

**Институт проблем управления  
им. В.А. Трапезникова РАН**

# **УПРАВЛЕНИЕ БОЛЬШИМИ СИСТЕМАМИ**

***Выпуск 43***  
***Май 2013***

**СБОРНИК  
ТРУДОВ**

ISSN 1819-2467

Регистрационный номер Эл. №ФС77-44158 от 09 марта 2011 г.

**Москва – 2013**

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
*Институт проблем управления*  
*им. В.А. Трапезникова*

**УПРАВЛЕНИЕ  
БОЛЬШИМИ  
СИСТЕМАМИ**

**СБОРНИК ТРУДОВ**

*Выпуск 43*

**Москва – 2013**

### КООРДИНАЦИОННЫЙ СОВЕТ

Академики РАН: Васильев С.Н., Емельянов С.В., Коровин С.К., Куржанский А.Б., Федосов Е.А., Черноусько Ф.Л.; члены-корреспонденты РАН: Желтов С.Ю., Каляев И.А., Пархоменко П.П., Попков Ю.С.; д-ра техн. наук: Бутковский А.Г., Дорофеев А.А., Кузнецов О.П., Кульба В.В., Кротов В.Ф., Лотоцкий В.А., Павлов Б.В., Поляк Б.Т., Рутковский В.Ю.

### РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

**Главный редактор:** член-корр. РАН Новиков Д.А. **Отв. секретарь:** к.т.н. Губко М.В.  
Д-ра техн. наук: проф. Алескерев Ф.Т. (ГУ ВШЭ), проф. Артамонов Е.И. (ИПУ РАН), д-р экон. наук, проф. Архипова М.Ю. (ИПИ РАН), д-ра техн. наук: проф. Афанасьев В.Н. (МИЭМ), проф. Бахтадзе Н.Н. (ИПУ РАН), проф. Бурков В.Н. (ИПУ РАН), проф. Вишневский В.М. (ИППИ РАН), д-р экон. наук, проф. Голиченко О.Г. (ЦЭМИ РАН), д-р физ.-мат. наук, проф. Добровидов А.В. (ИПУ РАН), д-ра техн. наук: проф. Заложнев А.Ю. (ИПУ РАН), проф. Ириков В.А. (МФТИ), проф. Калянов Г.Н. (ИПУ РАН), проф. Касаткин С.И. (ИПУ РАН), проф. Каравай М.Ф. (ИПУ РАН), канд. техн. наук Квинто Я.И. (ИПУ РАН), д-р экон. наук, проф. Клочков В.В. (ИПУ РАН), д-ра техн. наук: проф. Кононенко А.Ф. (ВЦ РАН), канд. техн. наук Куливец С.Г. (ИПУ РАН), проф. Курдюков А.П. (ИПУ РАН), проф. Лебедев В.Г. (ИПУ РАН), к-т техн. наук, доцент Лебедев В.Н. (ИПУ РАН), д-р экон. наук, проф. Ловчиновский Э.В. (ИПУ РАН), д-р техн. наук, проф. Мандель А.С. (ИПУ РАН), д-р экон. наук, проф. Нижегородцев Р.М. (ИПУ РАН), д-ра техн. наук: проф. Новосельцев В.Н. (ИПУ РАН), проф. Орлов А.И. (МВТУ), д-р физ.-мат. наук, проф. Рапопорт Л.Б. (ИПУ РАН), д-р техн. наук, проф. Рыков А.С. (МИСИС), д-р экон. наук, проф. Секерин В.Д. (ИПУ РАН), д-ра техн. наук: проф. Сидельников Ю.В. (МАИ), проф. Совлуков А.С. (ИПУ РАН), д-р экон. наук, проф. Сухарев О.С. (Ин-т экономики РАН), д-ра техн. наук: проф. Уткин В.А. (ИПУ РАН), проф. Хоботов Е.Н. (МВТУ), д-ра физ.-мат. наук: доцент Чеботарев П.Ю. (ИПУ РАН), проф. Чхартишвили А.Г. (ИПУ РАН), проф. Щербаков П.С. (ИПУ РАН).

### РЕГИОНАЛЬНЫЕ РЕДАКЦИОННЫЕ СОВЕТЫ

**Волгоград** – д-ра физ.-мат. наук: проф. Воронин А.А., проф. Лосев А.Г. (ВолГУ); **Воронеж** – д-р техн. наук, проф. Баркалов С.А., д-р физ.-мат. наук, проф. Головинский П.А. (ВГАСУ), д-р техн. наук, проф. Подвальный С.Л. (ВГТУ); **Ижевск** – д-р физ.-мат. наук, проф. Непейвода Н.Н., к-т физ.-мат. наук, проф. Родионов В.И. (УдмГУ); **Иркутск** – д-ра физ.-мат. наук: проф. Бычков И.В., проф. Лакеев А.В. (ИДСТУ СО РАН); **Казань** – д-р физ.-мат. наук, проф. Маликов А.И., д-р техн. наук, проф. Сиразетдинов Р.Т. (КГТУ-КАИ); **Липецк** – д-ра техн. наук: проф. Кузнецов Л.А., проф. Погодаев А.К. (ЛГТУ); **Самара** – д-ра экон. наук: проф. Богатырев В.Д., проф. Гераскин М.И., д-р техн. наук, проф. Засканов В.Г. (СГАУ); **Санкт-Петербург** – д-ра физ.-мат. наук: проф. Петросян Л.А. (СПбГУ), проф. Фрадков А.Л. (ИПМ РАН); **Старый Оскол** – д-р техн. наук, проф. Еременко Ю.И. (СТИ); **Тверь** – д-ра техн. наук: проф. Кузнецов В.Н., проф. Палюх Б.В. (ТГТУ).

**Адрес редакции:** 117997, г. Москва, ул. Профсоюзная, д. 65.

**Адрес в Интернет:** [ubs.mtas.ru](http://ubs.mtas.ru).

Номер гос. регистрации электронного научного издания (ЭНИ): 0421200023.

© ИПУ РАН, 2013

# СОДЕРЖАНИЕ

## *Системный анализ*

---

- Губанов Д. А., Макаренко А. В., Новиков Д. А.**  
*Методы анализа терминологической структуры предметной области (на примере методологии).....* 5
- Жилякова Л. Ю.**  
*Эргодические циклические ресурсные сети. I. Колебания и равновесные состояния при малых ресурсах.....* 34
- Чеботарев П. Ю., Агаев Р. П.**  
*Об асимптотике в моделях консенсуса.....* 55

## *Математическая теория управления*

---

- Панюков А. В., Голодов В. А.**  
*Программная реализация алгоритма решения системы линейных алгебраических уравнений с интервальной неопределенностью в исходных данных.....* 78
- Поздяев В. В.**  
*Атомная оптимизация, часть 2: многомерные задачи и полиномиальные матричные неравенства.....* 95

## *Анализ и синтез систем управления*

---

- Жучков Р. Н.**  
*Стабилизирующее сетевое управление линейными дискретными объектами с использованием банков сенсоров и исполнительных устройств.....* 124

## *Информационные технологии в управлении*

---

- Заикин О. С., Семенов А. А., Посыпкин М. А.**  
*Процедуры построения декомпозиционных множеств для распределенного решения SAT-задач в проекте добровольных вычислений SAT@HOME.....* 138
- Тарков М. С.**  
*Об эффективности построения гамильтоновых циклов в графах распределенных вычислительных систем рекуррентными нейронными сетями.....* 157

***Управление в социально-экономических системах***

---

**Алгазин Г. И., Алгазина Д. Г.**

*Моделирование сетевого взаимодействия на конкурентных рынках.....* 172

***Управление техническими системами и технологическими процессами***

---

**Базенков Н. И.**

*Динамика двойных наилучших ответов в игре формирования топологии беспроводной ad hoc сети .....* 217

**Шаров В. Д.**

*Применение байесовского подхода для уточнения вероятностей событий в автоматизированной системе прогнозирования и предотвращения авиационных происшествий.....* 240

***Управление подвижными объектами и навигация***

---

**Туфанов И. Е., Щербатюк А. Ф.**

*Об алгоритмах высокоточного измерения параметров водной среды, основанных на использовании группы АНПА.....* 254

***Технические и программные средства управления***

---

**Знаменский С. В.**

*Архитектура распределенной памяти для изменчивой компьютерной среды.....* 271

УДК 51-7  
ББК 22.18

## МЕТОДЫ АНАЛИЗА ТЕРМИНОЛОГИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ ПРЕДМЕТНОЙ ОБЛАСТИ (НА ПРИМЕРЕ МЕТОДОЛОГИИ)

Губанов Д. А.<sup>1</sup>, Макаренко А. В.<sup>2</sup>, Новиков Д. А.<sup>3</sup>  
(ФГБУН Институт проблем управления РАН, Москва)

*Предлагается автоматизированный экспертный подход к синтезу и анализу терминологической структуры предметной области. Одним из ключевых отличий разработанной методики является наличие в её составе операций формального анализа, направленного на получение количественных оценок, характеризующих терминологическую структуру изучаемой предметной области. Базовые возможности разработанного подхода продемонстрированы на примере общей методологии.*

Ключевые слова: терминологическая структура, теория графов, методология

### 1. Введение

В соответствии с определением, приведенным в [20], *теория* – форма достоверного научного знания о некоторой совокупности объектов, представляющая собой систему взаимосвязанных утверждений и доказательств и содержащая методы объяснения и предсказания явлений и процессов некоторой *предметной области*, то есть всех явлений и процессов, описываемых данной теорией.

Изложение научных результатов, полученных в той или иной предметной области, ведется, как правило, на соответст-

---

<sup>1</sup> Дмитрий Алексеевич Губанов, к.т.н., с.н.с. (dmitry.a.g@gmail.com)

<sup>2</sup> Андрей Викторович Макаренко, к.т.н., с.н.с. (avm.science@mail.ru)

<sup>3</sup> Дмитрий Александрович Новиков, член-корр. РАН, зам. директора (novikov@ipu.ru)

вующем *профессиональном языке* [19], использующем, помимо общепотребительной, свою специальную *терминологию*.

То есть каждой предметной области можно условно поставить в соответствие (о том, как это сделать, речь пойдет ниже) *множество терминов*, характеризующих эту предметную область и используемых в ней. Совокупность этих терминов и связей между ними (о видах связей также речь пойдет ниже) будем называть *терминологической структурой* предметной области. Отметим, во-первых, что в отличие от теории *терминологических систем* (см., например, [1, 2, 10, 11, 27, 31]), нас интересуют не общие качественные закономерности формирования и развития терминологии определенной отрасли знания, а количественные свойства ее текущего «среза», например такие, как в работе [25], для предметной области «Сетевые центры». Во-вторых, в отличие от исследуемых в рамках искусственного интеллекта методов и средств построения *онтологий* предметных областей, делающих акцент на отношения между терминами, мы рассматриваем построение терминологической структуры с точки зрения эксперта некоторой предметной области.

Ключевыми являются два вопроса. Первый вопрос – насколько «хорошо» то или иное множество терминов характеризует заданную предметную область и как построить наиболее адекватное множество терминов. Второй вопрос – можно ли, например, эти термины «упорядочить» по общности, важности, встречаемости в различных сочетаниях и т.д., и как это сделать.

Первый вопрос в статье почти не рассматривается (за исключением примера в разделе 4.1). Что касается второго вопроса, то существуют две крайности в ответе на него: в формулировке «как» – *экспертный подход* (когда человек или группа людей, являющихся экспертами в данной предметной области, выделяют множество терминов и анализируют связи между ними) и *автоматический подход* (когда перечисленные операции осуществляются компьютером по заданным алгоритмам). Преимущества и недостатки и экспертного, и автоматического подходов очевидны. Оптимум лежит, как всегда, посередине – в их балансе, т.е. достигается при применении *автоматизированного экспертного подхода* (компьютерные методы осуществля-

ют поддержку деятельности экспертов), которому мы и будем следовать в настоящем исследовании.

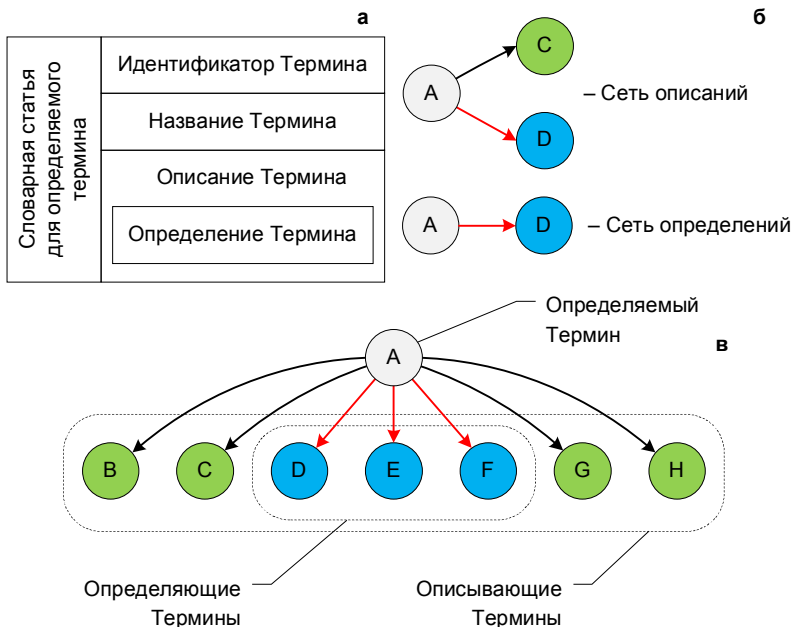
Предположим, что имеется (на сегодня, как правило, созданный экспертами) «тезаурус» – словарь, собрание сведений, корпус или свод, полномерно охватывающие понятия, определения и термины специальной области знаний или сферы деятельности, что должно способствовать правильной лексической, корпоративной коммуникации (проще говоря – пониманию в общении и взаимодействии лиц, связанных одной дисциплиной или профессией); в современной лингвистике – особая разновидность словарей общей или специальной лексики, в которых указаны семантические отношения (синонимы, антонимы, паронимы, гипонимы, гиперонимы и т.п.) между лексическими единицами [32]. Общие подходы к разработке и анализу тезаурусов кратко описаны во втором разделе настоящей работы.

Проще говоря, тезаурус описывает определенную область знаний путем перечисления всех ее основных понятий и семантических отношений между ними. В своей простейшей форме тезаурус состоит из списка важных терминов и семантических отношений между ними (ассоциативных и иерархических).

Введём в рассмотрение следующий формат тезауруса терминологической структуры предметной области (см. рис. 1а). Исходно он состоит из набора статей для определяемых терминов.

Необходимо отметить, что описание термина является более широким по содержанию, нежели его определение. Более того, принято, что определение есть часть описания, т.е. определение полностью входит в описание, а не описание является дополнительным к определению (см. рис. 1а). Поэтому определяющие термины всегда содержатся среди терминов описывающих (см. рис. 1в). При этом определяющие термины могут как входить в состав определяемых, так и выходить за границы изучаемой предметной области (пример – базовые философские категории).





*Рис. 1. Описание формата и элементов тезауруса терминологической структуры предметной области*

Таким образом, между терминами вводится единственное отношение: «ссылаться» друг на друга. Это позволяет построить две сети (см. рис. 1б):

- сеть описаний – ориентированный граф, вершинами которого являются описываемые термины, а дугами – ссылки на другие термины, используемые в словарном описании первых. При этом связь направлена от описываемого термина к описывающему;

- сеть определений – является подграфом сети описаний (определение термина является частью посвященной ему «статье» словаря).

Сеть описаний и сеть определений отражают *систему основных понятий* соответствующей предметной области. *Системность* и критерии выделения *основных понятий* требуют

детализации – ниже рассматриваются общие требования к ним (раздел 3) и приводятся примеры анализа терминологической структуры такой предметной области, как общая методология [19] (раздел 4).

Далее в разделе 2 приводится обзор подходов к разработке и анализу тезаурусов. Читатель, хорошо ориентирующийся в данной области, может перейти сразу к разделу 3.

## **2. Подходы к разработке и анализу тезаурусов**

### **2.1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ**

Исследователями уже достаточно давно разрабатываются методики по построению и использованию тезаурусов [12, 36, 37]. На настоящий момент выработан ряд стандартов, регламентирующих формат представления тезаурусов и предоставляющих рекомендации по их созданию [см. напр. 42]. Много усилий предпринимается по созданию методов автоматического построения тезауруса, основанных на уже ставшей традиционной обработке текстов [39, 43, 45], на извлечении веб-структур (одном из направлений *Web Mining*) [38], а также на анализе онлайн-энциклопедий [47].

В России вопросами разработки тезаурусов занимаются различные научные группы, в их числе:

- Добров Б.В., Лукашевич Н.В. и др. Научно-исследовательский вычислительный центр МГУ им. М.В.Ломоносова; АНО Центр информационных исследований [3, 12];
- Филиппович Ю.Н. и др., МГТУ им. Н.Э.Баумана;
- Боровикова О.И., Загорулько Ю.А., Кононенко И.С. и др. Институт систем информатики им. А.П.Ершова СО РАН, г. Новосибирск;
- Соловьев С.Ю., Мальковский М.Г. и др., МГУ, НИУ ВШЭ [13, 14, 30];
- Рубашкин В.Ш. и др., Санкт-Петербургский государственный университет [28, 29].

## 2.2. СТАНДАРТЫ

На настоящий момент существует ряд стандартов, регламентирующих формат представления тезауруса, например ISO 2788 для одноязычных тезаурусов и ISO 5964 для многоязычных (соответствующие аналоги ГОСТ 7.25-2001 «Тезаурус информационно-поисковый одноязычный. Правила разработки, структура, состав и форма представления» и ГОСТ 7.24-90 «Тезаурус информационно-поисковый многоязычный. Состав, структура и основные требования к построению») [15]. В 2011 году стандарты ISO 2788 и ISO 5964 заменил стандарт ISO 25964-1 «Тезаурусы и совместимость с другими словарями – часть 1. Тезаурусы для информационного поиска» [42]. Разработано семейство формальных языков *SKOS* для представления тезаурусов, соответствующих парадигме *SemanticWeb* [46]. Здесь необходимо отметить, что сама по себе парадигма *SemanticWeb* в рамках целой сети Интернет подвергается активной критике, но для задач создания ограниченных словарных систем на сегодня является вполне адекватной технологией.

## 2.3. ОБЩАЯ МЕТОДИКА СОСТАВЛЕНИЯ И АНАЛИЗА ТЕЗАУРУСОВ

Типовая методика по разработке и анализу тезауруса состоит из следующих шагов [36, 40, 41, 44].

### (Выбор терминов)

#### Шаг 1. Выбор источников.

Для начала необходимо определиться со множеством источников, по которым будет осуществлен сбор терминов. Источники можно разбить на две группы: *подготовленные источники* (*prearranged sources*, например классификационные схемы, тезаурусы, научные труды по терминологии области науки, энциклопедии, словари, глоссарии, оглавления учебников и учебных пособий, предметные указатели журналов, предметные указатели других публикаций в рассматриваемой области и т.п.) и *неподготовленные источники* (открытые, *open-ended sources*, например перечни поисковых запросов пользователей и профили интересов пользователей, выборки документов рассматриваемой области, перечни названий документов рассматриваемой области, обзоры документов, обсуждения со специалистами в

данной области, обзор проектов, деятельности в предметной области и т.п.). При выборе источников следует учитывать, что подготовленные источники требуют меньше усилий при сборе материала и возможно уже указывают на некоторые отношения между терминами, между терминами и понятиями, в то время как неподготовленные источники могут отражать актуальную терминологию и обеспечить более полный охват области. При выборе источников следует руководствоваться их актуальностью, полнотой и авторитетностью.

Шаг 2. Назначение кодов источникам.

Каждому выбранному источнику присваивается идентификатор для отслеживания его использования при разработке тезауруса (может потребоваться при принятии решения о предпочтительности тех или иных терминов, а также при возникновении вопроса о том, откуда взят термин).

Шаг 3. Выбор терминов.

В случае с подготовленными источниками термины могут быть прямо перенесены в базу данных терминов, при этом следует принять решение о включении источника целиком или только его части. В случае с неподготовленными источниками необходимо экспертно проанализировать источник для выбора терминов, которые могут быть полезны непосредственно или в качестве ссылок на другие термины. Также можно использовать программное обеспечение для автоматизированной «добычи» ключевых слов и фраз при создании списков терминов-кандидатов и последующем выборе терминов из списка.

Шаг 4. Внесение терминов в базу данных с сопутствующей информацией.

**(Объединение терминов и разработка классов концептов)**

Шаг 5. Сортировка терминов базы данных в алфавитном порядке.

Шаг 6. Объединение одинаковых терминов.

Объединение (слияние) информации для одинаковых терминов (при этом может потребоваться информация из дополнительных источников).

Шаг 7. Объединение терминов в один класс концептов.

Слияние синонимов или терминов в один класс концептов.

### **(Определение предметных областей и подобластей)**

В самом начале анализа терминологии предметной области маловероятно, что аналитик обладает достаточным уровнем знаний для детального структурирования предметной области. Поэтому, как правило, применяется подход «сверху-вниз» [44], когда сначала рассматриваются более общие предметные области, затем их подобласти и так далее.

#### Шаг 8. Определение общих предметных областей.

На данном шаге необходимо определить общие предметные области и распределить в них термины.

#### Шаг 9. Определение подобластей в одной предметной области.

На данном шаге необходимо определить подобласти каждой общей области и распределить термины в эти подобласти.

#### Шаг 10. Разработка детальной структуры предметной области.

На данном шаге необходимо выбрать предпочтительные термины (среди терминов, относящихся к одному понятию, выделяют наиболее подходящий термин, который наиболее хорошо характеризует или обозначает данное понятие) и выполнить слияние (объединение) информации для терминов в одном классе концептов.

### **(Разработка классификационной структуры)**

#### Шаг 11. Улучшение структуры классов.

На данном шаге необходимо разработать предварительный вариант систематического указателя терминов<sup>4</sup> (или внести исправления в существующий вариант систематического указателя) и обновить рабочую базу данных.

#### Шаг 12. Рецензирование систематического указателя.

Затем необходимо проверить то, как обстоит дело «на практике»: необходимо передать текущий вариант систематического указателя пользователям и экспертам предметной области.

### **(Критический анализ)**

---

<sup>4</sup> Систематический указатель (информационно-поискового) тезауруса – вспомогательная часть информационно-поискового тезауруса, в которой перечень лексических единиц (терминов) построен согласно с принятой классификацией понятий соответствующей отрасли знания.

Шаг 13. Обсуждение систематического указателя с экспертами и пользователями.

Необходимо обсудить систематический указатель с пользователями и экспертами, в случае большого количества замечаний перейти на шаг 11. Затем выработать полную версию тезауруса, проверить перекрестные ссылки, при необходимости вставить перекрестные ссылки.

**(Тестирование)**

Шаг 14. Тестирование тезауруса.

Для тестовой выборки документов необходимо назначить дескрипторы (т.е. предпочтительные термины), определить наличие соответствующих терминов в тезаурусе.

**(Ревизия тезауруса)**

Шаг 15. Ревизия тезауруса.

Необходимо установить регулярный график обзоров и пересмотров тезауруса, обеспечить сбор «жалоб и предложений» со стороны пользователей.

**3. Подход к разработке и анализу терминологической структуры предметной области**

**3.1. МЕТОДИКА СИНТЕЗА И АНАЛИЗА ТЕРМИНОЛОГИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ ПРЕДМЕТНОЙ ОБЛАСТИ**

Методика составления и анализа тезаурусов, представленная в разделе 2.3, была переработана авторами с целью формирования автоматизированного экспертного подхода к синтезу и анализу терминологической структуры предметной области. В итоге получена достаточно общая методика, схема которой изображена на рис. 2.

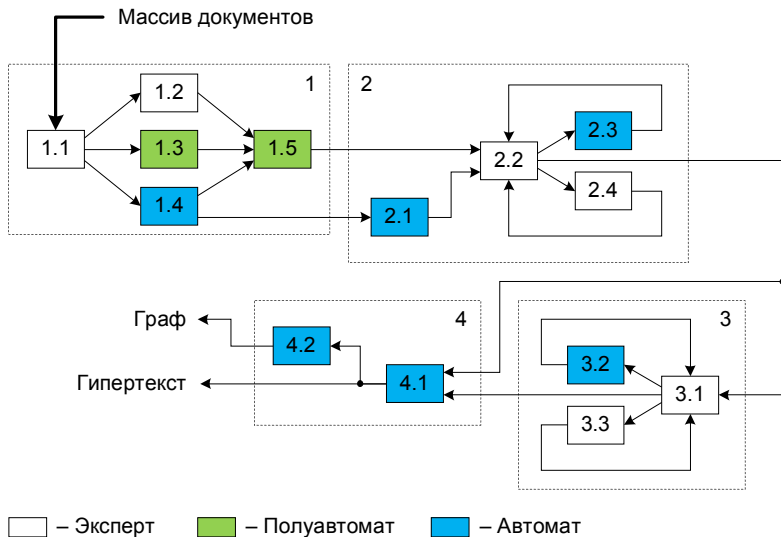


Рис. 2. Методика разработки и анализа терминологической структуры предметной области

Как видно из рис. 2, методика состоит из четырёх основных блоков:

1. Выделение совокупности основных терминов предметной области.
2. Синтез и анализ сети описаний.
3. Синтез и анализ сети определений.
4. Представление результатов анализа.

По степени автоматизации операции, входящие в состав описываемой методики, делятся на три вида: выполняются полностью вручную (Эксперт); труд эксперта частично автоматизирован (Полуавтомат); полностью автоматически (Автомат).

**Блок 1** включает в себя пять операций:

- 1.1. Подбор исходного корпуса текстов, отражающих современное состояние данной теории.
- 1.2. Выделение множества неспециализированных терминов, принадлежащих предметной области.
- 1.3. Анализ структуры библиографических ссылок.

1.4. Выделение множества необщепотребительных терминов, принадлежащих выбранному корпусу текстов.

1.5. Анализ и построение совокупности основных терминов предметной области, формирование их определений.

**Блок 2** включает в себя четыре операции:

- 2.1. Построение лексической сети.
- 2.2. Создание «словаря» терминов (включая взаимные ссылки).
- 2.3. Формальный анализ сети описаний.
- 2.4. Содержательный анализ сети описаний.

**Блок 3** состоит из трёх операций:

- 3.1. Построение и верификация сети определений.
- 3.2. Формальный анализ сети определений.
- 3.3. Содержательный анализ сети определений.

**Блок 4** состоит из двух операций:

- 4.1. Создание гипертекстовой версии «словаря».
- 4.2. Визуализация сети описаний и сети определений.

В дальнейшем пользователь (специалист или человек, осваивающий предметную область, пользуется конечными результатами – гипертекстовой версией «словаря» и соответствующими средствами визуализации).

Необходимо отметить, что разработанная методика синтеза и анализа терминологической структуры предметной области изложена на уровне общей схемы. Каждая операция предполагает использование различных инструментов, методов, средств и алгоритмов из нескольких областей науки, в том числе: компьютерная лингвистика [37], математическая статистика [6], теория графов [34], программирование [8].

Анализ существующих подходов (см., например, [4]) и собственный опыт авторов статьи показывает, что экспертная деятельность по созданию собственно словаря (операция 2.2.) довольно трудоемка и пока очень слабо поддается автоматизации. В этом плане сделаем ряд общих замечаний:

1. Обеспечение корректности сети определений (например, ацикличность графа определений является важнейшим показателем непротиворечивости системы определений - см. также другие требования к системе определений и правила определения понятий в [1, 7]) может потребовать неоднократного циклического возврата к предыдущим этапам.



2. Целесообразно выделение как минимум трех «уровней» терминов: базовые философские категории, базовые категории предметной области, частные понятия предметной области.

3. Удобным приемом анализа является выделение «окрестности» термина – множества терминов, длина пути от/до которых в сети описаний (или в сети определений – в зависимости от целей анализа) не превышает заданной.

Наличие в составе методики блока 4, включающего средства визуализации, позволяет не только наглядно представить результаты синтеза, но и значительно упрощает анализ и изучение терминологической структуры предметной области. Другими словами, визуализация является не столько инструментом создания и анализа последней, сколько подспорьем для специалиста, желающего быстро и самостоятельно составить для себя целостную картину или ищущего ответ на некоторый конкретный частный вопрос.

### *3.2. ФОРМАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ТЕРМИНОЛОГИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ ПРЕДМЕТНОЙ ОБЛАСТИ*

Одним из ключевых отличий данной методики является наличие в её составе двух операций (см. рис. 2): 2.3 – «Формальный анализ сети описаний» и 3.2 – «Формальный анализ сети определений». Формальный анализ направлен на получение количественных оценок, характеризующих терминологическую структуру изучаемой предметной области.

Исходя из того, что сеть описаний и сеть определений представлены в виде графов (вершиной является термин, а дугой – связь между терминами, см. рис. 1б и 1в), основным инструментом исследования структуры этих сетей являются различные топологические и метрически характеристики графов, а также величины, определённые над этими характеристиками.

Необходимо отметить, что каждая из сетей (сеть описаний и сеть определений) представляются связными ориентированными графами без петель и без кратных дуг. Кроме того, граф определений ацикличен, т.е. не содержит циклов и между парами вершин имеется только по одному пути.

Таким образом, для каждой из сетей рассчитываются следующие *первичные показатели*:

$In_i$  – число входящих дуг;

$Out_i$  – число исходящих дуг;

$PageRank_i$  – вероятность попадания в данную вершину при случайном блуждании по дугам сети;

$ClosIn_i$  – близость вершин сети к данной вершине;

$ClosOut_i$  – близость данной вершины ко всем остальным вершинам сети;

$Betw_i$  – характеризует расположение вершины на кратчайших путях сети (здесь и далее  $i$  – это номер вершины графа (номер термина)).

На основе первичных показателей для каждого термина определяются две производные характеристики:

– «*значимость термина*» – количественно характеризует его эффективную «используемость» в описании других терминов.

– «*сложность термина*» – количественно (условно) показывает, насколько другие термины используются в его описании.

Значимость  $i$ -го термина вычисляется по формуле ( $0 \leq S_i \leq 1$ ):

$$S_i = \frac{\max R - R_i}{\max R - \min R},$$

где  $R_i = \max \{ \text{Rank } In_i, \text{Rank } ClosIn_i, \text{Rank } PageRank_i \}$ . Здесь и далее Rank – функция вычисления ранга величины. Значимость  $i$ -го термина максимальна при  $S_i = 1$ .

В свою очередь, сложность  $i$ -го термина вычисляется по формуле ( $0 \leq C_i \leq 1$ ):

$$C_i = \frac{\max r - r_i}{\max r - \min r},$$

где  $r_i = \max \{ \text{Rank } Out_i, \text{Rank } ClosOut_i, \text{Rank } Betw_i \}$ . Сложность  $i$ -го термина максимальна при  $C_i = 1$ .

Наличие первичных метрических характеристик сети описаний и сети определений позволяет исследователю проявлять «полет фантазии» и конструировать разнообразные и, быть может, более информативные, чем «сложность» и «значимость», вторичные показатели.

Как уже было отмечено выше, граф определений ацикличен и при этом является направленным, следовательно, содержит вершины (термины) без исходящих связей (не определяемые через термины предметной области). Таким образом, все термины можно разбить на упорядоченные классы, поставив каждому из них в соответствие максимальный и минимальный «уровень» – длину соответственно максимального или минимального пути до класса «неопределяемых» терминов (этому классу условно припишем первый уровень). Пара этих длин является ещё одной информативной характеристикой, описывающей структуру сети определений.

Далее, к полученным показателям и характеристикам возможно применить широкий арсенал математических средств, направленных на изучение взаимосвязи между этими показателями и характеристиками.

### **3. Пример: терминологическая структура методологии**

Проиллюстрируем результаты применения описанного в предыдущем разделе общего подхода к синтезу и анализу терминологической структуры предметной области, на примере методологии.

#### **4.1. ВЫДЕЛЕНИЕ СОВОКУПНОСТИ ОСНОВНЫХ ТЕРМИНОВ ПРЕДМЕТНОЙ ОБЛАСТИ**

**Операция 1.1. Подбор исходного корпуса текстов.** В качестве исходного корпуса текста использовалась объёмная монография [19], в которой приведено наиболее полное, на сегодняшний день, изложение содержания общей методологии.

**Операция 1.2. Выделение множества необщепотребительных терминов.** Если проанализировать совокупность используемых в упомянутой монографии необщепотребительных терминов (т.е. всего множества слов текста исключая служебные и общепотребительные слова русского языка), то, во-первых, 200 первых по числу упоминаний терминов дают около 90% суммарного числа упоминаний всех терминов. Во-вторых, оказывается, что словарь [21] охватывает 80–90% наиболее

часто встречающихся из них (другими словами, совокупность терминов словаря достаточно полно покрывает терминологию такой предметной области, как общая методология) – верхняя прямая на рис. 3 (обозначена  $\hat{I}$ ) является биссектрисой, нижняя «прямая» ( $I_j$ ) показывает число терминов словаря, входящих в упорядоченное по убыванию встречаемости в [19] ( $Q_j$ ) множество терминов методологии. Другими словами, различие между этими прямыми показывает, насколько словарь не соответствует исходному корпусу текстов.

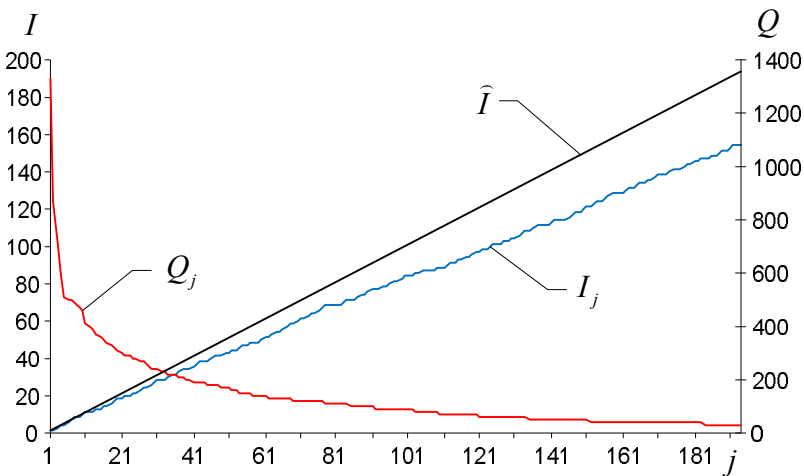


Рис. 3. Распределение терминов [19] по числу упоминаний и соответствие со словарем [21]

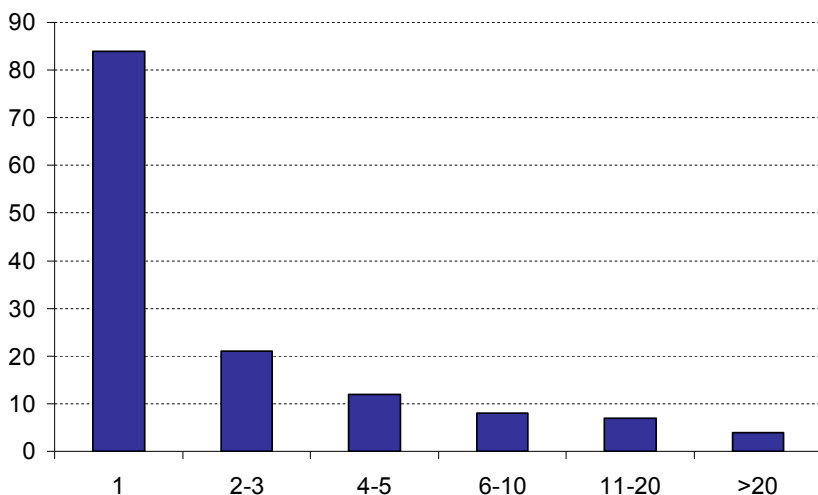
Кривая  $Q_j$ ,  $j = 1, \dots, 194$ , с достаточно высокой степенью точности аппроксимируется функцией (средняя относительная ошибка  $\sim 4\%$ ):

$$\tilde{Q}[j] = \frac{256,605 - 249,079\sqrt{j}}{0,111117 - 0,105957j} - 126,143.$$

Необходимо отметить, что при значении  $j = \hat{j} = 310$ , функция  $\tilde{Q}[j]$  впервые становится отрицательной. Таким образом, количество терминов на уровне  $\hat{j}$  возможно определить, как

некое граничное, отражающее исчерпание списка основных (!) терминов предметной области (магическое число «~300» как типовая емкость тезауруса или словаря предметной области будет еще неоднократно упоминаться нами ниже).

**Операция 1.3. Анализ структуры библиографических ссылок.** Совокупность цитирований в [21] типична для любой предметной области (см. описание общих закономерностей в [35]). Сводная информация приведена на рис. 4.



*Рис. 4. Распределение литературных источников [21] по числу упоминаний*

Большинство терминов заимствовано из работ по методологии [19, 20] (39 и 69 упоминаний соответственно), системному анализу [26] (29 упоминаний), а также из классических словарей по философии [16, 33] (соответственно 17 и 36 упоминаний), логике [7] (17 упоминаний), психологии [9] (11 упоминаний) и других профессиональных словарей и энциклопедий. Большинство работ (76) упоминаются только один раз, 2–4 раза упоминаются 28 работ, 9 работ упоминаются от 5 до 10 раз.

Итак, анализ структуры библиографических ссылок позволяет не только выделить «основные» работы, но и оценить «количественно» связь исследуемой предметной области с другими предметными областями.

**Операция 1.4. Анализ совокупности основных терминов предметной области.** Характерным (хотя и субъективно зависящим от эксперта – составителя глоссария) числом относительно часто встречающихся в предметной области необщепотребительных слов является 250–500. В этот диапазон укладываются как результаты автоматического анализа [19] (300 терминов дают 95% суммарного числа упоминаний всех терминов), так и экспертно составленный словарь [21] – 297 терминов, а также экспертно составленные словарь по педагогике [18] (около 300 терминов), включенный в [22] глоссарий по теории управления организационными системами (около 300 терминов – см. также <http://www.mtas.ru/Glossary.htm>), глоссарий по интеллектуальным системам на сайте [www.glossary-ipu.ru](http://www.glossary-ipu.ru) (490 терминов).

Наиболее часто в [19] встречаются следующие термины (перечисление в порядке убывания частоты – см. убывающую кривую, построенную по вспомогательной (правой) оси, на рис. 3, а также облако тегов по адресу <http://www.mtas.ru/theory/methodology/Cloud.png>):

- деятельность, научный, система, исследование, процесс, проект, метод, результат, знание, игра, наука, работа, обучение, проблема, художественный, теория, модель, форма, задача, организация, решение, методология, общий, развитие, образ, объект, средство, оценка, условие, принцип.
- (1)

Из этих 30 терминов 27 входят в словарь [21] – см. рис. 3 (не вошли в словарь «обучение», «художественный» и «общий» – эксперты не сочли эти термины характерными для методологии). Таким образом, автоматические и экспертные методы выделения совокупности основных терминов предметной области хорошо согласуются по результатам и дополняют друг друга.

#### 4.2. СИНТЕЗ И АНАЛИЗ СЕТИ ОПИСАНИЙ

**Операция 2.1. Построение лексической сети.** В данном исследовании полноценная лексическая сеть не строилась, ибо анализ проводился на уровне униграмм.

**Операция 2.2. Создание «словаря» терминов.** Как отмечалось выше, словник словаря [21] составлялся авторами «вручную», описания каждого из 297 терминов составлялись без привлечения «средств автоматизации». В описании каждого термина вручную выделялась часть, соответствующая определению термина и указывались ссылки на другие термины словаря, что позволило автоматически сформировать сеть описаний и сеть определений.

**Операция 2.3. Формальный анализ сети описаний.** Имея сеть описаний, вычислим для каждого  $i$ -го термина (узла сети) значения вышперечисленных первичных показателей и производные от них характеристики – сложность и значимость,  $i = 1, \dots, 297$  (исходные данные и первичные показатели содержатся в XLS-файле (<http://www.mtas.ru/theory/methodology/DescriptionsNetwork.xls>), что позволяет заинтересованному читателю самостоятельно исследовать интересующие его свойства сети описаний и сети определений методологии).

Высокие ( $> 0,8$ ) коэффициенты статистически значимой ранговой корреляции Спирмена<sup>5</sup> имеют место между тремя переменными –  $In$ ,  $ClosIn$  и  $PageRank$ . Первые 30 терминов (упорядоченных по убыванию значимости) таковы (ср. с (1)):

- деятельность, процесс, объект, форма, система, цель, явление, метод, знания, теория, действие, результат, организация, наука,  
(2) элемент, средство, проблема, свойство, способ, познание, субъект, условие, исследование, содержание, единство, предмет, принцип, операция, понятие, задача.

Коэффициент корреляции Спирмена между значимостью термина и частотой его встречаемости в исходном корпусе текстов превышает 0,75.

Первые 30 терминов (упорядоченных по убыванию сложности) таковы (ср. с (1) и (2)):

---

<sup>5</sup> В работе принят уровень значимости  $\alpha = 10^{-4}$ , граничное значение коэффициента корреляции Спирмена равно  $\sim \pm 0,226136$  [6].

- (3) деятельность, теория, метод, наука, моделирование, проект, системный анализ, проблема, эксперимент, прогнозирование, экспертные оценки, рефлексия, метод сценариев, методология, средство, научная деятельность, семиотика, подход, опытная работа, гипотеза, организационная культура, управление проектами, оптимизация, научные знания, метод мозгового штурма, формы организации научного знания, проектирование, норма, кибернетика, понятие.

Для сети описаний статистически значимая ранговая корреляция между сложностью и значимостью, а также между сложностью и частотой его встречаемости в исходном корпусе текстов практически отсутствует (коэффициент корреляции Спирмена  $< 0,2$ ). На рис. 5 приведено соответствие между значениями параметров «Значимость» и «Сложность» для сети описаний.

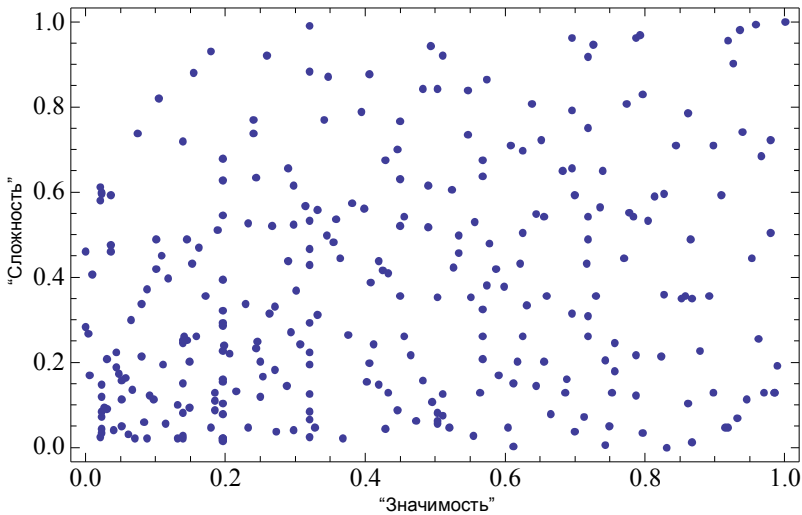


Рис. 5. Соответствие между значениями параметров «Значимость» и «Сложность» для сети описаний

Кластерный анализ сети описаний не позволил разделить термины на различающиеся содержательно интерпретируемые кластеры.



На рис. 6 для сети описаний приведены графики величин «Значимость» и «Сложность», упорядоченных по убыванию. Видно, что обе эти характеристики изменяются достаточно равномерно, т.е. на их основании трудно выделить в сети описаний то или иное характерное множество терминов.

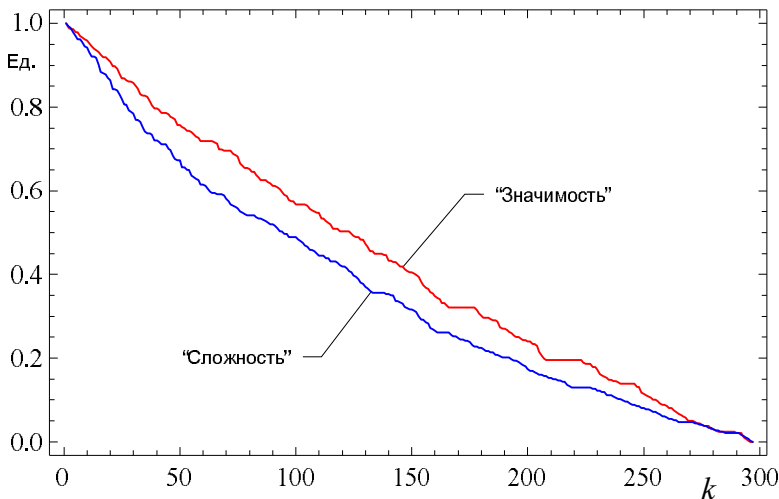


Рис. 6. Графики величин «Значимость» и «Сложность», упорядоченных по убыванию, для сети описаний

**Операция 2.4. Содержательный анализ сети описаний** заключается, например, в экспертном анализе упорядочений (1)–(3).

#### 4.3. СИНТЕЗ И АНАЛИЗ СЕТИ ОПРЕДЕЛЕНИЙ

**Операция 3.1. Построение и верификация сети определений.** Автоматическая верификация показала, что сеть определений ациклична.

**Операция 3.2. Формальный анализ сети определений.** Как было указано в разделе 3.2, аналогично сети описаний, для каждого термина в сети определений можно вычислить шесть первичных показателей и два производных (исходные данные и

первичные показатели содержатся в *XLS*-файле (<http://www.mtas.ru/theory/methodology/DefinitionsNetwork.xls>)).

Первые 30 терминов (упорядоченных по убыванию значимости) таковы (ср. с (1)–(2)):

деятельность, процесс, явление, знания, результат, действие, объект, познание, система, свойство, субъект, цель, задача,  
(4) предмет, операция, элемент, поведение, условие, проблема, единство, метод, потребность, проект, фактор, альтернатива, правило, сознание, решение, управление, показатель.

Первые 30 терминов (упорядоченных по убыванию сложности) таковы (ср. с (1)–(4)):

логика, теория, научные знания, наука, эстетика, дедуктивный метод, аналогия, рефлексия, таксономия, имитационное моделирование, институт, теорема, практика, планирование, метод  
(5) экспертных оценок, научно-исследовательская работа, аналог, иерархия, эксперимент, доказательство, положение, опыт, предметная область, аксиома, опрос, величина, семантика, мораль, системный анализ, содержание.

Для сети определений существует небольшая (коэффициент корреляции Спирмена равен  $-0,241$ ) статистически значимая отрицательная ранговая корреляция между сложностью и значимостью.

На рис. 7 для сети определений приведено соответствие между значениями параметров «Значимость» и «Сложность». В отличие от сети описаний (см. рис. 5), в сети определений присутствует некая «запрещённая» область (см. рис. 7). Её наличие можно условно интерпретировать как некую изотропность («от простого – к сложному») выделенного терминологического ядра методологии – в системе определений отсутствуют сложные и одновременно значимые термины.

На рис. 8 для сети определений приведены графики величин «Значимость» и «Сложность», упорядоченных по убыванию. Из рис. 8 видно, что имеется значительное число терминов, обладающих высокой одинаковой сложностью (плато А). При этом почти половина терминов имеет минимальную значимость (плато В).

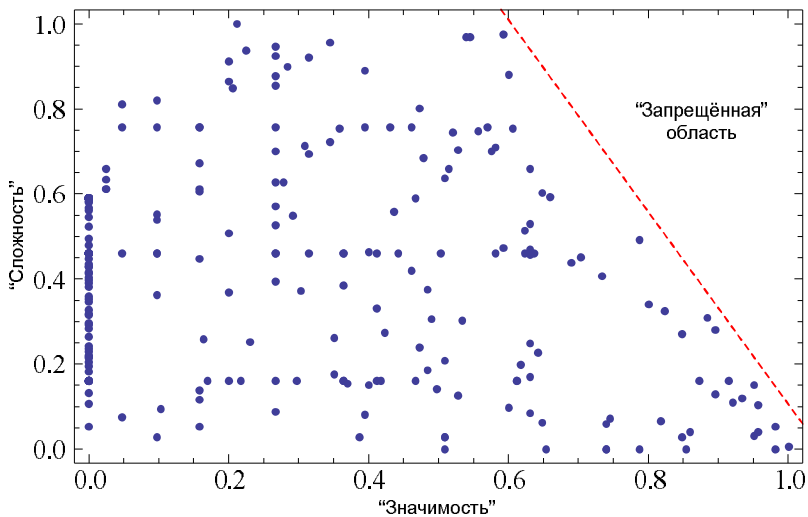


Рис. 7. Соответствие между значениями параметров «Значимость» и «Сложность» для сети определений

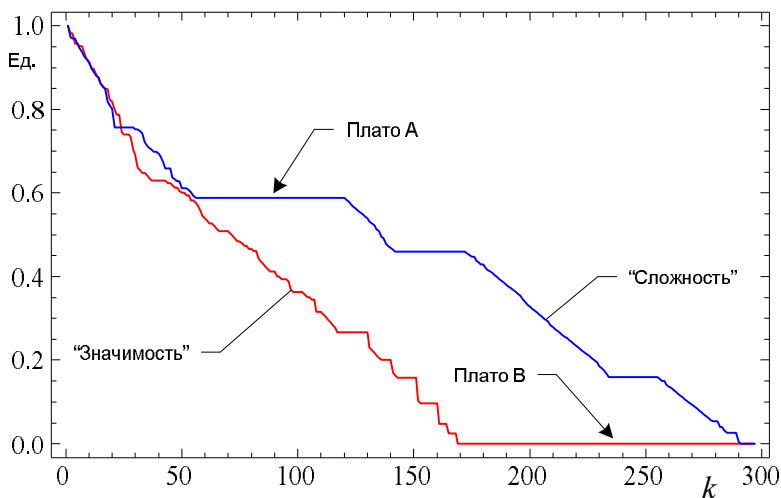


Рис. 8. Графики величин «Значимость» и «Сложность», упорядоченных по убыванию, для сети определений

Также существует статистически значимая положительная ранговая корреляция (коэффициент корреляции Спирмена равен 0,659) между значимостью термина и частотой его встречаемости в исходном корпусе текстов.

Кластерный анализ сети определений не позволил разделить термины на различающиеся содержательно интерпретируемые кластеры.

Анализ сети определений (см. раздел 3.2.) позволил выделить семь терминов без исходящих связей (т.е. не определяемых через термины предметной области):

альтернатива, оценка, потребность, сознание,  
требование, элемент, явление.

Оказывается, что при классификации по длине минимального пути сеть определений можно разбить на шесть уровней, а при классификации по длине максимального пути – на сорок (!) уровней (см. рис. по адресу <http://www.mtas.ru/theory/methodology/Hierarchy.png>).

Для сети определений существует статистически значимая положительная ранговая корреляция (коэффициент корреляции Спирмена равен 0,731) между сложностью термина и его максимальным уровнем. Также существует статистически значимая отрицательная ранговая корреляция (коэффициент корреляции Спирмена равен -0,480) между значимостью термина и его максимальным уровнем. Кроме того, следует отметить статистически значимую ранговую корреляцию (коэффициент корреляции Спирмена равен 0,993) между близостью термина к остальным терминам (*ClosOut*) и его максимальным уровнем.

**Операция 3.3. Содержательный анализ сети определений** заключается, например, в экспертном анализе упорядоченных (1), (4) и (5).

#### 4.4. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ АНАЛИЗА

Приведенные выше количественные результаты п.п. 4.1–4.3, отраженные в виде соответствующих рисунков, таблиц, графов связей и т.д., наглядно представляют свойства структуры связей между терминами (см. рисунки сетей по адресу <http://www.mtas.ru/theory/methodology/Hierarchy.png> и <http://www.mtas.ru/theory/methodology/DescriptionsNetwork.png>).

Наличие гипертекстовой версии словаря [21] (см. [http://www.mtas.ru/biblio/Methodology\\_g.htm](http://www.mtas.ru/biblio/Methodology_g.htm)) позволяют пользователю анализировать взаимосвязь терминов и получать системное представление о терминологической структуре методологии.

Представленные на сайте <http://ics-social.appspot.com> средства визуализации (разработанные к.т.н. Д.А. Губановым) сети описаний и сети определений позволяют наглядно представлять (в изменяемом пользователем графическом масштабе при различных размерах окрестностей выбранного термина) связи между терминами.

#### **4. Заключение**

В настоящей работе предложен автоматизированный экспертный подход к синтезу и анализу терминологической структуры предметной области, который может быть использован, во-первых, специалистами по искусственному интеллекту (анализу предметных областей, извлечению и систематизации знаний в виде тезаурусов, онтологий и т.д.). Во-вторых – специалистами в конкретных предметных областях при анализе структуры и свойств последних. В-третьих, неспециалистами, стремящимися освоить новую для себя предметную область.

Результаты (раздел 4) применения методики (раздел 3) анализа терминологической структуры (системы основных понятий) методологии представляются системными и иногда даже несколько неожиданными (примеры – соотношение между сложностью и значимостью терминов, глубина иерархической структуры терминов и др.).

В целом относительно методов и результатов формального анализа сетей описаний и определений можно сделать следующее замечание. В настоящей работе реализована традиционная для статистического исследования общая схема (см., например, [6, 23, 24]): описательная статистика (для части первичных и вторичных показателей), исследование зависимостей (значимые корреляции выявлены), снижение размерности (дисперсионный анализ и метод главных компонент не дали значимых и содержательно интерпретируемых результатов), кластерный анализ.

В зависимости от того, какие вопросы ставит перед собой исследователь, можно использовать соответствующие методы из богатого их арсенала, имеющегося в современной области *Data Mining* [48].

Перспективным представляется возможный будущий анализ терминологической структуры различных предметных областей (а также «операций» их объединения), что, конечно, потребует от исследователей определенных усилий (см. выше неавтоматизируемые, экспертные компоненты методики на рис. 2), но в значительной степени облегчается наличием уже созданных (и существующих в электронном виде) семантических сетей и онтологий во многих отраслях научного знания. Кроме того, формализация терминологических структур предметных областей может оказаться востребованной при построении автоматизированных обучающих систем.

Еще раз подчеркнем гибкость предложенного подхода – он является лишь общей схемой, в рамках которой, как элементы «конструктора», могут быть использованы разнообразные методы и алгоритмы современной теоретической и компьютерной лингвистики, теории графов, прикладной статистики, искусственного интеллекта и др.

Авторы признательны за плодотворные обсуждения к.ф.-м.н. Н.В. Лукашевич, к.т.н. Л.И. Микуличу, д.т.н. О.П. Кузнецову и д.т.н. С.Ю. Соловьеву.

### **Литература**

1. БЛОХ М.Я. *Теоретические основы грамматики*. – М.: Высшая школа, 2004. – 237 с.
2. ГОЛОВАНОВА Е.И. *Введение в когнитивное терминоведение*. – М.: Флинта, 2011. – 224 с.
3. ДОБРОВ Б.В., ИВАНОВ В.В., ЛУКАШЕВИЧ Н.В., СОЛОВЬЕВ В.Д. *Онтологии и тезаурусы: модели, инструменты, приложения*. – М.: Интернет-университет информационных технологий, 2009. – 176 с.
4. ЗАГОРУЛЬКО Ю.А., БОРОВИКОВА О.И., КОНОНЕНКО И.С., СОКОЛОВА Е.Г. *Методологические аспекты разработки электронного русско-английского тезауруса по*

- компьютерной лингвистике* // Информ. и её примен. – 2012. – Т.6, В.3. – С. 22–31.
5. ИВИН А.А. *Логика*. – М.: Знание, 1998. – 240 с.
  6. КОБЗАРЬ А.И. *Прикладная математическая статистика*. – М.: Физматлит, 2006. – 816 с.
  7. КОНДАКОВ Н.И. *Логический словарь-справочник*. – М.: Наука, 1975. – 720 с.
  8. КОРМЕН Т.Х. и др. *Алгоритмы: построение и анализ*. – М. Вильямс, 2006. – 1296 с.
  9. *Краткий психологический словарь* / Сост. Л.А. Карпенко. Под общ. ред. А.В. Петровского, М.Г. Ярошевского. – М.: Политиздат, 1985. – 287 с.
  10. ЛЕЙЧИК В.М. *Терминоведение*. – М.: ЛКИ, 2007. – 256 с.
  11. ЛОТТЕ Д.С. *Основы построения научно-технической терминологии* // Вопросы теории и методики. – М.: Изд-во академии наук СССР, 1968. – 160 с.
  12. ЛУКАШЕВИЧ Н.В. *Тезаурусы в задачах информационного поиска*. – М.: МГУ, 2011. – 512 с.
  13. МАЛЬКОВСКИЙ М.Г., СОЛОВЬЕВ С.Ю. *Методы формирования глоссариев в универсальном терминологическом пространстве* // Труды Международного семинара Диалог'2003 «Компьютерная лингвистика и интеллектуальные технологии». – М.: Наука, 2003. – С. 438–440.
  14. МАЛЬКОВСКИЙ М.Г., СОЛОВЬЕВ С.Ю. *Терминологические сети* // Материалы 2-й международной научно-технической конференции «Открытые семантические технологии проектирования интеллектуальных систем». – Минск: БГУИР, 2012. – С. 77–82.
  15. НГУЕН М.Х., АДЖИЕВ А.С. *Описание и использование тезаурусов в информационных системах, подходы и реализация*. – [Электронный ресурс] URL: <http://www.elbib.ru/index.phtml?page=elbib/rus/journal/2004/part1/NA> (дата обращения: 24.05.2012).
  16. *Новая философская энциклопедия*: В 4 томах / Под редакцией В.С. Стёпина. – М.: Мысль, 2000-2001. – с.
  17. НОВИКОВ А.М. *Основания педагогики*. 2-е изд. – М.: Эгвес, 2011. – 208 с.

18. НОВИКОВ А.М. *Педагогика: словарь системы основных понятий*. – М.: Издательский центр ИЭТ, 2013. – 268 с.
19. НОВИКОВ А.М., НОВИКОВ Д.А. *Методология*. – М.: Синтег, 2007. – 668 с.
20. НОВИКОВ А.М., НОВИКОВ Д.А. *Методология научного исследования*. – М.: Либроком, 2010. – 280 с.
21. НОВИКОВ А.М., НОВИКОВ Д.А. *Методология: словарь системы основных понятий*. – М.: Либроком, 2013. – 208 с.
22. НОВИКОВ Д.А. *Теория управления организационными системами*. 3-е изд. испр. и дополн. – М.: Физматлит, 2012. – 604 с.
23. НОВИКОВ Д.А., НОВОЧАДОВ В.В. *Статистические методы в медико-биологическом эксперименте (типовые случаи)*. – Волгоград: Издательство ВолГМУ, 2005. – 84 с.
24. ОРЛОВ А.И. *Эконометрика*. – М.: Экзамен, 2004. – 576 с.
25. ПАВЛОВСКИЙ И.С. *Исследование сетецентрического подхода к управлению на основе однородного концептуального моделирования* // Труды и пленарные доклады участников конференции УКИ'12. - М.: ИПУ РАН, 2012. - 1 электрон. опт. диск (CD-ROM). - ISBN 978-5-91450-100-3. – С. 1699–1706.
26. ПЕРЕГУДОВ Ф.И., ТАРАСЕНКО Ф.П. *Введение в системный анализ*. – М.: Высшая школа, 1989. – 367 с.
27. РЕФОРМАТСКИЙ А.А. *Терминология. Введение в языкознание*. – М.: Учпедгиз, 1959. – 536 с.
28. РУБАШКИН В.Ш. *Представление и анализ смысла в интеллектуальных информационных системах*. — М.: Наука, 1989. – 192 с.
29. РУБАШКИН В.Ш. *Семантический компонент в системах понимания текста* // Труды Десятой национальной конференции по искусственному интеллекту с международным участием (КИИ-2006). – М.: Физматлит, 2006. - Т. 2. – С. 455–463.
30. СОЛОВЬЕВ С.Ю. *Образные представления терминологической сети* // Прикладное программное обеспечение. – М.: Изд-во МИРЭА, 2008. – С. 55–69.



31. СУПЕРАНСКАЯ А.В., ПОДОЛЬСКАЯ Н.В., ВАСИЛЬЕВА Н.В. *Общая терминология. Вопросы теории.* Изд. 4-е. – М.: Изд-во ЛКИ, 2007. – 248 с.
32. Тезаурус. - URL: <http://ru.wikipedia.org/wiki/Тезаурус>.
33. *Философский энциклопедический словарь.* – М.: Сов. Энциклопедия, 1983. – 836 с.
34. ХАРАРИ Ф. *Теория графов.* – М.: Мир, 1973. – 324 с.
35. ЯБЛОНСКИЙ А.И. *Модели и методы исследования науки.* – М.: Эдиториал УРСС, 2001. – 400 с.
36. AITCHISON J., GILCHRIST A., BAWDEN D. *Thesaurus Construction And Use: A Practical Manual.* – Aslib, 2000. – 233 p.
37. BIRD S., KLEIN E. LOPER E. *Natural Language Processing with Python.* – O'Reilly Media, 2009. – 504 p.
38. CHEN Z., LIU S., WENYIN L., PU G., MA W.Y. *Building a Web Thesaurus from Web Link Structure // Proc. ACM SIGIR, 2003.* – P. 48–55.
39. CROUCH C.J. *A Cluster Based Approach to Thesaurus Construction // Proc. ACM SIGIR, 1988.* – P. 309–320.
40. GREFENSTETTE G. *Explorations in Automatic Thesaurus Discovery.* – Kluwer Academic Publishers, Hingham, MA, 1994.– 278 p.
41. *Handbook of Terminology Management: Basic Aspects of Terminology Management / Sue Ellen Wright, Gerhard Budin.* – John Benjamins Pub Co, 1997. – 370 p.
42. ISO 25964-1, [http://www.iso.org/iso/catalogue\\_detail.htm?csnumber=53657](http://www.iso.org/iso/catalogue_detail.htm?csnumber=53657).
43. MANNING C.D., SCHUTZE H. *Foundations of Statistical Natural Language Processing.* – MIT, 1999. – 620 p.
44. SAGER J.C. *A Practical Course in Terminology Processing.* – J. Benjamins Pub. Co., 1990. – 254 p.
45. SCHUTZE H., PEDERSEN J.O. *A Cooccurrence-based Thesaurus and Two Applications to Information Retrieval // International Journal of Information Processing and Management.* – 1997. – №33. – P. 307–318.
46. SKOS Simple Knowledge Organization System. – URL: <http://www.w3.org/2004/02/skos/>.

47. STRUBE M., PONZETTO S. *WikiRelate! Computing Semantic Relatedness Using Wikipedia* // Proc. National Conference on Artificial Intelligence (AAAI'06), 2006. – P. 1419–1424.
48. WITTEN I.H., FRANK E., HALL M.A. *Data Mining: Practical Machine Learning Tools and Techniques*. Third Edition. – Morgan Kaufmann, 2011. – 629 p.

## METHODS TO ANALYSE TERMINOLOGICAL STRUCTURE OF SUBJECT AREA

**Dmitry Gubanov**, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Cand.Sc., senior researcher (dimagubanov@mail.ru).

**Andrey Makarenko**, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Cand.Sc., senior researcher (avm.science@mail.ru).

**Dmitry Novikov**, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, deputy director (novikov@ipu.ru).

*Abstract: We propose an automated expert approach to analysis and synthesis of a terminological structure of a subject area. The key novelty is that the method employs formal analytical operation to obtain numerical characteristics of terminological structure of the studied subject area. Basic features of the developed approach are illustrated by the subject area of general methodology.*

Keywords: terminological structure, graph theory, methodology.

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии О.П. Кузнецовым*

*Поступила в редакцию 28.01.2013.  
Опубликована 31.05.2013.*

УДК 519.177  
ББК 22.18

## ЭРГОДИЧЕСКИЕ ЦИКЛИЧЕСКИЕ РЕСУРСНЫЕ СЕТИ. I. КОЛЕБАНИЯ И РАВНОВЕСНЫЕ СОСТОЯНИЯ ПРИ МАЛЫХ РЕСУРСАХ<sup>1</sup>

**Жилякова Л. Ю.<sup>2</sup>**

(ФГБУН Институт проблем управления  
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

*Исследуется функционирование эргодических нерегулярных ресурсных сетей при малых ресурсах. Показано, что при произвольных начальных состояниях возникают незатухающие колебания между несколькими предельными векторами. Количество предельных векторов совпадает с количеством циклических классов сети. Если все векторы равны, в сети достигается глобальное равновесие. Найдены условия на начальные состояния, из которых это равновесие может быть достигнуто. Получены формулы для предельных матриц и предельных векторов циклической сети.*

Ключевые слова: ресурсная сеть, стохастическая матрица, эргодическая цепь, равновесие, предельное состояние.

### **1. Введение**

Работа посвящена исследованию свойств нерегулярных эргодических ресурсных сетей и их функционирования при малых ресурсах. Ресурсная сеть – динамическая пороговая потоковая модель. Регулярные ресурсные сети описаны в работах [3–5, 7],

---

<sup>1</sup> Работа поддержана грантом РФФИ 11-01-00771.

<sup>2</sup> Людмила Юрьевна Жилякова, кандидат физико-математических наук (zhilyakova.ludmila@gmail.com)

там же даны основные определения. Было доказано, что в регулярных сетях существует пороговое значение ресурса  $T$ , единственное для каждой сети: при суммарном ресурсе, не превосходящем  $T$  (такой ресурс в дальнейшем будем называть малым), процессы в ресурсной сети эквивалентны случайным блужданиям на графе, хотя такая сеть является полностью детерминированной моделью. Случайные блуждания и модели рассеяния на графах используются для решения различных задач в широком кругу предметных областей. Исчерпывающий обзор таких моделей, исследование их свойств и описание областей приложения были проведены в работе [10].

Если суммарный ресурс выше порогового значения, некоторые вершины переключаются на другое правило функционирования. Это правило сходно с тем, как «ходят» вершины в модели, названной «играми выстреливания фишек» (*chip-firing games*) [9, 11]. *Chip-firing game* – графовая целочисленная пороговая модель, в которой в вершинах находятся стопки фишек. Вершина может сделать ход, выстреливая по одной фишке вдоль каждого исходящего ребра, только в том случае, если она имеет достаточно фишек. Выстреливание может последовательным и параллельным, как, например, описано в работе [12].

Все предыдущие работы, посвященные ресурсным сетям, описывали функционирование *регулярных* сетей. Были выделены классы однородных, эйлеровых и несимметричных сетей, исследованы их свойства, описаны потоки и предельные состояния при малых и больших ресурсах. Все эти классы, сильно отличаясь друг от друга, тем не менее имеют основополагающее общее свойство: при малых ресурсах они описываются регулярной цепью Маркова и поэтому имеют единственное предельное состояние.

Описываемые в настоящей работе эргодические циклические сети не являются регулярными и при малых ресурсах демонстрируют принципиально иное поведение.

## 2. Основные определения

### 2.1. РЕСУРСНЫЕ СЕТИ

Сеть представляет собой ориентированный граф  $G = (V, E)$ ,  $|V| = n$ , с матрицей пропускных способностей  $R = (r_{ij})_{n \times n}$ .

$Q(t) = (q_1(t), \dots, q_n(t))$  – состояние сети в момент  $t$ ;  $q_i(t) \geq 0$  – количество ресурса в вершине  $v_i$ .  $Q^*$  – предельное состояние.

$$r_i^{in} = \sum_{j=1}^n r_{ji} \quad \text{и} \quad r_i^{out} = \sum_{j=1}^n r_{ij} \quad - \text{входная и выходная пропускные}$$

способности вершины  $v_i$  соответственно.

*Правила функционирования сети.* В момент  $t$  вершина  $v_i$  отдает в смежную ей вершину  $v_m$ :

$r_{im}$  единиц ресурса, если  $q_i(t) > r_i^{out}$  (правило 1);

$\frac{r_{im}}{r_i^{out}} q_i(t)$  единиц ресурса, если  $q_i(t) \leq r_i^{out}$  (правило 2).

Матрице пропускных способностей  $R$  соответствует стохастическая матрица  $R'$ , получаемая из  $R$  нормированием по строкам:

$$R' = \begin{pmatrix} \frac{r_{11}}{r_1^{out}} & \frac{r_{12}}{r_1^{out}} & \dots & \frac{r_{1n}}{r_1^{out}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{r_{n1}}{r_n^{out}} & \frac{r_{n2}}{r_n^{out}} & \dots & \frac{r_{nn}}{r_n^{out}} \end{pmatrix}.$$

Сеть, все вершины которой функционируют по правилу 2, описывается цепью Маркова с соответствующей стохастической матрицей [2]. Закон перераспределения ресурса описывается рекуррентной формулой:

$$Q(t+1) = Q(t)R'.$$

Сеть будем называть *однородной*<sup>1</sup>, если пропускные способности всех ее ребер одинаковы; *эйлеровой*, если для каждой

---

<sup>1</sup> Определение однородной ресурсной сети следует отличать от определения однородной цепи Маркова; функционирование всех

вершины  $r_i^{in} = r_i^{out}$ ,  $i = 1, \dots, n$ ; *несимметричной*, если в ней существуют вершины с разными входными и выходными способностями.

$W$  – суммарный ресурс сети. Сеть функционирует с выполнением закона сохранения:  $W = const$ .

## 2.2. ЭРГОДИЧЕСКИЕ ЦИКЛИЧЕСКИЕ СЕТИ

При малых ресурсах сеть описывается соответствующей цепью Маркова. Следуя классификации цепей Маркова, данной в [6], *эргодической сетью* назовем сеть, граф которой сильно связан; эргодической компонентой неэргодической сети назовем сильно связную компоненту, из которой нет выходящих ребер. Если дополнительно к этому НОД длин всех циклов графа равен единице, сеть будем называть *регулярной*. Эргодическую нерегулярную сеть, НОД длин всех циклов которой строго больше единицы, будем называть *циклической*.

В эргодической циклической сети каждая вершина достижима из любой другой, но так как сеть не является регулярной, переходы из некоторого множества вершин в другое множество возможны только за некоторое число тактов, отличное от единицы. Это означает, что никакая степень матрицы пропускных способностей циклической сети не будет строго положительной. Этим же свойством обладает и стохастическая матрица. Более того, нули для их разных степеней будут находиться в разных местах. С увеличением степени расположение нулей начинает циклически повторяться. Длина цикла соответствует количеству тактов, за которое из каждой вершины можно перейти в нее же.

В эргодической цепи Маркова выделяют циклические классы состояний [6]. С течением времени текущее состояние движется по циклическим классам в определенном порядке, причем каждые  $d$  шагов система оказывается в одном и том же циклическом классе. Количество циклических классов  $d$  называют пе-

---

*классов ресурсных сетей при малых ресурсах описываются однородными цепями Маркова.*

риодом цепи;  $d$  равно НОД всех циклов цепи. Регулярная цепь Маркова состоит целиком из одного циклического класса, т.е. для регулярной цепи Маркова  $d = 1$ . По аналогии с цепями Маркова будем говорить, что вершины эргодической сети также образуют циклические классы. Сеть, содержащую  $d$  циклических классов, будем называть  $d$ -циклической.

Стохастическая матрица  $R'$  циклической сети импримитивна с индексом импримитивности  $d$  [2]. Это означает, что  $R'$  имеет  $d$  различных собственных чисел, равных по модулю 1.

### 3. Предельные состояния и потоки в циклических сетях при малых ресурсах

Прежде чем формулировать общие утверждения о предельных матрицах, предельных векторах и возможности достижения глобальной устойчивости в циклических сетях при малых ресурсах, проследим на примере процессы, происходящие в сетях: изменение векторов состояния и изменение степеней стохастической матрицы.

#### 3.1. ФУНКЦИОНИРОВАНИЕ ОДНОРОДНОГО ПРОСТОГО ЦИКЛА ПРИ $W = 1$

*Пример 1.* Пусть сеть представлена двудольным графом (рис. 1).

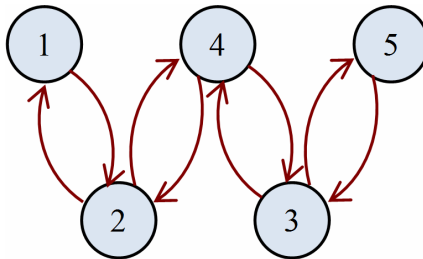


Рис. 1. Двудольный граф с пятью вершинами,  $d = 2$

Ее матрица пропускных способностей:

$$(1) R = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, r_{sum} = 16.$$

Соответствующая ей стохастическая матрица имеет вид

$$R' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0 & 0,5 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

На рис. 2 показан процесс перераспределения ресурса, соответствующий начальному состоянию  $Q(0) = (1, 0, 0, 0, 0)$ .

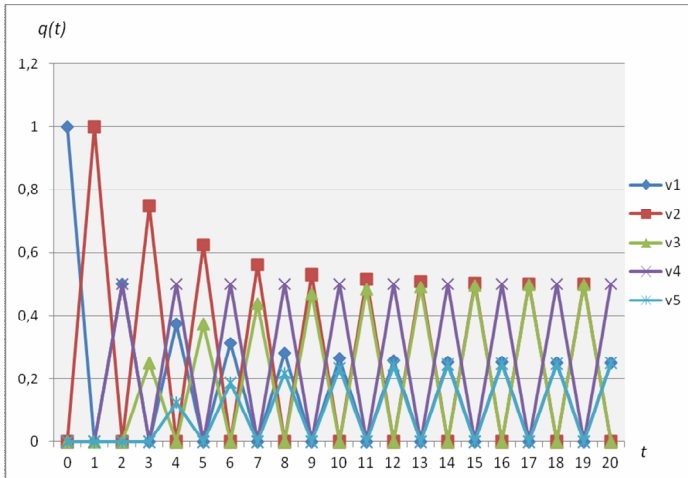


Рис. 2. Колебания при  $Q(0) = (1, 0, 0, 0, 0)$

Протокол функционирования сети, соответствующий рис. 2, представлен в таблице 1.



Таблица 1. Протокол функционирования 2-циклической сети с матрицей (1) и  $Q_1(0) = (1, 0, 0, 0, 0)$

$t_i$	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$
0	1	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0
2	0,5	0	0	0,5	0
3	0	0,75	0,25	0	0
4	0,375	0	0	0,5	0,125
5	0	0,625	0,375	0	0
6	0,313	0	0	0,5	0,188
7	0	0,563	0,438	0	0
8	0,281	0	0	0,5	0,219
9	0	0,531	0,469	0	0
10	0,266	0	0	0,5	0,234
11	0	0,516	0,484	0	0
12	0,258	0	0	0,5	0,242
13	0	0,508	0,492	0	0
14	0,254	0	0	0,5	0,246
15	0	0,504	0,496	0	0
16	0,252	0	0	0,5	0,248
17	0	0,502	0,498	0	0
18	0,251	0	0	0,5	0,249
19	0	0,501	0,499	0	0
20	0,25	0	0	0,5	0,25
21	0	0,5	0,5	0	0
22	0,25	0	0	0,5	0,25
23	0	0,5	0,5	0	0
...	...	...	...	...	...

Из рис. 2 и таблицы 1 видно, что на четных тактах ресурс содержится в вершинах  $v_1, v_4$  и  $v_5$ , на нечетных – в  $v_2$  и  $v_3$ . В этой сети  $d = 2$ , циклическими классами являются множества  $\{v_1, v_4, v_5\}$  и  $\{v_2, v_3\}$ .

В такой сети отсутствует равновесное предельное состояние. Протокол функционирования показывает, что в пределе получается два вектора, последовательно сменяющие друг друга:

$$Q_1^{1*} = (0,25; 0; 0; 0,5; 0,25) \text{ и } Q_2^{1*} = (0; 0,5; 0,5; 0; 0).$$

Помещая ресурс  $W = 1$  в начальном состоянии поочередно в каждую из вершин, получим те же два предельных вектора  $Q_1^{1*}$  и

$Q_2^{1*}$ , одинаковые для всех начальных состояний:  
 $Q(0) = (1, 0, 0, 0, 0)$ ,  $Q(1) = (0, 1, 0, 0, 0)$ ,  $Q(2) = (0, 0, 1, 0, 0)$ ,  
 $Q(3) = (0, 0, 0, 1, 0)$ ,  $Q(4) = (0, 0, 0, 0, 1)$ .

Поскольку  $d = 2$ , последовательность степеней стохастической матрицы  $R'$  состоит из двух сходящихся подпоследовательностей:

$$R_1^{\infty} = \begin{pmatrix} 0 & 0,5 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0,25 & 0 & 0 & 0,5 & 0,25 \\ 0,25 & 0 & 0 & 0,5 & 0,25 \\ 0 & 0,5 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0,5 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$R_2^{\infty} = \begin{pmatrix} 0,25 & 0 & 0 & 0,5 & 0,25 \\ 0 & 0,5 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0,25 & 0 & 0 & 0,5 & 0,25 \\ 0,25 & 0 & 0 & 0,5 & 0,25 \end{pmatrix}.$$

Матрицы  $R_1^{\infty}$  и  $R_2^{\infty}$  состоят из чередующихся векторов  $Q_1^{1*}$  и  $Q_2^{1*}$ , причем  $R_2^{\infty}$  представляет собой инверсию  $R_1^{\infty}$ : в ней каждый вектор  $Q_1^{1*}$  заменен вектором  $Q_2^{1*}$ , и наоборот. Строки 1, 4, 5, соответствующие вершинам первого циклического класса, равны; то же самое относится и к строкам 2, 3, соответствующим вершинам второго циклического класса.

Оба вектора  $Q_1^{1*}$  и  $Q_2^{1*}$  являются собственными векторами матрицы  $R_2^{\infty}$ , а матрица  $R_1^{\infty}$  переводит вектор  $Q_1^{1*}$  в  $Q_2^{1*}$ ,  $Q_2^{1*}$  — в  $Q_1^{1*}$ . То же самое происходит и при умножении этих векторов на матрицу  $R'$ :

$$Q_1^{1*} R' = Q_2^{1*}, \quad Q_2^{1*} R' = Q_1^{1*}.$$

Умножение на стохастическую матрицу  $R'$  переводит матрицу  $R_1^{\infty}$  в  $R_2^{\infty}$  и наоборот.

Заметим, что сумма двух предельных матриц дает матрицу с одинаковыми строками:

$$R_1^{1\infty} + R_2^{1\infty} = \begin{pmatrix} 0,25 & 0,5 & 0,5 & 0,5 & 0,25 \\ 0,25 & 0,5 & 0,5 & 0,5 & 0,25 \\ 0,25 & 0,5 & 0,5 & 0,5 & 0,25 \\ 0,25 & 0,5 & 0,5 & 0,5 & 0,25 \\ 0,25 & 0,5 & 0,5 & 0,5 & 0,25 \end{pmatrix}.$$

Вектор, образующий строки этой матрицы, является левым собственным вектором обеих матриц  $R_1^{1\infty}$  и  $R_2^{1\infty}$ , а также стохастической матрицы  $R^1$ ; более того, если в матрице  $R_1^{1\infty} + R_2^{1\infty}$  нормировать строки, окажется, что она равна предельной матрице  $A$ , к которой суммируется по Чезаро последовательность  $R^{1k}$  [5]:

$$(2) \quad A = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k R^{1j}.$$

$$A = \frac{R_1^{1\infty} + R_2^{1\infty}}{2} = \begin{pmatrix} 0,125 & 0,25 & 0,25 & 0,25 & 0,125 \\ 0,125 & 0,25 & 0,25 & 0,25 & 0,125 \\ 0,125 & 0,25 & 0,25 & 0,25 & 0,125 \\ 0,125 & 0,25 & 0,25 & 0,25 & 0,125 \\ 0,125 & 0,25 & 0,25 & 0,25 & 0,125 \end{pmatrix}.$$

Матрица  $R^1$  неразложима по построению. Неразложимая неотрицательная матрица имеет единственный неотрицательный собственный вектор (с точностью до скалярного множителя) [2]. Собственный вектор стохастической матрицы сети определяется как сумма векторов  $Q_1^{1*}$  и  $Q_2^{1*}$ . Для доказательства этого факта достаточно сложить равенства  $Q_1^{1*} R^1 = Q_2^{1*}$  и  $Q_2^{1*} R^1 = Q_1^{1*}$ .

Вектор абсолютных предельных вероятностей находится по формуле:

$$Q^{1*} = \frac{1}{2} (Q_1^{1*} + Q_2^{1*}).$$

### 3.2. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ВЕКТОРЫ И ЦИКЛЫ D-ЦИКЛИЧЕСКОЙ СЕТИ

Введем некоторые дополнительные обозначения и приведем результаты, полученные для  $d$ -циклических эргодических цепей Маркова.

В [6] доказано, что предельная матрица  $A$ , к которой суммируется по Чезаро последовательность  $R^k$ , (формула (2)) имеет вид:

$$A = \mathbf{1} \cdot \alpha,$$

где  $\mathbf{1}$  – вектор-столбец, состоящий из единиц, а  $\alpha$  является единственным неотрицательным левым собственным вектором матрицы  $R'$ , соответствующим собственному числу  $\lambda = 1$ :

$$(3) \quad \alpha R' = \alpha.$$

Также выполняется

$$AR' = R'A = A.$$

Пусть  $R'$  – стохастическая матрица эргодической  $d$ -циклической ресурсной сети. Рассмотрим последовательность ее степеней:  $R', \dots, R'^d, R'^{d+1}, \dots$ . Она состоит из  $d$  сходящихся подпоследовательностей:

$$1) R', R'^d \cdot R', R'^{2d} \cdot R', R'^{3d} \cdot R', \dots$$

$$2) R'^2, R'^d \cdot R'^2, R'^{2d} \cdot R'^2, R'^{3d} \cdot R'^2, \dots$$

...

$$d) R'^d, R'^d \cdot R'^d, R'^{2d} \cdot R'^d, R'^{3d} \cdot R'^d, \dots$$

Таким образом, видно, что все пределы  $R_1'^{\infty}, \dots, R_d'^{\infty}$  выражаются через одну предельную матрицу  $R_d'^{\infty}$ :

$$R_1'^{\infty} = R_d'^{\infty} R';$$

$$R_2'^{\infty} = R_d'^{\infty} R'^2;$$

...

$$R_{d-1}'^{\infty} = R_d'^{\infty} R'^{d-1}.$$

Сумма матриц  $R_1'^{\infty}, \dots, R_d'^{\infty}$  строго положительна. В [1] доказано, что предельная матрица  $A$  (2) определяется по формуле

$$(4) \quad A = \frac{1}{d}(E + R' + \dots + R'^{d-1})R_d'^{\infty} = \frac{1}{d}R_d'^{\infty}(E + R' + \dots + R'^{d-1}).$$

Для любого начального распределения единичного ресурса выполнится:

$$(5) \quad \alpha = Q^1(0)A.$$

Формула (5) означает, что каждая строка матрицы  $A$  соответствует предельным вероятностям цепи Маркова в смысле среднего арифметического. Далее при описании ресурсных сетей вместо символа  $\alpha$ , обозначающего предельный вероятностный вектор, будем использовать обозначение  $Q^{1*}$  – вектор предельного состояния при единичном ресурсе:  $Q^{1*} = Q^1(0)A$ ; матрица  $A$  состоит из  $n$  одинаковых вектор-строк, равных  $Q^{1*}$ .

Рассмотрим процесс функционирования сети по правилу 2. Последовательность векторов состояний делится на  $d$  сходящихся подпоследовательностей, так же как и последовательность степеней стохастической матрицы.

$$\begin{aligned} Q(kd + 1) &= Q(0)R^{kd} R^1, \\ Q(kd + 2) &= Q(0)R^{kd} R^2, \\ &\dots \\ Q(kd) &= Q(0)R^{kd} R^d = Q(0)R^{(k+1)d} \\ k &= 0, 1, \dots \end{aligned}$$

Переходя к пределу, получим:

$$(6) \quad Q_1^* = Q(0)R_d^{\infty} R^1, \quad Q_2^* = Q(0)R_d^{\infty} R^2, \quad \dots \quad Q_d^* = Q(0)R_d^{\infty}.$$

Непосредственно из выражений (6) следует, что  $Q_{i+1}^* = Q_i^* R^i$ ,  $i = 1, \dots, d-1$ ,  $Q_1^* = Q_d^* R^d$ .

Векторы  $Q_1^*, \dots, Q_d^*$  будем называть *предельными векторами*. Последовательность, в которой они сменяют друг друга, будем называть *предельным циклом* эргодической сети.

Таким образом, доказано следующее предложение.

*Предложение 1. В эргодической  $d$ -циклической ресурсной сети, функционирующей по правилу 2, существует предельный цикл длины  $d$ , состоящий из предельных векторов  $Q_1^*, \dots, Q_d^*$ , определяемых по формуле (6).*

*Предложение 2. Для эргодической  $d$ -циклической ресурсной сети, функционирующей по правилу 2, единственным положительным собственным вектором матрицы  $R^i$  при  $W = 1$*

является вектор, равный нормированной сумме предельных векторов и определяемый по формуле

$$(7) \quad Q^{1*} = \frac{Q_1^* + \dots + Q_d^*}{d \cdot W}.$$

*Доказательство.* Суммируя выражения (6), имеем:

$$Q_1^* + \dots + Q_d^* = Q(0)R_d'^{\infty}(E + R' + \dots + R'^{d-1}).$$

Преобразуя правую часть по формуле (4), получим:

$$Q_1^* + \dots + Q_d^* = dQ(0)A.$$

Но любой вектор  $Q(0)$  при условии, что сеть с нулевого такта функционирует по правилу 2, можно представить в виде  $Q(0) = WQ^1(0)$ . Отсюда

$$Q_1^* + \dots + Q_d^* = dWQ^1(0)A \text{ или}$$

$$\frac{Q_1^* + \dots + Q_d^*}{dW} = Q^1(0)A.$$

Из формулы (5) имеем:  $Q^{1*} = \frac{Q_1^* + \dots + Q_d^*}{dW}$ . То есть матрица

$A$  состоит из  $n$  вектор-строк, определяемых формулой (7). А из (3) следует, что  $Q^{1*}R' = Q^{1*}$ .  $\square$

При умножении на матрицу  $R'$ , каждый вектор  $Q_i^*$  переходит в вектор  $Q_{i+1}^*$  (сложение индексов происходит по модулю  $d$ ). Но существует матрица, которая оставляет все эти векторы неподвижными.

*Предложение 3.* Предельные векторы эргодической  $d$ -циклической сети  $Q_1^*, \dots, Q_d^*$  являются собственными векторами матрицы  $R_d'^{\infty}$ , соответствующими собственному числу  $\lambda = 1$  кратности  $d$ .

*Доказательство.* Запишем равенства (6) в виде

$$(8) \quad Q_i^* = Q(0)R_d'^{\infty}R'^i, \quad i = 1, \dots, d.$$

Умножим обе части (8) на матрицу  $R_d'^{\infty}$  справа.

$$Q_i^*R_d'^{\infty} = Q(0)R_d'^{\infty}R'^iR_d'^{\infty}, \text{ но по формуле (4) это можно переписать в виде}$$

$$Q_i^*R_d'^{\infty} = Q(0)(R_d'^{\infty}R_d'^{\infty})R'^i = Q(0)R_d'^{\infty}R'^i$$

По формуле (8) правая часть равенства равна  $Q_i^*$ . Тогда

$$Q_i^* R_d'^{\infty} = Q_i^*. \quad \square$$

*Замечание.* В предельном случае, когда НОД всех циклов сети равен единице и, соответственно, сеть представляет собой один циклический класс (является регулярной), доказанные утверждения остаются верными. В сети, функционирующей по правилу 2, существует единственный вектор предельного состояния  $Q^*$ . Он является собственным вектором стохастической матрицы  $R'$  (предложение 1), для него верно равенство (7):  $Q^* = Q^*/W$  из предложения 2, и он является собственным вектором единственной предельной матрицы  $R'^{\infty}$ , соответствующим простому собственному числу  $\lambda = 1$  (предложение 3). Справедливость всех этих утверждений следует непосредственно из свойств регулярных цепей Маркова. Для ресурсных сетей они сформулированы в [3].

### 3.2. ДОСТИЖЕНИЕ ГЛОБАЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ ПРИ МАЛЫХ РЕСУРСАХ

Рассмотрим задачу нахождения начального состояния, при котором в сети достигается *глобальное равновесие*, т.е. все векторы  $Q_1^*, \dots, Q_d^*$  совпадают.

Докажем несколько вспомогательных утверждений о свойствах предельных векторов и предельных степеней матриц.

*Л е м м а 1.* В эргодической  $d$ -циклической ресурсной сети, функционирующей по правилу 2, предельные векторы  $Q_1^*, \dots, Q_d^*$  при постоянном суммарном ресурсе в циклических классах не зависят от распределения ресурса по вершинам внутри классов в начальном состоянии.

*Доказательство.* Матрица  $R'$  импримитивна с индексом импримитивности  $d$ . В [2] доказано, что ее степень  $R'^d$  разлагается на  $d$  примитивных матриц, которые имеют одно и то же максимальное характеристическое число. Это означает, что существует такая нумерация вершин, при которой  $R'^d$  блочно-диагональна. Блоки соответствуют циклическим классам.

$$R'^d = \begin{pmatrix} R'_{11}{}^d & 0 & \dots & 0 \\ 0 & R'_{22}{}^d & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & R'_{dd}{}^d \end{pmatrix}.$$

Каждая матрица  $R_{ii}{}^{1d}$  неразложима и примитивна по определению, кроме того, все эти матрицы являются стохастическими. Каждая из них задает регулярную цепь Маркова. Матрица  $R_d'^{\infty} = \lim_{k \rightarrow \infty} (R'^d)^k$  также является блочной с блоками  $(R_{ii}{}^d)^\infty$ . Каждая пара блоков  $R_{ii}{}^{1d}$  и  $(R_{ii}{}^d)^\infty$  имеет один и тот же единственный положительный предельный вектор  $\pi_i$ , соответствующий максимальному собственному числу  $\lambda = 1, i = 1, \dots, d$ .

Поскольку сеть с первого такта функционирует по правилу 2, т.е. вершины отдают весь свой ресурс, на каждом такте ресурс из каждого циклического класса полностью переходит в следующий класс.

Любой вектор начального состояния  $Q(0)$  можно разложить в сумму векторов  $Q_i(0)$ , каждый из которых соответствует одному циклическому классу. Тогда поскольку матрицы  $R_{ii}{}^{1d}$  регулярны, при  $W_i = 1$  для любого  $Q_i(0)$  имеют место равенства  $Q_i(0)R_{ii}{}^{1\infty} = Q_{di}^* = \pi_i$ .

Для произвольного  $W$  при условии, что сеть с первого такта функционирует по правилу 2, для любого  $Q_i(0)$  выполняется:

$$Q_i(0)R_{ii}{}^{1\infty} = Q_{di}^* = W_i \pi_i, \text{ где } W_i - \text{ суммарный ресурс в } i\text{-м циклическом классе.}$$

Прямая сумма векторов  $Q_{di}^*$  даст единственный вектор  $Q_d^*$ . Остальные векторы предельного цикла получаются из  $Q_d^*$  умножением на соответствующие степени матрицы  $R'$  и тоже определяются единственным образом.  $\square$

*Л е м м а 2. В эргодической d-циклической ресурсной сети, функционирующей по правилу 2, при суммарном ресурсе  $W = 1$ , сосредоточенном в начальном состоянии в t-м циклическом классе, предельные векторы  $Q_1^*, \dots, Q_d^*$  являются строками предельных матриц  $R_j^{1\infty}$ , каждая из которых состоит из d*



различных строк, причем на строках, соответствующих номерам вершин из  $i$ -го циклического класса, находится вектор  $Q_k^*$ , где  $k \in [1, d]$ ,

$$(9) \quad k \equiv m + j + i - 3 \pmod{d} + 1, \quad i, j = 1, \dots, d.$$

*Доказательство.* Рассмотрим начальное состояние, в котором ресурс находится в первом циклическом классе ( $m = 1$ ). Не нарушая общности, предположим, что этому классу принадлежит вершина  $v_1$ . Пусть  $Q(0) = (1, 0, \dots, 0)$ . Обозначим этот вектор начального состояния через  $Q_1(0)$ .

Имеем:

$$Q_1^* = Q_1(0)R_1^{\infty} = (R_1^{\infty})_1,$$

$$Q_2^* = Q_1(0)R_2^{\infty} = (R_2^{\infty})_1,$$

...

$$Q_d^* = (R_d^{\infty})_1,$$

где  $(R_j^{\infty})_1$  – первая строка матрицы  $R_j^{\infty}$ .

По лемме 1, вместо вершины  $v_1$  может быть взята любая вершина из первого циклического класса. Таким образом, в матрицах  $R_j^{\infty}$  в строках, соответствующих номерам вершин из первого циклического класса, стоят векторы  $Q_j^*$ .

Для каждого вектора  $Q_{i+1}^*$  ( $i = 1, \dots, d-1$ ) справедливо  $Q_{i+1}^* = Q_i^* R'$ ,  $Q_1^* = Q_d^* R'$ ; для предельных матриц выполняется  $R_{j+1}^{\infty} = R_j^{\infty} R'$ . Это означает, что каждая матрица  $R_j^{\infty}$  в строках, соответствующих номерам вершин из  $i$ -го циклического класса, содержит векторы с номером  $j + i - 1$  при  $j + i - 1 \leq d$ , и с номером  $j + i - 1 - d$  при  $j + i - 1 > d$ . Индекс  $k$  вектора  $Q_k^*$ , удовлетворяющий этим условиям, находится по формуле  $k \equiv j + i - 2 \pmod{d} + 1$ .

Обобщая эту формулу на произвольный класс с номером  $m$ , получим

$$k \equiv m + j + i - 3 \pmod{d} + 1. \quad \square$$

С помощью полученных результатов докажем лемму о существовании равновесного состояния в циклических сетях.

*Л е м м а 3.* В эргодической  $d$ -циклической ресурсной сети, функционирующей по правилу 2, предельные векторы  $Q_1^*, \dots, Q_d^*$  совпадают, если в каждом из циклических классов в

начальном состоянии находится одинаковое количество ресурса  $W/d$  и для каждой вершины выполнено  $q_i(0) \leq r_i^{out}$ . Вектор предельного состояния равен  $WQ^{1*}$ , где  $Q^{1*}$  – любая строка матрицы  $A$ , определяемой по формуле (4).

*Доказательство.* Рассмотрим  $d$  векторов начального состояния с единичным ресурсом, сосредоточенным в некоторой вершине каждого из циклических классов:  $Q_m(0)$ , где  $m$  – номер циклического класса,  $m = 1, \dots, d$ .

Обозначим их предельные векторы через  $Q_{j_m}^*$ , где  $j$  – номер предельного вектора при заданном начальном состоянии. Получим следующие равенства:

$$Q_{j_m}^* = Q_m(0)R_d^{\infty}R^{j'} = Q_1(0)R_d^{\infty}R^{j+m} = Q_k^*,$$

где  $Q_k^* = Q_{k_1}^*$  – предельные векторы при ресурсе, находящемся в первом классе, индекс  $k \in [1, d]$  вычисляется по формуле (9) при  $m = 1$ .

Сложим векторы  $Q_i(0)$  и найдем первый предельный вектор:

$$(Q_1(0) + \dots + Q_d(0))R_d^{\infty}R^{1'} = Q_{1_1}^* + \dots + Q_{d_1}^* = Q_1^* + \dots + Q_d^*.$$

Для второго предельного вектора имеем

$$(Q_1(0) + \dots + Q_d(0))R_d^{\infty}R^{2'} = Q_{1_2}^* + \dots + Q_{d_2}^* = Q_2^* + \dots + Q_d^* + Q_1^*.$$

В общем случае  $m$ -й предельный вектор будет суммой векторов  $Q_1^* + \dots + Q_d^*$  с циклически переставленными слагаемыми.

Таким образом, если в начальном состоянии в каждом циклическом классе находится единичный ресурс, все  $d$  предельных векторов совпадают.

Если ресурс в каждом классе пропорционально увеличить в  $W/d$  раз, предельные векторы будут равны при условии, что все вершины сети функционируют по правилу 2. □

Условие на начальное состояние в лемме 3 можно ослабить. Если ресурс в начальном состоянии распределен между циклическими классами неравномерно, и при этом некоторые вершины первые несколько тактов функционируют по правилу 1, то за эти такты может произойти выравнивание ресурса в цикличе-

ских классах. Таким образом, справедливо более общее утверждение.

*Теорема 1.* В эргодической  $d$ -циклической ресурсной сети, функционирующей по правилу 2, начиная с некоторого момента  $t'$  предельные векторы  $Q^*_1, \dots, Q^*_d$  совпадают тогда и только тогда, когда в каждом из циклических классов при  $t = t'$  находится одинаковое количество ресурса  $W/d$ . Вектор предельного состояния равен  $WQ^{1*}$ , где  $Q^{1*}$  – любая строка матрицы  $A$ , определяемой по формуле (4).

*Доказательство.* 1. Пусть при  $t = t'$  вся сеть функционирует по правилу 2 и в каждом циклическом классе находится одинаковое количество ресурса. Приняв  $Q(t')$  за новое начальное состояние, получим условие леммы 3.

2. Пусть в сети, функционирующей по правилу 2, векторы  $Q^*_1, \dots, Q^*_d$  совпадают. По определению для предельного цикла выполняются соотношения:  $Q^*_{i+1} = Q^*_i R'$ ,  $i = 1, \dots, d-1$ ,  $Q^*_1 = Q^*_d R'$ . Тогда имеем:  $Q^*_i = Q^*_i R'$ ,  $i = 1, \dots, d$ . Умножение на матрицу  $R'$  переводит весь суммарный ресурс каждого класса в следующий циклический класс. Совпадение векторов происходит только при одинаковых суммарных ресурсах в каждом циклическом классе.  $\square$

Проиллюстрируем теорему 1 примером.

*Пример 2.* Пусть в сети с матрицей пропускных способностей (1) начальное состояние  $Q(0) = (4, 0, 0, 0, 0)$ . Функционирование сети представлено на рис. 3, построенном на основании таблицы 2.

Из протокола видно, что ресурс, в начальном состоянии находившийся в первом циклическом классе, на первом такте разделится поровну между двумя классами. Одновременно с этим все вершины перешли на правило 2, и дальнейшего перераспределения ресурса между циклическими классами не происходит. Сеть стабилизируется; в каждом классе суммарный ресурс равен 2. Два предельных вектора совпадают между собой. В сети имеется равновесное состояние:

$$Q^* = Q_1^* = Q_2^* = (0,5, 1, 1, 1, 0,5).$$

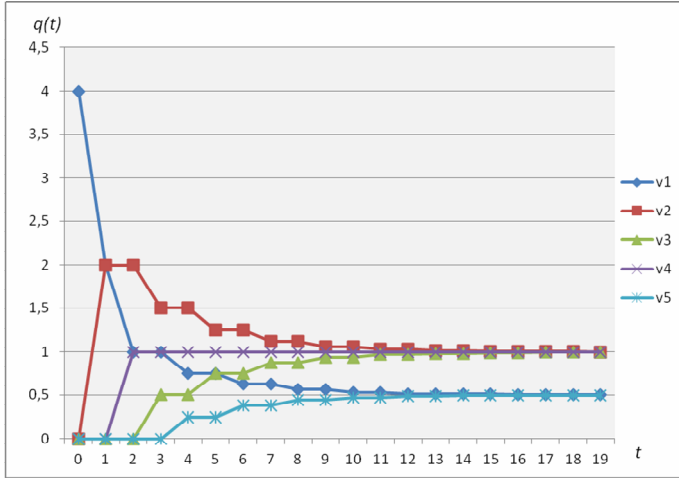


Рис. 3. Функционирование сети, заданной графом с матрицей (1),  $Q(0) = (4, 0, 0, 0, 0)$

Таблица 2. Протокол работы сети

$t$	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$
0	4,000	0,000	0,000	0,000	0,000
1	2,000	2,000	0,000	0,000	0,000
2	1,000	2,000	0,000	1,000	0,000
3	1,000	1,500	0,500	1,000	0,000
4	0,750	1,500	0,500	1,000	0,250
5	0,750	1,250	0,750	1,000	0,250
...					
20	0,501	1,002	0,998	1,000	0,499
21	0,501	1,001	0,999	1,000	0,499
22	0,500	1,000	1,000	1,000	0,500
23	0,500	1,000	1,000	1,000	0,500
...					

#### 4. Заключение

В работе исследованы процессы перераспределения малых ресурсов в эргодических циклических сетях. Рассмотрено функционирование сетей с разными топологиями. Описаны численные эксперименты по нахождению предельных векторов и предельных матриц. Найдены формулы для нахождения  $d$  предельных матриц для  $d$  сходящихся подпоследовательностей последовательности  $R^k$ . Получены формулы, описывающие  $d$  предельных векторов, между которыми происходят колебания. Описаны начальные состояния, при которых в сети достигается глобальное равновесие.

В качестве потенциального приложения ресурсных сетей рассматриваются модели децентрализованного управления в многоагентных системах, в том числе задача нахождения консенсуса [1]. Эта задача может быть поставлена и решена в тех классах сетей, в которых предельное состояние существует и зависит от начального. Задача управления распределением ресурса, и, в частности, достижения консенсуса – объект дальнейшего исследования ресурсных сетей.

#### Литература

1. АГАЕВ Р.П., ЧЕБОТАРЕВ П.Ю. *Сходимость и устойчивость в задачах согласования характеристик (обзор базовых результатов)* // Управление большими системами. – 2010. – Специальный выпуск 30.1 «Сетевые модели в управлении». – С. 470–505.
2. ГАНТМАХЕР Ф.Р. *Теория матриц*. – М.: Физматлит. 2004. – 560 с.
3. ЖИЛЯКОВА Л.Ю. *Несимметричные ресурсные сети. I. Процессы стабилизации при малых ресурсах* // Автоматика и телемеханика. – 2011. – №4. – С. 133–143.
4. ЖИЛЯКОВА Л.Ю. *Несимметричные ресурсные сети. II. Поток при больших ресурсах и их стабилизация* // Автоматика и телемеханика. – 2012. – №6. – С. 103–118.

5. ЖИЛЯКОВА Л.Ю. *Несимметричные ресурсные сети. III. Исследование предельных состояний* // Автоматика и телемеханика. – 2012. – №7. – С. 67–77.
6. КЕМЕНИ ДЖ., СНЕЛЛ ДЖ. *Конечные цепи Маркова*. – М.: Наука, 1970. – 272 с.
7. КУЗНЕЦОВ О.П. *Однородные ресурсные сети. I. Полные графы* // Автоматика и телемеханика. – 2009. – №11. – С. 136–147.
8. РОБЕРТС Ф.С. *Дискретные математические модели с приложениями к социальным, биологическим и экологическим задачам*. – М. Наука, 1986. – 496 с.
9. BJÖRNER A., LOVASZ, L. *Chip-firing game on directed graphs* // J. Algebraic Combinatorics. – 1992. – №1. – P. 305–328.
10. BLANCHARD, PH., VOLCHENKOV, D. *Random Walks and Diffusions on Graphs and Databases: An Introduction* (Springer Series in Synergetics). – Springer-Verlag – Berlin–Heidelberg, 2011. – 353 p.
11. LOVASZ L., WINKLER P. *Mixing of Random Walks and Other Diffusions on a Graph* // Surveys in Combinatorics / Ed. P. Rowlinson. London Math. Soc. Lecture Notes Series 218, Cambridge Univ. Press, 1995. – P. 119–154.
12. PRISNER E. *Parallel Chip Firing on Digraphs* // Complex Systems. – 1994. – №8. – P. 367–383.

## **ERGODIC CYCLIC RESOURCE NETWORKS.**

### **I. OSCILLATIONS AND EQUILIBRIUM AT LOW RESOURCE**

**Ludmila Zhilyakova**, Institute of Control Sciences of RAS, (Moscow, Profsoyuznaya st., 65), cand. sc., senior scientist, zhilyakova.ludmila@gmail.com.

*Abstract: We study operation of ergodic nonregular resource networks when total amount of resource is small. We show that for an arbitrary initial state undamped oscillations occur between several limit vectors. The number of different limit vectors is equal to the number of cyclic classes of a network. The global equilibrium can be achieved when all limit vectors coincide. We derive conditions on initial states leading to the global equilibrium, and obtain formulae for the limit powers of stochastic matrices and for limit vectors.*

Keywords: resource network, stochastic matrix, ergodic Markov chain, equilibrium, limit state.

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии М.В. Губко*

*Поступила в редакцию 06.02.2013.  
Опубликована 31.05.2013.*

УДК 519.177+519.217.2+517.977.1  
ББК 22.18

## ОБ АСИМПТОТИКЕ В МОДЕЛЯХ КОНСЕНСУСА<sup>1</sup>

Чеботарев П. Ю.<sup>2</sup>, Агаев Р. П.<sup>3</sup>

(ФГБУН Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова  
РАН, Москва)

*Показано, что предельный вектор состояния в дифференциальной модели консенсуса с произвольным орграфом коммуникаций выражается произведением собственного проектора лапласовской матрицы модели на вектор начального состояния. Указанный собственный проектор совпадает со стохастической матрицей максимальных исходящих лесов взвешенного орграфа коммуникаций. Эти утверждения составляют теорему о лесах и консенсусе. Аналогичный результат для дискретной модели Де Гроота в общем случае включает предел по Чезаро. Теорема о лесах и консенсусе полезна при анализе моделей децентрализованного управления многоагентными системами.*

Ключевые слова: консенсус, собственный проектор, исходящий лес, теорема о лесах и консенсусе, модель Де Гроота.

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, грант № 13-07-00990 и Программы № 14 ОЭММПУ РАН.

<sup>2</sup> Павел Юрьевич Чеботарев, д.ф.-м.н., в.н.с. (pavel4e@gmail.com, Москва, ул. Профсоюзная, д. 65, тел. (495) 334-88-69).

<sup>3</sup> Рафиг Паашаевич Агаев, д.ф.-м.н., с.н.с. (agaraf@rambler.ru, Москва, ул. Профсоюзная, д. 65, тел. (495) 334-88-69).



## 1. Введение

Рассмотрим дифференциальную модель поиска консенсуса в многоагентной системе [8, 22]:

$$(1) \quad \dot{x}_i(t) = u_i(t),$$

$$(2) \quad u_i(t) = - \sum_{j=1}^n a_{ij} (x_i(t) - x_j(t)), \quad i = 1, \dots, n,$$

где  $x_i(t)$  – состояние  $i$ -го агента,  $a_{ij} \geq 0$  – вес, с которым он учитывает расхождение по состоянию с  $j$ -м агентом. Перепишем модель (1)–(2) в матричной форме:

$$(3) \quad \dot{x}(t) = -Lx(t),$$

где  $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T$ ,  $L$  – лапласовская матрица модели (1)–(2), определяемая соотношением

$$(4) \quad L = \text{diag}(A\mathbf{1}) - A,$$

$A = (a_{ij})_{n \times n}$ ,  $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)^T$ ,  $\text{diag}(v)$  – диагональная матрица с вектором  $v$  на диагонали.

Несимметричные лапласовские матрицы – класс матриц, к которому относится матрица  $L$  в модели (3), – изучались, в частности, в [1, 4, 13].

В настоящей работе получена *теорема о лесном представлении консенсуса* (более кратко, *теорема о лесах и консенсусе*), устанавливающая, что для любой неотрицательной матрицы  $A$  и любой траектории  $x(t)$  модели (1)–(2) имеет место

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \tilde{J}x(0),$$

где  $\tilde{J}$  – собственный проектор матрицы  $L$ , совпадающий с матрицей максимальных исходящих лесов  $\bar{J}$  орграфа коммуникаций, соответствующего  $A$ .

Аналогичный результат, где, однако, обычный предел заменен пределом по Чезаро, имеет место для дискретного аналога модели (1)–(2), совпадающего с известной моделью Де Гроота.

Теорема о лесах и консенсусе обобщает известное выражение [20, теорема 3.12]

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = (v_l^T x(0)) \mathbf{1},$$

выполняющееся при  $\text{rank } L = n - 1$  или, эквивалентно, когда орграф коммуникаций имеет остовное исходящее дерево. В этом выражении  $v_l$  – единственный левый собственный вектор, отвечающий нулевому собственному значению  $L$  и такой, что  $v_l^T \mathbf{1} = 1$ .

План статьи. Введя необходимые понятия и обсудив предварительные результаты, в разделе 3 мы доказываем теорему о лесах и консенсусе. Раздел 4 посвящен свойствам предельного состояния модели. В разделе 5 полученные результаты проиллюстрированы на примере; в разделе 6 из теоремы о лесах и консенсусе выведен классический «критерий наличия исходящего дерева». Наконец, в разделе 7 представлена теорема о лесах и консенсусе для дискретного аналога модели (1)–(2), совпадающего с моделью Де Гроота.

## **2. Основные понятия и предварительные результаты**

### **2.1. СОБСТВЕННЫЕ ПРОЕКТОРЫ И ФУНКЦИИ ОТ МАТРИЦ**

Пусть  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  – любая квадратная матрица,  $\mathcal{R}(A)$  и  $\mathcal{N}(A)$  – соответственно образ (линейная оболочка множества столбцов) и ядро (подпространство в  $\mathbb{C}^n$ , отображаемое в нуль) матрицы  $A$ . Пусть  $\nu = \text{ind } A$  – индекс  $A$ , т.е. наименьшее  $k \in \{0, 1, \dots\}$ , при котором  $\text{rank } A^{k+1} = \text{rank } A^k$ . Индекс матрицы есть индекс ее собственного значения 0, то есть кратность нуля как корня

ее минимального многочлена (см. [7, § 5 главы 4]), или размер наибольшей жордановой клетки с нулевой диагональю в ее жордановой форме. Невырожденность  $A$  равносильна  $\nu = 0$ , т.к. в определении индекса матрица  $A^0$  отождествляется с единичной матрицей  $I$  даже если все элементы  $A$  – нулевые. Если  $\nu = 1$ , то алгебраическая и геометрическая кратности 0 равны (в этом случае собственное значение 0 называют *полупростым*).

*Собственным проектором* [24] матрицы  $A$ , соответствующим собственному значению 0, называют<sup>4</sup> такой проектор  $Z$  (т.е. идемпотентную матрицу:  $Z^2 = Z$ ), что  $\mathcal{R}(Z) = \mathcal{N}(A^\nu)$  и  $\mathcal{N}(Z) = \mathcal{R}(A^\nu)$ . Иными словами,  $Z$  есть проектор на  $\mathcal{N}(A^\nu)$  вдоль  $\mathcal{R}(A^\nu)$ , откуда  $A^\nu Z = ZA^\nu = 0$ . В случае вырожденной матрицы  $A$ , следуя [25], будем называть  $Z$  *собственным проектором матрицы  $A$*  (без упоминания собственного значения 0). Собственный проектор единствен, поскольку идемпотентная матрица однозначно определяется своим образом и ядром (см., например, [11, разделы 2.4 и 2.6]).

Пример 1. Для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ -3 & -3 & 0 & 5 \\ -2 & -3 & 1 & 4 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{жорданова форма имеет вид}$$

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{поэтому } \nu = \text{ind } A = 3. \quad \text{Для нахождения}$$

собственного проектора  $Z$  матрицы  $A$  воспользуемся характери-

---

<sup>4</sup>Такой собственный проектор называют также главным идемпотентом [15].

зацией (к) в [3]: при любом целом  $u \geq \nu$

$$(5) \quad Z = \lim_{|\alpha| \rightarrow \infty} (I + \alpha A^u)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно убедиться, что  $Z^2 = Z$ ;  $ZA^3 = A^3Z = 0$ . В [3] представлены и другие методы нахождения собственного проектора.

•

Собственные проекторы используются для разложения матрицы на *компоненты*, что позволяет определять  $f(A)$  для дифференцируемых функций  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  (см. например, [7, глава 5], [11, раздел 2.5], [16, 17]), в теории обобщенно-обратных матриц, а также во многих приложениях матричного анализа.

Пусть  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$  – все *различные* собственные значения  $A$ , а  $\nu_k$  – индекс  $\lambda_k$ , определяемый как индекс матрицы  $A - \lambda_k I$ . Согласно теории компонент матрицы [7, глава 5] для любой функции  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , имеющей конечные производные  $f^{(j)}(\lambda_k)$  порядков  $j = 0, \dots, \nu_k - 1$  в точках  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ ,  $f(A)$  определяется следующим образом:

$$(6) \quad f(A) := \sum_{k=1}^s \sum_{j=0}^{\nu_k-1} f^{(j)}(\lambda_k) Z_{kj},$$

где под производной порядка 0 понимают значение функции, а  $Z_{kj}$  – *компоненты*  $A$ , определяемые выражением

$$(7) \quad Z_{kj} = (j!)^{-1} (A - \lambda_k I)^j Z_{k0}.$$

Здесь компонента  $Z_{k0}$  есть собственный проектор матрицы  $A - \lambda_k I$  ( $k = 1, \dots, s$ ); его называют также *собственным проектором  $A$ , соответствующим собственному значению  $\lambda_k$* .

Из (6) и (7) следует

$$(8) \quad f(A) = \sum_{k=1}^s \left( \sum_{j=0}^{\nu_k-1} \frac{f^{(j)}(\lambda_k)}{j!} (A - \lambda_k I)^j \right) Z_{k0}.$$

*Пример 2.* С помощью теории компонент матрицы найдем  $f(A) = e^A$  для матрицы  $A$  из примера 1. Имеем  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = 1$ . Индексы собственных значений:  $\nu_1 = 3$ ,  $\nu_2 = 1$ . Согласно (6)–(7) (9)  $e^A = Z_{10} + Z_{11} + Z_{12} + e \cdot Z_{20} = (I + A + \frac{1}{2}A^2)Z + e \cdot Z_{20}$ . Аналогично (5) вычисляем

$$(10) \quad Z_{20} = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} (I + \alpha(A - I))^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Подстановка  $A$ , (5) и (10) в (9) приводит к результату:

$$(11) \quad e^A = \begin{pmatrix} 1,5 & e & 0,5 - e & 0,5 - e \\ -2,5 & 2 - 2e & -3,5 + 2e & 0,5 + 2e \\ -1,5 & 1 - 2e & -1,5 + 2e & -0,5 + 2e \\ -1 & 1 - e & -2 + e & 1 + e \end{pmatrix}.$$

Тот же результат можно получить, представив матричную экспоненту рядом Тейлора:  $e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ . •

Ряд свойств собственных проекторов рассмотрен в [3, 5].

## 2.2. МАТРИЦА МАКСИМАЛЬНЫХ ИСХОДЯЩИХ ЛЕСОВ

Матрица  $A = (a_{ij})$  модели (1)–(2) задает взвешенный орграф коммуникаций  $\Gamma$  с множеством вершин  $V(\Gamma) = \{1, \dots, n\}$ :  $\Gamma$  содержит дугу  $(j, i)$  с весом  $w_{ji} = a_{ij}$ , когда  $a_{ij} > 0$  (т.е. когда агент  $j$  влияет на агента  $i$ ). Таким образом, в  $\Gamma$  дуги проводятся в направлении влияния; вес дуги характеризует степень влияния.

*Исходящее дерево* – такой слабо связный (что означает связность индуцированного ненаправленного графа) орграф, в котором одна вершина, называемая *корнем*, имеет полустепень захода 0, а полустепени захода других вершин равны 1. *Исходящий лес* – это орграф, у которого все слабые компоненты (т.е., максимальные слабо связные подграфы) – исходящие деревья. Корни этих деревьев формируют множество *корней* исходящего леса.

*Остовный подграф* орграфа  $\Gamma$  – это ориентированный подграф  $\Gamma$ , содержащий все вершины  $\Gamma$ . *Остовный исходящий лес*  $F$  орграфа  $\Gamma$  называют *максимальным исходящим лесом*  $\Gamma$ , если  $\Gamma$  не имеет исходящих лесов с бóльшим числом дуг, чем в  $F$ . *Размерность  $\Gamma$  по исходящим лесам* (далее, кратко, *лесная размерность*  $\Gamma$ ) – это число компонент в любом максимальном исходящем лесу  $\Gamma$ . *Вес* взвешенного орграфа есть произведение весов его дуг. *Матрица  $\bar{J} = (\bar{J}_{ij})$  максимальных исходящих лесов* взвешенного орграфа  $\Gamma$  определяется формулой

$$(12) \quad \bar{J}_{ij} = \frac{f_{ij}}{f}, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

где  $f$  – суммарный вес всех максимальных исходящих лесов  $\Gamma$ ,  $f_{ij}$  – суммарный вес тех максимальных исходящих лесов, в которых  $i$  принадлежит дереву, исходящему из  $j$ .

При выводе основных результатов статьи существенную роль играет соотношение свойств матриц  $L$  и  $\bar{J}$ . Прежде чем сформулировать эти свойства, рассмотрим простой пример.

Пример 3. Для орграфа коммуникаций  $\Gamma$  (рис. 1) максимальные исходящие леса показаны на рис. 2. Каждый из них состоит из двух деревьев; их корни – вершины 1 и 2; в трех лесах одно из деревьев не имеет дуг; лесная размерность  $\Gamma$  равна 2.

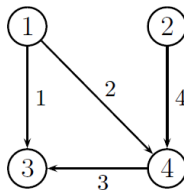


Рис. 1. Взвешенный оргграф коммуникаций  $\Gamma$  в примере 3.

В  $\Gamma$  суммарный вес максимальных исходящих лесов  $f = 24$ .

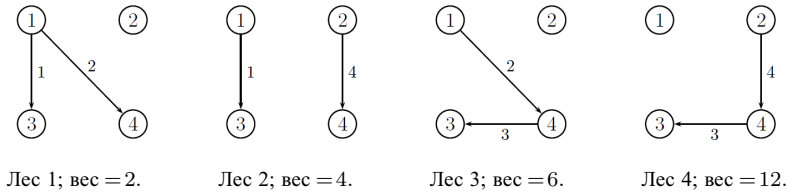


Рис. 2. Максимальные исходящие леса орграфа  $\Gamma$ .

Выпишем матрицы  $(f_{ij})$  и  $\bar{J}$ :

$$(13) \quad (f_{ij}) = \begin{pmatrix} 24 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 24 & 0 & 0 \\ 12 & 12 & 0 & 0 \\ 8 & 16 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{J} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так,  $f_{31} = 12$ , поскольку суммарный вес максимальных исходящих лесов, в которых вершина 3 принадлежит дереву, исходящему из 1 (это леса 1, 2 и 3), равен  $2 + 4 + 6 = 12$ .

Отметим, что лапласовская матрица (4) модели (1)–(2), соответствующей  $\Gamma$ , равна

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & -3 \\ -2 & -4 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad \text{и} \quad \lim_{\alpha \rightarrow \infty} (I + \alpha L)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

причем  $\text{ind } L = 1$ , таким образом (см. (5)), собственный проектор  $L$  совпадает с  $\bar{J}$ . Из приводимого ниже предложения 1 следует, что это справедливо и в общем случае. •

В следующем предложении перечислим основные свойства  $L$  и  $\bar{J}$  [5, 8, 12], используемые при анализе моделей децентрализованного управления.

**Предложение 1.** Пусть  $L$  – лапласовская матрица модели (1)–(2),  $\bar{J}$  – матрица максимальных исходящих лесов соответствующего орграфа  $\Gamma$ , имеющего лесную размерность  $d$ . Тогда:

- 1)  $L$  – вырожденная (поскольку  $L\mathbf{1} = 0$ );
- 2) Если  $\lambda \neq 0$  – собственное значение  $L$ , то  $\text{Re}(\lambda) > 0$  [2, предложение 9];
- 3)  $\text{ind } L = 1$  [13, предложение 12];
- 4)  $\text{rank } L = n - d$ ;  $\text{rank } \bar{J} = \text{tr } \bar{J} = d$  [1, предложение 11];
- 5)  $\bar{J}$  – стохастическая матрица, поскольку  $\sum_{j=1}^n f_{ij} = f$  для всех  $i \in \{1, \dots, n\}$ ;
- 6)  $\bar{J}$  – собственный проектор для  $L$  [13, предложение 12], откуда  $\bar{J}^2 = \bar{J}$ ;
- 7)  $L\bar{J} = \bar{J}L = 0$  [1, теорема 5];  $\mathcal{N}(\bar{J}) = \mathcal{R}(L)$ ,  $\mathcal{R}(\bar{J}) = \mathcal{N}(L)$  (в силу пунктов 3 и 6);
- 8)  $\bar{J} = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} (I + \alpha L)^{-1}$  [1, теорема 6];
- 9)  $\bar{J} = C(0)/h(0)$ , где<sup>5</sup>  $C(\lambda)$  – результат деления матричного многочлена  $\lambda h(\lambda)I$  на бином  $\lambda I - L$ ,  $\lambda h(\lambda)$  – минимальный многочлен для  $L$  (следует из [7, (23) в главе 5]);
- 10)  $\bar{J} = \bar{J}_{n-d}$ , где  $\bar{J}_{n-d}$  определяется рекурсивно:  $\bar{J}_k = I - k \frac{L \bar{J}_{k-1}}{\text{tr}(L \bar{J}_{k-1})}$ ,  $k = 1, \dots, n - d$ ,  $\bar{J}_0 = I$  и  $L \bar{J}_{n-d} = 0$  ([2, раздел 4] или [13, раздел 5]).

Поэлементная характеристика  $\bar{J}$  дана в [1, теорема 2']; спектр  $L$  изучался в [4].

Пример 4. Получение матрицы  $\tilde{J} = \bar{J}$  предельным переходом (п. 8 предложения 1) не всегда удобно. Для системы из примера 3 вычислим  $\bar{J}$  с помощью п. 10 предложения 1. Находим:

$$\bar{J}_1 = I - \frac{L}{\text{tr } L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0,1 & 0 & 0,6 & 0,3 \\ 0,2 & 0,4 & 0 & 0,4 \end{pmatrix},$$

---

<sup>5</sup> В некоторых случаях более удобно для вычислений выражение, полученное в [3, теорема 1].



$$\bar{J}_2 = I - 2 \frac{L \bar{J}_1}{\text{tr}(L \bar{J}_1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

и поскольку  $L \bar{J}_2 = 0$ , имеем  $\bar{J} = \bar{J}_2$  и  $d = 2$ . •

### 3. Теорема о лесах и консенсусе

В этом разделе докажем основной результат статьи.

**Теорема 1.** Пусть  $x(t)$  – решение системы (3). Тогда

$$(14) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \tilde{J} x(0),$$

где  $\tilde{J}$  – собственный проектор матрицы  $L$ , совпадающий с матрицей максимальных исходящих лесов  $\bar{J}$  орграфа коммуникаций.

**Доказательство.** Все решения (3) удовлетворяют тождеству [7, формула (43) главы 5]

$$(15) \quad x(t) = e^{-Lt} x(0).$$

Пусть  $f(A) = e^{-At}$ . В силу (6)

$$(16) \quad e^{-Lt} = \sum_{k=1}^s \sum_{j=0}^{\nu_k-1} (-t)^j e^{-\lambda_k t} Z_{kj},$$

где  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$  – все различные собственные значения  $L$ , а  $Z_{kj}$  – компоненты  $L$ . Поскольку  $L$  – вырожденная, полагаем  $\lambda_1 = 0$ . Тогда  $Z_{1j}$  – компоненты  $L$ , отвечающие нулевому собственному значению.

Пользуясь тем, что компоненты  $Z_{kj}$  не зависят от  $t$ , и тем, что в силу п. 2 предложения 1  $\text{Re}(\lambda_k) > 0$  при  $k \geq 2$ , имеем

$$(17) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^s \sum_{j=0}^{\nu_k-1} (-t)^j e^{-\lambda_k t} Z_{kj} = 0.$$

Согласно п. 3 предложения 1  $\nu_1 = \text{ind } L = 1$ , и в силу п. 6 того же предложения  $Z_{10}$  (собственный проектор  $L$ , обозначаемый

через  $\tilde{J}$ ) совпадает с матрицей максимальных исходящих лесов  $\bar{J}$  взвешенного орграфа коммуникаций  $\Gamma$ . Поэтому

$$(18) \quad \sum_{j=0}^{\nu_1-1} (-t)^j e^{-\lambda_1 t} Z_{1j} = (-t)^0 e^0 Z_{10} = \tilde{J} = \bar{J}.$$

Подставив (16)–(18) в (15), получаем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-Lt} x(0) = \tilde{J} x(0) = \bar{J} x(0). \quad \square$$

Пример 5. Применив теорему 1 к системе, рассмотренной в примере 3, находим асимптотическое состояние  $x(\infty) := \lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$ :

$$x(\infty) = \bar{J} x(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix} x(0) = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ \frac{1}{2}x_1(0) + \frac{1}{2}x_2(0) \\ \frac{1}{3}x_1(0) + \frac{2}{3}x_2(0) \end{pmatrix}.$$

Это асимптотическое состояние является консенсусом тогда и только тогда, когда  $x_1(0) = x_2(0)$ . Более содержательный пример будет рассмотрен в разделе 5. •

#### 4. Свойства предельного состояния системы

Напомним, что *базовой бикомпонентой* орграфа  $\Gamma$  называют такой максимальный (по включению) сильно связный подграф  $\Gamma$ , в который не входят дуги извне. Согласно [1, предложение 6] число базовых бикомпонент в  $\Gamma$  равно  $d$ , т.е. лесной размерности орграфа  $\Gamma$ .

Пусть  $x(\infty)$  – предельный вектор состояния модели (1)–(2):  $x(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$ .

Следствие 1 из теоремы 1. Пусть  $K$  – базовая бикомпонента  $\Gamma$ ,  $i$  – вершина  $\Gamma$ ,  $j$  – вершина  $K$ . Имеет место:

- 1) Если  $i$  – вершина  $K$  или  $i$  достижима (по направленному пути) из  $K$  и недостижима из других базовых бикомпонент  $\Gamma$ , то  $x_i(\infty) = x_j(\infty)$  и  $x_i(\infty)$  равно значению консенсуса для системы с орграфом коммуникаций  $K$ ;
- 2) Если  $i$  достижима из нескольких базовых бикомпонент  $\Gamma$ , то  $x_i(\infty)$  лежит между минимальным и максимальным элементами  $x(\infty)$ , соответствующими этим базовым бикомпонентам (и лежит строго между ними, если эти максимум и минимум отличаются);
- 3) Если  $i$  не принадлежит никакой базовой бикомпоненте  $\Gamma$ , то  $x(\infty)$  не зависит от  $x_i(0)$ .

Следствие 1 легко доказывается с использованием строчной стохастичности матрицы  $\bar{J}$  и двух простых утверждений, вытекающих из теоремы 2' в [1]: (а)  $\bar{J}_{ij} \neq 0$  тогда и только тогда, когда  $j$  принадлежит базовой бикомпоненте  $\Gamma$  и  $i$  достижима из  $j$ ; (б) если  $i$  и  $j$  лежат в одной и той же базовой бикомпоненте  $\Gamma$ , то  $i$ -я и  $j$ -я строки  $\bar{J}$  совпадают, а  $i$ -й и  $j$ -й столбцы пропорциональны.

Применив сдвиг по времени и используя п. 7 предложения 1, получаем<sup>6</sup>

**Следствие 2** из теоремы 1. Пусть  $x(t)$  – решение (3). Тогда  $\forall t \in \mathbb{R} \bar{J}x(t) = x(\infty)$  и  $\forall t_1, t_2 \in \mathbb{R} \bar{J} \cdot (x(t_1) - x(t_2)) = 0$ , т.е.  $(x(t_1) - x(t_2)) \in \mathcal{N}(\bar{J}) = \mathcal{R}(L)$ .

## 5. Пример

Рассмотрим взвешенный орграф коммуникаций  $\Gamma$ , показанный на рис. 3. Он имеет две базовые бикомпоненты с множествами вершин  $\{1, 2\}$  и  $\{3, 4, 5\}$ .

---

<sup>6</sup> Здесь используется тот же подход, что при выводе уравнения, расположенного между (16) и (17) в [10].

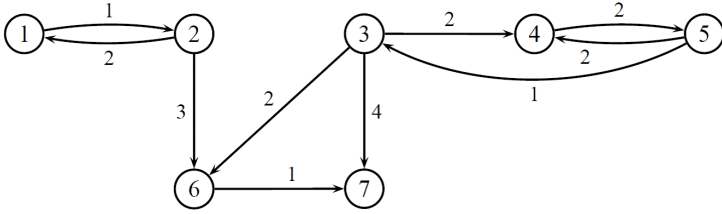


Рис. 3. Взвешенный орграф коммуникаций Г.

Запишем лапласовскую матрицу (4) модели (1)–(2), соответствующей<sup>7</sup> орграфу Г:

$$L = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Спектр  $L$  – чисто действительный:  $(0, 0, 2, 3, 5, 5, 5)$ , что не всегда так для лапласовской матрицы взвешенного орграфа. Заметим, что  $L$  не диагонализуема, т.к. геометрическая кратность собственного значения 5 равна 1. Минимальный многочлен  $L$ :

$$\lambda h(\lambda) = \lambda(\lambda - 2)(\lambda - 3)(\lambda - 5)^3.$$

Для нахождения  $\tilde{J} = \bar{J} = Z_{10}$  воспользуемся на сей раз пунктом 9 предложения 1:

$$(19) \quad Z_{10} = \frac{C(0)}{h(0)},$$

<sup>7</sup>См. раздел 2.2.

где  $h(0) = (-2)(-3)(-5)^3 = -750$ , а  $C(0)$  находится с помощью формул (55), (56) в [7, глава 4]:  $\Psi(0, \mu) = (\mu - 2)(\mu - 3)(\mu - 5)^3$  и (20)  $C(0) = \Psi(0 \cdot I, L) = (L - 2I)(L - 3I)(L - 5I)^3$ .

Подставив  $C(0)$  и  $h(0)$  в (19), получаем

$$(21) \quad \tilde{J} = \frac{1}{750} \begin{pmatrix} 250 & 500 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 250 & 500 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 300 & 150 & 300 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 300 & 150 & 300 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 300 & 150 & 300 & 0 & 0 \\ 150 & 300 & 120 & 60 & 120 & 0 & 0 \\ 30 & 60 & 264 & 132 & 264 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица  $\bar{J}$  может быть найдена и с использованием п. 10 предложения 1. Как и в случае вычислений с помощью (20), это требует четырех операций умножения матриц (плюс одна контрольная), однако не требует знания ненулевых собственных значений  $L$  или ее минимального многочлена. Прямое перечисление максимальных исходящих лесов не является эффективным способом нахождения  $\bar{J}$ . Отметим, что для данного примера множество максимальных исходящих лесов состоит из 32 элементов, суммарный вес которых равен  $f = 750$ . Согласно определению (12) это число есть общий знаменатель элементов матрицы  $\bar{J} = (\bar{J}_{ij})$ . Числитель элемента  $\bar{J}_{ij}$  равен суммарному весу  $f_{ij}$  максимальных исходящих лесов, в которых вершина  $i$  принадлежит дереву, исходящему из  $j$ . Например, для  $\bar{J}_{65}$  имеется восемь таких лесов; веса их равны 4, 4, 8, 8, 16, 16, 32 и 32. Таким образом  $f_{65} = 120$  и  $\bar{J}_{65} = \frac{120}{750}$  – в согласии с (21).

С помощью предложения 9 из [1] множество всех максимальных исходящих лесов орграфа  $\Gamma$  может быть перечислено следующим образом: 1) в каждой базовой бикомпоненте  $\Gamma$  выбираем произвольное остовное исходящее дерево; 2) выбираем

произвольный максимальный исходящий лес в орграфе, полученном из  $\Gamma$  удалением всех дуг, принадлежащих базовым бикомпонентам; 3) объединяя выбранные деревья и лес, получаем максимальный исходящий лес орграфа  $\Gamma$ ; каждый максимальный исходящий лес в  $\Gamma$  может быть получен таким способом. Более подробный алгоритм построения максимальных исходящих лесов представлен в [1, раздел 5].

Пусть  $x(0) = (1 \ 10 \ 5 \ 7 \ 9 \ * \ *)^T$ . Здесь последние компоненты, соответствующие «небазовым» вершинам, оставлены «свободными»: согласно следствию 1 они не влияют на предельное состояние. Используя теорему 1 и выражение (21), получаем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \tilde{J}x(0) = (7 \ 7 \ 7 \ 7 \ 7 \ 7 \ 7)^T,$$

т.е. достигается асимптотический консенсус. При другом векторе начального состояния,  $x(0) = (0 \ 6 \ 3 \ 9 \ 10 \ * \ *)^T$ , имеем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \tilde{J}x(0) = (4 \ 4 \ 7 \ 7 \ 7 \ 5,2 \ 6,64)^T,$$

и асимптотический консенсус достигается только внутри базовых бикомпонент с множествами вершин  $\{1, 2\}$  и  $\{3, 4, 5\}$ , но не для всего множества агентов.

Итак, любая многоагентная система, удовлетворяющая (1)–(2), имеет свою *область сходимости к консенсусу*, т.е. множество таких начальных состояний  $x(0)$ , что произведение  $\tilde{J}x(0)$  дает вектор с равными компонентами. Характеризация этой области (очевидно, она является подпространством) дана в [5], где также показано, что если  $x(0)$  не принадлежит данной области, то, тем не менее, существует некий осмысленный «квази-консенсус». Он получается проектированием  $x(0)$  на область сходимости системы и последующим применением протокола (1)–(2). Для вектора начального состояния  $x(0) = (0 \ 6 \ 3 \ 9 \ 10 \ * \ *)^T$ , рассмотренного выше, значение такого «квази-консенсуса» равно 5,82.

## 6. Об орграфах лесной размерности 1

Предположим, что орграф коммуникаций  $\Gamma$  имеет остовное исходящее дерево, т.е. лесная размерность  $\Gamma$  равна 1. В этом (и только в этом) случае согласно пункту 4 предложения 1 имеет место  $\text{rank } \bar{J} = 1$ , и в силу п. 5 предложения 1

$$(22) \quad \bar{J} = \mathbf{1}v_l^T,$$

где  $v_l^T$  – любая строка  $\bar{J}$  и  $v_l^T \mathbf{1} = 1$ . Согласно пунктам 7 и 4 предложения 1  $\text{span}(v_l)$  и  $\text{span}(\mathbf{1})$  совпадают соответственно с левым и правым нуль-пространствами  $L$ . Таким образом, частным случаем теоремы 1 является следующее известное необходимое и достаточное условие достижения консенсуса.

**Следствие 3** из теоремы 1. *Если орграф  $\Gamma$  модели (1)–(2) имеет остовное исходящее дерево, то для любого вектора начального состояния  $x(0)$  состояние  $x(t)$  сходится к консенсусу*

$$(23) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = (v_l^T x(0)) \mathbf{1},$$

где  $v_l$  – единственный элемент левого нуль-пространства  $L$  такой, что  $v_l^T \mathbf{1} = 1$ . Обратно, если для любого вектора начального состояния  $x(0)$  состояние  $x(t)$  сходится к консенсусу, то  $\Gamma$  имеет остовное исходящее дерево.

Для более частного случая, когда орграф  $\Gamma$  сильно связан, представление, подобное (23), было получено в [22, теорема 3]:  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-Lt} = v_r v_l^T$ , где  $v_l$  и  $v_r$  – соответственно левый и правый собственные векторы  $L$ , соответствующие собственному значению 0 и удовлетворяющие условию  $v_l^T v_r = 1$ . Перед теоремой 1 авторы [22] отмечают, что  $v_r$  можно заменить на  $\mathbf{1}$ .

Следствие 3 совпадает с [20, теорема 3.12] (см. также [20, предложение 3.11] и [23, лемма 1.3]). Случай орграфа коммуникаций  $\Gamma$ , содержащего остовное исходящее дерево, был недавно рассмотрен в [10], где лемма 3 представляет собой аналог (23).

Однако множитель  $1/\sqrt{n}$  в [10, формула (18)], появляющийся из-за неточности в доказательстве, ошибочен.

Наконец, заметим, что теорема III.8 в [26] также может быть выведена из теоремы 1.

## 7. Теорема о лесах и консенсусе для модели Де Гроота

Рассмотрим дискретизацию модели (3):

$$(24) \quad \frac{x(t + \tau) - x(t)}{\tau} = -Lx(t),$$

где  $\tau \in \mathbb{R}$  – достаточно малый параметр. Пусть  $y(k) = x(k\tau)$ ,  $k = 0, 1, \dots$  – вектор состояния системы с дискретной динамикой, задаваемой уравнением (24). Тогда

$$(25) \quad y(k) = (I - \tau L)y(k - 1), \quad k = 1, 2, \dots$$

Положив

$$(26) \quad P := I - \tau L$$

и заметив, что при

$$(27) \quad 0 < \tau \leq \left( \max_i \sum_{j \neq i} a_{ij} \right)^{-1}$$

матрица  $P$  – стохастическая [1, раздел 8], получаем итерационную модель Де Гроота [14]:

$$(28) \quad y(k) = P y(k - 1), \quad k = 1, 2, \dots$$

Матрицу (26) иногда называют *матрицей Перрона с параметром  $\tau$*  взвешенного орграфа  $\Gamma$ . Нетрудно заметить, что  $P$  – линейная часть степенного разложения функции  $e^{-\tau L}$ .

Сравним асимптотические свойства модели (3) и ее дискретного аналога (28). Согласно (28)

$$(29) \quad y(k) = P^k y(0), \quad k = 0, 1, \dots$$

Необходимое и достаточное условие сходимости  $\{P^k\}$  при выполнении (27) – аperiodичность матрицы  $P$ . С другой стороны,



предел по Чезаро

$$(30) \quad P^\infty := \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k P^i$$

существует для любой стохастической матрицы  $P$  и совпадает с  $\lim_{k \rightarrow \infty} P^k$ , если последний предел существует. В противном случае, если  $P$  периодична с периодом  $s$ , то  $P^\infty = s^{-1}(P^{(1)} + \dots + P^{(s)})$ , где  $P^{(1)}, \dots, P^{(s)}$  – пределы сходящихся подпоследовательностей  $\{P^k\}$ :  $P^{(i)} = \lim_{j \rightarrow \infty} P^{js+i}$ ,  $i = 1, \dots, s$ .

Аналог теоремы 1 для модели Де Гроота (28) легко выводится из известных результатов о цепях Маркова. Для удобства сравнения с теоремой 1 представим его в следующем виде.

**Теорема 2.** Пусть последовательность  $y(k)$  задается (28), где  $P$  удовлетворяет (26)–(27). Тогда

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k y(i) = \tilde{J} y(0),$$

где  $\tilde{J}$  – собственный проектор  $L$ , совпадающий с матрицей  $\bar{J}$  максимальных исходящих лесов орграфа коммуникаций  $\Gamma$ , соответствующего  $L$ . Далее, если (27) выполнено строго, то

$$(31) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} y(k) = \tilde{J} y(0).$$

**Доказательство.** Майер [21] и Ротблум [24] показали, что  $P^\infty$  – собственный проектор матрицы  $I - P$ . Следовательно, в силу (26) и определения собственного проектора,  $P^\infty = \tilde{J}$ . Применяя предел по Чезаро к (29) и используя (30) и п. 6 предложения 1, получаем первое утверждение теоремы 2.

Иное его доказательство использует тождество  $P^\infty = \bar{J}$ , совпадающее с так называемой *матричной теоремой о деревьях для цепей Маркова*, впервые полученной в [6] и переоткрытой в [19, 18]. Из этого тождества первое утверждение теоремы 2 выводится уже указанным способом.

Наконец, если (27) выполняется строго, то  $P$  имеет строго положительную диагональ. В этом случае, согласно теореме Гершгорина,  $P$  не имеет собственных значений, по модулю равных единице, кроме 1. Следовательно,  $P$  не периодическая и  $\{P^k\}$  сходится, что влечет (31).  $\square$

Очевидно, единственное существенное отличие теоремы 2 от теоремы 1 – использование предела по Чезаро в случае периодической стохастической матрицы  $P$ . Точно так же, с помощью предела по Чезаро, легко может быть сформулирован дискретный аналог следствия 3 из раздела 6.

Для вычисления матрицы  $\tilde{J} = \bar{J}$  можно использовать пункты 8–10 предложения 1, конструктивные характеристики (h), (j) или (l) в [3, раздел 2] или же предложение 2 в [9]. Некоторые из этих методов применялись в приведенных выше примерах.

### Литература

1. АГАЕВ Р.П., ЧЕБОТАРЕВ П.Ю. *Матрица максимальных исходящих лесов орграфа и ее применения* // Автоматика и телемеханика. – 2000. – № 9. – С. 15–43.
2. АГАЕВ Р.П., ЧЕБОТАРЕВ П.Ю. *Остовные леса орграфа и их применение* // Автоматика и телемеханика. – 2001. – № 3. – С. 108–133.
3. АГАЕВ Р.П., ЧЕБОТАРЕВ П.Ю. *О нахождении собственного проектора и компонент матрицы* // Автоматика и телемеханика. – 2002. – № 10. – С. 3–12.
4. АГАЕВ Р.П., ЧЕБОТАРЕВ П.Ю. *Лапласовские спектры орграфов и их приложения* // Автоматика и телемеханика. – 2005. – № 5. – С. 47–62.
5. АГАЕВ Р.П., ЧЕБОТАРЕВ П.Ю. *Метод проекции в задаче о консенсусе и регуляризованный предел степеней сто-*

- частической матрицы* // Автоматика и телемеханика. – 2011. – № 12. – С. 38–59.
6. ВЕНТЦЕЛЬ А.Д., ФРЕЙДЛИН М.И. *О малых случайных возмущениях динамических систем* // Успехи математических наук. – 1970. – Т. 25. – С. 3–55.
  7. ГАНТМАХЕР Ф.Р. *Теория матриц* (5-е изд.). – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 559 с.
  8. ЧЕБОТАРЕВ П.Ю., АГАЕВ Р.П. *Согласование характеристик в многоагентных системах и спектры лапласовских матриц орграфов* // Автоматика и телемеханика. – 2009. – № 3. – С. 136–151.
  9. ЧЕБОТАРЕВ П.Ю., АГАЕВ Р.П. *Уточнение к статье «О нахождении собственного проектора и компонент матрицы»* // Автоматика и телемеханика. – 2011. – № 3. – С. 173.
  10. AMELIN K., AMELINA N., GRANICHIN O., GRANICHINA O. *Multi-agent stochastic systems with switched topology and noise* // 13th ACIS International Conference on Software Engineering, Artificial Intelligence, Networking and Parallel/Distributed Computing (SNPD). Kyoto, Japan: IEEE. – 2012. – P. 438–443.
  11. BEN-ISRAEL A., GREVILLE T.N.E. *Generalized Inverses: Theory and Applications*. – 2nd ed. New York: Springer, 2003.
  12. CHEBOTAREV P. *Comments on «Consensus and cooperation in networked multi-agent systems»* // Proceedings of the IEEE. – 2010. – Vol. 98, № 7. – P. 1353–1354.
  13. CHEBOTAREV P., AGAEV R. *Forest matrices around the Laplacian matrix* // Linear Algebra and its Applications. – 2002. – Vol. 356. – P. 253–274.
  14. DeGROOT M.H. *Reaching a consensus* // Journal of the

- American Statistical Association. – 1974. – Vol. 69, № 345. – P. 118–121.
15. HARTWIG R.E. *More on the Souriau-Frame algorithm and the Drazin inverse* // SIAM Journal on Applied Mathematics. – 1976. – Vol. 31. – P. 42–46.
  16. HIGHAM N.J. *Functions of Matrices: Theory and Computation*, 2nd ed. Philadelphia: SIAM, 2008. – 425 p.
  17. LANCASTER P., TISMENETSKY M. *The Theory of Matrices*, 2nd ed. New York: Academic Press, 1985. – 1984 p.
  18. LEIGHTON T., RIVEST R.L. *Estimating a probability using finite memory* // Foundations of Computation Theory. Berlin-Heidelberg: Springer. – 1983. – Vol. 158/1983. – P. 255–269.
  19. LEIGHTON T., RIVEST R.L. *The Markov chain tree theorem* // Laboratory of Computer Science, MIT, Cambridge, Mass., Computer Science Technical Report MIT/LCS/TM-249. 1983.
  20. MESHBAHI M., EGERSTEDT M. *Graph Theoretic Methods in Multiagent Networks*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 2010. – 424 p.
  21. MEYER C.D., Jr., *The role of the group generalized inverse in the theory of finite Markov chains* // SIAM Review. – 1975. – Vol. 17, № 3. – P. 443–464.
  22. OLFATI-SABER R., MURRAY R.M. *Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays* // IEEE Transactions on Automatic Control. – 2004. – Vol. 49, № 9. – P. 1520–1533.
  23. REN W., CAO Y., *Distributed Coordination of Multi-agent Networks: Emergent Problems, Models, and Issues*. London: Springer, 2011. – 307 p.
  24. ROTHBLUM U.G. *Computation of the eigenprojection of a nonnegative matrix at its spectral radius* // Stochastic

- Systems: Modeling, Identification and Optimization II, ser. Mathematical Programming Study, R.J.-B. Wets, ed. Amsterdam: North-Holland. – 1976. – Vol. 6. – P. 188–201.
25. ROTHBLUM U.G. *A representation of the Drazin inverse and characterizations of the index* // SIAM Journal on Applied Mathematics. – 1976. – Vol. 31, № 4. – P. 646–648.
26. TAYLOR C.N., BEARD R.W., HUMPHERYS J. *Dynamic input consensus using integrators* // Proceedings of the 2011 American Control Conference (ACC 2011), San Francisco, CA. 2011. – P. 3357–3362.

## ON THE ASYMPTOTICS OF CONSENSUS PROTOCOLS

**Pavel Chebotarev**, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Doctor of Science, leading researcher (pavel4e@gmail.com, Moscow, Profsoyuznaya str., 65, (495)334-88-69).

**Rafiq Agaev**, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Doctor of Science, senior researcher (agaraf@rambler.ru, Moscow, Profsoyuznaya str., 65, (495)334-88-69).

*Abstract: It is shown that the limiting state vector of the differential consensus seeking model with an arbitrary communication digraph is obtained by multiplying the eigenprojection of the Laplacian matrix of the model by the vector of the initial state. Furthermore, the eigenprojection coincides with the matrix of maximum out-forests of the weighted communication digraph. These statements make the forest consensus theorem. A similar result for DeGroot's iterative pooling model involves the Cesàro limit in the general case. The forest consensus theorem is useful for the analysis of distributed control models.*

Keywords: Consensus, eigenprojection, spanning rooted forest, forest consensus theorem, DeGroot's iterative pooling.

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии А. Г. Чхартишвили  
Поступила в редакцию 08.02.2013.  
Опубликована 31.05.2013.*

## ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ АЛГОРИТМА РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ИНТЕРВАЛЬНОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬЮ В ИСХОДНЫХ ДАННЫХ<sup>1</sup>

**Панюков А. В.**<sup>2</sup>,

(ФГБОУ ВПО Южно-Уральский государственный университет,  
Челябинск)

**Голодов В. А.**<sup>3</sup>

(ФГБОУ ВПО Южно-Уральский государственный университет,  
Челябинск)

*Рассматривается система линейных алгебраических уравнений  $Ax=b$ , с интервальными матрицами  $A$  и  $b$ . За множество решений принимается  $\Theta_{tol}(A,b)=\{x: Ax \in b\}$ . Пусть  $\Theta_{tol}(A,b(z))=\{x: Ax=(1+z)b\}$ ,  $z^*=\inf\{z: \Theta_{tol}(A,b(z)) \neq \emptyset\}$ . Элементы множества  $\Theta_{tol}(A,b(z^*))$  названы псевдорешениями. Доказано существование псевдорешения для любых интервальных СЛАУ, предложен способ поиска псевдорешения как решения соответствующей задачи линейного программирования. В силу вырожденности полученной задачи необходимо использовать вычисления с точностью, намного превышающей возможности стандартных типов данных языков программирования. Симплекс-метод в сочетании с безошибочными дробно-рациональными вычислениями дает решение задачи. Для реализации используется крупнозернистый параллелизм (тех-*

<sup>1</sup> Исследование выполнено при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, соглашение №14.В37.21.0395

<sup>2</sup> Панюков Анатолий Васильевич, доктор физико-математических наук, профессор (Челябинск, ул. Ленина, д. 76 (anatoly.panyukov@gmail.com)).

<sup>3</sup> Голодов Валентин Александрович, аспирант (avaksa@gmail.com).

нология MPI), безошибочные дробно-рациональные вычисления реализованы на GPU (технология CUDA C).

Ключевые слова: интервальная СЛАУ, псевдорешение интервальной системы, линейное программирование, точные вычисления

## Введение

Система линейных алгебраических уравнений – это фундаментальный объект, который встречается при решении многих задач. Часто оказывается, что коэффициенты рассматриваемой системы не могут быть заданы точно, но известны интервалы, которым они принадлежат. В условиях такой интервальной неопределенности коэффициентов необходимо уточнение определения решения. В дальнейшем изложении будем использовать стандартную нотацию, принятую в интервальном анализе [18].

В работах [17, 18, 21, 23, 24] систематизированы подходы к учету интервальной неопределенности и дана их классификация. В соответствии с данной классификацией  $AE$ -решением системы линейных алгебраических уравнений  $Ax=b$ , в которой элементы матриц  $A$  и  $b$  представляют интервалы  $a_{ij}=[\underline{a}_{ij}, \bar{a}_{ij}]$ ,  $b_j=[\underline{b}_j, \bar{b}_j]$ ,  $i, j=1, 2, \dots, n$ , называют элементы допустимого множества

$$(1) \quad \Theta_{tol}(A, b) = \{x: (\forall i, j=1, 2, \dots, n) (\forall a_{ij} \in \mathbf{a}_{ij}) (\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \in \mathbf{b}_i)\},$$

$EE$ -решением рассматриваемой системы уравнений называют точки объединенного множества

$$(2) \quad \Theta_{uni}(A, b) = \{x: (\forall i, j=1, 2, \dots, n) (\exists a_{ij} \in \mathbf{a}_{ij}) (\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \in \mathbf{b}_i)\},$$

В работах [19, 20] доказано, что поиск  $EE$ -решения интервальной системы линейных уравнений является  $NP$ -трудной задачей. С другой стороны, в соответствии с теоремой Рона [22] любая точка допустимого множества  $AE$ -решений допускает представление в виде  $x=x^+-x^-$ , где  $x^+, x^-$  являются решением системы



неравенств

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^n [\underline{a}_{ij}x_j^+ - \bar{a}_{ij}x_j^-] &\geq \underline{b}_i, \quad i=1,2,\dots,n, \\ \sum_{j=1}^n [\bar{a}_{ij}x_j^+ - \underline{a}_{ij}x_j^-] &\leq \bar{b}_i, \quad i=1,2,\dots,n, \\ x^+, x^- &\geq 0.\end{aligned}$$

Следовательно, задача поиска  $AE$ -решений имеет полиномиальную сложность.

Методы оценки  $AE$ -решений для случаев  $\Theta_{tol}(A,b) \neq \emptyset$  рассмотрены в работах [17, 21, 23, 24] и др. Основным методом исследования допускового множества решений, развиваемым в Новосибирске [17, 23, 24], является «метод распознающего функционала». В нём для принятия решения о разрешимости или неразрешимости задачи (т.е. о пустоте/непустоте множества решений) необходимо работать с некоторым специальным (негладким и вогнутым) функционалом, который назван «распознающим». При этом максимизация распознающего функционала, которую практически можно выполнять, например, с помощью различных методов негладкой оптимизации, разработанных в Институте кибернетики НАН Украины [14], даёт достаточно содержательную информацию для возможной коррекции задачи. Разработанные С.П. Шарым и П.И. Стецюком программы для исследования разрешимости интервальной линейной задачи о допусках (пустоты-непустоты допускового множества решений) имеются в свободном доступе на сайте [4]. Программы реализованы в INTLAB'e – интервальном расширении MATLAB'a, а также в Int4Sci – интервальном расширении Scilab'a.

Во многих практических задачах система неравенств (1) оказывается плохо обусловленными или вообще несовместной. В этом случае, по аналогии с работами [3, 16], разумным представляется введение понятия «псевдорешения».

Целью данной работы является изложение анонсированного в работах [6, 12, 13] понятия «псевдорешение» для систем уравнений с интервальной неопределенностью и способы построения инструментальных программных средств их поиска.

## 1. Псевдорешение системы интервальных уравнений

Пусть дана система линейных алгебраических уравнений  $Ax=b$ , в которой элементы матриц  $A$  и  $b$  представляют интервалы  $a_{ij}=[\underline{a}_{ij}, \bar{a}_{ij}]$ ,  $b_j=[\underline{b}_j, \bar{b}_j]$ ,  $i, j=1, 2, \dots, n$ .

Для заданной системы уравнений построим параметризованное семейство систем уравнений  $Ax=b(z)$  с модифицированной правой частью  $b(z)=[\underline{b}-z|\underline{b}|, \bar{b}+z|\bar{b}|]$ ,  $z \geq 0$ .

Пусть  $z^* = \inf\{z: \Theta_{tol}(A, b(z)) \neq \emptyset\}$ . Псевдорешением исходной системы  $Ax=b$  будем называть внутренние точки допустимого множества  $\Theta_{tol}(A, b(z^*))$ .

Корректность введенного определения подтверждает

**Теорема 1.** Для любой системы интервальных уравнений  $Ax=b$  при всех  $z > 1$  множество  $\Theta_{tol}(A, b(z)) \neq \emptyset$ .

**Доказательство.** В соответствии с теоремой Рона условие  $\Theta_{tol}(A, b(z)) \neq \emptyset$  эквивалентно совместности системы линейных неравенств

$$(3) \quad \sum_{j=1}^n [a_{ij}x_j^+ - \bar{a}_{ij}x_j^-] \geq b_i - z|\underline{b}_i|, \quad i=1, 2, \dots, n,$$

$$(4) \quad \sum_{j=1}^n [\bar{a}_{ij}x_j^+ - \underline{a}_{ij}x_j^-] \leq \bar{b}_i + z|\bar{b}_i|, \quad i=1, 2, \dots, n,$$

$$(5) \quad x^+, x^- \geq 0.$$

Полагая в (3)–(5)  $x^+ = x^- = 0$ , получим

$$(6) \quad 0 \geq b_i - z|\underline{b}_i|, \quad 0 \leq \bar{b}_i + z|\bar{b}_i|, \quad i=1, 2, \dots, n.$$

Таким образом, для всех  $z \geq 1$  имеет место включение  $0 \in \Theta_{tol}(A, b(z))$ .

Теорема доказана.

## 2. Способ поиска псевдорешения

Способ нахождения псевдорешения системы уравнений  $Ax=b$  дает

**Теорема 2.** Существует решение  $x^+, x^- \in \mathbf{R}^n$ ,  $z^* \in \mathbf{R}$  задачи линейного программирования

$$(7) \quad z \rightarrow \min_{x^+, x^-, z}$$

$$(8) \quad \sum_{j=1}^n (a_{ij}x_j^+ - \bar{a}_{ij}x_j^-) \geq \underline{b}_i - z|\underline{b}_i|, \quad i=1,2,\dots,n,$$

$$(9) \quad \sum_{j=1}^n (\bar{a}_{ij}x_j^+ - a_{ij}x_j^-) \leq \bar{b}_i + z|\bar{b}_i|, \quad i=1,2,\dots,n,$$

$$(10) \quad x_j^+, x_j^-, z \geq 0, \quad j=1,2,\dots,n,$$

при этом  $x^* = x^{+*} - x^{-*}$  является псевдорешением системы  $Ax=b$

**Доказательство.** Сначала докажем существование оптимального решения  $x^+, x^- \in \mathbf{R}^n$ ,  $z^* \in \mathbf{R}$  задачи линейного программирования (7)–(10). Из теоремы 1 и теоремы Рона следует, что множество допустимых решений рассматриваемой задачи не пусто. Задача, двойственная рассматриваемой, имеет вид

$$(11) \quad \sum_{i=1}^n b_i y_{1i} - \sum_{i=1}^n \bar{b}_i y_{2i} \rightarrow \max_{y_{1i}, y_{2i}},$$

$$(12) \quad \sum_{i=1}^n a_{ji} y_{1i} - \sum_{i=1}^n \bar{a}_{ji} y_{2i} \leq 0, \quad j=1,2,\dots,n,$$

$$(13) \quad -\sum_{i=1}^n \bar{a}_{ji} y_{1i} + \sum_{i=1}^n a_{ji} y_{2i} \leq 0, \quad j=1,2,\dots,n,$$

$$(14) \quad \sum_{i=1}^n |b_i| y_{1i} + \sum_{i=1}^n |\bar{b}_i| y_{2i} \leq 1, \quad i=1,2,\dots,n,$$

$$(15) \quad y_{1i}, y_{2i} \geq 0, \quad i=1,2,\dots,n,$$

Легко заметить, что решение  $y_{1i}=y_{2i}=0$ ,  $i=1,2,\dots,n$  является допустимым решением задачи (11)–(15). Таким образом, показано существование допустимых решений как у прямой, так и у двойственной задач линейного программирования (задачи (7)–(10) и (11)–(15)). Из теоремы двойственности в линейном программировании следует существование у этих задач оптимальных решений.

Пусть  $x^+, x^-, z^*$  оптимальное решение задачи (7)–(10). Из теоремы Рона следует, что  $x^* = x^{+*} - x^{-*}$  является допустимым решением системы  $Ax=b(z^*)$ . Из оптимальности  $z^*$  следует, что  $x^*$  является псевдорешением интервальной системы линейных уравнений  $Ax=b$ .

Теорема доказана.

Таким образом, введенное понятие «псевдорешение» интервальной системы линейных уравнений является вполне конструктивными и позволяет давать результаты при решении интервальных систем в том случае, когда допусковое множество  $\Theta_{tol}(A, b)$  допустимых решений пусто.

Однако следует обратить внимание на высокую степень вырожденности задач (7)–(10) и (11)–(15)), что будет приводить при использовании приближенных вычислений к заикливанию симплекс-метода. Избежать заикливания можно за счет использования вычислений без округления [5], [25]. В этом случае на каждой итерации симплекс-метода количество требуемых бит памяти не превосходит величины  $4lm^4 + O(lm^3)$ , где  $m$  – минимальная из размерностей задачи,  $l$  – число бит, достаточных для представления одного элемента матрицы исходных данных, при этом эффективность распараллеливания (т.е. отношение ускорения к числу процессоров) составляет в асимптотике величину близкую к 100% [8].

### 3. Техника реализации

Итак, для успешной реализации изложенного способа поиска псевдорешения на компьютере понадобится несколько составляющих. С одной стороны необходимо обеспечить достаточную точность вычислений для преодоления заикливания симплекс-метода. Подобная техника описана в [15]. Далее для обеспечения эффективности всего алгоритма в целом следует обеспечить достаточное быстродействие точных вычислений, а для использования параллельной архитектуры современных процессоров произвести эффективную декомпозицию задачи линейного программирования на потоки.

#### 3.1. ОБЕСПЕЧЕНИЕ НЕОБХОДИМОЙ ТОЧНОСТИ

В рамках предыдущих исследований были созданы классы **overlong** [10] и **rational** [11], реализованные в объектно-ориентированной парадигме на языке C++, а также библиотека

классов **Exact Computational** [5]. Данные классы позволяют производить безошибочные дробно-рациональные вычисления.

Объектами класса **rational** являются обыкновенные дроби  $p/q$ , где  $p, q$  – объекты класса **overlong**. Класс **overlong** предназначен для расширения возможностей целочисленных вычислений на компьютере. Объем памяти, занимаемый такими объектами, определяется значениями представляемых чисел, их диапазон ограничен только объемом адресуемой памяти. Минимальный шаг дискретизации чисел, представляемых объектами класса **rational**, может достигать ( $2^{32} \cdot 2^{32}$ ). Для объектов классов **overlong** и **rational** определены все операторы, операции и бинарные отношения, используемые для стандартных числовых типов данных. Таким образом, классы **overlong** и **rational** дают потенциальную возможность использовать в программах пользователя безошибочные арифметические операции над полем рациональных чисел [1].

На сегодняшний день возможность использования безошибочных вычислений представляет известная библиотека GMP (The GNU Multiple Precision Arithmetic Library) [25]. Библиотека распространяется под лицензией GNU LGPL, актуальная версия библиотеки GMP 5.1.1 доступна для загрузки с официального сайта проекта. Программный код оптимизирован под большинство существующих процессорных архитектур, однако она *не предоставляет* своим объектам возможность их использования в распределенных вычислениях.

Для более полноценного использования современных процессорных архитектур классы **overlong** и **rational** хранят и оперируют числами по основанию  $2^{32}$ , код операций оптимизирован для системы счисления по основанию степень двойки. Оптимизации применяются также при работе с памятью, и поскольку в C++ нет автоматического сборщика мусора, то лишние перевыделения памяти приводят к её фрагментации и снижению быстродействия приложения в целом, краткое описание современных реализаций классов дано в [2]. Для облегчения сопровождения и модификации классов операции с памятью инкапсулированы в

отдельный класс **MemHandle**, а выполнение базовых арифметических операций с данными полностью производится в рамках класса **ArifRealization** (см. фрагмент листинга 1).

```

1 class overlongNM {
2     private: static ArifRealization realization;
3     private: MemHandle mhandle;
4     ...
5     public: inline int32 size() const {return leng;} // leng
6     public: inline int32 sign() const {return sgn;} // sign
7     ...
8     // addition
9     template<typename Type> friend const overlongNM operator+
10        (const overlongNM &num, Type v)
11         {overlongNM rez(num); return (rez+=v);}
12     friend const overlongNM operator+
13        (const overlongNM&, const overlongNM&);
14     ...
15 }

```

Листинг 1. Фрагмент класса *overlong*

Тем самым объект класса **overlong** содержит в себе объект типа **MemHandle**, и все действия с памятью происходят через интерфейс **MemHandle**. Все арифметические операции с данными осуществляются вызовом соответствующих методов класса **ArifRealization**. Пример реализации метода **add** класса **overlong** представлен в листинге 2.

```

1 void overlongNM::add(const overlongNM& alpha, const overlongNM& beta){
2     d_t carry;
3     const overlongNM& a=(alpha.size()>=beta.size())? alpha:beta;
4     const overlongNM& b=(alpha.size()>=beta.size())? beta:alpha;
5     int32 LA=a.size(),LB=b.size(),sg=alpha.sgn,newleng;//LA>=LBвызов базовой
6     // арифметической операции
7     ArifRealization::add(a.mhandle.getptr(),LA,b.mhandle.getptr(),LB,
8         mhandle.providetmpptr(LA,1),newleng,carry);
9     mhandle.settmpasptr();
10    if(carry) mhandle.safesetvalue(LA,carry);
11    leng=newleng;
12    sgn=sg;
13 }

```

Листинг 2. Организация операции сложения

Эта техника позволяет полностью абстрагироваться от реального места хранения данных (за это полностью отвечает реализация класса **MemHandle**) и способа реализации арифметических операций (конкретная методика выполнения операций над разрядами инкапсулирована в **ArifRealization**).

### 3.2. ОБЕСПЕЧЕНИЕ НЕОБХОДИМОЙ ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТИ

Вышеописанная техника разбиения класса **overlong** на три части «интерфейс–память–арифметика» позволяет гибко использовать возможности вычислительной системы. Поскольку производительность алгоритма симплекс метода обеспечивается, в том числе, за счет эффективности реализаций классов **overlong** и **rational**, при их написании учтена возможность использования современных гетерогенных вычислительных сред с GPU-ускорителями Nvidia (возможность задействовать GPU от компании AMD и встроенные графических ускорителей, например, Intel HD Graphics, дает язык OpenCL, однако эксперименты показали большую трудоемкость процесса кодирования при малом приросте эффективности). Алгоритмы параллельного выполнения базовых арифметических операций, а также некоторые аспекты их реализации в гетерогенной среде описаны в [2, 9]. Хранение операндов организуется с учетом устройства, на котором производятся вычисления. Так, при наличии в системе GPU Nvidia все данные (разряды) чисел можно хранить непосредственно на GPU, там же выполнять арифметические операции над числами, это снижает до минимума количество пересылок данных по PCI шине, остается лишь скопировать в основную память результаты вычислений. Для систем без GPU вычисления проводятся на процессоре, данные хранятся непосредственно в оперативной памяти системы.

### 3.3. МЕЛКОЗЕРНИСТЫЙ ПАРАЛЛЕЛИЗМ

Параллельные вычисления на GPU требуют переработки алгоритмов базовых арифметических операций с учетом специфической архитектуры устройств. Ниже приводятся листинги некоторых операций для GPU Nvidia на CUDA C.

#### 3.3.1. СЛОЖЕНИЕ

Операция сложения длинных чисел на GPU осуществляется в несколько этапов: параллельное сложение разрядов, син-

хронизация, параллельное распространение переносов из разрядов. Особенность архитектуры GPU, а именно, выполнение нитей *блоками* и отсутствие синхронизации между блоками, требует сохранения «пограничных» переносов во временном массиве (за это отвечает строка номер 16 в листинге 3 и последующего распространения (*DNumAdd\_part2*) (листинг 4).

```

1  __global__ void DNumAdd_part1(
2  d_t *A, int32 LA, d_t *B, int32 LB, d_t *C, d_t *bGCarry, int32 *f){
3  int32 gld=blockDim.x*blockIdx.x + threadIdx.x; int64 tmp=0;
4  if (gld >= LA) return; //bound check
5  if (gld>=LB) C[gld]=A[gld];
6  else {tmp=(int64)A[gld]+(int64)B[gld]; C[gld]=tmp&MAX_DIGIT;}
7  __syncthreads(); // carry propagation in the block
8  int32 lld=threadIdx.x+1,i=gld+1,gS=blockDim.x;
9  for (tmp>>=BIT_IN_DIGIT;tmp && i<LA;lld++,i++){
10 if (lld==gS){bGCarry[blockIdx.x]=tmp; *f=1; return;}
11 tmp+=(int64)C[i]; C[i]=tmp&MAX_DIGIT; tmp>>=BIT_IN_DIGIT;
12 } if (i==LA && tmp) {bGCarry[Lcarry]=1;}
13 }

```

Листинг 3. Поразрядное сложение

```

1  __global__ void DNumAdd_part2
2  (d_t *C, d_t *bGCarry, int32 gS, uint32 Lcarry, uint32 LA){
3  // carry propagation between blocks
4  int gld = blockDim.x*blockIdx.x + threadIdx.x, i=(gld+1)*gS;
5  if (gld >= Lcarry) return;
6  uint64 tmp=(uint64)bGCarry[gld];
7  for (;tmp && i<LA; i++){
8  tmp+=(uint64)C[i];
9  C[i]=tmp&MAX_DIGIT;
10 tmp>>=BIT_IN_DIGIT;
11 }
12 if (i==LA && tmp) {bGCarry[Lcarry]=1;}
13 }

```

Листинг 4. Параллельное распространение переносов

Установка параметров и запуск кода на графическом ускорителе представлены на листинге 5. Этот код выполняется на стороне CPU, или так называемой стороне Host.

```

1  void ArifRealization::add(const d_t *A, int32 LA,
2  const d_t *B, int32 LB, d_t *C, int32 &NL, d_t &Carry){
3  int tPerBlock = 128, bPerGrid = (LA + tPerBlock - 1) / tPerBlock;
4  d_t *bGCarry_d=NULL,*ansCarry_h=new d_t[1];
5  int32c *F_d=NULL,c *F_h=new int32 [1];
6  cudaMalloc((void*)&bGCarry_d, sizeof(d_t)*(bPerGrid+1));
7  cudaMemset((void*)bGCarry_d, 0, sizeof(d_t)*(bPerGrid+1));
8  cudaMalloc((void*)&F_d, sizeof(int32));
9  cudaMemset((void*)cF_d, 0, sizeof(int32));
10 DNumAdd_part1 <<< bPerGrid, tPerBlock >>>
11 (const_cast<d_t*>(A), LA, const_cast<d_t*>(B), LB, C, bGCarry_d, cF_d);
12 cudaMemcpy(cF_h, cF_d, sizeof(int32), cudaMemcpyDeviceToHost);
13 if(*cF_h){

```



```

14 | int gS=tPerBlock ,LCarry=bPerGrid;
15 | bPerGrid = (bPerGrid + tPerBlock - 1) / tPerBlock;
16 | DNumAdd_part2 <<< bPerGrid , tPerBlock>>>
17 | (d_buffC , bGC_d, gS , LCarry , LA);
18 | }
19 | cudaMemcpy(ansCarry_h,&bGCarry_d[bPerGrid],
20 |           sizeof(d_t) , cudaMemcpyDeviceToHost);
21 | NL= ( carry = *ansCarry_h)? LA+1: LA;
22 | delete [] ansCarry_h; cudaFree(bGCarry_d);  cudaFree(cF_d);
23 | }

```

Листинг 5. Вызов функции для исполнения на GPU

### 3.3.2. УМНОЖЕНИЕ

Операция умножения одна из наиболее затратных по времени. Для выполнения операции параллельного умножения используется быстрая разделяемая между нитями блока shared память. В реализации существенно используются особенности архитектуры GPU Nvidia, а именно, полностью синхронное выполнение инструкций в рамках одного *warp*. Это избавляет от необходимости выполнять синхронизацию между нитями. Исходный код для выполнения на GPU (*kernel*) представлен на листинге 6.

```

1 | __global__ void DNumMult(d_t *A,int32 LA,d_t *B,int32 LB,d_t *rez)
2 | {
3 |   int32 l1d=threadIdx.x,g1d=blockDim.x*blockIdx.x + 11d;
4 |   if(g1d>=LB) return;
5 |   int32 cBS=(LA+blockDim.x-1)/blockDim.x;
6 |   __shared__ uint64 sha[],shrez[];
7 |   for(int i=11d*cBS;i<(11d+1)*cBS && i<LA;i++){
8 |     sha[i]=A[i]; shrez[i]=0;
9 |   }
10 |  shrez[LA+11d]=0;
11 |  uint64 digit=(uint64)B[g1d],t=0UL;
12 |  for(int i=0;i<LA;i++){
13 |    t+=sha[i]*digit;
14 |    shrez[i+11d]+=t&MAX_DIGIT;
15 |    t>>=BIT_IN_DIGIT;
16 |  }
17 |  shrez[LA+11d]+=t&MAX_DIGIT;
18 |  cBS=(LA+blockDim.x+blockDim.x-1)/blockDim.x;
19 |  for(int i=11d*cBS;i<(11d+1)*cBS && i<LA+blockDim.x;i++){
20 |    AtomicAdd(rez[i+g1d],shrez[i]);
21 |  }
22 | }

```

Листинг 6. Умножение на GPU

Окончательное формирование результата происходит последовательным проходом по массиву **rez[]** и преобразованием 64-битного числа **rez[j]** в непосредственно разряд ответа и разряд

переноса. Эти действия также выполняются на GPU, но в однопоточном режиме.

### 3.3.3. ДЕЛЕНИЕ

Поскольку стандартный алгоритм деления столбиком является абсолютно последовательным, для реализации в вычислительной системе с массовым параллелизмом, какой является GPU, эффективным является использование итеративных методов деления, выражающих результат через операцию умножения, подробнее данный подход изложен в [9].

### 3.4. КРУПНОЗЕРНИСТЫЙ ПАРАЛЛЕЛИЗМ

Применяемая техника параллельной реализации симплекс метода детально описана в [7, 8]. В данном случае для разбиения задачи на потоки использовался механизм многопоточного программирования `std::thread`, предоставляемый стандартом C++0x11.

## 4. Вычислительный эксперимент

Вычислительный эксперимент проводился на компьютере с процессором Intel Core i7-950 3.06 ГГц, 6 Гб ОЗУ, GPU Nvidia 460(1Гб GDDR5), под управлением ОС Win 7 x64, в качестве компилятора был выбран 64-разрядный Visual C++ 2011.

В качестве модельной задачи использована система с матрицами:

$$\mathbf{A} = \left[ \frac{i * (1 - \delta)}{i + j - 1}, \frac{i * (1 + \delta)}{i + j - 1} \right]_{n \times n}; \quad \mathbf{b} = [1, 1/2, \dots, 1/(n - 1), 1/n]^T$$

Зависимость минимального расширения правой части (параметр  $z^*$ ), соответствующего псевдорешению, при фиксированном значении  $n = 20$  приведена в таблице (1) В таблице 2 приведены результаты времени затраченного на решение задачи для различных размерностей модельной интервальной системы.

Таблица 1. Минимальное расширение правой части системы

$\delta$	$10^{-1}$	$10^{-2}$	$10^{-3}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$	$10^{-6}$
$z^*$	0,81	0,389	0,1	0,025	0,0062	0,0017

Таблица 2. Время работы

Размерность матрицы (n)	10	20	50	100
Время работы	0,46с	7,73с	7,39м	15,1ч

## 5. Заключение

В работе полностью рассмотрена задача нахождения псевдорешения интервальной системы линейных алгебраических уравнений, дано определение понятия, показано существование псевдорешения для любой интервальной системы. Дано конструктивное доказательство существования псевдорешения как решения соответствующей задачи линейного программирования. Приведены подробности техники программной реализации симплекс-метода решения задачи линейного программирования, соответствующей псевдорешению интервальной системы, а также некоторые особенности реализации классов **overlong** и **rational**, обеспечивающих необходимую точность вычислений и тем самым позволяющих избежать закливания симплекс-метода в случае сильной вырожденности сформулированной задачи. Даны результаты численного эксперимента для различных смоделированных исходных данных. Дальнейшая работа направлена на получение более эффективных реализаций за счет оптимизации параллельной версии программы.

## Литература

1. ГОЛОДОВ В.А. *Адаптация библиотеки «exact computational» для гетерогенных вычислительных сред* // Материалы четвертой научной конференции аспи-

- рантов и докторантов. Естественные науки. — Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2012. — С. 27–30.
2. ГОЛОДОВ В.А. *Распределенные символьные дробно-рациональные вычисления на процессорах x86 и x64* // Труды международной научной конференции «Параллельные вычислительные технологии (ПаВТ'2012)», Новосибирск, 26 – 30 марта. — Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2012. — С. 719.
  3. ИВАНОВ В.К. *О линейных некорректных задачах* // Доклады Академии наук СССР. — 1962. — Т. 145.
  4. *Интервальный анализ и его приложения*. — Режим доступа: <http://www.nsc.ru/interval> (дата обращения 30 марта 2013).
  5. ПАНЮКОВ А.В., GERMANENKO M.I., GORBICK V.V. *Библиотека классов «exact computation» номер гос. регистрации 2009612777 от 29 мая 2009 г.* // Программы для ЭВМ, базы данных, топологии интегральных микросхем. Официальный бюллетень Российского агентства по патентам и товарным знакам. — М.: ФИПС, 2009. — № 3. — С. 251.
  6. ПАНЮКОВ А.В., ГОЛОДОВ В.А. *Вычисление псевдорешений систем линейных алгебраических уравнений с интервальной неопределенностью коэффициентов* // Алгоритмический анализ неустойчивых задач: тез. Докл. Международной конференции, посвященной памяти В.К. Иванова, Екатеринбург, 31 октября – 5 ноября. — Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2011. — С. 261–262.
  7. ПАНЮКОВ А.В., ГОРБИК В.В. *Параллельные реализации симплекс-метода для безошибочного решения задач линейного программирования* // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: «Математическое моделирование и программирование». — 2011. — № 25. — С. 107–118.
  8. ПАНЮКОВ А.В., ГОРБИК В.В. *Применение массивно-параллельных вычислений для решения задач линейного программирования с абсолютной точностью* // Автома-

- тика и телемеханика. — 2012. — № 2. — С. 73–88.
9. ПАНЮКОВ А.В., ЛЕСОВОЙ С.Ю. *Реализация базовых операций целочисленной арифметики в гетерогенных системах* // Труды международной научной конференции «Параллельные вычислительные технологии (ПаВТ'2012)», Новосибирск, 26 марта – 30 марта 2012 г. — Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2012. — С. 77–84.
  10. ПАНЮКОВ А.В., СИЛАЕВ М.М. *Класс overlong номер гос. регистрации 990489* // Программы для ЭВМ. Базы данных. Топологии интегральных микросхем. Официальный бюллетень Российского агентства по патентам и товарным знакам. — М.: ФИПС, 1999. — № 4(29). — С. 17.
  11. ПАНЮКОВ А.В., СИЛАЕВ М.М., GERMANENKO M.I. *Класс rational номер гос. регистрации 990607* // Программы для ЭВМ. Базы данных. Топологии интегральных микросхем. Официальный бюллетень Российского агентства по патентам и товарным знакам. — М.: ФИПС, 1999. — № 4(29). — С. 97.
  12. ПАНЮКОВ А.В., ЧЕЧУЛИНА Е.С. *Решения систем линейных алгебраических уравнений при интервальной неопределенности коэффициентов* // Алгоритмический анализ неустойчивых задач: Тез. докладов Всерос. конф., Екатеринбург, 2–6 февр. — Екатеринбург: Изд-во Уральского университета, 2004. — С. 291–292.
  13. ПАНЮКОВ А.В., ЧЕЧУЛИНА Е.С. *Псевдорешения систем линейных алгебраических уравнений при интервальной неопределенности коэффициентов* // Интервальный анализ. Труды XIII Байкальской международной школы-семинара «Методы оптимизации и их приложения» Иркутск, Байкал, 2–8 июля. — 2005.
  14. СТЕЦЮК П.И. *Субградиентные методы с преобразованием пространства для минимизации овражных выпуклых функций.* — 2011. — ISBN 978-5-905569-01-2. — <http://conf.nsc.ru/niknik-90/ru/reportview/37828>.

15. СХРЕЙВЕР А. *Теория линейного и целочисленного программирования.*— Москва, Мир, 1991. — Т. 1. — С. 360.
16. ТИХОНОВ А.Н., АРСЕНИН В.Я. *Методы решения некорректных задач.* — Москва, Наука, 1979. — С. 285.
17. ШАРЫЙ, С.П. *Решение интервальной линейной задачи о допусках* // Автоматика и телемеханика. — 2004. — Т. 10. — С. 147–162.
18. KEARFOTT R.B., NAKAO M.T., NEUMAIER A., RUMP S.M., SHARY S.P., VAN HENTENRYCK P. *Standardized notation in interval analysis* // Proc. XIII Baikal International School-seminar: Optimization methods and their applications, Irkutsk, Baikal, July 2–8, Institute of Energy Systems SB RAS. — Irkutsk, 2005. — Vol. 4. Interval analysis. — Pp. 106–113.
19. LAKEYEV A.V., KREINOVICH V. *Optimal solution of interval linear systems is intractable(np-hard)* // Interval Computations. — 1993. — No. 1. — Pp. 6–14.
20. LAKEYEV A.V., KREINOVICH V. *Np-hard classes of linear algebraic systems with uncertainties* // Reliable Computing. — 1997. — No. 3. — Pp. 51–81.
21. NEUMAIER A. *Interval Methods for Systems of Equations.*— Cambridge University Press, 1990.
22. ROHN J. *Inner solutions of linear interval systems* // Interval Mathematics and Springer Verlag. — 1985 and 1986. — Pp. 157–158.
23. SHARY S.P. *Solving the linear interval tolerance problem* // Mathematics and Computers in Simulation. — 1996. — Т. 39. — С. 53–85.
24. SHARY S.P. *A new technique in systems analysis under interval uncertainty and ambiguity* // Reliable Computing. — 2002. — Vol. 8, No. 5. — Pp. 321–418.
25. *The gnu mp bignum library.* — February 2013. Available at: <http://gmplib.org/> (accessed 30 March 2013).

## SOFTWARE IMPLEMENTATION OF ALGORITHM FOR SOLVING A SET OF LINEAR EQUATIONS UNDER INTERVAL UNCERTAINTY

**Anastoly Panyukov**, South Ural State University, Lenina Ave.,  
build. 76, Chelyabinsk 454080 (anatoly.panyukov@gmail.com).

**Valentin Golodov**, South Ural State University, postgraduate, South  
Ural State University, (avaksa@gmail.com).

*Abstract: We consider a set of linear equations  $\mathbf{A}x=\mathbf{b}$  with interval matrices  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{b}$ . Solutions are items of  $\Theta_{tol}(\mathbf{A},\mathbf{b})=\{x: \tilde{A}x \in \tilde{b}\}$ . Let  $\Theta_{tol}(\mathbf{A},\mathbf{b}(z))=\{x: \mathbf{A}x=(1+z)\mathbf{b}\}$ ,  $z^*=\inf\{z: \Theta_{tol}(\mathbf{A},\mathbf{b}(z))\neq\emptyset\}$  be. Items of the set  $\Theta_{tol}(\mathbf{A},\mathbf{b}(z^*))$  are referred to as pseudosolutions. We prove existence of a pseudosolution for all sets of interval algebraic linear equations, suggest a technique to search for the pseudosolution via solving the corresponding linear programming problem. The obtained problem is singular, thus computations demand accuracy exceeding that of standard data types of programming languages. Simplex method coupled with errorless rational-fractional computations gives an efficient solution of the problem. Coarse-grained parallelism for distributed computer systems with MPI gives a software implementation tool. CUDA C software is suggested for errorless rational-fractional calculations.*

Keywords: interval linear equation set, pseudo-solution of interval equation set, Linear programming, exact computations.

*Статья рекомендована к публикации программным комитетом  
международной конференции  
«Параллельные вычисления и задачи управления» (РАСО),  
Россия, Москва, 24-26 октября 2012 г.  
Поступила в редакцию 04.04.2013.  
Опубликована 31.05.2013.*

УДК 681.5.011 + 519.853.4  
ББК 32.965 + 22.18

## АТОМНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ, ЧАСТЬ 2: МНОГОМЕРНЫЕ ЗАДАЧИ И ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ МАТРИЧНЫЕ НЕРАВЕНСТВА<sup>1</sup>

Поздяев В. В.<sup>2</sup>

(Арзамасский политехнический институт (филиал)  
Нижегородского государственного технического университета  
им. Р. Е. Алексеева, Арзамас)

*Рассмотрены многомерные задачи оптимизации с полиномиальной целевой функцией и ограничениями в виде полиномиальных матричных неравенств. Представлена трансформация основанного на теории моментов метода их решения, позволяющая существенно снизить его вычислительную сложность, сохранив способность решать задачи интересующего нас класса.*

Ключевые слова: нелинейное программирование, матричные неравенства, полиномиальные неравенства, теория моментов.

### **Введение**

Рассмотрим задачу нахождения глобальных экстремумов полиномиальной целевой функции на множестве, заданном полиномиальными неравенствами (ПН):

$$(1) \quad \begin{aligned} f^* &= \min_x f(x), \\ g_i(x) &\geq 0, \\ x &\in \mathbb{R}^n, \quad i = 1, \dots, m, \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант №12-08-31440.

<sup>2</sup> Владимир Васильевич Поздяев, кандидат физико-математических наук, доцент (vpozdyayev@gmail.com).



или полиномиальными матричными неравенствами (ПМН):

$$(2) \quad \begin{aligned} f^* &= \min f(x), \\ G_i(x) &\geq 0, \\ x &\in \mathbb{R}^n, \quad i = 1, \dots, m, \end{aligned}$$

где  $f(x)$  и  $g_i(x)$  — (не обязательно выпуклые) полиномы;  $G_i(x)$  — матрицы, элементы которых являются полиномами от  $x$ , а знак неравенства в (2) понимается как требование положительной полуопределенности. Далее данные задачи мы будем называть соответственно задачами ПН и ПМН.

В первой части данной статьи [1] рассматривался предназначенный для решения таких задач метод глобальной оптимизации [4, 5, 7], фундамент которого образуют теория разложения полиномов в сумму квадратов и двойственная ей теория моментов. Данный метод позволяет найти все глобальные экстремумы, используя для этого сведение исходной задачи к иерархии систем линейных матричных неравенств (так называемых ЛМН-релаксаций), решение которых представляет существенно меньшую трудность. Тем не менее, применимость данного метода ограничена двумя факторами:

- комбинаторным взрывом количества неизвестных и размера матриц в ЛМН-релаксациях;
- ухудшением обусловленности составляющих ЛМН-релаксации матриц и последующим снижением точности расчетов по мере рассмотрения последовательности ЛМН-релаксаций.

Обе проблемы вызваны тем, что в ЛМН-релаксациях пространством поиска является пространство не переменных исходной задачи, а их моментов соответствующих порядков. Для уменьшения влияния данных проблем на результат авторы метода применяют вспомогательные техники, такие как представление исходной задачи в форме с как можно меньшим количеством неизвестных; уменьшение количества моментов-переменных в ЛМН-релаксациях за счет использования линейных связей между ними

(если постановка задачи содержит зависимости такого рода); масштабирование переменных таким образом, чтобы искомые экстремумы удовлетворяли условию  $\|x^*\| \leq 1$ .

Существуют иные алгоритмы, основанные на подходе аналогичного вида (построение иерархии аппроксимаций исходной задачи и решение их более или менее стандартными методами). Возникающие при этом структуры в общем случае адаптированы к классу решаемых задач и могут иметь сниженную вычислительную сложность за счет усиления консерватизма аппроксимаций; см., например, сравнение методов решения задач бинарного программирования в [9]. Кроме того, модификация отдельных этапов метода [7] (в первую очередь методики построения аппроксимаций) может позволить решать задачи самого разного вида, в том числе имеющего неочевидное отношение к задачам ПМН (общая структура метода при этом остается неизменной); см., например, [3, 6, 8].

В [1] был предложен альтернативный подход, основанный на исключении из процедуры решения пространства моментов. Это достигается за счет дальнейшей трансформации ЛМН-релаксаций с целью возвращения задачи в (расширенное) исходное пространство поиска. Также была разработана вычислительная схема, позволяющая с минимальными изменениями применить к новой задаче метод внутренней точки в прямой форме, который может использоваться для решения ЛМН-релаксаций. Данные вопросы детально рассматривались для одномерных задач оптимизации в форме ПН.

Данная статья посвящена дальнейшему развитию техники преобразования пространства поиска применительно к многомерным задачам оптимизации и полиномиальным матричным неравенствам. Раздел 1 содержит сведения о базовом методе, относящиеся к такого рода задачам. В разделе 2 приведены результаты из [1], необходимые для дальнейших построений. Основной раздел 3 распространяет данные результаты на задачи ПМН вида, характерного для теории управления. В разделе 4 приведены примеры применения полученных результатов.

## 1. Базовый метод

Основные положения метода решения задач ПН (1), опубликованного в [7], были изложены в предыдущей части статьи. Приведем необходимые нам в дальнейшем элементы.

Пусть  $b_r(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ , — вектор, состоящий из одночленов, образующих базис пространства многочленов порядка не выше  $r$ :

$$b_r(x) = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \dots & x_n & x_1^2 & x_1x_2 & \dots \\ \dots & x_1x_n & x_2x_3 & \dots & x_n^2 & \dots & x_1^r & \dots & x_n^r \end{bmatrix}^T,$$

а  $s_n(r) = C_{n+r}^r = \frac{(n+r)!}{n!r!}$  — его размерность. Каждому одночлену из  $b_r(x)$  поставим в соответствие вектор  $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ ,  $\sum_i \alpha_i \leq r$  (далее будем записывать как  $\alpha \leq r$ ), показателей степеней  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ; обозначим  $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$ . Для произвольного вектора  $p \in \mathbb{R}^{s_n(r)}$ , ассоциированного с пространством моментов  $x$  степени не выше  $r$ , будем индексировать его элементы двумя взаимозаменяемыми способами: по номеру элемента и по вектору показателей степеней; порядок элементов будем считать соответствующим структуре  $b_r(x)$ . Таким образом,  $p = [p_i]_{1 \leq i \leq s_n(r)} = [p_\alpha]_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n, \alpha \leq r}$ , в том числе  $p_1 = p_{[0,0,\dots,0]}$ ,  $p_2 = p_{[1,0,\dots,0]}$  и т. д. Аналогичным образом будем индексировать строки и столбцы матриц там, где это применимо.

Рассмотрим некоторую (неизвестную) меру  $\mu$  и соответствующий ей вектор моментов  $y$ :

$$y = \int b_r(x) d\mu.$$

Пусть  $d_i = \lceil \frac{1}{2} \deg g_i(x) \rceil$ , а  $k$  удовлетворяет ограничениям  $2k \geq \deg f(x)$ ,  $k \geq d_i$ . Пусть  $f_\alpha$  — коэффициенты  $f(x)$  в базисе  $b_{2k}(x)$ , так что

$$\int f(x) d\mu = \int \sum_{\alpha \leq 2k} f_\alpha x^\alpha d\mu = \sum_{\alpha \leq 2k} f_\alpha y_\alpha.$$

ЛМН-релаксацией (1) будем называть задачу

$$(3) \quad \begin{aligned} f^* &= \min_y \sum_{\alpha \leq 2k} f_\alpha y_\alpha, \\ M_k(y) &\geq 0, \\ M_{k-d_i}(g_i, y) &\geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \\ y_{[0,0,\dots,0]} &= 1, \end{aligned}$$

где матрица моментов  $M_k(y)$  и локализирующие матрицы  $M_{k-d_i}(g_i, y)$  конструируются исходя из соотношений

$$(4) \quad M_k(y) = \int b_k(x) b_k(x)^T d\mu,$$

$$(5) \quad M_{k-d}(g, y) = \int b_{k-d}(x) b_{k-d}(x)^T g(x) d\mu.$$

В [7] (теорема 4.2) показано, что, с учетом некоторых непринципиальных ограничений, при  $k \rightarrow \infty$  величина экстремума ЛМН-релаксации стремится к величине экстремума исходной задачи ПН. Более того, как правило, уже при конечных (и относительно небольших) значениях  $k$  данные величины становятся равны, а вектор моментов решения задачи ПН является решением соответствующей ЛМН-релаксации. Достаточным условием достижения такого значения  $k$  является

$$r \equiv \text{rank } M_k(y^*) = \text{rank } M_{k-d}(y^*),$$

где  $y^*$  — решение ЛМН-релаксации, а  $d = \max_i d_i$ . Если оно выполняется, то  $y^*$  представляет собой вектор моментов  $r$ -атомной меры<sup>3</sup>, атомы которой  $x^{*j}$ ,  $j = 1, \dots, r$ , соответствуют глобальным минимумам (1). Данные атомы могут быть извлечены из  $y^*$  путем решения системы полиномиальных уравнений (в которую для  $r$ -атомных мер превращается (4)) с помощью алгоритма, представленного в [4].

---

<sup>3</sup>  $N$ -атомная мера — мера, носитель которой является множеством из  $N$  точек (атомов).

Одним из способов решения задач ПМН (2) является преобразование их к форме ПН с последующим применением описанного метода. Но более эффективным подходом является построение ЛМН-релаксаций непосредственно для исходной матричной формы неравенств способом, описанным в [5]. А именно: вместо (5) будем конструировать локализирующие матрицы, исходя из следующего соотношения:

$$M_{k-d}(G, y) = \int (b_{k-d}(x)b_{k-d}(x)^T) \otimes G(x) d\mu.$$

Например, для  $n = 2, k - d = 1$  и

$$G(x) = \begin{bmatrix} x_1 & 2 \\ 2 & x_2 \end{bmatrix}$$

локализирующая матрица имеет вид

$$M_2(G, y) = \int A d\mu = B,$$

$$A = \left[ \begin{array}{cc|cc|cc} x_1 & 2 & x_1^2 & 2x_1 & x_1x_2 & 2x_2 \\ 2 & x_2 & 2x_1 & x_1x_2 & 2x_2 & x_2^2 \\ \hline x_1^2 & 2x_1 & x_1^3 & 2x_1^2 & x_1^2x_2 & 2x_1x_2 \\ 2x_1 & x_1x_2 & 2x_1^2 & x_1^2x_2 & 2x_1x_2 & x_1x_2^2 \\ \hline x_1x_2 & 2x_2 & x_1^2x_2 & 2x_1x_2 & x_1x_2^2 & 2x_2^2 \\ 2x_2 & x_2^2 & 2x_1x_2 & x_1x_2^2 & 2x_2^2 & x_2^3 \end{array} \right],$$

$$B = \left[ \begin{array}{cc|cc|cc} y_{[1,0]} & 2y_{[0,0]} & y_{[2,0]} & 2y_{[1,0]} & y_{[1,1]} & 2y_{[0,1]} \\ 2y_{[0,0]} & y_{[0,1]} & 2y_{[1,0]} & y_{[1,1]} & 2y_{[0,1]} & y_{[0,2]} \\ \hline y_{[2,0]} & 2y_{[1,0]} & y_{[3,0]} & 2y_{[2,0]} & y_{[2,1]} & 2y_{[1,1]} \\ 2y_{[1,0]} & y_{[1,1]} & 2y_{[2,0]} & y_{[2,1]} & 2y_{[1,1]} & y_{[1,2]} \\ \hline y_{[1,1]} & 2y_{[0,1]} & y_{[2,1]} & 2y_{[1,1]} & y_{[1,2]} & 2y_{[0,2]} \\ 2y_{[0,1]} & y_{[0,2]} & 2y_{[1,1]} & y_{[1,2]} & 2y_{[0,2]} & y_{[0,3]} \end{array} \right].$$

## 2. Результаты части 1

Результаты, полученные в предыдущей части, были посвящены двум вопросам: определению эквивалентного направления

поиска в методе внутренней точки при трансформации пространства поиска; применению полученного результата к одномерным задачам ПН. Приведем подробности в форме, наиболее подходящей для дальнейших построений.

## 2.1. ЭКВИВАЛЕНТНОЕ НАПРАВЛЕНИЕ ПОИСКА

Пусть задача ПМН

$$(6) \quad \begin{aligned} f^* &= \min_x f(x), \\ F_i(x) &\geq 0, \\ \nu_x^T x &= 1, \\ x &\in \mathbb{R}^n, \quad i = 1, \dots, m, \end{aligned}$$

может быть получена из задачи ЛМН

$$(7) \quad \begin{aligned} f^* &= \min_y c^T y, \\ \bar{F}_i(y) &\geq 0, \\ \nu_y^T y &= 1, \\ y &\in \mathbb{R}^n, \quad i = 1, \dots, m, \end{aligned}$$

с помощью замены<sup>4</sup> (трансформации пространства поиска)  $y = y(x)$ .

Далее мы будем рассматривать алгоритм решения (7) на основе метода внутренней точки в прямой форме с ньютоновским направлением поиска, представляющий собой серию подзадач минимизации целевых функций вида

$$\bar{f}^{(i)}(y) = c^T y - \mu^{(i)} \sum_{j=1}^m \log \det \bar{F}_j(y),$$

где  $\{\mu^{(i)}\}$  — монотонно невозрастающая сходящаяся к 0 вещественная последовательность. Каждая подзадача решается на

---

<sup>4</sup> Одним из условий результатов [1] было отличие от 0 якобиана  $y(x)$  внутри допустимой области. Здесь мы опускаем это условие, поскольку финальные результаты целенаправленно конструируются так, чтобы не содержать упоминаний о данной трансформации.

ограниченном неравенствами  $\bar{F}_i(y) \geq 0$  отрезке прямой, проходящей через  $y^{(i)}$  и имеющей предписываемое методом Ньютона направление, которое с учетом ограничения в виде равенства имеет вид

$$(8) \quad \Delta y(y^{(i)}) = H_y^- \left( -g_y + \frac{\nu_y^\top H_y^- g_y}{\nu_y^\top H_y^- \nu_y} \nu_y \right),$$

где  $H_y^-$  — произвольная<sup>5</sup> обобщенная обратная к  $H_y$  матрица;

$$g_y = \nabla_y \bar{f}^{(i)}(y^{(i)}) = c - \mu^{(i)} \sum_{j=1}^m \nabla_y \log \det \bar{F}_j(y^{(i)}),$$

$$H_y = \nabla_y^2 \bar{f}^{(i)}(y^{(i)}) = -\mu^{(i)} \sum_{j=1}^m \nabla_y^2 \log \det \bar{F}_j(y^{(i)}),$$

а элементы слагаемых под знаками сумм могут быть найдены как

$$\begin{aligned} (\nabla_y \log \det \bar{F}(y))_i &= \text{tr} \left( \bar{F}^{-1}(y) \left( \frac{d}{dy_i} \bar{F}(y) \right) \right), \\ (\tilde{\nabla}_y^2 \log \det \bar{F}(y))_{ij} &= -\text{tr} \left( \bar{F}^{-1}(y) \left( \frac{d}{dy_i} \bar{F}(y) \right) \right. \\ &\quad \left. \bar{F}^{-1}(y) \left( \frac{d}{dy_j} \bar{F}(y) \right) \right). \end{aligned}$$

Как показано в предыдущей части, такой алгоритм естественным образом переносится в пространство поиска задачи (6). При этом вспомогательные целевые функции имеют вид

$$(9) \quad f^{(i)}(x) = f(x) - \mu^{(i)} \sum_{j=1}^m \log \det F_j(x),$$

а направление поиска, эквивалентное в малом направлению (8), равно (см. теоремы 1, 2, 3 в [1] и комментарии к ним)

$$(10) \quad \Delta x(x^{(i)}) = \tilde{H}_x^- \left( -g_x + \frac{\nu_x^\top \tilde{H}_x^- g_x}{\nu_x^\top \tilde{H}_x^- \nu_x} \nu_x \right).$$

---

<sup>5</sup> Свободно выбирается из множества обобщенных обратных матриц при первом упоминании. Все дальнейшие вхождения этой матрицы имеют то же значение.

Здесь  $\tilde{H}_x^-$  — произвольная обобщенная обратная к  $\tilde{H}_x$  матрица, а градиент  $g_x$  и модифицированный гессиан  $\tilde{H}_x$  находятся по формулам

$$g_x = \nabla_x f^{(i)}(x^{(i)}) = \nabla_x f(x^{(i)}) - \mu^{(i)} \sum_{j=1}^m \nabla_x \log \det F_j(x^{(i)}),$$

$$\tilde{H}_x = \tilde{\nabla}_x^2 f^{(i)}(x^{(i)}) = -\mu^{(i)} \sum_{j=1}^m \tilde{\nabla}_x^2 \log \det F_j(x^{(i)}),$$

где  $\tilde{\nabla}_x^2 = \nabla_x^2 - \sum_i (\nabla_x^2 y_i) \frac{d}{dy_i}$ ; слагаемые под знаками сумм могут быть вычислены следующим образом:

$$(11) \quad \begin{aligned} (\nabla_x \log \det F(x))_i &= \text{tr} \left( F^{-1}(x) \left( \frac{d}{dx_i} F(x) \right) \right), \\ (\tilde{\nabla}_x^2 \log \det F(x))_{ij} &= -\text{tr} \left( F^{-1}(x) \left( \frac{d}{dx_i} F(x) \right) \right. \\ &\quad \left. F^{-1}(x) \left( \frac{d}{dx_j} F(x) \right) \right). \end{aligned}$$

Мы видим, что (10) не зависит от вида трансформации  $y = y(x)$  и компонентов задачи (7). Более того, даже если не существует линеаризующей трансформации указанного вида<sup>6</sup>, полученный результат сохраняет свою применимость, хотя и теряет теоретические гарантии нахождения глобального минимума итоговым алгоритмом. Особо отметим сохранение при этом важного для метода Ньютона свойства  $\tilde{H}_x \geq 0$ , а также возможность использования в трансформации задачи (3) значений  $k$  и  $d_i$ , не ограничиваемых более порядками полиномов исходной задачи ПН/ПМН.

## 2.2. ОДНОМЕРНЫЕ ЗАДАЧИ

Указанные результаты были применены к задачам ПН с  $n = 1$ . В качестве трансформации пространства поиска был взят переход из пространства атомов в пространство моментов  $y = y(z)$ .

<sup>6</sup> Как видно из раздела 1, для задач ПН/ПМН линеаризующая трансформация найдется всегда, но минимально допустимая размерность  $y$  при этом может быть больше  $n$ . Если же в задаче фигурируют неполномиальные функции, такой трансформации с вектором  $y$  конечной размерности может и не быть.



Здесь  $z$  — вектор в пространстве атомов  $\mathbb{R}^{r \times (n+1)} = \mathbb{R}^{2r}$ , имеющий структуру

$$z = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_r \ p_1 \ p_2 \ \dots \ p_r]^T,$$

где  $x_i \in \mathbb{R}$  — атомы;  $p_i \in (0; 1)$  — их веса; вектор моментов  $y$  имеет размерность  $s_1(2k) + 1 = 2k + 2$  и состоит из элементов вида

$$y_j = y_{[j-1]} = \sum_{i=1}^r p_i x_i^{j-1}, \quad j = 1, 2, \dots, 2k + 2.$$

Старший,  $(2k + 1)$ -й момент не входит ни в (3), ни в  $\Delta y$ , и нужен исключительно для равенства размерностей  $y$  и  $z$ , которое обеспечивается дополнительным соотношением  $r = k + 1$ .

Интерпретируя ЛМН-релаксацию рассматриваемой задачи как форму (7), мы можем записать эквивалентную задачу вида (6) без использования вектора моментов следующим образом:

(12)

$$f^* = \min_z \sum_{j=1}^r p_j f(x_j),$$

$$F_0(z) = \sum_{j=1}^r p_j (b_k(x_j) b_k(x_j)^T) \geq 0,$$

$$F_i(z) = \sum_{j=1}^r p_j (b_{k-d_i}(x_j) b_{k-d_i}(x_j)^T) g_i(x_j) \geq 0, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$\nu_z^T z = \sum_{j=1}^r p_j = 1.$$

Данная форма задачи напрямую подходит для решения модифицированным методом внутренней точки с вычислением эквивалентного ньютоновского направления поиска  $\Delta z(z^{(i)})$  по формуле (10).

### 3. Многомерные задачи

Задачи ПН/ПМН в общем случае являются NP-трудными [2], и предлагаемый способ их трансформации данную проблему не решает. С другой стороны, благодаря смене пространства поиска, вычислительная сложность процедуры решения задачи определяется теперь не столько формальными характеристиками последней, сколько фактической сложностью структуры области поиска и целевой функции. Например, даже если задача заведомо является выпуклой, но имеет относительно большое количество неизвестных и задействует полиномы не слишком малого порядка, оригинальный метод вынужденно столкнется с вышеупомянутым комбинаторным взрывом размера ЛМН-релаксаций. С помощью же новой схемы мы сможем сконструировать алгоритм с единственным атомом, реализующий локальную оптимизацию и требующий существенно меньших вычислительных ресурсов.

Далее мы будем ориентироваться на задачи родом из теории управления, зачастую изначально представляемые в виде ПМН и имеющие невысокий порядок полиномов, не слишком малое количество неизвестных, а также область поиска с относительно несложным характером невыпуклости (см. пример в разделе 4.2)<sup>7</sup>. Последнее условие подразумевает, что невыпуклость как таковая не приводит к наличию большого количества ложных локальных минимумов, сложному рельефу вспомогательных целевых функций и т. п. Таким образом, мы можем рассматривать невыпуклость задачи не как бинарный фактор, вынуждающий нас при его наличии в лучшем случае искать альтернативные формулировки задачи с более приемлемыми количественными характеристиками, а в худшем — смиряться с катастрофическим ростом объема вычислений — как неявную характеристику,

<sup>7</sup> *Примером задачи с патологическим характером невыпуклости, который мы не рассматриваем, может служить любая задача оптимизации на множестве битовых векторов (такие задачи представимы в виде ПН, поскольку условие  $x_i \in \{0; 1\}$  эквивалентно системе  $x_i \geq 0$ ;  $x_i \leq 1$ ;  $x_i(x_i - 1) \geq 0$ ). В этом случае область поиска представляет собой дискретное множество из  $2^n$  точек.*

под которую подбираются параметры алгоритма поиска решения (в первую очередь  $k$  и  $r$ ).

Построим алгоритм поиска экстремума, основанный на описанной выше схеме и удовлетворяющий следующим требованиям:

- 1) он должен быть совместим как с задачами ПН, так и с задачами ПМН;
- 2) он должен избегать эффекта комбинаторного взрыва;
- 3) он должен позволять более тонко контролировать объем вычислений, в частности, выбирать необходимое количество атомов в зависимости от ожидаемого характера невыпуклости задачи и количества локальных экстремумов.

Комбинаторный взрыв является неизбежным результатом повышения порядка ЛМН-релаксации в оригинальном методе, и попытка конструирования эквивалентной трансформированной задачи дала бы в этом случае аналогичный эффект. Поэтому дальнейшие построения основаны на ЛМН-релаксациях с минимальными нетривиальными значениями  $k$  и  $d_i$ . Такие конфигурации, соответствующие первым двум требованиям, рассмотрены в разделе 3.1.

В разделе 3.2 представлено обобщение вычислительной схемы, позволяющее дополнительно уменьшать количество атомов до любого нужного значения, включая 1 (в соответствии с требованием 3).

Раздел 3.3 описывает способ компенсации консерватизма вычислительной схемы, вызванного отказом от использования ЛМН-релаксаций высоких порядков.

### 3.1. БАЗОВАЯ КОНФИГУРАЦИЯ

По аналогии с одномерными задачами рассмотрим пространство атомов, состоящее из векторов вида

$$(13) \quad z = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} & x_{21} & \dots & x_{rn} & p_1 & p_2 & \dots & p_r \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} x_1^T & x_2^T & \dots & x_r^T & p_1 & p_2 & \dots & p_r \end{bmatrix}^T,$$

где  $x_i \in \mathbb{R}^n$  — атомы,  $p_i \in (0; 1)$  — их веса. Соответствующий вектор моментов имеет вид  $y = y(z) = \sum_{i=1}^r p_i b_k(x_i)$ .

Подставив  $y = y(z)$  в релаксацию (3) задачи (2), получаем аналог (12), отличающийся структурой векторов  $z$  (имеющего указанный выше вид),  $\nu_z$  (который теперь состоит из  $rn$  нулей и  $r$  единиц),  $b_k(x)$ ,  $b_{k-d_i}(x)$ , а также матриц  $F_i(z)$ :

$$F_i(z) = \sum_{j=1}^r p_j (b_{k-d_i}(x_j) b_{k-d_i}(x_j)^T) \otimes G_i(x_j).$$

Базовая версия предлагаемого далее подхода использует минимальное нетривиальное значение  $k = 1$  в сочетании с минимально возможным количеством атомов, дающим невырожденную матрицу  $F_0(z)$ :  $r = s_n(k) = n + 1$ . Величины  $d_i$  при этом могут принимать значения 0 и 1. Определим, какие из данных значений целесообразно использовать. Отметим, что  $F_0(z)$  можно формально считать разновидностью  $F_i(z)$  с  $d_0 = 0$  и  $g_0(x) = 1$ .

**Утверждение 1.** Пусть  $k = 1$ ,  $r = s_n(k) = n + 1$ , и  $G(x) \in \mathbb{R}^{l \times l}$ . *Определитель матрицы*

$$F(z) = \sum_{i=1}^r p_i (b_{k-d}(x_i) b_{k-d}(x_i)^T) \otimes G(x_i)$$

равен

$$(14) \quad \det F(z) = \left( \prod_{i=1}^r p_i^l \det G(x_i) \right) (\det V)^{2l}$$

при  $d = 0$  и

$$\det F(z) = \det \sum_{i=1}^r p_i G(x_i)$$

при  $d = 1$ . Здесь  $V \in \mathbb{R}^{(n+1) \times r}$  — матрица,  $i$ -й столбец которой равен  $b_1(x_i)$  ( $n$ -мерная матрица Вандермонда порядка 1 для векторов  $x_i$ ):

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_{11} & x_{21} & \dots & x_{r1} \\ x_{12} & x_{22} & \dots & x_{r2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1n} & x_{2n} & \dots & x_{rn} \end{bmatrix}.$$

**Доказательство.** Формула для  $d = 1$  следует из  $b_0(x) = [1]$ . Пусть теперь  $d = 0$ ;  $H_i = H_i^T$  — произвольный квадратный корень из  $p_i G(x_i)$ ;  $W = W^T = \text{diag}(H_1, H_2, \dots, H_r)$ ;  $I_l \in \mathbb{R}^{l \times l}$  — единичная матрица. Тогда

$$\begin{aligned} F(z) &= \sum_{i=1}^r p_i (b_{k-d}(x_i) b_{k-d}(x_i)^T) \otimes G(x_i) = \\ &= \sum_{i=1}^r (b_{k-d}(x_i) \otimes H_i) (b_{k-d}(x_i) \otimes H_i)^T = \\ &= ((V \otimes I_l)W) ((V \otimes I_l)W)^T = \\ &= (V \otimes I_l)(WW^T)(V \otimes I_l)^T, \end{aligned}$$

так что (поскольку  $V \otimes I_l$  и  $WW^T$  — квадратные матрицы)

$$\begin{aligned} \det F(z) &= \det(WW^T) (\det(V \otimes I_l))^2 = \\ &= (\det \text{diag}(p_1 G(x_1), p_2 G(x_2), \dots, p_r G(x_r))) (\det V)^{2l}, \end{aligned}$$

откуда получаем доказываемую формулу.

Мы видим, что при использовании  $d_i = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , необходимым условием сохранения положительной определенности  $F_i(z)$  в процессе решения задачи методом внутренней точки является положительная определенность каждой из матриц  $G_i(x_j)$  по отдельности. Данное требование лишает атомы  $x_j$  возможности покидать допустимую область — что является одним

из ключевых аспектов алгоритма, особенно при исследовании областей поиска с несколькими компонентами связности. По этой причине использование таких значений  $d_i$  представляется нецелесообразным. Далее мы сохраняем  $d_0 = 0$ , но полагаем все остальные  $d_i$  равными 1. Задача (6) тогда приобретает вид

$$\begin{aligned}
 f^* &= \min_z \sum_{j=1}^r p_j f(x_j), \\
 F_0(z) &= V \operatorname{diag}(p_1, p_2, \dots, p_r) V^T \geq 0, \\
 (15) \quad F_i(z) &= \sum_{j=1}^r p_j G_i(x_j) \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \\
 \nu_z^T z &= \sum_{j=1}^r p_j = 1.
 \end{aligned}$$

### 3.2. РЕДУКЦИЯ

Представленная в предыдущем разделе схема имеет жесткое ограничение на количество атомов:  $r = s_n(1) = n + 1$ . Между тем, в реальных задачах ПМН данное число может быть довольно велико. Покажем, что выведенные ранее формулы допускают обобщение на случай  $r < n + 1$ .

Единственным элементом (15), несовместимым с изложенной схемой при  $r < n + 1$ , является неравенство  $F_0(z) \geq 0$  (поскольку матрица  $F_0(z)$  в этом случае вырождена). Возвращаясь к интерпретации  $\log \det F_0(z)$  как потенциального поля, отталкивающего атомы друг от друга (см. [1], раздел 4), отметим, что при  $r = 1$  данное неравенство теряет смысл и его можно исключить. Пусть теперь  $r > 1$ . Определим воздействие на атомы аналогичного поля, действующего в проходящей через  $x_1, x_2, \dots, x_r$   $(r - 1)$ -мерной гиперплоскости  $\mathbf{X}$ . Далее будем предполагать, что конфигурация атомов  $x_1, x_2, \dots, x_r$  не является вырожденной: они не лежат на гиперплоскости меньшей размерности.

Введем на указанной гиперплоскости ортонормированный базис, и пусть  $M_0 \in \mathbb{R}^{n \times (r-1)}$  — матрица, столбцы которой являются элементами данного базиса. Эта матрица задает линейный

оператор, ставящий векторам  $x \in \mathbf{X}$  в соответствие их координаты в новом базисе:  $\bar{x} = M_0^T x$  (без ограничения общности будем считать началом координат в  $\mathbf{X}$  решение системы  $M_0^T x = 0$ ,  $x \in \mathbf{X}$ ). Пусть  $\bar{x}_i = M_0^T x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, r$ . Обозначим также  $W = \text{diag}(p_1, p_2, \dots, p_r)$ , так что  $F_0(z)$  из (15) будет иметь вид  $F_0(z) = V W V^T$ .

Примем в качестве эквивалента  $F_0(z)$  на  $\mathbf{X}$  матрицу

$$\bar{F}_0(z) = \bar{V} W \bar{V}^T = M_0'^T V W V^T M_0' = M_0'^T F_0(z) M_0',$$

где

$$\bar{V} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \bar{x}_{11} & \bar{x}_{21} & \dots & \bar{x}_{r1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{x}_{1,r-1} & \bar{x}_{2,r-1} & \dots & \bar{x}_{r,r-1} \end{bmatrix},$$

$$M_0' = \text{diag}([1], M_0) \in \mathbb{R}^{(n+1) \times r}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \det \bar{F}_0(z) &= \det(M_0'^T V) \det(W) \det(V^T M_0') = \\ &= \det(W) \det(V^T M_0' M_0'^T V) = \left( \prod_{i=1}^r p_i \right) \det(V^T P' V), \end{aligned}$$

где  $P' = \text{diag}([1], P)$ ;  $P = M_0 M_0^T$  — матрица проекции на пространство столбцов  $M_0$ , которую можно найти, построив  $M_0$ , или же как  $P = M(M^T M)^{-1} M^T$ , где столбцы  $M \in \mathbb{R}^{n \times (r-1)}$  образуют произвольный базис  $\mathbf{X}$ : например,  $x_2 - x_1, x_3 - x_1, \dots, x_r - x_1$ . Отметим, что матрицы  $V$ ,  $M_0'^T V$  и  $P' V$  имеют полный ранг по столбцам.

Выражение  $\det(V^T P' V)$  можно упростить. Для  $r = 1$  данный определитель равен 1. Если  $r > 1$ , пусть

$$R = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{r \times r}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \det(V^T P'V) &= \det(R^T) \det(V^T P'^T P'V) \det(R) = \\ &= \det((P'VR)^T (P'VR)). \end{aligned}$$

Несложно видеть, что  $Px_1$  линейно зависит от  $P(x_2 - x_1) = x_2 - x_1, \dots, P(x_r - x_1) = x_r - x_1$ , а следовательно, существует такая нижняя треугольная матрица  $L$  с единичной диагональю (описывающая вычитание из первого столбца  $P'VR$  остальных с соответствующими коэффициентами), что, домножив на нее справа матрицу

$$P'VR = \left[ \begin{array}{c|c|c|c} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline Px_1 & x_2 - x_1 & \dots & x_r - x_1 \end{array} \right],$$

мы получим

$$P'VRL = \text{diag}([1], M),$$

$$M = [x_2 - x_1 \mid x_3 - x_1 \mid \dots \mid x_r - x_1],$$

так что  $\det((P'VR)^T (P'VR)) = \det((P'VRL)^T (P'VRL)) = \det(M^T M)$ . Финальная форма является грамианом системы векторов  $x_2 - x_1, x_3 - x_1, \dots, x_r - x_1$ , и, таким образом,  $\det(V^T P'V)$  представляет собой квадрат  $(r - 1)$ -мерного объема параллелепипеда, построенного на данных образующих (что согласуется с (14), поскольку при  $r = n + 1$  определитель  $\det V$  равен ориентированному объему параллелепипеда с образующими того же вида). Таким образом,

$$(16) \quad \det \bar{F}_0(z) = \left( \prod_{i=1}^r p_i \right) \det(M^T M).$$

Найдем теперь компоненты  $\nabla_z \log \det \bar{F}_0(z)$  и  $\tilde{\nabla}_z^2 \log \det \bar{F}_0(z)$ . Будем считать  $\mathbf{X}$ ,  $M_0$  и  $M$  константами (так что  $\frac{1}{dz} M_0(z) = 0$  и  $\frac{1}{dz} M(z) = 0$ ): это позволит избежать зависимости модифицированного гессиана  $\tilde{\nabla}_z^2 \log \det \bar{F}_0(z)$  от выбора базиса  $\mathbf{X}$  (напомним, что данный гессиан определяется не только инвариантной по отношению к базису функцией  $\log \det \bar{F}_0(z)$ , но и видом самой матрицы  $\bar{F}_0(z)$ ). Мы можем



это сделать, поскольку нашей целью на данном этапе является определение воздействия барьерной функции, индуцированной неравенством  $F_0(z) \geq 0$  на  $\mathbf{X}$ , на конкретную (текущую) конфигурацию атомов.

**Теорема 1.** Пусть  $P', V, W, F_0(z)$  и  $\bar{F}_0(z)$  – матрицы указанного выше вида,  $U = (P'V)^{-1}$  – произвольная обобщенная обратная к  $P'V$  матрица, и  $G(z) = P'U^T W^{-1} U P'$ . Тогда

$$\begin{aligned} (\nabla_z \log \det \bar{F}_0(z))_i &= \text{tr} \left( G(z) \left( \frac{d}{dz_i} F_0(z) \right) \right); \\ (\tilde{\nabla}_z^2 \log \det \bar{F}_0(z))_{ij} &= -\text{tr} \left( G(z) \left( \frac{d}{dz_i} F_0(z) \right) G(z) \left( \frac{d}{dz_j} F_0(z) \right) \right). \end{aligned}$$

**Доказательство.** Пусть  $M_0$  – матрица указанного выше вида. Поскольку  $\bar{F}_0(z)$  – невырожденная матрица, существует единственная обратная к ней матрица  $\bar{G}(z)$ , которая может быть найдена как  $\bar{G}(z) = M_0^T U^T W^{-1} U M_0$ . Это можно видеть, подставив данное выражение, а также  $\bar{F}_0(z) = M_0'^T V W V^T M_0'$ , в  $\bar{F}_0(z) \bar{G}(z) \bar{F}_0(z)$  и упростив результат с учетом равенств  $M_0' M_0'^T = P' = P'^T$  и  $(P'V)^{-1} (P'V) = I$  (в силу полноранговости  $P'V$  по столбцам). Результатом данных действий является выражение, идентичное  $\bar{F}_0(z)$ , а следовательно,  $\bar{G}(z)$  является обобщенной обратной – и просто обратной – к  $\bar{F}_0(z)$ .

Согласно (11), имеем:

$$\begin{aligned} (\nabla_z \log \det \bar{F}_0(z))_i &= \\ &= \text{tr} \left( \bar{F}_0^{-1}(z) \left( \frac{d}{dz_i} \bar{F}_0(z) \right) \right) = \\ &= \text{tr} \left( M_0'^T U^T W^{-1} U M_0' M_0'^T \left( \frac{d}{dz_i} F_0(z) \right) M_0' \right) = \\ &= \text{tr} \left( M_0' M_0'^T U^T W^{-1} U M_0' M_0'^T \left( \frac{d}{dz_i} F_0(z) \right) \right) = \\ &= \text{tr} \left( P' U^T W^{-1} U P' \left( \frac{d}{dz_i} F_0(z) \right) \right) = \\ &= \text{tr} \left( G(z) \left( \frac{d}{dz_i} F_0(z) \right) \right). \end{aligned}$$

Аналогично для  $(\tilde{\nabla}_z^2 \log \det \bar{F}_0(z))_{ij}$ .

Таким образом, при  $r < n + 1$  задача (15) в основном сохраняет свой вид. Исключением является лишь неравенство  $F_0(z) \geq 0$ , заменяющееся на  $\bar{F}_0(z) \geq 0$ ; соответствующие ему компоненты барьерной функции, ее градиента и обобщенного гессиана находятся согласно (16) и теореме 1.

### 3.3. РЕПАТРИАЦИЯ РЕШЕНИЙ

Если порядок релаксации  $k$  недостаточно велик, исходный метод [5] находит консервативную нижнюю границу значения экстремума. Наиболее разрушительным проявлением аналогичного эффекта в трансформированной задаче является возможность получения финальной конфигурации атомов, ни один из которых не принадлежит допустимой области.<sup>8</sup>

Чтобы избежать данной проблемы, добавим в трансформированную задачу серию неравенств вида  $p_j G_i(x_j) + \lambda I \geq 0$ :

$$f^* = \min_z \sum_{j=1}^r p_j f(x_j),$$

$$\bar{F}_0(z) = M_0'^T V \text{diag}(p_1, p_2, \dots, p_r) V^T M_0' \geq 0,$$

$$(17) \quad F_i(z) = \sum_{j=1}^r p_j G_i(x_j) \geq 0, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$\bar{F}_{ij}(z) = p_j G_i(x_j) + \lambda I \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, r,$$

$$v_z^T z = \sum_{j=1}^r p_j = 1,$$

где  $\lambda \geq 0$  — параметр, значение которого изначально выбирается достаточно большим для выполнения неравенств  $\bar{F}_{ij}(z^{(0)}) \geq 0$  и далее систематически уменьшается по мере нахождения промежуточных приближений  $z^{(i)}$  модифицированным методом внут-

<sup>8</sup> Например, возможна ситуация, когда в задаче ПН с  $m > 1$  часть атомов удовлетворяет только неравенству  $g_1(x) \geq 0$ , другая часть — только неравенству  $g_2(x) \geq 0$  и т. д., так что ни один атом не удовлетворяет всем ограничениям одновременно — но при этом неравенства  $F_i(z) = \sum_{j=1}^r p_j g_i(x_j) \geq 0$  выполняются.

ренной точки.<sup>9</sup>

Соответствующие новым неравенствам компоненты барьерной функции  $\log \det \bar{F}_{ij}(z)$  вычисляются напрямую; компоненты градиента и модифицированного гессиана — с помощью (11):

(18)

$$\begin{aligned} (\nabla_z \log \det \bar{F}_{ij}(z))_{x_{jk}} &= p_j \operatorname{tr} \left( \bar{F}_{ij}^{-1}(z) \left( \frac{d}{dx_{jk}} G_i(x_j) \right) \right), \\ (\nabla_z \log \det \bar{F}_{ij}(z))_{p_j} &= \operatorname{tr} \left( \bar{F}_{ij}^{-1}(z) G_i(x_j) \right), \\ (\tilde{\nabla}_z^2 \log \det \bar{F}_{ij}(z))_{x_{jk}x_{jl}} &= -p_j^2 \operatorname{tr} \left( \bar{F}_{ij}^{-1}(z) \left( \frac{d}{dx_{jk}} G_i(x_j) \right) \right. \\ &\quad \left. \bar{F}_{ij}^{-1}(z) \left( \frac{d}{dx_{jl}} G_i(x_j) \right) \right), \\ (\tilde{\nabla}_z^2 \log \det \bar{F}_{ij}(z))_{x_{jk}p_j} &= -p_j \operatorname{tr} \left( \bar{F}_{ij}^{-1}(z) \left( \frac{d}{dx_{jk}} G_i(x_j) \right) \right. \\ &\quad \left. \bar{F}_{ij}^{-1}(z) G_i(x_j) \right), \\ (\tilde{\nabla}_z^2 \log \det \bar{F}_{ij}(z))_{p_j p_j} &= -\operatorname{tr} \left( \bar{F}_{ij}^{-1}(z) G_i(x_j) \bar{F}_{ij}^{-1}(z) G_i(x_j) \right); \end{aligned}$$

здесь  $x_{jk}$  и  $p_j$  в качестве нижних индексов обозначают элементы градиента и гессиана, соответствующие данным переменным; все неуказанные элементы равны 0. Отметим, что неравенства  $\bar{F}_{ij}(z) \geq 0$  добавлены в систему искусственно и не имеют отношения к линейным релаксациям; поэтому использование здесь именно модифицированного гессиана  $\tilde{\nabla}_z^2$  обусловлено не столько намерением построить эквивалентную трансформированную задачу, сколько гарантией положительной полуопределенности соответствующей компоненты  $\tilde{H}_z$ .

---

<sup>9</sup> *Оптимальная стратегия формирования последовательности значений  $\lambda$  является предметом отдельного исследования.*

## 4. Примеры

### 4.1. ЗАДАЧА ПН

Рассмотрим задачу, иллюстрирующую работу нового алгоритма с несвязными областями поиска для  $m = 1$ ,  $n = 2$ :

$$f^* = \min_x f(x) = \min_x (x_2 + 0,1)^2,$$

$$g_1(x) = 1 - 2x_1 - 2(x_2^2 - 1)^2 \geq 0.$$

На рис. 1 показана область поиска  $g_1(x) \geq 0$  и отмечены локальные экстремумы  $f(x)$  в данной области, из которых нижний является глобальным.

Решим данную задачу, используя конфигурации с  $r = 1$ ,  $r = 2$  и  $r = 3$ . Выберем случайные начальные позиции атомов в окрестности точки  $(-0,5; 1)$ . Будем делать серию из 15 шагов с  $\mu = 1$ , а после нее — 5 серий по 5 шагов, уменьшая  $\mu$  в 4 раза в каждой новой серии. Положим также  $\lambda = 1000$  (так что компоненты барьерных функций, соответствующие неравенствам  $\bar{F}_{ij}(z) \geq 0$ , не будут оказывать заметного влияния на решение).

Для  $r = 1$ , как и в одномерном случае, действие алгоритма эквивалентно локальному поиску с логарифмическими барьерными функциями и ньютоновским выбором направления с использованием модифицированного гессiana (рис. 2).

Для  $r = 2$  и  $r = 3$  отдельные атомы получают возможность переходить из одной компоненты связности в другую за счет временного уменьшения веса, позволяющего матрицам  $F_i(z)$  оставаться положительно определенными (рис. 3 и рис. 4). Это позволяет одному из атомов найти глобальный минимум; положение остальных атомов впоследствии может стать произвольным, поскольку их веса стремятся к 0.

Дальнейшее увеличение количества атомов в рамках изложенного подхода для данной задачи невозможно, поскольку мы рассматриваем только конфигурации с  $r \leq n + 1$ .

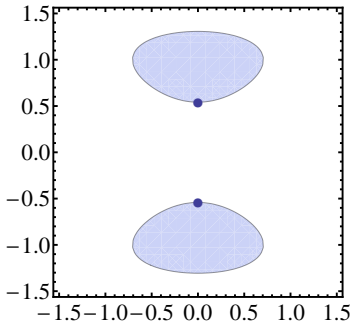


Рис. 1. Область поиска

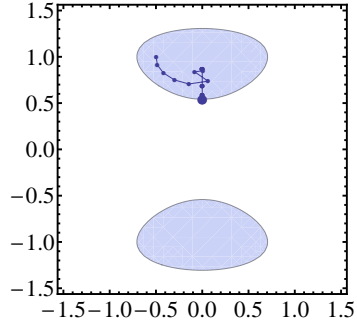


Рис. 2. График  $x$  для  $r = 1$

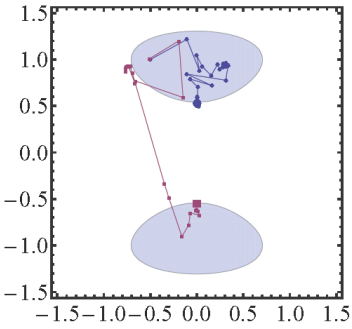


Рис. 3. Графики  $x$  и  $p$  для  $r = 2$

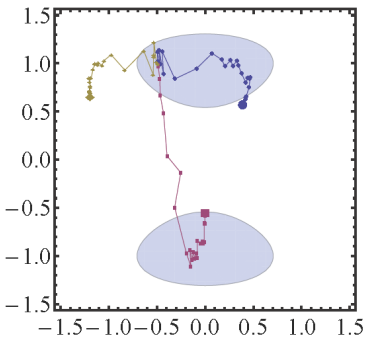


Рис. 4. Графики  $x$  и  $p$  для  $r = 3$

## 4.2. ЗАДАЧА ПМН

В качестве более реалистичного примера рассмотрим задачу HE1 из библиотеки COMPl<sub>e</sub>ib [10]: нахождение стабилизирующей обратной связи по выходу  $u = Ky$  для системы

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx,\end{aligned}$$

где матрицы  $A$ ,  $B$  и  $C$  заданы; размерности вектора состояния, управления и выхода равны 4, 2 и 1. Множество решений  $K = [k_1 \ k_2]^T$  показано на рис. 5.

Модифицируем задачу с целью ее усложнения:

- с помощью замены переменных применим аффинное преобразование к плоскости  $K$  для усиления невыпуклости множества решений (что эквивалентно соответствующему изменению матриц  $A$ ,  $B$  и  $C$ );
- дополнительно потребуем минимизации  $k_1^2 + k_2^2$ ; начальные приближения в алгоритме будем генерировать в окрестности допустимой точки, близкой к ложному экстремуму.

Новое множество решений  $K = [k_1 \ k_2]^T$  показано на рис. 6. Также на графике отмечены локальные экстремумы целевой функции с учетом ограничений. Правый экстремум является глобальным.

В отличие от [5], где данная задача также рассматривалась (в исходной постановке), мы можем напрямую воспользоваться ее представлением в форме ПМН:  $(A + BKC)^T P + P(A + BKC) < 0$ , где  $K \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$  и  $P \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ ,  $P = P^T > 0$ , — неизвестные матрицы. Добавив в систему ограничения на неизвестные величины, приходим к следующей задаче ПМН с 12 скалярными неизвестными и 4 неравенствами (левая часть каждого — матрица  $4 \times 4$ ),

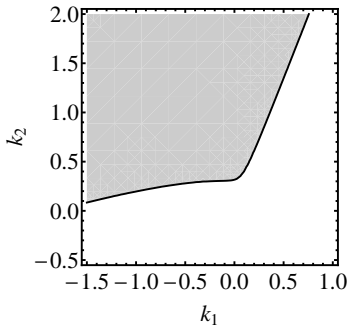


Рис. 5. Решения исходной задачи

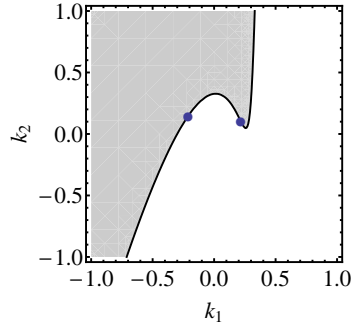


Рис. 6. Решения измененной задачи

из которых одно является билинейным:

$$f^* = \min_{P, K} k_1^2 + k_2^2,$$

$$G_1(P, K) = -(A + BK_0C)^T P - P(A + BK_0C) > 0,$$

$$G_2(P, K) = P - 10^{-2}I > 0,$$

$$G_3(P, K) = 10^2I - P > 0,$$

$$G_4(P, K) = \text{diag}(1 + k_1, 1 - k_1, 1 + k_2, 1 - k_2) > 0.$$

Начальные приближения будем формировать из  $K_0 = [-0,9; 0]^T$  и случайных  $P_0$ , находящихся в окрестности решения уравнения  $(A + BK_0C)^T P + P(A + BK_0C) = -I$ . Воспользуемся последовательностью значений  $\mu$ , аналогичной предыдущему примеру, но через каждые 5 итераций будем делать вспомогательную короткую серию шагов, уменьшая на ней по мере возможности величину  $\lambda$ . Начальное значение последней —  $\lambda = 10$ ; в процессе работы алгоритма оно уменьшается до величины порядка  $10^{-3}$ .

Результаты для  $r = 1$ ,  $r = 2$  и  $r = 3$  приведены на рис. 7, 8 и 9:

- при  $r = 1$  алгоритм находит ближайший локальный экстремум;
- при  $r = 2$  результат, как правило, тот же. Дополнительный атом теряет вес раньше, чем обнаружит правильный экстре-

мум, после чего его траектория становится малопредсказуемой;

- при  $r = 3$  алгоритм достаточно стабильно локализует оба экстремума. Атом в глобальном экстремуме быстро набирает вес, вследствие чего точность нахождения последнего выше, чем точность нахождения ложного минимума.

Таким образом, атомная оптимизация позволяет получать адекватные результаты при решении практических задач с использованием относительно небольших конфигураций атомов.

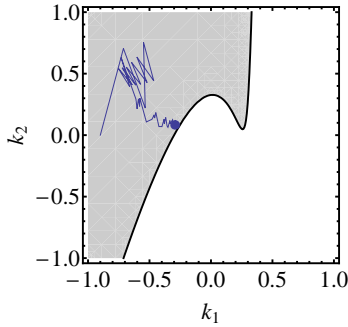


Рис. 7. График  $K$  для  $r = 1$

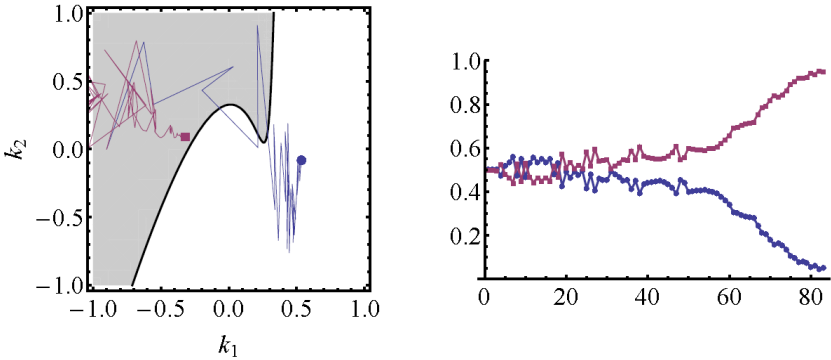


Рис. 8. Графики  $K$  и  $p$  для  $r = 2$



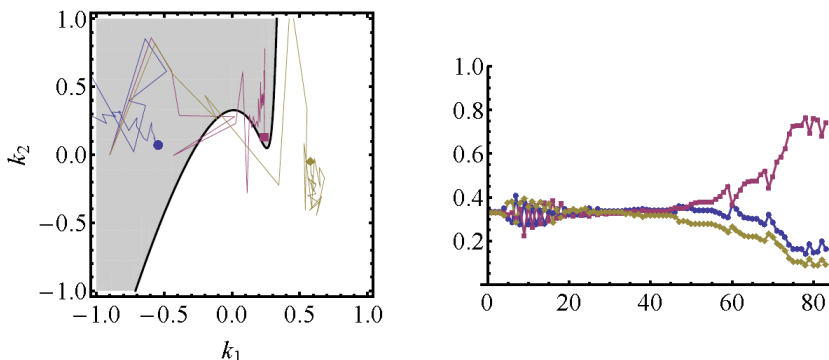


Рис. 9. Графики  $K$  и  $p$  для  $r = 3$

## 5. Заключение

Мы рассмотрели применение техники атомной оптимизации к невыпуклым задачам на базе полиномиальных матричных неравенств и продемонстрировали следующие ее характеристики.

- Полиномиальная зависимость размера трансформированной задачи от размера исходной задачи ПМ/ПМН и количества атомов позволяет новому алгоритму иметь в целом существенно более низкую вычислительную сложность по сравнению с оригинальным алгоритмом на базе метода моментов за счет отказа от максимально полного исследования области поиска.
- В задачах ПМН интересующего нас вида (охарактеризованного в разделе 3) она позволяет получать адекватный результат при использовании конфигураций атомов относительно небольшого размера. Кроме того, ее одноатомный вариант может использоваться в задачах локальной оптимизации.
- Отметим также, что полученная вычислительная схема применима без изменений в том числе и к задачам, содержащим неполиномиальные функции и неравенства (при

выполнении некоторых базовых требований: в первую очередь, их дифференцируемости и гладкости).

Дальнейшие потенциально перспективные направления исследований включают: поиск оптимального представления и реализации изложенной вычислительной схемы; отработка полученных алгоритмов на существенно нелинейных и невыпуклых задачах теории управления; построение аналогичных вычислительных схем на базе более сложных методов внутренней точки.

### **Литература**

1. ПОЗДЯЕВ В.В. *Атомная оптимизация, часть 1: трансформация пространства поиска и одномерные задачи* // Управление большими системами. – 2011. – №36. – С. 39–80.
2. BLONDEL V., TSITSIKLIS J. *NP-hardness of some linear control design problems* // SIAM J. on Control and Optimization. – 1997. – Vol. 35, №6. – P. 2118–2127.
3. GALEANI S., HENRION D., JACQUEMARD A., ZACCARIAN L. *Design of Marx generators as a structured eigenvalue assignment*: LAAS-CNRS Research Report. – 2013. – URL: <http://homepages.laas.fr/henrion/Papers/marx.pdf> (дата обращения: 15.05.13).
4. HENRION D., LASSERRE J.-B. *Detecting global optimality and extracting solutions in GloptiPoly* // Positive polynomials in control. – 2005. – P. 1–18.
5. HENRION D., LASSERRE J.-B. *Convergent relaxations of polynomial matrix inequalities and static output feedback* // IEEE Trans. Automatic Control. – 2006. – Vol. 51, №2. – P. 192–202.
6. KORDA M., HENRION D., JONES C.N. *Inner approximations of the region of attraction for polynomial dynamical systems*: LAAS-CNRS Research Report. – 2012. – URL: <http://homepages.laas.fr/henrion/Papers/roainner.pdf> (дата обращения: 01.12.12).

7. LASSERRE J.-B. *Global optimization with polynomials and the problem of moments* // SIAM J. on Optimization. – 2001. – Vol. 11, №3. – P. 796–817.
8. LASSERRE J.-B. *A new look at nonnegativity on closed sets and polynomial optimization* // SIAM J. on Optimization. – 2011. – Vol. 21. – P. 864–885.
9. LAURENT M. *A comparison of the Sherali-Adams, Lovász-Schrijver and Lasserre relaxations for 0-1 programming* // Mathematics of Operations Research. – 2001. – Vol. 28. – P. 470–496.
10. LEIBFRITZ F. *COMPl<sub>e</sub>ib: CONstraint Matrix-optimization Problem library – a collection of test examples for nonlinear semidefinite programs, control system design and related problems*. – 2004. – URL: <http://www.compleib.de/> (дата обращения: 01.12.12).

**ATOMIC OPTIMIZATION, PART 2:  
MULTIDIMENSIONAL PROBLEMS AND  
POLYNOMIAL MATRIX INEQUALITIES**

**Vladimir Pozdyayev**, Arzamas Polytechnical Institute of  
R. E. Alekseev Nizhny Novgorod State Technical University,  
Arzamas, Cand.Sc., associate professor (vpozdyayev@gmail.com).

*Abstract: We investigate multidimensional optimization problems with polynomial objective function and polynomial matrix inequality constraints and suggest a transformation of the moment-theory-based solution technique. It allows reducing significantly the computational complexity while keeping the ability to solve the problems of the class under consideration.*

Keywords: nonlinear programming, matrix inequalities, polynomial inequalities, moment theory.

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии П. С. Щербаковым  
Поступила в редакцию 09.01.2013.  
Опубликована 31.05.2013.*

УДК 62.50  
ББК Ж 30

## СТАБИЛИЗИРУЮЩЕЕ СЕТЕВОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМИ ДИСКРЕТНЫМИ ОБЪЕКТАМИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ БАНКОВ СЕНСОРОВ И ИСПОЛНИТЕЛЬНЫХ УСТРОЙСТВ<sup>1</sup>

Жучков Р. Н.<sup>2</sup>

(Арзамасский политехнический институт (филиал)  
Нижегородского Государственного технического университета  
им. Р.Е. Алексеева, Арзамас)

*Рассматривается линейная система, в которой регулятор обменивается информацией с объектом управления через сеть, содержащую множество банков сенсоров и исполнительных устройств. Совокупность сенсоров и исполнительных устройств рассматривается как система случайной структуры. Строится динамический регулятор с обратной связью по вектору выхода.*

Ключевые слова: линейные дискретные системы, сетевое стабилизирующее управление, марковские цепи, линейные матричные неравенства.

### **Введение**

В работе автора [1] рассматривался случай, когда объект управления получал информацию через единственный набор сенсоров и передавал управление через единственный набор исполнительных устройств. В реальных системах могут иметь место другие схемы. Например, в системе управления летательным аппаратом обычно содержатся основная и резервная системы дат-

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант №13-08-01092\_а) и Министерства образования и науки РФ, ФЦП «КАДРЫ» (соглашение №8846).

<sup>2</sup> Роман Николаевич Жучков, аспирант ([roman\\_jkv@mail.ru](mailto:roman_jkv@mail.ru))

чиков курса и вертикали. Кроме того, для корректировки текущего положения может использоваться информация со спутников и других внешних устройств. Таким образом, имеем многоуровневую систему резервирования, а, значит, и систему управления, в которой возможны переключения между различными наборами сенсоров и исполнительных устройств. Дополнительные сложности появляются в случае сетевого управления, так как часть передаваемых пакетов может быть повреждена или потеряна.

Предыдущий подход рассматривал сетевую систему управления с одним набором сенсоров и исполнительных устройств как марковскую цепь с двумя возможными состояниями: пакет получен либо потерян. В дальнейшем стабилизирующее управление находилось из решения линейных матричных неравенств.

В данной работе рассматривается случай произвольного количества блоков сенсоров и исполнительных устройств, через которые происходит обмен данными между объектом и системой управления. Прямое обобщение результатов [1] на такие системы приводят к необходимости решения систем билинейных матричных неравенств сложной структуры, что связано со значительными трудностями.

Для получения эффективного алгоритма построения стабилизирующего управления предлагается новый подход, суть которого состоит в следующем. Как и ранее в [1], вводится гипотеза о возможности разделения процессов оценивания и управления. Затем вводится эвристическая модификация неравенств исходной системы, которая позволяет сравнительно легко получить решение. В качестве альтернативного способа рассмотрен подход с использованием наблюдателя Калмана.

Считается, что характеристики канала передачи данных известны, т.е. известны вероятности переключения между блоками сенсоров и регуляторов. Эта информация используется для построения матрицы переходов при построении марковской цепи.

## 1. Описание системы

Рассматривается система с множеством блоков сенсоров и регуляторов, схема которой представлена на рис. 1. Отметим

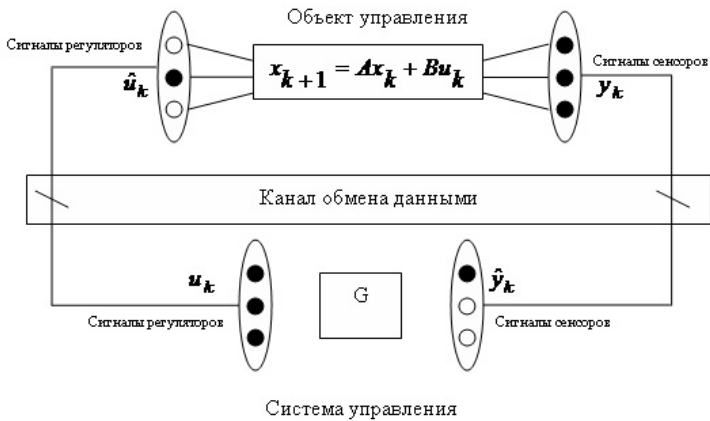


Рис. 1. Схема сетевой системы управления

здесь, что в качестве канала обмена данными можно подразумевать канал с протоколом *point-to-point*, который обычно используется для установления прямой связи между двумя узлами сети. Для простоты будем считать, что прямой канал «объект управления – система управления» и обратный канал организованы с использованием единой физической среды. При работе с такими сетями обычно возникает два типа проблем: запаздывание при передаче сигнала и потеря/порча пакета данных. В настоящей работе считается, что в используемом канале данных длительность задержки при передаче пакетов данных мала по отношению к интервалу дискретности системы управления. Другими словами, динамику каналов связи можно не учитывать в масштабе динамических процессов в рассматриваемом управляемом объекте.

В этой системе объект управления формирует массив дан-

ных для основных и резервных сенсоров системы управления ( $y_k$ ) и высылает их через сетевой канал данных. В процессе пересылки часть информации теряется либо портится (несовпадение контрольных сумм). Таким образом, система управления переключается на доступные в настоящий момент сенсоры ( $\hat{y}_k$ ).

При пересылке управляющей информации от системы управления объекту управления ситуация повторяется: система формирует сигналы для всех регуляторов ( $u_k$ ), но использован будет только тот, который не был потерян либо испорчен при пересылке.

Модель системы задаётся линейным разностным уравнением следующего вида:

$$(1) \quad \begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + B_i u_k, \\ y_k &= C_i x_k, \end{aligned}$$

где  $x_{k+1}$  –  $n$ -мерный вектор состояния перехода;  $x_k$  –  $n$ -мерный вектор исходного состояния;  $u_k$  –  $m$ -мерный вектор управления;  $y_k$  –  $l$ -мерный вектор измерений;  $k$  – дискретное время, выраженное в числе интервалов дискретности длительности  $\Delta t$ ; матрицы  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  и  $B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$  – матрицы перехода вектора состояния и усиления вектора управления соответственно.

В каждый дискретный момент времени матрица выхода системы может находиться в одном из следующих структурных состояний:

$$(2) \quad \begin{aligned} S_1 : C_i &= C_1, \\ S_2 : C_i &= C_2, \\ S_N : C_i &= C_N. \end{aligned}$$

Кроме того, в случае потери сигнала информация может отсутствовать ( $C_i = 0$ ). Здесь  $C_i \in \mathbb{R}^{l \times n}$  – матрицы, характеризующие  $i$ -й выход системы в различных структурных состояниях.

Аналогично, в зависимости от задействованного регулятора



матрица  $B_i$  переходит в одно из возможных состояний:

$$\begin{aligned}(3) \quad T_1 : \quad B_i &= B_1, \\ T_2 : \quad B_i &= B_2, \\ T_M : \quad B_i &= B_M.\end{aligned}$$

Закон управления формируется в виде обратной связи по оценке вектора состояния

$$(4) \quad u_{ki} = -G_i \hat{x}_k,$$

где  $G_i$  – набор матриц усиления обратной связи, соответствующих матрицам  $B_i$ .

Таким образом получаем систему с расширенным вектором состояния:

$$(5) \quad \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ \hat{x}_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (A - B_i G_i) & -B_i G_i \\ 0 & (A - K_j C_j) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ \hat{x}_k \end{bmatrix}.$$

Аналогично подходу, изложенному в предыдущей статье [1], воспользуемся гипотезой о возможности разделения задач оценивания и управления и будем искать соответствующие матрицы усиления по отдельности. После того как матрицы будут найдены для разделенных систем, подставим их в общую систему (5) и проверим её на устойчивость. Отметим здесь, что при разделении системы предполагается, что пары матриц  $(A, B_i)$  полностью управляемы, а пары матриц  $(A, C_i)$  полностью наблюдаемы.

## 2. Построение стабилизирующего управления

В соответствии с подходом, изложенным в [2], набор матриц усиления обратной связи  $G_i$ , стабилизирующий систему (1) при условии переключения входов, может быть найден следующим образом:

$$(6) \quad G_i = [B_i^T S_i B_i + R_i]^{-1} [B_i^T S_i A_i + L_i],$$

где  $R_i > 0$  и  $L_i$  – неизвестные матрицы, которые могут быть найдены из решения системы матричных уравнений и неравенств (7). Кроме того, матрицы  $H_i = H_i^T > 0$  в системе (7) также

являются неизвестными.

$$(7) \quad \begin{aligned} & \begin{bmatrix} A^T S_i A - H_i + (1 + \mu_i) Q_i & A^T S_i B_i \\ B_i^T S_i A & B_i^T S_i B_i + R_i \end{bmatrix} > 0, \\ & S_i = \sum H_i p_{ij}, \\ & \begin{bmatrix} \mu_i Q_i & L_i^T \\ L_i & B_i^T S_i B_i + R_i \end{bmatrix} > 0, \\ & [B_i^T S_i B_i + R_i] = [B_{i+1}^T S_{i+1} B_{i+1} + R_{i+1}], \\ & [B_i^T S_i A + L_i] = [B_{i+1}^T S_{i+1} A + L_{i+1}], \\ & R_i = R_i^T, \quad i = 1, 2, \dots, N. \end{aligned}$$

Для того чтобы удостовериться, что найденные матрицы усиления обеспечивают устойчивость замкнутой системе, необходимо проверить на разрешимость следующую систему матричных неравенств:

$$(8) \quad (A - B_i G_i)^T \sum p_{ij} H_i (A - B_i G_i) - H_i < 0,$$

где  $H_i = H_i^T$  – неизвестная положительно определённая матрица. Данная система получена путём применения метода функций Ляпунова к системе (1)–(3).

### 3. Построение оценки вектора состояния

В ряде случаев алгоритм, изложенный в предыдущем пункте, может выдать идентичные матрицы усиления обратной связи для различных входов системы. В этом случае хотелось бы сконструировать такой алгоритм, который позволял бы получить единственную матрицу усиления и для построения оценки вектора состояния, с целью построить регулятор постоянной структуры.

Однако прежде чем рассмотреть частный случай, рассмотрим ситуацию, когда при решении задачи управления были получены различные матрицы усиления для различных структурных состояний системы.

### 3.1. НАБЛЮДАТЕЛЬ С ПЕРЕКЛЮЧАЕМОЙ СТРУКТУРОЙ

Рассмотрим выход системы как однородную марковскую цепь с известными вероятностями перехода между структурными состояниями. Оценку вектора состояния будем искать в следующем виде:

$$(9) \quad \hat{x}_{k+1} = A\hat{x}_k + Bu_k + K_i(y_k - C_i\hat{x}_k),$$

где смена структурных состояний  $C_i$  описана ранее.

Наблюдатель (9) будет устойчив, если выполнено неравенство Ляпунова [2]:

$$(10) \quad (A - K_i C_i)^T \sum p_{ij} H_j (A - K_i C_i) - H_i < 0, \quad i = 1 \dots N,$$

где  $H_i = H_i^T$  и  $K_i$  – неизвестные матрицы и  $p_{ij}$  – элементы матрицы вероятностей переходов между структурными состояниями системы. Непосредственное решение этого билинейного относительно неизвестных матриц неравенства приводит к связанной системе линейных матричных уравнений и неравенств. Однако можно ограничиться только решением линейных матричных неравенств, если использовать следующий эвристический прием. Рассмотрим систему неравенств

$$(11) \quad (A - K_i C_i) \sum p_{ij} H_j (A - K_i C_i)^T - H_i < 0, \quad i = 1 \dots N.$$

Эта система не является следствием применения какой-либо функции Ляпунова и сконструирована искусственно. Экспериментально было установлено, что решение системы (11) также является решением системы (10).

Система (11) при умножении ее слева и справа на  $X_i = H_i^{-1}$  и применении теоремы о дополнении Шура может быть приведена к следующему LMI:

$$(12) \quad \begin{bmatrix} X_i & (X_i A - Y_i C_i) \sqrt{p_{i1}} & (X_i A - Y_i C_i) \sqrt{p_{i2}} & \dots & (X_i A - Y_i C_i) \sqrt{p_{iN}} \\ (X_i A - Y_i C_i)^T \sqrt{p_{i1}} & X_1 & 0 & \dots & 0 \\ (X_i A - Y_i C_i)^T \sqrt{p_{i2}} & 0 & X_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (X_i A - Y_i C_i)^T \sqrt{p_{iN}} & 0 & 0 & \dots & X_N \end{bmatrix} > 0,$$

где  $Y_i = X_i K_i$ . Если эти неравенства разрешимы и найденные значения  $K_i$  удовлетворяют неравенствам (10), в чем можно убедиться непосредственно, то они являются матрицами усиления наблюдателя.

### 3.2. НАБЛЮДАТЕЛЬ ПОСТОЯННОЙ СТРУКТУРЫ

Попытаемся построить оценку состояния с помощью одной из модификаций робастного фильтра Калмана [7, 8]. Отличительной его особенностью является то, что он не требует знания матриц ковариаций шумов. И хотя робастный фильтр Калмана даёт субоптимальную оценку состояния системы, он будет гарантировать ограниченность ошибки оценивания в широком спектре параметров неопределённостей системы.

Приведем основные уравнения робастного фильтра Калмана, вывод которых содержится в [8].

Рассмотрим следующий класс дискретных систем с неопределённостями:

$$(13) \quad x_{k+1} = (A + \Delta A_k)x_k,$$

$$(14) \quad y_k = (C + \Delta C_k)x_k,$$

где  $x_k$  –  $n$ -мерный вектор состояния;  $y_k$  –  $l$ -мерный вектор измерений;  $A$  и  $C$  – известные матрицы соответствующей размерности.

Матрицы  $\Delta A_k$  и  $\Delta C_k$  – неизвестные матрицы, которые описывают неопределённости системы. Считается, что  $\Delta A_k$  и  $\Delta C_k$  имеют следующую структуру:

$$\begin{bmatrix} \Delta A_k \\ \Delta C_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} F_k E,$$

где  $F_k$  – неизвестная матрица, удовлетворяющая соотношению

$$(15) \quad F_k^T F_k \leq I,$$

и  $H_1, H_2, E$  – известные матрицы подходящей размерности, показывающие, как элементы матриц  $A$  и  $C$  затрагиваются неопределённостями  $F_k$ .

Пример 1. В качестве иллюстрации приведем следующую линейную дискретную систему:

$$(16) \quad x_{k+1} = (1 + \delta)x_k,$$

$$(17) \quad y_k = x_k,$$

где  $\delta$  – неизвестный параметр, удовлетворяющий  $|\delta| \leq 0,1$ , тогда матрицы робастного фильтра Калмана могут иметь следующий вид:  $H_1 = 1$ ,  $H_2 = 0$ ,  $E = 0,1$ , и  $F_k$  принимает значения в диапазоне  $-1 \leq F_k \leq 1$ .

Отметим ещё раз достоинство подхода: здесь не требуется знания характеристик случайной последовательности  $F_k$ , достаточно задать максимальное отклонение неопределённых параметров.●

Доказано, что робастный фильтр, гарантирующий ограниченность верхней границы ошибки оценивания, определяется следующими соотношениями:

$$(18) \quad \hat{x}_{k+1} = (A + \Delta A_{ek})\hat{x}_k + K_f[y_k - (C + \Delta C_{ek})\hat{x}_k],$$

где

$$(19) \quad \Delta A_{ek} = \varepsilon_k A S_k E^T (I - \varepsilon E S_k E^T)^{-1} E,$$

$$(20) \quad \Delta C_{ek} = \varepsilon_k C S_k E^T (I - \varepsilon E S_k E^T)^{-1} E,$$

$$(21) \quad K_f = (A Q_k C^T + \frac{1}{\varepsilon_k} H_1 H_2^T) (\frac{1}{\varepsilon_k} H_2 H_2^T + C Q_k C^T)^{-1},$$

и  $S_k = S_k^T > 0$  является решением уравнения Рикатти (22) и удовлетворяет  $Q_k^{-1} = S_k^{-1} - \varepsilon_k E^T E > 0$ .

Указанное уравнение Рикатти имеет следующий вид:

$$(22) \quad S_{k+1} = A Q_k A^T - (A Q_k C^T + \frac{1}{\varepsilon_k} H_1 H_2^T) \cdot \\ \cdot (\frac{1}{\varepsilon_k} H_2 H_2^T + C Q_k C^T)^{-1} (A Q_k C^T + \frac{1}{\varepsilon_k} H_1 H_2^T)^T + \\ + \frac{1}{\varepsilon_k} H_1 H_1^T$$

В уравнениях (18)–(22) параметр  $\varepsilon_k$  должен быть положительным.

Здесь необходимо отметить то обстоятельство, что хотя робастный фильтр Калмана и свободен от необходимости задания матриц ковариации шумов состояния и измерений, однако набор матриц  $H_1, H_2, E$  не является уникальным для каждой задачи,

и, более того, не при всех наборах этих матриц и параметра  $\varepsilon_k$  неравенство  $S_k^{-1} - \varepsilon_k E^T E > 0$  будет выполняться. Тем не менее структура робастного фильтра Калмана хорошо подходит для построения оценки вектора состояния с изменяемой структурой.

Аналогично случаю с наблюдателем переключаемой структуры найденную матрицу усиления  $K_f$  вместе с матрицей усиления обратной связи  $G$  необходимо подставить в исходную систему (5) для проверки её на устойчивость.

#### 4. Пример

В качестве примера рассмотрим линейную дискретную систему с двумя регуляторами:

$$x_{k+1} = Ax_k + B_i u_k,$$

где

$$A = \begin{bmatrix} 1,0194 & 0,0199 & 0,0008 \\ -0,0829 & 0,9696 & 0,0821 \\ 0,0154 & 0,0002 & 0,9847 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = [-0,0015 \quad -0,1458 \quad 0,0000]^T$$

$$B_2 = [-0,2565 \quad 0,0106 \quad -0,0020]^T.$$

Кроме того будем считать, что информация о системе может приходиться с двух сенсоров:

$$y_k = C_i x_k,$$

$$C_1 = [1 \quad 0 \quad 0],$$

$$C_2 = [0 \quad 0 \quad 1].$$

В данном случае модель поведения – цепь смены состояний, в которой входы и выходы системы переключаются синхронно, т.е. матрицы измерений и управлений взаимосвязаны:  $B_1 - C_1$ ;  $B_2 - C_2$ .

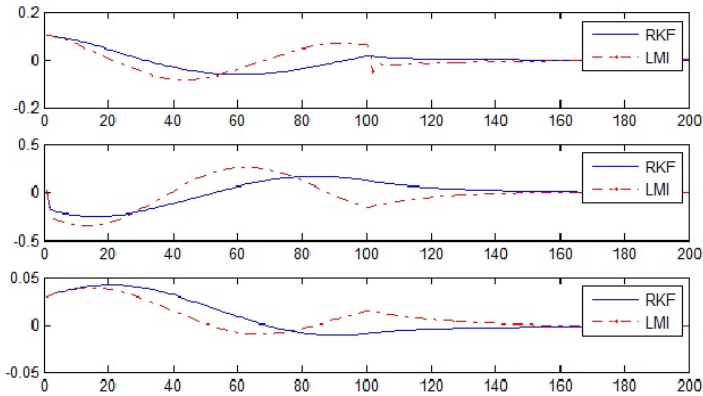


Рис. 2. Переключение по достижении 100 итераций

Рассмотрим два случая. В первом случае  $P_{11} = 0,99$ ,  $P_{12} = 0,01$ ,  $P_{21} = 0,01$ ,  $P_{22} = 0,99$ . Это соответствует тому, что вероятность перехода системы из структурного состояния 1 в 2 мала, с другой стороны, после перехода система с высокой степенью вероятности останется в структурном состоянии 2.

Во втором случае  $P_{11} = 0,5$ ,  $P_{12} = 0,5$ ,  $P_{21} = 0,5$ ,  $P_{22} = 0,5$ , что означает, что переход в другое структурное состояние и сохранение текущего состояния равновероятны.

В результате решения системы (6)–(7) получаем, что в случае редких переключений матрицы усиления обратной связи  $G_1 = G_2 = [-4,5792 \quad -4,3138 \quad -76,1954]$ . В случае равновероятных переключений  $G_1 = G_2 = [-4,2589 \quad -5,9491 \quad -83,3282]$ . Далее наблюдатель строился с использованием двух изложенных подходов.

При построении робастного фильтра Калмана матрицы  $H_1, H_2, E$ , базовую матрицу  $C$  и величину  $\varepsilon$  выберем следующим образом:  $H_1 = 0$ ,  $H_2 = [10 \quad 1]$ ,  $E = 0,005$ ,  $C = [0,5 \quad 0 \quad 0,5]$ ,  $\varepsilon = 1,00$ . При этом была найдена следующая матрица усиления  $K = [0,0162 \quad -0,0108 \quad 0,0116]$ , которая не зависит от структуры переключений состояний.

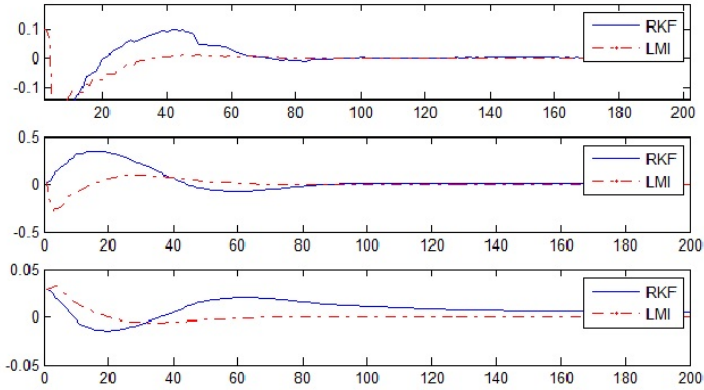


Рис. 3. Случайные переключения между входами

При построении с использованием марковской цепи были найдены следующие решения. Для редких переключений  $K_1 = [1,0199 \ -0,0548 \ 0,0303]$ ,  $K_2 = [2,8744 \ 0,5885 \ 1,0281]$ . Для частых переключений  $K_1 = [1,0200 \ -0,0546 \ 0,0016]$ ,  $K_2 = [0,0146 \ 0,1677 \ 0,9849]$ .

Будем моделировать поведение системы в течение 200 итераций. В первой системе для переключения входов выберем 100-ю итерацию, вторая система может переключиться на каждой итерации.

Анализируя полученные траектории системы (рис. 2 и 3), можно отметить, что оба предложенных алгоритма стабилизировали исходную систему. Таким образом, подтверждается работоспособность обоих методов, однако сложно сказать, какой из методов лучше справился с задачей, так как переходные процессы обладают близкими характеристиками.



### Литература

1. ЖУЧКОВ Р.Н., ПАКШИН П.В. *Стабилизирующее сетевое управление линейными дискретными системами в условиях потери пакетов данных* // Управление большими системами. Вып. 33. – М.: ИПУ РАН, 2011. – С. 113–126.
2. ПАКШИН П.В. *Дискретные системы со случайными параметрами и структурой*. – М.: Физматлит, 1994.
3. HOUNKPEVI F.O., YAZ E.E. *Robust minimum variance linear state estimators for multiple sensors with different failure rates* // Automatica. – 2007. – Vol. 43. – P. 1274–1280.
4. JIA WANG, QING-LONG HAN, FUWEN YANG *Robust Dissipative Control for Networked Control Systems with Multiple Packet Dropouts* // Proc. 18th IFAC World Congress. – 2011. – Vol. 18. – P. 78–83.
5. KALMAN R.E. *A new approach to linear filtering and prediction problems* // Journal of Basic Engineering Transactions of the ASME. – 1960. – Vol. 82, No. 1. – P. 35–45.
6. MARYAM MOAYEDI, YUNG K. FOO, YENG C. SO *LQG Control for Networked Control Systems with Random Packet Delays and Dropouts via Multiple Predictive-Input Control Packets* // Proceedings of the 18th IFAC World Congress. – 2011. – Vol. 18. – P. 72–77.
7. XIE L., SOH Y.C., DE SOUZA C.E. *Robust Kalman filtering for uncertain discretetime systems* // IEEE Transactions on Automatic Control. – 1994. – Vol. 39, No. 6. – P. 1310–1314.
8. ZHU X., SOH Y. C., XIE L. *Design and analysis of discrete-time robust Kalman filters* // Automatica. – 2007. – Vol. 38. – P. 1069–1077.

## STABILIZING NETWORKED CONTROL OF LINEAR DISCRETE-TIME SYSTEMS WITH SENSORS AND ACTUATORS BANKS

**Roman Zhuchkov**, graduate student (roman\_jkv@mail.ru).

*Abstract: We consider a stabilization problem for a networked plant with several banks of sensors and actuators. Banks of sensors and actuators are considered as a system with stochastic structure. We employ technique of linear matrix inequalities to build dynamic feedback control based on system outputs.*

Keywords: linear discrete systems, networked stabilizing control, Markov chains, Robust Kalman filter, linear matrix inequalities.

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии Б. Т. Поляком  
Поступила в редакцию 06.12.2012.  
Опубликована 31.05.2013.*

УДК 519.7  
ББК В 22.1

## ПРОЦЕДУРЫ ПОСТРОЕНИЯ ДЕКОМПОЗИЦИОННЫХ МНОЖЕСТВ ДЛЯ РАСПРЕДЕЛЕННОГО РЕШЕНИЯ SAT-ЗАДАЧ В ПРОЕКТЕ ДОБРОВОЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ SAT@HOME<sup>1</sup>

**Заикин О. С.<sup>2</sup>, Семенов А. А.<sup>3</sup>**  
(ФГБУН Институт динамики систем  
и теории управления СО РАН, Иркутск)

**Посыпкин М. А.<sup>4</sup>**  
(ФГБУН Институт проблем передачи информации РАН,  
Москва)

*В статье предложен новый подход к построению декомпозиционных множеств, используемых для крупноблочного параллелизма SAT-задач и их решения в распределенных вычислительных средах. Предложенные алгоритмы используются в проекте добровольных распределенных вычислений SAT@home.*

**Ключевые слова:** Выполнимость булевых формул, метод имитации отжига, добровольные распределенные вычисления, SAT@home.

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, гранты №№ 11-07-00377-а, 11-07-00428-а, 13-07-00291-а, 13-07-00768-а, и Совета по грантам Президента РФ для поддержки молодых ученых (стипендия СП-1855.2012.5).

<sup>2</sup> Олег Сергеевич Заикин, научный сотрудник, кандидат технических наук (zaikin.icc@gmail.com).

<sup>3</sup> Александр Анатольевич Семенов, заведующий лабораторией, кандидат технических наук, доцент (biclor Rambler@yandex.ru).

<sup>4</sup> Михаил Анатольевич Посыпкин, ведущий научный сотрудник, кандидат физико-математических наук, доцент (mposypkin@gmail.com).

## 1. Введение

Обширный класс задач современной кибернетики можно рассматривать в контексте общей проблемы поиска решений булевых уравнений. Задачи поиска решений уравнений вида  $KNF = 1$  ( $KNF$  – конъюнктивная нормальная форма) называются *SAT*-задачами [14]. Спектр применения *SAT*-подхода очень широк – на сегодня известно множество работ, в которых различные комбинаторные проблемы ставятся и решаются в форме *SAT*-задач. Сказанное касается верификации, криптографии, комбинаторики, биоинформатики и других областей. Все известные алгоритмы решения *SAT*-задач экспоненциальны в худшем случае (*SAT*-проблемы *NP*-трудны в общей постановке). Однако современные *SAT*-решатели успешно справляются с обширными классами «индустриальных» тестов, в основе которых лежат задачи из перечисленных выше областей. Повышение эффективности решения *SAT*-задач, в том числе разработка алгоритмов, работающих в параллельных и распределенных вычислительных средах, является практически важным и актуальным направлением исследований.

При разработке вычислительных алгоритмов, применяемых к решению *NP*-трудных задач, принципиальным является вопрос аргументации эффективности таких алгоритмов. Если предлагаемые алгоритмы показывают хорошие результаты на аргументированно трудных тестах, то разумно предполагать, что они будут применимы и к задачам, вычислительная трудность в которые не заложена искусственно. В настоящей работе в качестве аргументированно трудных тестов используются *SAT*-задачи, кодирующие проблемы криптоанализа ряда систем шифрования.

Далее мы представим новый подход к крупноблочному параллеливанию *SAT*-задач, применяемый в проекте добровольных распределенных вычислений *SAT@home*. Проект *SAT@home* [2, 6, 26] создан в ИДСТУ СО РАН в сотрудничестве с ИППИ РАН и представляет собой систему добровольных распределенных вычислений на платформе *BOINC* [13], предна-

значенную для решения задачи о булевой выполнимости (*SAT*). Данный проект был запущен 29.09.2011г. С 21.12.2011г. по 07.05.2012г. в *SAT@home* решались задачи криптоанализа известного генератора ключевого потока A5/1.

Приведем краткий план статьи. В следующем разделе будут в общих чертах описаны техники сведения различных комбинаторных проблем к *SAT*-задачам. Третий раздел содержит описание как известных, так и новых методов крупноблочного распараллеливания *SAT*-задач, ориентированных на использование в распределенных вычислительных средах. В четвертом разделе кратко описан проект добровольных распределенных вычислений *SAT@home*. Пятый раздел содержит результаты вычислительных экспериментов.

## **2. Сведение комбинаторных проблем к *SAT*-задачам**

Теоретически возможность эффективного (за полиномиальное время) преобразования проблемы распознавания произвольного языка из класса *NP* в проблему распознавания языка выполнимых КНФ есть следствие теоремы С. Кука [16]. Используя общие идеи С. Кука, можно сводить к проблеме поиска набора, выполняющего КНФ, разнообразные комбинаторные задачи. Смысл этих действий в том, что для решения *SAT*-задач существуют программные разработки, называемые *SAT*-решателями, которые весьма хорошо себя зарекомендовали за последние несколько лет [7]. Подавляющее большинство современных эффективных *SAT*-решателей построено на базе алгоритма *DPLL* [17, 25].

Известно множество различных примеров преобразования комбинаторных задач в *SAT*-задачи [27]. В ситуациях, когда исходная задача является задачей обращения дискретной функции (к данному типу относятся задачи криптоанализа), можно использовать системы автоматической трансляции процедурных описаний функций в виде программ в системы булевых уравнений и *SAT*-задачи (например, [4]). Общий принцип такого рода трансляторов состоит в следующем.

Пусть дана дискретная функция

$$f : \{0,1\}^* \rightarrow \{0,1\}^*,$$

определенная всюду на  $\{0, 1\}^*$  и вычислимая за полиномиальное время программой  $T_f$  для детерминированной машины Тьюринга. Данная программа естественным образом задает счетное семейство функций

$$f_k : \{0,1\}^k \rightarrow \{0,1\}^*, k \in \mathbb{N}.$$

Каждую функцию  $f_k$  из данного семейства можно реализовать схемой  $S(f_k)$  из функциональных элементов некоторого полного базиса, например,  $\{\&, \neg\}$ . Функция роста размера (т.е. числа функциональных элементов) получаемого семейства схем будет ограничена сверху полиномом от  $k$ . Рассматриваем схему  $S(f_k)$  как направленный граф, в множестве вершин которого выделены  $k$  входных. Входным вершинам сопоставляются булевы переменные  $x_1, \dots, x_k$ . Пусть  $g$  – произвольная внутренняя вершина схемы  $S(f_k)$ . Данной вершине соответствует функциональный элемент  $E(g) \in \{\&, \neg\}$ . Сопоставим вершине  $g$  новую булеву переменную  $v(g)$  и формулу  $F(g)$ , которая имеет вид либо  $v(g) \equiv u \& w$ , если  $E(g)$  – это «&», либо  $v(g) \equiv \bar{u}$ , если  $E(g)$  – это « $\neg$ ». Здесь  $u, w$  – булевы переменные, соответствующие входам элемента  $g$ , т.е. родителям вершины  $g$  в графе, представляющем схему  $S(f_k)$ . Пусть  $C(g)$  – КНФ-представление формулы  $F(g)$ . КНФ, кодирующая схему  $S(f_k)$ , имеет следующий вид:

$$\&_{g \in S(f_k)} C(g).$$

Тогда КНФ, кодирующая задачу обращения функции  $f_k$  в точке  $y \in \text{Range } f_k$ ,  $y = (\sigma_1, \dots, \sigma_m)$ ,  $\sigma_j \in \{0, 1\}$ ,  $j \in \{1, \dots, m\}$ , выглядит следующим образом:

$$C(f_k, y) = \left( \&_{g \in S(f_k)} C(g) \right) \cdot y_1^{\sigma_1} \cdot \dots \cdot y_m^{\sigma_m},$$

где

$$z^\sigma = \begin{cases} z, & \sigma = 1, \\ \bar{z}, & \sigma = 0; \end{cases}$$

$y_j, j \in \{1, \dots, m\}$  – булевы переменные, соответствующие выходам схемы  $S(f_k)$ . Используя идеи работы [11], несложно показать, что решив булево уравнение  $C(f_k, y) = 1$ , мы можем найти такое слово  $x \in \{0, 1\}^k$ , что  $f_k(x) = y$ .

Подобный подход используется в системе *Transalg* [4], которая предназначена для трансляции в булевы уравнения программ, написанных на специальном *C*-подобном языке. Все рассматриваемые в настоящей работе *SAT*-задачи, кодирующие задачи обращения дискретных функций, построены при помощи этой системы.

### **3. Алгоритмы крупноблочного распараллеливания *SAT*-задач**

Как уже говорилось, *SAT*-подход можно применять к решению комбинаторных задач из весьма широкого класса. В связи с этим актуальна проблема построения для решения *SAT*-задач алгоритмов, работающих в параллельных и распределенных вычислительных средах. За последние 5 лет появился ряд *SAT*-решателей, использующих обмен накапливаемыми конфликтными ограничениями между параллельно работающими вычислительными узлами. Большинство таких решателей являются многопоточными приложениями [19, 20, 28] и обычно задействуют небольшое число ядер. Известные *MPI*-решатели применимы лишь к некоторым ограниченным классам задач [23]. В силу высокой вычислительной трудности некоторых *SAT*-задач особую актуальность приобретает проблема разработки распределенных алгоритмов, работающих в распределенных средах со слабым взаимодействием между узлами. Исследования по данной тематике стали появляться совсем недавно. Отметим статью [29], в которой описан распределенный *SAT*-решатель, работающий в *peer-to-peer*-сетях, а также работы [21, 22], содержащие опыт решения *SAT*-задач в грид-средах.

Специализированная грид-среда, в которой решалась *SAT*-задача, кодирующая криптоанализ широко известного генератора поточного шифрования *A5/1*, была описана в [5, 30]. В данных

работах использовалась техника распараллеливания *SAT*-задач, предложенная в статье [3]. Далее мы в общих чертах описываем подход работы [3] и развиваем его в направлении построения автоматических процедур поиска декомпозиционных множеств с «хорошими» свойствами.

Итак, пусть нам дана произвольная *SAT*-задача в виде уравнения  $C = 1$ , где  $C$  – конъюнктивная нормальная форма над множеством булевых переменных  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ . Произвольное множество  $\tilde{X} = \{x_{i_1}, \dots, x_{i_d}\}$ ,  $\tilde{X} \subseteq X$ , назовем декомпозиционным множеством. Пусть  $Y \in \{0, 1\}^d$  – произвольный набор значений истинности переменных из  $\tilde{X}$ . Через  $C|_Y$  обозначается КНФ, полученная в результате подстановки в  $C$  набора  $Y$ . Множество  $\Delta(C, \tilde{X}) = \{C|_Y\}_{Y \in \{0,1\}^d}$  называется декомпозиционным семейством для исходной *SAT*-задачи. Очевидно, что решив все *SAT*-задачи из  $\Delta(C, \tilde{X})$ , мы получим решение исходной *SAT*-задачи. Обработку множества  $\Delta(C, \tilde{X})$  можно осуществлять в распределенной вычислительной среде. Однако при различных альтернативах  $\Delta(C, \tilde{X})$  мы будем получать различное время его обработки. Очевидно, что в данной ситуации необходим компромисс между числом *SAT*-задач в  $\Delta(C, \tilde{X})$  и их сложностью. Для построения таких компромиссных декомпозиционных множеств в [3] был предложен метод прогнозных функций. Значением прогнозной функции на конкретном  $\tilde{X}$  является прогноз общей трудоемкости обработки множества  $\Delta(C, \tilde{X})$ . Вычисляется это значение следующим образом: случайно из  $\{0, 1\}^d$  выбираются векторы  $Y_1, \dots, Y_Q$ , где  $Q$  – число, такое что  $Q \ll 2^d$ . Строится семейство КНФ  $\{C|_{Y_1}, \dots, C|_{Y_Q}\}$ , которое обрабатывается *SAT*-решателем  $S$  (на рабочей станции или вычислительном кластере). Пусть  $t$  – время обработки данной случайной выборки. Тогда  $F(C, \tilde{X}) = 2^d \cdot \frac{t}{Q}$  – значение прогнозной функции на  $\tilde{X}$ .



Несложно понять, что всегда можно эффективно вычислить некоторое стартовое значение прогнозной функции. Действительно, это справедливо, например, если  $\tilde{X} = X$ . Если мы решаем *SAT*-задачу, кодирующую обращение некоторой дискретной функции, и в роли  $S$  используем решатель на базе алгоритма *DPLL*, то в качестве стартового декомпозиционного множества можно выбрать ядро *DPLL*-вывода [8]. Значение прогнозной функции на этом множестве также подсчитывается эффективно.

В работах [3, 5, 30] была использована весьма простая стратегия улучшения значений прогнозной функции. А именно, в качестве стартового декомпозиционного множества  $\tilde{X}_1$  выбиралось ядро *DPLL*-вывода (поскольку рассматривались только задачи обращения дискретных функций). Далее делались попытки улучшить значение прогнозной функции на множествах следующего вида:

$$\tilde{X}_1 \supset \tilde{X}_2 \supset \dots \supset \tilde{X}_r \supset \tilde{X}_* \supset \dots \supset \tilde{X}_s,$$

причем для всех  $k \in \{1, \dots, s-1\}$  выполнялось  $|\tilde{X}_{k+1}| = |\tilde{X}_k| - 1$ . Здесь  $\tilde{X}_*$  – множество с наилучшим значением прогнозной функции среди множеств  $\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_s$ . Оно и выбиралось на роль декомпозиционного множества для решения рассматриваемой *SAT*-задачи в распределенной вычислительной среде.

Описанная стратегия, несмотря на свою простоту, дала неплохие результаты в криптоанализе некоторых генераторов ключевого потока. Однако она оказалась бесполезной при решении задачи криптоанализа генератора A5/1. Декомпозиционное множество для *SAT*-задачи, кодирующей криптоанализ данного генератора, фактически было найдено «вручную» [30]. Это множество изображено на рис. 1 – булевы переменные, включаемые в множество, кодируют значения ячеек, выделенных серой заливкой (описание генератора A5/1 взято из статьи [15]).

Далее мы рассматриваем общую задачу поиска декомпозиционного множества с наилучшим значением прогнозной функции как задачу глобальной оптимизации на конечном множестве и предлагаем для ее решения новую стратегию.

Итак, рассматриваем *SAT*-задачу  $C = 1$ , где  $C$  – КНФ над множеством булевых переменных  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ . Произвольное множество  $\tilde{X} \subset X$  будем задавать характеристическим вектором  $\alpha^{\tilde{X}} = (\alpha_1^{\tilde{X}}, \dots, \alpha_n^{\tilde{X}})$ , таким что

$$\alpha_i^{\tilde{X}} = \begin{cases} 1, & \text{если } x_i \in \tilde{X}, \\ 0, & \text{если } x_i \notin \tilde{X}. \end{cases}$$

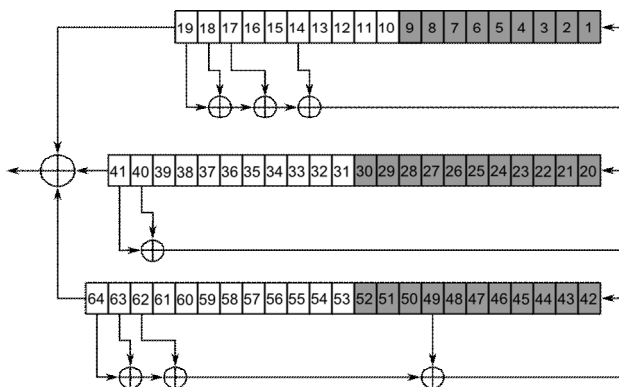


Рис. 1. Декомпозиционное множество, структура которого обусловлена особенностями алгоритма генератора *A5/I* [30]

Значениями аргумента прогнозной функции  $\Phi(\cdot)$  являются всевозможные векторы вида  $\alpha^{\tilde{X}}$ . Полагаем, что  $\Phi(\alpha^{\tilde{X}}) = F(C, \tilde{X})$  (определение функции  $F(\tilde{X}, C)$  дано выше).

Переход к векторам  $\alpha^{\tilde{X}}$  нам нужен лишь для того, чтобы корректно определять окрестности точек в пространстве поиска (очевидно, что таким пространством является множество  $2^X$ ). После этого мы можем использовать любую схему поиска глобального минимума функции  $\Phi(\cdot)$  на  $2^X$ .

Приведем здесь ряд аргументов, обосновывающих использование схемы, описание которой приведено ниже. Во-первых, отметим, что функция  $\Phi(\cdot)$  не задана аналитически – ее значения есть величины, наблюдаемые во времени, фактически это

реакция вычислительной среды на выбранную форму распараллеливания (вид декомпозиционного множества). В связи с этим невозможно использовать для оптимизации  $\Phi(\cdot)$  «традиционные» методы, так или иначе привлекающие «аналитические» свойства рассматриваемой функции (гладкость, выпуклость, *d.c.* [10], и др.). В данной ситуации нам представляется оправданным применить для решения описанной проблемы метаэвристические алгоритмы. В частности, на данном этапе реализована вычислительная схема имитации отжига [24]. Вторая особенность рассматриваемой задачи состоит в том, что далеко не все значения  $\Phi(\cdot)$  необходимо досчитывать. Действительно, если  $\Phi'$  – некоторое рекордное значение данной функции на данный момент времени, и для точки  $\alpha^{\tilde{X}}$  можно сделать вывод, что  $\Phi(\alpha^{\tilde{X}}) > \Phi'$ , то очевидно, что дальнейшее вычисление значения  $\Phi(\alpha^{\tilde{X}})$  можно прервать и перейти к следующей точке либо принять точку  $\alpha^{\tilde{X}}$  за центр новой окрестности с некоторой вероятностью.

В соответствии со схемой имитации отжига [24], минимизация функции  $\Phi(\cdot)$  рассматривается как итеративный процесс переходов между точками пространства поиска:

$$\alpha^0 \rightarrow \alpha^1 \rightarrow \dots \rightarrow \alpha^i \rightarrow \dots \rightarrow \alpha^* .$$

Переход от  $\alpha^j$  к  $\alpha^{j+1}$  осуществляется в два этапа. Сначала к  $\alpha^j$  применяется вероятностное преобразование, результатом которого является точка  $\tilde{\alpha}^j$  из некоторой окрестности  $\alpha^j$ . Точка  $\tilde{\alpha}^j$  становится точкой  $\alpha^{j+1}$  с вероятностью, обозначаемой  $\text{Pr}\{\tilde{\alpha}^j \rightarrow \alpha^{j+1} | \alpha^j\}$ . Данная вероятность задается следующим образом:

$$\text{Pr}\{\tilde{\alpha}^j \rightarrow \alpha^{j+1} | \alpha^j\} = \begin{cases} 1, & \text{если } \Phi(\tilde{\alpha}^j) < \Phi(\alpha^j), \\ \exp\left(-\frac{\Phi(\tilde{\alpha}^j) - \Phi(\alpha^j)}{T_j}\right), & \text{если } \Phi(\tilde{\alpha}^j) \geq \Phi(\alpha^j). \end{cases}$$

Изменение параметра  $T_j$  соответствует уменьшению «температуры кристаллизирующейся среды». Обычно полагают, что  $T_i = Q \cdot T_{i-1}$ ,  $i \geq 1$ , где  $Q \in (0, 1)$ . Процесс стартует при некотором

начальном значении  $T_0$  и продолжается до тех пор, пока «температура» не станет меньше заданного порогового значения  $T_{inf}$ .

Описанная схема минимизации прогнозных функций была реализована в виде параллельного *MPI*-приложения, работающего на вычислительном кластере. Во время вычислений приложение отслеживает ситуации превышения рекордных значений прогнозной функции с последующим прерыванием соответствующего вычисления либо переходом к новой точке. В целом данный процесс работает в соответствии со схемой, описанной в [1] (используются неблокирующие обмены в *MPI*-среде). Результаты вычислительных экспериментов приведены в разделе 5.

#### **4. Проект добровольных распределенных вычислений SAT@home**

##### *4.1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О ДОБРОВОЛЬНЫХ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ВЫЧИСЛЕНИЯХ*

Здесь мы кратко коснемся общей идеологии добровольных вычислений. Первыми добровольными проектами были *GIMPS* и *distributed.net*, запущенные соответственно в 1996 и 1997 годах. Проект *GIMPS* был направлен на поиск чисел Мерсенна, а *distributed.net* - на решение различных вариантов задачи криптоанализа шифра *RC5*. В 1996 году на одной из конференций по радиоастрономии была представлена концепция проекта *SETI@home*, предназначенного для обработки интенсивных потоков данных, поступающих от мощных радиотелескопов. Данный проект был запущен в 1999 году, а в 2002 году на его основе была разработана открытая платформа *BOINC* [13]. И если изначально для создания добровольных проектов требовались ресурсы больших научных коллективов, то с использованием *BOINC* построение каждого нового проекта стало вполне по силам небольшим лабораториям и даже отдельным энтузиастам. Из 70 активных на данный момент проектов добровольных вычислений 65 построены на платформе *BOINC*.

Проект на платформе *BOINC* состоит из следующих основных частей: серверного ПО, веб-сайта и прикладного ПО. В состав серверного ПО входят следующие службы:

- *work\_generator* – создает задания для обработки;
- *validator* – проверяет корректность присланных с ПК пользователей результатов, а также начисляет кредиты за корректные результаты;
- *assimilator* – обрабатывает корректные результаты.

Сайт проекта содержит следующую информацию: цели проводимых исследований, полученные результаты, список публикаций авторов проекта, производительность проекта, рейтинг лучших (в смысле количества набранных в проекте кредитов) участников и т.п. Также участнику доступен форум, на котором идет общение с разработчиками проекта.

Прикладное ПО представлено набором исполняемых файлов для различных типов операционных систем (ОС) и процессоров. Для получения значительных вычислительных ресурсов в проекте следует поддерживать версии для основных семейств ОС (*Windows, Linux, Mac*) и процессоров (x86, x64).

#### 4.2. ПРОЕКТ ДОБРОВОЛЬНЫХ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ *SAT@HOME*

Данный проект был запущен 29 сентября 2011 года. *SAT@home* [6] – совместный проект Института динамики систем и теории управления СО РАН и Института проблем передачи информации РАН. При создании проекта была использована открытая платформа *BOINC*.

Перед использованием проекта *SAT@home* выполняется подготовительный этап. На этом этапе решатель *PD-SAT* [1], запущенный на вычислительном кластере, находит для исходной *SAT*-задачи некоторое декомпозиционное множество в соответствии с описанными выше алгоритмами минимизации прогнозных функций. Найденное декомпозиционное множество передается серверному ПО проекта вместе с исходной КНФ в качестве входных данных.

Схема работы проекта представлена на рис. 2. Серверное ПО отвечает за создание заданий в базе данных проекта, а также за обработку результатов выполнения заданий, присылаемых с ПК пользователей. Отправкой заданий на ПК пользователей и получением результатов занимаются стандартные службы *BOINC*.

Клиентское приложение в виде исполняемых файлов для конкретной операционной системы запускает на ПК пользователей стандартный *BOINC*-клиент. Основу приложения, запускаемого на ПК пользователей, составляют *SAT*-решатели *minisat-1.14.1* и *minisat-2.0* [18], модифицированные с учетом особенностей решаемых в проекте *SAT*-задач. В результате решения в общем случае всех подзадач находится решение исходной *SAT*-задачи.

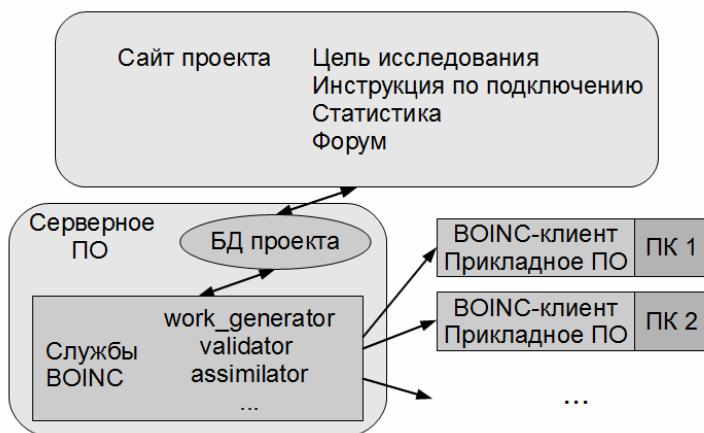


Рис. 2. Схема проекта *SAT@home*

По состоянию на 19 апреля 2013 г. *SAT@home* имеет следующие характеристики:

- 2936 активных ПК, около 80 % под управлением ОС семейства *Windows*;
- версии клиентского приложения: *windows x86*, *linux x86*, *linux x64*;

– средняя реальная производительность 2,2 терафлопс, максимальная 6,3 терафлопс.

## **5. Вычислительные эксперименты**

В данном разделе мы приводим результаты тестирования описанных выше процедур минимизации прогнозных функций, а также результаты решения реальных задач в проекте *SAT@home*. На рис. 1 приведено декомпозиционное множество, использованное для решения задачи криптоанализа известного генератора поточного шифрования A5/1. Наиболее успешным методом криптоанализа данного генератора является так называемый «rainbow»-метод. Однако известные rainbow-таблицы [12] покрывают ключевое пространство A5/1 примерно на 88% и не дают результатов (при реалистичных предположениях на условия криптоанализа) для тестов, в которых используются оставшиеся 12% ключей. Для решения в рамках проекта *SAT@home* были построены 10 таких тестов [6] (раздел «найденные решения»). Все они были решены за полгода работы проекта (с 21.12.2011г. по 07.05.2012 г.).

Как уже отмечалось выше, декомпозиционное множество для SAT-задачи, кодирующей криптоанализ A5/1, фактически вычислялось «вручную». Использованные при этом соображения основаны на известных особенностях алгоритма A5/1. В частности, относительно некоторых переменных в кодирующей КНФ можно сделать вывод об их более сильном приоритете перед остальными при включении в декомпозиционное множество. Это обусловлено так называемой «функциональной семантикой» проблемы – в задачах обращения функций стартовым декомпозиционным множеством может быть множество всех переменных, кодирующих входные значения схемы, реализующей рассматриваемую функцию. Однако далеко не для всех комбинаторных задач можно делать подобные выводы. В этих ситуациях, конечно же, при построении декомпозиционных множеств необходимо использовать автоматические процедуры.

Описанный выше метод минимизации прогнозных функций является такой процедурой.

При тестировании метода на адекватность необходимо сравнение выдаваемых им результатов с некоторыми эталонами. В качестве такого эталона мы рассмотрели декомпозиционное множество для SAT-задачи, кодирующей криптоанализ A5/1 (рис. 1). На рис. 4 приведена структура декомпозиционного множества, найденного при помощи представленной выше процедуры минимизации прогнозных функций. При этом были использованы следующие параметры схемы имитации отжига: величина начальной «температуры»  $T_0$  выбиралась равной 5% от значения прогнозной функции в начальной точке (выбранное случайным образом множество мощности 40 среди 64 булевых переменных, кодирующих вход генератора A5/1); конечная «температура»  $T_{inf} = 30000$ .

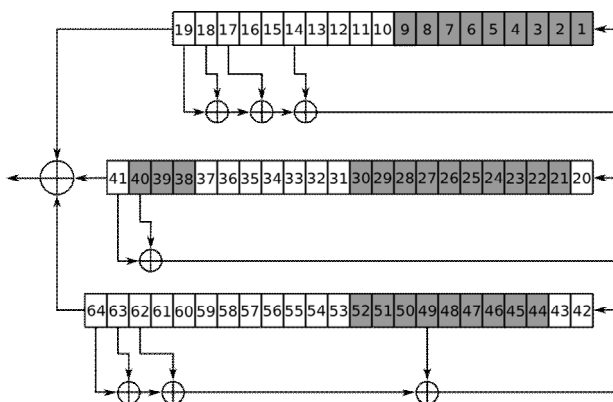


Рис. 3. Декомпозиционное множество, построенное автоматически (без привязки к особенностям исходной задачи) при помощи метода, описанного в настоящей работе

Из рис. 1 и 3 можно сделать вывод, что предложенная схема строит декомпозиционное множество, структура которого очень близка к структуре эталонного множества – метод находит множество той же мощности, что и эталонное, в котором лишь три переменные находятся «не на своем месте». Данный эффект



наблюдался и в применении к другим криптографическим задачам (криптоанализ суммирующего и порогового генераторов). Это позволяет надеяться, что описанный подход позволит находить адекватные декомпозиционные множества в SAT-задачах, кодирующих не только задачи обращения функций, но и различные комбинаторные проблемы с невыраженной функциональной семантикой.

## **6. Заключение**

В работе предложен новый подход к построению декомпозиционных множеств для крупноблочного распараллеливания SAT-задач. Показано, что декомпозиционное множество, построенное предложенным алгоритмом для SAT-задачи, кодирующей криптоанализ генератора A5/1, совсем незначительно отличается от известного эталонного множества. Разработанные алгоритмы предполагается использовать для решения различных комбинаторных задач в проекте распределенных вычислений SAT@home. В частности, предполагается использовать данный проект для поиска новых ортогональных систем латинских квадратов порядков 9 и 10.

## **Литература**

1. ЗАЙКИН О.С. *Реализация процедур прогнозирования трудоемкости параллельного решения SAT-задач* // Вестник УГАТУ. – 2010. – Т.14, №4. – С. 210–220.
2. ЗАЙКИН О.С., ПОСЫПКИН М.А., СЕМЕНОВ А.А., ХРАПОВ Н.П. *Организация добровольных вычислений на платформе BOINC на примере проектов OPTIMA@home и SAT@home* // CAD/CAM/CAE Observer. – 2012. – №3(71). – С. 87–92.
3. ЗАЙКИН О.С., СЕМЕНОВ А.А. *Технология крупноблочного параллелизма в SAT-задачах* // Проблемы управления. – 2008. – №1. – С. 43–50.

4. ОТПУЩЕННИКОВ И.В., СЕМЕНОВ А.А. *Технология трансляции комбинаторных проблем в булевы уравнения* // Прикладная дискретная математика. – 2011. – № 1. – С. 96–115.
5. ПОСЫПКИН М.А., ЗАЙКИН О.С., БЕСПАЛОВ Д.В., СЕМЕНОВ А.А. *Решение задач криптоанализа поточных шифров в распределенных вычислительных средах* // Труды ИСА РАН. – 2009. – №46. – С. 119–137.
6. *Проект добровольных распределенных вычислений SAT@home*. - URL: <http://sat.isa.ru/pdsat/> (дата обращения 19.04.2013).
7. *Сайт, посвященный задаче о булевой выполнимости*. – URL: <http://www.satlive.org> (дата обращения 19.04.2013).
8. СЕМЕНОВ А.А. *Декомпозиционные представления логических уравнений в задачах обращения дискретных функций* // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2009. – №5. – С. 47–61.
9. *Список активных проектов на платформе BOINC*. - URL: <http://boinc.berkeley.edu/projects.php> (дата обращения 19.04.2013).
10. СТРЕКАЛОВСКИЙ А.С. *Элементы невыпуклой оптимизации*. – Новосибирск, «Наука», 2003. – 355 с.
11. ЦЕЙТИН Г.С. *О сложности вывода в исчислении высказываний* // Записки научных семинаров ЛОМИ АН СССР. – 1968. – Т. 8. – С. 234–259.
12. *A5/I Cracking project*. - URL: <http://reflector.com/trac/a51/> (дата обращения 19.04.2013).
13. ANDERSON D.P. *BOINC: A System for Public-Resource Computing and Storage* // Proc. Fifth IEEE/ACM International Workshop on Grid Computing (GRID'04). – P. 4–10.
14. BIÈRE A., HEULE V., VAN MAAREN H., WALSH T. *Handbook of Satisfiability*. - IOS Press, 2009. – 980 p.
15. BIRYUKOV A., SHAMIR A., WAGNER D. *Real time cryptanalysis of A5/I on a PC* // Lecture Notes in Computer Science. – 2001. – Vol. 1978. – P. 1–18.

16. COOK S.A. *The complexity of theorem-proving procedures* // Third Annual ACM Symposium on Theory of Computing, Ohio, USA. – 1971. – P. 151–159.
17. DAVIS M., LOGEMANN G., LOVELAND D. *A machine program for theorem proving* // Communication of the ACM. – 1962. – Vol. 5, Issue 7. – P. 394–397.
18. EEN N., SORENSSON N. *An Extensible SAT-solver*. Lecture Notes in Computer Science. – 2003. – Vol. 2919. – P. 502–518.
19. GIL L., FLORES P., SILVEIRA L.M. *PMSat: a parallel version of MiniSAT* // Journal on Satisfiability, Boolean Modeling and Computation. – 2009. – Vol. 6. – P. 71–98.
20. HAMADI Y., JABBOUR S., SAIS L. *ManySAT: a Parallel SAT Solver* // Journal on Satisfiability, Boolean Modeling and Computation. – 2009. – Vol. 6. – P. 245–262.
21. HEULE M., KULLMANN O., WIERINGA S., BIERE A. *Cube and Conquer: Guiding CDCL SAT Solvers by Lookaheads* // Proc. Seventh International Haifa Verification Conference (HVC-11). – 2011. – P. 50–65.
22. HYVARINEN A., NIEMELA I., JUNTILA T. *Grid-Based SAT Solving with Iterative Partitioning and Clause Learning* // Lecture Notes in Computer Science. – 2011. – Vol. 6876. – P. 385–399.
23. IGNATIEV A., SEMENOV A. *DPLL+ROBDD Derivation Applied to Inversion of Some Cryptographic Functions* // Lecture Notes in Computer Science. – 2011. – Vol. 6695. – P. 76–89.
24. KIRKPATRICK S., GELATT C.D., VECCHI M.P. *Optimization by simulated annealing* // Science. – 1983. – Vol. 220. – P. 671–680.
25. MARQUES-SILVA J.P., SAKALLAH K.A. *GRASP: A search algorithm for propositional satisfiability* // IEEE Transactions on Computers. – 1999. – Vol. 48, №5. – P. 506–521.
26. POSYPKIN M., SEMENOV A., ZAIKIN O. *Using BOINC desktop grid to solve large scale SAT problems* // Computer Science Journal. – 2012. – Vol. 13, №1. – P. 25–34.

27. PRESTWICH S. *CNF encodings* // In Handbook of Satisfiability (Editors: A. Biere, M.Heule, H. van Maaren, T. Walsh). – IOS Press, 2009. – P. 75–97.
28. SCHUBERT T., LEWIS M., BECKER B. *PaMiraXT: Parallel SAT Solving with Threads and Message Passing* // Journal on Satisfiability, Boolean Modeling and Computation. – 2009. – Vol. 6. – P. 203–222.
29. SCHULZ S., BLOCHINGER W. *Parallel SAT Solving on Peer-to-Peer Desktop Grids* // Journal Of Grid Computing. – 2010. – Vol. 8, № 3. – P. 443–471.
30. SEMENOV A., ZAIKIN O., BESPALOV D., POSYPKIN M. *Parallel logical cryptanalysis of the generator A5/1 in BNB-Grid system* // Lecture Notes in Computer Science. – 2011. – Vol. 6873. – P. 473–483.

## CONSTRUCTING DECOMPOSITION SETS FOR DISTRIBUTED SOLUTION OF SAT PROBLEMS IN VOLUNTEER COMPUTING PROJECT SAT@HOME

**Oleg Zaikin**, Institute for System Dynamics and Control Theory of SB RAS, Irkutsk, researcher, Cand.Sc. (zaikin.icc@gmail.com).

**Alexander Semenov**, Institute for System Dynamics and Control Theory of SB RAS, Irkutsk, head of laboratory, Cand.Sc, assistant professor (biclop.rambler@yandex.ru).

**Mikhail Posypkin**, Institute for Information Transmission Problems of RAS, Moscow, leading researcher, Cand.Sc., assistant professor (mposypkin@gmail.com).

*Abstract: We suggest an approach to construct decomposition sets for coarse-grained parallelization of SAT problems. Decomposition sets are used for distributed solving of hard SAT problems. The proposed algorithms are used in the volunteer computing project SAT@home.*

Keywords: Boolean satisfiability problem, simulated annealing, volunteer computing, SAT@home.

*Статья рекомендована к публикации программным комитетом международной конференции «Параллельные вычисления и задачи управления» (РАСО), Россия, Москва, 24-26 октября 2012 г. Поступила в редакцию 22.04.2013. Опубликовано 31.05.2013.*

УДК 004.032.26(06)  
ББК 32.818я7

## ОБ ЭФФЕКТИВНОСТИ ПОСТРОЕНИЯ ГАМИЛЬТОНОВЫХ ЦИКЛОВ В ГРАФАХ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ РЕКУРРЕНТНЫМИ НЕЙРОННЫМИ СЕТЯМИ

Тарков М. С.<sup>1</sup>

*(Институт физики полупроводников  
им. А.В. Ржанова СО РАН, Новосибирск)*

*Рассмотрено построение рекуррентной нейронной сетью гамильтоновых циклов в графе распределенной вычислительной системы с  $n$  вершинами. Предложен метод частичных сумм, позволяющий сократить время решения системы дифференциальных уравнений, описывающих нейронную сеть, с  $O(n^3)$  до  $O(n^2)$ . Показано, что нейросетевой алгоритм, использующий метод частичных сумм, не уступает по времени построения цикла известным перестановочным методам.*

Ключевые слова: Распределенные вычислительные системы, рекуррентные нейронные сети, графы, гамильтонов цикл

### **1. Введение**

Распределенная вычислительная система (ВС) [1, 3–5, 7–12, 15–17, 20–22] представляет собой множество элементарных машин (ЭМ), связанных сетью, программно управляемой из этих машин. Каждая ЭМ включает вычислительный модуль (ВМ) и системное устройство (маршрутизатор сообщений). Маршрутизатор функционирует под управлением ВМ и имеет входные и выходные полюса, связанные соответственно с вы-

---

<sup>1</sup> Михаил Сергеевич Тарков, кандидат технических наук, доцент (tarkov@isp.nsc.ru).

ходными и входными полюсами соседних ЭМ. Структура ВС описывается графом  $G_s(V_s, E_s)$ , где  $V_s$  – множество ЭМ и  $E_s \subseteq V_s \times V_s$  – множество связей между ЭМ.

Для распределенных ВС граф  $G_p(V_p, E_p)$  параллельной программы обычно определяется как множество  $V_p$  ветвей программы (виртуальных элементарных машин), которые взаимодействуют друг с другом по принципу «точка–точка» посредством передачи сообщений по логическим (виртуальным) каналам (одно- и двунаправленным) множества  $E_p \subseteq V_p \times V_p$ . Для большинства параллельных прикладных программ характерны упорядоченные во времени и регулярные в пространстве схемы взаимодействий между обрабатываемыми модулями («линейка», «кольцо», «решетка» и др.). В силу этого для максимальной эффективности информационных взаимодействий современные высокопроизводительные ВС используют регулярные графы  $G_s(V_s, E_s)$  межмашинных соединений (гиперкуб и многомерные торы) [1, 3–5, 7–12, 15–17, 20–22]. Гиперкубическая структура описывается графом, известным как  $m$ -мерный булевский куб с числом вершин  $n = 2^m$ . Тороидальные структуры представляют собой  $m$ -мерные евклидовы решетки с замкнутыми границами. Группа автоморфизмов  $E_m$  такой структуры есть прямое произведение циклических подгрупп  $C_{N_k} : E_m = \bigotimes_{k=1}^m C_{N_k}$ , где  $N_k$  – порядок подгруппы  $C_{N_k}$ ;  $\otimes$  – символ прямого произведения. При  $m = 2$  получаем двумерный тор ( $2D$ -тор) (рис. 1), при  $m = 3$  получаем  $3D$ -тор.

В силу того что элементарные машины и межмашинные соединения не являются абсолютно надежными, регулярность структуры ВС может нарушаться в результате выхода из строя ее элементов. Поэтому возникает необходимость разработки алгоритмов вложения графов программ в произвольные графы ВС.

Кольцевая структура параллельной программы является одной из наиболее фундаментальных структур для параллельных и распределенных вычислений. Такие параллельные приложения, как обработка сигналов и изображений обычно ориен-

тированы на циклическую архитектуру (кольцо) [16]. Предложено много простых и эффективных кольцевых алгоритмов для решения различных алгебраических и графо-теоретических задач [9, 21]. Поэтому важно иметь эффективные вложения циклов в структуру распределенной вычислительной системы.

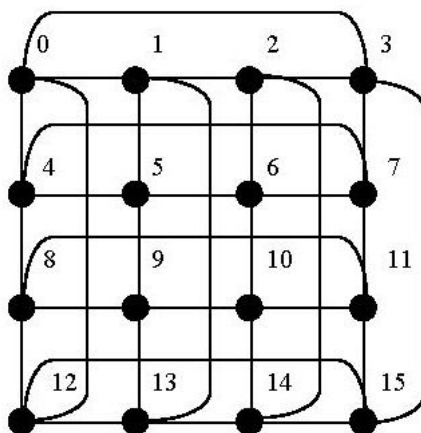


Рис. 1. Пример 2D-тора

В данной работе рассматриваются нейросетевые алгоритмы вложения кольцевых структур параллельных программ в структуры распределенных ВС при условии  $|V_p| = |V_s|$ . Такое вложение сводится к построению гамильтонова цикла в графе ВС и основывается на решении задачи коммивояжера (раздел 2), использующем матрицу расстояний между вершинами графа ВС, причем за единицу принято расстояние между соседними вершинами графа ВС. В разделе 3 предложен метод частичных сумм, позволяющий сократить время решения системы дифференциальных уравнений, описывающих нейронную сеть, с  $O(n^3)$  до  $O(n^2)$ . В разделе 4 проведено сравнение полученных результатов с результатами построения цикла известными перестановочными методами [3–5, 8, 10–12, 15, 22] и показано, что нейросе-



тевой алгоритм, использующий метод частичных сумм, не уступает им по времени выполнения.

## 2. О решении задачи коммивояжера рекуррентными нейронными сетями

Решению задач комбинаторной оптимизации нейронными сетями посвящено много работ [2, 13, 14, 18, 19]. Наиболее популярными в этом плане являются сети Хопфилда [2, 13, 18], но их применение ограничивается высокой вычислительной сложностью ( $n^4$ , где  $n$  – характерный размер задачи). Ситуацию можно упростить, если применить следующий подход.

Задача коммивояжера может быть сформулирована как задача о назначении [14, 19]:

$$(1) \min \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} C_{ij} x_{ij}$$

при ограничениях

$$x_{ij} \in \{0, 1\},$$

$$(2) \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

и условия, что матрица  $\|x_{ij}\|$  образует гамильтонов цикл. Здесь  $C_{ij}$  ( $i \neq j$ ) – стоимость назначения элемента  $i$  в позицию  $j$ , что соответствует перемещению коммивояжера из города  $i$  в город  $j$ ;  $x_{ij}$  – переменная решения: (если элемент  $i$  назначается в позицию  $j$ , то  $x_{ij} = 1$ , иначе  $x_{ij} = 0$ ).

Для решения этой задачи Ваном (J. Wang) [14] предложена рекуррентная нейронная сеть, которая описывается дифференциальным уравнением

$$(3) \frac{\partial u_{ij}(t)}{\partial t} = -\eta \left( \sum_{k=1}^n x_{ik}(t) + \sum_{l=1}^n x_{lj}(t) - 2 \right) - \lambda C_{ij} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right),$$

где  $x_{ij} = f(u_{ij}(t)); f(u) = 1/[1 + \exp(-\beta u)]$ .

Разностный вариант этого уравнения имеет вид

$$(4) \quad u_{ij}^{t+1} = u_{ij}^t - \Delta t \left[ \eta \left( \sum_{k=1}^n x_{ik}(t) + \sum_{l=1}^n x_{lj}(t) - 2 \right) - \lambda C_{ij} \exp \left( -\frac{t}{\tau} \right) \right],$$

где  $\Delta t$  – шаг по времени. Параметры  $\Delta t$ ,  $\eta$ ,  $\lambda$ ,  $\tau$ ,  $\beta$ , подбираемые экспериментально, существенно влияют на скорость достижения решения задачи и качество этого решения. Вычислительная сложность выполнения итерации (4) равна  $O(n^3)$ , если для всех  $n^2$  элементов матрицы  $u_{ij}$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ , активаций нейронов заново рассчитывать сумму  $\sum_{k=1}^n x_{ik}(t) + \sum_{l=1}^n x_{lj}(t)$ .

Решение системы уравнений (3) можно ускорить следующим алгоритмом [7], использующим принцип *WTA*:

1. Породить матрицу  $\|x_{ij}(0)\|$  случайных значений  $x_{ij}(0) \in [0, 1]$ . Итерации уравнения (4) продолжать до тех пор, пока для всех  $i, j = 1, \dots, n$  не выполнится неравенство

$$\sum_{k=1}^n x_{ik}(t) + \sum_{l=1}^n x_{lj}(t) - 2 \leq \delta,$$

где  $\delta$  – заданная точность выполнения ограничений (2).

2. Выполнить преобразование полученной матрицы решения  $\|x_{ij}\|$ :

2.1.  $i = 1$ .

2.2. В  $i$ -й строке матрицы найти максимальный элемент  $x_{i, j_{\max}}$ ,  $j_{\max}$  – номер столбца с максимальным элементом.

2.3. Выполнить преобразование  $x_{i, j_{\max}} = 1$ . Все остальные элементы  $i$ -й строки и столбца с номером  $j_{\max}$  обнулить.

Перейти к строке с номером  $j_{\max}$ .

Действия 2.2 и 2.3 повторять, пока не произойдет возврат к первой строке, что будет означать завершение построения цикла.

Если возврат к строке 1 произошел раньше, чем в матрице  $\|x_{ij}\|$  значение 1 получили  $n$  элементов, то это означает, что длина построенного цикла меньше  $n$ . В этом случае шаги 1 и 2 повторить.

### 3. Метод частичных сумм

В [7] показано, что рекуррентная сеть Вана (1)–(3) дает хорошие результаты при решении системы уравнений (4) методом Зейделя. Нетрудно видеть, что решение задачи (1)–(3) связано с многократным вычислением одних и тех же частичных сумм, входящих в суммы

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad i = 1, \dots, n.$$

Во избежание избыточных вычислений произведем расчет частичных сумм:

- «вертикальные» частичные суммы

$$v_{ij} = \sum_{k=i}^n x_{kj}, \quad v'_{ij} = \sum_{k=1}^i x'_{kj}, \quad i, j = 1, \dots, n;$$

- «горизонтальные» частичные суммы

$$h_{ij} = \sum_{l=j}^n x_{il}, \quad h'_{ij} = \sum_{l=1}^j x'_{il}, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

где  $x'_{ij}$  – обновленное по Зейделю значение  $x_{ij}$ .

Обозначим сумму

$$s_{ij} = \sum_{k=1}^n x_{ik}^*(t) + \sum_{l=1}^n x_{lj}^*(t),$$

где массив  $x^*$  включает элементы  $x_{kl}$ , где  $k = i, l = j, \dots, n$  и  $k = i + 1, \dots, n, l = 1, \dots, n$ , и обновленные по Зейделю элементы  $x'_{kl}$ , где  $k = 1, \dots, i - 1, l = 1, \dots, n$  и  $k = i, l = 1, \dots, j - 1$ .

Тогда в (4) получаем

$$(5) \quad s_{11} = v_{11} + h_{11}.$$

Используя (5), по формуле (4) вычисляем новое значение  $x_{11}$  и полагаем

$$v'_{11} = h'_{11} = x'_{11}.$$

Для остальных элементов первой строки матрицы  $\|x_{ij}\|$  выполняем следующие вычисления:

1. Вычисляем  $s_{1j} = h'_{1,j-1} + v_{1j} + h_{1j}, j = 2, \dots, n$ .
2. Используя  $s_{1j}$ , вычисляем  $x'_{1j}$  по (4) и полагаем

$$v'_{1j} = x'_{1j},$$

$$h'_{1j} = x'_{1j} + h'_{1,j-1}, j = 2, \dots, n.$$

Для остальных строк с номерами  $i = 2, \dots, n$  при  $j = 1, \dots, n$ :

1. Вычисляем

$$s_{ij} = v'_{i-1,j} + v_{ij} + h_{ij}, j \in \{1, \dots, n\},$$

$$s_{ij} = s_{ij} + h'_{i,j-1}, j \in \{2, \dots, n\}.$$

2. Используя  $s_{ij}$ , вычисляем  $x'_{ij}$  и полагаем

$$v'_{ij} = x'_{ij} + v_{i-1,j},$$

$$h'_{ij} = x'_{ij}, j \in \{1, \dots, n\},$$

$$h'_{ij} = h'_{ij} + h'_{i,j-1}, j \in \{2, \dots, n\}.$$

Предложенный здесь метод частичных сумм позволяет сократить время решения системы (4) при построении гамильтоновых циклов в графах распределенных вычислительных систем с  $O(n^3)$  до  $O(n^2)$ .

В таблице 1 приведены времена (в секундах) построения гамильтоновых циклов в двумерном торе (см. рис. 1) с  $n = m \times t$  вершинами,  $m \in \{12, 16, 20, 24, 28, 32\}$ ;  $t_{rad}$  – время построения цикла традиционным способом (без учета повторяемости сумм);  $t_{part}$  – время построения при использовании метода частичных сумм (процессор Pentium® Dual-Core CPU E 52000, 2,5 ГГц).

Особенно большой выигрыш метод частичных сумм дает при построении гамильтоновых циклов в трехмерных торах с большим числом (тысячи) вершин. При этом используется разбиение трехмерного тора на двумерные.

В общем виде эта задача решается так [7]:

1. Разбить исходный граф системы на  $k \geq 2$  связных подграфов.
2. В каждом подграфе построить гамильтонов цикл, используя вышеописанный алгоритм.

3. Объединить гамильтоновы циклы подграфов в один гамильтонов цикл.

Для разбиения исходного графа системы на связанные подграфы можно применить алгоритмы, предложенные в работе [5].

Для объединения двух циклов  $R_1$  и  $R_2$  достаточно наличия в графе  $BC$  цикла  $ABCD$  длины 4 такого, что ребро  $AB$  принадлежит циклу  $R_1$ , а ребро  $CD$  – циклу  $R_2$  (см. рис. 2).

Таблица 1. Времена построения гамильтонова цикла в двумерном торе рекуррентной нейронной сетью

$n$	144	256	400	576	784	1024
$t_{trad}$	0,125	1,062	5,203	15,92	39,8	178,734
$t_{part}$	0,016	0,063	0,188	0,5	1,156	2,047

Объединить циклы  $R_1$  и  $R_2$  в один цикл можно следующим образом:

1. Найти цикл  $ABCD$ , обладающий указанным выше свойством.

2. Исключить из цикла ребро  $AB$  и пронумеровать вершины цикла  $R_1$  последовательно так, чтобы вершина  $A$  получила номер 0, а вершина  $B$  – номер  $L_1 - 1$ , где  $L_1$  – длина цикла  $R_1$ . Включить в цикл ребро  $BC$ .

3. Исключить ребро  $CD$  и пронумеровать вершины цикла  $R_2$  последовательно так, чтобы вершина  $C$  получила номер  $L_1$ , а вершина  $D$  – номер  $L_1 + L_2 - 1$ , где  $L_2$  – длина цикла  $R_2$ . Включить в цикл ребро  $DA$ . Единый цикл длины  $L_1 + L_2$  построен.

Циклы  $R_1$ ,  $R_2$  и результирующий цикл выделены на рис. 2 жирными линиями. Ребра, не входящие в указанные циклы, выделены пунктиром.

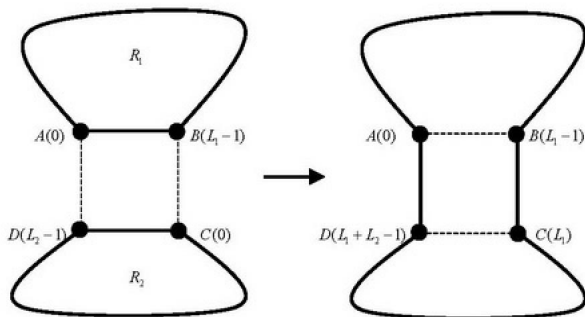


Рис. 2. Объединение циклов

Трехмерный тор можно рассматривать как совокупность двумерных торов, связанных ребрами между собой. Поэтому гамильтонов цикл для трехмерного тора можно построить следующим образом:

1. Построить гамильтоновы циклы для всех двумерных торов.
2. Объединить циклы в один алгоритмом, предложенным выше.

Очевидно, что если гамильтоновы циклы для двумерных торов оптимальны, то и результирующий гамильтонов цикл трехмерного тора также оптимален.

В таблице 2 приведены времена (в секундах) построения оптимальных гамильтоновых циклов для трехмерных торов с большим (тысячи) числом вершин:  $t_{RNseq}$  – время работы алгоритма без использования частичных сумм,  $t_{RNpart}$  – время работы алгоритма с использованием частичных сумм на процессоре Intel Pentium Dual-Core CPU E 52000, 2,5 ГГц. Из таблицы 2 в частности следует, что время построения цикла в 3D-торе из 32768 вершин удалось сократить с 3354 секунд (около часа) до 84,4 секунд (около 1,5 минут).

Таким образом, результаты проведенных экспериментов показывают, что в совокупности с методом расщепления трехмерного тора на двумерные алгоритм, использующий частичные

суммы позволяет существенно ускорить построение циклов в трехмерных торах с десятками тысяч вершин.

Таблица 2. Построение 3D-тора с использованием метода расщепления

$m$	16	20	24	28	32
$n = m^3$	4096	8000	13284	21952	32768
$t_{RNseq}$	13,19	65,25	243,7	707,5	3354
$t_{RNpart}$	2,437	7,656	18,64	41,08	84,47

#### 4. Перестановочный алгоритм вложения графа программы в граф вычислительной системы

Пусть граф  $G_p(V_p, P_p)$  параллельной программы рассматривается как множество  $V_p$  вершин (ветвей программы) и функция

$$G_p : V_p \times V_p \rightarrow \{0,1\},$$

удовлетворяющая

$$G_p(x, y) = G_p(y, x), \quad G_p(x, x) = 0$$

для любых  $x, y \in V_p$ . Равенство  $G_p(x, y) = 1$  означает, что существует ребро между вершинами  $x$  и  $y$ , т.е.  $(x, y) \in E_p$ . Аналогично граф  $G_s = (V_s, E_s)$  определяется как множество вершин (элементарных машин – ЭМ)  $V_s$  и функция

$$G_s : V_s \times V_s \rightarrow \{0,1\}.$$

Здесь  $E_s$  – множество ребер (линий связи между ЭМ).

Пусть  $|V_p| = |V_s| = n$ . Обозначим вложение ветвей параллельной программы в ЭМ как одно-однозначную функцию  $f_m: V_p \rightarrow V_s$ . Качество вложения можно определить как число ребер графа программы, совпавших с ребрами графа ВС. Назовем это число мощностью  $|f_m|$  вложения  $f_m$  и определим его следующим выражением [10] (критерий-максимум качества вложения):

$$(6) \quad |f_m| = (1/2) \sum_{x \in V_p, y \in V_p} G_p(x, y) G_s(f_m(x), f_m(y)).$$

В [3, 4, 20] предложен следующий подход (МВ-алгоритм) к решению задачи вложения. Пусть некоторым образом задано начальное вложение вершин графа программы в вершины графа ВС. Например,  $f_m(x) = x$ , т.е. номера ветвей графа совпадают с номерами содержащих эти ветви машин. Пусть  $e_p(x)$  – окружение (множество соседей) вершины  $x$  на графе  $G_p$  и  $e_s(x)$  – ее окружение на графе  $G_s$ . Для каждой вершины  $x \in V_p$  протестируем перестановку вершин  $i$  и  $j$ , удовлетворяющих условию

$$(7) \quad i \in e_p(x) \ \& \ i \notin e_s(x) \ \& \ j \in e_s(x) \ \& \ state(j) = 0.$$

Условие  $state(j) = 0$  означает, что вершина  $j$  еще не подвергалась перестановке в окружении  $e_s(x)$ , в противном случае  $state(j) = 1$ . Если перестановка не ухудшает качество вложения  $f_m$ , мы ее фиксируем. Такой подход основан на предположении о высокой вероятности ситуации, когда такая перестановка, увеличивающая количество вершин  $i \in e_p(x)$  в окружении  $e_s(x)$ , улучшит (или по крайней мере не ухудшит) значение критерия качества  $|f_m|$ . Число тестируемых перестановок при однократном обходе всех вершин  $x \in V_p$  не превышает значения  $v_p v_s n$ ,  $n = |V_p|$ , где  $v_p$  и  $v_s$  – максимальные степени вершин графов  $G_p$  и  $G_s$  соответственно. При  $v_p v_s < n$  такой подход обеспечит сокращение объема вычислений по сравнению с известными перестановочными алгоритмами [8, 10–12, 15, 22], итерация которых имеет сложность  $O(n^2)$ . Разработана основанная на проверке условия (7) процедура *Search* поиска локального экстремума функции  $|f_m|$  в МВ-алгоритме вложения.

В таблице 3 производится сравнение времен (в секундах) построения гамильтонова цикла двумя алгоритмами – МВ-алгоритмом и рекуррентной нейронной сетью с использованием метода частичных сумм. Из этой таблицы следует, что эти алгоритмы сравнимы по эффективности. Следует учитывать, что МВ-алгоритм рассчитан на использование процессора с фиксированной запятой, в то время как нейронная сеть использует процессор с плавающей запятой. Этот факт нужно учитывать при выборе алгоритма для конкретной машины в зависимости от скорости выполнения алгоритма.



Таблица 3. Времена построения гамильтонова цикла в двумерном торе МВ-алгоритмом ( $t_{MB}$ ) и рекуррентной нейронной сетью с использованием метода частичных сумм ( $t_{part}$ )

$n$	144	256	400	576	784	1024
$t_{MB}$	0,047	0,14	0,343	0,719	1,328	2,25
$t_{part}$	0,016	0,063	0,188	0,5	1,156	2,047

## 5. Выводы

Рассмотрено построение рекуррентной нейронной сетью гамильтоновых циклов в графе распределенной вычислительной системы с  $n$  вершинами. Предложен метод частичных сумм, позволяющий сократить время решения системы дифференциальных уравнений, описывающих нейронную сеть, с  $O(n^3)$  до  $O(n^2)$ . Показано, что нейросетевой алгоритм, использующий метод частичных сумм, не уступает по времени построения цикла известным перестановочным методам.

Перестановочные алгоритмы не нуждаются в процессоре с плавающей запятой и подборе параметров, но работают с нерегулярными структурами данных (списковое представление графа), что может усложнить их распараллеливание. Нейросетевые алгоритмы нуждаются в процессоре с плавающей точкой и подборе параметров, но работают с регулярными структурами данных, а потому имеют более высокий потенциальный параллелизм. Таким образом, выбор алгоритма для построения гамильтоновых циклов в графах распределенных вычислительных систем определяется конфигурацией аппаратуры процессоров, на которых они выполняются. Сравнение параллельных версий рассмотренных алгоритмов является целью дальнейших исследований.

## Литература

1. АБРАМОВ С.М., ЗАДНЕПРОВСКИЙ В.Ф., ШМЕЛЕВ А.Б., МОСКОВСКИЙ А.А. *СуперЭВМ ряда 4 семейства «СКИФ»: Штурм вершины суперкомпьютерных техноло-*

- гий // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. – 2009. – №5. – С. 200–210.
2. МЕЛАМЕД И.И. *Нейронные сети и комбинаторная оптимизация* // Автоматика и телемеханика. – 1994. – №4. – С. 3–40.
  3. ТАРКОВ М.С. *Алгоритм отображения структур параллельных программ в структуры распределенных вычислительных систем* // Труды Пятого Международного семинара «Распределенная обработка информации (РОИ-95)». – Новосибирск, 1995. – С.124–129.
  4. ТАРКОВ М.С. *Вложение структур параллельных программ в структуры живучих распределенных вычислительных систем* // Автометрия. – 2003. – Том 39, №3. – С. 84–96.
  5. ТАРКОВ М.С. *Децентрализованное управление ресурсами и заданиями в живучих распределенных вычислительных системах* // Автометрия. – 2005. – Том 41, №5. – С. 81–91.
  6. ТАРКОВ М.С. *Нейрокомпьютерные системы* – М.: Интернет-Ун-т информ. технологий: Бином. Лаборатория знаний, 2006. – 142 с.
  7. ТАРКОВ М.С. *Построение гамильтоновых циклов в графах распределенных вычислительных систем рекуррентными нейронными сетями* // Сиб. журнал вычислительной математики. – 2010. – №4. – С. 467–475.
  8. AGARWAL T., SHARMA A., KALE L.V. *Topology-aware task mapping for reducing communication contention on large parallel machines* // Proc. IEEE 20<sup>th</sup> International Parallel and Distributed Processing Symposium (IPDPS'2006), April 2006. – P. 145.
  9. AKL S.G. *Parallel Computation: Models and Methods*. – Prentice Hall, NJ, 1997. – 608 p.
  10. БОКХАРИ S.H. *On the Mapping Problem* // IEEE Trans. Comput. – 1981. – Vol. C-30, №3. – P. 207–214.
  11. БОЛЛИНГЕР S.W., МИДКИФ S.F. *Heuristic Technique for Processor and Link Assignment in Multicomputers* // IEEE

- Transactions on Computers. – 1991. – Vol. 40, №3. – P. 325–333.
12. HOEFLER T., SNIR M. *Generic Topology Mapping Strategies for Large-scale Parallel Architectures* // Proc. International conference on Supercomputing (ICS'11), Tuscon, Arizona, USA, May 31 – June 4., New York, 2011. – P. 75–84.
  13. HOPFIELD J.J., TANK D.W. «Neural» computation of decisions in optimization problems // Biological Cybernetics. – 1985. – Vol.52, №3. – P. 141–152.
  14. HUNG D.L., WANG J. *Digital hardware realization of a recurrent neural network for solving the assignment problem* // Neurocomputing. – 2003. – Vol. 51. – P. 447–461.
  15. LEE S.-Y., AGGARVAL J.K. *A Mapping Strategy for Parallel Processing* // IEEE Trans. Comput. – 1981. – Vol. C-36, №4. – P. 433–442.
  16. LI Y., PENG S., CHU W. *Fault-tolerant cycle embedding in dual-cube with node faults* // Int. J. High Performance Computing and Networking. – 2000. – Vol. 3, №1. – P. 45–53.
  17. PALMER J.F. *The NCUBE family of parallel supercomputers* // SCS Conf. on Multiprocessors and Array Processors, San Diego, CA (USA), 14–16 Jan. 1987. – P. 177–188.
  18. SMITH K.A. *Neural Networks for Combinatorial Optimization: A Review of More Than a Decade of Research* // INFORMS Journal on Computing. – 1999. – Vol.11, №1. – P. 15–34.
  19. SIQUEIRA P.H., STEINER M.T.A., SCHEER S. *A new approach to solve the travelling salesman problem* // Neurocomputing. – 2007. – Vol.70. – P. 1013–1021.
  20. TARKOV M.S. *Mapping Parallel Programs Onto Distributed Robust Computer Systems* // Proc. 15<sup>th</sup> IMACS World Congress on Scientific Computation, Modelling and Applied Mathematics, Berlin, 1997. – P. 365–370.
  21. TSAI P.-Y. , FU J.-S. , CHEN G.-H. *Embedding Hamiltonian cycles in alternating group graphs under conditional fault model* // Information Sciences. – 2009. – Vol. 179. – P. 851–857.

22. YU H., CHUNG I-HSIN, MOREIRA J. *Topology Mapping for Blue Gene/L Supercomputer* // Proc. ACM/IEEE SC2006 Conf. On High Performance Networking and Computing, November 11–17, 2006, Tampa, FL, USA. ACM Press, 2006. – P. 52–64.

**ON EFFICIENT CONSTRUCTION OF HAMILTONIAN CYCLES IN DISTRIBUTED COMPUTER SYSTEMS BY RECURRENT NEURAL NETWORKS**

**Mikhail Tarkov**, Institute of Semiconductor Physics of SB RAS, Novosibirsk, Cand.Sc., associate professor (tarkov@isp.nsc.ru).

*Abstract: Construction of Hamiltonian cycles in a graph of distributed computer system with  $n$  vertices by a recurrent neural network is considered. The method of partial sums is proposed to reduce time of differential equations solution, which describe the neural network, from  $O(n^3)$  to  $O(n^2)$ . It is shown that the neural network algorithm which uses partial sums is competitive with known permutation methods.*

Keywords: distributed computer systems, recurrent neural networks, graphs, Hamiltonian cycle

*Статья рекомендована к публикации программным комитетом международной конференции «Параллельные вычисления и задачи управления» (РАСО), Россия, Москва, 24-26 октября 2012 г.  
Поступила в редакцию 27.02.2013.  
Опубликована 31.05.2013.*

УДК 519.865.2  
ББК 22.18 + 65.42

## **МОДЕЛИРОВАНИЕ СЕТЕВОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ НА КОНКУРЕНТНЫХ РЫНКАХ**

**Алгазин Г. И.<sup>1</sup>, Алгазина Д. Г.<sup>2</sup>**

*(Алтайский государственный университет, г. Барнаул)*

*Представлена теоретико-игровая модель многоагентной сети, ориентированной на продвижение на конкурентном рынке однородного товара (услуги). Для базовых прикладных моделей «франчайзер–франчайзи–рынок» и «производитель–посредник–рынок» при обычных для моделей олигополии предположениях о линейности функций затрат и обратной функции спроса, допускающих аналитическое представление решения, проведены разносторонние исследования эффективности сетей в условиях равновесия Курно и Штакельберга. Новым аспектом модельных исследований является введение в теоретико-игровую модель сети активного субъекта – центра, на которого возложено решение задач по управлению сетевым взаимодействием и повышению эффективности сети.*

Ключевые слова: типология сети, теоретико-игровая модель, равновесие сети, Курно, Штакельберг, управление сетевым взаимодействием, эффективность сети, франчайзинг, торговое посредничество.

### **1. Введение**

В последнее время во многих областях растет интерес к проблеме формирования устойчивых и эффективных сетей – взаимодействующих совокупностей агентов (участников), нахо-

---

<sup>1</sup> Геннадий Иванович Алгазин, зав. кафедрой, доктор физико-математических наук, профессор ([algazin@socio.asu.ru](mailto:algazin@socio.asu.ru)).

<sup>2</sup> Дарья Геннадьевна Алгазина, старший преподаватель, ([darya.algazina@mail.ru](mailto:darya.algazina@mail.ru)).

дящихся под общим управлением. Особую сложность в проведении математических исследований представляют сети, участниками которых являются целенаправленные субъекты (системы).

Адекватным математическим аппаратом исследования конфликтов, возникающих в сетевом взаимодействии между целенаправленными субъектами, является теория сетевых игр [10, 11, 19]. Следует отметить, что это недостаточно изученный раздел теории игр, который еще находится в стадии своего формирования и развития.

В данной статье представлены две базовые теоретико-игровые модели сети «центр–агент–рынок», ориентированной на продвижение на конкурентном рынке различного рода товаров и услуг: модель «франчайзер–франчайзи–рынок» и модель «производитель–посредник–рынок».

## 2. Типология сетей

Рассматривается многоагентная сеть «центр–агент–рынок». Некоторые ее структуры, которые представлены в исследованиях авторов, схематично показаны на рис. 1–3.

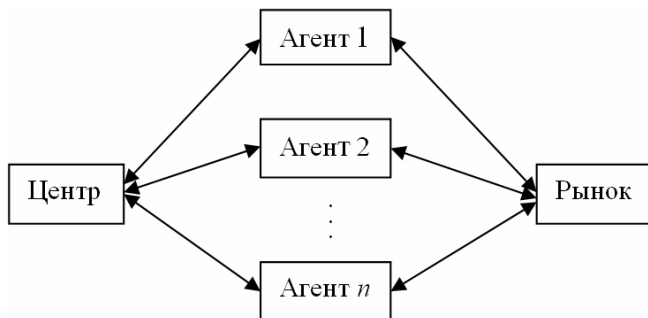


Рис. 1. Центр взаимодействует с агентами, агенты – с рынком (потребителями)

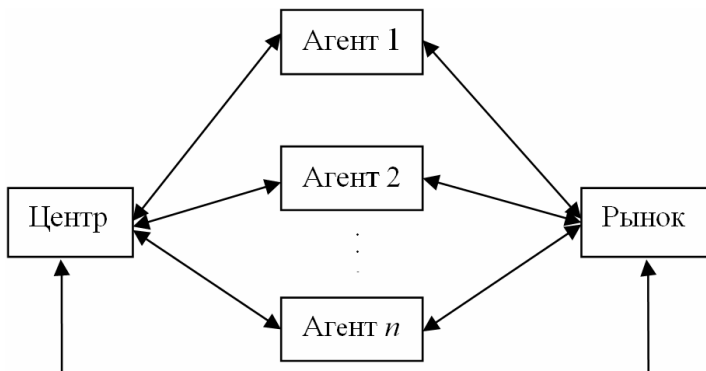


Рис. 2. Центр взаимодействует с агентами и рынком, агенты – с рынком

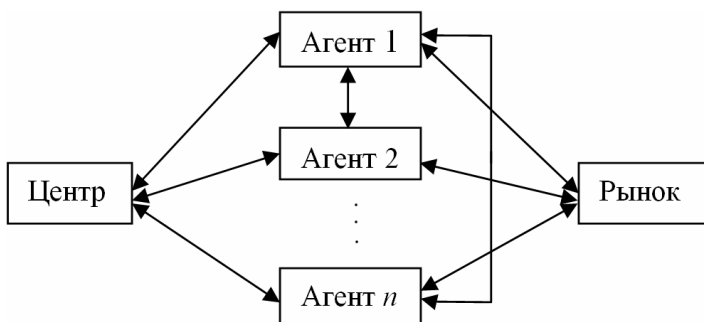


Рис. 3. Центр взаимодействует с агентами, агенты – с рынком и между собой

Будем полагать структуру сети на рис. 1 базовой, другие более сложные структуры отличаются от нее добавлением новых связей.

### 3. Теоретико-игровая модель сетевого взаимодействия

В модели выделены три группы участников: центр, агенты, рынок.

В ней управляющий сетевым взаимодействием целенаправленный субъект – центр, а управляемый целенаправленный субъект – агент. Рынок – неуправляемый субъект сети.

Центр – единственный участник сети, который имеет возможность координировать взаимодействия в ней. Кроме того, центр может в ряде случаев, в связи с изменением общей ситуации, действовать и как агент, т.е. конкурировать с другими агентами на рынке (рис. 2).

Агенты – это участники сети, которые непосредственно занимаются доведением товаров (услуг) до потребителей. К ним относятся торговые точки, предприятия сферы услуг (сети гостиниц, ресторанов быстрого питания и т.п.) или фирмы производители. Под активностью  $i$ -го агента  $q_i$  будем понимать объем оказываемых им услуг, объем реализованного товара населению и бизнесу или объем произведенного и реализованного на рынке товара.

Предположения модели состоят в следующем.

Рынок товара (услуг) традиционно описывается невозрастающей функцией спроса. В модели будет использоваться обратная функция спроса, т.е. цены  $p(Q)$ , которая складывается на рынке при объеме предложения товара (услуг)  $Q$ . Учитывается то, что  $p$  и  $Q$  связаны взаимно однозначной зависимостью, а технически удобнее в качестве аргумента рассматривать  $Q$ .

Функции затрат агентов  $\phi_i(q_i)$  считаются зависящими только от активности самого агента. Функция затрат центра  $\varphi$  зависит от суммарной активности агентов сети  $Q = \sum_{i=1}^n q_i$  и, если он еще выступает в роли агента (как на рис. 2), дополнительно от его собственной активности  $q_0$ . Каждый участник располагает полной информацией об обратной функции спроса и о своей функции затрат.

Агенты могут наблюдать лишь сложившиеся цены на рынке. Центр может изменить цены, но для этого ему надо повлиять на суммарный выпуск сети  $Q$ . Например, чтобы повысить активность сети, он может стимулировать агентов, пересмотрев условия договора с ними, добавить в сеть новых агентов и т. д.

Считается, что агенты не кооперируются друг с другом.



Если не принимать во внимание наличия центра, то рассматриваемая модель относится к моделям олигополии, в которых агенты могут повлиять на рынок выбором своего поведения.

Далее приведем описание двух базовых прикладных моделей многоагентной сети «центр–агент–рынок».

*Модель «франчайзер–франчайзи–рынок»* [1]. Рассматривается рынок однородного товара, состоящего из франчайзера и  $n$  фирм-франчайзи. Франчайзи реализует товар (услугу) потребителю по цене  $p$  в объеме  $q_i$ . Величина выручки (дохода)  $pq_i$  распределяется между двумя сторонами. Часть выручки  $kpq_i$  получает франчайзер, а другую ее часть  $(1 - k)pq_i$  получает фирма-франчайзи;  $k$  – коэффициент (параметр), определяющий сервисную плату (роялти), которую франчайзер устанавливает для франчайзи в обмен за права на бизнес ( $0 \leq k \leq 1$ ). Предполагается, что только франчайзи этой сети обладают эксклюзивными правами на данный бизнес в рамках определенной территории.

Формально интересы сторон можно записать в виде целевых установок на максимизацию их прибыли:

– для головной фирмы-франчайзера (центра):

$$(1) \quad I(p, Q, k) = kpQ \rightarrow \max_k, \\ k \in [0, 1];$$

– для фирмы-франчайзи (агента):

$$(2) \quad \Pi_i(p(Q), q_i, k) = (1 - k)p(Q)q_i - \phi_i(q_i) \rightarrow \max_{q_i}, \\ q_i \in [0, \bar{q}_i], \quad i = 1, \dots, n.$$

Здесь  $\bar{q}_i$  – предельно возможный объем активности агента.

Франшизный взнос не включен авторами в базисную модель, а учитывается при необходимости. Значения параметров  $k$  и  $q_i$  являются основным предметом согласования условий договора франшизы. Интересы участников проявляются в том, чтобы отстоять желаемые для себя значения этих параметров и, соответственно, получить выгодные условия договора.

*Модель «производитель–посредник–рынок»* [3]. Рассматривается рынок однородного товара, состоящего из одного его производителя и  $n$  торговых посредников. Посредник продает

потребителю товар по цене  $p$ , покупая его у производителя по цене  $(1 - k)p$ . Таким образом, величина  $kp$  есть разница между ценой спроса и ценой предложения на этом рынке. Эта разница и формирует доход посредника. В модели значение параметра  $k$  определяется фирмой-производителем.

Интересы сторон представляются в виде целевых установок на максимизацию их прибыли. Эта модель включает:

– задачу фирмы-производителя (центра):

$$I(p, Q, k) = (1 - k)pQ - \phi(Q) \rightarrow \max_{Q, k}$$

$$(3) \quad Q \in [0, \bar{Q}],$$

$$k \in [0, 1];$$

– задачу посредника  $i$  (агента):

$$(4) \quad \Pi_i(p(Q), q_i, k) = kp(Q)q_i - \phi_i(q_i) \rightarrow \max_{q_i}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Здесь  $\bar{Q}$  – предельно возможный объем активности производителя.

Как в той, так и другой модели полагается, что цена продукции и затраты субъектов определяются следующими выражениями:

$$(5) \quad p(Q) = a - bQ, \phi(Q) = c_0Q + d_0, \phi_i(q_i) = c_iq_i + d_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Здесь: цена продукции – линейная функция общего объема выпуска агентами;  $a$  – спрос на продукцию;  $b$  – снижение цены при увеличении на единицу общего выпуска; издержки фирм  $\phi(Q)$  и  $\phi_i(q_i)$  являются также линейными функциями, а  $c_0$  и  $c_i$  – предельные переменные издержки;  $d_0$  и  $d_i$  – постоянные издержки фирм, они не будут оказывать влияния на решение задач оптимизации участников.

#### 4. Проработанность проблемы и новизна модели

В отечественной и зарубежной литературе явно прослеживается, что внимание исследователей приковано не в целом к триаде «центр–агент–рынок», а к отдельным ее составляющим: «центр–агент» и «агент–рынок».

Изучение систем «центр–агент» имеет немалую историю. Заметное место в ней принадлежит теории оптимального планирования и управления, математической теории иерархических многоуровневых систем, информационной теории иерархических игр, теории активных систем. В последнее время доминируют теоретико-игровые подходы, а в системах с неравноправными участниками – иерархические и рефлексивные игры. Взаимодействие игроков в иерархических структурах описывается играми  $\Gamma_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) [9]. В условиях неполной информированности и отсутствии общего знания среди агентов модели рефлексивных игр дают возможность центру ставить и решать новые задачи управления действиями агентов (формирования допустимых структур информированности, приводящих к наиболее выгодным для центра решениям; выбора оптимального разбиения агентов по рангам рефлексии и т.д.) [9, 13–16]. Как отмечается в [9], рефлексивное управление может иметь место даже в случае полной информированности.

В задачах баланса интересов в системах «агент–рынок» ведущее место занимает модель Курно. При предположении Курно агенту нет необходимости знать что-либо о поведении других агентов. Он знает собственные объемы, но никакой информацией об объемах других агентов не располагает, да она ему и не требуется.

Различные авторы придавали большее значение разным аспектам применения модели Курно. Ряд авторов рассматривают модель, в которой все фирмы идентичны. Другая группа авторов исследует равновесие на рынке, где не обязательна идентичность всех фирм-агентов, используя те ли иные предположения о свойствах обратной функции спроса, функций затрат и функций прибыли. В ряде исследований внимание акцентировано на методах поиска решений. Отечественные ученые рассматривают вместо стандартной гипотезы Курно гипотезы более общего вида и модели олигополии с рынками производственных факторов [7, 8, 12, 22, 23, 24].

В значительном ряде публикаций в дополнение к модели Курно вводится модель фирмы, действующей по особым правилам. В отличие от фирм Курно, эта фирма, обладая возможно-

стью первого хода, доминирует на конкурентном рынке, максимизируя собственную прибыль при явном учете реакции остальных фирм на изменение ее поведения. Остальные же фирмы, как и раньше, максимизируют собственную прибыль на основе принципа Курно–Нэша о неизменности поведения других фирм. Эту фирму-лидер называют еще фирмой Штакельберга, так как он первым ввел такую модель поведения [8, 24, 25]. Следуя предположению Курно–Штакельберга, агент должен быть уверен, что располагает полной информированностью о поведении остальных агентов.

Вместо такой классической интерпретации предположений Курно и Курно–Штакельберга можно считать, что каждый агент располагает некоторой гипотезой о скорости изменения общего объема  $Q$  в зависимости от изменения его собственного объема  $q_i$  (или гипотезой о влиянии изменения его собственного объема на цены: локально цены меняются пропорционально вариациям объемов. Учитывая опять, что  $p$  и  $Q$  связаны взаимно однозначно, то это техническая, а не принципиальная сторона вопроса). В представленных авторами статьи исследованиях разные агенты могут придерживаться разных гипотез. В частности, если  $i$ -й агент действует в рамках традиционных предположений Курно, то изменения в общем объеме  $Q$ , которые вносят другие агенты, игнорируются, т.е. агент придерживается гипотезы  $\partial Q/\partial q_i = 1$ . Если же  $i$ -й агент придерживается предположений Курно–Штакельберга, то для базовой линейной модели сетевого взаимодействия, которая будет дана ниже,  $\partial Q/\partial q_i = 1/n$ .

В ряде сетевых моделей, использующих концепции Штакельберга, таких агентов может быть несколько. Сеть, в которой все агенты ведут себя согласно модели Штакельберга (такая ситуация называется неравновесием по Штакельбергу), рассмотрена авторами статьи на базовой линейной модели сетевого взаимодействия [1–3].

Поскольку в указанных концепциях решения некооперативных игр сетевые взаимодействия организованы таким образом, что функции прибыли всех агентов достигают максимума, а спрос и предложение сбалансированы, то соответствующее состояние сети естественным образом трактуется как равновесное.

В классическом подходе принципы поведения Курно и Штакельберга рассматриваются в применении к фирмам-производителям. Определенный шаг на пути обобщения применения принципов Курно и Штакельберга сделан авторами этой статьи в совместной монографии [1]. В проведенных в ней модельных исследованиях франчайзинговых сетей на рынке олигополии агенты (франчайзи-конкуренты) не различаются как фирмы-производители, торговые точки или предприятия сферы услуг.

Авторским расширением традиционного модельного представления олигополистического рынка является введение в модель нового субъекта, на которого возлагаются функции управления сетевым взаимодействием агентов. Этим «новым» субъектом выступает центр. Таким образом, вместо традиционных систем «центр–агент» и «агент–рынок» рассматривается сеть «центр–агент–рынок».

## 5. Эффективность сетей

Эффективность сетей можно оценивать и сравнивать по различным критериям. К основным из них можно отнести: общий объем активности сети и отдельных агентов, прибыль центра и агентов, конкурентная цена на товары (услуги) и величина роялти (для франчайзинговой сети), цена спроса и предложения (для посреднической сети) и т.д.

Приведем аналитические выражения таких критериев для базовой прикладной модели многоагентной сети «франчайзер–франчайзи–рынок» в состоянии равновесия Курно [1]. Для определенности пусть это будет сеть, структура которой приведена на рис. 1, а верхний индекс  $K$  означает, что показатель (критерий) относится к равновесной по Курно сети.

Общий объем активности сети (выпуск товаров (услуг)) определяется выражением

$$(6) \quad Q^K = \frac{1}{(n+1)b} \left( na - \frac{\sum_{i=1}^n c_i}{1-k} \right).$$

Значение рыночной цены товара (услуг) определяется как

$$(7) \quad p^K = \frac{1}{n+1} \left( a + \frac{\sum_{i=1}^n c_i}{1-k} \right).$$

Активность франчайзи рассчитывается по формуле

$$(8) \quad q_j^K = \frac{1}{(n+1)b} \left( a + \frac{\sum_{i=1}^n c_i - (n+1)c_j}{1-k} \right), \quad j = 1, \dots, n.$$

Имеем следующее выражение для прибыли франчайзи:

$$(9) \quad \Pi_j^K = \frac{1-k}{(n+1)^2 b} \left( a + \frac{\sum_{i=1}^n c_i - (n+1)c_j}{1-k} \right)^2 - d_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

Прибыль франчайзера задается выражением

$$(10) \quad I^K = \frac{k}{(n+1)^2 b} \left( a + \frac{\sum_{i=1}^n c_i}{1-k} \right) \cdot \left( na - \frac{\sum_{i=1}^n c_i}{1-k} \right).$$

Величина роялти для франчайзи составит

$$(11) \quad A_j^K = \frac{k}{(n+1)^2 b} \left( a + \frac{\sum_{i=1}^n c_i}{1-k} \right) \cdot \left( a + \frac{\sum_{i=1}^n c_i - (n+1)c_j}{1-k} \right), \quad j = 1, \dots, n.$$

Аналогичные формулы получены для посреднической сети в состоянии равновесия Курно, а также для франчайзинговой и посреднической сетей в состоянии равновесия и неравновесия по Штакельбергу [1, 3].

Пусть далее верхний индекс  $\bar{S}$  означает, что показатель (критерий) относится к сети неравновесной по Штакельбергу,  $S$  – равновесной по Штакельбергу,  $M$  – сети, состоящей из одного единственного агента-монополиста, т.е. к монопольному рынку.

Сравнительный анализ  $K$ ,  $S$  и  $\bar{S}$  сетей приведем позже в разделе 6.3.

Здесь же отметим, что для монопольного рынка [1]:  
 1) общий объем активности сетей  $Q$  самый низкий;  
 2) монопольная цена  $p$  выше любой конкурентной цены;  
 3) суммарная прибыль всех агентов  $\Pi$  самая высокая; прибыль центра  $I$  ниже, чем на конкурентном.

## 6. Повышение эффективности сетевого взаимодействия

Важной задачей центра, связанной с тем, что равновесная сеть не всегда обладает необходимой эффективностью, является повышение ее эффективности.

Это требует:

- обеспечения контролируемого роста сети;
- создания или ликвидации связей;
- целенаправленного воздействия на поведение, целевые функции участников, их активность и т.д.

### 6.1. ОБЕСПЕЧЕНИЕ КОНТРОЛИРУЕМОГО РОСТА СЕТИ И ОПТИМИЗАЦИЯ ЧИСЛА ЕЕ УЧАСТНИКОВ

Эта проблема связана с оценкой показателей эффективности функционирования сети от числа в ней агентов. Рассмотрим некоторые подходы к ее решению по критерию прибыли центра.

Для франчайзинговой сети в состоянии равновесия Курно оптимальное число франчайзи (без учета их первоначального взноса) находится из решения уравнения  $\partial I^K / \partial n = 0$ , где  $I^K$  определяется по (10). После ряда несложных преобразований полагая  $c_i = e$ ,  $i = 1, \dots, n$ ; приходим к следующему выражению:

$$(12) \quad \frac{\partial I^K}{\partial n} = -\frac{ka(n-1)}{(n+1)^3 b} \cdot \left( a - \frac{e}{1-k} \right) \cdot \left( 1 - \frac{2ne}{a(n-1)(1-k)} \right).$$

Отсюда, если параметры  $a, b, e, n$  таковы, что

$$1 - \frac{2ne}{a(n-1)(1-k)} < 0 \quad \text{или} \quad 1 - \frac{2e}{a(1-k)} < \frac{1}{n},$$

то рост сети положительно связан с ростом прибыли франчайзера. При этом когда

$$1 - \frac{2e}{a(1-k)} \leq 0,$$

то при любом числе агентов добавление в сеть нового агента приводит к росту прибыли центра. Если

$$1 - \frac{2e}{a(1-k)} > 0,$$

то при

$$n < \frac{1}{1 - \frac{2e}{a(1-k)}}$$

новый агент в сети приносит дополнительную прибыль центру, а при

$$n > \frac{1}{1 - \frac{2e}{a(1-k)}}$$

новый агент уменьшает прибыль центра.

Таким образом, при выполнении условия

$$1 - \frac{2e}{a(1-k)} > 0$$

оптимальный размер сети определяется выражением

$$(13) \quad n_i^K = \frac{a}{a - \frac{2e}{1-k}}.$$

Вычислительные эксперименты для франчайзинговых и посреднических сетей во всех трех случаях (равновесия Курно и Штакельберга, неравновесия Штакельберга) показали, что после оптимума идет достаточно медленное монотонное понижение прибыли центра [1].

Видимо,  $\cap$ -образная форма зависимости между прибылью центра и числом агентов объясняется тем, что при малом числе их числе агентов действие факторов, «положительно» влияющих на прибыль центра, превалирует над «отрицательно» влияющими. А при значительном числе агентов наблюдается обратная картина.

В этом плане могут представлять интерес те параметры сети, изменения которых (в большую или меньшую сторону) с ростом числа агентов всегда положительно связаны с прибылью центра. Ниже покажем справедливость для равновесия Курно, равновесия Штакельберга и неравновесия Штакельберга утверждений 1–7 [3, 5]. Чтобы упростить выкладки, при доказательстве положим, что  $c_i = e, i = 1, \dots, n$ .



**Утверждение 1.** Уменьшение разницы между ценой спроса и ценой предложения (т.е. уменьшение параметра  $k$ ) в модели «производитель–посредник–рынок» или повышение величины роялти (увеличение параметра  $k$ ) в модели «франчайзер–франчайзи–рынок» приводит к повышению прибыли центра и положительно связано с увеличением числа агентов.

*Доказательство.* Рассмотрим вначале франчайзинговую сеть. Так, для равновесия Курно оптимальное число агентов определяется по формуле (13), а прибыль франчайзера – по формуле (10). Подстановка (13) в (10) дает

$$(14) \quad I^K = \frac{ka^2}{4b},$$

т.е. прибыль франчайзера растет при увеличении роялти.

При этом

$$\frac{\partial n_i^K}{\partial k} = \frac{2e/(1-k)^2}{[a - 2e/(1-k)]^2} > 0,$$

т.е. оптимальное число франчайзи растет с увеличением роялти, что подтверждает выдвинутое предположение для этой сети.

Рассмотрим теперь посредническую сеть в состоянии равновесия Курно. Оптимальное число агентов в этой сети определяется как

$$(15) \quad n_i^K = \frac{a - c_0/(1-k)}{a - 2e/k + c_0/(1-k)}.$$

Тогда при оптимальном числе посредников прибыль центра составит

$$(16) \quad I^K = \frac{1-k}{4b} \left( a - \frac{c_0}{1-k} \right)^2 - d.$$

Знак производной выражения (16) по  $k$  доказывает данное утверждение о повышении прибыли, а именно

$$\frac{\partial I^K}{\partial k} = -\frac{1}{4b} \left( a - \frac{c_0}{1-k} \right) \left( a + \frac{c_0}{1-k} \right) < 0.$$

Кроме того, по (15) следует

$$\frac{\partial n_i^K}{\partial k} = - \frac{2e/k^2 \left[ a - c_0/(1-k) \right] + 2c_0/(1-k)^2 (a - e/k)}{\left[ (a - 2e/k + c_0/(1-k))^2 \right]}.$$

Заметим, что это выражение меньше нуля, так как  $(a - e/k) > 0$  (в противном случае соотношения для посреднической сети, аналогичные соотношениям (6), (8–11) для франчайзинговой сети, не имеют смысла) и  $(a - c_0/(1 - k)) > 0$ . Чтобы доказать последнее неравенство, рассмотрим выражение для прибыли центра. Согласно (3) и (5) прибыль центра составляет  $I = (1 - k)pQ - \phi(Q) =$

$$\begin{aligned} &= (1 - k)(a - bQ)Q - c_0Q - d_0 = (1 - k)aQ - (1 - k)bQ^2 - c_0Q - d_0 = \\ &= (1 - k)Q \left( a - \frac{c_0}{1 - k} \right) - (1 - k)bQ^2 - d_0. \end{aligned}$$

Для положительности прибыли необходимо, чтобы выражение  $a - c_0/(1 - k)$  было больше нуля. Поскольку параметр  $k$  контролирует центр, то очевидно, что это условие им будет выполнено.

Таким образом, мы показали, что оптимальное число посредников убывает с увеличением параметра  $k$ .

Итак, в случае равновесия Курно повышение цены предложения в рыночной цене товара приводит к повышению прибыли производителя и положительно связано с увеличением числа посредников.

Можно показать, что для посреднических и франчайзинговых сетей аналогичные выводы также имеют место в условиях равновесия и неравновесия Штакельберга. ●

В дополнение отметим, что повышение нормы лицензионного платежа (увеличение параметра  $k$ ) в контрактах франчайзинга позволяет франчайзеру более активно и с большими правами решать множество задач, способствующих привлекательности и росту франчайзинговой системы: возмещения затрат, связанных с контролем франчайзинговой системы; осуществления текущей деятельности и введения новшеств в системе; ограничения месторасположения франшизы; контроля и снижения

уровня риска в системе; увеличения спроса на продукцию [5, 6, 17, 18, 20, 21].

**Утверждение 2.** В равновесии Курно, равновесии и неравновесии Штакельберга прибыль франчайзера при оптимальном числе агентов (франчайзи) составляет одну и ту же величину

$$\frac{ka^2}{4b}.$$

Доказательство этого утверждения для равновесия Курно следует из вывода формулы (14). Аналогично показывается, что при оптимальном (по критерию прибыли франчайзера) числе агентов также  $I^S = \frac{ka^2}{4b}$  и  $I^{\bar{S}} = \frac{ka^2}{4b}$ . •

**Утверждение 3.** В равновесии Курно, равновесии и неравновесии Штакельберга прибыль производителя при оптимальном числе посредников составляет одну и ту же величину, равную

$$\frac{1-k}{4b} \left( a - \frac{c_0}{1-k} \right)^2 - d.$$

Доказательство этого утверждения для равновесия Курно следует из вывода формулы (16). Выражение прибыли производителя при оптимальном (по критерию прибыли производителя) числе посредников в равновесии и неравновесии Штакельберга, доказывающее данное утверждение, выводится аналогично формуле (16). •

**Утверждение 4.** Цена оптимальна, если оптимален размер сети.

*Доказательство.* Покажем справедливость этого утверждения для франчайзинга. Из выражении прибыли франчайзера (1), формулы цены (5) и формул для активности сети (6) и рыночной цены (7) в состоянии равновесия Курно имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial p} &= \frac{\partial(kpQ)}{\partial p} = k \left( Q + p \frac{\partial Q}{\partial p} \right) = k \left( Q - \frac{p}{b} \right) = \\ &= \frac{k}{n+1} \left[ n \left( a - \frac{e}{1-k} \right) - \left( a + \frac{ne}{1-k} \right) \right] = \frac{k}{n+1} \left[ n \left( a - \frac{2e}{1-k} \right) - a \right]. \end{aligned}$$

Последнее выражение равно нулю, а прибыль франчайзера достигает максимума при

$$n = n_I^K = \frac{a}{a - 2e/(1 - k)},$$

т.е., согласно (13), при оптимальном размере сети.

Аналогичным образом, для посреднической сети, используя (3) и (5), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial p} &= \frac{\partial((1 - k)pQ - c_0Q - d_0)}{\partial p} = (1 - k) \left( Q + p \frac{\partial Q}{\partial p} \right) - c_0 \frac{\partial Q}{\partial p} = \\ &= (1 - k) \left( Q - \frac{p}{b} \right) + \frac{c_0}{b}. \end{aligned}$$

Подставляя в полученное выражение формулы для  $Q$  и  $p$  в состоянии Курно посреднической сети [3], получаем, что

$$\frac{\partial I}{\partial p} = \frac{1 - k}{n + 1} \left[ n \left( a - \frac{e}{k} \right) - \left( a + \frac{ne}{k} \right) \right] + \frac{c_0}{b}.$$

Это выражение обращается в ноль, если размер сети оптимален (15), т.е. при

$$n = n_I^K = \frac{a - c_0/(1 - k)}{a - 2e/k + c_0/(1 - k)}.$$

Таким образом, данное утверждение имеет место для франчайзинговой и посреднической сетей в состоянии равновесия Курно. Аналогичным образом, используя соотношения, приведенные в работах [1, 3], показывается его справедливость и для состояния равновесия и неравновесия по Штакельбергу. ●

**Утверждение 5.** Снижение рыночной цены товара (услуги)  $p$  приводит к повышению прибыли центра и положительно связано с увеличением числа агентов, если сеть не достигла своего оптимального размера.

*Доказательство.* Если размер сети меньше оптимального, то, как следует из доказательства утверждения 4,  $\partial I / \partial p < 0$ . С другой стороны, нетрудно показать, что

$$\frac{\partial p^K}{\partial n} < 0, \frac{\partial p^S}{\partial n} < 0 \text{ и } \frac{\partial p^{\bar{S}}}{\partial n} < 0.$$

Это показывает, что рыночная цена снижается с ростом числа агентов. Для убедительности приведем выражения для этих производных для франчайзинговой сети

$$\frac{\partial p^K}{\partial n} = -\frac{1}{(n+1)^2} \left( a - \frac{e}{1-k} \right) < 0;$$

$$\frac{\partial p^S}{\partial n} = -\frac{1}{2n^2} \left( a - \frac{e}{1-k} \right) < 0;$$

$$\frac{\partial p^{\bar{S}}}{\partial n} = -\frac{2n}{n^2+1} \left( a + \frac{(n^2-1)e}{1-k} \right) < 0.$$

Таким образом, показано, что снижение цены положительно связано с ростом сети, если ее размер не достиг оптимального. ●

В связи со сказанным, пользуясь удобным случаем, авторы приносят свои извинения за неточности, допущенные при доказательстве этого утверждения в работах [3, 5].

**Утверждение 6.** Повышение активности сети (т.е. объема товара (услуг)  $Q$ ) приводит к повышению прибыли центра и положительно связано с ростом его сети, если сеть не достигла своего оптимального размера.

*Доказательство.* Этот вывод непосредственно следует из предыдущего, так как  $p = a - bQ$ . ●

**Утверждение 7.** С ростом числа агентов растет выпуск  $Q$  и этот рост выпуска обеспечивается исключительно за счет новых агентов.

*Доказательство.* Для экономии покажем это только для франчайзинговой сети в равновесии Курно.

Из неравенства

$$\frac{\partial Q^K}{\partial n} = \frac{1}{(n+1)^2 b} \left( a - \frac{e}{1-k} \right) > 0$$

следует, что с ростом числа агентов растет и суммарный выпуск сети. Но вместе с тем

$$\frac{\partial q_i^K}{\partial n} = -\frac{1}{(n+1)^2 b} \left( a - \frac{e}{1-k} \right) < 0,$$

т.е. падает количество реализованных каждым агентом товаров (услуг). Таким образом, рост выпуска обеспечивается исключительно за счет новых агентов. ●

Таким образом, развитие франчайзинговой системы не всегда дает рост прибыли франчайзера. Эффективному развитию франчайзинговой системы препятствуют не только свободное месторасположение франшизы и риск вложений франчайзера. Этот процесс может сопровождаться конфликтами между франчайзи одной и той же сети, каждый из которых заинтересован в монопольном обслуживании территории. Чтобы обеспечить баланс интересов при развитии сети, франчайзер должен выступать в роли «иерархического менеджера», используя для этого и закономерности во взаимосвязи между целями собственной прибыли и развитием франшизы.

Принимая во внимание полученные выше выводы, можно в целом ожидать, что конкуренция между агентами усиливает положительные отношения между величиной прибыли центра и развитием его сети.

## *6.2. СОЗДАНИЕ И ЛИКВИДАЦИЯ СВЯЗЕЙ*

Рассмотрим одну из возможных постановок задачи создания новых связей: при формировании своей сети центр может принять решение о самостоятельном выходе на потребителя, минуя своих агентов. Такая ситуация иллюстрируется выше на рис. 2 в виде новой связи «центр–рынок». Рассмотрим эту ситуацию на примере франчайзинговой сети [4].

Есть по крайней мере два обстоятельства в пользу выхода на рынок франчайзера.

Во-первых, рассматривая задачи повышения эффективности сети в целом и получения собственного дополнительного дохода, франчайзер не может не учитывать, если позволяют условия франшизного договора, такую потенциально выгодную возможность.

Во-вторых, для франчайзера это самый надежный способ провести маркетинговое исследование рынка, условий ведения бизнеса на данной территории или в отрасли и апробацию элементов своей тиражируемой системы.

Для описания такой сети применим теоретико-игровую модель, которая отличается от базовой модели «франчайзер–франчайзи–рынок» (1–2) добавлением новой связи – «взаимодействие центра с рынком».

В этой модели интересы сторон – максимизация прибыли – записываются традиционным образом:

– для головной фирмы-франчайзера (центра):

$$I(p, Q, q_0, k) = kpQ + pq_0 - \phi_0(q_0) \rightarrow \max_{k, q_0}$$

$$(17) k \in [0, 1],$$

$$q_0 \in [0, \bar{q}_0].$$

– для фирмы-франчайзи (агента):

$$(18) \Pi_i(p(Q + q_0), q_i, k) = (1 - k) \cdot p(Q + q_0) \cdot q_i - \phi_i(q_i) \rightarrow \max_{q_i}$$

$$q_i \in [0, \bar{q}_i], \quad i = 1, \dots, n.$$

Здесь  $q_0(q_i)$  – объем активности, а  $\bar{q}_0(\bar{q}_i)$  – предельно возможный объем активности центра (агента);  $pq_0$  – дополнительный доход франчайзера, обусловленный его активностью на рынке. Как и раньше, через  $Q$  обозначена суммарная активность франчайзи, т.е.  $Q = \sum_{i=1}^n q_i$ , а цена продукции с учетом деятельности на рынке головной фирмы определяется линейной функцией общего объема выпуска центром и агентами:

$$(19) p(Q + q_0) = a - b \cdot (Q + q_0).$$

Полагается, что затраты центра заданы линейной функцией:

$$(20) \phi_0(q_0) = c_0q_0 + d_0,$$

где  $c_0$  и  $d_0$  – предельные переменные и постоянные издержки центра, соответственно.

Обозначим решение данной модели рынка для равновесия Курно верхним индексом « $K^c$ ».

В утверждениях 8–11 показывается эффективность выхода франчайзера на рынок Курно [1, 4].

**Утверждение 8.** С вступлением на рынок франчайзера повышается активность сети.

*Доказательство.* По (6) можно получить равенство

$$(n+1)Q^K = \sum_{i=1}^n \frac{a - \frac{c_i}{1-k}}{b},$$

где  $Q^K$  – активность франчайзинговой сети в состоянии равновесия Курно, в которой только  $n$  франчайзи взаимодействуют с потребителями.

Также имеем (см. например, [1, 4]), что

$$(n+1)(Q^{K^c} + q_0^{K^c}) = q_0^{K^c} + \sum_{i=1}^n \frac{a - \frac{c_i}{1-k}}{b}.$$

Отсюда получаем неравенство, доказывающее утверждение:

$$(21) (Q^{K^c} + q_0^{K^c}) - Q^K = \frac{q_0^{K^c}}{n+1} > 0. \bullet$$

Но вместе с тем следует отметить, что снижается суммарная активность самих агентов. Действительно, по (21) имеем

$$Q^{K^c} - Q^K = \frac{q_0^{K^c}}{n+1} - q_0^{K^c} = -\frac{n}{n+1} q_0^{K^c} < 0.$$

Что и требовалось показать.

**Утверждение 9.** С вступлением на рынок франчайзера снижается цена товара (услуги).

*Доказательство.* Чтобы показать это утверждение, используем соотношения для цен

$$p^K = a - bQ^K \text{ и } p^{K^c} = a - b(Q^{K^c} + q_0^{K^c}).$$

Тогда с учетом (21) получаем

$$(22) p^{K^c} - p^K = -b(Q^{K^c} + q_0^{K^c} - Q^K) = -b \frac{q_0^{K^c}}{n+1} < 0. \bullet$$

**Утверждение 10.** Выход на рынок франчайзера дает повышение общего дохода сети, если  $\frac{a}{b} > Q^{K^c} + q_0^{K^c} + Q^K$ ; и, наоборот, при  $\frac{a}{b} < Q^{K^c} + q_0^{K^c} + Q^K$  будет снижение общего дохода сети.



*Доказательство.* Оценим следующую разность доходов сети после и до вступления на рынок центра, используя формулу цены (19) и выражение (21):

$$\begin{aligned} p^{K^c} (Q^{K^c} + q_0^{K^c}) - p^K Q^K &= (a - b(Q^{K^c} + q_0^{K^c}))(Q^{K^c} + q_0^{K^c}) - \\ &- (a - bQ^K)Q^K = a(Q^{K^c} + q_0^{K^c}) - aQ^K - b(Q^{K^c} + q_0^{K^c})^2 + \\ &+ b(Q^K)^2 = a \frac{q_0^{K^c}}{n+1} - b \frac{q_0^{K^c}}{n+1} (Q^{K^c} + q_0^{K^c} + Q^K) = \\ &= \frac{q_0^{K^c}}{n+1} (a - b(Q^{K^c} + q_0^{K^c} + Q^K)). \end{aligned}$$

Отсюда, если соотношение параметров  $a$  и  $b$  таково, что  $a/b > Q^{K^c} + q_0^{K^c} + Q^K$ , то выход на рынок франчайзера дает дополнительный доход сети. В противном случае его доход снизится. ●

Отметим, что  $a - b(Q^{K^c} + q_0^{K^c} + Q^K)$  формально представляет собой выражение цены, если на рынок поступил продукт в гипотетическом объеме  $Q^{K^c} + q_0^{K^c} + Q^K$ . Однако не гарантировано, что при такой активности сети цена будет положительной. Из содержательного смысла величин  $p^K = a - bQ^K$  и  $p^{K^c} = a - b(Q^{K^c} + q_0^{K^c})$  следует только, что  $a/b > Q^K$  и  $a/b > Q^{K^c} + q_0^{K^c}$ , соответственно,  $2a/b > Q^{K^c} + q_0^{K^c} + Q^K$ .

**Утверждение 11.** Выход на рынок франчайзера дает повышение его собственного дохода, если

$$a/b > Q^{K^c} + q_0^{K^c} + Q^K \cdot \frac{1}{1 + (n+1) \cdot (1-k)/k},$$

а при выполнении неравенства

$$a/b < Q^{K^c} + q_0^{K^c} + Q^K \cdot \frac{1}{1 + (n+1) \cdot (1-k)/k}$$

следует снижение дохода франчайзера.

*Доказательство.* До вступления франчайзера на рынок его доход определялся выражением  $kp^K Q^K$ , а после вступления с учетом (17) – выражением  $kp^{K^c} Q^{K^c} + p^{K^c} q_0^{K^c}$ . Изменение дохода определяется разностью  $kp^{K^c} Q^{K^c} + p^{K^c} q_0^{K^c} - kp^K Q^K$ , которая с учетом (21), (22) и (19) преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} kp^{K^c} Q^{K^c} + p^{K^c} q_0^{K^c} - kp^K Q^K &= kp^{K^c} (Q^{K^c} + q_0^{K^c} - Q^K) + (1-k)p^{K^c} q_0^{K^c} + \\ &+ kQ^K (p^{K^c} - p^K) = kp^{K^c} \frac{q_0^{K^c}}{n+1} + (1-k)p^{K^c} q_0^{K^c} - kbQ^K \frac{q_0^{K^c}}{n+1} = \\ &= q_0^{K^c} k/n+1 \left[ 1+(n+1) \cdot \frac{(1-k)/k} \right] \cdot \left[ a-b \left( Q^{K^c} + q_0^{K^c} + Q^K \cdot \frac{1}{1+(n+1) \cdot \frac{(1-k)/k}} \right) \right]. \end{aligned}$$

Анализ знака полученного выражения, аналогичный тому, что был проведен для утверждения 10, завершает доказательство данного утверждения. ●

### 6.3. РЕФЛЕКСИВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ АГЕНТАМИ

Приведем ряд основных сопутствующих понятий согласно работе [13].

«*Рефлексивной* является игра, в которой информированность игроков не является общим знанием. С точки зрения теории игр и рефлексивных моделей принятия решений целесообразно разделять информационную и стратегическую рефлексию.

*Информационная рефлексия* – процесс и результат размышлений игрока о том, каковы значения неопределенных параметров, что об этих значениях знают и думают его оппоненты (другие игроки). При этом собственно «игровая» компонента отсутствует, так как никаких решений игрок не принимает.

*Стратегическая рефлексия* – процесс и результат размышлений игрока о том, какие принципы принятия решений используют его оппоненты (другие игроки) в рамках информированности, которую он им приписывает в результате информационной рефлексии».

Рассмотрим одну из возможных задач информационной рефлексии для базовой франчайзинговой сети, в которой принимается во внимание влияние взаимной информированности агентов при принятии решений об объемах выпуска продукции (услуг) на конкурентных рынках.

Пусть в рефлексивной модели франчайзинговой системы не все параметры игры-франшизы являются общим знанием. В этой модели прибыль агентов-франчайзи зависит не только от их собственных стратегий – решений по объемам выпуска продукции (услуг), но и от спроса на нее потребителей, величина которого не является общим знанием. У каждого агента имеются вполне определенные представления о величине спроса, о том, каковы представления (также вполне определенные) остальных агентов, и т.д. В этой ситуации каждый агент рынка должен смоделировать стратегии других агентов, чтобы выбором собственной стратегии максимизировать свою прибыль, учитывая в ней стратегии других агентов, которые оказываются рациональными с точки зрения рассматриваемого агента по имеющимся у него представлениям о других агентах.

Ограничимся достаточно простым случаем точечной структуры информированности агентов-франчайзи о параметре спроса и поиска решений в соответствующей рефлексивной игре. Более сложные структуры информированности агентов можно найти в специальной литературе по рефлексивным играм, например [14–16].

Пусть имеется 2 типа агентов: 1) агенты, неадекватно информированные о величине спроса  $a$ , т.е. они оценивают спрос как  $\alpha_i a$  ( $\alpha_i \neq 1$ ). Согласно работе [16] агентов с  $\alpha_i > 1$  будем называть «оптимистами», так как их ожидания превосходят реальный спрос, а с  $\alpha_i < 1$ , соответственно, «пессимистами»; 2) агенты, адекватно информированные о величине спроса  $a$  ( $\alpha_i = 1$ ). Причем полагаем также, что все агенты одинаково взаимно информированы. В качестве концепции решений рефлексивной игры используем информационное равновесие, которое является обобщением равновесия Нэша в некооперативных играх [16].

Согласно условию  $\partial \Pi_i / \partial q_i = 0$ , определяющего оптимальный выпуск  $i$ -го агента, мы имеем

$$q_i = \frac{\alpha_i a - \frac{c_i}{1-k}}{b} - Q,$$

$$Q = \sum_{i=1}^n q_i = \sum_{i=1}^n \left( \alpha_i a - \frac{c_i}{1-k} \right) - nQ,$$

$$Q = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n \left( \alpha_i a - \frac{c_i}{1-k} \right).$$

Отсюда

$$(23) \quad q_i = \frac{\alpha_i a - \frac{c_i}{1-k}}{b} - \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n \left( \alpha_i a - \frac{c_i}{1-k} \right).$$

Приведем конкретный расчетный пример. Пусть имеется три агента: 1-й и 2-й являются адекватными, а 3-й агент – «пессимист» и  $\alpha_3 = 0,8$ . Положим также, что  $a = 1$ ;  $b = 0,001$ ;  $k = 0,5$ ;  $c_1 = c_2 = c_3 = 0,1$ .

Для нахождения информационного равновесия  $q_1^*$ ,  $q_2^*$ ,  $q_3^*$  в этой рефлексивной игре используем соотношения (23). Получим следующий результат:  $q_1^* = q_2^* = 250$ ,  $q_3^* = 50$ .

Для сравнения классическое равновесие Курно–Нэша дает решение  $q_1^* = q_2^* = q_3^* = 200$ .

Остановимся теперь на задаче стратегической рефлексии. В этой связи одна из возможных постановок задачи «управления» для мультиагентной сети может состоять в следующем: принять концепцию построения однородной сети, когда интеллектуальные агенты одного уровня рефлексии разыгрывают равновесие Курно–Нэша, или центру лучше проектировать такую сеть с региональными агентами-«лидерами» по Штакельбергу.

Подход к решению этой задачи приведем, основываясь на сравнительном анализе трех вариантов построения сети:

- все агенты действуют по Курно;
- один из агентов выступает «лидером», остальные действуют по Курно;

– все агенты выступают в роли «лидеров».

Сравнительный анализ вариантов построения сети проведем по следующим параметрам:

- общий объем активности франчайзинговой сети;
- активность отдельных фирм-франчайзи;
- рыночная цена продукции;
- прибыль фирм-франчайзи;
- прибыль франчайзера;
- величина роялти;
- оптимальное число фирм в франчайзинговой сети.

Чтобы несколько облегчить выкладки, положим, что предельные издержки всех фирм одинаковы и  $c_i = e$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Напомним также, что указанным вариантам соответствуют индексы  $K, S, \bar{S}$ .

**Утверждение 12.** Для общего объема активности агентов франчайзинговой сети выполняются неравенства

$$(24) Q^{\bar{S}}(k) > Q^S(k) > Q^K(k).$$

*Доказательство.* Из справедливости при целых  $n > 1$  неравенств  $\frac{n^2}{n^2 + 1} > \frac{2n - 1}{2n} > \frac{n}{n + 1}$  следуют доказываемые неравенства для общих активностей, которые с учетом зависимости их значений от параметра роялти  $k$  записываются ниже как функции от  $k$ .

Здесь по [1]  $Q^S(k) = \frac{1}{2nb} \cdot \left( (2n - 1)a - \frac{\sum_{i=1}^n c_i + (n - 1)c_1}{1 - k} \right)$  и  $Q^{\bar{S}}(k) = \frac{n}{(n^2 + 1)b} \cdot \left( na - \frac{\sum_{i=1}^n c_i}{1 - k} \right)$ , а  $Q^K(k)$  задается формулой (6). ●

**Утверждение 13.** Для объемов активности агентов франчайзинговой сети выполняются неравенства

$$(25) q_1^S(k) > q_j^{\bar{S}}(k) > q_j^K(k) > q_{j \neq 1}^S(k).$$

*Доказательство.* Нетрудно установить при целых  $n > 1$  справедливость неравенств:  $\frac{1}{2} > \frac{n}{n^2 + 1} > \frac{1}{n+1} > \frac{1}{2n}$ . Используя эти неравенства и формальные выражения для объемов выпуска фирм, получаем, что при заданном значении параметра роялти  $k$  имеют место следующие соотношения:

Здесь использованы выражение (8) и результаты работы [1]:

$$q_1^S(k) = \frac{1}{2b} \cdot \left( a + \frac{\sum_{i=1}^n c_i - (n+1)c_1}{1-k} \right);$$

$$q_j^S(k) = \frac{1}{2nb} \cdot \left( a + \frac{\sum_{i=1}^n c_i - 2nc_j + (n-1)c_1}{1-k} \right), \quad j = 2, \dots, n;$$

$$q_j^{\bar{S}}(k) = \frac{n}{(n^2 + 1)b} \cdot \left( a + \frac{n \cdot \sum_{i=1}^n c_i - (n^2 + 1)c_j}{1-k} \right), \quad j = 1, \dots, n. \bullet$$

Сопоставление общего объема выпуска в точках равновесия Курно и Штакельберга (см. (24)) с выпуском по отдельным фирмам (см. (25)) показывает, что рост общего выпуска в точке равновесия Штакельберга происходит за счет первой фирмы, в то время как другие снижают свою активность по сравнению с состоянием равновесия по Курно.

**Утверждение 14.** Для цен на продукцию справедливы неравенства

$$(26) \quad p^K(k) > p^S(k) > p^{\bar{S}}(k).$$

*Доказательство.* Используя формулы для цен (7) и в работе [1],

$$p^S = \frac{1}{2n} \cdot \left( a + \frac{\sum_{i=1}^n c_i + (n-1)c_1}{1-k} \right) \quad \text{и} \quad p^{\bar{S}} = \frac{1}{n^2 + 1} \cdot \left( a + \frac{n \cdot \sum_{i=1}^n c_i}{1-k} \right),$$

имеем:

$$p^K - p^S = \frac{n-1}{2n(n+1)} \cdot \left( a - \frac{e}{1-k} \right) > 0;$$

$$p^S - p^{\bar{S}} = \frac{(n-1)^2}{2n(n^2+1)} \cdot \left( a - \frac{e}{1-k} \right) > 0. \bullet$$

Неравенства (26) прямо противоположны неравенствам (25), т.е. чем выше общий объем выпуска, тем ниже цена.

**Утверждение 15.** Для прибыли агентов (франчайзи) выполняются следующие неравенства:

$$\Pi_1^S(k) > \Pi_1^K(k) \text{ при } n > 1;$$

$$\Pi_j^S(k) < \Pi_j^K(k) \text{ при } j = 2, \dots, n \text{ и } n > 1;$$

$$\Pi_j^K(k) > \Pi_j^{\bar{S}}(k) \text{ при } j = 1, \dots, n \text{ и } n > 1;$$

$$\Pi_j^S(k) < \Pi_j^{\bar{S}}(k) \text{ при } j = 1, \dots, n \text{ и } n = 2, 3;$$

$$\Pi_j^S(k) > \Pi_j^{\bar{S}}(k) \text{ при } j = 1, \dots, n \text{ и } n \geq 4.$$

*Доказательство.* По (9) и [1] при  $j = 2, \dots, n$  и  $n > 1$ , пропуская промежуточные математические выкладки, имеем:

$$\begin{aligned} \Pi_j^K - \Pi_j^S &= \left( \frac{1-k}{(n+1)^2 b} - \frac{1-k}{4n^2 b} \right) \cdot \left( a - \frac{e}{1-k} \right)^2 = \\ &= \frac{(1-k)(n-1)(3n+1)}{4n^2(n+1)^2 b} \cdot \left( a - \frac{e}{1-k} \right)^2 > 0. \end{aligned}$$

При  $j = 1, \dots, n$  и  $n > 1$  получаем:

$$\begin{aligned} \Pi_j^K - \Pi_j^{\bar{S}} &= \left( \frac{1-k}{(n+1)^2 b} - \frac{n(1-k)}{(n^2+1)^2 b} \right) \cdot \left( a - \frac{e}{1-k} \right)^2 = \\ &= \frac{(1-k)(n^3-1)(n-1)}{(n^2+1)^2(n+1)^2 b} \cdot \left( a - \frac{e}{1-k} \right)^2 > 0. \end{aligned}$$

При  $n > 1$ :

$$\Pi_1^S - \Pi_1^K = \left( \frac{1-k}{4nb} - \frac{1-k}{(n+1)^2 b} \right) \cdot \left( a - \frac{e}{1-k} \right)^2 =$$

$$= \frac{(1-k)(n-1)^2}{4n(n+1)^2 b} \cdot \left( a - \frac{e}{1-k} \right)^2 > 0.$$

Далее при  $j = 2, \dots, n$  и  $n > 1$  оценим разность

$$\begin{aligned} \Pi_j^S - \Pi_j^{\bar{S}} &= \left( \frac{1-k}{4n^2 b} - \frac{(1-k)n}{(n^2+1)^2 b} \right) \cdot \left( a - \frac{e}{1-k} \right)^2 = \\ &= \frac{(1-k)(n^2 + 2n\sqrt{n} + 1)((n-1)(\sqrt{n}-1) - 2)}{4n^2(n^2+1)^2 b} \cdot \left( a - \frac{e}{1-k} \right)^2. \end{aligned}$$

Из последнего выражения следует, что при  $n = 2, 3$  будет  $\Pi_j^S - \Pi_j^{\bar{S}} < 0$ , а при  $n \geq 4$  справедливо  $\Pi_j^S - \Pi_j^{\bar{S}} > 0$ .

Объединение рассмотренных случаев завершает доказательство утверждения. ●

**Утверждение 16.** Для прибыли франчайзера выполняются следующие неравенства:

1)  $I^K > I^S > I^{\bar{S}}$ , если параметры  $a, e, k, n$  таковы, что

$$1 - \frac{2e}{a(1-k)} > \frac{1}{n};$$

2)  $I^K < I^S < I^{\bar{S}}$ , если  $n > 1$  и параметры  $a, e, k$  таковы, что

$$1 - \frac{2e}{a(1-k)} \leq 0.$$

*Доказательство.* При фиксированном значении параметра роялти  $k$  сравним друг с другом доходы центра в точках равновесия Курно, равновесия и неравновесия Штакельберга. Отметим, что здесь вывод результатов сравнения более полон и проведен более рациональным методом, чем это сделано в работе [1].

Используем соотношения (10) и аналогичные им, полученные в работе [1]:

$$\begin{aligned} I^S &= \frac{(2n-1)k}{4n^2 b} \cdot \left( a - \frac{e}{1-k} \right) \left( a + \frac{(2n-1)e}{1-k} \right); \\ I^{\bar{S}} &= \frac{n^2 k}{(n^2+1)^2 b} \cdot \left( a - \frac{e}{1-k} \right) \left( a + \frac{n^2 e}{1-k} \right). \end{aligned}$$



По (12)  $\partial I^K / \partial n < 0$ , т.е. доход центра падает с ростом числа агентов, если параметры  $a, e, k$  таковы, что  $1 - \frac{2e}{a(1-k)} > \frac{1}{n}$ .

Заметим, что  $I^S$  можно получить из выражения для  $I^K$  подстановкой вместо  $n$  выражения  $2n - 1$ . Учитывая, что при  $n > 1$  будет  $2n - 1 > n$  и при  $1 - \frac{2e}{a(1-k)} > \frac{1}{n}$  будет  $1 - \frac{2e}{a(1-k)} > \frac{1}{2n-1}$ , имеем  $I^K > I^S$ .

Аналогично  $I^{\bar{S}}$  получаем из выражения для  $I^S$  подстановкой вместо  $2n - 1$  выражения  $n^2$ . Так как  $n^2 > 2n - 1$ , имеем  $1 - \frac{2e}{a(1-k)} > \frac{1}{n^2}$  и  $I^S > I^{\bar{S}}$ .

Таким образом, показали, что при

$$1 - \frac{2e}{a(1-k)} > \frac{1}{n}$$

справедливы соотношения между доходами центра  $I^K > I^S > I^{\bar{S}}$ .

Пусть теперь параметры  $a, e, k$  таковы, что  $1 - \frac{2e}{a(1-k)} \leq 0$ .

Тогда по (12)  $\partial I^K / \partial n > 0$ , т.е. доход центра растет с ростом числа агентов. Так как при  $n > 1$  выполняются неравенства  $n^2 > 2n - 1 > n$ , то  $I^K < I^S < I^{\bar{S}}$ . ●

Случай  $1 - \frac{2e}{a(1-k)} \in \left(0, \frac{1}{n}\right]$  требует дополнительного сравнительного анализа доходов центра.

**Утверждение 17.** Для величины роялти выполняются следующие неравенства:

$$A_1^S(k) > A_1^K(k) > A_1^{\bar{S}}(k);$$

$$A_j^k(k) > A_j^S(k) \text{ при } j = 2, \dots, n;$$

$$A_j^K(k) > A_j^{\bar{S}}(k) \text{ при } j = 2, \dots, n;$$

$A_1^S(k) > A_j^S(k)$  при  $j = 2, \dots, n$ .

*Доказательство.* Анализ начнем со сравнения величины роялти для состояний равновесия Курно и Штакельберга.

Для первой фирмы, т.е. при  $j = 1$ , на основании (11) и [1] имеем:

$$\begin{aligned} A_1^K(k) - A_1^S(k) &= \\ &= \frac{k}{(n+1)^2 b} \left( a + \frac{ne}{1-k} \right) \left( a - \frac{e}{1-k} \right) - \frac{k}{4nb} \left( a + \frac{(2n-1)e}{1-k} \right) \left( a - \frac{e}{1-k} \right) = \\ &= -\frac{k(n-1)}{4n(n+1)^2 b} \cdot \left( a - \frac{e}{1-k} \right) \cdot \left[ \left( a(n-1) + (2n^2 + n + 1) \frac{e}{1-k} \right) \right] < 0. \end{aligned}$$

Для остальных фирм франчайзинговой сети ( $j = 2, \dots, n$ ) имеем:

$$\begin{aligned} A_j^K(k) - A_j^S(k) &= \\ &= \frac{k}{(n+1)^2 b} \left( a + \frac{ne}{1-k} \right) \left( a - \frac{e}{1-k} \right) - \frac{k}{4n^2 b} \left( a + \frac{(2n-1)e}{1-k} \right) \left( a - \frac{e}{1-k} \right) = \\ &= \frac{k(n-1)}{4n^2(n+1)^2 b} \cdot \left( a - \frac{e}{1-k} \right) \cdot \left[ \left( a(3n+1) + \frac{e}{1-k} (n-1)(2n+1) \right) \right] > 0. \end{aligned}$$

Для точек равновесия Курно и неравновесия Штакельберга по  $j = 1, \dots, n$  имеем:

$$\begin{aligned} A_j^K(k) - A_j^{\bar{S}}(k) &= \\ &= \left( a - \frac{e}{1-k} \right) \cdot \left[ \frac{k}{(n+1)^2 \cdot b} \cdot \left( a + \frac{ne}{1-k} \right) - \frac{nk}{(n^2+1)^2 \cdot b} \cdot \left( a + \frac{n^2 e}{1-k} \right) \right] = \\ &= \frac{k(n-1)}{(n+1)^2 (n^2+1)^2 b} \left( a - \frac{e}{1-k} \right) \cdot \left[ a(n^3-1) + n(2n^2+n+1) \cdot \frac{e}{1-k} \right] > 0. \end{aligned}$$

Сравнение роялти первой фирмы в состояниях равновесия и неравновесия Штакельберга дает

$$\begin{aligned}
 A_1^S(k) - A_1^{\bar{S}}(k) &= \\
 &= \left( a - \frac{e}{1-k} \right) \cdot \left[ \frac{k}{4nb} \cdot \left( a + \frac{(2n-1)e}{1-k} \right) - \frac{nk}{(n^2+1)^2 b} \cdot \left( a + \frac{n^2 e}{1-k} \right) \right] = \\
 &= \frac{k(n-1)^2}{4n(n^2+1)^2 b} \cdot \left( a - \frac{e}{1-k} \right) \cdot \left[ a(n+1)^2 + \frac{e}{1-k} (2n^2 + n + 1) \right] > 0.
 \end{aligned}$$

Таким образом, мы показали:

$$A_1^S(k) > A_1^K(k) > A_1^{\bar{S}}(k);$$

$$A_j^k(k) > A_j^S(k), \text{ если } j = 2, \dots, n;$$

$$A_j^K(k) > A_j^{\bar{S}}(k), \text{ если } j = 2, \dots, n.$$

Также следует, что  $A_1^S(k) > A_j^S(k)$  при  $j = 2, \dots, n$ . ●

Сравнение роялти по остальным фирмам ( $j = 2, \dots, n$ ) в состояниях равновесия и неравновесия Штакельберга, используя их формальные выражения по [1], показывает:

$$\begin{aligned}
 A_j^S(k) - A_j^{\bar{S}}(k) &= \\
 &= \left( a - \frac{e}{1-k} \right) \cdot \left[ \frac{k}{4n^2 b} \cdot \left( a + \frac{(2n-1)e}{1-k} \right) - \frac{nk}{(n^2+1)^2 b} \cdot \left( a + \frac{n^2 e}{1-k} \right) \right] = \\
 &= \frac{k}{b} \cdot \left( a - \frac{e}{1-k} \right) \times \\
 &\times \left[ \left( a - \frac{e}{1-k} \right) \left( \frac{1}{4n^2} - \frac{n}{(n^2+1)^2} \right) + \frac{e}{1-k} \cdot \left( \frac{2n}{4n^2} - \frac{n(n^2+1)}{(n^2+1)^2} \right) \right] = \\
 &= \frac{k(n-1)}{4n^2(n^2+1)^2 b} \cdot \left( a - \frac{e}{1-k} \right) \times \\
 &\times \left[ \left( a - \frac{e}{1-k} \right) (n^3 - 3n^2 - n - 1) - \frac{e}{1-k} 2n(n^2+1)(n+1) \right] = \\
 &= \frac{k(n^2-1)}{2n(n^2+1)b} \cdot \left( a - \frac{e}{1-k} \right) \left[ \left( a - \frac{e}{1-k} \right) \cdot \frac{n^3 - 3n^2 - n - 1}{2n(n^2+1)(n+1)} - \frac{e}{1-k} \right].
 \end{aligned}$$

Следует отметить, что при  $n = 2, 3$  последнее выражение отрицательно.

При целом  $n = 7$  выражение  $\frac{n^3 - 3n^2 - n - 1}{2n(n^2 + 1)(n + 1)}$  достигает своего абсолютного максимума, равного всего 0,0336. При этом имеем

$$\begin{aligned} \left(a - \frac{e}{1-k}\right) \cdot \frac{n^3 - 3n^2 - n - 1}{2n(n^2 + 1)(n + 1)} - \frac{e}{1-k} &= \left(a - \frac{e}{1-k}\right) \cdot 0,0336 - \frac{e}{1-k} = \\ &= \left(a - \frac{e}{1-k}\right) \cdot 0,0336 - \frac{e}{1-k} \approx 0,0336 \cdot \left(a - 30,76 \cdot \frac{e}{1-k}\right). \end{aligned}$$

Поэтому представляется, что для реальных данных последнее выражение будет отрицательным, т.е. следует предполагать, что  $A_j^S(k) < A_j^{\bar{S}}(k)$ . Данная гипотеза требует экспериментального подтверждения.

**Утверждение 18.** Для оптимального числа агентов (франчайзи) выполняются неравенства  $n_I^K(k) > n_I^S(k) > n_I^{\bar{S}}(k)$ .

*Доказательство.* Оптимальное с точки зрения дохода франчайзера число агентов в франчайзинговой сети без учета их первоначального взноса в точках равновесия Курно, равновесия и неравновесия Штакельберга заданы формальными соотношениями (13),

$$n_I^S = \frac{1 - \frac{e}{a(1-k)}}{1 - \frac{2e}{a(1-k)}} \text{ и } \left(n_I^{\bar{S}}\right)^2 = \frac{1}{1 - \frac{2 \cdot \bar{c}}{a(1-k)}},$$

соответственно [1]. Чтобы упростить анализ, введем обозначение выражения, встречающегося в каждом из этих соотношений:

$$z = 1 - \frac{2e}{a(1-k)}.$$

При этом естественно предполагать, что параметр роялти выбран так, что  $z > 0$ . Иначе указанные формальные соотношения

для оптимального числа агентов теряют всякий содержательный смысл.

Тогда с учетом того, что  $\frac{e}{a(1-k)} = \frac{1-z}{2}$  и  $z < 1$ , имеем:

$$n_i^K - n_i^S = \frac{1}{z} - \frac{1 - \frac{1-z}{2}}{z} = \frac{1-z}{2z} > 0,$$

$$n_i^K - n_i^{\bar{S}} = \frac{1}{z} - \frac{1}{\sqrt{z}} = \frac{\sqrt{z} - z}{z\sqrt{z}} > 0.$$

Также  $n_i^S - n_i^{\bar{S}} = \frac{1 - \frac{1-z}{2}}{z} - \frac{1}{\sqrt{z}} = \frac{(1-\sqrt{z})^2}{2z} > 0.$

Таким образом, показано, что  $n_i^K(k) > n_i^S(k) > n_i^{\bar{S}}(k)$ . •

#### 6.4. ВОЗДЕЙСТВИЕ НА ЦЕЛЕВЫЕ ФУНКЦИИ АГЕНТОВ

Рассмотрим два вида воздействия центра на целевые функции агентов:

- воздействие через параметр  $k$ ;
- воздействие через предельные переменные издержки агентов.

В предложенных моделях основное воздействие центра на целевые функции агентов сети осуществляется через параметр  $k$ .

Иерархическая игра  $\Gamma_1$  дает наиболее выгодное для центра значение этого параметра при условии, что агенты действуют оптимальным для себя образом. Это значение находится из условия

$$(27) \quad \frac{\partial I}{\partial k} = 0,$$

где  $I$  – прибыль центра, а агенты оптимизируют выбор своей активности  $q$ .

Другие возможности поиска баланса интересов дает игра  $\Gamma_1$  с фиксированными платежами. Рассмотрим эту игру для базовой франчайзинговой сети, в которой выплата агентом роялти строится не по схеме отчислений, размер которых устанавлива-

ется фиксированной ставкой процента от объема продаж, а по схеме фиксированной сервисной платы. Этот вариант расчета приведем для сети в состоянии равновесия Курно.

Размер фиксированной сервисной платы для  $j$ -й фирмы-франчайзи ( $A_{\Gamma_1, j}^K$ ) устанавливается равным платежам франчайзеру, рассчитанным по стратегии  $\Gamma_1$ , т.е.

$$(28) A_{\Gamma_1, j}^K = k_{\Gamma_1}^K \cdot p^K \cdot q_j^K,$$

где  $k_{\Gamma_1}^K$  определяется по (27), а  $p^K$  и  $q_j^K$  – по (7) и (8) при  $k = k_{\Gamma_1}^K$ .

Дополнительно после решения игры  $\Gamma_1$  каждая фирма-франчайзи при фиксированном платеже решает задачу определения оптимальной для себя активности:

$$(29) \Pi_i(p, q_i, A_{\Gamma_1, i}^K) = p \cdot q_i - c_i \cdot q_i - d_i - A_{\Gamma_1, i}^K \rightarrow \max_{q_i}.$$

Ввиду важности для последующего анализа приведем решениям игры  $\Gamma_1$  с фиксированной сервисной платой [1]:

$$(30) Q_{\Gamma_1^f}^K = \frac{1}{(n+1)b} \cdot (na - \sum_{i=1}^n c_i),$$

$$(31) p_{\Gamma_1^f}^K = \frac{1}{n+1} \cdot (a + \sum_{i=1}^n c_i),$$

$$(32) q_{\Gamma_1^f, j}^K = \frac{1}{(n+1)b} \cdot (a + \sum_{i=1}^n c_i - (n+1)c_j), \quad j = 1, \dots, n;$$

$$(33) \Pi_{\Gamma_1^f, j}^K = \frac{1}{(n+1)^2 \cdot b} \cdot (a + \sum_{i=1}^n c_i - (n+1)c_j)^2 - d_j - A_{\Gamma_1, j}^K, \quad j = 1, \dots, n;$$

$$(34) I_{\Gamma_1^f}^K = I_{\Gamma_1}^K = \sum_{i=1}^n A_{\Gamma_1, j}^K = \frac{k_{\Gamma_1}^K}{(n+1)^2 \cdot b} \cdot \left( a + \frac{\sum_{i=1}^n c_i}{1 - k_{\Gamma_1}^K} \right) \cdot \left( na - \frac{\sum_{i=1}^n c_i}{1 - k_{\Gamma_1}^K} \right);$$

$$(35) A_{\Gamma_1, j}^K = \frac{k_{\Gamma_1}^K}{(n+1)^2 \cdot b} \cdot \left( a + \frac{\sum_{i=1}^n c_i}{1 - k_{\Gamma_1}^K} \right) \cdot \left( a + \frac{\sum_{i=1}^n c_i - (n+1)c_j}{1 - k_{\Gamma_1}^K} \right),$$

$$j = 1, \dots, n.$$

Приведем ряд утверждений, показывающих эффективность механизмов с фиксированной сервисной платой.

**Утверждение 19.** Применение механизма с фиксированной сервисной платой дает максимальную активность сети.

*Доказательство.* Так, для равновесной по Курно сети, сравнивая выражения для общего объема активности (6) и (30), имеем для каждого  $k \in (0, 1)$ :

$$Q^K(k) = \frac{1}{(n+1)b} \left( na - \frac{\sum_{i=1}^n c_i}{1-k} \right) < Q_{\Gamma_f}^K = \frac{1}{(n+1)b} \cdot \left( na - \sum_{i=1}^n c_i \right)$$

что доказывает данное утверждение. Таким же образом подобный факт устанавливается для равновесия и неравновесия Штакельберга, а также для сети, в которой центр конкурирует с агентами. ●

**Утверждение 20.** Применение механизма с фиксированной сервисной платой дает минимальную цену товара (услуги).

*Доказательство.* Для доказательства этого утверждения используем соотношения для цен  $p^K = a - bQ^K$  и  $p_{\Gamma_f}^K = a - bQ_{\Gamma_f}^K$ .

Тогда с учетом результата предыдущего пункта получаем

$$(36) \quad p_{\Gamma_f}^K - p^K = -b(Q_{\Gamma_f}^K - Q^K) < 0.$$

Этот факт справедлив для равновесия и неравновесия Штакельберга, а также для сети, в которой центр конкурирует с агентами. ●

**Утверждение 21.** Механизмы  $\Gamma_1$  с фиксированной сервисной платой дают максимальный по  $k$  ( $k \in [0, 1)$ ) объем активности франчайзи, если его предельные издержки  $c_j$  не ниже средних.

*Доказательство.* Чтобы показать справедливость этого утверждения, достаточно сравнить выражения (32) и (8):

$$\begin{aligned} q_{\Gamma_f,j}^K - q_j^K(k) &= \frac{1}{(n+1)b} \left( a + \sum_{i=1}^n c_i - (n+1)c_j \right) - \\ &- \frac{1}{(n+1)b} \left( a + \frac{\sum_{i=1}^n c_i - (n+1)c_j}{1-k} \right) = \frac{kn}{(n+1)(1-k)b} \left( \frac{(n+1)c_j}{n} - \frac{\sum_{i=1}^n c_i}{n} \right) = \\ &= \frac{kn}{(n+1)(1-k)b} \left( \frac{c_j}{n} + c_j - \bar{c} \right) > \frac{kn}{(n+1)(1-k)b} (c_j - \bar{c}) \geq 0. \end{aligned}$$

Это утверждение справедливо также для агентов, действующих по Штакельбергу. ●

**Утверждение 22.** Для прибыли центра выполняется равенство  $I_{\Gamma^f} = I_{\Gamma_1}$ .

*Доказательство.* Для равновесия Курно прибыль центра  $I_{\Gamma^f}^K$  и  $I_{\Gamma_1}^K$  дается одним и тем же выражением (34). Это же имеет место и для равновесия и неравновесия Штакельберга. ●

**Утверждение 23.** При оптимальном для головной фирмы числе агентов (франчайзи) механизм  $\Gamma^f$  с фиксированной сервисной платой является менее выгодным для них, чем механизм  $\Gamma_1$ , при котором величина роялти рассчитывается от объема продаж.

*Доказательство.* Начнем с ситуации равновесия по Курно, для равновесия и неравновесия Штакельберга доказательство проводится аналогичным образом.

Используя (33), (28) и (7-9) оценим следующую разность доходов фирм при  $k = k_{\Gamma_1}^K$ :

$$\begin{aligned} \Pi_{\Gamma^f, j}^K - \Pi_{\Gamma_1, j}^K &= \frac{1}{(n+1)^2 b} \cdot (a-e)^2 - \\ &- \frac{k_{\Gamma_1}^K}{(n+1)^2 b} \cdot \left( a + \frac{ne}{1-k_{\Gamma_1}^K} \right) \cdot \left( a - \frac{e}{1-k_{\Gamma_1}^K} \right) - \frac{1-k_{\Gamma_1}^K}{(n+1)^2 b} \cdot \left( a - \frac{e}{1-k_{\Gamma_1}^K} \right)^2 = \\ &= \frac{k_{\Gamma_1}^K e}{(1-k_{\Gamma_1}^K)(n+1)^2 b} \cdot \left[ \frac{k_{\Gamma_1}^K e}{1-k_{\Gamma_1}^K} - (n-1) \cdot \left( a - \frac{e}{1-k_{\Gamma_1}^K} \right) \right]. \end{aligned}$$

Оценим знак выражения в квадратных скобках. При

$$n = n_0^K = \frac{a-e}{a - \frac{e}{1-k_{\Gamma_1}^K}}$$

оно обращается в ноль, при  $n > n_0^K$  – отрицательно, а при  $n < n_0^K$  – положительно.



Таким образом, для точки равновесия Курно механизм  $\Gamma_1^f$  предпочтительнее для фирм, чем механизм  $\Gamma_1$ , если число фирм  $n$  на рынке меньше  $n_0^K$ , т.е.

$$(37) \quad n < \frac{a - e}{a - \frac{e}{1 - k_{\Gamma_1}^K}}.$$

Если число фирм больше  $n_0^K$ , т.е. неравенство (37) меняется на противоположное, то предпочтительными будет механизм  $\Gamma_1$  с роялти от объема продаж.

Отметим, что при оптимальном для головной фирмы числе франчайзи ( $n_I^K$ ), определяемого без учета первоначального взноса соотношением (13), имеем  $n_I^K > n_0^K$ .

Действительно,

$$n_I^K = \frac{1}{1 - \frac{2e}{a(1 - k_{\Gamma_1}^K)}} = \frac{a}{a - \frac{2e}{1 - k_{\Gamma_1}^K}} > n_0^K = \frac{a - e}{a - \frac{e}{1 - k_{\Gamma_1}^K}},$$

так как после несложных преобразований доказательство этого неравенству сводится к очевидному неравенству:

$$a - \frac{2e}{1 - k_{\Gamma_1}^K} > -\frac{e}{1 - k_{\Gamma_1}^K}.$$

Здесь уместно привести следующее примечание: полагается, что

$a - \frac{2e}{1 - k_{\Gamma_1}^K} > 0$ , иначе выражение (13) для  $n_I^K$  при  $k = k_{\Gamma_1}^K$  не

имеет содержательного смысла.

Что доказывает данное утверждение. ●

Управление издержками франчайзи является важной задачей франчайзера. Практические пути ее решения достаточно разнообразны и предполагают различные услуги, которые могут оказываться франчайзером при продаже франшизы, поддержке и развитии франшизной системы [1].

Переходя к модельным исследованиям, рассмотрим влияние переменных предельных издержек агентов на прибыль центра.

Для франчайзинговой сети в равновесии Курно, используя соответствующее выражение (10) для прибыли франчайзера, имеем

$$(38) \quad \frac{\partial I^K}{\partial (\sum_{i=1}^n c_i)} = \frac{k}{(n+1)^2 b(1-k)} \cdot \left( (n-1)a - \frac{2\sum_{i=1}^n c_i}{1-k} \right).$$

Прибыль франчайзера максимальна, если

$$\sum_{i=1}^n c_i = \frac{a(n-1)(1-k)}{2}.$$

Если суммарные предельные издержки франчайзи меньше этой величины, то знак производной положителен и прибыль франчайзера растет с их ростом; если больше, то прибыль падает с ростом суммарных предельных издержек.

Также имеем

$$(39) \quad \frac{\partial I^K}{\partial \bar{c}} = \frac{kn}{(n+1)^2 b(1-k)} \cdot \left( (n-1)a - \frac{2n\bar{c}}{1-k} \right),$$

где  $\bar{c} = \frac{\sum_{i=1}^n c_i}{n}$ ;

$$(40) \quad \frac{\partial I^K}{\partial e} = \frac{kn}{(n+1)^2 b(1-k)} \cdot \left( (n-1)a - \frac{2ne}{1-k} \right).$$

Оптимальные для франчайзера предельные издержки франчайзи составят

$$(41) \quad e_I^K = \frac{a(n-1)(1-k)}{2n}.$$

Из (40) и (41) следует: если предельные издержки франчайзи меньше правой части (41), то прибыль франчайзера растет с их ростом; если больше, то прибыль падает с ростом предельных издержек.

Приведем также без вывода следующие соотношения для оптимальных предельных издержек франчайзи:

$$e_I^S = \frac{a(n-1)(1-k)}{2n-1};$$

$$e_I^{\bar{S}} = \frac{a(n^2-1)(1-k)}{2n^2}.$$

Приведем для сведения соответствующие выражения для посреднических сетей, опуская математические выкладки:

$$\left(\sum_{i=1}^n c_i\right)_I^K = \frac{a(n-1)k}{2} + \frac{c_0(n+1)k}{2(1-k)};$$

$$e_I^K = \frac{a(n-1)k}{2n} + \frac{c_0(n+1)k}{2n(1-k)};$$

$$e_I^S = \frac{a(n-1)k}{2n-1} + \frac{c_0nk}{(2n-1)(1-k)};$$

$$e_I^{\bar{S}} = \frac{a(n^2-1)k}{2n^2} + \frac{c_0(n^2+1)k}{2n^2(1-k)}.$$

Покажем справедливость следующего утверждения.

**Утверждение 24.** Произведение  $\frac{\partial I^K}{\partial \bar{c}} \cdot \frac{\partial I^K}{\partial n}$  не больше ну-

ля и обращается в нуль только при  $\frac{\partial I^K}{\partial \bar{c}} = 0$  и  $\frac{\partial I^K}{\partial n} = 0$ .

*Доказательство.* Для доказательства используем (10) и (12), принимая во внимание замену  $e$  на  $\bar{c}$ . Тогда

$$(42) \quad \frac{\partial I^K}{\partial n} = -\frac{ka(n-1)}{(n+1)^3 b} \cdot \left(a - \frac{\bar{c}}{1-k}\right) \cdot \left(1 - \frac{2n\bar{c}}{a(n-1)(1-k)}\right).$$

С учетом (39) имеем

$$\frac{\partial I^K}{\partial \bar{c}} \cdot \frac{\partial I^K}{\partial n} = -\frac{k^2 n}{(n+1)^5 b^2 (1-k)} \left(a - \frac{\bar{c}}{1-k}\right) \cdot \left((n-1)a - \frac{2n\bar{c}}{1-k}\right)^2.$$

Из (39), (42), последнего выражения и условия

$$a - \frac{\bar{c}}{1-k} > 0,$$

показанного ранее в статье, следует доказываемое утверждение. ●

Необходимо отметить, что знак каждого сомножителя определяется знаком выражения

$$(n-1)a - \frac{2n\bar{c}}{1-k},$$

зависящего от выбора параметров  $a$ ,  $n$ ,  $\bar{c}$ ,  $k$ .

Таким образом: 1) если доход центра растет с ростом средних переменных издержек агентов, т.е.

$$(n-1)a - \frac{2n\bar{c}}{1-k} > 0,$$

то он (доход центра) падает с увеличением числа агентов, и наоборот; 2) если доход центра падает с ростом средних переменных издержек агентов, т.е.

$$(n-1)a - \frac{2n\bar{c}}{1-k} < 0,$$

то он (доход центра) растет с увеличением числа агентов, и наоборот.

Отсюда следуют такие рекомендации для центра: при росте издержек агентов и сопутствующему ему падению дохода центра целесообразно увеличивать сеть, а при росте издержек агентов и сопутствующему ему росте дохода центра последнему целесообразно не развивать сеть.

Справедливость доказанного утверждения показывается аналогичным образом для посреднических и франчайзинговых сетей в состоянии равновесия Курно и неравновесия Штакельберга. Для сетей в равновесии Штакельберга вместо средних переменных издержек агентов следует рассмотреть случай равенства переменных издержек агентов, т.е.  $c_i = e$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

## 7. Заключение

В статье на основе единого теоретико-игрового подхода представлен спектр модельных исследований многоагентных франчайзинговых и посреднических сетей на конкурентных рынках.

Представлены базовые теоретико-игровые модели сетевого взаимодействия «франчайзер–франчайзи–рынок» и «производитель–посредник–рынок». В них сделаны обычные для моделей олигополии предположения о линейности функций затрат и обратной функции спроса, дающие возможность аналитического представления решения. В отличие от классических моделей олигополии, состоящей исключительно из агентов-

производителей, в предложенной базовой модели франчайзинговых сетей агенты могут являться фирмами-производителями, торговыми точками или предприятиями сферы услуг, а в модели посреднической сети агенты выполняют только посреднические функции, производителем выступает только центр. Авторским расширением традиционного модельного описания олигополистического рынка является введение в модель нового субъекта-центра, на которого возлагаются функции управления сетевым взаимодействием агентов. Таким образом, вместо традиционных систем «центр–агент» и «агент–рынок» рассматривается сеть «центр–агент–рынок».

При формировании устойчивых сетей авторы опирались на наиболее распространенные на сегодняшний день классические концепции решения некооперативных игр – равновесия Курно–Нэша и равновесия по Штакельбергу.

Рассмотрен ряд важных задач центра, связанных с повышением эффективности стабильных сетей. При решении задачи обеспечения контролируемого роста сети и оптимизации числа ее участников отмечены закономерности во взаимосвязи между целями собственной прибыли центра и развитием сети. Установлены условия, при которых для повышения эффективности сети в целом и получения собственного дополнительного дохода центру целесообразно принять решение о самостоятельном выходе на потребителя, конкурируя со своими агентами.

Рефлексивное управление сетевым взаимодействием представлено в статье задачами информационной и стратегической рефлексии. В задаче информационной рефлексии рассмотрен случай точечной структуры информированности агентов о параметре спроса и поиск решений в соответствующей рефлексивной игре. В задаче стратегической рефлексии анализируются различные концепции построения сети: 1) однородная сеть, когда все интеллектуальные агенты одного уровня рефлексии разыгрывают равновесие Курно–Нэша; 2) однородная сеть, когда все интеллектуальные агенты одного уровня рефлексии выступают «лидерами» по Штакельбергу; 3) неоднородная сеть, в которой некоторые агенты выступают региональными «лидерами».

ми» по Штакельбергу, а остальные агенты действуют по Курно–Нэшу.

Рассмотрены возможности повышения эффективности сетей на основе стратегий игр  $\Gamma_1$  и игр  $\Gamma_1$  с фиксированными платежами, проведен сравнительный анализ этих игр. Представлены также модельные исследования влияния предельных переменных издержек агентов на прибыль центра и его решения по развитию сети.

### Литература

1. АЛГАЗИН Г.И., АЛГАЗИНА Д.Г. *Моделирование много-агентных франчайзинговых систем.* – Барнаул: АлтГУ, 2009. – 91 с.
2. АЛГАЗИН Г.И., АЛГАЗИНА Д.Г. *Теоретико-игровое моделирование сетевого взаимодействия целенаправленных субъектов в многоагентной системе «центр–агент–конкурентный рынок»* // Известия АлтГУ. – 2012. – №1/2(73). – С. 61–65.
3. АЛГАЗИН Г.И., АЛГАЗИНА Ю.Г. *Моделирование поведения экономических агентов в системе «производитель–посредник–конкурентный рынок»* // Управление большими системами. – 2011. – №32. – С. 83–108.
4. АЛГАЗИНА Д.Г. *Теоретико-игровое моделирование отношений франчайзинга в условиях конкуренции центра и агентов рынке* // Известия АлтГУ. – 2012. – №1/2(73). – С. 66–71.
5. АЛГАЗИНА Д.Г., АЛГАЗИН Г.И. *Моделирование взаимосвязи прибыли франчайзера и развития франчайзинговой системы на конкурентном рынке* // Известия АлтГУ. – 2011. – №2/1(70). – С. 261–264.
6. АРДАШЕВА Л.М., СКОПИН А.О. *Положительные отношения между целями прибыли франчайзера и ростом франчайзинговой системы* // Управление экономическими системами: электрон. науч. журн.[Электронный ресурс]. – 2007. – №2(10). – Режим доступа: <http://uecs.mcnip.ru> (дата обращения: 08.05.2013).

7. БУЛАВСКИЙ В.А. *Модель олигополии с рынками производственных факторов* // Экономика и математические методы. – 1999. – Т. 35, №4. – С. 78–86.
8. БУЛАВСКИЙ В.А., КАЛАШНИКОВ В.В. *Равновесие и обобщенных моделях Курно и Штакельберга* // Экономика и математические методы. – 1995. – Т.31, вып.4. – С. 151–163.
9. ГЕРМЕЙЕР Ю.Б. *Игры с противоположными интересами*. – М.: Наука, 1976. – 328 с.
10. ГУБКО М.В. *Управление организационными системами с сетевым взаимодействием агентов. I. Обзор теории сетевых игр* // Автоматика и телемеханика. – 2004. – №8. – С. 115–132.
11. ГУБКО М.В. *Управление организационными системами с сетевым взаимодействием агентов. II. Задачи стимулирования* // Автоматика и телемеханика. – 2004. – №9. – С. 131–148.
12. ДЮСУШЕ О.М. *Статическое равновесие Курно-Нэша и рефлексивные игры олигополии: случай линейных функций спроса и издержек* // Экономический журнал ВШЭ. – 2006. – №1. – С. 3–32.
13. НОВИКОВ Д.А. *Модели стратегической рефлексии* // Автоматика и телемеханика. – 2012. – №1. – С. 3–18.
14. НОВИКОВ Д.А., ЧХАРТИШВИЛИ А.Г. *Рефлексивные игры*. – М.: СИНТЕГ, 2003. – 149 с.
15. НОВИКОВ Д.А., ЧХАРТИШВИЛИ А.Г. *Прикладные модели информационного управления*. – М.: ИПУ РАН, 2004. – 129 с.
16. ЧХАРТИШВИЛИ А.Г. *Информационное равновесие: точечные структуры информированности* // Автоматика и телемеханика. – 2003. – №10. – С. 111–122.
17. BRICKLEY J., DARK F. *The Choice of Organization Form: The Case of Franchising* // Journal of Financial Economics. – 1987. – Vol. 18. – P. 401–420.
18. CASTROGIOVANNI G., ROBERT J., SCOTT J. *Franchise Failure Rates: An Assessment of Magnitude and Influencing Factors* // Journal of Small Business Management. – 1993. – Vol. 31(2). – P. 105–114.

19. JACKSON M.O., VOLINSKY A.A. *Strategic Model of Social and Economic Networks* // Journal of Economic Theory. – 1996. – №71. – P. 44–74.
20. KNOTT A.M. *The Dynamic Value of Hierarchy* // Management Science. – 2001. – Vol. 47(3). – P. 430–448.
21. LAL R. *Improving Channel Coordination Through Franchising* // Marketing Science. – 1990. – Vol. 5. – P. 299–318.
22. METZLER C., HOBBS B.S., PANG J.-S. *Nash-Cournot Equilibria in Power Markets on a Linearized DC network with Arbitrage: Formulations and Properties* // Networks and Spatial Economics. – 2003. – Vol. 3, №2. – P. 123–150.
23. NOVSHEK W. *On the Existence of Cournot Equilibrium* // Review Economic Studies. – 1985. – Vol. 52(1), №168. – P. 85–98.
24. SHERALI H.D., SOYSTER A.L., MURPHY F.H. *Stackelberg-Nash-Cournot Equilibria: Characterizations and Computations* // Operations Research. – 1983. – Vol. 31, №2. – P. 253–276.
25. STACKELBERG H. *The Theory of the Market Economy*. – Oxford: Oxford Univ. Press, 1952. – 289 p.



## MODELLING NETWORK INTERACTIONS ON COMPETITIVE MARKETS

**Gennady Algazin**, Altai State University, Barnaul, Doctor of Science, professor (algazin@socio.asu.ru).

**Daria Algazina**, Altai State University, Barnaul, associated professor (darya.algazina@mail.ru).

*Abstract: We suggest a game-theoretical model of a multi-agent network, whose purpose is promotion of a homogeneous product (or a service) on a competitive market. We study efficiency of networks employing Cournot and Stackelberg equilibria for the basic applied model of «franchisor-franchisee-market» and that of «producer-mediator-market» under linear costs and inverse demands (which is typical for models of oligopoly), and obtain close-form solutions. The novel feature of the model is the presence of a principal who is responsible for network interactions management and network efficiency improvement.*

Keywords: networks' typology, game-theoretical model, network equilibrium, Cournot, Stackelberg, network interactions management, network efficiency, franchising, trade mediation.

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии А. Г. Чхартишвили  
Поступила в редакцию 08.10.2012.  
Опубликована 31.05.2013.*

УДК 519.83

ББК 22.1

## ДИНАМИКА ДВОЙНЫХ НАИЛУЧШИХ ОТВЕТОВ В ИГРЕ ФОРМИРОВАНИЯ ТОПОЛОГИИ БЕСПРОВОДНОЙ AD HOC СЕТИ<sup>1</sup>

Базенков Н. И.<sup>2</sup>,

(ФГБУН Институт проблем управления им. В.А.Трапезникова  
РАН, Москва)

*В статье рассматривается задача формирования топологии беспроводной ad hoc сети. На плоскости расположены узлы, оснащенные беспроводными передатчиками. Каждый узел может изменять мощность своего передатчика. Требуется назначить передатчикам такие мощности, чтобы обеспечить связность сети и минимизировать суммарную мощность. Задача формирования топологии рассматривается как некооперативная игра. Исследуются алгоритмы коллективного поведения узлов, использующие правило двойного наилучшего ответа. Это правило принятия решения, которое моделирует поведение агентов первого ранга рефлексии. Предложено два алгоритма формирования сети, использующие метод двойных наилучших ответов. Эффективность предложенных алгоритмов исследуется в численных экспериментах и сравнивается с традиционным теретико-игровым алгоритмом простых наилучших ответов.*

Ключевые слова: игра формирования сети, ad hoc сети, рефлексия, двойной наилучший ответ.

### **Введение**

Сети ad hoc образуются несколькими беспроводными узлами без использования какой-либо дополнительной инфраструк-

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, гранты № 11-01-00771, 13-07-00491 А.

<sup>2</sup> Николай Ильич Базенков, ИПУ РАН (n.bazenzov@gmail.com).

туры [23]. Различают несколько видов ad hoc-сетей. Мобильные ad hoc-сети (MANET) применяются в военных и спасательных операциях. Сенсорные сети (WSN) используют для сбора данных на промышленных объектах, для экологического мониторинга в городах, для исследования природных территорий. В настоящее время изучаются возможности для того, чтобы использовать недорогие ad hoc сети для увеличения пропускной способности и расширения зоны покрытия сотовых сетей поколений 3g и 4g [10].

Устройства в ad hoc сетях обычно работают от автономных аккумуляторов, поэтому большое значение имеют методы обеспечения энергоэффективности. Управление топологией (topology control) называется динамическая настройка мощности передатчиков для поддержания связности сети, минимизации энергопотребления или улучшения качества связи. Мы рассматриваем только процесс формирования сети, когда требуется назначить каждому узлу такую мощность, чтобы обеспечить связность сети и минимизировать суммарную мощность узлов.

В классическом представлении теории игр агенты – это субъекты, обладающие свободой воли, но предпочитающие действовать рационально, т.е. максимизировать свою функцию полезности. Изначально теория игр изучала ситуации, в которых агентами являлись коммерческие фирмы, политические партии и любые другие сущности, в которых решения принимаются людьми. Сейчас методы теории игр оказались востребованы применительно к техническим системам, в частности, телекоммуникационным сетям.

Устройства в технических системах не обладают способностью принимать решения. Но разработчик может задать алгоритм поведения устройства, имитирующий рациональное принятие решений. Допустим, каждое устройство наделено встроенной функцией полезности, которая оценивает качество выполнения устройством своих задач в зависимости от целей устройства, его действий и состояния внешней среды. В системе действует несколько таких устройств и каждое стремится максимизировать

свою функцию полезности, не учитывая полезности других. Такие задачи изучает некооперативная теория игр, тогда устройства можно считать агентами. Если есть алгоритм, который координирует действия устройств, то вместо теории игр используются стандартные методы управления и оптимизации.

В работе исследуется правило принятия решения агентами, названное двойным наилучшим ответом. Рассматриваемая игра формирования топологии сети характерна наличием большого числа равновесий, которые сильно отличаются между собой по эффективности. Равновесия, получаемые классическим теоретико-игровым алгоритмом последовательного наилучшего ответа, сильно зависят от порядка действий агентов. Установлено, что если при формировании сети применять алгоритм двойного наилучшего ответа, результат более устойчив к порядку действий и в среднем обеспечивает меньшие суммарные затраты.

Предложено два алгоритма формирования сети. В одном узлы сети используют двойной наилучший ответ до тех пор, пока сеть не стабилизируется, затем переключаются на обычный наилучший ответ, чтобы завершить формирование связной сети. В другом алгоритме узлы используют обычный наилучший ответ до тех пор, пока могут улучшать им свою полезность, затем переходят на двойной наилучший ответ. При этом двойной наилучший ответ узел может использовать ограниченное количество раз. Оба алгоритма в численных экспериментах показали улучшение качества сети относительно стандартного наилучшего ответа.

Структура статьи следующая. В разделе 1 приводится краткий обзор работ, посвященных применению теории игр к управлению беспроводными сетями. В разделе 2 сформулирована игра управления топологией. Правило двойного наилучшего ответа и его модификации приведены в разделе 3. В разделе 6 описаны предложенные алгоритмы формирования сети. Результаты экспериментов приводятся в разделе 5. Выводы и направления будущих исследований сформулированы в разделе 6.

## 1. Обзор

Управлению топологией беспроводных сетей посвящено много работ, которые отличаются используемыми моделями сети, критериями качества и ограничениями, которым должна удовлетворять сеть. Подробный обзор теоретических результатов приведен в [21]. Поиск решения, минимизирующего суммарную мощность узлов, является *NP*-трудной задачей [9]. Централизованные алгоритмы целочисленной оптимизации и некоторые эвристики приведены в [8].

Разработано много децентрализованных алгоритмов управления топологией. Например, алгоритм LMST [16] реализует децентрализованный поиск минимального остовного дерева. Для этого узлы должны располагать информацией о расположении своих соседей. Для алгоритма СВТС узлам требуется умение определять направление к другим узлам [17]. В алгоритме ХТС каждый узел ранжирует своих соседей по качеству сигнала, затем создает  $k$  лучших связей [25]. Современные и больше ориентированные на практическое применение алгоритмы рассматриваются в [7].

Методы теории игр в последнее время активно применяются для моделирования конфликтных ситуаций, возникающих в телекоммуникационных сетях, в частности, в беспроводных. Есть обширный обзор по применению теории игр в сенсорных сетях [22], многие описанные в нем задачи характерны и для других типов сетей. В работах [11, 15] управление топологией сформулировано как некооперативная игра, имеющая потенциальную функцию, решением является равновесие Нэша. В [24] исследуется Байесова игра узлов разных типов, в качестве решения используется равновесие Байесово равновесие Нэша. В [18] узлы используют обучающую динамику стохастического фиктивного розыгрыша (*stochastic fictitious play*) в повторяющейся игре, решением также является равновесие Нэша.

Основные положения теории рефлексивных игр описаны в [5]. Алгоритм коллективного поведения, во многом аналогич-

ный двойному наилучшему ответу, используется в [4] для управления группой агентов, которые должны проникнуть через систему датчиков. В [3] с позиций теории рефлексивных игр рассматриваются дуополия Курно, поиск консенсуса в многоагентной системе, активная экспертиза. К задаче формирования сети двойной наилучший ответ впервые применен в [1].

Управление топологией имеет много общего с играми формирования социально-экономических сетей [2]. В них рассматриваются разные концепции устойчивых сетей, а также динамические процедуры формирования сети [14]. Но работы, в которых бы теория рефлексивных игр применялась к формированию сетей, на данный момент неизвестны.

## 2. Игра формирования беспроводной сети

### 2.1. МОДЕЛЬ СЕТИ

Сеть состоит из множества устройств, или узлов,  $N = \{1, \dots, n\}$ , расположенных на плоскости. Каждое устройство оснащено беспроводным передатчиком, мощность которого может изменяться. Мощности всех передатчиков задаются вектором  $p = (p_1, \dots, p_n)$ ,  $p_i \in [0, p^{max}]$ . Считаем, что узлы однородны и максимальная мощность одинакова для каждого узла.

Узел  $i$  может успешно передавать данные узлу  $j$ , если выполняется условие

$$(1) \quad \frac{p_i}{(\delta_{ij})^\alpha} \geq \beta,$$

где  $p_i$  – мощность передатчика узла  $i$ ,  $\beta \geq 1$  – параметр, задающий требуемое качество передачи,  $\alpha \geq 2$  – показатель затухания сигнала и  $\delta_{ij}$  – Евклидово расстояние между узлами  $i$  и  $j$ . Эта модель описывает распространение радиосигнала в однородной среде без посторонних помех, переотражений и других явлений, встречающихся в реальных условиях. Тем не менее такая модель часто используется в работах, посвященных управлению топологией [21].

**Определение 1.** Множество узлов, для которых будет выполнено условие (1), если узел  $i$  установит мощность  $p_i$ , назо-

вом исходящей  $p_i$ -окрестностью узла  $i$  и будем обозначать как  $N_i^{out}(p_i)$ .

**Определение 2.** Графом коммуникации, порожденным вектором мощностей  $p$ , называется направленный граф  $g(p) = (N, E(p))$ , где  $N$  – множество вершин, соответствующих узлам сети,  $E(p)$  – множество ребер, где  $(i, j) \in E(p)$ , если для узлов  $i, j$  выполняется условие (1).

В протоколах беспроводной связи стандартов 802.11 [12] и 802.15 [13], которые используются в ad hoc сетях, широко применяются acknowledgement сообщения – «отчеты о доставке». Этот механизм требует наличия двусторонней связи между узлами  $i$  и  $j$ . Поэтому введем еще одно определение.

**Определение 3.** Связным неориентированным подграфом графа  $g = (N, E)$  называется граф  $\bar{g} = (N, \bar{E})$ , где  $(i, j) \in \bar{E}$ , если  $(i, j) \in E$  и  $(j, i) \in E$ .

Вектор мощностей, в котором каждый узел устанавливает свою максимальную мощность, обозначим как  $p^{max}$ . Граф, порождаемый этим вектором, обозначим как  $g^{max} = g(p^{max})$ .

Критерием качества сети является суммарная мощность узлов

$$(2) \quad C^{total}(p) = \sum_{i \in N} p_i.$$

При формировании топологии необходимо задать узлам такие мощности  $p$ , чтобы  $g(p)$  имел связный неориентированный подграф и суммарная мощность узлов 2 была минимальна.

## 2.2. ОПИСАНИЕ ИГРЫ

Здесь приводится игра формирования топологии, сформулированная в [15].

**Определение 4.** Игрой в стратегической форме называется тройка

$$(3) \quad \Gamma = \langle N, \{A_i\}_{i \in N}, \{u_i\}_{i \in N} \rangle,$$

где  $N = \{1, \dots, n\}$  – множество игроков, или агентов;  $A_i$  – множество возможных действий  $i$ -го агента;  $u_i: \times_{i \in N} A_i \rightarrow \mathbb{R}$  – функции полезности агентов.

В игре формирования топологии агентами являются узлы сети  $N = 1, \dots, n$ . Действием агента  $i$  является мощность его передатчика  $p_i \in [0, p^{max}]$ . Функция полезности сконструирована так, чтобы отражать требование связности сети и уменьшения мощности передатчика:

$$(4) \quad u_i(p) = M f_i(g(p)) - p_i.$$

Здесь  $f_i(g(p))$  – количество узлов, с которыми узел  $i$  связан в графе  $g(p)$ . Учитываются узлы, к которым существуют пути из двусторонних ребер. Константа  $M > p^{max}$  отражает приоритет обеспечения связности сети над минимизацией мощности. Функция (4) при необходимости может быть модифицирована таким образом, чтобы учитывать не только связность, но и другие критерии, например, длину путей в графе  $g(p)$ .

### 2.3. РАВНОВЕСИЯ В ИГРЕ ФОРМИРОВАНИЯ ТОПОЛОГИИ

**Определение 5.** Профиль действий  $a^*$  называется равновесием Нэша, если для каждого агента  $i$  и для любого действия  $a_i \neq a_i^*$  выполняется условие

$$(5) \quad u_i(a_i, a_{-i}^*) \leq u_i(a_i^*, a_{-i}^*).$$

Если в системе установилось равновесие Нэша, ни один агент не сможет увеличить полезность, в одиночку изменив свое действие. В рассматриваемой игре формирования топологии существует больше одного равновесия Нэша. Проблема в том, что эти равновесия могут сильно отличаться по суммарным затратам мощности.

На рис. 1 показаны все возможные равновесия, возникающие в игре формирования сети из трех узлов, расположенных на отрезке длины два. Узел  $b$  смещен относительно середины отрезка на малую величину  $\varepsilon$ .

Равновесия на рис. 1а и 1б не являются допустимыми решениями задачи формирования сети, поскольку граф не связан. Равновесие на рис. 1в допустимо, но не оптимально. Только равновесие на рис. 1г является оптимальным с точки зрения минимума суммарной мощности узлов. Интерес представляют алгоритмы, которые бы позволили исключить недопустимые и субоптимальные равновесия.



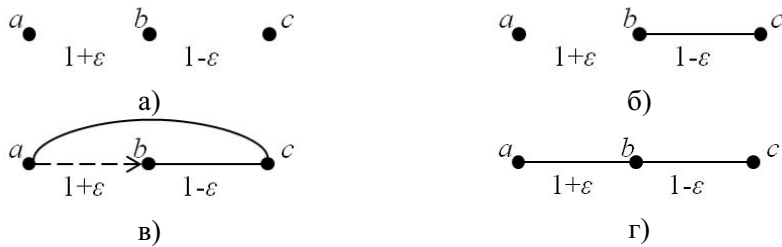


Рис. 1. Равновесия в в игре формирования сети из трех узлов.  
 а) тривиальное недопустимое равновесие; б) другое недопустимое равновесие; в) субоптимальное равновесие;  
 г) оптимальное равновесие

### 3. Коллективное поведение агентов

#### 3.1. НАИЛУЧШИЙ ОТВЕТ

Анализ игры в стратегической форме позволяет понять, какие в данной игре существуют равновесия. Механизм выбора одного из этих равновесий задается алгоритмом коллективного поведения агентов. Так называется итерационный процесс, при котором агенты на каждом шаге выбирают свое действие по некоторому локальному правилу. В англоязычной литературе это также называется процессом обучения (learning process). Одним из наиболее распространенных и естественных алгоритмов поиска равновесия является алгоритм последовательных наилучших ответов (iterated best response).

**Определение 6.** *Наилучшим ответом (best response) агента  $i$  на обстановку  $a_{-i}$  называется действие*

$$(6) \quad BR_i(a_{-i}) = \arg \max_{x \in A_i} u_i(x, a_{-i}).$$

Алгоритм последовательных наилучших ответов определяется следующим образом. Зафиксируем начальный вектор действий  $a^0$ . Агенты действуют поочередно в некотором порядке. Обычно считается, что порядок задается случайно. На шаге  $k$  агент  $i$  выбирает свое действие как наилучший ответ на текущую обстановку  $a_{-i}^{k-1}$ .

Алгоритм последовательных наилучших ответов зависит от начального состояния  $a^0$  и от порядка действий узлов. Например, равновесие на рис. 1в установится, если узлы начинают с максимальной мощности передатчика и первым изменяет мощность узел  $b$ . Если первыми действуют  $a$  или  $c$ , устанавливается равновесие на рис. 1г. Если начальная мощность всех узлов недостаточна для образования хотя бы одной связи, при любом порядке действий установится тривиальное равновесие на рис. 1а.

Следующий алгоритм проявляет большую устойчивость к начальным действиям и порядку ходов, чем наилучший ответ.

### 3.2. ДВОЙНОЙ НАИЛУЧШИЙ ОТВЕТ

Наилучший ответ (6) моделирует поведение «недалновидного» агента, который предполагает, что обстановка в игре останется неизменной. Теория рефлексивных игр, разработанная в [5], рассматривает агентов, которые пытаются прогнозировать будущую реакцию оппонентов на свои действия.

В [5] вводится понятие ранга рефлексии агента. Агенты, обладающие 0-м рангом рефлексии, используют простой наилучший ответ (6). Агент, обладающий 1-м рангом рефлексии, считает, что все остальные агенты обладают рангом 0. Ранги рефлексии выше 1 мы рассматривать не будем, их применение к анализу прикладных задач теории игр описано в монографии [3].

Агенты 1-го ранга рефлексии используют следующее правило принятия решений

**Определение 7.** Двойным наилучшим ответом агента  $i$  на обстановку  $a_{-i}$  называется действие

$$(7) \quad BR_i^2(a_{-i}) = \arg \max_{x \in A_i} u_i(x, BR_{-i}(x, a_{-i})),$$

где  $BR_{-i}(x, a_{-i}) = (BR_1(x, a_{-i}), \dots, BR_{i-1}(x, a_{-i}), BR_{i+1}(x, a_{-i}), \dots, BR_n(x, a_{-i}))$  – вектор одновременных наилучших ответов других агентов на выбор агентом  $i$  действия  $x$ .

Насколько известно, в чистом виде правило (7) не применялось в алгоритмах коллективного поведения. В [4] агенты выбирают действие как линейную комбинацию текущего действия и

двойного наилучшего ответа. Такой подход обеспечивает устойчивость коллективного поведения, но применим только если действия выражаются непрерывной величиной.

Если в примере на рис. 1 все узлы используют правило двойного наилучшего ответа, то при любом порядке ходов и для любого начального вектора мощностей установится оптимальное равновесие на рис. 1г, даже если начальные мощности равны нулю. Это можно проверить непосредственно, применив правило (7).

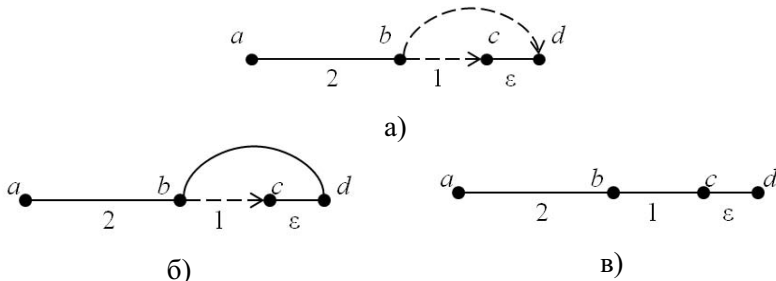


Рис. 2. Заикливание двойного наилучшего ответа а) сеть, на которой останавливается динамика двойного наилучшего ответа; б) субоптимальное равновесие  $C^{total} = 5 + 2\varepsilon$ ; в) оптимальное равновесие  $C^{total} = 5 + \varepsilon$

Существуют сети, для которых правило двойного наилучшего ответа, примененное в чистом виде, «заикливается», не достигая связной сети. Пример на рис. 2. Узлы  $c$  и  $d$ , расположенные близко друг от друга, готовы установить «дешевую» связь ( $c, d$ ) и «надеются» на то, что сосед установит «дорогую» связь с узлом  $b$ . Алгоритм двойного наилучшего ответа стабилизируется и получает сеть на рис. 2а.

Если после остановки алгоритма все узлы переключатся на простой наилучший ответ, образуется одна из сетей на рис. 2б и 2в. В этом примере с помощью двойного наилучшего ответа удастся исключить наиболее «дорогие» связи ( $a, c$ ) и ( $a, d$ ). Разница между равновесиями на рис. 2б и 2в уже незначительна.

Не является очевидным, что двойной наилучший ответ вообще остановится. Но для всех экспериментально исследованных в разделе 5 примеров это выполняется. Также наверняка можно формально охарактеризовать конфигурации узлов как на рис. 2, для которых двойной наилучший ответ получает несвязную сеть.

### 3.3. ОГРАНИЧЕНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СЛОЖНОСТИ

Вычисление обычного наилучшего ответа (6) не требует от агента знания полезностей других агентов, достаточно знать обстановку  $a_{-i}$ . Для вычисления двойного наилучшего ответа уже требуется знание функций полезности других агентов и умение вычислять их наилучшие ответы. В системах с большим количеством агентов это может представлять сложность. Естественно ограничить множество агентов, чьи действия  $i$  может прогнозировать. Предложим правило ограниченного двойного наилучшего ответа.

**Определение 8.** *Рефлексивным множеством (Reflexive Set)  $R_i$  агента  $i$  назовем множество агентов, для которых  $i$  может вычислить наилучший ответ (6).*

**Определение 9.** *Ограниченным двойным наилучшим ответом агента  $i$  на обстановку  $a_{-i}$  называется действие*

$$(8) \quad BR_{i,R_i}^2(a_{-i}) = \arg \max_{x \in A_i} u_i(x, a_{N \setminus R_i}, BR_{R_i}(x, a_{-i})),$$

где  $a_{N \setminus R_i}$  – действия агентов, не входящих в  $R_i$ ;  $BR_{R_i}(x, a_{-i})$  – наилучшие ответы агентов, входящих в  $R_i$ .

Выбор рефлексивных множеств фактически определяет свойства алгоритма коллективного поведения. В предельных случаях, если  $R_i = \emptyset$ , получаем обычный алгоритм наилучшего ответа. Если  $R_i = N$ , получаем двойной наилучший ответ без ограничений.

В данной работе рефлексивным множеством узла  $i$  считаются все узлы, потенциально находящиеся в зоне действия передатчика  $i$ . Для них выполняется условие успешной передачи (1), если  $i$  установит максимальную мощность своего передатчика.

$$(9) \quad R_i = \{j \mid j \in N_i^{out}(p_i^{max})\}.$$

Аналогично можно выбрать  $N_i^{out}(p_i^{max}/2)$ ,  $N_i^{out}(2p_i^{max})$ ,  $k$  ближайший узлов и т.д.

Также для каждого агента можно ввести ограничение на использование двойного наилучшего ответа. Пусть каждый агент может использовать правило (7) только  $q$  раз, а затем обязан перейти на простой наилучший ответ (6). Таким образом можно, во-первых, снизить вычислительную сложность алгоритма, и, во-вторых, избежать зацикливаний, как на рис. 2.

Оба механизма ограничения сложности положены в основу алгоритмов формирования сети, рассматриваемых в следующем разделе.

## 4. Формирование сети

### 4.1. ДИНАМИКА НАИЛУЧШИХ ОТВЕТОВ

Рассмотрим алгоритм, который позволяет получить связную сеть, являющуюся одним из равновесий Нэша. Этот алгоритм моделирует поведение «недалновидных» агентов 0-го ранга рефлексии, использующих наилучший ответ (6). Он рассматривается в [15], аналогичный алгоритм использовался в [11]. В алгоритме воспроизводится динамика последовательных наилучших ответов (iterated best responses – IBR). Порядок действий узлов выбирается произвольно, например, по возрастанию мас адресов.

#### Алгоритм 1 (Последовательных наилучших ответов).

1. (Инициализация). Каждый узел устанавливает максимальную мощность своего передатчика  $p_i^0 = p_i^{max}$ .

Формируется граф  $g^0 = g(p^{max})$ .

2. (Адаптация). Очередной узел  $i$  изменяет мощность по правилу наилучшего ответа (6).

$$p_i^{t+1} = BR_i(p_{-i}^t).$$

3. (Обновление сети). Формируется новый граф.

$$g^{t+1} = g(p_i^{t+1}, p_{-i}^t).$$

4. (Остановка). Шаги 2 и 3 повторяются до тех пор, пока хотя бы один узел продолжает изменять свою мощность.

Свойства этого алгоритма хорошо изучены. В [15] доказано, что на каждом шаге алгоритма сохраняется связность сети. Соответственно, полученная сеть также будет связной. Также получившаяся сеть будет равновесием Нэша. Сходимость к равновесию следует из того, что игра управления топологией имеет порядковую потенциальную функцию [19].

Полный цикл, когда каждый узел ровно один раз изменит мощность, т.е. шаг 2 повторится  $n$  раз, назовем одной итерацией алгоритма. Динамика наилучших ответов сходится к равновесию Нэша ровно за одну итерацию. Столь быстрая сходимость обусловлена тем, что наилучший ответ каждого узла сводится к выбору минимального значения мощности, при котором еще сохраняется связность сети. После этого узел уже не будет увеличивать свою мощность и не сможет уменьшить ее еще больше. При таком подходе мощности могут распределиться очень неравномерно.

Как уже было показано на рис. 1, эффективность получившегося равновесия зависит от порядка, в котором действуют узлы. Пример сети из 20 узлов, сформированной алгоритмом последовательных наилучших ответов на рис. 3а. Сплошными синими линиями показаны двусторонние ребра. Оранжевыми пунктирными линиями показаны односторонние «избыточные» ребра.

#### 4.2. ДИНАМИКА ДВОЙНЫХ НАИЛУЧШИХ ОТВЕТОВ

Этот алгоритм построен по прямой аналогии с динамикой наилучших ответов, но агенты выбирают действия по правилу двойного наилучшего ответа (7).

**Алгоритм 2** (Последовательных двойных наилучших ответов).

1. (*Инициализация*). Каждый узел устанавливает начальную мощность своего передатчика  $p_i^0 = p^0$ .

Формируется граф  $g^0 = g(p^0)$ .

2. (*Адаптация*). Очередной узел  $i$  изменяет мощность по правилу двойного наилучшего ответа (7) или (8)

$$p_i^{t+1} = BR_i^2(p_{-i}^t)$$

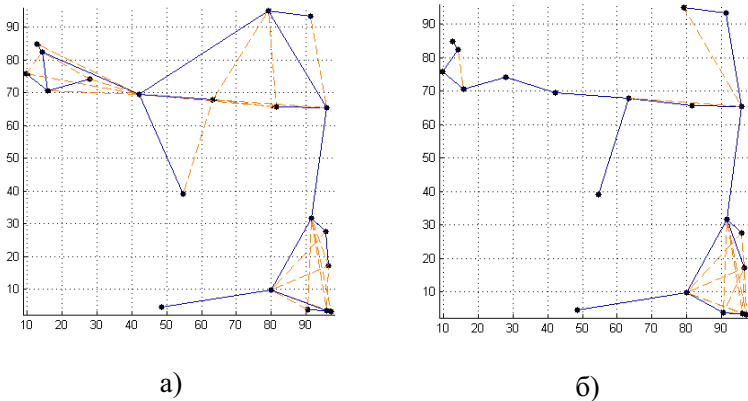


Рис. 3. Пример сети из 20 узлов, сформированной алгоритмами а) последовательных наилучших ответов; б) последовательных двойных наилучших ответов

или

$$p_i^{t+1} = BR_{i, R_i}^2(p_{-i}^t), \text{ где } R_i \text{ – рефлексивное множество.}$$

3. (Обновление сети). Формируется новый граф

$$g^{t+1} = g(p_i^{t+1}, p_{-i}^t).$$

4. (Остановка). Шаги 2 и 3 повторяются до тех пор, пока хотя бы один узел продолжает изменять свою мощность.

5. (Завершение). Если граф  $g^t$  не связный, все узлы переходят на правило наилучшего ответа (6). Переход к шагу 2.

На шаге 2 вместо правила (7) может использоваться правило с ограничением на рефлексивное множество агентов (8). В экспериментах исследуются обе модификации алгоритма.

После остановки на шаге 4 не всегда образуется связная сеть. Но после запуска одной итерации динамики наилучших ответов связная сеть формируется всегда. В процессе выполнения шагов 2 и 3 могут образовываться односторонние связи, для преобразования которых в двусторонние необходим шаг 5. На рис. 3б показана сеть, сформированная алгоритмом 2.

#### 4.3. ДИНАМИКА С ПЕРЕМЕННЫМ РАНГОМ РЕФЛЕКСИИ

Преимущество двойного наилучшего ответа в том, что узел учитывает действия своих соседей. Например, если для изменения невыгодного равновесия требуется разорвать сеть, узел рассчитывает, что сеть будет восстановлена другими узлами. Здесь предлагается алгоритм, который комбинирует гибкость двойного наилучшего ответа и надежность обычного.

Если узел может улучшить свою полезность, применив простой наилучший ответ, то другое правило уже не используется. Если простой наилучший ответ не позволяет улучшить полезность, применяется двойной наилучший ответ. У каждого узла есть счетчик  $c_i$ , который показывает, сколько еще раз узел может использовать двойной наилучший ответ. После каждого раза счетчик уменьшается на 1. Если счетчик равен 0, узел может использовать только простой наилучший ответ.

##### Алгоритм 3 (С переменным рангом рефлексии).

1. (*Инициализация*). Каждый узел устанавливает начальную мощность своего передатчика  $p_i = p^0$  и счетчик  $c_i = c^0$ .

Формируется граф  $g^0 = g(p^0)$ .

2. (*Адаптация*). Узел  $i$ , вычисляет свой наилучший ответ (6),  $p_i^{br} = BR_i(p_{-i}^t)$ .

Если  $u_i(p_i^{br}, p_{-i}) > u_i(p_i, p_{-i})$  и  $c_i > 0$ , то  $p_i^{t+1} = p_i^{br}$ .

Иначе  $p_i^{t+1} = BR_i^2(p_{-i}^t)$  и  $c_i = c_i - 1$ .

3. (*Обновление сети*). После изменения мощности формируется новый граф  $g^{t+1} = g(p_i^{t+1}, p_{-i}^t)$ .

4. (*Остановка*). Шаги 2 и 3 повторяются до тех пор, пока хотя бы один узел продолжает изменять свою мощность.

Этот алгоритм всегда сходится к связанной сети за конечное число итераций. В следующем разделе с помощью численных экспериментов исследуется, как зависит эффективность алгоритма от начального значения счетчика  $c^0$ .



## 5. Результаты моделирования

Для проведения экспериментов использовалась среда численного моделирования MATLAB. Узлы случайным образом, следуя равномерному распределению, размещались в квадрате 100 на 100 «условных метров». Плотность расположения составляла 10, 20, 30, 40 и 50 узлов на квадрат. Для каждого значения плотности было сгенерировано 100 вариантов расположения. Максимальная мощность узлов  $p^{max}$  была выбрана таким образом, чтобы радиус действия составлял половину стороны квадрата.

На рис. 4 показано, как изменяется суммарная мощность узлов в сетях, получаемых разными алгоритмами, в зависимости от плотности размещения узлов. Сравнение проводилось с алгоритмом 1, использующим обычный наилучший ответ (*BR* на графиках), и с централизованным алгоритмом, строящим минимальное остовное дерево (*MST* на графиках). В работе [6] экспериментально было показано, что минимальное остовное дерево аппроксимирует оптимальное решение с точностью 14–16%.

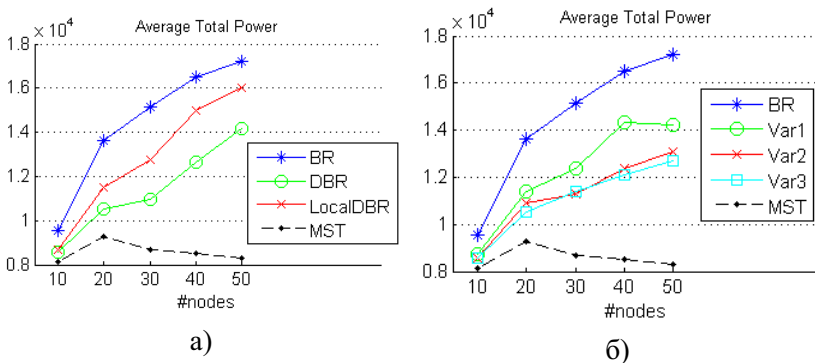
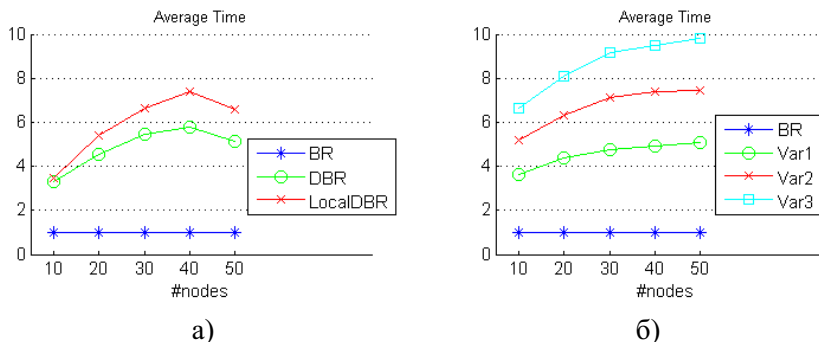


Рис. 4. Сравнение эффективности алгоритмов. По оси  $x$  – число узлов в сети. По оси  $y$  – суммарная мощность узлов для сетей, полученных алгоритмами а) с постоянным рангом рефлексии; б) с переменным рангом рефлексии

Отметим, что ни один теоретико-игровой алгоритм не пре-



а) б)  
 Рис. 5. Сравнение быстродействия алгоритмов. По оси  $x$  – число узлов в сети. По оси  $y$  – среднее время сходимости  
 а) с постоянным рангом рефлексии; б) с переменным рангом рефлексии

взошел централизованный алгоритм минимального остовного дерева. Это объяснимо, поскольку функции полезности (4) учитывают только локальную информацию, в то время как алгоритм MST располагает глобальной информацией о сети.

На рис. 4а сравниваются две модификации алгоритма 2. С использованием двойного наилучшего ответа (7) (*DBR* на графиках) и ограниченного двойного наилучшего ответа (8), где рефлексивные множества ограничивались максимальным радиусом действия узла (9) (*LocalDBR* на графиках). Графики *DBR* и *LocalDBR* показывают, что ограничение рефлексивных множеств узлов снижает эффективность алгоритма. Одновременно возрастает время сходимости, как показано на рис. 5а. Можно заключить, что повышение рефлексивных способностей агента увеличивает эффективность решения и снижает время, требующееся для формирования сети.

Для алгоритма 3 с переменным рангом рефлексии показаны результаты для значений лимита на использование рефлексии от 1 до 3 (на графиках *Var1*, *Var2*, *Var3*). По мере увеличения лимита эффективность алгоритма возрастает, но разница между значениями 2 и 3. Для больших значений эксперименты также проводились, но рост эффективности алгоритма прекратился, по-

этому эти результаты не показаны на графиках.

Графики на рис. 4б показывают, что при значении лимита больше 1 алгоритм с переменным рангом превосходит по эффективности алгоритм с постоянным двойным наилучшим ответом для сетей с высокой плотностью узлов (40 и 50 на графиках). Время сходимости показано на рис. 5б. Повышение лимита на использование двойного наилучшего ответа увеличивает время сходимости в среднем на 2 итерации.

Эксперименты показали, что замена наилучшего ответа на правило двойного наилучшего ответа повышает эффективность алгоритмов и позволяет получать сети с меньшей суммарной мощностью. Но также увеличивается время сходимости алгоритмов. Обычный наилучший ответ для сети любого размера сходится за одну итерацию. Например, на рис. 5а показано, что двойной наилучший ответ для сети из 30 узлов сходится в среднем за 5,5 итераций. При этом решение в среднем улучшается на 30%.

Максимальный рост эффективности двойной наилучший ответ показывает для сетей средней плотности 20 и 30 узлов на область. Для этих сетей число возможных равновесий уже достаточно велико, и добиться такой же эффективности просто запуском нескольких итераций обычного наилучшего ответа невозможно.

Алгоритм 3 с переменным рангом рефлексии превосходит алгоритм 2, в котором узлы используют только двойной наилучший ответ. При этом для существенного повышения эффективности достаточно, чтобы каждый узел мог более 1 раза применить двойной наилучший ответ.

## **6. Заключение**

В работе исследовались алгоритмы коллективного поведения, основанные на правиле двойного наилучшего ответа, которое моделирует поведение агентов 1-го ранга рефлексии. Подобные алгоритмы находят свое применение в децентрализованном управлении многоагентными техническими и социально-экономическими системами.

Изучалось применение динамики двойного наилучшего ответа к задаче формирования топологии беспроводной сети. Также исследовались методы ограничения вычислительной сложности рефлексии. Введено понятие рефлексивного множества агентов, для которых данный агент может вычислить наилучший ответ.

Предложено два алгоритма формирования сети, в первом узлы используют только двойной наилучший ответ, в другом динамически изменяют ранг рефлексии, переключаясь между обычным наилучшим ответом и двойным. Эффективность алгоритмов исследовалась в численных экспериментах. Все алгоритмы, использующие двойной наилучший ответ, формируют более эффективные сети, чем алгоритм с обычным наилучшим ответом.

Алгоритм, в котором рефлексивное множество узлов ограничивалось радиусом действия передатчика, уступает алгоритму, в котором рефлексивные возможности узлов не ограничивались, по эффективности и скорости сходимости. Алгоритм с переменным рангом рефлексии показал немного лучший результат, чем алгоритм с постоянным ограниченным двойным наилучшим ответом.

Можно заключить, что использование двойного наилучшего ответа повышает эффективность алгоритмов коллективного поведения. В дальнейшем динамика двойного наилучшего ответа будет исследована аналитически. В идеале необходимо строго доказать сходимость и эффективность по сравнению с динамикой обычного наилучшего ответа. А также сформулировать те особенности игры формирования топологии, с которыми связаны данные свойства динамики двойного наилучшего ответа. Также представляет интерес исследование игр формирования сетей с другими функциями полезности агентов или другими механизмами формирования сети.

### ***Литература***

1. БАЗЕНКОВ Н.И. *Рефлексия в задаче управления топологией беспроводной сети* // Труды 55-й научной конференции МФТИ. Радиотехника и кибернетика.– М.: МФТИ, 2012. – Том 1. – С. 46–48.

2. ГУБКО М.В. *Управление организационными системами с сетевым взаимодействием агентов. Часть I: Обзор теории сетевых игр* // Автоматика и телемеханика. – 2004. – №8. – С. 115–132.
3. КОРЕПАНОВ В.О. *Модели рефлексивного группового поведения и управления*. – М.: ИПУ РАН, 2011. – 127 с.
4. КОРЕПАНОВ В.О., НОВИКОВ Д.А. *Задача о диффузной бомбе* // Проблемы управления. – 2011. – Том 5. – С. 66–73.
5. НОВИКОВ Д.А., ЧХАРТИШВИЛИ А.Г. *Рефлексивные игры*. – М.: СИНТЕГ, 2003. – 149 с.
6. ALTHAUS E., CĂLINESCU G., MĂNDOIU I.I., PRASAD S., TCHERVENSKI N., ZELIKOVSKY A. *Power Efficient Range Assignment in Ad hoc Wireless Network* // IEEE Wireless Communications and Networking Conference (WCNC 2003), New Orleans, LA, USA, March 2003. – Vol. 3. – P. 1889–1894.
7. AZIS A.A., EKERCIOĞLU Y.A., SINGH J.P., VENKATASUBRAMANIAN N. *A Survey on Distributed Topology Control Techniques for Extending the Lifetime of Battery Powered Wireless Sensor Networks* // IEEE Communications Surveys and Tutorials. – Vol. 15, No. 1. – P. 121–144.
8. CALINESCU G., QIAO K. *Asymmetric topology control: exact solutions and fast approximations* // IEEE INFOCOM Proceedings, March 2012, Orlando, Florida, USA. – P. 783–791.
9. CLEMENTI A.E.F., PENNA P., SILVESTRI R. *On the Power Assignment Problem in Radio Networks* // Electronic Colloquium on Computational Complexity (ECCC). – 2000. – URL: <http://eccc.hpi-web.de/eccc-reports/2000/TR00-054/index.html>.
10. DO N.M., HSU C.-H., SINGH J.P., VENKATASUBRAMANIAN N. *Massive live video distribution using hybrid cellular and ad hoc networks* //

- IEEE International Symposium on World of Wireless, Mobile and Multimedia Networks (WoWMoM), June 2011, Lucca, Italy. – P. 1–9.
11. EIDENBENZ S., KUMAR A., ZUST S. *Equilibria in Topology Control Games for Ad Hoc Networks and Generalizations* // Mobile Network and Applications. – 2006. – Vol. 11, No. 2. – P. 143–159.
  12. *IEEE Std. 802.11 Part 11: Wireless LAN Medium Access Control (MAC) and Physical Layer (PHY) Specifications.* – 2012. – URL: <http://standards.ieee.org/getieee802/download/802.11-2012.pdf> (по состоянию на 05.04.2013).
  13. *IEEE Std. 802.15.4 Part 15.4: Low-Rate Wireless Personal Area Networks (LR-WPAN).* – 2011. – URL: <http://standards.ieee.org/getieee802/download/802.15.4-2011.pdf> (по состоянию на 05.04.2013).
  14. JACKSON M.O. *A Survey of Models of Network Formation: Stability and Efficiency* // In: Group Formation in Economics: Networks, Clubs and Coalitions, edited by Gabrielle Demange and Myrna Wooders. — Cambridge University Press: Cambridge, UK, 2005.
  15. KOMALI R.S., MACKENZIE A.B., GILLES R.P. *Effect of Selfish Node Behavior on Efficient Topology Design* // IEEE Transactions on Mobile Computing. – 2008. – Vol. 7, No. 9. – P. 1057–1070.
  16. LI N., HOU J.C., SHA L. *Design and Analysis of an MST-Based Topology Control Algorithm* // Twenty-Second Annual Joint Conference of the IEEE Computer and Communications (INFOCOM 2003), San Francisco, CA, USA. — 2003. – Vol. 3. — P. 1702–1712.
  17. LI L., HALPERN J.Y., BAHL P., YI-MIN W., WATTENHOFER R. *A cone-based distributed topology-control algorithm for wireless multi-hop networks* // IEEE/ACM Transactions on Networking, February, 2005. — Vol. 13, No. 1. — P. 147–159.

18. LONG C., ZHANG Q., LI B., YANG H., GUAN X. *Non-Cooperative Power Control for Wireless Ad Hoc Networks with Repeated Games* // IEEE Journal on Selected Areas in Communications. – 2007. – Vol. 25, No. 6. – P. 1101–1112.
19. MONDERER D., SHAPLEY L.S. *Potential Games* // Games and Economic Behavior. – 1996. – Vol. 14. – P. 124–143.
20. NISAN N., ROUGHGARDEN T., TARDOS E., VAZIRANI V.V. *Algorithmic Game Theory*. – Cambridge University Press, New York, NY, USA, 2007. – 776 p.
21. SANTI P. *Topology Control in Wireless Ad Hoc and Sensor Networks* // Journal ACM Computing Surveys (CSUR). – Vol. 37, No. 2. – P. 164–194.
22. SHI H.-Y., WANG W.-L., KWOK N.-M., CHEN S.-Y. *Game Theory for Wireless Sensor Networks: A Survey* // Sensors. – 2012. – Vol. 12, No. 7. – P. 9055–9097.
23. TOH C.K.-K. *Ad Hoc Wireless Networks: Protocols and Systems (1<sup>st</sup> ed.)*. – Prentice Hall PTR: Upper Saddle River, NJ, USA, 2002.
24. REN H., MENG M.Q.-H. *Game-Theoretic Modeling of Joint Topology Control and Power Scheduling for Wireless Heterogeneous Sensor Networks* // IEEE Transactions on Automation Science and Engineering. – 2009. – Vol. 6, No. 4. – P. 610–625.
25. WATTENHOFER R., ZOLLINGER A. *XTC: A Practical Topology Control Algorithm for Ad-Hoc Networks* // 18th International Parallel and Distributed Processing Symposium, Santa Fe, NM, USA, 2004.
26. ZARIFZADEH S., YAZDANI N., NAYYERI A. *Energy-efficient topology control in wireless ad hoc networks with selfish nodes* // Computer Networks. – 2012. – Vol. 56. – P. 902–914.

## **DOUBLE BEST RESPONSE DYNAMICS IN TOPOLOGY FORMATION GAME FOR AD HOC NETWORKS**

**Nikolay Bazenkov**, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow,  
(n.bazenkov@gmail.com).

*Abstract: We consider a topology formation problem for wireless ad hoc networks. There are wireless nodes located on a plane. Every node can dynamically adjust its transmission power. The global objective is to assign optimal transmission power to every node such that the resulting topology is connected and minimizes total power cost. The topology formation problem is studied as a noncooperative game. We propose two algorithms of collective behavior based on the, so-called, "double best response" decision rule. This decision rule originates from a reflexive game framework and describes behavior of an agent with the first rank of reflection. Efficiency of proposed algorithms is evaluated by simulations and is compared with a conventional best response algorithm.*

**Keywords:** network formation game, ad hoc networks, reflection, double best response.

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии М. В. Губко  
Поступила в редакцию 15.04.2013.  
Опубликована 31.05.2013.*



УДК 629.735.33:004.021

ББК 39

## **ПРИМЕНЕНИЕ БАЙЕСОВСКОГО ПОДХОДА ДЛЯ УТОЧНЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СОБЫТИЙ В АВТОМАТИЗИРОВАННОЙ СИСТЕМЕ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ И ПРЕДОТВРАЩЕНИЯ АВИАЦИОННЫХ ПРОИСШЕСТВИЙ**

**Шаров В. Д.<sup>1</sup>**

(ООО «Волга–Днепр–Москва», Москва)

*В разрабатываемой для авиакомпании «Волга–Днепр» автоматизированной системе прогнозирования и предотвращения авиационных происшествий используется метод вероятностного анализа безопасности с построением «деревьев событий». Вероятности инициирующих событий нижнего уровня оцениваются по данным различной природы. В процессе деятельности авиакомпании в систему поступает дополнительная информация в виде результатов аудитов, расследований событий, обязательных и добровольных сообщений, которые свидетельствуют о проявлениях факторов опасности, влияющих на вероятности событий. В статье описан метод использования этой информации для уточнения исходных вероятностей на основе известной формулы Байеса.*

Ключевые слова: безопасность полетов, фактор опасности, априорная вероятность события, апостериорная вероятность.

---

<sup>1</sup> Валерий Дмитриевич Шаров, кандидат технических наук, заместитель директора департамента предотвращения авиационных происшествий (v.sharov@volga-dnepr.com).

## **1. Введение**

Современная концепция обеспечения безопасности полетов (БП), закреплённая в Стандартах и Рекомендуемой практике Международной организации гражданской авиации (ИКАО), предусматривает разработку и внедрение на уровне авиакомпании системы управления БП (СУБП). Однако соответствующее руководство ИКАО [6] содержит только общие рекомендации по построению такой системы. Поэтому как российские, так и зарубежные авиакомпании разрабатывают собственные СУБП, наиболее известные описаны в монографии [2].

Авиакомпания «Волга–Днепр» совместно с Ульяновским государственным университетом инициировала разработку автоматизированной системы прогнозирования и предотвращения авиационных происшествий (АСППАП) в рамках реализации Постановления Правительства РФ №218 от 09.04.2010. К участию в работе приглашены ведущие ученые страны в области управления безопасностью полетов, риск-менеджмента, «человеческого фактора», организационно-экономического моделирования [1]. При разработке системы использованы современные подходы к управлению рисками [5].

## **2. Оценка вероятности авиационного происшествия**

Оценка вероятности АП в разрабатываемой системе выполняется на основе моделирования развития авиационных событий (АС) в полете в виде 12 «деревьев» – логических схем [7]. Эти схемы отражают возможные сценарии развития события от инициирующих событий или проявлений факторов опасности и их комбинаций через промежуточные события и барьеры безопасности к АП определенного типа например: выкатыванию за пределы ВПП, потере управляемости в полете, столкновению двух ВС в воздухе и др. На основе математического описания причинно-следственных связей «деревя» формируется модель прогнозирования вероятности АП.

На нижнем уровне деревьев развития событий выделенных типов располагаются инициирующие события и условия, называемые факторами опасности (ФО). Например, к ФО в дереве события типа «Небезопасное касание ВПП» относятся такие разные категории событий и условий, как «Отказ светосигнального оборудования ВПП», «Наличие на взлете зоны турбулентности», «Ошибка экипажа в установке давления на высотометре», «Отказ блоков управления закрылками», «Отклонение пилота: пониженная скорость пролета порога ВПП». Всего в АСППАП насчитывается около пятисот ФО, разделенных на три группы: «Человек», «Машина», «Среда».

По общей логике АСППАП вначале на основе разных наборов исходных данных оцениваются так называемые «базовые вероятности факторов опасности». В качестве таких данных используется статистика авиационных событий в отрасли (статистика авиакомпании мала), статистика отказов систем и агрегатов в авиакомпании, записи параметров пилотирования и работы систем самолета бортовыми самописцами, а также записи радиообмена экипажа с диспетчером, метеопрогнозы, тактико-технические данные систем и агрегатов, результаты исследований по операторским ошибкам и др.

Для многих ФО по группам «Человек» и «Среда» выполняется корректировка вероятностей на основе результатов специальных исследований и экспертных оценок. Например, базовые вероятности по группе «Человек» – это вероятности ошибок данного пилота «в среднем» на основе его 50 последних полетов. В конкретном полете вероятности этих ошибок могут существенно отличаться от средних за счет продолжительности полета, региона полета, накопленной усталости, психологической обстановки в кабине и других факторов.

Базы данных по статистике инцидентов в отрасли, экспертные оценки, характеристики экипажей, аэродромов, маршрутов и ВС постоянно обновляются. Тем не менее, полученные с помощью описанных процедур вероятности ФО не в полной мере учитывают текущую деятельность авиакомпании, что

является существенным недостатком с позиции конкретного эксплуатанта.

### **3. Постановка задачи уточнения вероятности фактора опасности**

Для ответственных руководителей, занимающихся вопросами обеспечения БП, важно, чтобы модель оценки вероятности оперативно реагировала и на незначительные события и отклонения, происходящие в конкретной авиакомпании. В рекомендациях ИКАО по построению СУБП [6] большое внимание уделяется также использованию результатов аудитов, инспекторских проверок. Важным элементом СУБП является информация о недостатках в области обеспечения БП, полученная от сотрудников авиакомпании по так называемой «системе добровольных сообщений». В разрабатываемой АСППАП должна быть задействована и эта система.

Возникает необходимость разработки дополнительного механизма учета этой важной информации. Предлагается разработать его на основе широко применяемой для решения подобных задач формулы Байеса.

Будем рассматривать вероятность ФО, полученную с помощью одной из процедур, кратко описанных выше, как априорную оценку. Полученная дополнительная информация используется для ее уточнения и получения апостериорной оценки.

### **4. Решение задачи**

Рассмотрим решение задачи на примере ФО «Попадание в спутный след другого ВС», который содержится в дереве события «Небезопасное касание ВПП».

Метод оценки вероятности данного ФО описан в [3]. В основе метода – анализ статистики этих событий и экспертное оценивание аэродрома по двум показателям: интенсивность полетов и качество управления воздушным движением по трехбалльной шкале. По интенсивности полетов аэродромы делятся

на аэродромы малой, средней и высокой интенсивности полетов. По качеству управления воздушным движением – на аэродромы с хорошим, удовлетворительным и неудовлетворительным качеством УВД. Модель рассчитана на самолет Ан-124-100. Принимается также, что впереди летящий самолет имеет категорию (а) по интенсивности спутного следа, т.е. его взлетная масса более 136т.

Значения вероятностей ФО для каждого из сочетаний значений этих параметров из [3] сведены в таблице 1.

Таблица 1. Оценка вероятности попадания в спутный след

Показатель интенсивности полетов	Показатель качества управление воздушным движением		
	Хорошее	Удовлетв.	Неудовлетв.
Малая	0,000006	0,00009	0,00049
Средняя	0,00037	0,00584	0,025
Высокая	0,00158	0,0213	0,0777

Предположим, что для аэродрома  $X$  в предстоящем полете получена оценка вероятности  $P$ . Именно эта оценка и будет использована в дереве для прогнозирования вероятности события «Небезопасное касание ВПП». В то же время, стало известно, что на прошлой неделе поступило сообщение от экипажа, выполнявшего посадку на этом же аэродроме, о попадании в спутный след от ВС, заходившего на посадку перед ним. Очевидно, что оценка  $P$  должна быть скорректирована.

Предлагается подход к решению задачи с использованием формулы Байеса [4]:

$$(1) \quad P(A_i | B) = \frac{P(A_i)P(B | A_i)}{\sum_{i=1}^k P(A_i)P(B | A_i)},$$

где  $A_i$  – гипотезы относительно условий, в которых может произойти интересующее нас событие  $B$ ;  $A_i$  – попарно несовместные случайные события;  $P(A_i)$  – известные априорные вероятности

событий  $A_i$ ;  $P(B|A_i)$  – вероятность события  $B$  при условии, что наступит событие  $A_i$  (при справедливости гипотезы  $A_i$ ).

Формула позволяет вычислить условные вероятности  $P(A_i|B)$  событий  $A_i$  (или вероятность справедливости гипотез  $A_i$ ) на основании того факта, что событие  $B$  произошло (или не произошло).

В рассматриваемой задаче событие  $B$  – это попадание в спутный след. Условимся для исключения путаницы в дальнейшем оценку вероятности этого события называть «частотой».

Для упрощения дальнейших расчетов диапазон возможных (по таблице 1) вероятностей от  $10^{-1}$  до  $10^{-6}$  разбивается на интервалы с дискретностью  $10^{-1}$ . Событие  $A_i$  – это попадание частоты события  $B$  в один из интервалов. Все  $A_i$  образуют полную группу событий.

Принимается «пессимистический» вариант оценки: каждое значение вероятностей в таблице 1 округляется до левой (большей) границы соответствующего интервала логарифмической шкалы (см. таблицу 2).

Таблица 2. «Пессимистический» вариант оценки вероятностей

	Качество управления воздушным движением			
		Хорошее	Удовлетв.	Неудовлетв.
Интенсивность полетов	Малая	$10^{-5}$	$10^{-4}$	$10^{-3}$
	Средняя	$10^{-3}$	$10^{-2}$	$10^{-1}$
	Высокая	$10^{-2}$	$10^{-1}$	$10^{-1}$

Для получения распределения вероятностей для конкретного аэродрома проводится экспертное оценивание с участием 10 экспертов, результаты сведены в таблице 3.

Итоги опроса рассматриваем как два нечетких множества соответствующих значений параметров и записываем в виде

функций принадлежности  $A_1$  и  $A_2$ . Значения элементов нечетких множеств – первые буквы соответствующих характеристик.

$$A_1 = M/0,2 + C/0,8 + B/0,$$

$$A_2 = X/0,5 + Y/0,4 + H/0,1.$$

Произведение  $A = A_1 A_2$  записываем в виде матрицы, представляющей собой набор значений функции принадлежности нечеткого множества «Интенсивность полетов/Качество УВД» для аэродрома  $X$  (таблица 4).

Таблица 3. Экспертный опрос по аэродрому  $X$

Интенсивность полетов а/п ( $X$ )				Качество УВД а/п ( $X$ )			
	Малая	Средн.	Высокая		Хор	Удовл.	Неуд
Э-1	1			Э-1	1		
Э-2		1		Э-2	1		
Э-3	1			Э-3	1		
Э-4		1		Э-4	1		
Э-5		1		Э-5		1	
Э-6		1		Э-6			1
Э-7		1		Э-7	1		
Э-8		1		Э-8		1	
Э-9		1		Э-9		1	
Э-10		1		Э-10		1	
Итог	0,2	0,8	0	Итог	0,5	0,4	0,1

На основании таблиц 2 и 4 строим априорное распределение вероятностей гипотез. Метод построения поясним на примере.

По таблице 2 для интенсивности полетов «Малая» и показателя качества УВД «Хорошее» левая граница интервала частоты события  $B$  «попадание в спутный след» составляет  $10^{-5}$ , а правая, соответственно,  $10^{-6}$ .

Таблица 4. Функция принадлежности нечеткого множества  $A=A_1A_2$

	Качество управления воздушным движением			
		Хорошее	Удовлетв.	Неудовлетв.
Интенсивность полетов	Малая	0,10	0,08	0,02
	Средняя	0,40	0,32	0,08
	Высокая	0	0	0

По таблице 4 имеем: степень принадлежности элемента «Малая/Хорошее» для аэродрома  $X$  равна 0,1. Принимаем, что степень принадлежности равна вероятности попадания частоты события  $B$  в интервал частоты  $(10^{-5}; 10^{-6})$ , который соответствует малой интенсивности и хорошему качеству УВД в таблице 2.

В интервал  $(10^{-3}, 10^{-4})$  попадают два элемента нечеткого множества: «Малая/Неудовлетв» и «Средняя/Хорошее». Соответственно, вероятность попадания события в данный интервал принимается равной сумме степеней принадлежности  $0,4 + 0,02 = 0,42$ .

Аналогично рассчитанные вероятности для других интервалов частот (гипотез) сведены в таблице 5, график показан на рис. 1.

Таблица 5. Априорные вероятности событий  $A_i$  на  $a/\delta X$

Гипотезы	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$
Левая граница интервала	$10^{-1}$	$10^{-2}$	$10^{-3}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$
Вероятность попадания частоты события $B$ в интервал	0,08	0,32	0,42	0,08	0,1



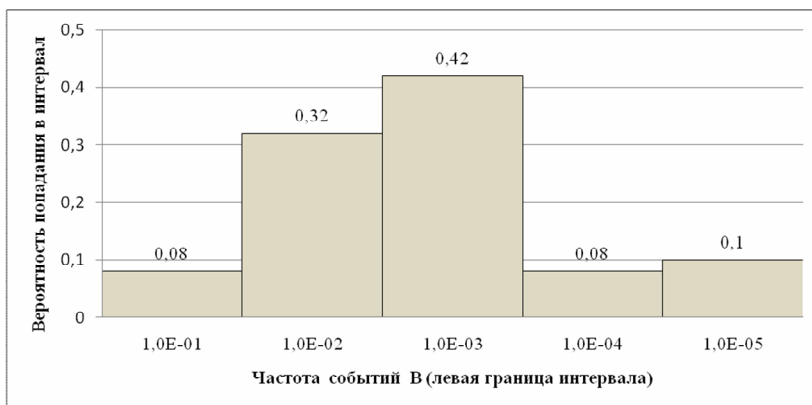


Рис. 1 Априорное распределение вероятностей событий  $A_i$

Средняя вероятность может быть рассчитана как

$$(2) \quad P = M(f) = \sum_{i=1}^n f_i^c P_i(A|B),$$

где  $M(f)$  – математическое ожидание распределения частот;  $f_i^c$  – левая граница частоты для  $i$ -го интервала;  $P_i(A|B)$  – вероятность для  $i$ -го интервала.

Имеем среднюю априорную «пессимистическую» вероятность попадания в спутный след на аэродроме  $X$ :  $P = 0,0124$ .

Поступило сообщение о том, что в а/п  $X$  имело место попадание ВС в спутный след другого ВС на посадке.

Рассмотрим два варианта.

(I) Ранее было выполнено 100 посадок на данном аэродроме, и случай попадания в спутный след – первый и единственный.

(II) Посадка, в которой отмечено попадание в спутный след, была первой посадкой нашего ВС на данном аэродроме.

Необходимо рассчитать условные вероятности  $P(B|A_i)$ .

По формуле биномиального распределения [4] вероятность наступления  $a$  событий в  $k$  испытаниях:

$$(3) \quad P(B = a) = \binom{k}{a} p^a (1 - p)^{k-a},$$

где  $p$  – вероятность наступления события  $B$  в одном испытании;

$$\binom{k}{a} = \frac{k!}{a!(k-a)!} \text{ – число сочетаний из } k \text{ элементов по } a.$$

Пример расчета.

Для варианта (I) – одно событие на 100 полетов – имеем  $k = 100, a = 1$ .

Принимаем, что при условии выполнения гипотезы события  $A_1$  вероятность для события  $B$  равна значению левой границы интервала или  $f_l$ ; так, для гипотезы  $A_1$  вероятность  $p = f_l = 0,08$ .

Если бы частота находилась в интервале от 0,1 до 0,01, то вероятность попадания в спутный след была бы равна:

$$P(B|A_1) = \frac{100!}{1!(100-1)!} 0,08^1 (1-0,08)^{100-1} = 100 \times 0,08 \times 0,92^{99} = 0,0003.$$

Результаты расчета по формуле (2) для вариантов (I) и (II) сведены в таблицу 6.

Таблица 6. Условные вероятности события  $B$  при выполнении гипотез  $A_i$

		Гипотезы				
		$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$
Лев. граница интервала		0,1	0,01	0,001	0,0001	0,00001
$P(B A_i)$	(I)	0,00030	0,36973	0,09057	0,00990	0,0010
	(II)	0,1	0,01	0,001	0,0001	0,00001

Далее производим вычисления по формуле (1). Апостериорное распределение вероятностей для вариантов I и II приведено на графиках рис. 2 и 3.

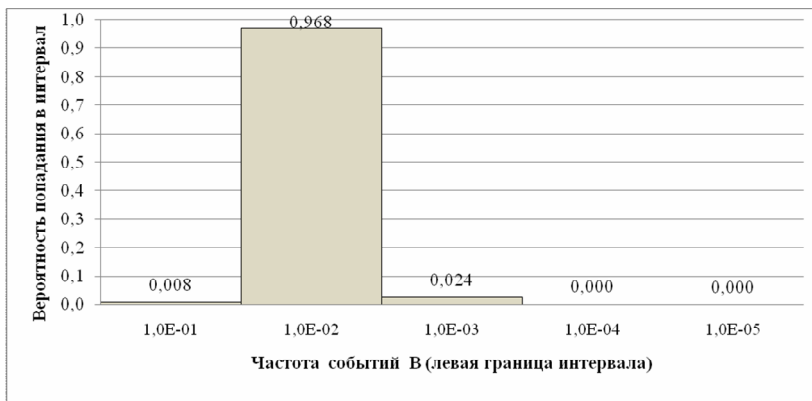


Рис. 2 Апостериорное распределение, вариант I

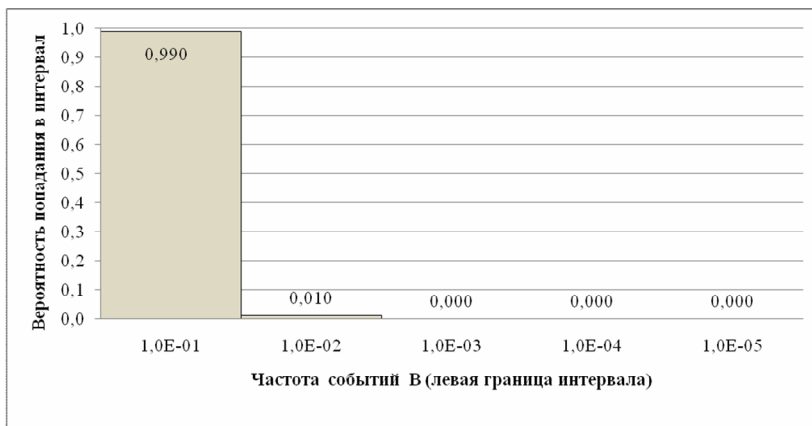


Рис. 3 Апостериорное распределение, вариант II

Как видно из рис.2 и 3, распределение вероятностей для частоты события В существенно изменились.

Расчет уточненного точечного значения частоты события (оценка вероятности ФО в предстоящем полете) по формуле (2) дает следующие результаты:

– для варианта I (одно сообщение о попадании в спутный след на 100 полетов)  $P_1(B)=0,01$ .

– для варианта II (сообщение о попадании в спутный след поступило при первом полете на данный аэродром)  $P_2(B)=0,099$ .

Как видим, дополнительная информация несколько уменьшила априорную вероятность  $P=0,0124$  для варианта (I) и существенно увеличила ее для варианта (II).

## 5. Заключение

Описанный подход можно применить для всех ФО, которые могут уточняться по информации о производственной деятельности. Очевидно, что наряду с математическим ожиданием частоты могут быть использованы и другие оценки, например, верхние границы доверительных интервалов.

Отдельное исследование потребуется по учету серьезности события и степени доверия к дополнительной информации. Можно, например, считать достоверные сообщения за полноценное событие и учитывать их в расчетах как 1, менее достоверные – как долю от 1, например, 0,5; 0,3; 0,1 и т. д.

В АСППАП предлагается реализовать следующий порядок выполнения коррекции априорных вероятностей.

1. Если уточняющей информации нет – корректировать через каждые 50 полетов на данный аэродром ( $k = 50n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ;  $a=0$ ).

2. Если информация поступает – коррекция выполняется немедленно. Но в этом случае, если апостериорная вероятность получится меньше, чем априорная на момент поступления информации, эта апостериорная вероятность отбрасывается и для расчетов события (в данном случае события «Потеря управляемости») используется априорная вероятность на следующие 50 полетов.

Предлагаемый сравнительно простой метод позволит учесть при прогнозировании важную дополнительную информацию по текущей эксплуатационной деятельности авиапредприятия.

Постоянная автоматизированная коррекция априорных вероятностей на основе поступающей информации о проявлениях факторов опасности позволит существенно повысить качество прогнозирования авиационных происшествий в АСППАП с целью принятия своевременных мер для их предотвращения.

### **Литература**

1. БУТОВ А.А., ВОЛКОВ М.А., ШАРОВ В.Д. *Принципы разработки системы прогнозирования и предотвращения авиационных происшествий при организации и производстве воздушных перевозок* // Известия Самарского научного центра РАН. – 2012. – Том 14, №4(2). – С. 386–393.
2. ЗУБКОВ Б.В., ШАРОВ В.Д. *Теория и практика определения рисков в авиапредприятиях при разработке системы управления безопасностью полетов*. – М.: МГТУ ГА, 2010. – 196 с.
3. НТО по договору № 13.П25.31.0063 от 22.10.2010 между ООО «Авиакомпания Волга–Днепр» и Минобрнауки РФ, шифр «2010-218-02-068», по теме «Автоматизированная система прогнозирования и предотвращения авиационных происшествий при организации и производстве воздушных перевозок», Госрегистрация №012011518 от 12.01.2011. Этап 3. Приложение А.
4. ОРЛОВ А.И. *Вероятность и прикладная статистика: основные факты: справочник*. – М.: КНОРУС, 2010. – 192 с.
5. ОРЛОВ А.И., ПУГАЧ О.В. *Подходы к общей теории риска / Управление большими системами*. – 2012. – №40. – С. 49–82.
6. *Руководство по управлению безопасностью полетов (РУБП)*. (Дос 9859-AN/460). Второе издание. – ИКАО, 2009. – 316 с.

7. ШАРОВ В.Д., МАКАРОВ В.П. *Методология применения комбинированного метода FMEA-FTA для анализа риска авиационного события* // Научный вестник МГТУ ГА, серия Эксплуатация воздушного транспорта. Безопасность полетов. – 2011. – №174. – С. 18–24.

## **APPLICATION OF BAYESIAN APPROACH TO UPDATE EVENTS' PROBABILITIES IN AUTOMATED SYSTEM OF AVIATION ACCIDENTS FORECASTING AND PREVENTION**

**Valeriy Sharov**, Volga–Dnepr Group, Moscow, Cand Sc, deputy director of aviation accident prevention department (v.sharov@volga-dnepr.com).

*Abstract: In the automated system of aviation accidents forecasting and prevention, which is being developed for Volga-Dnepr air carrier, the method of probabilistic analysis of safety with construction of "event trees" is used. Probabilities of initiating events at the lowest level of a tree are estimated using the data from various sources. In the course of company's operation additional information arrives to the system in the form of audit reports, cases investigations reports, and other obligatory and voluntary messages. These reports testify occurrence of danger factors influencing events' probabilities. We suggest the method of using this information for probabilities update on the basis of Bayes formula.*

Keywords: flight safety, danger factor, a priori probability, a posteriori probability.

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии В.В. Ключковым  
Поступила в редакцию 29.01.2013.  
Опубликована 31.05.2013.*

УДК 551.46.077 + 629.584  
ББК 32.965.7

## **ОБ АЛГОРИТМАХ ВЫСОКОТОЧНОГО ИЗМЕРЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ВОДНОЙ СРЕДЫ, ОСНОВАННЫХ НА ИСПОЛЬЗОВАНИИ ГРУППЫ АНПА**

**Туфанов И. Е.<sup>1</sup>, Щербатюк А. Ф.<sup>2</sup>**

*(Институт проблем морских технологий,  
Дальневосточное отделение РАН, Владивосток)  
(Дальневосточный федеральный университет,  
Владивосток)*

*В статье рассмотрена задача измерения с требуемой точностью указанных параметров водной среды на основе использования группы автономных необитаемых подводных аппаратов (АНПА) с целью последующего картографирования в пределах заданной области. Описан метод планирования работы группы АНПА при решении указанной задачи. Рассмотрен вопрос о перепланировании действий группы по мере выполнения задания отдельными АНПА. Приведены результаты моделирования работы предложенных алгоритмов.*

Ключевые слова: группа автономных необитаемых подводных аппаратов, групповое поведение, планирование, измерение параметров среды.

### **1. Введение**

В процессе выполнения экологического мониторинга водных акваторий и при проведении подводных биологических

---

<sup>1</sup> Игорь Евгеньевич Туфанов, аспирант (itufanov@gmail.com).

<sup>2</sup> Александр Федорович Щербатюк, чл.-корр. РАН, д.т.н., зав. лаб. (scherba@marine.febras.ru)

исследований важной задачей является измерение с требуемой точностью указанных параметров водной среды с целью последующего картографирования. Объектами съемки могут быть поля температуры, солености, глубины, концентрации загрязняющих веществ.

В последние годы в качестве носителя измеряющего датчика все чаще применяется АНПА. Это обеспечивает возможность формирования произвольных программных пространственных траекторий на основе текущих измерений параметров среды и, следовательно, получения более высокой точности оценки параметров среды. Для повышения производительности и надежности выполнения задания используются группы АНПА. Их работа основана на использовании систем подводной акустической связи, посредством которых АНПА обмениваются результатами измерений при планировании поведения.

Различным вопросам измерения полей посвящено множество работ. Они различаются не только методами решения, но и постановками задач. Один из подходов к измерению параметров поля – случайное блуждание. В докладе [11] рассматривается задача измерения поля с использованием одного датчика, свободно перемещающегося по заданной области. Вся область делится на участки. При этом точка для каждого следующего измерения выбирается случайно, но плотность вероятности этого выбора зависит от результатов предыдущих измерений. Затраты на перемещение датчика от одной точки измерения до другой не учитываются.

Другой подход использует итерационные процедуры, в которых на каждом шаге формируется новая точка для измерения, при этом оптимизируется некоторая информационная метрика. Такой подход используется в работах [9, 13, 14], которые различаются используемыми метриками и алгоритмами поиска оптимального решения. К итерационным относится и алгоритм, предложенный в работе [6]. Ставится задача измерения поля для последующего восстановления с заданной точностью (при определенных условиях на гладкость). Предполагается использование нескольких АНПА, при этом на каждом шаге алгоритма для



каждого АНПА происходит выбор следующей точки измерения. Вокруг каждого аппарата строится окружность доверительного радиуса и на ней выбирается точка. Доверительный радиус рассчитывается исходя из требуемой погрешности восстановления на основе оценки ошибки восстановления поля методом радиальных базисных функций. Выбор конкретных точек на окружности осуществляется путем минимизации функционала, «притягивающего» аппараты к тем точкам рассматриваемой области, которые еще не находятся ни в одной доверительной окружности. Если таких точек нет, то алгоритм завершает свою работу. Таким образом, время, необходимое для перехода от одной точки измерения до другой, не учитывается и не ставится задача его минимизации. Более того, на каждом шаге алгоритма требуется синхронизация аппаратов: расчет следующего шага должен быть осуществлен только тогда, когда все АНПА выполнили предыдущий шаг. В работе [5] описанный подход развивается для случая ограниченного радиуса коммуникации между аппаратами: движение осуществляется так, чтобы граф коммуникации оставался связным. Существуют также подходы к обследованию областей сложной формы [8, 10].

В настоящей работе предлагается подход к измерению заданного поля с использованием группы АНПА, работающий на основе следующих предположений:

- рассматривается двумерная задача измерения поля в плоскости заданной глубины;
- в области прямоугольной формы задано поле, различные участки которого характеризуются различными статистическими характеристиками;
- для съемки используется группа АНПА, при этом возможно изменение числа АНПА в произвольный момент времени в процессе выполнения задания;
- каждый АНПА оснащен датчиком, измеряющим поле вдоль траектории движения с требуемыми точностью и частотой, системой акустической и радиосвязи, а также навигационной системой, обеспечивающей определение местоположения подводных аппаратов с необходимой точностью.

Рассмотрены алгоритмы, позволяющие выполнить измерение заданного поля без пробелов с требуемой точностью и при этом минимизировать время выполнения съемки. Результатом выполнения миссии является карта поля, построенная по данным измерений после выполнения миссии. В первой части статьи рассмотрены вопросы оптимизации работы группы АНПА при решении задачи измерения поля. Далее выполнено сравнение вариантов жесткого и адаптивного формирования траекторий движения аппаратов в соответствии с различными статистическими характеристиками поля. В заключительной части приведены некоторые результаты моделирования.

## **2. Организация работы группы АНПА**

Для организации работы групп мобильных роботов применяют как централизованное, так и децентрализованное (распределенное) управление. В настоящей работе используется централизованная схема. Она выбрана по следующим причинам:

- При централизованном управлении протокол обмена данными и командами устроен проще, чем при распределенном. Количество и объем передаваемых сообщений имеет значение, поскольку используются гидроакустические системы связи, имеющие низкую пропускную способность.

- В небольших группах централизованное планирование может быть организовано более эффективно, чем распределенное. При увеличении численности группы это преимущество пропадает из-за возрастающей сложности задачи планирования. В настоящей работе предполагается использование небольшой группы АНПА (порядка 5–7 аппаратов).

При использовании группы однородных АНПА для выполнения задания появляется возможность повысить скорость и надежность выполнения миссии по сравнению с применением одиночного аппарата. Увеличение скорости выполнения миссии достигается путем оптимизации времени ее выполнения. Надежность или вероятность успешного выполнения миссии обеспечивается контролем ее выполнения и корректировкой в случае

возникновения внеплановых ситуаций. Для этого используется планировщик, расположенный в центральном узле и имеющий информацию о миссии и о ходе ее выполнения.

Миссия АНПА может быть разбита на составные части (задания), которые выполняются параллельно различными аппаратами. Это приводит к уменьшению времени выполнения операции. В работе [2] показано, как это может быть сделано для задачи поиска локальных неоднородностей морской среды. Ниже рассмотрено, как осуществить такое разбиение при обследовании акватории с использованием адаптивных траекторий, формируемых в режиме реального времени на основе текущей информации об измеряемом поле.

Задание для АНПА может заключаться в выполнении определенного галса, покрытия заданного участка меандром, следованию вдоль протяженного объекта, возвращению в точку старта и т.д. При планировании операции существенным является время выполнения задания и время, необходимое для переходов между заданиями. Таким образом, для каждого задания необходимо знать место начала его выполнения, место окончания его выполнения и время, необходимое для его выполнения. В случае если некоторые из этих параметров неизвестны (например, время, необходимое для выполнения галса в процессе адаптивного формирования траектории), следует получить их оценку и использовать ее при планировании.

Пусть имеется  $m$  аппаратов и  $n$  заданий. Изначально  $q$ -й аппарат находится в точке  $\mathbf{s}_q$  пространства координат. Для оценки стоимости переходов положим, что имеется функция  $\rho(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ , обозначающая время перехода АНПА от точки  $\mathbf{a}$  к точке  $\mathbf{b}$ . Она может иметь простой вид, например  $\rho(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{a} - \mathbf{b}|/V$ , где  $V$  – максимальная скорость АНПА, или более сложный. Положим, что для  $i$ -го задания дано  $v_i$  вариантов его выполнения. Пусть  $j$ -й вариант выполнения  $i$ -го задания характеризуется тройкой  $(\mathbf{a}_{ij}, \mathbf{b}_{ij}, l_{ij})$ , обозначающей соответственно точку начала задания, точку окончания и оценку времени его выполнения.

Планом аппарата назовем кортеж  $p = (i_1, j_1), \dots, (i_{|p|}, j_{|p|})$  такой, что  $i_k = 1, \dots, n$ ;  $j_k = 1, \dots, v_{i_k}$  для всех  $k = 1, \dots, |p|$ . План аппарата определяет его действия на протяжении миссии и однозначно определяется тем, какие варианты каких заданий будут выполняться и в каком порядке. Общий план – это кортеж планов всех аппаратов  $P = (p_1, p_2, \dots, p_m)$ , в котором каждое из заданий встречается ровно один раз. Время  $t(P)$  выполнения общего плана  $P$  – это время, которое проходит от начала миссии до выполнения своего плана каждым аппаратом, т.е.

$$t(P) = \max_{q=1, \dots, m} \left( \sum_{k=1}^{|p|} l_{i_k j_k} + \rho(\mathbf{s}_q, \mathbf{a}_{i_1 j_1}) + \sum_{k=2}^{|p|} \rho(\mathbf{b}_{i_{k-1} j_{k-1}}, \mathbf{a}_{i_k j_k}) \right).$$

Здесь первое слагаемое учитывает время выполнения заданий, второе – время на переход к первому заданию, третье – время на переходы между заданиями.

В случае если требуется самостоятельное возвращение всех АНПА к обеспечивающему судну или базе, расположенной в точке  $\mathbf{f}$ , к выражению под знаком максимума следует добавить еще одного слагаемое,  $\rho(\mathbf{b}_{i_{|p|} j_{|p|}}, \mathbf{f})$ .

Таким образом, задача планирования выполнения миссии группой АНПА сводится к следующему: по данным  $\mathbf{s}_q, (\mathbf{a}_{ij}, \mathbf{b}_{ij}, l_{ij})$  найти общий план  $P$ , минимизирующий  $t(P)$ .

Поставленная задача близка к задаче коммивояжера (*travelling salesman problem, TSP*). Современные алгоритмы решения задачи коммивояжера описаны, например в [3]. Для нее существуют как точные, так и приближенные методы, многие из которых могут быть обобщены и для поставленной задачи. Соответствующее обобщение «аукционных» методов и одного из методов, использующих динамическое программирование, приведены в [2]. Генетические алгоритмы, решающие *TSP*, также могут быть модифицированы для решения поставленной задачи. Эффективные алгоритмы точного решения *TSP* используют *LP*-релаксацию исходной задачи: ставится более широкая задача линейного программирования и по мере нахождения ее решений отсекаются ложные области. Поставленная задача оптимизации работы группы АНПА имеет ряд отличий

от классической *TSP* (основное – минимаксная постановка), не позволяющих использовать эти алгоритмы непосредственно. Требуется дополнительные построения и ограничения.

Предполагается, что центральный узел решает соответствующую задачу оптимизации и отправляет информацию о планах всем АНПА. После завершения одним из АНПА миссии центральный узел должен осуществить перепланирование в случае, если имеются еще невыполненные задания. Это позволит уменьшить общее время выполнения работы. Кроме того, перепланирование необходимо в случае выхода одного из аппаратов из строя. При перепланировании все задания делятся на три класса:

- выполненные задания (не участвуют в новом плане);
- выполняемые в настоящий момент задания (не участвуют в новом плане, но при его составлении необходимо учитывать для каждого аппарата время, необходимое для завершения им текущей задачи и ту точку пространства, с которой аппарат может приступить к выполнению нового плана);
- невыполненные задачи (новый план будет состоять из них).

Таким образом, для успешной работы всего механизма группового управления необходима передача от центрального узла каждому АНПА его плана, а от каждого аппарата центральному узлу – передача сообщений о начале выполнения задания, об окончании выполнения задания и периодических сообщений, подтверждающих активность аппарата.

### **3. Формирование траекторий обследования заданной области**

Измерение заданного поля в области прямоугольной формы с использованием одиночного АНПА чаще всего осуществляется с помощью траектории типа «меандр», которая позволяет достаточно просто организовать съемку в заданной области с минимальным количеством перекрытий. Она представляет собой набор длинных параллельных между собой галсов, соединенных

короткими перпендикулярными галсами. Шагом меандра является расстояние между длинными параллельными галсами. При использовании такой траектории аппарат большую часть времени перемещается по прямолинейной траектории и выполняет измерения вблизи некоторой регулярной сетки, что позволяет использовать широкий спектр алгоритмов интерполяции для картографирования полученных данных. При движении постоянным меандром шаг подбирается перед началом операции на основе априорной информации таким образом, чтобы на основе полученных измерений можно было восстановить поле с требуемой точностью.

Из требования измерения поля с заданной точностью за оптимальное время вытекает необходимость более информативные области, в которых измеряемый параметр изменяется значительно сильнее, обследовать более частым покрытием, а менее информативные – более редким покрытием. Для этого предложено использовать траекторию типа «меандр с переменным шагом», который предлагается формировать в соответствии с текущей характеристикой информативности поля. Задача при этом заключается в необходимости планирования движения таким образом, чтобы с одной стороны исключить возможность пропуска отдельных участков, а с другой стороны – минимизировать области перекрытий.

Для решения данной задачи разработан алгоритм [12], позволяющий формировать для каждого АНПА траекторию движения типа «меандр с переменным шагом», который с одной стороны позволяет минимизировать область перекрытий при смене шага меандра, а с другой – обеспечивает съемку без пробелов.

Предлагаемый алгоритм относит каждую точку поля, в которой произведено измерение, к одному из  $k$  классов в зависимости от статистических характеристик ее локальной окрестности. При обходе области класса  $i$  обеспечивается расстояние  $h_i$  (шаг) между галсами при проходе по ней. При этом шаги связаны между собой соотношением  $h_{i+1} = qh_i$ .

На рис. 1 показана используемая траектория типа «комбинированный меандр с переменным шагом». АНПА начинает съемку заданного участка обычным меандром с максимальным шагом  $h_1$  (галсы  $A$ ,  $B$  и  $C$ ). Если в процессе съемки (галс  $B$ ) будет обнаружен более изменчивый участок поля (класс 2), то следует организовать более частое обследование и выполнить маневр  $B_1-B_5$ . При этом расстояние между галсами  $B_2$  и  $B_4$  составляет  $2h_2$ , однако, с учетом уже выполненного галса  $B$ , обеспечивается необходимое расстояние  $h_2$  между галсами в области класса 2. В процессе выполнения маневра  $B_1-B_5$  может возникнуть необходимость в еще более детальной съемке (область класса 3), которая реализуется аналогично меандром с шагом  $h_3$  (галсы  $B_{41}-B_{45}$ ) и т.д.

Для определения константы  $q$  рассмотрим ситуацию, в которой область, состоящая из точек класса  $k$ , пересекает два соседних параллельных галса первоначального меандра (например,  $A$  и  $B$  на рис. 1). В соответствии с алгоритмом, вдоль этих галсов будут совершены дополнительные маневры для классов 2, 3, ...,  $k$ . Таким образом, вдоль  $B$  будут следовать параллельно ему дополнительные галсы, подобно  $B_4$  и  $B_{44}$  на рис 1. Самый дальний галс будет отстоять от  $B$  на расстояние  $L = h_2 + \dots + h_k$ , т.е.  $L = h_1(q + \dots + q^{k-1})$ . Аналогично, параллельно галсу  $A$  будут располагаться галсы, самый дальний из которых будет отстоять на то же расстояние  $L$  от него. Для полного покрытия необходимо обеспечить расстояние  $h_k$  между двумя наиболее удаленными галсами (один от  $A$ , другой – от  $B$ ). Таким образом, необходимо, чтобы выполнялось соотношение  $h_1 - 2L = h_k$ , т.е. имеем уравнение:

$$h_1 - 2h_1(q + \dots + q^{k-1}) = h_1q^{k-1},$$

откуда следует, что  $q = 1/3$ .

Для принятия решения об изменении шага меандра предположим, что измеряемое поле  $Z$  является реализацией случайного процесса. Такой подход применяется в геостатистике [1]. Если характеристики случайного процесса одинаковы во всей рассматриваемой области, то он является стационарным. В нашем случае предположение о различных статистических характери-

стиках  $Z$  на различных участках означает, что процесс не является стационарным. Расчет шага может быть выполнен с использованием локальной (на основе  $d$  последних измерений) оценки автокорреляционной функции (АКФ):

$$R(k) = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{j=1}^{d-k} (z_{j+k} - \bar{z}) \cdot (z_j - \bar{z}),$$

где  $\sigma^2$  – текущая дисперсия измеренных данных. На основе полученной АКФ можно рассчитать радиус корреляции  $r$ , который равен дистанции, в пределах которой АКФ превышает некоторый порог  $H$ . Радиус корреляции определяет размеры области, в которой с требуемой точностью может быть выполнена аппроксимация данных. На основе полученного радиуса корреляции определяется уровень меандра  $i$ :  $r_i < r \leq r_{i-1}$ . Здесь  $r_i$  и  $H$  определяются на основе априорной информации или адаптивно, на основе текущих измерений. На основе полученных оценок принимается решение об изменении текущего уровня меандра и его шага на более высокий или низкий.

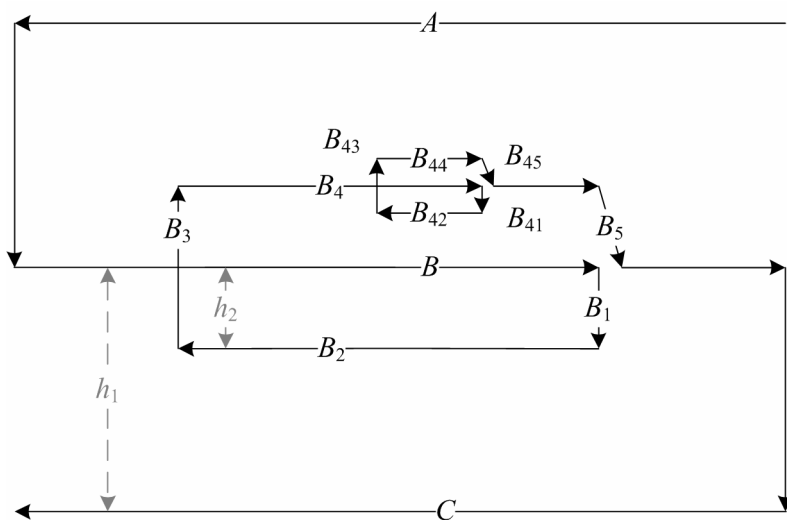


Рис. 1. Траектория движения типа «меандр с переменным шагом» для АНПА



#### 4. Результаты моделирования

Для исследования работоспособности предложенных алгоритмов было выполнено компьютерное моделирование. При формировании движения аппарата применялась кинематическая модель. Для описания среды использовались модельная и реальная батиметрическая растровые карты размером 700 на 1200 точек. Число подводных аппаратов, задействованных при моделировании, было равно трем. Рассмотрена модель системы с тремя уровнями меандров. В качестве неделимого задания был принят галс меандра.

На рис. 2 приведены траектории движения группы из трех АНПА, сформированные в процессе съемки модельной карты в процессе одного из экспериментов. Искусственные данные были получены путем сложения случайно сгенерированных возмущений двух видов, убывающих по квадратичному закону. Одни возмущения были случайно распределены по всей карте и имели масштабы, сравнимые с ней. Возмущения второго вида более локальны и распределены в квадрате, занимающем 5% площади общей карты. Данная карта имеет высокоинформативную область в центре.

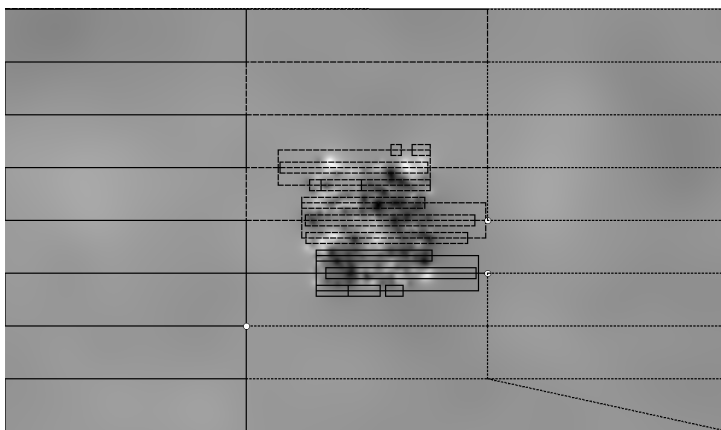


Рис. 2. Результаты работы алгоритмов в процессе съемки модельной карты на основе применения группы АНПА

Все АНПА начинают работу, находясь в верхнем левом углу заданной прямоугольной области. Траектории первого, второго и третьего АНПА, которым соответствуют номера 0, 1 и 2, отображены непрерывной, пунктирной и точечной линиями. Указанная область поделена между ними поровну на три части. Миссия каждого АНПА состоит из 9 основных галсов. В результате имеется 27 заданий, пронумерованных от 0 до 26. На рис. 3 приведен автоматически сгенерированный отчет работы планировщика выполнения заданий. Верхняя диаграмма отображает предварительный план для каждого АНПА, на ней серыми прямоугольниками показаны задания с указанием выполняемого галса, а светлыми – переходы между заданиями. В процессе выполнения миссии раньше всех заканчивает выполнение задания первый АНПА. После этого на основе анализа времени, необходимого для завершения выполнения заданий разными подводными аппаратами, выполняется перепланирование выполнения оставшихся заданий (вторая сверху диаграмма). Из нее следует, что в результате перепланирования первому аппарату добавлены задания 16 и 19, а третьему – задание 25, которые были изъяты из списка заданий второго аппарата.

Следующее перепланирование выполняется после завершения выполнения заданий третьим аппаратом – третья сверху диаграмма. Из нее следует, что в процессе выполнения заданий 16 и 13 первым и вторым аппаратами изменилась оценка времени окончания их выполнения. В результате текущего перепланирования задания 19 и 22 первого и второго АНПА были переданы третьему аппарату. Четвертая, пятая и шестая диаграммы соответствуют моментам завершения выполнения заданий третьим, вторым и первым аппаратами. Перепланирование при этом не производится, потому что все задания уже выполняются.

Затем было выполнено сравнение адаптивного (меандр с переменным шагом) и неадаптивного (меандр с постоянным шагом) алгоритмов при примерно равной суммарной длине траектории, пройденной всеми АНПА. Результаты сравнения приведены в таблице 1. Из табличных данных видно, что карта,

восстановленная после сбора данных с применением адаптивного алгоритма, более точна, нежели карта, полученная для неадаптивного алгоритма.

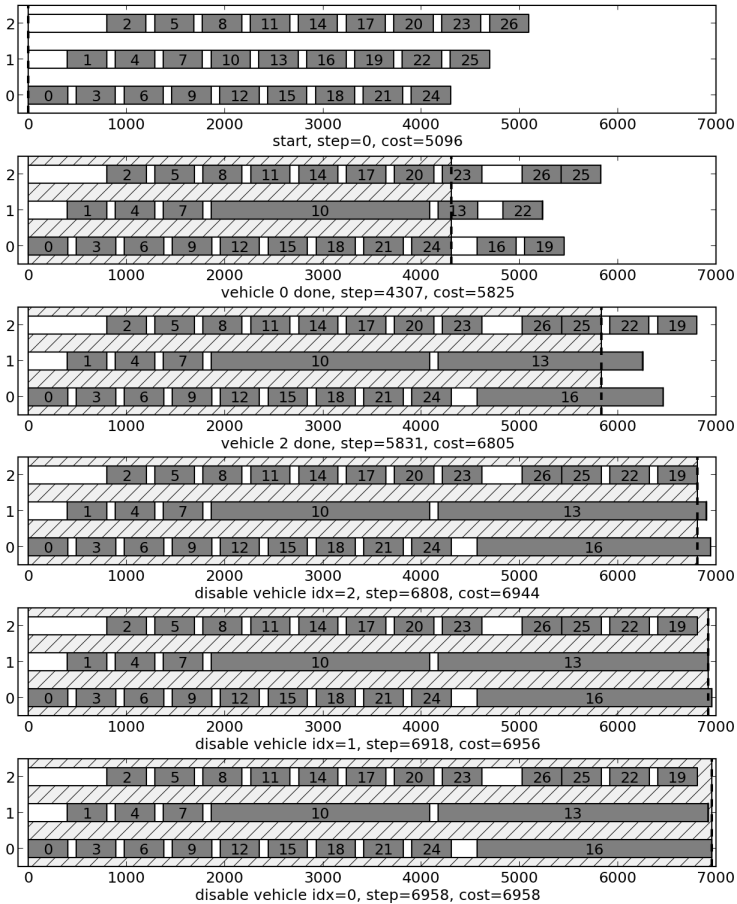


Рис. 3. Автоматически сгенерированный отчет работы планировщика при работе с модельной картой

Таблица 1. Сравнение ошибок восстановления карты для адаптивного и неадаптивного алгоритмов при приблизительно одинаковой длине траектории

	Исходная карта	Ошибка адаптивного алгоритма	Ошибка неадаптивного алгоритма
Минимум	-3480,59	-651,37	-2267,83
Максимум	2507,87	753,68	2269,35
Среднее	22,53	-0,6	-4,53
СКО	280,67	36,85	122,18

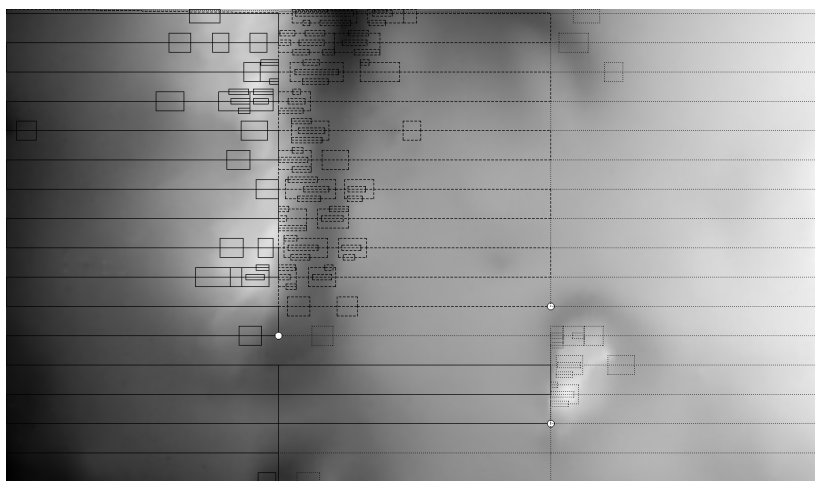


Рис. 4. Траектории движения группы из трех АНПА, сформированные при съемке поля глубин на основе цифровой батиметрической карты залива Монтерей

Далее для проверки работоспособности предложенных алгоритмов был использован цифровая батиметрическая карта залива Монтерей [7]. На рис. 4 приведены траектории движения группы из трех АНПА, сформированные при ее обследовании.

Полученные результаты подтверждают работоспособность и эффективность предложенных алгоритмов планирования

заданий для группы АНПА и формирования траекторий типа «меандра с переменным шагом». С точки зрения группового взаимодействия, предложенный подход на основе разбиения миссии на задания позволяет обрабатывать исключительные ситуации и оптимизировать работу в целом, включая ситуации, когда изменяется количество работающих АНПА. В дальнейшем предполагается повысить эффективность разработанных алгоритмов за счет формирования в процессе съемки более точного прогноза времени выполнения заданий и использование данной информации при выполнении перепланирования.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 130800967.

### **Литература**

1. ДЮБРУЛ О. *Использование геостатистики для включения в геологическую модель сейсмических данных* [пер. с англ. Е.В. Ковалевский, ред. перевода Г.Н. Гогоненков]. – European Association of Geoscientists & Engineers; EAGE Publications, 2002. – 296 с.
2. ТУФАНОВ И.Е., ЩЕРБАТЮК А.Ф. Разработка алгоритмов группового поведения АНПА в задаче обследования локальных неоднородностей морской среды // *Управление большими системами*. – 2012. – Вып. 36. – С. 262–284.
3. APPLEGATE D.L., VIXBY R.E., CHVÁTAL V., COOK W.J. *The Traveling Salesman Problem*. – Princeton University Press, 2006. – 593 p.
4. BRAGA J., CALADO P., SUJIT P.B., SOUSA J.B. *Fault Tolerant Area Coverage Using Underwater Vehicles* // IFAC Workshop on Navigation, Guidance and Control of Underwater Vehicles (NGCUV–2012), April 10–12, 2012, Porto, Portugal. – P. 1–6.
5. CAITI A., CASALINO G., MUNAFÒ A., TURETTA A. *Cooperating AUV Teams: Adaptive Area Coverage With Space-Varying Communication Constraints* // Proc. OCEANS 2009 MTS/IEEE Conference, May 11–14, 2009, Bremen, Germany. – P. 1–7.

6. CAITI A., MUNAFÒ A., VIVIANI R. *Adaptive on-line planning of environmental sampling missions with a team of cooperating autonomous underwater vehicles* // International Journal of Control. – 2007. – Vol. 80, No. 7. – P. 1151–1158.
7. CARIGNAN K.S., TAYLOR L.A., EAKINS B.W., WARNKEN R.R., SAZONOVA T., and SCHOOLCRAFT D. C. *Digital Elevation Model of Monterey, California: Procedures, Data Sources and Analysis* // NOAA, 2009. – URL: <http://www.ngdc.noaa.gov/dem/squareCellGrid/getReport/414> (дата обращения: 12.02.2013). – 36 p.
8. JUNG Y.S., LEE K. W., LEE B. H. *Advances in Sea Coverage Methods Using Autonomous Underwater Vehicles (AUVs)* // Recent Advances in Multi Robot Systems. – I-Tech Education and Publishing, 2008. – P. 69–100.
9. LOW K. H., DOLAN J.M., KHOSLA P. *Adaptive Multi-Robot Wide-Area Exploration and Mapping* // Proc. 7th International Joint Conference on Autonomous Agents and Multiagent Systems, May 12–16, 2008, Estoril, Portugal. – Vol. 1. – P. 23–30.
10. PFINGSTHORN M., BIRK A., VASKEVICIUS N., PATHAK K. *Cooperative 3D Mapping Under Underwater Communication Constraints* // Proc. OCEANS 2011 MTS/IEEE Conference, September 19–22, 2011, Kona, USA. – P. 1–9.
11. RAHIMI M., PON R., KAISER W.J., SUKHTAME G.S., ESTRIN D., SRIVASTAVA M. *Adaptive Sampling for Environmental Robotics* // IEEE International Conference on Robotics and Automation. – 2004. – Vol. 4. – P. 3537–3544.
12. TUPHANOV I.E., SCHERBATYUK A.Ph. *Adaptive Algorithm of AUV Meander Pattern Trajectory Planning for Underwater Sampling* // ISOPE PACOMS, October 3–5, 2012, Vladivostok, Russia. – P. 181–185.
13. YILMAZ N.K., EVANGELINOS C., LERMUSIAUX P.F.J., PATRIKALAKIS N.M. *Path Planning of Autonomous Underwater Vehicles for Adaptive Sampling Using Mixed Integer Linear Programming* // IEEE Journal of Oceanic Engineering. – 2008. – Vol. 33, No. 4. – P. 522–537.

14. ZHANG B., SUKHTAME G. *Adaptive Sampling for Estimating a Scalar Field using a Robotic Boat and a Sensor Network* // IEEE International Conference on Robotics and Automation, April 10–14, 2007, Roma, Italy. – P. 3673–3680.

**ON ALGORITHMS OF HIGH-PRECISION MEASUREMENT OF UNDERWATER ENVIRONMENT PARAMETERS, BASED ON AUV GROUP USAGE**

**Igor Tuphanov**, Institute for Marine Technology Problems FEB RAS, post-graduate student (ituphanov@gmail.com).

**Alexander Scherbatyuk**, Institute for Marine Technology Problems FEB RAS, PhD, head of laboratory (scherba@marine.febras.ru).

*Abstract: We consider a problem of measurement of underwater environment parameters by using a group of autonomous underwater vehicles /AUVs/. It is supposed that measurement is done for further mapping of a given area. We suggest a method of group work planning and consider re-planning for the case when one of AUVs completes its task. We also provide the results of simulation of algorithms suggested.*

Keywords: group of autonomous underwater vehicles, group behavior, planning, environment parameters measurement.

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии Д.А. Новиковым  
Поступила в редакцию 12.02.2013.  
Опубликована 31.05.2013.*

УДК 004.7 + 007.3  
ББК 32.973.202-02

## **АРХИТЕКТУРА РАСПРЕДЕЛЁННОЙ ПАМЯТИ ДЛЯ ИЗМЕНЧИВОЙ КОМПЬЮТЕРНОЙ СРЕДЫ**

**Знаменский С. В.<sup>1</sup>**

*(ФГБУН Институт программных систем  
им. А.К. Айламазяна РАН, Переславль-Залесский)*

*Представлена методология использования ретроспективной общей памяти в качестве основы для безгранично перестраиваемого высокодоступного компьютерного сервиса.*

Ключевые слова: управление большими системами, разделяемая память, распределённые системы, системная архитектура.

### **Введение**

Целью работы является проработка архитектурных принципов высокоэффективных системы информационной поддержки сложного долговременного целенаправленного взаимодействия большого числа людей и вычислительных средств в будущем десятилетии.

Задачами такого рода систем будут разработка гладко обновляемой операционной системы и конструктивное разрешение содержательных социально-экономических и экологических проблем.

Имеется в виду, что мощность распределённой вычислительной системы в процессе бесперебойного обслуживания увеличивается путем замены устаревших кластеров на новые, которые могут принципиально отличаться по архитектуре и управлению. Речь о системе, которая не выключается и постоянно предоставляет внешний доступ к данным. Без остановок в ней же разраба-

---

<sup>1</sup> *Сергей Витальевич Знаменский, доктор физико-математических наук, доцент, (svz@latex.pereslavl.ru).*



тывается уникальное системное и прикладное программное обеспечение, отлавливаются и исправляются ошибки, сопоставляются результаты, полученные разными путями, оптимизируется выполнение задач, устраняются любые изолированные поломки.

Такая организация высокопроизводительного бесперебойного сервиса в долговременной перспективе является проблематичной: обновление оборудования не сводится к простой замене, а требует использования новых парадигм, качественно изменяются запросы и интерфейсы пользователей и средства разработки программного обеспечения.

Прогноз погоды даёт не единственный возможный пример будущей прикладной длительно функционирующей системы, в которой количественно и качественно растущие данные должны параллельно в тесном сотрудничестве обрабатываться в разных взаимосвязанных целях.

Повышению качества прогноза послужат реорганизация ввода информации от новых источников, наращивание вычислительных мощностей, совершенствование алгоритмов обработки и интерфейсов пользователя.

Единая информационно-вычислительная система должна обеспечивать не только вычисления по фиксированному алгоритму на основе заранее определённых структур входных данных, но и включение в обработку новых видов входной информации и новых алгоритмов обработки и совершенствование старых алгоритмов. Основой всего должна стать развёрнутая организация параллельных работ с общими данными на расширяющейся вычислительной основе. Единой организацией доступа к данным должны быть поддержаны работы по сопоставительному анализу разных подходов и алгоритмов обработки, выявлению возможностей ситуативного выбора наиболее адекватных алгоритмов обработки и архитектур локального оборудования. На этой же основе должны попутно развиваться и исследоваться алгоритмы интервальных оценок будущих погодных явлений.

На этом примере отчётливо видна потребность повторного использования полной информации о входных данных, результа-

тах их обработки, использованных алгоритмах и конфигурации системы при вычислениях.

Видна на нём и потребность в длительно функционирующей системе с гибко изменяемой конфигурацией оборудования и программного обеспечения и организации работ. Длительное существование информационной системы связано с рисками принципиальной несовместимости оборудования.

Исследования, связанные с организацией высокопроизводительного бесперебойного сервиса в долговременной перспективе [17, 18, 20], не подсказывают ясного пути к решению поставленной задачи.

Особенности оборудования, программных интерфейсов или общей структуры управления не могут претендовать на архитектурную основу такой системы. Этой архитектурной основой становится ретроспективность: доступность в неискажённом виде всей ранее доступной информации, включая программные и пользовательские интерфейсы и сопроводительную документацию по указанию времени прежнего доступа.

## 1. Идея ретроспективности

Ретроспективная парадигма означает непризнание абстракции текущего состояния. Неправомерно требовать от распределённой системы, чтобы она мгновенно корректно изменила состояние: она может устанавливать новое логически непротиворечивое состояние в течение некоторого времени. Обычно это время мало, но даже в самых надёжных системах нередко ситуации, когда оно увеличивается по причинам неизбежных сбоев или мелких поломок.

Мы приходим к требованию *ретроспективной согласованности данных информационной системы*:

1) в любой момент времени  $t$  в системе доступен прошедший момент истины  $\mu(t) < t$ , которым завершилась доступная история согласованных изменений данных системы;

2) для любого доступного в истории предыдущего момента  $\tau < \mu(t)$  система возвращает корректно согласованные реплики.

Разность  $t - \mu(t)$  назовём *длительностью согласования*. При удачном разделении длительность согласования для части системы оказывается меньше, чем для целой системы.

*Ретроспективная* информационная система может не иметь единой концептуальной модели. Более того, её концептуальная модель может изменяться не мгновенно и не одновременно во всех частях. Этим она принципиально отличается от *последовательных (linearizable)* информационных систем, основанных на моделировании последовательности изменений глобального согласованного состояния системы.

Общепринятое с прошлого века [16] моделирование распределённой системы конечным автоматом (*linearizability*) корректно лишь при отсутствии сбоев, поломок и вызванных ими перезапусков процессов. Никакая реальная система без нарушений последовательности не обходится. Удивительно, что эта привычная мотивированная простотой модель, несмотря на очевидную неадекватность, остаётся общепризнанно эталонной для критических приложений, в том числе для банковских систем. Даже порой неизбежная необратимость составляющих сложной транзакции почему-то принимается как несовершенство мира, а не как принципиальный недостаток логической модели, базирующейся на идее отката транзакций.

Практически все существующие информационные системы *последовательные*. Это косвенно подтверждается растущей популярностью теоремы CAP Брюера [19]. Возможно, это объясняется двумя причинами: (1) неадекватная модель проста; (2) именно она канонизирована в стандартах передачи и обработки данных.

Заметим, что простота здесь тоже сомнительная: хорошо известно, что задача верификации разделяемой памяти в этой модели является *NP*-полной [12, 14, 21].

Ретроспективная парадигма разрешает системе иметь согласованное состояние не в каждый момент времени. Это означает, что пользователь на свой запрос может получить ответ о старом (уже неактуальном) согласованном состоянии с указанием момента времени, на который информация действительна:

Неверно полагать, что отказ пользователю в возможности доступа к текущей актуальной информации ущемляет его. В аналогичной ситуации стандартная система действительно покажет информацию о текущем состоянии, но ответ будет получен через значительное время, и к какому именно промежуточному моменту в этом промежутке будет относиться информация, так и останется неизвестным. Для ретроспективной системы легко сделать пользовательский интерфейс, эффективно эмулирующий подробное поведение: интерфейс должен не спешить с посылкой запроса, повторять запрос, пока он не будет датирован более новым моментом и не отразит время актуальности. Сомнительно, что пользователю всегда нужно дополнительное ожидание и неинтересен момент актуальности при задержке ответа.

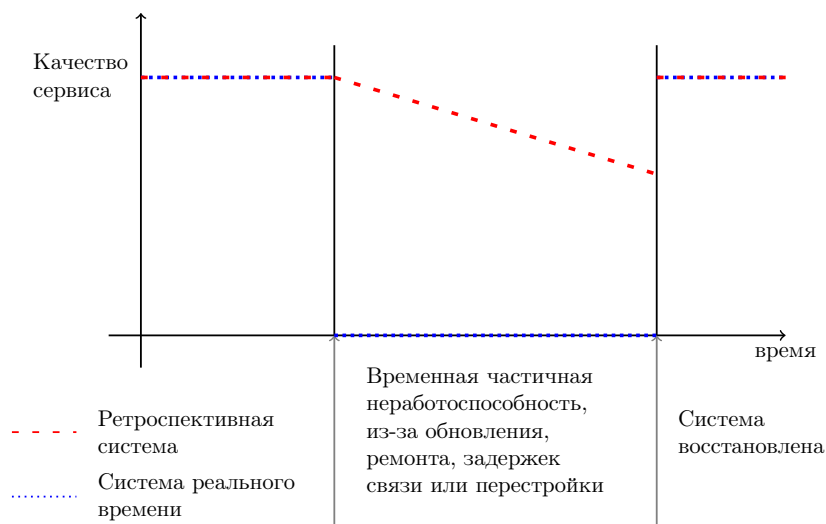


Рис. 1. Сравнение ретроспективной системы с системой реального времени

На примере банковских систем ретроспективная парадигма означает, что сделки совершаются не мгновенно, поэтому значение денег на счёте в момент незавершённой транзакции есть абстракция, не имеющая практического смысла. Поэтому не состо-

яния счетов, а записи в истории изменений являются в ретроспективной парадигме базовыми объектами для таких систем. Точное значение на счету реально существует лишь для достаточно отдаленного прошлого, все транзакции из которого можно считать так или иначе завершёнными.

Записи об изменении счетов только создаются и никогда не изменяются. Можно считать, что они никогда не исчезают. Поэтому на прикладном уровне в такой основанной на истории изменений банковской системе нет никакой конкуренции доступа и нужды в блокировках и очередях (записи ведь все разные и у каждой свой автор), да и по всей видимости в откатах транзакций.

То, что система обрабатывает изменения не по запросу, а по факту появления, создаёт эффект, заметный для пользователя, получающего результат сложной обработки: он, как и в современных интернет-сервисах, получает практически мгновенно результат обработки, начатой до того, как он отправил запрос.

Учитывая техническую сложность согласования времени с высокой точностью, ретроспективный подход требует, чтобы погрешность согласования времени не была существенно больше, чем время передачи данных. Однако трудно вообразить ситуацию, в которой это ограничение было бы обременительным.

В отличие от популярной парадигмы «согласованности в конечном счёте» (Eventual consistency [22]) ретроспективная парадигма учитывает, что обрабатывать меняющиеся данные корректно лишь по их состоянию на *фиксированный* момент времени.

Покажем, как ретроспективность позволяет резко повысить устойчивость распределённых систем к частичным поломкам и задержкам связи.

## **2. Устойчивость ретроспективных систем к задержкам и разделением**

Известная [8] своими небезупречными популяризациями *теорема CAP* [10] утверждает невозможность сочетания трёх свойств:

*Consistency (Согласованность):*

ответы на запросы к системе логически непротиворечивы.

*Availability (Доступность):*

ответ на любой запрос может быть получен незамедлительно.

*Partition-tolerance (Устойчивость к разделению):*

при восстановлении потерянной на время связи функциональность и внутренняя целостность восстанавливаются.

Формальное доказательство этой теоремы в [15] основано на прозрачной идее:

Как только в частях системы появились различия, то их доступность выявила противоречие

Практически после разрыва связи с филиалом компании работа *должна* быть продолжена с адекватными ситуациями ограничениями и после восстановления связи система *должна* полностью восстановиться без потерь информации, то логика доказательства очевидно противоречит потребностям практики.

Неприемлемость строго доказанного результата в науке встречается. Достаточно вспомнить классические безупречные доказательства невозможности рационального корня из числа 2, корней из отрицательных чисел и недифференцируемости функции Хевисайда. Их неприемлемость привела в своё время к развитию и широкому применению новых теорий, ставших основой современной математики — теории вещественного числа, теории комплексных чисел и теории обобщённых функций.

Рассмотрим возможность и целесообразность построения системы, сочетающей ретроспективность с *адекватностью* — безупречностью реакции на запросы и соразмерностью последствий временных поломок и сбоев.

## 2.1. ПРОБНАЯ ЗАДАЧА

Банк имеет тысячу клиентов в двух городах  $A$  и  $B$ . Расчётное максимальное время задержки передачи данных между городами  $T = 0,25$  секунды.

Города расположены так, что устранить эту задержку технически невозможно<sup>2</sup>

Для поддержки переводов денег со счёта на счёт банк нуждается в качественной информационной системе с по возможности быстрым временем отклика  $\tau$ , рассчитанной на обработку не более десяти запросов в секунду с одновременной поддержкой сессий:

1) результаты любых запросов гарантированно должны быть корректны и согласованы;

2) при любом обращении к сервису задержка обработки не должна превосходить  $\tau$  для любого из следующих запросов;

а) просмотр состояния счёта и истории его изменений;

б) перевод имеющейся суммы на другой счёт;

в) получение отчётов.

Для предельного упрощения задачи полагаем, что банк с наличностью не работает, кредитованием не занимается, вне городов никого не обслуживает, пользователи заведены с неизменными личными данными и для простоты не переезжают, а потерями и задержками внутри городов можно пренебречь.

## 2.2. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЙ ПОДХОД

Информация о текущем состоянии каждого счёта должна где-то храниться. Запрос о переводе на этот счёт из другого города должен прийти и после этого ответ должен вернуться обратно, чтобы пользователь смог знать, что запрос принят. Поэтому реакция системы не может быть гарантирована быстрее, чем в течение  $\tau = 2T = 0,5$  секунды.

## 2.3. РЕТРОСПЕКТИВНЫЙ ПОДХОД

В мегаполисах размещаются идентичные серверы. Каждый из них ведёт счета пользователей из своего мегаполиса.

---

<sup>2</sup> При передаче со скоростью света через геостационарный спутник сигнал задерживается на  $1/4$  секунды. При недоступности геостационарного решения неизбежны дополнительные задержки.

Сервер отказывается выполнить перевод, если денег на счету отправителя недостаточно. Если на счету достаточно денег, то сервер немедленно изменяет состояние локальных счетов и надёжно запоминает своё обязательство по возможности быстро выполнить перевод. Это должно делаться за ощутимо меньшее время, чем ожидаемое время поступления следующего запроса. Если повторный запрос от пользователя на перевод денег следует через доли миллисекунды, то это скорее повторное срабатывание и уж никак не осмысленные действия пользователя, поэтому гораздо безопаснее оставить лишь один из серии таких практически одновременных запросов.

После обработки серии запросов (например каждые полсекунды) серверы передают друг другу полные списки накопившихся запросов и записей изменений в счетах и извещения о получении списков. Извещение о получении посылается только в том случае, когда пакет получен полностью и содержит момент времени, вплоть до которого все данные получены. Пакетная передача помогает гарантировать единый порядок и отсутствие пропусков в общей части информации серверов и корректно снизу оценить момент истины системы  $\mu(t)$ , вся история изменений вплоть до которого получена на обоих серверах.

Пользователь получает ответ на свой запрос с учётом реакции только ближайшего сервера. Реакция удалённого (например, уведомление о получении перевода в другой город) может быть учтена в отдельном последующем через секунду запросе (который может делаться автоматически либо клиентским приложением либо на основе технологии comet [11], позволяющей локальному серверу самостоятельно передать такое уведомление в момент получения).

#### **2.4. СРАВНЕНИЕ ПО СКОРОСТИ И ИНТЕРФЕЙСУ**

Условия задачи не влекут никаких технических препятствий к получению быстрого (в течение десяти миллисекунд) ответа на запрос на основе имеющейся на ближайшем сервере информации. Повышение реактивности системы в сто раз здесь достигнуто по сути включением в реакцию системы на запрос пользо-



вателя только немедленно доступной информации.

Это позволяет обеспечить пользователя удобным интерфейсом, дающим возможность выбора, наблюдать за процессом обработки либо спокойно выключить клиентское приложение либо заняться операциями с другими счетами.

Взаимодействие с внешней системой может породить сложную совместную транзакцию (например, перевод с одного счёта на другой в другой город, оттуда на третий и снова назад) и потери времени станут неизбежны. Для клиента, ожидающего поступлений на счёт, может быть создано клиентское приложение, ожидающее изменения состояния счёта для повторения запроса, отвергнутого из-за недостатка денег на счету.

Разумеется, при переводе денег упомянутая секунда задержки не составляет проблемы для клиента. Сюжет задачи выбран для ясности рассмотрения, а ничем не компенсированные задержки в других ситуациях могут оказаться критическими.

## 2.5. СРАВНЕНИЕ ПО ЛОГИЧНОСТИ И НАДЁЖНОСТИ

В конкретной задаче общая сумма денег на счетах в реальности не константа. Ясно и привычно, что отправленные с одного счёта деньги поступают на другой не мгновенно. Стандартная реализация на основе транзакций прячет время транзакции в неповоротливость пользовательского интерфейса, искусственно создавая иллюзию мгновенности сделки и ущемляя пользователя.

Ретроспективное решение делает находящиеся в пути деньги доступными для точного последующего анализа.

История изменений счёта, полученная пользователем, полна до момента  $\mu(t)$ , а после  $\mu(t)$  в ней могут временно отсутствовать деньги, «находящиеся в пути».

Запросы сводной информации на момент, предшествующий  $\mu(t)$ , не зависят от сервера. Для запроса сводных данных на последний момент у пользователя есть две возможности:

1) посмотреть сводную по всем доступным (неполным) данным с предупреждением о неполноте;

2) посмотреть *полную* сводную по всем данным на последний момент  $\mu(t)$ , для которого они доступны.

Если запросы следуют не чаще, чем может обработать традиционная система, то выдаётся в точности тот ответ, каким он был бы в традиционной системе на запрос, посланный из оптимально выбранного момента прошлого (неважно, был ли такой запрос в действительности).

Поломка связи между городами при стандартном подходе полностью блокирует операции в одном из них. При ретроспективном подходе блокируются лишь операции, непосредственно нуждающиеся в этой связи, остальное продолжает работать, и сервис немедленно полностью восстанавливается при восстановлении связи.

Кроме упомянутых, ретроспективная организация имеет и другие полезные особенности:

Поломка или неожиданная потеря одного сервера базы данных (попадание метеорита) при стандартном подходе должно быть заранее предупреждено специальными мерами, например, чёткой организацией резервного копирования или репликации базы. Иначе потери могут оказаться фатальными.

При ретроспективном подходе без каких-либо дополнительных мер исчезновение сервера приводит к потере лишь части обновлений за последние доли секунды, что оставляет шансы на спасение.

## **2.6. ИТОГИ СРАВНЕНИЯ**

**Теорема 1.** *Существует возможность реализации прикладной информационной системы с ретроспективным доступом, вполне адекватной функциональностью при разделении, быстрым автоматическим восстановлением после восстановления связи и с временем отклика в сто раз ниже, чем у любой реализации на стандартной основе.*

Эта теорема разумеется противоречит не самой теореме CAP, а её популярным интерпретациям.

Рассмотренный пример вырос из неоднократно обсуждавшихся на конференции [1, 3, 6] ретроспективных систем. Он ставит ряд вопросов:

1. Ведёт ли он к общей технологии разработки ретроспективных информационных систем?

2. Не чрезмерны ли требования ретроспективной парадигмы к объёмам памяти и вычислительных ресурсов?

3. Сможет ли ретроспективная технология кардинально упростить исправление концептуальных ошибок и создание эволюционирующих систем?

4. Сможет ли ретроспективная технология резко уменьшить потери и неудобства пользователей, связанные с обновлением систем?

5. Сможет ли положительный эффект ретроспективного подхода проявиться при организации многопроцессорных распределённых систем и высокопроизводительных вычислений с большими гранулами параллелизма либо с задержками переконфигурирования *FPGA* [9]?

### **3. Ретроспективная парадигма программной инженерии**

Проектирование системной архитектуры предполагает разделение системы на наиболее крупные составные части и принятие конструктивных решений, которые после их принятия с трудом поддаются изменению.

В рассматриваемой общей постановке неограниченно изменяются концептуальная модель, используемое оборудование и приложения (сервисы). Поэтому они не могут быть общей основой системной архитектуры для ретроспективной системы. Такой основой может быть только стабильная подсистема идентификации структур процессов и данных, обеспечивающая безусловную доступность неподдельной истории при произвольных изменениях.

Прежде чем её описывать, следует разобраться с понятиями модульности и информационных объектов, которые в системе с историей и изменчивостью имеют свои особенности.

### 3.1. СОХРАНЕНИЕ ПОЛНОЙ ИСТОРИИ

История изменений необходима

- для эффективного согласования распределённых данных;
- для быстрого восстановления при поломках;
- для ускорения отладки нового кода;
- для упрощения расследования вторжений и других происшествий;
- для повышения ответственности персонала.

Последние две цели требуют гарантий неподдельности истории. Эти гарантии нуждаются в комплексной поддержке истории изменений *на более низком уровне*, чем механизмы разрешения конфликтов доступа и механизмы обеспечения прикладной функциональности.

Экономное сохранение истории достигается разделением данных на *небольшие независимо изменяемые части*. Например, для веб-сайта организации, управляемого *CMS*, должны сохраняться история изменений шаблонов фрагментов страниц, версии фрагментов заполнений, версии исполняемых процедур, обеспечивающих формирование страницы на этой основе (об истории активности пользователей разговор особый).

**Пример.** *За два года существования сайта каждый из этих элементов изменяется в среднем пять раз (редкие 100, многие 1), а средний размер элемента превышает длину штампа времени и текущий размер информации сайта 100 Мб.*

Общий объём всех версий исходных файлов, помеченных моментом сохранения, составляет

$$(100 + 100) \times 5 = 1000 \text{ Мб.}$$

Объём выданных пользователям веб-страничек, которые получают разными сочетаниями исходных файлов и шаблонов, может на порядки превосходить эту цифру.

Для быстрого доступа к любой страничке из прошлого нужно лишь добыть актуальное на этот момент сочетание файлов и

шаблонов, что несложно организовать с логарифмически растущими с объёмом издержками [3]. Много резервных копий системы не потребуется, поскольку вся история остаётся нетронутой и сможет пропасть только вместе с используемыми данными.

Пример показывает возможность хранения высоко доступной полной истории изменений при вполне умеренном росте ресурсозатрат при двух условиях:

- 1) выделение независимо изменяющихся «первичных» фрагментов информации в отдельные информационные объекты;
- 2) несохранение объектов, просто однозначно реконструируемых из первичных.

Если ненужные версии данных занимают слишком много места, часть давно неактуальной информации может автоматически удаляться [4], создавая *белые пятна* истории на оси времени — промежутки, состоящие из моментов времени, информация на которые недоступна. Этот процесс мог бы проводиться автоматически субоптимально [5], оставляя относительный размер каждого белого пятна близким к минимально возможному при заданном ограничении общего объёма хранилища.

### 3.2. МОДУЛЬНОСТЬ

Модульность освобождает разработчиков прикладных программ от сложностей организации исполнения. Она традиционно понимается как разделение на изолированные модули со своим кодом и данными, обменивающиеся сообщениями. Рассмотрим, как такое понимание может при структурных изменениях приводить к неконтролируемому росту сложности организации обмена сообщений.

Сложность эта порождается двумя принципиальными дефектами неуправляемого обмена сообщениями:

- 1) новому исполнителю недоступна информация, разосланная участникам совместно выполняющейся работы;
- 2) сообщения теряются по разным причинам;
- 3) сообщение читается с неизвестным запозданием, за это время оно может потерять адекватность, а отменить непрочитанное сообщение автор не может.

Отсюда опасность использования изоляции модулей с организацией обмена сообщениями в коллаборативном приложении: после успешного тестирования малейшее изменение структуры взаимодействия или возникновение задержек может неожиданно выявить необходимость корректирующих сообщений. В итоге безупречная работа обеспечивается лишь до замены модулей и откатов неправильных действий, а запуск новых исполнителей на замененном оборудовании и (или) с новыми алгоритмами исполнения требует серьёзного рефакторинга системы.

Альтернативой обмена сообщениями является публикация данных с подпиской на изменения, и, в частности, стандартное решение *DDS (Data Distribution Service)* [13].

Механизм обработки запросов на подписку и на публикацию авторы не регламентируют. Во избежание коллизий запросы, вероятно, должны обрабатываться строго, т.е. проходить через общий вычислительный узел, что принципиально ограничивает масштабируемость. В любом случае это не снижает ценности *DDS* как перспективного новейшего технического решения для общей памяти распределённой системы, которое, по-видимому, может эффективно масштабироваться при устойчивых структурах данных с достаточно редко меняющимися настройками.

Подписка производится с настройками, устанавливающими количество хранимых версий, время жизни данных, количество реплицируемых копий, планомерно допустимые задержки, учитываемыми период изменения данных и приоритетность передачи. *DDS* ничем не ограничивает свободы программиста по выбору этих настроек.

Получая полный доступ к гибкому распределению вычислительных ресурсов, прикладной программист, к сожалению, практически лишён разумных ориентиров. Это создаёт сложнейшую проблему избыточной гибкости настроек, которые для долгоживущей системы должны быть ещё и динамически управляемыми.

Решение этой проблемы требует системной организации для гибкого регулирования минимальным количеством прозрачных настроек.

Построив дерево всех объектов, настройки будем считать вектор-функцией от узла. Если предположить, что настройки чаще должны совпадать для смежных узлов, то задание настроек сводится к разрезанию дерева и заданию настроек для каждой связной части. Поскольку каждая связная часть имеет ближайший к корню элемент, то именно в нём можно задавать или менять настройки. Тогда настройки, сделанные в любом узле, наследуются во всей ветке, за исключением подветок со своими настройками.

Это означает, что проблема настроек разделяемой памяти сводится к разумному представлению всех данных системы в виде дерева объектов.

Примерами таких веток в рассмотренном примере являются данные о изменениях в счёте отдельного пользователя и данные по городу. В общем случае такое разделение означает иерархию управления изменениями в системе.

### 3.3. КОНТЕКСТНАЯ АВТОНОМНАЯ АРХИТЕКТУРА

Архитектура контекстно-автономной системы [1] формируется на основе иерархии управления изменениями. Используется идея процессного подхода, рекомендованного стандартами ИСО серии 9000. Однако вместо термина *процесс* мы будем использовать более общий термин *активность*, не предполагающий обязательности входных данных и не ассоциирующийся с процессами операционной системы. Так, множество всех ИСО9000-процессов является подмножеством всех активностей системы.

#### **Другие примеры активностей:**

- нажатие пользователем кнопки, переход по ссылке или ввод текста;
- обнаружение события, нуждающегося в обработке;
- обработка данных, полученных от разных пользователей, при совместном редактировании.

Мониторинг сложных активностей осуществляют активности управления качеством, в частности, корректирующие взаимные приоритеты дочерних активностей.

Системная активность управляет качеством системы в целом через такие дочерние активности, заведомо неполный список которых включает:

- мониторинг наличия и состояния физических устройств и каналов связи;
- мониторинг информационного обмена между активностями и между физическими узлами и перемещение активностей.
- мониторинг взаимных приоритетов активностей с общим родителем;
- мониторинг качества обновления информации;
- документирование кода и данных системы;
- уточнение приоритетов информационного обслуживания активностей;

Большинство задач системной активности в начальной фазе существования системы может осуществляться человеком, а затем переводиться на автоматическое управление. Автоматизация управления требует постановок задач поиска эффективных алгоритмов. Эти алгоритмы должны будут разумным образом перестраивать размещения активностей по физическим устройствам и оптимизировать коммуникации, используя в качестве входных данных изменения физической конфигурации системы, изменения приоритетов и статистику мониторинга активностей.

### **3.4. ЛОГИЧЕСКАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ ДАННЫХ**

Элемент данных (например, атрибут объекта) может сохраняться и реплицироваться в разных узлах системы. Изменение данного создаёт его новую версию. Прежде чем идентифицировать версии в различных местах системы, мы должны идентифицировать то, версии чего в ней сохраняются. Идентификатор самого элемента (например, поле конкретной формы, заполненное конкретным пользователем, содержащее код исполняемого в системе скрипта), не учитывающий версии и места хранения, будем называть *логическим идентификатором элемента данных*. Прозрачность идентификации данных крайне важна для доработок системы.

Для каждой активности  $A$  определим её *контекст*  $\mathcal{D}(A) =$



$[d_0(A), d_1(A)] \subset U$  как сегмент в линейно упорядоченном универсуме  $U$  всех возможных логических идентификаторов данных [4].

Универсум  $U$  будем считать *неисчерпаемым* в следующем смысле:

$$\forall x, y \in U \exists z \in U : x < z < y.$$

Неисчерпаемость обеспечивает возможность размещения в любом контексте множества данных любой конечной мощности. Например, универсум строк символов неограниченной длины с отношением лексикографической упорядоченности неисчерпаем.

Для вложенных контекстов активность с более широким контекстом будем называть родительской, а с более узким — дочерней.

Принцип разделения ответственности и принцип единоначалия приводят к следующим требованиям:

1) *контексты любых двух активностей либо вложены, либо не пересекаются;*

2) *активность с более широким контекстом не модифицирует контексты дочерних активностей;*

3) *перемещение активности в новую область резервирует старый контекст для возможного возврата и изоморфно переносит все дочерние активности.*

Добавляя совокупную активность, поддержанную системой, получаем в каждый момент времени дерево активностей. Оно изменяется: активности появляются, замирают, глубина вложенности активности может изменяться. Это обеспечивает произвольные структурные перестройки и гарантирует доступ к неискажённому прошлому.

### 3.5. ОРГАНИЗАЦИЯ ИСПОЛНЕНИЯ

Иерархия активностей упрощает проблему регулирования разделения ресурсов. Приоритеты допустимости задержек, уровня защищённости и ценности истории устанавливаются (и могут в любой момент быть пересмотрены) для общих активностей верхнего уровня:

1) состояние изменяющегося объекта однозначно определено лишь в достаточно давнем прошлом;

2) безупречный ответ может быть дан лишь на запросы об устоявшемся (линейно упорядоченном) прошлом, предшествующим моменту истины множества данных, нужных для обработки запроса;

3) *момент истины* (ранее которого прошлое устоялось) быстро определяется по времени и идентификатору;

4) обновление информации в автономном контексте данных происходит с ограниченной частотой при появлении изменений, необработанных на момент, когда все входные данные устоялись;

5) изменения помечаются комбинированным временем обработки, интерпретируемым и как частично упорядоченное логическое (линейно упорядоченное до момента истины), и как приближение к физическому времени.

Ограниченность частоты изменений обеспечивает локализацию последствий ошибок и открывает возможность оперативного автоматического выявления проявившихся в работающей системе противоречий. Локализация последствий ошибок вместе с автоматической диагностикой особенно важна для ретроспективной системы, поскольку перестройку «на ходу» невозможно осуществить без временных рассогласований и исправляемых ошибок.

Поясним сказанное.

**Пример.** Один процесс обеспечивает  $a = -b$ , а другой  $b = a + 1$ .

Подобное нарушение логики, проскользнувшее в обычную работающую систему, либо останется незамеченным, либо заставит систему бесконечно пересчитывать  $a$  и  $b$ .

Фиксация частоты изменений ограничивает любые негативные эффекты, в том числе и этот.

При появлении нескольких кандидатов для значения в близком времени возникает конфликт, требующий разрешения. Иногда для разрешения могут использоваться либо выбор значения, поступившего последним, либо выбор наибольшего (рекордного) из поступивших значений.

Остальные значения игнорируются или удаляются при записи. Если конфликты сложнее, то могут вводиться дополнительные активности для разных источников значений с целью разрешения конфликтов.

Если, например, от пользователя поступает более десяти форм в секунду, то это возможная попытка взлома. Классическое эффективное средство борьбы — это игнорирование промежуточных запросов от одного пользователя в малом промежутке времени. При этом запросы от всех разных пользователей должны быть сохранены и корректно обработаны.

Уменьшение частоты изменений контекстов ресурсозатратных активностей, таких как профиля пользователя или объёмная статистика, экономит ресурсы.

### 3.6. РЕТРОСПЕКТИВНАЯ СУБД КАК ОСНОВА ФИЗИЧЕСКОЙ РЕАЛИЗАЦИИ

Доступ к физическим ресурсам (процессоры, память) обеспечивается ретроспективной СУБД [6]. На каждом вычислительном узле она хранит лишь часть общей истории изменений объектов, а именно:

- 1) данные активностей, осуществляющихся на узле;
- 2) наличие и давность необработанных изменений во входных данных;
- 3) данные активностей, используемых в качестве входных данных, в частности:
  - исполняемый код осуществляющихся в узле активностей;
  - относительные приоритеты исполнения, шаги дискретизации и моменты истины;
  - списки активностей-подписчиков<sup>3</sup> с их шагами дискретизации;
  - список узлов, на которых осуществляются активности-подписчики;

---

<sup>3</sup> *Активности-подписчики используют результаты осуществляющихся в узле активностей в качестве входных данных.*

4) состояния процессов репликации данных на узлы активностей-подписчиков, давность непереданных изменений.

Ретроспективная СУБД реализует на узле следующую функциональность:

1) быстрое сохранение изменённой версии объекта с штампом времени изменения;

2) очень быстрое чтение версии объекта на заданный момент времени;

3) передача изменений на узлы с активностями-подписчиками;

4) сохранение изменений входных данных, полученных по подписке;

5) поддержка ссылок на согласованные версии данных активности с изменениями в отдельных объектах.

Подробности конструкции ретроспективной СУБД описаны в [4] и [6].

#### **4. Выводы:**

Рассмотрен базирующийся на сохранении полной истории способ организации информационной системы.

Показано, как он обеспечивает резкое повышение доступности и защищённости системы.

В общих чертах описана архитектура подобной системы, основанная на общей ретроспективной памяти, поддерживаемой на узлах ретроспективными СУБД. Она позволяет гибко расширять и заменять оборудование, обновлять структуры, алгоритмы и пользовательские интерфейсы без приостановок обслуживания.

Описаны решения, позволяющие полностью контролировать накладные расходы на сохранение полной истории.

#### **Литература**

1. АБРАМОВ С.М., ЗНАМЕНСКИЙ С.В., ЖИВЧИКОВА Н.С., КОТОМИН А.В., ТИТОВА Е.В. *Информационная система для разработки технологий организа-*

- ции сложной совместной деятельности // RCDL2009. – С. 186–192.*
2. АНДРЕЕВ С.С., ДАВЫДОВ А.А., ДБАР С.А., ЛАЦИС А.О., ПЛОТКИНА Е.А. *О моделях и технологиях программирования суперкомпьютеров с нетрадиционной архитектурой // Научный сервис в сети Интернет: суперкомпьютерные центры и задачи. – М.: Изд-во МГУ, 2010. – С. 186–187.*
  3. ЗНАМЕНСКИЙ С.В. *Гибкая основа информационной системы для обучения // RCDL2010. – С. 451–460.*
  4. ЗНАМЕНСКИЙ С.В. *Глобальная идентификация данных в долговременной перспективе // Прогр. сист. теор. прил. – 2012. – Т. 3, №2(11). – С. 77–88.*
  5. ЗНАМЕНСКИЙ С.В. *Показатели эффективности распараллеливания резервного копирования // Прогр. сист. теор. прил. – 2012. – Т. 3, №2(11). – С. 51–60.*
  6. ЗНАМЕНСКИЙ С.В. *Ретроспективная основа совместной реорганизации сложных информационных ресурсов // RCDL2011. – С. 93–101.*
  7. КЛИМОВ Ю.А., ОРЛОВ А.Ю., ШВОРИН А.Б. *Программный инструментарий для трафаретных вычислений на гибридных суперкомпьютерах // Прогр. сист. теор. прил. – 2012. – Т. 3, №2(11). – С. 23–49.*
  8. КУЗНЕЦОВ С.Д. *Транзакционные параллельные СУБД: новая волна // Труды Института системного программирования РАН. – 2011. – Т. 20. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://cyberleninka.ru/article/n/tranzaktsionnye-parallelnye-subd-novaya-volna>.*
  9. BAUER L., BRAUN C., IMHOF M.E., KOCHTE M.A., ZHANG H., WUNDERLICH H.-J., HENKEL J. *OTERA: Online Test Strategies for Reliable Reconfigurable Architectures // AHS12. – 2012. – P. 38–45.*
  10. BREWER E. *Towards Robust Distributed Systems // Proc. XIX Ann. ACM Symposium on Principles of Distributed Computing. – 2000. – P. 7.*

11. BOZDAG E., MESBAH A., VAN DEURSEN A. *A comparison of push and pull techniques for AJAX* // Web Site Evolution, WSE 2007. – 2007. – P. 15–22.
12. CANTIN J.F., LIPASTI M.H., SMITH J.E. *The complexity of verifying memory coherence and consistency* // IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems. – 2005. – Vol. 16, №7. – P. 663–671.
13. CORSARO A., SCHMIDT D.C. *The Data Distribution Service – The Communication Middleware Fabric for Scalable and Extensible* // System of Systems. – 2012.
14. GIBBONS P., KORACH E. *Testing shared memories* // SIAM Journal on Computing. – 1997. – №26. – P. 1208–1244.
15. GILBERT S., LYNCH N. *Perspectives on the CAP Theorem* // Computer-IEEE Computer Magazine. – 2012. – №2. – P. 30–36.
16. HERLIHY M.P., WING J.M. *Linearizability: A correctness condition for concurrent objects* // ACM Transactions on Programming Languages and Systems. – 1990. – Vol. 12, №3. – P. 463–492.
17. JI HONG YAN, CHUN HUA FENG *Sustainability-Oriented Product Modular Design Using Design Structure Matrix (DSM)* // Method. Appl. Mechan. and Mater. – 2011. – P. 1468–1471.
18. METZGER A., POHL K., PAPAZOGLU M., NITTO E. DI, MARCONI A., KARASTOYANOVA D. *Research challenges on adaptive software and services in the future internet: Towards an scube research roadmap* // ICSE 2012.
19. SHIM S.S.Y. *The CAP Theorem's Growing Impact* // Computer. – 2012. – Vol. 45, №2. – P. 21–22
20. *Software Engineering for Self-Adaptive Systems: A Research Roadmap* / Eds. B.H.C. Cheng et al. Eds. // Self-Adaptive Systems. – 2009. – LNCS 5525. – P. 1–26.
21. TAYLOR R.N. *Complexity of analyzing the synchronization structure of concurrent programs* // Acta Informatica. – 1983. – Vol. 19, №1. – P. 57–84.

22. VOGELS W. *Eventually Consistent* // Communications of the ACM - Rural engineering development. – 2009. – Vol. 52, №1. – P. 40–44.

## **DISTRIBUTED MEMORY ARCHITECTURE FOR CHANGING COMPUTING ENVIRONMENT**

**Sergej Znamenskij**, Program Systems Institute of RAS, head of laboratory (svz@latex.pereslavl.ru).

*Abstract: The new methodology (retrospective shared memory) is presented as a basis for highly available and infinitely adaptive computing services.*

Keywords: large systems control, shared memory, distributed systems, system architecture.

*Статья рекомендована к публикации программным комитетом международной конференции «Параллельные вычисления и задачи управления» (РАСО), Россия, Москва, 24-26 октября 2012 г.  
Поступила в редакцию 21.04.2013.  
Опубликована 31.05.2013.*