УДК 519.177
ББК 22.18

ЭРГОДИЧЕСКИЕ ЦИКЛИЧЕСКИЕ РЕСУРСНЫЕ СЕТИ. II. БОЛЬШИЕ РЕСУРСЫ

Жилякова Л. Ю.[1]
(*ФГБУН Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва*)

В работе исследуется функционирование эргодических нерегулярных ресурсных сетей при больших ресурсах. Найдена формула для порогового значения ресурса T. Показано, что при больших ресурсах циклические сети всегда устойчивы, колебаний в них не происходит. Найдена формула компонент вектора предельного состояния, соответствующих всем неаттрактивным вершинам. Сформулировано условие аттрактивности вершин в циклических сетях.

Ключевые слова: ресурсная сеть, стохастическая матрица, эргодическая цепь, аттракторы, предельное состояние.

1. Введение

Ресурсная сеть – динамическая пороговая потоковая модель, функционирующая в дискретном времени. Ресурс в ней – неотрицательная величина, хранящаяся в вершинах, и распределяемая ими по исходящим ребрам на каждом такте. Каждое ребро проводит ресурс, пропорциональный своей пропускной способности (и не превосходящий ее). Если на каждом такте все вершины сети отдают весь свой ресурс, это означает, что суммарный ресурс сети меньше порогового значения. Если хотя бы одна вершина отдает по полной пропускной способности в каждое исходящее ребро и при этом имеет отличный от нуля

---

[1] *Людмила Юрьевна Жилякова, кандидат физико-математических наук* (*zhilyakova.ludmila@gmail.com*)

остаток на сколь угодно больших тактах t, ресурс в сети превосходит пороговое значение. При ресурсах, меньших порога, сеть сходна с моделями рассеяния на графах [10, 11]; при ресурсах, больших порога, некоторые вершины изменяют правило функционирования, – для них имеется сходство с целочисленными пороговыми моделями, описанными в [8, 9, 12].

Настоящая работа исследует функционирование эргодических циклических сетей при больших ресурсах. Она является продолжением статьи «Эргодические циклические ресурсные сети. I. Колебания и равновесные состояния при малых ресурсах» [4] При малых ресурсах эргодическая нерегулярная сеть описывается циклической цепью Маркова [5, 7]. При произвольном начальном состоянии в сети возникают периодические колебания между d предельными векторами, названные *предельным циклом*, где d – количество циклических классов в сети. В том случае, когда все d векторов совпадают, в сети при малых ресурсах возникает равновесие.

В указанной статье были получены следующие результаты.

1. Найдены пределы d сходящихся последовательностей степеней стохастической матрицы сети. Эти предельные матрицы состоят из циклических перестановок d предельных векторов при единичном суммарном ресурсе, находящемся в начальном состоянии целиком в одном из циклических классов.

2. Доказано, что все предельные векторы являются собственными векторами одной и той же предельной матрицы: предела степеней стохастической матрицы, кратных d.

3. Получено необходимое и достаточное условие на начальное состояние, при котором все предельные векторы равны и в сети достигается равновесие.

Настоящая работа посвящена функционированию циклических сетей при ресурсе, большем порогового значения. Как будет показано, при большом суммарном ресурсе свойство цикличности перестает оказывать влияние на процессы перераспределения ресурса, происходящие в сети, и ее поведение становится сходным с поведением регулярных сетей. Однако в отличие от регулярных сетей, в некоторых циклических сетях становится возможным по свойствам пропускных способностей определить, какие из вершин являются потенциальными аттракторами.

2. Основные определения

2.1. РЕСУРСНЫЕ СЕТИ

Ресурсная сеть (в дальнейшем просто «сеть») представляет собой ориентированный граф $G = (V, E)$, $|V| = n$, с матрицей пропускных способностей $R = (r_{ij})_{n\times n}$.

$Q(t) = (q_1(t), \ldots, q_n(t))$ – *состояние* сети в момент t; $q_i(t) \geq 0$ – количество ресурса в вершине v_i.

Состояние сети Q^* называется *предельным*, если оно асимптотически достижимо из некоторого начального состояния $Q(0)$.

r_i^{in} и r_i^{out} – входная и выходная пропускные способности вершины v_i соответственно.

Правила функционирования сети. В момент t вершина v_i отдает в смежную ей вершину v_m:

r_{im} единиц ресурса, если $q_i(t) > r_i^{out}$ (правило 1);

$\frac{r_{im}}{r_i^{out}} q_i(t)$ единиц ресурса, если $q_i(t) \leq r_i^{out}$ (правило 2).

Множество вершин, для которых $q_i(t) \leq r_i^{out}$, называется зоной $Z^-(t)$. Вершины из $Z^-(t)$ функционируют по правилу 2. $Z^+(t)$ – множество вершин, ресурс которых больше их выходной пропускной способности, они функционируют по правилу 1. (Эти и другие определения описаны более подробно в ряде работ. Среди них, например, [2, 3, 6]).

T – *пороговое значение ресурса*, такое, что при $W \leq T$ все вершины, начиная с некоторого t', переходят в зону $Z^-(t)$; при $W > T$ зона $Z^+(t)$ не пуста, начиная с некоторого t''.

Для предельного состояния Q^* обозначим эти зоны через Z^{-*} и Z^{+*}.

Введем обозначение: $\Delta r_i = r_i^{in} - r_i^{out}$. По знаку Δr_i вершины делятся на три класса:

1) *вершины-приемники*, для которых $\Delta r_i > 0$;
2) *вершины-источники*, для которых $\Delta r_i < 0$;
3) *нейтральные вершины*, для которых $\Delta r_i = 0$.

Вершины, способные при $W > T$ из некоторого начального состояния перейти в Z^{+*}, называются *потенциальными аттракторами.* Потенциальными аттракторами могут быть некоторые приемники и некоторые нейтральные вершины, причем первые способны притягивать ресурс и поэтому названы *активными аттракторами*, вторые могут лишь сохранить ресурс, которым обладали в начальном состоянии. Такие аттракторы называются *пассивными*. Потенциальные аттракторы в регулярных сетях и предельные состояния при больших ресурсах были исследованы в [2, 3].

В d-циклической сети существует d подпоследовательностей векторов состояний, сходящихся к предельным векторам $Q_1^*, \ldots, Q_d^*$, последовательно сменяющим друг друга при $t \to \infty$. Если при некотором начальном состоянии они равны, в сети достигается *равновесное состояние.* Если векторы $Q_1^*, \ldots, Q_d^*$ равны при любом начальном состоянии, будем говорить, что в сети существует предельное состояние Q^*:

$$Q_1^* = \ldots = Q_d^* = Q^* .$$

Поток в ресурсной сети.

Ресурс, выходящий из вершины v_i по ребру (v_i, v_j) в момент t, приходит в вершину v_j в момент $t + 1$; между моментами t и $t + 1$ он находится в ребре (v_i, v_j). Этот ресурс назовем потоком $f_{ij}(t)$. Общий поток сети описывается матрицей $F(t) = (f_{ij}(t))_{n\times n}$.

Величиной потока будем называть сумму:

$$f_{sum} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f_{ij}(t) .$$

Введем следующие обозначения.

$\sum_{j=1}^{n} f_{ij}(t) = f_i^{out}(t)$; $\sum_{i=1}^{n} f_{ij}(t) = f_j^{in}(t+1)$. Кроме того, положим по определению $f_j^{in}(0) = 0$.

Матрицу предельного потока, если он существует, обозначим через F^*. Суммарный предельный поток тогда будет $f_{sum}^* = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f_{ij}^*$.

$F^{out}(t) = (f_1^{out}(t), \ldots, f_n^{out}(t))$ – вектор исходящего потока;

$F^{in}(t) = (f_1^{in}(t), \ldots, f_n^{in}(t))$ – вектор входящего потока.

Пределы $\lim\limits_{t\to\infty} F^{out}(t)$ и $\lim\limits_{t\to\infty} F^{in}(t)$, если они существуют, обозначим через F^{in*} и F^{out*} соответственно.

2.2. ЦИКЛИЧЕСКИЕ СЕТИ И ИХ ТОПОЛГИЯ

Эргодическая сеть – сеть, граф которой сильно связен. Это определение соответствует определению эргодической цепи Маркова, данному в [4]. Эргодическую сеть, наибольший общий делитель всех циклов которой больше единицы, будем называть *циклической*. Число d, равное НОД длин всех циклов, – период сети. Множество ее вершин делится на d циклических классов. Стохастическая матрица R' такой сети имеет ровно d собственных значений, равных по модулю единице: $\lambda_1 = |\lambda_2| = \ldots = |\lambda_d| = 1$, т.е. является импримитивной с индексом импримитивности d.

По топологии циклические сети могут сильно различаться. Самым простым и наиболее легким для исследования является элементарный цикл из n вершин. Он содержит n циклических классов и при малых ресурсах на каждом такте ресурс переходит из некоторой вершины в следующую. Пороговое значение для таких сетей и потенциальные аттракторы могут быть найдены лишь исходя из пропускных способностей ребер.

Более сложный случай – *простые циклы*. Простой цикл состоит из нескольких циклов, пересекающихся по вершинам, но не пересекающихся по ребрам. Все эти циклы обязаны не быть взаимно простыми. Если НОД длин этих циклов равен единице, сеть состоит из одного циклического класса; она регулярна и для нее выполняются все результаты, полученные для регулярных сетей.

Общий случай циклической сети – сеть, состоящая из циклов, пересекающихся либо только по вершинам, либо по вершинам и ребрам.

3. Функционирование циклических сетей с различными топологиями при W > T

3.1. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ЦИКЛЫ

Рассмотрим на примерах функционирование сети, состоящей из однородного и неоднородного элементарного цикла.

Пример 1. Пусть сеть представлена однородным циклом с пятью вершинами и ее матрица пропускных способностей имеет вид:

$$(1)\quad R=\begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5\\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ r_{sum}=25.$$

Она однородна и квазисимметрична, т.е. является эйлеровой нерегулярной сетью. Каждая ее вершина – потенциальный аттрактор. Нетрудно убедиться, что насыщение в этой сети наступает, когда все вершины имеют по $r_i^{out}=5$ единиц ресурса, и, таким образом, $T = r_{sum} = 25$.

При начальном состоянии $Q(0) = (30, 0, 0, 0, 0)$ имеем рис. 1.

Из рис. 1 видно, что за первые пять тактов все вершины получили ресурс, равный своей пропускной способности (вершина 1 оставила себе излишки $W – T$), и на этом изменения компонент вектора состояния завершились. Сеть не прекращает функционировать, но ее состояние остается неизменным.

Рассмотрим сеть, представляющую собой неоднородный цикл, с матрицей пропускных способностей

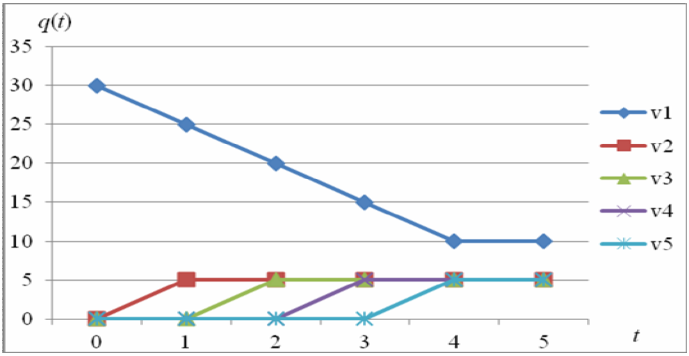

Рис. 1. Функционирование элементарного цикла при W > T

$$(2)\quad R = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad r_{sum} = 21.$$

Пороговое значение ресурса T в такой сети достигается, когда поток в каждом ребре равен минимальному разрезу. Рассмотрим примеры, иллюстрирующие изменения поведения сети при увеличении ресурса от малых значений и переход через пороговое значение.

Пример 2. Пусть в сети с матрицей (2) начальное состояние $Q(0) = (7, 0, 0, 0, 0)$ (см. рис. 2).

Поскольку суммарный ресурс превосходит пропускные способности ребер, минимальная из которых $r_{33} = 3$, он делится на три неравные части, и дальше в сети наблюдается три цикла длины 5: с ресурсом 3, 3 и 1.

Таким образом, если элементарный цикл неоднороден и ресурс в начальном состоянии аккумулирован в одной из вершин, он перемещается между вершинами порциями, – существует несколько последовательных циклов движения ресурса. В каждом из них (за исключением, возможно, одного) ресурс равен минимальной пропускной способности цикла. В одной (заключительной) порции перемещаются «остатки»: ресурс, равный

$$W-\left\lfloor \frac{W}{\min\limits_{i,j} r_{ij}} \right\rfloor \min_{i,j} r_{ij}\text{, где } \lfloor\cdot\rfloor \text{ – целая часть числа.}$$

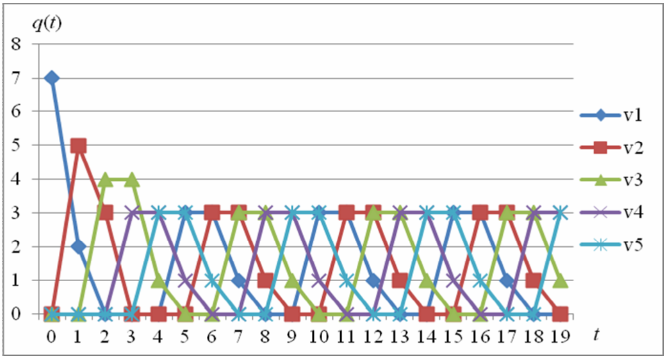

Рис. 2. Потоки, не превосходящие минимальный разрез

Таблица 1. Протокол работы сети

t	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
0	7,000	0,000	0,000	0,000	0,000
1	2,000	5,000	0,000	0,000	0,000
2	0,000	3,000	4,000	0,000	0,000
3	0,000	0,000	4,000	3,000	0,000
4	0,000	0,000	1,000	3,000	3,000
5	3,000	0,000	0,000	1,000	3,000
6	3,000	3,000	0,000	0,000	1,000
7	1,000	3,000	3,000	0,000	0,000
8	0,000	1,000	3,000	3,000	0,000
9	0,000	0,000	1,000	3,000	3,000
10	3,000	0,000	0,000	1,000	3,000
…	…	…	…	…	…

Отсюда следует, что для любого неоднородного элементарного цикла существует значение ресурса, при котором поток стабилизируется за конечное число тактов и сеть приходит в равновесное состояние из любого начального. Поток в каждом ребре будет равен минимальному разрезу, который в данном случае равен минимальной пропускной способности ребер цикла. Суммарный равновесный поток равен пороговому значению ресурса T; они вычисляются по формуле:

$$\widetilde{F}^{in} = \widetilde{F}^{out} = (\min r_{ij}, \ldots, \min r_{ij})\,;\; T = n \cdot \min r_{ij},$$

где n – число вершин; $\min r_{ij}$ – минимальная пропускная способность цикла.

При $W > T$ предельный поток существует и равен T для любого значения суммарного ресурса, а излишки сверх T скапливаются лишь в вершинах v_k, для которых $k = \arg\min\limits_{i} r_{ij}$.

Так, для сети, заданной матрицей (2), $T = 15$.

Пример 3. Пусть в сети с матрицей (2) начальное состояние $Q(0) = (15, 0, 0, 0, 0)$. В таком случае в ней за шесть тактов происходит выравнивание ресурса и стабилизация состояний и потока (рис. 3).

В неоднородном цикле при $W > T$, как уже было сказано, ресурс скапливается в вершинах с минимальной выходной пропускной способностью v_k. Такие вершины будут *потенциальными аттракторами цикла*. Если аттрактор один, предельное состояние единственно. Ресурс $W - T$ в предельном состоянии окажется в аттракторе (рис. 4). Отсюда следует, что в сети с матрицей (2) потенциальным аттрактором является вершина v_3.

Излишек ресурса $W - T$ перешел в третью вершину. Предельное состояние описывается вектором $Q^* = (3, 3, 8, 3, 3)$.

Интересно, что в последних двух примерах вершина v_1, обладая суммарным ресурсом сети в начальном состоянии, сначала отдает его весь и только затем получает часть обратно.

Если вершин с минимальной выходной пропускной способностью несколько, предельное состояние зависит от начального состояния и от расположения этих вершин в цикле. Если они идут друг за другом, активным аттрактором будет только первая из них, остальные смогут лишь удержать излишек ресурса, находящийся в них в начальном состоянии, но новые излишки будут задерживаться только в первой вершине. Если между такими вершинами есть другие вершины, каждая из них будет активным потенциальным аттрактором, и количество ресурса в них в предельном состоянии будет зависеть от начального состояния.

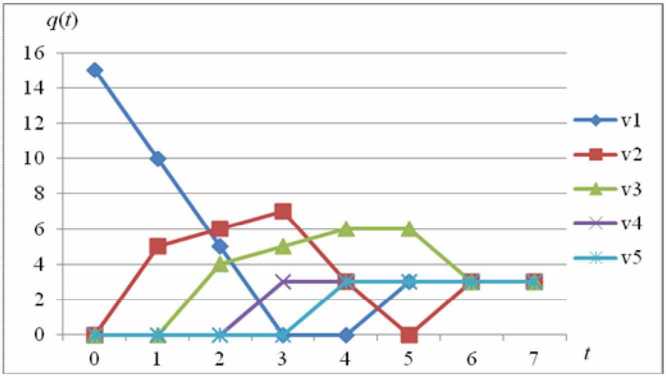

Рис. 3. Ресурс $W = T = 15$ выравнивается.
Вектор предельного состояния Q^*=(3, 3, 3, 3, 3)

Пример 4. Пусть в сети с матрицей (2) начальное состояние $Q(0) = (20, 0, 0, 0, 0)$.

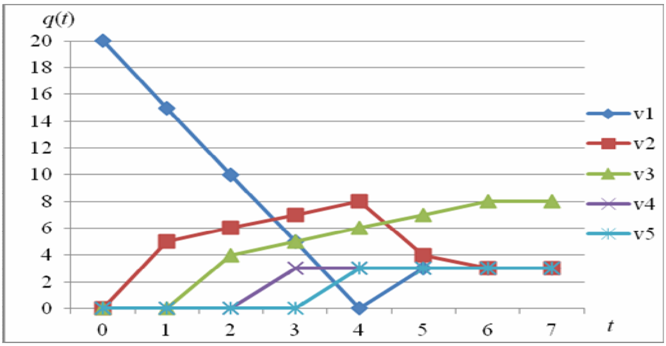

Рис. 4. Функционирование сети при $W > T$.

Пример 5. Рассмотрим неоднородный цикл из семи вершин с двумя потенциальными аттракторами v_2 и v_5 – они имеют минимальные выходные пропускные способности.

$$(3)\quad R = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};\ r_{sum} = 31;\ T = 2\cdot 7 = 14.$$

$W = 17 > T$. Начальное состояние $Q(0) = (17, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$.

Из рис. 5 видно, что в зону Z^{+*} перешел тот аттрактор, который первым успел задержать ресурс у себя, т.е. вершина v_2.

При начальном состоянии $Q(0) = (0, 0, 0, 17, 0, 0, 0)$ предельным состоянием будет $Q^* = (2, 2, 2, 2, 5, 2, 2)$, т.е. весь излишек останется во втором потенциальном аттракторе v_5.

Если ресурс $W > T$ в начальном состоянии находится в нескольких вершинах, его излишек $W – T$ распределяется между аттракторами в пропорции, которая зависит от пропускных способностей всех ребер.

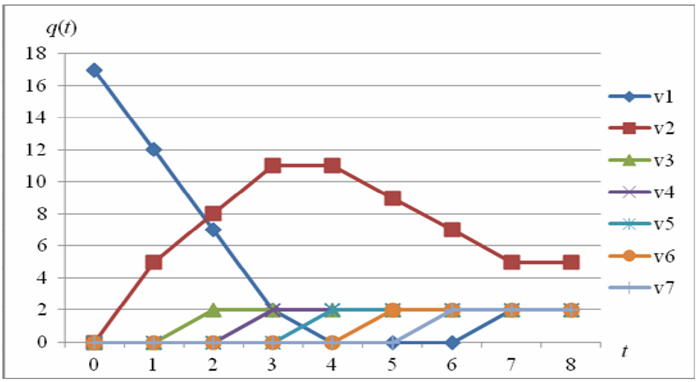

Рис. 5. Цикл с двумя аттракторами. Вектор предельного состояния $Q^* = (2, 5, 2, 2, 2, 2, 2)$

Так, например, для матрицы (3) при начальном состоянии $Q(0) = (8, 0, 0, 9, 0, 0, 0)$ предельное состояние будет $Q^* = (2, 2, 2, 2, 5, 2, 2)$, т.е. все излишки вновь окажутся в аттракторе v_5. Чтобы вершина v_2 тоже получила излишек, ресурс в вершине v_1 должен быть больше 8. При начальном состоянии $Q(0) = (9, 0, 0, 8, 0, 0, 0)$ предельное состояние $Q^* = (2, 3, 2, 2, 4, 2, 2)$. Однако при перемещении ресурса, равного 8, в начальном состоянии из вершины v_4 в v_3, т.е. при $Q(0) = (9, 0, 8, 0, 0, 0, 0)$, предельным состоянием вновь будет вектор $Q^* = (2, 2, 2, 2, 5, 2, 2)$ – все излишки забирает аттрактор v_5. Это происходит оттого, что ресурс должен проделать более длинный путь по циклу до возвращения в его начало: вершину v_1, служащую источником для аттрактора v_2. При $Q(0) = (9, 0, 8, 0, 0, 0, 0)$ вершина v_1 пуста три такта (со второго по четвертый), и этого достаточно, чтобы ресурс из аттрактора v_2 переместился в аттрактор v_5 (рис. 6). Из рисунка видно, что к тому моменту (такт 5), как ресурс вершины v_1, становится вновь ненулевым и она могла бы поддерживать баланс в вершине v_2, вершина v_2 уже имеет ресурс, равный единице, т.е. не имеет излишков.

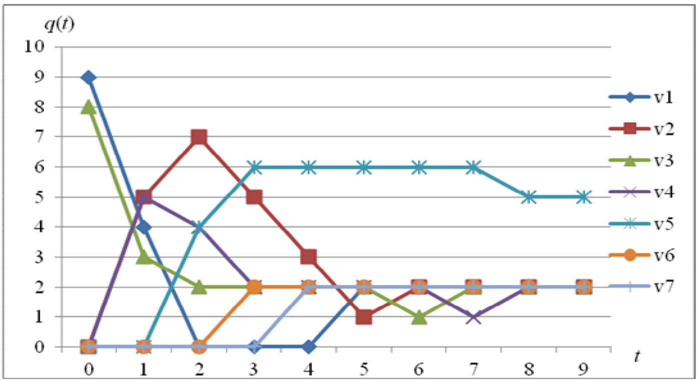

Рис. 6. Цикл с двумя аттракторами. Вектор предельного состояния $Q^* = (2, 2, 2, 2, 5, 2, 2)$

Обобщим все результаты, полученные при рассмотрении элементарных циклов при больших ресурсах.

Утверждение 1. Для циклической ресурсной сети с n вершинами, представленной элементарным циклом:

1. Пороговое значение ресурса T вычисляется по формуле: $T = n \cdot r_{min}$, где $r_{min} = \min r_{ij}$.

2. При $W = T$ предельный поток и предельное состояние существуют и единственны. Вектор предельного потока равен вектору предельного состояния: $F^{in*} = F^{out*} = Q^* = (r_{min}, \ldots, r_{min})$.

3. При $W > T$ предельное состояние и поток существуют, причем предельный поток определяется единственным образом: $F^{in*} = F^{out*} = (r_{min}, \ldots, r_{min})$. Предельное состояние единственно в том и только в том случае, когда сеть имеет единственный потенциальный аттрактор. В противном случае распределение ресурса сверх порогового значения $W - T$ зависит от начального состояния.

4. Вершина v_k является потенциальным аттрактором элементарного цикла в том и только в том случае, если для нее выполняется $k = \arg\min_i r_{ij}$. Если два и более потенциальных аттрактора расположены в цикле непосредственно друг за другом, то активным аттрактором является только тот, для которого $r_i^{in} > r_i^{out}$; остальные аттракторы пассивны.

3.2. ПРОСТЫЕ ЦИКЛЫ И ЦИКЛЫ С ОБЩИМИ РЕБРАМИ

Рассмотрим функционирование неоднородной сети, состоящей из двух циклических классов. Циклы в ней пересекаются только по вершинам.

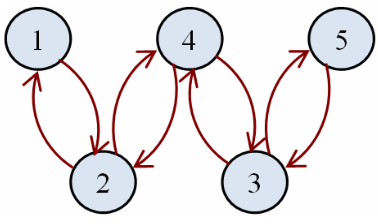

Рис. 7. Двудольный граф с пятью вершинами, $d = 2$

Пример 6. Пусть сеть задана матрицей (3)

$$(3)\quad R=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\2&0&0&2&0\\0&0&0&2&3\\0&2&1&0&0\\0&0&2&0&0\end{pmatrix},\ r_{sum}=15.$$

При заведомо большом значении ресурса (большем r_{sum}) $W = 20$ любое начальное состояние приводит к одному и тому же предельному состоянию $Q^{*} = (14{,}5;\ 2;\ 1{,}25;\ 1{,}5;\ 0{,}75)$.

Отсюда видно, что потенциальный аттрактор этой сети единственен, им является вершина v_1. Пороговое значение ресурса для этой сети находится из того условия, что при $W \geq T$ сумма всех компонент вектора предельного состояния, кроме первой, постоянна и равна 5,5, а первая компонента при $W = T$ равна суммарной выходной пропускной способности вершины, т.е. единице: $T = 6{,}5$. При $W = T$ предельное состояние описывается вектором $\tilde{Q} = (1;\ 2;\ 1{,}25;\ 1{,}5;\ 0{,}75)$ для любого начального состояния. Этим же вектором описывается поток при любом $W > T$.

При суммарном ресурсе, меньшем 6,5, в сети существует два предельных вектора.

Векторы Q_1^{1*} и Q_2^{1*}, формирующие предельные матрицы $R_1^{'\infty}$ и $R_2^{'\infty}$, имеют вид:

$Q_1^{1*} = (0,\ 0{,}616,\ 0{,}384,\ 0,\ 0)$, $Q_2^{1*} = (0{,}308,\ 0,\ 0,\ 0{,}462,\ 0{,}230)$.

Собственный вектор стохастической матрицы R' ищется по формуле

$$(4)\quad Q^{1*} = \frac{Q_1^{1*} + Q_2^{1*}}{2}\ .$$

$Q^{1*} = (0{,}154,\ 0{,}313,\ 0{,}192,\ 0{,}231,\ 0{,}115)$.

Проверим, выполняется ли для вершины v_1 признак аттрактивности, введенный для вершин регулярных сетей.

Для аттрактора с номером j_k должно выполниться условие:

$$j_k = \arg\min_i \frac{r_i^{out}}{q_i^{1*}}.$$

Вычислим значение $\frac{r_i^{out}}{q_i^{1*}}$ для всех вершин сети. В качестве вектора предельного состояния возьмем вектор (4).

$$\frac{r_1^{out}}{q_1^{1*}} \approx \frac{1}{0{,}154} \approx 6{,}5,\ \frac{r_2^{out}}{q_2^{1*}} \approx \frac{4}{0{,}313} \approx 12{,}8,\ \frac{r_3^{out}}{q_3^{1*}} \approx \frac{5}{0{,}192} \approx 26,$$

$$\frac{r_4^{out}}{q_4^{1*}} \approx \frac{3}{0{,}231} \approx 13,\ \frac{r_5^{out}}{q_5^{1*}} \approx \frac{2}{0{,}115} \approx 17{,}4.$$

Как видно, минимум этого отношения действительно достигается на первой вершине, более того, его значение равно 6,5, что совпадает со значением T, как это и было доказано для регулярных сетей [3].

Из примера следует, что для циклической сети при определении порогового значения ресурса T и при ее функционировании с большим суммарным ресурсом наблюдаются те же закономерности, что и для регулярных сетей. Докажем, что такое совпадение имеет место для любой эргодической циклической сети.

4. Пороговое значение T, предельные состояния и потоки в циклических сетях при больших ресурсах

В регулярных сетях существование и единственность порогового значения T вытекали из единственности вектора предельного состояния при малых ресурсах. Все компоненты вектора Q^* при увеличении W вплоть до значения T увеличивались пропорционально, пока одна или несколько из них не принимали значения, равные своим суммарным выходным пропускным способностям. Это значение суммарного ресурса и было пороговым. Вершины с ресурсом, достигшим выходных пропускных способностей, – потенциальные аттракторы сети. При дальнейшем увеличении ресурса пропорциональность компонент нарушается, и все излишки сверх T накапливаются в аттракторах.

В циклической сети существует d предельных векторов, в общем случае не равных друг другу. Кроме того, каждый из этих векторов зависит от начального состояния. Единственность порогового значения в такой сети уже неочевидна.

Будем говорить, что если в циклической сети d предельных векторов равны при любом начальном состоянии, в ней существует *предельное состояние* Q^*: $Q_1{}^* = \ldots = Q_d{}^* = Q^*$.

Теорема 1. *В эргодической d-циклической ресурсной сети существует единственное пороговое значение T, такое, что:*

при $W < T$ все вершины за конечное число тактов переходят на правило 2, и в сети имеется d предельных векторов;

при $W \geq T$ потоки стабилизируются, и в сети достигается глобальное равновесие при любом начальном состоянии. Предельный поток существует и единственен. Предельное состояние существует; оно не зависит от начального состояния в том и только в том случае, когда сеть имеет один аттрактор.

Доказательство. В сети, все вершины которой функционируют по правилу 2, существует предельный цикл из d предельных векторов. Если в начальном состоянии некоторые вершины функционируют по правилу 1, но все они за конечное число тактов N переходят на правило 2, то, взяв $Q(N+1)$ за новое начальное состояние, вновь получим предельный цикл из d векторов. Верхняя граница суммарного ресурса, при котором все вершины функционируют по правилу 2, равна T. T существует для любой сети.

Докажем, что значение T единственно и не зависит от начального состояния. При $W = T$ по крайней мере одна вершина имеет ресурс, равный своей выходной пропускной способности. Пусть это вершина v_j. Для нее $q_j^* = r_j^{out}$ в каждом из d предельных векторов.

Матрица R' импримитивна с индексом импримитивности d. Это означает, что ее степень R'^d разлагается в прямую сумму d регулярных матриц, соответствующих циклическим классам $R_{ii}^{'d}$ [1]. Предельные векторы сети выражаются через собственные векторы этих матриц. Вершина v_j является потенциальным аттрактором в некотором циклическом классе с номером i. Если с первого такта все вершины функционировали по правилу 2, для него выполняется: $Q_i(0)R_{ii}^{'\infty} = Q_{di}^* = W_i\pi_i$, где W_i – суммарный ресурс в i-м циклическом классе; π_i – вектор предельных вероятностей соответствующей цепи Маркова. Для сети, описываемой регулярной матрицей $R_{ii}^{'d}$, пороговое значение существует и единственно. Обозначим его через T_i. Тогда при $W_i = T_i$ имеем $\left(q_{di}^*\right)_j = r_j^{out}$, где $\left(q_{di}^*\right)_j$ – j-я компонента вектора Q_{di}^*. Но чтобы ресурс вершины v_j был равен r_j^{out} на каждом такте, суммарный ресурс i-го циклического класса должен быть равен T_i также на каждом такте. Если сеть функционирует по правилу 2, ресурс циркулирует по циклическим классам, не перемешиваясь. Если раскрасить ресурс в каждом классе в свой цвет, ресурсы разных цветов на любом такте будут целиком в одном классе. Пороговое значение T определяется как максимальный ресурс, при котором все вершины функционируют по правилу 2 при $t \to \infty$. Тогда при $t \to \infty$ каждый циклический класс на каждом такте должен содержать T_i ресурса. А пороговое значение ресурса сети вычисляется по формуле $T = dT_i$.

Поскольку каждая компонента имеет одинаковое количество ресурса, поток в сети стабилизируется, и все предельные векторы одинаковы.

При $W > T$ как минимум один аттрактор (пусть это вновь будет вершина v_j) за конечное число тактов переходит на правило 1. То есть существует такой момент времени t', что при $t \geq t'$ вершина v_j функционирует по правилу 1. На каждом такте она отдает ресурс, равный r_j^{out}, и получает ресурс, не меньший r_j^{out}. Тогда в нее можно добавить петлю с пропускной способностью

$q_j(t^{'}) - r_j^{out}$, по которой на каждом такте будет проходить неотрицательный поток, равный $q_j(t^{'}) - r_j^{out}$. Функционирование сети при этом не изменится. Но наличие петли влечет за собой потерю цикличности, и сеть превращается в регулярную. В регулярной сети поток существует и единственен. Предельное состояние единственно во всех вершинах, кроме потенциальных аттракторов. Если в сети единственный аттрактор, предельное состояние также единственно. □

Докажем, что для вершин в произвольной d-циклической сети выполняется тот же критерий аттрактивности, что и для вершин в несимметричной регулярной сети.

Т е о р е м а 2. *В эргодической d-циклической ресурсной сети вершина v_j является потенциальным аттрактором, если и только если* $j = \arg\min_i \frac{r_i^{out}}{q_i^{1*}}$, *где вектор* Q^{1*} *определяется по формуле*

(5) $$Q^{1*} = \frac{1}{d}\sum_{k=1}^{d} Q_k^{1*},$$

векторы Q_k^{1*} $(k = 0, \ldots, d)$ *– предельные векторы при* $W = 1$ *и произвольном начальном состоянии.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из теоремы 1 следует, что при $W = T$ предельное состояние сети при любом начальном состоянии единственно, и все ее d предельных векторов равны. Но для $W \le T$ выполняется равенство: $Q_1^* + \ldots + Q_d^* = dTQ^{1*}$, где вектор Q^{1*}, вычисляемый по формуле (5), – единственный положительный собственный вектор стохастической матрицы R'. Непосредственно отсюда следует, что предельное состояние сети $Q^* = Q_1^* = \ldots = Q_d^* = TQ^{1*}$. Таким образом, функционирование сети начинает описываться регулярной матрицей A, состоящей из n строк Q^{1*}:

$$A = \mathbf{1}\cdot Q^{1*}.$$

Для сети, функционирование которой описывается матрицей A, справедливы все результаты, полученные для регулярных сетей. Таким образом, для того, чтобы вершина v_j была аттрактором, необходимо и достаточно выполнение условия $j = \arg\min\limits_i \frac{r_i^{out}}{q_i^{1*}}$ [3]. □

Следствие 1. В эйлеровых d-циклических сетях при больших ресурсах предельное состояние полностью зависит от начального, так как каждая вершина в них – потенциальный аттрактор.

Следствие 2. *В эргодической d-циклической ресурсной сети пороговое значение T определяется по формуле*

$$T = \min_i \frac{r_i^{out}}{q_i^{1*}}.$$

Таким образом, при $W > T$ для циклических сетей можно сформулировать теоремы о предельном состоянии и потоке, аналогичные теоремам о регулярных сетях. Их доказательства следуют из теорем 1–2 и следствия 2.

Теорема 3 (*о предельном состоянии*). *В эргодической d-циклической ресурсной сети при $W \geq T$ значения неаттрактивных компонент вектора предельного состояния $Q^* = (q_1^*, \ldots, q_n^*)$ вычисляются по формуле*

$$q_i^* = q_i^{1*} \cdot T,\ i \neq j_k,\ j_k \text{ – номера аттракторов,}$$

где:

1) *вектор* Q^{1*} *определяется по формуле* (5),

2) $T = \min\limits_i \frac{r_i^{out}}{q_i^{1*}}$,

3) j_k *определяются из условия:* $j_k = \arg\min\limits_i \frac{r_i^{out}}{q_i^{1*}}$.

Оставшийся ресурс распределяется между потенциальными аттракторами.

Проиллюстрируем теорему следующим примером.

Пример 7. Рассмотрим функционирование неоднородной сети, содержащей циклы с общими ребрами.

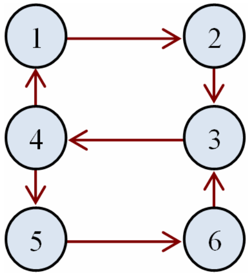

Рис. 8. Циклы с общими ребрами

В этой сети четыре циклических множества: $\{v_1, v_5\}$, $\{v_2, v_6\}$, $\{v_3\}$ и $\{v_4\}$.

Пусть матрица пропускных способностей сети имеет вид

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ r_{sum} = 18.$$

Тогда при помещении в начальном состоянии ресурса $W = 1$ в любую из шести вершин предельные векторы будут иметь вид

Q_1^{1*} = (0,286; 0; 0; 0; 0,714; 0),

Q_2^{1*} = (0; 0,286; 0; 0; 0; 0,714),

Q_3^{1*} = (0, 0, 1, 0, 0, 0), Q_4^{1*} = (0, 0, 0, 1, 0, 0).

Собственный вектор стохастической матрицы находится как их среднее арифметическое (формула (5)):

Q^{1*} = (0,0715; 0,0715; 0,25; 0,25; 0,1785; 0,1785).

Вычислим значение отношения $\frac{r_i^{out}}{q_i^{1*}}$ для каждой вершины.

$$\frac{r_1^{out}}{q_1^{1*}} \approx \frac{1}{0{,}0715} \approx 14, \ \frac{r_2^{out}}{q_2^{1*}} \approx \frac{3}{0{,}0715} \approx 42, \ \frac{r_3^{out}}{q_3^{1*}} \approx \frac{2}{0{,}25} = 8,$$

$$\frac{r_4^{out}}{q_4^{1*}} \approx \frac{7}{0{,}25} = 28\,,\ \frac{r_5^{out}}{q_5^{1*}} \approx \frac{4}{0{,}1785} \approx 22{,}4\,,\ \frac{r_6^{out}}{q_6^{1*}} \approx \frac{1}{0{,}1785} \approx 5{,}6\,.$$

Минимум $\frac{r_i^{out}}{q_i^{1*}}$ достигается в вершине v_6.

Таким образом, v_6 – единственный потенциальный аттрактор этой сети. По следствию 2 из теоремы 1 $T \approx 5{,}6$.

При $W = T$ предельное состояние при любом начальном:

$\tilde{Q} = (0{,}4;\ 0{,}4;\ 1{,}4;\ 1{,}4;\ 1;\ 1)$.

Этому же вектору равны предельные входной и выходной потоки.

При $W > T$, например, $W = 20$, при любом начальном состоянии предельное состояние равно

$Q^* = (0{,}4; 0{,}4; 1{,}4; 1{,}4; 1; 15{,}4)$.

Излишек ресурса аккумулировался в аттракторе. Остальные компоненты предельного вектора не изменились.

Теорема 4 (*о предельном потоке*). *В эргодической d-циклической ресурсной сети при* $W \geq T$ *предельный поток существует и единственен и определяется по формуле*:

$$f_i^{in*} = f_i^{out*} = q_i^{1*}T\ ;\ F^{in*} = F_i^{out*} = Q^{1*}T = \tilde{Q}\,,$$

где

1) *вектор* Q^{1*} *определяется по формуле* (5),

2) $T = \min\limits_i \frac{r_i^{out}}{q_i^{1*}}$.

Замечание. В регулярных сетях при разделении ресурса на «малый» и «большой», пороговое значение T, по которому проходит эта граница, относился к малым ресурсам. Это связано с тем, что при $W = T$ сеть описывается регулярной цепью Маркова, как и при меньших значениях суммарного ресурса, и предельное состояние в ней единственно. То есть в регулярных сетях суммарный ресурс разбивается на значения $W \leq T$ и $W > T$. В циклических сетях значение T входит в «большой» ресурс, так как при $W \geq T$ сеть имеет предельное состояние, в то время как при $W < T$ – лишь предельный цикл из d предельных векторов.

5. Заключение

В работе исследованы процессы перераспределения больших ресурсов в эргодических циклических сетях. Рассмотрены примеры функционирования сетей с большим ресурсом, имеющих различные топологии. Доказано, что циклические сети, как и регулярные, имеют единственное пороговое значение ресурса T, не зависящее от начального состояния, такое что при $W < T$ все вершины переходят на правило 2, в сети существует d предельных векторов, в общем случае различных. При $W \geq T$ предельные векторы равны для любого начального состояния. Предельный поток единственен, суммарный поток равен T. Найдены формулы для векторов предельного состояния в неаттрактивных вершинах и потока – во всех вершинах. Сформулирован и доказан критерий аттрактивности вершин.

Из полученных результатов следует, что при больших ресурсах функционирование сети становится регулярным и описывается регулярной матрицей A.

Литература

1. ГАНТМАХЕР Ф.Р. *Теория матриц*. – М.: Физматлит. 2004. – 560 с.
2. ЖИЛЯКОВА Л.Ю. *Несимметричные ресурсные сети. II. Потоки при больших ресурсах и их стабилизация* // Автоматика и телемеханика. – 2012. – №6. – С. 103–118.
3. ЖИЛЯКОВА Л.Ю. *Несимметричные ресурсные сети. III. Исследование предельных состояний* // Автоматика и телемеханика. – 2012. – №7. – С. 67–77.
4. ЖИЛЯКОВА Л.Ю. *Эргодические циклические ресурсные сети. I. Колебания и равновесные состояния при малых ресурсах* // Управление большими системами. – Вып. 43. – М.: ИПУ РАН, 2013. – С. 34 – 54.
5. КЕМЕНИ ДЖ., СНЕЛЛ ДЖ. *Конечные цепи Маркова*. – М.: Наука, 1970. – 271 с.

6. КУЗНЕЦОВ О.П. *Однородные ресурсные сети. I. Полные графы* // Автоматика и телемеханика. – 2009. – №11. – С. 136–147.
7. РОБЕРТС Ф.С. *Дискретные математические модели с приложениями к социальным, биологическим и экологическим задачам.* – М. Наука, 1986. – 496 с.
8. BJÖRNER A., LOVASZ L., SHOR P. *Chip-firing games on graphs* // Europ. J. Comb. – 1991. – №12. – P. 283–291.
9. BJÖRNER A., LOVASZ L. *Chip-firing game on directed graphs* // J. Algebraic Combinatorics. – 1992. – №1. – P. 305–328.
10. BLANCHARD PH., VOLCHENKOV D. *Random Walks and Diffusions on Graphs and Databases: An Introduction* (Springer Series in Synergetics). – Springer-Verlag – Berlin–Heidelberg, 2011. – 262 p.
11. LOVASZ L., WINKLER P. *Mixing of Random Walks and Other Diffusions on a Graph* // Surveys in Combinatorics / Ed. P. Rowlinson. – London Math. Soc. Lecture Notes Series 218. – Cambridge Univ. Press, 1995. – P. 119–154.
12. PRISNER E. *Parallel Chip Firing on Digraphs* // Complex Systems. – 1994. – №8. – P. 367–383.

ERGODIC CYCLIC RESOURCE NETWORKS. II. HIGH LEVELS OF RESOURCE

Ludmila Zhilyakova, Institute of Control Sciences of RAS, (Moscow, Profsoyuznaya st., 65), cand. sc., senior scientist, zhilyakova.ludmila@gmail.com.

Abstract: *We study processes in ergodic nonregular resource networks at high levels of resource. The formula for the threshold value T is derived. It was shown that there are no oscillations if $W \geq T$; the network becomes stable from every initial state when resource level is high. The formulae for the vectors of limit state and the limit flow are derived. The criterion of attractivity of vertices is formulated.*

Keywords: diffusion on graphs, resource network, attractors, limit state.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии О.П. Кузнецовым

Поступила в редакцию 06.02.2013.
Опубликована 30.09.2013.