

**Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН**

УПРАВЛЕНИЕ БОЛЬШИМИ СИСТЕМАМИ

Выпуск 42

Март 2013

**СБОРНИК
ТРУДОВ**

ISSN 1819-2467

Регистрационный номер Эл №ФС77-44158 от 09 марта 2011 г.

Москва – 2013

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова

**УПРАВЛЕНИЕ
БОЛЬШИМИ
СИСТЕМАМИ**

СБОРНИК ТРУДОВ

Выпуск 42

Москва – 2013

КООРДИНАЦИОННЫЙ СОВЕТ

Академики РАН: Васильев С.Н., Емельянов С.В., Коровин С.К., Куржанский А.Б., Федосов Е.А., Черноусько Ф.Л.; члены-корреспонденты РАН: Желтов С.Ю., Каляев И.А., Пархоменко П.П., Попков Ю.С.; д-ра техн. наук: Бутковский А.Г., Дорофеев А.А., Кузнецов О.П., Кульба В.В., Кротов В.Ф., Лотоцкий В.А., Павлов Б.В., Поляк Б.Т., Рутковский В.Ю.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор: член-корр. РАН Новиков Д.А. **Отв. секретарь:** к.т.н. Губко М.В.
Д-ра техн. наук: проф. Алескеров Ф.Т. (ГУ ВШЭ), проф. Артамонов Е.И. (ИПУ РАН), д-р экон. наук, проф. Архипова М.Ю. (ИПИ РАН), д-ра техн. наук: проф. Афанасьев В.Н. (МИЭМ), проф. Бахтадзе Н.Н. (ИПУ РАН), проф. Бурков В.Н. (ИПУ РАН), проф. Вишневский В.М. (ИППИ РАН), д-р экон. наук, проф. Голиченко О.Г. (ЦЭМИ РАН), д-р физ.-мат. наук, проф. Добровидов А.В. (ИПУ РАН), д-ра техн. наук: проф. Заложнев А.Ю. (ИПУ РАН), проф. Ириков В.А. (МФТИ), проф. Калянов Г.Н. (ИПУ РАН), проф. Касаткин С.И. (ИПУ РАН), проф. Каравай М.Ф. (ИПУ РАН), канд. техн. наук Квинто Я.И. (ИПУ РАН), д-р экон. наук, проф. Клочков В.В. (ИПУ РАН), д-ра техн. наук: проф. Кононенко А.Ф. (ВЦ РАН), канд. техн. наук Куливец С.Г. (ИПУ РАН), проф. Курдюков А.П. (ИПУ РАН), проф. Лебедев В.Г. (ИПУ РАН), к-т техн. наук, доцент Лебедев В.Н. (ИПУ РАН), д-р экон. наук, проф. Ловчиновский Э.В. (ИПУ РАН), д-р техн. наук, проф. Мандель А.С. (ИПУ РАН), д-р экон. наук, проф. Нижегородцев Р.М. (ИПУ РАН), д-ра техн. наук: проф. Новосельцев В.Н. (ИПУ РАН), проф. Орлов А.И. (МВТУ), д-р физ.-мат. наук, проф. Рапопорт Л.Б. (ИПУ РАН), д-р техн. наук, проф. Рыков А.С. (МИСИС), д-р экон. наук, проф. Секерин В.Д. (ИПУ РАН), д-ра техн. наук: проф. Сидельников Ю.В. (МАИ), проф. Совлуков А.С. (ИПУ РАН), д-р экон. наук, проф. Сухарев О.С. (Ин-т экономики РАН), д-ра техн. наук: проф. Уткин В.А. (ИПУ РАН), проф. Хоботов Е.Н. (МВТУ), д-ра физ.-мат. наук: доцент Чеботарев П.Ю. (ИПУ РАН), проф. Чхартишвили А.Г. (ИПУ РАН), проф. Щербаков П.С. (ИПУ РАН).

РЕГИОНАЛЬНЫЕ РЕДАКЦИОННЫЕ СОВЕТЫ

Волгоград – д-ра физ.-мат. наук: проф. Воронин А.А., проф. Лосев А.Г. (ВолГУ); **Воронеж** – д-р техн. наук, проф. Баркалов С.А., д-р физ.-мат. наук, проф. Головинский П.А. (ВГАСУ), д-р техн. наук, проф. Подвальный С.Л. (ВГТУ); **Ижевск** – д-р физ.-мат. наук, проф. Непейвода Н.Н., к-т физ.-мат. наук, проф. Родионов В.И. (УдмГУ); **Иркутск** – д-ра физ.-мат. наук: проф. Бычков И.В., проф. Лакеев А.В. (ИДСТУ СО РАН); **Казань** – д-р физ.-мат. наук, проф. Маликов А.И., д-р техн. наук, проф. Сиразетдинов Р.Т. (КГТУ-КАИ); **Липецк** – д-ра техн. наук: проф. Кузнецов Л.А., проф. Погодаев А.К. (ЛГТУ); **Самара** – д-ра экон. наук: проф. Богатырев В.Д., проф. Гераскин М.И., д-р техн. наук, проф. Засканов В.Г. (СГАУ); **Санкт-Петербург** – д-ра физ.-мат. наук: проф. Петросян Л.А. (СПбГУ), проф. Фрадков А.Л. (ИПМ РАН); **Старый Оскол** – д-р техн. наук, проф. Еременко Ю.И. (СТИ); **Тверь** – д-ра техн. наук: проф. Кузнецов В.Н., проф. Палюх Б.В. (ТГТУ).

Адрес редакции: 117997, г. Москва, ул. Профсоюзная, д. 65.

Адрес в Интернет: ubs.mtas.ru.

Номер гос. регистрации электронного научного издания (ЭНИ): 0421200023.

© ИПУ РАН, 2013

СОДЕРЖАНИЕ

Системный анализ

Авдеева З. К., Коврига С. В.

Диагностирование проблемных ситуаций в развитии сложных систем на основе когнитивных карт 5

Ажмухамедов И. М.

Синтез управляющих решений в слабо структурированных плохо формализуемых социотехнических системах .. 29

Юдицкий С. А.

Триадно-сетевые дорожные карты развития систем..... 55

Анализ и синтез систем управления

Скубов Д. Ю.

Бифуркации движений нагруженного электрически демпфированного маятника (синхронизация электрической машины с сетью)..... 75

Чайковский М. М.

Синтез анизотропных регуляторов методами выпуклой оптимизации и полуопределенного программирования 100

Информационные технологии в управлении

Ураков А. Р., Тимеряев Т. В.

Алгоритмы быстрого поиска для двух задач о метрических характеристиках взвешенных графов..... 153

Управление в социально-экономических системах

Варюхина Е. В., Клочков В. В.

Влияние ответственности персонала за возникновение предпосылок к летным происшествиям на безопасность полетов 173

Горбанева О. И., Угольницкий Г. А.

Статистические модели учета фактора коррупции при распределении ресурсов в трехуровневых системах управления..... 195

Шумов В. В.
Теоретико-игровая модель пограничного сдерживания 217

***Управление техническими системами и
технологическими процессами***

Андреанов А. А., Купцов И. С., Светличный Л. И.
Интегрированный подход на основе методов имитационно-динамического моделирования и исследования пространства параметров к многокритериальной оптимизации структур развивающихся систем ядерной энергетики 233

Елисеев А. С., Гитман М. Б., Суханцев С. С.
Оценка устойчивости производственного плана с учетом стохастичности ресурсных ограничений..... 257

Майков И. Л., Зайченко В. М.
Решение оптимизационных задач при химических превращениях..... 273

УДК 021.8 + 025.1

ББК 78.34

ДИАГНОСТИРОВАНИЕ ПРОБЛЕМНЫХ СИТУАЦИЙ В РАЗВИТИИ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ КОГНИТИВНЫХ КАРТ¹

Авдеева З. К.², Коврига С. В.³
(ФГБУН Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

В статье предложены схема диагностирования проблем развития сложных слабоструктурированных систем, основанная на построении когнитивной карты развития исследуемой системы, и поддерживающие ее методы, применение которых позволяет исследовать проблемы различных типов, связанные с взаимодействием активных субъектов, неблагоприятным влиянием внешней среды и структурными особенностями системы, а также рассматривать проблемы в комплексе и определять приоритеты в решении проблем в зависимости от причин их возникновения.

Ключевые слова: когнитивная карта, сложная слабоструктурированная система, целенаправленное развитие, проблемная ситуация, диагностирование

Введение

Модели и методы на основе когнитивных карт применяются для решения практических задач анализа и моделирования динамики сложных слабоструктурированных систем (СС), где

¹ Работа выполнена при частичной поддержке грантов РФФИ (№12-07-311-31, №11-07-005-04-а).

² Зинаида Константиновна Авдеева, с.н.с ИПУ РАН, доцент НИУ ВШЭ (avdeeva@ipu.ru).

³ Светлана Вадимовна Коврига, н.с. (kovriga@ipu.ru).

классические эконометрические методы и модели неприменимы. Для исследования СС в таких ситуациях наряду с точными количественными данными используются абстрактные качественные переменные, выявляемые на основе экспертных знаний. Опыт применения различных моделей и методов на основе когнитивных карт (в России и за рубежом), повышающийся интерес управленцев-практиков в области стратегического менеджмента к разработкам в данном направлении показывают целесообразность развития научно-методического и технологического обеспечения для анализа и управления целенаправленным развитием СС.

Из теории стратегического менеджмента известно (см., например, [5, 11, 12]), что этап целеполагания относится к одному из значимых, но в то же время и наиболее трудоемкому этапу в цикле стратегического управления развитием СС. Одним из основных подходов к целеполаганию является выявление реальных и потенциальных проблем в целенаправленном развитии СС. Методы выявления проблем разнообразны (от методов исследования операций и системного анализа до социологических исследований) и выбираются, исходя из исследовательских целей и характера и полноты исходной информации. Во многих публикациях в области когнитивного моделирования (см. например, [4, 6–8, 13, 15, 16]) также предлагаются методы разрешения проблемных ситуаций.

Однако на сегодня отсутствует целостный подход к диагностированию проблем в развитии СС (в том числе с использованием когнитивных карт), который является ключевым этапом в разрешении проблемных ситуаций. В данной статье под целостностью подхода подразумевается

- систематизация проблем и их структуризация;
- поддержка методами выявления проблем соответствующего типа (или их сочетаний) и формирования приоритетных направлений их решения в проблемных ситуациях развития СС:
 - организация единого технологического процесса диагностирования разнородных проблем.

В статье предложен подход к диагностированию проблем развития СС с использованием когнитивных карт, отвечающий перечисленным требованиям целостности.

Общая схема диагностирования приведена на рис. 1. При этом проблемная ситуация рассматривается как отклонение развития системы от желательного и представляется в общем случае совокупностью разнотипных проблем. Этап структуризации и построения модели развития СС предвдваряет этап диагностирования проблемной ситуации. Важно отметить, что качество этого этапа определяет содержание модели и влияет на достоверность выводов на ее основе, однако эти исследования остаются за рамками данной статьи (некоторые методы структуризации и проблемы этого этапа изложены в [2]).

Результатом диагностирования проблемной ситуации на основе анализа модели развития системы являются:

- диагностическая карта проблемной ситуации, в которой определены факторы-симптомы и факторы-причины проблем, а также активные субъекты⁴, связанные с проблемной ситуацией;
- факторы, воздействие на которые может привести к коррекции отклонения в сторону целенаправленного развития системы.

В случае если такие факторы не найдены, результатом диагностирования является карта проблемной ситуации, в которой структурированы знания о ней.

Применение предложенного подхода позволяет поддержать решение важной управленческой задачи по целеполаганию развития системы в части формирования и анализа целей разви-

⁴ *Активный субъект ситуации (АСС) – субъект, влияющий на направленность изменения ситуации через реализацию своих интересов и противодействие интересам других субъектов ситуации благодаря имеющимся у него рычагам управления (активное управление ситуацией) либо благодаря использованию возможностей вне поля его активности (пассивное управление ситуацией). Различные точки зрения, убеждения и интересы АСС приводят к разному видению направлений развития системы.*

тия, так как выявленные проблемы становятся задачами управления развитием СС.

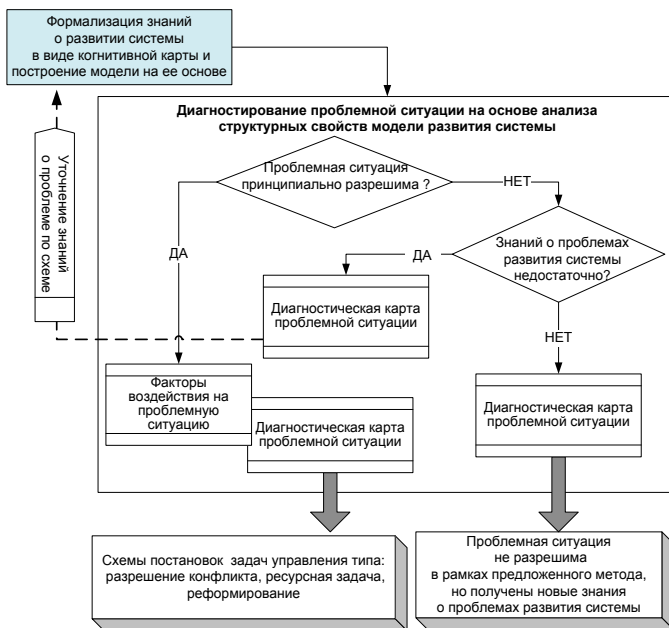


Рис.1. Диагностирование проблемной ситуации на основе анализа модели развития системы

Статья включает описание типа формальной модели, на основе которой демонстрируется схема диагностирования проблем (раздел 1), описание этапов диагностирования (раздел 2), пример применения предложенного подхода (раздел 3) и заключение.

1. Модель развития системы на основе когнитивной карты типа K_f

Общая модель развития СС на основе когнитивной карты функционального типа включает кортеж параметров:

$$M_S = \langle K_f(X, A, f); \{AS^p(H^p_c, H^p_w)\}; C(X^C, R(X^C)); X(0); U(0) \rangle,$$

где

$K_f(X, A, f)$ – когнитивная карта, в которой $X = (x_1, \dots, x_n) = (X^{int} \cup X^{ext})$ – множество факторов внутренней (X^{int}) и внешней среды (X^{ext}) системы; $A = [a_{ij}]$ – матрица $N \times N$ взаимовлияний факторов, в которой $a_{ij} \in [-1; 1]$ – вес влияния фактора x_i на фактор x_j^5 ; f – функция, определяющая правило изменения значений факторов;

$\{AS^p\}$ – множество активных субъектов, влияющих на СС. Каждый AS^p задан на подмножестве факторов X , включая факторы H^p_c , характеризующие область его интересов, и факторы H^p_u , которыми он управляет; C – целевой образ СС, который определяет желательные направления изменения системы с позиции субъекта управления и формально представляется как

$$(1) \quad C = (X^C, R(X^C)),$$

где X^C – подмножество целевых факторов, $X^C \subseteq X^{int}$;

$R(X^C)$ – вектор оценок динамики факторов (ОДФ), определяющий желательные направления изменения целевых факторов:

$$(2) \quad R(x_i^C) = \begin{cases} +1, & \text{если желательно увеличение фактора } x_i^C, \\ -1, & \text{если желательно уменьшение фактора } x_i^C; \end{cases}$$

$X(0)$ – вектор начальных значений; $U(0)$ – вектор внешних воздействий.

В карте K_f функция f задает правило изменения произвольного фактора x_i в любой дискретный момент времени t в зависимости от его значения в предыдущий момент времени⁶, а также изменения значений факторов-причин и внешнего воздействия:

$$(3) \quad f: \quad x_i(t) = x_i(t-1) + \sum_{j \in I_i} a_{ij} \cdot x_j(t-1) - x_j(t-2) + u_i(t-1),$$

⁵ *Вопросу выбора весов посвящены отдельные исследования [1], так как этот параметр содержательно связан с правилом оценки влияний факторов на фактор и служит источником риска для достоверности результатов.*

⁶ *Время в описываемой модели условное, не имеющее предметной интерпретации.*

С учетом функции (3) состояние системы для произвольного дискретного времени $t \geq 1$ при следующих начальных условиях

$$- X(-1) = 0^7,$$

- $X(0)$, где $X(0)$ – относительное значение X в $t = 0$, иначе прирост от базового уровня $X(-1)$),

$$- U(t-1) = U(0) \text{ при } t = 1 \text{ и } U(t-1) = 0 \text{ при } t > 0,$$

$$- x_i(0), u_i(0) \in [-1, 1]$$

описывается следующим образом:

$$(4) \quad X(t) = Q^{t-1} X(0) + \underline{Q}(t-1)U(0),$$

где $Q(t-1) = E_N + A + A^2 + \dots + A^{t-1}$.

Ограничимся рассмотрением таких карт⁸, у которых собственные значения матрицы A содержатся внутри окружности единичного радиуса на комплексной плоскости, тогда

$$(5) \quad Q = \lim_{t \rightarrow \infty} Q(t-1) = (E_N - A)^{-1}.$$

Матрицу Q назовем матрицей интегральных влияний, так как ее элементы характеризуют все прямые и опосредованные влияния, которым подвержен каждый фактор когнитивной карты с функцией вида (3).

Предлагаемый подход базируется на анализе структурных свойств модели развития СС [9, 10], при котором для выявления противоречий между факторами используется показатель ОДФ R из (2). На рис. 2 для пары факторов x_i, x_j показаны все (прямые и опосредованные) влияния x_i на x_j .

Определение 1. Пусть есть пара факторов x_i и x_j , а соответственно r_i и r_j – показатель ОДФ факторов. Между ними есть противоречие, если

$$r_i * r_j \neq \text{sign}(q_{ij}),$$

где q_{ij} – элемент матрицы Q , характеризующий интегральное взаимовлияние между этими факторами.

⁷ За 0 в модели принято базовое значение фактора, относительно которого происходит моделирование

⁸ Содержательно это условие может соблюдаться при определенном подходе к выбору шкал и выбору ограничений на веса влияния на зависимый фактор.

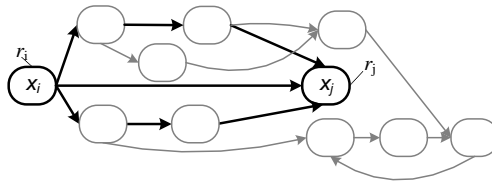


Рис. 2. Пример условной карты со структурой взаимовлияний

Содержательно противоречие между парой факторов состоит в том, что изменение одного фактора в желательном направлении (в соответствии с его ОДФ) приводит к нежелательному изменению второго фактора (т.е. к изменению в направлении, противоположном установленной для него ОДФ) через связывающую их структуру взаимовлияний в когнитивной карте (рис. 2).

2. Диагностирование проблемной ситуации в развитии системы

Проблемная ситуация в развитии СС может быть обусловлена

- неблагоприятными условиями внешней среды (социальной, политической, экономической и пр.);
- недооценкой слабых сторон СС;
- недостаточным количеством управленческих ресурсов;
- противоречиями в интересах АСС, возникающими при их взаимодействии.

Диагностирование проблемной ситуации опирается на анализ структурных свойств когнитивной карты и включает этапы (рис. 3.):

Д0. Определение проблемной ситуации $P^* = \{p_i^*\}$, где $p_i^* \in X^{int}$ – проблемный фактор.

Д1. Нахождение факторов-причин негативного влияния на проблемные факторы и определение типа проблем.

Д2. Определение структуры проблемной ситуации и группировка проблемных факторов.

Д3. Поиск факторов, которые могут в принципе изменить проблемную ситуацию, с учетом типов проблем.

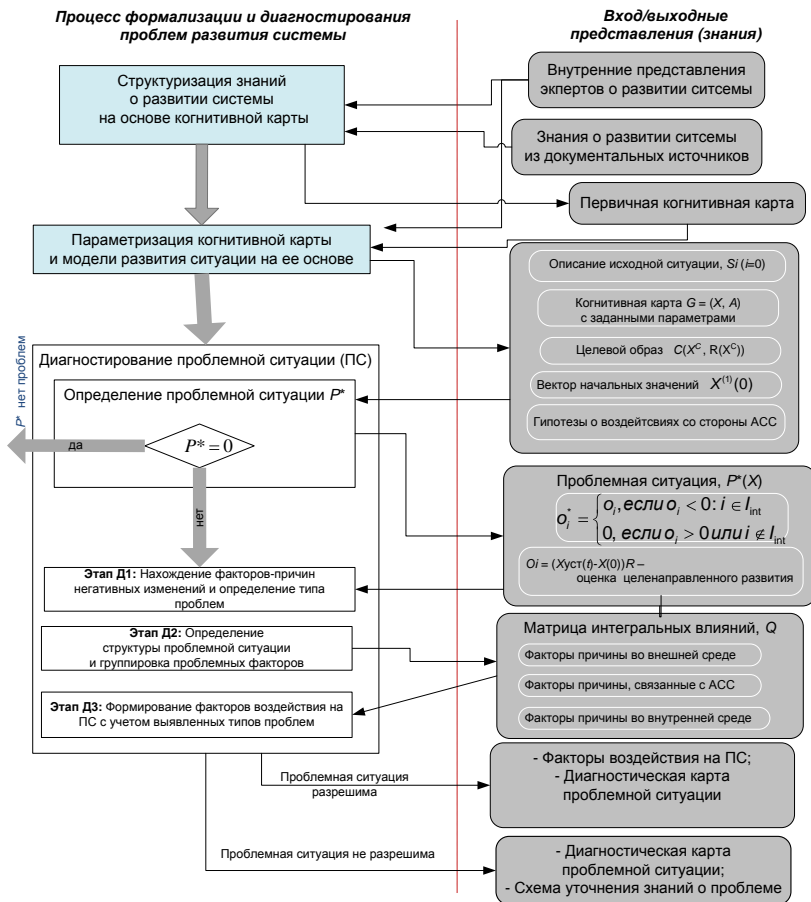


Рис. 3. Конкретизированная схема диагностирования проблемной ситуации в развитии системы

В ходе выполнения этапов диагностирования формируется *диагностическая карта проблемной ситуации*.

Определение 2. Диагностической картой проблемной ситуации называется кортеж вида $K = (P^*, L_{res}, T(P^*), AS^p)$, где

P^* – проблемные факторы;

$$L_{res} = X_{res}^{int} = X^{res} \cup X^{int} ; X_{res}^{ext} = X^{res} \cup X^{ext} ; X_{res}^{as} = X^{res} \cup X^{as} ,$$

– подмножество факторов-причин негативного влияния на проблемные факторы, сгруппированные по трем областям: внешняя среда, внутренняя среда, АСС;

$T(L_{res})$ – тип проблемы, определяемый по L_{res} , исходя из сочетания подмножеств факторов в L_{res} (см. раздел 2.2.), например, проблема во внутренней среде $T(L_{res}) = INT$, если

$$L_{res} = X_{res}^{int} \neq \emptyset ; X_{res}^{ext} = \emptyset ; X_{res}^{as} = \emptyset ;$$

AS^p – активные субъекты, связанные с проблемной ситуацией.

2.1. ЭТАП Д0. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОБЛЕМНЫХ ФАКТОРОВ

Выявление проблемных факторов заключается в мониторинге отклонений в развитии СС от целенаправленного развития. Для этого определяются установившиеся значения x_i^* на факторах X когнитивной карты при заданных начальных значениях и целевом образе развития СС. С учетом (4) и (5) установившееся состояние СС определяется как

$$X^* = QX(0) + QU(0) .$$

Определение 3. Проблемной ситуацией $P^* = \{p_i^*\}$ называется состояние системы $X^{уст}$, в котором на каждом проблемном факторе $p_i^* \in X^{int}$ наблюдается отклонение o_i^* от целенаправленного развития:

$$(6) \quad o_i^* = \begin{cases} o_i^r: o_i^r < 0, i \in I_{int}, \\ 0: o_i^r > 0, i \in I_{int}, \\ 0: i \notin I_{int}; \end{cases}$$

где o_i^r – оценка целенаправленного развития по фактору x_i ,
 $o_i = r_i \Delta x_i = x_i^* - x_i(0) * r_i^9$, где r_i – ОДФ фактора, $i \in I_{int}$.

2.2. ЭТАП Д1. НАХОЖДЕНИЕ ФАКТОРОВ-ПРИЧИН НЕГАТИВНОГО ВЛИЯНИЯ НА ПРОБЛЕМНЫЕ ФАКТОРЫ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТИПА ПРОБЛЕМЫ

Нахождение факторов-источников (причин) негативного влияния на проблемные факторы $P^* = \{ p_i^* \}$ и их группировка. Негативное влияние некоторого фактора на P^* состоит в том, что его изменение приводит к нежелательному изменению хотя бы одного фактора из P^* .

Для нахождения факторов-источников (причин) негативного влияния на проблемные факторы $P^* = \{ p_i^* \}$ и выделения из P^* вектора целей $Y^* = \{ y_i^* \} \subseteq P^*$ применяется структурно-целевой анализ [9, 10], или метод построения подграфа причин.

При структурно-целевом анализе устанавливается наличие противоречия между проблемным фактором и фактором-источником интегрального влияния на него (см. определение 1). Если противоречие есть, то фактор-источник интегрального влияния является причиной x^{reas} негативного влияния на проблемный фактор:

$$(7) \quad r_i \neq \text{sign } q_{ki} * \text{sign } x_k, \quad x_k \in X, \quad p_i^* \in P^*,$$

где r_i – ОДФ проблемного фактора p_i^* ; q_{ki} – интегральное влияние фактора x_k на p_i^* .

Для каждого проблемного фактора строится подграф причин $GR(p_i^*)$, который включает факторы причины x^{reas} .

Далее, после выявления факторов-источников негативного влияния они группируются по области влияния следующим образом (рис. 4):

⁹ Содержательно $o_i^* = 0$ означает, что i -й фактор из X^{int} не является проблемным.

- внутренние факторы негативного влияния;
- внешние факторы негативного влияния (факторы-угрозы внешней среды, $Threats \{Th_i\}$),
- факторы, обусловленные влиянием других АСС $\{H_i^{Th}\}$.

В связи с этим можно определить три типа проблем:

- проблема внутренней среды T^{int} ;
- проблема внешней среды T^{out} ;
- проблема конфликтной среды T^{conf} .

При этом проблема считается однородной, если она обусловлена причинами только одной из перечисленных групп факторов негативного влияния. Предложенный подход проработан для однородных проблем. Разнородные проблемные ситуации, причины которых обусловлены сочетанием факторов негативного влияния из различных групп, являются предметом дальнейших исследований и требуют введения меры негативного воздействия той или иной группы факторов, а также развития методов анализа с учетом дополнительных параметров.

Нахождение факторов-источников (причин) негативного влияния на P^* и их группировка

Когнитивная карта развития системы с выделением различных типов факторов при диагностировании проблемной ситуации P^* :

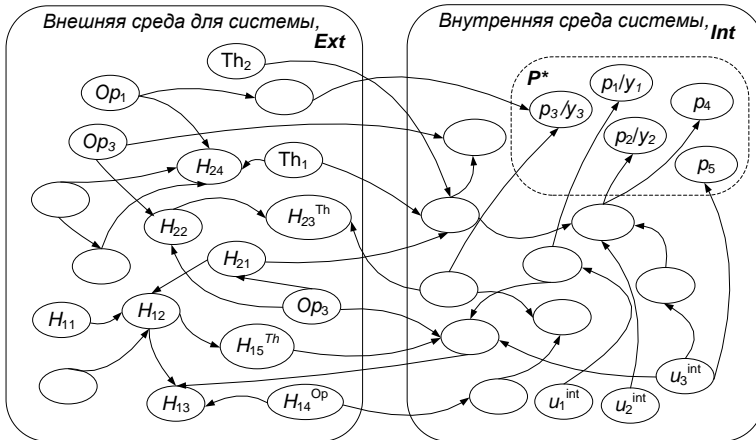


Рис. 4. Общая схема определения типа проблемы

На рис. 4 факторы внутренней среды системы включают:

- $P^* = \{p_i\}$ – проблемные факторы;
- $Y^* = \{y_i^*\} \subseteq P^*$ – вектор целей, выделенный на P^* ;
- $\{u_i^{int}\}$ – управляющие факторы (рычаги воздействия субъекта управления системой);

а факторы внешнего окружения системы включают:

- $\{Th_i\}, \{H_i^{Th}\}$ – негативные факторы, в том числе обусловленные влиянием других АСС;
- $\{Op_i\}, \{H_i^{Op}\}$ – благоприятные факторы, в том числе обусловленные влиянием других АСС

2.3. ЭТАП Д2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СТРУКТУРЫ ПРОБЛЕМНОЙ СИТУАЦИИ

Этап определения структуры проблемной ситуации связан с анализом подграфов причин проблемных факторов $p_i^* \in P^*$, полученных на предыдущем этапе, с целью определения взаимосвязанности между этими факторами для выбора приоритетов и стратегий их решения. Здесь под стратегией решений понимается поиск непротиворечивых векторов целей $Y^* \in P^*$ и поиск таких факторов, воздействие на которые может привести к коррекции отклонений по Y^* в исследуемой проблемной ситуации.

Структура проблемной ситуации представляется в виде общего графа причин G^{reas} , который наглядно позволяет выделить взаимосвязи между подграфами причин отдельных факторов. Схематический пример графа G^{reas} для проблемной ситуации $P^* = \{p_1^*, p_2^*, p_3^*\}$ приведен на рис. 5.

В данном примере G^{reas} включает 3 подграфа причин:

- $G_{sub}^1 = (\{x_1, x_2, x_3\}, \{g_{11}, g_{21}, g_{31}\}, p_1^*)$;
- $G_{sub}^2 = (x_4, g_{42}, p_2^*)$;
- $G_{sub}^3 = (p_2^*, g_{23}, p_3^*)$.

При этом из структуры G^{reas} видно, что фактор x_4 является не только причиной негативного влияния на фактор p_2^* , но и косвенной причиной негативного влияния на фактор p_3^* , т.е. причина порождает последовательность проблем. Могут быть

случаи, когда причина порождает параллельно несколько проблем. Естественно предположить, что приоритет решения определяется именно для проблем, которые связаны такого рода зависимостями, так как нахождения рычагов воздействия на причину будет способствовать решению сразу нескольких связанных проблем.

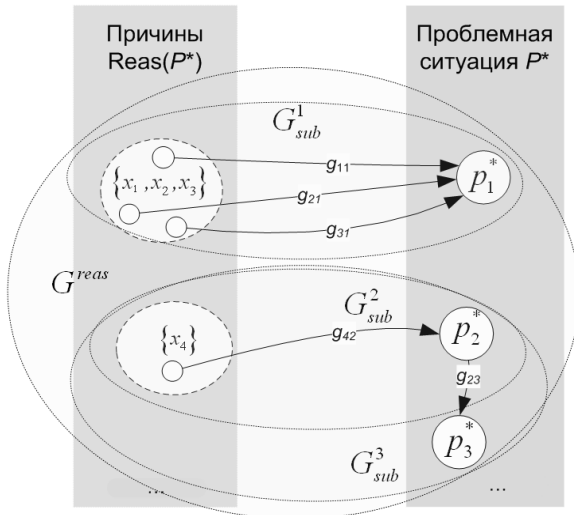


Рис. 5. Схематичный пример построения графа причин для проблемной ситуации $P^* = \{ p_1^*, p_2^*, p_3^* \}$

Полученная структура проблемной ситуации P^* отражает не только взаимосвязи между проблемами, но также типы факторов-причин негативного влияния на p_i^* из P^* (типы проблем), которые определяются на предыдущем этапе Д1 (раздел 2.2).

Построение и анализ общего графа причин G^{reas} для проблемной ситуации P^* позволяет выбирать не только различные приоритеты, но и стратегии решения проблем. В частности, можно руководствоваться стратегией решения в первую очередь тех проблем p_i^* из P^* , которые согласованы (не противоречивы по определению 1.) между собой. Тем самым на их основе фор-

мируются вектора целей $\{Y_i^*\} \subset P^*$ для решения задачи нахождения согласованных потенциальных управлений по достижению Y_i^* . Согласованность управлений означает, что любая u_j^* из Y_i^* под действием вектора управлений изменяется в желательном направлении.

2.4. ЭТАП ДЗ. ФОРМИРОВАНИЕ УПРАВЛЯЮЩИХ ПОДМНОЖЕСТВ С УЧЕТОМ ВЫЯВЛЕННЫХ ТИПОВ ПРОБЛЕМ

С учетом выявленной структуры проблемной ситуации и типов отдельных проблем в ней на данном этапе проводится анализ модели развития СС с целью определения факторов, благоприятно влияющих на разрешение проблемной ситуации, т.е. таких факторов, воздействия на которые может привести к коррекции отклонений по выделенным Y_i^* . Нахождение таких управляющих подмножеств является необходимым компонентом стратегии решения проблем.

Для определения подмножеств возможных управляющих факторов $U_{Y_i^*}^*$ предлагается ряд методов (или их сочетание): структурно-целевой анализ, *SWOT*-анализ на когнитивной карте, подход к выявлению конфликтности интересов при взаимодействии нескольких АСС (подробно они изложены в [2]). Основная идея этих методов состоит в нахождении таких факторов в когнитивной карте, изменение которых противодействует факторам-причинам проблем и способствует изменению проблемных факторов в желательном направлении. Все эти методы основаны на анализе структурных свойств модели развития СС.

При формировании $U_{Y_i^*}^*$ выбор метода анализа структурных свойств модели целесообразно осуществлять исходя из действия – механизмов противодействия факторам – источникам негативных влияний на Y_i^* : ликвидация и/или компенсация;

– механизмов управления субъекта управления, с чьей позиции разрешается проблемная ситуация: активное или/и пассивное управление.

Благодаря механизму ликвидации обеспечивается опосредованное влияние на достижение вектора Y^* путем устранения или ослабления факторов – причин негативного влияния на Y^* .

Механизм компенсации лишь нивелируют воздействие негативных факторов. Он направлен на выявление факторов благоприятного влияния на Y_i^* , изменение которых способствует желательному изменению Y_i^* в условиях сохраняющегося негативного влияния факторов – причин проблем.

Подмножество $U_{Y_i^*}^*$ с точки зрения субъекта управления может формироваться из области его активного управления и/или области пассивного управления.

Активное управление подразумевает применение собственных рычагов управления $\{u_k^{int}\}$ для достижения поставленных целей (например, внутренние рычаги управления руководства СС).

Пассивное управление предполагает использование возможностей вне поля активности субъекта управления. Например, это может быть использование факторов благоприятного влияния внешней среды (*Opportunities* $\{Op_i\}$ или факторов влияния других АСС, $\{AS^p\}$).

Сформированные подмножества $\{U_{Y_i^*}^*\}$ определяет факторы, воздействие на которые могут изменить проблемную ситуацию относительно выделенных Y_i^* .

Таким образом, результатом диагностирования проблем (рис. 1) является не только диагностическая карта проблемной ситуации, определяющая структуру проблемной ситуации и типы отдельных проблем в ней, но и подмножества $\{Y_i^*\}$ и $\{U_{Y_i^*}^*\}$.

Сформированные подмножества $\{Y_i^*\}$ и $\{U_{Y_i^*}^*\}$ уточняют знания

о возможных стратегиях разрешения проблемной ситуации, в том смысле, как это было определено в начале раздела 2.3.

При этом в общем случае допускается, что $\{Y_i^*\}$ и $\{U_{Y_i^*}^*\}$ могут лишь частично повлиять на разрешение проблемной ситуации или даже сделать вывод о ее неразрешимости, когда $\{U_{Y_i^*}^*\} = \emptyset$.

По диагностической карте можно сформировать так называемую *схему уточнения знаний* для последующего уточнения знаний о проблемной ситуации, которые не были учтены при построении модели СС на основе выбранного типа когнитивной карты.

Получаемые в ходе диагностирования выводы о неразрешимости проблемной ситуации в рамках конкретной модели развития становятся основой для дальнейшего анализа проблем развития системы. Во-первых, если причины формальной неразрешимости лежат в противоречивости целей, необходимо ставить и решать задачи декомпозиции структуры когнитивной карты или задачи структурного управления, которые допускают изменение структуры взаимовлияний (см. например [9]). Также некоторые противоречия можно нивелировать за счет воздействия на факторы в доминантных путях (см. например в [2]). Во-вторых, причина формальной неразрешимости проблемной ситуации развития СС может быть связана с отсутствием факторов влияния на проблемную ситуацию в когнитивной карте. Например, при анализе развития Самарской области первичная когнитивная карта содержала интегральный фактор «вступление в ВТО», который наряду с другими выделенными в ходе экспертной процедуры факторами негативного влияния на развитие региона был вставлен в карту для анализа динамики. Анализ проблемной ситуации показал, что этот фактор среди других факторов, характеризующих влияние так называемых угроз, действительно имеет приоритет в формировании отклонений от целенаправленного развития. Однако в такой формулировке он не является фактором-управлением и необходима детализация

механизма воздействия «вступление в ВТО» на развитие региона [14].

3. Пример применения диагностирования проблемной ситуации в развитии некоторого региона

Предложенная схема диагностирования проблем развития СС была применена в ряде прикладных работ, в частности, для анализа проблем:

- взаимодействия транснациональной компании с государством (ОАО «Газпром»);
 - развития региона (Самарская область);
 - развития потенциала города (г. Кронштадт);
 - развития бизнес-системы;
 - развития бизнеса на базе анализа бизнес-плана
- и подтвердила свою работоспособность.

В рамках выполнения перечисленных работ при диагностировании были обнаружены однородные проблемы, т.е. причины негативного изменения ситуации относились к одному из выделенных типов. В частности, для региональной системы было показано, что отклонение от целенаправленного развития было связано с неэффективным управлением, в случае анализа развития транснациональной компании достижению целей компании мешала конфликтная ситуация.

Далее представлен один из результатов диагностирования проблем в развитии г. Кронштадта в несколько упрощенном виде (без отдельных деталей и итераций) для демонстрации предложенной схемы диагностирования.

1. *Выявление проблемных факторов.* По результатам анализа целенаправленного развития (таблица 1) выявлены проблемные факторы: 15 – «Объем инвестиций»; 16 – «Темпы развития экономики города»; 17 – «Уровень развития демографического потенциала»; 19 – «Экологическая безопасность»; $P^* = \{15, 16, 17, 19\}$.

2. *Выявление факторов – причин негативного влияния на проблемные факторы и определение типа проблем.* На основе

анализа структурных свойств модели развития г. Кронштадта, опираясь на метод построения графа причин GR (раздел 2.2), были выявлены факторы – причины негативного влияния на проблемные факторы из P^* . На рис. 6 для каждого проблемного фактора приведен соответствующий подграф причин G_{sub}^i .

Таблица 1. Проблемные факторы в развитии ситуации относительно целевого образа руководства

№ фактора	Название фактора	$X(0)$	ОДФ	S^0	S^1	$O(S^0)$	$O(S^1)$
1	Уровень развития социальной инфраструктуры	0	1	0	0,1	0	0,1
14	Уровень жизни населения города	0	1	0,2	0,6	0,2	0,4
15	Объем инвестиций	0	1	0,1	-0,6	-0,1	-0,5
16	Темпы развития экономики города	0,2	1	0,1	-0,6	-0,1	-0,7
17	Уровень развития демографического потенциала	-0,2	1	-0,2	-0,3	0	-0,1
18	Бюджетная обеспеченность	0,2	1	0,4	0,2	0,2	-0,2
19	Экологическая безопасность	-0,2	1	-0,4	-0,8	-0,2	-0,4

Как показал анализ, все проблемы однородные, так как все причины обусловлены действием факторов внутренней среды X_{int} .

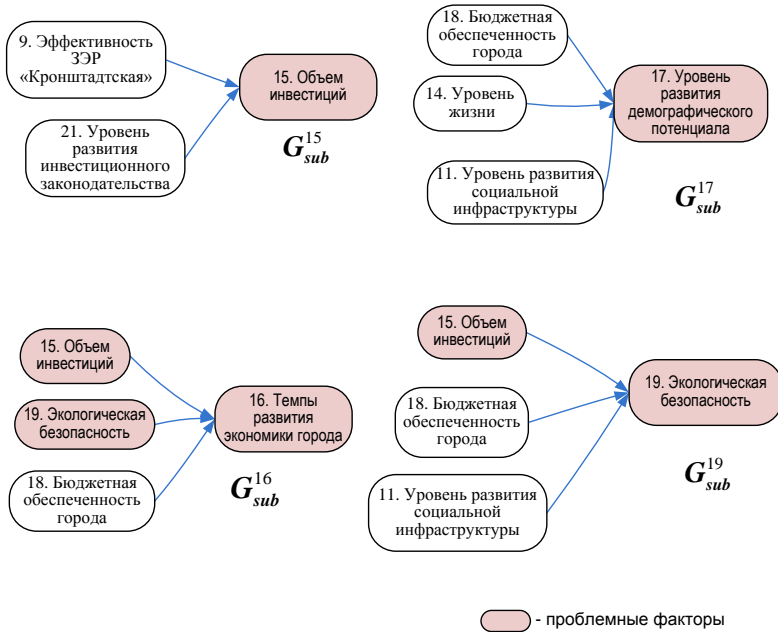


Рис. 6. Фрагмент подграфа причин проблемной ситуации $P = \{15, 16, 17, 19\}$, обусловленных факторами внутренней среды X_{int}

3. *Формирование структуры проблемной ситуации.* Целью данного этапа является определение взаимосвязности между проблемными факторами для выбора приоритетов и стратегий для их решения. Структура проблемной ситуации приведена на рис. 7 в виде общего графа причин $G^{reas} = G_{sub}^{15} \cup G_{sub}^{16} \cup G_{sub}^{17} \cup G_{sub}^{19}$.

Из графа G^{reas} видно, что проблемы p_{15}^* , p_{16}^* , p_{19}^* связаны между собой, причем p_{16}^* зависит от p_{15}^* и p_{19}^* , а также p_{19}^* и p_{17}^* имеют общие причины. Исходя из такой взаимосвязи проблем предполагается, что отклонение на факторе p_{16}^* корректируется, если в качестве вектора целей выбрать $Y(19, 15)$ при условии непротиворечивости p_{15}^* , p_{16}^* , p_{19}^* (см. формулу (4.1)). Проверка показала, что эти факторы согласованы. Таким образом,

при выбранном $Y^*(19, 15)$ обеспечение желательного изменения факторов p_{15}^* и p_{19}^* приведет, исходя из структуры взаимосвязей проблем, к желательному изменению и p_{16}^* .

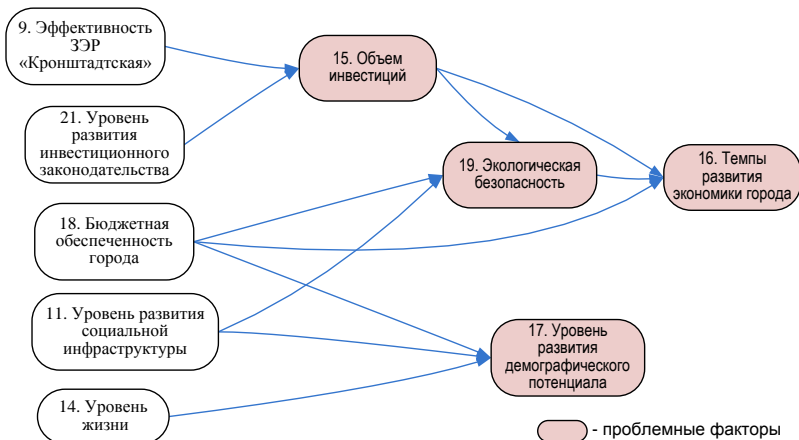


Рис. 7. Общий граф причин G^{reas} для проблемной ситуации $P = \{15, 16, 17, 19\}$

Далее переход к этапу формирования согласованных управлений по достижению Y^* .

4. *Формирование управляющих подмножеств.* Согласованность управлений U^* с вектором целей Y^* означает, что любая цель y_i^* из Y^* под действием вектора управлений U^* изменяется в желательном направлении.

Для достижения $Y^*(19, 15)$ методом структурно-целевого анализа был найден согласованный с $Y^*(19, 15)$ вектор управлений $U^*(4, 5, 8, 13)$ на основе механизма противодействия факторам – источникам негативных влияний на Y^* (компенсация). Механизм компенсации лишь нивелируют воздействие негативных факторов. Он направлен на выявление факторов благоприятного влияния на Y^* , изменение которых способствует желательному изменению Y^* в условиях сохраняющегося негативного влияния факторов-причин проблем. Найденный вектор потенци-

альных управлений $U^*(4, 5, 8, 13)$ включает следующие факторы модели: «Уровень развития инноваций, экологически чистых и ресурсосберегающих технологий» (фактор 8); «Уровень развития рекреационного потенциала» (фактор 4); «Уровень развития трудового потенциала» (фактор 5); «Уровень развития транспортной инфраструктуры города» (фактор 13).

Под воздействием вектора $U^*(4, 5, 8, 13)$ может быть достигнуто желательное изменение $Y^*(19, 15)$; таким образом, возможна коррекция отклонений не только по проблемным факторам p_{15}^* , p_{19}^* , но и по p_{16}^* . Так как проблемный фактор p_{17}^* не связан с p_{15}^* , p_{16}^* , p_{19}^* , то для коррекции его отклонения было найдено отдельное решение.

Полученные решения, определяющие потенциальные направления выхода из проблемной ситуации благодаря активации внутренних ресурсов управления города, стали основой для разработки конкретизированной стратегии развития города на основе имитационного моделирования.

Заключение

В статье предложены схема диагностирования проблем развития сложных систем, основанная на построении когнитивной карты развития исследуемой системы, и поддерживающие ее методы анализа структурных свойств модели, новизна которой состоит в возможности:

- систематически исследовать проблемы различных типов, связанные с взаимодействием активных субъектов, неблагоприятным влиянием внешней среды и структурными особенностями системы;
- рассматривать проблемы в комплексе и определять приоритеты и стратегии решения проблемной ситуации в зависимости от причин их возникновения.

При этом схема построена так, что новые методы структурного анализа карт для получения новых знаний о структуре, причинах проблемной ситуации, развитые или обнаруженные среди теоретических работ в области моделей и методов на

основе когнитивных карт, могут быть встроены в процесс диагностирования.

В основу предложенной схемы диагностирования проблем развития сложных систем были положены с одной стороны анализ теоретических подходов к решению слабоструктурированных проблем и формированию стратегий развития систем [для обзора см. 2], с другой – ряд эвристических правил, сформированных в ходе прикладных работ лаборатории №51 ИПУ РАН.

На сегодняшний момент получены результаты по диагностированию однородных проблем (вызванных одним типом причин), анализируемых на базовом типе функциональных карт.

Разнородные проблемные ситуации, причины которых обусловлены сочетанием факторов-причин разных типов, являются предметом дальнейших исследований и требуют введения меры негативного воздействия той или иной группы факторов, а также развития соответствующих методов анализа.

Предлагаемый подход частично программно поддерживается на ПКМ «Ситуация-5».

Поставленная задача по диагностированию проблемных ситуаций в развитии сложных систем согласуется с процедурой построения стратегией по принципу разрешения проблемных ситуаций и в сочетании со сценарным моделированием образует целостный подход к формированию стратегий развития системы.

Результаты диагностирования проблемной ситуации в развитии системы на основе предложенного подхода в дальнейшем могут быть использованы для уточненных постановок задач тактического уровня с применением традиционных моделей и методов теории управления, в частности, задач структурного реформирования, исследования конфликтов, ресурсного управления.

Литература

1. АБРАМОВА Н.А., ВОРОНИНА Т.А. *Об одном эксперименте по расстановке весов влияний в когнитивной карте* // Между-

- нар. конф. «Когнитивная наука в Москве: новые исследования». – М.: Институт возрастной физиологии РАО–2011. – С. 131–142.
2. АВДЕЕВА З.К., КОВРИГА С.В. *Формирование стратегии развития социально-экономических объектов.* – Saarbrücken: LAP, 2011. – 184 с.
 3. АВДЕЕВА З.К., КОВРИГА С.В. *Эвристический метод концептуальной структуризации знаний при формализации слабоструктурированных ситуаций на основе когнитивных карт* // В сб. статей «Управление большими системами». – 2010. – Вып. 31. – С. 5–35.
 4. АВДЕЕВА З.К., КОВРИГА С.В., МАКАРЕНКО Д.И., МАКСИМОВ В.И. *Когнитивный подход в управлении* // Проблемы управления. – 2008. – №3. – С. 2–8.
 5. АНСОФФ И. *Стратегическое управление.* – М.: Экономика, 1989. – 520 с.
 6. БОРИСОВ В.В., БЫЧКОВ И.А., ДЕМЕНТЬЕВ А.В. и др. *Компьютерная поддержка сложных организационно-технических систем.* – М.: Горячая линия – Телеком, 2002. – 154 с.
 7. ВАСИЛЬЕВ В.И., ИЛЬЯСОВ Б.Г. *Интеллектуальные системы управления. Теория и практика: учебное пособие.* – М.: Радиотехника, 2009. – 392 с.
 8. ГОРЕЛОВА Г.В., ЗАХАРОВА Е.Н., РАДЧЕНКО С.А. *Исследование слабоструктурированных проблем социально-экономических систем: когнитивный подход.* – Ростов н/Д: Изд-во Рост. ун-та, 2006. – 332 с.
 9. КОВРИГА С.В., МАКСИМОВ В.И. *Применение структурно-целевого анализа развития социально-экономических ситуаций* // Проблемы управления. – 2005. – №3. – С. 39–43.
 10. МАКСИМОВ В.И., КОРНОУШЕНКО Е.К. *Управление ситуацией с использованием структурных свойств ее когнитивной карты* // Труды Института. Том XI. – М.: ИПУ РАН, 2000. – С. 85–90.
 11. МИНЦБЕРГ Г., АЛЬСТРЭНД Б., ЛЭМПЕЛ ДЖ. *Школы стратегий.* – СПб: Питер, 2001. – 336 с.

12. ТОМСОН А.А., СТРИКЛЕНД А.ДЖ. *Стратегический менеджмент. Искусство разработки и реализации стратегии: Учебник для вузов.* / Пер. с англ. под ред. Л.Г. Зайцева, М.И. Соколовой. – М.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 1998. – 368 с.
13. ФЕДУЛОВ А.С. *Нечеткие реляционные когнитивные карты* // Теория и системы управления. – 2005. – №1. – С. 120–132.
14. АВДЕЕВА З.К. *Когнитивный подход формирования стратегии развития социально-экономических систем* // Сборник научных трудов. – Вып. №2. – М.: БОНИЭЛ, 2004. – С. 35–42.
15. ABRAMOVA N., AVDEEVA Z., FEDOTOV A. *An approach to systematization of types of formal cognitive maps* // Proc. 18th IFAC World Congress. Milan, Italy, 2011. – P. 14246–14252.
16. STYLIOS C.D., GROUMPOS P.P. *A soft computing approach for modeling the supervisor of manufacturing systems* // Journal of Intelligent and Robotic Systems. – 1999. – №26. – P. 389–403.

COGNITIVE-MAP-BASED DIAGNOSTICS OF PROBLEM SITUATIONS IN COMPLEX SYSTEM DEVELOPMENT

Zinaida Avdeeva, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Cand.Sc. (avdeeva@ipu.ru).

Svetlana Kovriga, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, (Moscow, Profsoyuznaya st., 65, (495)3347800).

Abstract: We propose a scheme for diagnostics of problems in complex systems development, based on the construction of a cognitive map of the system, and supporting techniques, which allow to explore different types of problems related to interaction of active agents, to the adverse effect of the environment, and to structural characteristics of the system; to consider the problem as a whole and to determine priorities for problem solving subject to their causes.

Keywords: cognitive map, ill-structured complex system, purposeful development, problem situation, diagnostics.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии Д. А. Новиковым

УДК 007:681.518.2
ББК 22.18 65.23 65.29

СИНТЕЗ УПРАВЛЯЮЩИХ РЕШЕНИЙ В СЛАБО СТРУКТУРИРОВАННЫХ ПЛОХО ФОРМАЛИЗУЕМЫХ СОЦИОТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Ажмухамедов И. М.¹

*(ФГБОУ ВПО Астраханский государственный техниче-
ский университет, Астрахань)*

Сформулирована методология построения нечетких когнитивных моделей плохо формализуемых слабоструктурированных социотехнических систем (СТС), отличающаяся тем, что в ее рамках введена количественная мера схожести двух нечетких состояний, а интенсивность нечетких связей в нечеткой когнитивной модели предложено определять с помощью обобщенных весов Фишберна. Это позволило разработать методику синтеза управляющих решений с минимальной «стоимостью», выводящих СТС на необходимый целевой уровень функционирования.

Ключевые слова: плохо формализуемые слабоструктурированные социотехнические системы, нечеткое когнитивное моделирование, веса Фишберна, индекс схожести, синтез управляющих решений.

1. Введение

По мере ускорения научно-технического прогресса разработка методов анализа и управления различными системами становится все более актуальной задачей. При этом значительная часть систем являются социотехническими и кроме естественной (природной) и искусственной (технической) составляю-

¹ *Искандар Маратович Ажмухамедов, кандидат технических наук, доцент (aim_agtu@mail.ru).*

щей в качестве важнейшего элемента содержат в себе человека, который часто выступает не только в качестве лица, принимающего решение (ЛПР), но и сам представляет собой объект управления. Наличие антропогенного фактора превращает описание СТС в плохо формализуемую задачу [21].

Это связано с тем, что такие системы функционируют в условиях неопределенности, характеризуемой недостатком информации, необходимой для формализации протекающих в них процессов. Неопределенность обусловлена, с одной стороны, недостаточностью или полным отсутствием методов и средств измерения координат объекта управления в фазовом пространстве, а с другой стороны, с незнанием закономерностей протекания процессов ввиду их сложности и малоизученности. Указанные факторы приводят к невозможности построения формальных аналитических моделей, учитывающих специфику СТС, что, в свою очередь, значительно снижает эффективность управления подобными системами и часто делает его в принципе невозможным.

При этом резко возрастает роль ЛПР, который в случае, когда традиционные методы контроля, математического описания или управления не дают желаемых результатов, справляется с задачей с определенной степенью эффективности, опираясь на представления и знания экспертов в данной области и собственные опыт и интуицию [20].

В связи с этим возникает необходимость учета при формализации процессов, происходящих в СТС, особенностей, связанных с поведением человека, как важнейшего элемента социотехнической системы. Поэтому при построении формальной модели целесообразно применение методов, основанных на воспроизведении интеллектуальной деятельности ЛПР. Они позволяют снизить степень субъективности принимаемых решений и, как следствие, повышают эффективность управления системой.

Наиболее удобным математическим аппаратом для описания и исследования социотехнических систем, позволяющим реализовать указанные требования и объединить при моделировании аналитические, статистические, лингвистические описания различных подсистем СТС, является нечеткое когнитивное моделирование (НКМ). Неоспоримыми достоинствами НКМ по

сравнению с другими методами являются возможность формализации численно неизмеримых факторов, использования неполной, нечеткой и даже противоречивой информации [16].

Создание Л. Заде математического аппарата нечетких множеств, развитие теории когнитивного моделирования в работах ученых Института проблем управления РАН И.В. Прангишвили, О.П. Кузнецова, В.И. Максимова, Е.К. Корноушенко, А.А. Кулинича и других представителей этой отечественной научной школы позволило решить достаточно широкий класс задач исследования плохо формализуемых (ПФ) и слабоструктурированных (СС) систем. В работах этих ученых приведены разнообразные методы представления плохо формализуемых знаний, позволяющие отражать как фактуальные знания о структуре, свойствах объектов предметной области, так и операционные знания о логических, причинно-следственных, ассоциативных зависимостях.

Изучению социотехнических систем (СТС) также посвящен ряд работ отечественных и зарубежных ученых, например [18, 23, 25–28]. Однако, несмотря на несомненные успехи в рамках данного направления, существует достаточно много СТС, анализ и управление которыми не соответствует современным требованиям.

Основными причинами этого являются сложность определения значений антропогенных факторов, влияющих на состояние СТС, сложность оценки интенсивности («силы») связей между концептами НКМ, а также отсутствие формализованной методики синтеза управляющих решений (СУР) для вывода СТС в заданное состояние. При использовании НКМ подбор управляющих воздействий проводится, как правило, на основе имитационного моделирования. Однако перед тем как его проводить, модель необходимо верифицировать, т.е. сравнить прогноз состояния системы, полученный с помощью НКМ, с реальным состоянием СТС. Описание состояния системы и в том, и в другом случае является нечетким и дается обычно в терминах какой-либо лингвистической переменной (ЛП).

С другой стороны, перед тем как приступить к СУР, необходимо установить насколько текущее нечетко описанное со-

стояние системы отличается от целевого состояния, также задаваемого ЛПР, как правило, нечетко.

Таким образом, и при верификации, и при синтезе управляющих решений возникает необходимость введения количественной меры близости нечетко заданных состояний СТС.

Учет перечисленных причин, препятствующих эффективному управлению СТС, предопределил задачи, решению которых посвящена данная работа.

2. Постановка задачи

Необходимо создать методологию моделирования и управления ПФ СС СТС, включающую в себя:

- методику перехода от вербального описания состояния концептов к количественному их определению, позволяющую достоверно отражать имеющуюся неопределенность;

- методику определения интенсивности нечетких связей в НКМ в случае, когда значение фактора-следствия или его приращения является результатом совместного влияния нескольких факторов;

- методику определения количественной меры схожести двух нечетких состояний;

- методику, позволяющую оценить уровень антропогенного фактора и основные причины, влияющие на поведение человека в составе СТС;

- методику синтеза управляющих решений, выводящих СТС на необходимый целевой уровень функционирования при минимуме «затрат».

3. Нечеткая когнитивная модель социотехнической системы

Как было отмечено выше, основными особенностями, затрудняющими моделирование и управление плохо формализуемыми процессами в СТС и ограничивающими возможности применения традиционных методов поиска оптимального (или даже приемлемого) управленческого решения, являются нечеткость структуры системы в целом и/или отдельных ее подсистем.

тем; нечеткие связи между различными подсистемами и отдельными элементами; «размытость» значений элементов системы и целей ее функционирования; сложность оценки степени достижения нечетко определенного целевого состояния и отсутствие количественной меры отклонения текущего состояния системы от требуемого.

Поскольку в реальных управленческих ситуациях предварительный анализ проблемы и ее структуризация являются первым, наиболее сложным и трудно формализуемым этапом принятия решений [1, 8], ЛПР приходится манипулировать качественной информацией в виде гипотез (предположений), интуитивных понятий и смысловых образов. Многочисленные исследования процессов принятия решений подтверждают, что ему несвойственно мыслить и принимать решения только в количественных характеристиках. Он мыслит прежде всего качественно, и для него поиск решения – это поиск в первую очередь замысла решения, где количественные оценки играют вспомогательную роль [13].

Таким образом, подготовку и принятие решений в задачах управления СТС следует рассматривать как сложный интеллектуальный процесс разрешения проблем, не сводимый исключительно к рациональному выбору. Для поддержки этого процесса, особенно на ранних его этапах, целесообразно использовать когнитивный подход к моделированию и управлению, поскольку «он направлен на разработку формальных моделей и методов, поддерживающих интеллектуальный процесс решения проблем благодаря учету в этих моделях и методах когнитивных возможностей человека (восприятие, представление, познание, понимание, объяснение) при решении им управленческих задач» [1].

В соответствии с *принципом хранения и аккумуляции знаний в форме каузальных когнитивных карт* в качестве универсальной модели социотехнической системы (*STS*) предлагается использовать кортеж

$$(1) \quad STS = \langle G, QL, S, R, \Omega \rangle ,$$

где G – ориентированный граф, имеющий одну корневую вершину и не содержащий горизонтальных ребер в пределах одного уровня иерархии; QL – набор качественных оценок уровней

каждого фактора в иерархии (лингвистическая переменная); S – множество весов ребер графа G , отражающих степень влияния концептов на элементы следующего уровня иерархии; R – набор правил для вычисления значений концептов на каждом из уровней иерархии G ; Ω – индекс схожести, позволяющий распознавать лингвистические значения концептов. В свою очередь G также представляет собой кортеж

$$(2) \quad G = \langle \{GF_i\}; \{GD_{ij}\} \rangle,$$

где $\{GF_i\}$ – множество вершин графа (факторов или концептов в терминологии НКМ); $\{GD_{ij}\}$ – множество дуг, соединяющих i -ю и j -ю вершины (множество причинно-следственных связей между концептами); $GF_0 = K_0$ – корневая вершина, отвечающая цели функционирования системы в целом (целевой концепт).

При построении G в стационарном случае на уровне N предполагаются концепты, на которые могут оказывать влияние только факторы, расположенные на уровнях меньших N . В случае динамической модели на концепты могут дополнительно оказывать влияния обратные связи, возникающие в НКМ. Уровни иерархии целесообразно формировать на основе функциональной модели процесса. При этом каждый концепт « m », находящийся на уровне « n », получает на вход набор данных $\{X_{nm}\}$ и перерабатывает его в выходное значение Y_{nm} согласно правилу R^{nm} :

$$(3) \quad Y_{nm} = R^{nm}(X_{nm})$$

Значения Y_{nm} в свою очередь являются входными данными для подсистем (концептов) более высокого уровня иерархии.

4. Переход от вербального к нечеткому количественному описанию

Концепты, участвующие в иерархии, в большинстве случаев представляют собой численно не измеримые величины. Поскольку информация о состоянии данных концептов обычно формулируется экспертом в вербальной форме, для *формализации качественной информации* вводится лингвистическая переменная «Уровень фактора» QL и определяется терм-множество ее значений, состоящее в общем случае из 9 элементов, принадлежащих отрицательной QL^- и положительной QL^+ области зна-

чений (для большинства практических задач девяти уровней классификации более чем достаточно):

(4) $QL = \{U(QL^-; 0; QL^+)\} = \{\text{Высокий отриц. (B}^-\text{); Выше среднего отриц. (BC}^-\text{); Средний отриц. (C}^-\text{); Низкий отрицательный (H}^-\text{); Нулевой (0); Низкий положит. (H}^+\text{); Средний положит. (C}^+\text{); Выше среднего положит. (BC}^+\text{); Высокий положит. (B}^+\text{)}\}.$

В качестве семейства функций принадлежности используется девятиуровневый классификатор, где соответствующие функции принадлежности нечетких чисел, заданных на отрезке $[-1, 1]$ вещественной оси, представляют собой трапеции:

(5) $\{B^-(-1; -1; -0,85; -0,75); BC^-(-0,85; -0,75; -0,65; -0,55); C^-(-0,65; -0,55; -0,45; -0,35); H^-(-0,45; -0,35; -0,25; -0,15); \ll 0 \gg (-0,25; -0,15; 0,15; 0,25); H^+(0,15; 0,25; 0,35; 0,45); C^+(0,35; 0,45; 0,55; 0,65); BC^+(0,55; 0,65; 0,75; 0,85); B^+(0,75; 0,85; 1; 1)\},$

где в нечетком числе $XX(a_1, a_2, a_3, a_4)$ a_1 и a_4 – абсциссы нижнего основания; a_2 и a_3 – абсциссы верхнего основания трапеции.

Суть данного нечеткого классификатора в том, что если о факторе неизвестно ничего, кроме того, что он может принимать любые значения в пределах $[-1, 1]$ (принцип равнопредпочтительности), и надо провести ассоциацию между качественной и количественной оценками фактора, то предложенный классификатор делает это с максимальной достоверностью. При этом сумма всех функций принадлежности для любого $x \in [-1, 1]$ равна единице, что указывает на его непротиворечивость.

Построенный классификатор является разновидностью так называемой «серой» шкалы Пospелова [19], представляющей собой полярную (оппозиционную) шкалу, в которой переход от свойства A^+ к свойству A^- происходит плавно, постепенно, в отличие от интервального шкалирования, используемого в популярных пакетах когнитивного моделирования [2, 5, 7, 10, 11, 12, 15]. Считается, что «серые» шкалы лучше отражают экспертные оценки в условиях неопределенности [24].

Применение классификатора позволяет перейти от качественного описания уровня параметра к стандартному количественному виду соответствующей функции принадлежности из множества нечетких трапецевидных чисел.

Если кроме качественных («нечетких») значений факторов в НКМ присутствуют и количественные («четкие») данные, то простейшим способом для их совместного учета является закругление количественных оценок до их качественного описания. Однако такой подход приводит к потере точности.

Для совместного использования количественной и качественной информации без закругления предлагается методика, предусматривающая использование точного значения количественно измеряемого параметра P_i . Для этого вычисляется нормированное значение \bar{P}_i по формуле

$$(6) \quad \bar{P}_i = (P_i - P_{min}) / (P_{max} - P_{min}),$$

где P_{min} и P_{max} – минимальное и максимальное значение P_i соответственно.

Нормирование приводит разнородные параметры к единому интервалу $[-1, 1]$. Затем значение фактора представляется в виде НЧ $X(a_1, a_2, a_3, a_4)$, в котором $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = \bar{P}_i$. Если измерения \bar{P}_i произведены с известной погрешностью δ , то $a_1 = a_2 - \delta$; $a_2 = a_3 = \bar{P}_i$; $a_4 = a_3 + \delta$. Таким образом, нормированное значение фактора, имеющего четкое количественное представление, рассматривается как частный случай НЧ, заданного на $[-1, 1]$.

5. Определение силы влияния факторов в НКМ

Значения весов $s_{ij} \in [-1, 1]$ из множества S могут быть получены экспертным путем.

Например, в системах «Ситуация» и «Компас» эксперту предлагается упорядоченное множество лингвистических оценок силы влияния. Затем каждый элемент этого множества отображается на отрезок числовой оси $[-1, 1]$ в виде равноотстоящих точек [15, 12].

В системе «Канва» применяются косвенные методы определения силы влияния [11]. Эксперт определяет ее, отвечая на вопросы о возможном изменении значения фактора-следствия при фиксированном изменении фактора причины, что, по мнению авторов системы, уменьшает ошибку экспертного оценивания.

Данные подходы к определению весов связей в НКМ предполагают независимое воздействие факторов-причин на факторы-следствия, при котором на верхний уровень передается максимальное из всех возможных значений нижнего уровня.

Если же значение фактора-следствия или его приращения является результатом совместного влияния нескольких факторов (такая модель была предложена в работе Робертса [22], затем анализировалась и модифицировалась в работах [9, 14]), то вклад каждого из факторов-причин в эту функциональную зависимость целесообразно определить по-иному. При этом необходимо учесть, что «мягкие» качественные измерения типа сравнения, отнесения к классу, упорядочения гораздо более надежны, чем назначение субъективных вероятностей, количественных оценок важности критериев, «весов» полезностей и т.п. [4, 13]. Кроме того, для эксперта в большинстве случаев затруднительно дать непосредственные численные оценки. Поэтому предпочтительнее ранговые методы, при реализации которых требуется лишь упорядочить критерии.

Для оценки *силы нечетких связей между концептами* в [3] предложен модифицированный метод нестрогого ранжирования, в соответствии с которым экспертом производится нумерация всех критериев по возрастанию степени их значимости. Причем допускается, что эксперту не удастся различить между собой некоторые критерии. В этом случае при ранжировании он помещает их рядом в произвольном порядке. Затем проранжированные критерии последовательно нумеруются. Оценка (ранг) критерия определяется его номером. Если на одном месте находятся несколько неразличимых между собой критериев, то за ранг каждого из них принимается номер всей группы как целого объекта в упорядочении.

Найденные предложенным способом оценки представляют собой обобщение системы весов Фишберна для случая смешанного распределения предпочтений, когда наряду с предпочтениями в систему входят и отношения безразличия. Веса Фишберна отражают тот факт, что системе убывающего предпочтения N альтернатив наилучшим образом отвечает система снижающихся по правилу арифметической прогрессии весов. Поэтому эти веса представляют собой рациональные дроби, в зна-

менателе которых стоит сумма N первых членов натурального ряда (арифметической прогрессии с шагом 1), а в числителе – убывающие на единицу элементы натурального ряда, от N до 1 (например, $3/6, 2/6, 1/6$). Таким образом, предпочтение по Фишберну выражается в убывании на единицу числителя рациональной дроби весового коэффициента более слабой альтернативы.

При использовании метода нестрогого ранжирования на граф G необходимо наложить систему отношений предпочтения отдельно для концептов, оказывающих положительное влияние, отдельно для концептов, оказывающих отрицательное влияние:

$$(7) \quad E = \{GF_i(e)GF_j \mid e \in (>, \approx)\},$$

где GF_i и GF_j – факторы одного уровня иерархии G ; $>$ – отношение предпочтения; \approx – отношение безразличия.

Такая система позволяет определить обобщенные на случай предпочтения/безразличия факторы по отношению друг к другу *нормированные* веса Фишберна для каждой дуги GD_{ij} (веса связей) в случае совместного влияния факторов-причин на фактор-следствие.

6. Индекс схожести нечетких состояний. Уровень антропогенных факторов в СТС

Для вычисления значений на следующем уровне иерархии при известных значениях концептов более низкого уровня, определенных в терминах лингвистической переменной QL , и заданном множестве весов дуг S , влияния нижестоящих концептов агрегируются по правилам R_i из множества R . В качестве элементов множества R , в зависимости от специфики влияния концептов друг на друга, могут выступать мультипликативная, аддитивная, минимаксная и т.п. свертки векторного критерия. При этом на нижних уровнях иерархии из-за возможности компенсации значений одних факторов за счет других чаще всего применяется аддитивная или максиминная свертка. Для нахождения значения комплексного критерия GF_0 в случае, когда он не может рассматриваться как сумма частных критериев, можно применить мультипликативную свертку:

$$(8) \quad GF_0 \equiv K_0 = \prod_j K_j^{sign(s_0)(1-|s_0|)},$$

в которой под произведением понимается операция умножения соответствующих лингвистическим значениям K_j НЧ из (5); s_{0j} – веса влияния частных критериев K_j на K_0 , $\sum s_{0j} = 1$. Значение мультипликативного критерия, в отличие от аддитивного, резко уменьшается при малых значениях отдельных критериев, что позволяет исключить нежелательные варианты при принятии решения в случае, когда каждый из частных критериев значим и не допускается их взаимная компенсация. В особо критичных системах в качестве K_0 необходимо использовать минимальное значение критериев K_j (принцип «самого слабого звена»).

Если известно четкое аналитическое описание влияния одних концептов на другие, то в качестве элементов множества R выступают соответствующие формулы, преобразующие входные данные в выходные.

При нахождении сверток иногда возникает необходимость предварительно инвертировать значения некоторых концептов. В случае лингвистического описания для нахождения инверсии (противоположного значения) фактора F предлагается использовать формулу

$$(9) \text{ Inv}(F) = \begin{cases} (1 - \mu(F)), & \text{если } \mu(F) \text{ задана на } [0, 1], \\ (-1 - \mu(F)), & \text{если } \mu(F) \text{ задана на } [-1, 0], \\ (-\mu(F)), & \text{если } \mu(F) \text{ задана на } [-1, 1]; \end{cases}$$

где $\mu(F)$ – функция принадлежности нечеткого числа, соответствующего лингвистическому значению QL_F фактора F .

При нахождении сверток векторного критерия в иерархии G под суммой или произведением лингвистических значений факторов понимается сумма или произведение соответствующих им нечетких чисел. В этом случае результат также является нечетким числом, которое необходимо лингвистически распознать, чтобы выработать суждение о качественном уровне показателей. Для этого вычисляется индекс схожести Ω , характеризующий степень соответствия значения фактора той или иной качественной оценке из терм-множества лингвистической переменной QL .

Индекс схожести Ω предлагается находить следующим образом:

$$(10) \Omega = \frac{(1+\tilde{\rho})}{2},$$

$$(11) \tilde{\rho} = \frac{\rho_{in} - \rho_{out}}{\rho_{in} + \rho_{out}},$$

где

$$\rho_{in} = \int_{a_1}^{a_4} \min[\mu_1(x); \mu_2(x)] dx; \quad \rho_{out} = \left| \int_{b_1}^{b_4} [\mu_2(x)] dx - \rho_{in} \right|,$$

(ρ_{out} представляет собой площадь НЧВ (b_1, b_2, b_3, b_4), характеризующего результат, лежащую вне эталонного НЧ $A(a_1, a_2, a_3, a_4)$, а ρ_{in} – площадь, лежащая внутри этого же НЧ).

Определенный таким образом индекс схожести, изменяясь от 0 до 1, характеризует близость найденной свертки к тому или иному нечеткому числу, которое, в свою очередь, соответствует элементу эталонного терм-множества. При этом обеспечивается семантическое соответствие: чем больше индекс схожести, тем выше степень соответствия вычисленного значения одному из элементов терм-множества QL .

Разница индексов схожести качественных оценок может быть использована в качестве *метрической характеристики степени близости двух нечетких состояний*. В частности, она может быть использована в качестве *метрической характеристики степени адекватности нечеткой когнитивной модели*.

Построенная НКМ должна быть открыта для совершенствования и уточнения. Этому способствует принцип *унификации представления новых знаний для включения их в состав модели*. Для включения в состав модели новых знаний, полученных в результате изучения процессов, происходящих в исследуемой системе, предлагается представлять эти знания в виде НКМ более низкого уровня, построенной по изложенному выше алгоритму. При этом на верхний уровень передается максимальное значение связи, выявленное в ходе анализа НКМ нижнего уровня. Такой иерархический способ построения НКМ позволяет унифицировать форму представления знаний, способствует более эффективному их хранению и обработке.

Значения концептов НКМ в общем случае являются функциями времени t . При проведении динамических расчетов необходимо задать их начальные значения при $t = 0$. Тогда значение произвольного концепта K_j в дискретные моменты времени $t = 1, 2, 3, \dots$ находится по формуле

$$(12) K_j(t) = K_j(t-1) + H(\Delta U_i, STS, t),$$

где $H(\Delta U_i, STS, t)$ – заданная кортежем STS обобщенная функция влияния приращений ΔU_i воздействующих на K_j концептов на выходное значение K_j .

Алгоритм нахождения начальных значений концептов зависит от того, к какому типу процессов они относятся. В случае объективных процессов, вызванных техногенными или природными источниками, для этого используются методы статистического анализа, в результате применения которых после нормирования каждому фактору ставится в соответствие некоторая функция принадлежности на $[-1, 1]$.

В случае же субъективного фактора для определения значения концепта необходимо построить «модель субъекта» – НКМ более низкого уровня иерархии. При этом учитываются: уровень прав субъекта в системе; уровень мотивированности его действий, зависящий от степени лояльности, от его психологического портрета, преследуемых субъектом целей и т.д.; психофизические возможности субъекта; его компетентность (уровень знаний и навыков); техническая оснащенность (используемые методы и средства) (рис. 1).

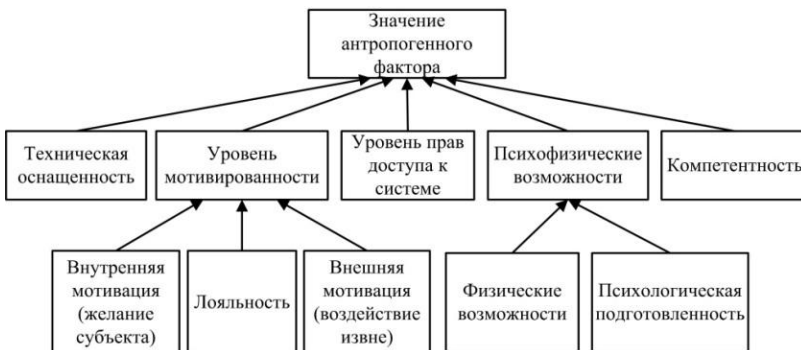


Рис. 1. НКМ для определения уровня антропогенных факторов

Последовательное нахождение сверток векторного критерия на всех уровнях иерархии когнитивного функционального графа позволяет оценить состояние системы в текущий момент времени и выработать обоснованное суждение о необходимости *синтеза управляющих решений (СУР)*.

7. Синтез управляющих решений.

Решение задачи СУР подразумевает вывод системы на необходимый целевой уровень функционирования, обычно определяемый ЛПР нечетко, путем соответствующих воздействий на наиболее значимые наборы факторов X_i (управляющие кластеры), на которые ЛПР имеет возможность влиять, путем изменения значений входящих в эти кластеры концептов U_i .

Управляющие кластеры X_i *независимо* друг от друга влияют на целевые концепты. Для нахождения значений управляющих концептов U_i , совокупность которых обеспечивает необходимое значение кластера X_i , строится НКМ более низкого уровня, согласно принципу *унификации представления знаний*.

При использовании для нахождения значений концептов на каждом из уровней иерархии НКМ (кроме, возможно, последнего, «нулевого») аддитивной свертки вида

$$(13) K_j = \sum_i s_{ij} K_i,$$

где $\{K_i\}$ — совокупность факторов, влияющих на фактор более высокого уровня K_j ; s_{ij} — веса влияния i -го фактора на j -й; $\{K_i\}$ и K_j нормированы относительно своих максимально и минимально возможных значений по формуле (6)); совокупный по всем возможным путям влияния m вклад приращений управляющих факторов ΔU_i в приращение значения целевого концепта ΔK_n находится по формуле

$$(14) \Delta K_n = \sum_i a_{in} \Delta U_i,$$

где

$$(15) a_{in} = \sum_m a_m^{in};$$

$$(16) a_m^{in} = \prod_l s_{ml}^{in};$$

s_{ml}^{in} — вес ребра l в m -й связи между U_i и K_n .

Исходя из принципа *совместного использования количественной и качественной информации*, все значения концептов

представляются в виде нечетких чисел. Аддитивная свертка не меняет форму нечетких чисел, она лишь сдвигает их в рамках $[-1, 1]$. Это позволяет использовать значение сдвига в качестве числовой характеристики приращения факторов. Разница между значениями факторов в этом случае также может быть выражена величиной сдвига, отличающего одно НЧ от другого.

С учетом вышеизложенного в случае использования в НКМ аддитивной свертки предлагается следующая методика СУР, состоящая из *двух* этапов. *На первом* решается задача нахождения минимальных наборов кластеров и их приращений для приведения целевых концептов к заданному ЛППР уровню. *На втором этапе* для каждого кластера в каждом из наборов определяется такое множество приращений входящих в него управляющих концептов, которое, с одной стороны, обеспечивает необходимое приращение значения кластера, вычисленное на предыдущем этапе, а с другой – требует минимальных затрат (материальных, временных, финансовых и т.п.) для его достижения. В качестве управляющего решения выбирается набор кластеров, имеющий минимальную «стоимость» реализации.

Задача *первого этапа* – нахождение необходимого приращения значений кластеров – сводится к решению матричного уравнения

$$(17) A \cdot \Delta X = \Delta K,$$

где $A = \{a_{ij}\}$ – матрица коэффициентов влияния приращений кластера X_i на приращение j -го целевого концепта K_j (матрица смежности); $a_{ij} \in [0, 1]$ и находится по формулам (15) и (16), в которых в качестве U_i выступают кластеры X_i ; $\Delta X = \{\Delta X_i\}$ – вектор приращений значений кластеров X_i ; $\Delta K = \{\Delta K_j\}$ – вектор необходимых приращений значений целевых концептов (K_j находятся как разница между заданными ЛППР для j -го целевого концепта значениями и текущей величиной данного целевого концепта); \cdot – символ операции агрегирования нечетких значений, в качестве которой используется композиция «*max-product*»: $K_j = \max \{a_{ij} \cdot \Delta X_i\}$. Матричное уравнение, расписанное по элементам вектора K_j , превращается в систему уравнений вида

$$(18) \vee_i a_{ij} \cdot \Delta X_i = K_j,$$

где под дизъюнкцией понимается операция взятия максимума.

В общем случае нахождение решений такой системы уравнений, как было показано А.В. Марковским [17], эквивалентно решению задачи нахождения множества безыбыточных покрытий, которая является NP -полной задачей, поскольку к ней сводится известная NP -полная задача нахождения минимального покрытия (содержащего минимальное число элементов и, следовательно, безыбыточного). Поэтому необходимо использовать все возможные средства упрощения как самой системы, так и соответствующей ей таблицы покрытий.

Алгоритм сокращения размерности задачи и ее решения сводится к следующему:

1. Исключаются из рассмотрения несущественные переменные X_i , коэффициенты при которых удовлетворяют неравенству $a_{ij}/K_j < 1$ во всех уравнениях системы (т.е. диапазон изменения значений несущественных переменных недостаточен для того, чтобы влиять на выполнение уравнений системы).

2. Для оставшихся (существенных) переменных находятся их базовые значения в соответствующих уравнениях. Базовым значением существенной переменной X_i называется величина \hat{X}_i , равная минимуму отношений K_j/a_{ij} для всех уравнений, содержащих X_i . Значение \hat{X}_i считается *принадлежащим* уравнению j , если $\hat{X}_i = K_j/a_{ij}$, т.е. минимум достигается на данном уравнении j . Базовое значение может принадлежать нескольким уравнениям.

3. Строится таблица покрытий T . Столбцы таблицы соответствуют переменным X_i , строки – номерам уравнений системы. Если значение \hat{X}_i *принадлежит* уравнению j , то в ячейке (i, j) таблицы T ставится 1, иначе – 0. При этом считается, что столбец принадлежит *ядру* таблицы покрытий, если существует строка, покрываемая только им. Такой столбец входит в любое покрытие. Не каждая таблица имеет ядро, но если оно выделено, то таблицу можно сократить, вычеркнув все принадлежащие ядру столбцы и покрываемые ими строки.

4. Находится множество безыбыточных покрытий. Избыточной называют строку t_j , которую можно удалить из таблицы без изменения множества возможных покрытий. Строка является избыточной, если любое покрытие строк таблицы T , отличных от t_j , покрывает также и строку t_j . Это имеет место, если

строка t_j мажорирует некоторую другую строку t_j , т.е. t_j содержит единицы во всех столбцах таблицы T , в которых содержит единицы строка t_j .

Оставшиеся после удаления избыточных строк ненулевые столбцы образуют множество безызбыточных решений, которые соответствуют минимальным наборам приращений кластеров $D_q = \{\Delta X_j\}$, обеспечивающим переход системы в целевое состояние.

Задача *второго этапа* решается следующим образом. Каждый кластер X_j , входящий в D_q , представляется в виде НКМ, описывающей влияние приращений входящих в него управляющих факторов U_i^j на приращение всего кластера ΔX_j . С учетом (14)–(16) значения ΔU_i^j должны удовлетворять уравнениям

$$(19) \sum_i b_{ij} \Delta U_i^j = \Delta X_j, \quad i=1, \dots, N; \quad q=1, \dots, M,$$

где M – количество кластеров в минимальном наборе; N – количество $U_i^j \in X_j$; b_{ij} – веса влияния ΔU_i^j на ΔX_j . При этом, поскольку кластеры должны различаться хотя бы одной парой U_i^j , то всегда $N > M$. На приращения ΔU_i^j накладываются ограничения

$$(20) \Delta \tilde{U}_i^j \leq \Delta U_i^j \leq \Delta \hat{U}_i^j,$$

где $\Delta \tilde{U}_i^j$; $\Delta \hat{U}_i^j$ – минимально и максимально возможное приращение U_i^j .

После перехода к переменным $\Delta \dot{U}_i^j = \Delta U_i^j - \Delta \tilde{U}_i^j$ выражения (19) и (20) примут вид

$$(21) \sum_i b_{ij} \Delta \dot{U}_i^j = \Delta \dot{X}_j, \quad \text{где } \Delta \dot{X}_j = \Delta X_j - \sum_i b_{ij} \Delta \tilde{U}_i^j,$$

$$(22) \Delta \dot{U}_i^j \leq \Delta \hat{U}_i^j - \Delta \tilde{U}_i^j; \quad \Delta \dot{U}_i^j \geq 0.$$

Для каждого набора D_q , подбирается такая совокупность приращений управляющих факторов ΔU_i^j , входящих в кластеры X_j , которая удовлетворяет (21)–(22) и обеспечивает минимум «стоимости» P_{D_q} реализации приращения набора D_q :

$$(23) P_{D_q} = \sum_i P_{\Delta U_i} \cdot \Delta U_i \rightarrow \min,$$

где $P_{\Delta U_i}$ – «стоимость» приращения управляющего фактора U_i (суммирование ведется по всем U_i , независимо от того, в какой кластер X_j набора D_q они входят).

Таким образом, для реализации второго этапа СУР получаем задачу линейного программирования (ЗЛП) (21)–(23), которая решается симплекс-методом. Если каждый управляющий фактор U_i^j входит лишь в один кластер X_j , решение ЗЛП упрощается. В этом случае с целью удовлетворения условия (23) при решении уравнений (21) для каждого U_i^j вычисляется величина $c_{ij}=b_{ij}/P_{\Delta U_i^j}$. Затем U_i^j упорядочиваются по убыванию значений c_{ij} и решение уравнений (21) обеспечивается последовательным выбором максимально возможных значений $\Delta \tilde{U}_i^j$ в упорядоченной последовательности до получения значения $\Delta \bar{X}_j$, после чего оставшиеся значения ΔU_i^j принимаются равными нулю. Найденные значения ΔU_i^j обеспечивают минимум «стоимости» P_{D_q} для каждого из наборов D_q . В качестве управляющего решения (УР) выбирается D_q , имеющий минимальную «стоимость» реализации:

$$(24) \text{ УР} = D_Q, \text{ где } Q = \arg \min_q (P_{D_q}).$$

В общем случае при использовании в НКМ не аддитивной свертки методика СУР сводится к обеспечению минимума разницы между заданным ЛПР значением \bar{K}_0 и текущей величиной данного целевого концепта \tilde{K}_0 :

$$\Delta K_0(\Delta U_i) = |\tilde{K}_0(t) - \bar{K}_0| \rightarrow \min.$$

С учетом (12):

$$(25) \Delta K_0(\Delta U_i) = |K_0(t-1) + H(\Delta U_i, STS, t) - \bar{K}_0| \rightarrow \min.$$

Остаются в силе ограничения (20), которые совместно с (25) образуют задачу условной оптимизации на пространстве нечетких управляющих воздействий ΔU_i . Ее решение целесообразно осуществлять методом прямого поиска (например, методом Хука–Дживса), поскольку применение градиентных методов затруднено из-за необходимости вычисления производных функции $H(\Delta U_i, STS, t)$. В качестве начальной выбирается точка с координатами $(\Delta \tilde{U}_i^j)$. Если при уменьшении ΔU_i уменьшения $\Delta K_0(\Delta U_i)$ не происходит, то это означает, что решения задачи нет.

В случае, когда функция $\Delta K_0(\Delta U_i)$ оказывается не унимодальной (т.е. достигает целевого состояния при разных значени-

ях ΔU_i), необходимо оценить «стоимость» каждого решения и выбрать решение с минимальной «стоимостью».

8. Расчетный пример

В качестве примера рассмотрим процесс СУР, направленных на усиление безопасности информационных систем (ИС). Пусть необходимо вывести основные сервисы информационной безопасности (ИБ), такие как конфиденциальность (K_1), целостность (K_2) и доступность (K_3), на уровень, характеризуемый лингвистическим значением «Выше среднего» (BC^+ по шкале (4)). Предположим, что для достижения поставленной цели ЛПР имеет возможность усилить различные наборы механизмов защиты информации (ЗИ). В качестве таковых могут, например, выступать: набор средств правовой защиты (X_1), набор организационно-технических мер (X_2), набор программно-аппаратных (в том числе криптографических) мер ЗИ (X_3), набор инженерно-технических мер ЗИ (X_4). Допустим в результате построения НКМ были определены веса влияния X_i на K_j в соответствии с формулами (15)–(16) (таблица 1). В этой же таблице приведены начальные и целевые значения сервисов ИБ, а также величина приращения (сдвига трапецидальных НЧ из терм-множества (5)), необходимых для достижения целевого значения.

Таблица 1.

	ΔX_1	ΔX_2	ΔX_3	ΔX_4	$K_j^{\text{нач}}$	$K_j^{\text{целевое}}$	ΔK_j
K_1	0,35	0,60	0,26	0,76	НС ⁺	BC ⁺	0,40
K_2	0,15	0,26	0,80	0,60	C ⁺	BC ⁺	0,20
K_3	0,15	0,30	0,80	0,60	C ⁺	BC ⁺	0,20

Соответствующая система уравнений (18) будет иметь вид:

$$(26) \begin{cases} 0,35\Delta X_1 \vee 0,60\Delta X_2 \vee 0,26\Delta X_3 \vee 0,76\Delta X_4 = 0,40, \\ 0,15\Delta X_1 \vee 0,26\Delta X_2 \vee 0,80\Delta X_3 \vee 0,60\Delta X_4 = 0,20, \\ 0,15\Delta X_1 \vee 0,30\Delta X_2 \vee 0,80\Delta X_3 \vee 0,60\Delta X_4 = 0,20. \end{cases}$$

Очевидно, что приращение кластера X_1 несущественно. Остальные переменные ($\Delta X_2, \Delta X_3, \Delta X_4$) являются существенными и

имеют следующие базовые значения (в скобках указаны номера уравнений, которым эти значения принадлежат):

$$\Delta\hat{X}_2=2/3 (1; 3); \Delta\hat{X}_3=1/4 (2; 3); \Delta\hat{X}_4=1/3 (2; 3).$$

Соответствующая таблица покрытий имеет следующий вид (таблица 2):

Таблица 2.

	ΔX_2	ΔX_3	ΔX_4
K_1	1		
K_2		1	1
K_3	1	1	1

Строка K_3 мажорирует строки K_1 и K_2 . Следовательно, она может быть исключена из рассмотрения. В результате после первого этапа процедуры СУР получаются два минимальных решения:

$$D_1 = \{\Delta\hat{X}_2; \Delta\hat{X}_3\} \text{ и } D_2 = \{\Delta\hat{X}_2; \Delta\hat{X}_4\}.$$

На втором этапе рассмотрим более подробно ΔX_j , входящие в наборы D_1 и D_2 . Допустим известно, что каждое ΔX_j аддитивно зависит от приращений входящих в его состав механизмов ЗИ (ΔU_i) и методом нестрогого ранжирования определены веса данного влияния (веса Фишберна). Предположим, что в результате получены следующие зависимости:

$$\Delta X_2 = (1/3)\Delta U_1 + (1/3)\Delta U_2 + (1/3)\Delta U_3,$$

$$\Delta X_3 = (2/4)\Delta U_4 + (1/4)\Delta U_5 + (1/4)\Delta U_6,$$

$$\Delta X_4 = (1/3)\Delta U_7 + (1/3)\Delta U_8 + (1/3)\Delta U_9,$$

где под ΔU_i могут пониматься, например, следующие механизмы ЗИ:

ΔU_1 – разграничения доступа к информации (0,4 у.е.; $\Delta U_1 \leq 0,4$);

ΔU_2 – разработка и внедрение инструкций по работе с информацией ограниченного доступа (ИОД) (0,2 у.е.; $\Delta U_2 \leq 0,8$);

ΔU_3 – увеличение технических параметров вычислительных устройств (1,0 у.е.; $\Delta U_3 \leq 0,9$);

ΔU_4 – усиление криптографических средств ЗИ (1,0 у.е.; $\Delta U_4 \leq 0,4$);

ΔU_5 – усиление средств аутентификации пользователей (0,4 у.е.; $\Delta U_5 \leq 0,4$);

ΔU_6 – усиление средств антивирусной защиты (0,6 у.е.; $\Delta U_6 \leq 0,2$);

ΔU_7 – улучшение характеристик источников бесперебойного питания (1,0 у.е.; $\Delta U_7 \leq 0,6$);

ΔU_8 – усиление инженерной защиты помещений (0,8 у.е.; $\Delta U_8 \leq 0,6$);

ΔU_9 – улучшение характеристик коммуникационного оборудования (0,4 у.е.; $\Delta U_9 \leq 0,4$).

В скобках указана относительная стоимость приращения ΔU_i на 0,1 единицы и ограничения по возможности таких приращений.

Поскольку управляющие воздействия ΔU_i в данном примере образуют непересекающиеся множества, при СУР каждый из наборов ΔX_j можно рассматривать независимо.

Для каждого ΔU_i , имеющего стоимость приращения $P_{\Delta U_i}$ и влияющего на ΔX_j с весом b_{ij} , вычислим величину $c_{ij} = \frac{b_{ij}}{P_{\Delta U_i}}$:

$$c_{12} = \left(\frac{1}{3}\right) : 0,4 = \frac{5}{6}; \quad c_{22} = \left(\frac{1}{3}\right) : 0,2 = \frac{10}{6}; \quad c_{32} = \left(\frac{1}{3}\right) : 1,0 = \frac{2}{6};$$

$$c_{43} = \left(\frac{2}{4}\right) : 1,0 = \frac{4}{8} = \frac{12}{24}; \quad c_{53} = \left(\frac{1}{4}\right) : 0,4 = \frac{15}{24}; \quad c_{63} = \left(\frac{1}{4}\right) : 0,6 = \frac{10}{24};$$

$$c_{74} = \left(\frac{1}{3}\right) : 1,0 = \frac{10}{30}; \quad c_{84} = \left(\frac{1}{3}\right) : 0,8 = \frac{8}{30}; \quad c_{94} = \left(\frac{1}{3}\right) : 0,4 = \frac{4}{30}.$$

Упорядочим c_{ij} в порядке убывания:

для ΔX_2 : $c_{22} > c_{12} > c_{32} \Rightarrow$ порядок применения ΔU_i с целью обеспечения приращения $\Delta \widehat{X}_2 = 2/3$: $\{\Delta U_2, \Delta U_1, \Delta U_3\}$;

для ΔX_3 : $c_{53} > c_{43} > c_{63} \Rightarrow$ порядок применения ΔU_i с целью обеспечения приращения $\Delta \widehat{X}_3 = 1/4$: $\{\Delta U_5, \Delta U_4, \Delta U_6\}$;

для ΔX_4 : $c_{74} > c_{84} > c_{94} \Rightarrow$ порядок применения ΔU_i с целью обеспечения приращения $\Delta \widehat{X}_4 = 1/3$: $\{\Delta U_7, \Delta U_8, \Delta U_9\}$.

Таким образом, для обеспечения необходимых приращений $\Delta \widehat{X}_j$ получаем следующие решения:

$$\Delta \widehat{X}_2 = \frac{2}{3} = \frac{1}{3} 0,8(U_2) + \frac{1}{3} 0,4(U_1) + \frac{1}{3} 0,8(U_3),$$

$$\Delta \widehat{X}_3 = \frac{1}{4} = \frac{1}{4} 0,4(U_5) + \frac{2}{4} 0,3(U_4) + \frac{1}{4} 0,0(U_6),$$

$$\Delta \widehat{X}_4 = \frac{1}{3} = \frac{1}{3} 0,6(U_7) + \frac{1}{3} 0,4(U_8) + \frac{1}{3} 0,0(U_9).$$

Стоимость приращения $\Delta\widehat{X}_3$ составляет
 $P_{\Delta\widehat{X}_3} = 0,4P_{\Delta U_5} + 0,3P_{\Delta U_4} = 0,4 \cdot 0,4 + 0,3 \cdot 1,0 = 0,46$.

Стоимость приращения $\Delta\widehat{X}_4$ составляет
 $P_{\Delta\widehat{X}_4} = 0,6P_{\Delta U_7} + 0,4P_{\Delta U_8} = 0,6 \cdot 1,0 + 0,4 \cdot 0,8 = 0,92$.

Расчеты показывают, что стоимость минимального решения $D_1 = \{\Delta\widehat{X}_2; \Delta\widehat{X}_3\}$ меньше стоимости решения $D_2 = \{\Delta\widehat{X}_2; \Delta\widehat{X}_4\}$. Следовательно, первое минимальное решение является более предпочтительным.

Таким образом, в состав УР в рассмотренном примере войдут приращения следующих механизмов ЗИ: U_1 (разграничения доступа к информации) на 0,4; U_2 (разработка и внедрение инструкций по работе с ИОД) на 0,8; U_3 (увеличение технических параметров вычислительных устройств) на 0,8; U_4 (усиление криптографических средств ЗИ) на 0,3; U_5 (усиление средств аутентификации пользователей) на 0,4.

Заметим, что если исходные значения параметров заданы лингвистически (в терминах классификатора (4)), то приращение их функций принадлежности на 0,2 означает переход к следующему значению терм-множества ЛП «Уровень фактора». Например, от значения $НС^+$ к значению $С^+$.

9. Выводы

Предложенный подход к исследованию и управлению СТС позволяет учесть все их основные особенности. Для оценки значений антропогенных факторов предложено использовать НКМ, в перечень концептов которой входят основные свойства, влияющие на поведение человека в составе СТС. При переходе от вербального описания состояния концептов к количественному их определению в виде нечеткого числа (НЧ) использован 9-уровневый классификатор, представляющий собой «серую» оппозиционную шкалу, которая более достоверно отражает имеющуюся неопределенность, поскольку в такой шкале переход от свойства к его отрицанию осуществляется постепенно, а не ступенчато, как при обычно применяемом в нечетком когнитивном моделировании интервальном шкалировании. В рамках концепции введена количественная мера схожести двух нечет-

ких состояний, а интенсивность нечетких связей в НКМ в случае, когда значение фактора-следствия или его приращения является результатом совместного влияния нескольких факторов, предложено определять с помощью обобщенных весов Фишберна. Все это, в свою очередь, позволило разработать методику синтеза управляющих решений с минимальной «стоимостью», выводящих СТС на необходимый целевой уровень функционирования.

Литература

1. АВДЕЕВА З.К., КОВРИГА С.В., МАКАРЕНКО Д.И. *Когнитивное моделирование для решения задач управления слабоструктурированными системами (ситуациями)* // Когнитивный анализ и управление развитием ситуаций. Труды 6-й Межд. конф. / Под ред. З.К. Авдеевой, С.В. Ковриги. М.: Институт проблем управления РАН, 2006. – С. 41–54.
2. АВДЕЕВА З.К., МАКСИМОВ В.И., РАБИНОВИЧ В.М. *Интегрированная система «КУРС» для когнитивного управления развитием ситуаций* // Тр. ИПУ РАН. – Т. XIV. – М.: ИПУ РАН, 2001. – С. 89–114.
3. АЖМУХАМЕДОВ И.М. *Анализ и управление комплексной безопасностью на основе когнитивного моделирования* // Управление большими системами. – 2010. – №29. – С. 5–15.
4. АСАНОВ А.А., ЛАРИЧЕВ О.И. *Влияние надежности человеческой информации на результаты применения методов принятия решений* // Автоматика и телемеханика. – 1999. – №5. – С. 20–31.
5. ГОРЕЛОВА Г.В., РАДЧЕНКО С.А. *Программная система когнитивного моделирования социотехнических систем* // Изв. ТРТУ. Тем.вып. «Актуальные проблемы экономики, менеджмента и права». – 2004. – №4(39). – С. 218–227.
6. ДИЕВ В.С. *Нечеткость в принятии решений* // Философия науки. – 1998. – №1 (4). – С. 45–52.
7. ЗАБОЛОТСКИЙ М.А., ПОЛЯКОВА И.А., ТИХОНИН А.В. *Применение когнитивного моделирования в управлении ка-*

- чеством подготовки специалистов // Управление большими системами. – 2007. – №16. – С. 91–98.
8. КОВРИГА С.В., МАКСИМОВ В.И. *Применение структурно-целевого анализа развития социально-экономических ситуаций* // Проблемы управления. – 2005. – №3. – С. 39–43.
 9. КОРНОУШЕНКО Е.К., МАКСИМОВ В.И. *Управление ситуацией с использованием структурных свойств ее когнитивной карты* // Тр. ИПУ РАН. – Т. XI. – М.: ИПУ РАН, 2000. – С. 85–90.
 10. КОРОСТЕЛЕВ Д.А., ЛАГЕРЕВ Д.Г., ПОДВЕСОВСКИЙ А.Г. *Система поддержки принятия решений на основе нечетких когнитивных моделей «ИГЛА»* // Труды 11-й нац. конф. по искусственному интеллекту с международным участием КИИ-2008.– Т.3. – М., 2008. – С. 327–329.
 11. КУЛИНИЧ А.А. *Когнитивная система поддержки принятия решений «Канва»* // Программные продукты и системы. – 2002. – №3. – С. 25–28.
 12. КУЛИНИЧ А.А., МАКСИМОВ В.И. *Система концептуального моделирования социально-политических ситуаций «Компас»* // Сб. докл. «Современные технологии управления». Науч.-практ. семинар «Современные технологии управления для администрации городов и регионов». – М., 1998. – С. 115–123.
 13. ЛАРИЧЕВ О.И., МОШКОВИЧ Е.М. *Качественные методы принятия решений. Вербальный анализ решения*. – М.: Наука, 2006. – 208 с.
 14. МАКСИМОВ В.И. *Структурно-целевой анализ развития социально-экономических ситуаций* // Проблемы управления. – 2005. – №3. – С. 30–38.
 15. МАКСИМОВ В.И., ГРИГОРЯН А.К., КОРНОУШЕНКО Е.К. *Программный комплекс «Ситуация» для моделирования и решения слабоформализованных проблем* // Междунар. конф. по проблемам управления. – Т.2.– М., 1999. – С. 58–65.
 16. МАКСИМОВ В.И., КОРНОУШЕНКО Е.К. *Аналитические основы применения когнитивного подхода при решении слабоструктурированных задач* // Труды ИПУ РАН. – Т.2. – М., 1999. – С. 95–109.

17. МАРКОВСКИЙ А.В. *О решении нечетких уравнений типа «max-product» в обратных задачах управления и принятия решений* // Автоматика и телемеханика. – 2004. – №9. – С. 149–159.
18. ОСТАПЕНКО Г.А., МЕШКОВА Е.А. *Информационные операции и атаки в социотехнических системах* / Под редакцией Борисова В.И. – М: Горячая линия-Телеком, 2006. – 184 с.
19. ПОСПЕЛОВ Д.С. *«Серые» и/или «черно-белые» шкалы* // Прикладная эргономика. Специальный выпуск «Рефлективные процессы». – 1994. – №1. – С. 15–21.
20. ПРОТАЛИНСКИЙ О.М. *Применение методов искусственного интеллекта при автоматизации технологических процессов.* – Астрахань: Изд. АГТУ, 2004. – 184 с.
21. ПРОТАЛИНСКИЙ О.М., АЖМУХАМЕДОВ И.М. *Системный анализ и моделирование слабо структурированных и плохо формализуемых процессов в социотехнических системах* // «Инженерный вестник Дона»: электронный научно-инновационный журнал, 3/2012. – [Электронный ресурс] URL: <http://www.ivdon.ru/magazine/latest/n3y2012/910> (дата обращения 27.03.2013).
22. РОБЕРТС Ф.С. *Дискретные математические модели с приложениями к социальным, биологическим и экономическим задачам.* – М.: Наука, 1986. – 497 с.
23. ЧИМШИР В.И. *Проектное управление сложными социотехническими системами на основе рефлексии* // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. – 2011. – №3/2(51). – С. 25–28.
24. ЯРУШКИНА Н.Г. *Нечеткие гибридные системы. Теория и практика* – М.: Физматлит, 2007. – 208 с.
25. CHAULA J.A. *A Socio-Technical Analysis of Information Systems Security Assurance A Case Study for Effective Assurance* // Department of computer and systems sciences Stockholm University/KTH Ph.D. theses: No 06-016. – [Электронный ресурс] URL: www.dsv.su.se/eng/publikationer/index.html (дата обращения 27.03.2013).

26. FREY W. *Socio-Technical Systems in Professional Decision Making*. – [Электронный ресурс] URL: <http://cnx.org/content/m14025/latest> (дата обращения 27.03.2013).
27. GREEN D. *Socio-technical Systems in Global Markets*. – [Электронный ресурс] URL: <http://nuleadership.wordpress.com/2010/08/23/socio-technical-systems-in-global-markets> (дата обращения 27.03.2013.)
28. TRIST E.L. *The evolution of socio-technical systems: A conceptual framework and an action research program* // Ontario Quality of Working Life Center, Occasional Paper No. 2. – URL: <http://EzineArticles.com/239366> (дата обращения 27.03.2013).

CONTROL OF BADLY FORMALIZABLE AND POORLY STRUCTURED SOCIAL ENGINEERING SYSTEMS

Iskandar Azmuhamedov, Astrakhan State Technical University, Astrakhan, Cand.Sc., assistant professor (aim_agtu@mail.ru).

***Abstract:** We suggest a methodology for fuzzy cognitive modeling in badly formalizable social engineering systems (SES). We introduce the qualitative similarity measure for a pair of fuzzy states, and suggest using generalized Fishburn weights to determine the intensity of fuzzy links in a system. Also, we develop a technique for the synthesis of minimum cost management solutions, which bring the system to the desired target level of functioning.*

Keywords: badly formalized social engineering system, fuzzy cognitive modeling, similarity index, synthesis of control solutions.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии М. В. Губко

УДК 021.8 + 025.1

ББК 78.34

ТРИАДНО-СЕТЕВЫЕ ДОРОЖНЫЕ КАРТЫ РАЗВИТИЯ СИСТЕМ

Юдицкий С. А.¹

(ФГБУН Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

Рассмотрена графодинамика дорожных карт процессов развития систем различного назначения. Введена базовая модель «индикаторная сеть» и на ее основе построена комплексная модель «триадно-сетевая дорожная карта», отображающая динамику целей, действий и показателей на заданном временном горизонте развития. Предложен интерактивный алгоритм имитационного моделирования развития с формированием последовательности периодов стабильности, разделенных критическими точками, в которых осуществляется преобразование дорожной карты.

Ключевые слова: цели, действия, показатели, триадно-сетевая дорожная карта, двудольный граф, индикаторное выражение, период стабильности, критическая точка.

1. Введение

Дорожные карты представляют собой известный наглядный способ графической интерпретации процессов развития систем на долгосрочную перспективу, отражающий различные пути достижения системой экспертно заданного конечного состояния. Разработка дорожных карт является в основном творческим процессом, их согласование и периодическую корректировку рекомендуется проводить в форме экспертных семинаров.

¹ Семен Абрамович Юдицкий, доктор технических наук, профессор, главный научный сотрудник Института проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН (yuseab@yandex.ru).

В этой связи несомненный эффект дала бы алгоритмизация и последующая компьютеризация процесса построения и анализа дорожной карты с применением интерактивного имитационного моделирования на всех этапах ее жизненного цикла. Однако эта задача, по нашим данным, пока формально не поставлена и не решена. Предлагаемую работу следует рассматривать как попытку восполнить имеющийся пробел на основе «триадного моделирования» [5].

Суть триадного моделирования заключается в следующем. Ключевыми параметрами процесса развития любой системы являются: цели, к достижению которых стремится развивающаяся система; действия, направленные на достижение целей; показатели, определяющие состояние системы. Параметры отображаются лингвистическо-балльными переменными, характеризующимися словесной и количественной оценкой (в виде числа баллов). Цели, действия и показатели образуют три взаимодействующих уровня модели развития, где значения переменных, связи между ними, а также связи между уровнями и связи системы с внешней средой могут изменяться при развитии системы. Каждый уровень моделируется так называемой индикаторной сетью [6] – двудольным графом, дополненным продукционными выражениями типа «ЕСЛИ – ТО» на базе логических формул (индикаторными выражениями). Совокупность трех упомянутых уровней образует динамическую модель «Триадно-сетевая дорожная карта (ТДК)». Проводя имитационное моделирование ТДК на заданном временном интервале, получаем описание динамики целей, действий и показателей в дискретном времени.

Анализируемый временной горизонт процесса развития системы (горизонт прогнозирования) состоит из $n \geq 1$ «участков стабильности», на которых изменяются только значения параметров, но остаются неизменными их состав и взаимосвязи. Другими словами, участок характеризуется фиксированной ТДК. Участки стабильности разделены критическими точками, определяемыми как моменты появления «предупреждения» (например, выход показателя за пределы допустимого диапазона значений, недостижение цели за нормативное время, «зависание» процесса из-за недостаточности ресурсов или ошибочной по-

следовательности действий и т.д.). В критических точках выполняется преобразование ТДК – изменение состава и/или взаимосвязей параметров путем операций над графами и корректировки индикаторных выражений.

Каждому участку стабильности на горизонте моделирования ставится в соответствие ТДК. При этом начальную карту задает лицо, проводящее моделирование (ЛПМ). В ходе имитационного моделирования определяются критические точки, в которых ЛПМ трансформирует ТДК предыдущего участка в ТДК последующего участка стабильности. Таким образом, процесс развития в общем случае характеризуется $(n - 1)$ -кратным изменением дорожной карты. Изменение по усмотрению ЛПМ производится на всех трех или лишь на некоторых уровнях карты и носит выборочный характер: выделяется фрагмент графового описания уровня, выделенный фрагмент «вырезается» и замещается другим фрагментом при сохранении преемственности в отношении остальной части графа уровня. Эта процедура подобна операции в медицине и потому названа «графохирургической» операцией [5].

Триадное моделирование является интерактивным в том смысле, что оно выполняется в форме диалога между компьютером и ЛПМ: компьютер отслеживает функционирование (развитие) системы на участке стабильности и фиксирует появление критической точки («предугрозы»), ЛПМ на основе полученной информации принимает решение и корректирует ТДК.

Статья имеет следующую структуру. В разделе 2 приводится определение и пример индикаторной сети, в разделе 3 рассмотрена ТДК на основе индикаторных сетей. В разделе 4 дано описание алгоритма интерактивного моделирования процесса развития системы на заданном временном горизонте, порождающего последовательность ТДК.

2. Индикаторные сети

Определение индикаторной сети базируется на следующих понятиях.

1. Двудольный граф как статическая основа модели:

$$G = \langle P, T, \alpha, \alpha^* \rangle,$$

где $P = \{p_i, i = 1, \dots, m\}$ – множество вершин-позиций;
 $T = \{t_i, i = 1, \dots, n\}$ – множество вершин-переходов;
 $\alpha: T \rightarrow 2^P$,
 $\alpha^*: T \rightarrow 2^P$ – функции, задающие соответственно подмножества входных и выходных позиций перехода; 2^P – множество всех подмножеств P .

Пример двудольного графа дан на рис. 1, где x_1, x_2 – внешние переменные (имеют только выходные дуги); p_1, \dots, p_4 – внутренние переменные (имеют входные и выходные дуги).

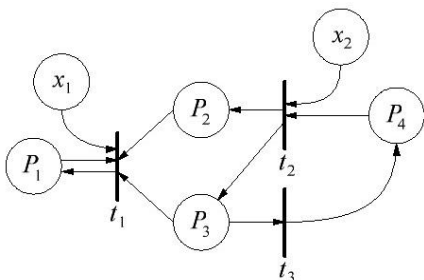


Рис. 1. Пример индикаторной сети: статическая модель

2. Индикатором сравнения будем называть булеву переменную вида $y = (z_1 \# z_2)$, где z_1, z_2 – переменные, принимающие численные значения (z_2 может быть константой); $\#$ – знак бинарного отношения, принадлежащего множеству $\{=, \neq, >, \geq, <, \leq\}$. Индикатор принимает значение $y = 1$, если выполняется отношение $\#$, и $y = 0$, если не выполняется.

3. Индикаторной логической формулой (ИЛФ) назовем формальное представление, полученное путем применения конечное число раз к индикаторам сравнения логических операций дизъюнкции, конъюнкции, отрицания ($\vee, \wedge, -$), а также, возможно, кванторов существования и всеобщности. Примеры ИЛФ для числовых переменных, зависящих от времени τ , даны в таблице 1.

Таблица 1. Пример индикаторной сети: динамическая модель

	$F(t_i)$
t_1	$(P_1(\tau) > 1) \wedge (P_2(\tau) > 2) \wedge (P_3(\tau) \geq 3) \wedge (x_1(\tau) > 0) \wedge (x_1(\tau) \leq 10) \rightarrow (P_1(\tau + 1) = P_1(\tau) + 1)$
t_2	$(P_4(\tau) \geq 2) \wedge (P_4(\tau) < 8) \wedge ((x_2(\tau) = 1) \vee (x_2(\tau) = 5)) \rightarrow (P_2(\tau + 1) = P_2(\tau) - 1) \wedge (P_3(\tau + 1) = P_3(\tau) - 1)$
t_3	$(P_3(\tau) \geq 3) \rightarrow (P_4(\tau + 1) = P_4(\tau) + 2)$

4. *Индикаторным выражением* будем называть продукцию (нотацию ЕСЛИ–ТО) вида F_i : $ИЛФ_{i1}(\tau) \rightarrow ИЛФ_{i2}(\tau + 1)$, отображающую динамику перехода двудольного графа (таблица 1). Набор индикаторных выражений для всех переходов двудольного графа представляет собой динамическую модель системы.

Таблица 2. Пример индикаторной сети: лента поведения

τ	0	1	2	3	4	5
x_1	5	4	4	5	5	5
x_2	5	5	5	5	5	5
P_1	3	4	5	5	5	5
P_2	4	3	2	1	0	0
P_3	4	3	2	1	0	0
P_4	3	5	7	7	7	7

5. *Индикаторная сеть* – это тройка:

$$IS = \langle G, F, \beta \rangle,$$

где G – двудольный граф, $F = \{F_i, i = 1, \dots, e\}$ – множество индикаторных выражений; $\beta: T \rightarrow F$ – функция, задающая пометку переходов графа индикаторными выражениями.

6. Динамика индикаторной сети отображается *лентой поведения* (таблица 2), которая строится с учетом ограничений на порядок срабатывания переходов двудольного графа (например, в момент τ может сработать не более одного перехода, и для любого перехода известно подмножество переходов, которые могут сработать в следующий момент $\tau + 1$). Процедура построения ленты поведения в общем случае включает следующие шаги:

- для начального момента $\tau = 0$ задаем значения всех переменных;
- для каждого последующего момента $\tau > 0$ для каждого перехода из вышеуказанного подмножества вычисляем значение ИЛФ(τ) в левой части помечающего его индикаторного выражения;
- если $\text{ИЛФ}(\tau) = 1$, то вычисляем значения переменных, на которых в правой части выражения $\text{ИЛФ}(\tau + 1) = 1$, и помещаем эти значения в столбец $\tau + 1$ ленты поведения (во избежание противоречивости левые части продукций для переходов, входящих в одно и то же подмножество, должны быть попарно ортогональны). Для остальных переменных переносим их значения из столбца τ в столбец $\tau + 1$;
- ленту обрываем при одинаковом заполнении соседних столбцов (не выполнено условие срабатывания ни для одного перехода) или если в каком-нибудь столбце заданное число параметров вышло за пределы допустимого диапазона значений.

На индикаторных сетях очевидным образом реализуется проверка позиции на ноль. Это доказывает эквивалентность IS и машины Тьюринга [4], т.е. возможность моделирования индикаторной сетью любой дискретной системы. Представление типовых фрагментов ряда известных расширений сети Петри [3, 4] индикаторными выражениями показано в таблице 3.

Таблица 3. Представление расширений сетей Петри индикаторными выражениями

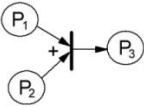
Тип перехода в расширении сети Петри	Графическое изображение	Индикаторное выражение
Исключающее ИЛИ		$((P_1(\tau) > 0) \wedge (P_2(\tau) = 0) \rightarrow (P_1(\tau + 1) = P_1(\tau) - 1) \wedge (P_3(\tau + 1) = P_3(\tau) + 1)) \vee ((P_1(\tau) = 0) \wedge (P_2(\tau) > 0) \rightarrow (P_2(\tau + 1) = P_2(\tau) - 1) \wedge (P_3(\tau + 1) = P_3(\tau) + 1))$

Таблица 3 (продолжение)

Тип перехода в расширении сети Петри	Графическое изображение	Индикаторное выражение
Переключатель		$((P_1(\tau) > 0) \wedge (P_2(\tau) = 0) \rightarrow (P_3(\tau + 1) = P_1(\tau) \wedge (P_4(\tau + 1) = 0)) \vee ((P_1(\tau) > 0) \wedge (P_2(\tau) = 1) \rightarrow (P_3(\tau + 1) = 0) \wedge (P_4(\tau + 1) = P_1(\tau)))$
Переход с запрещающей дугой		$(P_1(\tau) > 0) \wedge (P_2(\tau) = 0) \rightarrow (P_1(\tau + 1) = P_1(\tau) - 1) \wedge (P_3(\tau + 1) = P_3(\tau) + 1)$
Переход временной сети Петри		$(P_1(\tau) > 0) \wedge (\tau > a_{\min}) \wedge (\tau < a_{\max}) \rightarrow (P_1(\tau + 1) = P_1(\tau) - 1) \wedge (P_2(\tau + 1) = P_2(\tau) + 1),$ $a_{\min}, a_{\max} - \text{константы}$

3. Триадно-сетевая дорожная карта

Как уже говорилось, ТДК состоит из трех взаимосвязанных индикаторных сетей (графов), позиции которых сопоставлены соответственно целям c_i , действиям d_i , показателям p_i . Воздействие внешней среды на графы обозначается переменными v_i . Пример ТДК дан на рис. 2, 3, 4. В формулах (1), (2), (3) показаны индикаторные выражения, моделирующие динамику срабатывания переходов каждого двудольного графа. Цели и действия характеризуются двоичными (булевыми) переменными, принимающими единичное значение, если цель достигнута, действие выполняется, и нулевое значение – в противном случае. При достижении каждой цели не должно быть превышено заданное нормативное время. Показателям и внешним воздействиям в общем случае сопоставляются числовые переменные с указанием диапазона допустимых значений.

На ТДК накладываются ограничения:

- граф целей не содержит циклов;

– если в графе показателей в какую-нибудь позицию p_i ведет более одной дуги, то знаки $+$, $-$ в индикаторах $(p_i(\tau + 1) = p_i(\tau) \pm e)$, где e – константа, содержащихся в правой части соответствующих индикаторных выражений, совпадают.

При введенных ограничениях граф целей, получив воздействие от графа действий, реализует цепочку переходов, завершающуюся равновесным состоянием, в котором не активирован ни один переход. В графе показателей при выполнении аналогичного процесса, инициированного графом действий, каждый показатель p_i либо монотонно возрастает, либо монотонно убывает.

Критическим будем считать такое состояние, в котором имеет место $p_i > p_{i,\max}$ (при возрастании) или $p_i < p_{i,\min}$ (при убывании), где $[p_{i,\min}, p_{i,\max}]$ – диапазон допустимых значений показателя. В критическом состоянии графа показателей протекающий в нем процесс прерывается. При установлении равновесия в графе целей или/и критического состояния в графе показателей формируется сигнал обратной связи на граф действий – изменяется значение его соответствующей входной позиции. Одинаково обозначенные позиции, принадлежащие разным графам, интерпретируются как экземпляры (копии) одной и той же переменной. Изменение значения одной из этих позиций в тот же момент передается в остальные.

Проиллюстрируем вышесказанное на примере рис. 2, 3, 4. В результате срабатывания перехода t_1 в графе действий (рис. 3) его выходная позиция p_1 , а тем самым одноименная позиция графа показателей (рис. 4), получает приращение $p_1 = 2$. Примем, что показатели оцениваются по десятибалльной шкале. В графе показателей иницируется переходной процесс, завершающийся критическим состоянием в момент $\tau = 8$ при значении $p_3 = 11$, $p_4 = 12$ (переменные p_3 , p_4 превысили верхнюю границу допустимого десятибалльного интервала – таблица 4). Позиция p_3 является входной для перехода t_8 в графе действий. В результате срабатывания перехода t_2 в графе действий принимают единичное значение оба экземпляра позиции c_1 – в графах действий и целей. В графе целей (рис. 2) происходит переключение $c_4 = 1$ с сохранением $c_1 = 1$ и установлением равновесия. Позиция c_4 в графе действий является входной для переходов

t_4, t_5 . Далее функционирование ТДК осуществляется аналогичным образом. При срабатывании перехода t_8 в графе действий учитывается обратная связь как от графа целей, так и от графа показателей.

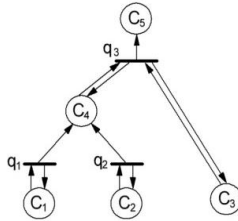


Рис. 2. Пример триадно-сетевой дорожной карты:
граф целей

$$\Phi(q_1):(C_1 = 1) \wedge (C_4 = 0) \rightarrow (C_1 = 1) \wedge (C_4 = 1),$$

(1) $\Phi(q_2):(C_2 = 1) \wedge (C_4 = 0) \rightarrow (C_2 = 1) \wedge (C_4 = 1),$

$$\Phi(q_3):(C_3 = 1) \wedge (C_4 = 1) \wedge (C_5 = 0) \rightarrow (C_3 = 1) \wedge (C_4 = 1) \wedge (C_5 = 1).$$

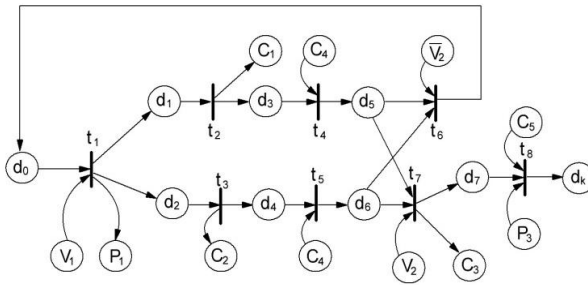


Рис. 3. Пример триадно-сетевой дорожной карты:
граф действий

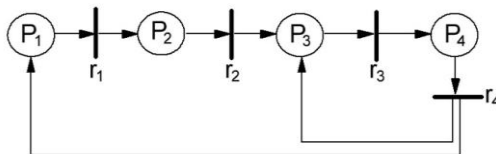


Рис. 4. Пример триадно-сетевой дорожной карты:
граф показателей

$$\begin{aligned}
 & F(t_1): d_0 = 1 \wedge (V_1 = 1) \wedge (P_1(\tau) > 3) \wedge (d_1 = 0) \wedge (d_2 = 0) \rightarrow \\
 & \rightarrow (d_0 = 0) \wedge (d_1 = 1) \wedge (d_2 = 1) \wedge (P_1(\tau + 1) = P_1(\tau) + 2), \\
 & F(t_2): (d_1 = 1) \wedge (d_3 = 0) \wedge (C_1 = 0) \rightarrow (d_1 = 0) \wedge (d_3 = 1) \wedge (C_1 = 1), \\
 & F(t_3): (d_2 = 1) \wedge (d_4 = 0) \wedge (C_2 = 0) \rightarrow (d_2 = 0) \wedge (d_4 = 1) \wedge (C_2 = 1), \\
 & F(t_4): (d_3 = 1) \wedge (d_5 = 0) \wedge (C_4 = 1) \rightarrow (d_3 = 0) \wedge (d_5 = 1), \\
 (2) \quad & F(t_5): (d_4 = 1) \wedge (d_6 = 0) \wedge (C_4 = 1) \rightarrow (d_4 = 0) \wedge (d_6 = 1), \\
 & F(t_6): (d_5 = 1) \wedge (d_6 = 1) \wedge (d_0 = 0) \wedge (V_2 = 0) \rightarrow (d_5 = 0) \wedge (d_6 = 0) \wedge \\
 & \wedge (d_0 = 1), \\
 & F(t_7): (d_5 = 1) \wedge (d_6 = 1) \wedge (d_7 = 0) \wedge (C_3 = 0) \wedge (V_2 = 1) \rightarrow (d_5 = 0) \wedge \\
 & \wedge (d_6 = 0) \wedge (d_7 = 1), \\
 & F(t_8): (d_7 = 1) \wedge (d_k = 0) \wedge (C_5 = 1) \wedge (P_3 > 10) \rightarrow (d_7 = 0) \wedge (d_k = 1). \\
 \\
 & \Pi(r_1): (P_1(\tau) \geq 2) \wedge (p_3 < 7) \rightarrow (P_2(\tau + 1) = P_2(\tau) + 2), \\
 (3) \quad & \Pi(r_2): (P_2(\tau) \geq 4) \rightarrow (P_3(\tau + 1) = P_3(\tau) + 4), \\
 & \Pi(r_3): (P_3(\tau) \geq 7) \rightarrow (P_4(\tau + 1) = P_4(\tau) + 3), \\
 & \Pi(r_4): (P_4(\tau) \geq 6) \rightarrow (P_1(\tau + 1) = P_1(\tau) + 2) \wedge (P_3(\tau + 1) = P_3(\tau) + 2).
 \end{aligned}$$

Таблица 4. Пример триадно-сетевой дорожной карты:
лента показателей

τ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
r	t_1	r_1	r_2	r_3	r_4	r_3	r_4	r_3	r_4	-
P_1	0	2	2	2	2	4	4	6	6	8
P_2	2	2	4	4	4	4	6	6	6	6
P_3	3	3	3	7	7	9	9	11	11	13
P_4	3	3	3	3	6	6	9	9	12	12

Поясним построение ленты показателей, представленной в таблице 4. Из графа показателей (рис. 4) следует порядок срабатывания переходов $r_1 r_2 r_3 r_4 (r_1 \vee r_3) \dots$, где после срабатывания r_1 в момент τ в следующий момент $\tau + 1$ срабатывает r_2 , после r_2 срабатывает r_3 , после r_3 срабатывает r_4 , после r_4 может сработать r_1 или r_3 , и т.д. Срабатывание любого перехода r в момент τ инициируется условием $\text{ИЛФ}_{\text{лев}}(r) = 1$ в левой части выражения $\Pi(r)$ – см. (3). В следующий момент $\tau + 1$ происходит изменение

значений показателей в соответствии с правой частью ИЛФ_{прав}(r) этого выражения.

В ленте показателей в таблице 4 в начальный момент $\tau = 0$ транспонированный вектор-столбец $B(0) = (0, 2, 3, 3)$, в момент $\tau = 1$ вследствие воздействия от графа действий $B(1) = (2, 2, 3, 3)$ и выполняется условие ИЛФ_{лев}(r_1) = 1. Это вызывает срабатывание r_1 , в результате которого $B(2) = (2, 4, 3, 3)$, и т.д. В момент $\tau = 5$ при $B(5) = (4, 4, 9, 6)$ проверяются условия для переходов r_1 , r_3 , для которых имеет место свойство ортогональности ИЛФ_{лев}(r_1) \wedge ИЛФ_{лев}(r_3) = 0, так как $(p_3(\tau) < 7) \wedge (p_3(\tau) \geq 7) = 0$. В момент $\tau = 5$, как и в последующий момент $\tau = 7$, выполняется условие ИЛФ_{лев}(r_3) = 1, и после перехода r_4 срабатывает r_3 .

4. Алгоритм интерактивного моделирования развития систем на основе триадно-сетевых дорожных карт

Алгоритм выполняется в виде последовательности шагов, иллюстрируемой блок-схемой на рис. 5. На шаге 1 формируется начальная ТДК для момента $\tau = 0$, соответствующего началу горизонта моделирования. При выполнении шага 1 последовательно вводятся конфигурации графа целей (этап 1.1), графа действий (этап 1.2), графа показателей (этап 1.3), устанавливаются связи между графами (этап 1.4), вводятся индикаторные выражения, «нагружающие» переходы графов (этап 1.5). На шаге 2, соответствующем периоду стабильного функционирования системы, осуществляется мониторинг процесса с определением наличия критической точки. Если точка до истечения длительности горизонта моделирования не обнаружена, то ЛПМ принимает решение о завершении эксперимента (конец работы алгоритма). Если критическая точка обнаружена, то переход к шагу 3 – при участии ЛПМ осуществляем преобразование ТДК (с применением «графохирургических» операций) для формирования дорожной карты следующего периода стабильности. Далее следует переход к шагу 2. Ниже более подробно рассмотрен алгоритм.

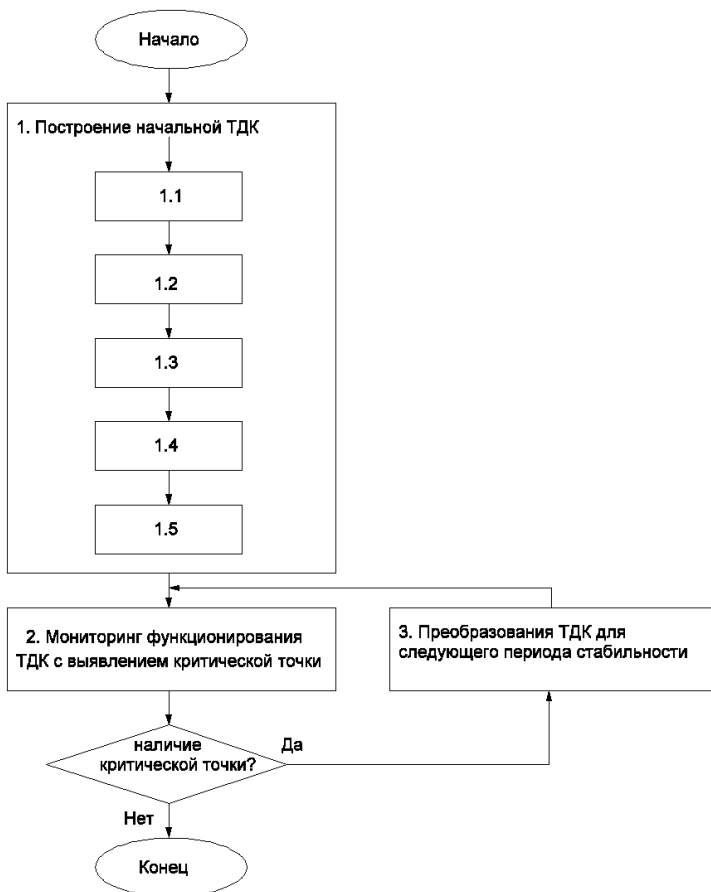


Рис. 5. Блок-схема алгоритма моделирования развития системы на основе триадно-сетевой дорожной карты

1. Построение ТДК для начального момента горизонта моделирования.

1.1. Формирование конфигурации графа целей.

Граф начинаем строить с позиции для главной (конечной) цели, являющейся итогом развития системы на данном горизонте. Далее вводятся позиции для непосредственно подчиненных ей целей (подцелей), достижение которых обу-

сравнивает достижение главной. Процедура повторяется для подцелей и т.д., пока не доходим до начальных целей, которым не подчинена никакая другая цель. Если главных целей несколько, то для каждой из них повторяем то же самое. В графе целей применяются два вида n -арных отношений «цель–подцели», при числе подцелей не менее двух: конъюнктивное и альтернативное. При конъюнктивном отношении обязательно достижение всех подцелей, при альтернативном – только одной. На графе первое отношение реализуется вершиной-переходом, в которую ведут дуги из позиций всех подцелей, а из нее дуга в позицию цели. При втором отношении вводится переход для каждой подцели. В графе целей переход интерпретируется как событие «Достижение цели является следствием достижения подцелей, которое после срабатывания перехода сохраняется». Для этого на графе проводятся «обратные» дуги из перехода в позиции подцелей. Целеполагание является предметом интеллектуальной деятельности ЛПМ. Психология целеполагания с акцентом на типовые ошибки, приводящие к неудаче, подробно рассмотрена в [2].

В примере на рис. 2 главная цель – c_5 , начальные – c_1, c_2, c_3 . Цели c_5 подчинены подцели c_3, c_4 , входящие в отношение конъюнктивности; цели c_4 – подцели c_1, c_2 , входящие в отношении альтернативности.

1.2. Формирование конфигурации графа действий.

В графе действий позиции соответствуют целенаправленным действиям, переходы – событиям завершения одних действий, которое синхронизировано с инициированием других. Для любого перехода пересечение подмножеств входных и выходных позиций (действий) пусто. Действия развернуты во времени, переходы срабатывают мгновенно. Дополнительно вводятся два «пустых» действия: начальное d_0 и конечное d_k , интерпретируемые соответственно как подготовленность к запуску процесса (потока непустых действий) и его завершение.

В примере графа действий на рис. 3 в качестве входных/выходных позиций переходов помимо действий показана

ны копии позиций целей и показателей, а также внешние позиции. Таким образом моделируются взаимодействия между уровнями ТДК и связи системы с внешней средой. Переход t_1 запускается, если выполнены начальные условия ($d_0 = 1$) и подано внешнее воздействие ($v_1 = 1$). Результатом срабатывания t_1 является запуск действий d_1 , d_2 и приращение показателя p_1 . Разветвление процесса после прохождения верхней и нижней параллельных ветвей – выбор перехода t_6 или t_7 , определяется взаимно исключающими друг друга внешними воздействиями $v_2 = 0$, $v_2 = 1$, и т.д.

1.3. Формирование конфигурации графа показателей.

В графе показателей позиции соответствуют ключевым показателям системы, переходы определяют факт влияния входного показателя на подмножество выходных показателей (переход имеет только одну входную дугу). Один и тот же показатель не может быть для перехода одновременно входным и выходным. Взаимозависимость показателей интерпретируется как причинно-следственная связь между состоянием входного показателя и скачкообразным изменением выходных показателей. В примере на рис. 4 показатель p_1 влияет на p_2 , показатель p_2 – на p_3 , показатель p_3 – на p_4 , показатель p_4 – на p_1 и p_3 .

1.4. Установление связей между графами.

В общем случае каждый из трех графов ТДК может взаимодействовать с внешней средой и двумя остальными графами. Для моделирования взаимодействий используется «размножение» позиций – представление их в нескольких экземплярах (копиях) с совпадающими значениями соответствующей переменной. Если срабатывание перехода z графа g , принадлежащего ТДК, обусловлено внешней переменной x – параметром другого графа или воздействием среды, то в граф g в качестве входной позиции перехода z вводится копия x . Если же срабатывание перехода z воздействует на среду или изменяет значение параметра другого графа, то копия x вводится как выходная позиция перехода z . Переход z может иметь несколько входных и выходных копий позиций.

В примере на рис. 2, 3, 4 копирующие позиции v_i , c_i , p_i введены для переходов графа действий (рис. 3).

1.5. Составление индикаторных выражений для переходов графа.

В полученных на предыдущих этапах шага 1 графах ТДК для каждого перехода вводится индикаторное выражение $\text{ИЛФ}_{\text{лев}} \rightarrow \text{ИЛФ}_{\text{прав}}$, где индикаторы сравнения в составе левой формулы взаимно однозначно соответствуют всем входным и выходным позициям перехода, а индикаторы в составе правой формулы – также всем входным и выходным позициям, за исключением выходных позиций v_i (внешние воздействия могут обуславливать переход, но его срабатывание не влияет на их значение).

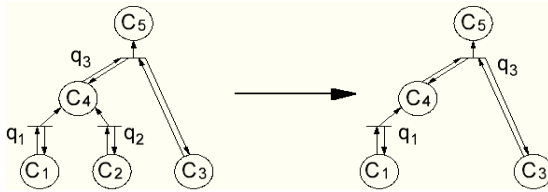
Описание внутри «индикаторных» скобок формируется следующим образом. Для *графа целей*: в составе $\text{ИЛФ}_{\text{лев}}$ для подцелей $c_i = 1$ и для цели $c_j = 0$ значения p , d , v устанавливает ЛПМ. В формуле $\text{ИЛФ}_{\text{прав}}$ допускаются только индикаторы $c_j = 1$. В *графе действий*: в $\text{ИЛФ}_{\text{лев}}$ для индикаторов входных и выходных позиций перехода, сопоставленных действиям, вписывается соответственно $d_i = 1$, $d_j = 0$, а для индикаторов других переменных – по выбору ЛПМ. Для $\text{ИЛФ}_{\text{прав}}$ значения d изменяются на противоположные. Если срабатывание перехода графа действий вызывает достижение цели или/и изменение значения показателя, то это также фиксируется в $\text{ИЛФ}_{\text{прав}}$. В *графе показателей*: любой переход имеет одну входную и $n \geq 1$ выходных позиций, соответственно индикаторное выражение $\text{ИЛФ}_{\text{лев}}$ состоит из одного либо более, а $\text{ИЛФ}_{\text{прав}}$ – из n индикаторов. Знаки сравнения и значения констант в индикаторах выбирает ЛПМ. Далее ЛПМ вводит логические знаки конъюнкции \wedge , дизъюнкции \vee , отрицания \neg , соединяющие полученные индикаторы. Таким образом, процедура преобразования графовой основы ТДК в индикаторные выражения переходов является интерактивной, она частично формализована и может выполняться автоматически, частично базируется на экспертных потенциях ЛПМ. Индикаторные выражения переходов графов целей, действий и показателей приведены в (1), (2), (3).

2. Мониторинг процесса функционирования системы на интервале стабильности.

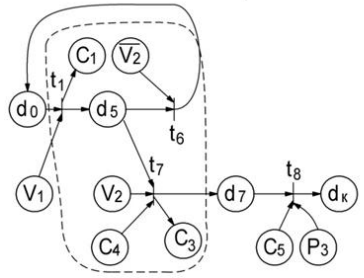
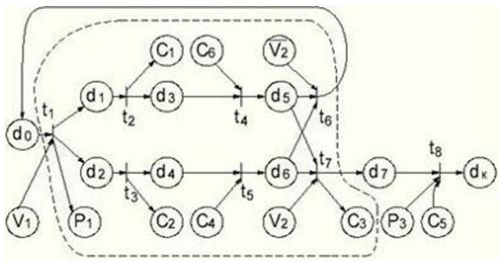
Результатом мониторинга является диаграмма динамики параметров ТДК, пример которой дан в таблице 5. Горизонтальными линиями на ней изображены интервалы единичного значения булевых переменных – внешних воздействий, целей, действий, а числами – балльные значения показателей. Интервалы внешних воздействий задает ЛПМ, руководствуясь своим представлением о возможном поведении внешней среды. Остальные параметры вычисляются для каждого такта – промежутка между моментами τ , $\tau + 1$, $\tau = 0, 1, \dots, N$, согласно процедуре, изложенной в разделе 2. Критическая точка (момент), как уже говорилось ранее, соответствует «предугрозе»: например, выходу показателя за допустимые пределы, достижению цели после истечения нормативного времени и т.д. Пусть в примере (таблица 5) изменение показателей регламентируется десятибалльной шкалой, т.е. от 0 до 10 баллов, а цель c_5 должна быть достигнута не позже конца пятого такта. Но в соответствии с диаграммой в таблице 5 при заданных начальных условиях в пятом такте показатель p_3 превысил верхнюю границу шкалы, а цель c_5 достигается только в седьмом такте. Следовательно, критической точкой является момент $\tau = 6$, и, начиная с шестого такта, рассмотрение можно было не продолжать.

3. Преобразование триадно-сетевой дорожной карты.

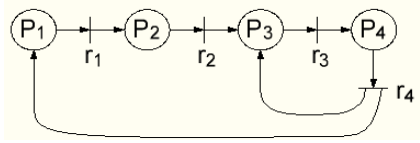
Для следующего периода стабильности преобразуем графы целей и действий в карте на рис. 2, 3, оставив без изменения граф показателей. Преобразование с применением метода «графохирургии» проиллюстрировано на рис. 6. Из графа действий «вырезаем» фрагмент с двумя параллельными ветвями, входным переходом t_1 и выходными переходами t_6, t_7 (обведен пунктиром в верхней части рис. 6б). Вместо него «вставляем» фрагмент с аналогичными входным и выходными переходами, не содержащий параллельных ветвей (обведен в нижней части рис. 6б). Во введенном фрагменте отсутствует целевая позиция c_2 , которая удаляется и из графа целей (замещается пустым фрагментом), что показано на правом рис. 6а.



а)



б)



в)

Рис. 6. Пример преобразования триадно-сетевой дорожной карты для а) графа целей; б) графа действий; в) графа показателей

Таблица 5. Диаграмма динамики параметров ТДК в период стабильности (τ – такт, Φ – факторы)

$\Phi \backslash \tau$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
v_1									
v_2									
c_1									
c_2									
c_3									
c_4									
c_5									
d_0									
d_1									
d_2									
d_3									
d_4									
d_5									
d_6									
d_7									
d_k									
p_1	2	2	4	4	4	4	4	6	8
p_2	0	2	4	6	8	10	12	14	16
p_3	0	0	0	4	8	12	16	22	28
p_4	0	0	0	0	0	3	6	9	12

5. Заключение

Статья посвящена графодинамике дорожных карт – признанного инструментария прогнозирования и планирования процессов развития систем широкого назначения, в том числе процессов управления проектами, на заданном временном горизонте (графодинамика – это направление системного анализа, оперирующее переменными в форме графов и отношениями, определенными на графах [1]). Применительно к дорожным картам в статье акцент сделан на следующие факторы.

Триадность развития, определяемая динамикой взаимовлияния трех взаимосвязанных групп параметров – целей про-

цесса; действий, направленных на достижение целей; ключевых показателей, характеризующих состояние системы.

Скачкообразность развития. Горизонт прогнозирования состоит из периодов (участков) стабильности, разделенных критическими точками. На участке стабильности не меняется состав параметров (целей, действий, показателей) и связи между ними, но изменяются значения параметров. Динамика развития системы отображается триадной моделью [5]. При этом на участке стабильности могут обнаруживаться признаки «предугрозы», фиксируемые в виде критической точки на временной оси (точки бифуркации). А это, в свою очередь, инициирует перестройку триадной модели дорожной карты – изменения состава параметров и связей между ними.

Перестройка триадно-сетевой дорожной карты. Преобразование в критической точке триадной модели может касаться всех трех ее составляющих, либо части из них. Преобразование осуществляется в два этапа: на первом корректируется графовая основа (графы целей, действий, показателей), на втором – графы трансформируются в индикаторные выражения переходов. Последнее требует участия аналитика. Коррекцию графов производят не «с чистого листа», а с учетом преемственности путем «графохирургических операций» [5] – выделяют фрагмент графа и замещают его другим фрагментом, возможно пустым. Процедура имитационного моделирования триадно-сетевых дорожных карт является интерактивной, частично она выполняется автоматически, частично человеком (имеет место органическое сочетание «искусственного и естественного интеллекта»).

Литература

1. АЙЗЕРМАН М.А., ГУСЕВ Л.А., ПЕТРОВ С.В., СМИРНОВА И.Н. *Динамический подход к анализу структур, описываемых графами (основы графодинамики)* // Автоматика и телемеханика. – 1977. – №7. – С. 135–151; №9. – С. 123–136.
2. ДЕРНЕР Д. *Логика неудачи.* – М.: Смысл, 1997. – 243 с.
3. КОТОВ В.Е. *Сети Петри.* – М.: Наука, 1984. – 158 с.
4. ПИТЕРСОН ДЖ. *Теория сетей Петри и моделирование систем.* – М.: Мир, 1984. – 264 с.

5. ЮДИЦКИЙ С.А. *Моделирование динамики многоагентных триадных сетей*. – М.: Синтег, 2012. – 112 с.
6. ЮДИЦКИЙ С.А., МАГЕРГУТ В.З. *Триадное моделирование на индикаторных сетях поведения дискретных систем // Тринадцатая национальная конференция по искусственному интеллекту с международным участием КИИ-2012: Труды конференции. Том 3. Белгород, 2012. – С. 234–241.*

THE TRIADIC-NETWORKED ROADMAPS FOR SYSTEMS DEVELOPMENT

Semen Yuditsky, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences RAS, Moscow, professor (yuseab@yandex.ru)

Abstract: The graph dynamics is considered of roadmaps of systems development processes for various applications. The basic model of «indicatory network» is introduced. This model is used to build a comprehensive model of a «triadic-networked roadmap» showing the dynamics of objectives, actions, and indicators on the required time horizon of development. An interactive algorithm is proposed for development simulation with formation of a sequence of stability periods separated with critical points where the roadmap is being transformed.

Keywords: objectives, actions, indicators, triadic-networked roadmap, a bipartite graph, indicatory expression, stability period, the critical point.

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии Л. И. Микуличем*

УДК 534.01+621.313
ББК 078.8

**БИФУРКАЦИИ ДВИЖЕНИЙ НАГРУЖЕННОГО
ЭЛЕКТРИЧЕСКИ ДЕМПФИРОВАННОГО МАЯТНИКА
(СИНХРОНИЗАЦИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ МАШИНЫ
С СЕТЬЮ)**

Скубов Д. Ю.¹

*(Санкт-Петербургский политехнический университет,
Санкт-Петербург)*

В предлагаемой статье исследуются вопросы синхронизации электрической машины с сетью. Математическое моделирование проводится численно-аналитическими методами на основе асимптотически упрощенных уравнений динамики синхронной электрической машины. Доказывается возможность более грубой (чем это принято на сегодня) синхронизации машины с сетью, а именно, большего начального рассогласования частот вращения ротора турбогенератора и частоты сети.

Ключевые слова: синхронные электрические машины, нелинейная динамика, электромеханика, устойчивость периодических движений.

1. Введение

Проблема стабильного сохранения синхронного режима электрической машины с общей электрической цепью возникла в середине XX века и сохраняет свою актуальность и на сегодня.

Возможность выхода машины из синхронизма при изменении сетевой нагрузки и, наоборот, не выхода ее на синхронный режим при подключении к общей сети вызывает необходимость аккуратного моделирования переходных процессов такой электромеханической системы.

¹ Дмитрий Юльевич Скубов, доктор физико-математических наук, профессор, (Санкт-Петербург, ул. Бассейная, д. 71, кв. 32, (тел. (812) 387-81-52, skubov.dsk@yandex.ru).

В основе исследования таких переходных процессов лежат уравнения Парка–Горева (см., например, [1]). Вместе с тем при их непосредственном использовании неоднократно возникали противоречащие физике (реальным «экспериментам»), математические выводы. А именно, неправильное механическое моделирование приводило к неадекватным выводам об устойчивости работы машины с сетью. Последнее нередко приводило к катастрофическим ситуациям (разгону ротора), наступавшим, например, при «сильном регулировании» напряжением возбуждения – его пропорционально-линейном увеличении при «набросе» нагрузки. Более подробно об этом написано в монографии Ф.Ф. Родюкова [6].

Пожалуй, первой работой, дающей математическое объяснение указанного явления, можно считать небольшую книгу А.А. Янко-Триницкого [7]. Ее основным выводом является то, что при изменении нагрузки происходит изменение особой точки (угла нагрузки в синхронном режиме), и если в результате изменения нагрузки исходная особая точка выходит из зоны притяжения новой, то это и ведет к нарушению синхронизма (аварийному режиму). Конечно, за счет управления напряжением обмотки возбуждения возможно сохранение устойчивости, но для этого требуется не режим прямого регулирования, а регулирование с обратной связью, что, в свою очередь, достаточно трудоемко и, как будет показано ниже, не является необходимым.

2. Модель Трикоми

Одной из первых и наиболее простых математических моделей синхронного генератора (двигателя) является маятниковая модель, приведенная в книге Дж. Стокера [9] и описываемая уравнением Трикоми:

$$(1) \quad \ddot{\vartheta} + \beta \dot{\vartheta} + u \sin \vartheta = m.$$

Здесь ϑ – угол рассогласования магнитных осей ротора и вращающегося магнитного поля статора; u – параметр управления, определяемый напряжением возбуждения синхронной машины; m – момент двигателя, вращающего ротор генератора

(турбины для турбогенератора) или тормозящий вращение – момент нагрузки (при работе машины в режиме двигателя). Слагаемое $\beta \dot{\vartheta}$, формально описывает демпфирование эквивалентного маятника. Для синхронной машины оно возникает вследствие линеаризации момента нагрузки как функции угловой скорости относительно синхронного режима $\dot{\vartheta} = 0$, $\vartheta_* = \arcsin(m/u)$.

Основная цель исследования уравнения (1) применительно к динамике синхронной машины состоит в определении условий, обеспечивающих стремление любого из его решений к положению равновесия при стремлении независимой переменной (времени) к бесконечности. Такое поведение решений характеризует процесс втягивания машины в синхронизм независимо от начальных условий (на самом деле, при достаточно небольших начальных скольжениях – рассогласованиях скоростей вращения ротора и электромагнитного поля статора). Идеализированная модель динамики синхронной машины, в «первом приближении» описываемая уравнением Трикоми, совсем недавно была модифицирована группой петербургских ученых – механиков под руководством профессора К.Ш. Ходжаева (см. далее).

Более сложной, но не менее важной для практики, является задача определения вращательных движений уравнения (1), так называемых предельных циклов второго рода (замкнутых траекторий вокруг фазового цилиндра), которые для синхронной машины отвечают асинхронному ходу с постоянным средним скольжением.

Отыскание условий устойчивости синхронного режима (устойчивого положения равновесия «эквивалентного маятника») сводится к нахождению соотношения параметров m и β , которое соответствует гетероклинической фазовой траектории (сепаратрисе, идущей из седла в седло). То есть необходимо найти сепаратрису, соединяющую точки $-\pi - \alpha$ и $\pi - \alpha$ ($\alpha = \arcsin(m/u)$, $|m/u| < 1$), эквивалентные на фазовом цилиндре.

Основные типы движений, описываемые уравнением Трикоми, в случае $m > 0$, $u > 0$ и $\beta > 0$ приведены на рис. 1. Так на рис. 1(а) показан случай устойчивости синхронного режима. На рис. 1(б) – «граничный» случай гетероклинической сепаратри-

сы, идущей из седла в седло. На рис. 1(в) – случай разделения областей движений на сходящиеся или к устойчивому фокусу (синхронному режиму), или к устойчивой ротации (асинхронному режиму с постоянной средней угловой скоростью – скольжению машины).

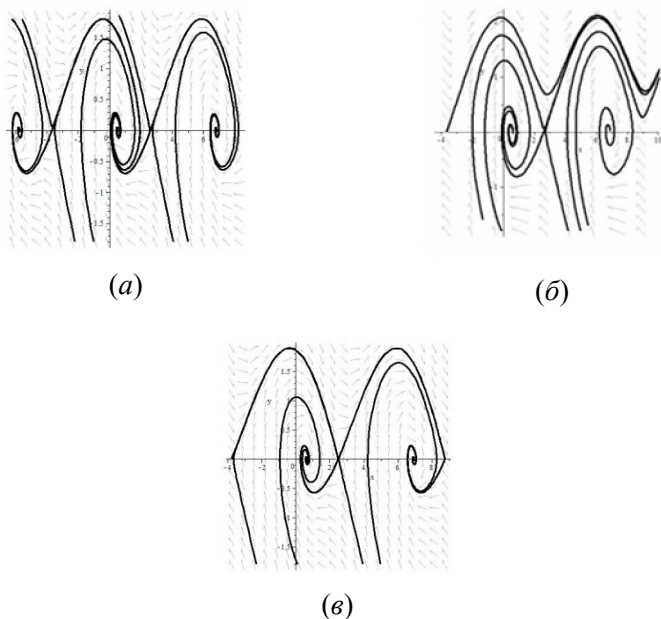


Рис. 1.

Имеет смысл приведение фазового портрета уравнения Трикоми в случае наличия ротации – предельного цикла второго рода на цилиндрическом фазовом пространстве (рис. 2). Здесь предполагается наличие устойчивой ротации и устойчивого фокуса (для случая $m > 0$, $\beta > 0$, $m/u < 1$). Фокус имеет место при $\beta^2 < 4\sqrt{u^2 - m^2}$.

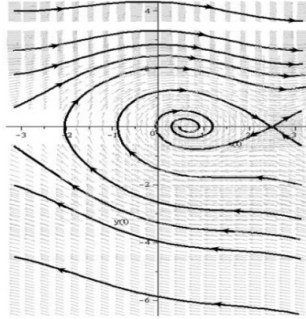


Рис. 2.

Для отыскания движения, отвечающего гетероклинической сепаратрисе (рис. 1(б)), в работе используется полиномиальная аппроксимация гладкой кривой, заданной на отрезке некоторой аналитической функцией по значениям ее самой и ее производных (только их) на концах этого отрезка.

Иными словами, пусть $y(x)$ – некая аналитическая функция, заданная на отрезке $[a, b]$, и известны значения $y(a), y'(a), \dots, y(b), y'(b), \dots$. Функция $y(x)$ может удовлетворять некоторому дифференциальному уравнению, из которого можно найти $y'(a), y'(b)$ и остальные производные на концах отрезка. Функция $y(x)$ далее разыскивается в виде степенного ряда, вид которого был предложен петербургским профессором Р.Ф. Нагаевым:

$$(2) \quad y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (u_k^{(0)} \xi + v_k^{(0)} \eta) (\xi \eta)^k,$$

где $\xi(x) = (x - a)/(b - a)$, $\eta(x) = (b - x)/(b - a)$. Такое представление функции $y(x)$, как будет показано ниже, сохраняет форму разложения для всех производных, заменяя коэффициенты $u_k^{(0)}, v_k^{(0)}$, $k = 0, 1, \dots$, для самой функции $y(x)$ на $u_k^{(n)}, v_k^{(n)}$ для ее производной $y^{(n)}(x)$, умноженной на $(b - a)^n$. Эти коэффициенты находятся рекуррентно, что удобно для их расчета.

Рекуррентные соотношения для коэффициентов разложения могут быть получены следующим образом. Продифференцируем $y(x)$, используя выражение (2):

(3)

$$\begin{aligned}
 (b-a)y'(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (u_k^{(0)} - v_k^{(0)}) (\xi\eta)^k + \\
 &+ \sum_{k=1}^{\infty} (u_k^{(0)}\xi + v_k^{(0)}\eta) (\xi\eta)^{k-1} k(\eta - \xi) = \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} (u_k^{(0)} - v_k^{(0)}) (\xi\eta)^k + \sum_{k=1}^{\infty} (u_k^{(0)}(\xi\eta - \xi(1-\eta)) + \\
 &+ v_k^{(0)}(\eta(1-\xi) - \xi\eta)) (\xi\eta)^{(k-1)} k = \sum_{k=0}^{\infty} (u_k^{(0)} - v_k^{(0)}) (\xi\eta)^k + \\
 &+ \sum_{k=1}^{\infty} (-u_k^{(0)}\xi + v_k^{(0)}\eta) k (\xi\eta)^{(k-1)} + \sum_{k=0}^{\infty} 2k(u_k^{(0)} - v_k^{(0)}) (\xi\eta)^k = \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1)(u_k^{(0)}(\xi + \eta) - v_k^{(0)}(\xi + \eta)) (\xi\eta)^k + \\
 &+ \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(-u_{k+1}^{(0)}\xi + v_{k+1}^{(0)}\eta) (\xi\eta)^k = \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1)(u_k^{(0)} - v_k^{(0)}) (\xi\eta)^k + \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(-u_{k+1}^{(0)}\xi - v_{k+1}^{(0)}) (\xi\eta)^k.
 \end{aligned}$$

Сравнивая (3) с выражением

$$y'(x)(b-a) = \sum_{k=0}^{\infty} (u_k^{(1)}\xi + v_k^{(1)}\eta) (\xi\eta)^k,$$

получаем

$$\begin{aligned}
 (4) \quad u_k^{(1)} &= (2k+1)(u_k^{(0)} - v_k^{(0)}) - (k+1)u_{k+1}^{(0)}, \\
 v_k^{(1)} &= (2k+1)(u_k^{(0)} - v_k^{(0)}) + (k+1)v_{k+1}^{(0)}.
 \end{aligned}$$

Действуя по индукции, найдем связь между остальными коэффициентами:

$$\begin{aligned}
 (5) \quad u_{k+1}^{(n)} &= \frac{2k+1}{k+1} (u_k^{(n)} - v_k^{(n)}) - \frac{1}{k+1} u_k^{(n+1)}, \\
 v_{k+1}^{(n)} &= -\frac{2k+1}{k+1} (u_k^{(n)} - v_k^{(n)}) + \frac{1}{k+1} v_k^{(n+1)}.
 \end{aligned}$$

Перейдя к новой независимой переменной \mathcal{Q} , перепишем уравнение (1) в виде

$$(6) \quad \frac{d\omega}{d\vartheta} \omega + \beta\omega + u \sin \vartheta = m,$$

принимая за независимую переменную угол ϑ , а неизвестную $\omega = \dot{\vartheta}$. Значения производных в седловых точках могут быть найдены последовательным дифференцированием (6) с подстановкой значений функций в крайних (седловых) точках: $\vartheta_1 = \pi - \alpha$ и $\vartheta_2 = -\pi - \alpha$.

Для первых производных $\omega'(\vartheta_1)$ и $\omega'(\vartheta_2)$ получаем квадратное уравнение:

$$(7) \quad \omega'^2 + \beta\omega' - u \cos \alpha = 0,$$

его корни

$$\omega'_{1,2} = -\frac{\beta}{2} \pm \sqrt{\frac{\beta^2}{4} + u \cos \alpha}.$$

В результате находим направляющие – касательные сепаратрис в седловых точках с положительным и отрицательным наклоном. Для старших производных имеем выражения

$$(8) \quad \begin{aligned} \omega''_{1,2} &= \frac{u \sin \alpha}{3\omega'_{1,2} + \beta}, \\ \omega'''_{1,2} &= -\frac{3\omega''^2 - u \cos \alpha}{4\omega'_{1,2} + \beta}, \\ \omega^{IV}_{1,2} &= -\frac{10\omega'''_{1,2}\omega''_{1,2} + u \sin \alpha}{5\omega'_{1,2} + \beta}, \\ &\dots \end{aligned}$$

Интегрируя (6) на отрезке между седловыми точками, получим

$$(9) \quad \frac{1}{2\pi} \beta \int_{-\pi-\alpha}^{\pi-\alpha} \omega(\vartheta) d\vartheta = m.$$

После подстановки в (9) найденного разложения $\omega(\vartheta)$ и используя соотношение (2), в котором роль функции $y(x)$ играет $\omega(\vartheta)$, и, соответственно, a и b равны ϑ_1 и ϑ_2 , получаем алгебраическое уравнение $f(m, \beta) = 0$, определяющее критическое значение $m_{cr}(\beta, u)$, которое отвечает сепаратрисе, идущей из седла в седло при заданном значении параметра управления u . Случай

$m(u) < m_{cr}(\beta, u)$ соответствует глобальной устойчивости положения равновесия (синхронного движения) рис. 1(а). Если же $m(u) > m_{cr}(\beta, u)$, то фазовое пространство разделяется на два потока траекторий, стремящихся либо к положению равновесия, либо к стационарному вращению с периодической по углу угловой скоростью (дихотомия) рис. 1(в).

Кривая $m_{cr}(\beta, u)$, полученная на основе полиномиальной аппроксимации вида (2), при значении параметра управления $u = 1$ приведена на рис. 3(а). На нем же приведена та же бифуркационная кривая, но полученная подстановкой параметров, отвечающих ее аппроксимации на основе метода гармонического баланса. Ограничиваясь первой гармоникой, решение уравнения (6), отвечающее сепаратрисе, (в случае $u = 1$) записывается в виде

$$\omega_* = \omega_0 + \omega_c \cos \vartheta + \omega_s \sin \vartheta.$$

После подстановки этого выражения в уравнение (6) и балансирования по гармоникам получаются следующие выражения для средней угловой скорости и для амплитуд первых гармоник:

$$\omega_0 = \frac{m}{\beta}, \quad \omega_c = \frac{\omega_0}{\beta^2 + \omega_0^2}, \quad \omega_s = -\frac{\beta}{\beta^2 + \omega_0^2}.$$

В случае гетероклинической сепаратрисы подстановкой в ее гармоническое приближение найденных выражений коэффициентов и значений аргументов – либо $\vartheta_1 = -\pi - \alpha$, либо $\vartheta_2 = -\pi - \alpha$ (в седловых точках), $\alpha = \arcsin(m)$ – получаем алгебраическое соотношение

$$\omega_0 - \omega_c \cos \alpha + \omega_s \sin \alpha = 0,$$

которое и является уравнением бифуркационной кривой. График этого уравнения, как и график, полученный на основе полиномиальной аппроксимации, изображён на рис. 3(а).

Оценки бифуркационной кривой для уравнения Трикоми, полученные разными способами можно найти в большом числе научных изданий, в частности, в монографии Г.А. Леонова, Н.В. Кондратьевой [3] (рис. 4.14, с. 149).

Среди первых оценок бифуркационной кривой можно отметить следующие:

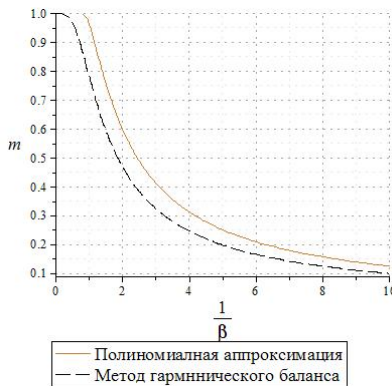
1. $\beta^2 > \sin^2 \alpha / (\pi(\sin \alpha + \pi \cos \alpha))$ – оценка Трикоми «сверху»,
2. $\beta^2 < (1 + \sin \alpha) / (\pi - 2\alpha)$ – оценки Трикоми «снизу»,
3. $\beta^2 > 4 \sin^2 \alpha / (2\pi \sin \alpha + \pi^2 \cos \alpha)$ – оценка К. Бёма.

Соответствующие бифуркационные кривые показаны на рис. 3(б).

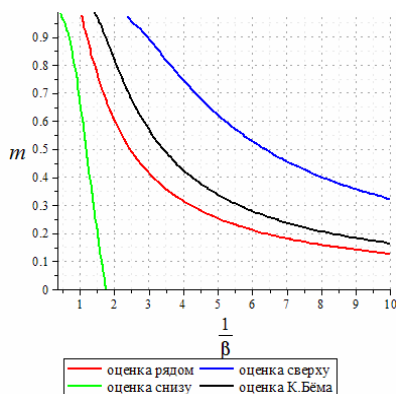
Семейство кривых, отвечающих гетероклинической сепаратрисе при различных значениях параметра управления u , можно перестроить как совокупность кривых $m_{cr}(u)$ для заданных значений β . Можно показать, что если при некоторых фиксированных значениях β и u момент нагрузки $m(t)$ равномерно стремится к $m_{cr}(u, \beta)$ при $t \rightarrow \infty$, оставаясь при этом меньше его самого, равного $m_{cr}(u, \beta)$, то движение ротора синхронной машины сходится к синхронному вращению (устойчивому фокусу для «эквивалентного маятника», отвечающему $m = m_{cr}(u, \beta)$) (см. Леонов Г.А., Смирнова В.Б. [4]).

Среднее значение угловой скорости ротора синхронной машины (в наших обозначениях – скольжение) в случае асинхронного хода (предельного цикла второго рода «эквивалентного маятника») определяется усреднением уравнения (6)

$$(10) \bar{\omega} = \langle \omega \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \omega(\vartheta) d\vartheta = m / \beta.$$



(a)



(б)

Рис. 3.

Отметим, что предельные циклы второго рода (ротационные движения маятника) могут быть расположены как в верхней, так и в нижней части цилиндрического фазового пространства (в зависимости от знаков m и β). Изменение знака момента соответствует изменению характера работы синхронной машины (для введенных обозначений $m > 0$ – генератор, $m < 0$ – двигатель). Изменение знака β (эквивалентного «демпфирования») определяется характером зависимости момента от угловой скорости. Для генератора (в случае $m > 0$) наиболее естественным является уменьшение момента двигателя (для турбогенератора – паровой турбины), вращающего ротор, при увеличении его угловой скорости. В случае $m < 0$ (работы синхронной машины в режиме двигателя) возможен как первый, так и второй вид зависимости момента нагрузки m от угловой скорости, например, при работе синхронной машины в качестве привода плунжерного насоса возможны как падающие, так и возрастающие участки стационарной зависимости вращающего момента от угловой скорости.

Устойчивость предельных циклов второго рода определяется абсолютной величиной мультипликатора уравнения в вариациях, записанного относительно периодического стационарного ротационного режима $\omega(\vartheta)$. Уравнение в вариациях получается

линеаризацией уравнения (6) относительно известного (найденного) стационарного вращения $\omega_* = \omega_*(\vartheta)$:

$$(11) (\omega'_* + \zeta')(\omega_* + \zeta) + \beta(\omega_* + \zeta) + u \sin \vartheta = m.$$

Откуда и получаем уравнение в вариациях

$$(12) \omega_*(\vartheta) \cdot \zeta' + (\omega'_* + \beta)\zeta = 0.$$

Для уравнения первого порядка (6) мультипликатор определяется формулой

$$(13) \rho = \exp\left(-\int_0^{2\pi} \frac{\omega'_*(\tau) + \beta}{\omega_*(\tau)} d\tau\right) = \exp\left(-\int_0^{2\pi} \frac{\beta}{\omega_*(\tau)} d\tau\right).$$

Вопрос устойчивости периодического вращения решается знаком интеграла под экспонентой. Из невозможности для уравнения Трикоми (при $m, \beta > 0$) движений с переменной по знаку (направлению) стационарной ротацией следует вывод о том, что устойчивость ротационного движения достаточным образом определяется соотношением знаков коэффициента β и средней угловой скорости m/β . Для положительных m и β подынтегральное выражение положительное, и, следовательно, стационарная ротация устойчива (мультипликатор – вещественный и меньший 1).

Пример неустойчивого предельного цикла второго рода для уравнения Трикоми ($m < 0, \beta < 0, u > 0$ – работа в режиме синхронного двигателя с возможным уменьшением «демпфирования» по мере роста угловой скорости) приведен на рис. 4 – фазовый портрет в случае неустойчивой ротации с сепаратрисой, убегающей из неустойчивого фокуса, при $m = -0,6, u = 1, \beta = -0,3$. В этом случае (при тех же знаках параметров) фокус, который, как и в предыдущем случае, имеет место при $\beta^2 < 4\sqrt{u^2 - m^2}$, становится неустойчивым. Обратное неравенство соответствует тоже неустойчивому, но узловому положению равновесия.

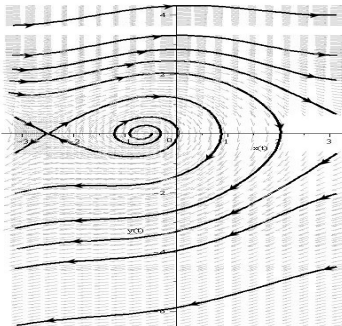


Рис. 4.

Ротационное решение (асинхронный ход синхронной машины), так же как это сделано было раньше при отыскании гетероклинической сепаратрисы, может быть найдено методом гармонического баланса для уравнения (6). В первом приближении (с учетом только первой гармоники по углу ϑ) ротационный режим (предельный цикл второго рода «эквивалентного маятника») может быть найден в виде

$$(14) \omega_*(\vartheta) = \omega_0 + \omega_s \sin \vartheta + \omega_c \cos \vartheta.$$

Удерживая только первую гармонику при балансировании, имеем

$$(15) \begin{aligned} \omega_0 &= \langle \omega_*(\vartheta) \rangle = m / \beta, \\ \omega_s &= u\beta / (\omega_0^2 + \beta^2), \\ \omega_c &= -u\omega_0 / (\omega_0^2 + \beta^2). \end{aligned}$$

Полученная аппроксимация ротационного движения легко уточняется удержанием двух гармоник и т.д.:

$$(16) \omega(\vartheta) = \omega_0 + \omega_s \sin \vartheta + \omega_c \cos \vartheta + \omega_{2s} \sin 2\vartheta + \omega_{2c} \cos 2\vartheta.$$

Коэффициенты второго приближения (в смысле гармонического баланса), а именно, измененные коэффициенты ω_s , ω_c , определяются решением системы алгебраических уравнений (после пренебрежения коэффициентами второй гармоники)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(\omega_s^2 - \omega_c^2) - 4\omega_0(u\omega_c + 2\beta\omega_s\omega_c + \omega_0(\omega_s^2 - \omega_c^2))/(\omega_s^2 + \omega_c^2) + \\ & + 2\beta(u\omega_s + \beta(\omega_s^2 - \omega_c^2) - 2\omega_0\omega_c\omega_s)/(\omega_s^2 + \omega_c^2) = 0, \\ & \frac{1}{2}\omega_s\omega_c + 4\omega_0(u\omega_s + \beta(\omega_s^2 - \omega_c^2) - 2\omega_0\omega_c\omega_s)/(\omega_s^2 + \omega_c^2) + \\ & + 2\beta(u\omega_c + 2\beta\omega_s\omega_c + \omega_0(\omega_s^2 - \omega_c^2))/(\omega_s^2 + \omega_c^2) = 0. \end{aligned}$$

Решение данной системы нелинейных алгебраических уравнений может быть получено, например, методом Ньютона. При этом за исходное приближение принимается решение, полученное с удержанием только первой гармоники (15). Отметим еще раз, что среднее значение угловой скорости стационарной ротации $\omega_0 = m/\beta$ сохраняется независимо от числа удерживаемых гармоник.

Устойчивость стационарного решения может быть исследована путем решения вариационного уравнения относительно приближенного описания стационарной ротации с учетом только ее среднего значения и первой гармоники по \mathcal{Q} , т.е. найденного первого приближения метода гармонического баланса. Нужно заметить, что исследование устойчивости стационарных вращений на основе приближенных, полученных методом гармонического баланса, может давать результаты, отличающиеся от численных экспериментов по значениям исходных параметров (см. Леонов Г.А., Сперанская Л.С. [5]). Значения параметров m , u , β , отвечающие границе устойчивости найденного периодического движения, если оно есть, могут быть найдены в результате отыскания периодического решения уравнения в вариациях (12). То есть необходимо найти те значения параметров, при которых решение уравнения в вариациях, может быть представлено в виде ряда Фурье:

$$(17) \quad \zeta(\mathcal{Q}) = \sum_{k=0}^{\infty} (b_{kc} \cos k\mathcal{Q} + b_{ks} \sin k\mathcal{Q}).$$

После подстановки решения (17) в уравнение (12) и балансирования по гармоникам, получаем систему алгебраических уравнений, первоначальная часть которых имеет вид

$$(18) \quad \beta b_{0c} = 0,$$

$$\omega_0 b_{1s} - \omega_s b_{2c} + \omega_c b_{2s} + \frac{1}{2} \omega_s b_{2c} + \omega_s b_{0c} + \beta b_{1c} - \frac{1}{2} \omega_c b_{2s} +$$

$$+ \frac{1}{2} \omega_s b_{2c} = 0,$$

$$-\omega_0 b_{1c} - \omega_s b_{2s} - \omega_c b_{2c} + \frac{1}{2} \omega_s b_{2s} + \frac{1}{2} \omega_c b_{2c} - \omega_c b_{0c} + \beta b_{1s} = 0.$$

Эта система не полна в том смысле, что не выписаны уравнения баланса по второй и высшим гармоникам. Для существования ненулевого периодического решения уравнения в вариациях необходимо обращение в нуль определителя получаемой таким образом однородной системы с учетом соответствующего числа гармоник.

3. Модель на основе асимптотически упрощенных уравнений Парка–Горева

Как показали исследования группы механиков Санкт-Петербургского политехнического университета, организованной профессором К.Ш. Ходжаевым, существенно более точное описание процесса синхронизации электрической машины с сетью дают асимптотически преобразованные уравнения Парка–Горева (см. D.Yu. Skubov, K.Sh. Khodzhaev [8]). Основным результатом является полученная методом усреднения математическая модель синхронной машины как математического маятника, жестко связанного с магнитоэлектрическими контурами (проводящими рамками в постоянном магнитном поле), поворачивающегося под действием постоянного момента двигателя (для турбогенератора – турбины) (рис. 5).

Такая модель описывается системой уравнений, имеющей структуру уравнений Лагранжа:

$$(19) \quad \begin{aligned} l\dot{I}_f - \gamma\dot{\delta} \sin \delta + r_f I_f &= 0, \\ l\dot{I}_k - \gamma\dot{\delta} \cos \delta + r_k I_k &= 0, \\ J\ddot{\delta} + \gamma(I_f \sin \delta + I_k \cos \delta) + e_f \sin \delta &= m - \beta\dot{\delta}, \end{aligned}$$

где δ – угол поворота маятника, для синхронной машины – угол рассогласования вращающегося с переменной частотой ротора, или генератора, или двигателя, в зависимости от способа приложения мощности, и электромагнитного поля статора, волна которого с учетом только первой гармоники (как по времени, так и по распределению по окружности сердечника статора) вращается по окружности в виде синусоиды с частотой 50 Гц, в простейшем случае трехфазной обмотки со сдвигом фаз на $2\pi/3$ как по углу, так и по времени. Такого типа движение поля статора обеспечивается способом укладывания трехфазной обмотки. Подробное описание задач проектирования электрических машин переменного поля, как синхронных, так и асинхронных, можно найти во вставшей для инженеров-электриков классической книге В.В. Домбровского, Г.М. Хуторецкого [2]. В зависимости от числа фаз обмотки возбуждения ротора – p , частота его вращения может быть в p раз ниже частоты вращения поля статора.

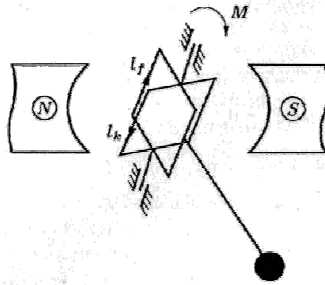


Рис. 5.

Раскроем введенные в системе (19) обозначения: I_f, I_k – токи, наводимые в демпферных контурах с сопротивлениями r_f, r_k и индуктивностью l (эквивалентные в простейшей математической идеализации демпферным контурам синхронной машины, в том числе твердотельной бочке ротора); J – момент инерции ротора (для нашей аппроксимирующей модели – маятника с магнитоэлектрическим демпфированием при его плоских колебаниях относительно оси поворота); γ – коэффи-

циент, характеризующий значение индуцируемого напряжения (для маятника с контурами в постоянном магнитном поле – величины магнитного потока, создаваемого полем пары постоянных магнитов, обращенных друг к другу противоположными полюсами); $m - \beta\delta$ – зависящий от частоты вращения ротора момент турбины (линейно падающий при увеличении угловой скорости (в первом приближении) вблизи стационарного режима);

e_f – напряжение обмотки возбуждения, для введенной системы оно эквивалентно моменту силы тяжести, действующей на груз маятника.

Система (19) – результат асимптотического упрощения системы уравнений Парка–Горева. В ней введены масштабированные переменные:

$$\dot{\delta} = \frac{d\delta}{d\tau} = S - \text{масштабированное скольжение,}$$

$$\tau = \sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_\omega}{\sigma_d}} g_0, \quad g_0 = 2\pi \cdot 50 \text{ Гц} \cdot t (\text{сек}) = 314t.$$

Подробное объяснение вывода асимптотических уравнений (19) и способа введения малых параметров можно найти в упомянутой книге [8].

Обратный переход к уравнению Трикоми осуществляется пренебрежением сопротивлениями демпферных контуров $r_f = r_k = 0$. Если же, наоборот, пренебречь инерционностью (индуктивностью демпферных контуров), т.е. положить $l = 0$, то система (19) преобразуется к виду

$$(20) \quad \kappa\ddot{\delta} + \gamma^2 \left(\frac{\sin^2 \delta}{r_f} + \frac{\cos^2 \delta}{r_k} \right) \dot{\delta} + e_f \sin \delta = m - \beta\dot{\delta},$$

который в случае равенства сопротивлений демпферных контуров снова преобразуется к уравнению Трикоми, но с измененным (увеличенным) коэффициентом при $\dot{\delta}$.

После замены, имеющей физический смысл поворота потоковых переменных на угол δ .

$$(21) \quad \begin{aligned} x_1 &= I_f \sin \delta + I_k \cos \delta, \\ x_2 &= I_f \cos \delta - I_k \sin \delta, \end{aligned}$$

получаем следующую динамическую систему (далее для простоты, не снижая общности, предполагается равенство демпферных сопротивлений $r_f = r_k = r$ и $l = 1, k = 1$, что можно сделать масштабированием времени):

$$(22) \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 - \dot{\delta} x_2 - \gamma \dot{\delta} + r x_1 &= 0, \\ \dot{x}_2 + \dot{\delta} x_1 + r x_2 &= 0, \\ \ddot{\delta} + \gamma x_1 + e_f \sin \delta &= m - \beta \dot{\delta}. \end{aligned}$$

Масштабированные значения параметров:

$$\gamma = 1,7; \quad r = 1; \quad e_f = 1; \quad m = 0,5; \quad \beta = 0,02;$$

наиболее приближенные к действительности, соответствующие ТВВ-200:

$$r_f = 0,09214; \quad r_k = 1,3208; \quad \gamma = 1,6906.$$

Подробнее о выводе системы уравнений (22) и о способе введения ее параметров можно узнать в книге [8].

Меняем $S(0)$ – начальное масштабированное скольжение (разность скоростей вращающегося поля ротора и бегущей волны электромагнитного поля статора в момент включения в сеть). В результате окончания переходного процесса приходим либо к фокусу – равновесию маятника (синхронный ход турбогенератора), либо к его ротации (асинхронный ход генератора с переменной, но периодически меняющейся как по углу, так и по времени угловой скоростью). Задача состоит в отыскании самих ротаций и соотношения параметров, определяющих тот или иной тип движения и его устойчивость. Вернее, границы перехода от одних к другим. Их рождения и устойчивости (ветвления).

Для отыскания ротационного движения переходим к новой (ранее введенной) независимой переменной δ . Обозначая $\dot{\delta} = \omega$, от уравнений (22) переходим к уравнениям

$$(23) \quad \begin{aligned} \omega x'_1 - \omega x_2 - \gamma \omega + r x_1 &= 0, \\ \omega x'_2 + \omega x_1 + r x_2 &= 0, \\ \omega \omega' + \gamma x_1 + e_f \sin \delta + \beta \omega &= m. \end{aligned} \quad ()' = \frac{d}{d\delta}$$

В указанном выше случае $r = 0$ – система (22) (или, что математически эквивалентно, $\gamma = 0$ для уравнений (23)) сводится к хорошо изученному уравнению Трикоми. Наша задача – выявить отличия, а как показывают численные эксперименты, они есть, и не только количественные, но и качественные.

Для отыскания ротационных движений воспользуемся методом вариации произвольных постоянных, принимая за исходные однородные уравнения:

$$(24) \quad x_1' + \frac{r}{\omega(\delta)} x_1 = 0,$$

$$x_2' + \frac{r}{\omega(\delta)} x_2 = 0,$$

$$x_i(\delta) = C_i(\delta) \exp\left(-\int_{\delta_0}^{\delta} \frac{r}{\omega(\sigma)} d\sigma\right), i = 1, 2.$$

В результате приходим к системе

$$C_1' - C_2 = \gamma \exp\left(-\int_{\delta_0}^{\delta} \frac{r}{\omega(\sigma)} d\sigma\right),$$

$$(25) \quad C_2' + C_1 = 0,$$

$$\omega\omega' + \gamma C_1 \exp\left(-\int_{\delta_0}^{\delta} \frac{r}{\omega(\sigma)} d\sigma\right) + e_f \sin \delta + \beta\omega = m.$$

Частное решение дифференциального уравнения относительно $C_1(\delta)$

$$(26) \quad C_1'' + C_1 = \gamma \frac{r}{\omega(\delta)} \exp\left(-\int_{\delta_0}^{\delta} \frac{r}{\omega(\sigma)} d\sigma\right).$$

при нулевых условиях имеет вид

$$(27) \quad C_1(\delta) = \gamma \int_{\delta_0}^{\delta} \frac{1}{\omega(\sigma)} \exp\left(-\int_{\delta_0}^{\delta} \frac{r}{\omega(\xi)} d\xi\right) \sin(\delta - \sigma) d\sigma.$$

При отыскании стационарного ротационного решения можно воспользоваться только этим частным решением, поскольку решения однородной части первых двух уравнений системы (25)

затухают при $\delta \rightarrow \infty$. После подстановки $C_1(\delta)$ в третье уравнение системы (27) получим интегро-дифференциальное уравнение:

$$(28) \quad \omega \omega' + \gamma^2 r \int_{\delta_0}^{\delta} \frac{\sin(\delta - \sigma)}{\omega(\sigma)} \exp\left(-r \int_{\delta_0}^{\delta} \frac{d\xi}{\omega(\xi)}\right) d\sigma + e_f \sin \delta + \beta \omega = m.$$

Только теперь можно начать считать движения, начальная система в трехмерном фазовом пространстве не дает ответа на поиск всех возможных ротаций. Интегралы в случае периодических движений при удержании только первой гармоники могут быть найдены аналитически.

Для приближенного расчета стационарных ротаций воспользуемся методом гармонического баланса, применяя его для системы уравнений (25):

$$(29) \quad \begin{aligned} x_1 &= x_{10} + x_{1s} \sin \delta + x_{1c} \cos \delta, \\ x_2 &= x_{20} + x_{2s} \cos \delta - x_{2c} \sin \delta, \\ \omega &= \omega_0 + \omega_s \sin \delta + \omega_c \cos \delta; \end{aligned}$$

где $\omega = \dot{\delta}$. Оставив после подстановки (29) в систему (23) только постоянные составляющие и первые гармоники по δ , приходим к кубическому уравнению, дающему ответ о значениях средних угловых скоростей возможных стационарных ротаций:

$$(30) \quad \beta \omega_0^3 - m \omega_0^2 + (r^2 \beta + \gamma^2 r) \omega_0 - m r^2 = 0$$

и средних составляющих потоков:

$$(31) \quad x_{10} = \frac{\gamma r \omega_0}{\omega_0^2 + r^2}, \quad x_{20} = -\frac{\gamma \omega_0^2}{\omega_0^2 + r^2}.$$

Исходя из правила Декарта, для определенных выше параметров полученное кубическое уравнение (30) имеет три положительных действительных корня. Для указанных выше параметров график кубического уравнения (30) приведен на рис. 6.

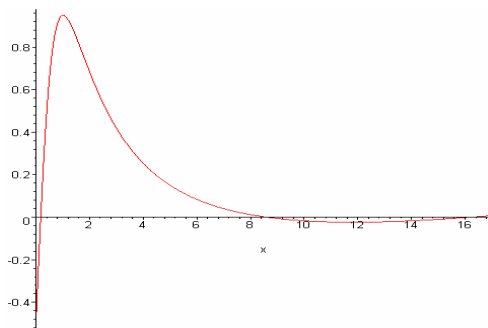


Рис. 6.

Два последних корня полностью совпадают со средними значениями угловых скоростей стационарных ротаций, соответственно неустойчивой (меньшей) и устойчивой (большей), полученных численным расчетом переходных процессов – задачи Коши для системы (22). Вопрос отыскания областей притяжения первой ротации находится в стадии разработки. По корням уравнения (30) определяются сами режимы, но не их устойчивость (пространство трехмерное). Вопрос отыскания границ существования и устойчивости ротационных режимов в пространстве параметров m , β , γ , r весьма сложен и до конца еще не изучен. Интересно сравнить границы существования полученных ротационных решений в зависимости только от двух параметров m , β с границей существования ротационного решения уравнения Трикоми, приведенной на рис. 3(а).

Графики ротационных движений синхронной машины, описываемые системой (22) при различных начальных скольжениях $S(0)$, приведены на рис. 7(а), 8(а), 9(а). Начальные потоки определяются из условия включения машины в сеть «бесконечной» мощности с заданным начальным углом рассогласования полей ротора и статора $\delta_0 = \pi/3$. Графики изменений магнитных потоков относительно неподвижных осей приведены на рис. 7(б, в), 8(б, в), 9(б, в). В приведенных графиках $x_4(t) = \dot{\delta}$, а x_1 , x_2 соответствуют тем же обозначениям, что и в (22).

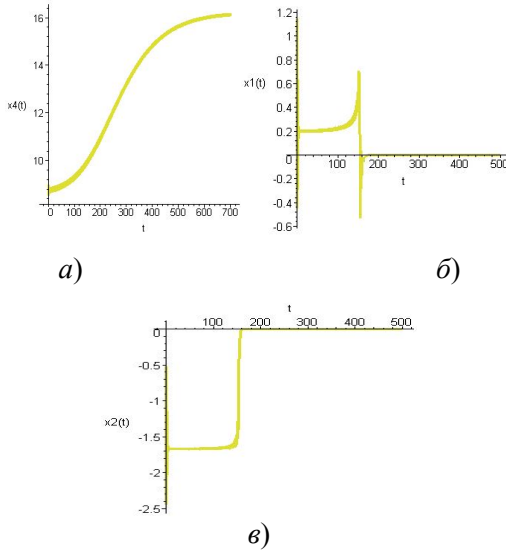
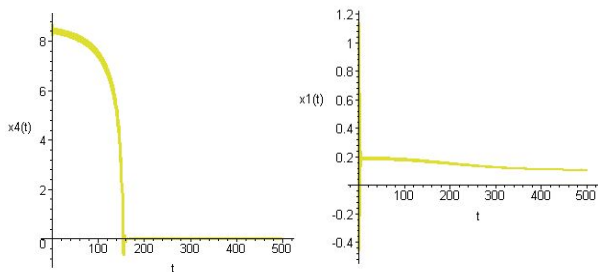


Рис. 7.

На одном из последних рисунков рис. 9(а) синхронизация машины с сетью наблюдается при начальном скольжении $S(0) = 5,7$, что физически эквивалентно $s(0) \approx 2,8$ Гц. Несомненно, такое значение начального скольжения, сохраняющее переход к синхронному режиму, достаточно велико. Но и после расчета переходного процесса при включении в сеть с более реальными параметрами, приведенными после формулы (22), синхронизация оказывается возможной также для сравнительно больших значений начального скольжения $s(0) = 2 \div 3$ Гц.

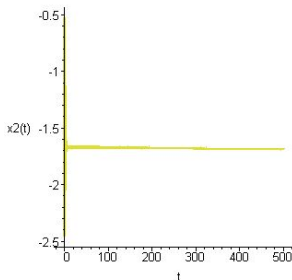
Интересно отметить, что резисторное демпфирование (слагаемые с коэффициентами r_f, r_k в первых двух уравнениях для токов в демпферных контурах маятника (19)) связано с уравнением вращения гироскопическим образом, так как суммарная мощность связывающих слагаемых равна нулю. Это приводит, в частности, к их недостаточности для ликвидации неограниченных движений по δ , которые физически невозможны. Ограничение последних вытекает из наличия в уравнении вращения (третьего уравнения системы (19)) эквивалентного «демпфи-

вания» – слагаемого $\beta\dot{\delta}$, отвечающего в первом приближении (при малых скольжениях) падению момента двигателя (турбины) при увеличении угловой скорости ротора.



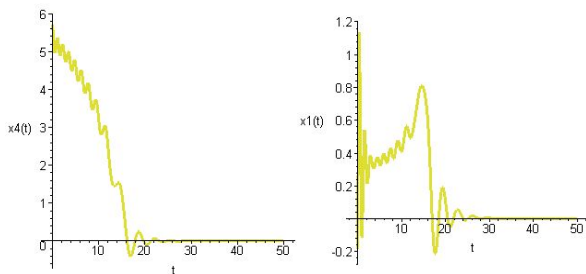
а)

б)



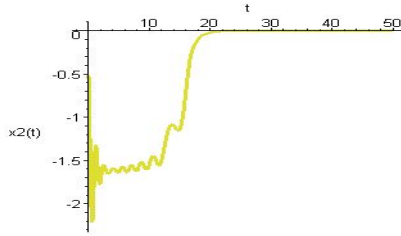
в)

Рис. 8.



а)

б)



в)

Рис. 9.

В зависимости от величины момента m возможно различное значение числа периодических движений (ротаций маятника). Вопрос устойчивости найденных ротационных движений может быть решен путем вычисления «приближенных» мультипликаторов путем построения матрицы монодромии системы уравнений в вариациях относительно приближенного решения (29). Система уравнений в вариациях имеет вид

$$\begin{aligned}
 \omega_* z_1' + (x_{1*}' - x_{2*})\zeta - \omega_* z_2 + r z_1 &= 0, \\
 (32) \quad \omega_* z_2' + (x_{2*}' + x_{1*})\zeta + \omega_* z_1 + r z_2 &= 0, \\
 \omega_* \zeta' + (\omega_*' + \beta)\zeta + \gamma z_1 &= 0.
 \end{aligned}$$

Коэффициенты системы (32) являются периодическими функциями угла δ , и в матричной форме она может быть записана следующим образом:

$$(33) \quad \omega_* \eta'' + A(\delta)\eta + R\eta = 0,$$

где $\omega_*(\delta)$ – исследуемое периодическое решение (ротация); $A(\delta)$ – матрица периодических функций с периодом 2π , R – постоянная матрица сопротивлений. Решение системы (33) в общем случае может быть представлено в виде суммы произведений экспоненциальных и периодических функций. Граница устойчивости найденного ротационного решения в области параметров m , β , r , γ может быть найдена в результате отыскания периодических решений уравнения в вариациях (33).

Исследование синхронизации электрической машины с сетью с помощью асимптотических, и далее численных и качественных методов, на основе простейших математических моделей синхронных машин показало возможность более грубого перехода к синхронному режиму – при большем начальном расогласовании частоты сети и частоты вращения ротора (скольжения). Для дальнейшего исследования усовершенствования синхронизации машины с сетью на основе предложенной модели представляется необходимым включение возможного управления для поддержания необходимого уровня статорного напряжения.

Литература

1. ВАЖНОВ А.И. *Переходные процессы в машинах переменного тока.* – Л.: Энергия, 1980. – 256 с.
2. ДОМБРОВСКИЙ В.В., ХУТОРЕЦКИЙ Г.М. *Основы проектирования электрических машин переменного тока.* – Л., «Энергия», 1974. – 504 с.
3. ЛЕОНОВ Г.А., КОНДРАТЬЕВА Н.В. *Анализ устойчивости электрических машин переменного тока.* – СПб: Изд-во СПб. ун-та, 2009. – 259 с.
4. ЛЕОНОВ Г.А., СМЕРНОВА В.Б. *Математические проблемы теории фазовой синхронизации.* – СПб: Наука, 2000. – 401 с.
5. ЛЕОНОВ Г.А., СПЕРАНСКАЯ Л.С. *Оценки частоты биеений в многомерных системах ФАП // Радиотехника.* – 1985. – №3. – С. 32–35.
6. РОДЮКОВ Ф.Ф. *Математическая модель большой электроэнергетической системы.* – СПб.: Изд-во СПбГУ, 2005. – 122 с.
7. ЯНКО-ТРИНИЦКИЙ А.А. *Новый метод анализа работы синхронных двигателей при резкопеременных нагрузках.* – М.-Л.: Госэнергоиздат, 1958. – 104 с.
8. SKUBOV D.Yu., KHODZHAEV K.Sh. *Non-Linear Electromechanics* – Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008. – 395 p.

9. STOKER J.J. *Nonlinear vibrations*. – Interscience. New York, 1950. – 273 p. (СТОКЕР Дж. Нелинейные колебания в механических и электрических системах. – М.: ИЛ, 1953, 256 с.)

MOTIONS BIFURCATION OF A LOADED ELECTRICALLY DAMPED PENDULUM (SYNCHRONIZATION OF ELECTRIC MACHINE WITH NETWORK)

Dmitry Skubov, St Petersburg Polytechnic University

Abstract: In this article questions of synchronization of an electric machine with power networks are investigated. Mathematical modeling is performed with numeric-analytical methods for asymptotically simplified equations of synchronous electrical machine dynamics. The possibility of more reliable (as compared to commonly recognized) synchronization with a network is proved, namely, in terms of bigger initial difference of frequencies of turbo-generator rotor and the network.

Keywords: synchronous electrical machine, nonlinear dynamic, electromechanics, stability of periodic motions.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии А. Л. Фрадковым

УДК 681.5.013; 681.514; 681.511.22; 681.516.42; 681.516.74
ББК 32.965.4.32.965.6

СИНТЕЗ АНИЗОТРОПИЙНЫХ РЕГУЛЯТОРОВ МЕТОДАМИ ВЫПУКЛОЙ ОПТИМИЗАЦИИ И ПОЛУОПРЕДЕЛЕННОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ¹

Чайковский М. М.²

*(ФГБУН Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)*

Представлены постановки и решения задач синтеза анизотропийных субоптимальных и γ -оптимальных регуляторов для подавления влияния случайных возмущений с неизвестными распределениями на качество работы системы управления. Рассматривается синтез статической обратной связи по состоянию, регулятора полного порядка по выходу, а также статической обратной связи по выходу. Применение известных линеаризующих замен переменных и процедур выпукления в задачах синтеза для рассматриваемых частных случаев структуры объекта управления и регулятора позволяет выразить решение задачи через систему выпуклых ограничений, представимую в виде системы линейных матричных неравенств. Анизотропийные субоптимальные регуляторы стабилизируют замкнутую систему и сохраняют ее анизотропийную норму ниже заданного порогового значения; γ -оптимальные регуляторы строятся для минимального порогового значения. Разработанный метод синтеза анизотропийных регуляторов является новым и удобным для расчетов.

Ключевые слова: дискретные линейные стационарные системы, случайные возмущения, статистическая неопределенность, норма, анизотропия, выпуклая оптимизация, линейные матричные неравенства.

¹ Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант №11-08-00714-а) и Программы №14 ОЭММПУ РАН.

² Михаил Михайлович Чайковский, доктор технических наук (mmtchaikovsky@hotmail.com).

Введение

Задачи подавления неизвестных возмущений являются чрезвычайно важными задачами теории управления, неизбежно возникающими при проектировании современных систем управления техническими объектами. Как правило, системы автоматического управления работают в условиях помех, под влиянием неизвестных внешних воздействий, к которым относятся как неизвестные заранее и неизмеряемые возмущения, так и задающие команды, известные в данный момент времени, но неизвестные в будущем. Измеряемые значения сигналов содержат случайные ошибки. Управляющие воздействия могут обрабатываться со случайными погрешностями. Для решения задач подавления возмущений в теории управления применяются разнообразные подходы. Оптимальную (или субоптимальную) задачу подавления возмущений можно сформулировать как задачу минимизации (ограничения) влияния этих возмущений на точность работы системы управления или процессы в системе. Выбор критерия качества оптимизации мотивируется различными предположениями о характере возмущений, действующих на систему. В классической задаче синтеза линейно-квадратичного гауссовского регулятора, являющейся частным случаем более общей задачи \mathcal{H}_2 -оптимизации, предполагается, что внешнее возмущение представляет собой гауссовский белый шум [6, 19]. В стандартной задаче \mathcal{H}_∞ -оптимизации линейных стационарных систем управления [13] предполагается, что внешнее воздействие представляет собой сигнал, интегрируемый (суммируемый) с квадратом. Однако в случаях, когда реальные внешние воздействия отличаются от номинальных моделей и исходные предположения относительно их свойств, принятые в процедуре синтеза регулятора, нарушаются, качество работы системы управления может значительно ухудшиться.

Анизотропная теория стохастического робастного управления [2, 3, 29, 34] направлена на преодоление неблагоприятного влияния статистической неопределенности внешних возмуще-

ний, которая рассматривается как различие между неточно известным распределением реального случайного возмущения и распределением его номинальной модели и количественно характеризуется функционалом средней анизотропии [2, 12, 34]. Анизотропийный оптимальный регулятор [35], стабилизирующий замкнутую систему и минимизирующий ее анизотропийную норму, проявляет меньший консерватизм, т.е. характеризуется меньшими энергетическими затратами на управление, чем \mathcal{H}_∞ -регулятор, и более эффективен при подавлении коррелированных внешних возмущений с неизвестными распределениями по сравнению с \mathcal{H}_2 -регулятором [12, 34]. Анизотропийный оптимальный регулятор является оценивающим; его реализация в пространстве состояний вычисляется из единственного решения системы нелинейных перекрестно-связанных матричных алгебраических уравнений, для решения которой разработан специальный вычислительный алгоритм на основе метода гомотопий [11].

В этой статье вниманию читателя предлагается дальнейшее развитие методики синтеза анизотропийных *субоптимальных* регуляторов на основе выпуклой оптимизации и полуопределенного программирования, предложенной в [7, 8, 32, 33]. В отличие от оптимального, субоптимальный регулятор стабилизирует замкнутую систему и обеспечивает подавление возмущений с качеством *не хуже заданного*, гарантируя, что анизотропийная норма замкнутой системы не превосходит заданного порогового значения γ . Общая процедура синтеза анизотропийного регулятора заданного порядка сводится к решению неравенства относительно детерминанта положительно определенной матрицы и двух линейных матричных неравенств (ЛМН) относительно взаимно обратных матриц, результирующая задача оптимизации не является выпуклой [8]. С помощью применения стандартных процедур овыпукления (линеаризирующих замен переменных и введения дополнительных переменных) результирующие задачи оптимизации можно сделать выпуклыми для ряда частных случаев структуры объекта управления и регулятора, рассмотренных в этой работе. Минимизируя пороговое значение γ , для этих частных слу-

чаев можно найти анизотропийные γ -оптимальные регуляторы из решения задач выпуклой оптимизации. Новый метод синтеза анизотропийных регуляторов, не требующий применения специального вычислительного алгоритма на основе метода гомотопий, является привлекательным с вычислительной точки зрения и удобным для практических расчетов, позволяет синтезировать анизотропийные регуляторы не только в форме наблюдателя, но и в форме произвольного динамического компенсатора, а также статической обратной связи по состоянию и измеряемому выходу модели объекта управления.

Работа организована следующим образом. В разделе 1 изложена постановка общей задачи синтеза анизотропийного субоптимального регулятора. В разделе 2 представлено решение задачи синтеза регулятора для трех частных случаев структуры объекта управления и регулятора: регулятор в виде статической обратной связи по состоянию для объекта, состояние которого измеряется точно; динамический регулятор полного порядка по измеряемому выходу; регулятор в виде статической обратной связи по измеряемому выходу. В разделе 3 рассматривается ряд иллюстративных вычислительных примеров, в одном из которых выполнено сравнение анизотропийных оптимального и γ -оптимального регуляторов. Заключительные замечания даны в разделе 4.

В статье используются обозначения работы [8].

1. Постановка задачи синтеза

Объект управления представлен дискретной линейной стационарной моделью $P(z)$ с n_x -мерным состоянием X , m_w -мерным входом возмущения W , m_u -мерным входом управления U , p_z -мерным управляемым выходом Z и p_y -мерным измеряемым выходом Y :

$$(1) \quad P(z) : \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ z_k \\ y_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_w & B_u \\ C_z & D_{zw} & D_{zu} \\ C_y & D_{yw} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ w_k \\ u_k \end{bmatrix},$$

где размерности всех матриц согласованы, $p_z \leq m_w$, пара матриц (A, B_u) является стабилизируемой, а пара (A, C_y) – де-

тектируемой. Предполагается, что внешнее возмущение $W = (w_k)_{-\infty < k < +\infty}$ является случайной последовательностью с ограниченным уровнем средней анизотропии a , т.е.

$$W \in \mathcal{W}_a := \{W \in \ell_{\mathcal{P}}^m : \overline{\mathbf{A}}(W) \leq a\},$$

где

$$\overline{\mathbf{A}}(W) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln \det \left(\frac{m_w S(\omega)}{\|W\|_{\mathcal{P}}^2} \right) d\omega$$

– функционал средней анизотропии [12, 34];

$$\ell_{\mathcal{P}}^m = \{W = (w_k)_{-\infty < k < +\infty} : w_k \in \mathbb{L}_2^m \wedge \|W\|_{\mathcal{P}} < +\infty\},$$

– пространство стационарных в узком смысле последовательностей интегрируемых с квадратом случайных векторов [5];

$$\|W\|_{\mathcal{P}} := \left(\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^N \mathbf{E}|w_k|^2 \right)^{1/2}$$

– мощностная норма последовательности случайных векторов $W = (w_k)_{-\infty < k < +\infty}$ [5, 37], которая может быть вычислена через спектральную плотность $S(\omega)$ этой последовательности:

$$\|W\|_{\mathcal{P}} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \text{tr} S(\omega) d\omega \right)^{1/2}.$$

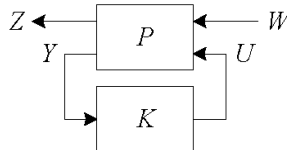


Рис. 1. Замкнутая система

Требуется найти регулятор $K(z)$, стабилизирующий замкнутую систему (рис. 1) и гарантирующий робастное подавление

внешних возмущений с качеством не хуже заданного. Пусть $T_{zw}(z)$ — матричная передаточная функция замкнутой системы от возмущения W к управляемому выходу Z , заданная нижним дробно-линейным преобразованием пары (P, K) :

$$(2) \quad T_{zw}(z) = \mathcal{F}_l(P, K) = P_{zw} + P_{zu}K(I_{p_y} - P_{yu}K)^{-1}P_{yw},$$

где

$$(3) \quad P_{zw}(z) \sim \left[\begin{array}{c|c} A & B_w \\ \hline C_z & D_{zw} \end{array} \right], \quad P_{zu}(z) \sim \left[\begin{array}{c|c} A & B_u \\ \hline C_z & D_{zu} \end{array} \right],$$

$$P_{yw}(z) \sim \left[\begin{array}{c|c} A & B_w \\ \hline C_y & D_{yw} \end{array} \right], \quad P_{yu}(z) \sim \left[\begin{array}{c|c} A & B_u \\ \hline C_y & 0 \end{array} \right].$$

a -Анизотропийная норма передаточной функции $T_{zw}(z) \in \mathcal{H}_\infty^{p_z \times m_w}$ количественно характеризует возможности замкнутой системы по подавлению внешних возмущений и определяется как наибольшее отношение мощностной нормы выхода этой системы к мощностной норме входа при условии, что средняя анизотропия возмущения не превосходит уровня a [12, 34]:

$$(4) \quad \|T_{zw}\|_a := \sup_{W \in \mathcal{W}_a} \frac{\|Z\|_{\mathcal{P}}}{\|W\|_{\mathcal{P}}}.$$

В [4] показано, что для фиксированной системы $F \in \mathcal{H}_\infty^{p_z \times m_w}$ ее a -анизотропийная норма является неубывающей функцией уровня средней анизотропии a , удовлетворяющей неравенству

$$(5) \quad \frac{1}{\sqrt{m_w}} \|T_{zw}\|_2 = \|T_{zw}\|_0 \leq \lim_{a \rightarrow +\infty} \|T_{zw}\|_a = \|T_{zw}\|_\infty,$$

т.е. \mathcal{H}_2 - и \mathcal{H}_∞ -нормы являются предельными случаями a -анизотропийной нормы при $a \rightarrow 0, +\infty$ соответственно.

Общая постановка задачи синтеза анизотропийного субоптимального регулятора следующая.

Задача 1. Для заданных объекта управления P с моделью в пространстве состояний (1), уровня средней анизотропии $a \geq 0$ входного возмущения W и некоторого желаемого порогового значения $\gamma > 0$ найти закон управления в виде обратной связи

$$U = K(z)Y,$$

стабилизирующий замкнутую систему и гарантирующий, что ее a -анизотропийная норма не превышает γ , т.е.

$$(6) \quad \|T_{zw}\|_a < \gamma.$$

2. Решение задачи синтеза

Уравнения замкнутой системы имеют вид

$$(7) \quad T_{zw}(z) : \begin{bmatrix} \chi_{k+1} \\ z_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{C} & \mathcal{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi_k \\ w_k \end{bmatrix},$$

где $\chi_k \in \mathbb{R}^n$, $n \geq n_x$, а матрицы реализации замкнутой системы $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D})$ аффинно зависят от параметров реализации регулятора K .

Для доказательства последующих теорем синтеза, устанавливающих достаточные условия существования анизотропийных субоптимальных регуляторов, нам потребуется вспомогательный результат — модификация частотной теоремы для анизотропийной нормы [7, 32], полученная в [8].

Лемма 1. Пусть $T_{zw} \in \mathcal{H}_{\infty}^{p_z \times m_w}$ — матричная передаточная функция системы с реализацией (7) и $\rho(\mathcal{A}) < 1$. Анизотропийная норма (4) системы T_{zw} строго ограничена заданным пороговым значением $\gamma > 0$, т.е. $\|T_{zw}\|_{\alpha} < \gamma$, если система неравенств

$$(8) \quad \eta - (e^{-2a} \det \Psi)^{1/m_w} < \gamma^2$$

$$(9) \quad \begin{bmatrix} \Psi - \eta I_{m_w} & \mathcal{B}^T & \mathcal{D}^T \\ \mathcal{B} & -\Phi^{-1} & 0 \\ \mathcal{D} & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} \prec 0,$$

$$(10) \quad \begin{bmatrix} -\Phi & 0 & \mathcal{A}^T & \mathcal{C}^T \\ 0 & -\eta I_{m_w} & \mathcal{B}^T & \mathcal{D}^T \\ \mathcal{A} & \mathcal{B} & -\Phi^{-1} & 0 \\ \mathcal{C} & \mathcal{D} & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} \prec 0,$$

$$(11) \quad \eta > \gamma^2, \quad \Psi \succ 0, \quad \Phi \succ 0$$

разрешима относительно скалярной переменной η , вещественных $(m_w \times m_w)$ -матрицы Ψ и $(n \times n)$ -матрицы Φ .

Замечание 1. Неравенство (8) представляет собой выпуклое ограничение относительно вспомогательной переменной Ψ . Подграфик вогнутой функции $(\det \Psi)^{1/m}$ $(m \times m)$ -матрицы $\Psi = \Psi^T \succcurlyeq 0$ представим в виде пересечения конечного числа конусов второго порядка и, следовательно, в виде ЛМН [9], см. также замечание 1 в [8]. Существуют свободно распространяемые

программные пакеты для решения задач выпуклой оптимизации, позволяющие использовать выпуклую функцию $-(\det(\Psi))^{1/m}$ ($m \times m$)-матрицы $\Psi \succcurlyeq 0$ не только в качестве целевой функции, но и в качестве ограничения, например, интерфейс *YALMIP* [26] в сочетании с программой-решателем *SeDuMi* [31] для систем *Matlab* и *Scilab*. В интерфейсе *YALMIP* функции $-(\det(\Psi))^{1/m}$ соответствует команда `geomean`, возвращающая среднее геометрическое собственных чисел положительно-определенной матрицы [26].

2.1. СТАТИЧЕСКАЯ ОБРАТНАЯ СВЯЗЬ ПО СОСТОЯНИЮ

Сперва рассмотрим случай, когда вектор состояния можно измерить точно и модель объекта управления описывается уравнениями

$$(12) \quad P(z) : \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ z_k \\ y_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_w & B_u \\ C_z & D_{zw} & D_{zu} \\ I_{n_x} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ w_k \\ u_k \end{bmatrix},$$

где размерности всех матриц согласованы, $p_z \leq m_w$, пара матриц (A, B_u) является стабилизируемой.

Задача 2. Для заданных объекта управления P с моделью (12), уровня средней анизотропии $\alpha \geq 0$ внешнего возмущения W и некоторого желаемого порогового значения $\gamma > 0$ найти регулятор в форме статической обратной связи по состоянию

$$(13) \quad u_k = Kx_k,$$

стабилизирующий замкнутую систему $T_{zw}(z)$ с реализацией

$$(14) \quad \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} A + B_u K & B_w \\ \hline C_z + D_{zu} K & D_{zw} \end{array} \right]$$

и гарантирующий, что ее α -анизотропийная норма не превышает порогового значения γ , т.е. выполняется неравенство (6).

Следующая теорема дает достаточные условия существования анизотропийного субоптимального регулятора в форме статической обратной связи по состоянию.

Теорема 1. Для заданных $\alpha \geq 0$, $\gamma > 0$ статический регулятор по состоянию (13), стабилизирующий замкнутую систему (14) ($\rho(A + B_u K) < 1$) и гарантирующий выполнение (6),

существует, если система неравенств

$$(15) \quad \eta - (e^{-2a} \det \Psi)^{1/m_w} < \gamma^2,$$

$$(16) \quad \begin{bmatrix} \Psi - \eta I_{m_w} & * & * \\ B_w & -\Pi & * \\ D_{zw} & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} \prec 0,$$

$$(17) \quad \begin{bmatrix} -\Pi & * & * & * \\ 0 & -\eta I_{m_w} & * & * \\ A\Pi + B_u\Lambda & B_w & -\Pi & * \\ C_z\Pi + D_{zu}\Lambda & D_{zw} & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} \prec 0,$$

$$(18) \quad \eta > \gamma^2, \quad \Psi \succ 0, \quad \Pi \succ 0$$

разрешима относительно скалярной переменной η , вещественных $(m_w \times m_w)$ -матрицы Ψ , $(n_x \times n_x)$ -матрицы Π и $(m_u \times n_x)$ -матрицы Λ . Если задача (15)–(18) разрешима, и неизвестные переменные найдены, матрица статического регулятора определяется выражением $K = \Lambda\Pi^{-1}$.

Доказательство. Пусть решение задачи (15)–(18) существует. Определим $\Phi := \overline{\Pi}^{-1}$. По определению $K = \Lambda\Pi^{-1}$, ЛМН (16), (17) можно переписать в виде

$$(19) \quad \begin{bmatrix} \Psi - \eta I_{m_w} & * & * \\ B_w & -\Phi^{-1} & * \\ D_{zw} & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} \prec 0,$$

$$\begin{bmatrix} -\Phi^{-1} & * & * & * \\ 0 & -\eta I_{m_w} & * & * \\ A\Phi^{-1} + B_u K \Phi^{-1} & B_w & -\Phi^{-1} & * \\ C_z \Phi^{-1} + D_{zu} K \Phi^{-1} & D_{zw} & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} \prec 0.$$

Умножая последнее неравенство слева и справа на матрицу $\text{blockdiag}(\Phi, I_{m_w}, I_{n_x}, I_{p_z}) \succ 0$, получим

$$(20) \quad \begin{bmatrix} -\Phi & * & * & * \\ 0 & -\eta I_{m_w} & * & * \\ A + B_u K & B_w & -\Phi^{-1} & * \\ C_z + D_{zu} K & D_{zw} & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} \prec 0.$$

Тогда, в силу леммы 1, из (15), (18), (19), (20) следует, что матрица статического регулятора по состоянию K является решением задачи 2 для замкнутой реализации (14), что и требовалось доказать.

Замечание 2. Нетрудно доказать полную эквивалентность неравенств синтеза (15)–(18) и условий (8)–(10) леммы 1. Однако можно сформулировать и доказать лишь достаточные условия существования регулятора (13), поскольку условия леммы 1 являются лишь достаточными. Это замечание касается также двух последующих теорем синтеза.

Следствие 1. *Неравенства (15)–(18) являются не только выпуклыми по Ψ и аффинными по Π и Λ , но также линейными относительно γ^2 . Минимизируя γ^2 при ограничениях (15)–(18), мы минимизируем γ при тех же ограничениях. Обозначим $\hat{\gamma} := \gamma^2$. Условия теоремы 1 позволяют вычислять наименьшее значение γ из решения задачи оптимизации*

$$(21) \quad \begin{cases} \hat{\gamma} \rightarrow \inf \\ \text{на множестве } \Psi, \Pi, \Lambda, \eta, \hat{\gamma}, \\ \text{удовлетворяющих ограничениям (15)–(18)}. \end{cases}$$

Если задача выпуклой оптимизации (21) разрешима, матрица усиления статического регулятора по состоянию вычисляется согласно теореме 1.

Анизотропийные регуляторы, получаемые из решений задач оптимизации, аналогичных (21), называются анизотропийными γ -оптимальными регуляторами.

2.2. РЕГУЛЯТОР ПО ВЫХОДУ ПОЛНОГО ПОРЯДКА

Для решения задачи синтеза регулятора по выходу полного порядка в форме динамического компенсатора

$$(22) \quad K(z) : \begin{bmatrix} \xi_{k+1} \\ u_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_c & B_c \\ C_c & D_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_k \\ y_k \end{bmatrix}$$

с n_x -мерным состоянием $\Xi = (\xi_k)_{-\infty < k < +\infty}$ можно эффективно применить известную линеаризующую замену переменных, предложенную в [15] и примененную в [30] для решения задач многокритериального управления непрерывными системами с помощью ЛМН.

Для объекта управления (1) и регулятора (22) реализация за-

мкнутой системы $T_{zw}(z)$ имеет вид

$$(23) \quad \left[\begin{array}{c|c} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \hline \mathcal{C} & \mathcal{D} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} A + B_u D_c C_y & B_u C_c & B_w + B_u D_c D_{yw} \\ B_c C_y & A_c & B_c D_{yw} \\ \hline C_z + D_{zu} D_c C_y & D_{zu} C_c & D_{zw} + D_{zu} D_c D_{yw} \end{array} \right].$$

Обозначим в неравенствах (9), (10) леммы 1 $\Pi := \Phi^{-1}$. Из блочного разбиения

$$(24) \quad \Phi = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{12}^T & \Phi_{22} \end{bmatrix}, \quad \Pi = \begin{bmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{12} \\ \Pi_{12}^T & \Pi_{22} \end{bmatrix}$$

и условия

$$(25) \quad \Phi \Pi = I_{2n_x}$$

следует

$$(26) \quad \Phi \begin{bmatrix} \Pi_{11} \\ \Pi_{12}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n_x} \\ 0 \end{bmatrix},$$

откуда

$$\Phi \Pi_1 = \Phi_1, \quad \Pi \Phi_1 = \Pi_1$$

с учетом обозначений

$$(27) \quad \Phi_1 := \begin{bmatrix} I_{n_x} & \Phi_{11} \\ 0 & \Phi_{12}^T \end{bmatrix}, \quad \Pi_1 := \begin{bmatrix} \Pi_{11} & I_{n_x} \\ \Pi_{12}^T & 0 \end{bmatrix}.$$

Прямым вычислением можно показать, что

$$(28) \quad \Pi_1^T \Phi \Pi_1 = \Phi_1^T \Pi_1 = \Phi_1^T \Pi \Phi_1 = \Pi_1^T \Phi_1 = \begin{bmatrix} \Pi_{11} & I_{n_x} \\ I_{n_x} & \Phi_{11} \end{bmatrix}.$$

Ключевая линеаризующая замена переменных матриц регулятора определяется следующим образом [15]:

$$(29) \quad \mathcal{A}_c := \Phi_{12} A_c \Pi_{12}^T + \Phi_{12} B_c C_y \Pi_{11} + \\ + \Phi_{11} B_u C_c \Pi_{12}^T + \Phi_{11} (A + B_u D_c C_y) \Pi_{11},$$

$$(30) \quad \mathcal{B}_c := \Phi_{12} B_c + \Phi_{11} B_u D_c,$$

$$(31) \quad \mathcal{C}_c := C_c \Pi_{12}^T + D_c C_y \Pi_{11},$$

$$(32) \quad \mathcal{D}_c := D_c.$$

Новые переменные $\mathcal{A}_c, \mathcal{B}_c, \mathcal{C}_c, \mathcal{D}_c$ имеют размерности $n_x \times n_x$, $n_x \times p_y$, $m_u \times n_x$ и $m_u \times p_y$ соответственно, даже если $n_\xi \neq n_x$. В [30] отмечено, что если матрицы Φ_{12} и Π_{12} имеют полный

строчный ранг и если матрицы $A_c, B_c, C_c, D_c, \Pi_{11}$ и Φ_{11} известны, всегда можно найти матрицы регулятора A_c, B_c, C_c, D_c , удовлетворяющие (29)–(32). Если матрицы Φ_{12} и Π_{12} являются квадратными ($n_\xi = n_x$) и обратимыми, то матрицы A_c, B_c, C_c и D_c , удовлетворяющие (29)–(32), единственны. Таким образом, при синтезе регулятора полного порядка отображение, определяемое (29)–(32), биективно [15, 30].

Решение задачи 1 синтеза регулятора полного порядка дано в следующей теореме.

Теорема 2. Для заданных $a \geq 0, \gamma > 0$ динамический регулятор по выходу K полного порядка $n_\xi = n_x$ с реализацией (22), являющийся решением задачи 1, существует, если система неравенств

$$(33) \quad \eta - (e^{-2a} \det \Psi)^{1/m_w} < \gamma^2,$$

$$(34) \quad \begin{bmatrix} \Psi - \eta I_{m_w} & * & * & * \\ B_w + B_u \mathcal{D}_c D_{yw} & -\Pi_{11} & * & * \\ \Phi_{11} B_w + \mathcal{B}_c D_{yw} & -I_{n_x} & -\Phi_{11} & * \\ D_{zw} + D_{zu} \mathcal{D}_c D_{yw} & 0 & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} \prec 0,$$

$$(35) \quad \begin{bmatrix} -\Pi_{11} & * & * & * & * & * \\ -I_{n_x} & -\Phi_{11} & * & * & * & * \\ 0 & 0 & -\eta I_{m_w} & * & * & * \\ A\Pi_{11} + B_u C_c & A + B_u \mathcal{D}_c C_y & B_w + B_u \mathcal{D}_c D_{yw} & -\Pi_{11} & * & * \\ A_c & \Phi_{11} A + \mathcal{B}_c C_y & \Phi_{11} B_w + \mathcal{B}_c D_{yw} & -I_{n_x} & -\Phi_{11} & * \\ C_z \Pi_{11} + D_{zu} C_c & C_z + D_{zu} \mathcal{D}_c C_y & D_{zw} + D_{zu} \mathcal{D}_c D_{yw} & 0 & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} \prec 0,$$

$$(36) \quad \eta > \gamma^2, \quad \Pi_{11} \succ 0, \quad \Phi_{11} \succ 0, \quad \begin{bmatrix} \Pi_{11} & I_{n_x} \\ I_{n_x} & \Phi_{11} \end{bmatrix} \succ 0$$

разрешима относительно скалярной переменной η , вещественных $(m_w \times m_w)$ -матрицы Ψ , матриц $A_c \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}, B_c \in \mathbb{R}^{n_x \times p_y}, C_c \in \mathbb{R}^{m_u \times n_x}, D_c \in \mathbb{R}^{m_u \times p_y}$ и двух $(n_x \times n_x)$ -матриц Π_{11}, Φ_{11} . Если задача (33)–(36) разрешима и неизвестные переменные найдены, матрицы регулятора $A_c \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}, B_c \in \mathbb{R}^{n_x \times p_y}, C_c \in \mathbb{R}^{m_u \times n_x}, D_c \in \mathbb{R}^{m_u \times p_y}$ единственным образом определяют

ся выражениями

$$(37) \quad D_c := \mathcal{D}_c,$$

$$(38) \quad C_c := (\mathcal{C}_c - D_c C_y \Pi_{11}) \Pi_{12}^{-T},$$

$$(39) \quad B_c := \Phi_{12}^{-1} (\mathcal{B}_c - \Phi_{11} B_u D_c),$$

$$(40) \quad A_c := \Phi_{12}^{-1} (A_c - \Phi_{12} B_c C_y \Pi_{11} - \Phi_{11} B_u C_c \Pi_{12}^T - \\ - \Phi_{11} (A + B_u D_c C_y) \Pi_{11}) \Pi_{12}^{-T}$$

и вычисляются из решения задачи нахождения двух невырожденных $(n_x \times n_x)$ -матриц Π_{12} , Φ_{12} , удовлетворяющих условию

$$(41) \quad \Pi_{12} \Phi_{12}^T = I_{n_x} - \Pi_{11} \Phi_{11}.$$

Доказательство. Пусть решение системы (33)–(36) существует. Из (27)–(32) и (23) следует, что

$$\begin{bmatrix} A \Pi_{11} + B_u \mathcal{C}_c & A + B_u D_c C_y \\ \mathcal{A}_c & \Phi_{11} A + \mathcal{B}_c C_y \end{bmatrix} = \Phi_1^T \mathcal{A} \Pi_1,$$

$$\begin{bmatrix} B_w + B_u D_c D_{yw} \\ \Phi_{11} B_w + \mathcal{B}_c D_{yw} \end{bmatrix} = \Phi_1^T \mathcal{B},$$

$$\begin{bmatrix} C_z \Pi_{11} + D_{zu} \mathcal{C}_c & C_z + D_{zu} D_c C_y \end{bmatrix} = \mathcal{C} \Pi_1,$$

$$\begin{bmatrix} \Pi_{11} & I_{n_x} \\ I_{n_x} & \Phi_{11} \end{bmatrix} = \Pi_1^T \Phi \Pi_1 = \Phi_1^T \Pi \Phi_1,$$

где Φ и Π определяются (24) и удовлетворяют (25). Подстановка предыдущих выражений в неравенства (34), (35) дает

$$\begin{bmatrix} \Psi - \eta I_{m_w} & \mathcal{B}^T \Phi_1 & \mathcal{D}^T \\ \Phi_1^T \mathcal{B} & -\Phi_1^T \Pi \Phi_1 & 0 \\ \mathcal{D} & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} \prec 0,$$

$$(42) \quad \begin{bmatrix} -\Pi_1^T \Phi \Pi_1 & 0 & \Pi_1^T \mathcal{A}^T \Phi_1 & \Pi_1^T \mathcal{C}^T \\ 0 & -\eta I_{m_w} & \mathcal{B}^T \Phi_1 & \mathcal{D}^T \\ \Phi_1^T \mathcal{A} \Pi_1 & \Phi_1^T \mathcal{B} & -\Phi_1^T \Pi \Phi_1 & 0 \\ \mathcal{C} \Pi_1 & \mathcal{D} & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} \prec 0.$$

Конгруэнтное преобразование неравенств (42) с матрицами

$$\text{blockdiag}(I_{m_w}, \Phi_1^{-T}, I_{p_z}), \quad \text{blockdiag}(\Pi_1^{-T}, I_{m_w}, \Phi_1^{-T}, I_{p_z}),$$

соответственно, приводит к

$$(43) \quad \begin{bmatrix} \Psi - \eta I_{m_w} & \mathcal{B}^T & \mathcal{D}^T \\ \mathcal{B} & -\Pi & 0 \\ \mathcal{D} & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} \prec 0,$$

$$(43) \quad \begin{bmatrix} -\Phi & 0 & \mathcal{A}^T & \mathcal{C}^T \\ 0 & -\eta I_{m_w} & \mathcal{B}^T & \mathcal{D}^T \\ \mathcal{A} & \mathcal{B} & -\Pi & 0 \\ \mathcal{C} & \mathcal{D} & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} \prec 0.$$

Тогда, в силу леммы 1, из (24), (25), (33), (43) следует, что замкнутая система (23) является устойчивой и ее α -анизотропийная норма не превосходит желаемого порогового значения γ , т.е. выполняется неравенство (6). Процедура восстановления матриц реализации регулятора (A_c, B_c, C_c, D_c) из переменных решения (A_c, B_c, C_c, D_c) по формулам (37)–(40), (41) является стандартной [15, 30].

Следствие 2. *Поскольку неравенства (33)–(36) являются линейными по $\hat{\gamma} := \gamma^2$, условия теоремы 2 позволяют вычислять наименьшее значение γ из численного решения задачи выпуклой оптимизации*

$$(44) \quad \begin{cases} \hat{\gamma} \rightarrow \inf \\ \text{на множестве } \Psi, \Phi_{11}, \Pi_{11}, A_c, B_c, C_c, D_c, \eta, \hat{\gamma}, \\ \text{удовлетворяющих ограничениям (33)–(36)}. \end{cases}$$

Если задача выпуклой оптимизации (44) разрешима, матрицы параметров регулятора вычисляются согласно теореме 2.

В [30] подчеркивается, что применяемая процедура синтеза не вносит дополнительного консерватизма в решение задачи. Результат теоремы 2 делает возможным применение анизотропийной нормы замкнутой системы в качестве целевой функции или спецификации качества для определенных групп входных каналов замкнутой системы в задачах многокритериального управления, решение которых основано на существовании общей функции Ляпунова [30], наряду с другими спецификациями качества и целевыми функциями, которые могут быть сформулированы в терминах ЛМН.

2.3. СТАТИЧЕСКАЯ ОБРАТНАЯ СВЯЗЬ ПО ВЫХОДУ

Рассмотрим важный случай, когда регулятор имеет вид статической обратной связи по измеряемому выходу

$$(45) \quad u_k = Ky_k.$$

Предполагается, что для объекта управления (1) и регулятора (45) выполняется условие Кимуры [20] нулевого порядка:

$$n_x - m_u - p_y < 0.$$

Выполнение этого условия гарантирует существование стабилизирующей статической обратной связи по измеряемому выходу.

Задача 3. Для заданного объекта управления P с реализацией (1), уровня средней анизотропии $a \geq 0$ внешнего возмущения W и некоторого желаемого порогового значения $\gamma > 0$ найти регулятор в виде статической обратной связи по измеряемому выходу (45), стабилизирующий замкнутую систему $T_{zw}(z)$ с реализацией

$$(46) \quad \left[\begin{array}{c|c} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \hline \mathcal{C} & \mathcal{D} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} A + B_u K C_y & B_w + B_u K D_{yw} \\ \hline C_z + D_{zu} K C_y & D_{zw} + D_{zu} K D_{yw} \end{array} \right]$$

и гарантирующий, что ее a -анизотропийная норма не превышает порогового значения γ , т.е.

$$(47) \quad \|T_{zw}\|_a < \gamma.$$

В [8] показано, что прямое применение достаточных условий (8)–(10) леммы 1 к реализации замкнутой системы (46) приводит к невыпуклой задаче поиска взаимно обратных матриц, удовлетворяющих двум ЛМН и выпуклому ограничению относительно детерминанта положительно определенной матрицы.

Тем не менее, специальная линеаризующая замена переменных, предложенная в [28], может сделать результирующую задачу оптимизации выпуклой для отдельного класса объектов управления, определенного некоторым структурным свойством. А именно, предполагается, что матричная передаточная функция объекта управления (1) от входа управления U к измеряемому выходу Y равна нулю, т.е. [28]

$$(48) \quad P_{yu}(z) := C_y(zI - A)^{-1}B_u = 0.$$

Для стабилизируемого и детектируемого объекта управления (1), если выполняется условие (48), существует преобразование подобия T , такое что

$$(49) \quad \left[\begin{array}{c|cc} TAT^{-1} & TB_w & TB_u \\ \hline C_z T^{-1} & D_{zw} & D_{zu} \\ C_y T^{-1} & D_{yw} & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|cc} A_{11} & A_{12} & B_{w_1} & B_{u_1} \\ 0 & A_{22} & B_{w_2} & 0 \\ \hline C_{z_1} & C_{z_2} & D_{zw} & D_{zu} \\ 0 & C_{y_2} & D_{yw} & 0 \end{array} \right],$$

где подсистема (A_{11}, B_{u_1}) является управляемой, (A_{11}, C_{y_2}) — наблюдаемой, а матрица A_{22} — устойчивой [28]; см. также [27]. Из представления (49) следует, что реализация системы, замкнутой статической обратной связью по измеряемому выходу, имеет вид (50)

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \hline \mathcal{C} & \mathcal{D} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|cc} A_{11} & A_{12} + B_{u_1} K C_{y_2} & B_{w_1} + B_{u_1} K D_{yw} \\ 0 & A_{22} & B_{w_2} \\ \hline C_{z_1} & C_{z_2} + D_{zu} K C_{y_2} & D_{zw} + D_{zu} K D_{yw} \end{array} \right].$$

Неизвестная матрица Φ в неравенствах (9), (10) леммы 1 разбивается на блоки в соответствии с блочным разбиением \mathcal{A} в (50) [28]:

$$(51) \quad \Phi = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{12}^T & \Phi_{22} \end{bmatrix} \succ 0.$$

Ключевая линеаризующая замена переменных определяется в [28] следующим образом:

$$(52) \quad P := \begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{11}^{-1} & -\Phi_{11}^{-1} \Phi_{12} \\ -\Phi_{12}^T \Phi_{11}^{-1} & \Phi_{22} - \Phi_{12}^T \Phi_{11}^{-1} \Phi_{12} \end{bmatrix}.$$

В [28] отмечено, что преобразование (52) отображает множество всех положительно определенных матриц в множество всех матриц с положительно определенными блоками на главной диагонали; это отображение биективно; обратное отображение определяется как

$$(53) \quad \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{12}^T & \Phi_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q^{-1} & -Q^{-1} S \\ -S^T Q^{-1} & R - S^T Q^{-1} S \end{bmatrix}.$$

Преобразование (52) мотивируется факторизацией [28]

$$(54) \quad P_1 \Phi = P_2,$$

где

$$(55) \quad P_1 := \begin{bmatrix} Q & 0 \\ S^T & I \end{bmatrix}, \quad P_2 := \begin{bmatrix} I & -S \\ 0 & R \end{bmatrix}.$$

Теорема 3. *Предположим, что для объекта управления P с реализацией (1) выполняется условие (48). Для заданных $a \geq 0$, $\gamma > 0$ статический регулятор по выходу (45), являющийся решением задачи 3, существует, если система неравенств*

$$(56) \quad \eta - (e^{-2a} \det \Psi)^{1/m_w} < \gamma^2,$$

$$(57) \quad \begin{bmatrix} \Psi - \eta I_{m_w} & * & * \\ \mathbf{B}(R, S, K) & \mathbf{P}(Q, R) & * \\ \mathbf{D}(K) & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} \prec 0,$$

$$(58) \quad \begin{bmatrix} \mathbf{P}(Q, R) & * & * & * \\ 0 & -\eta I_{m_w} & * & * \\ \mathbf{A}(Q, R, S, K) & \mathbf{B}(R, S, K) & \mathbf{P}(Q, R) & * \\ \mathbf{C}(Q, S, K) & \mathbf{D}(K) & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} \prec 0,$$

$$\mathbf{P}(Q, R) := \begin{bmatrix} -Q & 0 \\ 0 & -R \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}(Q, R, S, K) := \begin{bmatrix} A_{11}Q & A_{11}S - SA_{22} + A_{12} + B_{u_1}KC_{y_2} \\ 0 & RA_{22} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}(R, S, K) := \begin{bmatrix} B_{w_1} + B_{u_1}KD_{yw} - SB_{w_2} \\ RB_{w_2} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}(Q, S, K) := [C_{z_1}Q \quad C_{z_1}S + C_{z_2} + D_{zu}KC_{y_2}],$$

$$\mathbf{D}(K) := D_{zw} + D_{zu}KD_{yw},$$

$$(59) \quad \eta > \gamma^2, \quad \Psi \succ 0, \quad Q \succ 0, \quad R \succ 0$$

разрешима относительно скалярной переменной η , вещественных $(m_w \times m_w)$ -матрицы Ψ , матрицы регулятора K и матриц Q, R и S .

Доказательство. Пусть решение системы неравенств (56)–(59) существует. Тогда из (50), (53), (55) следует, что

$$(60) \quad \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} = P_1 \Phi P_1^T,$$

$$(61) \quad \begin{bmatrix} A_{11}Q & A_{11}S - SA_{22} + A_{12} + B_{u_1}KC_{y_2} \\ 0 & RA_{22} \end{bmatrix} = P_1 \Phi A P_1^T,$$

$$(62) \quad \begin{bmatrix} B_{w_1} + B_{u_1}KD_{yw} - SB_{w_2} \\ RB_{w_2} \end{bmatrix} = P_1 \Phi B,$$

$$(63) \quad [C_{z_1}Q \quad C_{z_1}S + C_{z_2} + D_{zu}KC_{y_2}] = \mathcal{C}P_1^T.$$

Подставляя выражения (60)–(63) в ЛМН (57), (58), получаем

$$(64) \quad \begin{bmatrix} \Psi - \eta I_{m_w} & \mathcal{B}^T \Phi P_1^T & \mathcal{D}^T \\ P_1 \Phi \mathcal{B} & -P_1 \Phi P_1^T & 0 \\ \mathcal{D} & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} \prec 0,$$

$$\begin{bmatrix} -P_1 \Phi P_1^T & 0 & P_1 \mathcal{A}^T \Phi P_1^T & P_1 \mathcal{C}^T \\ 0 & -\eta I_{m_w} & \mathcal{B}^T \Phi P_1^T & \mathcal{D}^T \\ P_1 \Phi \mathcal{A} P_1^T & P_1 \Phi \mathcal{B} & -P_1 \Phi P_1^T & 0 \\ \mathcal{C} P_1^T & \mathcal{D} & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} \prec 0.$$

Конгруэнтное преобразование неравенств (64) с матрицами

$$\text{blockdiag}(I_{m_w}, P_1^{-1}, I_{p_z}), \quad \text{blockdiag}(P_1^{-1}, I_{m_w}, P_1^{-1}, I_{p_z})$$

соответственно, где P_1 определяется (55), приводит к

$$\begin{bmatrix} \Psi - \eta I_{m_w} & \mathcal{B}^T \Phi & \mathcal{D}^T \\ \Phi \mathcal{B} & -\Phi & 0 \\ \mathcal{D} & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} \prec 0,$$

$$(65) \quad \begin{bmatrix} -\Phi & 0 & \mathcal{A}^T \Phi & \mathcal{C}^T \\ 0 & -\eta I_{m_w} & \mathcal{B}^T \Phi & \mathcal{D}^T \\ \Phi \mathcal{A} & \Phi \mathcal{B} & -\Phi & 0 \\ \mathcal{C} & \mathcal{D} & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} \prec 0.$$

Умножая неравенства (65) слева и справа на матрицы

$$\text{blockdiag}(I_{m_w}, \Phi^{-1}, I_{p_z}) \succ 0, \quad \text{blockdiag}(I_{n_x}, I_{m_w}, \Phi^{-1}, I_{p_z}) \succ 0$$

соответственно, получим

$$\begin{bmatrix} \Psi - \eta I_{m_w} & \mathcal{B}^T & \mathcal{D}^T \\ \mathcal{B} & -\Phi^{-1} & 0 \\ \mathcal{D} & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} \prec 0,$$

$$(66) \quad \begin{bmatrix} -\Phi & 0 & \mathcal{A}^T & \mathcal{C}^T \\ 0 & -\eta I_{m_w} & \mathcal{B}^T & \mathcal{D}^T \\ \mathcal{A} & \mathcal{B} & -\Phi^{-1} & 0 \\ \mathcal{C} & \mathcal{D} & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} \prec 0.$$

Тогда, в силу леммы 1, из (51),(56), (59),(66) следует, что матрица статического регулятора по выходу K является решением задачи 3 для объекта управления (49) и замкнутой системы (50), что и требовалось доказать.

Следствие 3. *Условия теоремы 3 позволяют вычислять наименьшее значение γ из решения задачи выпуклой оптимизации*

$$(67) \quad \left\{ \begin{array}{l} \hat{\gamma} \rightarrow \inf \\ \text{на множестве } \Psi, Q, R, S, K, \eta, \hat{\gamma}, \\ \text{удовлетворяющих ограничениям (56)–(59),} \end{array} \right.$$

где $\hat{\gamma} := \gamma^2$.

Матрица коэффициента усиления K статического регулятора по выходу непосредственно входит в ЛМН (57), (58). Как отмечено в [28], это позволяет налагать на матрицу регулятора некоторые структурные требования для синтеза, например, децентрализованного управления (с блочно-диагональной матрицей K) из решения задачи выпуклой оптимизации (67).

Результат теоремы 3 делает возможным применение анизотропной нормы замкнутой системы в качестве целевой функции или спецификации качества для определенных групп вход-выходных каналов замкнутой системы в задачах многокритериального управления со спецификациями в терминах ЛМН, рассматриваемых в [30].

Следует также отметить, что в общем случае, когда структурное свойство (48) не выполняется, можно следовать [28] и использовать параметризацию Юлы–Кучеры стабилизирующего регулятора [21, 36] для аффинной параметризации замкнутой системы, навязывая указанное структурное свойство и приводя реализацию замкнутой системы к виду (49). Тогда задачу синтеза анизотропного регулятора можно переформулировать как задачу нахождения параметра Юлы, входящего в замкнутую систему аффинно, посредством применения результата теоремы 3 и следствия 3.

Кроме класса систем, для которых выполняется структурное свойство (48), существуют два важных частных случая структуры

объекта управления, которые позволяют сформулировать задачу синтеза статического регулятора по выходу в виде задачи выпуклой оптимизации посредством применения невырожденных преобразований координат и введения некоторых вспомогательных переменных аналогично тому, как это было сделано в [23] для задач синтеза \mathcal{H}_∞ -регуляторов. Эти случаи называются сингулярными задачами управления и фильтрации.

Рассмотрим сперва сингулярную задачу управления, когда матрица D_{zu} реализации объекта управления (1) равна нулю, а матрица B_u имеет полный ранг по столбцам. Тогда существует невырожденная матрица преобразования координат состояния T_u такая что [23]

$$(68) \quad \bar{B}_u := T_u B_u = \begin{bmatrix} I_{m_u} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

В частности, такая матрица может быть выбрана в виде $T_u = [B_u \ \mathcal{N}_{B_u^T}]^{-1}$, где столбцы матрицы $\mathcal{N}_{B_u^T}$ образуют базис нуль-пространства матрицы B_u^T . В новых координатах матрицы реализации объекта управления имеют вид

$$(69) \quad \bar{A} := T_u A T_u^{-1}, \bar{B}_w := T_u B_w, \bar{C}_z := C_z T_u^{-1}, \bar{C}_y := C_y T_u^{-1}.$$

Теорема 4. Пусть для объекта управления P с реализацией (1) выполняется $D_{zu} = 0$ и $\text{rank } B_u = m_u$. Для заданных $a \geq 0$, $\gamma > 0$ анизотропный субоптимальный регулятор в виде статической обратной связи по выходу (45), являющийся решением задачи 3 для реализации замкнутой системы

$$(70) \quad \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} A + B_u K C_y & B_w + B_u K D_{yw} \\ \hline C_z & D_{zw} \end{array} \right],$$

существует, если система неравенств

$$(71) \quad \eta - (e^{-2a/m_w} \det \Psi)^{1/m_w} < \gamma^2,$$

$$(72) \quad \left[\begin{array}{ccc|c} \Psi - \eta I_{m_w} & * & * & \\ \bar{S} \bar{B}_w + L D_{yw} & \bar{\Phi} - \bar{S} - \bar{S}^T & * & \\ D_{zw} & 0 & -I_{p_z} & \end{array} \right] < 0,$$

$$(73) \quad \left[\begin{array}{ccc|c} -\bar{\Phi} & * & * & * \\ 0 & -\eta I_{m_w} & * & * \\ \bar{S} \bar{A} + L \bar{C}_y & \bar{S} \bar{B}_w + L D_{yw} & \bar{\Phi} - \bar{S} - \bar{S}^T & * \\ \bar{C}_z & D_{zw} & 0 & -I_{p_z} \end{array} \right] < 0,$$

(74) $\eta > \gamma^2, \quad \Psi \succ 0, \quad \bar{\Phi} \succ 0,$
 где $\bar{A}, \bar{B}_w, \bar{C}_z, \bar{C}_y$ определяются (69), разрешима относительно скалярной переменной η , вещественных $(m_w \times m_w)$ -матрицы Ψ , $(n_x \times n_x)$ -матрицы $\bar{\Phi}$ и двух структурированных матричных переменных

$$(75) \quad \bar{S} := \begin{bmatrix} \bar{S}_1 & 0 \\ 0 & \bar{S}_2 \end{bmatrix}, \quad L := \begin{bmatrix} L_1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Если система неравенств (71)–(74) разрешима и неизвестные переменные найдены, матрица статического регулятора по выходу $K = \bar{S}_1^{-1} L_1$.

Доказательство. Пусть решение системы неравенств (71)–(74) существует. Конгруэнтное преобразование неравенств (72), (73) с матрицами

$$\text{blockdiag}(I_{m_w}, T_u^\top, I_{p_z}), \quad \text{blockdiag}(T_u^\top, I_{m_w}, T_u^\top, I_{p_z})$$

соответственно, приводит к

$$\begin{bmatrix} \Psi - \eta I_{m_w} & * & * \\ T_u^\top \bar{S} T_u B_w + T_u^\top L D_{yw} & T_u^\top (\bar{\Phi} - \bar{S} - \bar{S}^\top) T_u & * \\ D_{zw} & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} \prec 0,$$

$$\begin{bmatrix} -T_u^\top \bar{\Phi} T_u & * & * & * \\ 0 & -\eta I_{m_w} & * & * \\ T_u^\top \bar{S} T_u A + T_u^\top L C_y & T_u^\top \bar{S} T_u B_w + T_u^\top L D_{yw} & T_u^\top (\bar{\Phi} - \bar{S} - \bar{S}^\top) T_u & * \\ C_z & D_{zw} & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} \prec 0$$

где матрицы реализации объекта управления получены применением обратного преобразования (69). Обозначим $S := T_u^\top \bar{S} T_u$, $\Phi := T_u^\top \bar{\Phi} T_u$. Тогда из (75) и определения $K = \bar{S}_1^{-1} L_1$ следует, что

$$(76) \quad T_u^\top L = T_u^\top \begin{bmatrix} L_1 \\ 0 \end{bmatrix} = T_u^\top \begin{bmatrix} \bar{S}_1 & 0 \\ 0 & \bar{S}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{m_u} \\ 0 \end{bmatrix} K = \\ = T_u^\top \bar{S} \bar{B}_u K = S B_u K,$$

и предыдущие ЛМН можно переписать в виде

$$\begin{bmatrix} \Psi - \eta I_{m_w} & * & * \\ S(B_w + B_u K D_{yw}) & \Phi - S - S^\top & * \\ D_{zw} & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} \prec 0,$$

$$\begin{bmatrix} -\Phi & * & * & * \\ 0 & -\eta I_{m_w} & * & * \\ S(A + B_u K C_y) & S(B_w + B_u K D_{yw}) & \Phi - S - S^T & * \\ C_z & D_{zw} & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} \prec 0,$$

или, в терминах реализации замкнутой системы (70), в виде

$$\begin{bmatrix} \Psi - \eta I_{m_w} & * & * \\ S\mathcal{B} & \Phi - S - S^T & * \\ \mathcal{D} & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} \prec 0,$$

$$\begin{bmatrix} -\Phi & * & * & * \\ 0 & -\eta I_{m_w} & * & * \\ S\mathcal{A} & S\mathcal{B} & \Phi - S - S^T & * \\ \mathcal{C} & \mathcal{D} & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} \prec 0.$$

Конгруэнтное преобразование предыдущих неравенств с матрицами

$$\text{blockdiag}(I_{m_w}, S^{-1}, I_{p_z}), \quad \text{blockdiag}(I_{n_x}, I_{m_w}, S^{-1}, I_{p_z})$$

соответственно, приводит к

$$(77) \quad \begin{bmatrix} \Psi - \eta I_{m_w} & * & * \\ \mathcal{B} & S^{-1}\Phi S^{-T} - S^{-1} - S^{-T} & * \\ \mathcal{D} & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} \prec 0,$$

$$(78) \quad \begin{bmatrix} -\Phi & * & * & * \\ 0 & -\eta I_{m_w} & * & * \\ \mathcal{A} & \mathcal{B} & S^{-1}\Phi S^{-T} - S^{-1} - S^{-T} & * \\ \mathcal{C} & \mathcal{D} & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} \prec 0.$$

Из неравенства

$$(S^{-1} - \Phi^{-1})(-\Phi)(S^{-1} - \Phi^{-1})^T \prec 0$$

следует, что

$$-\Phi^{-1} \prec S^{-1}\Phi S^{-T} - S^{-1} - S^{-T}.$$

Тогда, в силу леммы 1, из (71), (74), (77), (78) следует, что матрица статического регулятора K является решением задачи 3 для замкнутой системы с реализацией (70), что и требовалось доказать.

Замечание 3. В отличие от доказательств теорем 1–3, для теоремы 4 невозможно доказать эквивалентность неравенств синтеза (71)–(74) и условий (8)–(10) леммы 1. ЛМН синтеза (72), (73) устанавливают только достаточные условия разрешимости неравенств (9), (10) леммы 1. Это также касается и последующей теоремы синтеза.

Следствие 4. Условия теоремы 4 позволяют вычислять наименьшее значение γ из решения задачи выпуклой оптимизации

$$(79) \quad \left\{ \begin{array}{l} \hat{\gamma} \rightarrow \inf \\ \text{на множестве } \Psi, \bar{\Phi}, \bar{S}, L, \eta, \hat{\gamma}, \\ \text{удовлетворяющих ограничениям (71)–(74),} \end{array} \right.$$

где $\hat{\gamma} := \gamma^2$. Если задача (79) разрешима, матрица статического регулятора вычисляется согласно теореме 4.

Рассмотрим теперь сингулярную задачу фильтрации, когда матрица D_{yw} реализации объекта управления (1) равна нулю, а матрица C_y имеет полный строчный ранг. Тогда существует невырожденная матрица преобразования координат T_y , такая что [23]

$$(80) \quad \bar{C}_y := C_y T_y^{-1} = \begin{bmatrix} I_{p_y} & 0 \end{bmatrix}.$$

В частности, такую матрицу можно выбрать в виде $T_y = \begin{bmatrix} C_y^T & \mathcal{N}_{C_y} \end{bmatrix}^T$, где строки матрицы \mathcal{N}_{C_y} образуют базис нуль-пространства матрицы C_y . В новых координатах матрицы реализации объекта управления имеют вид

$$(81) \quad \bar{A} := T_y A T_y^{-1}, \quad \bar{B}_w := T_y B_w, \quad \bar{B}_u := T_y B_u, \quad \bar{C}_z := C_z T_y^{-1}.$$

Теорема 5. Предположим, что для объекта управления P с реализацией (1) выполняется $D_{yw} = 0$ и $\text{rank } C_y = p_y$. Для заданных $a \geq 0$, $\gamma > 0$ статический регулятор по выходу (45), являющийся решением задачи 3 для реализации замкнутой системы

$$(82) \quad \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} A + B_u K C_y & B_w \\ \hline C_z + D_{zu} K C_y & D_{zw} \end{array} \right],$$

существует, если система неравенств

$$(83) \quad \eta - (e^{-2a} \det \Psi)^{1/m_w} < \gamma^2,$$

$$(84) \quad \left[\begin{array}{ccc} \Psi - \eta I_{m_w} & * & * \\ \bar{B}_w & -\bar{\Pi} & * \\ D_{zw} & 0 & -I_{p_z} \end{array} \right] \prec 0,$$

$$(85) \quad \begin{bmatrix} \bar{\Pi} - \bar{R} - \bar{R}^T & * & * & * \\ 0 & -\eta I_{m_w} & * & * \\ \bar{A}\bar{R} + \bar{B}_u M & \bar{B}_w & -\bar{\Pi} & * \\ \bar{C}_z \bar{R} + D_{zu} M & D_{zw} & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} \prec 0,$$

$$(86) \quad \eta > \gamma^2, \quad \Psi \succ 0, \quad \bar{\Pi} \succ 0,$$

где \bar{A} , \bar{B}_w , \bar{C}_z , \bar{C}_y определяются (81), разрешима в отношении скалярной переменной η , вещественных $(m_w \times m_w)$ -матрицы Ψ , $(n_x \times n_x)$ -матрицы $\bar{\Pi}$ и двух структурированных матричных переменных

$$(87) \quad \bar{R} := \begin{bmatrix} \bar{R}_1 & 0 \\ 0 & \bar{R}_2 \end{bmatrix}, \quad M := \begin{bmatrix} M_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Если система неравенств (83)–(86) разрешима и неизвестные переменные найдены, матрица статического регулятора по выходу $K = M_1 \bar{R}_1^{-1}$.

Доказательство этой теоремы дуально доказательству теоремы 4.

Доказательство. Пусть существует решение системы неравенств (83)–(86). Поставим матрицы реализации, определяемые (81), в ЛМН (84), (85). Выполним конгруэнтное преобразование ЛМН (84), (85) с матрицами

$$\text{blockdiag}(I_{m_w}, T_y^{-1}, I_{p_z}), \quad \text{blockdiag}(T_y^{-1}, I_{m_w}, T_y^{-1}, I_{p_z})$$

соответственно. Затем определим $R := T_y^{-1} \bar{R} T_y^{-T}$ и $\Pi := T_y^{-1} \bar{\Pi} T_y^{-T}$. Из (87) и определения $K = M_1 \bar{R}_1^{-1}$ следует, что $M T_y^{-T} = K C_y R$ и ЛМН (84), (85) можно переписать в виде

$$\begin{bmatrix} \Psi - \eta I_{m_w} & * & * \\ B_w & -\Pi & * \\ D_{zw} & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} \prec 0,$$

$$\begin{bmatrix} \Pi - R - R^T & * & * & * \\ 0 & -\eta I_{m_w} & * & * \\ (A + B_u K C_y) R & B_w & -\Pi & * \\ (C_z + D_{zu} K C_y) R & D_{zw} & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} \prec 0,$$

или, в терминах реализации замкнутой системы (82), в виде

$$(88) \quad \begin{bmatrix} \Psi - \eta I_{m_w} & * & * \\ \mathcal{B} & -\Pi & * \\ \mathcal{D} & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} \prec 0,$$

$$(88) \quad \begin{bmatrix} \Pi - R - R^T & * & * & * \\ 0 & -\eta I_{m_w} & * & * \\ \mathcal{A}R & \mathcal{B} & -\Pi & * \\ \mathcal{C}R & \mathcal{D} & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} \prec 0.$$

Конгруэнтное преобразование последнего неравенства с матрицей

$$\text{blockdiag}(R^{-T}, I_{m_w}, I_{n_x}, I_{p_z})$$

приводит к

$$(89) \quad \begin{bmatrix} R^{-T}\Pi R^{-1} - R^{-1} - R^{-T} & * & * & * \\ 0 & -\eta I_{m_w} & * & * \\ \mathcal{A} & \mathcal{B} & -\Pi & * \\ \mathcal{C} & \mathcal{D} & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} \prec 0.$$

Из неравенства

$$(R^{-1} - \Pi^{-1})^T(-\Pi)(R^{-1} - \Pi^{-1}) \prec 0$$

следует

$$-\Pi^{-1} \prec R^{-T}\Pi R^{-1} - R^{-1} - R^{-T}.$$

Обозначим $\Phi := \Pi^{-1}$. В силу леммы 1, из (83), (86), (88), (89) следует, что матрица статического регулятора по выходу K является решением задачи 3 для реализации замкнутой системы (82), что и требовалось доказать.

Следствие 5. Условия теоремы 5 позволяют вычислять наименьшее значение γ из решения задачи выпуклой оптимизации

$$(90) \quad \begin{cases} \hat{\gamma} \rightarrow \inf \\ \text{на множестве } \Psi, \bar{\Pi}, \bar{R}, M, \eta, \hat{\gamma}, \\ \text{удовлетворяющих ограничениям (83)–(86),} \end{cases}$$

$\hat{\gamma} := \gamma^2$. Если задача (90) разрешима, матрица регулятора вычисляется согласно теореме 5.

Как отмечено в [23], поскольку сингулярные задачи управления и фильтрации дуальны, системы неравенств (71)–(74) и (83)–(86) теорем 4 и 5 в некотором смысле также являются дуальными, как и задачи выпуклой оптимизации (79) и (90) следствий 4 и 5. Заменяя матрицы реализаций и переменные в новых координатах в формулах теоремы 4 и следствия 4 как

$$\begin{aligned} \{\bar{A}, \bar{B}_w, \bar{B}_u, \bar{C}_z, D_{zw}, \bar{C}_y, D_{yw}\} \\ \longrightarrow \{\bar{A}^T, \bar{C}_z^T, \bar{C}_y^T, \bar{B}_w^T, D_{zw}^T, \bar{B}_u^T, D_{zu}^T\}, \\ \{\eta, \Psi, \bar{\Phi}, \bar{S}, L\} \longrightarrow \{\eta, \Psi, \bar{\Pi}, \bar{R}^T, M^T\}, \end{aligned}$$

получим соответствующие формулы теоремы 5 и следствия 5, где матрица статического регулятора по выходу $K \longrightarrow K^T$.

В [23] показано, что результаты теоремы 4 и следствия 4 можно применять для синтеза децентрализованных анизотропийных субоптимальных и γ -регуляторов в виде статической обратной связи по выходу и заданного порядка. В свою очередь, теорема 5 и следствие 5 позволяют получить решение задач анизотропийного управления множественными объектами по измеряемому выходу.

2.4. СИНТЕЗ РЕГУЛЯТОРА ЗАДАННОГО ПОРЯДКА С ПОМОЩЬЮ ВЫПУКЛОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Известно (см. например [17]), что задачу синтеза динамического регулятора заданного порядка можно представить в виде задачи синтеза статического регулятора по выходу, дополнив вектор состояния объекта управления состояниями регулятора:

$$(91) \quad \begin{bmatrix} A & B_w & B_u \\ C_z & D_{zw} & D_{zu} \\ C_y & D_{yw} & 0 \end{bmatrix} := \left[\begin{array}{cc|cc} A & 0 & B_w & 0 & B_u \\ 0 & 0 & 0 & I_{n_\xi} & 0 \\ \hline C_z & 0 & D_{zw} & 0 & D_{zu} \\ 0 & I_{n_\xi} & 0 & 0 & 0 \\ C_y & 0 & D_{yw} & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Реализация замкнутой системы с расширенным объектом управления (91) имеет вид

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & B_w \\ C_z & D_{zw} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_u \\ D_{zu} \end{bmatrix} K \begin{bmatrix} C_y & D_{yw} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} A + B_u K C_y & B_w + B_u K D_{zw} \\ C_z + D_{zw} K C_y & D_{zw} + D_{zu} K D_{yw} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

где матрица K включает матрицы параметров регулятора:

$$(92) \quad K := \begin{bmatrix} A_c & B_c \\ C_c & D_c \end{bmatrix}.$$

Поэтому, если в модели объекта управления (1) одна из матриц D_{zu} или D_{yw} равна нулю, и матрицы B_u или C_y имеют полный столбцовый/строчный ранг соответственно, можно применить теорему 4 и следствие 4 или теорему 5 и следствие 5, чтобы найти анизотропийный γ -оптимальный (субоптимальный) регулятор заданного порядка как решение задачи синтеза статического регулятора по выходу (92) для расширенной реализации объекта управления (91).

3. Примеры решения прикладных задач

В этом разделе мы рассмотрим несколько иллюстративных примеров синтеза анизотропийных γ -оптимальных регуляторов методом выпуклой оптимизации. Будут рассматриваться только два частных случая структуры регулятора и объекта, а именно, регулятор полного порядка и статическая обратная связь по выходу для сингулярной задачи фильтрации, определенные в теоремах 2 и 5 соответственно.

Все вычисления выполнялись в системе *MATLAB* 7.9.0 (R2009b) средствами пакетов *Control System Toolbox* и *Robust Control Toolbox* в сочетании с интерфейсом *YALMIP* [26] и решателем *SeDuMi* [31] на процессоре P8700 2×2 , 53ГГц.

3.1. СИНТЕЗ РЕГУЛЯТОРА ПОЛНОГО ПОРЯДКА ПО ВЫХОДУ

3.1.1. ПОСАДКА САМОЛЕТА ТУ-154

Рассмотрим сперва задачу управления продольным движением самолета при заходе на посадку под воздействием детерминированных и стохастических возмущений в условиях сдвига ветра и шума измерений. Управление направлено на подавление влияния внешних возмущений и стабилизацию продольного движения самолета вдоль некоторой заданной глиссады. Линеаризованная дискретная стационарная модель посадки самолета Ту-154 представлена в [22], где задача была решена с помощью анизотропийного оптимального регулятора [35], и подробно рассмотрена в [8]. Здесь приводятся результаты решения задачи синтеза анизотропийного γ -оптимального регулятора полного порядка методом выпуклой оптимизации в соответствии с теоремой 2 и следствием 2.

Математическая модель продольного движения самолета в отклонениях от номинальной траектории приводится в [8, 22] для точки траектории, характеризующейся воздушной скоростью $V_0 = 71,38$ м/с, углом наклона траектории полета $\theta_0 = -2,7$ град, угловой скоростью тангажа $\omega_{z0} = 0$ град/с, углом тангажа $\vartheta_0 = 0$ град, высотой $h_0 = 600$ м и тягой $T_0 = 52540$ Н. Модель имеет порядок $n_x = 6$, два входа управления (сигналы $\Delta\vartheta_{cy}$ и $\Delta\delta_t$, генерируемые регулятором для отклонения обобщенных элеронов и положения сектора газа) и два измеряемых выхода (отклонения воздушной скорости $\Delta V + w_{V,k}$ и высоты $\Delta h + w_{h,k}$). Шаг дискретного времени модели $\Delta t = 0,01$ с.

Анизотропийный γ -оптимальный регулятор K_a был получен из решения задачи выпуклой оптимизации (44) по теореме 2. Реализация в пространстве состояний анизотропийного γ -оптимального регулятора K_a была вычислена для уровня средней

анизотропии возмущения $a = 0,7$ и имеет вид

$$A_c^a = \begin{bmatrix} 0,9959 & -0,0001701 & -0,0009358 & -0,001023 & 0,005572 & 0,01975 \\ -0,001248 & 0,9946 & 0,007195 & -0,0001598 & -0,00115 & 0,002974 \\ 0,003114 & -0,01651 & 0,9865 & 0,0004621 & 0,01104 & -0,004157 \\ 0,0009071 & 0,0004571 & -0,002899 & 0,9953 & -0,00819 & 0,006493 \\ -0,001239 & -0,004594 & -0,002913 & -0,0006268 & 0,9905 & -0,003993 \\ -0,0006717 & -0,0216 & -0,0315 & -0,06266 & 0,007809 & 0,9647 \end{bmatrix},$$

$$C_c^a = \begin{bmatrix} 5,558 \cdot 10^{-6} & 4,835 \cdot 10^{-5} & -2,522 \cdot 10^{-5} & 0,00066 & 0,002 & -0,0015 \\ 1,122 \cdot 10^{-5} & 4,891 \cdot 10^{-5} & 7,805 \cdot 10^{-5} & 0,0001 & -0,00058 & -0,0020 \end{bmatrix},$$

$$B_c^a = \begin{bmatrix} 1,698 & 0,7115 \\ 0,2287 & 0,1535 \\ -0,02124 & -0,06646 \\ -5,48 & -1,223 \\ 22,7 & 1,848 \\ 79,44 & 34,71 \end{bmatrix}, \quad D_c^a = \begin{bmatrix} -0,08091 & -0,05013 \\ -0,1794 & -0,07335 \end{bmatrix}.$$

Реализации \mathcal{H}_2 - и \mathcal{H}_∞ -регуляторов K_2 и K_∞ были вычислены функциями пакета *Robust Control Toolbox* системы *MATLAB* `h2syn` (решение уравнений Риккати) и `hinfsyn` (ЛМН). Матрицы реализации регулятора K_2 имеют вид

$$A_c^2 = \begin{bmatrix} 0,9901 & -0,0008 & 0 & -0,0009 & -0,000133 & 0,0009 \\ 0,002025 & 0,9962 & 0,001999 & 0,008616 & -0,002482 & 6,243 \cdot 10^{-5} \\ -0,007851 & -0,01844 & 0,9754 & -0,0292 & -0,01198 & -0,0006086 \\ -0,0001271 & -0,0002021 & 0,009825 & 0,9998 & -0,001113 & -5,202 \cdot 10^{-6} \\ -0,0006442 & 0,0124 & 0 & 0 & 0,9862 & 0 \\ -0,003035 & -0,0006769 & -0,0001388 & -0,0001432 & -0,0004761 & 0,9954 \end{bmatrix},$$

$$C_c^2 = \begin{bmatrix} -0,6649 & -2,021 & -0,749 & -1,18 & -0,9897 & -0,05202 \\ -0,7587 & -0,1692 & -0,03469 & -0,03581 & -0,119 & -0,1572 \end{bmatrix},$$

$$B_c^2 = \begin{bmatrix} 0,009301 & 0,000133 \\ 0,0009729 & 0,003669 \\ 0,0001711 & 0,0003985 \\ 6,059 \cdot 10^{-5} & 0,001014 \\ 0,0001442 & 0,01381 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_c^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Матрицы реализации регулятора K_∞ равны

$$A_c^\infty = \begin{bmatrix} 0,9959 & -0,0001701 & -0,0009358 & -0,001023 & 0,005572 & 0,01975 \\ -0,001248 & 0,9946 & 0,007195 & -0,0001598 & -0,00115 & 0,002974 \\ 0,003114 & -0,01651 & 0,9865 & 0,0004621 & 0,01104 & -0,004157 \\ 0,0009071 & 0,0004571 & -0,002899 & 0,9953 & -0,00819 & 0,006493 \\ -0,001239 & -0,004594 & -0,002913 & -0,0006268 & 0,9905 & -0,003993 \\ -0,0006717 & -0,0216 & -0,0315 & -0,06266 & 0,007809 & 0,9647 \end{bmatrix},$$

$$C_c^\infty = \begin{bmatrix} 5,558 \cdot 10^{-6} & 4,835 \cdot 10^{-5} & -2,522 \cdot 10^{-5} & 0,00066 & 0,002 & -0,0015 \\ 1,122 \cdot 10^{-5} & 4,891 \cdot 10^{-5} & 7,805 \cdot 10^{-5} & 0,0001 & -0,00058 & -0,0020 \end{bmatrix},$$

$$B_c^\infty = \begin{bmatrix} 1,698 & 0,7115 \\ 0,2287 & 0,1535 \\ -0,02124 & -0,06646 \\ -5,48 & -1,223 \\ 22,7 & 1,848 \\ 79,44 & 34,71 \end{bmatrix}, \quad D_c^\infty = \begin{bmatrix} -0,08091 & -0,05013 \\ -0,1794 & -0,07335 \end{bmatrix}.$$

Результаты моделирования замкнутых систем в условиях сдвига ветра и шумов измерений представлены вместе с результатами решения задачи в таблице 1 и проиллюстрированы на рис. 2–5. При моделировании применялся типичный профиль ветра, описываемый моделью в форме вихревого кольца [18].

Из результатов решения задачи в таблице 1 можно заключить, что

- квадратный корень из наименьшего значения целевой функции удовлетворяет цепочке неравенств $\gamma_2 < \gamma_a < \gamma_\infty$;
- a -анизотропийная норма замкнутой системы с анизотропийным γ -оптимальным регулятором удовлетворяет условию $\|T_{zw}\|_{0,7} < \gamma_a$; регулятор является действительно субоптимальным.

Анализ результатов моделирования, представленных в таблице 1 и на рис. 2–5, показывает, что

- анизотропийный γ -оптимальный регулятор приводит к наименьшему максимальному абсолютному отклонению воздушной скорости и допустимому максимальному абсолютному отклонению высоты;

Таблица 1. Посадка самолета Ту-154. Сравнение замкнутых систем

	Регулятор в цепи обратной связи		
	K_2	K_a	K_∞
Результаты решения:			
$\min \gamma$	0,516	5,4203	10,894
$\ T_{zw}\ _2$	0,516	1,1473	3,1448
$\ T_{zw}\ _{0,7}$	7,8391	5,1768	5,5944
$\ T_{zw}\ _\infty$	15,855	10,93	10,891
Время ЦП, с	0,78001	5,928	1,7004
Результаты моделирования:			
$\max \Delta V $, м/с	11,3	3,559	4,329
$\max \Delta h $, м	54,79	46,87	39,79
$\max \Delta \theta $, град	14,86	16,04	31,6
$\max \Delta \omega_z $, град/с	4,884	5,043	10,56
$\max \Delta \vartheta $, град	19,06	19	38,08
$\max \Delta T $, кН	7,263	22,58	42,48
$\max \Delta \vartheta_{cy} $, град	20,7	20,8	21,91
$\max \Delta \delta_t $, град	8,224	29,25	29,23

- наихудшие максимальные абсолютные отклонения управляемых переменных продемонстрированы замкнутой системой с \mathcal{H}_2 -оптимальным регулятором;
- в замкнутой системе с анизотропийным регулятором максимальное дополнительное значение тяги двигателя, требуемое для маневра, почти в два раза меньше, чем дополнительная тяга, требуемая системой с \mathcal{H}_∞ -регулятором;
- аналогичные замечания можно сделать в отношении максимальных значений отклонений угла наклона траектории, угловой скорости тангажа и угла тангажа;
- наименьшее максимальное значение дополнительной тяги двигателя требуется замкнутой системе с \mathcal{H}_2 -оптимальным регулятором;
- наибольшие значения сигналов управления анизотропийного и \mathcal{H}_∞ -регуляторов близки, но сигнал управления, генерируемый анизотропийным регулятором выглядит более реалистичным.

Очевидно, что анизотропный γ -оптимальный регулятор в рассматриваемой задаче подавления возмущений является более эффективным, чем \mathcal{H}_2 -регулятор, и менее консервативным, чем \mathcal{H}_∞ -регулятор.

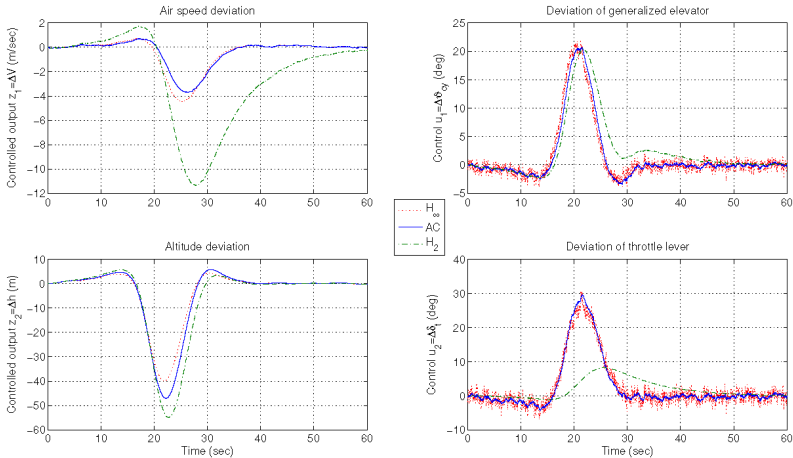


Рис. 2. Посадка самолета Ту-154. Воздушная скорость ΔV , высота Δh (диаграммы слева) и сигналы управления $\Delta \vartheta_{cy}$, $\Delta \delta_t$ (диаграммы справа)

3.1.2. УПРАВЛЕНИЕ УГЛОМ АТАКИ РАКЕТЫ «ВОЗДУХ–ВОЗДУХ»

Рассмотрим задачу синтеза регулятора для управления углом атаки ракеты «воздух–воздух». Математическая модель объекта управления первоначально была представлена в [14], где эта задача решается в робастной постановке и требуется, чтобы автопилот управлял отклонением аэродинамического руля δ для обеспечения угла атаки α , соответствующего маневру, определяемому законом наведения [14]. Более точно, управление направлено на отслеживание ступенчатых входных команд, задающих требуемый угол атаки α_c , с установившейся ошибкой не более 1%, вре-

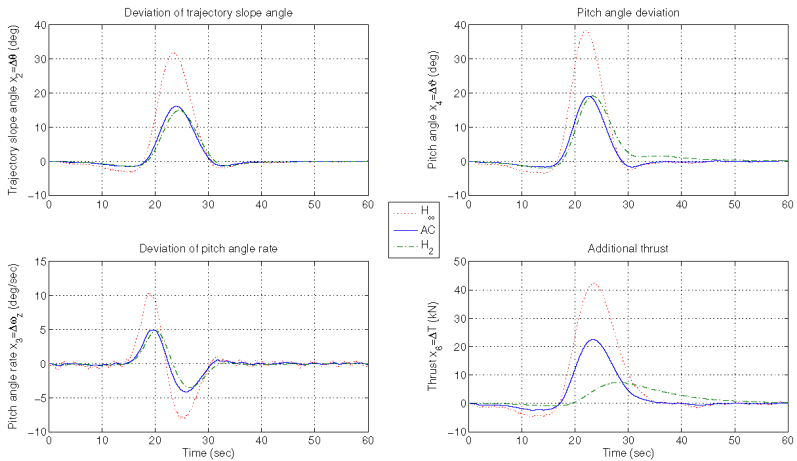


Рис. 3. Посадка самолета Ту-154. Угол наклона траектории $\Delta\theta$, угловая скорость тангажа $\Delta\omega_z$ (диаграммы слева), угол тангажа $\Delta\vartheta$, тяга двигателя ΔT (диаграммы справа)

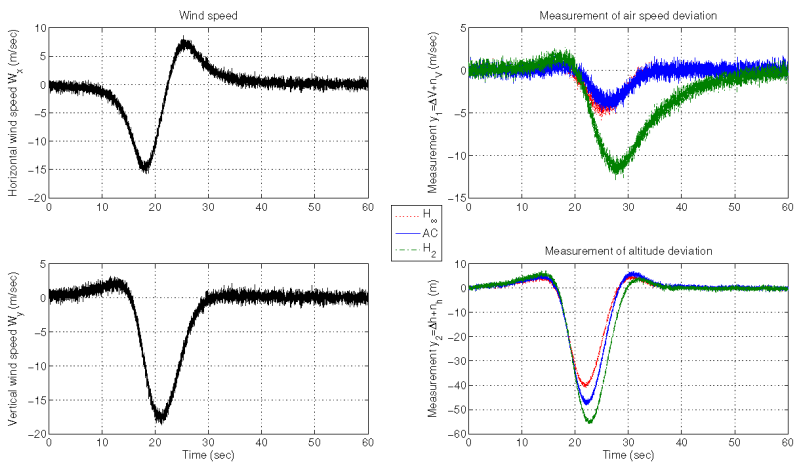


Рис. 4. Посадка самолета Ту-154. Профиль ветра (диаграммы слева) и измерения с шумами (диаграммы справа)

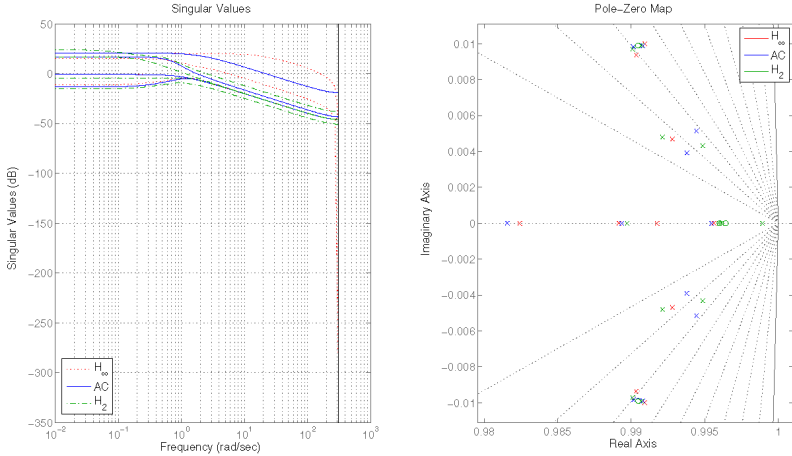


Рис. 5. Посадка самолета Ту-154. Сингулярные числа (диаграмма слева), расположение нулей и полюсов (диаграмма справа)

менем нарастания не более 0,2 с и ограниченным перерегулированием 2% в широком диапазоне углов атаки ± 20 град и изменений числа Маха от 2,5 до 3,5 [14]. Соответствующая модель ракеты «воздух–воздух» из коллекции *COMPl_eib* [24] (AC4) не учитывает изменений числа Маха в [14] и поэтому не содержит переменных и неопределенных параметров. Стандартная линеаризованная дискретная стационарная модель объекта управления (1) была получена для значения шага дискретизации $\Delta t = 0,0005$ с, имеет порядок $n = 4$,

$$\begin{aligned} x_k &= [\alpha_k \quad q_k \quad \delta_k \quad x_{\omega,k}]^T, \\ w_k &= [n_{q,k} \quad \alpha_{c,k}]^T, \\ u_k &= \delta_{e,k}, \\ z_k &= [z_e \quad z_{\delta}]^T, \\ y_k &= [\alpha_{c,k} - \alpha_k \quad n_{q,k} - q_k]^T, \end{aligned}$$

где α_k — угол атаки; q_k — угловая скорость; δ_k — угол поворота аэродинамического руля; $n_{q,k}$ — шум измерения угловой скорости; $\alpha_{c,k}$ — требуемый угол атаки (команда головки самонаведе-

ния); $\delta_{e,k}$ — сигнал управления (команда поворота аэродинамического руля); $z_{e,k}$, — управляемая переменная, соответствует выходу взвешенной функции чувствительности и служит для минимизации ошибки слежения; $z_{\delta,k}$ — управляемая переменная, служит для ограничения угловой скорости привода аэродинамического руля. Матрицы реализации в пространстве состояний дискретной модели имеют вид

$$A = \begin{bmatrix} 0,99956 & 4,9989 \cdot 10^{-4} & -7,4166 \cdot 10^{-5} & 0 \\ 0,0044549 & 1 & -0,062984 & 0 \\ 0 & 0 & 0,92774 & 0 \\ -0,00049988 & -1,2498 \cdot 10^{-7} & 1,7413 \cdot 10^{-8} & 0,99998 \end{bmatrix},$$

$$B_w = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 4,9999 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix}, \quad B_u = \begin{bmatrix} -2,6119 \cdot 10^{-6} \\ -0,0023914 \\ 0,072257 \\ 4,211 \cdot 10^{-10} \end{bmatrix},$$

$$C_z = \begin{bmatrix} -0,25 & 0 & 0 & 3,487 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{zw} = \begin{bmatrix} 0 & 0,25 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{zu} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix},$$

$$C_y = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{yw} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0,01 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{yu} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

С целью сравнения анизотропийного γ -оптимального регулятора, найденного из решения задачи выпуклой оптимизации (44), с анизотропийным оптимальным регулятором [35], полученным из решения системы перекрестно-связанных нелинейных матричных алгебраических уравнений методом гомотопии [11], при решении задачи синтеза в реализации регулятора (22) и в формулах (34)–(40) теоремы 2 матрица D_c параметров регулятора была положена нулевой: $D_c = 0$.

Реализации в пространстве состояний анизотропийного γ -оптимального регулятора K_a и оптимального регулятора K_a^{opt} [35], синтезированных для уровня средней анизотропии $a = 0.015$, представлены ниже вместе с реализациями \mathcal{H}_2 - и \mathcal{H}_∞ -

регуляторов K_2 и K_∞ :

$$K_2 = \left[\begin{array}{cccc|cc} 0,9929 & 0,00318 & 7,027 \cdot 10^{-5} & 0,0001953 & 1,399 & -5,483 \\ -0,01051 & 1,001 & 0,0001157 & 0,005679 & 1,456 & 3,911 \\ -0,02391 & 0,0008612 & 0,9977 & 0,003235 & 22,13 & -19 \\ 0,1283 & -0,03046 & 0,006925 & 0,9813 & 158,2 & 123,9 \\ \hline 1,002 \cdot 10^{-5} & -4,208 \cdot 10^{-5} & -4,842 \cdot 10^{-6} & -2,637 \cdot 10^{-6} & 0 & 0 \end{array} \right],$$

$$K_a = \left[\begin{array}{cccc|cc} 0,9971 & -0,000628 & -0,0002935 & 0,0001 & -0,02275 & 0,005662 \\ -0,01009 & 0,9968 & -0,003374 & -0,001076 & 2,368 & -0,02642 \\ 0,04287 & 0,006622 & 0,9935 & -0,008994 & -2,682 & 0,3372 \\ 0,3668 & 0,05229 & 0,005948 & 0,9837 & 28,65 & 8,158 \\ \hline 0,002608 & 0,00101 & 0,0005219 & -0,0001099 & 0 & 0 \end{array} \right],$$

$$K_a^{\text{opt}} = \left[\begin{array}{cccc|cc} 0,9996 & -0,000247 & -7,575 \cdot 10^{-5} & 1,34 \cdot 10^{-5} & -8,7 \cdot 10^{-8} & -0,001 \\ 0,002587 & 0,9973 & -0,06449 & 0,01059 & -3,01 \cdot 10^{-7} & -0,0026 \\ 0,0564 & 0,004483 & 0,9734 & -0,3197 & 0 & 0 \\ 1,1 \cdot 10^{-7} & 5,81 \cdot 10^{-8} & 1,766 \cdot 10^{-8} & 1 & 0,0005 & 1,83 \cdot 10^{-7} \\ \hline 0,7806 & 0,06204 & 0,6312 & -4,425 & 0 & 0 \end{array} \right],$$

$$K_\infty = \left[\begin{array}{cccc|cc} 0,9733 & 0,001717 & 8,548 \cdot 10^{-5} & 0,000289 & 0,0008433 & -0,5844 \\ 0,2642 & 0,9888 & -0,003766 & 0,02217 & 0,1204 & 6,738 \\ -0,6253 & 0,02455 & 0,9855 & 0,04666 & 0,7891 & -15,5 \\ 4,058 & -0,4717 & 0,161 & 0,02602 & 430,4 & 149,4 \\ \hline 0,00143 & -0,0007134 & -0,0001299 & -0,0003772 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Результаты решения задачи и моделирования замкнутых систем с \mathcal{H}_2 -, анизотропийным и \mathcal{H}_∞ -регуляторами K_2 , K_a и K_∞ в условиях шумов измерений приводятся в таблице 2 и на рис. 6–11. При моделировании опорные значения α_c генерировались как ступенчатые сигналы со случайной амплитудой и равной продолжительностью. Переходные характеристики на рис. 9, 10 показывают, что время нарастания в замкнутых системах, отмеченное на этих графиках, не превосходит желаемого значения 0,2 с для всех трех регуляторов. При этом диаграммы на рис. 6 демонстрируют

Таблица 2. Ракета «воздух–воздух» (модель АС4) из коллекции COMPlib [24, 25]. Сравнение замкнутых систем

	Регулятор в цепи обратной связи			
	K_2	K_a	K_a^{opt}	K_∞
Результаты решения:				
$\min \gamma$	0,50195	0,20079	—	0,56309
$\ T_{zw}\ _2$	0,25195	0,25354	0,25353	0,5512
$\ T_{zw}\ _{0,015}$	0,20638	0,20076	0,20072	0,42198
$\ T_{zw}\ _\infty$	0,81288	0,63601	0,63509	0,56384
Время ЦП, с	2,8704	2,4336	1,4352	1,794
Результаты моделирования:				
$\max \alpha_c $, град	20	20	20	20
$\max \alpha $, град	20,666	20,301	20,229	20,078
$\max z_e $, град	17,063	13,494	13,356	11,85
$\max z_\delta $, град	1,5245	3,7428	3,7349	11,241
$\max \delta $, град	6,6345	10,465	10,439	12,095

приемлемое качество слежения и меньшую амплитуду сигнала управления δ в замкнутой системе с анизотропийным регулятором по сравнению с \mathcal{H}_∞ -регулятором.

Следует отметить (см. таблицу 2), что минимальное значение γ , полученное из решения задачи выпуклой оптимизации (44) для анизотропийного γ -оптимального регулятора, и анизотропийная норма замкнутой системы с оптимальным регулятором достаточно близки. Так, относительное отклонение $\min \gamma$ от анизотропийной нормы замкнутой системы с оптимальным регулятором $\|T_{zw}^{\text{opt}}\|_{0,015}$ составляет всего 0,03487%, а относительное отклонение анизотропийных норм замкнутых систем с γ -оптимальным и оптимальными регуляторами равно 0,01993%. То же самое можно сказать и в отношении результатов моделирования замкнутых систем с регуляторами K_a , K_a^{opt} в таблице 2 и на диаграммах рис. 6–8. Таким образом, для рассматриваемой модели объекта управления — ракеты «воздух–воздух» — замкнутые системы с анизотропийными γ -оптимальным и оптимальным регуляторами весьма близки.

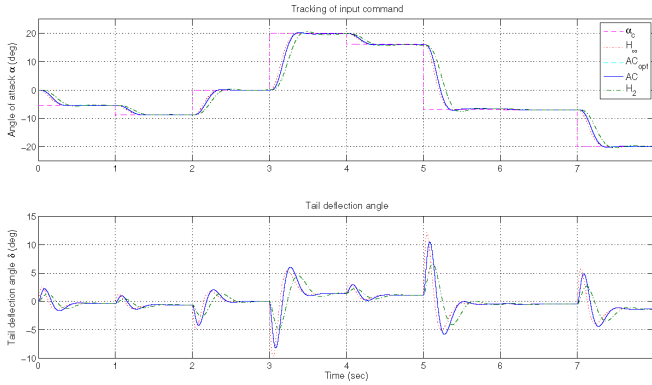


Рис. 6. Ракета «воздух–воздух» (модель AC4) [14, 24, 25]. Угол атаки α (верхняя диаграмма) и угол отклонения аэродинамического руля δ (нижняя диаграмма)

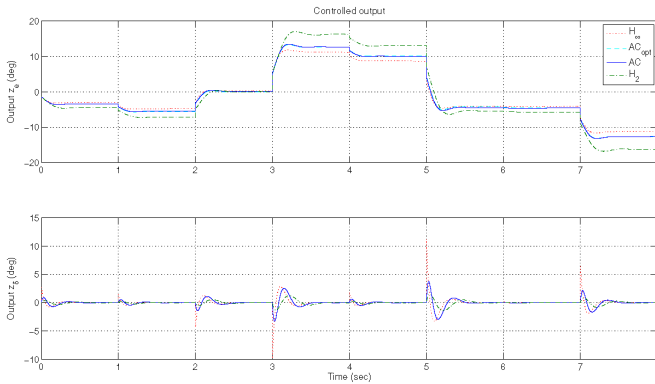


Рис. 7. Ракета «воздух–воздух» (модель AC4) [14, 24, 25]. Управляемый выход z

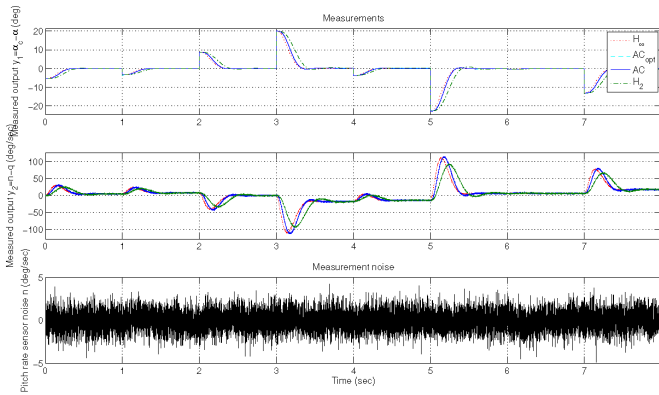


Рис. 8. Ракета «воздух–воздух» (модель AC4) [14, 24, 25].
Измерение y (верхние диаграммы) шум датчика угловой скорости тангажа n (нижняя диаграмма)

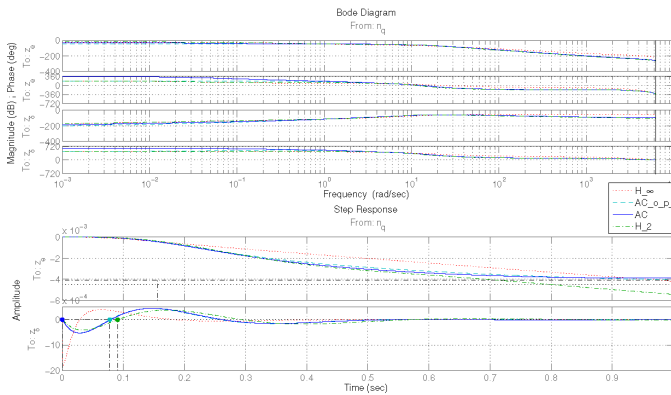


Рис. 9. Ракета «воздух–воздух» (модель AC4) [14, 24, 25].
Диаграмма Бode (верхние диаграммы) и переходные характеристики (нижние диаграммы) от входа n_q

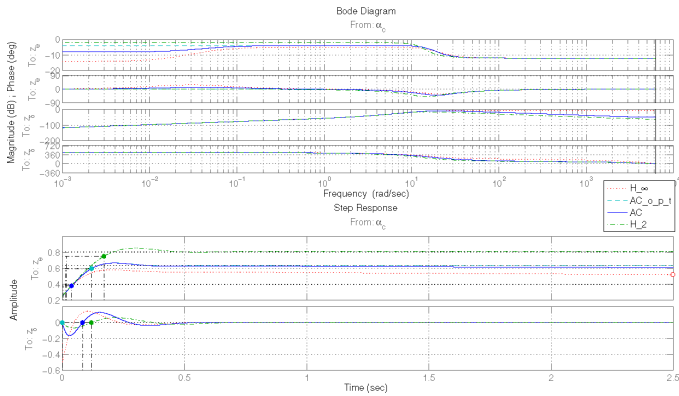


Рис. 10. Ракета «воздух–воздух» (модель AC4) [14, 24, 25].
 Диаграмма Бode (верхние диаграммы) и переходные характеристики (нижние диаграммы) от входа α_c

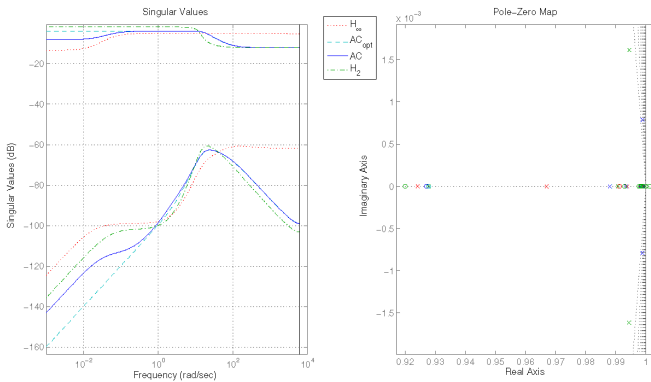


Рис. 11. Ракета «воздух–воздух» (модель AC4) [14, 24, 25].
 Сингулярные числа (диаграмма слева), расположение нулей и полюсов (диаграмма справа)

3.1.3. ПРИМЕРЫ ИЗ БИБЛИОТЕКИ COMPL_EIB

Анизотропийные γ -оптимальные регуляторы полного порядка были вычислены для ряда моделей из коллекции *COMPL_eib* [24, 25], перечисленных в таблице 3. Все эти модели были преобразованы в системы с дискретным временем с шагом Δt . Известно [25], что почти все из перечисленных моделей (за исключением модели ROC5) можно стабилизировать с помощью статической обратной связи по измеряемому выходу, но в рассматриваемом случае соответствующие задачи решались с помощью динамических регуляторов полного порядка по выходу исключительно с целью тестирования. В [7] показано, что выполнение условий частотной теоремы для анизотропийной нормы системы при $a \rightarrow 0, +\infty$ гарантирует, что \mathcal{H}_2 - и \mathcal{H}_∞ -нормы той же системы не превышают заданных пороговых значений. Поэтому \mathcal{H}_2 - и \mathcal{H}_∞ -регуляторы для соответствующих задач также были получены как предельные случаи анизотропийного регулятора из решения задачи выпуклой оптимизации (44) согласно теореме 2, но для соответствующих уровней средней анизотропии внешнего возмущения $a \rightarrow 0$ и $a \rightarrow +\infty$.

3.2. СИНТЕЗ СТАТИЧЕСКОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ ПО ВЫХОДУ

Анизотропийные γ -оптимальные регуляторы в виде статической обратной связи по выходу были синтезированы для ряда сингулярных задач фильтрации из коллекции *COMPL_eib* [24, 25], перечисленных ниже в таблице 4. Все эти модели были преобразованы в системы с дискретным временем с шагом Δt . \mathcal{H}_2 - и \mathcal{H}_∞ -регуляторы для соответствующих задач были получены, как предельные случаи анизотропийного регулятора из решения задачи выпуклой оптимизации (90) согласно теореме 5 и следствию 5, но для соответствующих уровней средней анизотропии возмущения $a \rightarrow 0$ и $a \rightarrow +\infty$.

С целью наглядной иллюстрации далее приводятся результаты решения и моделирования для задачи управления самолетом (модель AC1), первоначально рассмотренной в [16]. Модель AC1,

Таблица 3. Примеры из коллекции $COMPl_{eib}$ [24, 25].

Регуляторы полного порядка

Модель	(n_x, m_u, p_y)	Δt (сек)	$\min \gamma_2$	a	$\min \gamma_a$	$\min \gamma_\infty$
AC4	(4, 1, 2)	0,0005	0,50195	0,015	0,20079	0,56309
AC7	(9, 1, 2)	0,01	0,0042953	0,05	0,0094512	0,043755
AC8	(9, 1, 5)	0,01	0,049999	0,05	0,20454	1,5429
AC9	(10, 4, 5)	0,01	0,04454	0,9	0,43057	1,0007
AC12	(4, 3, 4)	0,01	0,0012071	0,01	0,0037555	0,31439
HE3	(8, 4, 6)	0,01	0,081028	0,015	0,18837	0,802
HE5	(8, 4, 2)	0,01	0,11888	0,2	0,67939	1,5066
HE6	(20, 4, 6)	0,01	0,65791	0,05	0,78951	2,3755
HE7	(20, 4, 6)	0,01	0,55239	0,05	0,68603	2,4341
JE1	(30, 3, 5)	0,01	0,76355	0,1	1,1173	—
JE3	(24, 3, 6)	0,01	1,107	0,07	1,2814	2,4149
EB1	(10, 1, 1)	0,001	0,044894	3	3,0259	3,1041
EB2	(10, 1, 1)	0,001	0,027729	3	1,7246	1,7677
EB3	(10, 1, 1)	0,001	0,029817	0,3	0,92218	1,7974
EB4	(20, 1, 1)	0,001	0,030079	0,3	0,9219	1,7863
EB5	(40, 1, 1)	0,001	0,029731	0,3	0,92087	1,7906
ROC5	(7, 3, 5)	0,001	0,0029492	0,7	0,0013201	0,0016873
TF1	(7, 2, 4)	0,1	0,043013	0,25	0,18306	0,24883
TF3	(7, 2, 3)	0,1	0,043081	0,25	0,18288	0,24799

Таблица 4. Примеры из коллекции $COMPl_{eib}$ [24, 25].

Регуляторы в виде статической обратной связи по выходу

Модель	(n_x, m_u, p_y)	Δt (сек)	$\min \gamma_2$	a	$\min \gamma_a$	$\min \gamma_\infty$
AC1	(5, 3, 3)	0,01	0,00045695	0,9	0,0034448	0,0036873
AC2	(5, 3, 3)	0,01	0,021254	0,9	1,3559	1,6199
AC15	(4, 2, 3)	0,0001	0,037899	0,8	0,67708	0,79834
HE1	(4, 2, 1)	0,0001	0,00075643	0,15	0,0063848	0,0099472
HE4	(8, 4, 6)	0,01	2,8727	0,05	8,0104	21,823
NN15	(3, 2, 2)	0,001	0,015202	0,3	0,25514	0,3441
NN16	(8, 4, 4)	0,001	0,0098319	0,5	0,20576	0,41639
BDT1	(11, 3, 3)	1	0,010557	0,007	0,042299	0,32302
PSM	(7, 2, 3)	0,001	0,035481	0,01	0,10554	0,92672
UWV	(8, 2, 2)	0,001	0,016479	0,03	0,011414	0,024207

представленная в коллекции *COMPl_eib* [24], была модифицирована для решения задачи подавления внешних возмущений, при этом шумы измерений в модели отсутствуют. Стандартная дискретная модель объекта управления (1) была получена для значения шага дискретизации 0,01 с, имеет порядок $n = 5$, матрицы реализации в пространстве состояний дискретной модели приводятся ниже:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1,451 \cdot 10^{-5} & 0,01132 & 4,0487 \cdot 10^{-6} & -0,0099658 \\ 0 & 0,99946 & -0,0017115 & -4,8412 \cdot 10^{-6} & 0,00070241 \\ 0 & 2,4666 \cdot 10^{-6} & 1 & 0,0099572 & -5,0389 \cdot 10^{-5} \\ 0 & 0,00049745 & -4,2228 \cdot 10^{-7} & 0,99143 & -0,010052 \\ 0 & -0,0028957 & 2,4825 \cdot 10^{-6} & 0,010451 & 0,99311 \end{bmatrix},$$

$$B_w = \begin{bmatrix} 0,00035923 & -4,2717 \cdot 10^{-6} & 0,00016384 \\ 5,0987 \cdot 10^{-9} & 9,9519 \cdot 10^{-5} & 2,362 \cdot 10^{-7} \\ -2,4386 \cdot 10^{-10} & -0,0007548 & 2,7981 \cdot 10^{-6} \\ -7,3065 \cdot 10^{-8} & 2,45 \cdot 10^{-8} & 0,00055769 \\ 1,445 \cdot 10^{-5} & -1,4404 \cdot 10^{-7} & 0,00067493 \end{bmatrix},$$

$$B_u = \begin{bmatrix} -7,8517 \cdot 10^{-5} & 4,8395 \cdot 10^{-8} & 3,6293 \cdot 10^{-6} \\ -0,0011942 & 0,0099973 & -2,3052 \cdot 10^{-7} \\ 0,00022005 & 8,1873 \cdot 10^{-9} & -8,3 \cdot 10^{-5} \\ 0,043921 & 2,4666 \cdot 10^{-6} & -0,016575 \\ 0,015929 & -1,4501 \cdot 10^{-5} & -0,00081671 \end{bmatrix},$$

$$C_z = \begin{bmatrix} 0 & 0,70711 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,70711 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D_{zw} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{zu} = \begin{bmatrix} 0,70711 & 0 & 0 \\ 0 & 0,70711 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D_{yw} = 0, \quad D_{yu} = 0.$$

Матрица коэффициента усиления K_a анизотропийной γ -оптимальной статической обратной связи по выходу, синтезированной для уровня средней анизотропией $a = 0,9$, приводится ниже вместе с матрицами коэффициентов усиления K_2 и K_∞ статических \mathcal{H}_2 - и \mathcal{H}_∞ -регуляторов по выходу:

$$K_2 = \begin{bmatrix} 7,278 \cdot 10^{-5} & -0,9994 & -0,000203 \\ -0,0002887 & -0,002706 & -0,9966 \\ -0,9871 & -14,34 & 49,35 \end{bmatrix},$$

$$K_a = \begin{bmatrix} 2,935 \cdot 10^{-6} & -1 & -1,241 \cdot 10^{-5} \\ -1,025 \cdot 10^{-5} & -0,0001273 & -0,9998 \\ -0,5795 & -12,46 & 54,56 \end{bmatrix},$$

$$K_{\infty} = \begin{bmatrix} -4,024 \cdot 10^{-7} & -1 & 1,904 \cdot 10^{-6} \\ -5,207 \cdot 10^{-6} & -6,032 \cdot 10^{-5} & -0,9999 \\ -0,6788 & -13,12 & 53,39 \end{bmatrix}.$$

Результаты моделирования замкнутой системы в условиях внешних возмущений вместе с результатами решения задачи приводятся в таблице 5 и на рис. 12–15. При моделировании использовался тот же профиль ветра, что и в примере раздела 3.1.1.

Таблица 5. Модель AC1 (самолет) из коллекции COMPlib [24, 25]. Сравнение замкнутых систем

		Регулятор в цепи обратной связи		
		K_2	K_a	K_{∞}
Результаты решения:				
$\min \gamma$		0,00045695	0,0034448	0,0036873
$\ T_{zw}\ _2$		$2,6532 \cdot 10^{-5}$	$1,2762 \cdot 10^{-6}$	$6,3218 \cdot 10^{-7}$
$\ T_{zw}\ _{0,9}$		0,00050863	$2,3466 \cdot 10^{-5}$	$1,1795 \cdot 10^{-5}$
$\ T_{zw}\ _{\infty}$		0,00075676	$3,5153 \cdot 10^{-5}$	$1,7708 \cdot 10^{-5}$
Время ЦП,	с	0,81121	3,042	0,546
Результаты моделирования:				
$\max z_1 ,$	м/с	$9,539 \cdot 10^{-5}$	$4,941 \cdot 10^{-6}$	$1,368 \cdot 10^{-6}$
$\max z_2 ,$	град	0,0003134	$1,437 \cdot 10^{-5}$	$9,539 \cdot 10^{-5}$
$\max x_1 ,$	м	3,152	3,412	3,35
$\max x_2 ,$	м/с	0,1647	0,1108	0,124
$\max x_3 ,$	град	0,02948	0,0192	0,02172
$\max x_4 ,$	град/с	0,008596	0,006704	0,006841
$\max x_5 ,$	м/с	0,406	0,278	0,3097
$\max u_1 ,$	10^{-1} град	0,1648	0,1108	0,124
$\max u_2 ,$	м/с ²	0,0299	0,01922	0,02173
$\max u_3 ,$	град	0,2117	0,1355	0,154

Из результатов решения задачи в таблице 5 можно заключить, что

- квадратный корень из наименьшего значения целевой функции удовлетворяет цепочке неравенств $\gamma_2 < \gamma_a < \gamma_{\infty}$;
- a -анизотропийная норма замкнутой системы с анизотропийным γ -оптимальным регулятором удовлетворяет условию $\|T_{zw}\|_{0,7} < \gamma_a$; регулятор является субоптимальным;
- \mathcal{H}_2 - и \mathcal{H}_{∞} -нормы замкнутых систем с \mathcal{H}_2 - и \mathcal{H}_{∞} -регуляторами удовлетворяют $\|T_{zw}\|_2 < \gamma_2$, $\|T_{zw}\|_{\infty} <$

γ_∞ для соответствующих пороговых значений; полученные \mathcal{H}_2 - и \mathcal{H}_∞ -регуляторы также являются субоптимальными.

Анализ результатов моделирования, представленных в таблице 5 и на рис. 12–15, показывает, что

- анизотропийная γ -оптимальная статическая обратная связь по выходу приводит к наименьшим максимальным абсолютным отклонениям горизонтальной составляющей скорости x_2 , угла тангажа x_3 , угловой скорости тангажа x_4 и вертикальной составляющей скорости x_5 , при этом наименьшее максимальное абсолютное отклонение ошибки по высоте x_1 достигается при использовании \mathcal{H}_2 - γ -оптимального статического регулятора по выходу;
- наибольшие максимальные абсолютные отклонения переменных управляемого выхода наблюдаются в замкнутой системе с \mathcal{H}_2 - γ -оптимальным статическим регулятором;
- в замкнутой системе с анизотропийным γ -оптимальным статическим регулятором наименьшие максимальные абсолютные амплитуды сигналов управления.

4. Заключение

Разработан подход к решению задач синтеза анизотропийных субоптимальных и γ -оптимальных регуляторов методами выпуклой оптимизации. Синтез анизотропийных субоптимальных регуляторов является естественным продолжением оптимальной задачи, решенной в [35]. Вместо минимизации анизотропийной нормы замкнутой системы, субоптимальный регулятор гарантирует, что ее норма не превосходит заданного порогового значения. Общая процедура синтеза регулятора заданного порядка сводится к решению неравенства относительно детерминанта

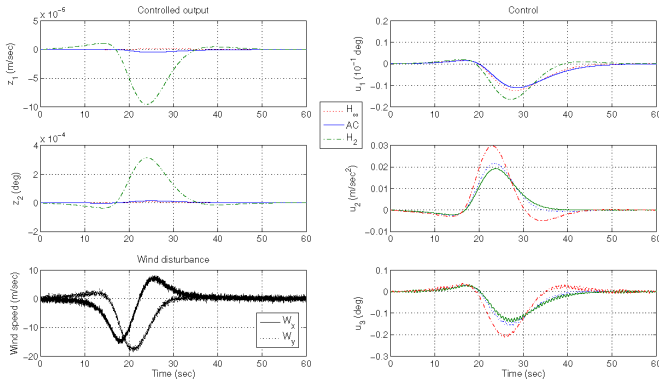


Рис. 12. Модель АС1 (самолет) [16, 24, 25]. Управляемый выход и профиль ветра (диаграммы слева), управление (диаграммы справа)

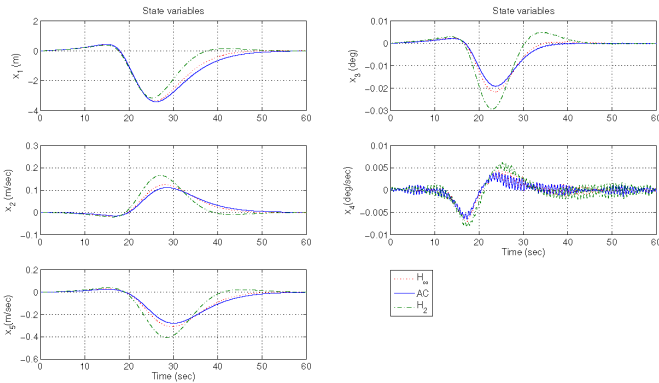


Рис. 13. Модель АС1 (самолет) [16, 24, 25]. Ошибка по высоте x_1 , горизонтальная составляющая скорости x_2 , вертикальная составляющая скорости x_3 (диаграммы слева), угол тангажа x_4 , угловая скорость тангажа x_5 (диаграммы справа)

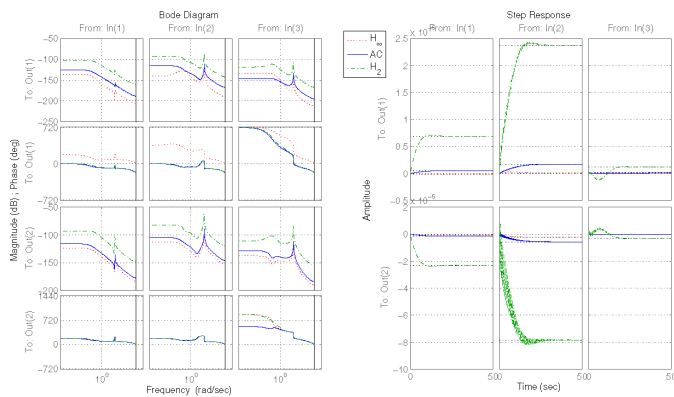


Рис. 14. Модель AC1 (самолет) [16, 24, 25]. Диаграмма Бode (диаграммы слева) и переходные характеристики (диаграммы справа)

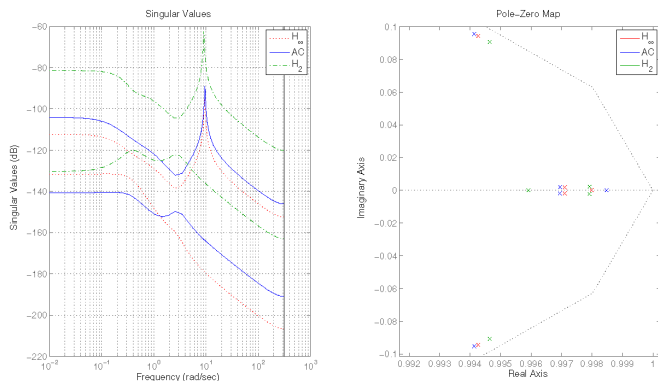


Рис. 15. Модель AC1 (самолет) [16, 24, 25]. Сингулярные числа (диаграмма слева), расположение нулей и полюсов (диаграмма справа)

положительно определенной матрицы и двух ЛМН относительно взаимно обратных матриц, задача оптимизации не является выпуклой [8]. Применением стандартных процедур овыпукления (линеаризующих замен переменных и введения дополнительных переменных) показано, что результирующие задачи оптимизации можно сделать выпуклыми для задач синтеза регуляторов в виде статической обратной связи по состоянию (в случае полной информации о векторе состояния), регуляторов полного порядка по выходу и регуляторов в виде статической обратной связи по выходу для некоторых классов объектов, определяемых их структурными свойствами. Для этих задач можно найти анизотропийные γ -оптимальные регуляторы из решения задач выпуклой оптимизации. В сравнении с решением задачи синтеза анизотропийного оптимального регулятора, полученным в [35], предлагаемый подход на основе выпуклой оптимизации является новым и не требует разработки специальных вычислительных алгоритмов.

Литература

1. ВЛАДИМИРОВ И.Г., ДАЙМОНД П., КЛОЕДЕН П. *Анизотропийный анализ робастного качества линейных нестационарных дискретных систем на конечном временном интервале* // Автоматика и телемеханика. – 2006. – №8. – С. 92–111.
2. ВЛАДИМИРОВ И.Г., КУРДЮКОВ А.П., СЕМЕНОВ А.В. *Анизотропия сигналов и энтропия линейных стационарных систем* // ДАН. – 1995. – №3. – С. 583–585.
3. ВЛАДИМИРОВ И.Г., КУРДЮКОВ А.П., СЕМЕНОВ А.В. *Стохастическая проблема \mathcal{H}_∞ -оптимизации* // ДАН. – 1995. – Т. 343, №5. – С. 607–609.
4. ВЛАДИМИРОВ И.Г., КУРДЮКОВ А.П., СЕМЕНОВ А.В. *Асимптотика анизотропийной нормы линейных стационарных систем* // Автоматика и телемеханика. – 1999. – №3.
5. КУРДЮКОВ А.П., МАКСИМОВ Е.А. *Решение задачи стохастической \mathcal{H}_∞ -оптимизации для линейной систе-*

- мы с неопределенностью // Автоматика и телемеханика. – 2006. – №8. – С. 112–142.
6. ЛЕТОВ А.М. Аналитическое конструирование регуляторов I–IV // Автоматика и телемеханика. – I: 1960. – №4. – С. 436–441; II: №5. – С. 561–568; III: №6. – С. 661–665; IV: 1961. – №4. – С. 425–435.
 7. ЧАЙКОВСКИЙ М.М., КУРДЮКОВ А.П. Критерий строгой ограниченности анизотропийной нормы заданным значением в терминах матричных неравенств // ДАН. – 2011. – Т. 441, №3. – С. 318–321.
 8. ЧАЙКОВСКИЙ М.М. Синтез анизотропийных субоптимальных регуляторов заданного порядка на основе полуопределенного программирования и алгоритма поиска взаимно обратных матриц // Управление большими системами. – 2012. – Вып.39. – С. 95–137.
 9. BEN-TAL A., NEMIROVSKII A. *Lectures on Modern Convex Optimization*. – Technion, Haifa, Israel, 2000.
 10. BERNSTEIN D.S., HADDAD W.M. *LQG control with an \mathcal{H}_∞ performance bound: a Riccati equation approach* // IEEE Trans. AC. – 1989. – Vol. 34. – P. 293–305.
 11. DIAMOND P., KURDJUKOV A.P., SEMYONOV A.V., VLADIMIROV I.G. *Homotopy methods and anisotropy-based stochastic \mathcal{H}_∞ optimization of control systems* // Report 97-14 of The University of Queensland, Australia. – 1997. – P. 1–22.
 12. DIAMOND P., VLADIMIROV I.G., KURDYUKOV A.P., SEMYONOV A.V. *Anisotropy-based performance analysis of linear discrete time invariant control systems* // Int. J. of Contr. – 2001. – Vol. 74. – P. 28–42.
 13. DOYLE J.C., GLOVER K., KHARGONEKAR, P.P., FRANCIS, B.A. *State-space solutions to standard \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ control problems* // IEEE Trans. AC. – 1989. – Vol. 34. – P. 831–848.
 14. FARES B., APKARIAN P., NOLL D. *An augmented Lagrangian method for a class of LMI-constrained problems*

- in robust control theory* // Int. J. of Contr. – 2001. – Vol. 74. – P. 348–360.
15. GAHINET P. *Explicit controller formulas for LMI-based \mathcal{H}_∞ synthesis* // Automatica. – 1996. – Vol. 32. – P. 1007–1014.
 16. HUNG Y.S., MACFARLANE A.G.J. *Multivariable feedback: A quasi-classical approach* // Lecture Notes in Control and Information Sciences. – Vol. 40. – Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1982.
 17. IWASAKI T., SKELTON R.E. *All controllers for the general \mathcal{H}_∞ control problem: LMI existence conditions and state space formulas* // Automatica. – 1994. – Vol. 30. – P. 1307–1317.
 18. IVAN M. *A ring vortex downburst model for flight simulation* // J. Aircraft. – 1996. – Vol. 23. – P. 232–236.
 19. Kalman R. *Contributions to the theory of optimal control* // Bol. Soc. Mat. Mex. – 1960. – №5. – P. 102–199.
 20. KIMURA H. *Pole assignment by gain output feedback* // IEEE Trans. AC. – 1975. – Vol. AC-20. – P. 509–516.
 21. KUČERA V. *Stability of discrete linear feedback systems* // Proc. IFAC World Congress, Boston, Massachusetts. – 1975. – Paper No. 44–1.
 22. KURDYUKOV A.P., PAVLOV B.V., TIMIN V.N., VLADIMIROV I.G. *Longitudinal anisotropy-based flight control in a wind shear* // Proc. 16th IFAC Symposium on Automatic Control in Aerospace, Saint-Petersburg, Russia. – 2004.
 23. LEE K.H., LEE J.H., KWON W.H. *Sufficient LMI conditions for \mathcal{H}_∞ output feedback stabilization of linear discrete-time systems* // IEEE Trans. AC. – 2006. – Vol. 51. – P. 675–680.
 24. LEIBFRITZ F. *COMPl_eib: Constraint matrix-optimization problem library – a collection of test examples for nonlinear semidefinite programs, control system design and related problems* // Tech. rep. of the University of Trier, Germany, 2004. – URL: <http://www.complib.de>.
 25. LEIBFRITZ F., LIPINSKI W. *Description of the benchmark*

- examples in COMPl_eib 1.0* // Tech. rep. of the University of Trier, Germany, 2003. – URL: <http://www.complib.de>.
26. LÖFBERG J. *YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB* // Proc. of the CACSD Conference, Taipei, Taiwan. – 2004. – URL: <http://users.isy.liu.se/johanl/yalmip/>.
 27. POZNYAK A.S. *Advanced Mathematical Tools for Automatic Control Engineers. Volumes 1,2: Deterministic Techniques, Stochastic Techniques*. – Elsevier, 2008, 2009.
 28. SCHERER C.W. *An efficient solution to multi-objective control problems with LMI objectives* // Syst. & Contr. Lett. – 2000. – Vol. 40. – P. 43–57.
 29. SEMYONOV A.V., VLADIMIROV I.G., KURDJUKOV A.P. *Stochastic approach to \mathcal{H}_∞ -optimization* // Proc. 33rd IEEE Conf. on Decision and Control, Florida, USA. – 1994. – P. 2249–2250.
 30. SCHERER C.W., GAHINET P., CHILALI M. *Multiobjective output-feedback control via LMI optimization* // IEEE Trans. AC. – 1997. – Vol. 42. – P. 896–911.
 31. STURM J.F. *Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones* // Optimization Methods and Software. – 1999. – Vol. 11. – P. 625–653.
 32. TCHAIKOVSKY M.M., KURDYUKOV A.P., TIMIN V.N. *Strict anisotropic norm bounded real lemma in terms of inequalities* // Proc. 18th IFAC World Congr., Milano, Italy. – 2011. – P. 2332–2337.
 33. TCHAIKOVSKY M.M., KURDYUKOV A.P., TIMIN V.N. *A convex formulation of strict anisotropic norm bounded real lemma* // Preprint. – 2011. – URL: <http://arxiv.org/abs/1108.5140>.
 34. VLADIMIROV I.G., KURDJUKOV A.P., SEMYONOV A.V. *On computing the anisotropic norm of linear discrete-time-invariant systems* // Proc. 13th IFAC World Congress, San-Francisco, USA. – 1996. – P. 179–184.
 35. VLADIMIROV I.G., KURDJUKOV A.P., SEMYONOV A.V. *State-space solution to anisotropy-based stochastic \mathcal{H}_∞ -*

- optimization problem* // Proc. 13th IFAC World Congress, San Francisco, USA. – 1996. – P. 427–432.
36. YOULA D.C., JABR H.A., BONGIORNO J.J. *Modern Wiener-Hopf design of optimal controllers. Part II: the Multivariable case* // IEEE Trans. AC. – 1976. – Vol. 21. – P. 319–338.
37. ZHOU K., GLOVER K., BODENHEIMER B.A., DOYLE, J.C. *Mixed \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ performance objectives I: Robust performance analysis, II: Optimal control* // IEEE Trans. AC. – 1994. – Vol. 39. – P. 1564-1574, 1575–1587.

SYNTHESIS OF ANISOTROPIC CONTROLLERS VIA CONVEX OPTIMIZATION AND SEMIDEFINITE PROGRAMMING

Michael Tchaikovsky, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Doctor of Science (mmtchaikovsky@hotmail.com).

Abstract: This paper presents several statements and solutions of the anisotropic suboptimal and γ -optimal controller synthesis problems for suppression of impact of random disturbances with unknown distributions on a control system performance. The problems of anisotropic controllers synthesis in form of static state feedback, of full-order dynamic output feedback, as well as of static output feedback are considered. Application of standard linearizing changes of variables and known convexification procedures to the synthesis problems for the considered special cases of the plant and the controller structure allow the problem solution to be expressed via a system of convex constraints representable by a system of linear matrix inequalities. The anisotropic suboptimal controller stabilizes the closed-loop system and keeps its anisotropic norm below a prescribed threshold value. The developed optimization-based approach to anisotropic controllers synthesis is novel and more convenient for practical computations.

Keywords: discrete linear time invariant systems, random disturbances, statistical uncertainty, norm, anisotropy, convex optimization, linear matrix inequalities.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии А. П. Курдюковым

УДК 519.173.5

ББК 22.176

АЛГОРИТМЫ БЫСТРОГО ПОИСКА ДЛЯ ДВУХ ЗАДАЧ О МЕТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ ВЗВЕШЕННЫХ ГРАФОВ

Ураков А. Р.¹, Тимеряев Т. В.²

*(Уфимский государственный авиационный технический
университет, Уфа)*

Рассматриваются две задачи о поиске метрических характеристик взвешенных неориентированных графов с неотрицательными весами ребер. Первая задача: дан взвешенный неориентированный граф, требуется найти радиус, диаметр и хотя бы один центр и две периферийные вершины. Во второй задаче дополнительно задана матрица расстояний графа. Для рассматриваемых задач предлагаются алгоритмы быстрого поиска, которые для поиска указанных характеристик рассматривают лишь часть вершин графа. Приводится сравнение предлагаемых алгоритмов с популярными способами решения поставленных задач на различных исходных данных.

Ключевые слова: метрические характеристики графа, радиус графа, диаметр графа, центр графа, периферийные вершины графа.

Введение

Существуют задачи, в которых объект управления представляет собой большую территориально распределенную структуру. В этом случае процесс управления может оказаться более оперативным и эффективным, если произвести декомпозицию структуры – разбить ее на составляющие части меньшего размера. При

¹ Ураков Айрат Ренатович, кандидат физико-математических наук, доцент, (urakov@ufanet.ru).

² Тимеряев Тимофей Валерьевич, аспирант (timeryaev@yandex.ru).

этом на многих практических задачах происходит процесс комбинаторного уменьшения (обратный комбинаторному увеличению) количества связей между объектами. Если математическая модель управляемой структуры разработана на основе взвешенного графа (дорожные, коммутационные сети и т.п.), декомпозиция представляет собой разбиение графа на составляющие подграфы. И от того, насколько успешно произойдет разбиение, зависит эффективность и точность управления разделенной структурой.

Этот подход и один из способов разбиения более подробно рассмотрены нами в [1]. Там же показано, что задача разбиения, являясь *NP*-сложной, требует многократного пересчета метрических характеристик. Актуальность расчета метрических характеристик становится еще выше, если задачу разбиения приходится решать в оперативном режиме из-за постоянных изменений в структуре исходного нагруженного графа.

Метрическими (или числовыми) характеристиками называют параметры графа, определяемые через кратчайшие расстояния между вершинами: центр, радиус и диаметр. Диаметр определяется как самое длинное из всех кратчайших расстояний между вершинами графа, центр – как вершина, максимальное расстояние от которой до всех остальных вершин графа минимально, а это максимальное расстояние от центра есть радиус графа.

Эти характеристики являются существенными свойствами графов и дают важную информацию о структурах, представляемых ими. Например, в задачах обслуживания диаметр может представлять максимальное время ожидания, центр и радиус – наилучшее местоположение пункта обслуживания и максимальное время, необходимое для того чтобы добраться до него. В тех случаях, когда графы представляют вычислительные сети, диаметр может обозначать время прохождения сигнала между двумя узлами с наиболее медленным соединением, а радиус указывать на задержку между сервером и самым медленным клиентом и т.д.

В общем случае метод отыскания этих характеристик состоит в нахождении кратчайших расстояний между всеми парами вершин исследуемого графа и установлении длин и вершин, под-

ходящих под определение центра, радиуса и диаметра. Для взвешенных графов с n вершинами известные алгоритмы, выполняющие эту задачу, имеют сложность от $\tilde{O}(Cn^{2,376})$ для графов, имеющих ограниченные C целые веса ребер [10], до $O(n^3/\log^2 n)$ для графов с произвольными вещественными весами ребер [4]. Очевидно, что для структур, состоящих из сотен тысяч, миллионов вершин, применение такого способа является во многих ситуациях нецелесообразным или даже практически невозможным из-за слишком большого времени счета.

Хотелось бы дополнительно отметить ситуацию, когда кратчайшие расстояния между всеми парами вершин графа уже вычислены, а числовые характеристики неизвестны и требуют нахождения. Это, например, происходит в тех случаях, когда изначально вычислять числовые характеристики не требовалось или необходимо найти характеристики не для всего графа, а для различных его подграфов. Причем состав подграфов может изменяться во времени, и, соответственно, необходимо периодически пересчитывать значения радиуса, центра и диаметра. Тривиальный способ решения в данном случае – просмотр всех вычисленных кратчайших расстояний, он имеет сложность $O(n^2)$. Для графов с большим количеством вершин или в случае с многократным пересчетом характеристик решение этой задачи также может иметь большое суммарное время счета.

В данной статье рассматриваются задачи двух типов. Задача 1: нахождение центра, радиуса и диаметра графа, заданного лишь множествами вершин V и ребер E ; Задача 2: нахождение центра, радиуса и диаметра графа при наличии дополнительной информации в виде вычисленных кратчайших расстояний между всеми парами вершин графа.

Для указанных задач приводятся алгоритмы быстрого поиска. Основное преимущество предлагаемых алгоритмов состоит в том, что для определения метрических характеристик большую часть вершин графа можно не рассматривать. Предложенные алгоритмы показали значительное уменьшение времени счета в сравнении с популярными способами решения этих задач

при тестировании на взвешенных графах различной природы.

1. Постановка задачи

Рассматривается связный неориентированный взвешенный граф $G = (V, E, w)$, где $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ – множество вершин графа, $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ – множество ребер графа, а $w : E \rightarrow [0, \infty)$ – вещественная весовая функция на ребрах. Мощности множества вершин и множества ребер будем считать равными $|V| = n$, $|E| = m$. Введем ряд обозначений и определений.

Вес ребра из вершины v_i в вершину v_j будем обозначать $w(i, j)$. Вес пути – сумма весов входящих в него ребер. Расстояние m_{ij} между v_i и v_j – наименьший из весов путей, соединяющих эти вершины. Матрица расстояний $M = (m_{ij})$ – матрица, состоящая из расстояний между всеми парами вершин графа. Граф называется связным, если между любыми двумя вершинами графа v_i и v_j существует путь, т.е. $m_{ij} < \infty$. Метрические характеристики графа определяются следующим образом.

Определение 1. *Эксцентриситетом $\varepsilon(v_i)$ вершины v_i называют максимальное расстояние от этой вершины до всех остальных $\varepsilon(v_i) = \max_{j=\overline{1, n}} m_{ij}$.*

Определение 2. *Радиус графа $r = \min_{i=\overline{1, n}} \varepsilon(v_i)$. Вершина s , на которой достигается этот минимум, называется центром графа.*

Определение 3. *Диаметр графа $d = \max_{i, j=\overline{1, n}} m_{ij}$. Вершины, расстояние между которыми равно диаметру, называются периферийными.*

Очевидно, что граф может иметь несколько центров и несколько пар периферийных вершин. Нас интересует нахождение хотя бы одного из центров и одной пары периферийных вершин. В статье рассматриваются две задачи о нахождении метрических характеристик графа.

Задача 1. *Дан связный неориентированный взвешенный граф $G = (V, E, w)$ с неотрицательной вещественной весовой функцией на ребрах $w : E \rightarrow [0, \infty)$. Требуется найти радиус,*

диаметр данного графа и хотя бы один из центров графа и одну пару периферийных вершин.

Задача 2. Даны связный неориентированный взвешенный граф $G = (V, E, w)$ с неотрицательной вещественной весовой функцией на ребрах $w : E \rightarrow [0, \infty)$ и вычисленная матрица расстояний M . Требуется найти радиус, диаметр данного графа и хотя бы один из центров графа и одну пару периферийных вершин.

Введем еще два понятия. Задачей о кратчайших путях с единственным источником (*Single Source Shortest Paths, SSSP*) называется задача, в которой задан граф $G = (V, E)$ и необходимо найти кратчайшие пути от заданной вершины v_i до всех остальных $v_j \in V$. Поиск кратчайших расстояний от вершины v_i данного графа до всех остальных будем обозначать $SSSP(v_i)$. Будем называть множеством опорных вершин $P = \{p_1, p_2, \dots, p_p\}$ данного графа множество любых p вершин, информация о расстояниях от которых используется при вычислении метрических характеристик.

2. Состояние вопроса

Наиболее распространенным способом нахождения метрических характеристик графа в случае с невычисленной матрицей расстояний является решение задачи о кратчайших путях между всеми парами вершин. Большинство таких алгоритмов не обладает универсальностью и показывает хорошую скорость решения только для графов с определенным набором свойств. В частности, существуют алгоритмы для разреженных графов [7], для графов с целыми ограниченными весами ребер [10] и т.п. И хотя сложность решения задачи о кратчайших путях периодически понижается с появлением новых алгоритмов, нахождение метрических характеристик таким способом для взвешенных графов с большим числом вершин все еще остается не практичным.

Существуют алгоритмы, находящие метрические характеристики графов, обладающих особым устройством и описываю-

щих специальные структуры. К подобным можно отнести, например, алгоритм поиска диаметра для графов «сетей малого мира» (*Small World Networks*) [11] или алгоритм поиска центра и диаметра для графов бензеноидных систем (*Benzenoid Systems*) [5]. Эти алгоритмы для ускорения решения используют особенности рассматриваемых графов и поэтому область их эффективного применения сильно ограничена.

Одной из разновидностей задач о метрических характеристиках графов является приближенное вычисление радиуса и диаметра графа, при этом поиск расстояний между вершинами графа производится с некоторой погрешностью, что позволяет значительно уменьшить время счета. К алгоритмам, решающим эту задачу, можно отнести алгоритм приближенной функции окрестности (*Approximate Neighborhood Function Algorithm*) [2] и [3].

Кроме поиска точных и приближенных характеристик графа широко используется поиск и так называемых эффективных характеристик графа. Эффективный радиус вершины v определяется как 90-й перцентиль всех расстояний от данной вершины. Эффективный диаметр графа определяется как минимальное расстояние, на котором 90% вершин достижимы друг из друга. Алгоритмы решения этих задач предлагаются, например, в [9].

Для Задачи 2 тривиальным способом решения является просмотр всех расстояний и нахождение тех, которые подходят под определение радиуса и диаметра. Решение данной задачи может быть ускорено, если вычисленные расстояния хранятся с использованием специальных структур данных (например, в отсортированном списке). Если же вычисленные расстояния хранятся в виде обыкновенного массива, само построение таких структур будет иметь сложность, превышающую сложность решения тривиальным способом. Другие опубликованные методы решения Задачи 2 нам неизвестны.

3. Алгоритмы быстрого поиска

Основная идея предлагаемых алгоритмов состоит в следующем. Вначале мы определенным образом выбираем некоторое количество опорных вершин и вычисляем от них расстояния до всех остальных вершин. Используя эту информацию и определения метрических характеристик, мы находим границы радиуса и диаметра и их оценки на данной итерации. После этого из рассмотрения выбрасываются вершины, расстояния от которых не входят в найденные границы. Если в рассмотрении остались вершины, мы увеличиваем число опорных вершин и снова определяем границы радиуса и диаметра и их оценки. Процесс продолжается до тех пор, пока все вершины не будут исключены. Текущие оценки радиуса и диаметра при этом являются искомыми нами характеристиками.

3.1. ПОИСК ЦЕНТРА И РАДИУСА

В основе ускорения поиска лежит определение нижней r_l и верхней r_u границ радиуса графа по множеству опорных вершин P и просмотр претендентов на центр c_i , до тех пор, пока для какого-то из них не будет выполнено равенство $r_l = r_u$.

Для радиуса графа r и произвольной вершины v_i справедливо $r \geq r_l = m_{ji}$, где $m_{ji} = \min_{k=\overline{1,n}, k \neq i} m_{ki}$. Нижнюю границу радиуса r_l также можно определить, используя множество вершин $r_l = \min_{i=\overline{1,n}} (\max_{p \in P} m_{ip})$. В этом случае $r_l = \max_{p \in P} m_{jp} \leq \max_{p \in P} m_{cp} \leq \varepsilon(c) = r$.

С другой стороны, радиус графа r ограничен сверху эксцентриситетом любой вершины $r \leq r_u = \varepsilon(v_j)$. Таким образом, радиус лежит в пределах $r_l \leq r \leq r_u$ и

(1) если $r_l = r_u$, то $r = r_l = r_u$.

То есть найти радиус графа и один из его центров можно итеративным увеличением нижней границы радиуса r_l и уменьшением его верхней границы r_u до тех пор, пока не будет выполнено равенство $r_l = r_u$.

Для быстрого поиска радиуса необходимо находить вершины – претенденты на центр c_i с как можно большим

$$(2) \quad \max_{p \in P} m_{c_i p} = r_l = \min_{i=\overline{1, n}} (\max_{p \in P} m_{ip})$$

и с как можно меньшим эксцентриситетом $\varepsilon(c_i)$, здесь P – множество опорных вершин. При этом желательно, чтобы число просмотренных претендентов на центр c_i и вершин в P было как можно меньше, это позволит минимизировать число решений SSSP в Задаче 1 и число просмотренных элементов матрицы расстояний в Задаче 2.

В графе ищутся вершины p_1 и p_2 , являющиеся друг для друга самыми удаленными:

$$(3) \quad p_1, p_2 : m_{p_1 p_2} = \max_{i=\overline{1, n}} m_{ip_1} = \max_{i=\overline{1, n}} m_{ip_2}.$$

Для этого выбираются любая вершина графа d_1 и вершина d_2 , определяемая как самая удаленная от d_1 $d_2 : m_{d_1 d_2} = \max_{i=\overline{1, n}} m_{d_1 i}$. Последующие вершины в данной «последовательности» определяются аналогичным образом

$$(4) \quad d_{j+1} : m_{d_j d_{j+1}} = \max_{i=\overline{1, n}} m_{d_j i}.$$

Процесс продолжается до тех пор, пока не будет выполнено $m_{d_j d_{j+1}} = m_{d_{j-1} d_j}$, в этом случае искомые вершины найдены и $p_1 = d_{j-1}$, $p_2 = d_j$.

Найденные вершины p_1 и p_2 включаются в пустое до этого множество опорных вершин $P = \{p_1, p_2\}$. Претенденты на центр c_i ищутся по формуле (2). Если для первого претендента на центр c_1 выполняется равенство $r_l = r_u$, данная вершина является одним из центров графа и радиус графа $r = r_l = r_u$. Если же $r_u > r_l$, то самая удаленная от c_1 вершина $p_3 : m_{c_1 p_3} = \varepsilon(c_1)$ добавляется в множество опорных вершин P и выполняется поиск c_2 по формуле (2). Процесс продолжается до тех пор, пока для какого-то из претендентов не будет выполнено равенство (1).

Приведем описание алгоритма для обеих постановок задач.

Алгоритм поиска центра и радиуса (P1, P2)

Вход:

граф $G = (V, E, w)$;

для Задачи 2 матрица расстояний M ;

$r_l = 0, r_u = \infty$.

1. Построение исходного опорного множества.

d_1 – любая вершина графа.

Используя (4), определяем p_1, p_2 из (3) и включаем их в P .

В Задаче 1 при этом для d_i из (4) предварительно решаем $SSSP(d_i)$.

2. Находим претендента на центр.

Определяем вершину c_i и r_l по формуле (2).

3. Проверка претендента.

В Задаче 1, если для c_i кратчайшие расстояния не вычислены, решаем $SSSP(c_i)$.

Находим эксцентриситет $\varepsilon(c_i)$ и $r_u = \varepsilon(c_i)$, если $\varepsilon(c_i) < r_u$.

Если $r_u \neq r_l$: добавляем вершину $p_j : m_{c_i p_j} = \varepsilon(c_i)$ в P ; в Задаче 1, если для p_j кратчайшие расстояния не вычислены, решаем $SSSP(p_j)$; переходим к шагу 2.

Иначе c_i – один из центров графа, $r = r_l$ – радиус графа, конец алгоритма.

3.2. ПОИСК ДИАМЕТРА

Алгоритмы поиска диаметра состоят из двух частей. Вначале ищется один из центров графа алгоритмами, описанными в предыдущем разделе. Во второй части алгоритма производится непосредственный поиск диаметра на основе информации о расстояниях от центра до остальных вершин графа. То есть алгоритмы поиска диаметра полностью решают поставленные нами Задачи 1, 2 и могут называться алгоритмами поиска радиуса и диаметра.

3.2.1. АЛГОРИТМ ДЛЯ ЗАДАЧИ 2

После нахождения одного из центров графа c просматриваются расстояния только от тех вершин v_i , для которых выполняется неравенство

$$(5) \quad m_{ic} > d_l/2,$$

где d_l – текущая нижняя граница диаметра, вычисляемая по формуле

$$(6) \quad d_l = \max_{i,j \in P} m_{ij}$$

а P – множество опорных вершин, образованное при вычислении радиуса графа. Действительно, если диаметр графа больше текущей нижней границы и v_i – одна из периферийных вершин графа, для некоторой вершины v_j в силу неравенства треугольника для матрицы расстояний имеем $m_{ic} + m_{cj} \geq m_{ij} = d > d_l$. То есть $m_{ic} + m_{cj} > d_l = 2 \cdot d_l/2$ и необходимо либо $m_{ic} > d_l/2$, либо $m_{cj} > d_l/2$. Что доказывает необходимость рассматривать только вершины v_i , удовлетворяющие (5), в силу симметричности матрицы M .

Приведем описание алгоритма.

Алгоритм поиска диаметра для Задачи 2 (Д2)

Вход:

граф $G = (V, E, w)$;

матрица кратчайших расстояний M ;

$d_l = 0$.

1. Поиск центра графа.

Используя алгоритм из раздела 3.1, находим один центров графа c .

Вычисляем нижнюю границу диаметра d_l по формуле (6).

2. Поиск диаметра.

Просмотр на диаметр расстояний от вершин v_i , для которых выполняется формула (5).

Если $m_{ij} > d_l$, $d_l = m_{ij}$.

Выход:

d_l – диаметр графа.

3.2.2. АЛГОРИТМ ДЛЯ ЗАДАЧИ 1

По определению кратчайшего расстояния для элементов матрицы расстояний M справедливо неравенство треугольника

$$(7) \quad m_{ij} \leq m_{ik} + m_{kj}, \forall i, j, k.$$

Значит, вычислив расстояния от некоторой вершины v_v до всех остальных, для определения диаметра нужно просматривать расстояния только между теми парами вершин v_k, v_l , для которых справедливо

$$(8) \quad m_{kv} + m_{vl} > d_l.$$

В качестве вершины v_v в алгоритме используется центр графа c .

Согласно (7) потенциально наибольшим расстоянием между собой обладают вершины v_k, v_l с максимальной суммой $m_{kv} + m_{vl}$. Поэтому имеет смысл рассматривать вершины v_k, v_l в порядке убывания величины $m_{kv} + m_{vl}$. Если при таком проходе «сверху вниз» для какой-то из пар вершин v_k, v_l неравенство (8) не выполняется, то просмотр остальных пар, обладающих меньшим потенциальным расстоянием между собой, не нужен.

Для ускорения вместо сортировки пар v_k, v_l по сумме $m_{kc} + m_{cl}$ сортируются вершины v_i по расстоянию до центра m_{ic} , а проверка по формуле (8) выполняется для пар вершин в порядке

$$(9) \quad v_{m_1}v_{m_2}, v_{m_1}v_{m_3}, \dots, v_{m_1}v_{m_n}, v_{m_2}v_{m_3}, v_{m_2}v_{m_4} \dots$$

Здесь m_i – номер вершины с i -м по величине расстоянием до центра графа. Если для некоторых $v_{m_i}v_{m_j}$ (8) не выполняется, переходим к просмотру $v_{m_{i+1}}v_{m_{i+2}}$. Если (8) не выполняется и при этом $j = i + 1$, конец алгоритма и d_l – диаметр графа. Ниже следует описание алгоритма.

Алгоритм поиска диаметра для Задачи 1 (D1)

Вход:

граф $G = (V, E, w)$;

$d_l = 0$.

1. Поиск центра графа.

Используя алгоритм из раздела 3.1, находим один центров графа c .

Вычисляем нижнюю границу диаметра d_l по формуле (6).

2. Сортировка.

Сортировка вершин v_i по расстоянию до центра c в порядке убывания.

3. Проверка претендентов

Выбор пары претендентов из списка (9).

Если для пары v_k, v_l выполняется (8), то если для v_k, v_l кратчайшие расстояния не вычислены, решаем $SSSP(v_k), SSSP(v_l)$.

Если $m_{kl} > d_l$, $d_l = m_{kl}$

Выход:

d_l – диаметр графа.

4. Результаты

Все тесты проводились на компьютере с процессором *Intel Core i5 530* с частотой 2,93 ГГц и объемом памяти 3 ГБ в 32-разрядной версии *Windows XP*. Программный код был написан на языке *C++* с использованием среды разработки *Borland C++ Builder 6*. В качестве первого набора тестовых данных использовались взвешенные графы дорожных сетей США из открытого доступа [12]. Вторым набором тестовых данных были сгенерированные нами полные графы со случайными весами ребер. Для полных графов результат брался как среднее по 10 различным графам с одинаковыми характеристиками. Параметры тестовых графов представлены в таблице 1.

Разработанные алгоритмы для Задачи 1 (обозначения P1 и Д1) сравнивались с алгоритмом Дейкстры в реализации с двоичной кучей [6] для каждой вершины графа для графов с малой средней степенью вершин и алгоритмом Флойда–Уоршелла [8] для полных графов (PC1, DC1). В силу того, что решение задачи алгоритмом Дейкстры невозможно за приемлемое время для графов большой размерности, время работы алгоритма для графов, начиная с RN_BAY, было приближено методом наименьших квадратов. В качестве данных для аппроксимации выступало время работы алгоритма на разной размерности подграфах тестовых графов, часть этих подграфов представлена в таблице 1 (RN_1, RN_2 и т.п.). Время работы алгоритма Дейкстры для всех вершин было аппроксимировано функциями $7,1 \cdot 10^{-7} n^2 \log(n) - 1,1 \cdot 10^{-7} nm \log(n) + 0,66$ для поиска радиуса и $7,2 \cdot 10^{-7} n^2 \log(n) - 1,1 \cdot 10^{-7} nm \log(n) + 0,98$ для поиска диаметра. В разработанных алгоритмах для Задачи 1 в качестве алгоритма решения *SSSP* используется алгоритм Дейкстры в реализации с двоичной кучей, в качестве сортирующего алгоритма в Д1 используется быстрая сортировка. В таблицах 2 и 3 приводятся результаты тестов для Задачи 1.

Заметно значительное сокращение времени поиска радиуса и диаметра всех тестируемых графов разработанными алгоритмами для Задачи 1. Процент вершин, для которых необходимо решить *SSSP*, при поиске радиуса не превышает 0,9%, а при поиске диаметра 7%.

Ввиду невозможности хранения информации о расстояниях в оперативной памяти и вытекающей некорректной оценки времени счета для графов большой размерности, тесты для Задачи 2 проводились для графов с числом вершин не более 10^4 . Сравнение разработанных алгоритмов (P2, Д2) проводилось с проходом по всем элементам матрицы расстояний для поиска радиуса (PC2) и с проходом верхнего треугольника матрицы расстояний для поиска диаметра (DC2). В связи с небольшим временем решения задачи для исследуемых графов каждый алгоритм запускался последовательно 1000 раз. Результаты тестов для Задачи 2 при-

ведены в таблице 3. Для Задачи 2 на рассматриваемых графах также наблюдается значительное преимущество разработанных алгоритмов над сравниваемыми – ускорение поиска радиуса от 56 раз и ускорение поиска диаметра от 5 и более раз.

Таблица 1. Параметры тестовых графов

Название	Вершин	Ребер	Средняя степень
RN_1	1001	2432	2,43
RN_2	2007	5288	2,63
RN_5	5000	$1,34 \cdot 10^4$	2,69
RN_7	7000	$1,8 \cdot 10^4$	2,58
RN_10	10^4	$2,7 \cdot 10^4$	2,69
RN_15	$1,5 \cdot 10^4$	$4,38 \cdot 10^4$	2,92
RN_20	$2 \cdot 10^4$	$5,41 \cdot 10^4$	2,71
RN_NY	$2,64 \cdot 10^5$	$7,34 \cdot 10^5$	2,78
RN_BAY	$3,21 \cdot 10^5$	$8 \cdot 10^5$	2,49
RN_COL	$4,36 \cdot 10^5$	$1,06 \cdot 10^6$	2,43
RN_FLA	$1,07 \cdot 10^6$	$2,71 \cdot 10^6$	2,53
RN_NW	$1,21 \cdot 10^6$	$2,84 \cdot 10^6$	2,35
RN_LKS	$2,76 \cdot 10^6$	$6,89 \cdot 10^6$	2,5
RN_E	$3,6 \cdot 10^6$	$8,78 \cdot 10^6$	2,44
RN_W	$6,26 \cdot 10^6$	$1,52 \cdot 10^7$	2,43
F_1	1000	10^6	1000
F_2	2000	$4 \cdot 10^6$	2000
F_5	5000	$2,5 \cdot 10^7$	5000
F_7	7000	$4,9 \cdot 10^7$	7000
F_10	10^4	10^8	10^4

Таблица 2. Результаты для Задачи 1, начало. P1 SSSP, шт. – количество решений задач SSSP при использовании P1;
 P1 SSSP, доля – доля вершин с решенной SSSP от общего количества вершин графа. Аналогично для Д1. Заёздочкой обозначены приближенные результаты

Граф	PC1, сек	P1, сек	P1 SSSP, шт.	P1 SSSP, доля	ДС1, сек	Д1, сек	Д1 SSSP, шт.	Д1 SSSP, доля
RN_1	1,33	0,016	4	0,004	1,31	0	4	0,004
RN_2	5,45	0,031	7	0,0035	5,45	0,031	10	0,005
RN_5	39	0,031	4	0,0008	39	0,61	72	0,0144
RN_7	75	0,063	6	0,00086	75	5,5	492	0,0702
RN_10	170	0,17	10	0,001	170	0,72	41	0,00,1
RN_15	373	0,17	7	0,00047	374	0,77	30	0,002
RN_20	761	0,23	6	0,0003	762	25	635	0,0318
RN_NY	$1,54 \cdot 10^5$	3,5	6	$2,3 \cdot 10^{-5}$	$1,54 \cdot 10^5$	5,3	9	$3,4 \cdot 10^{-5}$
RN_BAY	$2,49 \cdot 10^{5*}$	3,16	4	$1,3 \cdot 10^{-5}$	$2,49 \cdot 10^{5*}$	3,31	4	$1,25 \cdot 10^{-5}$
RN_COL	$4,76 \cdot 10^{5*}$	7,09	6	$1,4 \cdot 10^{-5}$	$4,77 \cdot 10^{5*}$	233	198	0,00045
RN_FLA	$2,99 \cdot 10^{6*}$	13	4	$3,7 \cdot 10^{-6}$	$2,99 \cdot 10^{6*}$	16	5	$4,7 \cdot 10^{-6}$
RN_NW	$4,03 \cdot 10^{6*}$	14	4	$3,3 \cdot 10^{-6}$	$4,03 \cdot 10^{6*}$	15	4	$3,3 \cdot 10^{-6}$
RN_LKS	$2,14 \cdot 10^{7*}$	37	4	$1,5 \cdot 10^{-6}$	$2,14 \cdot 10^{7*}$	38	4	$1,5 \cdot 10^{-6}$
RN_E	$3,76 \cdot 10^{7*}$	49	4	$1,1 \cdot 10^{-6}$	$3,77 \cdot 10^{7*}$	51	4	$1,1 \cdot 10^{-6}$
RN_W	$1,18 \cdot 10^{8*}$	92	4	$6,4 \cdot 10^{-7}$	$1,19 \cdot 10^{8*}$	97	4	$6,4 \cdot 10^{-7}$

168 **Таблица 3. Результаты для Задачи 1, продолжение. P1 SSSP, шт. – количество решений задач SSSP при использовании P1;**
P1 SSSP, доля – доля вершин с решенной SSSP от общего количества вершин графа. Аналогично для Д1. Звёздочкой обозначены приближенные результаты

Граф	PC1, сек	P1, сек	P1 SSSP, шт.	P1 SSSP, доля	ДС1, сек	Д1, сек	Д1 SSSP, шт.	Д1 SSSP, доля
F_1	10	0,18	9	0,009	10	0,27	13,9	0,0139
F_2	81	1	10,3	0,0052	81	1,75	17,8	0,0089
F_5	1246	12	9,5	0,0019	1246	21	15,4	0,0031
F_7	3401	33	10	0,0014	3401	45	13,7	0,002
F_10	9853	71	9,5	0,00095	9853	123	16,5	0,0017

Таблица 4. Результаты для Задачи 2

Граф	PC2, сек	P2, сек	P, ускорение	DC2, сек	D2, сек	D, ускорение
RN_1	4,21	0,031	135	1,7	0,047	36
RN_2	156	0,14	1114	7,3	0,17	42
RN_5	95	0,16	593	45	1,38	32
RN_7	181	0,38	476	87	16	5
RN_10	374	0,89	420	177	2,19	80
F_1	4,07	0,072	56	2,08	0,107	19
F_2	16	0,16	100	8,16	0,26	31
F_5	100	0,43	232	50	0,69	72
F_7	196	0,63	311	98	0,86	113
F_10	399	0,81	492	200	1,27	157

Заключение

Разработанные алгоритмы позволяют решать поставленные задачи 1 и 2 поиска метрических характеристик с использованием информации о расстояниях лишь от небольшой части вершин графа. Результаты тестов показывают, что по крайней мере на рассматриваемых графах процентная доля используемой информации в общем случае уменьшается с увеличением размерности графа. Такое поведение разработанных алгоритмов говорит об увеличивающемся выигрыше во времени при использовании алгоритмов на графах большой размерности.

В качестве дальнейших исследований по теме работы возможны тестирование разработанных алгоритмов на других видах графов, оценка области применения алгоритмов. Еще одним направлением для исследований является дальнейшая оптимизация алгоритмов за счет использования более быстрого алгоритма сортировки и алгоритмов решения *SSSP*, более точно соответствующих исследуемым графам. Интересным также является вопрос применимости подхода, использованного в алгоритмах, для поиска всех центров и периферийных вершин графа.

Литература

1. УРАКОВ А.Р., ТИМЕРЯЕВ Т.В. *Многоуровневый алгоритм разбиения графов по критерию средней длины* // Информационные технологии. – 2012. – №4. – С. 22–25.
2. BERMAN P., KASIVISWANATHAN S.P. *Faster Approximation of Distances in Graphs* // Algorithms and Data Structures. Lecture Notes in Computer Science. – 2007. – Vol. 4619. – P. 541–552.
3. BOLDI P., ROSA M., VIGNA S. *HyperANF: approximating the neighbourhood function of very large graphs on a budget* // Proc. 20th international conference on World Wide Web. – New York: ACM, 2011. – P. 625–634.

4. CHAN T.M. *More Algorithms for All-Pairs Shortest Paths in Weighted Graphs* // Proc. 39th annual ACM symposium on Theory of computing. – New York: ACM, 2007. – P. 590–598.
5. CHEPOI V., DRAGAN F. ET AL. *Center and Diameter Problems in Plane Triangulations and Quadrangulations* // Proc. 13th annual ACM-SIAM symposium on Discrete algorithms. – Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2002. – P. 346–355.
6. CORMEN T.H., LEISERSON C.E., RIVEST R.L., STEIN C. *Introduction to Algorithms, Second Edition*. – MIT Press, 2001. – 1202 p.
7. DIJKSTRA E.W. *A note on two problems in connection with graphs* // Numerische Mathematik 1. – 1959. – P. 83–89.
8. FLOYD R.W. *Algorithm 97: Shortest Path* // Communications of the ACM. – 1962. – Vol. 5, №6. – P. 345.
9. KUNG U., TSOURAKAKIS C.E., APPEL A.P., FALOUTSOS C., LESKOVEC J. *Radius Plots for Mining Tera-byte Scale Graphs: Algorithms, Patterns, and Observations* // SIAM International Conference on Data Mining. – 2010. – P. 548–558.
10. SHOSHAN A., ZWICK U. *All Pairs Shortest Paths in Undirected Graphs with Integer Weights* // Proc. 40th Annual Symposium on Foundations of Computer Science. – Washington: IEEE Computer Society, 1999. – P. 605–614.
11. TAKES F.W., KOSTERS W.A. *Determining the diameter of small world networks* // Proc. 20th ACM international conference on Information and knowledge management. – New York: ACM, 2011. – P. 1191–1196.
12. *9th DIMACS Implementation Challenge – Shortest Paths* [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.dis.uniroma1.it/challenge9/download.shtml> (дата обращения: ноябрь 2012).

FAST SEARCH ALGORITHMS FOR TWO METRIC CHARACTERISTICS PROBLEMS ON WEIGHTED GRAPHS

Airat Urakov, Ufa State Aviation Technical University, Ufa,
Cand.Sc., assistant professor (urakov@ufanet.ru).

Timofey Timeryaev, Ufa State Aviation Technical University, Ufa,
graduate student (timeryaev@yandex.ru).

Abstract: Two problems are considered of metric characteristics search on weighted undirected graphs with non-negative edge weights. The first problem is to find the radius, diameter, at least one center, and one pair of peripheral vertices of an undirected graph with non-negative edge weights. In the second problem one also has the pre-calculated distances matrix. For these problems we propose fast search algorithms, which use only small fraction of graph vertices for metric characteristics search. The proposed algorithms are tested on various inputs against the other popular methods.

Keywords: metric characteristics of a graph, graph radius, graph diameter, graph center, graph peripheral vertices.

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии П. Ю. Чеботаревым*

УДК 629.7
ББК 39.53

ВЛИЯНИЕ ОТВЕТСТВЕННОСТИ ПЕРСОНАЛА ЗА ВОЗНИКНОВЕНИЕ ПРЕДПОСЫЛОК К ЛЕТНЫМ ПРОИСШЕСТВИЯМ НА БЕЗОПАСНОСТЬ ПОЛЕТОВ

Варюхина Е. В.¹

(Московский физико-технический институт, Москва)

Клочков В. В.²

(ФГБУН Институт проблем управления РАН, Москва)

Значительная часть аварий и катастроф в мире связана с человеческим фактором, следовательно, наиболее очевидным представляется ужесточение ответственности персонала за создание предпосылок к происшествиям. Тем не менее, как показал анализ представленной в данной работе математической модели, в начале периода эксплуатации новой технической системы целесообразно смягчить ответственность персонала за возникновение нештатных ситуаций, во избежание утаивания ими важной информации, которая может быть использована для совершенствования системы.

Ключевые слова: выявление предпосылок к авиационным происшествиям, ответственность персонала, безопасность полетов, эффект обучения, экономико-математическое моделирование, авиатехника

1. Введение

Поскольку значительная часть *авиационных происшествий* (АП), т.е. аварий и катастроф, как в России, так и за рубежом связана с так называемым «человеческим фактором» (см., на-

¹ *Екатерина Витальевна Варюхина, аспирант (eyebrow@yandex.ru).*

² *Владислав Валерьевич Клочков, доктор экономических наук, кандидат технических наук, ведущий научный сотрудник (vlad_klochkov@mail.ru).*

пример, [3]), важным направлением повышения безопасности полетов традиционно представляется ужесточение ответственности летного, технического персонала, наземных служб за создание предпосылок к происшествиям. В то же время более детальный анализ причин и обстоятельств авиационных происшествий показывает, что в реальности воздействие «человеческого фактора» на безопасность полетов чрезвычайно многообразно. В целом ряде случаев именно неформальный подход экипажа, его нестандартные решения и действия позволяли предотвратить возможные авиационные происшествия, в том числе с тяжелыми последствиями. Кроме того, не следует думать, что все случаи негативного проявления «человеческого фактора» связаны с преднамеренным нарушением правил выполнения полетов, руководства по летной эксплуатации и т.п. Во многих случаях формально неверные действия экипажа вызваны эргономическим несовершенством воздушного судна (ВС), сложностью операторской работы, сложными общими условиями труда экипажей, его неудовлетворительной организацией и т.п. То есть само по себе ужесточение дисциплины недостаточно для повышения безопасности полетов – необходимо устранение описанных системных проблем. Тем более что летный экипаж, как правило, и без дополнительных санкций ощущает ответственность за безопасное выполнение полетов, поскольку в случае авиационного происшествия понесет ущерб наравне с пассажирами.

Кроме того, на ранних стадиях эксплуатации новых типов изделий, как правило, наблюдается повышенная интенсивность отказов по причине *конструктивно-производственных недостатков* (КПН). Закономерности развития технических систем таковы, что КПН устраняются постепенно, по мере накопления опыта. То есть в отношении повышения надежности действует *эффект обучения*, известный во многих областях человеческой деятельности (см., например, работы, посвященные эффектам обучения в производстве авиатехники [1, 4, 5]).

Таким образом, интенсивность предпосылок к авиационным происшествиям может и должна снижаться по мере накопления опыта – на этом и основана система обеспечения безопасности полетов, сложившаяся в развитых авиационных державах,

в том числе и в нашей стране. Однако важно подчеркнуть, что важно не столько накопление опыта как такового, сколько его осмысление и анализ. Эти процессы возможны лишь при наличии обратных связей между эксплуатирующими технику специалистами – прежде всего, летным и техническим составом – и разработчиками авиатехники, а также органами управления, отвечающими за организацию летной работы и т.п.

Однако именно эта обратная связь может ослабевать в силу следующей проблемы. Далеко не все предпосылки к авиационным происшествиям действительно приводят собственно к происшествию или к такой особой ситуации (ОС), которая стала известной многим заинтересованным лицам – наземным службам, руководству авиакомпании, ее летной и инженерно-авиационной служб, регулирующим органам и т.п. Многие ОС имеют ограниченное проявление и локализируются на уровне экипажей ВС (кроме того, многие предпосылки к авиационным происшествиям вообще проходят скрытым образом, оставаясь незамеченными даже экипажем). Их анализ, централизованное обобщение на уровне производителя ВС и авиационных властей страны могли бы способствовать накоплению опыта и устранению КПН авиатехники, системных проблем в сфере безопасности полетов и т.п. Однако они, как правило, не делаются достоянием гласности, поскольку экипаж опасается санкций за неправильные действия (в тех случаях, когда именно они, а не КПН или действие внешних сил, будут признаны причиной возникновения ОС). При этом следует подчеркнуть, что объективный рассказ экипажа об обстоятельствах ОС, – возможно, сопровождаемый детальным анализом технического состояния приземлившегося ВС и средств объективного контроля – может быть гораздо информативнее, чем расследование авиационного происшествия с тяжелыми последствиями, которые затрудняют и восстановление соответствующей информации.

Разумеется, экипаж мог бы проявить сознательность и мыслить стратегически: его частный опыт внесет вклад в общий массив знаний и поспособствует повышению безопасности полетов в будущем, в том числе и для данного экипажа. Но, во-первых, далеко не всегда такая сознательность и стратегичность мышления проявляется на практике. Во-вторых, имеет место

хорошо изученная проблема неэффективности инвестирования в общественное благо (безопасность полетов) по сравнению с угрозой частных потерь (санкций), причем привлекательность работы об общем благе низка, поскольку любой конкретный экипаж – лишь один из многих, и его персональный вклад может быть невелик. Зато возможные санкции, если экипаж будет признан виновным в возникновении ОС, касаются его самым непосредственным образом.

В связи с этим со стороны специалистов-практиков звучат парадоксальные, на первый взгляд, предложения: снять с экипажей ответственность за возникновение ОС, о которых они сами рассказали, и, тем самым, ускорить накопление опыта эксплуатации за счет многочисленных ОС, локализованных на уровне экипажей. Иначе говоря, предлагается *декриминализация* расследования предпосылок к авиационным происшествиям, см. [2]. Разумеется, она должна касаться не только локализованных ОС, но и явных. Во-первых, потому что иначе складывалась бы парадоксальная и явно несправедливая ситуация: если ОС стала достоянием гласности – вне зависимости от последующих действий экипажа возможно наказание, в то время как, добровольно рассказав о локализованной ОС, экипаж автоматически освобождает себя от ответственности. Во-вторых, на практике расследование ОС не укладывается в рамки простых схематичных моделей. В этом процессе всегда есть место субъективизму, поэтому даже о явной ОС экипаж может рассказать не всю правду, стремясь обезопасить себя от обвинений, в то время как для устранения системных причин необходима полная и достоверная картина.

Санкции за создание предпосылок к авиационным происшествиям считаются (наряду с угрозой собственно авиационного происшествия) весьма сильным стимулом, заставляющим экипаж прилагать больше усилий к недопущению операторских ошибок. Именно с этой стимулирующей функцией и вступает в противоречие предложение о декриминализации расследования причин ОС. Рациональное принятие решений в столь ответственной сфере требует научного обоснования, в том числе с позиций теории управления социально-экономическими системами. Авторы данной работы предприняли попытку такого анали-

за с привлечением математического моделирования и полагают, что разработанный методический подход, а также общие качественные выводы и рекомендации окажутся полезными не только для гражданской авиации, но и для многих других отраслей, характеризующихся повышенной опасностью и высокой степенью ответственности операторов.

2. Математическая модель управления уровнем безопасности полетов в части определения ответственности за создание предпосылок к авиационным происшествиям

2.1. МОДЕЛИРОВАНИЕ УРОВНЯ УСИЛИЙ ОПЕРАТОРОВ, НАПРАВЛЕННЫХ НА НЕДОПУЩЕНИЕ ОШИБОК

Формализуем описанную проблему следующим образом. Обозначим интенсивность суммарного потока предпосылок к авиационным происшествиям λ_{Σ} событий на летный час эксплуатации ВС. Этот поток складывается из двух составляющих: потока предпосылок, вызванных ошибками операторов, и потока предпосылок, вызванного прочими причинами – КПН, внешними факторами, системными проблемами в сфере безопасности полетов и т.п. Их интенсивности обозначим соответственно $\lambda_{\text{ош}}$ и $\lambda_{\text{пр}}$. Таким образом,

$$(1) \quad \lambda_{\Sigma} = \lambda_{\text{ош}} + \lambda_{\text{пр}}.$$

Оба слагаемых этой суммы зависят от некоторых факторов. Так, интенсивность ошибок операторов зависит прежде всего от уровня их усилий, направленных на недопущение ошибок. Обозначим его x . Тогда $\partial \lambda_{\text{ош}} / \partial x < 0$. Характерный вид зависимости приведен на рис. 1.

Он отражает основные качественные особенности рассматриваемого явления. Во-первых, предельная эффективность усилий сокращается: $\partial^2 \lambda_{\text{ош}} / \partial x^2 > 0$, а во-вторых, даже при неограниченном возрастании уровня усилий ошибки не исключаются – существует «неснижаемый остаток»

$$\lambda_{\text{ош}}^{\min} = \lim_{x \rightarrow \infty} \lambda_{\text{ош}}(x),$$

определяемый технологическими, психофизиологическими, эргономическими и др. факторами.

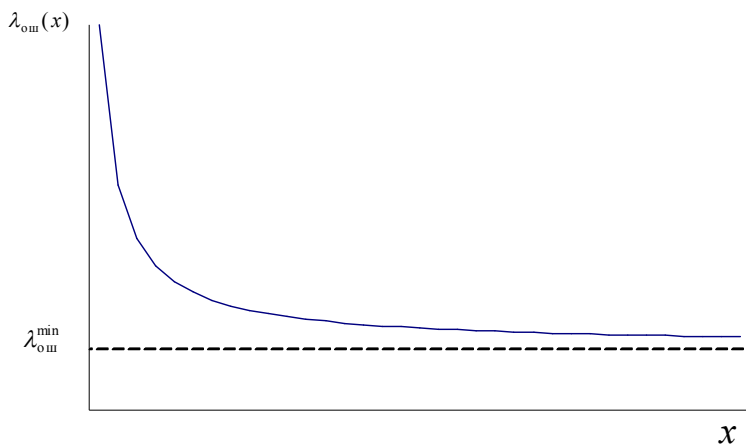


Рис. 1. Характерный вид зависимости $\lambda_{\text{ош}}(x)$

Что касается интенсивности предпосылок к происшествиям, вызванных прочими причинами, она, прежде всего, зависит от накопленного опыта расследования АП и ОС, ставших достоянием гласности. Этот опыт (измеряемый в количестве проанализированных АП и ОС) обозначим Q . Зависимость $\lambda_{\text{пр}}(Q)$ обладает теми же качественными свойствами, что и зависимость $\lambda_{\text{ош}}(x)$. В частности, также существует «неснижаемый остаток» $\lambda_{\text{пр}}^{\text{min}} = \lim_{Q \rightarrow \infty} \lambda_{\text{пр}}(Q)$.

Далее учтем, что предпосылки к авиационным происшествиям могут иметь различные исходы: авиационные происшествия, явные особые ситуации, особые ситуации, локализованные на уровне экипажа и скрытые предпосылки к авиационным происшествиям¹. Пусть с вероятностью $p_{\text{АП}}$ предпосылки действи-

¹ Множества этих исходов рассматриваются как непересекающиеся и составляющие в совокупности полное множество возможных исходов.

тельно приводят к АП. Как правило, гораздо выше вероятность возникновения ОС, причем с вероятностью $p_{\text{явн}}$ она будет явной, а с вероятностью $p_{\text{лок}}$ – локализованной на уровне экипажа. Наконец, с вероятностью $p_{\text{скр}} = 1 - p_{\text{АП}} - p_{\text{явн}} - p_{\text{лок}}$ предпосылка к авиационному происшествию будет носить скрытый, латентный характер и останется незамеченной даже экипажем. Для простоты будем считать эти вероятности неизменными, хотя в реальности они могут зависеть от интенсивностей потоков предпосылок к АП, усилий экипажа по недопущению ошибок и уровня накопленного опыта, а также от прочих факторов.

Обозначим $d_{\text{АП}}$ субъективную оценку ущерба, который понесет экипаж в случае авиационного происшествия. Предположим для простоты, что он может быть выражен в тех же единицах, что и санкции за создание предпосылок к АП $d_{\text{штраф}}$. Также предположим, что в тех же единицах выражается и уровень усилий по недопущению предпосылок к происшествиям x . Следовательно, ожидаемый ущерб¹ экипажа, вызванный рисками попадания в АП и санкций после ОС, приведенный к летному часу, выражается следующим образом:

$$\begin{aligned}
 (2) \quad \bar{D} &= \lambda_{\Sigma} \cdot \left(d_{\text{АП}} \cdot p_{\text{АП}} + d_{\text{штраф}} \cdot p_{\text{явн}} \cdot \frac{\lambda_{\text{ош}}}{\lambda_{\Sigma}} \right) = \\
 &= (\lambda_{\text{ош}} + \lambda_{\text{пр}}) \cdot \left(d_{\text{АП}} \cdot p_{\text{АП}} + d_{\text{штраф}} \cdot p_{\text{явн}} \cdot \frac{\lambda_{\text{ош}}}{\lambda_{\text{ош}} + \lambda_{\text{пр}}} \right) = \\
 &= d_{\text{АП}} \cdot p_{\text{АП}} \cdot (\lambda_{\text{ош}} + \lambda_{\text{пр}}) + d_{\text{штраф}} \cdot p_{\text{явн}} \cdot \lambda_{\text{ош}} .
 \end{aligned}$$

Множитель $\lambda_{\text{ош}}/\lambda_{\Sigma}$, равный доле предпосылок к авиационным происшествиям по вине экипажа, отражает предположение о справедливом расследовании причин каждой ОС, ставшей достоянием гласности. Подчеркнем, что лишь явные ОС будут основанием для наказания, а о локализованных ОС при $d_{\text{штраф}} > 0$ экипаж, вероятнее всего, не расскажет. Случай, когда

¹ Руководствуясь величиной ожидаемого ущерба, экипаж выступает как субъект, нейтральный к риску. На практике он может быть не расположен к риску, и угроза попадания в АП, например, может расцениваться как принципиально неприемлемая.

экипаж при наличии угрозы санкций добровольно расскажет о локализованных ОС, здесь не рассматривается как вырожденный – очевидно, что в этом случае ожидаемые потери только возрастут, а стратегическое мышление и сознательность (подчеркнем, при угрозе наказания, не способствующей их проявлению) здесь не рассматриваются.

В случае декриминализации расследования ОС (т.е. при $d_{\text{штраф}} = 0$) ожидаемый ущерб определяется только риском попадания в АП (что на практике само по себе является мощным стимулом):

$$(3) \quad \bar{D} = \lambda_{\Sigma} \cdot d_{\text{АП}} \cdot p_{\text{АП}} = d_{\text{АП}} \cdot p_{\text{АП}} \cdot (\lambda_{\text{ош}} + \lambda_{\text{пр}}).$$

Таким образом, при заданном уровне штрафа оптимальный уровень усилий экипажа, направленных на недопущение предпосылок к АП, определяется как результат решения следующей оптимизационной задачи (минимизируется сумма выраженных в одинаковых единицах усилий экипажа и ожидаемого ущерба):

$$(4) \quad \bar{D}(x) + x = d_{\text{АП}} \cdot p_{\text{АП}} \cdot [\lambda_{\text{ош}}(x) + \lambda_{\text{пр}}(Q)] + \\ + d_{\text{штраф}} \cdot p_{\text{явн}} \cdot \lambda_{\text{ош}}(x) + x \rightarrow \min_x;$$

$$(5) \quad \frac{\partial}{\partial x}(\bar{D} + x) = (d_{\text{АП}} \cdot p_{\text{АП}} + d_{\text{штраф}} \cdot p_{\text{явн}}) \cdot \frac{\partial \lambda_{\text{ош}}}{\partial x} + 1 = 0;$$

$$(6) \quad \Rightarrow -\frac{\partial \lambda_{\text{ош}}}{\partial x} \Big|_{x^*} = \frac{1}{d_{\text{АП}} \cdot p_{\text{АП}} + d_{\text{штраф}} \cdot p_{\text{явн}}}.$$

Графически можно определить этот уровень так, как показано на рис. 2.

Очевидно, что при наличии санкций за создание предпосылок к АП оптимальный уровень усилий будет, в общем случае, выше (или по крайней мере не ниже), чем в том случае, когда расследование ОС декриминализовано.

Заметим, что в данной упрощенной модели при неизменных вероятностях различных исходов предпосылок к АП, а также при аддитивной модели суммарного потока предпосылок, оптимальный уровень усилий x^* (а также соответствующая ему интенсивность потока предпосылок, возникающих по вине экипажа $\lambda_{\text{ош}}(x^*)$) вообще не зависит от объема накопленного опыта, от

времени с начала эксплуатации и т.п. Но если бы интенсивность ошибок экипажа зависела от интенсивности возникновения предпосылок к происшествиям по прочим причинам, такая зависимость уже проявилась бы.

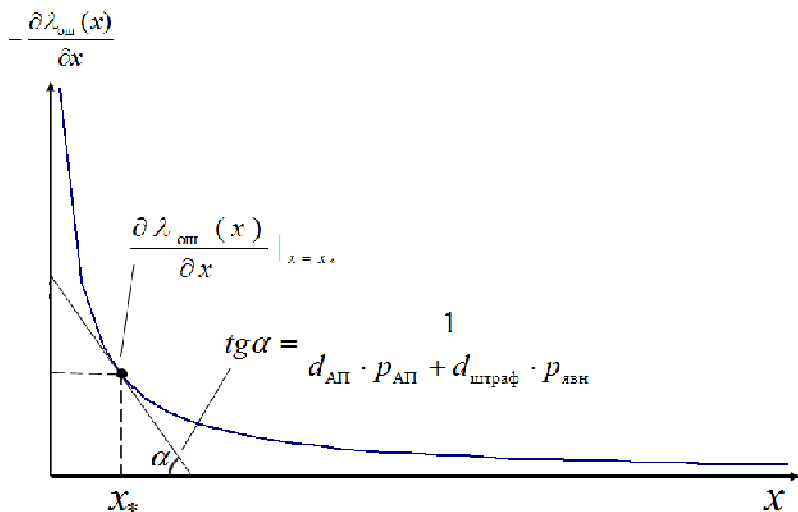


Рис. 2. Оптимальный уровень усилий экипажа, направленных на недопущение предпосылок к АП

2.2. ДИСКРЕТНАЯ МОДЕЛЬ НАКОПЛЕНИЯ ОПЫТА ЭКСПЛУАТАЦИИ ТЕХНИКИ

Оценим скорость накопления опыта эксплуатации изделий данного типа, а также расследования происходящих с ними ОС и АП. Численность парка в периоде t (отсчитываемом с начала эксплуатации ВС данного типа: $t = 1, 2, \dots, T$) обозначим $N(t)$, а средний налет на одно ВС за период – $\eta(t)$. Строго говоря, в реальности и темпы наращивания численности парка, и темпы повышения налета до планового уровня зависят от количества и тяжести авиационных происшествий и особых ситуаций. Имиджевые потери авиастроительной компании после авиационных происшествий – вне зависимости от реальной вины разработчика и производителя – сказываются на продажах авиатехники, а приостановка эксплуатации, которая нередко практикуется даже

после особых ситуаций, не повлекших за собой тяжелых последствий, снижает величины налета ВС. То есть действуют обратные связи между численностью парка, его налетом и количеством АП и ОС. Однако в данной модели для простоты ими можно пренебречь.

Если пренебречь изменением модельных переменных на протяжении самого периода t , тогда суммарное количество АП и ОС, доступных для анализа, составит:

- при наличии санкций за создание предпосылок к АП (поскольку достоянием гласности станут лишь явные ОС):

$$(7) \quad q(t) = N(t) \cdot \eta(t) \cdot (p_{АП} + p_{явн}) \cdot \lambda_{\Sigma}(t);$$

- в случае декриминализации расследования ОС (поскольку достоянием гласности станут и локализованные ОС):

$$(8) \quad q(t) = N(t) \cdot \eta(t) \cdot (p_{АП} + p_{явн} + p_{лок}) \cdot \lambda_{\Sigma}(t).$$

В этих выражениях фигурирует суммарная интенсивность потоков предпосылок к авиационным происшествиям в периоде t :

$$(9) \quad \lambda_{\Sigma}(t) = \lambda_{\text{ош}} [x_*(t)] + \lambda_{\text{пр}} [Q(t)].$$

Она определяется накопленным к данному моменту опытом анализа АП и ОС $Q(t)$, а также характерным для данного периода уровнем усилий по предотвращению предпосылок $x_*(t)$. Подчеркнем, что он будет различным в зависимости от наличия либо отсутствия наказания за создание предпосылок к авиационным происшествиям.

Здесь предполагается, что вклад в накопление опыта вносят как отказы техники, проявления внешних сил и др. факторы, так и ошибки экипажа. В противном случае, если считать, что устранению КРН способствует лишь анализ АП и ОС, вызванных данными факторами, а не ошибками экипажа, вместо $\lambda_{\Sigma}(t)$ в вышеприведенных выражениях должна фигурировать лишь величина $\lambda_{\text{пр}}[Q(t)]$. С качественной точки зрения такое изменение предположений повлияет на результаты моделирования предсказуемым образом: введение санкций за ошибки экипажей в меньшей степени повлияет на скорость накопления опыта, чем в том случае, когда и ошибки экипажей вносили вклад в этот про-

цесс. Таким образом, прямое – дисциплинирующее – действие санкций станет более значимым.

Накопление опыта описывается следующим конечно-разностным соотношением:

$$(10) \quad Q(t+1) = Q(t) + q(t), \quad t = 1, 2, \dots, T-1.$$

Целевой функцией регулятора (государства, авиационных властей, летной службы авиакомпании и т.п.) естественно считать ожидаемое суммарное количество авиационных происшествий за весь период эксплуатации парка изделий данного типа. Причем при неизменных вероятностях различных исходов предпосылок к АП минимизация этой суммы сводится к минимизации суммарного количества (накопленного потока) предпосылок к АП:

$$(11) \quad J = \sum_{t=1}^T \lambda_{\Sigma}(t) \rightarrow \min.$$

Управляющими воздействиями регулятора могут быть

- величина штрафа за создание предпосылок к ОС $d_{\text{штраф}}$;
- сам факт наличия либо отсутствия штрафа.

Следует сразу прояснить ситуацию с определением оптимальной для регулятора величины штрафа $d_{\text{штраф}}$. Поскольку с ростом ставки штрафа уровень усилий экипажей растет, а интенсивность ошибок сокращается, оптимальным для регулятора было бы назначить штраф как можно выше. На первый взгляд, оптимальна бесконечно большая ставка штрафа. Однако нарастание его ставки имеет естественные пределы – можно предположить, что субъективное восприятие наказания за ОС вряд ли превзойдет оценку ущерба при попадании в АП (хотя следует признать, что на практике такие ситуации встречались в разных отраслях). Таким образом, $d_{\text{штраф}} \leq d_{\text{АП}}$ и возможности снижения интенсивности ошибок экипажей за счет санкций ограничены: $\lambda_{\text{ош}} \geq \lambda_{\text{ош}}(x^* | d_{\text{штраф}} = d_{\text{АП}})$.

Можно задать вопрос: в каких единицах измеряются величины ущерба при АП и санкций после особых ситуаций, возникших по вине экипажа, а также уровень усилий операторов? Считая размерности этих величин одинаковыми, мы сво-

дим все к стоимостным единицам. И если в отношении санкций такой подход может быть правомерным, хотя, например, потери работника в случае увольнения или понижения в должности не ограничиваются лишь денежными потерями, тем более не сводятся к ним потеря здоровья или даже жизни в результате АП. Затруднительна и практическая оценка уровня усилий оператора в стоимостных единицах. Однако в данной модели все эти величины вводились лишь для того, чтобы показать, что интенсивность возникновения предпосылок к АП по вине экипажа снижается при наличии санкций, а операторы прилагают большие усилия для предотвращения таких предпосылок. Особо подчеркнем, что уровень интенсивности ошибок экипажей в данной упрощенной модели не зависит от времени, накопленного опыта и др. переменных – он зависит исключительно от наличия или отсутствия санкций в данный момент. Поэтому, в конечном счете, можно ограничиться в дальнейших расчетах лишь значениями интенсивности ошибок экипажей при отсутствии и при наличии санкций, обозначив их, соответственно, $\lambda_{\text{ош}}^0$ и $\lambda_{\text{ош}}^{\text{штраф}} < \lambda_{\text{ош}}^0$. Заметим, что их значения можно оценить на практике с большей достоверностью, чем значения величин, используемых в модели определения оптимального уровня усилий и $\lambda_{\text{ош}}(x^* | d_{\text{штраф}})$. Однако эта модель была необходима, в том числе, и для анализа рациональной политики регулятора в отношении величины штрафа. Именно в результате этого анализа было показано, что оптимальный уровень санкций (а, следовательно, и достигаемое благодаря им снижение интенсивности ошибок операторов) не зависит от времени и др. фазовых переменных модели, что и позволяет свести модель поведения операторов к двум величинам $\lambda_{\text{ош}}^0$ и $\lambda_{\text{ош}}^{\text{штраф}}$.

2.3. НЕПРЕРЫВНАЯ МОДЕЛЬ НАКОПЛЕНИЯ ОПЫТА ЭКСПЛУАТАЦИИ ТЕХНИКИ

Описанная выше модель далее будет использоваться для численных расчетов, но, наряду с ними, интерес представляет и качественный анализ зависимости оптимального решения от модельных параметров, который удобнее проводить аналитически, рассматривая модель в общем виде. Для этого перейдем к

непрерывному времени, и закон накопления опыта примет следующий вид:

$$(12) \dot{Q}(t) = q(t), \text{ или } Q(t) = \int_{\tau=0}^t q(\tau) d\tau, \quad t = [0; T].$$

Таким образом, целевая функция может быть выражена через управляющую переменную t' :

$$(13) J(t') = \int_{t=1}^{t'} \lambda_{\Sigma}^0(t) dt + \int_{t=t'}^T \lambda_{\Sigma}^{\text{штраф}}(t | t') dt,$$

где $\lambda_{\Sigma}^0(t)$, $t \in [0; t']$, и $\lambda_{\Sigma}^{\text{штраф}}(t | t')$, $t \in (t'; T]$ – сложившиеся к моменту t интенсивности возникновения предпосылок к авиационным происшествиям при отсутствии санкций с начала жизненного цикла изделия и при наличии санкций с момента t' соответственно. Значение этого параметра необходимо указывать, поскольку интенсивность возникновения предпосылок зависит от предыстории накопления опыта анализа АП и ОС Q , который в отсутствие санкций накапливается быстрее. В свою очередь, интенсивности возникновения предпосылок к АП можно выразить следующим образом:

$$(14) \lambda_{\Sigma}^0(t) = \lambda_{\text{ош}}^0 + \lambda_{\text{пр}} [Q^0(t)];$$

$$(15) \lambda_{\Sigma}^{\text{штраф}}(t | t') = \lambda_{\text{ош}}^{\text{штраф}} + \lambda_{\text{пр}} [Q^{\text{штраф}}(t | t')],$$

где

$$(16) Q^0(t) = \int_{\tau=0}^t N(\tau) \cdot \eta(\tau) \cdot (p_{\text{АП}} + p_{\text{явн}} + p_{\text{лок}}) \cdot \lambda_{\Sigma}^0(\tau) d\tau$$

$$t \in [0; t'];$$

$$(17) Q^{\text{штраф}}(t | t') = Q^0(t) +$$

$$+ \int_{\tau=0}^t N(\tau) \cdot \eta(\tau) \cdot (p_{\text{АП}} + p_{\text{явн}}) \cdot \lambda_{\Sigma}^{\text{штраф}}(\tau) d\tau, \quad t \in (t'; T]$$

– объемы накопленного к моменту t опыта анализа АП и ОС при отсутствии санкций с начала жизненного цикла и при наличии санкций с момента t' соответственно.

Таким образом, в общем виде динамика фазовых переменных модели описывается интегро-дифференциальными уравнениями. Аналитическое исследование их решений затруднено и в данной работе не приводится.

3. Анализ оптимальных стратегий управления безопасностью полетов

Поскольку по мере накопления опыта расследования АП и ОС интенсивность возникновения предпосылок к авиационным происшествиям по причинам, связанным с конструктивно-производственными недостатками и т.п., снижается и приближается к $\lambda_{\text{пр}}^{\min}$, с некоторого момента накопление опыта уже не будет столь значимо влиять на повышение безопасности полетов. И если в начальный период могло быть целесообразным освободить экипажи от ответственности за создание предпосылок к АП, рассчитывая на их откровенность и ускоряя накопление опыта, то с определенного момента большую значимость приобретет повышение дисциплины эксплуатации авиатехники (тем более что удельный вес ошибок экипажа в общем потоке предпосылок к авиационным происшествиям возрастает по мере устранения КПП и др. причин). В связи с этим, оптимальное управление безопасностью полетов (в части рассматриваемых здесь проблем) имеет кусочно-постоянный вид¹: до определенного момента «переключения» t' анализ любых ОС декриминализован, а начиная с этого момента, вводятся санкции (допустим, на максимально возможном уровне $d_{\text{штраф}} = d_{\text{АП}}$) в тех случаях, когда экипаж будет признан виновным в создании ОС. Таким образом, задача сводится к поиску оптимального момента «переключения» $t_{\text{опт}}'$.

Если задаться конкретным видом функций $\lambda_{\text{пр}}(Q)$ и $\lambda_{\text{ош}}(x)$, а также исходными значениями всех параметров модели, можно провести численное компьютерное моделирование, вычислив для заданного момента t' значение целевой функции, а затем

¹ Строгого доказательства именно такой структуры оптимальной траектории в данной работе не приводится.

найти оптимальный момент «переключения» подбором (путем последовательного перебора, начиная с $t' = 1$, либо каким-то более совершенным методом поиска). Такое моделирование было проведено авторами с применением программного комплекса *Wolfram Mathematica*, и далее будут приведены некоторые его результаты.

Рассмотрим следующий количественный пример. Предположим, что закон обучения имеет логарифмический вид, принятый в большинстве моделей этого явления:

$$(18) \lambda_{\text{КПН}}(t) = \lambda_{\text{КПН}}^0 \cdot (1 - \tau_{\text{обуч}})^{\log_2 Q(t-1)},$$

$$(19) \lambda_{\text{ош}}(t) = \begin{cases} \lambda_{\text{ош}}^0, & t < t' \\ \lambda_{\text{ош}}^{\text{штр}}, & t \geq t' \end{cases},$$

где t' – год введения штрафа.

$$(20) Q(t) = Q(t-1) + q(t) \text{ объем накопленного опыта к году } t,$$

$$(21) q(t) = \begin{cases} (p_{\text{АП}} + p_{\text{явн}} + p_{\text{лок}}) \cdot (\lambda_{\text{КПН}}(t) + \lambda_{\text{ош}}(t)) \cdot \eta(t) \cdot N(t), & t < t' \\ (p_{\text{АП}} + p_{\text{явн}}) \cdot (\lambda_{\text{КПН}}(t) + \lambda_{\text{ош}}(t)) \cdot \eta(t) \cdot N(t), & t \geq t' \end{cases},$$

общий налет:

$$(22) \eta(t) = \eta(t-1) + (\eta^{\text{max}} - \eta(t-1)) \cdot \tau_{\text{нал}},$$

численность парка ВС:

$$(23) N(t) = N(t-1) \cdot (1 + \tau_{\text{числ}}).$$

Пусть вероятность явной ОС $P_{\text{явн}} = 0,1$; вероятность локализованной ОС $P_{\text{явн}} = 0,1$; исходная интенсивность возникновения предпосылок к ОС из-за КПН $\lambda_{\text{КПН}}^0 = 0,01$; темп обучения $\tau_{\text{обуч}} = 0,2$; темп роста налета ВС $\tau_{\text{нал}} = 0,2$; темп роста численности ВС $\tau_{\text{числ}} = 0,1$; интенсивность возникновения предпосылок к ОС из-за ошибок при отсутствии штрафов $\lambda_{\text{ош}}^0 = 0,001$; при наличии штрафов – $\lambda_{\text{ош}}^{\text{штр}} = 0,0005$; начальная численность парка ВС $N^0 = 50$; начальный налет $\eta^0 = 1000$; $\eta^{\text{max}} = 365 \cdot 24 = 8760$ л.ч./г (даже если не учитывать неизбежных простоев на техобслуживание и ремонт, погрузку-разгрузку ВС и т.п.).

Далее приведены графики зависимости (от длительности моратория на наказание операторов за возникновение предпо-

сылки к АП) суммарного количества предпосылок к АП за плановый период $J(t')$ при изменении различных параметров. Прежде всего, рассмотрим изменение целевой функции при изменении вероятности АП $P_{АП}$ от 0 до 0,7, см. рис. 3. Здесь и далее жирной сплошной линией соединены минимумы функции $J(t')$ при различных значениях параметра $P_{АП}$.

Из графиков видно, что по мере повышения вероятности АП оптимальный момент «переключения» смещается на более ранние сроки, т.е. становится более важным с самых ранних этапов минимизировать (за счет повышения дисциплины операторов) поток предпосылок к ОС, которые могут превратиться в АП, нежели накопить опыт устранения этих предпосылок.

Далее сохранены исходные данные предыдущего примера, причем параметр $P_{АП}$ (который в предыдущем примере менялся) принят равным 0,02, а параметр $P_{лок}$ варьируется от 0 до 0,5, см. рис. 4.

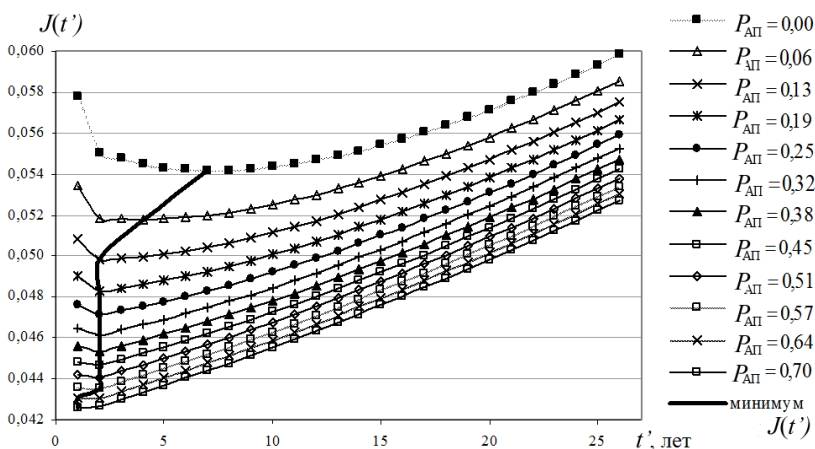


Рис. 3. Зависимости суммарного количества предпосылок к АП $J(t')$ от длительности моратория на наказание операторов для разных вероятностей АП

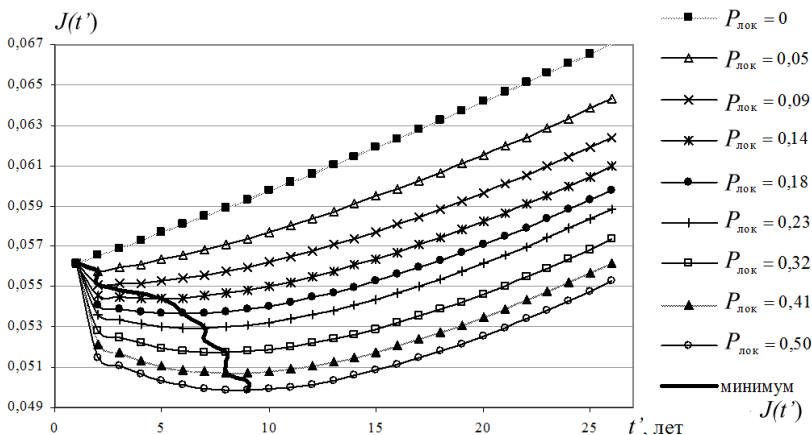


Рис. 4. Зависимости суммарного количества предпосылок к АП $J(t')$ от длительности моратория на наказание операторов для разных вероятностей локализованных ОС

Как видно из графиков, по мере повышения доли локализованных ОС целесообразно все позже вводить наказание для операторов. Напротив, при отсутствии или малой доле таких ОС нет смысла в раскрытии их причин, и наказание целесообразно вводить практически с начала периода эксплуатации.

Далее сохранены исходные данные предыдущего примера, причем параметр $P_{лок}$ (который в предыдущем примере менялся) принят равным 0,2, а параметр $P_{явн}$ варьируется от 0 до 0,6, см. рис. 5.

Итак, при увеличении как вероятности авиационного происшествия, так и вероятности явной ОС, оптимальное время введения штрафа уменьшается, в отличие от увеличения вероятности локализованной ОС, когда оптимальное время введения штрафа увеличивается.

Далее сохранены исходные данные предыдущего примера, причем параметр $P_{явн}$ (который в предыдущем примере менялся) принят равным 0,1, а параметр $\lambda_{ош}^{штр}$ варьируется от $5,0 \cdot 10^{-5}$ до $15,0 \cdot 10^{-5}$, см. рис. 6.

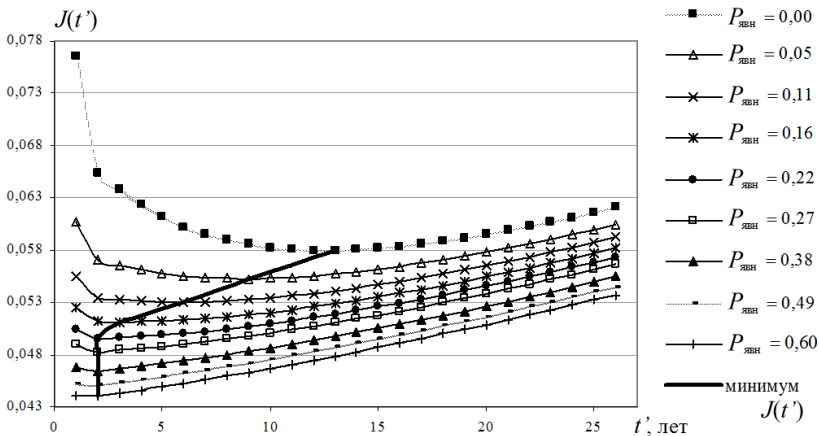


Рис. 5. Зависимости суммарного количества предпосылок к АП $J(t')$ от длительности моратория на наказание операторов для разных вероятностей явных ОС

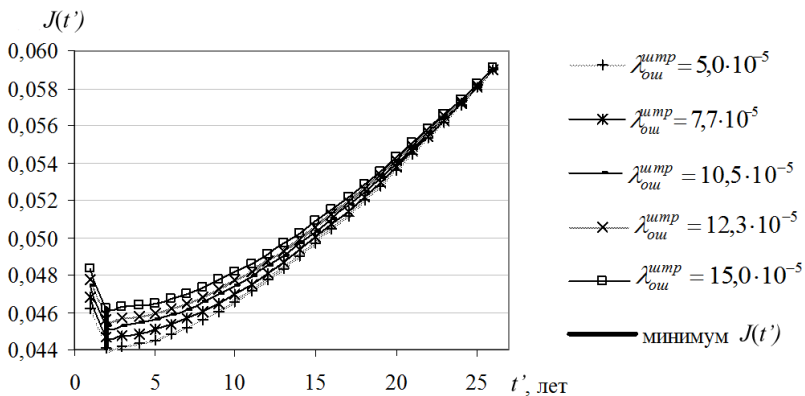


Рис. 6. Зависимости суммарного количества предпосылок к АП $J(t')$ от длительности моратория на наказание операторов для разных интенсивностей потоков предпосылок, вызванных ошибками операторов

Как видно из графиков, в данном примере зависимость оптимального момента «переключения» от $\lambda_{\text{ош}}^{\text{штр}}$ отсутствует. Да-

лее сохранены исходные данные предыдущего примера, причем параметр $\lambda_{\text{ош}}^{\text{штр}}$ (который в предыдущем примере менялся) принят равным 0,0005, а параметр $\tau_{\text{обуч}}$ варьируется от 0 до 0,5, см. рис. 7.

При изменении темпа обучения оптимальный момент введения штрафа меняется немонотонно по следующим причинам. При малых темпах обучения эффект декриминализации расследования ОС будет слабым, и большой эффект принесет повышение дисциплины операторов с самого начала периода эксплуатации. Однако, если темп обучения высок, накопление опыта происходит быстро, и большая часть соответствующего эффекта достигается уже на ранних стадиях эксплуатации, после чего целесообразно усиливать дисциплину операторов.

Далее сохранены исходные данные предыдущего примера, причем параметр $\tau_{\text{обуч}}$ (который в предыдущем примере менялся) принят равным 0,2, а параметр $\lambda_{\text{КПН}}^0$ варьируется от 0,001 до 0,101, см. рис. 8.

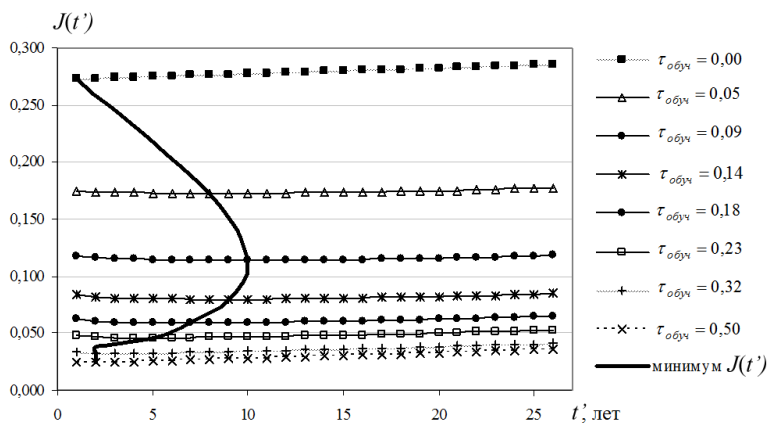


Рис. 7. Зависимости суммарного количества предпосылок к АП $J(t')$ от длительности моратория на наказание операторов для различных уровней темпа обучения

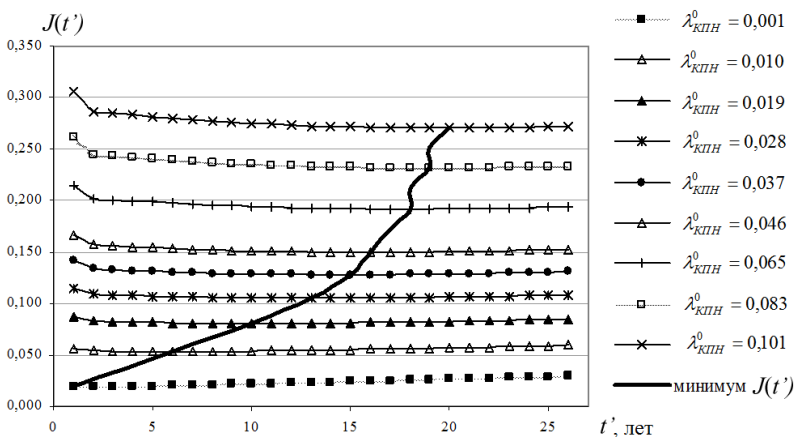


Рис. 8. Зависимости суммарного количества предпосылок к АП $J(t')$ от длительности моратория на наказание операторов для различных начальных интенсивностей потоков предпосылок к АП из-за КПН

С увеличением начальной интенсивности потока предпосылок к АП из-за КПН время оптимального введения штрафа увеличивается монотонно, поскольку растет значимость КПН по сравнению с ошибками операторов, и более значимо накопление опыта устранения КПН, нежели усиление дисциплины операторов.

Что касается прочих параметров, то от темпов роста годового налета, так же как от потолка налета, оптимальный момент переключения в проведенных численных расчетах не зависит. С увеличением же темпа роста численности, первоначальной численности и первоначального налета оптимальный момент переключения уменьшается, поскольку во всех этих случаях опыт устранения КПН накапливается быстрее и раньше появляется целесообразность усиления дисциплины операторов.

4. Выводы

Анализ предложенной математической модели показал, что в начале периода эксплуатации новой технической системы це-

лесообразно смягчить ответственность операторов за возникновение нештатных ситуаций, во избежание утаивания ими важной информации, которая может быть использована для совершенствования системы. Ужесточение ответственности за ошибки операторов целесообразно, когда подобные возможности будут близки к исчерпанию, либо когда они изначально незначительны. Оптимальная длительность периода освобождения операторов от ответственности (декриминализации расследования нештатных ситуаций) тем выше, чем меньше

- вероятность авиапроисшествия;
 - доля явных особых ситуаций;
 - темп роста численности парка;
 - первоначальная численность парка и первоначальный налет;
- и выше при увеличении
- вероятности локализованных особых ситуаций;
 - начальной интенсивности потока предпосылок к авиапроисшествиям из-за конструктивно-производственных недостатков.

Зависимость оптимальной длительности освобождения операторов от ответственности от темпа обучения немонотонна: при очень малых и очень высоких темпах обучения оптимальная длительность периода декриминализации сокращается.

Литература

1. КЛОЧКОВ В.В., ВАРЮХИНА Е.В. *Экономические аспекты определения ответственности производителей за отказы техники* // Вестник УГТУ-УПИ. – 2010. – №2. – С. 141–151.
2. ПАВЛЕНКО А. *Криминализация расследований авиационных событий* // Деловой авиационный портал АТО.ru. Материалы АЭВТ. 24.02.2012. [Электронный ресурс]. – URL: <http://www.ato.ru/content/kriminalizaciya-rassledovaniy-aviacionnyh-sobytiy> (дата обращения: 25.05.2012).

3. *Человеческий фактор* // Сборник материалов №1. Фундаментальные концепции человеческого фактора. – Циркуляр ICAO 216-AN/131, ICAO, Монреаль, 1989. – 34 с.
4. ALCHIAN A. *Reliability of Progress Curves in Airframe Production* // *Econometrica*. – 1963. – Vol. 31. – №4. – P. 679–694.
5. WRIGHT T.P. *Factors Affecting the Cost of Airplanes* // *Journal of Aeronautical Sciences*. – 1936. – №3. – P. 122–128.

INFLUENCE OF PERSONNEL RESPONSIBILITY FOR ACCIDENTS PRECONDITIONS EMERGENCE ON FLIGHT SAFETY

Ekaterina Varyukhina, Moscow Institute of Physics and Technology, Moscow, postgraduate student (*eyebrow@yandex.ru*).

Vladislav Klochkov, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Doctor of Science, leading research fellow (*vlad_klochkov@mail.ru*).

Abstract: A considerable number of accidents and crashes in the world are caused by human factor. Consequently, the most obvious decision to reduce accident rate is to enlarge the staff responsibility for making preconditions for accidents. Nevertheless, we provide the economic-mathematical analysis to justify extenuating the responsibility of the staff for the emergency appearance in the beginning of the operation period for them to report important information, which can be used to improve the system.

Keywords: revelation of accidents preconditions, personnel responsibility, flight safety, learning curve, economic-mathematical modeling, aircraft

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии Р. М. Нижегородцевым

УДК 519.86
ББК 65с

СТАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ УЧЕТА ФАКТОРА КОРРУПЦИИ ПРИ РАСПРЕДЕЛЕНИИ РЕСУРСОВ В ТРЕХУРОВНЕВЫХ СИСТЕМАХ УПРАВЛЕНИЯ

Горбанева О. И.¹, Угольницкий Г. А.²

(Южный Федеральный университет, Ростов-на-Дону)

В статье рассматривается статическая задача распределения ресурсов в трехуровневой системе управления. Исследуется влияние механизма коррупции на экономическую систему, на целевые функции ее участников и на их стратегии. Оцениваются возможность и способы борьбы с коррупцией в случае применения принуждения и побуждения. Доказано, что в случае «заинтересованного» верхнего уровня бороться с коррупцией можно. В случае принуждения всегда можно добиться того, чтобы выполнилось условие устойчивого развития, в случае побуждения этого можно добиться лишь при соответствующих условиях.

Ключевые слова: распределение ресурсов, игра Γ_2 , теорема Гермейера, принуждение, побуждение.

1. Введение

Коррупция оказывает негативное влияние на развитие общества. Это одна из главных угроз успешным общественным преобразованиям. На протяжении нескольких десятилетий ученые пытались моделировать различных аспекты коррупции и борьбы с ней. Базовой схемой моделирования служит иерархи-

¹ Ольга Ивановна Горбанева, кандидат физико-математических наук, старший преподаватель (gorbaneva@mail.ru).

² Геннадий Анатольевич Угольницкий, доктор физико-математических наук, профессор (ougoln@mail.ru).

ческая система «принципал–агент–клиент» [5] в различных модификациях и ее теоретико-игровое исследование.

В работе А. Шлейфера и Р.У. Вишни [12] исследуются возможность «воровства» у государства тех благ, которые распределяет государственный служащий, роль монополии и монополии в распространении коррупции, взаимосвязь структуры политических, экономических институтов и уровня коррупционной активности. Коррупция определяется как продажа государственным служащим государственной собственности в частных целях. В работе указываются две важные причины того, почему коррупция может дорого стоить для экономического развития. Первая причина – это слабость центрального правительства, которая позволяет различным государственным агентствам и аппарату чиновников независимо собирать взятки с частных агентов. Вторая причина – это искажения, вызванные необходимостью держать коррупцию в секрете. «Требование секретности может сместить инвестиции в стране от наиболее выгодных проектов (в здравоохранении, образовании) в сторону потенциально бесполезных проектов (оборона, инфраструктура), если последние обеспечивают лучшие условия для сокрытия коррупции».

Таким образом, экономическая и политическая конкуренция могут уменьшить уровень коррупции и ее неблагоприятные последствия.

В работе К. Блисса и Р.Ди Телла [8] изучается тот факт, что в странах, повысивших уровень конкуренции в экономике, иногда происходит подъем коррупции. Это говорит о том, что вслед за ростом конкуренции не обязательно следует сокращение коррупции.

В работе Ф. Луи [10] предлагается модель распределения ресурсов с механизмом «живой» очереди. Время, непродуктивно затрачиваемое на ожидание в очереди, можно сократить, купив за взятку право пройти вне очереди, причем чем больше взятка, тем меньше время ожидания. В работе показано, что такой механизм, идентичный во многом механизму «теневых цен», может приводить к повышению эффективности распределения.

Проблема распределения ресурсов рассматривается также в работе Д. Лаена [9], в модели которого изучаются возможные недостатки распределения ресурсов, связанные с коррупционной деятельностью. В работе было показано, что при допущении некоторых дополнительных предположений вероятность недостатков в распределении ресурсов повышается при повышении степени дискриминации бюрократам одного клиента в пользу другого.

Нами ранее была исследована статическая задача распределения ресурсов в двухуровневой экономической системе [1, 2, 3]. Коррупция рассматривалась в двух формах [4]: более мягкой – «попустительство», при котором при отсутствии взятки нижний получает какую-то долю ресурсов от Центра, увеличивающуюся с увеличением размера взятки, и более жесткой – «вымогательство», при котором какую-то ненулевую долю ресурсов элемент может получить от верхнего уровня, только предложив ему взятку. Также рассматривалась кооперативная постановка задачи. В построенных моделях искалось равновесие по Штакельбергу.

В данной статье рассматривается статическая задача распределения ресурсов в системе управления, состоящей из трех элементов. Исследуется влияние механизма коррупции при распределении ресурсов на поведение экономической системы и ее участников. Оцениваются возможность и способы борьбы с коррупцией в случае применения механизмов принуждения и побуждения [6, 7, 11], где под принуждением подразумевается возможность верхнего уровня влиять на множество стратегий более низкого уровня системы, а под побуждением – на значение целевой функции элемента нижнего уровня. В данных целях строится модель в виде игры Γ_2 , которая исследуется при помощи теоремы Гермейера [3].

2. Объект исследования – экономическая система

Рассматривается трехуровневая система управления (рис. 1), примером которой могут служить система «госу-

дарство – Государственная дума, распределяющая бюджет страны – бюджетные организации», или «собственник производственного предприятия – финансовый директор – подразделения предприятия». Нижний уровень (в данных примерах «бюджетные организации» или «подразделения предприятия») производит продукцию и в процессе производства воздействует на управляемую систему (объем произведенной продукции, прибыль предприятия). Средний уровень («Государственная дума» или «Финансовый директор») воздействует на нижний уровень путем побуждения (распределения ресурсов между элементами нижнего уровня) или принуждения (контролирует использование ресурсов). Состояние управляемой системы не является интересом среднего уровня. Верхний уровень («государство» или «собственник предприятия») следит за состоянием управляемой системы и, в целях сохранения ее состояния в заданных пределах (прибыль предприятия или объем выпущенной продукции были не ниже заданного порога), воздействует на средний уровень, используя механизмы принуждения (ограничения на стратегии) и побуждения (премии, стимулирующие надбавки).

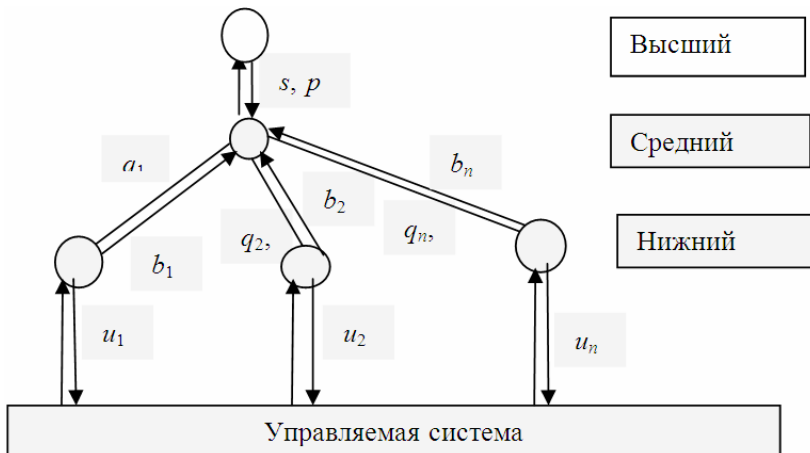


Рис. 1. Трехуровневая иерархическая система

3. Постановка задачи

Средний уровень располагает некоторым количеством невозобновляемых ресурсов (в общем случае финансовых) R , которое необходимо распределить между элементами нижнего уровня таким образом, чтобы выигрыш от использования ресурсов был максимальным. Элемент нижнего уровня использует ресурсы для производства в общих целях (общесистемная деятельность), а также для производства в частных целях (частная деятельность). Поэтому нижний уровень часть ресурсов u_i , доставшихся от среднего уровня (r_i), тратит на общие цели, а оставшуюся часть – на свои частные цели (допустим, развитие дополнительного частного вида деятельности).

Средний уровень, зная об этом, может установить нижний порог q_i , меньше которого нижний уровень не может тратить ресурсы на общие цели. Кроме того, средний уровень может часть ресурсов использовать на свои частные цели.

Нижний уровень может воздействовать на средний при помощи механизма коррупции b_i для увеличения количества ресурсов r_i , выделенных ему, или для уменьшения порогового значения q_i .

Верхний уровень осуществляет контроль состояния управляемой системы, воздействуя на средний уровень путем назначения величины s , меньше которой средний уровень не может назначать величины q_i , а также величины p – доли от суммарного выигрыша элементов нижнего уровня, возвращаемой среднему уровню в качестве премии за соблюдение требования устойчивого развития.

Требование устойчивого развития [6] выражается в том, что суммарный доход от системной деятельности элементов нижнего уровня должен быть не ниже порогового значения a .

Введем условные обозначения:

$M, J_0, J_i, i = 1, \dots, n$, – целевые функции верхнего, среднего и нижнего уровней соответственно.

g_i – производственная функция общесистемной деятельности нижнего уровня с эластичностью производства β .

h_i – производственная функция частной деятельности нижнего уровня с эластичностью производства β .

r_i – доля ресурсов, выделенных средним уровнем нижнему уровню (управляющая величина среднего уровня).

u_i – доля ресурсов от r_i , направленная нижним уровнем на общесистемные цели (управляющая величина нижнего уровня).

b_i – доля ресурсов от r_i , возвращаемая нижним уровнем среднему в качестве взятки (управляющая величина нижнего уровня).

q_i – нижняя доля u_i , назначаемая средним уровнем нижнему, меньше которой нижний уровень не может направить ресурсы на общие цели (управляющая величина среднего уровня).

s – нижняя доля значений q_i , меньше которой средний уровень не может устанавливать порог доли ресурсов, направленной на общие цели (управляющая величина верхнего уровня).

p – доля суммарного дохода от общесистемной деятельности элементов нижнего уровня, достающаяся среднему уровню в качестве стимулирующей величины (премия, зарплата и т.д.) (управляющая величина верхнего уровня).

a – граница устойчивого состояния системы.

s_0 – минимальная величина s , при которой выполняется условие устойчивого развития ($\sum_{i=1}^n g_i(s_0 r_i) = a$ при $r_i - const$).

r_0 – минимальная величина r_i , при которой выполняется условие устойчивого развития ($\sum_{i=1}^n g_i(r_0) = a$ при $r_i - const$).

С учетом этих обозначений, построим математическую модель.

4. Математическая модель

Таким образом, значение целевой функции верхнего уровня зависит от того, выполняется условие устойчивого развития или нет, т.е.

$$(1) \quad M\left(\sum_{i=1}^n g_i(u_i r_i) - a\right) \rightarrow \max,$$

где $M\left(\sum_{i=1}^n g_i(u_i r_i) - a\right)$ может иметь один из двух видов:

1. Функция вида

$$M\left(\sum_{i=1}^n g_i(u_i r_i) - a\right) = \begin{cases} const, & \sum_{i=1}^n g_i(u_i r_i) \geq a, \\ -\infty, & \sum_{i=1}^n g_i(u_i r_i) < a. \end{cases}$$

Такому субъекту верхнего уровня безразлично, каким образом выполняется условие (1) и насколько величина $\sum_{i=1}^n g_i(u_i r_i)$ отклоняется от a . В его цели не входит увеличение величины дохода от системной деятельности всех элементов нижнего уровня $\sum_{i=1}^n g_i(u_i r_i)$. Ему нужно, чтобы выполнилось условие устойчивого развития хотя бы в виде равенства. Такой верхний уровень назовем «незаинтересованным».

2. Линейная функция $M \cdot \left(\sum_{i=1}^n g_i(u_i r_i) - a\right)$, где M – положительная константа, т.е. если условие выполняется, то в результате выигрыш верхнего уровня – положительная величина (премия, надбавка), в противном случае – отрицательная (штраф за невыполнение условия устойчивого развития). В этом случае, в отличие от предыдущего, верхний уровень интересуется тем, насколько величина $\sum_{i=1}^n g_i(u_i r_i)$ отклоняется от a , т.е. верхний уровень стремится максимизировать величину $\sum_{i=1}^n g_i(u_i r_i)$. Такой верхний уровень назовем «заинтересованным».

Верхний уровень управляет величинами s и p , на которые накладываются ограничения

$$(2) \quad 0 \leq s \leq 1,$$

$$(3) \quad 0 \leq p \leq 1.$$

Целевая функция среднего уровня состоит из дохода от суммарной системной деятельности элементов нижнего уровня, дохода от своей частной деятельности, дохода от взятки со стороны элементов нижнего уровня:

$$(4) \quad J_0 = p \sum_{i=1}^n g_i(u_i r_i) + H \left(1 - \sum_{i=1}^n r_i \right) + \sum_{i=1}^n b_i r_i \rightarrow \max$$

Средний уровень управляет величинами q_i и r_i , на которые накладываются ограничения

$$(5) \quad s \leq q_i \leq 1,$$

$$(6) \quad 0 \leq r_i \leq 1,$$

$$(7) \quad 0 \leq \sum_{i=1}^n r_i \leq 1.$$

Целевая функция элемента нижнего уровня состоит из дохода от его системной деятельности за вычетом доли, уплачиваемой среднему уровню в качестве премии за выполнение условия устойчивого развития, и дохода от несистемной деятельности

$$(8) \quad J_i = (1 - p) g_i(u_i r_i) + h_i((1 - u_i - b_i) r_i) \rightarrow \max$$

Нижний уровень управляет величинами u_i и b_i , на которые накладываются ограничения

$$(9) \quad q_i \leq u_i \leq 1,$$

$$(10) \quad 0 \leq u_i + b_i \leq 1.$$

Требование устойчивого развития выражается в том, что суммарный доход от системной деятельности элементов нижнего уровня должен быть не ниже порогового значения a , т.е.

$$(11) \quad \sum_{i=1}^n g_i(u_i r_i) \geq a.$$

Обратим особое внимание на то, что элемент верхнего уровня в данной модели один, элемент среднего уровня также один, а элементов нижнего уровня здесь может быть сколь угодно много.

Элементов среднего уровня могло бы быть больше, чем один, но так как в некооперативной постановке ни целевые

функции, ни стратегии элементов среднего уровня не зависят друг от друга, то модель распалась бы на n моделей с одним средним уровнем. Этого нельзя сказать об элементах нижнего уровня. Количество ресурсов, достаемых i -му элементу нижнего уровня, зависит от того, сколько ресурсов досталось другим, так как общее количество ресурсов ограничено (в силу условия $0 \leq \sum_{i=1}^n r_i \leq 1$). Поэтому относительно элементов нижнего

уровня задача не является аддитивной, ее нельзя разбить на n задач с одним элементом нижнего уровня.

Задачи среднего и нижнего уровней составляют игру Γ_2 [4].

Задача исследовалась при помощи теоремы Гермейера [4] в случаях равновесия принуждения и побуждения [7, 11] на каждом уровне. Всего найдено четыре равновесия:

– когда верхний элемент использует «принуждение», средний элемент также использует «принуждение» (назовем эту модель «моделью принуждения–принуждения»);

– когда верхний элемент использует «принуждение», средний же элемент использует «побуждение» («модель принуждения–побуждения»);

– когда верхний элемент использует «побуждение», средний же элемент использует «принуждение» («модель побуждения–принуждения»);

– когда верхний элемент использует «побуждение», средний элемент также использует «побуждение» («модель побуждения–побуждения»).

Рассмотрим каждый из этих случаев.

5. «Принуждение–принуждение»

Модель в этом случае принимает следующий вид:

Задача верхнего уровня:

$$(12) \quad M \left(\sum_{i=1}^n g_i(u_i r_i) - a \right) \rightarrow \max_s$$

$$(13) \quad 0 \leq s \leq 1,$$

$$(14) \quad p = \text{const}.$$

Здесь верхний уровень управляет только величиной s , величина p фиксирована.

Задача среднего уровня:

$$(15) \quad J_0 = p \sum_{i=1}^n g_i(u_i r_i) + H \left(1 - \sum_{i=1}^n r_i \right) + \sum_{i=1}^n b_i r_i \rightarrow \max_{q_i}$$

$$(16) \quad s \leq q_i \leq 1,$$

$$(17) \quad r_i = \text{const}.$$

Здесь, аналогично верхнему уровню, средний уровень воздействует на элемент нижнего уровня при помощи величины q_i , величина r_i фиксирована.

Задача элемента нижнего уровня не изменяется:

$$(18) \quad J_i = (1-p)g_i(u_i r_i) + h_i((1-u_i-b_i)r_i) \rightarrow \max_{u_i, b_i}$$

$$(19) \quad q_i \leq u_i \leq 1,$$

$$(20) \quad 0 \leq u_i + b_i \leq 1.$$

Требование устойчивого развития не изменяется:

$$(21) \quad \sum_{i=1}^n g_i(u_i r_i) \geq a.$$

Итак, модель «принуждение–принуждение» описывается соотношениями (12)–(21).

При нахождении равновесия в данной игре было доказано, что для среднего уровня наиболее выгодна стратегия элемента нижнего уровня (другими словами, стратегия нижнего уровня, при которой достигается величина K_1 [4] теоремы Гермейера – максимальный выигрыш среднего уровня):

$$(22) \quad b_i = 1 - u_i - \beta \sqrt{\frac{(1-u_i^\beta)g_i(1)(1-p)}{h_i(1)}} - \varepsilon,$$

где u_i^* находится из уравнения

$$(23) \quad p g_i(1) r_i^\beta - r_i u_i^\beta + \frac{\gamma_i}{u_i^{1-\beta}} \beta \sqrt{\frac{(1-u_i^\beta)^{1-\beta} g_i(1)(1-p)}{h_i(1)}} = 0.$$

Уравнение (23) в общем случае аналитически не разрешимо, но доказано, что функция, составляющая левую часть урав-

нения, убывает на отрезке $[0, 1]$, следовательно, если левая часть уравнения принимает разные знаки на этих концах, то применим метод дихотомии, если же левая часть принимает значения одного знака (положительного, так как при $u_i \rightarrow 0$ левая часть уравнения стремится к $+\infty$), то $u_i = q_i$, т.е. элемент нижнего уровня должен потратить на общие цели минимальную величину, которую возможно потратить, т.е. ровно ту величину, меньше которой потратить ресурсы на общие цели запрещено средним уровнем.

Оптимальная стратегия среднего уровня выглядит следующим образом:

$$(24) \quad q_i = \begin{cases} s, & b_i = 1 - u_i - \beta \sqrt{\frac{(1 - u_i^\beta) g_i(1)}{h_i(1)}}, \quad u_i \text{ находится из (23),} \\ 1, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Оптимальная стратегия верхнего уровня находится при помощи максимизации его целевой функции:

В случае «незаинтересованного» верхнего уровня $s = s_0$, что, в принципе, не сильно мешает коррупции, уменьшая, возможно, размеры взяток. Но в этом случае условие устойчивого развития выполняется (правда, в виде равенства).

В случае «заинтересованного» верхнего уровня $s = 1$, что влечет за собой в силу ограничений модели $q_i = 1$, $u_i = 1$, откуда видно, что коррупция в этом случае искореняется.

Чем больше величина s , тем больше выделенных ресурсов нижний уровень тратит на свои цели и тем меньше ресурсов он возвращает среднему уровню в качестве взятки. То есть чем больше величина s , тем борьба с коррупцией эффективнее.

6. «Принуждение–побуждение»

Модель в этом случае принимает следующий вид:

Задача верхнего уровня:

$$(25) \quad M \left(\sum_{i=1}^n g_i(u_i r_i) - a \right) \rightarrow \max_s$$

$$(26) \quad 0 \leq s \leq 1,$$

$$(27) \quad p = \text{const}.$$

Здесь верхний уровень управляет только величиной s , величина p фиксирована.

Задача среднего уровня:

$$(28) \quad J_0 = p \sum_{i=1}^n g_i(u_i r_i) + H \left(1 - \sum_{i=1}^n r_i \right) + \sum_{i=1}^n b_i r_i \rightarrow \max_{r_i}$$

$$(29) \quad s_i \leq r_i \leq 1,$$

$$(30) \quad \sum_{i=1}^n r_i \leq 1.$$

Здесь средний уровень воздействует на элемент нижнего уровня при помощи величины r_i , величина q_i отсутствует в модели.

В задаче элемента нижнего уровня изменяется только ограничение на u_i :

$$(31) \quad J_i = (1-p)g_i(u_i r_i) + h_i((1-u_i-b_i)r_i) \rightarrow \max_{u_i, b_i}$$

$$(32) \quad 0 \leq u_i + b_i \leq 1.$$

Требование устойчивого развития не изменяется:

$$(33) \quad \sum_{i=1}^n g_i(u_i r_i) \geq a.$$

То есть модель «принуждение–побуждение» описывается соотношениями (25)–(33).

При нахождении равновесия в данной игре было доказано, что для среднего уровня наиболее выгодна стратегия нижнего уровня ($\text{Arg } K_1$):

$$(34) \quad u_i = \frac{s}{r_i} \beta \sqrt{1 + \frac{h_i(1)}{g_i(1)(1-p)}} + \frac{\varepsilon}{r_i},$$

$$(35) \quad b_i = 1 - \frac{s}{r_i} \beta \sqrt{1 + \frac{h_i(1)}{g_i(1)(1-p)}} - \frac{\varepsilon}{r_i},$$

что равносильно тому, что на общие цели должно потратиться

ровно $u_i r_i = s \beta \sqrt{1 + \frac{h_i(1)}{g_i(1)(1-p)}} + \varepsilon$ (независимо от того, сколько

элемент получит ресурсов, величина, потраченная на общие цели, постоянная).

Кроме того, нетрудно заметить, что выполняется условие $u_i + b_i = 1$, которое означает, что все ресурсы нижний элемент тратит на общие цели и взятку, т.е. средний элемент лишает нижний элемент возможности тратить ресурсы на свои частные цели.

Вывод. Оптимальная для взяточника зависимость объема ресурсов от взятки:

$$r_i = \frac{s}{u_i} \beta \sqrt{1 + \frac{h_i(1)}{g_i(1)(1-p)}} + \frac{\varepsilon}{u_i} = \frac{1}{u_i} \left(s \beta \sqrt{1 + \frac{h_i(1)}{g_i(1)(1-p)}} + \varepsilon \right) = \frac{1}{1-b_i} \left(s \beta \sqrt{1 + \frac{h_i(1)}{g_i(1)(1-p)}} + \varepsilon \right).$$

т.е. величина количества ресурсов обратно пропорциональна величине, противоположной взятке.

Оптимальная стратегия среднего уровня – любой набор значений r_i , при котором

$$\sum_{i=1}^n r_i = 1 - \beta \sqrt{\beta H(1)},$$

что также является величиной постоянной. То есть средства произвольно распределяются между элементами нижнего уровня. Себе средний уровень оставляет ресурсы в количестве $\beta \sqrt{\beta H(1)}$.

Оптимальная стратегия верхнего уровня находится оптимизацией его целевой функции в случае «незаинтересованного» верхнего уровня:

$$s = \begin{cases} r_0, & u_i r_i > r_0, \\ \frac{1 - \beta \sqrt{\beta H(1)}}{\sum_{i=1}^n \frac{1 - \beta \sqrt{\beta H(1)}}{u_i}}, & u_i r_i \leq r_0. \end{cases}$$

Но в этом случае верхний уровень может повлиять на элемент среднего уровня, если

$$r_0 < \frac{1 - \beta \sqrt{g_i(1)u_{i\beta}}}{\sum_{i=1}^n 1 - \beta \sqrt{g_i(1)u_{i\beta}}}.$$

В этом случае борьба с коррупцией не происходит, но условие устойчивого развития выполняется.

В случае «заинтересованного» верхнего уровня

$$s = \frac{1 - \beta \sqrt{g_i(1)u_{i\beta}}}{\sum_{i=1}^n 1 - \beta \sqrt{g_i(1)u_{i\beta}}}.$$

Так как

$$\sum_{i=1}^n \frac{1 - \beta \sqrt{g_i(1)u_{i\beta}}}{\sum_{i=1}^n 1 - \beta \sqrt{g_i(1)u_{i\beta}}} = 1,$$

то верхний уровень принуждает средний уровень все ресурсы тратить на распределение между элементами среднего уровня, лишая возможности средний уровень часть ресурсов забирать себе и брать взятку.

Следовательно, принуждение эффективно при борьбе с коррупцией при «заинтересованном» высшем уровне.

7. «Побуждение–принуждение»

Модель в этом случае принимает следующий вид.

Задача верхнего уровня:

$$(36) \quad M \left(\sum_{i=1}^n g_i(u_i r_i) - a \right) \rightarrow \max_p$$

$$(37) \quad 0 \leq p \leq 1.$$

Здесь верхний уровень управляет только величиной p , величина s отсутствует в модели, так как принуждение не применяется.

Задача среднего уровня:

$$(38) J_0 = p \sum_{i=1}^n g_i(u_i r_i) + H \left(1 - \sum_{i=1}^n r_i \right) + \sum_{i=1}^n b_i r_i \rightarrow \max_{q_i}$$

$$(39) 0 \leq q_i \leq 1,$$

$$(40) r_i = \text{const}.$$

Здесь средний уровень воздействует на элемент нижнего уровня при помощи величины q_i , величины r_i фиксированы.

Задача элемента нижнего уровня:

$$(41) J_i = (1-p)g_i(u_i r_i) + h_i((1-u_i-b_i)r_i) \rightarrow \max_{u_i, b_i}$$

$$(42) q_i \leq u_i \leq 1,$$

$$(43) 0 \leq u_i + b_i \leq 1.$$

Требование устойчивого развития не изменяется

$$(44) \sum_{i=1}^n g_i(u_i r_i) \geq a.$$

То есть модель «принуждение–побуждение» описывается соотношениями (36)–(44).

Как и в случае «принуждение–принуждение», для среднего уровня наиболее выгодна стратегия элемента нижнего уровня:

$$(22) b_i = 1 - u_i - \beta \sqrt{\frac{(1-u_i^\beta)g_i(1)(1-p)}{h_i(1)}} - \varepsilon,$$

где u_i^* находится из уравнения

$$(23) p g_i(1) r_i^\beta - r_i u_i^\beta + \frac{\gamma_i}{u_i^{1-\beta}} \beta \sqrt{\frac{(1-u_i^\beta)^{1-\beta} g_i(1)(1-p)}{h_i(1)}} = 0,$$

а оптимальная стратегия среднего уровня выглядит следующим образом:

$$q_i = \begin{cases} u_i^*, & b_i = 1 - u_i^* - \beta \sqrt{\frac{(1-u_i^{*\beta})g_i(1)}{h_i(1)}}, \quad u_i^* \text{ находится из (23),} \\ 1, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Что касается стратегии верхнего уровня, то в случае незаинтересованного верхнего уровня минимальное p^* , удовлетворяющее неравенство

$$(45) \quad p > \frac{\sum_{i=1}^n \left(s_0 - u_i^* - \beta \sqrt{\frac{g_i(1)}{h_i(1)}} \left(\sqrt{\beta(1-s_0^\beta)(1-p)} - \sqrt{\beta(1-u_i^{*\beta})} \right) \right)}{\sum_{i=1}^n g_i(s_0 r_i)},$$

и будет стратегией поощрения, т.е.

$$p = \begin{cases} p^*, & q_i \geq s_0, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Но верхний уровень может влиять на средний, только если

$$(46) \quad p \leq 1.$$

В случае заинтересованного верхнего уровня минимальное значение p^* , удовлетворяющее неравенство

$$(47) \quad p > \frac{\sum_{i=1}^n \left(1 - u_i^* + \beta \sqrt{\frac{g_i(1)}{h_i(1)}} \sqrt{\beta(1-u_i^{*\beta})} \right)}{\sum_{i=1}^n g_i(r_i)},$$

будет стратегией поощрения, т.е.

$$p = \begin{cases} p^*, & q_i = 1, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Но верхний уровень может влиять на средний, только если

$$(48) \quad \frac{\sum_{i=1}^n \left(1 - u_i^* + \beta \sqrt{\frac{g_i(1)}{h_i(1)}} \sqrt{\beta(1-u_i^{*\beta})} \right)}{\sum_{i=1}^n g_i(r_i)} \leq 1.$$

Как можно видеть, в случае «заинтересованного» верхнего уровня бороться с коррупцией можно, в случае же «незаинтересованного» верхнего уровня коррупцию можно лишь ограничить, уменьшить.

Величина p – часть дохода всей системы, полученного при помощи нижнего уровня, которая отдается среднему уровню. Чем больше величина p , тем больше доход среднего уровня от системной деятельности, и тем меньше его доход от взятки. Среднему уровню становится выгодным позволять нижнему

уровню тратить все средства на общесистемную деятельность, что исключает возможность получения взятки.

Правда, в этом случае p должно быть достаточно большим, чтобы доход от общесистемной деятельности для среднего уровня превышал бы его суммарный доход в случае наличия механизма коррупции.

8. «Побуждение–побуждение»

Модель в этом случае принимает следующий вид:

Задача верхнего уровня:

$$(49) M\left(\sum_{i=1}^n g_i(u_i, r_i) - a\right) \rightarrow \max_p$$

$$(50) 0 \leq p \leq 1.$$

Здесь верхний уровень управляет только величиной p , величина s отсутствует в модели, так как принуждение не применяется.

Задача среднего уровня:

$$(51) J_0 = p \sum_{i=1}^n g_i(u_i, r_i) + H\left(1 - \sum_{i=1}^n r_i\right) + \sum_{i=1}^n b_i r_i \rightarrow \max_{r_i}$$

$$(52) 0_i \leq r_i \leq 1,$$

$$(53) \sum_{i=1}^n r_i \leq 1.$$

Здесь аналогично верхнему уровню, средний уровень воздействует на элемент нижнего уровня при помощи величины r_i , величина q_i отсутствует в модели.

Задача элемента нижнего уровня:

$$(54) J_i = (1 - p)g_i(u_i, r_i) + h_i((1 - u_i - b_i)r_i) \rightarrow \max_{u_i, b_i}$$

$$(55) 0 \leq u_i \leq 1,$$

$$(56) 0 \leq u_i + b_i \leq 1.$$

Требование устойчивого развития не изменяется:

$$(57) \sum_{i=1}^n g_i(u_i, r_i) \geq a.$$

То есть модель «побуждение–побуждение» описывается соотношениями (49)–(57).

При нахождении равновесия в данной игре было доказано, что для среднего уровня наиболее выгодна стратегия элемента нижнего уровня:

$$(58) \quad u_i = \frac{1 - \beta \sqrt{g_i(1)(1-p)}}{r_i},$$

$$(59) \quad b_i = 1 - u_i = 1 - \frac{1 - \beta \sqrt{g_i(1)(1-p)}}{r_i}.$$

Это равносильно тому, что на общие цели должно потратиться ровно $u_i r_i = 1 - \beta \sqrt{g_i(1)(1-p)}$ (независимо от того, сколько элемент получит ресурсов, величина, потраченная на общие цели, постоянная).

Кроме того, нетрудно заметить, что выполняется условие $u_i + b_i = 1$, которое означает, что все ресурсы нижний элемент тратит на общие цели и взятку, т.е. средний элемент лишает нижний элемент возможности тратить ресурсы на свои частные цели.

Вывод. Оптимальная зависимость для взяточника объема ресурсов от взятки:

$$r_i = \frac{1 - \beta \sqrt{g_i(1)(1-p)}}{u_i} = \frac{1 - \beta \sqrt{g_i(1)(1-p)}}{1 - b_i},$$

т.е. величина количества ресурсов обратно пропорциональна величине, противоположной взятке, что согласуется с результатами, полученными при исследовании модели «принуждение–побуждение».

Оптимальная стратегия среднего уровня – любой набор значений r_i , при котором $\sum_{i=1}^n r_i = 1 - \beta \sqrt{\beta H(1)}$. То есть

$$r_i = \begin{cases} \forall r_i \mid \sum_{i=1}^n r_i = 1 - \sqrt[\beta]{\beta H(1)}, & u_i = \frac{1 - \sqrt[\beta]{g_i(1)(1-p)}}{r_i}, \\ & b_i = 1 - \frac{1 - \sqrt[\beta]{g_i(1)(1-p)}}{r_i}; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Себе верхний уровень оставляет ресурсы в количестве $\sqrt[\beta]{\beta H(1)}$.

В случае «незаинтересованного» верхнего уровня его стратегия:

$$(60) \quad p = \begin{cases} \frac{\sum_{i=1}^n b_i^* r_i + H \left(1 - \sum_{i=1}^n r_i \right) - H(1 - nr_0)}{\sum_{i=1}^n g_i(r_0)} - \varepsilon_1, & \forall i \ u_i r_i \geq r_0, \\ 0, & \exists i \ u_i r_i < r_0. \end{cases}$$

где b_i^* находится по формуле (59).

Но верхний уровень может влиять на средний, только если

$$(61) \quad \frac{\sum_{i=1}^n b_i r_i + H \left(1 - \sum_{i=1}^n r_i \right) - H(1 - nr_0)}{\sum_{i=1}^n g_i(r_0)} - \varepsilon_1 \leq 1.$$

А в случае «заинтересованного» верхнего уровня

$$(62) \quad p = \begin{cases} \frac{\sum_{i=1}^n b_i^* r_i}{\sum_{i=1}^n g_i(r_i)} - \varepsilon_1, & \forall i \ u_i r_i \geq r_0, \sum_{i=1}^n r_i = 1, \\ 0, & \exists i \ u_i r_i < r_0 \text{ или } \sum_{i=1}^n r_i < 1, \end{cases}$$

где b_i^* находится по формуле (59). То есть в этом случае элементу верхнего уровня выгодно, чтобы все ресурсы были распределены между элементами нижнего уровня, что лишает возможности среднему уровню оставлять часть ресурсов себе.

Но верхний уровень может влиять на средний, только если

$$(63) \quad \frac{\sum_{i=1}^n b_i r_i}{\sum_{i=1}^n g_i(r_i)} - \varepsilon_1 \leq 1.$$

Этот вид модели наименее эффективен при борьбе с коррупцией, но в этом случае удастся добиться того, чтобы элементы среднего и нижнего уровня использовали ресурсы строго по назначению.

9. Заключение

В статье построена и исследована статическая трехуровневая модель распределения ресурсов с учетом механизма коррупции. Рассматривались равновесия принуждения и побуждения. Доказано, что в случае «заинтересованного» верхнего уровня бороться с коррупцией можно в трех из четырех рассмотренных случаев, а именно в моделях «принуждение–принуждение», «принуждение–побуждение» и «побуждение–принуждение». В остальных случаях, в том числе и во всех случаях при «незаинтересованном» верхнем уровне, возможно лишь ограничение механизма коррупции. В ряде случаев удастся добиться того, чтобы элементы нижнего и среднего уровня (в случае «заинтересованного» верхнего уровня) не тратили ресурсы на частные цели: в моделях «принуждение–побуждение» и «побуждение–побуждение». В случае принуждения всегда можно добиться того, чтобы выполнилось условие устойчивого развития, в случае побуждения этого можно добиться лишь при соответствующих условиях (46), (48), (61) и (63).

Литература

1. ГОРБАНЕВА О.И. *Игровые модели распределения ресурсов в иерархических системах управления качеством речной во-*

- ды // Математическая теория игр и ее приложения. – 2010. – Т. 2, вып. 1. – С. 27–46.
2. ГОРБАНЕВА О.И., УГОЛЬНИЦКИЙ Г.А. *Модели распределения ресурсов в иерархических системах управления качеством речной воды* // Управление большими системами. – 2009. – №26. – С. 64–80.
 3. КОНОНЕНКО А.Ф. *Теория игр и иерархические системы* // Планирование и управление экономическими целенаправленными системами. – Новосибирск: Наука, 1974. – С. 63–72.
 4. РЫБАСОВ Е.А., УГОЛЬНИЦКИЙ Г.А. *Математическое моделирование иерархического управления эколого-экономическими системами с учетом коррупции* // Компьютерное моделирование. Экология. Выпуск 2 / Под редакцией Угольницкого Г.А. – М.: Вузовская книга, 2004. – С. 45–65.
 5. УГОЛЬНИЦКИЙ Г.А., ГОРБАНЕВА О.И. *Задача распределения ресурсов в организационной системе с учетом коррупции и ее экологические приложения* // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Технические науки. – 2007. – №1. – С. 43–47.
 6. УГОЛЬНИЦКИЙ Г.А. *Математическое моделирование иерархического управления устойчивым развитием* // Компьютерное моделирование. Экология. Выпуск 2 / Под редакцией Угольницкого Г.А. – М.: Вузовская книга, 2004. – С. 101–125.
 7. УГОЛЬНИЦКИЙ Г.А. *Теоретико-математическое моделирование методов иерархического управления устойчивым развитием* // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2002. – №1. – С. 34–50.
 8. BLISS C., TELLER R.D. *Does Competition Kill Corruption?* // Journal of Political Economy. – 1997. – Vol. 105, №5. – P. 64–80.
 9. LIEN D.D. *Corruption and Allocation Efficiency* // Journal of Development Economics. – 1990. – №33. – P. 35–43.

10. LUI F.T. *An Equilibrium Quening Model of Bribery* // Journal of Political Economy. – 1985 – Vol. 93, №4. – P. 32–39.
11. OUGOLNITSKY G.A. *Game Theoretic Modeling of the Hierarchical Control of Sustainable Development Game* // Theory and Applications – 2002. – Vol. 8. – P. 107–118.
12. SHLEIFER A., VISHNY R.W. *Corruption* // The Quarterly Journal of Economics. –1993. – Vol. 107, №33. – P. 43–53.

STATIC MODELS OF CORRUPTION IN RESOURCE ALLOCATION MECHANISMS FOR THREE-LEVEL CONTROL SYSTEMS

Gorbaneva Olga Ivanovna, South Federal University, Rostov-on-Don, Cand.Sc., assistant professor (gorbaneva@mail.ru).

Abstract: In this article the static problem of resource allocation in a three-level control system is considered. The impact of corruption mechanism on the economic system, the objective function of participants and their strategies are investigated. The abilities and ways to fight corruption in the case of implying compulsion and impulsions mechanisms are estimated. Compulsion and impulsions equilibria are found. The ability of fight against corruption in the case of the «interested» principal is proved.

Keywords: resource allocation, Γ_2 game, Germeier theorem, impulsion, compulsion.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии Д. А. Новиковым

УДК 519.876.2

ББК 32.81

ТЕОРЕТИКО-ИГРОВАЯ МОДЕЛЬ ПОГРАНИЧНОГО СДЕРЖИВАНИЯ

Шумов В. В.¹

(Отделение погранологии

Международной академии информатизации, Москва)

В настоящей работе рассмотрена теоретико-игровая модель пограничного сдерживания, позволяющая с использованием равновесия Штакельберга вычислить оптимальные расходы на обеспечение пограничной безопасности.

Ключевые слова: пограничная безопасность, пограничное сдерживание, охрана границы, равновесие Штакельберга, теоретико-игровая модель.

1. Введение

По А. Маслоу потребность в безопасности является важнейшей базовой потребностью индивида: «После удовлетворения физиологических потребностей их место в мотивационной жизни индивидуума занимают потребности другого уровня, которые в самом общем виде можно объединить в категорию безопасности (потребность в безопасности; в стабильности; в зависимости; в защите; в свободе от страха, тревоги и хаоса; потребность в структуре, порядке, законе, ограничениях; другие потребности)» [8]. Национальная (государственная) безопасность по источникам возникновения угроз подразделяется на внутривнутриполитическую, международную и пограничную безопасность [9].

Модельный закон [10] определяет пограничную безопасность как составную часть национальной безопасности государ-

¹ Владислав Вячеславович Шумов, кандидат технических наук, доцент (vshum59@yandex.ru).

ства, представляющую собой состояние защищенности политических, экономических, информационных, гуманитарных и иных интересов личности, общества и государства на государственной границе и в пограничном пространстве.

Пограничная безопасность реализуется посредством комплекса мер, включающего следующие этапы (функции пограничной политики): профилактика¹ (предупреждение); пограничное сдерживание и пограничные меры [21; 11] (рис. 1).



Рис. 1. Концептуальная модель пограничной безопасности

¹ В широком понимании профилактика является синонимом предупреждения. В узком смысле слова профилактикой считаются меры, направленные на выявление и ликвидацию причин и условий конкретных деяний, а также на установление лиц, способных совершить преступление, с целью осуществления направленного предупредительного воздействия [1].

Важнейшим принципом пограничной политики является примат профилактических, предупредительных и сдерживающих мер [15, 16, 22].

Сдерживание (*deterrence*) – это «состояние ума, вызванное существованием реальной угрозы ответных действий» [14]. Угроза (общеславянск. «гроза» – первоначальное значение – страх, ужас) имеет следующие значения: 1) общее значение – любое действие, жест, реакция или символический акт, отражающие намерение напасть, причинить физический, психологический или материальный вред; 2) символ или знак, предвещающий опасность; 3) идея или образ (и сопровождающие их эмоции) относительно ожидаемых событий, способных причинить ущерб; 4) обещание причинить какое-либо зло, неприятность; 5) возможность, опасность какого-либо бедствия, несчастья, неприятного события [5].

Сдерживание и угрозы в пограничном пространстве можно классифицировать по следующим основаниям:

1. По направленности:

- сдерживание и угрозы, создаваемые пограничной системой по отношению к субъектам, ведущим противоправную деятельность (пограничное сдерживание, пограничные угрозы);
- сдерживание и угрозы, создаваемые пограничной системой по отношению к своим сотрудникам (сдерживание правонарушений).

2. По мотивации субъекта, на которого направлена угроза:

- сдерживание экономических субъектов (контрабандистов, нелегальных мигрантов и др.);
- сдерживание неэкономических (институциональных) субъектов (террористов, экстремистов и т.д.).

Функция сдерживания противоправной деятельности в пограничном пространстве полностью основывается на создаваемых угрозах. Способность к проецированию угроз обеспечивается в первую очередь материальными, моральными и когнитивными ресурсами пограничного ведомства.

Основоположителем экономической теории сдерживания преступности считается Г. Беккер [13], показавший, что поведе-

ние преступников в принципе не отличается от любого другого рационального экономического поведения. Субъект решается на преступление, если ожидаемые выгоды (финансовое или иное вознаграждение) превосходят связанные с ними издержки (наказание в виде штрафа или заключения и, соответственно, вероятность этого наказания).

Анализ сдерживания институциональных субъектов вероятно впервые был выполнен в военной науке и практике. В частности, военный социолог генерал Н.Н. Головин отмечал, что важнейшим фактором победы войска в бою является процент «кровавых» потерь (потери ранеными и убитыми), при котором войско все еще не утрачивает боеспособность (моральный дух). «...Можно установить, что для сражений второй половины XVIII и всего XIX века пределом наибольшей моральной упругости войск, после которого они не способны уже к победе, являются кровавые потери в 25%. ... Моральный эффект равного процента потерь для каждого из сражающихся далеко не одинаков. Те же размеры потерь подавляют дух одного и вызывают более быстрый процесс морального разложения, нежели у другого, а тогда этот другой и становится победителем...» [3, С. 164–165]. Относительно низкий пороговый процент потерь фактически является сдерживающим фактором, не позволяющим достичь победы над более сильным в моральном отношении противником.

Моделированию сдерживания посвящено множество работ. В частности, А.А. Васин и др. в работе [2] рассмотрели вопросы поиска оптимальной организации бюджетополняющих и правоохранительных инспекций; решили задачу определения оптимального плана проверок, сдерживающих экономических субъектов от уклонения налогов и/или провоза незаконных грузов через пункты пропуска.

Л. Вейн, Ю. Лю и А. Мотскин в статье [28] вычислили эффективность пограничного сдерживания применительно к нелегальным мигрантам, основываясь на теории дискретного выбора [17] и используя стандартную логит-модель.

В работе [11] рассмотрена концептуальная модель (глава 1) и прикладные модели пограничного сдерживания (глава 2): моделирование контактной и барьерной функций границ; анализ

представлений агентов о параметре; элементарная модель пограничного сдерживания; выполнена постановка теоретико-игровых задач. В.О. Корепанов и В.В. Шумов [6] рассмотрели теоретико-игровую задачу сдерживания организатора трансграничной преступной группировки и для частного случая нашли ее решение (равновесие по Штакельбергу), заключающееся в распределении ограниченного ресурса между подразделениями таким образом, чтобы обеспечить одинаковую вероятность задержания нарушителей.

В настоящей работе рассмотрена теоретико-игровая модель пограничного сдерживания, позволяющая оптимизировать расходы на обеспечение пограничной безопасности.

2. Пограничная система и субъекты воздействия

Пограничная система (далее ПС) может иметь неограниченный бесконечно делимый ресурс, денежный эквивалент которого равен R (денежные средства, оборудование, расходные материалы и т.п.). Множество X допустимых действий – распределение ресурса по множеству пограничных участков $N = \{1, \dots, n\}$ (подразделений, каналов):

$$(1) \quad X = \left\{ x \in \mathfrak{R}^n : x_j \geq 0, \sum_{j=1}^n x_j = R < +\infty \right\},$$

где x_i – выделяемый i -му подразделению ресурс.

Имеется два класса агентов (субъектов воздействия со стороны пограничной службы), пытающихся с сопредельной территории проникнуть в регион:

- A – количество агентов, действующих из экономических побуждений (экономические агенты);
- B – количество агентов, действующих из неэкономических побуждений (институциональные агенты).

Предположим, что известно их количественное распределение по l и m группам соответственно:

$$(2) \quad \sum_{i=1}^l A^i = A, \quad L = \{1, \dots, l\},$$

$$(3) \quad \sum_{i=1}^m B^i = B, \quad M = \{1, \dots, m\}.$$

В случае успешного нарушения границы агент i -й группы наносит ущерб общественному благосостоянию в размере u^i и v^i соответственно. Отметим, что ущерб v^i от неэкономических агентов в денежном выражении иногда оценить трудно, поскольку их действия могут привести к краху существующего политического режима.

Пусть $y_j^i \in [0, A^i]$ ($z_j^i \in [0, B^i]$) – количество экономических (неэкономических) агентов группы i , выбравших участок j или отказавшихся от попытки нарушения границы ($j = 0$). Множество допустимых действий агентов есть

$$(4) \quad Y = \left\{ y \in \mathfrak{R}_i^{n+1} : y_j^i \geq 0, j \in N \cup \{0\}, \sum_{j \in N \cup \{0\}} y_j^i = A^i, i \in L \right\},$$

$$(5) \quad Z = \left\{ z \in \mathfrak{R}_m^{n+1} : z_j^i \geq 0, j \in N \cup \{0\}, \sum_{j \in N \cup \{0\}} z_j^i = B^i, i \in M \right\}.$$

3. Модель охраны границы

Действия экономических агентов традиционно рассматриваются как угрозы среднего уровня, борьба с ними обычно ведется в рамках охраны границы (*Border Control*).

Эффективность охраны границы на участке j может быть охарактеризована пограничной производственной функцией, т.е. вероятность задержания экономических агентов на участке j равна [11, 12]:

$$(6) \quad p_j = 1 - \exp(-\lambda_j x_j),$$

где λ_j – параметр производственной функции.

Полезность альтернатив для экономического агента i может быть определена на основе модели Г. Беккера [13]:

$$U_j^i = (1 - p_j P^i) S^i + p_j P^i (S^i - D^i) - G_j + \Delta S^i,$$

или

$$(7) \quad U_j^i = S^i - p_j P^i D^i - G_j + \Delta S^i, \quad j = 1, \dots, n,$$

где S^i – ожидаемый доход от незаконной деятельности агента i ; D^i – денежный эквивалент наказания агента i в случае его задержания и наказания; P^i – вероятность наказания агента i в случае его задержания; G_j – транзакционные издержки, связанные с выбором участка j ; ΔS^i – дополнительная полезность, характеризующая отношение агентов i к риску.

Транзакционные издержки G_j определяются выбором участка (канала) и позволяют учесть риски, связанные с потерей времени (особенности рельефа и проходимости местности, транспортная доступность) и здоровья (особенности и правила применения оружия и т.д.).

Американский экономист М. Сесновиц [19] на основе статистики преступлений вычислил, что средний ожидаемый чистый доход преступников, занимающихся кражей с взломом, является отрицательной величиной. Данный факт говорит о том, что преступники, как правило, рискофилы, т.е. их функция полезности выпукла [7]. А.А. Васин и др. [2] показали, что при достаточно общих предположениях плотность функции ΔS^i унимодальна, а ставка риска монотонно убывает по ΔS^i .

Полезность законной деятельности ($j = 0$) для агента i равна

$$(8) \quad U_0^i \equiv s^i,$$

где s^i – ожидаемый доход от законной деятельности агента i .

Сравнивая ожидаемую полезность $U^i = \max_{j=1, \dots, n} U_j^i$ от незаконной деятельности с полезностью законной s^i , агент i принимает решение:

- отказаться от попытки нарушения границы (с вероятностью $Q^i = 1$), если $s^i \geq U^i$;
- попытаться нарушить границу ($Q^i = 0$), если $s^i < U^i$.

Формально вероятность Q^i есть вероятность выбора нулевого участка (альтернативы) $j = 0$.

Цель ПС заключается в максимизации критерия эффективности охраны границы – предотвращенного ущерба за вычетом расходов на охрану границы [11]:

$$(9) \quad F(x, y) = \sum_{i=1}^l u^i \left(y_0^i + \sum_{j=1}^n p_j(x_j) y_j^i \right) - R \rightarrow \max.$$

Поскольку внутри одной группы агенты однородны, то каждую группу будем считать отдельным игроком, имеющим целью максимизацию полезности:

$$(10) f_i(x, y) = s^i y_0^i + \sum_{j=1}^n U_j^i y_j^i \rightarrow \max.$$

В общем случае мы имеем игру $(l + 1)$ лиц: m игроков (субъектов воздействия) наблюдают распределение пограничных сил и средств по участкам $j = 1, \dots, n$ и выбирают свои действия (выбор альтернативы $j = 0, 1, \dots, n$). ПС «просчитывает» действия каждого из субъектов воздействия, определяет их распределения по участкам и, исходя из этого, максимизирует свою полезность. Мы имеем игру Γ_1 , решение которой (равновесие Штакельберга) находится обратной индукцией и для двух игроков имеет вид [4]

$$(11) x^* \in \underset{x \in X, y \in R_y(x)}{\text{Arg max}} F(x, y),$$

$$y^* \in R_y(x^*) = \underset{y \in Y}{\text{Arg max}} f(x, y),$$

где $R_y(x)$ есть функция отклика (наилучшего ответа) субъекта воздействия на действия ПС.

Полагая, что субъекты воздействия не взаимодействуют между собой, получим правило для нахождения равновесия в игре Γ_1 $(l + 1)$ лиц:

$$(12) x^* \in \underset{x \in X, y^1 \in R_{y^1}(x), \dots, y^l \in R_{y^l}(x)}{\text{Arg max}} F(x, y),$$

$$y^{i*} \in R_{y^i}(x^*) = \underset{y^i \in Y^i}{\text{Arg max}} f_i(x, y), \quad i = 1, \dots, l.$$

4. Решение игры охраны границы для двух игроков

Если в приграничном регионе почти все агенты однородны (преимущественно мигранты или контрабандисты), то мы вправе рассмотреть игру двух лиц, опуская индекс i .

Предположим, что для всех $j = 1, \dots, n$ выполняется неравенство

$$S - G_j + \Delta S > 0$$

(т.е. участок местности проходим для агентов). В противном случае такие участки исключаем из рассмотрения (на них не требуется выделение пограничных средств).

Наилучшим ответом ПС будет такое распределение ресурса, при котором на всех участках обеспечивается равенство полезности для каждого агента [6]. Тогда для нахождения оптимального распределения ресурса ПС необходимо решить задачу (агенты с одинаковой вероятностью выбирают любой из участков):

$$(13) F(x, y) = uA \left(Q + \frac{1-Q}{n} \sum_{j=1}^n (1 - e^{-\lambda_j x_j}) \right) - R \rightarrow \max,$$

$$(14) U = S - (1 - e^{-\lambda_j x_j}) PD - G_j + \Delta S, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$(15) \sum_{j=1}^n x_j = R,$$

$$(16) Q = \begin{cases} 1, & s \geq U, \\ 0, & s < U. \end{cases}$$

Выражение (13) непосредственно следует из (9), выражение (14) есть требование обеспечения одинаковой полезности для агентов на всех участках (следует из (7)).

Подставив (14)–(15) в (13), получим целевую функцию ПС, зависящую от U и Q :

$$(17) F(U, Q) = uA \left(Q + \frac{1-Q}{n} \sum_{j=1}^n \frac{S - U - G_j + \Delta S}{PD} \right) + \\ + \sum_{j=1}^n \frac{1}{\lambda_j} \ln \left(1 - \frac{S - U - G_j + \Delta S}{PD} \right) \rightarrow \max.$$

Первый случай. Предположим, что местность однородная и возможности ПС на всех участках одинаковы, т.е. $\lambda_j = \lambda$, $G_j = G, j = 1, \dots, n$.

При $Q = 1$ полагаем, что сдерживание агентов выполняется при условии $U = s$, и выражение (17) примет вид

$$(18) F(s, 1) = uA + \frac{n}{\lambda} [\ln(PD - S + s + G - \Delta S) - \ln PD],$$

$$PD - S + s + G - \Delta S > 0.$$

При этом оптимальные расходы ПС будут равны

$$(19) R^* = \frac{n}{\lambda} [\ln PD - \ln(PD - S + s + G - \Delta S)].$$

Например, при $n = 10$, $\lambda = 0,0001$, $P = 0,5$, $D = 1000$, $S = 300$, $s = 100$, $G = 10$, $\Delta S = 5$ получим $R^* = 49,430$.

Если легальный доход агентов невелик, то их сдерживание может оказаться трудной задачей. При $Q = 0$ получим:

$$(20) F(U, 0) = \frac{uA}{PD} (S - U - G + \Delta S) + \frac{n}{\lambda} [\ln(PD - S + U + G - \Delta S) - \ln PD].$$

Вычислив производную по U и приравняв ее к нулю, из (20) получим:

$$U^* = \frac{PDn}{\lambda uA} - PD + S - G + \Delta S.$$

Найденное значение U^* получено в предположении, что $U^* < s$ и функция сдерживания не работает. Данная ситуация оправдана, например, в силу незначительного количества агентов или небольшого ожидаемого ущерба общественной безопасности.

Подставив найденное значение U^* в (14), получим значение оптимальных расходов ПС:

$$(21) R^* = \frac{n}{\lambda} [\ln \lambda + \ln u + \ln A - \ln n].$$

Оптимальные расходы определяются параметром λ производственной функции, ожидаемым количеством A агентов и ожидаемым ущербом u общественной безопасности.

Например, при $n = 10$, $\lambda = 0,0001$, $A = 500$, $u = 1000$ получим $R^* = 160,944$.

Алгоритм вычисления оптимальных расходов в случае 1 заключается в вычислении оптимальных значений целевых функций $F(U, 0)$ и $F(U, 1)$, зависящих от легального дохода s , и вычислении оптимальных расходов ПС для большего из полученных значений целевой функции.

Второй случай. Неоднородная местность и разные возможности пограничных подразделений на участках.

При $Q = 1$ имеем следующее значение целевой функции:

$$F(s, 1) = uA + \sum_{j=1}^n \frac{1}{\lambda_j} \ln \left(1 - \frac{S - s - G_j + \Delta S}{PD} \right),$$

причем оптимальные расходы по участкам вычисляются из условия

$$s = S - (1 - e^{-\lambda_j x_j})PD - G_j + \Delta S, \quad j = 1, \dots, n,$$

и равны

$$x_j = \frac{1}{\lambda_j} (\ln PD - \ln(PD - S + s + G_j - \Delta S)), \quad j = 1, \dots, n.$$

При $Q = 0$ получим:

$$F(U, 0) = \frac{uA}{n} \sum_{j=1}^n \frac{S - U - G_j + \Delta S}{PD} + \sum_{j=1}^n \frac{1}{\lambda_j} \ln \left(1 - \frac{S - U - G_j + \Delta S}{PD} \right),$$

$$F'(U, 0) = \frac{-uA}{PD} + \sum_{j=1}^n \frac{1}{\lambda_j (PD - S + U + G_j - \Delta S)} = 0.$$

Из последнего выражения оптимальное значение U^* находится численным методом. Тогда оптимальные расходы ПС по участкам будут равны:

$$x_j = \frac{1}{\lambda_j} (\ln PD - \ln(PD - S + U^* + G_j - \Delta S)), \quad j = 1, \dots, n.$$

Третий случай. Положим, что агенты (самостоятельно или с помощью организаторов нелегальных каналов через границу) правильно определяют возможности пограничных подразделений и точно оценивают транспортную доступность местности, но сравнение полезностей от законной и незаконной деятельности выполняют с ошибками. Такое поведение агентов достаточно типично при планировании ими своей деятельности на несколько лет вперед, когда приходится сталкиваться с различными неопределенностями.

В случае ограниченной рациональности агентов вероятность отказа от попытки нарушения границы равна [17, 20, 11]

$$(22) \quad Q = \frac{e^\theta}{e^\theta + e^{\theta U/s}},$$

где $\theta > 0$ – степень рациональности агентов. Для экономических агентов можно положить $\theta = 3$ [11].

Тогда выражение (17) можно записать в следующем виде:

$$(23) \quad F(U) = uA \left(\frac{e^\theta}{e^\theta + e^{\theta U/s}} + \frac{e^{\theta U/s}}{n(e^\theta + e^{\theta U/s})} \sum_{j=1}^n \frac{S - U - G_j + \Delta S}{PD} \right) +$$

$$+ \sum_{j=1}^n \frac{1}{\lambda_j} \ln \left(1 - \frac{S - U - G_j + \Delta S}{PD} \right) \rightarrow \max.$$

Оптимальное значение U^* находится численным методом.

Замечание. Все вышеизложенные рассуждения справедливы и для неэкономических агентов, если предположить, что последние максимизируют вероятность незадержания, т.е. для неэкономических агентов [11]

$$U_j = 1 - (1 - p_j)(1 - p_{Gj}), \quad j = 1, \dots, n,$$

$$U_0 = 1 - p_0,$$

где p_0 – пороговая вероятность (значение вероятности задержания и наказания, при которой агенты отказываются от попыток нарушения границы); p_{Gj} – вероятность задержания (нейтрализации) агентов на маршруте непосредственно после преодоления охраняемого рубежа.

5. Решение игры охраны границы для нескольких игроков

Четвертый случай. Рассмотрим условия случая 1 (однородность местности и одинаковые возможности ПС на всех участках: $\lambda_j = \lambda$, $G_j = G$, $j = 1, \dots, n$), когда имеется l_e групп рациональных экономических агентов. Агенты i -й группы ($i = 1, \dots, l_e$) стремятся максимизировать полезность, выбирая альтернативу j .

Наилучший ответ ПС – такое распределение ресурса, при котором для каждой группы агентов обеспечивается равенство полезности на всех участках. Для нахождения оптимального распределения ресурса ПС необходимо решить задачу:

$$(24) \quad F(x, y) = \sum_{i=1}^{l_e} u^i A^i \left(Q^i + \frac{1 - Q^i}{n} \sum_{j=1}^n (1 - e^{-\lambda x_j}) \right) - R \rightarrow \max,$$

$$(25) \quad U^i = S^i - (1 - e^{-\lambda x_j}) P^i D^i - G + \Delta S^i, \quad j = 1, \dots, n, \quad i = 1, \dots, l_e,$$

$$(26) \quad \sum_{j=1}^n x_j = R,$$

$$(27) \quad Q^i = \begin{cases} 1, & s^i \geq U^i, \\ 0, & s^i < U^i, \end{cases}$$

где выражение (25) есть требование обеспечения одинаковой полезности на всех участках для каждой группы агентов.

Из выражения (25) следует, что одинаковая полезность внутри каждой группы достигается при $x_1 = \dots = x_n = R/n$, т.е.

$$U^i(R) = S^i - (1 - e^{-\lambda R/n})P^i D^i - G + \Delta S^i.$$

Для каждой i -й группы агентов найдем значение R^i , при котором обеспечивается равенство $U^i(R^i) = s^i$:

$$R^i = \frac{n}{\lambda} (\ln P^i D^i - \ln(s^i - S^i + P^i D^i + G - \Delta S^i)).$$

Множество $i = 1, \dots, l_e$ групп агентов разобьем на непересекающиеся подмножества i_1, i_2, \dots, i_n исходя из условия

$$R^{i_1} < R^{i_2} < \dots < R^{i_n}.$$

Целевая функция (24) в полученных точках имеет разрыв 1-го рода и равна

$$F(R) = \sum_{i=1}^{l_e} u^i A^i (1 + (Q^i - 1)e^{-\lambda R/n}) - R,$$

или

$$F(R < R^{i_1}) = \sum_{i=1}^{l_e} u^i A^i (1 - e^{-\lambda R/n}) - R,$$

$$F(R^{i_1} \leq R < R^{i_2}) = \sum_{i \in i_1} u^i A^i + \sum_{i \in (i_2, \dots, i_n)} u^i A^i (1 - e^{-\lambda R/n}) - R,$$

...

$$F(R = R^{i_n}) = \sum_{i=1}^{l_e} u^i A^i - R.$$

Поиск локального максимума на каждом интервале тривиален и сводится к вычислению производной и приравнению ее к нулю.

При этом количество агентов, успешно преодолевших границу, будет равно

$$R^* < R^{i_1} : a = e^{-\lambda R^*/n} \sum_{i=1}^{l_e} A^i,$$

$$R^{i_1} \leq R^* < R^{i_2} : a = e^{-\lambda R^*/n} \sum_{i \in (i_2, \dots, i_n)} A^i,$$

...

$$R^* = R^{i_n} : a = 0.$$

6. Заключение

Заметим, что в качестве параметров модели мы использовали ожидаемые количества агентов по каждой группе (A^i и B^i) и ожидаемый потенциальный ущерб (u^i и v^i) общественной безопасности от действий одного агента i -й группы.

В общем случае потенциальный ущерб существенно зависит от количества агентов, проникших через границу в приграничный регион. Так, при небольшом количестве нелегальных мигрантов ущерб от их деятельности может сводиться к неуплате налогов и одиночным уголовным преступлениям. При значительном количестве нелегальных мигрантов возможно возникновение межнациональных конфликтов со значительными моральными и материальными потерями.

Еще более катастрофичными могут оказаться последствия от массового проникновения террористов, повстанцев и представителей спецслужб других государств, что видно на примере некоторых стран Северной Африки.

Для моделирования последствий массового проникновения в регион (страну) экономических и неэкономических агентов необходимо рассмотреть модели безопасности приграничного региона, например, на основе уравнений Осипова–Ланчестера.

В частности, в работе М. Шаффера [18] рассмотрена модель борьбы с повстанцами в приграничном регионе, где с учетом интенсивностей попыток проникновения повстанцев из-за границы, вербовки новых агентов в регионе и интенсивности их нейтрализации вычисляются условия, при которых будет происходить снижение активности повстанцев.

Литература

1. АВАНЕСОВ Г.А. *Криминология: учебник*, 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Изд-во Акад. МВД СССР, 1984. – 500 с.
2. ВАСИН А.А., КАРТУНОВА П.А., УРАЗОВ А.С. *Модели организации государственных инспекций и борьбы с кор-*

- рупцией // Математическое моделирование. – 2010. – Том 22, №4. – С. 67–89.
3. ГОЛОВИН Н.Н. *Наука о войне. О социологическом изучении войны.* – Париж: Издательство газеты «Сигнал», 1938. – 242 с.
 4. ГУБКО М.В., НОВИКОВ Д.А. *Теория игр в управлении организационными системами.* – Издание 2-е. – М.: ИПУ РАН, 2005. – 138 с.
 5. ЖМУРОВ В.А. *Большая энциклопедия по психиатрии.* – 2-е изд., 2012. [Электронный ресурс] – URL: <http://vocabulary.ru> (дата обращения 06.03.2013.)
 6. КОРЕПАНОВ В.О., ШУМОВ В.В. *Распределение пограничных ресурсов с использованием равновесия Штакельберга* // *Пространство и время.* (В печати.)
 7. КОРОВИН Д.И. *О нахождении функции полезности в теории Неймана-Моргенштерна* // *Вестник ИГЭУ.* – 2005. – Вып. 4. – С. 82–84.
 8. МАСЛОУ А. *Мотивация и личность.* – СПб.: Издательство Питер, 2006. – 352 с.
 9. *Общая теория национальной безопасности: учебник* / Под общ. ред. А.А. Прохожева. Изд. 2-е – М.: Изд-во РАГС, 2005. – 344 с.
 10. *Постановление Межпарламентской ассамблеи государств – участников Содружества Независимых Государств от 28.10.2010 г. №35-10 о модельном законе «О пограничной безопасности».*
 11. ШУМОВ В.В. *Модели пограничного сдерживания.* – М.: ЛЕНАНД, 2012. – 200 с.
 12. ШУМОВ В.В. *Производственные функции в погранометрике* // Тр. междунар. конф. «Теория активных систем». Том 1. – М.: ИПУ РАН, 2011. – С. 219–225.
 13. BECKER G.S. *Crime and Punishment: An Economic Approach* // *Essays in the Economics of Crime and Punishment* / Eds. G.S. Becker, W.L. Landes. – N.Y., 1974. – P. 1–54.
 14. FMFM 7-14. *Combating Terrorism (USMC).* – October, 5, 1990. – 143 p.
 15. MCNEILL J.B. *15 Steps to Better Border Security: Reducing America's Southern Exposure* // *Executive Summary Background.* – March, 9, 2009. – №2245. – URL:

<http://www.heritage.org/research/reports/2009/03/15-steps-to-better-border-security-reducing-americas-southern-exposure>
(дата обращения 06.03.2013.)

16. RILEY K.J. *Border Security and the Terrorist Threat* – The RAND Corporation, CT-266, August, 8, 2006. – 14 p.
17. SANDOR Z. *Multinomial discrete choice models* // *Quantile*. – 2009. – №7. – P. 9–19.
18. SCHAFFER M.B. *Lanchester Models of Guerrilla Engagements*. – Rand Corporation, Santa Monica, California, RM-5053-ARPA, 1967. – 46 p.
19. SESNOWITZ M. *Returns to Burglary* // *The Economics of Crime*. – Cambridge (Mass.), 1980. – P. 181–186.
20. WEIN L.M., LIU Y., MOTSKIN A. *Analyzing the Homeland Security of the U.S.-Mexican Border* // *Risk Analysis*. – 2009. – Vol. 29, №5. – P. 699–713.
21. WILLIS H.H., PREDD J.B., DAVIS P.K., BROWN W. *Measuring the Effectiveness of Border Security Between Ports-of-Entry*. – RAND Corporation, Santa Monica, Calif.: TR-837-DHS. As of January, 6, 2011. – 66 p.
22. ZINNO M.J. *Expeditionary Border Security Operations: Eliminating the Seams*. – Fort Leavenworth, Kansas: School of Advanced Military Studies United States Army Command and General Staff College, 2008. – 56 p.

GAME-THEORETIC MODEL OF BORDER CONTAINMENT

Vladislav Shumov, International Academy of Informatization, Moscow, Cand.Sc., senior lecturer (vshum59@yandex.ru).

We consider a game-theoretic model of border containment, which uses the Stackelberg equilibrium to calculate the optimal spending on border security.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии Д. А. Новиковым

УДК 621.039.003
ББК 31.4

**ИНТЕГРИРОВАННЫЙ ПОДХОД
НА ОСНОВЕ МЕТОДОВ ИМИТАЦИОННО-
ДИНАМИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ
И ИССЛЕДОВАНИЯ ПРОСТРАНСТВА
ПАРАМЕТРОВ К МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ
ОПТИМИЗАЦИИ СТРУКТУР РАЗВИВАЮЩИХСЯ
СИСТЕМ ЯДЕРНОЙ ЭНЕРГЕТИКИ**

Андреианов А. А.¹, Купцов И. С.², Светличный Л. И.³
*(Обнинский институт атомной энергетики
НИЯУ МИФИ, Обнинск)*

Описаны интегрированный подход на основе методов имитационно-динамического моделирования и исследования пространства параметров для решения задач многокритериальной оптимизации структуры ядерной энергетики и разработанная программная система MEDNES (Multi-criteria evaluator of developing nuclear energy systems), реализующая данный подход. Также представлены примеры использования предложенного инструментария.

Ключевые слова: ядерный топливный цикл, многокритериальная оптимизация, ядерная энергетика, программный комплекс, имитационно-динамическое моделирование, метод исследования пространства параметров.

¹ Андрей Алексеевич Андреианов, кандидат технических наук, доцент (andriyanov@iate.obninsk.ru).

² Илья Сергеевич Купцов, кандидат физико-математических наук, ассистент (kuptsov_ilia@list.ru).

³ Леонид Игоревич Светличный, студент (l.swetlichnyj@yandex.ru).

1. Введение

Несмотря на существующий солидный арсенал моделей, подходов, программных средств для системных исследований перспектив развития ядерной энергетики (ЯЭ), в настоящее время ведется активная работа по поиску новых путей решения данного класса задач [1, 5, 13]. Это связано с существенным расширением круга задач и расширением спектра факторов, которые будут определять развитие ЯЭ в перспективе. К их числу следует отнести такие факторы как нераспространение, отходы, безопасность. Тогда как характерной чертой существующих моделей развивающихся систем ЯЭ является учет, главным образом, экономических аспектов.

Следует также отметить, что с ограниченностью области применения моделей связана проблема получения итогового результата, определяющего наиболее эффективный вариант ее развития, где до настоящего времени не было предложено общепризнанных алгоритмов и методических подходов.

Частично восполнить имеющиеся недостатки позволяет разработанный и описанный ниже интегрированный подход на основе методов имитационно-динамического моделирования и исследования пространства параметров, позволяющий решать задачи по оптимизации структуры ЯЭ в многокритериальной постановке.

В разделе 1 представлен способ конструирования системы уравнений, описывающих балансы материальных потоков в развивающейся системе ЯЭ (раздел 1.1), которые, будучи дополнены набором критериев эффективности, совместно с применением метода исследования пространства параметров (раздел 1.2) составляют суть предложенного интегрированного подхода.

В разделе 2 кратко описаны функциональные возможности разработанной программной системы *MEDNES (Multi-criteria evaluator of developing nuclear energy systems)* и инструментальные средства, используемые при ее разработке.

В разделе 3 качественно описаны и представлены результаты решения с использованием разработанного инструментария трех различных задач из области системно-аналитических и

прогнозных исследований в обоснование приоритетов развития ЯЭ.

2. Описание интегрированного подхода

2.1. МЕТОД ИМИТАЦИОННО-ДИНАМИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ РАЗВИТИЯ ЯЭ

Балансы ядерного топлива в развивающейся системе ЯЭ

Согласно общей методологии построения моделей в рамках системного анализа необходимо выделить следующие типичные этапы [9]: 1) составление *уравнений связей*, отражающих реальные «физические» ограничения; 2) определение экзогенно задаваемого *целевого функционала*, отражающего представления о том, как должен функционировать рассматриваемый объект, и 3) в случае необходимости, *замыкающие систему уравнения*.

Исходная система уравнений связей представляет в агрегированном дифференциальном виде процесс топливообеспечения реакторов в конкретном регионе (рост мощностей необходимо обеспечить топливом заданного вида и количества) [2]:

$$(1) \quad F_{ik}^j(t) \frac{dN_i^{ej}(t)}{dt} + B_{ik}^j(t) N_i^j(t) = q^{ej}(t) + q^{rj}(t) (\vec{N}(t)),$$

где $i = 1, \dots, n$ - номер установки; $j = 1, \dots, m$ - номер региона; $k = 1, \dots, l$ - тип топлива

Левая часть уравнения (1) определяет спрос на топливо заданного вида. Спрос складывается за счет потребностей обеспечить ввод новых мощностей (первое слагаемое) и заменить выгоревшее топливо в эксплуатирующихся энергетических реакторах (второе слагаемое). Правая часть уравнения задает предложение конкретного вида топлива. Оно определяется имеющейся структурой топливоснабжения системы ЯЭ в рассматриваемом регионе и возможностью импорта компонентов топлива из других регионов. Здесь и далее приняты условные обозначения: $F_{ik}^j(t)$ – первичная загрузка топлива в реактор; $B_{ik}^j(t)$ – ежегодная перегрузка топлива реактора. Функциональная зависимость параметров уравнений от времени учитывает возможное усовершенствование технологий.

Введем следующие обозначения: $N(t)$, $N^c(t)$, $N^d(t)$ – соответственно установленная мощность реакторов в году t , полная мощность реакторов, введенных к году t , и полная выведенная мощности реакторов к году t . Указанные величины связаны следующими соотношениями:

$$(2) \quad N(t) = N^c(t) - N^d(t); \quad N^d(t) = N^c(t - T_f); \quad N^d(t) = \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{t}{T_f} \rfloor} N(t - iT_f),$$

где $\lfloor \cdot \rfloor$ - целая часть числа.

Учет этого обстоятельства необходим для корректного моделирования реальной потребности во вводе новых ядерно-энергетических мощностей, вызванной не только ростом потребностей в ЯЭ, но также и выводом отработавших свой срок реакторов из эксплуатации.

В общем случае сумма всех мощностей ядерно-энергетических установок в j регионе должна быть не меньше потребностей в ЯЭ в этом регионе. Это требование накладывает следующее ограничение:

$$(3) \quad N_{\text{яЭ}}^j(t) \leq \sum_i N_i^j(t).$$

Рассмотрим правую часть уравнения (1). Величина $q_i^e(t)$ определяет расход i -го запаса топлива. На эту переменную могут быть наложены определённые ограничения в зависимости от постановки конкретной задачи. Так, например, ограничение вида

$$(4) \quad \int_{T_1}^{T_2} q_i^e(t) dt \leq Q_i$$

соответствует ограничению на общее количество топлива типа i , которое может быть потреблено в течение промежутка $[T_1, T_2]$. Если происходит рост емкости источника на известную величину $\Delta Q_i(t_j)$ в последовательные моменты t_j , то ограничения (4) примут следующий вид:

$$(5) \quad \int_{T_1}^{t_j} q_i^e(t) dt \leq Q_i + \Delta Q_i(t_j).$$

Расход вторичного ядерного топлива, наработанного в процессе развертывания системы ЯЭ,

$$q^{i,j}_{ik}(\vec{N}(t)) = q^{i,j}_{ik} \left(\left\{ N_i^j(t) \right\}_{\substack{i=1..N \\ j=1..M}} \right),$$

представим в следующем общем виде:

$$(6) \quad q^{i,j}_{ik}(\vec{N}(t)) = \hat{f}_{ik}^j(\vec{q}^{out}(\vec{N}(t))).$$

Как видно из уравнения, в модели допускается обмен регенерированным топливом между реакторами различного типа в различных регионах.

Оператор $\hat{f}_{ik}^j(\cdot)$ связывает выходящие из реакторов с входящими в реактор топливными потоками и содержит в себе информацию об особенностях организации структуры ядерного топливного цикла (ЯТЦ) и стратегии обращения с делящимися материалами. Выходящие из реактора топливные потоки могут быть представлены в следующем виде:

$$(7) \quad q^{out,j}_{ik}(N_i^j(t)) = F_{ik}^j(t) \frac{dN_i^{d,j}(t)}{dt} + B_{ik}^j(t) N_i^j(t).$$

Первое слагаемое уравнения (7) определяет последнюю выгрузку топлива из реакторов, выводящихся из эксплуатации. Второе слагаемое соответствует ежегодной выгрузке выгоревшего топлива из эксплуатирующихся энергетических реакторов.

В операторе $\hat{f}_{ik}^j(\cdot)$ могут быть учтены такие обстоятельства, как приток ядерных материалов из других регионов и иных типов реакторных установок, задержки на различных шагах и мощности предприятий ЯТЦ, изменение свойств топливных материалов и возможные технологические модификации установок ЯТЦ в процессе развертывания ядерно-энергетической системы.

Рассмотрим более детально основные блоки, из которых конструируется этот оператор. Любой передел ЯТЦ можно описать посредством входящих в него и выходящих из него материальных потоков (рис. 1).

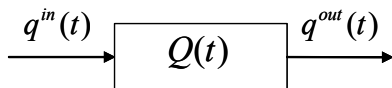


Рис. 1. Входящие и исходящие потоки

Следует различать два типа переделов: допускающих накопление потоков и не допускающих этого. По известным входящим и исходящим потокам может быть рассчитано количество накопленного материала на соответствующем переделе топливного цикла:

$$(8) \quad Q(t) = Q_0 + \int_{t_0}^t (q^{in}(t) - q^{out}(t))dt,$$

где $q^{in}(t)$ - входящий поток; $q^{out}(t)$ - выходящий поток.

Очевидно, что в случае моделирования передела, не допускающего аккумуляцию ядерных материалов, входящие и исходящие потоки по времени равны между собой:

$$(9) \quad q^{in}(t) = q^{out}(t).$$

Временная задержка длительностью T_{lag} (в общем случае зависящая от времени t) в определенном звене ЯТЦ имитируется следующим образом (при условии отсутствия трансформации формы входящего потока):

$$(10) \quad q^{out}(t) = q^{in}(t - T_{lag}).$$

Типичным ограничивающим неравенством, которое должно быть учтено при моделировании, является соотношение, обеспечивающее неотрицательный запас ядерного материала в хранилище:

$$(11) \quad \int_{-\infty}^t q^{out}(t')dt' \leq \int_{-\infty}^t q^{in}(t')dt'.$$

Учет ограниченности мощностей предприятий ЯТЦ может быть осуществлен следующим очевидным образом:

$$(12) \quad q^{in}(t) \leq C(t) \text{ или } q^{out}(t) \leq C(t),$$

где $C(t)$ - предельная производственная мощность передела, на вход которого поступает поток $q^{in}(t)$ или из которого выходит поток $q^{out}(t)$. С учетом этого ограничения может быть определен выходящий с рассматриваемого передела ЯТЦ поток. Частным примером является передел, не допускающий превышения

имеющихся производственных мощностей (например, транспортировка):

$$(13) \quad q^{out}(t) = q^{in}(t) \cdot \Theta [C(t) - q^{in}(t)] + C(t) \cdot \Theta [q^{in}(t) - C(t)],$$

где $\Theta[t]$ - функция Хэвисайда.

В случае необходимости также возможно принять во внимание радиоактивный распад изотопов во внешнем топливном цикле. Пусть $m_i(t)$ - скорость наработки i -го изотопа системой ЯЭ; λ - постоянная распада. Тогда суммарное количество этого изотопа $M_i(t)$ с учетом его радиоактивного распада равно

$$(14) \quad M_i(t) = \int_{-\infty}^t m_i(t') \exp(-\lambda(t-t')) dt'.$$

Реальная скорость изменения его количества в цикле определяется выражением

$$(15) \quad \bar{m}_i(t) = \frac{d}{dt} M_i(t) = m_i(t) - \int_{-\infty}^t \lambda m_i(t') \exp(-\lambda(t-t')) dt'.$$

Входящие и исходящие потоки могут быть определены двумя способами. Во-первых, введением дополнительных уравнений, связывающих их с определяемыми переменными и, в конечном счете, замыкающих исходную систему топливного баланса (1). В общем случае модель будет представлять собой набор дифференциальных уравнений с последствием (запаздывающим аргументом).

Во-вторых, в случае задания целевого функционала часть из потоков может быть определена посредством решения соответствующей задачи оптимального управления, остальные – на основе решения замыкающей системы уравнений. Наложение разнообразных ограничений на области допустимых значений переменных моделей или рассчитываемых с их помощью функционалов позволяет естественным образом учесть системные ограничения и тем самым в процессе расчетов не уйти в область нефизических решений [15].

На основе рассчитанных потребностей в различных видах топлива по известным соотношениям могут быть определены потребности в природном уране, услугах по конверсии, обогащению, производству топлива, переработке отработавшего

ядерного топлива (ОЯТ) и др. Так, например, балансы материалов, определяемые планами развития ЯЭ, могут быть получены, если известен момент пуска установки t и ее возраст τ . Пусть $g_i^j(t, \tau)$ – удельный расход материала (расход материала в расчете на единицу мощности), тогда общий расход материала всеми эксплуатируемыми установками может быть определен следующим образом:

$$(16) G_i^j(t) = \int_{-\infty}^t g_i^j(t', t-t') \frac{dN_i^j(t')}{dt'} dt'.$$

В зависимости от способа замыкания уравнений связей и задания критерия качества описанный подход может быть использован для решения различного класса задач. Если необходимо определить показатели развивающихся систем ЯЭ, такие как динамика расхода природного урана, потребности в мощностях предприятий топливного цикла и др. по заданной структуре ЯЭ, подход становится эквивалентным имитационному моделированию. Однако то обстоятельство, что в модели могут быть учтены внутрисистемные связи и ограничения, позволяет освободить исследователя от необходимости постоянного наблюдения за их соблюдением.

Если задан целевой функционал, например, общий расход природного урана, время нахождения вторичных делящихся материалов на складе, полные приведенные затраты и др., модель приводит к задаче оптимального управления. Наиболее эффективным способом решения представляется сведение ее к задаче математического программирования. Это связано с тем, что алгоритмы математического программирования эффективно справляются с ограничивающими неравенствами, наложенными как на переменные уравнений, так и на управляющие параметры.

Теоретическая ценность описанного подхода заключается в том, что он позволяет количественно учесть ряд факторов, не нашедших адекватного отражения в известных моделях системного анализа развивающейся ЯЭ. К их числу следует отнести возможность одновременного описания как неравновесного, так и равновесного этапов развития ЯЭ (по так называемым «равновесным траекториям»), учета ограничений на текущее развитие

ЯЭ из будущего (так называемые «эффекты последействия»). Также следует указать на наличие механизма выбора между альтернативными вариантами, что позволяет решать задачи в оптимизационной постановке, а также на возможность учета нелинейных ограничений, возможность определения потенциала разнообразных технологических платформ и установления взаимосвязей между внешними факторами и внутренними параметрами системы ЯЭ, позволяющими определить их наиболее целесообразные значения. Будучи объединенный с методом исследования пространства параметров он может быть использован для проведения многокритериальной оптимизации.

Описанный подход является фактически методом конструирования системы уравнений, описывающих функционирование системы ЯЭ. В зависимости от постановки конкретной задачи и сделанных предположений относительно структуры ЯЭ и особенностей ее ЯТЦ, на основе описанных соотношений может быть подготовлена модель развивающейся системы ЯЭ.

2.2. МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ ПРОСТРАНСТВА ПАРАМЕТРОВ

Метод исследования пространства параметров предложен И.М. Соболев и Р.Б. Статниковым, которые показали его широкие возможности для решения инженерных оптимизационных задач и задач оптимального управления [10, 16, 17]. Метод предназначен для решения многокритериальных задач нелинейного программирования и основан на идеи случайного поиска, где в качестве случайных чисел используются так называемые равномерно-распределенные последовательности.

Метод исследования пространства параметров состоит из следующих этапов (рис. 2):

- генерация набора пробных точек, удовлетворяющих заданной системе уравнений и системе ограничений;
- составление таблиц испытаний (набор рассчитанных значений критериев для заданного набора пробных точек);
- выбор критериальных ограничений и отбор решений, удовлетворяющим им;
- проверка разрешимости задачи и формирование множества эффективных решений.

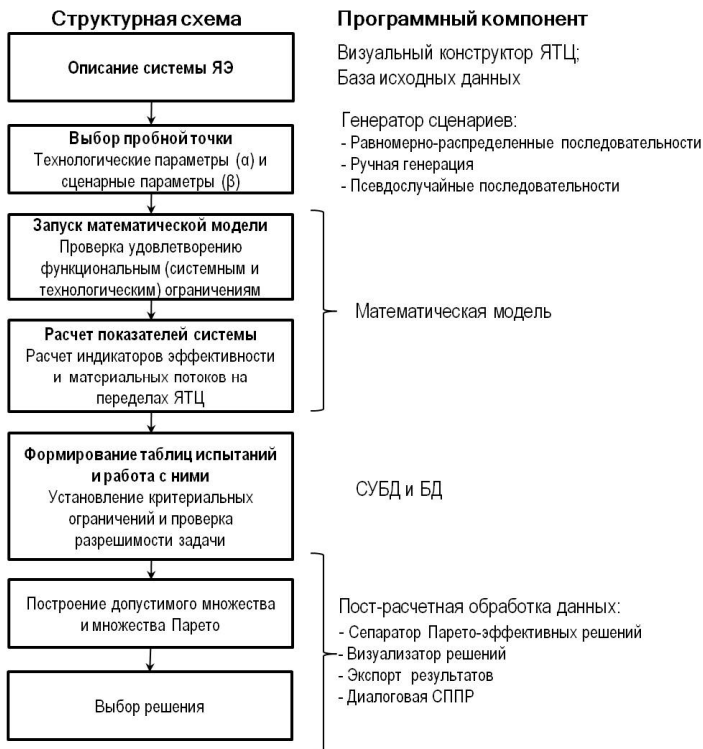


Рис. 2. Схема метода и соответствующие программные компоненты

Предположим, что имеется математическая модель системы ЯЭ, с помощью которой можно вычислять любые ее характеристики:

$$(17) \Psi(\vec{N}, \vec{N}_0, \vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 0.$$

Под $\Psi(\vec{N}, \vec{N}_0, \vec{\alpha}, \vec{\beta})$ понимается система уравнений, сконструированная на основе описанного в предыдущем разделе подхода.

Пусть исследуемая система зависит от $r + s$ варьируемых параметров $\alpha_1, \dots, \alpha_s; \beta_1, \dots, \beta_s$, которые можно считать точкой в $(r + s)$ -мерном пространстве. В роли α_j в системе ЯЭ выступают параметры реакторных установок и объектов ЯТЦ, в роли

β_j - системные показатели (доли реакторов в структуре ЯЭ, доля конкретного типа топлива в реакторе, доля перерабатываемого ОЯТ и пр.).

Различают три типа ограничений - параметрические, функциональные и критериальные. Параметрические ограничения имеют вид

$$(18) \alpha_j' \leq \alpha_j \leq \alpha_j'', j = 1, \dots, r, \beta_j' \leq \beta_j \leq \beta_j'', j = 1, \dots, s.$$

Функциональные зависимости $\varphi_l(\alpha, \beta)$ и ограничения на них можно записать так:

$$(19) c_l' \leq \varphi_l(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) \leq c_l'', l = 1, \dots, t,$$

где c_l' и c_l'' – ограничения, которые могут быть заданы априори (например, отражающие нормативные требования).

В качестве индикаторов эффективности (критериев) могут выступать суммарные приведенные затраты, индикаторы риска несанкционированного распространения, объемы отходов и т.д. Эти критерии $f_v(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$, $v = 1, \dots, k$, требуется минимизировать.

В таблице 1 представлены некоторые из возможных критериев, отражающих представления экспертов об эффективности функционирования системы ЯЭ по каждой из проблемных областей, и которые используются в настоящее время в рамках крупнейших международных проектов по системно-аналитическим и прогнозным исследованиям в обоснование приоритетов развития ЯЭ. Очевидно, что данный список может быть расширен, для того чтобы высветить иные аспекты эффективности функционирования системы ЯЭ.

Каждый из критериев может быть оценен по следующей общей формуле, параметры которой определяются в соответствии с содержанием критерия:

$$f = \int_{t_0}^t \sum_{i=1}^N w_i(t) \cdot f_i(t) dt, \text{ где } N - \text{ количество}$$

включаемых в рассмотрение элементов; $f_i(t)$ – годовые материальные потоки или производственные мощности ЯТЦ; $w_i(t)$ – удельный вклад в значение критерия от соответствующих годовых материальных потоков или производственных мощностей.

Таблица 1. Возможные критерии

Область	Критерий
Экономика	<ul style="list-style-type: none"> • полные приведенные затраты
Ресурсы	<ul style="list-style-type: none"> • общее потребление ресурсов • объемы годового потребления
Обращение с ОЯТ	<ul style="list-style-type: none"> • суммарные объемы ОЯТ
Обращение с РАО	<ul style="list-style-type: none"> • интегральная наработка минорных акти- нидов • интегральная радиотоксичность отходов
Нераспространение	<ul style="list-style-type: none"> • количество делящихся материалов в ЯТЦ • мощности ЯТЦ по производству делящих- ся материалов • время нахождения материалов на складе

Следует отметить, что в зависимости от постановки конкретной задачи необходимо выбрать определенный набор критериев, в соответствии с которыми будет проводиться многокритериальная оптимизация. В разделе 3 качественно описаны и представлены результаты решения с использованием разработанного инструментария трех различных задач (задача векторной идентификации, задача перспективного планирования и задача поиска сбалансированных по различным критериям структур системы ЯЭ).

Для того чтобы исключить из рассмотрения варианты, для которых значения отдельных критериев оказываются неудовлетворительными, необходимо ввести критериальные ограничения:

$$(20) f'_v \leq f_v(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) \leq f''_v, v = 1, \dots, k.$$

Разница между критериальными и функциональными ограничениями состоит в том, что значения первых, как правило, назначаются в процессе решения задачи и многократно пересматриваются. Поэтому сформулировать значения критериальных ограничений до решения задачи не возможно. Перечисленные ограничения выделяют допустимое множество в пространстве решений.

Основная задача многокритериальной оптимизации заключается в поиске подмножества множества допустимых решений (называемого множеством Парето), для которого совокупность векторов из допустимого множества нельзя одновременно улучшить по всем критериям качества. Из этого подмножества эксперт и определяет, в конечном счете, окончательное решение. Разработанная методика позволяет проводить аппроксимацию множества Парето в случае решения многокритериальных задач.

3. Краткое описание программной системы MEDNES

Описанный интегрированный подход реализован в виде программного комплекса *MEDNES* (*Multi-criteria Evaluator of Developing Nuclear Energy Systems*). *MEDNES* предназначен для решения многокритериальных задач: оптимизации структуры, идентификации параметров, управления и др. *MEDNES* предполагает построение допустимого множества решений в процессе интерактивной работы эксперта с системой. Для этого в *MEDNES* имеется возможность исследования зависимостей критериев от параметров, критериев от критериев, коррекции ограничений [4].

Предусмотрена возможность установки различных генераторов пробных точек. В настоящий момент реализованы генераторы равномерно-распределенных последовательностей Холтона, Соболя, Фора. Также могут быть использованы стандартные датчики псевдослучайных чисел и равномерные последовательности.

Пользователь также имеет возможность в диалоговом режиме формировать набор критериев эффективности, имеющих в общем случае нелинейный вид, добавлять дополнительные расчетные точки для уточнения решения в определенной области, интерактивного формирования и визуального отображения структуры исследуемого ЯТЦ (рис. 3).

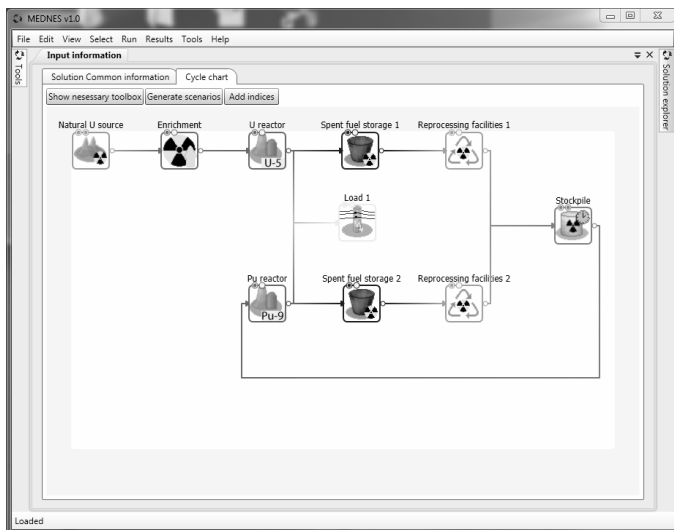


Рис. 3. Интерактивный визуализатор ЯТЦ

Наиболее предпочтительное решение эксперт выбирает на основе анализа допустимого множества и множества Парето. *MEDNES* включает в себя следующие средства анализа: таблицы испытаний, допустимые и Парето-оптимальные решения и вектора, вектора, не удовлетворившие функциональным ограничениям; зависимости «критерии-параметры» и «критерии-критерии», отражающие чувствительность критериев к параметрам и зависимости критериев от критериев, а также интерактивные карты принятия решений. Поскольку для решения многокритериальных задач с высокой размерностью вектора параметров требуется много компьютерного времени, предусмотрена возможность работы *MEDNES* в параллельном режиме.

В качестве основного языка программирования выбран язык программирования *C#*, сочетающий объектно-ориентированные и аспектно-ориентированные концепции и разработанный в 1998–2001 гг. *Microsoft* как основной язык разработки приложений для платформы *Microsoft.NET* [14]. Для хранения данных о проекте, связках внутри программы, а также для хранения схем представления, генерации и расчета схемы

используется формат *XML*. Основное хранилище данных реализовано с помощью базы данных *SQL* (*SQLite* или *MS SQL*) [7].

В заключение данного раздела коротко остановимся на скорости проведения расчетов с использованием разработанной программной системы. На компьютере с процессором *AMD Phenom X4 945 3,00 GHz* расчет 1000 сценариев модели развивающейся двухкомпонентной системы ЯЭ, состоящей из тепловых и быстрых реакторов, включающей в себя расчет балансов в ЯТЦ и трех критериев эффективности, занимает 19,3 сек. При этом $\approx 76\%$ сценариев не удовлетворяет системным ограничениям, а из оставшихся $\approx 10\%$ удовлетворяют условию Парето-оптимальности.

4. Пример использования разработанной программной системы

С использованием разработанного инструментария проведен ряд исследований по многокритериальной оценке эффективности структур ЯЭ на национальном и глобальном уровнях, что позволяет найти разумные компромиссы между конфликтующими системными факторами и согласованные стратегии развития [2, 3, 12].

4.1. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ВЕКТОРНОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ

На основе информации, доступной из авторитетных международных источников по ресурсам, добыче, производству, потреблению, импорту и экспорту основных компонентов ядерного топлива, а также предыстории ввода в эксплуатацию и вывода из нее энергетических реакторов и предприятий ЯТЦ, решена задача векторной идентификации¹ и проведено реконструирование ситуации в ЯЭ в глобальном и региональном разрезах по состоянию на 2005 г. и произведен прогнозный анализ развития событий на среднесрочную перспективу до 2030 г. в предположении сохранения современных тенденций развития.

¹ Под решением задачи векторной идентификации понимается поиск таких параметров модели, для которых наблюдается соответствие исследуемой математической модели реальному объекту, оцениваемому по множеству критериев близости [10].

В модель глобального ЯТЦ включены 7 типов реакторов, промышленно эксплуатирующихся в настоящий момент в мире: *AGR*, Магнокс, *PWR*, *BWR*, *CANDU*, ВВЭР, РБМК. Для реакторов типа *PWR*, *BWR* учтена возможность использования смешенного уран-оксидного топлива (1/3 загрузки *MOX*-топливом активных зон реакторов, содержащих 7% плутония). В рассмотрение включены основные переделы ЯТЦ: добыча, конверсия, обогащение урана, изготовление топлива, хранение ОЯТ (приреакторное и централизованное), переработка ОЯТ.

В качестве критериев решения задачи векторной идентификации использовались годовая наработка ОЯТ и плутония, годовые потребности в услугах по обогащению и потребление природного урана (для 2005 г.), а также интегральное количество ОЯТ и плутония на складах в 2005 г.

На основе оценки степени близости данных величин данным, опубликованным в открытых международных источниках, отбирались те значения параметров системы ЯЭ (среднее обогащение и выгорание топлива для каждого типа реакторов, доля ^{235}U в отвалах обогатительных предприятий, доля перерабатываемого ОЯТ), для которых наблюдалось относительное отклонение, не превышающее 10%.

Для определенных значений параметров системы и наиболее вероятных сценариев развития определен перспективный спрос и предложение на услуги по обогащению урана, хранению ОЯТ и плутония в глобальном и региональном масштабе при условии сохранения современного формата предоставления этих услуг ЯТЦ [3].

Было показано, что наблюдается приближение к предельным производственным возможностям по наиболее критическим сегментам ЯТЦ фактически при любом варианте развития ЯЭ и необходимость существенного наращивания производственных мощностей ЯТЦ в случае интенсивного развития.

Снятие существующих коммерческих и политических ограничений на оказание услуг ЯТЦ позволит отдалить момент наступления дефицита промышленных мощностей ЯТЦ в регионах на 5–10 лет. Поэтому, как временная мера, организация глобального ядерно-энергетического рынка представляется весьма эффективной. Однако без существенного наращивания

промышленных мощностей ЯТЦ говорить о достаточности имеющейся инфраструктуры для обеспечения развития ЯЭ в перспективе нельзя. Проведенные оценки показывают, что после 2015 г. дополнительные мощности услуг по обогащению природного урана, которые должны быть введены, составляют порядка 30 млн.кг единиц разделительных работ (ЕРР) (рис. 4). Потребности в емкостях промежуточных хранилищ ОЯТ составляют порядка 150 тыс.т тяжелых металлов (тм) (рис. 5).

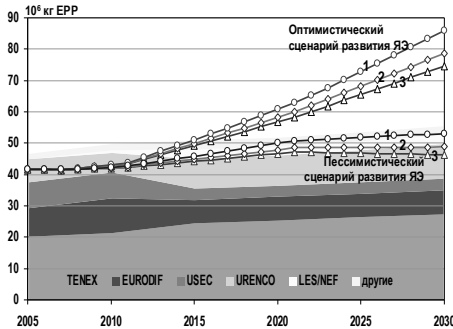


Рис. 4. Спрос и предложение на услуги по обогащению урана (номинальная мощность обогатительных предприятий)

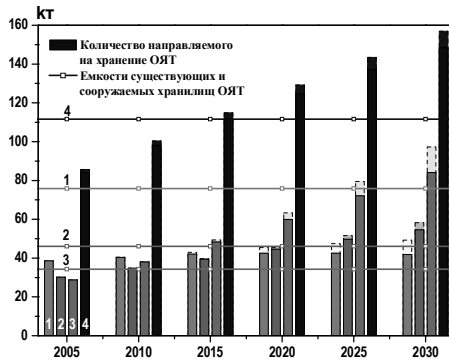


Рис. 5. Спрос и предложение на услуги по хранению ОЯТ по регионам: 1 – страны западной Европы, 2 – страны Восточной Европы, 3 – страны Азии и Африки, 4 – страны Латинской и Северной Америки

4.2. ОЦЕНКА ПРЕДЕЛЬНЫХ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ВОЗМОЖНОСТЕЙ ЯЭ НА БАЗЕ РАЗЛИЧНЫХ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПЛАТФОРМ

Определение предельно допустимых характеристик системы ЯЭ, обеспечивающих данный темп развития, является одной из задач долгосрочного прогнозирования, в частности, поиска наиболее целесообразных структурных характеристик ЯЭ и анализа взаимосвязи различных типов реакторов в развитии (так называемые «реакторные стратегии»). В этом случае опираться на формальные методы поиска оптимальных решений в подобных задачах, основываясь на известном критерии и заданных системных ограничениях, можно в меньшей степени, чем в задачах перспективного планирования, в силу большой неопределенности будущих условий развития [6]. В то же время одной из проблем, присущих равновесным моделям, является игнорирование начального и переходного этапов развития ЯЭ, когда еще существенны исходные условия развития [11].

Основываясь на описанной технике оказывается возможным учесть в равной степени как начальные условия развития, так и системные ограничения на переходном этапе развития ЯЭ, т.е. уйти, соответственно, от тех предположений, на которых основываются равновесные модели, и проследить, в конечном счете, переход на равновесную траекторию развития.

В работе [2] представлены оценки временных и мощностных пределов роста однокомпонентной и двухкомпонентной ЯЭ с различными типами тепловых и быстрых реакторов в зависимости от динамики изменения потребностей в ЯЭ, стратегии обращения с накопившимся плутонием и предыстории развития ЯЭ, а также выявлены факторы, способствующие расширению пределов.

В модель ЯТЦ включены тепловые и быстрые (как с, так и без расширенного воспроизводства топлива) реакторы. Тепловые реакторы работают на урановом топливе, быстрые – на смешанном уран-оксидном топливе. Из переделов ЯТЦ в рассмотрение включены добыча урана, изготовление топлива, хранение и переработка ОЯТ.

В качестве критериев решения данной задачи использовались минимизация времени нахождения выделенного плутония

на складе (требование, обусловленное необходимостью снижения рисков хищения ядерных материалов) и максимизация времени потребления природного урана (требование эффективного использования ресурсов): $T_{Pu} \rightarrow \min$, $T_U \rightarrow \max$.

Оцененные в соответствии с указанными критериями предельные возможности однокомпонентной и двухкомпонентной ЯЭ с различными типами тепловых и быстрых реакторов в зависимости от динамики изменения потребностей в ЯЭ представлены на рис. 6, 7.

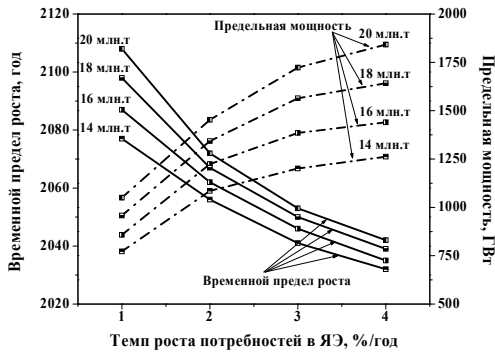


Рис. 6. Предельные возможности ЯЭ на тепловых реакторах в зависимости от запасов природного урана и темпов роста ЯЭ

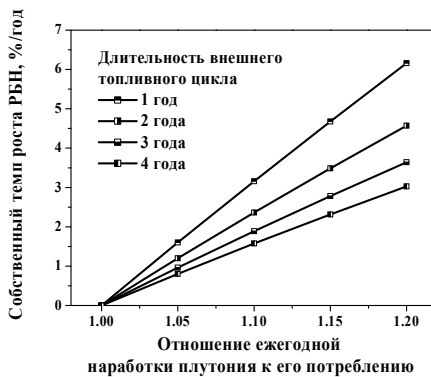


Рис. 7. Предельные темпы роста ЯЭ быстрыми реакторами с расширенным воспроизводством топлива

4.3. МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫЙ СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ СТРУКТУР ЯЭ

Ядерно-энергетические системы должны отвечать следующим основополагающим требованиям: быть ресурсообеспеченными и малоотходными в долгосрочной перспективе; оставаться экономически эффективными; поддерживать необходимый уровень безопасности и надежности; обеспечивать устойчивость ЯЭ в плане нераспространения ядерного оружия и надежную физическую защиту делящихся материалов [12].

Одновременное достижение оптимального значения нескольких показателей, как правило, неосуществимо. Выходом из такого рода затруднений является реализация требования поддерживать ряд показателей на уровне не ниже приемлемого, а выбранный показатель устремить к своему экстремальному значению. Одним из подходов поиска эффективных решений является метод критериальных ограничений, представляющий собой универсальный метод, справедливый как для задач с выпуклыми, так и невыпуклыми множествами достижимости. Основная идея метода заключается в том, что значения всех критериев, кроме одного, ограничиваются и находится оптимум (в данном случае минимум) единственного выделенного критерия.

Ограничивающие уровни являются параметрами задачи. Придавая им всевозможные значения из диапазонов от абсолютного минимума до абсолютного максимума соответствующего показателя на исходном множестве допустимости можно получить все эффективные решения.

Данный подход использовался для оптимизации структуры глобальной ЯЭ с учетом региональных особенностей и наличием в ее структуре быстрых реакторов в замкнутом U-Pu-Th топливном цикле. В качестве критерия оптимизации использовались полные приведенные затраты. В качестве показателей, на которые наложены ограничения и определяющие, в конечном счете, выбор единственного решения из набора неуплучшаемых, выбраны доля быстрых и тяжеловодных реакторов, запасы природного урана, количество наработанного ОЯТ и плутония.

Результаты работы показывают, что наиболее приемлемым решением, которое удовлетворяет критерию минимума приве-

денных системных затрат и одновременно удовлетворяет ограничениям по запасам природного урана, оценке перспектив рынка технологий тепловых реакторов и требованию к нераспространению технологии переработки ОЯТ, является переход к замкнутому U-Pu-Th топливному циклу.

Также выявлена сложность неограниченно долго, а при определенном наборе реакторных технологий и невозможность удовлетворять совокупности ограничений, отражающих системные требования к ЯЭ, принимая во внимание региональные ограничения. С учетом этого типа системных ограничений структура ЯЭ становится чрезвычайно чувствительной к набору реакторных технологий и теряет возможность подстраиваться под изменяющие внешние условия, удовлетворяя при этом набору противоречащих системных ограничений. В такой системе каждая технология играет важную роль, и ее исчезновение ведет к отсутствию оптимального решения при данном наборе ограничений.

В то же время система должна оставаться достаточно гибкой, чтобы приспособляться под изменяющиеся внешние условия, удовлетворяя при этом набору системных ограничений. В такой системе для балансировки противоречащих факторов представляется целесообразным внедрение специализированных многофункциональных реакторных установок, задачи которых должны определяться в зависимости от особенностей этапа развития.

5. Заключение

Разработанная методика позволяет учесть нелинейные ограничения и нелинейность функционалов относительно переменных модели, проводить аппроксимацию множества Парето в случае решения многокритериальных задач. Наличие внутреннего механизма выбора между альтернативными вариантами развития позволяет выявлять наиболее эффективные направления, а динамический характер модели дает возможность исследовать переход в асимптотические сценарии развития.

Разработанный программный инструментарий позволяет решать задачи оптимизации структуры ЯЭ в многокритериаль-

ной постановке, что дает возможность осуществить поиск компромиссов между конфликтующими системными факторами, определяющими развитие ЯЭ, провести с использованием единого расчетного инструментария сравнительного многокритериального анализа вариантов развития ЯЭ с учетом неравновесной динамики развития, особенностей структуры и организации ЯТЦ и наиболее значимых системных ограничений.

Работа выполнена при поддержке гранта Президента Российской Федерации МК-6046.2012.8.

Литература

1. АНДРИАНОВ А.А. *Системные исследования перспектив развития атомной энергетики: текущее состояние и тенденции* // Бюллетень «Новости мирового атомного рынка». – 2010. – №7 – С. 3–11.
2. АНДРИАНОВ А.А. *Имитационно-динамический подход к моделированию развивающихся ядерно-энергетических систем* // Труды III Международной конференции «Математические идеи П.Л. Чебышёва и их приложение к современным проблемам естествознания», Обнинск: ИАТЭ, 2008. – С. 66–71.
3. АНДРИАНОВ А.А., КОРОВИН Ю.А., МУРОГОВ В.М. *Ядерная энергетика – основа энергетической безопасности в будущем: технико-экономические и социально-политические проблемы развития энергетики.* – М.: Бюро Квантум, 2010. – 304 с.
4. АНДРИАНОВ А.А., СВЕТЛИЧНЫЙ Л.И. *Программный комплекс MEDNES для многокритериальной оценки эффективности структур ядерной энергетики* // XII Безопасность АЭС и подготовка кадров. Тезисы докладов. Т.2., 4-7 октября 2011 г. – С. 139–141.
5. АНДРИАНОВ А.А., ФЕСЕНКО Г.А. *Современные инструментальные средства прогнозирования развития ядерной энергетики. Учебное пособие.* – Обнинск: ИАТЭ, 2009. – 84 с.

6. БЕЛЕНЬКИЙ В.З., БЕЛОСТОЦКИЙ А.М. *Математическое моделирование развития ядерной энергетики*. – М.: Наука. 1979. – 160 с.
7. ГРОФФ Д., ВАЙНБЕРГ П., ОППЕЛЬ Э. *SQL: полный справочник*. – 3-е издание. – Вильямс, 2011. – 960 с.
8. МАК-ДОНАЛЬД М. *WPF: Windows Presentation Foundation в .NET 4.0 с примерами на C#* 2010. – Вильямс, 2011. – 1024 с.
9. МОИСЕЕВ Н.Н. *Математические задачи системного анализа*. – М.: Наука, 1981. – 486 с.
10. СОБОЛЬ И.М., СТАТНИКОВ Р.Б. *Выбор оптимальных параметров в задачах со многими критериями*. – М.: Дрофа, 2006. – 182 с.
11. ЧЕРНАВСКИЙ С.Я. *Системное прогнозирование ядерной энергетики: Теория и методы*. – М.: Наука. 1980. – 238 с.
12. ANDRIANOV A.A., KOROVIN YU.A., FEDOROVA E.V. *Multicriteria Optimization Software to Support Nuclear Energy System Studies // Proceedings of Global 2011, Makuhari Messe, Japan, December 11-15, 2011. Paper 357297*. – P. 1–7.
13. *Identification and Analysis of Critical Gaps in Nuclear Fuel Cycle Codes Required by the SINEMA Program // Nuclear Energy Research Initiative Project. Final Report. DOE FC07-07ID14839*. – 52 p.
14. *MSDN. Microsoft Development, Subscriptions, Resources, and More*. – URL: <http://msdn.microsoft.com>.
15. SILVENNOINEN P. *Nuclear Fuel Cycle Optimization: Methods and Modelling Techniques*. – New York: Pergamon Press, 1982. – 126 p.
16. STATNIKOV R.B., MATUSOV J.B. *Multicriteria analysis in Engineering*. – Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers, 2002. – 276 p.
17. STATNIKOV R.B. *Multicriteria Design. Optimization and Identification*. – Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers, 1999. – 203 p.

INTEGRATED APPROACH BASED ON SYSTEM DYNAMICS AND PARAMETER SPACE INVESTIGATION FOR MULTIOBJECTIVE OPTIMIZATION OF DEVELOPING NUCLEAR POWER SYSTEMS STRUCTURES

Andrey Andrianov, Obninsk Institute for Nuclear Power Engineering NRNU MEPhI, Obninsk, Ph.D., Associate Professor (andrianov@iate.obninsk.ru).

Ilya Kuptsov, Obninsk Institute for Nuclear Power Engineering NRNU MEPhI, Obninsk, Ph.D., Assistant Professor (kuptsov_ilia@list.ru).

Leonid Svetlichny Obninsk Institute for Nuclear Power Engineering NRNU MEPhI, Obninsk, student, (l.svetlichnyj @ yandex.ru).

Abstract: We describe an integrated approach and the software to solve the problem of a nuclear power system structure optimization in a multi-objective formulation. The approach is based on the system dynamics and the parameter space investigation. We also provide some examples of implementation of these tools for multi-objective optimization of nuclear power structures.

Keywords: nuclear fuel cycle, multi-criteria optimization, nuclear energy, software system, system dynamics, parameter space investigation.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии М. В. Губко

УДК 658.5.011 + 51-74

ББК Кстд1-6.02

ОЦЕНКА УСТОЙЧИВОСТИ ПРОИЗВОДСТВЕННОГО ПЛАНА С УЧЕТОМ СТОХАСТИЧНОСТИ РЕСУРСНЫХ ОГРАНИЧЕНИЙ¹

Елисеев А. С.², Гитман М. Б.³, Суханцев С. С.⁴
(ФГБОУ ВПО «Пермский национальный исследовательский
политехнический университет», Пермь)

Процесс выполнения производственного плана рассматривается в особом пространстве состояний с использованием введенного определения вероятностной устойчивости плана. Результаты апробации предложенного подхода к оценке устойчивости производственного плана исследуются с применением имитационного моделирования.

Ключевые слова: устойчивость производственного плана, вероятностная устойчивость.

1. Введение

Режим работы любого производственного предприятия определяется производственным планом (ПП). В связи с этим

¹ Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект №10-08-00539-а), а также при государственной поддержке развития кооперации вузов и промышленных предприятий (договор с Минобрнауки России №13.G25.31.0093).

² Александр Сергеевич Елисеев, аспирант кафедры математического моделирования систем и процессов ПНИПУ (alexander.elyseev@gmail.com).

³ Михаил Борисович Гитман, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического моделирования систем и процессов ПНИПУ (gmb@matmod.pstu.ac.ru).

⁴ Сергей Станиславович Суханцев, аспирант кафедры математического моделирования систем и процессов ПНИПУ (s.suhantsev@gmail.com).

чрезвычайно важной является автоматизированная система управления предприятием (АСУП), способная формировать эффективный план. В настоящее время существует множество методов формирования планов для различных масштабных уровней с различными характеристиками [2, 10]. При этом помимо качественных характеристик плана существует еще одно особое свойство плана – его *устойчивость*, или способность быть выполненным, несмотря на различные внешние воздействия.

В реальном производстве возникают возмущения, связанные с различными ресурсными ограничениями, часто имеющие стохастический характер, например, несвоевременные поставки материалов, поломки оборудования, болезни работников и т.п. Отметим, что качественным характеристикам плана посвящено множество исследований [8, 9], однако устойчивости выполнения плана уделено недостаточно внимания. При этом неустойчивый план производства влечет за собой следующие негативные последствия: дополнительные издержки, связанные с оплатой сверхурочных работ, выплатой неустоек по контрактам; разлаженность (рассогласованность, подверженность сбоям) режима работы предприятия, влекущая повышение уровня брака; уменьшение лояльности клиентов, что негативным образом сказывается на конкурентоспособности компании; общее снижение эффективности работы предприятия, и, как следствие, снижение уровня прибыли и т.п.

Для повышения эффективности АСУП необходимо повышение устойчивости применяемых ПП. Таким образом, возникает следующая задача автоматизации производственного планирования: разработать методику оценки устойчивости существующего ПП и выделить параметры производственных планов, влияющие на степень их устойчивости.

2. Существующие подходы к повышению устойчивости планирования

Производственный план является результатом некоторого алгоритма его формирования. Для повышения устойчивости

результатирующего ПП необходима настройка параметров алгоритма, которые могут влиять на устойчивость плана.

Примером такого параметра является *параметр опережения производства*, или *параметр опережения запуска* τ , который часто применяется на практике [3, 4]. Он определяет некоторый временной интервал, а все операции плана планируются раньше на τ . При этом создается некая «подушка безопасности» перед изначальной датой отгрузки, в которой можно закончить выполнение всех требуемых технологических операций в случае возникновения каких-либо непредвиденных ситуаций. Действительно, если планировать выпуск изделия значительно раньше даты отгрузки, то с большой вероятностью изделие будет изготовлено вовремя, что повышает вероятность выполнения всего плана и, следовательно, увеличивает его устойчивость. Однако подобный подход влечет за собой повышение расходов на хранение запасов продукции и должен учитывать ограничения на вместимость складских помещений [7]. Еще одним недостатком этого подхода является то, что параметр τ обычно задается «из практических соображений» для каждой номенклатурной единицы без учета узких мест производственной схемы и какого-либо обоснования.

Рассмотрим подход, предоставляющий возможность более аргументированного выбора значений параметров, определяющих производственный план.

3. Математическая модель процесса выполнения производственного плана

Рассмотрим более детально процесс выполнения ПП. Так как в каждый момент времени он находится в некотором состоянии, то весь производственный план можно рассматривать как динамическую систему с дискретным временем, а процесс его выполнения как переход от одного состояния системы к другому. Для описания ПП введем в рассмотрение метрическое фазовое пространство (ФП), каждая точка которого соответствует состоянию системы в определенный момент времени t :

$$П = (X, \rho)$$

$$(1) \quad x^t = (x_1^t, \dots, x_n^t) \in X,$$

где

X – множество элементов фазового пространства Π ;

x^t – элемент множества X , определяющий состояние ПП в момент времени t ;

ρ – метрика пространства Π , определяющая расстояние между состояниями системы;

x_1^t, \dots, x_n^t – компоненты элемента x множества X , значениями которых является объем произведенных номенклатурных единиц типа i , $i = 1, \dots, n$, из расширенной матрицы главного календарного производственного плана (ГКПП) [3] на момент времени t ; отметим, что $x_i^t \in R$ для непрерывного производства, и $x_i^t \in N$ для дискретного;

n – общее число номенклатурных типов входящих в ГКПП;

t – момент времени планового периода.

Теперь процесс выполнения ПП представляет собой траекторию в ФП, каждая точка которого определяет состояние производственной системы в некоторый момент времени и имеет смысл объема изготовленной продукции по каждому номенклатурному типу, входящему в план.

В качестве метрики ρ пространства (1) может быть использована любая функция, характеризующая расстояние между двумя состояниями плана в определенный момент времени. Эта функция количественно показывает, на сколько одно состояние плана отличается от другого. С формальной точки зрения, метрические функции являются эквивалентными и взаимозаменяемыми [1], но на практике определенный вид используемых метрик является предпочтительнее. Так, например, евклидова метрика

$$\rho(x^p, x^q) = \sqrt{(x_1^p - x_1^q)^2 + \dots + (x_n^p - x_n^q)^2}$$

будет менее предпочтительной в сравнении с метрикой

$$\rho(x^p, x^q) = \max \{ |x_1^p - x_1^q|, \dots, |x_n^p - x_n^q| \}$$

так как во втором варианте приобретает четкий физический смысл, означающий максимальное отклонение планов по всем номенклатурным группам. Для обозначения приоритетов предпочтения могут быть использованы взвешенные метрики

$$\rho(x^p, x^q) = \max \{k_1 |x_1^p - x_1^q|, \dots, k_n |x_n^p - x_n^q|\},$$

коэффициенты k_i которых определяют важность соответствующих номенклатурных типов.

На рис. 1 представлен пример ФП плана, состоящего из одной номенклатурной группы X_1 . Точки на графике означают, что в момент времени t_1 должно быть изготовлено x_{11} номенклатурных единиц, в момент времени t_2 должно быть изготовлено x_{12} номенклатурных единиц и т.д. Момент времени t_3 соответствует концу планового периода.

Будем называть план, изображенный на рис. 1, *невозмущенным*. Однако в реальном производстве неизбежны внешние воздействия различной природы, которые могут заставить план изменить траекторию выполнения задания. Пусть в определенный момент времени t_2 произошло некоторое возмущение, и вместо запланированных x_{13} номенклатурных единиц было произведено $x_{13}^* < x_{13}$ (рис. 2). Такой план производства будем называть *возмущенным*.

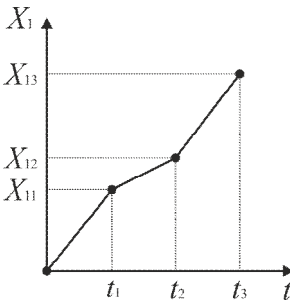


Рис. 1. План производства с единственной номенклатурной группой

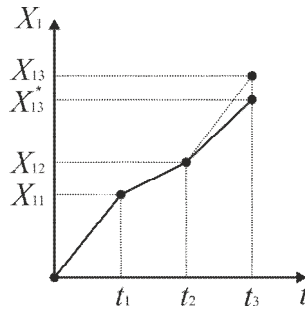


Рис. 2. Возмущенный план производства

План производства X , рассматриваемый в пространстве состояний вида (1), будем называть *устойчивым по вероятности*, если для любого числа операций в плане в конечный момент времени выполняется неравенство

$$(2) \quad P(\|x - x^*\| < \varepsilon) > P^{**},$$

где P^{**} – допустимая вероятность отклонения возмущенного плана от запланированного; $\|x - x^*\|$ – отклонение конечного состояния возмущенного плана от конечного состояния невозмущенного по соответствующей норме; ε – максимальное отклонение возмущенного плана x^* от запланированного плана x , имеющее размерность расстояния между состояниями производственной системы в ее фазовом пространстве.

Параметры P^{**} и ε задаются экспертами и отражают требования конкретного предприятия к устойчивости плана X .

Введенное определение устойчивости ПП означает, что при любой вероятности возникновения возмущения в процессе выполнения на конечном временном шаге вероятность совпадения возмущенного и исходного планов в пределах допустимого отклонения будет допустимой, т.е. больше наперед заданной вероятности.

Отметим, что это определение устойчивости ПП является частным случаем определения, введенного в работе [5], которое также использовалось в работе [6] для анализа устойчивости выборочных систем контроля качества.

4. Применение методика

На основе предложенного математического описания процесса выполнения ПП и определения его устойчивости была предложена методика оценки вероятностной устойчивости производственного плана, позволяющая также оценить влияние параметров алгоритма планирования на устойчивость результирующего плана. На рис. 3 представлена структурная схема предложенного подхода:

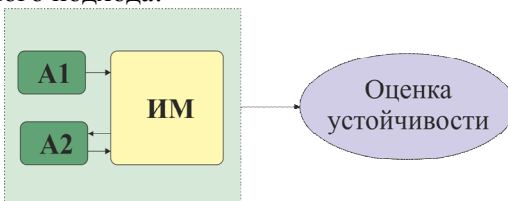


Рис. 3. Структурная схема методики оценки устойчивости ПП

A1 – алгоритм планирования, при помощи которого формируется ПП;

A2 – алгоритм перепланирования, используемый для исправления плана при возникновении возмущения;

ИМ – имитационная модель, реализующая виртуальное выполнение плана.

Суть предлагаемой методики сводится к следующему: путем имитационного моделирования накапливается статистика об успешности выполнения плана, составленного при помощи алгоритма **A1**. При возникновении возмущений применяется попытка исправить план с помощью алгоритма перепланирования **A2**. Весь процесс выполнения плана рассматривается в его фазовом пространстве (1). При достижении конца планового периода конечные состояния исходного и текущего плана сравниваются при помощи (2), на основе чего делается вывод об успешности или провале выполнения плана. После накопления достаточного объема статистических данных можно сделать вывод о вероятностной устойчивости исследуемого плана.

Если алгоритм **A1** не допускает параметризации, то результаты анализа вероятностной устойчивости ПП отражают устойчивость самого алгоритма. Если же в алгоритме планирования используются параметры, то результаты применения методики отражают влияние параметров на устойчивость ПП. Таким образом, исследуя несколько ПП, составленных с различным набором параметров, можно выбрать набор параметров, оптимальный с точки зрения устойчивости.

Всю процедуру анализа можно разделить на следующие этапы:

- формирование ПП с использованием алгоритма планирования **A1**;

- имитационное моделирование процесса выполнения плана (**ИМ**) и накопление статистики;

- анализ статистических данных и вывод об устойчивости ПП.

В настоящее время использованы простейшие варианты алгоритмов перепланирования **A2** и имитационной модели **ИМ** (рис. 4 и рис. 5). Очевидно, что способ исправления плана после возникновения возмущения (т.е. способ, который реализует

алгоритм **A2**) может сильно влиять на устойчивость процесса выполнения плана. Разработанное программное обеспечение позволяет легко заменять любые компоненты структурной модели (рис. 3) на другие, более совершенные и эффективные. В контексте данной работы выбор алгоритма **A2** не принципиален, так как оказывает одинаковое воздействие при каждом запуске численного эксперимента.

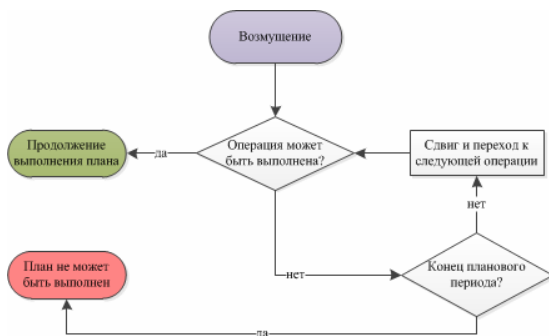


Рис. 4. Алгоритм **A2**

Предложенная методика была использована для исследования устойчивости производственных планов, составленных на ОАО «Мотовилихинские заводы» (г. Пермь).

В качестве алгоритма планирования **A1** был выбран алгоритм комплексного оценивания [3], позволяющий формировать оптимальный производственный план с точки зрения нечеткого обобщенного критерия оптимальности, включающего набор частных критериев со степенью их значимости.

Под частными критериями оптимальности понимаются следующие характеристики ПП:

- *комфортность производства*, означающая скомпонованность плана таким образом, что операции одного вида запускаются в производство как можно большими партиями, уменьшая число переналадок оборудования между операциями;
- *равномерность производства*, означающая распределение нагрузки на рабочие центры таким образом, чтобы их загрузка в течение планового периода изменялась постепенно, без резких перепадов;

– срок выполнения плана производства, подразумевающий минимизацию даты совершения последней операции заданного производственного плана;

– риск срыва производства, означающий такую скомпонованность плана, при которой операции планируются с использованием параметра опережения запуска t .

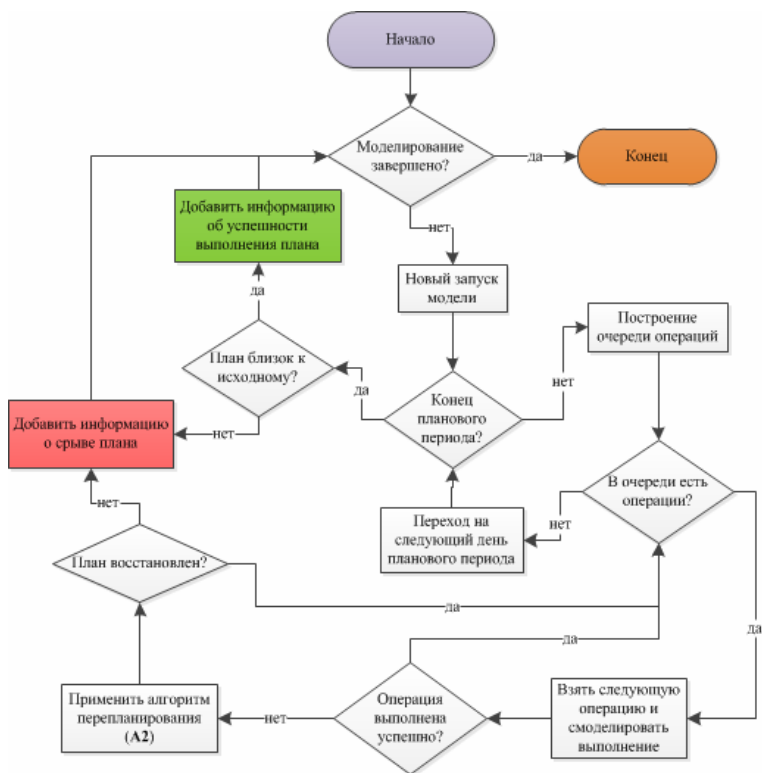


Рис. 5. Алгоритм ИМ

Математическую постановку, лежащую в основе алгоритма, а также его более подробное описание можно найти в [3, 4].

Отметим, что выбор алгоритма планирования **A1** также не является принципиальным, так как устойчивым является результат его использования. В качестве алгоритма можно использовать любой алгоритм планирования, допускающий параметри-

зацию, в частности, для выбора оптимального (с точки зрения устойчивости по вероятности) параметра опережения производства τ , который упоминался ранее. Алгоритм комплексного оценивания [3] выбран в связи с наличием параметров, способных влиять на устойчивость.

На **первом** этапе апробации методики был сформирован производственный план (план 1) с нечетким критерием оптимальности, ориентированным на минимальность риска срыва выполнения плана и план 2, ориентированный на минимальную длительность производства продукции (таблица 2).

В качестве исходных данных были взяты структура некоторого продукта (рис. 3), близкая к структуре реальной продукции, производимой на ОАО «Мотовилихинские заводы», и данные матрицы ГКПП (таблица 1).

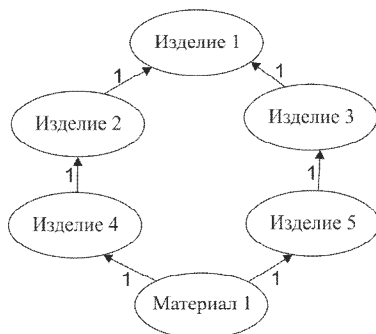


Рис. 3. Структура продукта

Иерархическая структура изделий (рис. 3) показывает зависимости между производимыми номенклатурными изделиями. Другими словами, для выполнения всех технологических операций при производстве одной единицы Изделия 1 необходимо из Материала 1 изготовить Изделия 4 и 5, из Изделия 4 – Изделие 2, из Изделия 5 – Изделие 3, а из совокупности Изделий 2 и 3 – Изделие 1.

В таблице 1 приведено наименование производимых изделий, которые должны быть произведены к указанной дате в указанном количестве.

Таблица 1. Данные ГКПП для формирования ПП

Номер изделия	Срок изготовления	Число
1	26.03.2012	100
2	28.03.2012	1000

Таблица 2. Комплексный критерий оптимизации

Критерий	Важность критерия	
	план 1	план 2
Комфортность производства	0,2	0,1
Равномерность производства	0,1	0,1
Минимальность длительности	0,1	0,6
Риск срыва производства	0,6	0,2

Выбранному рабочему центру задавалась вероятность поломки в интервале $[0, 1]$. Нулевая вероятность означает, что поломка рабочего центра никогда не произойдет. Соответственно, вероятность поломки, равная 1, означает, что поломка обязательно произойдет. В качестве метрики было использовано $\rho(x^p, x^q) = \max \{|x_1^p - x_1^q|, \dots, |x_n^p - x_n^q|\}$. Для каждого значения вероятности поломки было проведено порядка 1000 запусков вычислительного эксперимента. Расчет вероятности выполнения плана по формуле (2) при заданной вероятности возникновения неисправности представляет собой отношение числа успешно выполненных планов к общему числу «запусков» эксперимента. В реальном производстве вопрос минимального числа «запусков» плана, после которых можно делать вывод о вероятности успешного выполнения, может решаться экспертом.

Рассмотрим результаты моделирования для плана 1. На рис. 6 показан идеальный вариант выполнения этого плана (без внешних возмущений). На рис. 7 показан график выполнения возмущенного плана производства. Видно, что 16.03.2012 произошло возмущение – поломка оборудования. В связи с этим не было произведено необходимое число изделий 4. Однако в данном случае план был составлен таким образом, что поломка оборудования не привела к общему срыву плана производства.

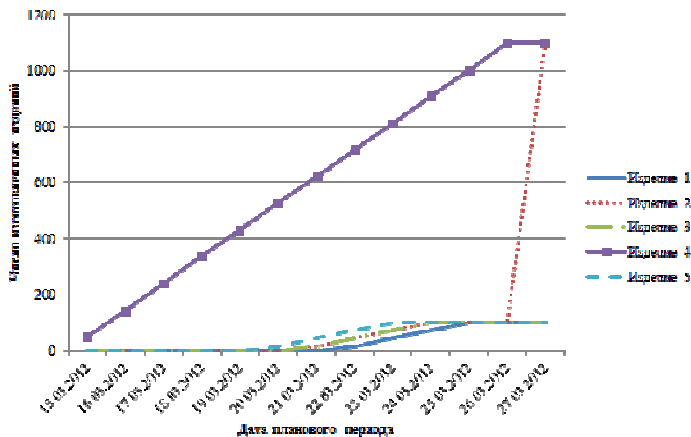


Рис. 6. Диаграмма выполнения невозмущенного плана

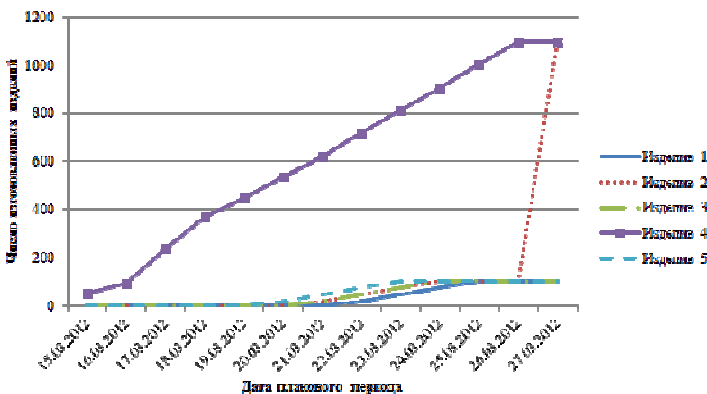


Рис. 7. Диаграмма выполнения возмущенного плана

На третьем этапе применения методики была проведена оценка устойчивости плана 1 на основе анализа полученной статистической информации.

На рис. 6 представлены результаты имитационного моделирования выполнения плана 1 с заданными вероятностями поломки рабочего центра.

На практике вероятность (или статистика) поломки некоторого рабочего центра в цехе известна. При реальном выполнении

нии производственного плана по графику на рис. 8 можно сделать вывод о том, с какой вероятностью план будет выполнен с учетом конкретной вероятности поломки рабочего центра.

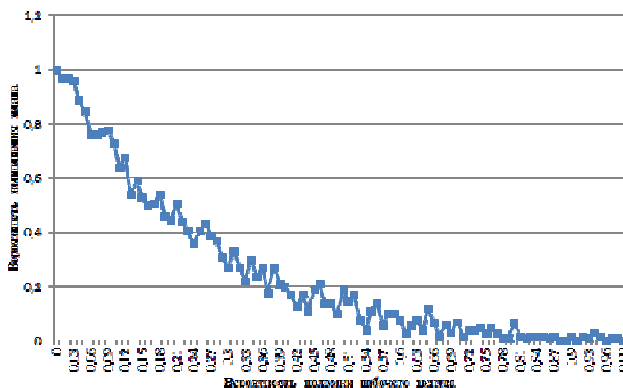


Рис. 8. Результаты моделирования выполнения ПП с заданной вероятностью поломки рабочего центра

Гибкость алгоритма [4] позволяет получать множество планов, оптимальных с точки зрения различных нечетких критериев. Очевидно, что устойчивость таких планов будет различной. В связи с этим вызывает интерес задача сравнения планов с точки зрения устойчивости по вероятности.

Для решения этой задачи, предложенная методика была применена для второго производственного плана (план 2), критерий оптимальности которого представлен в таблице 2. Основное отличие плана 2 от плана 1 в том, что в случае плана 2 для предприятия более приоритетным является сокращение срока выполнения плана.

На рис. 9 представлены результаты оценки устойчивости плана 1 и плана 2. Из графика видно, что план, минимизирующий время изготовления продукции (план 2) с максимально возможной близостью последовательных операций, является менее устойчивым по отношению к внешним возмущениям по сравнению с планом 1.

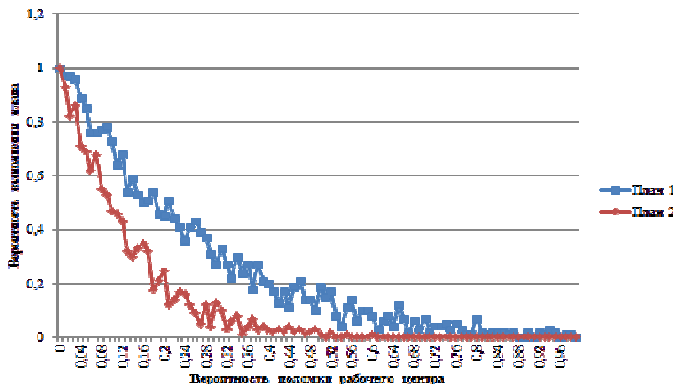


Рис. 9. Результаты моделирования выполнения двух ПП с различными критериями оптимальности

Аналогичным образом рассмотренная методика может быть использована для анализа любых параметров алгоритмов производственного планирования, используемых в АСУП, в частности для выбора оптимального (с точки зрения устойчивости по вероятности) параметра опережения производства τ , который упоминался в пункте 2.

5. Выводы

В работе предложена новая методика оценки устойчивости производственного плана с точки зрения вероятности его успешного выполнения. Приведена математическая модель процесса выполнения производственного плана, представлена постановка задачи оценки устойчивости, сформулировано определение устойчивого производственного плана.

Разработанный подход был применен для сравнения устойчивости двух производственных планов, составленных для различных нечетких критериев. Полученные результаты свидетельствуют о том, что представленная методика способна качественно характеризовать устойчивость производственного плана, и, как следствие, может быть использована для выбора лучшего, наиболее устойчивого.

В связи с тем, что для анализа устойчивости производственный план рассматривался в особом пространстве состояний, характеризующем процесс его выполнения с точки зрения объемов изготовленной продукции по каждой номенклатурной позиции, а других ограничений на производственную систему и процессы не накладывалось, то областью применения подхода можно считать производство, основанное на операционном планировании.

Использование предложенного подхода позволяет повысить эффективность работы АСУП с позиции улучшения устойчивости процесса выполнения производственного плана при различных частных критериях оптимальности.

Литература

1. БАРБАШИН Е.А. *Введение в теорию устойчивости* – М.: «Наука», 1967 – 223 с.
2. БЕРКУЛЬЦЕВ М.В. *Методы эвристического поиска в задачах планирования и управления* – М.: МАИ, 2000. – 48 с.
3. ВОЖАКОВ А.В., ГИТМАН М.Б. *Модель календарного планирования с нечеткими ограничениями* // Вестник Магнитогорского государственного технического университета им. Г.И. Носова. – 2008. – №4. – С. 79–82.
4. ВОЖАКОВ А.В., ГИТМАН М.Б., ФЕДОСЕЕВ С.А. *Комплексное оценивание при выборе оптимального плана производства на тактическом уровне с учетом нечетких критериев и ограничений* // Управление большими системами. – 2010. – №30. – С. 164–179.
5. ГИТМАН М.Б. *Введение в стохастическую оптимизацию*. – Уч. пособие. – Пермь: Изд. Перм. гос. техн. ун-та, 2000. – 55 с.
6. ЕЛИСЕЕВ А.С., ФЕДОСЕЕВ С.А., ГИТМАН М.Б. *К вопросу об устойчивости систем контроля качества на предприятии* // Вестник Магнитогорского государственного технического университета им. Г.И. Носова. – 2011. – №34. – С. 34–36.
7. РЫЖИКОВ Ю.И. *Теория очередей и управление запасами*. – СПб.: Питер, 2001. – 384 с.

8. ФЕДОСЕЕВ С.А., ГИТМАН М.Б., СТОЛБОВ В.Ю. *Математические модели управления качеством продукции на этапе планирования производства* // Проблемы управления. – 2011. – №4. – С. 60–67.
9. ALVAREZ-VALDES R., PARRENO F., TAMARIT J.M. *A tabu search algorithm for two-dimensional non-guillotine cutting problems* // European Journal of Operational Research. – 2007. – №183. – P. 1167–1182.
10. SABUNCUOGLU I., GOREN S. *Hedging production schedules against uncertainty in manufacturing environment with a review of robustness and stability research* // International Journal of Computer Integrated Manufacturing. – 2009. – Vol. 22, №2. – P. 138–157.

ESTIMATION OF STABILITY OF PRODUCTION PLAN UNDER STOCHASTIC RESOURCE CONSTRAINTS

Alexander Eliseev, Perm National Research Polytechnic University, Perm, post-graduate student (alexander.elyseev@gmail.com).

Mikhail Gitman, Perm National Research Polytechnic University, Perm, Doctor of Science, professor (gmb@matmod.pstu.ac.ru).

Sergey Suhancev, Perm National Research Polytechnic University, Perm, post-graduate student (s.suhantsev@gmail.com).

Abstract: We suggest the notion of production plan stability by probability and use it to study the process of production plan execution in a special state space. We also provide simulation results of testing the approach to estimate production plan stability.

Keywords: production plan stability, probabilistic stability.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии М. В. Губко

УДК 021.8 + 025.1
ББК 78.34

РЕШЕНИЕ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ЗАДАЧ ПРИ ХИМИЧЕСКИХ ПРЕВРАЩЕНИЯХ

Майков И. Л.¹, Зайченко В. М.²
(ФГБУН Объединенный Институт высоких
температур РАН, Москва)

Разработан алгоритм решения оптимизационных задач определения параметров химических превращений на основе метода Хука и Дживса, использующий одномерную минимизацию вдоль координатных направлений. Алгоритм включает два типа поиска – исследующий поиск и поиск по образцу с введением ограничений. Одномерная оптимизация проводится на основе алгоритма Брента. Для вычисления целевой функции решается система жестких дифференциальных уравнений с использованием алгоритм DIFSUB.

Ключевые слова: математическое моделирование, оптимизация, химическая кинетика, нелинейное программирование, методы поиска.

1. Введение

Необходимость вовлечения в энергобаланс местных топливно-энергетических ресурсов (торфа, низкосортных углей, растительных сельскохозяйственных отходов, отходов лесозаготовительной и деревообрабатывающей промышленности) сти-

¹ Игорь Леонидович Майков, доктор физико-математических наук, в.н.с. (maikov_i@mail.ru).

² Виктор Михайлович Зайченко, доктор технических наук, зав.лаб. (zaitch@oivtran.ru).

мулирует разработку установок и схем энергетического использования биоресурсов. Одно из наиболее перспективных направлений – термохимическая переработка растительного сырья в кондиционный энергетический газ (процессы газификации и пиролиза) [9]. Структурная схема такого энерготехнологического комплекса представлена на рис. 1. Добавление в схему блока торификации (*torrefaction*) позволяет наряду с основными продуктами комплекса (электроэнергия и тепло) получать *бу*-продукт – топливные пеллеты с улучшенными физико-механическими свойствами [11].

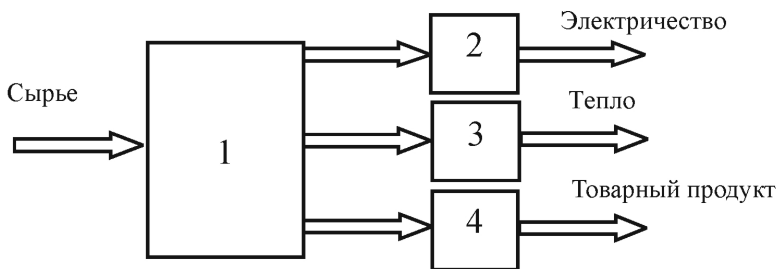


Рис. 1. Структурная схема энерготехнологического комплекса на растительных отходах: 1 – термохимический реактор; 2 – газопоршневая мини-ТЭЦ; 3 – котел с кипящим слоем; 4 – блок торификации

Очевидно, что оптимальный состав и характеристики компонентов комплекса зависят от многих факторов (в первую очередь от сырьевой базы) и могут быть достигнуты только в результате решения задачи многопараметрической оптимизации (примеры оптимизации и системы управления энергетического комплекса на основе газопоршневой мини-ТЭЦ приведены в [4]). Наряду с общей задачей оптимизации энерготехнологического комплекса возникают задачи оптимизации и управления отдельными блоками, основным из которых является термохимический реактор. Характерной особенностью термохимического реактора является наличие возмущающих параметров случайного характера, а именно, неизвестен точный компонентный состав сырья и имеются только некие усредненные характери-

стики, которые варьируют в широком диапазоне даже для определенного вида сырья. Кроме того, имеется тенденция изменения свойств во времени (например, торф при хранении изменяет свои свойства). В настоящее время существует большое количество работ, посвященных математическому моделированию термического разложения биомассы, в которых рассматриваются схемы превращения с различной степенью детализации (количества химических реакций). В результате решения обратной задачи (задачи оптимизации) по экспериментальным данным получают основные параметры процесса разложения конкретного вида биомассы. К сожалению, эти параметры не являются универсальными, и использование их для других видов биомассы и других режимов (например, темп нагрева) может привести к серьезным ошибкам в определении, например, времени процесса. Соответственно, построенная на таких параметрах система управления будет по крайней мере неэффективной.

Альтернативный способ построения системы управления состоит в том, что параметры химических реакций не являются постоянными величинами, а изменяются во времени (по длине реактора) согласно случайному характеру изменения состава сырья и, следовательно, протеканию процесса. То есть необходимо в каждый момент времени иметь распределение по длине реактора, например, оставшейся (непрореагировавшей) биомассы. Тогда, решая обратную задачу (оптимизационную задачу), можно получить параметры химических превращений, описывающих процесс в этот момент времени. И далее определить оптимальное воздействие на эту систему с целью перевода процесса в оптимальный режим (по выбранному критерию). Таким образом, алгоритм решения оптимизационной задачи для определения параметров процесса термического разложения нужно рассматривать как часть алгоритмов, включаемых в систему управления термохимического реактора, что накладывает жесткие условия на его быстродействие в связи с необходимостью многократного и быстрого решения локальных задач оптимизации.

Целью настоящей работы является построение эффективного алгоритма решения оптимизационной задачи для определения параметров термической переработки. В работе рассмотрены алгоритмы поиска [1, 9] (метод циклического покоординатного спуска и его модификации, метод Хука и Дживса, метод Розенброка). Выбор этих алгоритмов в качестве базовых для исследования продиктован возможностью включения в алгоритмы ограничений, а также особенностями построения этих алгоритмов, характерными для большинства алгоритмов поиска. Проведены численные расчеты типичной задачи оптимизации процесса термической деструкции.

2. Постановка задачи

При количественном изучении процесса термической деструкции приходится решать следующую задачу оптимизации [5, 6]: известна схема превращений и экспериментальные кривые компонентов; при этом константы скоростей всех стадий неизвестны. Требуется найти численные значения констант таким образом, чтобы они приводили к удовлетворительному описанию эксперимента.

Подобные задачи оптимизации, сформулированные математически, могут быть объединены под общим названием задача нелинейного программирования [8]. Методы решения таких задач весьма разнообразны и не все из них нашли применение для исследования процессов термического разложения в связи со спецификой задачи.

Рассмотрим кратко математическую модель разложения вещества по N каналам. В предположении экспоненциальной зависимости скорости реакций от температуры [5] разложение по i -му каналу можно представить в виде [2, 3]

$$(1) \quad \frac{dz_i}{dt} = -k_i \exp\left(-\frac{E_i}{T(t)}\right) z_i^{m_i},$$
$$z_i(0) = 1.$$

где $i = 1, \dots, N$; z_i – концентрация i -го компонента; t – время; $T(t)$ – заданная функция температуры от времени; k_i , E_i , m_i – параметры оптимизации (для i -го канала разложения k_i – предэкспоненциальный множитель; E_i – энергия активации; m_i – порядок реакции). Дополнительно вводится параметр оптимизации η_i – доля i -го компонента. Из физических соображений на параметры оптимизации накладываются следующие ограничения:

$$(2) \quad 0 < \eta_i < 1, \quad k_i > 0, \quad E_i > 0, \quad m_i > 1.$$

Экспериментальная кинетическая кривая имеет вид

$$(3) \quad y(t_j) = y_j,$$

где j – j -я экспериментальная точка.

Тогда функцию ошибок можно представить в виде

$$(4) \quad f = \sum_{j=1}^M \left(y_j - \sum_{i=1}^N \eta_i z_i(k_i, E_i, m_i) \right)^2,$$

где M – количество экспериментальных точек.

Введем вектор $\mathbf{x}(\eta_i, k_i, E_i, m_i) = \mathbf{x}(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Сформулируем следующую оптимизационную задачу:

найти такие \mathbf{x} , при которых целевая функция (4) при ограничениях (2) достигает минимума

$$(5) \quad f(\mathbf{x}) \rightarrow \min.$$

3. Предварительный анализ

В общем случае функция f зависит от $4N - 1$ переменных (так как $\sum_{i=1}^N \eta_i = \eta_0$, где η_0 – доля разлагающихся компонент, является характеристикой биомассы и определяется экспериментально). Как видно из постановки задачи (5), для вычисления функции f при заданном векторе $\mathbf{x}(\eta_i, k_i, E_i, m_i)$ требуется решение задачи Коши (1) для системы N уравнений (z_i определяется из решения дифференциального уравнения (1)). Система (1) представляет собой жесткую систему уравнений [7], что физически соответствует разложению по разным каналам с существенно различными E_i (энергия активации). То есть для решения

задачи (5) необходимо дополнительно иметь эффективный алгоритм решения системы жестких уравнений. В работе использовался линейный многошаговый метод с автоматическим выбором шага, реализованным в алгоритме *DIFSUB* [10].

По существу методы поиска заключаются в следующем: при заданном векторе \mathbf{x} определяется допустимое направление \mathbf{d} и функция f минимизируется вдоль направления \mathbf{d} одним из методов одномерной оптимизации. Применение методов одномерной оптимизации в методе поиска позволяет ввести ограничения на переменные для решения задачи (5) условной оптимизации. В работе использовался алгоритм Брента [7], в основе которого лежит комбинация методов золотого сечения и последовательной параболической интерполяции.

4. Алгоритмы методов поиска

Метод циклического покоординатного спуска. В этом методе в качестве направлений поиска используются координатные векторы. Метод осуществляет поиск вдоль направлений $\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_n$, где \mathbf{d}_j – вектор, все компоненты которого, за исключением j -й, равны нулю. При поиске по направлению \mathbf{d}_j меняется только переменная x_j , во время как все остальные переменные остаются зафиксированными.

Общая схема метода:

1. Определение в качестве $\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_n$ координатных направлений. Выбор нулевого приближения $\mathbf{x}^{(k)}$ ($k = 0$). Задание $\mathbf{y}_1 = \mathbf{x}^{(k)}$.

2. Решение оптимизационной задачи $f(\mathbf{y}_j + \beta \mathbf{d}_j)$ для определения β_j . Присвоение $\mathbf{y}_{j+1} = \mathbf{y}_j + \beta \mathbf{d}_j$. Если $j < n$, то $j = j + 1$ и переход к п. 2, если $j = n$, то переход к п. 3.

3. Задание $\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{y}_{n+1}$. Проверка условия $|f(\mathbf{x}^{(k+1)}) - f(\mathbf{x}^{(k)})| < \varepsilon$. Если условие выполняется – выход, в противном случае – $k = k + 1$ и переход к п. 2

Метод циклического покоординатного спуска с ускоряющим шагом. Метод циклического покоординатного спуска при минимизации дифференцируемой функции сходится к точке с нулевым значением градиента. В отсутствие дифференцируемо-

сти метод может остановиться в неоптимальной точке [8], что объясняется наличием оврага, вызванного недифференцируемостью. Эта трудность может быть преодолена поиском вдоль направления $\mathbf{d} = \mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}$ и вычисления $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k+1)} + \beta \mathbf{d}$, где β – ускоряющий коэффициент. Обычно эмпирическим путем устанавливается, что такой шаг делается на каждой p -й итерации. Такая модификация метода циклического покоординатного спуска может ускорять сходимость, в частности, когда последовательность точек образует зигзагообразную траекторию вдоль дна оврага.

Метод Хука и Дживса. Метод Хука и Дживса [8] осуществляет два типа поиска – исследующий поиск и поиск по образцу.

Общая схема метода:

1. Определение в качестве $\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_n$ координатных направлений. Выбор нулевого приближения $\mathbf{x}^{(k)}$ ($k = 0$). Задание $\mathbf{y}_1 = \mathbf{x}^{(k)}$.

2. **Исследующий поиск.** Решение оптимизационной задачи $f(\mathbf{y}_j + \beta \mathbf{d}_j)$ для определения β_j . Присвоение $\mathbf{y}_{j+1} = \mathbf{y}_j + \beta_j \mathbf{d}_j$. Если $j < n$, то $j = j + 1$ и переход к п. 2, если $j = n$, то переход к п. 3.

3. **Поиск по образцу.** Задание $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{y}_{n+1}$. Проверка условия $|f(\mathbf{x}^{(k+1)}) - f(\mathbf{x}^{(k)})| < \varepsilon$. Если условие выполняется – выход, если нет, то задать $\mathbf{d} = \mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}$. Решение оптимизационной задачи $f(\mathbf{x}^{(k+1)} + \lambda \mathbf{d})$ для определения λ и вычисления $\mathbf{y}_1 = \mathbf{x}^{(k+1)} + \lambda \mathbf{d}$, присвоение $k = k + 1$ и переход к п. 2.

Метод Розенброка. На каждой итерации процедура осуществляет итеративный поиск вдоль n линейно независимых и ортогональных направлений. Когда получена новая точка в конце итерации, строится новое множество ортогональных векторов с использованием процедуры Грамма-Шмидта [8].

1. Определение в качестве $\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_n$ координатных направлений. Выбор нулевого приближения $\mathbf{x}^{(k)}$ ($k = 0$). Задание $\mathbf{y}_1 = \mathbf{x}^{(k)}$.

2. Решение оптимизационной задачи $f(\mathbf{y}_j + \beta \mathbf{d}_j)$ для определения β_j . Присвоение $\mathbf{y}_{j+1} = \mathbf{y}_j + \beta_j \mathbf{d}_j$. Если $j < n$, то $j = j + 1$ и переход к п. 2, если $j = n$, то переход к п. 3.

3. Задание $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{y}_{n+1}$. Проверка условия $|f(\mathbf{x}^{(k+1)}) - f(\mathbf{x}^{(k)})| < \varepsilon$. Если условие выполняется – выход, если нет, то построение

нового множества линейно независимых и взаимно ортогональных направлений \mathbf{d}_j^{new} в соответствии с правилами

$$\mathbf{a}_j = \begin{cases} \mathbf{d}_j, & \text{если } \beta_j = 0, \\ \sum_{i=j}^n \beta_i \mathbf{d}_i, & \text{если } \beta_j \neq 0, \end{cases}$$

$$(6) \quad \mathbf{b}_j = \begin{cases} \mathbf{a}_j, & \text{если } j = 1, \\ \mathbf{a}_j - \sum_{i=1}^{j-1} (\mathbf{a}_j^T \mathbf{d}_i^{new}) \mathbf{d}_i^{new}, & \text{если } j \geq 2, \end{cases}$$

$$\mathbf{d}_j^{new} = \frac{\mathbf{b}_j}{\|\mathbf{b}_j\|}.$$

и переход к п. 2 с использованием в качестве \mathbf{d}_j нового базиса \mathbf{d}_j^{new} .

Замечание. Во всех методах (кроме метода циклического покоординатного спуска) существует возможность выхода параметров за наложенные ограничения при минимизации вдоль какого-то направления (например, поиск по образцу в методе Хука и Дживса или последовательная минимизация вдоль i -го направления в методе Розенброка).

Рассмотрим в качестве примера введение ограничений в методе Хука и Дживса. При решении оптимизационной задачи $f(\mathbf{x}^{(k+1)} + \lambda \mathbf{d})$ при поиске по образцу для определения λ необходимо определить ограничения на λ (λ_{min} и λ_{max}) через заданные ограничения на параметры $\mathbf{x}_{min}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$. Это можно сделать, используя следующую процедуру

1. Определение вектора $\Delta = \mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)} = (\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n)$.
2. Присвоение $i = 1$, $\lambda_{min} = 10^{10}$, $\lambda_{max} = -10^{10}$
3. Если $\Delta_i < 0$, то $\lambda_{min} = \min\left(\frac{x_i^{k+1} - \alpha_i}{\text{abs}(\Delta_i)}, \lambda_{min}\right)$, если $\Delta_i > 0$, то

$$\lambda_{max} = \max\left(\frac{\alpha_i - x_i^{k+1}}{\text{abs}(\Delta_i)}, \lambda_{max}\right).$$

4. Если $i = n$, то выход, в противном случае $- i = i + 1$ и переход к п. 3.

5. Результаты и обсуждение

В качестве исходных данных для решения задачи оптимизации использовались экспериментальные данные по разложению измельченной древесины березы [3], (количество экспериментальных точек $M = 177$). Предполагалась четырехканальная схема разложения (т.е. $N = 4$, количество параметров оптимизации $n = 15$, величина η_0 равна 0,822). В качестве начального приближения использовалось решение оптимизационной задачи по одному каналу, $\eta_i = 0,205$, $i = 1, \dots, 4$.

Для различных методов оптимизации определялось время достижения критерия выхода

$$(7) \quad f = \sum_{j=1}^M \left(y_j - \sum_{i=1}^4 \eta_i z_i(k_i, E_i, m_i) \right)^2 < \varepsilon = 10^{-3}.$$

Результаты расчетов с использованием различных методов поиска приведены на рис. 2, время расчетов нормировалось на время расчета по методу циклического покоординатного спуска.

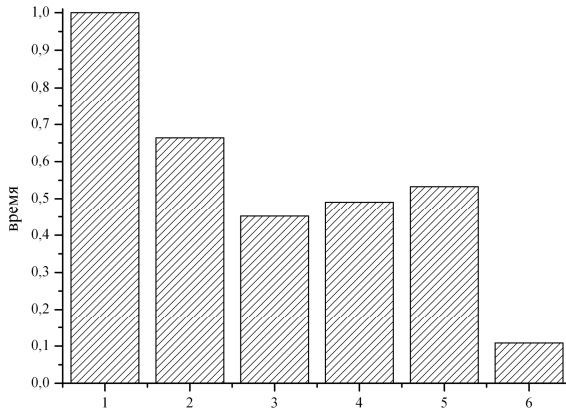


Рис. 2. Безразмерное время расчета оптимизационной задачи:
1 – метод циклического покоординатного спуска; 2–5 – метод
циклического покоординатного спуска с ускоряющим шагом
($2 - \beta = 0,5$; $3 - \beta = 1$; $4 - \beta = 2,5$; $5 - \beta = 5$);
6 – метод Хука и Дживса

Время расчета по методу циклического покоординатного спуска составляло 22 мин. Расчеты проводились на компьютере с двухядерным процессором *Core 2 Duo* с тактовой частотой 2,4 ГГц и производительностью 19,2 гигафлопс.

Результаты расчета параметров методом Хука и Дживса представлены в таблице 1.

Таблица 1. Параметры оптимизации

i	k_i	E_i	m_i	η_i
1	$1,525 \cdot 10^{11}$	18250,8	2,5538	0,2919
2	$3,968 \cdot 10^{26}$	41540,7	1,0002	0,2773
3	$3,857 \cdot 10^{16}$	23831,1	1,5275	0,1305
4	0,0399	2543,9	1,0002	0,1223

В таблице 2 приведены максимальные абсолютные относительные ошибки параметров оптимизации (%), полученных различными алгоритмами по сравнению с алгоритмом Хука и Дживса. Максимальное расхождение не превышает 1,5%.

Таблица 2. Максимальные абсолютные относительные ошибки (%)

i	k_i	E_i	m_i	η_i
1	1,48	0,35	1,14	0,23
2	1,43	0,22	$3,99 \cdot 10^{-3}$	0,46
3	1,11	0,43	1,42	0,73
4	1,47	0,57	$3,99 \cdot 10^{-3}$	0,32

Метод циклического покоординатного спуска с ускоряющим шагом уменьшает время счета. В расчетах ускоряющий шаг использовался после каждой итерации. Но выбор параметра ускорения остается произвольным, т.е. для каждой конкретной экспериментальной кривой будет свой параметр ускорения, устанавливаемый эмпирически. Метод Розенброка не дал удовлетворительных результатов. Основная причина этого состоит в том, что при построении системы ортогональных векторов с использованием процедуры Грамма–Шмидта (6) возникают и

накапливаются ошибки из-за существенной разницы величин параметров оптимизации (см. таблицу 1 –параметры различаются на 28 порядков). По-видимому, аналогичное поведение будет наблюдаться и для других алгоритмов прямого поиска (например, метод деформируемого многогранника [8]), в которых необходимо выполнение операций над векторами (вычисление центра тяжести в методе деформируемого многогранника).

Наименьшее время достижения оптимальных параметров дает метод Хука и Дживса. Это связано с тем, что в исследуемом поиске выполняется циклический поиск вдоль направлений координатных векторов (величины параметров оптимизации не оказывают влияния на сходимость метода), а поиск по образцу снимает взаимозависимость переменных.

В работе дополнительно исследовались вышеперечисленные прямые методы с использованием постоянных шагов по направлениям, вместо одномерной минимизации. Такие методы оказались неэффективными (временя расчета на порядки больше). Это опять же связано с огромной разницей в величинах параметров оптимизации, так как априори неизвестно, какие из параметров будут иметь наибольшие значения, какие – наименьшие, и вопрос выбора величины шага для конкретного параметра остается открытым.

6. Заключение

В работе показано, что разработанный алгоритм решения оптимизационных задач термической деструкции на основе метода Хука и Дживса обладает наибольшей эффективностью по сравнению с другими методами поиска. Это связано в первую очередь с тем, что параметры оптимизации имеют величины, отличающиеся на несколько десятков порядков, что приводит к значительным ошибкам при реализации других алгоритмов поиска.

Представленный алгоритм позволяет многократного и быстро решать локальные задачи оптимизации и может быть

использован как часть алгоритма системы управления термохимическим реактором.

Работа выполнялась в рамках контракта с Министерством образования и науки РФ № 16.526.11.6017.

Литература

1. БАЗАРА М., ШЕТТИ К. *Нелинейное программирование. Теория и алгоритмы*. Пер. с англ. – М.: Мир, 1982. – 583 с.
2. ДИРЕКТОР Л.Б., ЗАЙЧЕНКО В.М., КОСОВ В.Ф., МАЙКОВ И.Л., СИНЕЛЬЩИКОВ В.А., СОКОЛ Г.Ф. *Определение константы скорости образования пироуглерода в потоке бутана* // Известия Академии наук. Энергетика. – 2009. – №3. – С. 79–87.
3. МАЙКОВ И.Л., СИНЕЛЬЩИКОВ В.А., ФЕДЮХИН В.Ф. *Исследование термического распада органического сырья растительного происхождения* // Труды пятой российской национальной конференции по теплообмену, Москва, 25–29 октября 2010 г. Том 3. – С. 262–264.
4. МАЙКОВ И.Л., ДИРЕКТОР Л.Б. *Решение задач оптимизации и управления гибридными энергетическими комплексами в структуре распределенной генерации* // Управление большими системами. – 2011. – №35. – С. 250–264.
5. ПОЛАК Л.С. ГОЛЬДЕНБЕРГ М.Я. ЛЕВИЦКИЙ А.А. *Вычислительные методы в химической кинетике*. – М.: Наука, 1979. – 280 с.
6. *Применение вычислительной математики в химической и физической кинетике* / Под редакцией Л.С. Полака. – М.: Наука, 1969. – 279 с.
7. ФОРСАЙТ Д., МАЛЬКОЛЬМ М., МОУЛЕР К. *Машинные методы математических вычислений*. – М.: Мир, 1980. – 280 с.
8. ХИММЕЛЬБЛАУ Д. *Прикладное нелинейное программирование*. Пер. с англ. – М.: Мир, 1975. – 536 с.
9. BASU P., KAUSHAL P. *Modeling of Pyrolysis and Gasification of Biomass in Fluidized Beds: A Review* // The Berkeley Elec-

- tronic Press. Chemical Product and Process Modeling. – 2009. – Vol. 4. Issue 1., Article 21. – P. 137–172.
10. GEER C.W. *DIFSUB for solution of ordinary differential equation* // Communication of the ACM. – 1971. – Vol. 14, №3. – P. 341–354.
 11. ZAICHENKO V.M., KOSOV V.V., KOSOV V.F., SINELSHIKOV V.A. *Torrefaction and synthesis gas production* // The Proceedings of 19th European Biomass Conference and Exhibition. 6–11 June 2011, Berlin, Germany. – P. 2011–2014.

SOLVING OPTIMIZATION PROBLEMS IN CHEMICAL REACTIONS

Igor Maikov, Joint Institute for High Temperatures of RAS, Moscow, professor (*maikov_i@mail.ru*).

Victor Zaitchenko, Joint Institute for High Temperatures of RAS, Moscow, professor (*zaitch@oivtran.ru*).

Abstract: An algorithm for solving optimization problems of chemical kinetics on the basis of Hooke and Jeeves, which uses a one-dimensional minimization along coordinate directions. The algorithm consists of two types of search – exploring search and pattern-matching search with restrictions. The one-dimensional optimization algorithm is based on the Brent's algorithm. To calculate the objective function a system of stiff differential equations is solved with DIFSUB algorithm.

Keywords: mathematical modeling, optimization, chemical kinetics, nonlinear programming, methods of retrieval.

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии Н. Н. Бахтмадзе*