УДК 519.177
ББК 22.18

ИССЛЕДОВАНИЕ ЭЙЛЕРОВЫХ РЕСУРСНЫХ СЕТЕЙ

Жилякова Л. Ю.[1]
(*ФГБУН Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва*)

Работа посвящена исследованию свойств эйлеровых ресурсных сетей, к которым относятся однородные, симметричные и квазисимметричные сети. При малых ресурсах найдена формула единственного предельного состояния. При больших ресурсах предельное состояние в таких сетях полностью зависит от начального. Найдены формулы, выражающие эту зависимость. Для класса начальных состояний, сохраняющих правила функционирования во всех вершинах, получен предельный вектор; для остальных начальных состояний предложен рекурсивный алгоритм сведения их к указанному классу.

Ключевые слова: рассеяние на графах, ресурсная сеть, пропускная способность, пороговое значение, поток, предельное состояние.

1. Введение

Модели рассеяния на графах используются для решения различных задач в широком кругу предметных областей. Принципиально такие модели можно разделить на два класса. Первый класс математически эквивалентен случайным блужданиям на графах и сводится к конечным цепям Маркова. Такими моделями описываются задачи балансировки нагрузки в сети; задачи определения показателей влиятельности узлов в соци-

---

[1] *Людмила Юрьевна Жилякова, кандидат физико-математических наук* (*zhilyakova.ludmila@gmail.com*)

альных сетях, таких как центральность по собственному вектору и в частности *PageRank* и его различные модификации, и т.д. К другому классу относятся пороговые модели, в которых переход из состояния в состояние может произойти, только если некоторые показатели вершин превышают критические отметки. Эти модели описывают явления самоорганизующейся критичности, такие как сход лавин (в том числе «абелева куча песка» или «куча риса» [7, 9]). Соответствующие модели при некоторых упрощениях математически эквивалентны играм «выстреливания фишек» (*chip-firing games*) (см. например, [8, 10]). Эти игры представляют собой целочисленные пороговые модели, в которых каждая вершина графа хранит некоторое количество фишек. Вершина способна выстрелить, когда количество хранящихся в ней фишек не менее количества ее выходных ребер (возможно наличие кратных ребер и петель). За один ход выстреливает одна вершина. «Игра» рассматривается как последовательность выстреливаний. При этом все последовательности выстрелов из данной позиции равнозначны: либо все они будут длиться бесконечно, либо закончатся за одинаковое количество шагов с одной и той же конечной позицией [10]. Существуют модификации игры, в которых происходит параллельное выстреливание [11].

Ресурсная сеть, рассмотренная в работах [1–3, 5], обладает свойствами как марковских, так и пороговых моделей. Каждая вершина функционирует в соответствии с одним из двух правил, в зависимости от количества ресурса, которым она обладает. При малых ресурсах сеть полностью идентична модели случайных блужданий. Хотя процессы, происходящие в сети, строго детерминированы, они описываются конечной цепью Маркова. При больших ресурсах (ресурсах, превосходящих пороговое значение, описанное и найденное в предыдущих работах [3, 5]) вершины сети делятся на два подмножества, функционирующие по разным правилам. Первое переходит на правило, близкое к описанному в *chip-firing game*, второе продолжает оставаться внутри марковских процессов.

Настоящая работа посвящена исследованию симметричных, квазисимметричных и неполных однородных симметричных сетей, которые обладают тем свойством, что при $W > T$ их предельное состояние полностью зависит от начального. Все эти сети имеют общую особенность: у каждой вершины входная и выходная пропускные способности совпадают. В случае, когда пропускные способности целочисленны, такую сеть можно представить графом с кратными ребрами (единичной пропускной способности), в каждой вершине которого полустепень захода равна полустепени исхода, т.е. эйлеровым графом. Ресурсная сеть, у которой входная и выходная пропускные способности в каждой вершине совпадают, представляет собой обобщение эйлерова графа. Поэтому далее будем называть такие сети эйлеровыми ресурсными сетями.

2. Основные определения и результаты, полученные для однородных и несимметричных сетей

Определения, касающиеся ресурсных сетей, изложены в работах [1–3, 5]. В основе сети лежит ориентированный граф $G = (V, E)$, $|V| = n$, с матрицей пропускных способностей $R = (r_{ij})_{n\times n}$.

Вершины сети в каждый момент t дискретного времени обладают некоторым количеством ресурса $q_i(t) \geq 0$.

$Q(t) = (q_1(t), \ldots, q_n(t))$ – *состояние* сети в момент t.

$r_{sum} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} r_{ij}$ – суммарная пропускная способность сети.

$r_i^{in} = \sum_{j=1}^{n} r_{ji}$ и $r_i^{out} = \sum_{j=1}^{n} r_{ij}$ – входная и выходная пропускные способности вершины v_i соответственно.

В момент t вершина v_i отдает в смежную ей вершину v_m:

r_{im} единиц ресурса, если $q_i(t) > r_i^{out}$ (правило 1);

$\dfrac{r_{im}}{r_i^{out}} q_i(t)$ в противном случае (правило 2).

Доказано, что процесс распределения ресурса в регулярных сетях по правилам 1, 2 при любом суммарном ресурсе W сходится. Q^* – вектор предельного состояния.

Матрице пропускных способностей R соответствует стохастическая матрица R', получаемая из R нормированием по строкам.

В зависимости от вида матрицы пропускных способностей все сети делятся на однородные, симметричные, квазисимметричные и несимметричные.

Сеть *однородна*, если пропускные способности всех ребер одинаковы; *симметрична*, если матрица R симметрична: $R = R^{\mathrm{T}}$; *квазисимметрична*, если R несимметрична, но для каждой вершины выполняется $r_i^{in} = r_i^{out}$, $i = 1, \ldots, n$; *несимметрична*, если в ней существуют вершины с разными входными и выходными способностями: $\exists i \in \{1, \ldots, n\}$: $r_i^{in} - r_i^{out} \neq 0$.

Пусть $\Delta r_i = r_i^{in} - r_i^{out}$. Тогда в зависимости от знака Δr_i вершины делятся на три класса: вершины-приемники ($\Delta r_i > 0$), вершины-источники ($\Delta r_i < 0$) и нейтральные вершины ($\Delta r_i = 0$).

В настоящей работе будем рассматривать симметричные (в том числе и неполные однородные с одинаковыми полустепенями захода и исхода) и квазисимметричные сети, объединив их в один класс *эйлеровых сетей*. Все вершины в таких сетях нейтральны.

Суммарный ресурс, находящийся в вершинах, обозначим через W. В сети выполняется закон сохранения: при ее функционировании значение W не изменяется.

Множество вершин с ресурсом $q_i(t)$, не превосходящим r_i^{out}, называется зоной $Z^-(t)$. Вершины из $Z^-(t)$ функционируют по правилу 2. $Z^+(t)$ – множество вершин, ресурс которых больше их выходной пропускной способности, они функционируют по правилу 1. T – пороговое значение ресурса, такое что при $W \leq T$ все вершины, начиная с некоторого t', переходят в зону $Z^-(t)$; при $W > T$ зона $Z^+(t)$ не пуста, начиная с некоторого t''. Заметим, что в эйлеровых сетях $t'' = 0$; в несимметричных сетях

$t'' \geq 0$. В предельном состоянии эти два множества обозначаются как Z^{-*} и Z^{+*}.

Вершины, способные при $W > T$ из некоторого начального состояния перейти в Z^{+*}, называются *потенциальными аттракторами*. В [3] было доказано, что потенциальными аттракторами могут быть некоторые приемники и некоторые нейтральные вершины, причем первые способны притягивать ресурс и поэтому названы *активными аттракторами*, вторые могут лишь сохранить ресурс, которым обладали в начальном состоянии. Такие аттракторы называются *пассивными*. В этой же работе сформулирован критерий аттрактивности вершины.

Пороговое значение T в общем случае не превосходит суммарной пропускной способности сети r_{sum}. Для несимметричных сетей $T < r_{sum}$, для полных однородных сетей $T = r_{sum}$.

В предыдущих работах рассматривались двусторонние сети с петлями. Однако полученные результаты можно перенести без изменений на все регулярные сети (сеть регулярна, если регулярна соответствующая ей цепь Маркова). Ориентированный граф, порождающий регулярную сеть, должен быть сильно связным и апериодичным. Апериодичным называется граф, длины всех циклов в котором не имеют общего делителя, большего единицы [10] (так, к примеру, все циклы в двудольном графе четны, и потому двудольные графы нерегулярны). Существование хотя бы одной петли в сильно связном графе – достаточное условие апериодичности. В терминах матрицы пропускной способности R регулярность означает, что существует такая степень $k \geq 1$, что $R^k > 0$. При этом степени R выше k тоже положительны: $\forall t > k \;\; R^t > 0$ [6].

3. Свойства эйлеровых сетей

3.1. СУЩЕСТВОВАНИЕ ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ И ПОРОГОВОЕ ЗНАЧЕНИЕ T

При $W \leq T$ функционирование сети описывается регулярной цепью Маркова со стохастической матрицей R'. Поэтому при малых ресурсах предельное состояние в эйлеровых сетях существует и единственно. Найдем пороговое значение T и рассмотрим функционирование эйлеровых сетей с ресурсом, превосходящим T.

Эксперименты показывают, что пороговое значение T совпадает с суммарной пропускной способностью сети r_{sum}. Докажем, что это равенство выполняется для любой эйлеровой сети. При доказательстве этого факта будем использовать понятие *потока*. Поток ресурса определяется в работе [2]. Под потоком $f_{ij}(t)$ понимается ресурс, проходящий по ребру $\langle v_i, v_j \rangle$ между двумя последовательными тактами t и $t + 1$. Поток в сети задается матрицей $F(t) = (f_{ij}(t))_{n\times n}$. Доказано, что в регулярной сети предельный поток всегда существует и при $W > T$ суммарный (по всем ребрам) предельный поток равен T.

Теорема 1. В эйлеровой сети пороговое значение равно суммарной пропускной способности сети: $T = r_{sum}$.

Доказательство. В силу принципа Дирихле $T \le r_{sum}$. Предположим, что $T < r_{sum}$. Тогда по определению T существует такое значение ресурса W: $T < W < r_{sum}$, что в предельном состоянии по крайней мере одна вершина v_i, $1 \le i \le n$, будет отдавать ресурс по правилу 1, т.е. для нее выполнится: $q_i^* > r_i^{out}$, и она отдает на каждом такте ресурс, равный r_i^{out}. А поскольку в предельном состоянии входной и выходной потоки вершин совпадают, принимает вершина v_i на каждом такте тоже r_i^{out} ресурса. Так как $r_i^{in} = r_i^{out}$, по каждому входному ребру в вершину v_i приходит по полной пропускной способности. Таким образом, все смежные с ней вершины имеют ресурс, не меньший своих выходных пропускных способностей: r_j^{out}. Сеть является связной. Продолжая подобные рассуждения для каждой вершины, получим, что все вершины имеют ресурс, не меньший своей выходной пропускной способности. Тогда общий ресурс не может быть меньше $\sum_{j=1}^{n} r_j^{out} = r_{sum}$, что противоречит предположению. Полученное противоречие доказывает, что $T = r_{sum}$. □

Следствие 1. Непосредственно из доказательства теоремы вытекает, что для каждой вершины эйлеровой сети выполнится: $\widetilde{Q} = (r_1^{out}, r_2^{out}, ..., r_n^{out})$, где $\widetilde{Q}$ – вектор предельного состояния при $W = T$.

Следствие 2. Если $v_i \in Z^-(0)$, $\forall t > 0$ $v_i \in Z^-(t)$. (Это означает, что зона $Z^+(t)$ в процессе функционирования сети не может расширяться.)

Доказательство. Входной поток некоторой вершины в эйлеровой сети может превышать выходной, только когда она находится в зоне $Z^-(t)$. Как только ресурс вершины $v_i \in Z^-(t)$ достигает значения r_i^{out}, ее выходной поток становится не меньше входного, и получить ресурс, больший этого значения, она не может. □

Следствие 3. Если суммарный ресурс в эйлеровой сети больше порогового значения: $W > T$, для каждой вершины из зоны $Z^-(0)$ в предельном состоянии выполнится: $q_k^* = r_k^{out}$.

Доказательство этого следствия очевидно. Количество ресурса в каждой вершине при $W > T$ не может быть меньше, чем при $W = T$. А при $W = T$ по следствию 1 выполнится $\widetilde{Q} = (r_1^{out}, r_2^{out}, ..., r_n^{out})$. Таким образом, $q_k^* \geq r_k^{out}$. Но вершины из зоны $Z^-(0)$ не могут перейти в зону $Z^+(t)$, и таким образом, их ресурс не может превысить выходную пропускную способность. Отсюда $q_k^* = r_k^{out}$ для каждой вершины из зоны $Z^-(0)$. □

3.2. ФУНКЦИОНИРОВАНИЕ ЭЙЛЕРОВЫХ СЕТЕЙ

По определению в эйлеровых сетях для каждой вершины выполняется равенство $r_i^{in} = r_i^{out}$, и, следовательно, все вершины нейтральны. В таких сетях динамика ресурса в вершинах может быть разнообразной: в вершинах могут возникать затухающие колебания; ресурс в вершинах может изменяться монотонно и немонотонно.

Исследование функционирования эйлеровых сетей при $W > T$ позволяет сформулировать ряд свойств.

Свойство 1. Любая вершина в эйлеровой сети является потенциальным аттрактором: при $W > r_{sum}$ существует такое начальное состояние, из которого она может оказаться в зоне Z^{+*}.

Свойство 2. Все аттракторы эйлеровой сети *пассивны*: вершина может удержаться в зоне $Z^{+}(t)$, но не может туда перейти.

Свойство 3. При $W > r_{sum}$ некоторые вершины, принадлежащие зоне $Z^{+}(0)$, могут оказаться в $Z^{-}(t)$ и, соответственно, в Z^{-*}.

Проиллюстрируем свойство 3 следующим примером.

Пример 1. Рассмотрим сеть с пятью вершинами (пример легко обобщается на любое количество вершин). Пусть матрица пропускных способностей имеет вид

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 50 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 50 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 50 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 50 \\ 50 & 1 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Пропускные способности вершин равны 54, 55, 56, 57 и 58 соответственно.

$r_{sum} = 280$.

Начальное состояние: $Q(0) = (205, 80, 0, 0, 0)$. $W = 285$.

Предельное состояние: $Q^{*} = (54, 60, 56, 57, 58)$.

Динамика ресурса представлена на рис. 1.

В зоне $Z^{+}(0)$ в начальном состоянии находятся первая и вторая вершины. Из рисунка видно, что хотя первая вершина имеет гораздо больший ресурс, чем вторая, именно она переходит в зону $Z^{-}(t)$ за первые пять тактов, и затем ее ресурс стремится к значению $r_{i1}^{out} = 54$ снизу. Вторая вершина остается в зоне $Z^{+}(t)$, и в предельном состоянии весь излишек ресурса $W - T = 5$ оказывается в ней.

Задача определения, какие из вершин для каждого конкретного начального состояния $Q(0)$ способны удержаться в зоне $Z^{+}(t)$, будет рассмотрена в разделе 4.

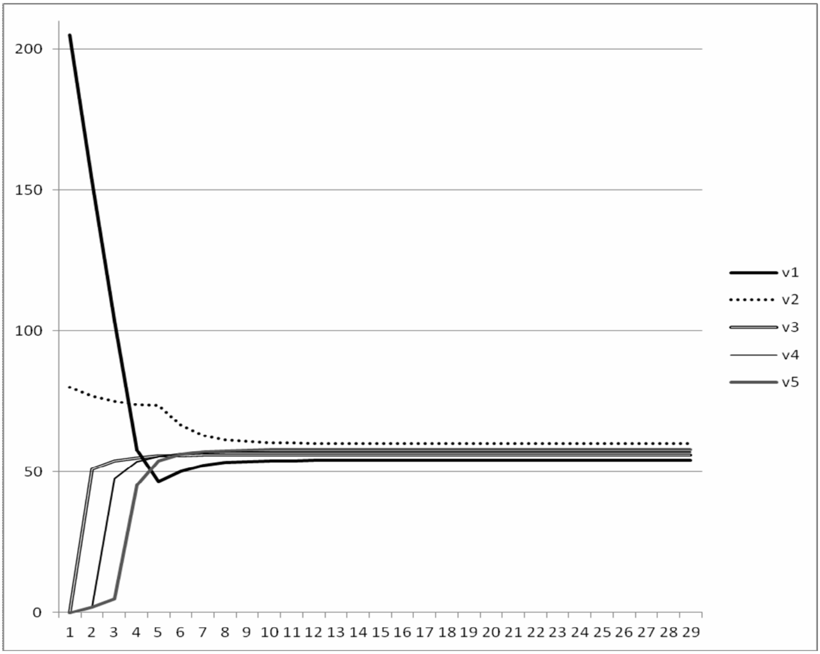

Рис. 1. Первая вершина переходит из $Z^{+}(t)$ в $Z^{-}(t)$

3.3. ПРЕДЕЛЬНОЕ СОСТОЯНИЕ СЕТИ ПРИ $W = 1$ И $W \leq T$

Вектор состояния в момент t при $W = 1$, как и в предыдущих работах, будем обозначать $Q^1(t)$. Предельное состояние – Q^{1*}. Для несимметричных сетей этот вектор находился итерационным методом как собственный вектор стохастической матрицы R', соответствующей матрице пропускной способности R. Для эйлеровых сетей он может быть записан в явном виде.

Теорема 2. В регулярной эйлеровой сети вектор предельного состояния при $W = 1$ имеет вид

$$Q^{1*} = \left(\frac{r_1^{out}}{r_{sum}}, \frac{r_2^{out}}{r_{sum}}, \ldots, \frac{r_n^{out}}{r_{sum}} \right). \quad (1)$$

Доказательство. Так как все вершины эйлеровой сети являются потенциальными аттракторами, для каждой из них выполнится [3]: $\dfrac{r_i^{out}}{q_i^{1*}} = T$. Но по теореме 1 $T = r_{sum}$.

Отсюда следует, что $\forall i \ \ q_i^{1*} = \dfrac{r_i^{out}}{r_{sum}}$, из чего непосредственно вытекает формула (1):

$$Q^{1*} = \left(\frac{r_1^{out}}{r_{sum}}, \frac{r_2^{out}}{r_{sum}}, \ldots, \frac{r_n^{out}}{r_{sum}} \right). \Box$$

Замечание. Для полных однородных сетей с петлями, как частного случая эйлеровых сетей, получим: $Q^{1*} = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n} \right)$, что согласуется с результатами, полученными в [5].

Для любого ресурса $W \le T$ предельное состояние можно найти непосредственно из матрицы R и значения ресурса W:

$$Q^{*} = \left(\frac{r_1^{out}}{r_{sum}} W, \frac{r_2^{out}}{r_{sum}} W, \ldots, \frac{r_n^{out}}{r_{sum}} W \right).$$

3.5. ФУНКЦИОНИРОВАНИЕ СЕТИ ПРИ $W > T$

При $W = T$ предельное состояние, как было сказано выше, имеет вид $\tilde{Q} = (r_1^{out}, r_2^{out}, \ldots, r_n^{out})$.

Пусть $W > T$. Не нарушая общности, предположим, что в начальном состоянии в зоне $Z^{+}(0)$ находятся вершины с номерами от 1 до m, $m < n$ (если $m = n$, начальное состояние является устойчивым):

$$Q(0) = \left(r_1^{out} + c_1(0), \ldots, r_m^{out} + c_m(0), r_{m+1}^{out} - d_{m+1}(0), \ldots, r_n^{out} - d_n(0) \right). \quad (2)$$

Числа $c_1(0)$, …, $c_m(0) > 0$ – превышения ресурса в вершинах относительно порогового значения (их выходной пропускной способности). Согласно [5], назовем их начальным профицитом вершин. Соответственно $d_{m+1}(0)$, …, $d_n(0) \ge 0$ – начальный дефицит в вершинах.

Обозначим суммарный начальный профицит через $c_{sum}(0)$, начальный дефицит через $d_{sum}(0)$:

$$c_{sum}(0) = \sum_{j=1}^{m} c_j(0), \quad d_{sum}(0) = \sum_{j=m+1}^{n} d_j(0).$$

На любом такте $t \geq 0$ дефицит и профицит связаны соотношением

$c_{sum}(t) - d_{sum}(t) = \text{const} = W - r_{sum}$.

По следствию 3 из теоремы 1, вектор предельного состояния при $W > T$ имеет вид

$Q^* = \left(r_1^{out} + c_1^*, \ldots, r_m^{out} + c_m^*, r_{m+1}^{out}, \ldots, r_n^{out}\right)$, где $c_1^*, \ldots, c_m^* \geq 0$.

Как показывает пример 1, в процессе перераспределения ресурса при $W > T$ зона $Z^+(t)$ может сокращаться. Поэтому некоторые из значений c_i^* могут быть нулевыми. Тогда возникают сразу несколько взаимосвязанных вопросов. Какому условию должен удовлетворять профицит вершины v_k, чтобы она смогла удержаться в зоне Z^+? Иначе говоря, какие из значений $c_1^*, \ldots, c_m^*$ будут строго положительными? Можно ли по начальному состоянию без протокола функционирования сети определить предельное состояние, как это было сделано для малых ресурсов? Ответы на поставленные вопросы будут даны в следующем разделе.

4. Предельные состояния и предельные потоки при больших ресурсах

4.1. ПОРОГОВЫЙ ВЕКТОР $\widetilde{C}^m$

Для полных однородных сетей в [5] была сформулирована и доказана теорема, которая позволяла для любого начального состояния при $W > r_{sum}$ определить, какая из вершин, принадлежащих зоне $Z^+(0)$, способна остаться в предельном состоянии в зоне Z^{+*}. Более того, была найдена формула предельного состояния для всех вершин. Как и в рассматриваемых сетях, в полной однородной сети каждая вершина является потенциальным аттрактором и предельное состояние зависит от начального. Однако уже для неполных однородных сетей условия теоремы 4 [5] нарушаются. Для определения предельного состояния в произвольной эйлеровой сети нужны иные подходы.

Пусть по-прежнему в зоне $Z^+(0)$ находятся вершины с номерами от 1 до m (формула (2)).

Сформулируем задачу следующим образом.

Какой минимальный профицит должна иметь каждая вершина из $Z^+(0)$, чтобы в процессе функционирования сети не перейти в зону $Z^-(t)$? Иными словами, как должны быть распределены в зоне $Z^+(0)$ излишки ресурса сверх пропускных способностей $r_1^{out},...,r_m^{out}$ (профициты вершин), чтобы вершины $v_1, \ldots, v_m$ остались в зоне Z^{+*}, если $W = T = r_{sum}$.

Обозначим соответствующие профициты для каждой вершины через $\tilde{c}_1^m,...,\tilde{c}_m^m$ (поскольку эти значения – пороговые, такая нотация продолжает традицию обозначения пороговых величин. Так, при $W = T$ вектор предельного состояния обозначен как $\tilde{Q} = (\tilde{q}_1, ..., \tilde{q}_n))$.

Ясно, что выполняется соотношение

$$\sum_{j=1}^{m} \tilde{c}_j^m = d_{sum}(0) \, . \tag{3}$$

Пусть $W = T$ и начальное состояние задано формулой (2). Рассмотрим вектор

$$\tilde{C}^m = \left(\tilde{c}_1^m,...,\tilde{c}_n^m\right) = Q(0) - \tilde{Q} \, . \tag{4}$$

Первые его m компонент совпадают со значениями пороговых профицитов для данного начального состояния зоны $Z^-(0)$, для остальных $(n - m)$ компонент выполнится $\tilde{c}_i^m = -d_i(0)$, $i = m+1, \ldots, n$.

Сумма $(n - m)$ последних компонент вектора $\tilde{C}^m$ отрицательна и равна по модулю суммарному дефициту в начальный момент времени:

$$\sum_{j=m+1}^{n} \tilde{c}_j^m = -d_{sum}(0) \, .$$

Совмещая эту формулу с формулой (3), имеем:

$$\sum_{j=1}^{n} \tilde{c}_j^m = 0 \, .$$

4.2. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ПОТОКИ ПРИ $W > T$ И ПРЕДЕЛЬНОЕ СОСТОЯНИЕ (СЛУЧАЙ ОТСУТСТВИЯ РЕСУРСА В $Z^-(0)$)

Проследим функционирование сети при неизменной зоне $Z^+(t)$, которая состоит из m первых вершин. Эти m вершин отдают по полной выходной пропускной способности, остальные вершины отдают весь ресурс.

Вектор входящих потоков определяется как

$$F^{in}(t+1) = (r_1^{out}, \ldots, r_m^{out}, q_{m+1}(t), \ldots, q_n(t))R'.$$

Вектор, на который умножается стохастическая матрица, есть вектор выходного потока на предыдущем такте. Отсюда

$$F^{in}(t+1) = F^{out}(t)R'. \tag{5}$$

Выразим зависимость потоков на произвольном такте от начального состояния.

$$F^{out}(t+1) = (r_1^{out}, \ldots, r_m^{out}, q_{m+1}(t+1), \ldots, q_n(t+1)) =$$

$$= (r_1^{out}, \ldots, r_m^{out}, q_{m+1}(t), \ldots, q_n(t))P = F^{out}(t)P,$$

где P – матрица, полученная из стохастической матрицы R' заменой первых m столбцов на столбцы канонического базиса $e_1, \ldots, e_m$. Ее можно представить в виде блочной матрицы:

$$P = \left(\begin{array}{c|c} E_1 & R_1' \\ \hline O & R_2' \end{array}\right),$$

где E_1 – единичная матрица размера $m \times m$; O – нулевая матрица $(n - m) \times m$; $R_{1,2}'$ – соответствующие блоки стохастической матрицы.

R_1' характеризует пропускные способности ребер между зонами $Z^+(t)$ и $Z^-(t)$, R_2' отвечает за обмен ресурсом внутри $Z^-(t)$.

Для любого натурального h выполнится:

$$F^{out}(t+h) = F^{out}(t)P^h;$$

$$F^{out}(t) = F^{out}(0)P^t.$$

Тогда (5) перепишется в виде

$$F^{in}(t+1) = F^{out}(0)P^tR'.$$

Непосредственно возводя матрицу P в степень t, получим:

$$P^t = \left(\begin{array}{c|c} E_1 & R_1' + R_1'R_2' + R_1'\left(R_2'\right)^2 + \ldots + R_1'\left(R_2'\right)^{t-1} \\ \hline O & \left(R_2'\right)^t \end{array}\right)$$

В [4] доказано, что для матриц такого вида $\left(R_2'\right)^t \to 0$ при $t \to \infty$, и, кроме того, $\sum_{k=0}^{\infty}\left(R_2'\right)^k = \left(E_2 - R_2'\right)^{-1}$, где $(E_2)_{(n-m)\times(n-m)}$ – единичная матрица и матрица $\left(E_2 - R_2'\right)^{-1}$ существует. Тогда

$$R_1' + R_1'R_2' + R_1'\left(R_2'\right)^2 + \ldots + R_1'\left(R_2'\right)^k + \ldots = R_1'\left(E_2 - R_2'\right)^{-1}$$

и матрица P^∞ имеет вид

$$P^\infty = \left(\begin{array}{c|c} E_1 & R_1'\left(E_2 - R_2'\right)^{-1} \\ \hline O & O \end{array}\right). \tag{6}$$

Из (6) и из существования предельного потока следует

$$F^{in*} = F^{out*} = F^{out}(0)P^\infty R' = F^{out}(0)\left(\begin{array}{c|c} E_1 & R_1'\left(E_2 - R_2'\right)^{-1} \\ \hline O & O \end{array}\right)R'. \tag{7}$$

Из формулы (7) видно, что вектор предельного потока зависит только от m первых компонент вектора потока в начальном состоянии. «Физический смысл» здесь достаточно очевиден. Суммарный предельный поток при $W > T$ равен пороговому значению T, которое зависит только от характеристик самой сети и не зависит от начального состояния. Для первых m компонент вектора $F^{out}(0)$ выполняется $f_i^{out} = r_i^{out}$, $i = 1, \ldots, m$, т.е. они выражаются через параметры сети. С их помощью рассчитываются остальные компоненты вектора предельного потока.

Поскольку при $W > T$ предельный поток известен и совпадает с предельным состоянием при $W = T$: $\widetilde{Q} = (r_1^{out}, \ldots, r_n^{out})$ [2], из (7) имеем:

$$F^{out}(0)\left(\begin{array}{c|c} E_1 & R_1'\left(E_2 - R_2'\right)^{-1} \\ \hline O & O \end{array}\right)R' = (r_1^{out}, \ldots, r_n^{out}).$$

Вектор $\widetilde{Q} = (r_1^{out}, \ldots, r_n^{out})$ является собственным вектором матрицы R' с собственным числом $\lambda = 1$. Отсюда:

$$(8)\quad F^{out}(0)\left(\begin{array}{c|c} E_1 & R_1^{'}\left(E_2-R_2^{'}\right)^{-1} \\ \hline O & O \end{array}\right)=(r_1^{out},\ldots,r_n^{out})\,.$$

При этом, как уже было отмечено, вклад вектора $F^{out}(0)$ в левую часть (8) состоит только из m первых компонент.

Таким образом, можно переписать (8) в виде:

$$(r_1^{out},\ldots,r_m^{out},0,\ldots,0)\left(\begin{array}{c|c} E_1 & R_1^{'}\left(E_2-R_2^{'}\right)^{-1} \\ \hline O & O \end{array}\right)=(r_1^{out},\ldots,r_n^{out})\,.$$

Отсюда для эйлеровых сетей получается следующее равенство:

$$(9)\quad (r_1^{out},\ldots,r_m^{out})\left(R_1^{'}\left(E_2-R_2^{'}\right)^{-1}\right)=(r_{m+1}^{out},\ldots,r_n^{out})\,.$$

Здесь $\left(R_1^{'}\left(E_2-R_2^{'}\right)^{-1}\right)$ – матрица связи первых m компонент вектора суммарных пропускных способностей с последними (n – m) компонентами. Обозначим ее через R^c, а векторы пропускных способностей с m и $(n-m)$ компонентами – через R_m^{out} и R_{n-m}^{out} соответственно. Тогда (9) перепишется в виде:

$$R_m^{out}R^c=R_{n-m}^{out}\,.$$

Вклад i-й компоненты вектора R_m^{out}, $i=1,\ldots,m$, во все компоненты вектора R_{n-m}^{out} равен $r_i^{out}\sum_{j=1}^{n-m}r_{ij}^c$ – пропускная способность i-й вершины умножается на сумму элементов i-й строки матрицы R^c.

Пусть вершины, находящиеся в зоне $Z^-(0)$, не имели ресурса, т.е. $d_j(0)=r_j^{out}$, $j=m+1,\ldots,n$, и $d_{sum}(0)=\sum_{j=m+1}^{n}r_j^{out}$.

Тогда каждая вершина должна отдать ресурс, равный $r_i^{out}\sum_{j=1}^{n-m}r_{ij}^c$. Отсюда компоненты вектора $\widetilde{C}^m$, задающие минимальное количество ресурса сверх пропускной способности, при котором вершина остается в зоне $Z^{+}(t)$, рассчитываются по формуле

(10) $\tilde{c}_i^m = r_i^{out} \sum_{j=1}^{n-m} r_{ij}^c$, $i = 1, \ldots, m$.

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 3. В эйлеровой сети с начальным состоянием $Q(0) = \left(r_1^{out} + c_1(0), \ldots, r_m^{out} + c_m(0), 0, \ldots, 0\right)$ и ресурсом $W > T$ минимальные значения $\tilde{c}_i^m$, $i = 1, \ldots, m$, при которых вершины из зоны $Z^{+}(0)$ не перейдут в зону $Z^{-}(t)$, рассчитываются по формуле

$$\tilde{c}_i^m = r_i^{out} \sum_{j=1}^{n-m} r_{ij}^c, \ i = 1, \ldots, m, \text{ где } R^c = \left(R_1' \left(E_2 - R_2' \right)^{-1} \right),$$

а предельное состояние при условии, что $c_i(0) \geq \tilde{c}_i^m$ $\forall i = 1, \ldots, m$, описывается вектором:

$$Q^* = \left(r_1^{out} + c_1(0) - \tilde{c}_1^m, \ldots, r_m^{out} + c_m(0) - \tilde{c}_m^m, r_{m+1}^{out}, \ldots, r_n^{out}\right).$$

4.3. ЗАДАЧА НАХОЖДЕНИЯ ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ (СЛУЧАЙ СТАЦИОНАРНОЙ ЗОНЫ $Z^{+}(T)$)

Рассмотрим начальное состояние с ненулевым ресурсом в вершинах из зоны $Z^{-}(0)$. Для него первые m компонент вектора $\tilde{C}^m$ уже нельзя рассчитать по формуле (10). Пусть существует по крайней мере одна вершина v_j, $j = m + 1, \ldots, n$, содержащая в начальном состоянии ненулевое количество ресурса: $d_j(0) < r_j^{out}$. Тогда вместо вектора правой части равенства (9) $(r_{m+1}^{out}, \ldots, r_n^{out})$, нужно получить не превышающий его вектор $\left(d_{m+1}(0), \ldots, d_n(0)\right)$. Разность этих двух векторов совпадает с компонентами вектора начального состояния вершин из зоны $Z^{-}(0)$: $\left(r_{m+1}^{out} - d_{m+1}(0), \ldots, r_n^{out} - d_n(0)\right)$.

Введем для каждой вершины $v_j \in Z^{-}(0)$ коэффициент $\alpha_j \leq 1$:

$$\alpha_j = \frac{d_j(0)}{r_j^{out}}.$$

Вектор дефицитов может быть представлен в виде

$$\left(d_{m+1}(0),\,...,d_n(0)\right)=\left(\alpha_{m+1}r_{m+1}^{out},\,...,\alpha_n r_n^{out}\right)=$$
$$=\left(r_{m+1}^{out},...,r_n^{out}\right)Diag\left(\alpha_{m+1},\,...,\,\alpha_n\right),$$

где $Diag(\alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_n)$ – диагональная матрица с элементами $\alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_n$.

Отсюда, чтобы получить вектор, каждая компонента которого равна дефициту данной вершины, выражение (9) модифицируется следующим образом:

(11) $\left(r_1^{out},...,r_m^{out}\right)R^c Diag\left(\alpha_{m+1},\,...,\,\alpha_n\right)=\left(d_{m+1}(0),\,...,d_n(0)\right)$

Из (11) легко получить, что для случая, когда вершины зоны $Z^-(0)$ содержат ресурс, выражение (10) для минимальных излишков ресурса в вершинах из $Z^+(0)$ примет вид

(12) $\tilde{c}_i^m = r_i^{out}\sum_{j=1}^{n-m} r_{ij}^c \alpha_{m+j}$, $i = 1, \ldots, m$.

Формула (12) для каждого начального состояния эйлеровой сети задает минимальные излишки в каждой вершине из зоны $Z^+(0)$, которые позволят этой вершине остаться в зоне $Z^+(t)$ на протяжении всего функционирования сети. И, как и в случае с отсутствием ресурса в зоне $Z^-(t)$, выполнение неравенства $c_j(0) \geq \tilde{c}_i^m$ для всех вершин из $Z^+(0)$ является достаточным условием применимости данного метода к вычислению предельного состояния. Если это неравенство выполняется, вектор предельного состояния получается из начального состояния следующим образом:

$$Q^* = Q(0) - \tilde{C}^m = Q(0) - \left(\tilde{c}_1^m,...,\tilde{c}_m^m, -d_{m+1}(0),\,...,-d_n(0)\right),\text{ или}$$
$$Q^* = \left(r_1^{out} + c_1(0) - \tilde{c}_1^m,...,r_m^{out} + c_m(0) - \tilde{c}_m^m,\ r_{m+1}^{out},\,...,r_n^{out}\right).$$

Таким образом, доказана теорема о предельном состоянии при стационарной зоне $Z^+(t)$.

Теорема 4. В эйлеровой сети с произвольным начальным состоянием

$$Q(0) = \left(r_1^{out} + c_1(0),...,r_m^{out} + c_m(0), r_{m+1}^{out} - d_{m+1}(0),...,r_n^{out} - d_n(0)\right)$$

при $W > T$ минимальные значения $\tilde{c}_i^m$, $i = 1, \ldots, m$, при которых вершины из зоны $Z^+(0)$ не перейдут в зону $Z^-(t)$, рассчитываются по формуле

$$\tilde{c}_i^m = r_i^{out} \sum_{j=1}^{n-m} r_{ij}^c \alpha_{m+j}\,,\ \ i = 1,\ \ldots,\ m,\ \text{ где } \alpha_k = \frac{d_k(0)}{r_k^{out}}\,,\ k = m+1,\ \ldots,\ n,$$

а предельное состояние при условии, что $c_i(0) \ge \tilde{c}_i^m$ $\forall i = 1,\ \ldots,\ m$, описывается вектором:

$$Q^* = \left(r_1^{out} + c_1(0) - \tilde{c}_1^m, \ldots, r_m^{out} + c_m(0) - \tilde{c}_m^m,\ r_{m+1}^{out},\ \ldots, r_n^{out}\right).$$

Замечание. Нетрудно заметить, что когда вершины из зоны $Z^-(0)$ не содержат ресурса, значения α_i для них равны единице, и формула (12) превращается в формулу (10). Теорема 3 является частным случаем теоремы 4.

4.4. ЗАДАЧА НАХОЖДЕНИЯ ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ (ОБЩИЙ СЛУЧАЙ)

Следующий результат, который необходимо получить, – описание вектора предельного состояния при произвольных ресурсах в зоне $Z^+(0)$, т.е. найти предельное состояние вне зависимости от того, остается зона $Z^+(t)$ стационарной на протяжении всего функционирования сети или сужается. Опишем последовательность действий для нахождения предельного состояния при условии, что не все $c_i(0)$ превосходят пороговые значения $\tilde{c}_i^m$.

Алгоритм нахождения предельного состояния при нестабильной зоне $Z^+(t)$ включает в себя следующие шаги.

1. Рассчитать пороговые значения $\tilde{c}_i^m$.
2. Выбрать вершину в $Z^+(0)$, которая первой покинет $Z^+(t)$. (Возможна ситуация, когда несколько вершин покидают зону $Z^+(t)$ одновременно. Порядок действия для этого случая аналогичен.)
3. Перераспределить ее излишек сверх выходной пропускной способности между вершинами из зоны $Z^-(0)$. Если таких вершин несколько, перераспределить все их излишки.
4. Пропорционально уменьшить ресурс в остальных вершинах зоны $Z^+(0)$.

5. Пропорционально увеличить ресурс в вершинах из зоны $Z^-(0)$ на отданное количество ресурса.

6. Пересчитать значения $\tilde{c}_i^l$, $l \le m - 1$, для нового начального состояния с редуцированной зоной $Z^+(0)$, содержащей l вершин.

7. Если для всех вершин выполнится неравенство $c_i(0) \ge \tilde{c}_i^l$, зона $Z^+(0)$ стабилизировалась. Мы попадаем в условия теоремы 4. Выход.

8. Если существует по крайней мере одна вершина, для которой $c_i(0) < \tilde{c}_i^l$, то $m := l$; переход на шаг 1.

Опишем один проход этого алгоритма.

Если зона $Z^+(t)$ сужается, существуют вершины, для которых $c_i(0) < \tilde{c}_i^m$. Если таких вершин несколько, нужно узнать, какая из них покинет зону $Z^+(t)$ раньше. Пример 1 показывает, что для того чтобы выявить такую вершину, недостаточно ранжировать их по убыванию начальных профицитов. Важно не только количество ресурса, – важна также скорость его уменьшения.

Расположим вершины в таком порядке, что первые m вершин упорядочены по убыванию отношения $\beta_i = \dfrac{c_i(0)}{\tilde{c}_i^m}$, причем как минимум одно из этих отношений строго меньше единицы.

Рассмотрим вершину v_m. Для нее значение $\beta_m = \dfrac{c_m(0)}{\tilde{c}_m^m}$ минимально, причем $\beta_m < 1$. Будем рассматривать случай, когда минимум β_i достигается в одной вершине. Рассуждения для случая, когда таких вершин несколько, аналогичны.

Для всех β_i, $i = 1, \ldots, m - 1$, выполнится $\beta_i > \beta_m$, поэтому для любого $c_i(0)$, $i = 1, \ldots, m - 1$, $c_i(0) > \beta_m \tilde{c}_i^m$, т.е. если ресурс любой другой вершины из $v_i \in Z^+(0)$ уменьшить на значение $\beta_m \tilde{c}_i^m$, она останется в $Z^+(t)$.

Пока вершина v_m будет отдавать весь имеющийся у нее излишек, каждая вершина $v_i \in Z^+(0)$ отдаст количество ресурса, равное $\beta_m \tilde{c}_i^m$, и, как уже было показано, не покинет $Z^+(t)$.

Обозначим матрицу $R^c \cdot Diag(\alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_n)$ через R^{c1}. Вершина $v_i \in Z^+(0)$ отдает в вершину $v_k \in Z^-(0)$ следующую долю от общего отдаваемого ресурса: $\dfrac{r_{ik}^{c1}}{\sum_{j=1}^{n-m} r_{ij}^{c1}}$. Сам отдаваемый ресурс равен величине $\beta_m \tilde{c}_i^m$.

Таким образом, в каждую вершину $v_k \in Z^-(0)$ из вершины $v_i \in Z^+(0)$ перейдет $\dfrac{r_{ik}^{c1}}{\sum_{j=1}^{n-m} r_{ij}^{c1}} \beta_m \tilde{c}_i^m = \dfrac{r_{ik}^{c1}}{\sum_{j=1}^{n-m} r_{ij}^{c1}} \dfrac{\tilde{c}_i^m}{\tilde{c}_m^m} c_m(0)$ ресурса.

Из всех вершин зоны $Z^+(0)$ в вершину $v_k \in Z^-(0)$, соответственно, перейдет:

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{r_{ik}^{c1}}{\sum_{j=1}^{n-m} r_{ij}^{c1}} \frac{\tilde{c}_i^m}{\tilde{c}_m^m} c_m(0) = \frac{c_m(0)}{\tilde{c}_m^m} \sum_{i=1}^{m} \frac{r_{ik}^{c1}}{\sum_{j=1}^{n-m} r_{ij}^{c1}} \tilde{c}_i^m \text{ ресурса.}$$

Новый вектор начального состояния будет, соответственно, равен:

$$Q_{new}(0) = \left(r_1^{out} + c_1(0) - \frac{c_m(0)}{\tilde{c}_m^m} \tilde{c}_1^m, \ \ldots, \ r_{m-1}^{out} + c_{m-1}(0) - \frac{c_m(0)}{\tilde{c}_m^m} \tilde{c}_{m-1}^m, r_m^{out}, \right.$$

$$\left. r_{m+1}^{out} - d_{m+1}(0) + \frac{c_m(0)}{\tilde{c}_m^m} \sum_{i=1}^{m} \frac{r_{im+1}^{c1}}{\sum_{j=1}^{n-m} r_{ij}^{c1}} \tilde{c}_i^m, \ldots, r_n^{out} - d_n(0) + \frac{c_m(0)}{\tilde{c}_m^m} \sum_{i=1}^{m} \frac{r_{in}^{c1}}{\sum_{j=1}^{n-m} r_{ij}^{c1}} \tilde{c}_i^m \right).$$

Для вектора $Q_{new}(0)$, в котором область $Z^+(0)$ будет содержать $l = m - 1$ вершину, находятся новые значения $\tilde{c}_i^l$, после чего либо начальное состояние удовлетворяет условию теоремы 4, либо вся процедура повторяется заново.

Предложенный алгоритм позволяет обобщить все предыдущие результаты в единую теорему о предельном состоянии.

Теорема 5 (*о предельном состоянии*). Пусть в эйлеровой сети с произвольным начальным состоянием при $W > T$

$$Q(0) = \left(r_1^{out} + c_1(0), ..., r_m^{out} + c_m(0), r_{m+1}^{out} - d_{m+1}(0), ..., r_n^{out} - d_n(0)\right)$$

первые m вершин упорядочены по убыванию значения $\beta_i = \dfrac{c_i(0)}{\tilde{c}_i^m}$. Минимальные значения $\tilde{c}_i^m$, $i = 1, …, m$, при которых вершины из зоны $Z^+(0)$ не перейдут в зону $Z^-(t)$, рассчитываются по формуле:

$$\tilde{c}_i^m = r_i^{out} \sum_{j=1}^{n-m} r_{ij}^c \alpha_{m+j}, \quad i = 1, …, m,$$

где $\alpha_k = \dfrac{d_k(0)}{r_k^{out}}$, $k = m + 1, …, n$, а предельное состояние при условии, что $c_i(0) \geq \tilde{c}_i^m$ $\forall i = 1, …, m$, описывается вектором

(13) $Q^* = \left(r_1^{out} + c_1(0) - \tilde{c}_1^m, ..., r_m^{out} + c_m(0) - \tilde{c}_m^m,\ r_{m+1}^{out},\ ..., r_n^{out}\right)$.

Если для вершины $v_m \in Z^+(0)$ $c_m(0) < \tilde{c}_m^m$, то значение m уменьшается на k, и за новое начальное состояние принимается вектор

$$Q_{new}(0) = \left(r_1^{out} + c_1(0) - \beta_m \tilde{c}_1^m,\ ...,\ r_{m-k}^{out} + c_{m-k}(0) - \beta_m \tilde{c}_{m-k}^m, r_{m-k+1}^{out}, ..., r_m^{out},\right.$$

$$\left. r_{m+1}^{out} - d_{m+1}(0) + \beta_m \sum_{i=1}^{m} \frac{r_{im+1}^{c1}}{\sum_{j=1}^{n-m} r_{ij}^{c1}} \tilde{c}_i^m, ..., r_n^{out} - d_n(0) + \beta_m \sum_{i=1}^{m} \frac{r_{in}^{c1}}{\sum_{j=1}^{n-m} r_{ij}^{c1}} \tilde{c}_i^m \right),$$

где k равно количеству вершин, для которых $\beta_{m-k+1} = … = \beta_m$.

Начальное состояние пересчитывается до тех пор, пока все разности $c_i(0) - \tilde{c}_i^m$ не станут неотрицательными. Предельное состояние описывается формулой (13).

5. Заключение

В работе исследованы процессы перераспределения ресурса в эйлеровых сетях. Найдены формулы, описывающие вектор предельного состояния для суммарного ресурса W, не превосходящего пороговое значение T. Найдено значение T. В эйлеровых сетях T достигает максимально возможного значения r_{sum}. В несимметричных сетях пороговое значение строго меньше суммарной пропускной способности сети.

Если в зоне $Z^+(0)$ при $W > T$ находится одна вершина, предельное состояние будет единственным: все вершины получат ресурс, равный своей выходной пропускной способности, избыточный ресурс останется в выделенной вершине.

Решена задача нахождения предельного состояния при $W > T$, когда в зоне $Z^+(0)$ содержится любое количество вершин. Если все вершины из $Z^+(0)$ в начальном состоянии имеют достаточно ресурса, чтобы остаться в предельном состоянии в зоне Z^{+*}, алгоритм нахождения предельного состояния останавливается за одну итерацию. В противном случае предельное состояние может быть найдено за число итераций, не превышающее $m - 1$, где m – число вершин в зоне $Z^+(0)$.

Литература

1. ЖИЛЯКОВА Л.Ю. *Несимметричные ресурсные сети. I. Процессы стабилизации при малых ресурсах* // Автоматика и телемеханика. – 2011. – №4. – С. 133–143.
2. ЖИЛЯКОВА Л.Ю. *Несимметричные ресурсные сети. II. Потоки при больших ресурсах и их стабилизация* // Автоматика и телемеханика. – 2012. – №6. – С. 103–118.
3. ЖИЛЯКОВА Л.Ю. *Несимметричные ресурсные сети. III. Исследование предельных состояний* // Автоматика и телемеханика. – 2012. – №7. – С. 67–77.
4. КЕМЕНИ ДЖ., СНЕЛЛ ДЖ. *Конечные цепи Маркова*. – М.: Наука, 1970.
5. КУЗНЕЦОВ О.П. *Однородные ресурсные сети. I. Полные графы* // Автоматика и телемеханика. – 2009. – №11. – С. 136–147.
6. РОБЕРТС Ф.С. *Дискретные математические модели с приложениями к социальным, биологическим и экологическим задачам.* – М. Наука, 1986. – 496 с.

7. BAK P., TANG C., WIESENFELD K. *Self-organized criticality* // Physical Review A. – 1988. –Vol. 38. – P. 364–374.
8. BJÖRNER A., LOVASZ, L. *Chip-firing game on directed graphs* // J. Algebraic Combinatorics. – 1992. – №1. – P. 305–328.
9. DHAR D. *Self-organized critical state of sandpile automaton models* // Physical Review Letters. – 1990. – Vol. 64, №14. – P. 1613–1616.
10. LOVASZ L., WINKLER P. *Mixing of Random Walks and Other Diffusions on a Graph* // Surveys in Combinatorics / Ed. P. Rowlinson. London Math. Soc. Lecture Notes Series 218, Cambridge Univ. Press, 1995. – P. 119–154.
11. PRISNER E. *Parallel Chip Firing on Digraphs* // Complex Systems. – 1994. – №8. – P. 367–383.

THE STUDY OF EULER RESOURCE NETWORKS

Ludmila Zhilyakova, Institute of Control Sciences of RAS, (Moscow, Profsoyuznaya st., 65), cand. sc., senior scientist, zhilyakova.ludmila@gmail.com.

Abstract: *We study properties of homogeneous, symmetric and quasi-symmetric resource networks, which are combined into one class called the Euler networks. For the case of small resource volumes we find an analytical expression for the sole limit state. For the case of large resource amounts we prove that the limit state is determined by the initial one, and provide corresponding formulae. For the class of initial states, which preserve network operation rules, we calculate the limit vector, while for the other initial states we suggest a recursive algorithm to reduce them to the former class.*

Keywords: diffusion on graphs, resource network, capacity, threshold, flow, limit state.

Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии О. П. Кузнецовым