

УДК 658.5.011 + 51-74

ББК Кстд1-6.02

## ОЦЕНКА УСТОЙЧИВОСТИ ПРОИЗВОДСТВЕННОГО ПЛАНА С УЧЕТОМ СТОХАСТИЧНОСТИ РЕСУРСНЫХ ОГРАНИЧЕНИЙ<sup>1</sup>

Елисеев А. С.<sup>2</sup>, Гитман М. Б.<sup>3</sup>, Суханцев С. С.<sup>4</sup>  
(ФГБОУ ВПО «Пермский национальный исследовательский  
политехнический университет», Пермь)

*Процесс выполнения производственного плана рассматривается в особом пространстве состояний с использованием введенного определения вероятностной устойчивости плана. Результаты апробации предложенного подхода к оценке устойчивости производственного плана исследуются с применением имитационного моделирования.*

Ключевые слова: устойчивость производственного плана, вероятностная устойчивость.

### 1. Введение

Режим работы любого производственного предприятия определяется производственным планом (ПП). В связи с этим

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект №10-08-00539-а), а также при государственной поддержке развития кооперации вузов и промышленных предприятий (договор с Минобрнауки России №13.G25.31.0093).

<sup>2</sup> Александр Сергеевич Елисеев, аспирант кафедры математического моделирования систем и процессов ПНИПУ ([alexander.elyseev@gmail.com](mailto:alexander.elyseev@gmail.com)).

<sup>3</sup> Михаил Борисович Гитман, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического моделирования систем и процессов ПНИПУ ([gmb@matmod.pstu.ac.ru](mailto:gmb@matmod.pstu.ac.ru)).

<sup>4</sup> Сергей Станиславович Суханцев, аспирант кафедры математического моделирования систем и процессов ПНИПУ ([s.suhantsev@gmail.com](mailto:s.suhantsev@gmail.com)).

чрезвычайно важной является автоматизированная система управления предприятием (АСУП), способная формировать эффективный план. В настоящее время существует множество методов формирования планов для различных масштабных уровней с различными характеристиками [2, 10]. При этом помимо качественных характеристик плана существует еще одно особое свойство плана – его *устойчивость*, или способность быть выполненным, несмотря на различные внешние воздействия.

В реальном производстве возникают возмущения, связанные с различными ресурсными ограничениями, часто имеющие стохастический характер, например, несвоевременные поставки материалов, поломки оборудования, болезни работников и т.п. Отметим, что качественным характеристикам плана посвящено множество исследований [8, 9], однако устойчивости выполнения плана уделено недостаточно внимания. При этом неустойчивый план производства влечет за собой следующие негативные последствия: дополнительные издержки, связанные с оплатой сверхурочных работ, выплатой неустоек по контрактам; разлаженность (рассогласованность, подверженность сбоям) режима работы предприятия, влекущая повышение уровня брака; уменьшение лояльности клиентов, что негативным образом сказывается на конкурентоспособности компании; общее снижение эффективности работы предприятия, и, как следствие, снижение уровня прибыли и т.п.

Для повышения эффективности АСУП необходимо повышение устойчивости применяемых ПП. Таким образом, возникает следующая задача автоматизации производственного планирования: разработать методику оценки устойчивости существующего ПП и выделить параметры производственных планов, влияющие на степень их устойчивости.

## **2. Существующие подходы к повышению устойчивости планирования**

Производственный план является результатом некоторого алгоритма его формирования. Для повышения устойчивости

результатирующего ПП необходима настройка параметров алгоритма, которые могут влиять на устойчивость плана.

Примером такого параметра является *параметр опережения производства*, или *параметр опережения запуска*  $\tau$ , который часто применяется на практике [3, 4]. Он определяет некоторый временной интервал, а все операции плана планируются раньше на  $\tau$ . При этом создается некая «подушка безопасности» перед изначальной датой отгрузки, в которой можно закончить выполнение всех требуемых технологических операций в случае возникновения каких-либо непредвиденных ситуаций. Действительно, если планировать выпуск изделия значительно раньше даты отгрузки, то с большой вероятностью изделие будет изготовлено вовремя, что повышает вероятность выполнения всего плана и, следовательно, увеличивает его устойчивость. Однако подобный подход влечет за собой повышение расходов на хранение запасов продукции и должен учитывать ограничения на вместимость складских помещений [7]. Еще одним недостатком этого подхода является то, что параметр  $\tau$  обычно задается «из практических соображений» для каждой номенклатурной единицы без учета узких мест производственной схемы и какого-либо обоснования.

Рассмотрим подход, предоставляющий возможность более аргументированного выбора значений параметров, определяющих производственный план.

### **3. Математическая модель процесса выполнения производственного плана**

Рассмотрим более детально процесс выполнения ПП. Так как в каждый момент времени он находится в некотором состоянии, то весь производственный план можно рассматривать как динамическую систему с дискретным временем, а процесс его выполнения как переход от одного состояния системы к другому. Для описания ПП введем в рассмотрение метрическое фазовое пространство (ФП), каждая точка которого соответствует состоянию системы в определенный момент времени  $t$ :

$$П = (X, \rho)$$

$$(1) \quad x^t = (x_1^t, \dots, x_n^t) \in X,$$

где

$X$  – множество элементов фазового пространства  $\Pi$ ;

$x^t$  – элемент множества  $X$ , определяющий состояние ПП в момент времени  $t$ ;

$\rho$  – метрика пространства  $\Pi$ , определяющая расстояние между состояниями системы;

$x_1^t, \dots, x_n^t$  – компоненты элемента  $x$  множества  $X$ , значениями которых является объем произведенных номенклатурных единиц типа  $i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , из расширенной матрицы главного календарного производственного плана (ГКПП) [3] на момент времени  $t$ ; отметим, что  $x_i^t \in R$  для непрерывного производства, и  $x_i^t \in N$  для дискретного;

$n$  – общее число номенклатурных типов входящих в ГКПП;

$t$  – момент времени планового периода.

Теперь процесс выполнения ПП представляет собой траекторию в ФП, каждая точка которого определяет состояние производственной системы в некоторый момент времени и имеет смысл объема изготовленной продукции по каждому номенклатурному типу, входящему в план.

В качестве метрики  $\rho$  пространства (1) может быть использована любая функция, характеризующая расстояние между двумя состояниями плана в определенный момент времени. Эта функция количественно показывает, на сколько одно состояние плана отличается от другого. С формальной точки зрения, метрические функции являются эквивалентными и взаимозаменяемыми [1], но на практике определенный вид используемых метрик является предпочтительнее. Так, например, евклидова метрика

$$\rho(x^p, x^q) = \sqrt{(x_1^p - x_1^q)^2 + \dots + (x_n^p - x_n^q)^2}$$

будет менее предпочтительной в сравнении с метрикой

$$\rho(x^p, x^q) = \max \{ |x_1^p - x_1^q|, \dots, |x_n^p - x_n^q| \}$$

так как во втором варианте приобретает четкий физический смысл, означающий максимальное отклонение планов по всем номенклатурным группам. Для обозначения приоритетов предпочтения могут быть использованы взвешенные метрики

$$\rho(x^p, x^q) = \max \{k_1 |x_1^p - x_1^q|, \dots, k_n |x_n^p - x_n^q|\},$$

коэффициенты  $k_i$  которых определяют важность соответствующих номенклатурных типов.

На рис. 1 представлен пример ФП плана, состоящего из одной номенклатурной группы  $X_1$ . Точки на графике означают, что в момент времени  $t_1$  должно быть изготовлено  $x_{11}$  номенклатурных единиц, в момент времени  $t_2$  должно быть изготовлено  $x_{12}$  номенклатурных единиц и т.д. Момент времени  $t_3$  соответствует концу планового периода.

Будем называть план, изображенный на рис. 1, *невозмущенным*. Однако в реальном производстве неизбежны внешние воздействия различной природы, которые могут заставить план изменить траекторию выполнения задания. Пусть в определенный момент времени  $t_2$  произошло некоторое возмущение, и вместо запланированных  $x_{13}$  номенклатурных единиц было произведено  $x_{13}^* < x_{13}$  (рис. 2). Такой план производства будем называть *возмущенным*.

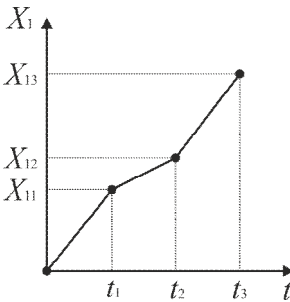


Рис. 1. План производства с единственной номенклатурной группой

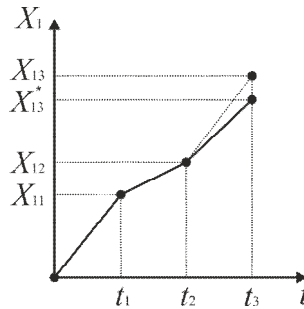


Рис. 2. Возмущенный план производства

План производства  $X$ , рассматриваемый в пространстве состояний вида (1), будем называть *устойчивым по вероятности*, если для любого числа операций в плане в конечный момент времени выполняется неравенство

$$(2) \quad P(\|x - x^*\| < \varepsilon) > P^{**},$$

где  $P^{**}$  – допустимая вероятность отклонения возмущенного плана от запланированного;  $\|x - x^*\|$  – отклонение конечного состояния возмущенного плана от конечного состояния невозмущенного по соответствующей норме;  $\varepsilon$  – максимальное отклонение возмущенного плана  $x^*$  от запланированного плана  $x$ , имеющее размерность расстояния между состояниями производственной системы в ее фазовом пространстве.

Параметры  $P^{**}$  и  $\varepsilon$  задаются экспертами и отражают требования конкретного предприятия к устойчивости плана  $X$ .

Введенное определение устойчивости ПП означает, что при любой вероятности возникновения возмущения в процессе выполнения на конечном временном шаге вероятность совпадения возмущенного и исходного планов в пределах допустимого отклонения будет допустимой, т.е. больше наперед заданной вероятности.

Отметим, что это определение устойчивости ПП является частным случаем определения, введенного в работе [5], которое также использовалось в работе [6] для анализа устойчивости выборочных систем контроля качества.

#### 4. Применение методика

На основе предложенного математического описания процесса выполнения ПП и определения его устойчивости была предложена методика оценки вероятностной устойчивости производственного плана, позволяющая также оценить влияние параметров алгоритма планирования на устойчивость результирующего плана. На рис. 3 представлена структурная схема предложенного подхода:

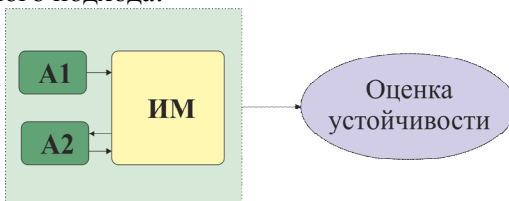


Рис. 3. Структурная схема методики оценки устойчивости ПП

**A1** – алгоритм планирования, при помощи которого формируется ПП;

**A2** – алгоритм перепланирования, используемый для исправления плана при возникновении возмущения;

**ИМ** – имитационная модель, реализующая виртуальное выполнение плана.

Суть предлагаемой методики сводится к следующему: путем имитационного моделирования накапливается статистика об успешности выполнения плана, составленного при помощи алгоритма **A1**. При возникновении возмущений применяется попытка исправить план с помощью алгоритма перепланирования **A2**. Весь процесс выполнения плана рассматривается в его фазовом пространстве (1). При достижении конца планового периода конечные состояния исходного и текущего плана сравниваются при помощи (2), на основе чего делается вывод об успешности или провале выполнения плана. После накопления достаточного объема статистических данных можно сделать вывод о вероятностной устойчивости исследуемого плана.

Если алгоритм **A1** не допускает параметризации, то результаты анализа вероятностной устойчивости ПП отражают устойчивость самого алгоритма. Если же в алгоритме планирования используются параметры, то результаты применения методики отражают влияние параметров на устойчивость ПП. Таким образом, исследуя несколько ПП, составленных с различным набором параметров, можно выбрать набор параметров, оптимальный с точки зрения устойчивости.

Всю процедуру анализа можно разделить на следующие этапы:

– формирование ПП с использованием алгоритма планирования **A1**;

– имитационное моделирование процесса выполнения плана (**ИМ**) и накопление статистики;

– анализ статистических данных и вывод об устойчивости ПП.

В настоящее время использованы простейшие варианты алгоритмов перепланирования **A2** и имитационной модели **ИМ** (рис. 4 и рис. 5). Очевидно, что способ исправления плана после возникновения возмущения (т.е. способ, который реализует

алгоритм **A2**) может сильно влиять на устойчивость процесса выполнения плана. Разработанное программное обеспечение позволяет легко заменять любые компоненты структурной модели (рис. 3) на другие, более совершенные и эффективные. В контексте данной работы выбор алгоритма **A2** не принципиален, так как оказывает одинаковое воздействие при каждом запуске численного эксперимента.

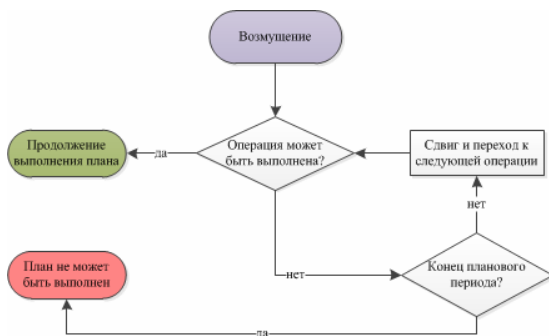


Рис. 4. Алгоритм **A2**

Предложенная методика была использована для исследования устойчивости производственных планов, составленных на ОАО «Мотовилихинские заводы» (г. Пермь).

В качестве алгоритма планирования **A1** был выбран алгоритм комплексного оценивания [3], позволяющий формировать оптимальный производственный план с точки зрения нечеткого обобщенного критерия оптимальности, включающего набор частных критериев со степенью их значимости.

Под частными критериями оптимальности понимаются следующие характеристики ПП:

- *комфортность производства*, означающая скомпонованность плана таким образом, что операции одного вида запускаются в производство как можно большими партиями, уменьшая число переналадок оборудования между операциями;
- *равномерность производства*, означающая распределение нагрузки на рабочие центры таким образом, чтобы их загрузка в течение планового периода изменялась постепенно, без резких перепадов;



– срок выполнения плана производства, подразумевающий минимизацию даты совершения последней операции заданного производственного плана;

– риск срыва производства, означающий такую скомпонованность плана, при которой операции планируются с использованием параметра опережения запуска  $t$ .

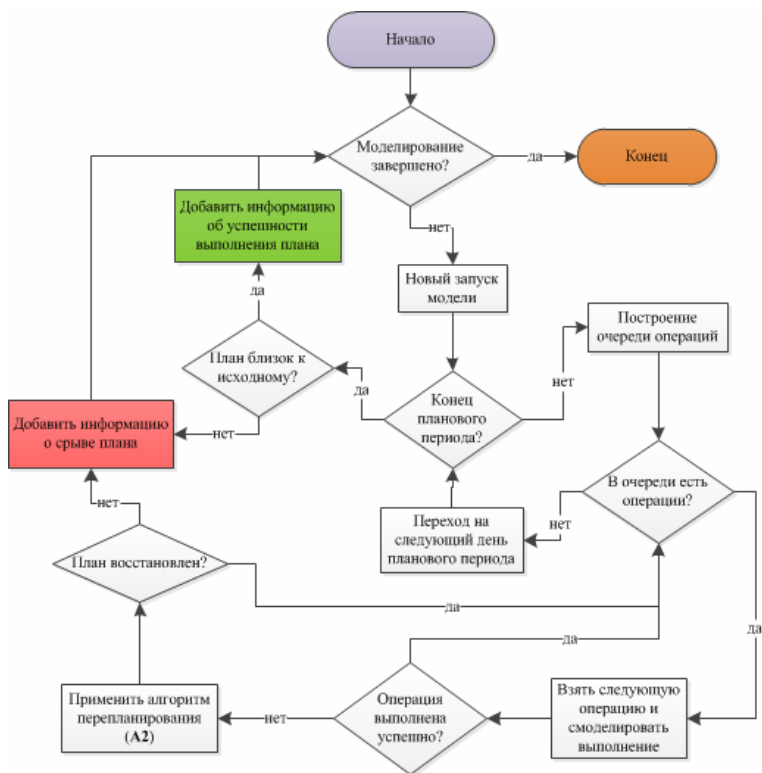


Рис. 5. Алгоритм ИМ

Математическую постановку, лежащую в основе алгоритма, а также его более подробное описание можно найти в [3, 4].

Отметим, что выбор алгоритма планирования **A1** также не является принципиальным, так как устойчивым является результат его использования. В качестве алгоритма можно использовать любой алгоритм планирования, допускающий параметри-

зацию, в частности, для выбора оптимального (с точки зрения устойчивости по вероятности) параметра опережения производства  $\tau$ , который упоминался ранее. Алгоритм комплексного оценивания [3] выбран в связи с наличием параметров, способных влиять на устойчивость.

На **первом** этапе апробации методики был сформирован производственный план (план 1) с нечетким критерием оптимальности, ориентированным на минимальность риска срыва выполнения плана и план 2, ориентированный на минимальную длительность производства продукции (таблица 2).

В качестве исходных данных были взяты структура некоторого продукта (рис. 3), близкая к структуре реальной продукции, производимой на ОАО «Мотовилихинские заводы», и данные матрицы ГКПП (таблица 1).

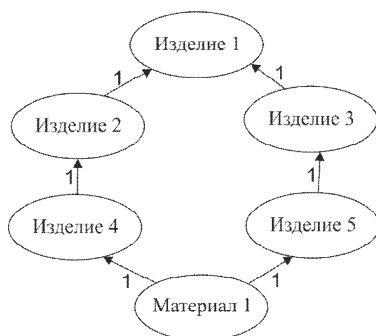


Рис. 3. Структура продукта

Иерархическая структура изделий (рис. 3) показывает зависимости между производимыми номенклатурными изделиями. Другими словами, для выполнения всех технологических операций при производстве одной единицы Изделия 1 необходимо из Материала 1 изготовить Изделия 4 и 5, из Изделия 4 – Изделие 2, из Изделия 5 – Изделие 3, а из совокупности Изделий 2 и 3 – Изделие 1.

В таблице 1 приведено наименование производимых изделий, которые должны быть произведены к указанной дате в указанном количестве.

Таблица 1. Данные ГКПП для формирования ПП

Номер изделия	Срок изготовления	Число
1	26.03.2012	100
2	28.03.2012	1000

Таблица 2. Комплексный критерий оптимизации

Критерий	Важность критерия	
	план 1	план 2
Комфортность производства	0,2	0,1
Равномерность производства	0,1	0,1
Минимальность длительности	0,1	0,6
Риск срыва производства	0,6	0,2

Выбранному рабочему центру задавалась вероятность поломки в интервале  $[0, 1]$ . Нулевая вероятность означает, что поломка рабочего центра никогда не произойдет. Соответственно, вероятность поломки, равная 1, означает, что поломка обязательно произойдет. В качестве метрики было использовано  $\rho(x^p, x^q) = \max \{|x_1^p - x_1^q|, \dots, |x_n^p - x_n^q|\}$ . Для каждого значения вероятности поломки было проведено порядка 1000 запусков вычислительного эксперимента. Расчет вероятности выполнения плана по формуле (2) при заданной вероятности возникновения неисправности представляет собой отношение числа успешно выполненных планов к общему числу «запусков» эксперимента. В реальном производстве вопрос минимального числа «запусков» плана, после которых можно делать вывод о вероятности успешного выполнения, может решаться экспертом.

Рассмотрим результаты моделирования для плана 1. На рис. 6 показан идеальный вариант выполнения этого плана (без внешних возмущений). На рис. 7 показан график выполнения возмущенного плана производства. Видно, что 16.03.2012 произошло возмущение – поломка оборудования. В связи с этим не было произведено необходимое число изделий 4. Однако в данном случае план был составлен таким образом, что поломка оборудования не привела к общему срыву плана производства.

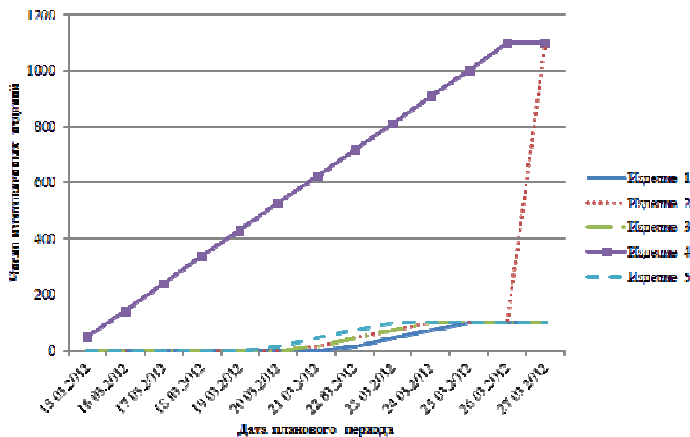


Рис. 6. Диаграмма выполнения невозмущенного плана

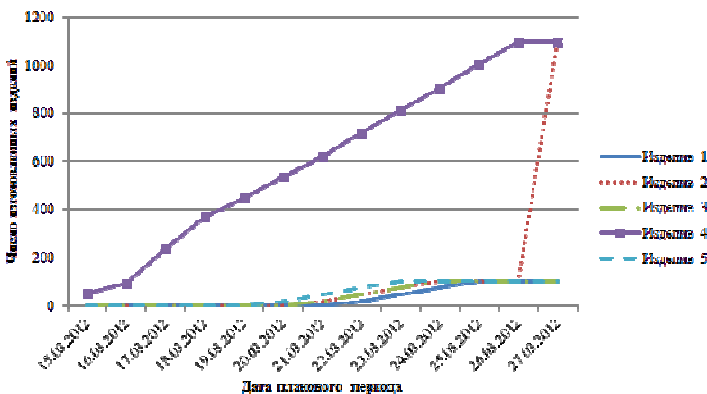


Рис. 7. Диаграмма выполнения возмущенного плана

На третьем этапе применения методики была проведена оценка устойчивости плана 1 на основе анализа полученной статистической информации.

На рис. 6 представлены результаты имитационного моделирования выполнения плана 1 с заданными вероятностями поломки рабочего центра.

На практике вероятность (или статистика) поломки некоторого рабочего центра в цехе известна. При реальном выполнении

нии производственного плана по графику на рис. 8 можно сделать вывод о том, с какой вероятностью план будет выполнен с учетом конкретной вероятности поломки рабочего центра.

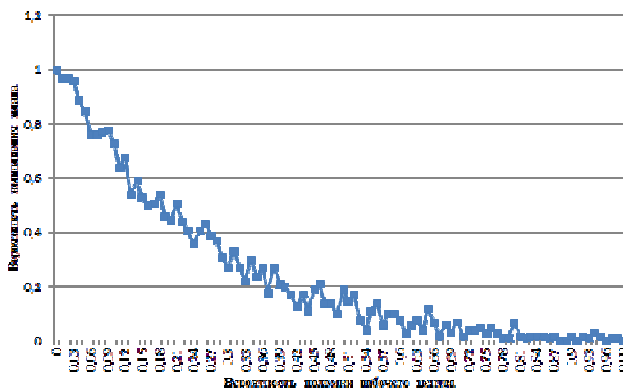


Рис. 8. Результаты моделирования выполнения ПП с заданной вероятностью поломки рабочего центра

Гибкость алгоритма [4] позволяет получать множество планов, оптимальных с точки зрения различных нечетких критериев. Очевидно, что устойчивость таких планов будет различной. В связи с этим вызывает интерес задача сравнения планов с точки зрения устойчивости по вероятности.

Для решения этой задачи, предложенная методика была применена для второго производственного плана (план 2), критерий оптимальности которого представлен в таблице 2. Основное отличие плана 2 от плана 1 в том, что в случае плана 2 для предприятия более приоритетным является сокращение срока выполнения плана.

На рис. 9 представлены результаты оценки устойчивости плана 1 и плана 2. Из графика видно, что план, минимизирующий время изготовления продукции (план 2) с максимально возможной близостью последовательных операций, является менее устойчивым по отношению к внешним возмущениям по сравнению с планом 1.

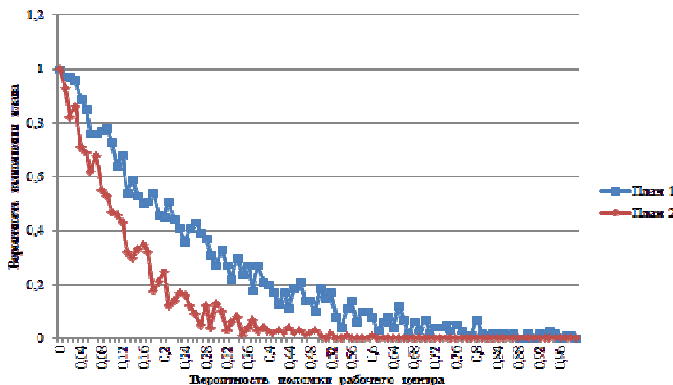


Рис. 9. Результаты моделирования выполнения двух ПП с различными критериями оптимальности

Аналогичным образом рассмотренная методика может быть использована для анализа любых параметров алгоритмов производственного планирования, используемых в АСУП, в частности для выбора оптимального (с точки зрения устойчивости по вероятности) параметра опережения производства  $\tau$ , который упоминался в пункте 2.

## 5. Выводы

В работе предложена новая методика оценки устойчивости производственного плана с точки зрения вероятности его успешного выполнения. Приведена математическая модель процесса выполнения производственного плана, представлена постановка задачи оценки устойчивости, сформулировано определение устойчивого производственного плана.

Разработанный подход был применен для сравнения устойчивости двух производственных планов, составленных для различных нечетких критериев. Полученные результаты свидетельствуют о том, что представленная методика способна качественно характеризовать устойчивость производственного плана, и, как следствие, может быть использована для выбора лучшего, наиболее устойчивого.

В связи с тем, что для анализа устойчивости производственный план рассматривался в особом пространстве состояний, характеризующем процесс его выполнения с точки зрения объемов изготовленной продукции по каждой номенклатурной позиции, а других ограничений на производственную систему и процессы не накладывалось, то областью применения подхода можно считать производство, основанное на операционном планировании.

Использование предложенного подхода позволяет повысить эффективность работы АСУП с позиции улучшения устойчивости процесса выполнения производственного плана при различных частных критериях оптимальности.

### **Литература**

1. БАРБАШИН Е.А. *Введение в теорию устойчивости* – М.: «Наука», 1967 – 223 с.
2. БЕРКУЛЬЦЕВ М.В. *Методы эвристического поиска в задачах планирования и управления* – М.: МАИ, 2000. – 48 с.
3. ВОЖАКОВ А.В., ГИТМАН М.Б. *Модель календарного планирования с нечеткими ограничениями* // Вестник Магнитогорского государственного технического университета им. Г.И. Носова. – 2008. – №4. – С. 79–82.
4. ВОЖАКОВ А.В., ГИТМАН М.Б., ФЕДОСЕЕВ С.А. *Комплексное оценивание при выборе оптимального плана производства на тактическом уровне с учетом нечетких критериев и ограничений* // Управление большими системами. – 2010. – №30. – С. 164–179.
5. ГИТМАН М.Б. *Введение в стохастическую оптимизацию*. – Уч. пособие. – Пермь: Изд. Перм. гос. техн. ун-та, 2000. – 55 с.
6. ЕЛИСЕЕВ А.С., ФЕДОСЕЕВ С.А., ГИТМАН М.Б. *К вопросу об устойчивости систем контроля качества на предприятии* // Вестник Магнитогорского государственного технического университета им. Г.И. Носова. – 2011. – №34. – С. 34–36.
7. РЫЖИКОВ Ю.И. *Теория очередей и управление запасами*. – СПб.: Питер, 2001. – 384 с.

8. ФЕДОСЕЕВ С.А., ГИТМАН М.Б., СТОЛБОВ В.Ю. *Математические модели управления качеством продукции на этапе планирования производства* // Проблемы управления. – 2011. – №4. – С. 60–67.
9. ALVAREZ-VALDES R., PARRENO F., TAMARIT J.M. *A tabu search algorithm for two-dimensional non-guillotine cutting problems* // European Journal of Operational Research. – 2007. – №183. – P. 1167–1182.
10. SABUNCUOGLU I., GOREN S. *Hedging production schedules against uncertainty in manufacturing environment with a review of robustness and stability research* // International Journal of Computer Integrated Manufacturing. – 2009. – Vol. 22, №2. – P. 138–157.

## ESTIMATION OF STABILITY OF PRODUCTION PLAN UNDER STOCHASTIC RESOURCE CONSTRAINTS

**Alexander Eliseev**, Perm National Research Polytechnic University, Perm, post-graduate student (alexander.elyseev@gmail.com).

**Mikhail Gitman**, Perm National Research Polytechnic University, Perm, Doctor of Science, professor (gmb@matmod.pstu.ac.ru).

**Sergey Suhancev**, Perm National Research Polytechnic University, Perm, post-graduate student (s.suhantsev@gmail.com).

*Abstract: We suggest the notion of production plan stability by probability and use it to study the process of production plan execution in a special state space. We also provide simulation results of testing the approach to estimate production plan stability.*

Keywords: production plan stability, probabilistic stability.

*Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии М. В. Губко*