УДК 519.865.2
ББК 22.18 + 65.42

МОДЕЛИРОВАНИЕ СЕТЕВОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ НА КОНКУРЕНТНЫХ РЫНКАХ

Алгазин Г. И.[1], Алгазина Д. Г.[2]
(*Алтайский государственный университет, г. Барнаул*)

Представлена теоретико-игровая модель многоагентной сети, ориентированной на продвижение на конкурентном рынке однородного товара (услуги). Для базовых прикладных моделей «франчайзер–франчайзи–рынок» и «производитель–посредник–рынок» при обычных для моделей олигополии предположениях о линейности функций затрат и обратной функции спроса, допускающих аналитическое представление решения, проведены разносторонние исследования эффективности сетей в условиях равновесия Курно и Штакельберга. Новым аспектом модельных исследований является введение в теоретико-игровую модель сети активного субъекта – центра, на которого возложено решение задач по управлению сетевым взаимодействием и повышению эффективности сети.

Ключевые слова: типология сети, теоретико-игровая модель, равновесие сети, Курно, Штакельберг, управление сетевым взаимодействием, эффективность сети, франчайзинг, торговое посредничество.

1. Введение

В последнее время во многих областях растет интерес к проблеме формирования устойчивых и эффективных сетей – взаимодействующих совокупностей агентов (участников), нахо-

[1] *Геннадий Иванович Алгазин, зав. кафедрой, доктор физико-математических наук, профессор (algazin@socio.asu.ru).*
[2] *Дарья Геннадьевна Алгазина, старший преподаватель, (darya.algazina@mail.ru).*

дящихся под общим управлением. Особую сложность в проведении математических исследований представляют сети, участниками которых являются целенаправленные субъекты (системы).

Адекватным математическим аппаратом исследования конфликтов, возникающих в сетевом взаимодействии между целенаправленными субъектами, является теория сетевых игр [10, 11 ,19]. Следует отметить, что это недостаточно изученный раздел теории игр, который еще находится в стадии своего формирования и развития.

В данной статье представлены две базовые теоретико-игровые модели сети «центр–агент–рынок», ориентированной на продвижение на конкурентном рынке различного рода товаров и услуг: модель «франчайзер–франчайзи–рынок» и модель «производитель–посредник–рынок».

2. Типология сетей

Рассматривается многоагентная сеть «центр–агент–рынок». Некоторые ее структуры, которые представлены в исследованиях авторов, схематично показаны на рис. 1–3.

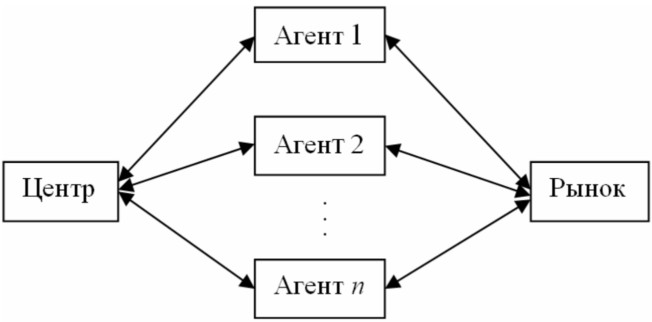

Рис. 1. Центр взаимодействует с агентами, агенты – с рынком (потребителями)

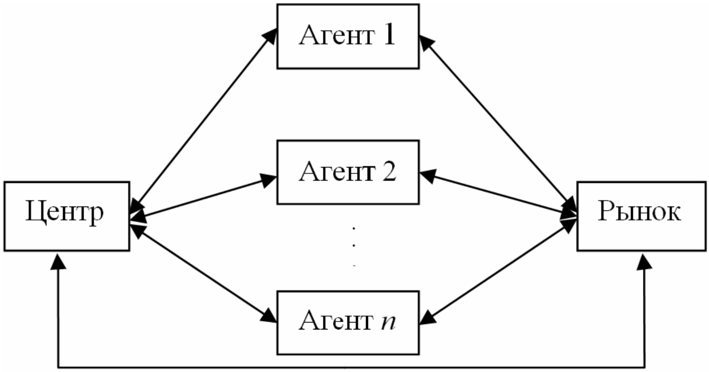

Рис. 2. Центр взаимодействует с агентами и рынком, агенты – с рынком

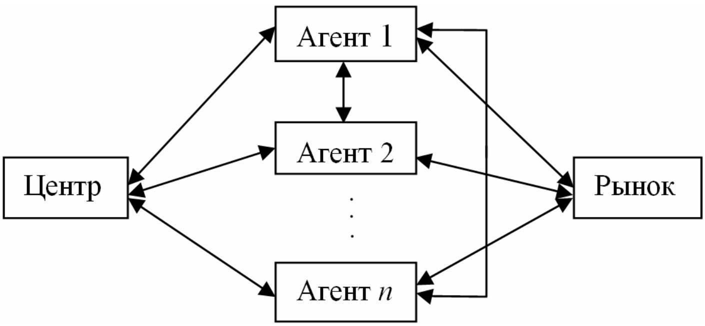

Рис. 3. Центр взаимодействует с агентами, агенты – с рынком и между собой

Будем полагать структуру сети на рис. 1 базовой, другие более сложные структуры отличаются от нее добавлением новых связей.

3. Теоретико-игровая модель сетевого взаимодействия

В модели выделены три группы участников: центр, агенты, рынок.

В ней управляющий сетевым взаимодействием целенаправленный субъект – центр, а управляемый целенаправленный субъект – агент. Рынок – неуправляемый субъект сети.

Центр – единственный участник сети, который имеет возможность координировать взаимодействия в ней. Кроме того, центр может в ряде случаев, в связи с изменением общей ситуации, действовать и как агент, т.е. конкурировать с другими агентами на рынке (рис. 2).

Агенты – это участники сети, которые непосредственно занимаются доведением товаров (услуг) до потребителей. К ним относятся торговые точки, предприятия сферы услуг (сети гостиниц, ресторанов быстрого питания и т.п.) или фирмы производители. Под активностью i-го агента q_i будем понимать объем оказываемых им услуг, объем реализованного товара населению и бизнесу или объем произведенного и реализованного на рынке товара.

Предположения модели состоят в следующем.

Рынок товара (услуг) традиционно описывается невозрастающей функцией спроса. В модели будет использоваться обратная функция спроса, т.е. цены $p(Q)$, которая складывается на рынке при объеме предложения товара (услуг) Q. Учитывается то, что p и Q связаны взаимно однозначной зависимостью, а технически удобнее в качестве аргумента рассматривать Q.

Функции затрат агентов $\phi_i(q_i)$ считаются зависящими только от активности самого агента. Функция затрат центра φ зависит от суммарной активности агентов сети $Q = \sum_{i=1}^{n} q_i$ и, если он еще выступает в роли агента (как на рис. 2), дополнительно от его собственной активности q_0. Каждый участник располагает полной информацией об обратной функции спроса и о своей функции затрат.

Агенты могут наблюдать лишь сложившиеся цены на рынке. Центр может изменить цены, но для этого ему надо повлиять на суммарный выпуск сети Q. Например, чтобы повысить активность сети, он может стимулировать агентов, пересмотрев условия договора с ними, добавить в сеть новых агентов и т. д.

Считается, что агенты не кооперируются друг с другом.

Если не принимать во внимание наличия центра, то рассматриваемая модель относится к моделям олигополии, в которых агенты могут повлиять на рынок выбором своего поведения.

Далее приведем описание двух базовых прикладных моделей многоагентной сети «центр–агент–рынок».

Модель «франчайзер–франчайзи–рынок» [1]. Рассматривается рынок однородного товара, состоящего из франчайзера и n фирм-франчайзи. Франчайзи реализует товар (услугу) потребителю по цене p в объеме q_i. Величина выручки (дохода) pq_i распределяется между двумя сторонами. Часть выручки kpq_i получает франчайзер, а другую ее часть $(1 - k)pq_i$ получает фирма-франчайзи; k – коэффициент (параметр), определяющий сервисную плату (роялти), которую франчайзер устанавливает для франчайзи в обмен за права на бизнес ($0 \le k \le 1$). Предполагается, что только франчайзи этой сети обладают эксклюзивными правами на данный бизнес в рамках определенной территории.

Формально интересы сторон можно записать в виде целевых установок на максимизацию их прибыли:

– для головной фирмы-франчайзера (центра):

$$\begin{aligned} & I(p,Q,k) = kpQ \quad \to \max_{k}, \\ & k \in [0,1]; \end{aligned} \tag{1}$$

– для фирмы-франчайзи (агента):

$$\begin{aligned} & \Pi_i(p(Q),q_i,k) = (1-k)\,p(Q)q_i - \phi_i(q_i) \quad \to \max_{q_i}, \\ & q_i \in [0,\overline{q}_i], \quad i = 1,\ldots,n. \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь $\overline{q}_i$ – предельно возможный объем активности агента. Франшизный взнос не включен авторами в базисную модель, а учитывается при необходимости. Значения параметров k и q_i являются основным предметом согласования условий договора франшизы. Интересы участников проявляются в том, чтобы отстоять желаемые для себя значения этих параметров и, соответственно, получить выгодные условия договора.

Модель «производитель–посредник–рынок» [3]. Рассматривается рынок однородного товара, состоящего из одного его производителя и n торговых посредников. Посредник продает потребителю товар по цене p, покупая его у производителя по цене $(1 - k)p$. Таким образом, величина kp есть разница между ценой спроса и ценой предложения на этом рынке. Эта разница и формирует доход посредника. В модели значение параметра k определяется фирмой-производителем.

Интересы сторон представляются в виде целевых установок на максимизацию их прибыли. Эта модель включает:

– задачу фирмы-производителя (центра):

$$I(p,Q,k) = (1-k)pQ - \phi(Q) \quad \to \max_{Q,k},$$

$$(3) \quad Q \in [0,\overline{Q}],$$

$$k \in [0,1];$$

– задачу посредника i (агента):

$$(4) \quad \Pi_i(p(Q),q_i,k) = kp(Q)q_i - \phi_i(q_i) \quad \to \max_{q_i}, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Здесь $\overline{Q}$ – предельно возможный объем активности производителя.

Как в той, так и другой модели полагается, что цена продукции и затраты субъектов определяются следующими выражениями:

$$(5) \quad p(Q) = a - bQ,\ \phi(Q) = c_0Q + d_0,\ \phi_i(q_i) = c_iq_i + d_i,\ i = 1, \ldots, n.$$

Здесь: цена продукции – линейная функция общего объема выпуска агентами; a – спрос на продукцию; b – снижение цены при увеличении на единицу общего выпуска; издержки фирм $\phi(Q)$ и $\phi_i(q_i)$ являются также линейными функциями, а c_0 и c_i – предельные переменные издержки; d_0 и d_i – постоянные издержки фирм, они не будут оказывать влияния на решение задач оптимизации участников.

4. Проработанность проблемы и новизна модели

В отечественной и зарубежной литературе явно прослеживается, что внимание исследователей приковано не в целом к триаде «центр–агент-рынок», а к отдельным ее составляющим: «центр–агент» и «агент–рынок».

Изучение систем «центр–агент» имеет немалую историю. Заметное место в ней принадлежит теории оптимального планирования и управления, математической теории иерархических многоуровневых систем, информационной теории иерархических игр, теории активных систем. В последнее время доминируют теоретико-игровые подходы, а в системах с неравноправными участниками – иерархические и рефлексивные игры. Взаимодействие игроков в иерархических структурах описывается играми Γ_i ($i = 1, 2, 3$) [9]. В условиях неполной информированности и отсутствии общего знания среди агентов модели рефлексивных игр дают возможность центру ставить и решать новые задачи управления действиями агентов (формирования допустимых структур информированности, приводящих к наиболее выгодным для центра решениям; выбора оптимального разбиения агентов по рангам рефлексии и т.д.) [9, 13–16]. Как отмечается в [9], рефлексивное управление может иметь место даже в случае полной информированности.

В задачах баланса интересов в системах «агент–рынок» ведущее место занимает модель Курно. При предположении Курно агенту нет необходимости знать что-либо о поведении других агентов. Он знает собственные объемы, но никакой информацией об объемах других агентов не располагает, да она ему и не требуется.

Различные авторы придавали большее значение разным аспектам применения модели Курно. Ряд авторов рассматривают модель, в которой все фирмы идентичны. Другая группа авторов исследует равновесие на рынке, где не обязательна идентичность всех фирм-агентов, используя те ли иные предположения о свойствах обратной функции спроса, функций затрат и функций прибыли. В ряде исследований внимание акцентировано на методах поиска решений. Отечественные ученые рассматривают вместо стандартной гипотезы Курно гипотезы более общего вида и модели олигополии с рынками производственных факторов [7, 8, 12, 22, 23, 24].

В значительном ряде публикаций в дополнение к модели Курно вводится модель фирмы, действующей по особым правилам. В отличие от фирм Курно, эта фирма, обладая возможностью первого хода, доминирует на конкурентном рынке, максимизируя собственную прибыль при явном учете реакции остальных фирм на изменение ее поведения. Остальные же фирмы, как и раньше, максимизируют собственную прибыль на основе принципа Курно–Нэша о неизменности поведения других фирм. Эту фирму-лидер называют еще фирмой Штакельберга, так как он первым ввел такую модель поведения [8, 24, 25]. Следуя предположению Курно-Штакельберга, агент должен быть уверен, что располагает полной информированностью о поведении остальных агентов.

Вместо такой классической интерпретации предположений Курно и Курно–Штакельберга можно считать, что каждый агент располагает некоторой гипотезой о скорости изменения общего объема Q в зависимости от изменения его собственного объема q_i (или гипотезой о влиянии изменения его собственного объема на цены: локально цены меняются пропорционально вариациям объемов. Учитывая опять, что p и Q связаны взаимно однозначно, то это техническая, а не принципиальная сторона вопроса). В представленных авторами статьи исследованиях разные агенты могут придерживаться разных гипотез. В частности, если i-й агент действует в рамках традиционных предположений Курно, то изменения в общем объеме Q, которые вносят другие агенты, игнорируются, т.е. агент придерживается гипотезы $\partial Q/\partial q_i = 1$. Если же i-й агент придерживается предположений Курно–Штакельберга, то для базовой линейной модели сетевого взаимодействия, которая будет дана ниже, $\partial Q/\partial q_i = 1/n$.

В ряде сетевых моделей, использующих концепции Штакельберга, таких агентов может быть несколько. Сеть, в которой все агенты ведут себя согласно модели Штакельберга (такая ситуация называется неравновесием по Штакельбергу), рассмотрена авторами статьи на базовой линейной модели сетевого взаимодействия [1–3].

Поскольку в указанных концепциях решения некооперативных игр сетевые взаимодействия организованы таким образом, что функции прибыли всех агентов достигают максимума, а спрос и предложение сбалансированы, то соответствующее состояние сети естественным образом трактуется как равновесное.

В классическом подходе принципы поведения Курно и Штакельберга рассматриваются в применении к фирмам-производителям. Определенный шаг на пути обобщения применения принципов Курно и Штакельберга сделан авторами этой статьи в совместной монографии [1]. В проведенных в ней модельных исследованиях франчайзинговых сетей на рынке олигополии агенты (франчайзи-конкуренты) не различаются как фирмы-производители, торговые точки или предприятия сферы услуг.

Авторским расширением традиционного модельного представления олигополистического рынка является введение в модель нового субъекта, на которого возлагаются функции управления сетевым взаимодействием агентов. Этим «новым» субъектом выступает центр. Таким образом, вместо традиционных систем «центр–агент» и «агент–рынок» рассматривается сеть «центр–агент–рынок».

5. Эффективность сетей

Эффективность сетей можно оценивать и сравнивать по различным критериям. К основным из них можно отнести: общий объем активности сети и отдельных агентов, прибыль центра и агентов, конкурентная цена на товары (услуги) и величина роялти (для франчайзинговой сети), цена спроса и предложения (для посреднической сети) и т.д.

Приведем аналитические выражения таких критериев для базовой прикладной модели многоагентной сети «франчайзер–франчайзи–рынок» в состоянии равновесия Курно [1]. Для определенности пусть это будет сеть, структура которой приведена на рис. 1, а верхний индекс K означает, что показатель (критерий) относится к равновесной по Курно сети.

Общий объем активности сети (выпуск товаров (услуг)) определяется выражением

$$(6)\quad Q^K = \frac{1}{(n+1)b}\left(na - \frac{\sum_{i=1}^{n} c_i}{1-k} \right).$$

Значение рыночной цены товара (услуг) определяется как

$$(7)\quad p^K = \frac{1}{n+1}\left(a + \frac{\sum_{i=1}^{n} c_i}{1-k} \right).$$

Активность франчайзи рассчитывается по формуле

$$(8)\quad q_j^K = \frac{1}{(n+1)b}\left(a + \frac{\sum_{i=1}^{n} c_i - (n+1)c_j}{1-k} \right),\quad j = 1, \ldots, n.$$

Имеем следующее выражение для прибыли франчайзи:

$$(9)\quad \Pi_j^K = \frac{1-k}{(n+1)^2 b}\left(a + \frac{\sum_{i=1}^{n} c_i - (n+1)c_j}{1-k} \right)^2 - d_j,\quad j = 1, \ldots, n.$$

Прибыль франчайзера задается выражением

$$(10)\quad I^K = \frac{k}{(n+1)^2 b}\left(a + \frac{\sum_{i=1}^{n} c_i}{1-k} \right)\cdot\left(na - \frac{\sum_{i=1}^{n} c_i}{1-k} \right).$$

Величина роялти для франчайзи составит

$$(11)\quad A_j^K = \frac{k}{(n+1)^2 b}\left(a + \frac{\sum_{i=1}^{n} c_i}{1-k} \right)\cdot\left(a + \frac{\sum_{i=1}^{n} c_i - (n+1)c_j}{1-k} \right),\ j = 1, \ldots, n.$$

Аналогичные формулы получены для посреднической сети в состоянии равновесия Курно, а также для франчайзинговой и посреднической сетей в состоянии равновесия и неравновесия по Штакельбергу [1, 3].

Пусть далее верхний индекс $\overline{S}$ означает, что показатель (критерий) относится к сети неравновесной по Штакельбергу, S – равновесной по Штакельбергу, M – сети, состоящей из одного единственного агента-монополиста, т.е. к монопольному рынку.

Сравнительный анализ K, S и $\overline{S}$ сетей приведем позже в разделе 6.3.

Здесь же отметим, что для монопольного рынка [1]: 1) общий объем активности сетей Q самый низкий; 2) монопольная цена p выше любой конкурентной цены; 3) суммарная прибыль всех агентов П самая высокая; прибыль центра I ниже, чем на конкурентном.

6. Повышение эффективности сетевого взаимодействия

Важной задачей центра, связанной с тем, что равновесная сеть не всегда обладает необходимой эффективностью, является повышение ее эффективности.

Это требует:

– обеспечения контролируемого роста сети;

– создания или ликвидации связей;

– целенаправленного воздействия на поведение, целевые функции участников, их активность и т.д.

6.1. ОБЕСПЕЧЕНИЕ КОНТРОЛИРУЕМОГО РОСТА СЕТИ И ОПТИМИЗАЦИЯ ЧИСЛА ЕЕ УЧАСТНИКОВ

Эта проблема связана с оценкой показателей эффективности функционирования сети от числа в ней агентов. Рассмотрим некоторые подходы к ее решению по критерию прибыли центра.

Для франчайзинговой сети в состоянии равновесия Курно оптимальное число франчайзи (без учета их первоначального взноса) находится из решения уравнения $\partial I^K/\partial n = 0$, где I^K определяется по (10). После ряда несложных преобразований полагая $c_i = e$, $i = 1, \ldots, n$; приходим к следующему выражению:

$$\frac{\partial I^K}{\partial n} = -\frac{ka(n-1)}{(n+1)^3 b} \cdot \left(a - \frac{e}{1-k}\right) \cdot \left(1 - \frac{2ne}{a(n-1)(1-k)}\right). \tag{12}$$

Отсюда, если параметры a, b, e, n таковы, что

$$1 - \frac{2ne}{a(n-1)(1-k)} < 0 \text{ или } 1 - \frac{2e}{a(1-k)} < \frac{1}{n},$$

то рост сети положительно связан с ростом прибыли франчайзера. При этом когда

$$1 - \frac{2e}{a(1-k)} \le 0,$$

то при любом числе агентов добавление в сеть нового агента приводит к росту прибыли центра. Если

$$1 - \frac{2e}{a(1-k)} > 0,$$

то при

$$n < \frac{1}{1 - \frac{2e}{a(1-k)}}$$

новый агент в сети приносит дополнительную прибыль центру, а при

$$n > \frac{1}{1 - \frac{2e}{a(1-k)}}$$

новый агент уменьшает прибыль центра.

Таким образом, при выполнении условия

$$1 - \frac{2e}{a(1-k)} > 0$$

оптимальный размер сети определяется выражением

$$(13)\quad n_I^K = \frac{a}{a - \frac{2e}{1-k}}.$$

Вычислительные эксперименты для франчайзинговых и посреднических сетей во всех трех случаях (равновесия Курно и Штакельберга, неравновесия Штакельберга) показали, что после оптимума идет достаточно медленное монотонное понижение прибыли центра [1].

Видимо, ∩-образная форма зависимости между прибылью центра и числом агентов объясняется тем, что при малом числе их числе агентов действие факторов, «положительно» влияющих на прибыль центра, превалирует над «отрицательно» влияющими. А при значительном числе агентов наблюдается обратная картина.

В этом плане могут представлять интерес те параметры сети, изменения которых (в большую или меньшую сторону) с ростом числа агентов всегда положительно связаны с прибылью центра. Ниже покажем справедливость для равновесия Курно, равновесия Штакельберга и неравновесия Штакельберга утверждений 1–7 [3, 5]. Чтобы упростить выкладки, при доказательстве положим, что $c_i = e$, $i = 1, \ldots, n$.

Утверждение 1. Уменьшение разницы между ценой спроса и ценой предложения (т.е. уменьшение параметра k) в модели «производитель–посредник–рынок» или повышение величины роялти (увеличение параметра k) в модели «франчайзер–франчайзи–рынок» приводит к повышению прибыли центра и положительно связано с увеличением числа агентов.

Доказательство. Рассмотрим вначале франчайзинговую сеть. Так, для равновесия Курно оптимальное число агентов определяется по формуле (13), а прибыль франчайзера – по формуле (10). Подстановка (13) в (10) дает

$$(14)\quad I^K = \frac{ka^2}{4b},$$

т.е. прибыль франчайзера растет при увеличении роялти.

При этом

$$\frac{\partial n_I^K}{\partial k} = \frac{2e/(1-k)^2}{\left[a - 2e/(1-k)\right]^2} > 0,$$

т.е. оптимальное число франчайзи растет с увеличением роялти, что подтверждает выдвинутое предположение для этой сети.

Рассмотрим теперь посредническую сеть в состоянии равновесия Курно. Оптимальное число агентов в этой сети определяется как

$$(15)\quad n_I^K = \frac{a - c_0/(1-k)}{a - 2e/k + c_0/(1-k)}.$$

Тогда при оптимальном числе посредников прибыль центра составит

$$(16)\quad I^K = \frac{1-k}{4b}\left(a - \frac{c_0}{1-k}\right)^2 - d.$$

Знак производной выражения (16) по k доказывает данное утверждение о повышении прибыли, а именно

$$\frac{\partial I^K}{\partial k} = -\frac{1}{4b}\left(a - \frac{c_0}{1-k}\right)\left(a + \frac{c_0}{1-k}\right) < 0.$$

Кроме того, по (15) следует

$$\frac{\partial n_I^K}{\partial k} = -\frac{\frac{2e}{k^2}\left[a - \frac{c_0}{(1-k)}\right] + \frac{2c_0}{(1-k)^2}\left(a - \frac{e}{k}\right)}{\left[\left(a - \frac{2e}{k} + \frac{c_0}{(1-k)}\right]^2}.$$

Заметим, что это выражение меньше нуля, так как $(a - e/k) > 0$ (в противном случае соотношения для посреднической сети, аналогичные соотношениям (6), (8–11) для франчайзинговой сети, не имеют смысла) и $(a - c_0/(1 - k)) > 0$ Чтобы доказать последнее неравенство, рассмотрим выражение для прибыли центра. Согласно (3) и (5) прибыль центра составляет

$$I = (1-k)pQ - \phi(Q) =$$

$$= (1-k)(a - bQ)Q - c_0Q - d_0 = (1-k)aQ - (1-k)bQ^2 - c_0Q - d_0 =$$

$$= (1-k)Q\left(a - \frac{c_0}{1-k}\right) - (1-k)bQ^2 - d_0.$$

Для положительности прибыли необходимо, чтобы выражение $a - c_0/(1 - k)$ было больше нуля. Поскольку параметр k контролирует центр, то очевидно, что это условие им будет выполнено.

Таким образом, мы показали, что оптимальное число посредников убывает с увеличением параметра k.

Итак, в случае равновесия Курно повышение цены предложения в рыночной цене товара приводит к повышению прибыли производителя и положительно связано с увеличением числа посредников.

Можно показать, что для посреднических и франчайзинговых сетей аналогичные выводы также имеют место в условиях равновесия и неравновесия Штакельберга. ●

В дополнение отметим, что повышение нормы лицензионного платежа (увеличение параметра k) в контрактах франчайзинга позволяет франчайзеру более активно и с большими правами решать множество задач, способствующих привлекательности и росту франчайзинговой системы: возмещения затрат, связанных с контролем франчайзинговой системы; осуществления текущей деятельности и введения новшеств в системе; ограничения месторасположения франшизы; контроля и снижения уровня риска в системе; увеличения спроса на продукцию [5, 6, 17, 18 ,20, 21].

Утверждение 2. В равновесии Курно, равновесии и неравновесии Штакельберга прибыль франчайзера при оптимальном числе агентов (франчайзи) составляет одну и ту же величину $\frac{ka^2}{4b}$.

Доказательство этого утверждения для равновесия Курно следует из вывода формулы (14). Аналогично показывается, что при оптимальном (по критерию прибыли франчайзера) числе агентов также $I^S = \frac{ka^2}{4b}$ и $I^{\bar{S}} = \frac{ka^2}{4b}$.●

Утверждение 3. В равновесии Курно, равновесии и неравновесии Штакельберга прибыль производителя при оптимальном числе посредников составляет одну и ту же величину, равную

$$\frac{1-k}{4b}\left(a-\frac{c_0}{1-k}\right)^2-d.$$

Доказательство этого утверждения для равновесия Курно следует из вывода формулы (16). Выражение прибыли производителя при оптимальном (по критерию прибыли производителя) числе посредников в равновесии и неравновесии Штакельберга, доказывающее данное утверждение, выводится аналогично формуле (16).●

Утверждение 4. Цена оптимальна, если оптимален размер сети.

Доказательство. Покажем справедливость этого утверждения для франчайзинга. Из выражении прибыли франчайзера (1), формулы цены (5) и формул для активности сети (6) и рыночной цены (7) в состоянии равновесия Курно имеем

$$\frac{\partial I}{\partial p}=\frac{\partial (kpQ)}{\partial p}=k\left(Q+p\frac{\partial Q}{\partial p}\right)=k\left(Q-\frac{p}{b}\right)=$$

$$=\frac{k}{n+1}\left[n\left(a-\frac{e}{1-k}\right)-\left(a+\frac{ne}{1-k}\right)\right]=\frac{k}{n+1}\left[n\left(a-\frac{2e}{1-k}\right)-a\right].$$

Последнее выражение равно нулю, а прибыль франчайзера достигает максимума при

$$n = n_I^K = \frac{a}{a - 2e/(1-k)},$$

т.е., согласно (13), при оптимальном размере сети.

Аналогичным образом, для посреднической сети, используя (3) и (5), получаем

$$\frac{\partial I}{\partial p} = \frac{\partial((1-k)pQ - c_0 Q - d_0)}{\partial p} = (1-k)\left(Q + p\frac{\partial Q}{\partial p}\right) - c_0\frac{\partial Q}{\partial p} =$$

$$= (1-k)\left(Q - \frac{p}{b}\right) + \frac{c_0}{b}.$$

Подставляя в полученное выражение формулы для Q и p в состоянии Курно посреднической сети [3], получаем, что

$$\frac{\partial I}{\partial p} = \frac{1-k}{n+1}\left[n\left(a - \frac{e}{k}\right) - \left(a + \frac{ne}{k}\right)\right] + \frac{c_0}{b}.$$

Это выражение обращается в ноль, если размер сети оптимален (15), т.е. при

$$n = n_I^K = \frac{a - c_0/(1-k)}{a - 2e/k + c_0/(1-k)}.$$

Таким образом, данное утверждение имеет место для франчайзинговой и посреднической сетей в состоянии равновесия Курно. Аналогичным образом, используя соотношения, приведенные в работах [1, 3], показывается его справедливость и для состояния равновесия и неравновесия по Штакельбергу.●

Утверждение 5. Снижение рыночной цены товара (услуги) p приводит к повышению прибыли центра и положительно связано с увеличением числа агентов, если сеть не достигла своего оптимального размера.

Доказательство. Если размер сети меньше оптимального, то, как следует из доказательства утверждения 4, $\partial I/\partial p < 0$. С другой стороны, нетрудно показать, что

$$\frac{\partial p^K}{\partial n} < 0, \frac{\partial p^S}{\partial n} < 0 \text{ и } \frac{\partial p^{\bar{S}}}{\partial n} < 0.$$

Это показывает, что рыночная цена снижается с ростом числа агентов. Для убедительности приведем выражения для этих производных для франчайзинговой сети

$$\frac{\partial p^K}{\partial n} = -\frac{1}{(n+1)^2}(a - \frac{e}{1-k}) < 0;$$

$$\frac{\partial p^S}{\partial n} = -\frac{1}{2n^2}(a - \frac{e}{1-k}) < 0;$$

$$\frac{\partial p^{\bar{S}}}{\partial n} = -\frac{2n}{n^2+1}(a + \frac{(n^2-1)e}{1-k}) < 0.$$

Таким образом, показано, что снижение цены положительно связано с ростом сети, если ее размер не достиг оптимального.●

В связи со сказанным, пользуясь удобным случаем, авторы приносят свои извинения за неточности, допущенные при доказательстве этого утверждения в работах [3, 5].

Утверждение 6. Повышение активности сети (т.е. объема товара (услуг) Q) приводит к повышению прибыли центра и положительно связано с ростом его сети, если сеть не достигла своего оптимального размера.

Доказательство. Этот вывод непосредственно следует из предыдущего, так как $p = a - bQ$.●

Утверждение 7. С ростом числа агентов растет выпуск Q и этот рост выпуска обеспечивается исключительно за счет новых агентов.

Доказательство. Для экономии покажем это только для франчайзинговой сети в равновесии Курно.

Из неравенства

$$\frac{\partial Q^K}{\partial n} = \frac{1}{(n+1)^2 b}\left(a - \frac{e}{1-k}\right) > 0$$

следует, что с ростом числа агентов растет и суммарный выпуск сети. Но вместе с тем

$$\frac{\partial q_i^K}{\partial n} = -\frac{1}{(n+1)^2 b}\left(a - \frac{e}{1-k}\right) < 0,$$

т.е. падает количество реализованных каждым агентом товаров (услуг). Таким образом, рост выпуска обеспечивается исключительно за счет новых агентов.●

Таким образом, развитие франчайзинговой системы не всегда дает рост прибыли франчайзера. Эффективному развитию франчайзинговой системы препятствуют не только свободное месторасположение франшизы и риск вложений франчайзера. Этот процесс может сопровождаться конфликтами между франчайзи одной и той же сети, каждый из которых заинтересован в монопольном обслуживании территории. Чтобы обеспечить баланс интересов при развитии сети, франчайзер должен выступать в роли «иерархического менеджера», используя для этого и закономерности во взаимосвязи между целями собственной прибыли и развитием франшизы.

Принимая во внимание полученные выше выводы, можно в целом ожидать, что конкуренция между агентами усиливает положительные отношения между величиной прибыли центра и развитием его сети.

6.2. СОЗДАНИЕ И ЛИКВИДАЦИЯ СВЯЗЕЙ

Рассмотрим одну из возможных постановок задачи создания новых связей: при формировании своей сети центр может принять решение о самостоятельном выходе на потребителя, минуя своих агентов. Такая ситуация иллюстрируется выше на рис. 2 в виде новой связи «центр–рынок». Рассмотрим эту ситуацию на примере франчайзинговой сети [4].

Есть по крайней мере два обстоятельства в пользу выхода на рынок франчайзера.

Во-первых, рассматривая задачи повышения эффективности сети в целом и получения собственного дополнительного дохода, франчайзер не может не учитывать, если позволяют условия франшизного договора, такую потенциально выгодную возможность.

Во-вторых, для франчайзера это самый надежный способ провести маркетинговое исследование рынка, условий ведения бизнеса на данной территории или в отрасли и апробацию элементов своей тиражируемой системы.

Для описания такой сети применим теоретико-игровую модель, которая отличается от базовой модели «франчайзер–франчайзи–рынок» (1–2) добавлением новой связи – «взаимодействие центра с рынком».

В этой модели интересы сторон – максимизация прибыли – записываются традиционным образом:

– для головной фирмы-франчайзера (центра):

$$(17)\quad \begin{aligned} & I(p,Q,q_0,k)=kpQ\quad + pq_0-\phi_0(q_0)\quad \to \max_{k,q_0}, \\ & k\in[0,1], \\ & q_0\in[0,\overline{q}_0]. \end{aligned}$$

– для фирмы-франчайзи (агента):

$$(18)\quad \begin{aligned} & \Pi_i(p(Q+q_0),q_i,k)=(1-k)\cdot p(Q+q_0)\cdot q_i-\phi_i(q_i)\quad \to \max_{q_i}, \\ & q_i\in[0,\overline{q}_i],\quad i=1,\dots,n. \end{aligned}$$

Здесь $q_0(q_i)$ – объем активности, а $\overline{q}_0(\overline{q}_i)$ – предельно возможный объем активности центра (агента); pq_0 – дополнительный доход франчайзера, обусловленный его активностью на рынке. Как и раньше, через Q обозначена суммарная активность франчайзи, т.е. $Q=\sum_{i=1}^{n} q_i$, а цена продукции с учетом деятельности на рынке головной фирмы определяется линейной функцией общего объема выпуска центром и агентами:

$$(19)\quad p(Q+q_0)=a-b\cdot(Q+q_0).$$

Полагается, что затраты центра заданы линейной функцией:

$$(20)\quad \phi_0(q_0)=c_0q_0+d_0,$$

где c_0 и d_0 – предельные переменные и постоянные издержки центра, соответственно.

Обозначим решение данной модели рынка для равновесия Курно верхним индексом «K^c».

В утверждениях 8–11 показывается эффективность выхода франчайзера на рынок Курно [1, 4].

Утверждение 8. С вступлением на рынок франчайзера повышается активность сети.

Доказательство. По (6) можно получить равенство

$$(n+1)Q^K = \sum_{i=1}^{n} \frac{a - \dfrac{c_i}{1-k}}{b},$$

где Q^K – активность франчайзинговой сети в состоянии равновесия Курно, в которой только n франчайзи взаимодействуют с потребителями.

Также имеем (см. например, [1, 4]), что

$$(n+1)(Q^{K^c} + q_0^{K^c}) = q_0^{K^c} + \sum_{i=1}^{n} \frac{a - \dfrac{c_i}{1-k}}{b}.$$

Отсюда получаем неравенство, доказывающее утверждение:

$$(21)\quad (Q^{K^c} + q_0^{K^c}) - Q^K = \frac{q_0^{K^c}}{n+1} > 0. \bullet$$

Но вместе с тем следует отметить, что снижается суммарная активность самих агентов. Действительно, по (21) имеем

$$Q^{K^c} - Q^K = \frac{q_0^{K^c}}{n+1} - q_0^{K^c} = -\frac{n}{n+1} q_0^{K^c} < 0.$$

Что и требовалось показать.

Утверждение 9. С вступлением на рынок франчайзера снижается цена товара (услуги).

Доказательство. Чтобы показать это утверждение, используем соотношения для цен

$p^K = a - bQ^K$ и $p^{K^c} = a - b(Q^{K^c} + q_0^{K^c})$.

Тогда с учетом (21) получаем

$$(22)\quad p^{K^c} - p^K = -b(Q^{K^c} + q_0^{K^c} - Q^K) = -b\frac{q_0^{K^c}}{n+1} < 0. \bullet$$

Утверждение 10. Выход на рынок франчайзера дает повышение общего дохода сети, если $a/b > Q^{K^c} + q_0^{K^c} + Q^K$; и, наоборот, при $a/b < Q^{K^c} + q_0^{K^c} + Q^K$ будет снижение общего дохода сети.

Доказательство. Оценим следующую разность доходов сети после и до вступления на рынок центра, используя формулу цены (19) и выражение (21):

$$p^{K^c}(Q^{K^c}+q_0^{K^c})-p^KQ^K=(a-b(Q^{K^c}+q_0^{K^c}))(Q^{K^c}+q_0^{K^c})-$$

$$-(a-bQ^K)Q^K=a(Q^{K^c}+q_0^{K^c})-aQ^K-b(Q^{K^c}+q_0^{K^c})^2+$$

$$+b(Q^K)^2=a\frac{q_0^{K^c}}{n+1}-b\frac{q_0^{K^c}}{n+1}(Q^{K^c}+q_0^{K^c}+Q^K)=$$

$$=\frac{q_0^{K^c}}{n+1}(a-b(Q^{K^c}+q_0^{K^c}+Q^K)).$$

Отсюда, если соотношение параметров a и b таково, что $a/b>Q^{K^c}+q_0^{K^c}+Q^K$, то выход на рынок франчайзера дает дополнительный доход сети. В противном случае его доход снизится.●

Отметим, что $a-b(Q^{K^c}+q_0^{K^c}+Q^K)$ формально представляет собой выражение цены, если на рынок поступил продукт в гипотетическом объеме $Q^{K^c}+q_0^{K^c}+Q^K$. Однако не гарантировано, что при такой активности сети цена будет положительной. Из содержательного смысла величин $p^K=a-bQ^K$ и $p^{K^c}=a-b(Q^{K^c}+q_0^{K^c})$ следует только, что $a/b>Q^K$ и $a/b>Q^{K^c}+q_0^{K^c}$, соответственно, $2a/b>Q^{K^c}+q_0^{K^c}+Q^K$.

Утверждение 11. Выход на рынок франчайзера дает повышение его собственного дохода, если

$$a/b>Q^{K^c}+q_0^{K^c}+Q^K\cdot\frac{1}{1+(n+1)\cdot{(1-k)}/{k}},$$

а при выполнении неравенства

$$a/b<Q^{K^c}+q_0^{K^c}+Q^K\cdot\frac{1}{1+(n+1)\cdot{(1-k)}/{k}}$$

следует снижение дохода франчайзера.

Доказательство. До вступления франчайзера на рынок его доход определялся выражением $kp^K Q^K$, а после вступления с учетом (17) – выражением $kp^{K^c} Q^{K^c} + p^{K^c} q_0^{K^c}$. Изменение дохода определяется разностью $kp^{K^c} Q^{K^c} + p^{K^c} q_0^{K^c} - kp^K Q^K$, которая с учетом (21), (22) и (19) преобразуется следующим образом:

$$kp^{K^c} Q^{K^c} + p^{K^c} q_0^{K^c} - kp^K Q^K = kp^{K^c}(Q^{K^c} + q_0^{K^c} - Q^K) + (1-k)p^{K^c} q_0^{K^c} +$$

$$+ kQ^K(p^{K^c} - p^K) = kp^{K^c} \frac{q_0^{K^c}}{n+1} + (1-k)p^{K^c} q_0^{K^c} - kbQ^K \frac{q_0^{K^c}}{n+1} =$$

$$= q_0^{K^c}\, k\Big/_{n+1}\left[1+(n+1)\cdot{}^{(1-k)}\Big/_{k}\right]\cdot\left[a - b\left(Q^{K^c} + q_0^{K^c} + Q^K \cdot \frac{1}{1+(n+1)\cdot{}^{(1-k)}\Big/_{k}}\right)\right].$$

Анализ знака полученного выражения, аналогичный тому, что был проведен для утверждения 10, завершает доказательство данного утверждения.●

6.3. РЕФЛЕКСИВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ АГЕНТАМИ

Приведем ряд основных сопутствующих понятий согласно работе [13].

«*Рефлексивной* является *игра*, в которой информированность игроков не является общим знанием. С точки зрения теории игр и рефлексивных моделей принятия решений целесообразно разделять информационную и стратегическую рефлексию.

Информационная рефлексия – процесс и результат размышлений игрока о том, каковы значения неопределенных параметров, что об этих значениях знают и думают его оппоненты (другие игроки). При этом собственно «игровая» компонента отсутствует, так как никаких решений игрок не принимает.

Стратегическая рефлексия – процесс и результат размышлений игрока о том, какие принципы принятия решений используют его оппоненты (другие игроки) в рамках информированности, которую он им приписывает в результате информационной рефлексии».

Рассмотрим одну из возможных задач информационной рефлексии для базовой франчайзинговой сети, в которой принимается во внимание влияние взаимной информированности агентов при принятии решений об объемах выпуска продукции (услуг) на конкурентных рынках.

Пусть в рефлексивной модели франчайзинговой системы не все параметры игры-франшизы являются общим знанием. В этой модели прибыль агентов-франчайзи зависит не только от их собственных стратегий – решений по объемам выпуска продукции (услуг), но и от спроса на нее потребителей, величина которого не является общим знанием. У каждого агента имеются вполне определенные представления о величине спроса, о том, каковы представления (также вполне определенные) остальных агентов, и т.д. В этой ситуации каждый агент рынка должен смоделировать стратегии других агентов, чтобы выбором собственной стратегии максимизировать свою прибыль, учитывая в ней стратегии других агентов, которые оказываются рациональными с точки зрения рассматриваемого агента по имеющимся у него представлениям о других агентах.

Ограничимся достаточно простым случаем точечной структуры информированности агентов-франчайзи о параметре спроса и поиска решений в соответствующей рефлексивной игре. Более сложные структуры информированности агентов можно найти в специальной литературе по рефлексивным играм, например [14–16].

Пусть имеется 2 типа агентов: 1) агенты, неадекватно информированные о величине спроса a, т.е. они оценивают спрос как $\alpha_i a$ ($\alpha_i \neq 1$). Согласно работе [16] агентов с $\alpha_i > 1$ будем называть «оптимистами», так как их ожидания превосходят реальный спрос, а с $\alpha_i < 1$, соответственно, «пессимистами»; 2) агенты, адекватно информированные о величине спроса a ($\alpha_i \neq 1$). Причем полагаем также, что все агенты одинаково взаимно информированы. В качестве концепции решений рефлексивной игры используем информационное равновесие, которое является обобщением равновесия Нэша в некооперативных играх [16].

Согласно условию $\partial\Pi_i/\partial q_i = 0$, определяющего оптимальный выпуск i-го агента, мы имеем

$$q_i = \frac{\alpha_i a - \frac{c_i}{1-k}}{b} - Q,$$

$$Q = \sum_{i=1}^{n} q_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\alpha_i a - \frac{c_i}{1-k}\right) - nQ,$$

$$Q = \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}\left(\alpha_i a - \frac{c_i}{1-k}\right).$$

Отсюда

$$(23)\quad q_i = \frac{\alpha_i a - \frac{c_i}{1-k}}{b} - \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}\left(\alpha_i a - \frac{c_i}{1-k}\right).$$

Приведем конкретный расчетный пример. Пусть имеется три агента: 1-й и 2-й являются адекватными, а 3-й агент – «пессимист» и $\alpha_3 = 0{,}8$. Положим также, что $a = 1$; $b = 0{,}001$; $k = 0{,}5$; $c_1 = c_2 = c_3 = 0{,}1$.

Для нахождения информационного равновесия $q_1^\bullet$, $q_2^\bullet$, $q_3^\bullet$ в этой рефлексивной игре используем соотношения (23). Получим следующий результат: $q_1^\bullet = q_2^\bullet = 250$, $q_3^\bullet = 50$.

Для сравнения классическое равновесие Курно–Нэша дает решение $q_1^\bullet = q_2^\bullet = q_3^\bullet = 200$.

Остановимся теперь на задаче стратегической рефлексии. В этой связи одна из возможных постановок задачи «управления» для мультиагентной сети может состоять в следующем: принять концепцию построения однородной сети, когда интеллектуальные агенты одного уровня рефлексии разыгрывают равновесие Курно–Нэша, или центру лучше проектировать такую сеть с региональными агентами-«лидерами» по Штакельбергу.

Подход к решению этой задачи приведем, основываясь на сравнительном анализе трех вариантов построения сети:

– все агенты действуют по Курно;

– один из агентов выступает «лидером», остальные действуют по Курно;

– все агенты выступают в роли «лидеров».

Сравнительный анализ вариантов построения сети проведем по следующим параметрам:

– общий объем активности франчайзинговой сети;
– активность отдельных фирм-франчайзи;
– рыночная цена продукции;
– прибыль фирм-франчайзи;
– прибыль франчайзера;
– величина роялти;
– оптимальное число фирм в франчайзинговой сети.

Чтобы несколько облегчить выкладки, положим, что предельные издержки всех фирм одинаковы и $c_i = e$, $i = 1, \ldots, n$. Напомним также, что указанным вариантам соответствуют индексы K, S, $\bar{S}$.

Утверждение 12. Для общего объема активности агентов франчайзинговой сети выполняются неравенства

(24) $Q^{\bar{S}}(k) > Q^S(k) > Q^K(k)$.

Доказательство. Из справедливости при целых $n > 1$ неравенств $\frac{n^2}{n^2+1} > \frac{2n-1}{2n} > \frac{n}{n+1}$ следуют доказываемые неравенства для общих активностей, которые с учетом зависимости их значений от параметра роялти k записываются ниже как функции от k.

Здесь по [1] $Q^S(k) = \frac{1}{2nb} \cdot \left((2n-1)a - \frac{\sum_{i=1}^n c_i + (n-1)c_1}{1-k} \right)$ и $Q^{\bar{S}}(k) = \frac{n}{(n^2+1)b} \cdot \left(na - \frac{\sum_{i=1}^n c_i}{1-k} \right)$, а $Q^K(k)$ задается формулой (6).●

Утверждение 13. Для объемов активности агентов франчайзинговой сети выполняются неравенства

(25) $q_1^S(k) > q_j^{\bar{S}}(k) > q_j^K(k) > q_{j\neq 1}^S(k)$.

Доказательство. Нетрудно установить при целых $n > 1$ справедливость неравенств: $\frac{1}{2} > \frac{n}{n^2+1} > \frac{1}{n+1} > \frac{1}{2n}$. Используя эти неравенства и формальные выражения для объемов выпуска фирм, получаем, что при заданном значении параметра роялти k имеют место следующие соотношения:

Здесь использованы выражение (8) и результаты работы [1]:

$$q_1^S(k) = \frac{1}{2b} \cdot \left(a + \frac{\sum_{i=1}^n c_i - (n+1)c_1}{1-k} \right);$$

$$q_j^S(k) = \frac{1}{2nb} \cdot \left(a + \frac{\sum_{i=1}^n c_i - 2nc_j + (n-1)c_1}{1-k} \right), \ j = 2, \ldots, n;$$

$$q_j^{\bar{S}}(k) = \frac{n}{(n^2+1)b} \cdot \left(a + \frac{n \cdot \sum_{i=1}^n c_i - (n^2+1)c_j}{1-k} \right), \ j = 1, \ldots, n. \ \bullet$$

Сопоставление общего объема выпуска в точках равновесия Курно и Штакельберга (см. (24)) с выпуском по отдельным фирмам (см. (25)) показывает, что рост общего выпуска в точке равновесия Штакельберга происходит за счет первой фирмы, в то время как другие снижают свою активность по сравнению с состоянием равновесия по Курно.

Утверждение 14. Для цен на продукцию справедливы неравенства

(26) $p^K(k) > p^S(k) > p^{\bar{S}}(k)$.

Доказательство. Используя формулы для цен (7) и в работе [1],

$$p^S = \frac{1}{2n} \cdot \left(a + \frac{\sum_{i=1}^n c_i + (n-1)c_1}{1-k} \right) \text{ и } p^{\bar{S}} = \frac{1}{n^2+1} \cdot \left(a + \frac{n \cdot \sum_{i=1}^n c_i}{1-k} \right),$$

имеем:

$$p^K - p^S = \frac{n-1}{2n(n+1)} \cdot \left(a - \frac{e}{1-k}\right) > 0;$$

$$p^S - p^{\bar{S}} = \frac{(n-1)^2}{2n(n^2+1)} \cdot \left(a - \frac{e}{1-k}\right) > 0. \bullet$$

Неравенства (26) прямо противоположны неравенствам (25), т.е. чем выше общий объем выпуска, тем ниже цена.

Утверждение 15. Для прибыли агентов (франчайзи) выполняются следующие неравенства:

$\Pi_1^S(k) > \Pi_1^K(k)$ при $n > 1$;

$\Pi_J^S(k) < \Pi_J^K(k)$ при $j = 2, \ldots, n$ и $n > 1$;

$\Pi_j^K(k) > \Pi_j^{\bar{S}}(k)$ при $j = 1, \ldots, n$ и $n > 1$;

$\Pi_J^S(k) < \Pi_J^{\bar{S}}(k)$ при $j = 1, \ldots, n$ и $n = 2,3$;

$\Pi_J^S(k) > \Pi_J^{\bar{S}}(k)$ при $j = 1, \ldots, n$ и $n \geq 4$.

Доказательство. По (9) и [1] при $j = 2, \ldots, n$ и $n > 1$, пропуская промежуточные математические выкладки, имеем:

$$\Pi_j^K - \Pi_j^S = \left(\frac{1-k}{(n+1)^2 b} - \frac{1-k}{4n^2 b}\right) \cdot \left(a - \frac{e}{1-k}\right)^2 =$$

$$= \frac{(1-k)(n-1)(3n+1)}{4n^2(n+1)^2 b} \cdot \left(a - \frac{e}{1-k}\right)^2 > 0.$$

При $j = 1, \ldots, n$ и $n > 1$ получаем:

$$\Pi_j^K - \Pi_j^{\bar{S}} == \left(\frac{1-k}{(n+1)^2 b} - \frac{n(1-k)}{(n^2+1)^2 b}\right) \cdot \left(a - \frac{e}{1-k}\right)^2 =$$

$$= \frac{(1-k)(n^3-1)(n-1)}{(n^2+1)^2(n+1)^2 b} \cdot \left(a - \frac{e}{1-k}\right)^2 > 0.$$

При $n > 1$:

$$\Pi_1^S - \Pi_1^K = \left(\frac{1-k}{4nb} - \frac{1-k}{(n+1)^2 b}\right) \cdot \left(a - \frac{e}{1-k}\right)^2 =$$

$$= \frac{(1-k)(n-1)^2}{4n(n+1)^2 b} \cdot \left(a - \frac{e}{1-k} \right)^2 > 0.$$

Далее при $j = 2, \ldots, n$ и $n > 1$ оценим разность

$$\Pi_j^S - \Pi_j^{\bar{S}} = \left(\frac{1-k}{4n^2 b} - \frac{(1-k)n}{(n^2+1)^2 b} \right) \cdot \left(a - \frac{e}{1-k} \right)^2 =$$

$$= \frac{(1-k)(n^2 + 2n\sqrt{n} + 1)((n-1)(\sqrt{n}-1) - 2)}{4n^2(n^2+1)^2 b} \cdot \left(a - \frac{e}{1-k} \right)^2.$$

Из последнего выражения следует, что при $n = 2, 3$ будет $\Pi_j^S - \Pi_j^{\bar{S}} < 0$, а при $n \geq 4$ справедливо $\Pi_j^S - \Pi_j^{\bar{S}} > 0$.

Объединение рассмотренных случаев завершает доказательство утверждения.●

Утверждение 16. Для прибыли франчайзера выполняются следующие неравенства:

1) $I^K > I^S > I^{\bar{S}}$, если параметры a, e, k, n таковы, что
$$1 - \frac{2e}{a(1-k)} > \frac{1}{n};$$

2) $I^K < I^S < I^{\bar{S}}$, если $n > 1$ и параметры a, e, k таковы, что
$$1 - \frac{2e}{a(1-k)} \leq 0.$$

Доказательство. При фиксированном значении параметра роялти k сравним друг с другом доходы центра в точках равновесия Курно, равновесия и неравновесия Штакельберга. Отметим, что здесь вывод результатов сравнения более полон и проведен более рациональным методом, чем это сделано в работе [1].

Используем соотношения (10) и аналогичные им, полученные в работе [1]:

$$I^S == \frac{(2n-1)k}{4n^2 b} \cdot \left(a - \frac{e}{1-k} \right) \left(a + \frac{(2n-1)e}{1-k} \right);$$

$$I^{\bar{S}} == \frac{n^2 k}{(n^2+1)^2 b} \cdot \left(a - \frac{e}{1-k} \right) \left(a + \frac{n^2 e}{1-k} \right).$$

По (12) $\partial I^K/\partial n < 0$, т.е. доход центра падает с ростом числа агентов, если параметры a, e, k таковы, что $1-\dfrac{2e}{a(1-k)} > \dfrac{1}{n}$.

Заметим, что I^S можно получить из выражения для I^K подстановкой вместо n выражения $2n - 1$. Учитывая, что при $n > 1$ будет $2n - 1 > n$ и при $1-\dfrac{2e}{a(1-k)} > \dfrac{1}{n}$ будет $1-\dfrac{2e}{a(1-k)} > \dfrac{1}{2n-1}$, имеем $I^K > I^S$.

Аналогично $I^{\bar{S}}$ получаем из выражения для I^S подстановкой вместо $2n - 1$ выражения n^2. Так как $n^2 > 2n - 1$, имеем $1-\dfrac{2e}{a(1-k)} > \dfrac{1}{n^2}$ и $I^S > I^{\bar{S}}$.

Таким образом, показали, что при

$$1-\frac{2e}{a(1-k)} > \frac{1}{n}$$

справедливы соотношения между доходами центра $I^K > I^S > I^{\bar{S}}$.

Пусть теперь параметры a, e, k таковы, что $1-\dfrac{2e}{a(1-k)} \leq 0$.

Тогда по (12) $\partial I^K/\partial n > 0$, т.е. доход центра растет с ростом числа агентов. Так как при $n > 1$ выполняются неравенства $n^2 > 2n - 1 > n$, то $I^K < I^S < I^{\bar{S}}$. ●

Случай $1-\dfrac{2e}{a(1-k)} \in \left(0, \dfrac{1}{n}\right]$ требует дополнительного сравнительного анализа доходов центра.

Утверждение 17. Для величины роялти выполняются следующие неравенства:

$$A_1^S(k) > A_1^K(k) > A_1^{\bar{S}}(k);$$

$$A_j^k(k) > A_j^S(k) \text{ при } j = 2, \ldots, n;$$

$$A_j^K(k) > A_j^{\bar{S}}(k) \text{ при } j = 2, \ldots, n;$$

$A_1^S(k) > A_j^S(k)$ при $j = 2, \ldots, n$.

Доказательство. Анализ начнем со сравнения величины роялти для состояний равновесия Курно и Штакельберга.

Для первой фирмы, т.е. при $j = 1$, на основании (11) и [1] имеем:

$$A_1^K(k) - A_1^S(k) =$$

$$= \frac{k}{(n+1)^2 b}\left(a + \frac{ne}{1-k}\right)\left(a - \frac{e}{1-k}\right) - \frac{k}{4nb}\left(a + \frac{(2n-1)e}{1-k}\right)\left(a - \frac{e}{1-k}\right) =$$

$$= -\frac{k(n-1)}{4n(n+1)^2 b} \cdot \left(a - \frac{e}{1-k}\right) \cdot \left[\left(a(n-1) + (2n^2 + n + 1)\frac{e}{1-k} \cdot\right)\right] < 0.$$

Для остальных фирм франчайзинговой сети ($j = 2, \ldots, n$) имеем:

$$A_j^K(k) - A_j^S(k) =$$

$$= \frac{k}{(n+1)^2 b}\left(a + \frac{ne}{1-k}\right)\left(a - \frac{e}{1-k}\right) - \frac{k}{4n^2 b}\left(a + \frac{(2n-1)e}{1-k}\right)\left(a - \frac{e}{1-k}\right) =$$

$$= \frac{k(n-1)}{4n^2(n+1)^2 b} \cdot \left(a - \frac{e}{1-k}\right) \cdot \left[\left(a(3n+1) + \frac{e}{1-k}(n-1)(2n+1)\right)\right] > 0.$$

Для точек равновесия Курно и неравновесия Штакельберга. по $j = 1, \ldots, n$ имеем:

$$A_j^K(k) - A_j^{\bar{S}}(k) =$$

$$= \left(a - \frac{e}{1-k}\right) \cdot \left[\frac{k}{(n+1)^2 \cdot b} \cdot \left(a + \frac{ne}{1-k}\right) - \frac{nk}{(n^2+1)^2 \cdot b} \cdot \left(a + \frac{n^2 e}{1-k}\right)\right] =$$

$$= \frac{k(n-1)}{(n+1)^2(n^2+1)^2 b}\left(a - \frac{e}{1-k}\right) \cdot \left[a(n^3 - 1) + n(2n^2 + n + 1) \cdot \frac{e}{1-k}\right] > 0.$$

Сравнение роялти первой фирмы в состояниях равновесия и неравновесия Штакельберга дает

$$A_1^S(k) - A_1^{\bar{S}}(k) =$$

$$= \left(a - \frac{e}{1-k}\right) \cdot \left[\frac{k}{4nb} \cdot \left(a + \frac{(2n-1)e}{1-k}\right) - \frac{nk}{(n^2+1)^2 b} \cdot \left(a + \frac{n^2 e}{1-k}\right)\right] =$$

$$= \frac{k(n-1)^2}{4n(n^2+1)^2 b} \cdot \left(a - \frac{e}{1-k}\right) \cdot \left[a(n+1)^2 + \frac{e}{1-k}(2n^2+n+1)\right] > 0.$$

Таким образом, мы показали:

$$A_1^S(k) > A_1^K(k) > A_1^{\bar{S}}(k);$$

$$A_j^k(k) > A_j^S(k), \text{ если } j = 2, \ldots, n;$$

$$A_j^K(k) > A_j^{\bar{S}}(k), \text{ если } j = 2, \ldots, n.$$

Также следует, что $A_1^S(k) > A_j^S(k)$ при $j = 2, \ldots, n$.●

Сравнение роялти по остальным фирмам ($j = 2, \ldots, n$) в состояниях равновесия и неравновесия Штакельберга, используя их формальные выражения по [1], показывает:

$$A_j^S(k) - A_j^{\bar{S}}(k) =$$

$$= \left(a - \frac{e}{1-k}\right) \cdot \left[\frac{k}{4n^2 b} \cdot \left(a + \frac{(2n-1)e}{1-k}\right) - \frac{nk}{(n^2+1)^2 b} \cdot \left(a + \frac{n^2 e}{1-k}\right)\right] =$$

$$= \frac{k}{b} \cdot \left(a - \frac{e}{1-k}\right) \times$$

$$\times \left[\left(a - \frac{e}{1-k}\right)\left(\frac{1}{4n^2} - \frac{n}{(n^2+1)^2}\right) + \frac{e}{1-k} \cdot \left(\frac{2n}{4n^2} - \frac{n(n^2+1)}{(n^2+1)^2}\right)\right] =$$

$$= \frac{k(n-1)}{4n^2(n^2+1)^2 b} \cdot \left(a - \frac{e}{1-k}\right) \times$$

$$\times \left[\left(a - \frac{e}{1-k}\right)(n^3 - 3n^2 - n - 1) - \frac{e}{1-k} 2n(n^2+1)(n+1)\right] =$$

$$= \frac{k(n^2-1)}{2n(n^2+1)b} \cdot \left(a - \frac{e}{1-k}\right)\left[\left(a - \frac{e}{1-k}\right) \cdot \frac{n^3 - 3n^2 - n - 1}{2n(n^2+1)(n+1)} - \frac{e}{1-k}\right].$$

Следует отметить, что при $n = 2, 3$ последнее выражение отрицательно.

При целом n = 7 выражение $\frac{n^3 - 3n^2 - n - 1}{2n(n^2+1)(n+1)}$ достигает своего абсолютного максимума, равного всего 0,0336. При этом имеем

$$\left(a - \frac{e}{1-k}\right) \cdot \frac{n^3 - 3n^2 - n - 1}{2n(n^2+1)(n+1)} - \frac{e}{1-k} = \left(a - \frac{e}{1-k}\right) \cdot 0{,}0336 - \frac{e}{1-k} =$$

$$= \left(a - \frac{e}{1-k}\right) \cdot 0{,}0336 - \frac{e}{1-k} \approx 0{,}0336 \cdot \left(a - 30{,}76 \cdot \frac{e}{1-k}\right).$$

Поэтому представляется, что для реальных данных последнее выражение будет отрицательным, т.е. следует предполагать, что $A_j^S(k) < A_j^{\bar{S}}(k)$. Данная гипотеза требует экспериментального подтверждения.

Утверждение 18. Для оптимального числа агентов (франчайзи) выполняются неравенства $n_I^K(k) > n_I^S(k) > n_I^{\bar{S}}(k)$.

Доказательство. Оптимальное с точки зрения дохода франчайзера число агентов в франчайзинговой сети без учета их первоначального взноса в точках равновесия Курно, равновесия и неравновесия Штакельберга заданы формальными соотношениями (13),

$$n_I^S = \frac{1 - \dfrac{e}{a(1-k)}}{1 - \dfrac{2e}{a(1-k)}} \text{ и } \left(n_I^{\bar{S}}\right)^2 = \frac{1}{1 - \dfrac{2 \cdot \bar{c}}{a(1-k)}},$$

соответственно [1]. Чтобы упростить анализ, введем обозначение выражения, встречающегося в каждом из этих соотношений:

$$z = 1 - \frac{2e}{a(1-k)}.$$

При этом естественно предполагать, что параметр роялти выбран так, что $z > 0$. Иначе указанные формальные соотношения для оптимального числа агентов теряют всякий содержательный смысл.

Тогда с учетом того, что $\dfrac{e}{a(1-k)} = \dfrac{1-z}{2}$ и $z < 1$, имеем:

$$n_I^K - n_I^S = \frac{1}{z} - \frac{1 - \dfrac{1-z}{2}}{z} = \frac{1-z}{2z} > 0,$$

$$n_I^K - n_I^{\bar{S}} = \frac{1}{z} - \frac{1}{\sqrt{z}} = \frac{\sqrt{z} - z}{z\sqrt{z}} > 0.$$

Также $n_I^S - n_I^{\bar{S}} = \dfrac{1 - \dfrac{1-z}{2}}{z} - \dfrac{1}{\sqrt{z}} = \dfrac{(1-\sqrt{z})^2}{2z} > 0.$

Таким образом, показано, что $n_I^K(k) > n_I^S(k) > n_I^{\bar{S}}(k)$. ●

6.4. ВОЗДЕЙСТВИЕ НА ЦЕЛЕВЫЕ ФУНКЦИИ АГЕНТОВ

Рассмотрим два вида воздействия центра на целевые функции агентов:

– воздействие через параметр k;

– воздействие через предельные переменные издержки агентов.

В предложенных моделях основное воздействие центра на целевые функции агентов сети осуществляется через <u>параметр k</u>.

Иерархическая игра Γ_1 дает наиболее выгодное для центра значение этого параметра при условии, что агенты действуют оптимальным для себя образом. Это значение находится из условия

$$\frac{\partial I}{\partial k} = 0, \tag{27}$$

где I – прибыль центра, а агенты оптимизируют выбор своей активности q.

Другие возможности поиска баланса интересов дает игра Γ_1 с фиксированными платежами. Рассмотрим эту игру для базовой франчайзинговой сети, в которой выплата агентом роялти строится не по схеме отчислений, размер которых устанавливается фиксированной ставкой процента от объема продаж, а по схеме фиксированной сервисной платы. Этот вариант расчета приведем для сети в состоянии равновесия Курно.

Размер фиксированной сервисной платы для j-й фирмы-франчайзи ($A^K_{\Gamma_1,j}$) устанавливается равным платежам франчайзеру, рассчитанным по стратегии Γ_1, т.е.

(28) $A^K_{\Gamma_1,j} = k^K_{\Gamma_1} \cdot p^K \cdot q^K_j$,

где $k^K_{\Gamma_1}$ определяется по (27), а p^K и q^K_j – по (7) и (8) при $k = k^K_{\Gamma_1}$.

Дополнительно после решения игры Γ_1 каждая фирма-франчайзи при фиксированном платеже решает задачу определения оптимальной для себя активности:

(29) $\Pi_i(p, q_i, A^K_{\Gamma_1,i}) = p \cdot q_i - c_i \cdot q_i - d_i - A^K_{\Gamma_1,i} \quad \to \max\limits_{q_i}$.

Ввиду важности для последующего анализа приведем решениям игры Γ_1 с фиксированной сервисной платой [1]:

(30) $Q^K_{\Gamma_1^f} = \dfrac{1}{(n+1)b} \cdot \left(na - \sum_{i=1}^n c_i\right)$;

(31) $p^K_{\Gamma_1^f} = \dfrac{1}{n+1} \cdot \left(a + \sum_{i=1}^n c_i\right)$;

(32) $q^K_{\Gamma_1^f,j} = \dfrac{1}{(n+1)b} \cdot \left(a + \sum_{i=1}^n c_i - (n+1)c_j\right)$, $j = 1, \ldots, n$;

(33) $\Pi^K_{\Gamma_1^f,j} = \dfrac{1}{(n+1)^2 \cdot b} \cdot \left(a + \sum_{i=1}^n c_i - (n+1)c_j\right)^2 - d_j - A^K_{\Gamma_1,j}$, $j = 1, \ldots, n$;

(34) $I^K_{\Gamma_1^f} = I^K_{\Gamma_1} = \sum_{i=1}^n A^K_{\Gamma_1,j} = \dfrac{k^K_{\Gamma_1}}{(n+1)^2 \cdot b} \cdot \left(a + \dfrac{\sum_{i=1}^n c_i}{1 - k^K_{\Gamma_1}}\right) \cdot \left(na - \dfrac{\sum_{i=1}^n c_i}{1 - k^K_{\Gamma_1}}\right)$;

(35) $A^K_{\Gamma_1,j} = \dfrac{k^K_{\Gamma_1}}{(n+1)^2 \cdot b} \cdot \left(a + \dfrac{\sum_{i=1}^n c_i}{1 - k^K_{\Gamma_1}}\right) \cdot \left(a + \dfrac{\sum_{i=1}^n c_i - (n+1)c_j}{1 - k^K_{\Gamma_1}}\right)$,

$j = 1, \ldots, n$.

Приведем ряд утверждений, показывающих эффективность механизмов с фиксированной сервисной платой.

Утверждение 19. Применение механизма с фиксированной сервисной платой дает максимальную активность сети.

Доказательство. Так, для равновесной по Курно сети, сравнивая выражения для общего объема активности (6) и (30), имеем для каждого $k \in (0, 1)$:

$$Q^K(k) = \frac{1}{(n+1)b}\left(na - \frac{\sum_{i=1}^n c_i}{1-k}\right) < Q^K_{\Gamma_1^f} = \frac{1}{(n+1)b}\cdot\left(na - \sum_{i=1}^n c_i\right),$$

что доказывает данное утверждение. Таким же образом подобный факт устанавливается для равновесия и неравновесия Штакельберга, а также для сети, в которой центр конкурирует с агентами. ●

Утверждение 20. Применение механизма с фиксированной сервисной платой дает минимальную цену товара (услуги).

Доказательство. Для доказательства этого утверждения используем соотношения для цен $p^K = a - bQ^K$ и $p^K_{\Gamma_1^f} = a - bQ^K_{\Gamma_1^f}$.

Тогда с учетом результата предыдущего пункта получаем

$$p^K_{\Gamma_1^f} - p^K = -b(Q^K_{\Gamma_1^f} - Q^K) < 0. \tag{36}$$

Этот факт справедлив для равновесия и неравновесия Штакельберга, а также для сети, в которой центр конкурирует с агентами.●

Утверждение 21. Механизмы Γ_1 с фиксированной сервисной платой дают максимальный по k ($k \in [0, 1)$) объем активности франчайзи, если его предельные издержки c_j не ниже средних.

Доказательство. Чтобы показать справедливость этого утверждения, достаточно сравнить выражения (32) и (8):

$$q^K_{\Gamma_1^f,j} - q^K_j(k) = \frac{1}{(n+1)b}\left(a + \sum_{i=1}^n c_i - (n+1)c_j\right) -$$

$$-\frac{1}{(n+1)b}\left(a + \frac{\sum_{i=1}^n c_i - (n+1)c_j}{1-k}\right) = \frac{kn}{(n+1)(1-k)b}\left(\frac{(n+1)c_j}{n} - \frac{\sum_{i=1}^n c_i}{n}\right) =$$

$$= \frac{kn}{(n+1)(1-k)b}\left(\frac{c_j}{n} + c_j - \bar{c}\right) > \frac{kn}{(n+1)(1-k)b}\left(c_j - \bar{c}\right) \geq 0.$$

Это утверждение справедливо также для агентов, действующих по Штакельбергу.●

Утверждение 22. Для прибыли центра выполняется равенство $I_{\Gamma_1^f} = I_{\Gamma_1}$.

Доказательство. Для равновесия Курно прибыль центра $I^K_{\Gamma_1^f}$ и $I^K_{\Gamma_1}$ дается одним и тем же выражением (34). Это же имеет место и для равновесия и неравновесия Штакельберга.●

Утверждение 23. При оптимальном для головной фирмы числе агентов (франчайзи) механизм Γ_1^f с фиксированной сервисной платой является менее выгодным для них, чем механизм Γ_1, при котором величина роялти рассчитывается от объема продаж.

Доказательство. Начнем с ситуации равновесия по Курно, для равновесия и неравновесия Штакельберга доказательство проводится аналогичным образом.

Используя (33), (28) и (7–9) оценим следующую разность доходов фирм при $k = k^K_{\Gamma_1}$:

$$\Pi^K_{\Gamma_1^f, j} - \Pi^K_{\Gamma_1, j} = \frac{1}{(n+1)^2 b} \cdot (a-e)^2 -$$

$$- \frac{k^K_{\Gamma_1}}{(n+1)^2 b} \cdot \left(a + \frac{ne}{1-k^K_{\Gamma_1}}\right) \cdot \left(a - \frac{e}{1-k^K_{\Gamma_1}}\right) - \frac{1-k^K_{\Gamma_1}}{(n+1)^2 b} \cdot \left(a - \frac{e}{1-k^K_{\Gamma_1}}\right)^2 =$$

$$= \frac{k^K_{\Gamma_1} e}{(1-k^K_{\Gamma_1})(n+1)^2 b} \cdot \left[\frac{k^K_{\Gamma_1} e}{1-k^K_{\Gamma_1}} - (n-1) \cdot \left(a - \frac{e}{1-k^K_{\Gamma_1}}\right)\right].$$

Оценим знак выражения в квадратных скобках. При

$$n = n_0^K = \frac{a-e}{a - \dfrac{e}{1-k^K_{\Gamma_1}}}$$

оно обращается в ноль, при $n > n_0^K$ – отрицательно, а при $n < n_0^K$ – положительно.

Таким образом, для точки равновесия Курно механизм Γ_1^f предпочтительнее для фирм, чем механизм Γ_1, если число фирм n на рынке меньше n_0^K, т.е.

$$(37)\quad n < \frac{a-e}{a-\dfrac{e}{1-k_{\Gamma_1}^K}}.$$

Если число фирм больше n_0^K, т.е. неравенство (37) меняется на противоположное, то предпочтительными будет механизм Γ_1 с роялти от объема продаж.

Отметим, что при оптимальном для головной фирмы числе франчайзи (n_I^K), определяемого без учета первоначального взноса соотношением (13), имеем $n_I^K > n_0^K$.

Действительно,

$$n_I^K = \frac{1}{1-\dfrac{2e}{a(1-k_{\Gamma_1}^K)}} = \frac{a}{a-\dfrac{2e}{1-k_{\Gamma_1}^K}} > n_0^K = \frac{a-e}{a-\dfrac{e}{1-k_{\Gamma_1}^K}},$$

так как после несложных преобразований доказательство этого неравенству сводится к очевидному неравенству:

$$a-\frac{2e}{1-k_{\Gamma_1}^K} > -\frac{e}{1-k_{\Gamma_1}^K}.$$

Здесь уместно привести следующее примечание: полагается, что $a-\dfrac{2e}{1-k_{\Gamma_1}^K} > 0$, иначе выражение (13) для n_I^K при $k = k_{\Gamma_1}^K$ не имеет содержательного смысла.

Что доказывает данное утверждение.●

Управление издержками франчайзи является важной задачей франчайзера. Практические пути ее решения достаточно разнообразны и предполагают различные услуги, которые могут оказываться франчайзером при продаже франшизы, поддержании и развитии франшизной системы [1].

Переходя к модельным исследованиям, рассмотрим влияние переменных предельных издержек агентов на прибыль центра.

Для франчайзинговой сети в равновесии Курно, используя соответствующее выражение (10) для прибыли франчайзера, имеем

$$(38)\quad \frac{\partial I^K}{\partial(\sum_{i=1}^n c_i)} = \frac{k}{(n+1)^2 b(1-k)} \cdot \left((n-1)a - \frac{2\sum_{i=1}^n c_i}{1-k} \right).$$

Прибыль франчайзера максимальна, если

$$\sum_{i=1}^n c_i = \frac{a(n-1)(1-k)}{2}.$$

Если суммарные предельные издержки франчайзи меньше этой величины, то знак производной положителен и прибыль франчайзера растет с их ростом; если больше, то прибыль падает с ростом суммарных предельных издержек.

Также имеем

$$(39)\quad \frac{\partial I^K}{\partial \bar{c}} = \frac{kn}{(n+1)^2 b(1-k)} \cdot \left((n-1)a - \frac{2n\bar{c}}{1-k} \right),$$

где $\bar{c} = \frac{\sum_{i=1}^n c_i}{n}$;

$$(40)\quad \frac{\partial I^K}{\partial e} = \frac{kn}{(n+1)^2 b(1-k)} \cdot \left((n-1)a - \frac{2ne}{1-k} \right).$$

Оптимальные для франчайзера предельные издержки франчайзи составят

$$(41)\quad e_I^K = \frac{a(n-1)(1-k)}{2n}.$$

Из (40) и (41) следует: если предельные издержки франчайзи меньше правой части (41), то прибыль франчайзера растет с их ростом; если больше, то прибыль падает с ростом предельных издержек.

Приведем также без вывода следующие соотношения для оптимальных предельных издержек франчайзи:

$$e_I^S = \frac{a(n-1)(1-k)}{2n-1};$$

$$e_I^{\bar{S}} = \frac{a(n^2-1)(1-k)}{2n^2}.$$

Приведем для сведения соответствующие выражения для посреднических сетей, опуская математические выкладки:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} c_i\right)_I^K = \frac{a(n-1)k}{2} + \frac{c_0(n+1)k}{2(1-k)};$$

$$e_I^K = \frac{a(n-1)k}{2n} + \frac{c_0(n+1)k}{2n(1-k)};$$

$$e_I^S = \frac{a(n-1)k}{2n-1} + \frac{c_0 nk}{(2n-1)(1-k)};$$

$$e_I^{\bar{S}} = \frac{a(n^2-1)k}{2n^2} + \frac{c_0(n^2+1)k}{2n^2(1-k)}.$$

Покажем справедливость следующего утверждения.

Утверждение 24. Произведение $\dfrac{\partial I^K}{\partial \bar{c}} \cdot \dfrac{\partial I^K}{\partial n}$ не больше нуля и обращается в нуль только при $\dfrac{\partial I^K}{\partial \bar{c}} = 0$ и $\dfrac{\partial I^K}{\partial n} = 0$.

Доказательство. Для доказательство используем (10) и (12), принимая во внимание замену e на $\bar{c}$. Тогда

$$\frac{\partial I^K}{\partial n} = -\frac{ka(n-1)}{(n+1)^3 b} \cdot \left(a - \frac{\bar{c}}{1-k}\right) \cdot \left(1 - \frac{2n\bar{c}}{a(n-1)(1-k)}\right). \tag{42}$$

С учетом (39) имеем

$$\frac{\partial I^K}{\partial \bar{c}} \cdot \frac{\partial I^K}{\partial n} = -\frac{k^2 n}{(n+1)^5 b^2 (1-k)} \left(a - \frac{\bar{c}}{1-k}\right) \cdot \left((n-1)a - \frac{2n\bar{c}}{1-k}\right)^2.$$

Из (39), (42), последнего выражения и условия

$$a - \frac{\bar{c}}{1-k} > 0,$$

показанного ранее в статье, следует доказываемое утверждение.●

Необходимо отметить, что знак каждого сомножителя определяется знаком выражения

$$(n-1)a - \frac{2n\bar{c}}{1-k},$$

зависящего от выбора параметров a, n, $\bar{c}$, k.

Таким образом: 1) если доход центра растет с ростом средних переменных издержек агентов, т.е.

$$(n-1)a - \frac{2n\bar{c}}{1-k} > 0,$$

то он (доход центра) падает с увеличением числа агентов, и наоборот; 2) если доход центра падает с ростом средних переменных издержек агентов, т.е.

$$(n-1)a - \frac{2n\bar{c}}{1-k} < 0,$$

то он (доход центра) растет с увеличением числа агентов, и наоборот.

Отсюда следуют такие рекомендации для центра: при росте издержек агентов и сопутствующему ему падении дохода центра целесообразно увеличивать сеть, а при росте издержек агентов и сопутствующему ему росте дохода центра последнему целесообразно не развивать сеть.

Справедливость доказанного утверждения показывается аналогичным образом для посреднических и франчайзинговых сетей в состоянии равновесия Курно и неравновесия Штакельберга. Для сетей в равновесии Штакельберга вместо средних переменных издержек агентов следует рассмотреть случай равенства переменных издержек агентов, т.е. $c_i = e$, $i = 1, \ldots, n$.

7. Заключение

В статье на основе единого теоретико-игрового подхода представлен спектр модельных исследований многоагентных франчайзинговых и посреднических сетей на конкурентных рынках.

Представлены базовые теоретико-игровые модели сетевого взаимодействия «франчайзер–франчайзи–рынок» и «производитель–посредник–рынок». В них сделаны обычные для моделей олигополии предположения о линейности функций затрат и обратной функции спроса, дающие возможность аналитического представления решения. В отличие от классических моделей олигополии, состоящей исключительно из агентовпроизводителей, в предложенной базовой модели франчайзинговых сетей агенты могут являться фирмами-производителями, торговыми точками или предприятиями сферы услуг, а в модели посреднической сети агенты выполняют только посреднические функции, производителем выступает только центр. Авторским расширением традиционного модельного описания олигополистического рынка является введение в модель нового субъекта-центра, на которого возлагаются функции управления сетевым взаимодействием агентов. Таким образом, вместо традиционных систем «центр–агент» и «агент–рынок» рассматривается сеть «центр–агент–рынок».

При формировании устойчивых сетей авторы опирались на наиболее распространенные на сегодняшний день классические концепции решения некооперативных игр – равновесия Курно–Нэша и равновесия по Штакельбергу.

Рассмотрен ряд важных задач центра, связанных с повышение эффективности стабильных сетей. При решении задачи обеспечения контролируемого роста сети и оптимизации числа ее участников отмечены закономерности во взаимосвязи между целями собственной прибыли центра и развитием сети. Установлены условия, при которых для повышения эффективности сети в целом и получения собственного дополнительного дохода центру целесообразно принять решение о самостоятельном выходе на потребителя, конкурируя со своими агентами.

Рефлексивное управление сетевым взаимодействием представлено в статье задачами информационной и стратегической рефлексии. В задаче информационной рефлексии рассмотрен случай точечной структуры информированности агентов о параметре спроса и поиск решений в соответствующей рефлексивной игре. В задаче стратегической рефлексии анализируются различные концепции построения сети: 1) однородная сеть, когда все интеллектуальные агенты одного уровня рефлексии разыгрывают равновесие Курно–Нэша; 2) однородная сеть, когда все интеллектуальные агенты одного уровня рефлексии выступают «лидерами» по Штакельбергу; 3) неоднородная сеть, в которой некоторые агенты выступает региональными «лидерами» по Штакельбергу, а остальные агенты действуют по Курно–Нэшу.

Рассмотрены возможности повышения эффективности сетей на основе стратегий игр Γ_1 и игр Γ_1 с фиксированными платежами, проведен сравнительный анализ этих игр. Представлены также модельные исследования влияния предельных переменных издержек агентов на прибыль центра и его решения по развитию сети.

Литература

1. АЛГАЗИН Г.И., АЛГАЗИНА Д.Г. *Моделирование многоагентных франчайзинговых систем.* – Барнаул: АлтГУ, 2009. – 91 с.
2. АЛГАЗИН Г.И., АЛГАЗИНА Д.Г. *Теоретико-игровое моделирование сетевого взаимодействия целенаправленных субъектов в многоагентной системе «центр–агент–конкурентный рынок»* // Известия АлтГУ. – 2012. – №1/2(73). – С. 61–65.
3. АЛГАЗИН Г.И., АЛГАЗИНА Ю.Г. *Моделирование поведения экономических агентов в системе «производитель–посредник–конкурентный рынок»* // Управление большими системами. – 2011. –№32. – С. 83–108.
4. АЛГАЗИНА Д.Г. *Теоретико-игровое моделирование отношений франчайзинга в условиях конкуренции центра и агентов рынке* // Известия АлтГУ. – 2012. – №1/2(73). – С. 66–71.
5. АЛГАЗИНА Д.Г., АЛГАЗИН Г.И. *Моделирование взаимосвязи прибыли франчайзера и развития франчайзинговой системы на конкурентном рынке* // Известия АлтГУ. – 2011. – №2/1(70). – С. 261–264.
6. АРДАШЕВА Л.М., СКОПИН А.О. *Положительные отношения между целями прибыли франчайзера и ростом франчайзинговой системы* // Управление экономическими системами: электрон. науч. журн.[Электронный ресурс]. – 2007. – №2(10). – Режим доступа: http://uecs.mcnip.ru (дата обращения: 08.05.2013).

7. БУЛАВСКИЙ В.А. *Модель олигополии с рынками производственных факторов* // Экономика и математические методы. – 1999. – Т. 35, №4. – С. 78–86.
8. БУЛАВСКИЙ В.А., КАЛАШНИКОВ В.В. *Равновесие и обобщенных моделях Курно и Штакельберга* // Экономика и математические методы. – 1995. – Т.31, вып.4. – С. 151–163.
9. ГЕРМЕЙЕР Ю.Б. *Игры с непротивоположными интересами.* – М.: Наука, 1976. – 328 с.
10. ГУБКО М.В. *Управление организационными системами с сетевым взаимодействием агентов. I. Обзор теории сетевых игр* // Автоматика и телемеханика. – 2004. – №8. – С. 115–132.
11. ГУБКО М.В. *Управление организационными системами с сетевым взаимодействием агентов. II. Задачи стимулирования* // Автоматика и телемеханика. – 2004. – №9. – С. 131–148.
12. ДЮСУШЕ О.М. *Статическое равновесие Курно-Нэша и рефлексивные игры олигополии: случай линейных функций спроса и издержек* // Экономический журнал ВШЭ. – 2006.– №1. – С. 3–32.
13. НОВИКОВ Д.А. *Модели стратегической рефлексии* // Автоматика и телемеханика. – 2012. – №1.– С. 3–18.
14. НОВИКОВ Д.А., ЧХАРТИШВИЛИ А.Г. *Рефлексивные игры*. – М.: СИНТЕГ, 2003. – 149 с.
15. НОВИКОВ Д.А., ЧХАРТИШВИЛИ А.Г. *Прикладные модели информационного управления*. – М.: ИПУ РАН, 2004. – 129 с.
16. ЧХАРТИШВИЛИ А.Г. *Информационное равновесие: точечные структуры информированности* // Автоматика и телемеханика. – 2003. – №10. – С. 111–122.
17. BRICKLEY J., DARK F. *The Choice of Organization Form: The Case of Franchising* // Journal of Financial Economics. – 1987. – Vol. 18. – P. 401–420.
18. CASTROGIOVANNI G., ROBERT J., SCOTT J. *Franchise Failure Rates: An Assessment of Magnitude and Influencing Factors* // Journal of Small Business Management. – 1993. – Vol. 31(2). – P. 105–114.

19. JACKSON M.O., VOLINSKY A.A. *Strategic Model of Social and Economic Networks* // Journal of Economic Theory. – 1996. – №71. – P. 44–74.
20. KNOTT A.M. *The Dynamic Value of Hierarchy* // Management Science. – 2001. – Vol. 47(3). – P. 430–448.
21. LAL R. *Improving Channel Coordination Through Franchising* // Marketing Science. – 1990. – Vol. 5. – P. 299–318.
22. METZLER C., HOBBS B.S., PANG J.-S. *Nash-Cournot Equilibria in Power Markets on a Linearized DC network with Arbitrage: Formulations and Properties* // Networks and Spatial Economics. – 2003. – Vol. 3, №2. – P. 123–150.
23. NOVSHEK W. *On the Existence of Cournot Equilibrium* // Review Economic Studies. – 1985. – Vol. 52(1), №168. – P. 85–98.
24. SHERALI H.D., SOYSTER A.L., MURPHY F.H. *Stackelberg-Nash-Cournot Equilibria: Characterizations and Computations* // Operatios Research. – 1983. – Vol. 31, №2. – P. 253–276.
25. STACKELBERG H. *The Theory of the Market Economy*. – Oxford: Oxford Univ. Press, 1952. – 289 p.

MODELLING NETWORK INTERACTIONS ON COMPETITIVE MARKETS

Gennady Algazin, Altai State University, Barnaul, Doctor of Science, professor (algazin@socio.asu.ru).
Daria Algazina, Altai State University, Barnaul, associated professor (darya.algazina@mail.ru).

Abstract: We suggest a game-theoretical model of a multi-agent network, whose purpose is promotion of a homogeneous product (*or a service*) *on a competitive market. We study efficiency of networks employing Cournot and Stackelberg equilibria for the basic applied model of «franchisor-franchisee-market» and that of «producer-mediator-market» under linear costs and inverse demands* (*which is typical for models of oligopoly*)*, and obtain close-form solutions. The novel feature of the model is the presence of a principal who is responsible for network interactions management and network efficiency improvement.*

Keywords: networks' typology, game-theoretical model, network equilibrium, Cournot, Stackelberg, network interactions management, network efficiency, franchising, trade mediation.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии А. Г. Чхартишвили
Поступила в редакцию 08.10.2012.
Опубликована 31.05.2013.