УДК 519.177
ББК 22.18

ЭРГОДИЧЕСКИЕ ЦИКЛИЧЕСКИЕ РЕСУРСНЫЕ СЕТИ. I. КОЛЕБАНИЯ И РАВНОВЕСНЫЕ СОСТОЯНИЯ ПРИ МАЛЫХ РЕСУРСАХ[1]

Жилякова Л. Ю.[2]
(*ФГБУН Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва*)

Исследуется функционирование эргодических нерегулярных ресурсных сетей при малых ресурсах. Показано, что при произвольных начальных состояниях возникают незатухающие колебания между несколькими предельными векторами. Количество предельных векторов совпадает с количеством циклических классов сети. Если все векторы равны, в сети достигается глобальное равновесие. Найдены условия на начальные состояния, из которых это равновесие может быть достигнуто. Получены формулы для предельных матриц и предельных векторов циклической сети.

Ключевые слова: ресурсная сеть, стохастическая матрица, эргодическая цепь, равновесие, предельное состояние.

1. Введение

Работа посвящена исследованию свойств нерегулярных эргодических ресурсных сетей и их функционирования при малых ресурсах. Ресурсная сеть – динамическая пороговая потоковая модель. Регулярные ресурсные сети описаны в работах [3–5, 7],

---

[1] *Работа поддержана грантом РФФИ 11-01-00771.*

[2] *Людмила Юрьевна Жилякова, кандидат физико-математических наук* (*zhilyakova.ludmila@gmail.com*)

там же даны основные определения. Было доказано, что в регулярных сетях существует пороговое значение ресурса T, единственное для каждой сети: при суммарном ресурсе, не превосходящем T (такой ресурс в дальнейшем будем называть малым), процессы в ресурсной сети эквивалентны случайным блужданиям на графе, хотя такая сеть является полностью детерминированной моделью. Случайные блуждания и модели рассеяния на графах используются для решения различных задач в широком кругу предметных областей. Исчерпывающий обзор таких моделей, исследование их свойств и описание областей приложения были проведены в работе [10].

Если суммарный ресурс выше порогового значения, некоторые вершины переключаются на другое правило функционирования. Это правило сходно с тем, как «ходят» вершины в модели, названной «играми выстреливания фишек» (*chip-firing games*) [9, 11]. *Chip-firing game* – графовая целочисленная пороговая модель, в которой в вершинах находятся стопки фишек. Вершина может сделать ход, выстреливая по одной фишке вдоль каждого исходящего ребра, только в том случае, если она имеет достаточно фишек. Выстреливание может последовательным и параллельным, как, например, описано в работе [12].

Все предыдущие работы, посвященные ресурсным сетям, описывали функционирование *регулярных* сетей. Были выделены классы однородных, эйлеровых и несимметричных сетей, исследованы их свойства, описаны потоки и предельные состояния при малых и больших ресурсах. Все эти классы, сильно отличаясь друг от друга, тем не менее имеют основополагающее общее свойство: при малых ресурсах они описываются регулярной цепью Маркова и поэтому имеют единственное предельное состояние.

Описываемые в настоящей работе эргодические циклические сети не являются регулярными и при малых ресурсах демонстрируют принципиально иное поведение.

2. Основные определения

2.1. РЕСУРСНЫЕ СЕТИ

Сеть представляет собой ориентированный граф $G = (V, E)$, $|V| = n$, с матрицей пропускных способностей $R = (r_{ij})_{n\times n}$.

$Q(t) = (q_1(t), \ldots, q_n(t))$ – *состояние* сети в момент t; $q_i(t) \geq 0$ – количество ресурса в вершине v_i. Q^* – предельное состояние.

$r_i^{in} = \sum_{j=1}^{n} r_{ji}$ и $r_i^{out} = \sum_{j=1}^{n} r_{ij}$ – входная и выходная пропускные способности вершины v_i соответственно.

Правила функционирования сети. В момент t вершина v_i отдает в смежную ей вершину v_m:

r_{im} единиц ресурса, если $q_i(t) > r_i^{out}$ (правило 1);

$\frac{r_{im}}{r_i^{out}} q_i(t)$ единиц ресурса, если $q_i(t) \leq r_i^{out}$ (правило 2).

Матрице пропускных способностей R соответствует стохастическая матрица R', получаемая из R нормированием по строкам:

$$R' = \begin{pmatrix} \frac{r_{11}}{r_1^{out}} & \frac{r_{12}}{r_1^{out}} & \ldots & \frac{r_{1n}}{r_1^{out}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{r_{n1}}{r_n^{out}} & \frac{r_{n2}}{r_n^{out}} & \ldots & \frac{r_{nn}}{r_n^{out}} \end{pmatrix}.$$

Сеть, все вершины которой функционируют по правилу 2, описывается цепью Маркова с соответствующей стохастической матрицей [2]. Закон перераспределения ресурса описывается рекуррентной формулой:

$Q(t + 1) = Q(t)R'$.

Сеть будем называть *однородной*[1], если пропускные способности всех ее ребер одинаковы; *эйлеровой*, если для каждой

---

[1] *Определение однородной ресурсной сети следует отличать от определения однородной цепи Маркова; функционирование всех*

вершины $r_i^{in} = r_i^{out}$, $i = 1, \ldots, n$; *несимметричной*, если в ней существуют вершины с разными входными и выходными способностями.

W – суммарный ресурс сети. Сеть функционирует с выполнением закона сохранения: $W = const$.

2.2. ЭРГОДИЧЕСКИЕ ЦИКЛИЧЕСКИЕ СЕТИ

При малых ресурсах сеть описывается соответствующей цепью Маркова. Следуя классификации цепей Маркова, данной в [6], *эргодической сетью* назовем сеть, граф которой сильно связен; эргодической компонентой неэргодической сети назовем сильно связную компоненту, из которой нет выходящих ребер. Если дополнительно к этому НОД длин всех циклов графа равен единице, сеть будем называть регулярной. Эргодическую нерегулярную сеть, НОД длин всех циклов которой строго больше единицы, будем называть *циклической*.

В эргодической циклической сети каждая вершина достижима из любой другой, но так как сеть не является регулярной, переходы из некоторого множества вершин в другое множество возможны только за некоторое число тактов, отличное от единицы. Это означает, что никакая степень матрицы пропускных способностей циклической сети не будет строго положительной. Этим же свойством обладает и стохастическая матрица. Более того, нули для их разных степеней будут находиться в разных местах. С увеличением степени расположение нулей начинает циклически повторяться. Длина цикла соответствует количеству тактов, за которое из каждой вершины можно перейти в нее же.

В эргодической цепи Маркова выделяют циклические классы состояний [6]. С течением времени текущее состояние движется по циклическим классам в определенном порядке, причем каждые d шагов система оказывается в одном и том же циклическом классе. Количество циклических классов d называют пе-

---

классов ресурсных сетей при малых ресурсах описываются однородными цепями Маркова.

риодом цепи; d равно НОД всех циклов цепи. Регулярная цепь Маркова состоит целиком из одного циклического класса, т.е. для регулярной цепи Маркова $d = 1$. По аналогии с цепями Маркова будем говорить, что вершины эргодической сети также образуют циклические классы. Сеть, содержащую d циклических классов, будем называть d-циклической.

Стохастическая матрица R' циклической сети импримитивна с индексом импримитивности d [2]. Это означает, что R' имеет d различных собственных чисел, равных по модулю 1.

3. Предельные состояния и потоки в циклических сетях при малых ресурсах

Прежде чем формулировать общие утверждения о предельных матрицах, предельных векторах и возможности достижения глобальной устойчивости в циклических сетях при малых ресурсах, проследим на примере процессы, происходящие в сетях: изменение векторов состояния и изменение степеней стохастической матрицы.

3.1. ФУНКЦИОНИРОВАНИЕ ОДНОРОДНОГО ПРОСТОГО ЦИКЛА ПРИ W = 1

Пример 1. Пусть сеть представлена двудольным графом (рис. 1).

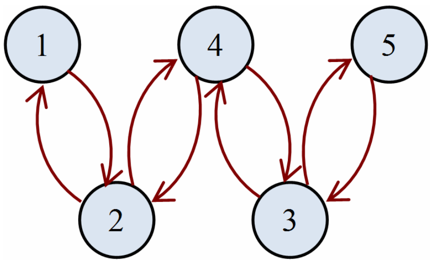

Рис. 1. Двудольный граф с пятью вершинами, d = 2

Ее матрица пропускных способностей:

$$
(1) \quad R = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ r_{sum} = 16.
$$

Соответствующая ей стохастическая матрица имеет вид

$$
R' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & 0 & 0 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

На рис. 2 показан процесс перераспределения ресурса, соответствующий начальному состоянию $Q(0) = (1, 0, 0, 0, 0)$.

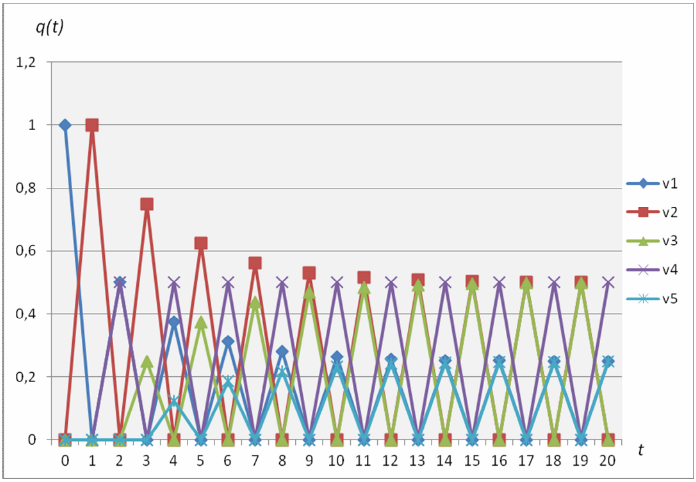

Рис. 2. Колебания при $Q(0) = (1, 0, 0, 0, 0)$

Протокол функционирования сети, соответствующий рис. 2, представлен в таблице 1.

Таблица 1. Протокол функционирования 2-циклической сети с матрицей (1) *и* $Q_1(0) = (1, 0, 0, 0, 0)$

t_i	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
0	1	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0
2	0,5	0	0	0,5	0
3	0	0,75	0,25	0	0
4	0,375	0	0	0,5	0,125
5	0	0,625	0,375	0	0
6	0,313	0	0	0,5	0,188
7	0	0,563	0,438	0	0
8	0,281	0	0	0,5	0,219
9	0	0,531	0,469	0	0
10	0,266	0	0	0,5	0,234
11	0	0,516	0,484	0	0
12	0,258	0	0	0,5	0,242
13	0	0,508	0,492	0	0
14	0,254	0	0	0,5	0,246
15	0	0,504	0,496	0	0
16	0,252	0	0	0,5	0,248
17	0	0,502	0,498	0	0
18	0,251	0	0	0,5	0,249
19	0	0,501	0,499	0	0
20	0,25	0	0	0,5	0,25
21	0	0,5	0,5	0	0
22	0,25	0	0	0,5	0,25
23	0	0,5	0,5	0	0
…	…	…	…	…	…

Из рис. 2 и таблицы 1 видно, что на четных тактах ресурс содержится в вершинах v_1, v_4 и v_5, на нечетных – в v_2 и v_3. В этой сети $d = 2$, циклическими классами являются множества $\{v_1, v_4, v_5\}$ и $\{v_2, v_3\}$.

В такой сети отсутствует равновесное предельное состояние. Протокол функционирования показывает, что в пределе получается два вектора, последовательно сменяющие друг друга:

$$Q_1^{1*} = (0,25;\ 0;\ 0;\ 0,5;\ 0,25) \text{ и } Q_2^{1*} = (0;\ 0,5;\ 0,5;\ 0;\ 0).$$

Помещая ресурс $W = 1$ в начальном состоянии поочередно в каждую из вершин, получим те же два предельных вектора Q_1^{1*} и

Q_2^{1*}, одинаковые для всех начальных состояний: $Q(0) = (1, 0, 0, 0, 0)$, $Q(0) = (0, 1, 0, 0, 0)$, $Q(0) = (0, 0, 1, 0, 0)$, $Q(0) = (0, 0, 0, 1, 0)$, $Q(0) = (0, 0, 0, 0, 1)$.

Поскольку $d = 2$, последовательность степеней стохастической матрицы R' состоит из двух сходящихся подпоследовательностей:

$$R_1^{'\infty} = \begin{pmatrix} 0 & 0,5 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0,25 & 0 & 0 & 0,5 & 0,25 \\ 0,25 & 0 & 0 & 0,5 & 0,25 \\ 0 & 0,5 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0,5 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$R_2^{'\infty} = \begin{pmatrix} 0,25 & 0 & 0 & 0,5 & 0,25 \\ 0 & 0,5 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0,25 & 0 & 0 & 0,5 & 0,25 \\ 0,25 & 0 & 0 & 0,5 & 0,25 \end{pmatrix}.$$

Матрицы $R_1'^{\infty}$ и $R_2'^{\infty}$ состоят из чередующихся векторов Q_1^{1*} и Q_2^{1*}, причем $R_2'^{\infty}$ представляет собой инверсию $R_1'^{\infty}$: в ней каждый вектор Q_1^{1*} заменен вектором Q_2^{1*}, и наоборот. Строки 1, 4, 5, соответствующие вершинам первого циклического класса, равны; то же самое относится и к строкам 2, 3, соответствующим вершинам второго циклического класса.

Оба вектора Q_1^{1*} и Q_2^{1*} являются собственными векторами матрицы $R_2'^{\infty}$, а матрица $R_1'^{\infty}$ переводит вектор Q_1^{1*} в Q_2^{1*}, Q_2^{1*} – в Q_1^{1*}. То же самое происходит и при умножении этих векторов на матрицу R':

$$Q_1^{1*}R' = Q_2^{1*}, \quad Q_2^{1*}R' = Q_1^{1*}.$$

Умножение на стохастическую матрицу R' переводит матрицу $R_1'^{\infty}$ в $R_2'^{\infty}$ и наоборот.

Заметим, что сумма двух предельных матриц дает матрицу с одинаковыми строками:

$$R_1^{'\infty} + R_2^{'\infty} = \begin{pmatrix} 0{,}25 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}25 \\ 0{,}25 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}25 \\ 0{,}25 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}25 \\ 0{,}25 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}25 \\ 0{,}25 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}25 \end{pmatrix}.$$

Вектор, образующий строки этой матрицы, является левым собственным вектором обеих матриц $R_1{}'^{\infty}$ и $R_2{}'^{\infty}$, а также стохастической матрицы R'; более того, если в матрице $R_1{}'^{\infty} + R_2{}'^{\infty}$ нормировать строки, окажется, что она равна предельной матрице A, к которой суммируется по Чезаро последовательность R'^k [5]:

$$(2) \quad A = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} R'^{j} .$$

$$A = \frac{R_1^{'\infty} + R_2^{'\infty}}{2} = \begin{pmatrix} 0{,}125 & 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}125 \\ 0{,}125 & 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}125 \\ 0{,}125 & 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}125 \\ 0{,}125 & 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}125 \\ 0{,}125 & 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}125 \end{pmatrix}.$$

Матрица R' неразложима по построению. Неразложимая неотрицательная матрица имеет единственный неотрицательный собственный вектор (с точностью до скалярного множителя) [2]. Собственный вектор стохастической матрицы сети определяется как сумма векторов $Q_1{}^{1*}$ и $Q_2{}^{1*}$. Для доказательства этого факта достаточно сложить равенства $Q_1{}^{1*} R' = Q_2{}^{1*}$ и $Q_2{}^{1*} R' = Q_1{}^{1*}$.

Вектор абсолютных предельных вероятностей находится по формуле:

$$Q^{1*} = \frac{1}{2}(Q_1^{1*} + Q_1^{1*}) .$$

3.2. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ВЕКТОРЫ И ЦИКЛЫ D-ЦИКЛИЧЕСКОЙ СЕТИ

Введем некоторые дополнительные обозначения и приведем результаты, полученные для d-циклических эргодических цепей Маркова.

В [6] доказано, что предельная матрица A, к которой суммируется по Чезаро последовательность R'^k, (формула (2)) имеет вид:

$A = \mathbf{1}\cdot\alpha$,

где **1** – вектор-столбец, состоящий из единиц, а α является единственным неотрицательным левым собственным вектором матрицы R', соответствующим собственному числу $\lambda = 1$:

(3) $\alpha R' = \alpha$.

Также выполняется

$AR' = R'A = A$.

Пусть R' – стохастическая матрица эргодической d-циклической ресурсной сети. Рассмотрим последовательность ее степеней: R', …, R'^d, R'^{d+1}, … Она состоит из d сходящихся подпоследовательностей:

1) R', $R'^d\cdot R'$, $R'^{2d}\cdot R'$, $R'^{3d}\cdot R'$, …

2) R'^2, $R'^d\cdot R'^2$, $R'^{2d}\cdot R'^2$, $R'^{3d}\cdot R'^2$, …

…

d) R'^d, $R'^d\cdot R'^d$, $R'^{2d}\cdot R'^d$, $R'^{3d}\cdot R'^d$, …

Таким образом, видно, что все пределы $R_1'^{\infty}$, …, $R_d'^{\infty}$ выражаются через одну предельную матрицу $R_d'^{\infty}$:

$R_1'^{\infty} = R_d'^{\infty} R'$;

$R_2'^{\infty} = R_d'^{\infty} R'^2$;

…

$R_{d-1}'^{\infty} = R_d'^{\infty} R'^{d-1}$.

Сумма матриц $R_1'^{\infty}$, …, $R_d'^{\infty}$ строго положительна. В [1] доказано, что предельная матрица A (2) определяется по формуле

(4) $$A = \frac{1}{d}(E + R' + \ldots + R'^{d-1})R_d'^{\infty} = \frac{1}{d}R_d'^{\infty}(E + R' + \ldots + R'^{d-1}).$$

Для любого начального распределения единичного ресурса выполнится:

(5) $\alpha = Q^1(0)A$.

Формула (5) означает, что каждая строка матрицы A соответствует предельным вероятностям цепи Маркова в смысле среднего арифметического. Далее при описании ресурсных сетей вместо символа α, обозначающего предельный вероятностный вектор, будем использовать обозначение Q^{1*} – вектор предельного состояния при единичном ресурсе: $Q^{1*} = Q^1(0)A$; матрица A состоит из n одинаковых вектор-строк, равных Q^{1*}.

Рассмотрим процесс функционирования сети по правилу 2. Последовательность векторов состояний делится на d сходящихся подпоследовательностей, так же как и последовательность степеней стохастической матрицы.

$Q(kd + 1) = Q(0)R'^{kd} R'$,

$Q(kd + 2) = Q(0)R'^{kd} R'^2$,

…

$Q(kd) = Q(0)R'^{kd} R'^d = Q(0)R'^{(k+1)d}$

$k = 0, 1, …$

Переходя к пределу, получим:

(6) $Q_1^* = Q(0)R_d'^{\infty}R'$, $Q_2^* = Q(0)R_d'^{\infty}R'^2$, … $Q_d^* = Q(0)R_d'^{\infty}$.

Непосредственно из выражений (6) следует, что $Q^*_{i+1} = Q^*_i R'$, $i = 1, …, d - 1$, $Q^*_1 = Q^*_d R'$.

Векторы $Q^*_1, …, Q^*_d$ будем называть *предельными векторами*. Последовательность, в которой они сменяют друг друга, будем называть *предельным циклом* эргодической сети.

Таким образом, доказано следующее предложение.

Предложение 1. *В эргодической d-циклической ресурсной сети, функционирующей по правилу* 2, *существует предельный цикл длины d, состоящий из предельных векторов* $Q^*_1, …, Q^*_d$, *определяемых по формуле* (6).

Предложение 2. *Для эргодической d-циклической ресурсной сети, функционирующей по правилу* 2, *единственным положительным собственным вектором матрицы* R' *при* $W = 1$

является вектор, равный нормированной сумме предельных векторов и определяемый по формуле

(7) $$Q^{1*} = \frac{Q_1^* + \ldots + Q_d^*}{d \cdot W}.$$

Доказательство. Суммируя выражения (6), имеем:

$$Q_1^* + \ldots + Q_d^* = Q(0)R_d^{'\infty}(E + R' + \ldots + R^{'d-1}).$$

Преобразуя правую часть по формуле (4), получим:

$$Q_1^* + \ldots + Q_d^* = dQ(0)A.$$

Но любой вектор $Q(0)$ при условии, что сеть с нулевого такта функционирует по правилу 2, можно представить в виде $Q(0)=WQ^1(0)$. Отсюда

$$Q_1^* + \ldots + Q_d^* = dWQ^1(0)A$$ или

$$\frac{Q_1^* + \ldots + Q_d^*}{dW} = Q^1(0)A.$$

Из формулы (5) имеем: $Q^{1*} = \dfrac{Q_1^* + \ldots + Q_d^*}{dW}$. То есть матрица A состоит из n вектор-строк, определяемых формулой (7). А из (3) следует, что $Q^{1*}R' = Q^{1*}$. □

При умножении на матрицу R', каждый вектор Q^*_i переходит в вектор Q^*_{i+1} (сложение индексов происходит по модулю d). Но существует матрица, которая оставляет все эти векторы неподвижными.

Предложение 3. *Предельные векторы эргодической d-циклической сети $Q^*_1, \ldots, Q^*_d$ являются собственными векторами матрицы $R_d'^{\infty}$, соответствующими собственному числу $\lambda = 1$ кратности d.*

Доказательство. Запишем равенства (6) в виде

(8) $$Q_i^* = Q(0)R_d^{'\infty}R^{'i},\ i = 1, \ldots, d.$$

Умножим обе части (8) на матрицу $R_d'^{\infty}$ справа.

$Q_i^*R_d^{'\infty} = Q(0)R_d^{'\infty}R^{'i}R_d^{'\infty}$, но по формуле (4) это можно переписать в виде

$$Q_i^*R_d^{'\infty} = Q(0)\left(R_d^{'\infty}R_d^{'\infty}\right)R^{'i} = Q(0)R_d^{'\infty}R^{'i}$$

По формуле (8) правая часть равенства равна Q^*_i. Тогда

$Q_i^* R_d'^{\infty} = Q_i^*$. □

Замечание. В предельном случае, когда НОД всех циклов сети равен единице и, соответственно, сеть представляет собой один циклический класс (является регулярной), доказанные утверждения остаются верными. В сети, функционирующей по правилу 2, существует единственный вектор предельного состояния Q^*. Он является собственным вектором стохастической матрицы R' (предложение 1), для него верно равенство (7): $Q^{1*} = Q^*/W$ из предложения 2, и он является собственным вектором единственной предельной матрицы R'^{∞}, соответствующим простому собственному числу $\lambda = 1$ (предложение 3). Справедливость всех этих утверждений следует непосредственно из свойств регулярных цепей Маркова. Для ресурсных сетей они сформулированы в [3].

3.2. ДОСТИЖЕНИЕ ГЛОБАЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ ПРИ МАЛЫХ РЕСУРСАХ

Рассмотрим задачу нахождения начального состояния, при котором в сети достигается *глобальное равновесие*, т.е. все векторы $Q^*_1, \ldots, Q^*_d$ совпадают.

Докажем несколько вспомогательных утверждений о свойствах предельных векторов и предельных степеней матриц.

Л е м м а 1. *В эргодической d-циклической ресурсной сети, функционирующей по правилу 2, предельные векторы $Q^*_1, \ldots, Q^*_d$ при постоянном суммарном ресурсе в циклических классах не зависят от распределения ресурса по вершинам внутри классов в начальном состоянии.*

Доказательство. Матрица R' импримитивна с индексом импримитивности d. В [2] доказано, что ее степень R'^d разлагается на d примитивных матриц, которые имеют одно и то же максимальное характеристическое число. Это означает, что существует такая нумерация вершин, при которой R'^d блочно-диагональна. Блоки соответствуют циклическим классам.

$$R'^{d} = \begin{pmatrix} R'^{d}_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & R'^{d}_{22} & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & R'^{d}_{dd} \end{pmatrix}.$$

Каждая матрица $R_{ii}'^{d}$ неразложима и примитивна по определению, кроме того, все эти матрицы являются стохастическими. Каждая из них задает регулярную цепь Маркова. Матрица $R'^{\infty}_{d} = \lim\limits_{k\to\infty} \left(R'^{d}\right)^{k}$ также является блочной с блоками $\left(R'^{d}_{ii}\right)^{\infty}$. Каждая пара блоков $R_{ii}'^{d}$ и $(R_{ii}'^{d})^{\infty}$ имеет один и тот же единственный положительный предельный вектор π_i, соответствующий максимальному собственному числу $\lambda = 1$, $i = 1, \dots, d$.

Поскольку сеть с первого такта функционирует по правилу 2, т.е. вершины отдают весь свой ресурс, на каждом такте ресурс из каждого циклического класса полностью переходит в следующий класс.

Любой вектор начального состояния $Q(0)$ можно разложить в сумму векторов $Q_i(0)$, каждый из которых соответствует одному циклическому классу. Тогда поскольку матрицы $R_{ii}'^{d}$ регулярны, при $W_i = 1$ для любого $Q_i(0)$ имеют место равенства $Q_i(0)R'^{\infty}_{ii} = Q^{*}_{di} = \pi_i$.

Для произвольного W при условии, что сеть с первого такта функционирует по правилу 2, для любого $Q_i(0)$ выполнится:

$Q_i(0)R'^{\infty}_{ii} = Q^{*}_{di} = W_i\pi_i$, где W_i – суммарный ресурс в i-м циклическом классе.

Прямая сумма векторов Q^{*}_{di} даст единственный вектор Q^{*}_{d}. Остальные векторы предельного цикла получаются из Q^{*}_{d} умножением на соответствующие степени матрицы R' и тоже определяются единственным образом. □

Л е м м а 2. *В эргодической d-циклической ресурсной сети, функционирующей по правилу* 2, *при суммарном ресурсе* $W = 1$, *сосредоточенном в начальном состоянии в m-м циклическом классе, предельные векторы* $Q^{*}_{1}, \dots, Q^{*}_{d}$ *являются строками предельных матриц* $R_j'^{\infty}$, *каждая из которых состоит из* d

различных строк, причем на строках, соответствующих номерам вершин из i-го циклического класса, находится вектор Q^*_k*, где* $k \in [1, d]$,

(9) $k \equiv m + j + i - 3 \pmod d + 1,\ i, j = 1, \ldots, d.$

Доказательство. Рассмотрим начальное состояние, в котором ресурс находится в первом циклическом классе ($m = 1$). Не нарушая общности, предположим, что этому классу принадлежит вершина v_1. Пусть $Q(0) = (1, 0, \ldots, 0)$. Обозначим этот вектор начального состояния через $Q_1(0)$.

Имеем:

$$Q_1^* = Q_1(0)R_1'^{\infty} = (R_1'^{\infty})_1,$$

$$Q_2^* = Q_1(0)R_2'^{\infty} = (R_2'^{\infty})_1,$$

$$\ldots$$

$$Q_d^* = (R_d'^{\infty})_1,$$

где $(R_j'^{\infty})_1$ – первая строка матрицы $R_j'^{\infty}$.

По лемме 1, вместо вершины v_1 может быть взята любая вершина из первого циклического класса. Таким образом, в матрицах $R_j'^{\infty}$ в строках, соответствующих номерам вершин из первого циклического класса, стоят векторы Q^*_j.

Для каждого вектора Q^*_{i+1} ($i = 1, \ldots, d-1$) справедливо $Q^*_{i+1} = Q^*_i R'$, $Q^*_1 = Q^*_d R'$; для предельных матриц выполняется $R_{j+1}'^{\infty} = R_j'^{\infty} R'$. Это означает, что каждая матрица $R_j'^{\infty}$ в строках, соответствующих номерам вершин из i-го циклического класса, содержит векторы с номером $j + i - 1$ при $j + i - 1 \le d$, и с номером $j + i - 1 - d$ при $j + i - 1 > d$. Индекс k вектора Q_k^*, удовлетворяющий этим условиям, находится по формуле $k \equiv j + i - 2 \pmod d + 1$.

Обобщая эту формулу на произвольный класс с номером m, получим

$k \equiv m + j + i - 3 \pmod d + 1$. □

С помощью полученных результатов докажем лемму о существовании равновесного состояния в циклических сетях.

Л е м м а 3. *В эргодической d-циклической ресурсной сети, функционирующей по правилу* 2, *предельные векторы* $Q^*_1, \ldots, Q^*_d$ *совпадают, если в каждом из циклических классов в* *начальном состоянии находится одинаковое количество ресурса W/d и для каждой вершины выполнено $q_i(0) \le r_i^{out}$. Вектор предельного состояния равен WQ^{1*}, где Q^{1*} – любая строка матрицы A, определяемой по формуле* (4).

Доказательство. Рассмотрим d векторов начального состояния с единичным ресурсом, сосредоточенным в некоторой вершине каждого из циклических классов: $Q_m(0)$, где m – номер циклического класса, $m = 1, \ldots, d$.

Обозначим их предельные векторы через $Q^*_{j_m}$, где j – номер предельного вектора при заданном начальном состоянии. Получим следующие равенства:

$$Q^*_{j_m} = Q_m(0) R_d^{'\infty} R'^{j} = Q_1(0) R_d^{'\infty} R'^{j+m} = Q_k^*,$$

где $Q_k^* = Q_{k_1}^*$ – предельные векторы при ресурсе, находящемся в первом классе, индекс $k \in [1, d]$ вычисляется по формуле (9) при $m = 1$.

Сложим векторы $Q_i(0)$ и найдем первый предельный вектор:

$$(Q_1(0) + \ldots + Q_d(0)) R_d^{'\infty} R' = Q_{1_1}^* + \ldots + Q_{d_1}^* = Q_1^* + \ldots + Q_d^*.$$

Для второго предельного вектора имеем

$$(Q_1(0) + \ldots + Q_d(0)) R_d^{'\infty} R'^{2} = Q_{1_2}^* + \ldots + Q_{d_2}^* = Q_2^* + \ldots + Q_d^* + Q_1^*.$$

В общем случае m-й предельный вектор будет суммой векторов $Q_1^* + \ldots + Q_d^*$ с циклически переставленными слагаемыми.

Таким образом, если в начальном состоянии в каждом циклическом классе находится единичный ресурс, все d предельных векторов совпадают.

Если ресурс в каждом классе пропорционально увеличить в W/d раз, предельные векторы будут равны при условии, что все вершины сети функционируют по правилу 2.□

Условие на начальное состояние в лемме 3 можно ослабить. Если ресурс в начальном состоянии распределен между циклическими классами неравномерно, и при этом некоторые вершины первые несколько тактов функционируют по правилу 1, то за эти такты может произойти выравнивание ресурса в циклических классах. Таким образом, справедливо более общее утверждение.

Т е о р е м а 1. *В эргодической d-циклической ресурсной сети, функционирующей по правилу* 2, *начиная с некоторого момента t' предельные векторы* $Q^*{}_1, \ldots, Q^*{}_d$ *совпадают тогда и только тогда, когда в каждом из циклических классов при* $t = t'$ *находится одинаковое количество ресурса W/d. Вектор предельного состояния равен* WQ^{1*}, *где* Q^{1*} *– любая строка матрицы A, определяемой по формуле* (4).

Доказательство. 1. Пусть при $t = t'$ вся сеть функционирует по правилу 2 и в каждом циклическом классе находится одинаковое количество ресурса. Приняв $Q(t')$ за новое начальное состояние, получим условие леммы 3.

2. Пусть в сети, функционирующей по правилу 2, векторы $Q^*{}_1, \ldots, Q^*{}_d$ совпадают. По определению для предельного цикла выполняются соотношения: $Q^*{}_{i+1} = Q^*{}_i R'$, $i = 1, \ldots, d - 1$, $Q^*{}_1 = Q^*{}_d R'$. Тогда имеем: $Q^*{}_i = Q^*{}_i R'$, $i = 1, \ldots, d$. Умножение на матрицу R' переводит весь суммарный ресурс каждого класса в следующий циклический класс. Совпадение векторов происходит только при одинаковых суммарных ресурсах в каждом циклическом классе. □

Проиллюстрируем теорему 1 примером.

Пример 2. Пусть в сети с матрицей пропускных способностей (1) начальное состояние $Q(0) = (4, 0, 0, 0, 0)$. Функционирование сети представлено на рис. 3, построенном на основании таблицы 2.

Из протокола видно, что ресурс, в начальном состоянии находившийся в первом циклическом классе, на первом такте разделился поровну между двумя классами. Одновременно с этим все вершины перешли на правило 2, и дальнейшего перераспределения ресурса между циклическими классами не происходит. Сеть стабилизируется; в каждом классе суммарный ресурс равен 2. Два предельных вектора совпадают между собой. В сети имеется равновесное состояние:

$Q^* = Q_1{}^* = Q_2{}^* = (0{,}5, 1, 1, 1, 0{,}5)$.

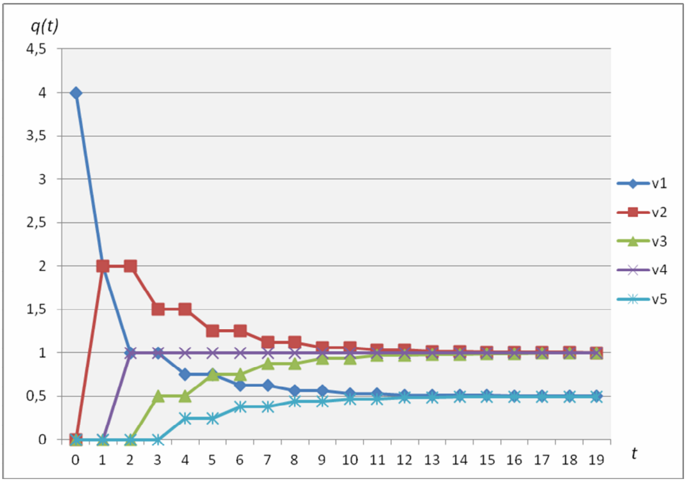

Рис. 3. Функционирование сети, заданной графом с матрицей (1), $Q(0) = (4, 0, 0, 0, 0)$

Таблица 2. Протокол работы сети

t	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
0	4,000	0,000	0,000	0,000	0,000
1	2,000	2,000	0,000	0,000	0,000
2	1,000	2,000	0,000	1,000	0,000
3	1,000	1,500	0,500	1,000	0,000
4	0,750	1,500	0,500	1,000	0,250
5	0,750	1,250	0,750	1,000	0,250
…					
20	0,501	1,002	0,998	1,000	0,499
21	0,501	1,001	0,999	1,000	0,499
22	0,500	1,000	1,000	1,000	0,500
23	0,500	1,000	1,000	1,000	0,500
…					

4. Заключение

В работе исследованы процессы перераспределения малых ресурсов в эргодических циклических сетях. Рассмотрено функционирование сетей с разными топологиями. Описаны численные эксперименты по нахождению предельных векторов и предельных матриц. Найдены формулы для нахождения d предельных матриц для d сходящихся подпоследовательностей последовательности R'^k. Получены формулы, описывающие d предельных векторов, между которыми происходят колебания. Описаны начальные состояния, при которых в сети достигается глобальное равновесие.

В качестве потенциального приложения ресурсных сетей рассматриваются модели децентрализованного управления в многоагентных системах, в том числе задача нахождения консенсуса [1]. Эта задача может быть поставлена и решена в тех классах сетей, в которых предельное состояние существует и зависит от начального. Задача управления распределением ресурса, и, в частности, достижения консенсуса – объект дальнейшего исследования ресурсных сетей.

Литература

1. АГАЕВ Р.П., ЧЕБОТАРЕВ П.Ю. *Сходимость и устойчивость в задачах согласования характеристик* (*обзор базовых результатов*) // Управление большими системами. – 2010. – Специальный выпуск 30.1 «Сетевые модели в управлении». – С. 470–505.
2. ГАНТМАХЕР Ф.Р. *Теория матриц*. – М.: Физматлит. 2004. – 560 с.
3. ЖИЛЯКОВА Л.Ю. *Несимметричные ресурсные сети. I. Процессы стабилизации при малых ресурсах* // Автоматика и телемеханика. – 2011. – №4. – С. 133–143.
4. ЖИЛЯКОВА Л.Ю. *Несимметричные ресурсные сети. II. Потоки при больших ресурсах и их стабилизация* // Автоматика и телемеханика. – 2012. – №6. – С. 103–118.

5. ЖИЛЯКОВА Л.Ю. *Несимметричные ресурсные сети. III. Исследование предельных состояний* // Автоматика и телемеханика. – 2012. – №7. – С. 67–77.
6. КЕМЕНИ ДЖ., СНЕЛЛ ДЖ. *Конечные цепи Маркова*. – М.: Наука, 1970. – 272 с.
7. КУЗНЕЦОВ О.П. *Однородные ресурсные сети. I. Полные графы* // Автоматика и телемеханика. – 2009. – №11. – С. 136–147.
8. РОБЕРТС Ф.С. *Дискретные математические модели с приложениями к социальным, биологическим и экологическим задачам.* – М. Наука, 1986. – 496 с.
9. BJÖRNER A., LOVASZ, L. *Chip-firing game on directed graphs* // J. Algebraic Combinatorics. – 1992. – №1. – P. 305–328.
10. BLANCHARD, PH., VOLCHENKOV, D. *Random Walks and Diffusions on Graphs and Databases: An Introduction* (Springer Series in Synergetics). – Springer-Verlag – Berlin–Heidelberg, 2011. – 353 p.
11. LOVASZ L., WINKLER P. *Mixing of Random Walks and Other Diffusions on a Graph* // Surveys in Combinatorics / Ed. P. Rowlinson. London Math. Soc. Lecture Notes Series 218, Cambridge Univ. Press, 1995. – P. 119–154.
12. PRISNER E. *Parallel Chip Firing on Digraphs* // Complex Systems. – 1994. – №8. – P. 367–383.

ERGODIC CYCLIC RESOURCE NETWORKS. I. OSCILLATIONS AND EQUILIBRIUM AT LOW RESOURCE

Ludmila Zhilyakova, Institute of Control Sciences of RAS, (Moscow, Profsoyuznaya st., 65), cand. sc., senior scientist, zhilyakova.ludmila@gmail.com.

Abstract: *We study operation of ergodic nonregular resource networks when total amount of resource is small. We show that for an arbitrary initial state undamped oscillations occur between several limit vectors. The number of different limit vectors is equal to the number of cyclic classes of a network. The global equilibrium can be achieved when all limit vectors coincide. We derive conditions on initial states leading to the global equilibrium, and obtain formulae for the limit powers of stochastic matrices and for limit vectors.*

Keywords: resource network, stochastic matrix, ergodic Markov chain, equilibrium, limit state.

Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии М.В. Губко

Поступила в редакцию 06.02.2013.
Опубликована 31.05.2013.