

УДК 004.722.2+004.272.3

ББК 32.817: 32.973.202

## **ВЛОЖЕНИЕ ПОДСИСТЕМ, ЛИМИТИРУЮЩИХ ДЛИНУ И ЧИСЛО ПУТЕЙ МЕЖДУ ВЕРШИНАМИ ГРАФА ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ<sup>1</sup>**

**Мелентьев В. А.<sup>2</sup>**

*(ФГБУН Институт физики полупроводников  
им. А.В. Ржанова СО РАН, Новосибирск)*

*Рассматривается проблема выявления в графе вычислительной системы компонент, соответствующих размещаемой подсистеме в отношении достижимости и соединимости ее вершин. Представленные в работе способ и примеры выявления таких компонент основаны на проективном описании графов.*

Ключевые слова: достижимость и соединимость вершин графа, вложение подсистемы в вычислительную систему.

### **1. Введение**

Проблемы размещения подсистемы в избыточной для нее ресурсной среде вычислительной системы (ВС) возникают в связи с тем, что реализация в ней полносвязной структуры, позволяющей воплотить любой информационный граф [7], технико-экономически не является адекватной, а использование опосредованных (транзитных) взаимодействий ограничено быстродействием коммуникационной среды системы.

Известно [9], что эффективность подсистемы определяется ее самым неэффективным компонентом, каковым обычно является коммуникационная среда, поэтому используемые при раз-

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект №14–07–00169.

<sup>2</sup> Виктор Александрович Мелентьев, кандидат технических наук, (melva@isp.nsc.ru).

мещении подсистем алгоритмы основаны, как правило, на сопоставлении отношений смежности вершин графа ВС и вершин информационного графа размещаемой подсистемы. Однако условие физической смежности процессоров является необходимым не для всех реализуемых в ВС общесистемных или прикладных задач и для достаточно большого их числа может быть ослаблено.

Известно также [9], что число эффективно используемых в подсистеме процессоров ограничено сверху долей нераспараллеленных участков реализуемой задачи. При этом, однако, чем такая доля больше, тем больше возможностей для совмещения межпроцессорных обменов с этими участками, и тем менее критичными могут быть требования к структуре в отношении смежности процессоров, реализующих информационно смежные ветви (ресурсы). Это позволяет перейти от традиционно используемых отношений смежности на множестве вершин графа ВС к отношениям ограниченной их достижимости: вершины будем считать достижимыми, если расстояние между ними не превысит порогового значения  $\partial$ . Граф  $\partial$ -достижимости  $G_\partial$  вычислительной системы обладает существенно большей степенью и при диаметре  $d(G) \leq \partial$  является полным. Понятно, что шансы приемлемого вложения подсистем в графы одного порядка, но с большей степенью – существенно выше.

В настоящее время динамика развития суперкомпьютерных технологий определяется повышением быстродействия базовых вычислительных элементов системы при практически неменяющихся структурных концепциях их объединения. Нарастание вычислительной мощности идет в основном за счет увеличения числа элементов ВС и улучшения таких ее коммуникационных характеристик как латентность и пропускная способность сети связи. К примеру, эти показатели в системах с технологией Fast Ethernet с соответствующими значениями 170 мкс и 10 МБ/с улучшены технологией SCI до 5 мкс и 80 МБ/с, а в технологии Infiniband при латентности в единицы

микросекунд достигают гигабайтных скоростей. Ведутся исследования в области терабитных коммуникационных технологий [1].

Из вышеизложенного понятно, что ожидание увеличения доли задач, некритичных к опосредованной достижимости задействованных в них процессоров, как и перспектива использования основанного на показателе ограниченной достижимости подхода, не являются иллюзорными. Заметим также, что достижение пиковой производительности ВС в решении большинства задач (исключая тестовые) не является самоцелью, – цель состоит, прежде всего, в актуализации их решения. Это дает дополнительные резервы в использовании не только смежных, но и опосредованных взаимодействий ресурсов системы. Для подсистем с повышенной отказоустойчивостью условие смежности ( $\partial = 1$ ) в принципе неосуществимо без введения в граф ВС кратных ребер. Более реальным в этом смысле является повышение  $\partial$  до величины, обеспечивающей наличие в подсистеме кратных путей<sup>1</sup> с длиной, не превышающей  $\partial$ , поэтому отказоустойчивые подсистемы заведомо «обречены» на использование фактора несмежности ресурсов в графе ВС.

## 2. Основные положения

Как правило, структуре вычислительной системы ставится в соответствие простой (без кратных ребер и петель) неориентированный граф  $G(V, E)$ , определяемый моделью, носителями которой являются множества вершин  $V$  и ребер  $E$ . Традиционное описание такого графа порядка  $n = |V|$  состоит в задании бинарных отношений смежности  $E$  на множестве вершин  $V$  матрицей  $E = (e_{ij})_{n \times n}$ , единичные значения элементов  $e_{ij}$  которой соответствуют наличию ребер  $(v_i, v_j)$  между вершинами:  $(v_i, v_j) \in E \Leftrightarrow e_{ij} = 1$ .

---

<sup>1</sup> Здесь и далее имеются в виду элементарные пути, не имеющие в своем составе повторяющихся вершин.

Если в графе  $G(V, E)$  существует  $(u-v)$ -путь из вершины  $u \in V$  в вершину  $v \in V$ , то вершина  $v$  достижима из  $u$  и длину кратчайшего пути между этими вершинами называют расстоянием  $d(u-v)$  от  $u$  до  $v$  [8]. Бинарное отношение *достижимости*  $R$  на множестве вершин  $V$  зададим матрицей  $\mathbf{R} = (r_{ij})_{n \times n}$ , элементы  $r_{ij}$  которой соответствуют наличию между вершинами  $v_i, v_j \in V$  таких  $(v_i-v_j)$ -путей, что  $(v_i-v_j) \in R \Leftrightarrow r_{ij} = 1$ . Понятно, что любые две вершины связного графа связаны отношением достижимости  $R$ , и граф достижимости  $G(V, R)$  является полным. Транзитивное замыкание  $R = \bigcup_{k=0}^{\infty} E^k$  отношения смежности  $E$  на множестве вершин  $V$  графа  $G(V, E)$  определяет отношение достижимости  $R$  на множестве вершин  $V$  и в практике структурного анализа позволяет выявить в графе ВС классы эквивалентности вершин в отношении связности и порожденные ими компоненты связности [8].

Распределенный характер выполняемых в ВС приложений неизбежно лимитирует обусловленные неполнотой графа сетевые задержки. Исходя из этого, введем соответствующие допускаемым задержкам ограничения на длины путей между вершинами графа ВС. Вершины  $u$  и  $v$  будем считать связанными отношением  $\partial$ -достижимости  $R_\partial$  ( $\partial$ -достижимыми) тогда и только тогда, когда расстояние  $d(u-v)$  между ними не превышает  $\partial$ :  $(u-v) \in R_\partial \Leftrightarrow d(u-v) \leq \partial$ .

Обычно наличие в графе  $G(V, E)$  путей длины  $l$  выявляют возведением в соответствующую степень отношения смежности  $E$ :  $E^l = E^{l-1} \circ E = \{(a, c) \mid \exists b \in V: (a, b) \in E^{l-1} \wedge (b, c) \in E\}$ . Матрицу  $\mathbf{R}_\partial$   $\partial$ -ограниченной достижимости получают логическим сложением всех  $\partial$  ( $1 \leq l \leq \partial$ ) матриц  $\mathbf{E}^l$ , полученных последовательным возведением в  $l$ -ю степень матрицы смежности  $\mathbf{E}$ :  $\mathbf{R}_\partial = \mathbf{E} \vee \mathbf{E}^2 \vee \dots \vee \mathbf{E}^\partial$ . Тогда элементы  $r_{ij}$  матрицы  $\mathbf{R}_\partial$  соответствуют наличию между вершинами  $v_i, v_j \in V$  пути  $(v_i-v_j)$  с

длиной  $d(v_i, v_j)$ , не превышающей заданного значения  $\partial$ :  $r_{ij} = 1 \Leftrightarrow d(v_i, v_j) \leq \partial$ , а  $i$ -я строка матрицы  $R_\partial$  определяет  $\partial$ -достижимое из вершины  $v_i$  множество  $V_\partial(v_i) \subseteq V$  вершин. Описанный такой матрицей  $R_\partial$  граф  $G_\partial(V, R_\partial)$  назовем графом  $\partial$ -достижимости. Число компонент связности  $k(G_\partial)$  такого графа и число компонент связности  $k(G)$  исходного графа  $G(V, E) = \bigcup_{i=1}^k G_i(V_i, E_i)$  совпадают, как и множества принадлежащих им вершин  $V_{i\partial}$  и  $V_i$ . Поэтому использование далее по умолчанию графов, состоящих из единственной компоненты связности, не приведет к утрате общности.

Выделим в множестве  $V_\partial$  (в связном графе  $V_\partial = V$ ) максимальное по включению подмножество  $V_\partial^*$  вершин,  $\partial$ -достижимых из любой другой его вершины, т.е.  $\forall u, v \in V_\partial^* d(u-v) \leq \partial$ . Таким образом, все вершины из  $V_\partial^*$ , связанные отношением  $\partial$ -достижимости  $R_\partial$ , порождают подграф  $G_\partial(V_\partial^*, R_\partial)$ , являющийся кликой графа  $G_\partial(V, R_\partial)$ .

Введем понятие  $\partial$ -ограниченных компонент достижимости ( $\partial$ -компонент) графа. Глобальной компонентой  $\partial$ -достижимости ( $\partial_+$ -компонентой) графа  $G(V, E)$ , включающей множество всех возможных в нем  $\partial$ -ограниченных путей, назовем подграф  $G_{\partial_+}^*(V_{\partial_+}^*, E_{\partial_+}^*)$ , порожденный максимальным по включению множеством  $V_{\partial_+}^* = V_\partial^* \cup V_+^*$  вершин, объединяющим подмножество  $V_\partial^* = \{u \mid \forall v \in V_\partial^* (u-v) \in R_\partial\}$  попарно  $\partial$ -достижимых вершин с подмножеством  $V_+^* = \{w \notin V_\partial^* \mid \exists u, v \in V_\partial^* : w \in V_\partial(u-v)\}$  вершин, не являющихся членами подмножества  $V_\partial^*$ , но входящих в состав  $\partial$ -ограниченных путей между его вершинами; здесь  $V_\partial(u-v)$  – подмножество вершин, составляющих путь из  $u$  в  $v$ . Вершины из

$V_{\partial}^*$  при этом назовем основными (в плане их тотальной  $\partial$ -достижимости), а вершины из  $V_+^*$  – вспомогательными (обеспечивающими  $\partial$ -достижимость), или транзитными.

В работе [6] введено определение  $\partial$ -ограниченной компоненты связности, выделяющей в графе  $G(V, E)$  максимальный по включению связный подграф с диаметром, равным  $\partial$ . Обозначим такой подграф  $G_{\partial-}^*(V_{\partial-}^*, E_{\partial-}^*)$ . В общем случае между вершинами  $u$  и  $v$  графа  $G(V, E)$  может быть несколько путей  $(u-v) \in R_{\partial}$ , но в подграфе  $G_{\partial-}^*(V_{\partial-}^*, E_{\partial-}^*)$  присутствуют лишь те из них, что образованы исключительно вершинами из  $V_{\partial-}^*$ . То есть компонента  $G_{\partial-}^*(V_{\partial-}^*, E_{\partial-}^*)$  порождена вершинами из  $V_{\partial-}^*$ , составляющими лишь некоторую часть от  $V_{\partial-}^*$ , что подчеркивает введенный в индекс знак минуса. Формальное определение  $V_{\partial-}^*$  является рекуррентным:  $V_{\partial-}^* = \{u, v \in V_{\partial}^* \mid V_{\partial}(u-v) \subseteq V_{\partial-}^*\}$ . В отличие от глобальной  $\partial_+$ -компоненты подграф  $G_{\partial-}^*(V_{\partial-}^*, E_{\partial-}^*)$  назовем *локальной  $\partial$ -компонентой достижимости ( $\partial$ -компонентой)*.

Отметим, что при отсутствии ограничений на длины маршрутов<sup>1</sup>  $d(u-v)$  между вершинами  $u, v \in V$  графа  $G(V, E)$  и глобальная, и локальная его компоненты  $\partial$ -достижимости вырождаются в компоненту связности, т.е. последняя, как случай с  $\partial \geq d(G)$ , является всего лишь частным случаем общей постановки, учитывающей длины путей.

В теории графов известно также актуальное для структурных исследований вычислительных систем отношение соединимости вершин. Однако общепринятого определения этого отношения в теории графов нет: в [2], например, соединимость

---

<sup>1</sup> В теории вычислительных систем понятие маршрута равнозначно понятию пути, не имеющему повторяющихся вершин в его составе.

отождествляется со связностью и с достижимостью вершин в графе, в то время как в [3] под соединимостью вершин понимают наличие некоторого множества независимых (непересекающихся) путей между вершинами, ограниченных по длине диаметром графа. При этом пути  $(u-v)_1$  и  $(u-v)_2$  между вершинами  $u$  и  $v$  считаются независимыми (непересекающимися), если составляющие их множества вершин  $V(u-v)_1$  и  $V(u-v)_2$  пересекаются только концевыми вершинами, т.е. при  $V(u-v)_1 \cap V(u-v)_2 = \{u, v\}$ .

Мы находим, что определение соединимости как критерия наличия альтернативных путей между вершинами графа является более приемлемым, – именно этот контекст вложен в определение компоненты двусвязности графа как максимального подмножества из трех или более его вершин, в котором любые две вершины соединены по крайней мере двумя путями, не имеющими общих вершин. В [3] подчеркивается, что компонента двусвязности является устойчивой частью графа, так как при удалении из нее какой-либо вершины и инцидентных ей ребер любые две ее вершины по-прежнему остаются соединенными. Это свойство гарантирует структурную устойчивость вычислительной системы к однократным отказам.

Здесь мы обобщим понятие двусвязности на произвольную кратность  $k$  отказов, называя соответствующие компоненты  $k$ -связными. Заметим, что такое определение предполагает наличие  $k$  независимых<sup>1</sup> путей между вершинами графа без учета их длины. Поэтому при введении ограничений не только на минимальное число  $k$  независимых путей, но и на их длину  $\partial$  следует говорить о  $k(\partial_+)$ - или  $k(\partial_-)$ -достижимости вершин и о соответствующих  $k(\partial_+)$ - и  $k(\partial_-)$ -компонентах графа.

---

<sup>1</sup> Пути между двумя вершинами графа называем независимыми, если они кроме конечных не имеют общих вершин.

Наличие нескольких путей между вершинами графа можно выявить из его матричного описания, – для этого булевы операции дизъюнкции  $\vee$  и конъюнкции  $\wedge$  при нахождении матрицы  $\partial$ -достижимости  $\mathbf{R}_\partial$  следует заменить алгебраическими операциями сложения  $+$  и умножения  $\times$ . При этом элементы  $r_{ij}$  матрицы  $\mathbf{R}_\partial$  примут уже не бинарные значения, соответствующие отсутствию и наличию между вершинами путей, не превышающих заданной длины  $\partial$ , а определяют число таких путей.

К сожалению, традиционно используемые матричные формы описания графов не настолько информативны, чтобы в явном виде содержать в себе достаточную для выявления введенных выше компонент информацию. К тому же они слишком формализованы, чтобы быть наглядными для описания этих компонент, процессов их получения и использования в структурных исследованиях ВС. Поэтому помимо традиционного матричного далее использовано проективное описание графа, основные сведения о котором приведены ниже.

### 3. Проективное описание графа

Проекция  $P_i(v)$  неориентированного простого графа  $G(V, E)$  представляет собой  $i$ -уровневую конструкцию, на нулевом уровне которой расположена вершина  $v \in V$ , выбранная в качестве ракурсной; порожденное ею на первом уровне подмножество  $V_1(v) \subset V$  содержит  $s(v) = |\mathcal{N}(v)|$  вершин окружения  $\mathcal{N}(v)$ , а  $i$ -й уровень объединяет подмножества вершин, порожденных вершинами предшествующего уровня и являющихся окружениями этих вершин за вычетом предшествующих. Отношение непосредственного «предшествования/порождения» вершин в проекции  $P(v)$  есть отношение их смежности. Число порожденных на  $i$ -м уровне подмножеств соответствует числу  $|V_{i-1}|$  вершин порождающего их  $(i - 1)$ -го уровня. Упорядочив вершины по их непосредственному «предшествованию/порождению» от ракурсной  $v$  до  $j$ -й вершины  $v_{ij}$   $i$ -го уровня, получим маршрут

$W(v-v_{ij}) = (v, v_{1x}, \dots, v_{ij})$  из  $v$  в  $v_{ij}$ , при этом в невзвешенном графе номер  $i$  уровня равен длине пути из  $v$  в любую вершину из подмножества  $V_i$  находящихся на нем вершин. Последовательность вершин, непосредственно предшествующих открывающимся скобкам от  $v_{ij}$  до ракурсной вершины  $v$  проекции, дает обратный маршрут  $W(v_{ij}-v) = W^{-1}(v-v_{ij})$ .

Итак, вершина  $v_{i-1,j}$  порождает подмножество  $V_i(v_{i-1,j}) = \mathcal{N}(v_{i-1,j}) \setminus W(v_{i-1,j}, v)$ . К примеру, 3-уровневая полная<sup>1</sup> проекция 3-куба (рис. 1), построенная из вершины 0, имеет вид:

$$(1) P_3(0) = 0^{(1(3^{(2,7)}, 5^{(4,7)}), 2(3^{(1,7)}, 6^{(4,7)}), 4(5^{(1,7)}, 6^{(2,7)}))}.$$

В общем случае вершина  $u \neq v$  в  $i$ -уровневой проекции  $P_i(v)$  может повторяться, т.е. быть  $m$ -кратной. Кратность  $m(u)$  вершины  $u$  в проекции и число описываемых ею простых цепей из ракурсной вершины  $v$  в вершину  $u$  равнозначны. Проиндексируем кратные вершины в соответствии с порядком их размещения на уровнях проекции «снизу вверх» (по возрастанию номеров уровней) и «слева направо» (для вершин одного уровня).

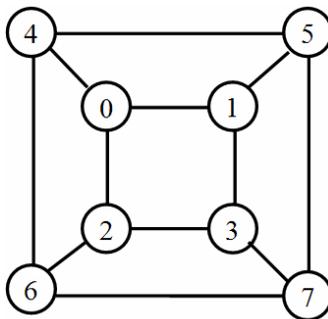


Рис. 1. Гиперкуб степени  $s = 3$

<sup>1</sup> Полная проекция несет в себе информацию обо всех вершинах и ребрах графа. Минимальное число уровней в ней определяется эксцентриситетом ракурсной вершины.

Нулевое значение присвоим индексу экземпляра, расположенного первым снизу и слева, и назовем этот экземпляр оригинальным. Индексам остальных экземпляров  $u_k$ ,  $1 \leq k \leq m(u) - 1$ , присвоим соответствующие упорядочиванию значения:  $u_k \in (u_1, \dots, u_{m-1})$ . Эти экземпляры назовем реплицированными, или репликами. Уровни, на которых расположены экземпляры вершины  $u$ , также упорядочим по возрастанию: оригинальной вершине  $u_0$  соответствует уровень  $j_0 = \min(j_0, j_1, \dots, j_{m-1})$ , вершине  $u_{m-1} - (j_{m-1})$ -й уровень. Числовые значения отдельных элементов упорядоченного множества  $(j_0, j_1, \dots, j_{m-1})$  могут совпадать. Номер уровня  $j_0$ , на котором расположена вершина  $u_0$ , имеет наименьшее значение и равен длине кратчайшего маршрута в множестве  $\{W(v-u)\}$  маршрутов из  $v$  в  $u$ .

Помимо информации о маршрутах проекция графа несет в себе информацию о циклах, составленных простыми цепями, соединяющими ракурсную и кратные вершины:  $W(v-u_x) \cup \cup W(u_y-v)$ ,  $x \neq y$ ,  $x, y \in \{0, \dots, m(u) - 1\}$ . Число циклов, содержащих  $m$ -кратную вершину, определяется сочетанием из  $m$  элементов по два –  $C_m^2 = m!/2(m-2)!$ ; например, при  $m(u) = 3$  проекция содержит информацию о трёх циклах  $K_1(v-v) = W(v-u_0) \cup W(u_1-v)$ ,  $K_2(v-v) = W(v-u_0) \cup W(u_2-v)$  и  $K_3(v-v) = W(v-u_1) \cup W(u_2-v)$ .

В [5] показано, что среди порождаемых репликами вершин не может быть оригинальных, поэтому необходимость в развертывании их на вышестоящие уровни отсутствует, если нет потребности в выявлении всех маршрутов заданной длины. Это позволяет снизить информационную емкость описания графа без утраты полноты описания. В качестве примера сравним проекцию (1) с приведенной ниже ее минимизированной версией; реплики вершин выделены здесь полужирным курсивом:

$$P_3(0) = 0^{(1(3^{(2,7)}, 5^{(4,7)}), 2(3, 6^{(4,7)}), 4^{(5,6)})}$$

Актуализация проекции графа ВС в соответствии с текущим ее состоянием довольно проста и состоит в удалении отка-

завшей вместе с порожденной ею вершинами. При удалении, к примеру, из проекции (1) вершины 2 получим:

$$P_3(0) = 0_{(1^{(3^{(2,7)}, 5^{(4,7)})}, 2^{(3,6^{(4,7)})}, 4^{(5,6^{(7)})})} = 0_{(1^{(3^{(2,7)}, 5^{(4,7)})}, 4^{(5,6^{(7)})})}.$$

Здесь среди удаленных (выделенных полугоном) вершин находится оригинал вершины 6, поэтому ближайшую к ней (снизу-вверх, справа-налево) реплику (порожденную вершиной 4) переводим в оригинальные, дополнив порожденной на вышестоящем уровне вершиной 7.

Для сопоставления возможностей проективных и матричных описаний приведем матрицы  $\mathbf{E}^k$  рассматриваемого графа:

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{E}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Как видим, максимум информации, непосредственно извлекаемой из матриц, состоит в констатации наличия путей определенной длины:  $e_{ij} = 1 \Leftrightarrow d(v_i, v_j) = k$ . В лучшем случае при этом можно получить их число, для чего операцию логического сложения при возведении матрицы смежности в степень  $k$  заменяют арифметическим сложением. Сумма матриц  $\mathbf{E}^k$ ,  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ , дает матрицу  $\partial$ -ограниченной достижимости  $\mathbf{R}_\partial$ . На примере проекции (1) легко убедиться, что подмножество  $V_k$  вершин  $k$ -го уровня проекции  $P_n(v_i)$ ,  $k \leq n$ , содержит в себе только те вершины, которые соответствуют единичным значениям элементов  $e_{ij}$  матрицы  $\mathbf{E}^k$ , констатирующим наличие между  $v_i$ -й и  $v_j$ -й вершинами пути с длиной  $d(v_i, v_j) = k$ , а единичным значениям матрицы  $\mathbf{R}_\partial$  соответствуют лишь вершины, составляющие подмножество  $\bigcup_{k=1}^{\partial} V_k \subseteq V$  вершин на всех уровнях проекции вплоть до  $\partial$ -го. Заметим, что в отличие от матриц

проекцией  $P_{\partial}(v_i)$  графа не только констатируется наличие путей, но и их содержательная часть: в ней явным образом определены пути из ракурсной вершины  $v_i$  во все вершины  $k$ -х ( $k \leq \partial$ ) уровней. Понятно, что такая информация может быть получена и из матриц, но это потребует дополнительных усилий по ее выявлению и хранению промежуточных результатов перемножения матриц. Добавим, что наличие в проекции в явном виде представленной информации о маршрутах исключает необходимость достаточно трудоемкого для больших систем выявления кратчайших из них.

#### **4. Конфигурирование подсистем**

Пусть размещаемая в ВС подсистема параллельных или распределенных ресурсов задана графом  $G_1(V_1, E_1)$ , множество вершин  $V_1$  которого соответствует множеству параллельных процессов (распределенных ресурсов), а ребра  $E_1$  – информационным взаимодействиям между этими процессами (ресурсами). Пусть известны также соотношения между объемами вычислений и информационных взаимодействий. Тогда в заданной графом  $G(V, E)$  системе с известными показателями быстродействия ее вычислительных и коммуникационных элементов это соотношение трансформируемо в предельно допускаемую при конфигурировании подсистемы длину пути  $\partial$ .

Очевидно, что  $\partial < 1$  указывает на неполное совмещение обменов с вычислениями, и в соответствии со вторым законом Амдала [9] эффективность подсистемы будет низка даже при наличии в графе системы подграфа, изоморфного графу подсистемы. В этом случае размер подсистемы (число параллельных ветвей или дробность ресурсов) должны быть скорректированы с учетом избыточной временной доли обменной составляющей в последовательной доле процессорной составляющей.

При  $\partial = 1$  вложение подсистемы требует значительных усилий по выявлению в графе системы подграфа, изоморфного

информационному графу [7] подсистемы, причем чем ближе степень последнего к степени графа ВС, тем менее реализуемо вложение, превышение же ею степени графа ВС и вовсе несовместно с успешным решением этой задачи. Реализация полностью связанной структуры ВС могла бы снять проблему вложения, но технико-экономически не является адекватной.

Далее рассмотрим только  $\partial > 1$ , когда граф  $G(V, E)$  может быть дополнен ребрами, принадлежащими отношению  $\partial$ -ограниченной достижимости на множестве  $V$  вершин, – полученный таким образом граф  $G_\partial(V, E_\partial)$  назван выше графом  $\partial$ -достижимости. Если порядок найденной  $\partial$ -компоненты превышает порядок графа вкладываемой в нее подсистемы, то проблем с вложением не возникает и размещение подсистемы в ней может быть произвольным. Если же порядок компоненты меньше порядка подсистемы, то вместо исходного графа  $G(V, E)$  может быть использован граф  $G_\partial(V, E_\partial)$ , обладающий существенно большей степенью при том же порядке.

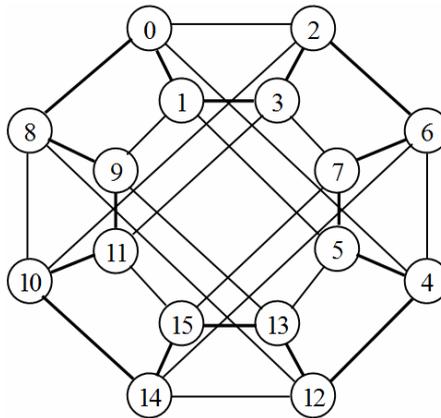


Рис. 2. Граф 1 (4-мерный гиперкуб)

Выявление введенных в разделе 1 компонент покажем далее на примерах графов 1 и 2. Граф 1 представляет традиционно

используемую в построении ВС топологию  $s$ -мерного гиперкуба; в данном случае это 4-мерный гиперкуб (рис. 2), порядок которого  $n = 16$  и обхват  $g = 4$ . Для сопоставления возможностей вложения подсистемы в схожие по параметрам (порядку, степени, обхвату) структуры нами сгенерирован<sup>1</sup> граф 2 (см. рис. 3), как и 4-куб, являющийся гамильтоновым (ребра гамильтоновых циклов, выделены на рисунках толщиной).

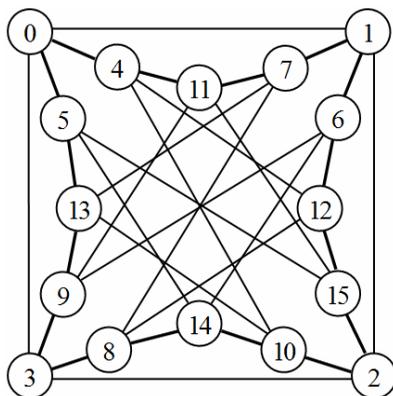


Рис. 3. Граф 2

Для рассматриваемых графов исследование варианта с  $\partial = 4$  не представляет интереса из-за совпадения с ними искомым компонент, поэтому далее исследованы случаи с  $\partial \leq 3$ . Приведенные в (2) и (3) 3-уровневые проекции описывают графы, изображенные на рис. 2 и 3. В правом столбце проекций (2) даны вершины, отсутствующие на трех их уровнях, т.е. 3-недостижимые из ракурсной вершины  $v_i$  (в проекциях (3) таких вершин нет). Оригинальные вершины соответствуют кратчайшему пути в них из ракурсной вершины  $v_i$  и даны в проекциях нормальным шрифтом. Жирным курсивом выделены реплици-

<sup>1</sup> С использованием проективных описаний при генерации графов с заданными свойствами можно ознакомиться в [4].

рованные вершины, соответствующие маршрутам, альтернативным кратчайшему.

(2)

- $P_3(0) = 0^{(1(3(2,7,11), 5(4,7,13), 9(8,11,13)), 2(3,6(4,7,14), 10(8,11,14)), 4(5,6,12(8,13,14)), 8(9,10,12))}$  15,  
 $P_3(1) = 1^{(0(2(3,6,10), 4(5,6,12), 8(9,10,12)), 3(2,7(5,6,15), 11(9,10,15)), 5(4,7,13(9,12,15)), 9(8,11,13))}$  14,  
 $P_3(2) = 2^{(0(1(3,5,9), 4(5,6,12), 8(9,10,12)), 3(1,7(5,6,15), 11(9,10,15)), 6(4,7,14(10,12,15)), 10(8,11,14))}$  13,  
 $P_3(3) = 3^{(1(0(2,4,8), 5(4,7,13), 9(8,11,13)), 2(0,6(4,7,14), 10(8,11,14)), 7(5,6,15(11,13,14)), 11(9,10,15))}$  12,  
 $P_3(4) = 4^{(0(1(3,5,9), 2(3,6,10), 8(9,10,12)), 5(1,7(3,6,15), 13(9,12)), 6(2,7,14(10,12,15)), 12(8,13,14))}$  11,  
 $P_3(5) = 5^{(1(0(2,4,8), 3(2,7,11), 9(8,11,13)), 4(0,6(2,7,14), 12(8,13,14)), 7(3,6,15(11,13,14)), 13(9,12,15))}$  10,  
 $P_3(6) = 6^{(2(0(1,4,8), 3(1,7,11), 10(8,11,14)), 4(0,5(1,7,13), 12(8,13,14)), 7(3,5,15(11,13,14)), 14(10,12,15))}$  9,  
 $P_3(7) = 7^{(3(1(0,5,9), 2(0,6,10), 11(9,10,15)), 5(1,4(0,6,12), 13(9,12,15)), 6(2,4,14(10,12,15)), 15(11,13,14))}$  8,  
 $P_3(8) = 8^{(0(1(3,5,9), 2(3,6,10), 4(5,6,12)), 9(1,11(3,10,15), 13(5,12,15)), 10(2,11,14(6,12,15)), 12(4,13,14))}$  7,  
 $P_3(9) = 9^{(1(0(2,4,8), 3(2,7,11), 5(4,7,13)), 8(0,10(2,11,14), 12(4,13,14)), 11(3,10,15(7,13,14)), 13(5,12,15))}$  6,  
 $P_3(10) = 10^{(2(0(1,4,8), 3(1,7,11), 6(4,7,14)), 8(0,9(1,11,13), 12(4,13,14)), 11(3,9,15(7,13,14)), 14(6,12,15))}$  5,  
 $P_3(11) = 11^{(3(1(0,5,9), 2(0,6,10), 7(5,6,15)), 9(1,8(0,10,12), 13(5,12,15)), 10(2,8,14(6,12,15)), 15(7,13,14))}$  4,  
 $P_4(12) = 12^{(4(0(1,2,8), 5(4,7,13), 6(2,7,14)), 8(0,9(1,11,13), 10(2,11,14)), 13(5,9,15(7,11,14)), 14(6,10,15))}$  3,  
 $P_4(13) = 13^{(5(1(0,3,9), 4(0,6,12), 7(3,6,15)), 9(1,8(0,10,12), 11(3,10,15)), 12(4,8,14(6,10,15)), 15(7,11,14))}$  2,  
 $P_3(14) = 14^{(6(2(0,3,10), 4(0,5,12), 7(3,5,15)), 10(2,8(0,9,12), 11(3,9,15)), 12(4,8,13(5,9,15)), 15(7,11,13))}$  1,  
 $P_3(15) = 15^{(7(3(1,2,11), 5(1,4,13), 6(2,4,14)), 11(3,9(1,8,13), 10(2,8,14)), 13(5,9,12(4,8,14)), 14(6,10,12))}$  0.

$$\begin{aligned}
 P_3(0) &= 0^{(1(2\{3,10,15\}, 6\{9,12,14\}, 7\{8,11,13\}), 3\{2,8\{7,12,14\}, 9\{6,11,13\}\}, 4\{10\{2,13,14\}, 11\{7,9,15\}, 12\{6,8,15\}\}, 5\{13\{7,9,10\}, 14\{6,8,10\}, 15\{2,11,12\}\}), \\
 P_3(1) &= 1^{(0(3\{2,8,9\}, 4\{10,11,12\}, 5\{13,14\}), 2(3,10\{4,13,14\}, 15\{5,11,12\}), 6(9\{3,11,13\}, 12\{4,8,15\}, 14\{5,8,10\}), 7(8\{3,12,14\}, 11\{4,9,15\}, 13\{5,9,10\})), \\
 P_3(2) &= 2^{(1(0\{3,4,5\}, 6\{9,12,14\}, 7\{8,11,13\}), 3(0,8\{7,12,14\}, 9\{6,11,13\}), 10(4\{0,11,12\}, 13\{5,7,9\}, 14\{5,6,8\}), 15(5\{0,13,14\}, 11\{4,7,9\}, 12\{4,6,8\})), \\
 P_3(3) &= 3^{(0(1\{2,6,7\}, 4\{10,11,12\}, 5\{13,14,15\}), 2(1,10\{4,13,14\}, 15\{5,11,12\}), 8(7\{1,11,13\}, 12\{4,6,15\}, 14\{5,6,10\}), 9(6\{1,12,14\}, 11\{4,7,15\}, 13\{5,7,10\})), \\
 P_3(4) &= 4^{(0(1\{2,6,7\}, 3\{2,8,9\}, 5\{13,14,15\}), 10(2\{1,3,15\}, 13\{5,7,9\}, 14\{5,6,8\}), 11(7\{1,8,13\}, 9\{3,6,13\}, 15\{2,5,12\}), 12(6\{1,9,14\}, 8\{3,7,14\}, 15)), \\
 P_3(5) &= 5^{(0(1\{2,6,7\}, 3\{2,8,9\}, 4\{10,11,12\}), 13(7\{1,8,11\}, 9\{3,6,11\}, 10\{2,4,14\}), 14(6\{1,9,12\}, 8\{3,7,12\}, 10), 15(2\{1,3,10\}, 11\{4,7,9\}, 12\{4,6,8\})), \\
 P_3(6) &= 6^{(1(0\{3,4,5\}, 2\{3,10,15\}, 7\{8,11,13\}), 9(3\{0,2,8\}, 11\{4,7,15\}, 13\{5,7,10\}), 12(4\{0,10,11\}, 8\{3,7,14\}, 15\{2,5,11\}), 14(5\{0,13,15\}, 8,10\{2,4,13\})), \\
 P_3(7) &= 7^{(1(0\{3,4,5\}, 2\{3,10,15\}, 6\{9,12,14\}), 8(3\{0,2,9\}, 12\{4,6\}, 14\{5,6,10\}), 11(4\{0,10,12\}, 9\{3,6,13\}, 15\{2,5,12\}), 13(5\{0,14,15\}, 9,10\{2,4,14\})), \\
 P_3(8) &= 8^{(0(1,4,5), 2(1,10,15), 9(6,11,13)), 7(1(0,2,6), 11(4,9,15), 13(5,9,10)), 12(4(0,10,11), 6(1,9,14), 15(2,5,11)), 14(5(0,13,15), 6,10(2,4,13)), \\
 P_3(9) &= 9^{(3(0(1,4,5), 2(1,10,15), 8(7,12,14)), 6(1(0,2,7), 12(4,8,15), 14(5,8,10)), 11(4(0,10,12), 7(1,8,13), 15(2,5,12)), 13(5(0,14,15), 7,10(2,4,14)), \\
 P_3(10) &= 10^{(2(1(0,6,7), 3(0,8,9), 15(5,11,12)), 4(0(1,3,5), 11(7,9,15), 12(6,8,15)), 13(5(0,14,15), 7(1,8,11), 9(3,6,11)), 14(5,6(1,9,12), 8(3,7,12))), \\
 P_3(11) &= 11^{(4(0(1,3,5), 10(2,13,14), 12(6,8,15)), 7(1(0,2,6), 8(3,12,14), 13(5,9,10)), 9(3(0,2,8), 6(1,12,14), 13), 15(2(1,3,10), 5(0,13,14), 12)), \\
 P_3(12) &= 12^{(4(0(1,3,5), 10(2,13,14), 11(7,9,15)), 6(1(0,2,7), 9(3,11,13), 14(5,8,10)), 8(3(0,2,9), 7(1,11,13), 14), 15(2(1,3,10), 5(0,13,14), 11)), \\
 P_3(13) &= 13^{(5(0(1,3,4), 14(6,8,10), 15(2,11,12)), 7(1(0,2,6), 8(3,12,14), 11(4,9,15)), 9(3(0,2,8), 6(1,12,14), 11), 10(2(1,3,15), 4(0,11,12), 14)), \\
 P_3(14) &= 14^{(5(0(1,3,4), 13(7,9,10), 15(2,11,12)), 6(1(0,2,7), 9(3,11,13), 12(4,8,15)), 8(3(0,2,9), 7(1,11,13), 12), 10(2(1,3,15), 4(0,11,12), 13)), \\
 P_3(15) &= 15^{(2(1(0,6,7), 3(0,8,9), 10(1,4,13)), 5(0(1,3,4), 13(7,9,10), 14(6,8,10)), 11(4(0,10,12), 7(1,8,13), 9(3,6,13)), 12(4,6(1,9,14), 8(3,7,14))}.
 \end{aligned}$$

Для выявления  $\partial_+$ -компонент в графе  $G(V, E)$  следует: найти подмножество  $V_\partial^* \subseteq V$  всех попарно  $\partial$ -достижимых в нем вершин ( $V_\partial^* = \{u, v \mid (u-v) \in R_\partial\}$ ) и выявить подмножество дополнительных вершин:  $w \in V_+^* \Leftrightarrow w \notin V_\partial^* \wedge \exists u, v \in V_\partial^* \mid w \in V_\partial(u-v)$ ; здесь  $V_\partial(u-v)$  – множество вершин, составляющих путь из  $u$  в  $v$ . Первый из этих этапов необходим и при выявлении других компонент, поэтому ниже дадим общие принципы выявления  $V_\partial^*$ , применив проективные описания из-за их наглядности и меньшей трудоемкости использования.

Известно [2], что задача о кликах графа  $G$  трансформируется в задачу о множествах независимых вершин (МНВ) переходом к дополнительному графу  $\bar{G}$ . Учитывая в проекциях графа  $G(V, E)$  лишь уровни, ограниченные сверху значением  $\partial$ , получим описание графа  $G_\partial(V, R_\partial)$  достижимости; для этого можно использовать и матрицу  $\mathbf{R}_\partial$ , получив ее либо традиционно как  $\mathbf{R}_\partial = \bigcup_{i=1}^{\partial} \mathbf{E}^i$ , либо из проекций. Матрицу  $\bar{\mathbf{R}}_\partial$  смежности дополнительного графу  $G_\partial(V, R_\partial)$  графа  $\partial$ -недостижимости  $\bar{G}_\partial(V, \bar{R}_\partial)$  получим, выявив вершины, отсутствующие на  $\partial$  уровнях проекций первого. Строки такой матрицы соответствуют ракурсным вершинам проекций, элемент  $ij$  матрицы равен единице, если вершина  $j$  недостижима их ракурсной вершины  $i$ , и нулю в противном случае. Граф  $\bar{G}_\partial(V, \bar{R}_\partial)$  будет пустым с нулевой матрицей  $\bar{\mathbf{R}}_\partial$ , если граф  $G_\partial(V, R_\partial)$  – полный. В общем случае граф  $\bar{G}_\partial(V, \bar{R}_\partial)$  может содержать и изолированные вершины, и компоненты связности. Объединение множества изолированных вершин с наибольшими независимыми множествами вершин компонент его связности и будет множеством взаимно изолированных вершин в графе  $\bar{G}_\partial(V, \bar{R}_\partial)$ , т.е. множеством вершин, составляющих искомую наибольшую клику графа  $G_\partial(V, R_\partial)$ . Задачи о кликах и о МНВ, как и методы их решения, в теории

графов достаточно давно известны, поэтому далее мы не рассматриваем детали выявления тех и других.

#### 4.1. ВЫЯВЛЕНИЕ ГЛОБАЛЬНОЙ $\partial$ -КОМПОНЕНТЫ.

Множество  $V_{\partial+}^*$  вершин, образующих компоненту  $\partial_+$ -достижимости, состоит из двух непересекающихся составляющих: из подмножества  $V_{\partial}^*$  взаимно  $\partial$ -достижимых вершин и из подмножества  $V_+^*$  вершин, составляющих пути между вершинами из  $V_{\partial}^*$ , но не принадлежащих ему. Применительно к ВС это означает, что вложение подсистемы ориентировано на использование ею адресного пространства системы в целом, не ограниченного рамками размещаемой подсистемы.

Для  $\partial = 3$  с учетом правого столбца проекций (2) множествами вершин компонент связности графа  $\bar{G}_3(V, \bar{R}_3)$  3-недостижимости являются:  $\{0, 15\}$ ,  $\{1, 14\}$ ,  $\{2, 13\}$ ,  $\{3, 12\}$ ,  $\{4, 11\}$ ,  $\{5, 10\}$ ,  $\{6, 9\}$  и  $\{7, 8\}$ . При этом подмножество  $V_3^*$ , как разница между  $V$  и перечисленными выше множествами, является пустым. Подмножества независимых вершин каждого из этих 2-элементных множеств включают в себя любую из вершин; для определенности выберем вершины «3-кубической» нумерации  $V_{3+}^* = V_3^* \cup V_+^* = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ . Расстояние между вершинами в такой компоненте равно кодовому расстоянию между их номерами, а порожденный этими вершинами подграф является гиперкубом с размерностью, на единицу меньшей исходной. Оставшиеся вершины  $V \setminus V_{3+}^* = \{8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$  также независимы. Поэтому в принятом нами варианте в графе 3-достижимости  $G_3(V, R_3)$  одновременно соседствуют две непересекающиеся клики одного порядка  $n = 8$ : клика  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  и клика  $\{8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$ . Порядок  $\partial_+$ -компоненты достижимости определен числом взаимно  $\partial$ -достижимых (основных) вершин в графе  $G(V, E)$  и не учитывает вершины, используемые

лишь для транзитов. Компонента  $3_+$ -достижимости, соответствующая выбранному МНВ, изображена на рис. 4.

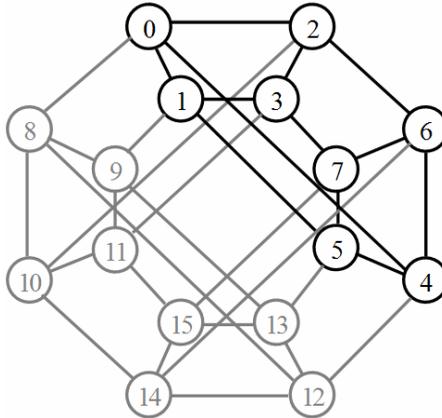


Рис. 4. Компонента  $3_+$ -достижимости графа 1

На графе (рис. 4) и в соответствующих ему проекциях (4) основные вершины, а также ребра, составляющие  $3_+$ -ограниченные пути между ними, даны черным цветом; транзитные вершины, лишь участвующие в создании таких путей, показаны серым.

$$\begin{aligned}
 P_{3_+}(0) &= 0^{(1(3(2,7), 5(4,7)), 2(3(1,7), 6(4,7)), 4(5(1,7), 6(2,7)), 8(9(1), 10(2), 11(4))), \\
 P_{3_+}(1) &= 1^{(0(2(3,6), 4(5,6)), 3(2(0,6), 7(5,6)), 5(4(0,6), 7(3,6)), 9(6(0), 11(3), 13(5))), \\
 P_{3_+}(2) &= 2^{(0(1(3,5), 4(5,6)), 3(7(0,5), 7(5,6)), 6(4(0,5), 7(3,5)), 10(6(0), 11(3), 14(6))), \\
 P_{3_+}(3) &= 3^{(1(0(2,4), 5(4,7)), 2(0(1,4), 6(4,7)), 7(5(1,4), 6(2,4)), 11(9(1), 10(2), 13(7))), \\
 P_{3_+}(4) &= 4^{(0(1(3,5), 2(3,6)), 5(7(0,3), 7(3,6)), 6(2(0,3), 7(3,5)), 12(6(0), 13(5), 14(6))), \\
 P_{3_+}(5) &= 5^{(1(0(2,4), 3(2,7)), 4(0(1,2), 6(2,7)), 7(3(1,2), 6(2,4)), 13(9(1), 12(4), 15(7))), \\
 P_{3_+}(6) &= 6^{(2(0(1,4), 3(1,7)), 4(0(1,2), 5(1,7)), 7(3(1,2), 5(1,4)), 14(0(2), 12(4), 15(7))), \\
 P_{3_+}(7) &= 7^{(3(1(0,5), 2(0,6)), 5(7(0,3), 4(0,6)), 6(2(0,3), 4(0,5)), 15(9(3), 13(5), 14(6))).
 \end{aligned}$$

Задавшись  $\partial = 2$ , исключим третий уровень из проекций (2), получив 2-уровневые проекции (5). В правый столбец этих проекций сведем 2-недостижимые из  $v_i$  вершины, составляющие

окрестность  $\overline{N}_2(v_i)$  в графе  $\overline{G}_2(V, \overline{R}_\partial)$ . Их легко получить, добавив к 3-недостижимым вершинам правого столбца проекций (2) оригинальные вершины исключаемого из них третьего уровня.

$$\begin{aligned}
 P_2(0) &= 0^{(1(3,5,9), 2(3,6,10), 4(5,6,12), 8(9,10,12))} & 7,11,13,14,15, \\
 P_2(1) &= 1^{(0(2,4,8), 3(2,7,11), 5(4,7,13), 9(8,11,13))} & 6,10,12,14,15, \\
 P_2(2) &= 2^{(0(1,4,8), 3(7,7,11), 6(4,7,14), 10(8,11,14))} & 5,9,12,13,15, \\
 P_2(3) &= 3^{(1(0,5,9), 2(0,6,10), 7(5,6,15), 11(9,10,15))} & 4,8,12,13,14, \\
 P_2(4) &= 4^{(0(1,2,8), 5(7,7,13), 6(2,7,14), 12(8,13,14))} & 3,9,10,11,15, \\
 P_2(5) &= 5^{(1(0,3,9), 4(0,6,12), 7(3,6,15), 13(9,12,15))} & 2,8,10,11,14, \\
 P_2(6) &= 6^{(2(0,3,10), 4(0,5,12), 7(3,5,15), 14(10,12,15))} & 1,8,9,11,13, \\
 P_2(7) &= 7^{(3(1,2,11), 5(1,4,13), 6(2,4,14), 15(11,13,14))} & 0,8,9,10,12, \\
 P_2(8) &= 8^{(0(1,2,4), 9(7,11,13), 10(2,11,14), 12(4,13,14))} & 3,5,6,7,15, \\
 P_2(9) &= 9^{(1(0,3,5), 8(0,10,12), 11(3,10,15), 13(5,12,15))} & 2,4,6,7,14, \\
 P_2(10) &= 10^{(2(0,3,6), 8(0,9,12), 11(3,9,15), 14(6,12,15))} & 1,4,5,7,13, \\
 P_2(11) &= 11^{(3(1,2,7), 9(1,8,13), 10(2,8,14), 15(7,13,14))} & 0,4,5,6,12, \\
 P_2(12) &= 12^{(4(0,5,6), 8(0,9,10), 13(5,9,15), 14(6,10,15))} & 1,2,3,7,11, \\
 P_2(13) &= 13^{(5(1,4,7), 9(1,8,11), 12(4,8,14), 15(7,11,14))} & 0,2,3,6,10, \\
 P_2(14) &= 14^{(6(2,4,7), 10(2,8,11), 12(4,8,13), 15(7,11,13))} & 0,1,3,5,9, \\
 P_2(15) &= 15^{(7(3,5,6), 11(3,9,10), 13(5,9,12), 14(6,10,12))} & 0,1,2,4,8.
 \end{aligned}$$

Выявить в описанном проекциями (5) графе  $\overline{G}_2(V, \overline{R}_2)$  МНВ и соответствующие  $2_+$ -компоненты достижимости графа  $G(V, E)$  не представит сложности. В данном случае любая вершина 4-куба и ее окрестность составят множество вершин искомой компоненты, кодовое расстояние любой пары вершин при этом не превысит предельного значения  $\partial = 2$ . Из взятых, к примеру, подмножеств  $V_2^* = \{0, 1, 2, 4, 8\}$  и  $V_2^* = \{3, 9, 10, 11, 15\}$  выберем первые и получим проекции (6)  $2_+$ -компоненты, изображенной на рис. 5.

$$\begin{aligned}
 P_{2+}(0) &= 0^{(1,2,4,8)}, \\
 P_{2+}(1) &= 1^{(0(2,4,8), (2), (4), (8))}, \\
 (6) \quad P_{2+}(2) &= 2^{(0(1,4,8), (1), (4), (8))}, \\
 P_{2+}(4) &= 4^{(0(1,2,8), (1), (2), (8))}, \\
 P_{2+}(8) &= 8^{(0(1,2,4), (1), (2), (4))}.
 \end{aligned}$$

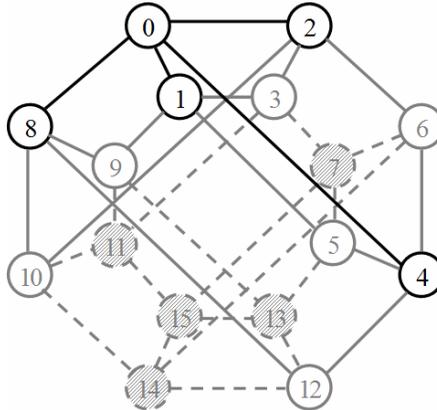


Рис. 5.  $2_+$ -компонента графа 1

Дополнительными вершинами компоненты являются «серые» вершины проекций (6) –  $V_+^* = \{3, 5, 6, 9, 10, 12\}$ . Они входят в состав разрешенных по длине путей между основными вершинами из  $V_2^* = \{0, 1, 2, 4, 8\}$ . Остальные вершины, как и инцидентные им ребра, не входят состав разрешенных путей между основными вершинами и не имеют отношения к  $2_+$ -компоненте достижимости. Эти ребра показаны штриховыми линиями, а вершины заштрихованы.

Рассмотрим 3-уровневые проекции (3) второго из исследуемых графов (рис. 3). Из проекций видно, что все 16 вершин графа взаимно 3-достижимы, граф 3-достижимости является полным, и вложение в него любой подсистемы соответствующего порядка может быть произвольным.

$$\begin{aligned}
 P_2(0) &= 0^{(1(2,6,7), 3(\mathbf{2},8,9), 4(10,11,12), 5(13,14,15))}, \\
 P_2(1) &= 1^{(0(3,4,5), 2(\mathbf{3},10,15), 6(9,12,14), 7(8,11,13))}, \\
 P_2(2) &= 2^{(1(0,6,7), 3(\mathbf{0},8,9), 10(4,13,14), 15(5,11,12))}, \\
 P_2(3) &= 3^{(0(1,4,5), 2(\mathbf{1},10,15), 8(7,12,14), 9(6,11,13))}, \\
 P_2(4) &= 4^{(0(1,3,5), 10(2,13,14), 11(7,9,15), 12(6,8,\mathbf{15}))}, \\
 P_2(5) &= 5^{(0(1,3,4), 13(7,9,10), 14(6,8,\mathbf{10}), 15(2,11,12))}, \\
 P_2(6) &= 6^{(1(0,2,7), 9(3,11,13), 12(4,8,15), 14(5,\mathbf{8},10))}, \\
 P_2(7) &= 7^{(1(0,2,6), 8(3,12,14), 11(4,9,15), 13(5,\mathbf{9},10))}, \\
 P_2(8) &= 8^{(3(0,2,9), 7(1,11,13), 12(4,6,15), 14(5,\mathbf{6},10))}, \\
 P_2(9) &= 9^{(3(0,2,8), 6(1,12,14), 11(4,7,15), 13(5,\mathbf{7},10))}, \\
 P_2(10) &= 10^{(2(1,3,15), 4(0,11,12), 13(5,7,9), 14(\mathbf{5},6,8))}, \\
 P_2(11) &= 11^{(4(0,10,12), 7(1,8,13), 9(3,6,\mathbf{13}), 15(2,5,\mathbf{12}))} \quad 14, \\
 P_2(12) &= 12^{(4(0,10,11), 6(1,9,14), 8(3,7,\mathbf{14}), 15(2,5,\mathbf{11}))} \quad 13, \\
 P_2(13) &= 13^{(5(0,14,15), 7(1,8,11), 9(3,6,\mathbf{11}), 10(2,4,\mathbf{14}))} \quad 12, \\
 P_2(14) &= 14^{(5(0,13,15), 6(1,9,12), 8(3,7,\mathbf{12}), 10(2,4,\mathbf{13}))} \quad 11, \\
 P_2(15) &= 15^{(2(1,3,10), 5(0,13,14), 11(4,7,9), 12(\mathbf{4},6,8))}.
 \end{aligned}$$

Отбросив третий уровень проекций (3), получим 2-уровневые проекции (7). Справа от проекций приведены окрестности 2-недостижимости ракурсных вершин. Из проекций ясно, что граф 2-недостижимости  $\bar{G}_2(V, \bar{R}_2)$  состоит из одиннадцати изолированных вершин (с 0-й по 10-ю) и двух компонент из смежных вершин:  $\{11, 14\}$  и  $\{12, 13\}$ . Выбор независимых в паре смежных вершин может быть произвольным, выбираем вершины 13 и 14. Удалив при этом из проекций (7) вершины 11 и 12, получим проекции (8). Наибольшим МНВ при этом является  $V_2^* = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 13, 14, 15\}$ , оно составляет максимальную клику графа 2<sub>+</sub>-достижимости; проекции искомой 2<sub>+</sub>-компоненты приведены в (8). Заметим, что порядок  $n = 14$  этой компоненты, изображенной на рис. 6, более чем в 2,5 раза превышает порядок  $n = 5$  2<sub>+</sub>-компоненты рассмотренного ранее 4-куба. Таким образом, возможности адекватного вложения совместно функционирующих ресурсов в ВС представлен-

ной графом 2 имеет существенные преимущества перед ВС с традиционно используемой структурой 4-куба.

$$\begin{aligned}
 P_{2+}(0) &= 0^{(1(2,6,7),3(2,8,9),4(10),5(13,14,15))}, \\
 P_{2+}(1) &= 1^{(0(3,4,5),2(3,10,15),6(9,14),7(8,13))}, \\
 P_{2+}(2) &= 2^{(1(0,6,7),3(0,8,9),10(4,13,14),15(5))}, \\
 P_{2+}(3) &= 3^{(0(1,4,5),2(7,10,15),8(7,14),9(6,13))}, \\
 P_{2+}(4) &= 4^{(0(1,3,5),10(2,13,14),11(7,9,15),12(6,8,15))}, \\
 P_{2+}(5) &= 5^{(0(1,3,4),13(7,9,10),14(6,8,10),15(2))}, \\
 P_{2+}(6) &= 6^{(1(0,2,7),9(3,13),12(4,8,15),14(5,8,10))}, \\
 P_{2+}(7) &= 7^{(1(0,2,6),8(3,14),1(4,9,15),13(5,9,10))}, \\
 P_{2+}(8) &= 8^{(3(0,2,9),7(1,13),12(4,6,15),14(5,6,10))}, \\
 P_{2+}(9) &= 9^{(3(0,2,8),6(1,14),1(4,7,15),13(5,7,10))}, \\
 P_{2+}(10) &= 10^{(2(1,3,15),4(0),13(5,7,9),14(5,6,8))}, \\
 P_{2+}(13) &= 13^{(5(0,14,15),7(1,8),9(3,6),10(2,4,14))}, \\
 P_{2+}(14) &= 14^{(5(0,13,15),6(1,9),8(3,7),10(2,4,13))}, \\
 P_{2+}(15) &= 15^{(2(1,3,10),5(0,13,14),1(4,7,9),12(4,6,8))}.
 \end{aligned}$$

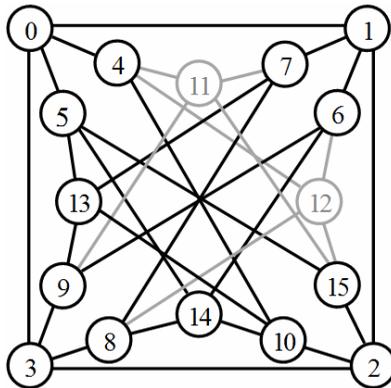


Рис. 6. 2+-компонента графа 2

Итак, суть алгоритма выявления глобальной компоненты  $\delta$ -достижимости в графе  $G(V, E)$  состоит в следующем:

1. Строим систему  $n = |V|$   $\delta$ -уровневых проекций  $P_\delta(v_i)$  графа  $G(V, E)$ , определяющих граф  $\delta$ -достижимости  $G_\delta(V, R_\delta)$ .

2. В проекциях  $P_\delta(v_i)$  выявляем подмножества  $\overline{V}_\delta(v_i)$  вершин,  $\delta$ -недостижимых из соответствующих ракурсных вершин  $v_i$ :  $\overline{V}_\delta(v_i) = V \setminus V_\delta(v_i)$ .

3. Используя полученные в п. 2  $\overline{V}_\delta(v_i)$ , строим матрицу  $\overline{R}_\delta$  смежности графа  $\delta$ -недостижимости  $\overline{G}_\delta(V, \overline{R}_\delta)$  и выявляем в нем наибольшее МНВ. Входящие состав этого МНВ вершины образуют искомое подмножество  $V_\delta^*$ , порождающих клику графа  $\delta$ -достижимости  $G_\delta(V_\delta^*, R_\delta)$ .

4. Проекции  $P_{\delta+}^*$  искомой компоненты  $\delta_+$ -достижимости  $G_{\delta+}^*(V_{\delta+}^*, E_{\delta+}^*)$  получаем последовательным (от  $j = \delta$  до  $j = 1$ ) исключением из каждого  $j$ -го уровня проекций  $\{P_\delta(v_i) | v_i \in V_\delta^*\}$  вершин, не принадлежащих  $V_\delta^*$  (для  $j \leq \delta$ ) и не имеющих продолжения на  $(j + 1)$ -м уровне (для  $j \leq \delta - 1$ ) проекции, полученной на предыдущем шаге. Вершины, остающиеся таким образом в результирующих проекциях  $P_{\delta+}^*$  (при  $j = 1$ ), но не принадлежащие  $V_\delta^*$ , являются дополнительными и образуют  $V_+^*$ .

#### 4.2. ОРГАНИЗАЦИЯ ЛОКАЛЬНОЙ ПОДСИСТЕМЫ В ВС

Рассмотрим размещение подсистемы, использующее для информационного взаимодействия только элементы вкладываемой подсистемы. При этом элементы, не принадлежащие размещаемой подсистеме, не могут быть использованы ею даже в качестве транзитных, что соответствует данному в разделе 1 определению  $\delta$ -компоненты, выделяющей в графе  $G(V, E)$  максимальный связный подграф  $G_{\delta-}^*(V_{\delta-}^*, E_{\delta-}^*)$  с диаметром  $d(G_{\delta-}^*)$ , не превышающим заданного предельного значения:  $\forall u, v \in V_{\delta-}^*, d(u, v) \leq \delta$ . Выявление  $\delta$ -компонент рассмотрим для

тех же графов, что и выше: граф 1 (рис. 2) и граф 2 (рис. 3), проекции – (2) и (3) соответственно; используем при этом и полученные в предшествующем подразделе  $\partial_+$ -компоненты.

Из проекций (4)  $3_+$ -компонент достижимости (рис. 4), а также из проекций (6)  $2_+$ -компонент достижимости (рис. 5) 4-куба видно, что изъятие показанных серым цветом неосновных (транзитных) вершин не приводит к потере основных, так как вершины, порожденные неосновными, являются не оригинальными, а всего лишь их репликами (выделены в проекциях жирным курсивом). Таким образом, множества основных вершин  $\partial_+$ -компонент рассматриваемого 4-куба совпадают с множествами вершин  $\partial_-$ -компонент. Различие компонент состоит в том, что в дополнение к путям, составленным из ребер, показанных черным цветом и принадлежащих отношениям смежности лишь на множестве основных вершин, в  $\partial_+$ -компоненте используются и иные пути (их ребра и вершины этих путей на рисунках показаны серым).

В проекциях (3) графа 2 нет 3-недостижимых вершин, и в отличие от 4-куба граф  $G_3(V, R_3) \equiv K_{16}$  – полный. Все вершины 3-компоненты графа  $G(V, E)$  являются основными ( $V_{3-}^* = V_{3+}^* = V$ ), порядки  $n_{3+} = n_{3-} = n = 16$ , и незадействованные ребра отсутствуют. Далее рассмотрим выявление 2-компоненты для этого графа, используя при этом проекции (7).

В отличие от (8), полученной в результате изъятия из проекций (7) вершин 11 и 12, при получении проекций (9) следует учесть, что если среди удаляемых из проекции вершин, включая и те, что порождены изымаемой вершиной, находится оригинальная, но при этом остается ее реплика, то эта реплика переводится в разряд оригинальных вершин. В (9) это видно из проекций  $P_2(6) - P_2(9)$ .

$$\begin{aligned}
 P_2(0) &= 0^{(1(2,6,7), 3(\mathbf{2},8,9), 4(10), 5(13,14,15))}, \\
 P_2(1) &= 1^{(0(3,4,5), 2(\mathbf{3},10,15), 6(9,14), 7(8,13))}, \\
 P_2(2) &= 2^{(1(0,6,7), 3(\mathbf{0},8,9), 10(4,13,14), 15(5))}, \\
 P_2(3) &= 3^{(0(1,4,5), 2(\mathbf{1},10,15), 8(7,14), 9(6,13))}, \\
 P_2(4) &= 4^{(0(1,3,5), 10(2,13,14))} && 6, 7, 8, 9, 15, \\
 P_2(5) &= 5^{(0(1,3,4), 13(7,9,10), 14(6,8,\mathbf{10}), 15(2))}, \\
 (9) \quad P_2(6) &= 6^{(1(0,2,7), 9(3,13), 14(5,8,10))} && 4, 15, \\
 P_2(7) &= 7^{(1(0,2,6), 8(3,14), 13(5,9,10))} && 4, 15, \\
 P_2(8) &= 8^{(3(0,2,9), 7(1,13), 14(5,6,10))} && 4, 15, \\
 P_2(9) &= 9^{(3(0,2,8), 6(1,14), 13(5,7,10))} && 4, 15, \\
 P_2(10) &= 10^{(2(1,3,15), 4(0), 13(5,7,9), 14(\mathbf{5},6,8))}, \\
 P_2(13) &= 13^{(5(0,14,15), 7(1,8,11), 9(3,6,\mathbf{11}), 10(2,4,\mathbf{14}))}, \\
 P_2(14) &= 14^{(5(0,13,15), 6(1,9,12), 8(3,7,\mathbf{12}), 10(2,4,\mathbf{13}))}, \\
 P_2(15) &= 15^{(2(1,3,10), 5(0,13,14))} && 4, 6, 7, 8, 9.
 \end{aligned}$$

Построив из (9) граф  $\overline{G}_2(V, \overline{R}_2)$ , определим его МНВ (без изолированных вершин):  $\{6, 7, 8, 9\}$ . Исключив из (9) не входящие в МНВ вершины  $\{4, 15\}$ , получим проекции (10):

$$\begin{aligned}
 P_2(0) &= 0^{(1(2,6,7), 3(\mathbf{2},8,9), 5(13,14))} && 10, \\
 P_2(1) &= 1^{(0(3,5), 2(\mathbf{3},10), 6(9,14), 7(8,13))}, \\
 P_2(2) &= 2^{(1(0,6,7), 3(\mathbf{0},8,9), 10(13,14))} && 5, \\
 P_2(3) &= 3^{(0(1,5), 2(\mathbf{1},10), 8(7,14), 9(6,13))}, \\
 P_2(5) &= 5^{(0(1,3), 13(7,9,10), 14(6,8,\mathbf{10}))} && 2, \\
 (10) \quad P_2(6) &= 6^{(1(0,2,7), 9(3,13), 14(5,8,10))}, \\
 P_2(7) &= 7^{(1(0,2,6), 8(3,14), 13(5,9,10))}, \\
 P_2(8) &= 8^{(3(0,2,9), 7(1,13), 14(5,6,10))}, \\
 P_2(9) &= 9^{(3(0,2,8), 6(1,14), 13(5,7,10))}, \\
 P_2(10) &= 10^{(2(1,3), 13(5,7,9), 14(\mathbf{5},6,8))} && 0, \\
 P_2(13) &= 13^{(5(0,14), 7(1,8,11), 9(3,6,\mathbf{11}), 10(2,\mathbf{14}))}, \\
 P_2(14) &= 14^{(5(0,13), 6(1,9,12), 8(3,7,\mathbf{12}), 10(2,\mathbf{13}))}.
 \end{aligned}$$

Как и в (7), в графе  $\overline{G}_2(V, \overline{R}_2)$ , заданном вершинами правого столбца проекций (10), имеются две компоненты связности с вершинами  $\{0, 10\}$  и  $\{2, 5\}$ . Удалив из (10) вершины 2 и 10,

получим (11) с пустым правым столбцом, что указывает на отсутствие в описанном проекциями графе 2-недостижимых вершин. Этот граф является искомой 2.-компонентой порядка  $n_2 = 10$  и изображен на рис. 7.

$$(11) \begin{aligned} P_{2-}(0) &= 0^{(1(2,6,7),3(8,9),5(13,14))}, \\ P_{2-}(1) &= 1^{(0(3,5),6(9,14),7(8,13))}, \\ P_{2-}(3) &= 3^{(0(1,5),8(7,14),9(6,13))}, \\ P_{2-}(5) &= 5^{(0(1,3),13(7,9),14(6,8))}, \\ P_{2-}(6) &= 6^{(1(0,7),9(3,13),14(5,8))}, \\ P_{2-}(7) &= 7^{(1(0,6),8(3,14),13(5,9))}, \\ P_{2-}(8) &= 8^{(3(0,9),7(1,13),14(5,6))}, \\ P_{2-}(9) &= 9^{(3(0,8),6(1,14),13(5,7))}, \\ P_{2-}(13) &= 13^{(5(0,14),7(1,8,11),9(3,6,11))}, \\ P_{2-}(14) &= 14^{(5(0,13),6(1,9,12),8(3,7,12))}. \end{aligned}$$

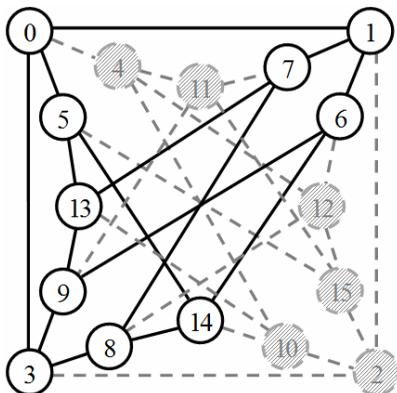


Рис. 7. 2.-компонента графа 2

В отличие от алгоритма выявления глобальных  $\partial$ -компонент, выявление локальных  $\partial$ -компонент после выполнения пункта 3 становится рекурсивным и несет в себе следующие изменения:

4. Из полученных в п. 3 проекций  $P_{\partial}^*$  исключаем вершины, не принадлежащие  $V_{\partial}^*$ . При этом часть вершин  $V_{\partial}^*$ , порожден-

ных вершинами, исключаемыми на нижерасположенных уровнях проекций, также будет исключена. Эти вершины составят новые подмножества вершин,  $\partial$ -недостижимых из ракурсных.

5. Если подмножества, полученные в п. 4, пусты, то полученные там же проекции определяют искомую  $\partial$ -компоненту, и работа алгоритма завершена. Иначе – для полученных в п. 4 новых проекций  $P_{\partial}^*$  и подмножеств  $V_{\partial}^*$  выполняется п. 3.

### *4.3. РАЗМЕЩЕНИЕ ПОДСИСТЕМЫ С УЧЕТОМ СОЕДИНИМОСТИ ВЕРШИН В ГРАФЕ ВС.*

Потребность адекватного в отношении отказоустойчивости размещения подсистемы естественным образом смыкается с необходимостью сохранения в ней требуемых коммуникационных характеристик при возникновении отказов. Выше даны понятия  $\partial$ -ограниченных компонент графа ВС и проиллюстрировано их выявление. Исключение из проекции  $\partial$ -компоненты тех вершин, кратность которых менее допускаемой в подсистеме кратности  $k$  отказов, позволит выявить в графе множество  $\partial(k)$ -достижимых вершин. Часть вершин этого множества, попарно соединенных друг с другом не менее чем  $k$   $\partial$ -ограниченными путями, составляют основу  $\partial(k)$ -компоненты. Как видно из подразделов 4.1 и 4.2, локальные компоненты достижимости обладают худшими возможностями для адекватного вложения в них подсистем, поэтому, говоря далее о  $\partial(k)$ -компонентах, мы будем иметь в виду обеспечение  $k$ -соединимости вершин в  $\partial_+$ -компонентах графа ВС. Демонстрируя их выявление на тех же примерах при  $k = 2$ , используем при этом найденные  $\partial_+$ -компоненты.

Напомним, что кратность  $t(u)$  вершины  $u$  равна числу путей в нее из ракурсной вершины  $v_i$ , описанных проекцией  $P_{\partial}(v_i)$ . Вершины, не соответствующие требованию  $k$ -соединимости (число реплик меньше  $k - 1$ ) с вершиной  $v_i$  проекции  $P_{\partial}(v_i)$ ,

следует исключить из этой проекции, считая их  $\partial(k)$ -недостижимыми. При  $k = 2$  наличие хотя бы одной реплики вершины  $u$  в проекции  $P_3(v_i)$  указывает на соответствие требованию 2-соединимости вершин  $u$  и  $v_i$  (при условии независимости путей). Анализируя проекции (4) 3-компоненты достижимости 4-куба, заметим, что все основные (не серые) ее вершины помимо оригинальных экземпляров имеют выделенные полужирным курсивом реплики. Таким образом, модифицированные для  $k = 2$  проекции  $P_3(v_i)$  останутся неизменными, и компонента 3(2)-достижимости 4-куба совпадет с его 3-компонентой достижимости, показанной на рис. 4.

Модифицировав проекции (3) в соответствии с требованием 2-соединимости получим (12). Учитывая приведенные в правом столбце 3-недостижимые и/или 2-несоединимые вершины, получим граф 3(2)-недостижимости, состоящий из четырёх изолированных вершин  $\{11, 12, 13, 14\}$  и двух компонент связности, представляющих собой 2-регулярные циклы:  $\{0, 4, 10, 2, 15, 5\}$  и  $\{1, 6, 9, 3, 8, 7\}$  (вершины в этих циклах упорядочены в отношении их смежности). Наибольшие МНВ в таком графе имеют постоянную составляющую из перечисленных изолированных вершин и две составляющие по 3 вершины из каждого цикла: как один из вариантов такого МНВ –  $\{11, 12, 13, 14, 2, 4, 5, 1, 9, 8\}$ . Эти вершины и составят основу (множество основных вершин) компоненты 2-соединимых вершин, обладающих свойством 3-достижимости. Проекция этой компоненты приведены в (13), а получаемая с их помощью 3(2)-компонента достижимости изображена на рис. 8.

$$\begin{aligned}
 P_3(0) &= 0^{(2(31015), 6(91214), 7(81113), 3(211015), 8(71214), 9(61113), 4(10(21314), 11(7,915), 12(6,815), 13(7,910), 14(6,810), 15(211,12))} & 4,5 \\
 P_3(1) &= 1^{(0(3(2,8,9), 4(1011,12), 5(1314)), 2(3(0,8,9), 10(41314), 13(511,12), 6(9(311,13), 12(4,815), 14(5,810), 7(8(31214), 11(4,915), 13(5,910)))} & 6,7, \\
 P_3(2) &= 2^{(0(3,4,5), 6(91214), 7(81113), 3(0(1,4,5), 8(71214), 9(61113), 10(4(011,12), 13(5,7,9), 14(5,6,8), 15(5(01314), 11(4,7,9), 12(4,6,8)))} & 10,15, \\
 P_3(3) &= 3^{(0(1(2,6,7), 4(1011,12), 5(131415)), 2(7(0,6,7), 10(41314), 13(511,12), 8(7(1,11,13), 12(4,6,15), 14(5,6,10), 9(6(1,12,14), 11(4,7,15), 13(5,7,10)))} & 8,9, \\
 P_3(4) &= 4^{(0(1(2,6,7), 3(2,8,9), 5(131415)), 10(2(1,315), 13(5,7,9), 14(5,6,8), 11(7(1,813), 9(3,613), 15(2,512), 12(6(1,914), 8(3,714), 15(2,511)))} & 0,10, \\
 P_3(5) &= 5^{(0(1(2,6,7), 3(2,8,9), 4(1011,12), 13(7(1,811), 9(3,611), 10(2,414), 14(6(1,912), 8(3,712), 10(2,413), 13(2(1,310), 11(4,7,9), 12(4,6,8)))} & 0,15, \\
 P_3(6) &= 6^{(0(3,4,5), 2(31015), 7(81113), 9(3(0,2,8), 11(4,7,15), 13(5,7,10), 12(4(01011), 8(3,714), 13(2,511), 14(5(01315), 8(3,712), 10(2,413)))} & 1,9, \\
 P_3(7) &= 7^{(0(3,4,5), 2(31015), 6(91214), 8(3(0,2,9), 12(4,6), 14(5,6,10), 11(4(01012), 9(3,613), 13(2,512), 13(5(01415), 9(3,611), 10(2,414)))} & 1,8, \\
 P_3(8) &= 8^{(0(1,4,5), 2(11015), 9(61113), 7(1(0,2,6), 11(4,915), 13(5,910), 12(4(01011), 6(1,914), 15(2,511), 14(3(01315), 6(1,912), 10(2,413)))} & 3,7, \\
 P_3(9) &= 9^{(0(1,4,5), 2(11015), 8(71214), 6(1(0,2,7), 12(4,815), 14(5,810), 11(4(01012), 7(1,813), 13(2,512), 13(5(01415), 7(1,811), 10(2,414)))} & 3,6, \\
 P_3(10) &= 10^{(0(0,6,7), 3(0,8,9), 13(511,12), 4(0(1,3,5), 11(7,915), 12(6,815), 13(5(01415), 7(1,811), 9(3,611), 14(5(01315), 6(1,912), 8(3,712)))} & 2,4, \\
 P_3(11) &= 11^{(4(0(1,3,5), 10(21314), 12(6,815)), 7(1(0,2,6), 8(31214), 13(5,910), 9(3(0,2,8), 6(1,1214), 13(5,710), 15(2(1,310), 5(01314), 12(4,6,8)))} & \\
 P_3(12) &= 12^{(4(0(1,3,5), 10(213,14), 11(7,915)), 6(1(0,2,7), 9(311,13), 14(5,810), 8(3(0,2,9), 7(1,11,13), 14(5,610), 15(2(1,310), 5(01314), 11(4,7,9)))} & \\
 P_3(13) &= 13^{(0(1,3,4), 14(6,810), 15(211,12)), 7(1(0,2,6), 8(31214), 11(4,915), 9(3(0,2,8), 6(1,1214), 11(4,7,15), 10(2(1,315), 4(011,12), 14(5,6,8)))} & \\
 P_3(14) &= 14^{(0(1,3,4), 13(7,910), 15(211,12)), 6(1(0,2,7), 9(311,13), 12(4,815), 8(3(0,2,9), 7(1,11,13), 12(4,6,15), 10(2(1,315), 4(011,12), 13(5,7,9)))} & \\
 P_3(15) &= 15^{(0(0,6,7), 3(0,8,9), 10(1,413), 5(0(1,3,4), 13(7,910), 14(6,810), 11(4(01012), 7(1,813), 9(3,613), 12(4(01011), 6(1,914), 8(3,714)))} & 2,5.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_{3(2)}(1) &= 1^{(0(3(2,8,9), 4(11,12), 5(13,14)), 2(3(8,9), 10(4,13,14), 15(5,11,12)), 6(9(11,13), 12(4,8), 14(5,8)), 7(8(12,14), 11(4,9), 13(5,9))), \\
 P_{3(2)}(2) &= 2^{(0(0(4,5), 6(9,12,14), 7(8,11,13)), 3(0(1,4,5), 8(12,14), 9(11,13)), 10(4(11,12), 13(5,9), 14(5,8)), 15(5(13,14), 11(4,9), 12(4,6))), \\
 P_{3(2)}(4) &= 4^{(0(0(2), 3(2,8,9), 5(13,14)), 10(2(1), 13(5,9), 14(5,8)), 11(7(1,8,13), 9(13), 15(2,5,12)), 12(6(1,9,14), 8(14), 15(2,5,11))), \\
 P_{3(2)}(5) &= 5^{(0(0(2), 3(2,8,9), 4(11,12)), 13(7(1,8,11), 9(11), 10(2,4,14)), 14(6(1,9,12), 8(12), 10(2,4,13)), 15(2(1), 11(4,9), 12(4,8))), \\
 P_{3(2)}(8) &= 8^{(3(0(1,4,5), 2(1), 9(11,13)), 7(0(2), 11(4,9), 13(5,9)), 12(4(11), 6(1,9,14), 15(2,5,11)), 14(5(13), 6(1,9,12), 10(2,4,13))), \\
 P_{3(2)}(9) &= 9^{(3(0(1,4,5), 2(1), 8(12,14)), 6(0(2), 12(4,8), 14(5,8)), 11(4(12), 7(1,8,13), 15(2,5,12)), 13(5(14), 7(1,8,11), 10(2,4,14))), \\
 P_{3(2)}(11) &= 11^{(4(0(1,5), 10(2,13,14), 12(8)), 7(0(2), 8(12,14), 13(5,9)), 9(3(2,8), 6(1,12,14), 13(5)), 15(2(1), 5(13,14), 12(4,8))), \\
 P_{3(2)}(12) &= 12^{(4(0(1,5), 10(2,13,14), 11(9,15)), 6(0(2), 9(11,13), 14(5,8)), 8(3(2,9), 7(1,11,13), 14(5)), 15(2(1), 5(13,14), 11(4,9))), \\
 P_{3(2)}(13) &= 13^{(5(0(1,4), 14(8), 15(2,11,12)), 7(0(2), 8(12,14), 11(4,9)), 9(3(2,8), 6(1,12,14), 11(4)), 10(2(1), 4(11,12), 14(5,8))), \\
 P_{3(2)}(14) &= 14^{(5(0(1,4), 13(9), 15(2,11,12)), 6(0(2), 9(11,13), 12(4,8)), 8(3(2,9), 7(1,11,13), 12(4)), 10(2(1), 4(11,12), 13(5,9))).
 \end{aligned}$$

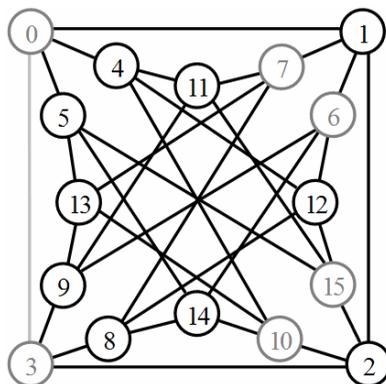


Рис. 8. 3(2)-компонента графа 2

Вновь обратившись к алгоритму выявления  $\partial_+$ -компонент, используем его для выявления  $\partial(k)$ -компоненты, отвечающей требованиям  $\partial$ -достижимости и  $k$ -соединимости вершин. При этом п. 2 этого алгоритма дополним следующим образом:

2. В проекциях  $P_\partial(v_i)$  выявляем подмножества  $\overline{V}_\partial(v_i)$  вершин,  $\partial$ -недостижимых из соответствующих ракурсных вершин  $v_i$ :  $\overline{V}_\partial(v_i) = V \setminus V_\partial(v_i)$ . Подмножества  $\overline{V}_\partial(v_i)$  расширяем вершинами из  $\overline{V}_k(v_i)$ , кратность которых в соответствующих проекциях менее  $k$  (число реплик таких вершин в проекции менее  $k - 1$ ), получив при этом  $\overline{V}_{\partial(k)}(v_i) = \overline{V}_\partial(v_i) \cup \overline{V}_k(v_i)$ . Пункты 3 и 4 алгоритма при этом остаются неизменными, но их реализация основана уже на использовании подмножества  $\overline{V}_{\partial(k)}(v_i)$ , объединяющего в себе  $\partial$ -недостижимые и  $k$ -несоединимые вершины.

## 5. Заключение

Известно, что абсолютная адекватность вложения подсистемы в вычислительную систему могла бы быть достигнута выявлением в графе ВС подграфа, изоморфного графу вкладываемой в нее подсистемы. Однако, во-первых, эта задача являет-

ся NP-полной со всеми вытекающими последствиями для достоверности и времени ее решения, неполиномиально растущим с увеличением размера ВС. Во-вторых, для произвольных схем информационных взаимодействий наличие таких подграфов возможно только в полном графе ВС, что для больших систем не является оправданным ни технически, ни экономически.

Одним из основных требований, предъявляемым к подсистемам, реализующим те или иные прикладные (или системные) задачи, является актуальность их решения. Отсюда вытекает и требование актуальности взаимодействия ресурсов подсистемы, которое с учетом коммуникационной производительности ВС может быть выражено в граничных значениях длины и числа маршрутов между вершинами подсистемы. В таком случае информационную модель ВС можно представить графом, отношения смежности вершин в котором удовлетворяют допускаемым размещаемой подсистемой требованиям.

В изложенном подходе выявление в графе ВС компоненты, все вершины которой при обусловленных размещаемой подсистемой ограничениях на длину и число путей между ними попарно достижимы, позволяет перейти к произвольному вложению. В работе введены формальные определения локальной и глобальной компонент, лимитированных достижимостью и соединимостью вершин, предложен и проиллюстрирован основанный на проективном описании графа способ их выявления.

Результаты работы могут быть полезными не только в алгоритмическом обеспечении функционирования ВС, – порядок  $\partial$ - и  $\partial(k)$ -компонент может служить критерием оптимизации выбора и генерации топологической составляющей ее архитектуры.

### **Литература**

1. БАРСКОВ А. *После ста* // Журнал сетевых решений LAN. – 2011. - №11. – С. 49-53.
2. КРИСТОФИДЕС Н. *Теория графов. Алгоритмический подход*. - М.: Мир, 1978. – 432 с.

3. МАККОНЕЛЛ ДЖ. *Основы современных алгоритмов*: 2-е изд. - М.: Техносфера, 2004. – 368 с.
4. МЕЛЕНТЬЕВ В.А. *Аналитический подход к синтезу регулярных графов с заданными значениями порядка, степени и обхвата* // Прикладная дискретная математика. - 2010. – №2(8). - С. 74-86
5. МЕЛЕНТЬЕВ В.А. *Метрика, цикломатика и синтез топологии систем и сетей связи* // Труды Шестой межд. конф. «Параллельные вычисления и задачи управления» РАСО'2012, Москва, 24–26 окт. 2012 г. – М.: ИПУ РАН, 2012. – Т. 3. – С. 10-25.
6. МЕЛЕНТЬЕВ В.А. *Функция структурной отказоустойчивости и d-ограниченная компонента связности графа вычислительной системы* // Прикладная дискретная математика. – 2008. – №2(2). – С. 102-106.
7. РЕШЕТНЯК Ю.Г. *О задаче соединения элементов вычислительной системы* // Вычислительные системы. - 1962. – Вып. 3. - С. 17–32.
8. ХАРАРИ Ф. *Теория графов*. – М.: Мир, 1973. – 300 с.
9. AMDAHL G.M. *Validity of the single-processor approach to achieving large scale computing capabilities* // Proc. AFIPS Conference, Atlantic City, N.J., Apr. 18-20. – AFIPS Press, Reston, Va. – 1967. - Vol. 30. – P. 483-485.

## **EMBEDDING OF SUBSYSTEMS LIMITING LENGTH AND NUMBER OF PATHS BETWEEN VERTEXES OF COMPUTING SYSTEM GRAPH**

**Victor Melentiev**, Rzhanov Institute of Semiconductor Physics Siberian Branch of RAS, Novosibirsk, Cand. Sc., senior research associate (melva@isp.nsc.ru).

*Abstract: We consider a problem of detecting computing system graph components which correspond to the embeddable computing subsystem with respect to reachability and connectivity of its vertexes, and suggest the method of such components' detection based on projective description of graphs. The approach is illustrated with examples of components' detection.*

Keywords: reachability and connectivity of vertexes of the graph, embedding a subsystem into the computing system.

*Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии М.В. Губко*

*Поступила в редакцию 12.07.2013.*

*Опубликована 31.01.2014.*