесса, необходимые при проведении расчетов, выбраны соответствующими справочным данным [19].

Результаты расчетов оптимального распределения электропроводности ПТЭ для некоторых промежуточных итераций приведены в таблице 2.

В данной таблице строка, соответствующая маркеру ОПТ – приближение, принятое за оптимальное распределение электропроводности; НБ – реальное распределение электропроводности наиболее близкое к оптимальному, которое можно получить из используемых в данной работе УВМ; Э₃ – наилучшее распределение электропроводности, найденное экспериментальным

путем; \mathcal{E}_p – расчетное распределение электропроводности, соответствующее наилучшему экспериментальному.

Таблица 1. Свойства углеродных волокнистых материалов

№ материала	Марка материала	Электропроводность, χ_T , См/см	Радиус волокна, r , мкм	Удельная поверхность, S_v , см ² /см ³	Пористость, ε	Плотность, ρ , г/см ³
1	КНМ	0,008	6,1	200	0,94	1,55
2	АНМ	0,015	6,1	210	0,94	1,6
3	НТМ-100	0,076	5,4	250	0,93	1,7
4	ВИНН-250	0,101	4,5	270	0,93	1,8
5	ВИНН-250-2	0,2	4,5	270	0,93	1,8
6	Карбонет-калон ТК-24	0,41	3,5	760	0,87	2
7	ВНГ-50	0,46	6	280	0,92	1,9

Результаты расчетов и экспериментальных исследований показывают хорошее их согласование, а также эффективность использования предложенного метода расчета для оптимизации распределения металлического осадка по толщине проточного трехмерного электрода.

Таблица 2. Распределение электропроводности (χ_T) и соответствующее ему распределение металлического осадка ($P_{мет}$) по толщине ПТЭ на промежуточных итерациях оптимизации, P_{max}/P_{min} – критерий равномерности распределения осадка по толщине ПТЭ.

Обозначение итерации	Номер слоя электрода					$\frac{P_{max}}{P_{min}}$	
	1	2	3	4	5		
I_1	χ_T	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	42,00
	$P_{мет}$	0,4	0,04	0,31	1,31	1,68	
I_2	χ_T	0,1	0,2	0,2	0,2	0,2	3,95
	$P_{мет}$	0,86	0,43	0,74	1,42	1,7	

Обозначение итерации		Номер слоя электрода					$\frac{P_{\max}}{P_{\min}}$
		1	2	3	4	5	
I_3	χ_T	0,01	0,2	0,2	0,2	0,4	1,72
	$P_{\text{мет}}$	1,21	1,02	1,28	1,61	1,7	
I_4	χ_T	0,005	0,2	0,2	0,2	0,4	1,61
	$P_{\text{мет}}$	1,22	1,05	1,28	1,61	1,7	
I_5	χ_T	0,005	0,2	0,4	0,4	0,4	1,53
	$P_{\text{мет}}$	1,26	1,14	1,4	1,65	1,71	
I_6	χ_T	0,005	0,2	0,4	0,4	0,2	1,42
	$P_{\text{мет}}$	1,31	1,23	1,48	1,67	1,71	
I_7	χ_T	0,05	0,2	0,4	0,5	0,2	1,30
	$P_{\text{мет}}$	1,33	1,28	1,51	1,68	1,71	
ОПТ	χ_T	0,05	0,4	0,5	0,6	0,15	1,19
	$P_{\text{мет}}$	1,43	1,43	1,6	1,7	1,71	
НБ	χ_T	0,08	0,46	0,46	0,46	0,2	1,31
	$P_{\text{мет}}$	1,35	1,30	1,53	1,68	1,72	
\mathcal{E}_p	χ_T	0,08	0,015	0,076	0,21	0,46	1,28
	$P_{\text{мет}}$	1,35	1,63	1,73	1,72	1,67	
\mathcal{E}_s	χ_T	0,08	0,015	0,076	0,21	0,46	1,39
	$P_{\text{мет}}$	1,31	1,72	1,35	1,23	1,4	

Литература

1. БЕК Р.Ю., ЗАМЯТИН А.П. Коэффициент массопередачи и доступная электролизу поверхность проточных волокнистых углеграфитовых электродов // Электрохимия. – 1978. – Т. 14, №8 – С. 1196–1201.
2. ВАРЕНЦОВ В.К., ВАРЕНЦОВА В.И. Электролиз с углеродными волокнистыми электродами в решении вопросов ресурсосбережения и обезвреживания металлосодержащих растворов производства печатных плат // Гальванотехника и обработка поверхности. – 1998. – Т. 6, №2. – С. 36–46.

3. ВАРЕНЦОВ В.К. *Электролиз с объёмно-пористыми проточными электродами в гидрометаллургии благородных металлов* // Известия СО АН СССР. Сер. хим. наук. – 1984. – Вып. 6, №17. – С. 106–120.
4. ВАРЕНЦОВ В.К. *Электрохимические реакторы для извлечения благородных металлов из растворов переработки минерального сырья и обезвреживания растворов* // Химия в интересах устойчивого развития. – 1997. – Т.5., №2. – С. 247–13.
5. ВАРЕНЦОВ В.К. *Использование проточных объёмно-пористых электродов для интенсификации электрохимических процессов* // Сборник. Интенсификация электрохимических процессов / Ред. А.П. Томилов. – М.: Наука, 1988. – С. 94–118.
6. ВАРЕНЦОВ В.К., ВАРЕНЦОВА В.И. *Модификация электродных свойств углеродных волокнистых материалов электролизом в водных растворах* // Электрохимия. – 2001. – Т. 37, №7. – С. 811–820.
7. ВАРЕНЦОВ В.К., КОШЕВ А.Н. *Математическое моделирование электрохимических процессов в проточных трехмерных электродах* // Изв. СО АН СССР. Сер. хим. наук. – 1988. – Вып. 5, №17. – С. 117–125.
8. ГВОЗДЕВА И.Г., КОШЕВ А.Н., ВАРЕНЦОВ В.К. *Управление электрохимическим реактором с проточными трехмерными электродами за счет оптимального распределения электропроводности систем* // Управление большими системами. – 2010. – №29 – С. 184 –200.
9. ЖЕРЕБИЛОВ А.Ф., КОШЕВ А.Н., ВАРЕНЦОВ В.К. *К вопросу о распределении поляризации внутри проточного объёмно-пористого электрода* // Известия СО АН СССР. Сер. хим. наук. – 1984. – Вып. 2, №4 – С. 43–48.
10. КОНКИН А.А. *Углеродные и другие жаростойкие волокнистые материалы*. – Мн.: Наука и техника, 1982. – 272 с.
11. КОШЕВ А.Н., ВАРЕНЦОВ В.К., ЧИРКИНА М.А., КАМБУРГ В.Г. *Математическое моделирование и тео-*

- рия распределения поляризации в электрохимических реакторах с проточными объемно-пористыми катодами // Математическое моделирование. – 2011. – №8. – С. 110–126.*
12. КОШЕВ А.Н., ВАРЕНЦОВ В.К., ГЛЕЙЗЕР Г.Н., ТРОЯН Г.Ф. *К вопросу оптимального управления электролизом на проточных объемно-пористых электродах // Электрохимия. – 1992. – Т. 28, Вып. 9. – С. 1265–1271.*
 13. КОШЕВ А.Н., ВАРЕНЦОВ В.К., ЧИРКИНА М.А. *Анализ математических моделей и теория распределения поляризации проточных объемно-пористых электродов // Физикохимия поверхности и защита материалов, – 2009. – Т. 45, №4. – С. 441–448.*
 14. МАСЛИЙ А.И., МЕДВЕДЕВ А.Ж., ПОДДУБНЫЙ Н.П. *Динамика осаждения металла на пористый электрод с низкой исходной проводимостью при проточном режиме работы электрода и высокой скорости потока раствора // Электрохимия. – 2006. – Т. 42, №10. – С. 1237–1244.*
 15. МОИСЕЕВ Н.Н. *Элементы теории оптимальных систем. – М.: «Наука», главная редакция физико-математической литературы, 1974 – 37 с.*
 16. НЬЮМЕН ДЖ. *Электрохимические системы. – М.: Мир, 1977. – 463 с.*
 17. ПОНТРЯГИН Л.С. *Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Гос. изд-во физико-мат. лит., 1961. – 255 с.*
 18. СИМАМУРА С. и др. *Углеродные волокна: Пер. с японск. / Под ред. Симамура С. – М.: Мир, 1987. – 304 с.*
 19. *Справочник по электрохимии / Под ред. А.М. Сухотина. – Л.: Химия, 1981. – 168 с.*
 20. ТАРКОВСКАЯ И.А. *Окисленный уголь. – Киев: Наукова думка, 1981. – 200 с.*

21. ФИАЛКОВ А.С. *Углерод. Межслоевые соединения и композиты на его основе.* – М.: Аспект-Пресс, 1997. – 718 с.
22. HINDMARCH A.C. *Gear: Ordinary Differential Equation System Solver LLL Report UCSD-30001.* Rev. 3. – 1974

CALCULATION OPTIMAL CONDUCTIVITY OF FLOWING VOLUME-POROUS CATHODES

Alexander Koshev, Penza State University of the Architecture and Building, Penza, Dr. Sci., professor (koshev@pguas.ru).

Irina Gvozdeva, Penza State University of the Architecture and Building, lecturer, Penza.

Valery Varentsov, Novosibirsk State Technical University, Dr. Sci.

Abstract: The possibility is considered of controlling an electrochemical reactor with flowing volume-porous coal-graphite fibroid cathodes by varying the distribution through depth of conductivity of the base to attain the flat distribution through depth of electroactive components.

The optimal control problem is set and the algorithm for its solution is suggested. The results of calculations and experiments are outlined.

Keywords: electrochemical system, porous electrode, mathematical model, optimization, algorithm.

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии А. В. Добровидовым*

УДК 527.62
ББК 39.57-5

ЗАДАЧА КАЛИБРОВКИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ СИСТЕМЫ ОТНОСИТЕЛЬНОГО ПОЗИЦИОНИРОВАНИЯ

Каршаков Е. В.¹

(ФГБУН Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

В статье приведены алгоритмы калибровки бортовой низко-частотной электромагнитной системы относительного позиционирования, позволяющие повысить точность определения параметров взаимного расположения источника и приемника переменного магнитного поля. Рассматриваются различные варианты постановки задачи, отличающиеся набором используемой для калибровки информации. Приводятся результаты калибровки электромагнитной системы относительного позиционирования, интегрированной в комплекс ЕМ-4Н, решающий задачу аэрогеофизических исследований с использованием летательного аппарата в качестве носителя.

Ключевые слова: электромагнитная система относительного позиционирования, переменное магнитное поле, магнитный диполь, ЕМ-4Н.

1. Введение

Электромагнитные системы относительного позиционирования, которым посвящена данная работа, позволяют определить с высокой точностью параметры взаимного расположения двух объектов. Характер зависимости параметров магнитного

¹ Евгений Владимирович Каршаков, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник (karshak@mail.ru).

поля от удаления приемника от источника и ориентации по отношению к нему, а также чувствительность датчиков поля в совокупности обеспечивают точность определения координат порядка 1 см, а точность определения углов не хуже 1 градуса [1, 6].

Одна из задач, в которой требуется определение не только взаимного расположения двух объектов, но и их взаимной ориентации, это задача относительного позиционирования буксируемого на гибком тросе за летательным аппаратом объекта в системе аэроэлектромагнитного зондирования (аэроэлектроразведки), используемой при геофизических исследованиях. В таких системах на фюзеляже самолета или вертолета крепится источник переменного магнитного поля, а в буксируемой гондole помещается приемник. Длина троса – от 70 до 130 метров. Главная цель для таких систем – с высокой точностью измерить параметры поля возбуждаемых в земле вихревых токов. Основная проблема – отличить поле отклика от земли от первичного поля передатчика, меняющегося при взаимных перемещениях гондолы и носителя, и от поля, наведенного в фюзеляже летательного аппарата, а также разделить вертикальную и горизонтальную составляющие поля. Эти задачи возникли сразу при рассмотрении вопросов установки электромагнитной системы на борту летательного аппарата [9].

Решение задачи относительного позиционирования передатчика и приемника не теряет актуальности и сейчас и обсуждается в ряде публикаций применительно к таким системам, как *Megatem*, которые используются при аэросъемочных работах компанией *Fugro Airborne* [10, 11], и к системам ЕМ-4Н, применяемым такими компаниями, как Норильский филиал ВСЕГЕИ, Амакинская ГРЭ АК «Алроса», ЗАО «ГНПП «Аэрогеофизика» и др. [5, 6]. Наличие соответствующей информации об относительном расположении летательного аппарата и буксируемого объекта позволяет полностью исключить влияние геометрического фактора на показания электромагнитной системы и получить весь необходимый набор параметров для решения задач интерпретации. В области использования электромагнитных

сигналов для решения указанной задачи Р. Смитом была сделана попытка построить систему с измерением параметров поля одного источника переменного магнитного поля [11], которая, однако, не обеспечила нужной точности и полноты информации. Главная особенность решения, предложенного в работе [6], – построение электромагнитной системы относительного позиционирования с использованием дополнительных источников поля. Данный метод оказывается работоспособным при условии, что в точке измерения обеспечивается возможность различить векторы поля источников друг от друга. Это достигается при уникальном для каждого источника спектре сигнала возбуждения.

Как правило, источники поля формируются петлевыми дipoлями, геометрические параметры которых позволяют определить их магнитные моменты [7]. Однако величина вычисленного магнитного момента не совпадает с моментом излучаемого поля из-за наличия проводящих элементов в окрестности источника. Так, при установке источника на борту летательного аппарата проводящие части фюзеляжа приводят к искажению поля источника на стабильную величину порядка 1% [2]. Чтобы избежать влияния возникающих таким образом систематических погрешностей на точность решения задачи относительного позиционирования, требуется произвести калибровку параметров источников поля.

Структура данной работы следующая. Сначала будет приведено формальное описание метода относительного позиционирования, который также является теоретической основой для решения задачи калибровки. Далее будет приведена общая постановка задачи калибровки системы диполей и будут даны алгоритмы ее решения при различных наборах дополнительной информации. В заключение будет дан результат решения задачи калибровки для системы относительного позиционирования, интегрированной в комплекс ЕМ-4Н [3], установленный на борту летательного аппарата и решающий задачу аэрогеофизических исследований.

2. Описание метода позиционирования

Метод решения задачи относительного позиционирования основывается на измерении параметров низкочастотного переменного магнитного поля трех совмещенных диполей.

Рассмотрим источник переменного магнитного поля в виде точечного диполя с магнитным моментом, заданным вектором $\mathbf{M}(t) = \mathbf{M} \cos \omega t$, $\mathbf{M} \in \mathbf{R}^3$, меняющимся с частотой ω , расположенного для удобства в начале системы координат. При решении задачи относительного позиционирования в качестве среды распространения поля рассматривается атмосферный воздух или вакуум. В предположении, что соблюдаются условия квазистационарности, а фаза возбуждения известна, измеренный вектор напряженности магнитного поля \mathbf{H} в точке с координатами $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$ будет иметь вид [7]:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}(\mathbf{r}) \cos \omega t,$$

$$(1) \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi r^3} \{3\mathbf{e}_r (\mathbf{e}_r, \mathbf{M}) - \mathbf{M}\},$$

$$r = |\mathbf{r}|, \quad \mathbf{e}_r = \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Для удобства дальнейших выкладок воспользуемся формализмом, применяемым в теории матриц [4]. Так, любая матрица A размера $m \times n$, т.е. состоящая из m строк и n столбцов, может быть умножена на матрицу B размера $n \times k$, при этом элемент в i -й строке и j -м столбце результирующей матрицы C размера $m \times k$ представляется следующей суммой:

$$(2) \quad C = AB, \quad C_{ij} = \sum_{l=1}^n A_{il} B_{lj}.$$

При таком подходе векторы соотношения (1) могут быть записаны как матрицы 3×1 . В этом случае верны следующие равенства:

$$(3) \quad \mathbf{e}_r^T \mathbf{e}_r = (\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_r) = 1, \quad \mathbf{e}_r \mathbf{e}_r^T = \begin{pmatrix} e_1 e_1 & e_1 e_2 & e_1 e_3 \\ e_2 e_1 & e_2 e_2 & e_2 e_3 \\ e_3 e_1 & e_3 e_2 & e_3 e_3 \end{pmatrix},$$

Здесь Γ – символ транспонирования. Учитывая (3), можно преобразовать слагаемые в выражении (1) следующим образом:

$$(4) \quad \mathbf{e}_r(\mathbf{M}, \mathbf{e}_r) = \mathbf{e}_r \mathbf{e}_r^T \mathbf{M}.$$

Теперь поле в произвольной точке можно выразить соотношением

$$(5) \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi r^3} (3\mathbf{e}_r \mathbf{e}_r^T - I) \mathbf{M} = \Omega(\mathbf{r}) \mathbf{M}.$$

Здесь I – единичная матрица 3×3 .

Полученный в соотношении (5) оператор $\Omega(\mathbf{r})$ обладает важными свойствами. Во-первых, он представляется матрицей, невырожденной везде, где она определена, т.е. везде, кроме точки $\mathbf{r} = 0$. Следовательно, везде существует и матрица

$$(6) \quad \Theta(\mathbf{r}) = [\Omega(\mathbf{r})]^{-1} = 2\pi r^3 (3\mathbf{e}_r \mathbf{e}_r^T - 2I), \quad \mathbf{M} = \Theta(\mathbf{r}) \mathbf{H}.$$

Во-вторых, при фиксированном направлении \mathbf{e}_r с изменением расстояния меняется только модуль вектора \mathbf{H} как $1/r^3$. Очевидно, похожим свойством обладает и обратная матрица – при фиксированном \mathbf{e}_r меняется только модуль вектора \mathbf{M} как r^3 .

Допустим, что амплитуда возбуждающего диполя известна. Если в системе координат приемных рамок измерены компоненты вектора напряженности, то для каждого направления \mathbf{e}_r существует единственная точка, в которой можно поместить возбуждающий диполь, обеспечивающий полученное значение поля. Направление вектора момента в системе координат приемника при этом однозначно задается соотношением (6). Расстояние до этой точки определяется следующим образом:

$$(7) \quad r = \sqrt[3]{\frac{|\mathbf{M}|}{2\pi |(3\mathbf{e}_r \mathbf{e}_r^T - 2I) \mathbf{H}|}}.$$

Данное соотношение задает в пространстве замкнутую, выпуклую, центрально симметричную поверхность, являющуюся геометрическим местом точек возможного положения передающего диполя.

Пусть теперь в точке начала координат располагаются три точечных диполя, поле, возбуждаемое этими диполями, линейно

поляризовано, а частоты гармонического возбуждения различимы после детектирования.

Разместим в точке приема, определяемой в выбранной системе координат радиус-вектором \mathbf{r} , тройку приемных рамок, оси которых также взаимно перпендикулярны и задают систему координат приемника, развернутую относительно осей базовой системы координат на углы, определяемые некой матрицей поворота R . Тогда вектор поля на каждой частоте, измеряемый этой системой рамок, будет определяться уравнениями:

$$(8) \quad \mathbf{H}_i = R\Omega(\mathbf{r})\mathbf{M}_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

С целью исключения влияния параметров матрицы поворота чувствительных осей датчика выписывается следующая система уравнений в системе координат приемника:

$$\mathbf{M}_i^T \mathbf{M}_j = \mathbf{H}_i^T \Theta^2(\mathbf{r}) \mathbf{H}_j, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad j \geq i,$$

$$(9) \quad \mathbf{e}_r^T \mathbf{e}_r = 1,$$

$$\Theta^2(\mathbf{r}) = 4\pi^2 r^6 (-3\mathbf{e}_r \mathbf{e}_r^T + 4I).$$

Это система семи уравнений, в которых известными являются параметры векторов \mathbf{H}_i в системе координат приемника и \mathbf{M}_i в системе координат передатчика, а определить требуется компоненты вектора \mathbf{e}_r и расстояние r . Поскольку величина скалярного произведения не зависит от поворота системы координат, данное уравнение всегда определено. Если его решить, соотношение (6) позволит определить компоненты векторов \mathbf{M}_i в системе координат приемника, и, как следствие, матрицу R перехода от системы координат передатчика к системе координат приемника, а значит и углы их взаимной ориентации.

Вводится следующий набор переменных:

$$(10) \quad \begin{aligned} v_1 &= e_1 e_1, & v_2 &= e_1 e_2, & v_3 &= e_1 e_3, & v_4 &= e_2 e_2, \\ v_5 &= e_2 e_3, & v_6 &= e_3 e_3, & v_7 &= -\frac{1}{4\pi r^6}. \end{aligned}$$

После такой замены система (9) становится системой линейных алгебраических уравнений, которая может быть решена методом Гаусса. Вопросы существования и единственности решения обсуждаются в работе [6].

Получив набор значений v_1, \dots, v_7 , можно вычислить значения искомых компонент вектора e_r и r . Результатом будут два решения, которые имеют диаметрально противоположное положение относительно точки расположения диполей $e_r, -e_r$ (рис. 1).

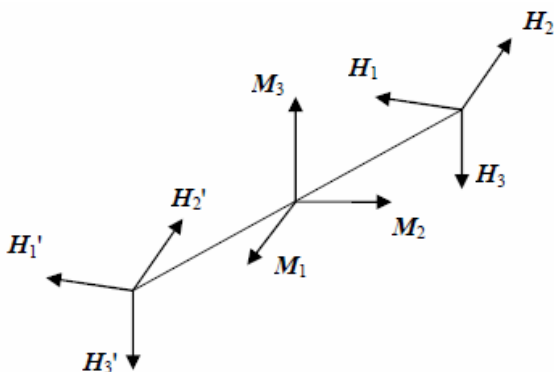


Рис. 1. Два решения

Выбор из двух решений можно сделать, имея достаточно грубую дополнительную информацию. Например, решая задачу позиционирования буксируемого за летательным аппаратом с установленными на нем передатчиками объекта с приемником, можно использовать информацию о том, какая ось чувствительности приемника направлена вверх, и, исходя из этого, выбрать то решение, которое соответствует положению летательного аппарата в верхнем полупространстве.

3. Калибровка системы

Описанный выше метод определения параметров взаимного расположения передатчика и приемника переменного магнитного поля предполагает наличие идеальных источников поля. Появление проводящего ток объекта вблизи источника переменного магнитного поля приводит к тому, что возникают вторичные источники, работающие на той же частоте, но со сдвигом по фа-

зе. В общем случае измеряемый вектор можно записать в виде комплексного числа:

$$(11) \quad \mathbf{H}'(\mathbf{r}) = \sum_j \mathbf{H}_{\text{Re } j}(\mathbf{r}) - i \sum_j \mathbf{H}_{\text{Im } j}(\mathbf{r}),$$

$$\mathbf{H}' \in \mathbf{C}^3, \quad \mathbf{H}_{\text{Re } j}, \mathbf{H}_{\text{Im } j} \in \mathbf{R}^3.$$

Здесь j – порядковый номер источника; индекс Re соответствует синфазной возбуждению компоненте поля соответствующего источника (действительный вектор); индекс Im – квадратурной (мнимый вектор); i – мнимая единица. Одно из важнейших свойств полученного таким образом поля заключается в том, что при изменении фазы детектирования на величину φ , что в комплексной записи эквивалентно умножению на $e^{i\varphi}$, концы действительного и мнимого векторов описывают плоскую кривую – эллипс, называемый эллипсом поляризации [8]. Таким образом, моменты реальных источников поля \mathbf{M}_i' отличаются от вычисленных по параметрам петлевых диполей \mathbf{M}_i . Как следствие, измеренные векторы удовлетворяют выражению

$$(12) \quad \mathbf{H}_i' = \mathbf{H}_i + k_{i1}\mathbf{H}_1' + k_{i2}\mathbf{H}_2' + k_{i3}\mathbf{H}_3',$$

$$\mathbf{H}_i' \in \mathbf{C}^3, \quad \mathbf{H}_i \in \mathbf{R}^3, \quad k_{ij} \in \mathbf{C}, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Будем полагать, что вторичные источники стабильны, то есть коэффициенты k_{ij} в соотношении (12) не зависят от времени. Второе предположение, заключающееся в том, что k_{ij} не зависят от \mathbf{r} , означает, что смещением центров вторичных диполей можно пренебречь. Учитывая линейность выражений (5), (6) соотношение (12) эквивалентно

$$(13) \quad \mathbf{M}_i' = \mathbf{M}_i + k_{i1}\mathbf{M}_1' + k_{i2}\mathbf{M}_2' + k_{i3}\mathbf{M}_3',$$

$$\mathbf{M}_i' \in \mathbf{C}^3, \quad \mathbf{M}_i \in \mathbf{R}^3, \quad k_{ij} \in \mathbf{C}, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Таким образом, для решения задачи калибровки электромагнитной системы относительного позиционирования требуется определить комплексные коэффициенты k_{ij} в соотношении (13).

При наличии сторонней полной информации о взаимном расположении систем координат передатчика и приемника задача становится тривиальной. С учетом (5) можно вычислить век-

торы \mathbf{H}_i в системе координат приемника и решить систему (12) относительно неизвестных k_{ij} .

Реализовать соответствующий калибровочный эксперимент для конкретных систем технически сложно, поэтому актуальна постановка задачи калибровки при ограниченном наборе сторонней информации.

Исходя из опыта эксплуатации [2] введем еще одно предположение. Будем считать поле искажающих источников малым по отношению к первичному расчетному полю. Это позволяет линеаризовать задачу определения поправочных коэффициентов. Амплитуда первичного поля полагается известной, поскольку может быть вычислена с учетом геометрических и электрических параметров диполя, таких как ток, количество витков, размер [7].

3.1. ПРИВЕДЕНИЕ К ЛИНЕЙНО ПОЛЯРИЗОВАННОМУ ПОЛЮ

Пусть в результате синхронного детектирования в определенной фазе нами получено некое комплексное значение вектора напряженности магнитного поля \mathbf{H}_i' . Можно так подобрать значение начальной фазы φ_i , чтобы, например, действительный вектор совпал с большой полуосью эллипса поляризации. В этой фазе его длина, а значит, и скалярное произведение на самого себя, достигает максимума. Поскольку изменение фазы детектирования φ_i соответствует умножению на $\exp[i\varphi_i]$, условие максимума можно записать следующим образом:

$$(14) \quad \frac{d(\operatorname{Re}\{\mathbf{H}_i' \exp[i\varphi_i]\}, \operatorname{Re}\{\mathbf{H}_i' \exp[i\varphi_i]\})}{d\varphi_i} = 0,$$

что эквивалентно

$$(15) \quad [(\operatorname{Im} \mathbf{H}_i', \operatorname{Im} \mathbf{H}_i') - (\operatorname{Re} \mathbf{H}_i', \operatorname{Re} \mathbf{H}_i')] \sin 2\varphi_i - 2(\operatorname{Re} \mathbf{H}_i', \operatorname{Im} \mathbf{H}_i') \cos 2\varphi_i = 0$$

Четыре решения уравнения (15) для производной по φ_i определяют две большие и две малые полуоси эллипса:

$$(16) \quad \operatorname{tg}(2\varphi_i) = \frac{2(\operatorname{Re} \mathbf{H}_i', \operatorname{Im} \mathbf{H}_i')}{(\operatorname{Re} \mathbf{H}_i')^2 - (\operatorname{Im} \mathbf{H}_i')^2}.$$

Полученное соотношение определяет фазы, при которых реальный и мнимый векторы совпадают с главными осями эллипса поляризации. Решение (16) дает четыре различных значения фазы:

$$(17) \varphi_i = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2(\operatorname{Re} \mathbf{H}_i', \operatorname{Im} \mathbf{H}_i')}{(\operatorname{Re} \mathbf{H}_i')^2 - (\operatorname{Im} \mathbf{H}_i')^2} + n \frac{\pi}{2}, \quad n = 0, 1, 2, 3.$$

Осуществляя детектирование в данных фазах можно получить векторы большой и малой полуосей эллипса поляризации. Получившиеся скалярные величины являются инвариантами эллипса поляризации в точке измерения поля, т.е. не меняются при изменениях фазы детектирования и при переходе в другую систему координат.

Стоит отметить, что фаза главных осей меняется при изменении координат приемника, поэтому для дальнейших операций ее следует зафиксировать либо на значении для одной точки, либо на среднем значении по некой выборке. В силу сделанных предположений фаза главных осей меняется незначительно.

Переход к параметрам эллипса поляризации позволяет уйти от необходимости знания фазы возбуждения поля. При этом возникает множественность решения, связанная с выбором направления большой полуоси. Неоднозначность разрешается при наличии грубой дополнительной информации, аналогично неоднозначности в решении алгоритма относительного позиционирования.

Теперь, полагая, что фаза детектирования определена, будем искать поправочные коэффициенты первого этапа калибровки в следующем виде:

$$(18) \mathbf{H}_i' = \operatorname{Re} \mathbf{H}_i' + k_{i1}^1 \mathbf{H}_1' + k_{i2}^1 \mathbf{H}_2' + k_{i3}^1 \mathbf{H}_3'.$$

В такой постановке имеется избыточность. Действительно, по сути, задача сводится к выражению мнимого вектора $\operatorname{Im} \mathbf{H}_i'$ в виде некой линейной комбинации. Достаточно взять три реальных вектора $\operatorname{Re} \mathbf{H}_j'$, $j = 1, 2, 3$, а коэффициенты подбирать чисто мнимыми. Однако же избыточность может быть использована для поправок параметров приемника. Для того чтобы определить возможные амплитудные, фазовые и некоторые геометри-

ческие поправки, коэффициенты k_{ij}^1 ищутся в виде комплексных матриц 3×3 .

Решение ищется методом наименьших квадратов по серии измерений при разных положениях приемника относительно передатчика:

$$(19) \sum_s \left(H_{ij}' - \operatorname{Re} H_{ij}' - \sum_{l=1}^3 \sum_{m=1}^3 k_{ilm}^1 H_{lm}' \right)^2 \rightarrow \min.$$

Здесь суммирование по s соответствует суммированию по серии измерений; $H_{ij}' - j$ -я компонента вектора \mathbf{H}_i' ; $H_{lm}' - m$ -я компонента вектора \mathbf{H}_l' ; k_{ilm}^1 – компонента ilm матрицы k_{il}^1 .

В результате первого этапа калибровки без привлечения дополнительной информации система передатчика приводится к системе линейно поляризованных точечных диполей, поле которых может быть вычислено с учетом коэффициентов k_{ij}^1 :

$$(20) \tilde{\mathbf{H}}_i = \mathbf{H}_i' - k_{i1}^1 \mathbf{H}_1' - k_{i2}^1 \mathbf{H}_2' - k_{i3}^1 \mathbf{H}_3'.$$

3.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ УГЛОВ МЕЖДУ ДИПОЛЯМИ И ВЕЛИЧИН МОМЕНТОВ

На втором этапе определяются углы между диполями и поправки к их абсолютным величинам. Для этой цели требуется сторонняя информация о длине и направлении радиуса-вектора передатчик-приемник. Учитывая предполагаемую малость калибруемых параметров, можно получить следующие приближенные выражения для скалярных произведений измеренных векторов:

$$(21) \tilde{\mathbf{H}}_i^T \tilde{\mathbf{H}}_j = \mathbf{M}_i^T \Omega^2(\mathbf{r}) \mathbf{M}_j + \sum_{l=1}^3 k_{il}^{\text{II}} \mathbf{M}_i^T \Omega^2(\mathbf{r}) \mathbf{M}_l + \sum_{m=1}^3 k_{jm}^{\text{II}} \mathbf{M}_m^T \Omega^2(\mathbf{r}) \mathbf{M}_j + \bar{\sigma}(k_{ij}^{\text{II}}),$$

$$|k_{jm}^{\text{II}}| \ll 1, \quad k_{jm}^{\text{II}} = 0 \text{ при } i > j.$$

Все величины и компоненты соотношения (21) действительно-значные. Без учета членов второго порядка малости получается система шести линейных уравнений с шестью неизвестными

параметрами поправок. Данные коэффициенты подбираются методом наименьших квадратов по серии измерений в различных точках.

$$(22) \sum_s \left(\Delta_{ij} - \sum_{l=1}^3 k_{il}^{\text{II}} \mathbf{M}_l^T \Omega^2(\mathbf{r}) \mathbf{M}_l - \sum_{m=1}^3 k_{jm}^{\text{II}} \mathbf{M}_m^T \Omega^2(\mathbf{r}) \mathbf{M}_j \right)^2 \rightarrow \min,$$

$$\Delta_{ij} = \tilde{\mathbf{H}}_i^T \tilde{\mathbf{H}}_j - \mathbf{M}_i^T \Omega^2(\mathbf{r}) \mathbf{M}_j.$$

Здесь суммирование по s соответствует суммированию по серии измерений.

В результате калибровки второго этапа определены углы между излучающими диполями и величины их моментов. Остаточная погрешность — это неизвестный малый угол поворота системы координат передатчика, который задается матрицей Q :

$$(23) \mathbf{M}_i^c = Q \mathbf{M}_i^e,$$

где \mathbf{M}_i^c соответствует системе диполей, полученных после двух этапов калибровки.

3.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МАЛОГО УГЛА ПОВОРОТА

Чтобы определить матрицу поворота $Q = \|k_{ij}^{\text{III}}\|$, требуется поместить приемник в точку с заданной ориентацией относительно диполей передатчика. Если матрица ориентации получена по априорной информации R , а вычислена по решению задачи относительного позиционирования R' , то можно получить матрицу малого поворота

$$(24) Q^T = R' R^T.$$

Комбинация полученных на разных этапах коэффициентов дает оценку калибруемых параметров k_{ij} для системы передающих диполей.

4. Результаты калибровки

Описанные алгоритмы калибровки были реализованы в низкочастотной электромагнитной системе относительного позиционирования, интегрированной в аэроэлектроразведочный комплекс ЕМ-4Н. Результаты эксперимента, которые приводятся здесь, были получены на борту вертолета Ми-8.

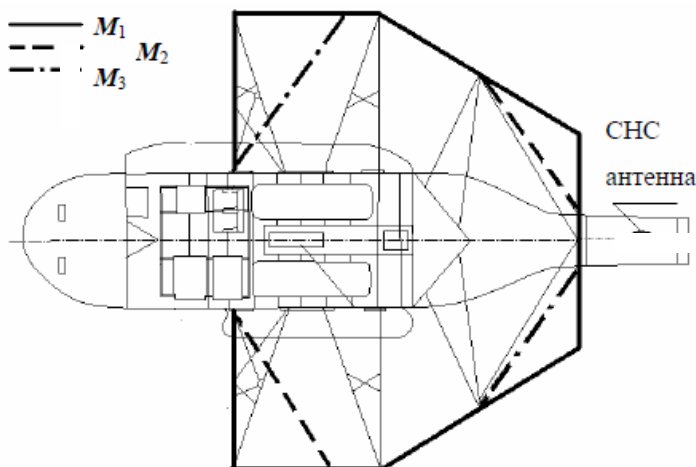


Рис. 2. Установка системы на борту Ми-8

Основной диполь электроразведочной системы был смонтирован на специальной конструкции вокруг фюзеляжа, его момент вертикален. Каждый из двух дополнительных диполей, необходимых для системы относительного позиционирования, представлен парой соленоидальных петель, установленных в передней и хвостовой частях вертолета для того, чтобы центры возбуждения дополнительных диполей были максимально близки к центру основного диполя (рис. 2).

Трехкомпонентный индукционный приемник, позволяющий измерить компоненты вектора напряженности переменного магнитного поля, помещен в гондолу (рис. 3), буксируемую за вертолетом на гибком тросе длиной около 70 метров.

Для реализации второго этапа калибровки на борту вертолета и в буксируемой гондоле установлены антенны СНС – спутниковой навигационной системы (рис. 2, 3). Применение алгоритмов дифференциального режима обработки показаний СНС позволяет определить радиус-вектор «передатчик–приемник» в географической системе координат, а данные об углах курса, крена и тангажа вертолета – получить его проекции в системе координат передатчика переменного магнитного поля, жестко связанной с фюзеляжем летательного аппарата.

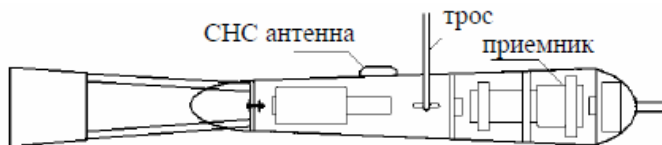


Рис. 3. Буксируемая гондола

Результаты калибровки первого этапа можно оценивать по мнимой компоненте вектора напряженности при различных эволюциях. На рис. 4 показаны параметры взаимного расположения передатчика и приемника: θ – угол между вектором основного диполя и радиус-вектором «передатчик–приемник»; ψ – угол между системами координат передатчика и приемника в проекции на плоскость, содержащую основной диполь; R – расстояние «передатчик–приемник». На рис. 5 – вертикальная проекция мнимой компоненты поля основного диполя до ($\text{Im } H$) и после списания параметров эллиптической поляризации ($\text{Im } H'$) на том же интервале. По вертикальной оси отложена величина проекции в тысячных долях первичного поля (тыс. ppm).

Исходя из данных, представленных на рис. 4, 5, можно видеть, что мнимый вектор содержит постоянную составляющую порядка 5000 ppm и низкочастотную составляющую около 2000 ppm, которые обусловлены поляризацией летательного аппарата, а также высокочастотную составляющую порядка нескольких сотен ppm, которая может быть обусловлена только фазовыми искажениями в приемнике, поскольку проекция на направление вектора диполя не может зависеть от угла поворота системы координат приемника по отношению к этому вектору.

После учета параметров калибровки среднеквадратичное отклонение мнимой компоненты от нуля составляет величину порядка нескольких десятков ppm, а среднее значение в зоне калибровки – единицы ppm.

Результаты калибровки второго этапа могут оцениваться в сравнении с решением СНС в дифференциальном режиме. На рис. 6 приведены оценки расстояния «передатчик–приемник» тремя методами: R_{EM} – оценка расстояния электромагнитной си-

стемой относительного позиционирования; R_{GPS} – оценка расстояния СНС в дифференциальном режиме без учета смещения антенн и поворота относительно географической системы координат; R_{Sm} – оценка расстояния электромагнитной системой на основании измерений поля только одного диполя [11].

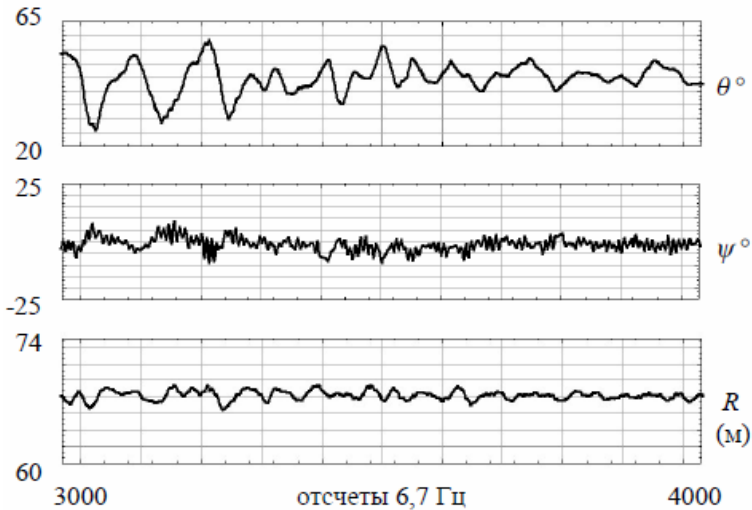


Рис. 4. Параметры движения гондолы



Рис. 5. Мнимая компонента поля в проекции на направление вектора момента основного диполя

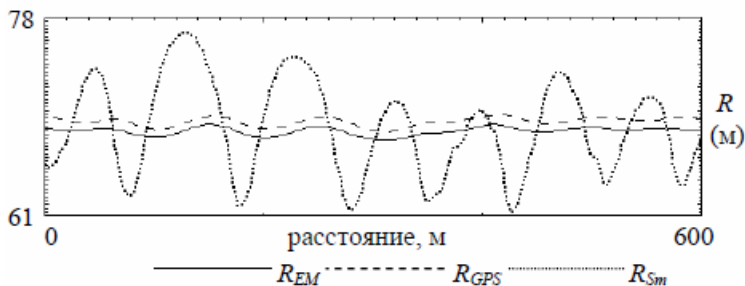


Рис. 6. Расстояние передатчик-приемник

Расхождение R_{EM} и R_{GPS} на данном участке составило около 80 см в виде постоянной составляющей, обусловленной смещением антенн, плюс колебания амплитуды до 15 см, обусловленные перемещением приемника переменного магнитного поля относительно антенны СНС. Большие отклонения R_{Sm} обусловлены тем, что при использовании поля одного диполя невозможно учесть поворот системы координат приемника относительно передатчика. В данном эксперименте гондола была специально дестабилизирована и совершала эволюции амплитудой порядка 10 метров с периодом около трёх секунд. При этом амплитуда угловых колебаний составила величину порядка 15 градусов.

5. Заключение

Приведенное решение задачи калибровки электромагнитной системы относительного позиционирования позволяет существенно повысить точность решения задачи определения параметров взаимного расположения передатчика и приемника переменного магнитного поля. При этом задача калибровки разбита на этапы, один из которых можно выполнить без сторонней информации, а другой – с применением информации только о радиус-векторе «передатчик–приемник» в системе координат передатчика.

Описанный алгоритм работает при ряде предположений. Во-первых, считается, что структура вторичных источников, возникающих в окрестности передатчика, не меняется со време-

нем. Это позволяет производить калибровку один раз для одной установки системы диполей. Во-вторых, полагается, что зона, в которой появляются вторичные источники, пренебрежимо мала по сравнению с расстоянием до приемника. Это позволяет решать задачу в предположении, что все источники находятся в одной точке. В-третьих, полагается малость вторичного поля по отношению к первичному. Это позволяет линеаризовать задачу определения поправочных коэффициентов.

Все перечисленные предположения оказываются выполненными для электромагнитной системы относительного позиционирования, интегрированной в комплекс аэроэлектро-разведки ЕМ-4Н. Решение задачи калибровки для этой системы позволило не только обеспечить требуемую точность определения координат приемника в системе координат передатчика, но и определить поле, наведенное в проводящих элементах фюзеляжа носителя, тем самым полностью выделить поле отклика от земли. Результат определения отклика над соленым озером представлен на рис. 7.

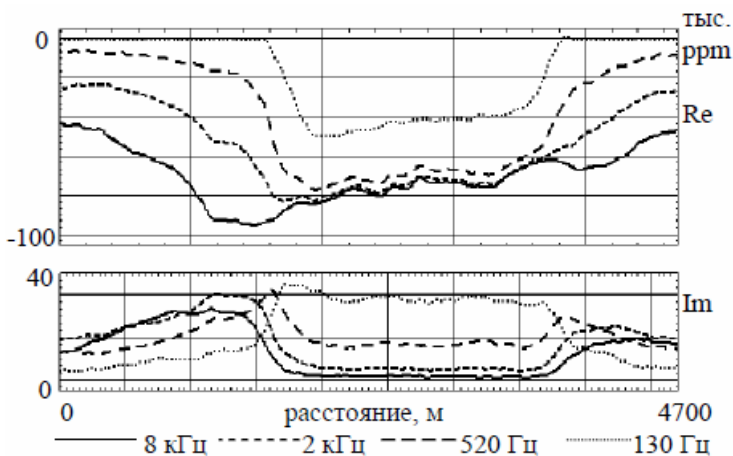


Рис. 7. Поле отклика над соленым озером Тус

Вода соленого озера Тус имеет очень низкое удельное сопротивление, порядка 0,01 Ом·м. Именно для таких объектов задача определения геометрических параметров стоит наиболее

остро [10]. Тем не менее удалось определить реальную и мнимую компоненту отклика для всех рабочих частот основного диполя. На графиках рис. 7 показаны вертикальные составляющие поля отклика для реального (Re) и мнимого (Im) вектора в тысячных долях первичного поля (тыс. ppm).

Литература

1. ВОЛКОВИЦКИЙ А.К. *Измерения физических полей для решения задач управления движением и навигации* // Вопросы оборонной техники. Серия 9. Специальные системы управления, следящие приводы и их элементы. – 2011. – №1(246)–2(247). – С. 83–87.
2. ВОЛКОВИЦКИЙ А.К., КАРШАКОВ Е.В., ПОПОВИЧ В.В. *Компенсация влияния наведенных токов в низкочастотной индуктивной аэроэлектроразведочной системе EM-4H* // Материалы международной конференции, посвященной 50-летию Института геофизики УрО РАН «Геофизические исследования Урала и сопредельных регионов». – Екатеринбург, 2008. – С. 40–43.
3. ВОЛКОВИЦКИЙ А.К., КАРШАКОВ Е.В., МОЙЛАНЕН Е.В. *Низкочастотная индуктивная аэроэлектроразведочная система EM-4H* // Современные проблемы геологии и разведки полезных ископаемых (Записки Горного института. – Т.183). – СПб: Санкт-Петербургский государственный горный институт (технический университет), 2009. – С. 83–87.
4. ГАНТМАХЕР Ф.Р. *Теория матриц*. – М.: Наука, 1966. – 576 с.
5. КАРШАКОВ Е.В., ПАВЛОВ Б.В. *Навигационное обеспечение задачи измерения физических полей на борту летательного аппарата* // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2010. – №3. – С. 77–81.
6. ПАВЛОВ Б.В., ВОЛКОВИЦКИЙ А.К., КАРШАКОВ Е.В. *Низкочастотная электромагнитная система относительной навигации и ориентации* // Гироскопия и навигация. – 2010. – №1(68). – С. 3–15.

7. ПАРСЕЛЛ Э. *Берклеевский курс физики. Том II. Электричество и магнетизм.* – М.: Наука, 1983. – 416 с.
8. СВЕТОВ Б.С. *Основы геоэлектрики.* – М.: Изд-во ЛКИ, 2008. – 656 с.
9. СВЕТОВ Б.С. *Теория, методика и интерпретация материалов низкочастотной индуктивной электроразведки.* – М.: Недра, 1973. – 254 с.
10. HEFFORD S.W., SMITH R.S., SAMSON C. *Quantifying the Effects that Changes in Transmitter-Receiver Geometry Have on the Capability of an Airborne Electromagnetic Survey System to Detect Good Conductors* // Exploration and Mining Geology. – 2006. – Vol. 15 nos. 1–2. – P. 43–52.
11. SMITH R.S. *Tracking the Transmitting-Receiving Offset in Fixed-Wing Transient EM Systems: Methodology and Application* // Exploration Geophysics. – 2001. – №32. – P. 14–19.

CALIBRATION PROBLEM FOR ELECTROMAGNETIC RELATIVE POSITIONING SYSTEM

Evgeny Karshakov, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Cand.Sc., senior researcher (karshak@mail.ru).

Abstract: Calibration algorithms are introduced for an airborne low-frequency electromagnetic relative positioning system, which allow for more accurate measurement of a distance between the alternating magnetic field transmitter and receiver. Several problem settings are considered for different information sets used for calibration. Calibration results are presented for an electromagnetic relative positioning system integrated in aircraft-carried EM-4H system for airborne geophysical survey.

Keywords: electromagnetic relative positioning system, alternating magnetic field, magnetic dipole, EM-4H.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии А. П. Курдюковым