УДК 519.71
ББК 32.817

СЕТЕВОЙ ГРАФИК С ПРОДОЛЖИТЕЛЬНОСТЯМИ РАБОТ В ВИДЕ НЕЧЕТКИХ ЧИСЕЛ LR-ТИПА

Усков А. А.[1]
(*Российский университет кооперации, г. Мытищи Московской области*)

Рассмотрен сетевой график, отличающийся определением продолжительностей работ в виде нечетких чисел LR-типа, что позволяет в аналитическом виде проводить анализ в условиях неопределенности, получая относительно простые расчетные формулы и значительно уменьшить объем вычислений при его проведении по сравнению со случаями, когда продолжительности проведения работ определяется традиционными нечеткими числами или случайными величинами. Приведена формула для расчета общей продолжительности работ по сетевому графику рассматриваемого типа. Определена бинарная функция «максимум» на множестве нечетких чисел LR-типа.

Ключевые слова: продолжительности работ, сетевой график, нечеткие числа *LR*-типа.

1. Введение

Сетевой график – это динамическая модель процесса, отражающая последовательность выполнения комплекса работ [3, 5]. Основные элементы сетевого графика – работа и событие. Работа отражает определенный процесс, в котором участвуют люди, машины, механизмы, материальные ресурсы и т. п. Каждая работа сетевого графика имеет конкретное содержание и имеет продолжительность выполнения.

---

[1] *Андрей Александрович Усков, доктор технических наук, профессор* (*andrey@uskov.net, www.uskov.net*).

Зачастую точные значения продолжительностей работ на сетевом графике неизвестны и при анализе приходится использовать одну из форм описания неопределенности: методы интервального анализа, теории вероятностей и математической статистики, теории нечетких множеств [3, 5].

Методы интервального анализа, в которых рассматриваются лишь интервалы нахождения неизвестных продолжительностей работ, часто оказываются слишком грубым описанием неопределенности [4].

Применение методов теории вероятностей и математической статистики для определения продолжительности работ на сетевом графике детально разработано [5]. Однако применение указанных методов требует знания законов распределения случайных величин, для корректного определения которых может не быть достаточного количества статистических данных. Отчасти указанную проблему может решить применение аппарата субъективных вероятностей [8]. В тоже время еще одним недостатком методов теории вероятностей является невозможность в ряде случаев получить результат в аналитическом виде, а лишь численно посредством имитационного моделирования (метод Монте-Карло).

В теории нечетких множеств разработаны эффективные экспертные методы, позволяющие решать задачи в отсутствие статистических данных, кроме того, применение нечетких чисел LR-типа позволяет значительно упростить расчетные формулы, что делает применение методов теории нечетких множеств весьма перспективным для решения задачи определения продолжительности работ на сетевом графике [1, 2, 6, 7, 9].

В статье рассмотрен сетевой график, отличающийся определением продолжительности работ в виде нечетких чисел LR-типа. Получены формулы, позволяющие в аналитическом виде определить общую продолжительность работ. Как промежуточный результат, возможно, представляющий самостоятельный интерес, аксиоматически определена бинарная функция $\max(\cdot, \cdot)_{LR}$ на множестве нечетких чисел LR-типа.

2. Постановка задачи

Рассмотрим задачу определения общей продолжительности работ на сетевом графике при заданных продолжительностях отдельных работ.

Как известно, для решения указанной задачи используются два достаточно очевидных правила [3, 5]:

1) для последовательных путей без разветвлений общая продолжительность работ определяется как сумма продолжительностей работ указанных путей:

(1) $$T_{\text{пос}} = \sum_i T_i ,$$

где T_i – продолжительность i-го пути;

2) для параллельных путей общая продолжительность работ равна продолжительности того из указанных путей, для которого она максимальна:

(2) $$T_{\text{пар}} = \max\{T_i\} .$$

Рассмотрим, без потери общности изложения,в качестве примера определение общей продолжительности работ для сетевого графика, показанного на рис. 1.

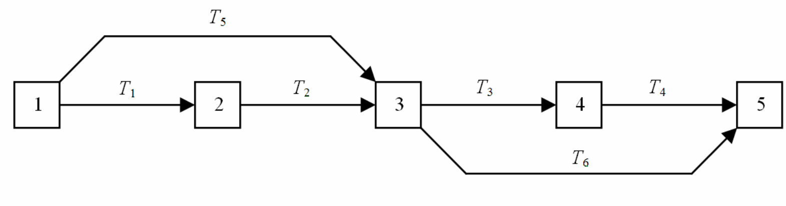

Рис. 1. Пример сетевого графика

Согласно приведенным правилам общая продолжительность работ в рассматриваемом случае определяется формулами

(3) $$\begin{cases} T' = \max((T_1 + T_2), T_5), \\ T = \max((T' + T_3 + T_4), (T' + T_6)). \end{cases}$$

Предположим далее, что продолжительности работ T_i — нечеткие числа LR-типа: $\tilde{T}_i = (T_i, \alpha_i, \beta_i)$ [1, 6, 7].

Кратко напомним основные сведения о нечетких числах *LR*-типа.

Нечеткие числа *LR*-типа – это разновидность нечетких чисел специального вида, задаваемых по определенным правилам [1, 6]. Нечеткие числа *LR*-типа были предложены с целью уменьшения трудоемкости выполнения арифметических и логических операций над нечеткими числами путем аппроксимации функций принадлежности типовыми нелинейными функциями, задаваемыми своими параметрами (*LR*-аппроксимация).

Функции принадлежности нечетких чисел *LR*-типа задаются с помощью невозрастающих четных неотрицательных действительных функций действительного аргумента $L(x)$ и $R(x)$, удовлетворяющих свойствам:

а) $L(-x) = L(x)$, $R(-x) = R(x)$;

б) $L(0) = R(0)$.

Пусть $L(x)$ и $R(x)$ – функции *LR*-типа. Унимодальное нечеткое число A с модой a (т.е. $\mu_A(a) = 1$) с помощью $L(x)$ и $R(x)$ задается следующим образом:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} L\left(\dfrac{a - x}{\alpha}\right) & \text{при } x \le a, \\ R\left(\dfrac{x - a}{\beta}\right) & \text{при } x > a; \end{cases}$$

где a – мода; $\alpha > 0$, $\beta > 0$ – левый и правый коэффициенты нечеткости.

Таким образом, при заданных $L(x)$ и $R(x)$ нечеткое число *LR*-типа определяется тройкой (a, α, β).

Над нечеткими *LR*-числами определены арифметические операции [1, 6, 7]. Рассмотрим операцию сложения.

Предположим, имеются нечеткие числа *LR*-типа: $\tilde{\boldsymbol{a}} = (m, \alpha, \beta)_{LR}$ и $\tilde{\boldsymbol{b}} = (n, \gamma, \delta)_{LR}$, тогда

(4) $(m, \alpha, \beta)_{LR} + (n, \gamma, \delta)_{LR} = (m + n, \alpha + \gamma, \beta + \delta)_{LR}$.

Для нахождения общей продолжительности работ на сетевом графике кроме арифметической операции «сложение» (см. формулу (4)) необходимо определить также операцию «максимум» для нечетких чисел *LR*-типа. В частности, для случая двух аргументов необходимо определить бинарную функцию $\max(\cdot,\cdot)_{LR}$ на множестве нечетких чисел LR-типа. Решению указанной задачи посвящена дальнейшая часть статьи.

3. Бинарная функция max(·, ·)$_{LR}$ на множестве нечетких чисел LR-типа

Введем в рассмотрение бинарную функцию $\max(\cdot,\cdot)_{LR}$ от двух нечетких чисел LR-типа $\tilde{\boldsymbol{a}} = (a_0, \alpha_a, \beta_a)_{LR}$ и $\tilde{\boldsymbol{b}} = (b_0, \alpha_b, \beta_b)_{LR}$: $\tilde{\boldsymbol{f}} = \max(\tilde{\boldsymbol{a}}, \tilde{\boldsymbol{b}})_{LR}$.

Перечислим аксиомы, которым должна удовлетворять функция $\max(\cdot,\cdot)_{LR}$.

Аксиома 1. Множество значений функции $\tilde{\boldsymbol{f}} = \max(\tilde{\boldsymbol{a}}, \tilde{\boldsymbol{b}})_{LR} \in \Omega_{LR}$, где Ω_{LR} – множество нечетких чисел LR-типа $\tilde{\mathbf{f}} = (f_0, \alpha_f, \beta_f)_{LR}$.

Аксиома 2. Если $\alpha_a, \beta_a, \alpha_b, \beta_b = 0$, т.е. $\tilde{\boldsymbol{a}} = (a_0, 0, 0)$ и $\tilde{\boldsymbol{b}} = (b_0, 0, 0)$ – «четкие» действительные числа, то $\max(\tilde{\mathbf{a}}, \tilde{\mathbf{b}})_{LR} = \max(a_0,\ b_0) = f_0$.

Таким образом, для «четких» действительных чисел вводимая функция ничем не должна отличаться от традиционной.

Сопоставим нечетким числам $\tilde{\boldsymbol{a}} = (a_0, \alpha_a, \beta_a)_{LR}$, $\tilde{\boldsymbol{b}} = (b_0, \alpha_b, \beta_b)_{LR}$, и $\tilde{\boldsymbol{f}} = (f_0, \alpha_f, \beta_f)_{LR}$ интервалы $I_a = (a_0 - \alpha_a,\ a_0 + \beta_a)$, $I_b = (b_0 - \alpha_b,\ b_0 + \beta_b)$ и $I_f = (f_0 - \alpha_f,\ f_0 + \beta_f)$ соответственно. Указанные интервалы I_a, I_b и I_f при некоторых типах функций принадлежности нечетких чисел (например, треугольных, равномерных и др.) соответствуют носителям нечетких множеств (под носителем нечетких чисел LR-типа понимается область, в которой соответствующая этому нечеткому числу функция принадлежности отлична от 0) [1, 6, 7].

Аксиома 3. Интервал I_f определяется совокупностью точекx_f, задаваемых уравнением $x_f = \max(x_a, x_b)$ где x_a и x_b – произвольные действительные числа, удовлетворяющие условию $x_a \in I_a$, $x_b \in I_b$.

В соответствии с приведенными аксиомами определим функцию max(. , .)$_{LR}$ следующим образом:

(5) $\widetilde{\boldsymbol{f}} = \max(\widetilde{\boldsymbol{a}}, \widetilde{\boldsymbol{b}})_{LR} = (f_0, \alpha_f, \beta_f)_{LR}$,

где

$$f_0 = \max(a_0, b_0)\,,$$

$$\alpha_f = \max(a_0, b_0) - \max(a_0 - \alpha_a, b_0 - \beta_b)\,,$$

$$\beta_f = \max(a_0 + \alpha_a, b_0 + \beta_b) - \max(a_0, b_0)\,.$$

Рассмотрим примеры применения формулы (5):

а) пусть $\widetilde{\boldsymbol{a}} = (5,\ 1,\ 1)_{LR}$, $\widetilde{\boldsymbol{b}} = (9, 2, 1)_{LR}$, тогда

$$\widetilde{\boldsymbol{f}} = \max(\widetilde{\boldsymbol{a}}, \widetilde{\boldsymbol{b}})_{LR} = (9, 2, 1)_{LR}\ ;$$

б) пусть $\widetilde{\boldsymbol{a}} = (7,\ 5,\ 2)_{LR}$, $\widetilde{\boldsymbol{b}} = (5, 1, 1)_{LR}$, тогда

$$\widetilde{\boldsymbol{f}} = \max(\widetilde{\boldsymbol{a}}, \widetilde{\boldsymbol{b}})_{LR} = (7, 3, 3)_{LR}\ ;$$

в) пусть $\widetilde{\boldsymbol{a}} = (5,\ 3,\ 3)_{LR}$, $\widetilde{\boldsymbol{b}} = (9, 5, 2)_{LR}$, тогда

$$\widetilde{\boldsymbol{f}} = \max(\widetilde{\boldsymbol{a}}, \widetilde{\boldsymbol{b}})_{LR} = (9, 5, 2)_{LR}\ .$$

Функции принадлежности треугольного типа нечетких чисел $\widetilde{\boldsymbol{a}}$, $\widetilde{\boldsymbol{b}}$ и $\max(\widetilde{\boldsymbol{a}}, \widetilde{\boldsymbol{b}})_{LR}$ для случаев а), б) и в) приведены на рис. 2-4.

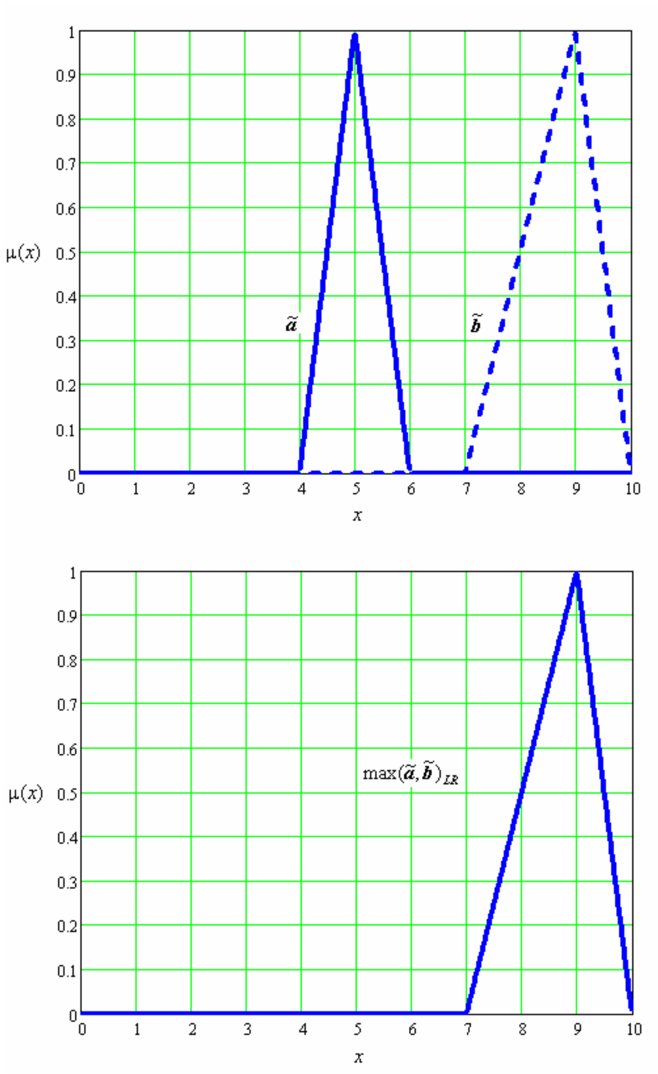

Рис. 2. Функции принадлежности нечетких чисел $\tilde{\boldsymbol{a}}$, $\tilde{\boldsymbol{b}}$ *и* $\max(\tilde{\boldsymbol{a}},\tilde{\boldsymbol{b}})_{LR}$ *для случая а)*

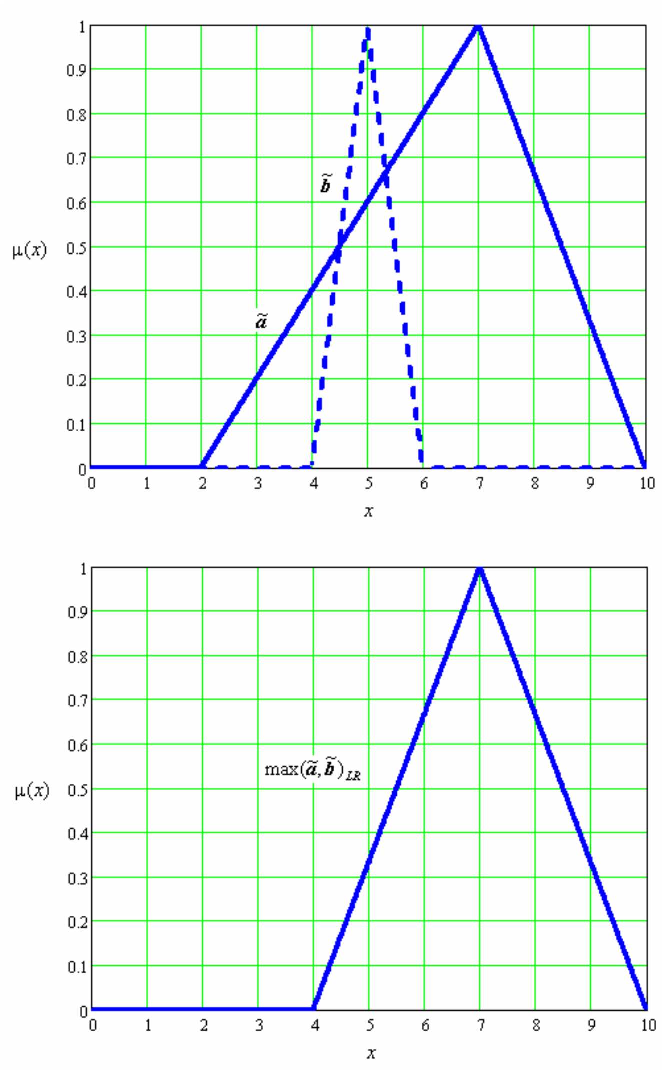

Рис. 3. Функции принадлежности нечетких чисел $\tilde{\boldsymbol{a}}$, $\tilde{\boldsymbol{b}}$
и $\max(\tilde{\boldsymbol{a}},\tilde{\boldsymbol{b}})_{LR}$ *для случая б*)

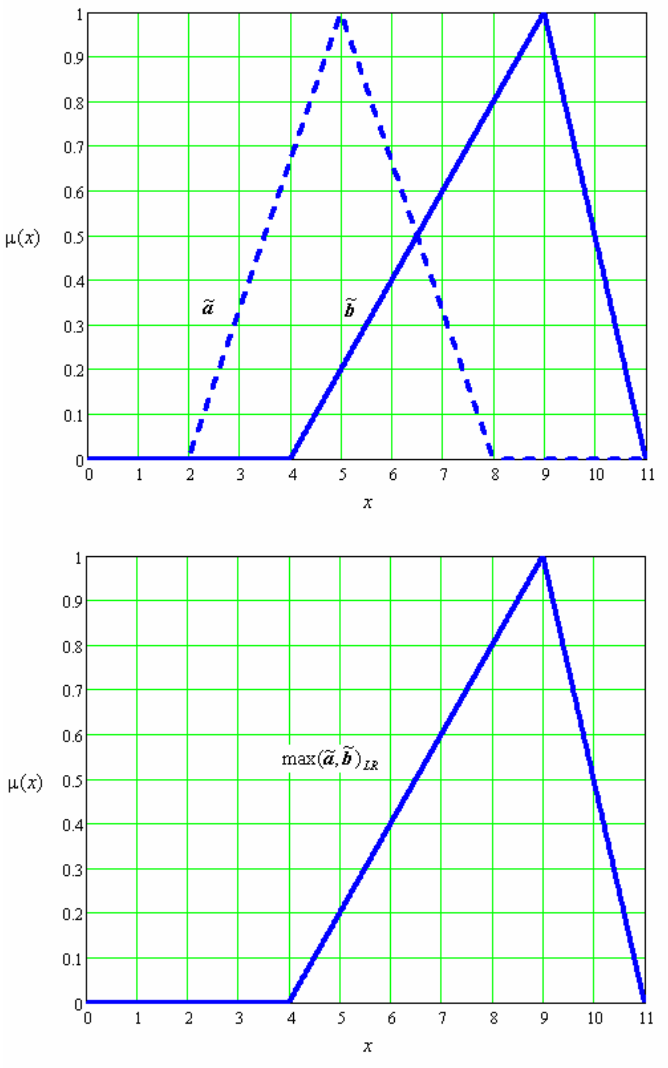

Рис. 4. Функции принадлежности нечетких чисел $\tilde{\boldsymbol{a}}$, $\tilde{\boldsymbol{b}}$ *и* $\max(\tilde{\boldsymbol{a}},\tilde{\boldsymbol{b}})_{LR}$ *для случая в)*

4. Пример расчета общей продолжительности работ

Рассмотрим сетевой график, приведенный на рис. 1. Предположим, что продолжительности работ заданы в виде нечетких чисел LR-типа: $\widetilde{T}_1 = (10, 1, 2)_{LR}$, $\widetilde{T}_2 = (10, 2, 1)_{LR}$, $\widetilde{T}_3 = (10, 1, 1)_{LR}$, $\widetilde{T}_4 = (21, 2, 2)_{LR}$, $\widetilde{T}_5 = (22, 1, 2)_{LR}$, $\widetilde{T}_6 = (20, 2, 3)_{LR}$.

Общая продолжительность работ на сетевом графике определяется формулой (3). Для реализации операций «сложение» и «максимум» используются формулы (4) и (5).

Вычисления позволяют получить следующий результат: $\widetilde{T}' = (22, 1, 2)_{LR}$, $\widetilde{T} = (53, 4, 5)_{LR}$.

Для сравнения предположим, что продолжительности работ на рассматриваемом сетевом графике заданы «четкими» значениями, численно равными модам нечетких чисел $\widetilde{T}_1$-$\widetilde{T}_6$: $T_1 = 10$, $T_2 = 10$, $T_3 = 10$, $T_4 = 21$, $T_5 = 22$, $T_6 = 20$.

Как несложно заключить из формул (3)-(5), для данного случая получим $T' = 22$, $T = 53$ – значения численно равные модам нечетких чисел $\widetilde{T}'$, $\widetilde{T}$.

5. Выводы

Основные результаты настоящей статьи можно отразить в следующих выводах:

1. Рассмотрен сетевой график, отличающийся определением продолжительностей работ в виде нечетких чисел LR-типа, что позволяет в аналитическом виде проводить анализ в условиях неопределенности, получая относительно простые расчетные формулы и значительно уменьшить объем вычислений при его проведении по сравнению со случаями, когда продолжительности проведения работ определяется традиционными нечеткими числами или случайными величинами.
2. Аксиоматически определена бинарная функция«максимум» на множестве нечетких чисел LR-типа, использующаяся для вычисления общей продолжительности работ на сетевом графике.

Логическим продолжением результатов, изложенных в статье,является определение критического пути сетевого графика с продолжительностями работв виде нечетких чисел *LR*-типа.

Литература

1. АЛТУНИН А.Е., СЕМУХИН М.В. *Модели и алгоритмы принятия решений в нечетких условиях.* – Тюмень: Издательство Тюменского государственного университета, 2000. – 352 с.
2. БАЛАШОВ В.Г., ЗАЛОЖНЕВ А.Ю., НОВИКОВ Д.А. *Механизмы управления организационными проектами* – М.: ИПУ РАН, 2003. – 84 с.
3. ГОЛЕНКО Д.И. *Статистические методы сетевого планирования и управления.* – М.: Наука, 1968. – 400 с.
4. ЖОЛЕН Л., КИФЕР М., ДИДРИ О. и др. *Прикладной интервальный анализ*. – М.: РХД, 2007. – 468 с.
5. ЗАЙДЕНМАН И.А., МАРГУЛИС А.Я. *Математика сетевого планирования.* – М.: Издательство «Знание», 1967. – 49 с.
6. *Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта* / Под ред. Д.А. Поспелова. – М.: Наука, 1986. – 312 с.
7. ПЕГАТ А. *Нечеткое моделирование и управление* – М.: Бином. Лаборатория знаний, 2009. – 798 с.
8. РАЙФА Г. *Анализ решений* (*введение в проблему выбора в условиях неопределенности*). – М.: Наука, 1977. – 408 с.
9. УСКОВ А.А.,КУЗЬМИН А.В. *Интеллектуальные технологии управления. Искусственные нейронные сети и нечеткая логика*. – М.: Горячая Линия-Телеком, 2004. – 143 с.

PROJECT SCHEDULEWITH WORK DURATIONSPRESENTED BY LRFUZZY NUMBERS

Andrey Uskov, Russian University of Cooperation, Moscow, Doctor of Science, professor(*andrey@uskov.net, www.uskov.net*).

Abstract: We suggest using LR fuzzy numbers as work durations in a project schedule. This model allows performing closed form analysis under uncertainty. It results in relatively simple expressions, which reduce computation volume as compared with existing models of work duration (*traditional fuzzy numbers or random variables*)*. We derive the expression for the total project duration under a given network schedule and define a binary* “*maximum*”*function for the set of LR fuzzy numbers.*

Keywords: work duration, project schedule, LR fuzzy number.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии В.Н. Бурковым

Поступила в редакцию 05.10.2013.
Опубликована 31.01.2014.