

УДК 517.977.1  
ББК 3 965-01я7

## КВАЗИКАНОНИЧЕСКИЙ ВИД УРАВНЕНИЙ, ОПИСЫВАЮЩИХ ДВИЖЕНИЕ ВЕРТОЛЕТА<sup>1</sup>

Шевляков А. А.<sup>2</sup>,  
(ФГБУН Институт проблем управления  
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

*Для уравнений, описывающих движение вертолета, находятся индексы приводимости к регулярному квазиканоническому виду. Выполняется преобразование к квазиканоническому виду, анализируется подсистема, определяющая нулевую динамику. Находятся выходы, относительно которых система является минимально-фазовой.*

Ключевые слова: квазиканонический вид, нелинейные динамические системы, нулевая динамика.

### **Введение**

Беспилотные летательные аппараты (БПЛА) являются важным объектом приложения результатов теории управления. Это связано, в первую очередь, с их возрастающим количеством и все более важными ролями, которые приходится выполнять беспилотным аппаратам. В настоящий момент применяются БПЛА различных форм, размеров и компоновок. Выбор конструкции обусловлен решаемыми задачами и условиями применения. Наряду с другими, используется традиционная вертолетная схема с двумя винтами: главным и хвостовым.

При внедрении БПЛА возникает необходимость их оснащения автоматическими системами управления для обеспечения

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант №12-07-00329-а, и Министерства образования и науки Российской Федерации (соглашение 14.В37.21.0370).

<sup>2</sup> Андрей Анатольевич Шевляков (aash29@gmail.com).

действий в автономном и полуавтономном режиме. Таким образом, актуальной является задача синтеза алгоритмов управления для динамической системы.

Один из подходов к решению задачи управления нелинейной динамической системой основывается на преобразовании системы к специальному виду, для которого метод решения соответствующей задачи управления известен. Преимущество данного класса методов в том, что они позволяют избежать линеаризации рассматриваемой системы уравнений. Благодаря этому используемая математическая модель может быть более адекватна исследуемому явлению.

В работе [12] система уравнений, описывающих движение вертолета, приводится к нормальной форме [11] относительно некоторых заданных выходов. За счет этого траектория системы стабилизируется по части переменных.

Другим примером специального вида являются системы канонического вида [1], которые с помощью линеаризации обратной связью можно преобразовать в линейную систему, записанную в канонической форме Бруновского [9].

Условия приводимости к каноническому виду хорошо известны [1], однако не всякую аффинную систему можно преобразовать к этому виду. Поэтому среди аффинных систем выделяют системы, которые преобразуются к квазиканоническому виду [3]. Такие системы содержат подсистему, которая линеаризацией обратной связью преобразуется в каноническую форму Бруновского, и подсистему общего вида. Основные теоретические положения о преобразовании в некоторой открытой области аффинных систем со скалярным управлением к квазиканоническому виду приведены в [3], а с векторным управлением — в [2]. Вычисление максимального индекса приводимости к регулярному квазиканоническому виду для случая скалярного управления описано в [7].

При росте размерности исследуемой системы анализ рангов соответствующих распределений может представлять существенные технические трудности. Для решения возникающих задач

использована среда аналитических вычислений Maple и разработанная автором библиотека quasiPack.

Структура статьи следующая: в первом разделе приводятся известные по работам [1] и [13] результаты о преобразовании к квазиканоническому виду и вычислении индексов приводимости. В том же разделе приводится описанная в [10] математическая модель вертолета. В разделе 2 известные методики, описанные в вышеназванных работах, применяются для преобразования уравнений движения вертолета к квазиканоническому виду. Если при преобразовании системы к нормальной форме выходы задаются заранее, то проведенный анализ позволяет сказать, какие выходы и, следовательно, нормальные формы возможны для данной системы. Также можно утверждать, что максимальным индексом приводимости для рассматриваемой системы является  $r = (3, 3, 3, 3)$ , и преобразование к квазиканоническому виду позволяет стабилизировать положение равновесия по части переменных. В разделе 3 для решения задачи стабилизации положения равновесия применяется метод виртуальных выходов. Подробный анализ полученного управления и области стабилизации не проводится, цель данной работы состоит в том, чтобы показать применимость данного метода к рассматриваемой системе.

## 1. Квазиканонический вид системы

Рассмотрим аффинную систему с векторным управлением

$$(1) \quad \dot{x} = A(x) + \sum_{i=1}^m B_i(x)u_i,$$

где  $x \in R^n$ ,  $u = (u_1, \dots, u_m)^T \in R^m$ ,  $A(0) = 0$ ,  $A(x) = (a_1(x), \dots, a_n(x))^T$ ,  $B(x) = (B_1(x), \dots, B_m(x))$ ,  $B_j(x) = (b_j^1(x), \dots, b_j^n(x))^T$ ,  $j = \overline{1, m}$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $a_i(x), b_i^j(x) \in C^\infty(\Omega)$ ,  $\Omega$  — открытое множество, содержащее положение равновесия  $x = 0$ .

Среди таких систем выделяют [3] системы специального вида  
(2)

$$\begin{aligned} \dot{z}_1^1 &= z_2^1, \\ &\dots, \\ \dot{z}_{r_1-1}^i &= z_{r_1}^1, \\ \dot{z}_{r_1}^1 &= f_1(z, \eta) + g_{11}(z, \eta)u_1 + \dots + g_{1m}(z, \eta)u_m, \\ &\dots, \\ \dot{z}_1^m &= z_2^m, \\ &\dots, \\ \dot{z}_{r_m-1}^m &= z_{r_m}^m, \\ \dot{z}_{r_m}^m &= f_m(z, \eta) + g_{m1}(z, \eta)u_1 + \dots + g_{mm}(z, \eta)u_m, \\ \dot{\eta}_1 &= q_1(z, \eta) + p_{11}(z, \eta)u_1 + \dots + p_{1m}(z, \eta)u_m, \\ &\dots, \\ \dot{\eta}_{n-r} &= q_{n-r}(z, \eta) + p_{n-r, 1}(z, \eta)u_1 + \dots + p_{n-r, m}(z, \eta)u_m, \end{aligned}$$

где  $z = (z_1, \dots, z_r)^T, z \in R^r, r = r_1 + \dots + r_m, \eta = (\eta_1, \dots, \eta_{n-r})^T, \eta \in R^{n-r}$ . Такой вид называют [2, 3] квазиканоническим видом системы (1), а упорядоченный набор  $(r_1, \dots, r_m)$  — мультииндексом приводимости.

**Теорема 1.** [2]. Для того чтобы для аффинной стационарной системы (1) в области  $\Omega$  существовали переменные, в которых она имеет квазиканонический вид, необходимо и достаточно существование таких функций  $\phi_i(x) \in C^\infty(\Omega), i = \overline{1, m}$ , которые в  $\Omega$  являются решением системы уравнений в частных производных первого порядка

$$(3) \quad \text{ad}_A^k B_j \phi_i = 0, \quad k = \overline{0, r_i - 2}, \quad i, j = \overline{1, m},$$

и для которых соотношения

$$\begin{aligned} z_k^i &= A^{k-1} \phi_i(x), \quad k = \overline{1, r_i}, \quad i = \overline{1, m}, \\ \eta_j &= \psi_j(x), \quad j = \overline{1, n-r} \end{aligned}$$

задают в  $\Omega$  гладкую невырожденную замену переменных.

Хотя теорема (1) имеет характер теоремы существования, она является конструктивной в том смысле, что при известном мультииндексе приводимости  $(r_1, \dots, r_m)$  решение системы (3), проверка возможности получить с использованием найденных функций  $\phi_i, i = \overline{1, m}$ , замены по части переменных  $z$ , а также

выбор координатных функций  $\eta_j = \Psi_i(x)$ ,  $j = \overline{1, n-r}$ , представляют только технические трудности. Основной проблемой является определение мультииндекса приводимости.

### 1.1. ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНДЕКСОВ ПРИВОДИМОСТИ

Семейство гладких векторных полей  $X_1, \dots, X_k$ , определенных в области  $\Omega$ , порождает в  $\Omega$  гладкое распределение  $F = span(X_1, \dots, X_k)$ , где линейная оболочка векторных полей рассматривается над кольцом гладких функций [1]. В каждой точке  $x \in \Omega$   $F(x) = span(X_1(x), \dots, X_k(x))$  есть линейное подпространство касательного пространства, порожденное векторами  $X_1(x), \dots, X_k(x)$ . Под размерностью распределения  $F$  в точке  $x$  понимают размерность соответствующего линейного подпространства  $F(x)$ . Распределение называют регулярным в  $\Omega$ , если его размерность постоянна во всех точках  $x \in \Omega$ . Для проверки регулярности распределения составляют функциональную матрицу  $W$ , по столбцам которой записывают координатные функции векторных полей  $X_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ , и исследуют в  $\Omega$  ее ранг. Предположим, что распределение

$$\mathfrak{B} = span(B_1, \dots, B_m)$$

в окрестности точки  $x^0$  имеет размерность  $m$ . В противном случае для анализа необходимо выбрать другую точку, в которой указанное условие выполнено. Пусть

$$\Delta_1 = span(X_1, \dots, X_k), \Delta_2 = span(Y_1, \dots, Y_m).$$

Распределение

$$\Delta_3 = span(X_1, \dots, X_k, Y_1, \dots, Y_m)$$

будем записывать в виде

$$\Delta_3 = span(\Delta_1, \Delta_2).$$

Для распределения

$$\Delta_4 = span([X_i, Y_j], i = \overline{1, k}, j = \overline{1, m})$$

будем использовать обозначение

$$\Delta_4 = [\Delta_1, \Delta_2].$$

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_A &= A + \mathfrak{B} = (A + B : B \in \mathfrak{B}), \\ [\Delta, \Gamma] &= \text{span}([X, Y] : X \in \Delta, Y \in \Gamma), \\ \text{ad}_A^l \mathfrak{C} &= \text{span}(\text{ad}_A^l X : X \in \mathfrak{C}). \end{aligned}$$

Рассмотрим систему (1). Предположим, что распределение  $\mathfrak{B}$  имеет в  $\Omega$  постоянную размерность  $m$ . В соответствие системе (1) можно поставить набор распределений

$$(4) \quad \begin{aligned} \mathfrak{B}^0 &= \mathfrak{B}, \\ \mathfrak{B}^1 &= \text{span}(\mathfrak{B}, [\mathfrak{B}_A, \mathfrak{B}]), \\ &\dots \\ \mathfrak{B}^j &= \text{span}(\mathfrak{B}^{j-1}, [\mathfrak{B}_A, \mathfrak{B}^{j-1}]), \\ \mathfrak{L}^0 &= \mathfrak{B}, \\ \mathfrak{L}^1 &= \text{span}(\text{ad}_A^1 \mathfrak{B}, \overline{\mathfrak{B}}), \\ &\dots \\ \mathfrak{L}^k &= \text{span}(\text{ad}_A^k \mathfrak{B}, \overline{\mathfrak{B}}^{k-1}). \end{aligned}$$

Далее всюду будем предполагать, что распределения (4) имеют постоянную размерность в окрестности рассматриваемой точки  $x^0$ . Рассмотрим следующий набор чисел  $n_i$ :

$$\begin{aligned} n_0 &= \dim \mathfrak{B}^0 = m \\ n_1 &= \dim \mathfrak{L}^1 - \dim \overline{\mathfrak{B}}^0, \\ &\vdots \\ n_i &= \dim \mathfrak{L}^i - \dim \overline{\mathfrak{B}}^{i-1}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Данные числа показывают, насколько увеличивается размерность распределения  $\overline{\mathfrak{B}}^{i-1}$  при пополнении его векторными полями, принадлежащими распределению  $\text{ad}_A^i \mathfrak{B}$ . В [13] показано, что последовательность  $n_0, \dots, n_i, \dots$  является невозрастающей. Ей можно поставить в соответствие набор чисел

$$(5) \quad \hat{r}_i = |n_j \geq i, j \geq 1|.$$

Полученные в [13] результаты сформулируем в виде следующей теоремы.

**Теорема 2.** Пусть векторное поле  $A$  является гладким в некоторой окрестности точки  $x^0$ , распределение  $\text{span}(B_1, \dots, B_m)$  в этой окрестности гладкое и имеет размерность  $m$ . Тогда

– существует окрестность точки  $x^0$ , в которой система (1) эквивалентна регулярной системе квазиканонического вида с индексами приводимости  $\hat{r}_i$ , задаваемые соотношением (5);

– если (1) приводится к регулярному квазиканоническому виду с индексами  $r_1, \dots, r_m$ , то для каждого  $i = 1, 2, \dots, m$   $r_i \leq \hat{r}_i$ .

Для упрощения использования теоремы 2 нами был разработан следующий алгоритм. Пусть среди чисел  $r_i$  есть лишь  $q$  попарно различных. Обозначим их через  $l_i, i = \overline{1, q}$ , а через  $k_i$  – кратности соответствующих чисел. Тогда для нахождения индексов приводимости  $l_i$  и определения их кратности  $k_i$  удобно использовать специальную таблицу. Для заполнения второго столбца вычисляются числа

$$n_{i-1} = \dim \mathcal{L}^{i-1} - \dim \overline{\mathcal{B}^{i-2}}.$$

Вычисления производятся до тех пор, пока очередное число не будет равным нулю. Номер, соответствующий последнему ненулевому элементу второго столбца, равен значению  $l_1$ , а его кратность  $k_1$  равна последнему ненулевому значению  $n_i$ . Затем вычисляется третий столбец по формуле

$$d_{i2} = n_{i-1} - k_1.$$

Индекс последнего ненулевого значения во втором столбце равен  $l_2$ , а само последнее ненулевое значение равно  $k_2$ . Аналогично заполняются остальные столбцы таблицы до тех пор, пока очередной столбец не окажется состоящим целиком из нулевых значений. Тогда последнее ненулевое значение в каждом столбце равно  $k_i$ , а номер строки, в которой оно стоит равен  $l_i$ . Таким образом можно вычислить все различные индексы приводимости  $l_i$  и их кратности  $k_i$ . Данная таблица является обобщением на квазиканонический вид результатов, полученных в [3, 4].

Таблица 1. Вычисление индексов приводимости.

$i$	$n_{i-1} = \dim \mathfrak{L}^{i-1} - \dim \mathfrak{B}^{i-2}$	$d_{i2} = n_{i-1} - k_1$	$d_{i3} = d_{i2} - k_2$
1	$m$	$n_0 - k_1$	$n_0 - k_1 - k_2$
...	*	$n_1 - k_1$	$n_1 - k_1 - k_2$
...	*	$k_2$	*
...	*	0	0
...	*	0	0
$s$	$k_1$	0	0
$s + 1$	0	0	0

## 1.2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ ВЕРТОЛЕТА

Рассмотрим модель движения вертолета, заданную уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{r} &= V, \\ m\dot{V} &= F, \\ \dot{\Omega} &= D\omega_b, \\ J_b\dot{\omega}_b &= M_b - \omega_b \times J\omega_b, \end{aligned}$$

где  $\bar{r} = (x, y, z)$  – радиус-вектор центра масс в земной системе координат,  $\Omega = (\psi, \theta, \gamma)$  – углы Крылова ориентации вертолета,

$$\omega_b = \begin{pmatrix} \sin \theta & 0 & 1 \\ \cos \gamma \cos \theta & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma \cos \theta & \cos \gamma & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\gamma} \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sin \gamma}{\cos \theta} & \frac{\cos \gamma}{\cos \theta} \\ 0 & \cos \gamma & -\sin \gamma \\ 1 & -\frac{\sin \gamma \sin \theta}{\cos \theta} & -\frac{\cos \gamma \sin \theta}{\cos \theta} \end{pmatrix}.$$

Следуя [10], будем использовать следующие обозначения для сил и моментов, действующих на вертолет:

- $F^{vf}$  – сила, создаваемая вертикальным стабилизатором;
- $F^{ht}$  – сила, создаваемая горизонтальным стабилизатором;
- $F^{fus}$  – сила, сопротивления фюзеляжа;
- $M^m$  – реактивный момент, создаваемый несущим винтом;
- $M^t$  – реактивный момент, создаваемый рулевым винтом;



$F^{mr}$  – сила, создаваемая несущим винтом;  
 $F^{tr}$  – сила, создаваемая рулевым винтом;  
 $G$  – сила тяжести.

Пренебрежем ввиду малости силами  $F^{vf}$  и  $F^{ht}$  аэродинамического сопротивления, действующими на стабилизаторы. Матрица перехода из связанной системы координат в земную неподвижную систему координат имеет вид

$$R = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \psi & -\sin \theta \cos \psi \cos \gamma + \sin \gamma \sin \psi & \sin \theta \cos \psi \sin \gamma + \sin \psi \cos \gamma \\ \sin \theta & \cos \theta \cos \gamma & -\cos \theta \sin \gamma \\ -\cos \theta \sin \psi & \sin \theta \sin \psi \cos \gamma + \cos \psi \sin \gamma & -\sin \theta \sin \psi \sin \gamma + \cos \psi \cos \gamma \end{pmatrix}.$$

Результирующая сила  $F$ , действующая на центр масс вертолета, находится по формуле

$$F = R(F_b^{mr} + F_b^{tr}) + F^{fus} + G.$$

Вектор силы  $F^{mr}$ , создаваемой несущим винтом, перпендикулярен плоскости несущего винта. Значит, в системе координат, связанной с главным винтом вертолета,

$$F^{mr} = (0 \quad T^{mr} \quad 0)^T.$$

В связанной с корпусом системе координат  $F^{mr}$  имеет вид

$$(6) \quad F_b^{mr} = \begin{pmatrix} -\sin \alpha \cos \beta \\ \cos \alpha \cos \beta \\ \sin \beta \end{pmatrix} T^{mr}.$$

Компонентами  $F_x^{tr}$  и  $F_y^{tr}$  силы  $F^{tr}$  пренебрегают вследствие их малости [10], тогда сила  $F^{tr}$ , создаваемая рулевым винтом, в связанной системе координат будет иметь вид

$$F_b^{tr} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} T^{tr}.$$

Сила тяжести  $G$ , записанная в земной системе координат, имеет вид

$$G = - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} mg.$$

Сила  $F^{fus}$  сопротивления фюзеляжа находится по формуле

$$F^{fus} = -\frac{1}{2}\rho\hat{V} \begin{pmatrix} c_x S_x^{fus} V_x \\ -c_y S_y^{fus} (V_y + V_{imr}) \\ c_z S_b^{fus} V_z \end{pmatrix},$$

где  $\hat{V} = \sqrt{V_x^2 + V_z^2 + (V_y + V_{imr})^2}$ . Главный момент  $M$ , создаваемый внешними силами, действующими на вертолет, записанный в связанной системе координат, рассчитывается по формуле

$$M = M_b^m + M_b^t + M_b^{mr} + M_b^{tr} + M_b^{fus}.$$

Согласно [12] реактивные моменты несущего и рулевого винтов можно найти по формулам

$$M_b^m = \begin{pmatrix} M_x^m \\ M_y^m \\ M_z^m \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} a_x^m \beta \\ 0 \\ a_z^m \alpha \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\sin \alpha \cos \beta \\ \cos \alpha \cos \beta \\ \sin \beta \end{pmatrix} Q^m,$$

$$M_b^t = - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} Q^t,$$

где величины  $Q^m$  и  $Q^t$  задаются соотношениями

$$Q^m = c^m (T^{mr})^{1,5} + d^m, Q^t = c^t (T^{tr})^{1,5} + d^t,$$

а  $c^m, c^t, d^m, d^t, a_x^m, a_z^m$  являются постоянными и определяются для конкретной модели вертолета. Моменты  $M_b^{mr}, M_b^{tr}, M_b^{fus}$  находятся по формулам

$$M_b^{mr} = r^{mr} \times F_b^{mr},$$

$$M_b^{tr} = r^{tr} \times F_b^{tr},$$

$$M_b^{fus} = r^{fus} \times F_b^{fus},$$

где  $r^{mr}, r^{tr}, r^{fus}$  – точки приложения соответствующих сил. Для того чтобы найти координаты сил  $F_b^{vf}, F_b^{ht}, F_b^{fus}$ , воспользуемся

матрицей  $R$  перехода из связанной с корпусом в земную систему координат. Получим

$$\begin{aligned} F_b^{ht} &= R^T F^{ht}, \\ F_b^{vf} &= R^T F^{vf}, \\ F_b^{fus} &= R^T F^{fus}. \end{aligned}$$

Чтобы рассматриваемая система стала аффинной, выберем в качестве управлений скорости изменения величин сил тяги, создаваемых рулевым  $\dot{T}^{tr}$  и несущим  $\dot{T}^{mr}$  винтами, а также скорости изменения углов наклона несущего винта  $\dot{\alpha}$  и  $\dot{\beta}$ . Аффинная система, описывающая динамику полета вертолета, имеет вид

$$(7) \quad \begin{aligned} m\dot{V} &= F, \\ \dot{\Omega} &= D\omega_b, \\ J_b\dot{\omega}_b &= M_b - \omega_b \times J\omega_b, \\ \dot{T}^{mr} &= w_1, \\ \dot{T}^{tr} &= w_2, \\ \dot{\alpha} &= w_3, \\ \dot{\beta} &= w_4. \end{aligned}$$

Для того чтобы найти положение равновесия системы (7), а также силы и моменты, при которых вертолет неподвижно висит в воздухе, необходимо решить следующую систему

$$(8) \quad \begin{aligned} F &= 0, \\ D\omega_b &= 0, \\ M_b - \omega_b \times J\omega_b &= 0. \end{aligned}$$

Для упрощения зададим численные значения параметров вертолета. Эти параметры взяты из [10] и не приводятся здесь ввиду громоздкости. Одно из положений равновесия, найденное с использованием системы Matlab, задается следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} r_x^0 &= 0, & V_x^0 &= 0, & \psi^0 &= 0, & \omega_{bx}^0 &= 0, \\ r_y^0 &= 0, & V_y^0 &= 0, & \theta^0 &\approx 0.2068, & \omega_{by}^0 &= 0, \\ r_z^0 &= 0, & V_z^0 &= 0, & \gamma^0 &\approx 0.0642, & \omega_{bz}^0 &= 0, \\ T^{mr0} &\approx 82,4436, & \alpha^0 &\approx -0,2073, \\ T^{tr0} &\approx 4,4828, & \beta^0 &\approx -0,1171. \end{aligned}$$

## 2. Преобразование уравнений движения вертолета к квазиканоническому виду

Сделаем следующую замену переменных

$$\begin{aligned} x_1 &= r_x, & x_4 &= V_x, & x_7 &= \psi, \\ x_2 &= r_y, & x_5 &= V_y, & x_8 &= \theta - \theta^0, \\ x_3 &= r_z, & x_6 &= V_z, & x_9 &= \gamma - \gamma^0, \\ x_{15} &= \alpha - \alpha^0, & x_{16} &= \beta - \beta^0, \\ x_{10} &= \omega_{bx}, & x_{13} &= T^{mr} - T^{mr0}, \\ x_{11} &= \omega_{by}, & x_{14} &= T^{tr} - T^{tr0}, \\ x_{12} &= \omega_{bz}. \end{aligned}$$

Данная замена является линейной и невырожденной в  $R^{16}$ . Матрицу  $R$ , функции  $F_b^r = F_b^{mr} + F_b^{tr}$ ,  $F^{fus}$ ,  $D$ ,  $M_b$ , записанные в новых переменных  $x_i$ , обозначим  $\hat{R}$ ,  $\hat{F}_b^r = \hat{F}_b^{mr} + \hat{F}_b^{tr}$ ,  $\hat{F}^{fus}$ ,  $\hat{D}$ ,  $\hat{M}_b$  соответственно. Исследуемая система примет вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_4, \\ \dot{x}_2 &= x_5, \\ \dot{x}_3 &= x_6, \\ \dot{x}_{\overline{4,6}} &= \frac{1}{m} \left[ \hat{R}(x_7, x_8, x_9) \hat{F}_b^r(x_{13}, x_{14}, x_{15}, x_{16}) + \right. \\ &\quad \left. + \hat{F}^{fus}(x_4, x_5, x_6) + G \right], \\ (9) \quad \dot{x}_{\overline{7,9}} &= \hat{D}(x_7, x_8, x_9) x_{\overline{10,12}}, \\ \dot{x}_{\overline{10,12}} &= J_b^{-1} [\hat{M}_b(x_4, x_5, x_6, x_{13}, x_{14}, x_{15}, x_{16}) - \\ &\quad - x_{\overline{10,12}} \times J_b x_{\overline{10,12}}], \\ \dot{x}_{13} &= u_1, \\ \dot{x}_{14} &= u_2, \\ \dot{x}_{15} &= u_3, \\ \dot{x}_{16} &= u_4. \end{aligned}$$

Здесь через  $x_{\overline{i,j}}$  обозначен вектор-столбец переменных  $(x_i, x_{i+1}, \dots, x_j)^T$ . Исследовав размерности распределений в окрестности точки  $x = 0$ , получим, что эти распределения регулярны. Далее вычислим  $n_0 = \dim \mathfrak{G} = 4$ ,  $n_1 = \dim \mathfrak{L}^1 - \dim \overline{\mathfrak{G}}^0 = 4$ ,  $n_2 = \dim \mathfrak{L}^2 - \dim \overline{\mathfrak{G}}^1 = 4$ ,  $n_3 = \dim \mathfrak{L}^3 - \dim \overline{\mathfrak{G}}^2 = 0$ .

Таблица 2. Определение индексов приводимости системы (9)

$i$	$n_i = \dim \mathfrak{L}^i - \dim \overline{\mathfrak{B}^{i-1}}$	$d_{i2} = n_{i-1} - k_1$
1	4	0
2	4	0
3	4	0
4	0	0

Таким образом, согласно таблице 2,  $k_1 = 4, l_1 = 3$ . Отсюда можно сделать вывод о том, что максимальные индексы приводимости к регулярному квазиканоническому виду  $\hat{r}_1 = 3, \hat{r}_2 = 3, \hat{r}_3 = 3, \hat{r}_4 = 3$ .

Рассмотрим случай, когда мультииндекс приводимости максимальный и равен  $r = (3, 3, 3, 3)$ . Решив систему уравнений (3), получим, что в качестве  $\phi_i$  можно выбрать гладкие функции  $\phi_i(x_1, x_2, x_3, x_7, x_8, x_9), i = \overline{1, 4}$ .

Положим

$$z_1^1 = x_1, z_1^2 = x_2, z_1^3 = x_3, z_1^4 = x_7.$$

Дифференцируя функции  $z_1^i, i = \overline{1, 4}$ , в силу системы (9), найдем

$$(10) \quad \begin{aligned} z_2^1 &= \dot{z}_1^1 = x_4, \\ z_2^2 &= \dot{z}_1^2 = x_5, \\ z_2^3 &= \dot{z}_1^3 = x_6, \\ z_2^4 &= \dot{z}_1^4 = \hat{D}_1 x_{\overline{10,12}}, \\ z_3^{1-3} &= \dot{z}_2^{1-3} = \frac{1}{m} \hat{R} \hat{F}_b^r + \frac{1}{m} \hat{F}^{fus} + g, \\ z_3^4 &= \dot{z}_2^4 = \hat{D}_1 x_{\overline{10,12}} + \hat{D}_1 J_b^{-1} [\hat{M}_b - x_{\overline{10,12}} \times J_b x_{\overline{10,12}}], \end{aligned}$$

где  $\hat{D}_1$  – первая строка матрицы  $\hat{D}$ .

Тогда для преобразования системы к квазиканоническому виду можно сделать следующую замену

$$\begin{aligned}
 (11) \quad & z_1^1 = x_1 \\
 & z_2^1 = x_4, \\
 & z_1^2 = x_2, \\
 & z_2^2 = x_5, \\
 & z_1^3 = x_3, \\
 & z_2^3 = x_6, \\
 & z_1^4 = x_7, \\
 & z_2^4 = \hat{D}_1 x_{\overline{10,12}}, \\
 & z_3^{1-3} = \frac{1}{m} \hat{R} \hat{F}_b^r + \frac{1}{m} \hat{F}^{fus} + g, \\
 & z_3^4 = \dot{\hat{D}}_1 x_{\overline{10,12}} + \hat{D}_1 J_b^{-1} [\hat{M}_b - x_{\overline{10,12}} \times J_b x_{\overline{10,12}}], \\
 & \eta_1 = x_8, \\
 & \eta_2 = x_9, \\
 & \eta_3 = \hat{D}_2 x_{\overline{10,12}}, \\
 & \eta_4 = \hat{D}_3 x_{\overline{10,12}}.
 \end{aligned}$$

Операции по преобразованию к квазиканоническому виду были выполнены с помощью библиотеки quasiPack [5] для системы компьютерной алгебры Maple.

Запишем систему (9) в виде заготовки, т.е. с правой частью, зависящей от переменных  $z$  и  $x$ . Это удобно сделать, так как при таком подходе результирующее управление, записанное с учетом (11), получится сразу в исходных переменных.

$$\begin{aligned}
 z_2^1 &= \dot{z}_1^1 \\
 z_2^2 &= \dot{z}_1^2 \\
 z_2^3 &= \dot{z}_1^3 \\
 z_2^4 &= \dot{z}_1^4 = \hat{D}_1 x_{\overline{10,12}} \\
 z_3^{1-3} &= \dot{z}_2^{1-3} = \frac{1}{m} \hat{R} \hat{F}_b^r + \frac{1}{m} \hat{F}^{fus} + g \\
 z_3^4 &= \dot{z}_2^4 = \dot{\hat{D}}_1 x_{\overline{10,12}} + \hat{D}_1 J_b^{-1} [\hat{M}_b - x_{\overline{10,12}} \times J_b x_{\overline{10,12}}] \\
 \dot{z}_3^{1-3} &= \frac{1}{m} \dot{\hat{R}} \hat{F}_b^r + \frac{1}{m} \dot{\hat{R}} (\hat{F}_b^r)'_{x_{13,16}} u + \frac{1}{m} \dot{\hat{F}}^{fus} \\
 \dot{z}_3^4 &= \ddot{\hat{D}}_1 x_{\overline{10,12}} + 2\dot{\hat{D}}_1 J_b^{-1} [\hat{M}_b - x_{\overline{10,12}} \times J_b x_{\overline{10,12}}] + \\
 &+ \hat{D}_1 J_b^{-1} [(\hat{M}_b)'_{x_{4,6}} \dot{x}_{4,6} + (\hat{M}_b)'_{x_{13,16}} u - \\
 &- \dot{x}_{\overline{10,12}} \times J_b x_{\overline{10,12}} - x_{\overline{10,12}} \times J_b \dot{x}_{\overline{10,12}}],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_{1-2} &= \hat{D}_{23}x_{\overline{10,12}}, \\ \dot{\eta}_{3-4} &= \hat{D}_{23}x_{\overline{10,12}} + \\ &+ \hat{D}_{23}J_b^{-1}[\hat{M}_b - x_{\overline{10,12}} \times J_b x_{\overline{10,12}}]. \end{aligned}$$

Расположим новые переменные в порядке  $z_1^{\overline{1,3}}, z_2^{\overline{1,3}}, z_1^4, \eta_1, \eta_2, z_2^4, \eta_3, \eta_4, z_3^{\overline{1,3}}, z_3^4$ , а старые –  $x_{\overline{1,16}}$ . Матрица Якоби замены переменных в блочной форме имеет вид

$$\frac{\partial(z, \eta)}{\partial(x)} = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{D}'_{\Omega}x_{\overline{10,12}} & \hat{D} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{m}R'_{\Omega}F & 0 & \frac{1}{m}RF'_{\nu} \\ 0 & 0 & (z_3^4)'_{\Omega} & (z_3^4)'_{\omega} & \hat{D}_1I^{-1}M'_{\nu} \end{pmatrix}.$$

Из этой записи видно, что невырожденность матрицы Якоби равносильна невырожденности блочной матрицы

$$\begin{pmatrix} \hat{D} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m}RF'_{\nu} \\ (\ddot{\psi})'_{\omega} & \hat{D}_1I^{-1}M'_{\nu} \end{pmatrix},$$

а так как  $\hat{D}$  невырождена, то – невырожденности матрицы

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{m}RF'_{\nu} \\ \hat{D}_1I^{-1}M'_{\nu} \end{pmatrix}.$$

Матрица  $R$  невырождена, следовательно невырожденность этой матрицы равносильна невырожденности следующей матрицы:

$$\begin{pmatrix} F'_{\nu} \\ \hat{D}_1I^{-1}M'_{\nu} \end{pmatrix}.$$

Заметим, что для невырожденности последней матрицы достаточно, чтобы матрица  $F'_{\nu}$  или  $\hat{D}_1I^{-1}M'_{\nu}$  имела максимальный

ранг. Проверка показывает, что матрица Якоби замены координат невырождена в точке

$$x_i = 0, i = \overline{1, 16},$$

и, следовательно, в некоторой ее окрестности. Обратную замену в явном виде выписать не удастся, однако это не мешает записать систему в квазиканоническом виде в виде заготовки, что позволяет построить стабилизирующее управление для задачи стабилизации заданного положения или задачи реализации заданного программного движения по части переменных  $z$ . При этом отсутствие в явном виде обратной замены переменных затрудняет исследование поведения переменных  $\eta$ . Уравнения на переменные  $\dot{\eta} = P(z, \eta)$  называют также уравнениями, определяющими нулевую динамику. Их правая часть известна нам как выражение, зависящее от переменных  $x$ . Можно провести исследование устойчивости нулевого положения равновесия по первому приближению, воспользовавшись формулой производной от сложной функции:

$$\frac{\partial P}{\partial(z, \eta)} = \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial(z, \eta)}.$$

Чтобы вычислить последний множитель, применим теорему об обратной функции.

$$\left. \frac{\partial x}{\partial(z, \eta)} \right|_{(z=0, \eta=0)} = \left( \left. \frac{\partial(z, \eta)}{\partial x} \right|_{x=0} \right)^{-1}.$$

Вычислив таким образом линеаризацию подсистемы, определяющей нулевую динамику, и положив равными нулю переменные  $z$ , получим первое приближение подсистемы нулевой динамики:

$$\begin{pmatrix} 0, 0 & 0, 0 & 1, 000135 & 0, 0 \\ 0, 0 & 0, 0 & 2, 033510 \cdot 10^{-13} & 1, 0 \\ -137, 623846 & -2, 981054 & 0, 0 & 0, 0 \\ 2, 918847 & -254, 846348 & 0, 0 & 0, 0 \end{pmatrix}$$

Анализ показывает, что собственные значения этой матрицы чисто мнимые, поэтому по первому приближению нельзя судить



об устойчивости нулевой динамики. В этом случае можно воспользоваться, например, численной оценкой устойчивости нулевой динамики [6].

Результаты численного моделирования позволяют сформулировать гипотезу о том, что нулевая динамика является устойчивой, но не асимптотически устойчивой.

Для стабилизации нулевого положения равновесия системы (9) по всем переменным можно использовать метод виртуальных выходов [8], позволяющий в некоторых случаях найти новые выходы, относительно которых нулевая динамика системы является асимптотически устойчивой.

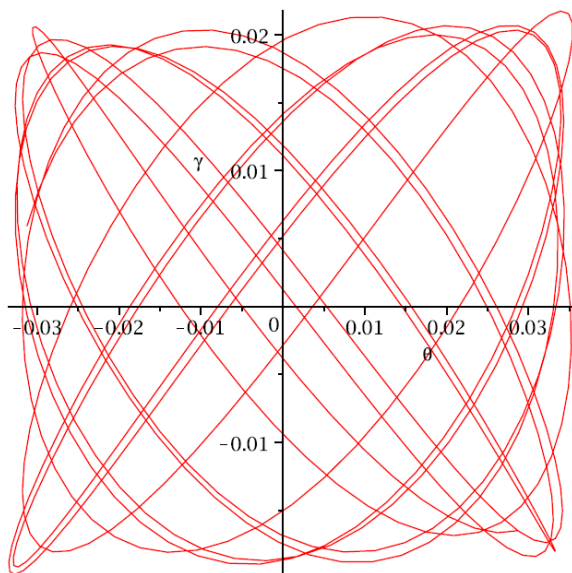


Рис. 1. Сечение фазового пространства по переменным  $\theta$  и  $\gamma$

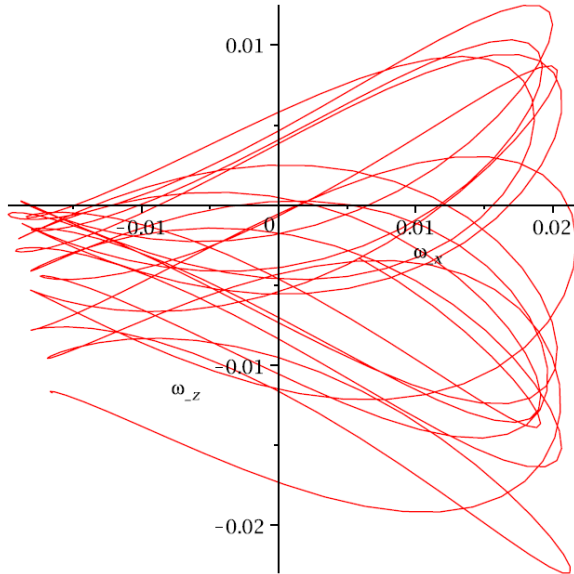


Рис. 2. Сечение фазового пространства по переменным  $\omega_x$  и  $\omega_z$

### 3. Метод виртуальных выходов

Рассмотрим систему (1) в нормальной форме по Исидори относительно выходов  $y$ :

$$\begin{aligned}
 \dot{z}_1^1 &= z_2^1, \dots, \dot{z}_{r_1-1}^1 = z_{r_1}^1, \\
 \dot{z}_{r_1}^1 &= f_1(z, \eta) + g_{11}(z, \eta)u_1 + \dots + g_{1m}(z, \eta)u_m, \\
 &\dots, \\
 \dot{z}_1^m &= z_2^m, \dots, \dot{z}_{r_m-1}^m = z_{r_m}^m, \\
 \dot{z}_{r_m}^m &= f_m(z, \eta) + g_{m1}(z, \eta)u_1 + \dots + g_{mm}(z, \eta)u_m, \\
 \dot{\eta} &= q(z, \eta), \\
 y &= (z_1^1, z_1^2, \dots, z_1^m)^T,
 \end{aligned}
 \tag{12}$$

матрица  $(g_{ij}(0, 0))_{i,j=1,\overline{m}}$  невырождена.

Систему уравнений

$$\dot{\eta} = q(0, \eta)
 \tag{13}$$

называют уравнениями нулевой динамики (нулевой динамикой). Если ее положение равновесия  $\eta = 0$  асимптотически устойчи-

во, то аффинную систему (1) с виртуальным выходом  $y = \phi(x)$  называют минимально фазовой (в точке  $x = 0$ ) [11].

Метод виртуальных выходов применим к системам, в которых  $q(z, \eta) = q(z^1, z^2, \eta)$ . Чтобы преобразовать систему (9) к такому виду, выберем в качестве выходов

(14)

$$y_1 = z_1^1 = x_4, y_2 = z_1^2 = x_5, y_3 = z_1^3 = x_6, y_4 = z_1^4 = \hat{D}_1 x_{10,12}.$$

По этим выходам можно построить замену, преобразующую систему к квазиканоническому виду с индексом приводимости  $r = (2, 2, 2, 2)$ .

Задача поиска нового выхода сводится к поиску матрицы  $K$ , которая удовлетворяет неравенству

$$R = (A - B^1 K + B^2 (E + K B^2)^{-1} (-K A + K B^1 K)) < 0,$$

где  $z^1, z^2 \in R^m, \eta \in R^l, l = n - 2m$ ,

$$A = \left. \frac{\partial q}{\partial \eta} \right|_{z=0, \eta=0}, B^1 = \left. \frac{\partial q}{\partial z^1} \right|_{z=0, \eta=0}, B^2 = \left. \frac{\partial q}{\partial z^2} \right|_{z=0, \eta=0}.$$

Одним из способов найти  $K$  является численная минимизация функции  $\max_K (Re(\lambda_i))$ ,  $\lambda_i$  — собственные значения матрицы  $R$ , по элементам матрицы  $K$ . С помощью среды Maple было найдено решение

$$K = \begin{pmatrix} 1,29 & 0,621 & 0,716 & 0,701 & -3,48 & -1,88 & -0,778 & -0,0319 \\ -1,61 & -0,140 & -0,685 & -1,94 & -2,41 & -1,28 & -0,335 & -1,18 \\ -0,948 & -1,38 & -1,21 & -1,02 & -0,156 & -2,57 & -0,284 & -0,759 \\ -1,29 & -0,842 & -1,06 & -1,0 & -0,776 & -1,19 & 0,425 & -7,98 \end{pmatrix},$$

дающее для матрицы  $R$  собственные числа

$$\begin{pmatrix} -10,8 \\ -0,757 + 2,029 i \\ -0,757 - 2,029 i \\ -0,675 + 0,947 i \\ -0,675 - 0,947 i \\ -0,687 + 0,356 i \\ -0,687 - 0,356 i \\ -0,661 \end{pmatrix}.$$

Тогда новые выходы могут быть вычислены по формуле

$$(15) \quad \bar{y} = y + K\eta.$$

Построим новую замену переменных

$$\begin{aligned} \bar{z}_1^{1-4} &= \bar{y}_{1-4}, \\ \bar{z}_2^{1-4} &= \dot{\bar{z}}_1^{1-4}, \\ \bar{\eta} &= \eta. \end{aligned}$$

Нормальная форма системы будет иметь вид

$$(16) \quad \begin{aligned} \dot{\bar{z}}_1^{1-3} &= z_2^{1-3}, \\ \dot{\bar{z}}_1^4 &= z_2^4, \\ \dot{\bar{z}}_2^{1-3} &= \bar{f}_{1-3}(x) + \bar{g}_{123}(x)u, \\ \dot{\bar{z}}_2^4 &= \bar{f}_4(x) + \bar{g}_4(x)u, \\ \dot{\bar{\eta}}_{1-3} &= x_{4-6}, \\ \dot{\bar{\eta}}_4 &= \hat{D}_{10,12}x_{10,12}, \\ \dot{\bar{\eta}}_{5-6} &= \hat{D}_{23}x_{10,12}, \\ \dot{\bar{\eta}}_{7-8} &= \hat{D}_{23}x_{10,12} + \hat{D}_{23}J_b^{-1}[\hat{M}_b - x_{10,12} \times J_b x_{10,12}]. \end{aligned}$$

Функции  $\bar{f}(x)$  и  $\bar{g}(x)$  вычислены с помощью системы Maple и не приводятся здесь ввиду громоздкости. Система (9),(15) является минимально-фазовой, т.е. ее нулевая динамика является локально асимптотически устойчивой. После построения замены переменных, соответствующей выходам (15), переменные  $z$  могут быть стабилизированы линеаризацией обратной связью. Таким образом достигается стабилизация нулевого положения по всем переменным.

#### 4. Результаты

Проведено исследование возможности преобразования системы уравнений, описывающей движение вертолета, к квазилинейному виду. Проанализирована устойчивость подсистемы нулевой динамики по первому приближению и с помощью численного моделирования. Осуществлена стабилизация положения равновесия методом виртуальных выходов.

## 5. Выводы и перспективы

Приведенные результаты позволяют сделать вывод о том, что управление с помощью преобразования к квазиканоническому виду и метод виртуальных выходов могут применяться к системе уравнений, описывающих движение вертолета. Рассмотренная система имеет сравнительно высокую размерность ( $n = 16$ ), и ее преобразование к квазиканоническому виду стало возможно благодаря современным компьютерным средствам аналитических вычислений. В отличие от работы [12] учитываются аэродинамические силы, действующие на вертолет, рассматривается движение в трехмерном пространстве, достигается стабилизация по всем переменным. Использование метода виртуальных выходов позволило обойтись без применения линеаризации в окрестности положения равновесия. Возможен выбор функций  $\phi_i$ , удовлетворяющих системе уравнений (3) и определяющих преобразование к квазиканоническому виду из каких-либо других соображений.

### Литература

1. КРАСНОЩЕЧЕНКО В.И., КРИЩЕНКО А.П. *Нелинейные системы: геометрические методы анализа и синтеза*. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2005. – 520 с.
2. КРИЩЕНКО А.П., КЛИНКОВСКИЙ М.Г. *Преобразование аффинных систем с управлением и задача стабилизации* // Дифференциальные уравнения. – 1992. – Т. 28. – С. 1945–1952.
3. КРИЩЕНКО А.П. *Преобразование нелинейных систем и стабилизация программных движений* // Труды МВТУ им. Н.Э. Баумана. – 1988. – № 512. – С. 69 – 87.
4. КРИЩЕНКО А.П. *Преобразование многомерных аффинных управляемых систем* // Управляемые нелинейные системы. – 1991. – № 2. – С. 5–14.
5. *Свидетельство о государственной регистрации программы №2012617543. quasiPack* / С.Б. Ткачев, А.А. Шевля-

- ков. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 21 августа 2012 г.
6. ТКАЧЕВ С.Б., ШЕВЛЯКОВ А.А. *Оценка нулевой динамики неминимально-фазовых аффинных систем* // Управление в технических системах: Труды конференции с международным участием. СПб., 2010. – С. 48 – 51.
  7. ТКАЧЕВ С.Б., ШЕВЛЯКОВ А.А. *Преобразование аффинных систем со скалярным управлением к квазиканоническому виду* // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Естественные науки. – 2013. – №1. – С. 3 – 16.
  8. ТКАЧЕВ С.Б. *Стабилизация неминимально фазовых аффинных систем с векторным управлением* // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. – 2012. – №10. [Электронный ресурс]. – URL: <http://technomag.edu.ru/doc/450613.html> (дата обращения: 02.02.13).
  9. BRUNOVSKY P.A. *A classification of linear controllable systems* // Kybernetika. – 1970. – Vol. 6, №3. – P. 176–188.
  10. GAVRILETS V., METTLER B., FERON E. *Dynamic Model for a Miniature Aerobatic Helicopter* // MIT-LIDS report – 2003. – No. LIDS-P-2580. – 22 p.
  11. ISIDORI A. *Nonlinear control systems*. – London: Springer-Verlag, 1995. – 587 p.
  12. KOO T.J, SASTRY S. *Output Tracking Control Design of a Helicopter Model Based on Approximate Linearization* // Proc. 37th IEEE Conference on Decision & Control. Tampa (Florida, USA), 1998. – Vol. 4. – P. 3635–3640.
  13. MARINO R. *On the largest feedback-linearizable subsystem* // Systems & Control Letters. – 1986. – №6. – P. 345–351.

## HELICOPTER MODEL AND ITS QUASICANONICAL FORM

**Andrey Shevlyakov**, Institute of Control Sciences of RAS Moscow (aash29@gmail.com).

*Abstract: We consider the mathematical model of a helicopter described by a system of ordinary differential equations. These equations are transformed to the quasicanonical form. Then we analyse the subsystem governing the zero dynamics of the system and find the outputs with respect to which the system is a minimum-phase one.*

Keywords: quasicanonical form, nonlinear systems, zero dynamics.

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии А. П. Курдюковым*

*Поступила в редакцию 03.02.2013.*

*Опубликована 30.09.2013.*