

**Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН**

УПРАВЛЕНИЕ БОЛЬШИМИ СИСТЕМАМИ

Выпуск 49
Май 2014

**СБОРНИК
ТРУДОВ**

ISSN 1819-2467

Регистрационный номер Эл. №ФС77-44158 от 09 марта 2011 г.

Москва – 2014

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова

**УПРАВЛЕНИЕ
БОЛЬШИМИ
СИСТЕМАМИ**

СБОРНИК ТРУДОВ

Выпуск 49

Москва – 2014

КООРДИНАЦИОННЫЙ СОВЕТ

Академики РАН: Васильев С.Н., Емельянов С.В., Куржанский А.Б., Федосов Е.А., Черноусько Ф.Л.; члены-корреспонденты РАН: Желтов С.Ю., Калаяев И.А., Пархоменко П.П., Попков Ю.С.; д-ра техн. наук: Дорофеюк А.А., Кузнецов О.П., Кульба В.В., Кротов В.Ф., Лотоцкий В.А., Павлов Б.В., Поляк Б.Т., Рутковский В.Ю.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор: член-корр. РАН Новиков Д.А. **Отв. секретарь:** канд. техн. наук Губко М.В. **Редактор:** канд. техн. наук Квинто Я.И. **Техн. редактор:** канд. техн. наук Куливец С.Г.

Д-ра техн. наук: проф. Алескеров Ф.Т. (ГУ ВШЭ), проф. Артамонов Е.И. (ИПУ РАН), д-р экон. наук, проф. Архипова М.Ю. (ИПИ РАН), д-ра техн. наук: проф. Афанасьев В.Н. (МИЭМ), проф. Бахтадзе Н.Н. (ИПУ РАН), проф. Бурков В.Н. (ИПУ РАН), проф. Вишневский В.М. (ИППИ РАН), д-р экон. наук, проф. Голиченко О.Г. (ЦЭМИ РАН), д-р физ.-мат. наук, проф. Добровидов А.В. (ИПУ РАН), д-ра техн. наук: проф. Заложнев А.Ю. (ИПУ РАН), проф. Ириков В.А. (МФТИ), проф. Калянов Г.Н. (ИПУ РАН), проф. Касаткин С.И. (ИПУ РАН), проф. Каравай М.Ф. (ИПУ РАН), д-р экон. наук, проф. Клочков В.В. (ИПУ РАН), д-ра техн. наук: проф. Кононенко А.Ф. (ВЦ РАН), проф. Курдюков А.П. (ИПУ РАН), проф. Лебедев В.Г. (ИПУ РАН), к-т техн. наук, доцент Лебедев В.Н. (ИПУ РАН), д-р экон. наук, проф. Ловчиновский Э.В. (ИПУ РАН), д-р техн. наук, проф. Мандель А.С. (ИПУ РАН), д-р физ.-мат. наук, проф. Непейвода Н.Н. (ИПС РАН), д-р экон. наук, проф. Нижегородцев Р.М. (ИПУ РАН), д-ра техн. наук: проф. Новосельцев В.Н. (ИПУ РАН), проф. Орлов А.И. (МВТУ), д-р физ.-мат. наук, проф. Рапопорт Л.Б. (ИПУ РАН), д-р экон. наук, проф. Секерин В.Д. (ИПУ РАН), д-ра техн. наук: проф. Сидельников Ю.В. (МАИ), проф. Совлуков А.С. (ИПУ РАН), д-р экон. наук, проф. Сухарев О.С. (Ин-т экономики РАН), д-ра техн. наук: проф. Уткин В.А. (ИПУ РАН), проф. Хоботов Е.Н. (МВТУ), д-ра физ.-мат. наук: доцент Чеботарев П.Ю. (ИПУ РАН), проф. Чхартишвили А.Г. (ИПУ РАН), проф. Щербаков П.С. (ИПУ РАН).

РЕГИОНАЛЬНЫЕ РЕДАКЦИОННЫЕ СОВЕТЫ

Волгоград – д-ра физ.-мат. наук: проф. Воронин А.А., проф. Лосев А.Г. (ВолГУ); **Воронеж** – д-р техн. наук, проф. Баркалов С.А., д-р физ.-мат. наук, проф. Головинский П.А. (ВГАСУ), д-р техн. наук, проф. Подвальный С.Л. (ВГТУ); **Иркутск** – академик РАН Бычков И.В., проф. Лакеев А.В. (ИДСТУ СО РАН); **Казань** – д-р физ.-мат. наук, проф. Маликов А.И., д-р техн. наук, проф. Сиразетдинов Р.Т. (КГТУ-КАИ); **Липецк** – д-ра техн. наук: проф. Кузнецов Л.А., проф. Погодаев А.К. (ЛГТУ); **Самара** – д-ра экон. наук: проф. Богатырев В.Д., проф. Гераскин М.И., д-р техн. наук, проф. Засканов В.Г. (СГАУ); **Петрозаводск** – д-р физ.-мат. наук, проф. Мазалов В.В., д-р техн. наук, доц. Печников А.А. (ИПМИ КарНЦ РАН); **Санкт-Петербург** – д-ра физ.-мат. наук: проф. Петросян Л.А. (СПбГУ), проф. Фрадков А.Л. (ИПМ РАН); **Старый Оскол** – д-р техн. наук, проф. Еременко Ю.И. (СТИ); **Тверь** – д-ра техн. наук: проф. Кузнецов В.Н., проф. Палюх Б.В. (ТГТУ).

Адрес редакции: 117997, г. Москва, ул. Профсоюзная, д. 65.

Адрес в Интернет: ubs.mtas.ru.

Номер гос. регистрации электронного научного издания (ЭНИ): 0421200023.

© ИПУ РАН, 2014

СОДЕРЖАНИЕ

| | |
|---|---|
| <i>Семьдесят пять лет становления и развития отечественной науки управления: Институту проблем управления – 75 лет.....</i> | 6 |
|---|---|

Системный анализ

| | |
|---|----|
| Горелов М. А. <i>Игры с дорогими информационными обменов.....</i> | 37 |
|---|----|

Математическая теория управления

| | |
|---|----|
| Гусев С. С. <i>Алгоритм идентификации статического объекта с переходом из пространства входов-выходов в пространство оценок параметров.....</i> | 57 |
| Рудько И. М. <i>Стохастическая модель звукограда.....</i> | 81 |

Информационные технологии в управлении

| | |
|---|----|
| Смирнова Н. В. <i>Опыт построения модели психического состояния обучаемых по истории их работы в следящей интеллектуальной обучающей системе.....</i> | 96 |
|---|----|

Сетевые модели в управлении

| | |
|---|-----|
| Захаров В. В., Крылатов А. Ю. <i>Конкурентная маршрутизация транспортных потоков поставщиками услуг навигации.....</i> | 129 |
| Стецюра Г. Г. <i>Организация коммутируемых непосредственных соединений активных объектов сложных цифровых систем.....</i> | 148 |

Управление в социально-экономических системах

| | |
|--|-----|
| Еналеев А. К. <i>Оптимальные согласованные механизмы в активных системах и задача теории контрактов.....</i> | 167 |
|--|-----|

| | |
|--|-----|
| Лосев А. Г., Радчик М. В. <i>Модель управления предприятием при попередельном методе калькуляции.....</i> | 183 |
| Сандомирская М. С. <i>Теоретико-игровая динамическая модель инсайдерских торгов с ненулевым спрэдом.....</i> | 207 |

**Управление в медико-биологических
и экологических системах**

| | |
|---|-----|
| Гаценко С. М., Мирзоян Г. Л., Новочадов В. В., Шемонаев В. И., Шкарин В. В. <i>Математическое моделирование спроса на медицинские услуги в территориальных системах здравоохранения (на примере стоматологических услуг).....</i> | 235 |
|---|-----|

Технические и программные средства управления

| | |
|--|-----|
| Гончар Д. Р., Фуругян М. Г. <i>Эффективные алгоритмы планирования вычислений в многопроцессорных системах реального времени.....</i> | 269 |
|--|-----|

**XIV – международная конференция
Системы проектирования, технологической
подготовки производства и управления этапами
жизненного цикла промышленного продукта
(CAD/CAM/PDM-2014)**

14–16 октября 2014 г., Москва, ИПУ РАН.

ТЕМАТИКА КОНФЕРЕНЦИИ:

- Организация структур технических и программных средств проектирования и управления. Средства взаимодействия, структуры данных, международные стандарты.
- Компьютерная графика и CAD/CAM/PDM-системы в учебных процессах (программы обучения по дисциплинам, методические материалы, тестирование). Средства виртуальной реальности в промышленных системах.
- Интегрированные производственные системы и управление технологическими процессами. PDM-системы.
- Проектирование в машиностроении и строительстве.
- Проектирование в радиоэлектронике.

КЛЮЧЕВЫЕ ДАТЫ:

До 15 сентября 2014 года – заявка на участие в конференции и/или выставке, перевод оргвзноса.

До 2 октября 2014 года – полные тексты докладов.

Заявки, тезисы и доклады высылаются по e-mail:

conf18@spm.ipu.ru

БОЛЕЕ ПОДРОБНО (формы заявок, правила оформления докладов и др.) на сайте: **<http://lab18.ipu.ru>**

СЕМЬДЕСЯТ ПЯТЬ ЛЕТ СТАНОВЛЕНИЯ И РАЗВИТИЯ ОТЕЧЕСТВЕННОЙ НАУКИ УПРАВЛЕНИЯ: ИНСТИТУТУ ПРОБЛЕМ УПРАВЛЕНИЯ – 75 ЛЕТ

В 1939 г. Совнарком СССР принимает решение об организации в составе Отделения технических наук АН СССР Института автоматики и телемеханики, ИАТ (на базе существовавшей с 1934 г. Комиссии по телемеханике и автоматике). Первым директором Института был назначен бывший военный лётчик, к тому времени выдающийся учёный в области авиационной энергетики академик Виктор Сергеевич Кулебакин. Перед Институтом стояла задача развернуть фундаментальные исследования в области автоматики и управления, увязав их с решением практических задач. С самого начала деятельность Института была связана с такими известными всему миру именами, как В.С. Кулебакин, Н.Н. Лузин, А.А. Андронов, Б.Н. Петров, М.А. Айзерман, Я.З. Цыпкин, Б.С. Сотсков, М.А. Гаврилов, А.А. Фельдбаум и многие другие.

В стенах Института выросли или получили мировую известность многие выдающиеся учёные – теоретики и прикладники науки об управлении. Наряду с этим к работам Института всегда привлекались крупные учёные, интересовавшиеся новой областью знаний. Они приносили в работу собственный опыт постановки научных проблем и поиска путей их решения, способствовали созданию в Институте особой творческой атмосферы, оказывая важнейшее влияние на формирование этических принципов общения в научном коллективе. Именно выдающимся учёным-иатовцам удалось сыграть решающую роль в установлении профессиональных контактов Института с международным научным сообществом. В результате наша страна стала одним из инициаторов создания Международной федерации по автоматическому управлению – ИФАК и организатором I Всемирного Конгресса ИФАК, который прошёл в Москве в 1960 г.

В момент рождения Института в его составе было 22 сотрудника, и в том числе Б.Н. Петров (будущий академик и вице-президент АН СССР, руководивший Институтом с 1947 по

1951 г.), М.А. Гаврилов (будущий член-корреспондент АН СССР), Н.Н. Шумиловский (будущий академик Киргизской академии наук), профессора В.А. Лоссиевский, Г.В. Щипанов и др. Вскоре в штат Института был принят выдающийся математик академик Н.Н. Лузин, который – как впоследствии и академик А.А. Андронов – стал воспитателем плеяды блестящих учёных-теоретиков в области управления.

Предвоенные годы жизни Института отмечены значительными продвижениями в области описания систем управления с помощью дифференциальных уравнений и дискуссией по «условиям компенсации» Г.В. Щипанова, при выполнении которых, как утверждал их автор, система автоматического регулирования перестаёт реагировать на приложенные к ней внешние возмущения. Со страниц научных изданий дискуссия была перенесена в центральную партийную прессу. Фактически, условия Щипанова стали предтечей будущей теории инвариантности, развитой В.С. Кулебакиным, Н.Н. Лузиным и Б.Н. Петровым. Г.В. Щипанов ушёл из жизни в 1953 г., а его научная «реабилитация» состоялась только в 1960 г., когда комиссия в составе академиков А.А. Дородницына, А.Ю. Ишлинского и Б.Н. Петрова подтвердила научную значимость его открытия (формально «условия компенсации Г.В. Щипанова» были признаны открытием в 1966 г. с приоритетом от апреля 1939 г.).

В годы войны Институт работает на интересы фронта, а многие его будущие лидеры (М.А. Айзерман, П.П. Пархоменко, Я.З. Цыпкин и др.) с оружием в руках защищают Родину. Среди важнейших исследований Института, направленных на повышение боеспособности Советской Армии во время Великой Отечественной войны, нельзя не отметить работы по борьбе с неконтактным минно-торпедным оружием, проводившиеся под руководством будущего члена-корреспондента АН СССР Б.С. Сотскова, и работы по автоматизации контроля качества при производстве патронных гильз крупного калибра, которые велись молодым инженером Б.Н. Петровым под руководством будущего академика В.А. Трапезникова, возглавлявшего Институт в 1951–1987 гг. Группа под руководством М.А. Гаврилова выполняла наладку релейной аппаратуры на военном заводе и

разрабатывала способы борьбы с помехами в системах управления подвижными объектами.

В конце войны в Институт приходит академик А.А. Андронов и организует знаменитый Андроновский семинар, через который прошло почти всё послевоенное поколение будущих корифеев ИАТа: М.А. Айзерман, А.Я. Лернер, М.В. Мееров, В.В. Петров, В.В. Солодовников, Я.З. Цыпкин, А.А. Фельдбаум и многие другие. В 1969 г. Президиум Академии наук СССР учредил премию им. А.А. Андропова, одними из первых лауреатов которой стали А.Г. Бутковский и ученик Андропова М.В. Мееров.

Наиболее выдающимися достижениями Института в 1940–1950-е гг. становятся:

- разработка математического аппарата алгебры логики для описания, анализа и синтеза релейно-контактных схем (М.А. Гаврилов);
- разработка общей теории линейных систем регулирования (В.С. Кулебакин, Б.Н. Петров, В.В. Солодовников, Я.З. Цыпкин, М.А. Айзерман, М.В. Мееров и др.);
- развитие теории нелинейных систем управления, в том числе метода точечных преобразований, теории абсолютной устойчивости и теории релейных систем (В.В. Петров, Г.М. Уланов, А.А. Фельдбаум, М.А. Айзерман, Я.З. Цыпкин);
- теория аналитического конструирования регуляторов (А.М. Лётов);
- разработка общих методов исследования дискретных систем автоматического регулирования (Я.З. Цыпкин);
- разработка основ теории оптимального управления (А.А. Фельдбаум, А.Я. Лернер, Л.И. Розоноэр и, впоследствии, А.Г. Бутковский и В.Ф. Кротов);
- разработка теории дуального управления (А.А. Фельдбаум);
- создание первой отечественной серии аналоговых вычислительных машин (Б.Я. Коган, В.А. Трапезников и др.);

- создание принципиально новых чувствительных элементов, датчиков и приборов (Б.С. Сотсков, Д.И. Агейкин, М.А. Розенблат, Е.К. Круг и др.).

В начале 1950-х гг. по просьбе С.П. Королёва и В.П. Глушко в Институте была организована разработка систем управления жидкостными ракетными двигателями для первой в мире межконтинентальной ракеты Р-7. Руководил работами Б.Н. Петров. Уже к 1953 г. были получены первые результаты по решению задачи управления расходом топлива, проектированию системы опорожнения баков, системы регулирования кажущейся скорости, рассмотрены возможные типы исполнительных механизмов в системах управления ракетой (Б.Н. Петров, Ю.П. Портнов-Соколов, В.В. Петров, Г.М. Уланов, С.В. Емельянов, В.Ю. Рутковский, И.Н. Крутова и др.). В дальнейшем эти результаты были развиты и предложены принципы построения и теория систем управления жидкостными ракетными двигателями (Б.Н. Петров, Ю.П. Портнов-Соколов, А.Н. Чацкин, В.Н. Марков и др.).

В связи с разработкой систем регулирования опорожнения баков и синхронизации расхода топлива была создана теория бортовых терминальных систем управления (Б.Н. Петров, Ю.П. Портнов-Соколов, А.Я. Андриенко, В.П. Иванов и др.).

В 1980-е гг. была завершена разработка общей концепции совершенствования энергетических характеристик ракет-носителей средствами управления (Ю.П. Портнов-Соколов, А.Я. Андриенко, В.П. Иванов и др.).

Результаты, полученные в Институте, реализованы. Созданные на их основе системы управления являются в настоящее время составной частью всех крупных жидкостных ракет разработки Главных конструкторов С.П. Королёва, М.К. Янгеля, В.Н. Челомея, В.Ф. Уткина.

Начиная с середины 1950-х гг., в Институте занялись развитием теории управления деформируемыми космическими аппаратами (ДКА - спутники с большими панелями солнечных батарей, с выносными радиоантеннами и др.). Были предложены модально-физическая форма математической модели,

амплитудный и фазовый принципы демпфирования упругих колебаний конструкций объекта, метод фазовой биплоскости для синтеза алгоритмов управления (В.Ю. Рутковский, В.М. Суханов).

В последние годы решена проблема совместного оценивания координат «жёсткого» и упругого движений ДКА (В.А. Суханов, Т.В. Ермилова, А.С. Ермилов и др.). Предложены алгоритмы управления, использующие элементы интеллектуальной диагностики состояния упругого объекта, алгоритмы адаптации с использованием нечёткой логики (В.Ю. Рутковский, В.М. Суханов, И.Н. Крутова, В.М. Глузов и др.).

В конце 1950-х гг. начались работы по теории адаптивных систем с моделью (Б.Н. Петров, В.Ю. Рутковский, И.Н. Крутова, С.Д. Земляков, Б.В. Павлов, И.Б. Ядыкин и др.). Были предложены принципы построения таких систем, линеаризованные модели систем, «ляпуновские» алгоритмы адаптации, введено понятие «обобщённого» объекта и осуществлён синтез его структуры на основе положений теории инвариантности.

Обобщение полученных результатов привело к разработке: теории адаптивного координатно-параметрического управления, теории настраиваемой работоспособности, концепции восстанавливаемой функциональной работоспособности и настраиваемой стратегии управления. Развивается теория оптимальных адаптивных регуляторов. На основе теории адаптивного координатно-параметрического управления впервые в СССР были созданы адаптивные системы управления рядом важнейших типов летательных аппаратов.

В 1980 г. Академия наук СССР учредила Золотую медаль имени Б.Н. Петрова (с 1993 г. – премия имени Б.Н. Петрова). Первую Золотую медаль им. Б.Н. Петрова в 1983 г. получил В.Ю. Рутковский. В 2004 г. премии им. Б.Н. Петрова удостоены Ю.П. Портнов-Соколов, А.Я. Андриенко и В.П. Иванов, в 2007 г. – В.В. Кульба, Б.В. Павлов и академик Е.А. Микрин (РКК «Энергия»).

Будущий академик Я.З. Цыпкин развил общую теорию адаптивных систем, которая стала естественным продолжением

теории дуального управления А.А. Фельдбаума. Впоследствии она положила начало теории робастных систем, основы которой были заложены Я.З. Цыпкиным, развиваемой сегодня в лаборатории им. Я.З. Цыпкина под руководством Б.Т. Поляка. В классической теории обычно предполагалось, что модель системы заранее известна или оценивается в процессе идентификации. Между тем в реальных задачах все характеристики объекта либо вообще неизвестны, либо известны неточно. Робастная теория, вызывающая огромный интерес исследователей во всём мире, предлагает методы работы с подобными неопределённостями. Если поначалу в центре внимания исследователей были проблемы анализа (робастная устойчивость), то теперь изучаются и важнейшие проблемы синтеза (робастное управление). Для решения трудных задач робастного управления оказались полезными понятие сверхустойчивости (достаточное условие устойчивости, формулируемое в терминах линейных условий на элементы системной матрицы), вероятностный подход и численные методы. Очень удобным аппаратом, приспособленным к решению современных задач анализа и синтеза робастных систем, стала классическая теория D-разбиений, развитая на новом уровне в работах сотрудников лаборатории.

Академиком В.С. Пугачёвым и его учениками была создана теория управления стохастическими системами. По мере развития теории автоматического управления осознавался тот факт, что классические методы этой теории недостаточны для расчёта сложных автоматических систем, работающих в условиях случайных воздействий. Поэтому естественным развитием общей теории систем и процессов управления стало привлечение вероятностных методов, позволяющих учитывать влияние различного рода случайных возмущений и помех на работу автоматических систем и их элементов. В результате в общей теории процессов управления появилось новое важное направление □ стохастическая теория процессов управления, широко использующая методы теории вероятностей и математической статистики. Работы Института в области стохастических проблем управления дали мощный толчок её интенсивному развитию и существенно обогатили теорию.

Одним из важных направлений стала теория статистически оптимальных систем, в рамках которой были разработаны методы синтеза оптимальных нестационарных и нелинейных систем (В.С. Пугачёв, Л.П. Сысоев); новые эффективные методы нелинейной фильтрации и экстраполяции случайных процессов (Р.Ш. Липцер в соавторстве с А.Н. Ширяевым, В.С. Пугачёв), методы статистической оптимизации по различным критериям качества (Н.И. Андреев). В Институте были разработаны эффективные приближённые методы расчёта и анализа точности многомерных нелинейных систем, подвергающихся случайным воздействиям (М.Л. Дашевский, Р.Ш. Липцер). Была создана статистическая теория обучения и самообучения автоматических систем, функционирующих в условиях неполной информации (В.С. Пугачёв), заложены основы общей теории стохастических систем (В.С. Пугачёв в соавторстве с И.Н. Сеницыным). Для нынешнего периода развития стохастической теории управления характерен большой интерес к синтезу автоматических систем в условиях параметрической и непараметрической неопределённости. Были разработаны основы теории устойчивого непараметрического оценивания функционалов от неизвестных распределений и на её основе создана теория непараметрического оценивания случайных процессов с неизвестными вероятностными характеристиками (А.В. Добровидов в соавторстве с Г.М. Кошкиным и В.А. Васильевым).

Н.С. Райбман, один из учеников В.С. Пугачёва, приложил немалые усилия к тому, чтобы методы построения математических моделей объектов управления по экспериментальным статистическим данным и теория идентификации стали эффективным инструментом разработчиков систем управления различными народно-хозяйственными объектами (С.А. Власов, В.А. Лотоцкий, А.С. Мандель, В.М. Чадеев).

Работы по стохастическому робастному управлению для линейных дискретных стационарных систем были начаты в Институте в 1992 г. как развитие идей H_∞ -теории управления, активно обсуждавшихся в период 1991–1992 гг. на семинаре под

руководством А.С. Позняка. В соавторстве с И.Г. Владимировым (ИППИ РАН) и А.В. Семёновым (ГосНИИАС) А.П. Курдюковым была создана теория построения стохастических систем управления, робастных относительно характеристик случайного входного возмущения.

Построенная теория была названа авторами анизотропийной теорией управления (анизотропия – термин, характеризующий неоднородность свойств по направлениям), так как в основе этой теории лежит понятие анизотропии сигнала. Анизотропией сигнала является характеристика отклонения вероятностного распределения многомерного входного сигнала от многомерного сигнала, распределённого по нормальному закону с нулевым средним и скалярной ковариационной матрицей, в некотором смысле являющимся изотропным. Анизотропийная теория управления занимает промежуточное место между теорией построения линейно-квадратичных гауссовских регуляторов и H_{∞} -теорией управления. Более того, обе эти теории являются частными случаями анизотропийной теории и получаются при стремлении анизотропии, соответственно, к нулю и к бесконечности.

Анизотропийная теория сочетает преимущества упомянутых выше теорий, позволяет строить регуляторы, менее консервативные, чем H_{∞} -регуляторы, и более робастные, чем квадратично-квадратично гауссовские регуляторы. Состоятельность этой теории была продемонстрирована в приложении к построению регуляторов для посадки самолётов в условиях неконтролируемых возмущений.

В 1957 г. будущий академик С.В. Емельянов впервые в мире предложил использовать неустойчивые движения и неустойчивые структуры для улучшения качества переходных процессов в системах автоматического управления. В 1960-х гг. С.В. Емельяновым и его школой эта идея была реализована в форме теории систем с переменной структурой. В классе систем с переменной структурой эффективно решались актуальные задачи теории управления, в том числе: стабилизация существенно неопределённых систем; построение системы слежения, обладающей высоким порядком астатизма;

фильтрация и дифференцирование при неизвестной интенсивности шума и др.

С начала 1960-х гг. по инициативе А.А. Фельдбаума и М.А. Айзермана в Институте начались интенсивные исследования по теории распознавания образов, автоматической классификации, самообучающимся системам, методам обработки сложноорганизованных данных. Фундаментальные исследования на эту тему проводились рядом лабораторий. Отметим работы Я.З. Цыпкина и Г.К. Кельманса; М.А. Айзермана, Э.М. Бравермана, Л.И. Розоноэра и Б.М. Литвакова; В.Н. Вапника и А.Я. Червоненкиса; А.А. Дорофеюка, И.Б. Мучника и Е.В. Баумана.

Институт является пионером и основоположником признанного всем научным миром направления «Оптимальное управление системами с распределёнными параметрами (СРП)» (А.Г. Бутковский). Проблемы оптимального управления СРП описываются дифференциальными уравнениями в частных производных и с запаздыванием, интегральными и интегро-дифференциальными уравнениями, функциональными уравнениями и средствами других математических дисциплин, например, теории чисел, фракталов и др. С физической точки зрения эти проблемы связаны с управлением полями и сплошными средами различной, в том числе неклассической природы. По этому направлению в мире опубликованы многие тысячи работ. В Институте на эту тему написано более десяти монографий. Восемь из них переизданы в США, Великобритании, Голландии, Финляндии.

Специфика исследований, проводимых в Институте под руководством В.Ф. Кротова, сводится к формулировке условий глобальной оптимальности управления динамическими системами и созданию основанного на них аппарата решения соответствующих задач. Уравнения теории оптимального управления крайне сложны и их решение сопряжено со многими вычислительными сложностями, составляющими предмет прикладной части теории оптимального управления – вычислительных методов синтеза допустимого и оптимального управлений. Были разработаны новые эффективные универсальные методы последовательного улучшения

управления, опирающиеся на указанные идеи и подкреплённые вычислительным опытом и соответствующими программными средствами. Эти разработки проводятся в сотрудничестве с рядом научных коллективов РАН и университетов России, стран СНГ и дальнего зарубежья (Германия, США, Израиль и др.). В комплексе выполняемых исследований Институт играет ведущую роль. Результаты этих работ отражены в многочисленных монографиях, учебниках, обзорах и статьях

Полученные математические результаты применялись для исследования следующих прикладных научно-технических проблем:

- (1) оптимизация траекторий движущихся объектов, анализ и синтез их систем управления;
- (2) моделирование и анализ развития многоотраслевой экономики;
- (3) синтез и оптимизация управления квантовым состоянием вещества.

В рамках пункта (1) выделяются задачи оптимального управления манёврами летательного аппарата в атмосфере Земли при помощи программного изменения тяги двигателя и угла атаки. Расчёты этих манёвров постоянно воспроизводятся в инженерной практике применительно к различным классам летательных аппаратов – от космических аппаратов до самолётов. Предлагаемые подходы отличаются от других известных в литературе тем, что решают проблему отыскания абсолютного оптимума, а также совершенством аналитических методов решения, алгоритмической простотой и, в частности, отсутствием краевых задач.

В рамках пункта (2) проведены исследования нелинейных оптимизационных моделей развития многоотраслевой экономики.

Особый интерес представляют исследованию по пункту (3). В настоящее время существует обширная и бурно развивающаяся область новых физических технологий по управлению квантовым состоянием вещества за счёт воздействия на него электромагнитного поля. Среди них – синтез новых материалов физическими средствами (вместо химических); разделение изотопов; фотохимия и др.

Математический алгоритм синтеза подобного управления является важнейшей частью проектирования этих нанотехнологий.

По общему мнению физиков адекватным аппаратом для осуществления подобного синтеза являются методы теории оптимального управления. Соответствующие задачи описываются системами нелинейных дифференциальных уравнений, имеющими тысячные порядки. Было проведено исследование решения таких задач на базе разработанных под руководством В.Ф. Кротова методов последовательного улучшения. Обнародование этих методов породило в 90-е гг. волну исследований специалистов-физиков и соответствующих публикаций в ведущих мировых физических и физико-химических журналах. В этих публикациях был сделан вывод о том, что разработанные в Институте методы являются наилучшим инструментальным средством решения соответствующих задач.

В конце 1960-х гг. под руководством М.В. Меерова в Институте стартовали фундаментальные исследования проблем построения оптимальных многосвязных систем управления (будущий академик О.И. Ларичев, В.Н. Кулибанов, Я.М. Берщанский, Р.Т. Янушевский), в частности, с использованием условий А.А. Милютин и А.Я. Дубовицкого, принципа оптимальности Р. Беллмана и принципа максимума Л.С. Понтрягина. Полученные результаты послужили основой для разработки методов и алгоритмов построения систем оптимального динамического управления гидродинамическими процессами фильтрации при разработке нефтяных месторождений.

На рубеже XX и XXI веков начались фундаментальные исследования проблем моделирования и управления нелинейными динамическими многосвязными системами большой размерности (А.В. Ахметзянов и В.Н. Кулибанов). Полученные результаты подтвердили необходимость разработки новых принципов моделирования и оптимального управления процессами, которые учитывали бы структурные и физические особенности пространства состояний, свойства

движущихся субстанций, характера допустимых управляющих воздействий.

Огромную роль в выработке у сотрудников Института тяги к решению сложных и комплексных проблем управления важнейшими народно-хозяйственными объектами сыграли работы по Проекту 705 – проекту создания первой в мире комплексно автоматизированной атомной подводной лодки (АПЛ). Работы по новой АПЛ возглавил академик А.П. Александров, а по автоматизации АПЛ – академик В.А. Трапезников. Впоследствии эти работы нашли продолжение при создании и совершенствовании систем управления атомными ледоколами («Арктика», «Сибирь»), а также новой серии крупнотоннажных танкеров и контейнеровозов и кардинально изменили представления моряков о требованиях к надёжности комплектующих элементов. Стало понятным, что важнейшую роль в повышении эффективности решения боевых задач, особенно в экстремальных ситуациях, играет человеческий фактор (в то время до 70 % аварийных ситуаций возникали по вине человека-оператора). Была создана специальная группа во главе с Д.И. Агейкиным, разработки которой (в том числе полунатурных стендов-тренажёров, методик профессионального отбора операторов, выбора технических средств визуализации и характера представления информации) позволили на порядок увеличить эффективность и надёжность работы человека-оператора и групп операторов (боевых расчётов) при одновременном резком (втрое) сокращении численности личного состава АПЛ.

Другой пример комплексной работы такого рода – Проект «Запчасть», нацеленный на решение проблемы обеспечения народного хозяйства СССР запасными частями к разнообразной технике и оборудованию, в том числе двойного назначения. Работа выполнялась группой сотрудников Института под руководством А.А. Дорофеевца в 1971-1975 гг. Огромную роль в её успехе сыграл В.А. Трапезников, который как первый заместитель председателя ГКНТ сумел привлечь внимание к этой работе председателя Совмина А.Н. Косыгина и

его первого заместителя Д.С. Полянского, руководителей нескольких союзных республик и крупных регионов РСФСР.

В 1960-е г. начались и продолжают поныне работы в области создания автоматизированных информационно-управляющих систем (А.Ф. Волков, А.Г. Мамиконов, В.В. Кульба, А.Д. Цвиркун, О.И. Авен, В.Л. Эпштейн и др.). Первыми примерами таких систем стали АСУ «Металл» (автоматизированная система управления поставками металлопродукции в стране), АСУ «Морфлот», АСУ «Обмен» и другие.

Уникальную роль в автоматизации процессов массового обслуживания сыграла разработанная для Аэрофлота в конце 60-х – начале 70-х гг. АСУ «Сирена» бронирования мест в самолётах и продажи авиабилетов (генеральным конструктором «Сирены» решением Совета Министров СССР был назначен В.А. Жожикашвили). Немалая заслуга в успехе внедрения разрабатывавшихся методов автоматизации принадлежит В.А. Кучеруку.

В середине 1980-х гг. было положено начало работам по исследованию вопросов управления безопасностью сложных систем (В.В. Кульба, А.Я. Андриенко, В.Н. Бурков, Б.Г. Волик, В.Г. Лебедев, Ю.С. Легович и др.). Работы эти продолжают и поныне. Из полученных результатов наиболее серьёзные связаны с решением проблем информационной безопасности и управлением безопасностью в условиях чрезвычайных ситуаций.

Хорошо известны фундаментальные достижения Института и в области теории надёжности (Б.С. Сотсков, Б.Г. Волик, С.М. Доманицкий, И.Е. Декабрун, Б.П. Петрухин) и технической диагностики (П.П. Пархоменко, Е.С. Согомоян, М.Ф. Каравай и другие).

Широким фронтом велись и продолжают сегодня разработки новых технических средств и систем автоматизации, активным участником которых был академик Академии наук Грузии И.В. Прангишвили, возглавлявший Институт в 1987–2006 гг. В начале 1960-х гг. в микроэлектронике была выдвинута концепция однородных микроэлектронных логических и вычислительных структур. Концепция создавалась

под руководством И.В. Прангишвили. На базе этой концепции в Институте были разработаны многопроцессорные вычислительные системы серии ПС (ПС-2000 и ПС-3000). По производительности комплексы ПС были соизмеримы с самыми мощными отечественными вычислительными системами соответствующих классов. Эти комплексы отличались наилучшим значением соотношения производительность/стоимость.

Выдвинутая ещё в 1950-е гг. Б.С. Сотсковым идея унификации средств автоматизации технологических процессов с помощью блочно-модульного принципа их построения легла в основу агрегатной унифицированной системы приборов. В последующие годы развитием этой идеи стали Государственные системы приборов ГСП-1 (1960–1970-е гг.) и ГСП-2 (1980–1990-е гг.).

Огромные продвижения были достигнуты и в части создания новых принципов построения датчиков и измерительных приборов (Д.И. Агейкин, В.Ю. Кнеллер и др.), магнитных и полупроводниковых элементов (М.А. Розенблат, Н.П. Васильева и др.), средств автоматического анализа (система БАРС) и релейных устройств (М.А. Гаврилов, П.П. Пархоменко и др.), элементов пневмоавтоматики (М.А. Айзерман, А.А. Таль, А.А. Тагаевская, Т.К. Берендс и Т.К. Ефремова). Сегодня многие из этих работ находят своё продолжение в форме создания современных магнитных элементов с применением нанотехнологий (С.И. Касаткин), средств струйной техники (А.М. Касимов), радиоволновых датчиков (Б.В. Лункин).

Под руководством А.М. Касимова разработана агрегатно-интегральная струйная техника (АИСТ), предназначенная для управления параметрами авиационных двигателей на воздухе от воздушной турбины с температурой до 500⁰С (в отдельных случаях до 950⁰С) при вибрациях, ударах и широком спектре источников радиации. На основе разработок Института ОАО «Омское МКБ» и Московское ОАО «ЭГА» выпускают струйные регуляторы направляющего аппарата, компрессора и др. (более 20 регуляторов), которые эксплуатируются на самолетах Як-42, Ил-86, Ил-96, «Руслан»,

Ан-70, Ту-204 и др. За последние 20 лет струйные регуляторы поработали в полете без отказов более 20 млн. ч.

В 1970-е гг. были созданы новые поколения средств аналого-цифровой техники – гибридные вычислительные системы ГВС-100 и ГВС «Русалка» (Б.Я. Коган).

Ещё одним достижением Института стала система средств программируемой автоматики с параллельной структурой (СПА-ПС), разработанная в связи с делегированием в 1986 г. Институту научного руководства программой работ по созданию АСУ ТП для АЭС будущего. Авторами концепции СПА-ПС стали ученики М.А. Гаврилова (А.А. Амбарцумян и др.). Еще один проект, осуществлённый учениками М.А. Гаврилова (О.П. Кузнецов, А.К. Григорян и др.) и основанный на разработанной ими концепции языков программирования логических устройств, завершился созданием системы автоматизации программирования станков с ЧПУ, серийно выпускавшейся промышленностью в 1980-е гг.

Работы Института по исследованию свойств полупроводниковых структур со специфическими вольтамперными характеристиками (В.Д. Зотов) привели к созданию принципиально новых полупроводниковых многофункциональных сенсоров (Z-сенсоров).

Начиная с 1970-х гг., важным направлением стало исследование роли и характера участия человека в контуре управления и в работе по анализу и совершенствованию административных и социально-экономических систем. Здесь следует отметить пионерские работы Д.И. Агейкина и нынешние: А.Д. Цвиркуна и В.К. Акинфиева, Ф.Ф. Пашенко, В.Б. Гусева и В.В. Павельева, А.С. Манделя, Э.А. Трахтенгерца и В.Г. Лебедева, А.А. Дорофеюка и А.Л. Чернявского, В.Н. Буркова, Д.А. Новикова и А.Г. Чхартишвили.

Сюда же примыкают работы по теории выбора – М.А. Айзерман, А.В. Малишевский и Ф.Т. Алескеров, и методам поддержки принятия управленческих решений – А.С. Мандель; А.А. Дорофеюк и А.Л. Чернявский; В.Н. Бурков, А.В. Щепкин и А.Ю. Заложнев.

Существенные результаты получены в области управления в задачах биологии, медицины и здравоохранения. С

60-х гг. этими проблемами начали заниматься в лабораториях М.А. Айзермана, Н.В. Позина, А.М. Петровского и А.А. Фельдбаума. Затем фронт работ расширился. В настоящее время задачами, связанными с исследованием различных аспектов управления в биомедицинских системах, активно занимается ряд лабораторий Института. Интересные результаты в разные годы получены: А.А. Десовой; группой сотрудников под руководством Е.А. Андреевой и О.Е. Хуторской; Л.А. Дартау, В.Н. Новосельцевым, А.И. Яшиным и А.И. Михальским; А.А. Дорофеюком, И.Б. Мучником и С.М. Бородкиным.

С середины 1990-х гг. под руководством В.А. Уткина ведутся исследования по декомпозиционному синтезу систем управления в рамках блочного подхода. Данный подход, опирающийся на структурные свойства оператора объекта управления, является конструктивной методологической основой для анализа и синтеза систем управления линейными и нелинейными многомерными многоканальными объектами автоматического управления, функционирующими в условиях действия внешних неконтролируемых возмущений, параметрической неопределённости и при неполных измерениях. К настоящему времени разработаны декомпозиционные алгоритмы синтеза обратной связи для решения ряда фундаментальных задач теории управления (стабилизации, инвариантности, наблюдения, идентификации в реальном времени, слежении и их комплексе), которые позволяют разделить задачи синтеза большой размерности на независимо решаемые элементарные подзадачи меньшей размерности. Дополнительное использование методов теории систем с разрывными управлениями, функционирующими в скользящем режиме, как в задачах управления, так и в задачах наблюдения, позволяет обеспечить робастные свойства и инвариантность замкнутых систем. Предлагаемые алгоритмы достаточно просты в реализации и позволяют снизить объём априорной информации об объекте управления и среде его функционирования. Разработанные в теории методы и алгоритмы применяются для решения ряда прикладных задач, в которых объектами управления являются роботы-

манипуляторы, двигатели внутреннего сгорания, электроприводы различных типов и другие технические процессы.

В конце 2006 г., после кончины Ивери Варламовича Прангишвили, директором Института избран академик Станислав Николаевич Васильев. Институт развивается, активизировав фундаментальные исследования в различных областях теории управления и её приложений, в том числе по его основным направлениям научной деятельности:

- теория систем и общая теория управления;
- методы управления сложными техническими и человеко-машинными системами;
- теория управления в междисциплинарных моделях организационных, социальных, экономических, медико-биологических и экологических систем;
- научные основы технологий управления подвижными объектами и навигации;
- теория и методы разработки программно-аппаратных и технических средств управления и сложных информационно-управляющих систем;
- научные основы интегрированных систем управления и автоматизации технологических процессов управления производством.

Под руководством Б.Т. Поляка продолжает развиваться теория линейных систем автоматического управления. Здесь в центре внимания находятся такие трудные и актуальные задачи, как синтез регуляторов заданной структуры (в частности, регуляторов низкого порядка), синтез статических регуляторов по выходу, проблема одновременной стабилизации, задачи управления при постоянно действующих возмущениях. Удалось разработать несколько эффективных подходов к их решению. Во-первых, на основе понятия сверхустойчивости можно получать решения упомянутых трудных задач с помощью линейного программирования. Во-вторых, предложен вероятностный подход к решению данных детерминированных задач. Рандомизированные алгоритмы оказались очень эффективными для многих задач управления и оптимизации.

Продолжаются работы по восходящей к Я.З. Цыпкину «робастизации» теории управления. Для решения трудных задач робастного управления оказались полезными упомянутые выше методы – и сверхустойчивость, и вероятностный подход. Удобным аппаратом решения современных задач анализа и синтеза робастных систем стала классическая теория D-разбиений, развитая на новом уровне в работах сотрудников лаборатории.

Проводится исследование систем управления, подверженных воздействию произвольных ограниченных внешних возмущений и системных неопределённостей. На основе эллипсоидального описания и техники линейных матричных неравенств разработаны эффективные методы подавления внешних возмущений. Предложены алгоритмы синтеза регуляторов (с помощью обратной связи по состоянию или выходу); разработана техника фильтрации внешних возмущений.

В лаборатории А.Г. Кушнера, в состав которой вошел коллектив лаборатории ушедшего из жизни в 2011 г. А.Г. Бутковского¹, разрабатываются дифференциально-геометрические методы исследования нелинейных систем с управлением, в частности, методов управления сингулярными режимами в системах с распределенными параметрами. Такие системы описываются дифференциальными уравнениями в частных производных, как правило, нелинейными. Под сингулярными решениями дифференциальных уравнений понимают либо разрывные решения типа ударных волн, либо непрерывные решения, у которых разрывны частные производные (так называемые слабые разрывы). Теория обобщенных функций, традиционно используемая при анализе разрывных решений, может быть применена лишь к линейным уравнениям. Альтернативой этому аппарату для нелинейных систем является геометрическая теория многозначных решений, активно развиваемая в лаборатории. Методы, полученные в этом направлении, применяются к задачам

¹ В 2013 г. лаборатория, которой руководит д.ф.-м.н. проф. А.Г. Кушнер, получила имя А.Г. Бутковского.

управления фронтами вытеснения нефти при разработке нефтяных месторождения (совместно с лаб. №19), к задачам управления фокусировкой нелинейных звуковых пучков.

Ведутся работы по классификации систем с управляющими параметрами относительно преобразований обратной связи, установлена связь полученных дифференциальных инвариантов с принципом инвариантности Б.Н. Петрова.

В лаборатории были выполнены пионерские работы по проблеме управления квантовыми физическими объектами – сегодня это называют нанотехнологиями, а также разрабатываются принципы оптимального управления системами с распределенными параметрами, и системами, описываемыми уравнениями с дробными производными. Результаты исследований применяются в теплотехнике, металлургии, химической технологии, других отраслях. В частности, в лаборатории проводились работы по оптимальному управлению полем радиальных термонапряжений при проектировании комплекса «СТАЛЬ-ПРОКАТ».

В настоящее время в Институте проводятся фундаментальные исследования, связанные с разработкой принципов иерархической многоуровневой декомпозиции и расщепления нелинейных операторов в функциональных пространствах с распараллеливанием вычислений на многопроцессорных вычислительных системах в различных программных средах (А.В. Ахметзянов). Результаты исследований ориентированы на создание универсальных принципов моделирования и оптимального управления нелинейными многосвязными системами большой размерности, в частности процессами фильтрации флюидов (жидких и газообразных углеводородов) в пористых средах резервуаров месторождений углеводородов с геологическими и геометрическими условиями залегания любой сложности. При этом вытесняющие реагенты выступают в роли управляющих воздействий.

Анизотропийная теория распространена на системы с параметрическими возмущениями (А.П. Курдюков). Процедура

синтеза анизотропийных регуляторов требует решения системы уравнений Риккати, уравнения Ляпунова и алгебраического уравнения специального вида, для чего была разработана процедура решения такого рода уравнений методом гомотопий и создан пакет прикладных программ. В настоящее время ведутся работы по построению теории субоптимального анизотропийного управления, анизотропийной теории управления для алгебро-разностных систем, проводятся исследования по построению анизотропийных регуляторов пониженного порядка, на вход которых поступает случайный гауссовский сигнал с неизвестными характеристиками. Построенная теория существенным образом опирается на вновь введенные понятия средней анизотропии случайного входного сигнала и анизотропийной нормы линейной системы. Полученные результаты позволяют повысить степень робастности к возмущениям при синтезе алгоритмов управления движением летательных аппаратов, что актуально для повышения безопасности и живучести летательных аппаратов.

Ведутся фундаментальные исследования решения NP-трудных проблем дискретной и комбинаторной оптимизации (лаборатория А.А. Лазарева). Полученные результаты применяются для решения практических задач теории расписаний и календарного планирования. Для минимаксных задач теории расписаний впервые введена метрика и для решения этих задач применяются методы изменения параметров, динамического программирования и другие современные методы исследования. В настоящее время ведутся работы по изучению природы сложности классических комбинаторных проблем и разрабатываются алгоритмы решения практических задач большой размерности за приемлемое время с гарантированной погрешностью целевой функции. В лаборатории активно развивается новый метод решения задач комбинаторной и дискретной оптимизации, представляющий собой модификацию классического метода динамического программирования, основанного на принципе оптимальности Беллмана. Предложенный метод, названный «графическим», был успешно применён для решения ряда задач теории расписаний и дискретной оптимизации, с его помощью

можно существенно сократить трудоёмкость решения для некоторых задач комбинаторной оптимизации. Лабораторией установлены тесные научные связи с ведущими научными школами из Германии, Франции, Великобритании.

В лаборатории И.Б. Ядыкина ведутся исследования по изучению математических моделей инфраструктурных систем управления. Предложены новые принципы построения систем автоматического регулирования частоты и мощности для крупных энергообъединений, базирующиеся на применении новых высокоточных устройств измерения с привязкой к астрономическому времени и новых методов синтеза регуляторов на основе решения оптимизационных задач с ограничениями. Особо следует отметить работы в области создания интеллектуальных энергетических систем с активно-адаптивными сетями (ИЭС ААС). Лаборатория принимала участие в разработке концепции ИЭС ААС для ОАО «ФСК ЕЭС» в части принципов построения и архитектуры автоматизированной и мультиагентной систем мониторинга статической устойчивости в реальном времени. Кроме того, лаборатория разрабатывала алгоритмы управления модами электромеханических колебаний в ЕЭС, методы и модели систем автоматической настройки сложных регуляторов энергетического оборудования.

Под руководством члена-корреспондента РАН Д.А. Новикова активно развиваются теоретические основы разработки и исследования теоретико-игровых и оптимизационных моделей управления системами междисциплинарной природы (организационно-технической, социально-экономической, эколого-экономической и др.). Предложены оригинальные методы анализа, синтеза и оптимизации управления иерархическими, многокомпонентными, динамическими и распределёнными организационными системами, в том числе функционирующими в условиях неопределённости, кооперативного или конкурентного взаимодействия элементов, с учётом коммуникативной поддержки и информационного противодействия (Д.А. Новиков, В.Н. Бурков, М.В. Губко, Н.А. Коргин, С.П. Мишин, А.Г. Чхартишвили). На их основе

разработаны комплексы прикладных механизмов управления, эффективность которых подтверждена при разработке и практическом внедрении механизмов управления проектами федерального, регионального и корпоративного уровня (В.А. Ириков, А.В. Щепкин).

В лаборатории Л.Б. Рапопорта исследуются неголономные и другие механические системы. Предложен новый вариационный принцип механики – принцип минимакса, который позволяет сводить задачи оптимального управления механическими системами к стандартным задачам на условный экстремум. Установлен принцип декомпозиции для управляемых механических систем, нашедший применение в управлении манипуляционными роботами (включая многоруких роботов), летательными аппаратами, судами, двигателями внутреннего сгорания, динамическими тренажёрами. Разработан метод анализа устойчивости нелинейных систем с неполной информацией, описываемых дифференциальными разностными включениями. Развита вариационный метод анализа таких систем, введены новые классы функций Ляпунова, что позволило получить новые критерии устойчивости. Для нелинейных управляемых систем получены необходимые и достаточные условия стабилизируемости в терминах существования стабилизирующих пар – управления и функции Ляпунова, обеспечивающей устойчивость замкнутой системы управления.

В последнее время ведутся работы по применению методов спутниковой GLONASS / GPS и инерциальной навигации к задачам управления механическими системами. Активно развиваются методы управления колёсными роботами. Предложены методы планирования траекторий колёсных роботов, решены задачи синтеза законов управления, оценки областей притяжения и областей достижимости. Полученные результаты находят применение в сельском хозяйстве, строительстве, обеспечении безопасности работы в сложных условиях.

Построены прототипы мобильных роботов и системы управления, реализующие теоретические результаты лаборатории. Подготовлено несколько патентов.

Развиты методы нелинейного анализа обратимых механических систем, обладающих свойством пространственно-временной симметрии. Получен ряд фундаментальных результатов, нашедших большой отклик в международном научном сообществе.

В области нелинейных колебаний предложена теория периодических движений, с единых позиций описывающая как колебания, так и вращения. Развита теория систем, близких к резонансным и близких к автономным, для систем с первым интегралом проанализированы колебания, устойчивость, возможность стабилизации, решена задача управления (В.Н. Тхай).

Под руководством С.К. Даниловой ведутся работы по разработке метода определения экстремальных свойств оптимального управления морскими подвижными объектами (МПО) для построения эффективных алгоритмов реализации принципа максимума. Разработана методика синтеза субоптимального управления движением МПО с использованием оценок экстремальных свойств оптимального управления объектом и заданных оценок текущих и прогнозируемых ситуаций по состоянию технических средств и систем управления объекта, воздействию внешней среды и гипотез о возможных вариантах развития ситуаций в нештатных и аварийных режимах. Предложены алгоритмы синтеза альтернативных безопасных траекторий движения МПО с использованием методов субоптимального управления и динамических оценок текущих и прогнозируемых ситуаций, построенных с применением динамических экспертных систем продукционного типа.

Осуществляется разработка и исследование методов построения и особенностей функционирования сложных программно-технических комплексов для АСУ ТП. Проводятся теоретические исследования методов построения баз знаний для создания нового поколения систем управления на базе аппарата нечётких множеств, моделирование объектов управления в качественных шкалах и автоматическая генерация баз знаний на основе собранных натуральных данных. Разрабатываются программные системы, позволяющие создавать «под ключ» системы автоматического управления с встроенными базами

знаний для задач ранней диагностики и др. Практическая значимость результатов состоит в возможности применения данной методологии для создания макета сложной программно-технической системы управления объектами повышенной опасности, отвечающей современным требованиям открытых систем: АСУ ТП АЭС в РФ, Иране и Индии (Н.Э. Менгазетдинов, А.Г. Полетыкин).

В лаборатории Г.Г. Гребенюка активно развивается новое направление: разработка информационно-аналитических автоматизированных систем для управления крупными организационно-техническими комплексами, такими как топливно-энергетическое хозяйство (ТЭХ) мегаполиса. Эти комплексы характеризуются недостаточной структуризацией объектов, задач, процессов управления, множественностью связей между ними. Принят в промышленную эксплуатацию ряд крупных автоматизированных систем, в том числе направленных на повышение энергоэффективности объектов ТЭХ Москвы. Дальнейшее развитие данного направления связано с разработкой моделей и методов управления инфраструктурными объектами, к примеру, системами энергоснабжения по критериям энергоэффективности и отказобезопасности, методов и средств проектирования больших информационно-управляющих систем с использованием многоаспектного подхода.

В той же лаборатории под руководством М.Х. Дорри ведётся разработка теоретических основ создания исследовательских комплексов и стендов для анализа, синтеза и отладки алгоритмического и программного обеспечения интеллектуальных систем управления сложными техническими комплексами с использованием интегрированных систем обработки данных на основе:

- блочно-иерархического структурирования задачи;
- объединения расчёта непрерывных и логических процессов;
- образного представления объектов;
- организации многоуровневого взаимодействия блоков между собой и с системой;

- взаимодействия инструментальной системы с базами данных и модулями, имитирующими исследуемые объекты и помогающими легко реконструировать решаемые задачи.

Выполняются инициативные работы по созданию новых, не имеющих аналогов в мире нанодатчиков: туннельные датчики (на основе магнитных квантовых точек – совместно с ФИ РАН и ТЦ МИЭТ) и магниторезистивные датчики (МР), свойства которых обнаружены сотрудниками ФИАН. Проводятся работы с целью получения и исследования наноэлементов на основе магнитополупроводниковых МР наноструктур. Разрабатываемые нанодатчики составляют конкуренцию существующим анизотропным и спин-вентильным МР датчикам магнитного поля и тока (С.И. Касаткин).

В лаборатории В.Н. Лебедева разработаны концепция новой Интернет-службы и принципы построения специализированных средств и технологий для поддержки удалённых взаимодействий в гетерогенной информационной и сетевой среде, ориентированных на решение следующих системных задач:

- создание простого, интуитивно понятного средства сетевой поддержки распределённых приложений и многоагентных систем;
- обеспечение защиты от потери данных в условиях некачественных каналов связи (надёжность и устойчивость к сетевым сбоям);
- создание средств межсерверной маршрутизации данных, одинаково применимых как для on-line, так и для off-line взаимодействий.

Сотрудникам лаборатории в 2011 г. присуждена премия им. А.Г. Мамиконова за работу «Создание новых информационных технологий и методов обработки и обмена данными в распределённых гетерогенных системах и их внедрение в Национальном центральном бюро Интерпола при МВД России и его региональных филиалах». На основе средств удалённого доступа к международным базам данных

разработаны системы организации международного розыска физических лиц и системы контроля похищенных и утраченных паспортов. Созданы сервисы для взаимодействия с органами федеральной власти через систему межведомственного электронного взаимодействия (СМЭВ).

В настоящее время осуществляется переход на облачные технологии организации автоматизированных информационных систем, что даёт возможность использования рациональной архитектуры при обеспечении эффективного доступа к информации.

В лаборатории Б.В. Лункина ведутся теоретические работы в области синтеза многоканальных датчиков и разработки алгоритмов решения задач измерения в условиях неполной информации о состоянии объектов. Предложен алгоритм измерения параметров трёхслойной среды, основанный на возбуждении электромагнитного поля в резонаторе W-образной структуры на пяти собственных частотах. Алгоритм опирается на решение системы уравнений, составленной из соотношений, которые связывают собственные частоты и контролируемые параметры. Он обеспечивает однозначность и высокую точность измерения, что особенно важно для решения задач измерений параметров многокомпонентных нестационарных потоков. За последние годы лаборатория выполнила более десяти проектов на уровне НИОКР. Созданы автоматизированная система предупреждения взрывов в шахтах на базе радиочастотного датчика количества осаждаемой пыли, система измерения запасов топлива в баках Международной космической станции, комплекс средств и алгоритмов для определения покомпонентного объёмного содержания нефтеводяного потока в скважинах, датчик расхода неоднородных смесей в безнапорных каналах.

В лаборатории В.М. Вишневого ведётся разработка теоретических основ построения и управления перспективными широкополосными сетями обработки мультимедийной информации, включая сверхвысокоскоростные самоорганизующиеся сети миллиметрового диапазона радиоволн (71–76 ГГц, 81–86 ГГц)

и гибридные сети на базе лазерной и радиотехнологий. Важным направлением является также разработка нового поколения систем управления интеллектуальными транспортными системами с использованием RFID-технологий и новейших беспроводных средств.

Активно развивается взаимодействие с институтами ОЭММПУ и других отделений РАН. В частности, в сотрудничестве с Институтом динамики систем и теории управления СО РАН ведутся работы по управлению группировками движущихся объектов (формаций), устойчивости и управлению в гетерогенных и некоторых других моделях динамических и интеллектуальных систем. Разрабатываются совместные научные проекты с Национальными академиями наук Украины и Беларуси.

Обновлён и расширен состав редколлегии журнала «Автоматика и телемеханика» - первого в мире журнала по автоматическому управлению, созданного ещё в 1936 г. (главный редактор – С.Н. Васильев).

Также обновлён и расширен состав Научного совета РАН по комплексным проблемам управления и автоматизации. В бюро Научного совета, помимо сотрудников Института академика С.Н. Васильева, В.В. Кульбы, члена-корреспондента РАН Д.А. Новикова, Б.Т. Поляка и В.Г. Лебедева, входят академики С.В. Емельянов (ИСА РАН), А.Б. Куржанский (МГУ), Ф.Л. Черноусько (ИПМех РАН) и А.Л. Фрадков (ИПМаш РАН). В Научном совете работают следующие секции:

секция 1 – управления, устойчивости и оптимизации систем
(председатель – Б.Т. Поляк);

секция 2 – информационно-управляющих систем (председатель – В.В. Кульба);

секция 3 – управления в междисциплинарных моделях
(председатель – член-корр. РАН Д.А. Новиков);

секция 4 – Санкт-Петербургская секция управления
(председатель – А.Л. Фрадков);

секция 5 – молодых учёных (председатель – З.К. Авдеева).

С 2012 г. Институт участвует в Программе фундаментальных исследований ОЭММПУ РАН «Анализ и

оптимизация функционирования систем многоуровневого, интеллектуального и сетевого управления в условиях неопределённости». Координатор программы – академик С.Н. Васильев. Образованы два основных направления Программы:

- 1). «Анализ и оптимизация функционирования в разных временных шкалах многоуровневых систем управления с неполной информацией», координаторы – Е.Я. Рубинович, С.А. Краснова;
- 2). «Управление и оптимизация в многоуровневых и сетевых системах организационно-технической природы», координаторы – член-корр. Д.А. Новиков, М.В. Губко.

Во втором направлении выделены три поднаправления:

- Управление и оптимизация в сетцентрических системах, координаторы – А.В. Ахметзянов, П.Ю. Чеботарёв;
- Интеллектуальное управление движущимися объектами, координаторы – В.Г. Лебедев, М.Х. Дорри;
- Моделирование и оптимизация многоуровневых информационно-управляющих систем реального времени, координаторы – В.В. Кульба, Б.В. Павлов.

Помимо ИПУ РАН, в Программе выразили готовность участвовать Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Научный геоинформационный центр РАН; Институт проблем транспорта им. Н.С. Соломенко РАН (Санкт-Петербург), Институт проблем управления сложными системами РАН (Самара), Самарская секция Научного совета РАН по проблемам движения и навигации, Институт проблем точной механики и управления РАН (Саратов), Институт механики и машиностроения РАН (Казань), Институт механики Уфимского научного центра РАН, Институт динамики систем и теории управления СО РАН (Иркутск), Институт проблем морских технологий ДВО РАН и Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН (Владивосток).

Институт также участвует в Программе ОЭММПУ РАН «Научные основы робототехники и мехатроники», координатор – академик Ф.Л. Черноусько, в рамках которой,

например, решается задача путевой стабилизации движения колёсных роботов.

Институт принимает участие в Программах фундаментальных исследований Президиума РАН:

- «Динамические системы и теория управления», координатор – академик А.Б. Куржанский;
- «Фундаментальный базис инновационных технологий прогноза, оценки, добычи и глубокой комплексной переработки стратегического минерального сырья, необходимого для модернизации экономики России», координаторы – академики Л.И. Леонтьев, Д.В. Рундквист.

Фундаментальные и прикладные исследования проводятся в Институте также в рамках региональных Программ и по заказам Министерства обороны, Министерства внутренних дел, Национального центрального бюро Интерпола при МВД России, ОАО «РЖД», Федерального научно-производственного центра «Научно-исследовательский институт измерительных систем им. Ю.Е. Седакова», Государственного космического научно-производственного центра им. М.В. Хруничева, ОАО «Научно-исследовательский электромеханический институт», ВНИИ по эксплуатации атомных электростанций, ФГУП «ЦАГИ» и многих других организаций.

Сотрудники Института участвуют в работах по более 50 грантам Российского фонда фундаментальных исследований.

В рамках Федеральной космической программы России на 2006-2015 гг. для создаваемой в ГКНПЦ им. М.В. Хруничева перспективной трёхступенчатой составной ракеты-носителя «Ангара» разработаны (применительно к версии «Ангара-А5») система управления расходом топлива и принципиально новая пневмогидравлическая система подачи топлива (ПГСР) с использованием новых непрерывных датчиков давления и алгоритмических средств диагностики и парирования отказов в каналах измерения и в исполнительных органах. Эти системы предназначены для существенного улучшения энергетических характеристик ракеты, поддержания антикавитационного режима работы жидкостного ракетного двигателя с соблюдением

требований прочности топливных баков жидкостной ракеты. При построении системы управления расходом топлива и ПГСП использовались новые принципы, позволившие существенно расширить возможности применения ракетносителей, учитывались требования унификации ракетных блоков, входящих в состав носителей. Были разработаны также программные и контрольные средства, используемые в технологической цепи создания и отработки бортового программного обеспечения ракетносителей. Разработаны новые принципы и алгоритмы действия бортовых систем кислородно-водородных разгонных блоков (КВРБ) перспективных ракетносителей тяжёлого класса для обеспечения существенного повышения длительности эксплуатации КВРБ в космическом пространстве (А.Я. Андриенко, В.П. Иванов).

В 2007 г. в Институте были созданы первые молодёжные научные школы (МНШ), развиваются другие формы интенсификации финансовой поддержки научных исследований молодых учёных. Сегодня такие МНШ действуют в 20 лабораториях Института. Активен Совет молодых учёных и специалистов, который организует и проводит различные конкурсы работ молодых учёных и молодёжные научные конференции. В Институте работает четыре диссертационных совета по восьми специальностям.

Сотрудники ИПУ активно участвуют в ведущих международных научных форумах по управлению. В августе 2011 г. в Милане прошёл XVIII Конгресс Международной федерации по автоматическому управлению, на котором с докладами выступили 42 научных сотрудника Института.

В 2013 г. в Санкт-Петербурге при активном участии Института была организована и прошла международная конференция MIM-2013 (Manufacturing Modelling, Management and Control), принявшая 455 участников из 61 страны, причём более 300 человек – из стран дальнего зарубежья. На конференции было представлено 387 докладов. Проведение крупного международного мероприятия, уже второго (после INCOM'09 – тематического симпозиума «Information Control Problems in Manufacturing» ИФАК 2009 г., проходившего в ИПУ), стало возможным благодаря усилиям Н.Н. Бахтадзе.

Ежегодно в стенах Института проводится ряд международных и всероссийских научных и научно-практических конференций и семинаров по различным направлениям теории управления. Среди них: Международная конференция им. Е.С. Пятницкого «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления» (СТАВ), Общероссийский семинар «Современные методы навигации и управления движением», Всероссийская молодёжная научная конференция по проблемам управления, Международная конференция «Идентификация систем и проблемы управления» (SICPRO), Международная конференция и выставка «Цифровая обработка сигналов», Международная конференция «Проблемы управления безопасностью сложных систем», Международная конференция «Системы проектирования, технологической подготовки производства и управления этапами жизненного цикла промышленного продукта CAD/CAM», Международная конференция «Параллельные вычисления и задачи управления» (РАСО) и др. В их работе принимают участие сотни ведущих специалистов российской и мировой науки управления.

Сегодня, как и на протяжении всей своей славной истории, Институт остаётся крупнейшим научно-исследовательским институтом страны и одним из самых авторитетных научных центров в мире в области науки управления и автоматизации. Редколлегия, редакция и читатели журнала поздравляют ИПУ РАН и его сотрудников с юбилеем!

УДК 519.865 + 519.95

ББК 22.165

ИГРЫ С ДОРОГИМИ ИНФОРМАЦИОННЫМИ ОБМЕНАМИ

Горелов М. А.¹

(ФГБУН Вычислительный Центр
им. А.А. Дородницына РАН, Москва)

В статье рассматривается иерархическая игра двух лиц с возможностью обмена информацией о выборе игрока нижнего уровня. Объем и содержание этой информации определяет игрок верхнего уровня. Но при этом предполагается, что получение и обработка информации требует определенных затрат, что влияет на выигрыш игрока. Вычисляется максимальный гарантированный результат игрока верхнего уровня в соответствующей игре и строится его оптимальная стратегия.

Ключевые слова: иерархические игры, информационные расширения, максимальный гарантированный результат.

1. Введение

Одно из основных положений информационной теории иерархических систем [4, 8] состоит в том, что иерархия возникает там и постольку, где и поскольку невозможна своевременная централизованная обработка информации. Пожалуй, центральным здесь является тезис о том, что информация, которой обладает лицо, принимающее решения, в момент выбора ограничена.

Ограничения такого рода могут возникать по разным причинам, а потому имеют различную природу и должны моделироваться по-разному.

¹ Михаил Александрович Горелов, кандидат физико-математических наук, (griefer@ccas.ru).

Видимо, впервые модель такого рода изучалась в [1] (есть более поздние работы тех же авторов, в которых примерно те же идеи реализуются в более сложных моделях). Там содержание информации, получаемой элементом верхнего уровня, задавалось в модели экзогенно¹. Такого рода ограничения могут возникать, например, из-за наличия иерархии характерных времен принятия решений. Во многих системах, например, экономических, элементы нижнего уровня принимают решения чаще, чем элемент верхнего уровня. Если моделировать такую систему с помощью статической игры, то вполне естественно возникает ситуация, когда элемент верхнего уровня *не может* иметь доступа к какой-то информации о выборах подчиненных.

Второй класс моделей был предложен в [6] и развит в нескольких последующих работах. В этом случае предполагается, что элемент верхнего уровня сам вправе выбирать содержание получаемой им информации, но ограничен объем этой информации. Такая ситуация может возникать, например, если ограничено время на выработку решения элементом верхнего уровня.

В обоих случаях информационные ограничения имели «жесткий» характер. В данной работе будет рассмотрен третий вариант, когда получение информации в принципе возможно, но сопряжено с определенными затратами, а потому может оказаться нерациональным. Эти затраты могут оказаться связанными с необходимостью платить за покупаемую информацию. Но, наверное, чаще встречаются случаи, когда они связаны с затратами рабочего времени «офисного планктона» на обработку информации и денег на их оплату. По косвенным признакам можно судить о том, что с развитием информационных технологий этот слой трудящихся только растет, поэтому исследование данного случая представляется актуальным.

¹ Исторически эта модель исследовалась после и рассматривалась как некое обобщение игры Гермейера Γ_2 . Поэтому авторы предпочитают говорить об агрегировании информации.

На важность такого рода исследований неоднократно указывал А.Ф. Кононенко при личном общении, но построение соответствующих моделей наталкивалось на определенные трудности.

Прежде всего, если модель предусматривает наличие у игрока верхнего уровня права выбора объема получаемой информации, то модели типа [1] принципиально не годятся.

Далее, если игрок обладает правом решать, стоит ли ему платить за информацию, то он вправе знать о ее содержании. То есть нужно как-то описывать семантику. Здесь возникают принципиальные трудности. В какой-то мере эти трудности удалось обойти в [6], предоставив игроку право самому решать, какую информацию он хочет получить. Тот же подход используется и в данной работе.

Наконец, если стремиться явно описать в модели затраты на получение и обработку информации, то нужна *количественная* мера объема информации. А такая мера возможна, только если этот объем конечен. Модели такого рода до недавнего времени также не рассматривались. В этом смысле данной статье опять используется подход, предложенный в [6].

Далее исследуется лишь простейшая модель рассматриваемого типа: иерархическая игра двух лиц. Из дальнейшего изложения станет ясно, что усложнение модели (по крайней мере на теоретическом уровне) приводит скорее к количественному, чем к качественному усложнению ее исследования. Разумеется, жизнь может «подкинуть» и дополнительные вопросы принципиального характера, но пока они не видны.

2. Постановка задачи

Рассмотрим следующую игру двух лиц в нормальной форме $\Gamma = \langle U, V, g, h \rangle$. В ней участвуют два игрока, которых по традиции будем называть первым и вторым. Здесь U и V – это множества, а g и h – функции, определенные на декартовом произведении $U \times V$ и принимающие значения из множества действительных чисел \mathbf{R} .

Относительно элементов игры Γ сделаем обычные предположения. А именно, будем предполагать, что множества U и V наделены топологиями и компактны в этих топологиях. Функции g и h будем считать непрерывными в топологии произведения $U \times V$.

Элементы множества U интерпретируются как управления первого игрока, а элементы множества V – как управления второго. Функции g и h интерпретируются как функции выигрыша первого и второго игроков соответственно. В согласии с этой терминологией цели игроков описываются стремлением к увеличению своих выигрышей.

В дальнейшем предполагается, что все параметры этой игры известны обоим игрокам.

Во избежание недоразумений сделаем одно терминологическое замечание. На протяжении всей статьи будет систематически рассматриваться пара игр: игра Γ и построенная на ее основе игра $\Gamma_{\#}$. Поэтому термин «управление» будем относить к элементу множеств U и V . Более распространенный термин «стратегия» сохраним для элементов аналогичных множеств в игре $\Gamma_{\#}$. В содержательных терминах стратегия – это способ выбора управлений в зависимости от получаемой информации. Такая терминология достаточно широко распространена и позволяет избежать излишне тяжеловесных оборотов.

Игра Γ описывает «технологические» возможности игроков. В данной статье основной интерес будет представлять не она, а другая игра, которая строится следующим образом.

В дальнейшем будем считать, что оперирующая сторона в моделируемом конфликте отождествляется с первым игроком. Соответственно, исследование модели будет производиться с его позиций.

Будем предполагать, что первый игрок занимает привилегированное положение в моделируемой системе. В частности, он имеет право получать информацию об управлении, выбранном вторым игроком. Более того, первый игрок сам выбирает объем и содержание получаемой информации.

Для количественной оценки объема получаемой информации предположим, что эта информация может быть закодирована некоторой последовательностью из нулей и единиц. Длину соответствующей последовательности и будем считать объемом информации.

Сделанное в предыдущем абзаце предположение полностью соответствует действительности, если обмен информацией происходит, например, по электронной почте. Если обмен информацией происходит на каком-то естественном языке, то возможность такой кодировки тоже не вызывает сомнений. Какие-то проблемы могут возникнуть, если информация передается в виде визуальных образов, запахов и т.п. Но поскольку предполагается использование развиваемой техники при моделировании экономических систем, эти проблемы обсуждать не будем.

Разумеется, длина последовательности из нулей и единиц, кодирующей то или иное сообщение, зависит от способа кодировки. В контексте данной статьи естественно считать, что этот способ кодировки выбирается оптимальным способом. Иначе это предположение можно сформулировать следующим образом: первый игрок сам может выбирать способ кодировки.

Формализовать сделанные предположения можно следующим образом.

Пусть $\mathbf{N} = \{0, 1, \dots\}$ – множество натуральных чисел (в данном случае удобно считать ноль натуральным числом, как это принято, например, в теории алгоритмов). Для $n \in \mathbf{N}$ обозначим через $B^n = \{0, 1\}^n$ n -ю декартову степень множества $B = \{0, 1\}$. Естественно считать, что множество B^0 состоит из одной точки. Если X и Y – множества, то $\Phi(X, Y)$ будет обозначать множество всех функций из X в Y .

Положим

$$U_{\#} = \mathbf{N} \times \prod_{n \in \mathbf{N}} (\Phi(V, B^n) \times \Phi(B^n, U))$$

и $V_{\#} = V$. Определим отображение $\pi: U_{\#} \times V_{\#} \rightarrow U \times V$ следующим образом. Если $u_{\#} = (n, (P^0, u_*^0), (P^1, u_*^1), \dots, (P^n, u_*^n), \dots)$, а $v_{\#} = v$, то

$$\pi(u_{\#}, v_{\#}) = (u_*^n(P^n(v)), v).$$

Содержательно эти конструкции интерпретируются следующим образом. Первый игрок выбирает натуральное число n , характеризующее объем информации, который он готов переработать. Далее он выбирает отображение P^n , описывающее содержание этой информации и способ кодировки. И, наконец, он же задает способ u_*^n выбора своего управления в зависимости от полученной информации. Если все эти элементы зафиксированы, а второй игрок выберет управление v , то первый получит сообщение $P^n(v)$ длины n и в согласии со способом u_*^n выберет свое управление $u_*^n(P^n(v))$.

Таким образом, определены множества стратегий в игре $\Gamma_{\#} = \langle U_{\#}, V_{\#}, g_{\#}, h_{\#} \rangle$. Остается задать функции выигрыша.

Для определенности будем считать, что $h(u_{\#}, v_{\#}) = h(\pi(u_{\#}, v_{\#}))$ (напомним, что по определению $\pi(u_{\#}, v_{\#})$ – это пара управлений в исходной игре Γ). Это соответствует предположению о том, что все затраты на добывание и переработку информации о выборе второго игрока ложатся на игрока номер один¹.

Для первого игрока в данной ситуации имеется стандартная двухкритериальная задача. С одной стороны, при выборе стра-

¹ *Альтернативное предположение о том, что второй игрок несет затраты по передаче сообщения партнеру, тоже вполне реалистично. Формализуется оно практически так же, как это делается ниже для функции выигрыша первого игрока. Формулы в этом случае получаются чуть более сложными, но никаких принципиально новых трудностей не появляется. Поэтому ограничимся рассмотрением одного, более простого варианта.*

тегий $u_{\#} = (n, (P^0, u_*^0), (P^1, u_*^1), \dots)$ и $v_{\#} = v$ первый игрок получает выигрыш $g(\pi(u_{\#}, v_{\#}))$, который хочется максимизировать. С другой стороны, есть желание минимизировать объем перерабатываемой информации n . В соответствии с общими принципами теории исследования операций [2], чтобы получить корректную модель, следует задать свертку $S: \mathbf{R} \times \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}$ так, чтобы стремление к ее максимизации верно описывало цели игрока. Формально соответствующие конструкции могут выглядеть следующим образом.

Зададим отображение $\varpi: U_{\#} \rightarrow \mathbf{N}$ условием $\varpi(n, (P^0, u_*^0), (P^1, u_*^1), \dots) = n$. Тогда функция выигрыша первого игрока в новой игре $\Gamma_{\#}$ будет задаваться условием

$$g_{\#}(u_{\#}, v_{\#}) = S(g(\pi(u_{\#}, v_{\#})), \varpi(u_{\#})).$$

Функцию S будем считать непрерывной по первому аргументу.

Вероятно, наибольший интерес представляет линейная свертка, при которой $g_{\#}(u_{\#}, v_{\#}) = g(\pi(u_{\#}, v_{\#})) - p\varpi(u_{\#})$. В этом случае можно считать, что выигрыш $g(\pi(u_{\#}, v_{\#}))$ измеряется в рублях, а p – цена получения и обработки одного бита информации. Впрочем, получить какие-то дополнительные результаты, используя специфику именно этого способа свертки, не удастся. Поэтому в дальнейшем будет рассмотрен общий случай.

Чтобы завершить описание конфликта, следует задать отношение игроков к имеющимся у них неопределенностям. В данной статье рассмотрим следующий вариант.

Будем считать, что игрок номер один обладает правом первого хода, т.е. он первым выбирает свою стратегию $u_{\#}$ и сообщает ее партнеру.

При таких условиях второй игрок, принимая решения, может совершенно однозначно предсказать размер получаемого выигрыша. Из уже сделанного предположения о том, что второй игрок стремится максимизировать функцию h , будет следовать тогда, что он выберет управление из множества

$$BR(u_{\#}) = \left\{ v_{\#} \in V_{\#} : h_{\#}(u_{\#}, v_{\#}) = \max_{w_{\#} \in V_{\#}} h_{\#}(u_{\#}, w_{\#}) \right\},$$

по крайней мере, если максимум в последнем выражении достигается. Для корректности следует описать поведение второго игрока и в случае, когда стратегия $u_{\#}$ выбрана так, что этот максимум не достигается. Сделаем это стандартным образом, положив

$$BR(u_{\#}) = \left\{ v_{\#} \in V_{\#} : h_{\#}(u_{\#}, v_{\#}) > \sup_{w_{\#} \in V_{\#}} h_{\#}(u_{\#}, w_{\#}) - \kappa \right\}$$

в случае, когда верхняя грань не достигается¹.

Если первому игроку известна функция выигрыша партнера, он вполне может оценить множество его рациональных ответов $BR(u_{\#})$ на свою стратегию $u_{\#}$. Но конкретный выбор стратегии партнера останется ему неизвестным. Будем предполагать, что в этих условиях он будет ориентироваться на наихудший случай, т.е. максимизировать свой гарантированный результат

$$\inf_{v_{\#} \in BR(u_{\#})} g_{\#}(u_{\#}, v_{\#}).$$

Соответственно, его максимальный гарантированный результат будет равен

$$R(\Gamma_{\#}) = \sup_{u_{\#} \in U_{\#}} \inf_{v_{\#} \in BR(u_{\#})} g_{\#}(u_{\#}, v_{\#}).$$

3. Вычисление максимального гарантированного результата

Стратегии первого игрока в игре $\Gamma_{\#}$ выглядят устрашающе. Поэтому и задача вычисления максимального гарантированного результата $R(\Gamma_{\#})$ представляется весьма сложной. Упростить ее

¹ Здесь κ – дополнительный параметр модели, известный обоим игрокам, как и все остальные параметры. В дальнейшем будет видно, что на самом деле от его выбора ничего не зависит.

и, главное, понять качественную структуру оптимальных стратегий помогает приводимая далее теорема.

Введем следующие обозначения. Как обычно, U^m будет обозначать множество всех наборов (u^0, \dots, u^{m-1}) , где $u^i \in U$ ($i = 1, \dots, m$). Положим

$$L(u^0, \dots, u^{m-1}) = \max_{v \in V} \min_{0 \leq i \leq m-1} h(u^i, v),$$

$$D(u^0, \dots, u^{m-1}) = \{ (u^i, v) : h(u^i, v) > L(u^0, \dots, u^{m-1}), i = 0, \dots, m-1, v \in V \},$$

$$K(n, u^0, \dots, u^{m-1}) = \sup_{(u^i, v) \in D(u^0, \dots, u^{m-1})} S(g(u^i, v), n),$$

$$E(u^0, \dots, u^{m-1}) = \left\{ v \in V : \min_{0 \leq i \leq m-1} h(u^i, v) = L(u^0, \dots, u^{m-1}) \right\},$$

$$M(n, u^0, \dots, u^{m-1}) = \min_{v \in E(u^0, \dots, u^{m-1})} \max_{0 \leq i \leq m-1} S(g(u^i, v), n).$$

Справедлива

Теорема. Имеет место равенство

$$R(\Gamma_{\#}) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{(u^0, \dots, u^{e(n)}) \in U^n} \max \left\{ K(u^0, \dots, u^{e(n)}), M(u^0, \dots, u^{e(n)}) \right\},$$

где $e(n) = 2^n - 1$.

Доказательство. Докажем сначала неравенство

$$(1) \quad R(\Gamma_{\#}) \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{(u^0, \dots, u^{e(n)}) \in U^n} \max \left\{ K(u^0, \dots, u^{e(n)}), M(u^0, \dots, u^{e(n)}) \right\}.$$

Пусть $u_{\#} = (n, (P^0, u_*^0), (P^1, u_*^1), \dots)$ – произвольная стратегия

первого игрока в игре $\Gamma_{\#}$. Положим $m = 2^n$. отождествим для удобства набор $(b_0, b_1, \dots, b_{n-1}) \in \{0, 1\}^n$ с натуральным числом $b_0 + 2b_1 + \dots + 2^{n-1}b_{n-1}$. Это число принадлежит множеству $\{0, \dots, m-1\}$. Обозначим $u_*^n(i) = u^i$ ($i = 0, \dots, m-1$).

Рассмотрим сначала случай, когда эта стратегия такова, что верхняя грань $\sup_{w_{\#} \in I_{\#}} h_{\#}(u_{\#}, w_{\#})$ не достигается. Это значит, что не

достигается верхняя грань $\sup_{w \in V} h(u_*^n(P^n(w)), w)$. Оценим эту

верхнюю грань.

Значение $u_*^n(P^n(w))$ при любом выборе w принадлежит множеству $\{u^0, \dots, u^{m-1}\}$. Поэтому

$$h(u_*^n(P^n(w)), w) \geq \min_{0 \leq i \leq m-1} h(u^i, w).$$

Следовательно,

$$\sup_{w \in I'} h(u_*^n(P^n(w)), w) \geq \max_{w \in I'} \min_{0 \leq i \leq m-1} h(u^i, w) = L(u^0, \dots, u^{m-1}).$$

Допустим, что

$$\sup_{w \in I'} h(u_*^n(P^n(w)), w) = \max_{w \in I'} \min_{0 \leq i \leq m-1} h(u^i, w) = L(u^0, \dots, u^{m-1}).$$

Тогда, выбрав $v \in E(u^0, \dots, u^{m-1})$, получим

$$\begin{aligned} h(u_*^n(P^n(v)), v) &\geq \min_{0 \leq i \leq m-1} h(u^i, v) = \max_{v \in I'} \min_{0 \leq i \leq m-1} h(u^i, v) = \\ &= L(u^0, \dots, u^{m-1}). \end{aligned}$$

А по сделанному предположению

$$h(u_*^n(P^n(v)), v) \leq \sup_{w \in I'} h(u_*^n(P^n(w)), w) = L(u^0, \dots, u^{m-1}).$$

Это означает, что верхняя грань $\sup_{w_{\#} \in I'_{\#}} h(u_{\#}, w_{\#})$ достигается в

любой точке множества $E(u^0, \dots, u^{m-1})$, вопреки предположению о стратегии $u_{\#}$. Значит, на самом деле

$$\sup_{w \in I'} h(u_*^n(P^n(w)), w) > L(u^0, \dots, u^{m-1}).$$

Но тогда в множестве $BR(u_{\#})$ найдется такая точка v^0 , что $h(u_*^n(P^n(v^0)), v^0) > L(u^0, \dots, u^{m-1})$. В силу определения величины

$K(n, u^0, \dots, u^{m-1})$ тогда выполняется неравенство

$$(2) \quad S(g(u_*^n(P^n(v^0)), v^0), n) \leq K(n, u^0, \dots, u^{m-1}).$$

А поскольку $v^0 \in BR(u_{\#})$, будем иметь

$$(3) \quad \inf_{v \in BR(u_{\#})} S(g(u_*^n(P^n(v)), v), n) \leq K(n, u^0, \dots, u^{m-1}),$$

и, тем более,

$$(4) \quad \begin{aligned} &\inf_{v \in BR(u_{\#})} S(g(u_*^n(P^n(v)), v), n) \leq \\ &\leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{(u^0, \dots, u^{e(n)}) \in U^n} \max \{K(u^0, \dots, u^{e(n)}), M(u^0, \dots, u^{e(n)})\}. \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим случай, когда максимум $\max_{w \in I'} h(u_*^n(P^n(w)), w)$ достигается.

Как и выше доказывается, что

$$\max_{w \in I'} h(u_*^n(P^n(w)), w) \geq L(u^0, \dots, u^{m-1}).$$

Но в данном случае имеется два варианта.

- 1) $\max_{w \in I'} h(u_*^n(P^n(w)), w) > L(u^0, \dots, u^{m-1});$
- 2) $\max_{w \in I'} h(u_*^n(P^n(w)), w) = L(u^0, \dots, u^{m-1}).$

Если реализуется первый вариант, то для любой стратегии $v^0 \in BR(u_{\#})$ выполняется включение

$$(u_*^n(P^n(v^0)), v^0) \in D(u^0, \dots, u^{m-1}),$$

а, следовательно, имеет место неравенство (2) и, тем более, неравенство (3).

Если же реализуется второй вариант, то все множество $E(u^0, \dots, u^{m-1})$ содержится в множестве $BR(u_{\#})$.

Пусть v^0 принадлежит $E(u^0, \dots, u^{m-1})$, а, значит, и $BR(u_{\#})$.

Вновь воспользовавшись тем фактом, что $u_*^n(P^n(v)) \in \{u^0, \dots, u^{m-1}\}$, получим неравенство

$$S(g(u_*^n(P^n(v^0)), v^0), n) \leq \max_{0 \leq i \leq m-1} S(g(u^i, v^0), n)$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} & \inf_{v \in E(u^0, \dots, u^{m-1})} S(g(u_*^n(P^n(v)), v), n) \leq \\ & \leq \min_{v \in E(u^0, \dots, u^{m-1})} \max_{0 \leq i \leq m-1} S(g(u^i, v), n) = M(n, u^0, \dots, u^{m-1}). \end{aligned}$$

В силу включения $E(u^0, \dots, u^{m-1}) \subseteq BR(u_{\#})$ получим отсюда

$$\inf_{v \in BR(u_{\#})} S(g(u_*^n(P^n(v)), v), n) \leq M(n, u^0, \dots, u^{m-1}).$$

Таким образом, в обоих вариантах выполняется неравенство

$$\begin{aligned} & \inf_{v \in BR(u_{\#})} S(g(u_*^n(P^n(v)), v), n) \leq \\ & \leq \max \{K(n, u^0, \dots, u^{m-1}), M(n, u^0, \dots, u^{m-1})\}. \end{aligned}$$

Отсюда немедленно следует неравенство (4).

А поскольку, как установлено, неравенство (4) выполняется для любой стратегии $u_{\#}$, выполняется и неравенство (1).

Теперь докажем противоположное неравенство

$$(5) \quad R(\Gamma_{\#}) \geq \sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{(u^0, \dots, u^{e(n)}) \in U^n} \max \{K(u^0, \dots, u^{e(n)}), M(u^0, \dots, u^{e(n)})\}.$$

Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Выберем $n \in \mathbb{N}$ так, что

$$\begin{aligned} & \sup_{(u^0, \dots, u^{e(n)}) \in U^n} \max \{K(u^0, \dots, u^{e(n)}), M(u^0, \dots, u^{e(n)})\} > \\ & > \sup_{k \in \mathbb{N}} \sup_{(u^0, \dots, u^{e(k)}) \in U^k} \max \{K(u^0, \dots, u^{e(k)}), M(u^0, \dots, u^{e(k)})\} - \varepsilon. \end{aligned}$$

Положим $m = 2^n$. Далее, выберем такой набор (u^0, \dots, u^{m-1}) , что

$$\begin{aligned} & \max \{K(u^0, \dots, u^{m-1}), M(u^0, \dots, u^{m-1})\} > \\ & > \sup_{(w^0, \dots, w^{m-1}) \in U^m} \max \{K(w^0, \dots, w^{m-1}), M(w^0, \dots, w^{m-1})\} - \varepsilon. \end{aligned}$$

Теперь придется рассмотреть два случая. Допустим сначала, что $K(u^0, \dots, u^{m-1}) \geq M(u^0, \dots, u^{m-1})$.

Тогда сформируем стратегию $u_{\#}$ следующим образом. Ее первым элементом, определяющим объем перерабатываемой информации, будем считать уже выбранное число n . Понятно, что в таком случае от отображений P^i и u_*^i при $i \neq n$ ничего не зависит, поэтому их можно выбрать произвольно. Остается определить функции P^n и u_*^n .

Фиксируем в множестве $D(u^0, \dots, u^{m-1})$ такую точку (u^i, v^0) , что $S(g(u^i, v^0), n) > K(n, u^0, \dots, u^{m-1}) - \varepsilon$. Определим отображения $Q^n : V \rightarrow \{0, 1\}^m$ и $u_*^n : \{0, 1\}^m \rightarrow U$ так, что $u_*^n(i) = u^i$ и при любом $v \in V$ выполняется равенство

$$h(u_*^n(Q^n(v), v)) = \min_{0 \leq i \leq m-1} h(u^i, v).$$

Определим отображение $P^n : V \rightarrow \{0, 1\}^m$ условием

$$P^n(v) = \begin{cases} j, & \text{если } v = v^0, \\ Q^n(v) & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Таким образом, полностью определена стратегия $u_{\#} = (n, (P^0, u_*^0), (P^1, u_*^1), \dots)$.

Для этой стратегии $u_{\#}$ выполняется равенство $BR(u_{\#}) = \{v^0\}$. В самом деле, по определению

$$\pi(u_{\#}, v^0) = (u_*^n(P^n(v^0)), v^0) = (u_*^n(j), v^0) = (u^j, v^0).$$

Следовательно, $h_{\#}(u_{\#}, v^0) = h(\pi(u_{\#}, v^0)) = h(u^j, v^0)$, а точка (u^j, v^0) принадлежит множеству $D(u^0, \dots, u^{m-1})$, поэтому $h(u^j, v^0) > L(u^0, \dots, u^{m-1})$. С другой стороны, при $v \neq v^0$ имеем

$$\begin{aligned} h_{\#}(u_{\#}, v) &= h(\pi(u_{\#}, v)) = h(u_*^n(P^n(v)), v) = h(u_*^n(Q^n(v)), v) = \\ &= \min_{0 \leq i \leq m-1} h(u^i, v) \leq \max_{v \in V} \min_{0 \leq i \leq m-1} h(u^i, v) = L(u^0, \dots, u^{m-1}). \end{aligned}$$

Таким образом, максимум $\max_{v \in V_{\#} = V} h_{\#}(u_{\#}, v)$ достигается, причем в одной точке v^0 , откуда и следует равенство $BR(u_{\#}) = \{v^0\}$.

А тогда

$$\begin{aligned} \inf_{v \in BR(u_{\#})} g_{\#}(u_{\#}, v) &= g_{\#}(u_{\#}, v^0) = S(g(\pi(u_{\#}, v^0)), n) = \\ &= S(g(u^j, v^0), n) > K(n, u^0, \dots, u^{m-1}) - \varepsilon = \\ &= \max\{K(n, u^0, \dots, u^{m-1}), M(n, u^0, \dots, u^{m-1})\} - \varepsilon \end{aligned}$$

(последнее неравенство выполняется в силу выбора точки (u^j, v^0)).

Теперь обратимся к случаю $K(u^0, \dots, u^{m-1}) < M(u^0, \dots, u^{m-1})$.

Пусть функции $Q^n : V \rightarrow \{0, 1\}^m$ и $u_*^n : \{0, 1\}^m \rightarrow U$ определены как в предыдущем случае. Определим еще отображение $T^n : V \rightarrow \{0, 1\}^m$ так, что при любом $v \in V$ выполняется равенство

$$S(g(u_*^n(T^n(v)), v), n) = \max_{0 \leq i \leq m-1} S(g(u^i, v), n)$$

и положим

$$P^n(v) = \begin{cases} T^n(v), & \text{если } v \in E(u^0, \dots, u^{m-1}), \\ Q^n(v) & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Определив отображения P^i и u_*^i при $i \neq n$ произвольным образом, получим стратегию $u_{\#} = (n, (P^0, u_*^0), (P^1, u_*^1), \dots)$. Оценим множество рациональных ответов второго игрока на эту стратегию.

Если $v \notin E(u^0, \dots, u^{m-1})$, то будем иметь

$$h_{\#}(u_{\#}, v) = h(\pi(u_{\#}, v)) = h(u_{*}^n(Q^n(v)), v) = \min_{0 \leq i \leq m-1} h(u^i, v) < \\ < \max_{v \in V} \min_{0 \leq i \leq m-1} h(u^i, v) = L(u^0, \dots, u^{m-1})$$

(неравенство строгое потому, что $v \notin E(u^0, \dots, u^{m-1})$).

$$\text{Если же } v \in E(u^0, \dots, u^{m-1}), \text{ то} \\ g_{\#}(u_{\#}, v) = S(g(\pi(u_{\#}, v)), n) = S(g(u_{*}^n(T(v)), v), n) = \\ = \max_{0 \leq i \leq m-1} S(g(u^i, v), n) \geq \min_{v \in E(u^0, \dots, u^{m-1})} \max_{0 \leq i \leq m-1} S(g(u^i, v), n) = \\ = M(n, u^0, \dots, u^{m-1}) > K(n, u^0, \dots, u^{m-1}).$$

Но неравенство $S(g(u_{*}^n(T(v)), v), n) > K(n, u^0, \dots, u^{m-1})$ говорит о том, что точка $(u_{*}^n(T(v)), v)$ не принадлежит множеству $D(u^0, \dots, u^{m-1})$ и, следовательно, $h(u_{*}^n(T(v)), v) \leq L(u^0, \dots, u^{m-1})$. А с другой стороны, так как $v \in E(u^0, \dots, u^{m-1})$ имеем

$$h(u_{*}^n(T(v)), v) \geq \min_{1 \leq i \leq m-1} h(u^i, v) = \\ = \max_{v \in V} \min_{1 \leq i \leq m-1} h(u^i, v) = L(u^0, \dots, u^{m-1}).$$

Значит, на самом деле $h(u_{*}^n(T(v)), v) = L(u^0, \dots, u^{m-1})$.

Таким образом, приходим к выводу, что максимум $\max_{v \in V_{\#}=V} h_{\#}(u_{\#}, v)$ достигается в любой точке множества $E(u^0, \dots, u^{m-1})$ и только в них.

Но, как уже показано, если $v \in E(u^0, \dots, u^{m-1})$, то $g_{\#}(u_{\#}, v) \geq M(n, u^0, \dots, u^{m-1})$, следовательно,

$$\inf_{v \in BR(u_{\#})} g_{\#}(u_{\#}, v) = \inf_{v \in E(u^0, \dots, u^{m-1})} g_{\#}(u_{\#}, v) \geq M(n, u^0, \dots, u^{m-1}) = \\ = \max\{K(n, u^0, \dots, u^{m-1}), M(n, u^0, \dots, u^{m-1})\} > \\ > \max\{K(n, u^0, \dots, u^{m-1}), M(n, u^0, \dots, u^{m-1})\} - \varepsilon.$$

Подведем итоги. В любом случае существует стратегия $u_{\#}$, для которой

$$\inf_{v \in BR(u_{\#})} g_{\#}(u_{\#}, v) > \max\{K(n, u^0, \dots, u^{m-1}), M(n, u^0, \dots, u^{m-1})\} - \varepsilon.$$

Следовательно, тем более

$$R(\Gamma_{\#}) > \max\{K(n, u^0, \dots, u^{m-1}), M(n, u^0, \dots, u^{m-1})\} - \varepsilon.$$

Но тогда в силу выбора управлений (u^0, \dots, u^{m-1}) имеем

$$R(\Gamma_{\#}) > \sup_{(w^0, \dots, w^{m-1}) \in U^m} \max \{K(w^0, \dots, w^{m-1}), M(w^0, \dots, w^{m-1})\} - 2\varepsilon,$$

а в силу выбора числа n выполняется неравенство

$$R(\Gamma_{\#}) > \sup_{k \in \mathbb{N}} \sup_{(u^0, \dots, u^{e(k)}) \in U^k} \max \{K(u^0, \dots, u^{e(k)}), M(u^0, \dots, u^{e(k)})\} - 3\varepsilon.$$

В силу произвольности ε отсюда следует неравенство (5).

Из неравенств (1) и (5) немедленно следует результат теоремы.

4. Некоторые оценки

Даже с учетом доказанной теоремы задача вычисления максимального гарантированного результата в игре $\Gamma_{\#}$ представляется весьма сложной, поэтому приведем некоторые априорные оценки. Из формулировки теоремы видно, что сложность построения оптимальной стратегии $u_{\#}$ в значительной степени определяется объемом $\varpi(u_{\#})$ соответствующей ей информации. Эту величину и попытаемся оценить.

Начнем с заполнения одного пробела в доказательстве теоремы. Дело в том, что множество \mathbb{N} не компактно, поэтому при сделанных предположениях максимальный гарантированный результат может оказаться бесконечным. В этом случае рассуждения из доказательства можно модифицировать так, что будет доказано, что если бесконечна одна часть равенства из утверждения теоремы, то бесконечна и вторая. Впрочем, это не представляет значительного интереса по следующим причинам.

По смыслу свертки S эта функция должна быть неубывающей по первому аргументу при фиксированном втором и невозрастающей по второму при фиксированном первом. Если принять это предположение, то можно утверждать, что $R(\Gamma_{\#}) \leq S(M, 0)$, где

$$M = \max_{(u, v) \in U \times V} g(u, v).$$

Дальнейшие оценки существенным образом зависят от «геометрии» задачи, поэтому приведем их для случая

$$g_{\#}(u_{\#}, v_{\#}) = g(\pi(u_{\#}, v_{\#})) - p\varpi(u_{\#}).$$

Из содержательных соображений понятно, что с ростом объема обрабатываемой первым игроком информации уменьшаемое в этой формуле будет расти (формальное доказательство этого можно найти в [6]), так же как и вычитаемое. Но уменьшаемое может меняться в пределах от

$$\mu = \min_{(u,v) \in U \times V} g(u,v)$$

до M , поэтому при поиске оптимальных стратегий в игре $\Gamma_{\#}$ можно ограничиться рассмотрением лишь таких, у которых

$$\varpi(u_{\#}) \leq \frac{M - \mu}{p}.$$

Качество этой оценки можно улучшить, увеличив μ или уменьшив M .

Первого можно добиться, заменив μ на результат, гарантированный какой-либо конкретной стратегией $u_{\#}$. Разумеется, от выбора этой стратегии будет зависеть как качество оценки, так и сложность вычисления гарантированного результата. В качестве первого приближения можно использовать наилучшую стратегию при нулевом объеме обрабатываемой информации. Таким образом приходим к задаче вычисления максимального гарантированного результата в иерархической игре Гермейера Γ_1 (см., [3]). Он равен

$$\gamma_1 = \sup_{u \in U} \min_{v \in E(u)} g(u, v),$$

где

$$E(u) = \left\{ v \in V : h(u, v) = \max_{w \in V} h(u, w) \right\}.$$

Второго можно добиться, используя следующие соображения. Очевидно, максимальный гарантированный результат в игре $\Gamma_{\#}$ будет только расти с уменьшением p . Поэтому для получения верхней оценки можно рассмотреть случай $p = 0$. Но в этом случае игра $\Gamma_{\#}$ будет квазиинформационным расширением игры Γ , а как доказано в [7], тогда максимальный гарантированный результат в игре $\Gamma_{\#}$ не превосходит максимального

гарантированного результата γ_2 в иерархической игре Гермейера Γ_2 . Его вычисление даже проще, чем вычисление γ_1 . Явные формулы приводить не будем. Их можно найти в [3, 7].

Таким образом, приходим к следующей оценке

$$\varpi(u_{\#}) \leq \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{p}$$

объема обрабатываемой информации в оптимальной стратегии $u_{\#}$.

Приведем оценку другого типа. Ее сформулируем сразу для случая $p = 0$, поскольку из сказанного выше ясно, что при переходе к положительным p эта оценка сохранится.

Определим величину

$$L = \max_{v \in V} \min_{u \in U} h(u, v).$$

В [5] показано, что для «типичных» в некотором смысле игр максимум

$$\max_{(u, v) \in U \times V} g(u, v)$$

по незамкнутому множеству

$$D = \{(u, v) \in U \times V: h(u, v) > L\}$$

достигается в некоторой точке (u^*, v^*) , и для этой точки $g(u^*, v^*) = \gamma_2 \geq R(\Gamma_{\#})$. Именно такие «типичные» игры будем далее рассматривать.

Из рассуждений, использованных при доказательстве теоремы, следует, что при поиске оптимальной можно ограничиться рассмотрением только таких стратегий $u_{\#}$, для которых значение $n = \varpi(u_{\#})$ — это минимальное число, при котором пространство V может быть покрыто $m = 2^n$ множествами вида

$$O(u^i) = \{v \in V: h(u, v) < h(u^*, v^*)\},$$

$u^i \in U, i = 0, \dots, m-1$. Остается оценить это значение n .

Предположим, что множество V содержится в кубе K со стороной a , расположенном в d -мерном евклидовом пространстве так, что его ребра параллельны осям координат. Будем считать, что функция h определена на $U \times K$ и липшицева по второму аргументу с константой λ , т.е. при любом $u \in U$ и любых $v^1, v^2 \in K$ выполняется неравенство

$$|h(u, v^1) - h(u, v^2)| < \lambda \|v^1 - v^2\|.$$

В качестве нормы в данном случае удобно использовать равномерную:

$$\|(x_1, \dots, x_d) - (y_1, \dots, y_d)\| = \max_{0 \leq i \leq d} |x_i - y_i|.$$

Фиксируем произвольное $v \in V$ и выберем $u^i \in U$ так, что

$$h(u^i, v) = \min_{u \in U} h(u, v).$$

Тогда множество $O(u^i)$ будет содержать куб со стороной

$$b = 2 \frac{h(u^*, v^*) - L}{\lambda},$$

ребра которого параллельны осям координат.

Покроем куб K кубами со стороной b . Для этого, очевидно, достаточно $l = ([a/b] + 1)^d$ штук (квадратные скобки здесь и далее обозначают целую часть числа). Обозначив центры кубов покрытия как u^i , $i = 1, \dots, l$, получим покрытие множества V множествами $O(u^i)$. Отсюда получается оценка

$$n \leq \left[d \log_2 \left(\frac{a}{b} \right) + 1 \right] + 1.$$

Эта оценка довольно грубая, но, по-видимому, правильно характеризует сложность решаемой задачи в наихудшем случае.

Вообще понятно, что сложность вычисления максимального гарантированного результата в игре $\Gamma_{\#}$ в значительной степени определяется «сложностью» функции h . Точно определить взятый в кавычки термин пока не получается. Но, вероятно, пару параметров d и λ можно использовать, чтобы оценить эту «сложность» сверху.

5. Заключение

Пожалуй, главным в этой работе является построение сбалансированной модели, позволяющей сопоставить прагматическую ценность получаемой оперирующей стороной информации со стоимостью ее получения и обработки. Техника ее исследования уже была развита ранее и является достаточно стандартной.

Полученные результаты выглядят сложнее, чем аналогичные результаты для классических моделей. Но это вполне естественно, поскольку в модели, построенной выше, описываются более тонкие черты моделируемой ситуации.

Литература

1. АЛИЕВ В.С., КОНОНЕНКО А.Ф. *Точное агрегирование в теоретико-игровых моделях*. М.: ВЦ АН СССР, 1990. – 26 с.
2. ГЕРМЕЙЕР Ю.Б. *Введение в теорию исследования операций*. – М.: Наука, 1971. – 383 с.
3. ГЕРМЕЙЕР Ю.Б. *Игры с противоположными интересами*. – М.: Наука, 1976. – 327 с.
4. ГЕРМЕЙЕР Ю.Б., МОИСЕЕВ Н.Н. *О некоторых задачах теории иерархических систем управления* // Проблемы прикладной математики и механики. – М.: Наука, 1971. – С. 30–43.
5. ГОРЕЛОВ М.А. *Теоретико-множественная постановка задачи синтеза рациональных процедур обмена информацией в иерархической игре двух лиц* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2003. – Т. 43, №3. – С. 376–387.
6. ГОРЕЛОВ М.А. *Максимальный гарантированный результат при ограниченном объеме передаваемой информации* // Автоматика и телемеханика. – 2011. – №3. – С. 124–144.
7. КУКУШКИН Н.С., МОРОЗОВ В.В. *Теория неантагонистических игр*. – М.: МГУ, 1984. – 104 с.
8. МОИСЕЕВ Н.Н. *Математические задачи системного анализа*. – М.: Наука, 1981. – 488 с.

GAMES WITH COSTLY INFORMATION TRANSFER

Mikhail Gorelov, Computer Center of RAS, Moscow, Cand.Sc.,
(griefer@ccas.ru).

Abstract: We consider a principal-agent model with information transfer about the agent's choice, where the principal chooses information volume and contents. Information transfer and processing incurs costs influencing the payoff of the principal. We calculate the guaranteed payoff of the principal and build her optimal strategy.

Keywords: hierarchical games, informational extension, guaranteed payoff.

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии В.Н. Бурковым*

Поступила в редакцию 11.02.2014.

Опубликована 31.05.2014.

XI Всероссийская школа-конференция

молодых ученых

«Управление большими системами»

9-12 сентября, 2014, Арзамас

<http://ubs2014.ru/>

Срок подачи доклада

23. 06. 2014

УДК 519.714.2

ББК 32.965.5

АЛГОРИТМ ИДЕНТИФИКАЦИИ СТАТИЧЕСКОГО ОБЪЕКТА С ПЕРЕХОДОМ ИЗ ПРОСТРАНСТВА ВХОДОВ-ВЫХОДОВ В ПРОСТРАНСТВО ОЦЕНОК ПАРАМЕТРОВ

Гусев С. С.¹

(ФГБУН Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

Рассматривается алгоритм идентификации статического объекта с ограничениями. Предлагается случай, когда ошибка измерения выхода объекта у приводит к выходу оценок параметров за область допустимых оценок параметров H только с некоторой вероятностью p для всех n -мерных блоков и случай больших ошибок, когда вероятность строго равна нулю. Проводится анализ связи ошибки и вероятностей с использованием формулы Крамера.

Ключевые слова: идентификация, ограничения, статический объект, оценки параметров, ошибка измерения выхода.

1. Введение

Невозможно представить себе современную науку без широкого применения математического моделирования. Сущность этой методологии состоит в замене исходного объекта математической моделью и дальнейшем изучении модели с помощью реализуемых на компьютерах вычислительно-логических алгоритмов [7]. Работа не с самим объектом, а с его моделью дает возможность относительно быстро и без существенных затрат исследовать его свойства и поведение в

¹ Сергей Сергеевич Гусев, соискатель (gs-serg@mail.ru).

любых мыслимых ситуациях (преимущества теории). В то же время вычислительные (компьютерные, имитационные) эксперименты с моделями объектов позволяют, опираясь на мощь современных вычислительных методов и технических инструментов информатики, подробно и глубоко изучать объекты в достаточной полноте, недоступной чисто теоретическим подходам (преимущества эксперимента).

Наличие моделей и механизмов управления привлекательно как с точки зрения управляющего органа [5] – так как позволяет предсказать поведение управляемых субъектов, так и с точки зрения управляемых субъектов – так как делает предсказуемым поведение управляющего органа. То есть снижение неопределенности за счет использования механизмов управления является одним из существенных свойств любой организации как социального института.

Задача идентификации объекта управления заключается в определении структуры системы уравнений математического описания и значений её коэффициентов, которые обеспечивают наилучшее совпадение выходных переменных модели и процесса при одинаковых входных воздействиях. Процедура идентификации обеспечивает соответствие модели объекту.

Модели, построенные в процессе идентификации объектов, могут быть использованы для разных целей. На практике чаще всего модели используются или для прогноза выхода объекта на некоторое время вперед, или для расчета контура управления. В первом случае от модели требуется небольшая ошибка прогноза, во втором – «хорошие» оценки параметров управляемого объекта. Второе требование гораздо жестче. Получить хороший прогноз намного легче, чем точные оценки параметров. Основная причина такого положения – критерии идентификации. Широко используемый на практике среднеквадратический критерий полностью адекватен задаче минимизации ошибки прогноза. При этом оценки параметров могут быть и плохими. Для решения задачи получения точных оценок при среднеквадратическом критерии идентификации

необходимо ввести дополнительные требования к входным сигналам и распределениям помех.

На практике неизвестный объект редко бывает «черным ящиком». В большинстве случаев имеется априорная информация о свойствах объекта, которая следует из физических, технических, технологических и других условий. Эта информация существенно сужает область поисков неизвестных параметров. Например, если заранее известно, что объект устойчив, а применительно к технологическим процессам это почти всегда так, то параметры объекта могут лежать только в определенной области устойчивости. То же самое относится и к входным переменным. Обычно из опыта эксплуатации конкретного объекта известно, что коэффициенты усиления по входным переменным ограничены в каких-то пределах, как было описано выше в задаче идентификации объекта управления.

Если используется какая-либо известная процедура идентификации, например метод наименьших квадратов (МНК), в результате которой по экспериментальным данным о входе и выходе объекта получены оценки его параметров, то можно проверить соответствие оценок априорным ограничениям объекта управления. То есть проверка производится после идентификации. МНК – математический метод, применяемый для решения задач, основанный на минимизации суммы квадратов некоторых функций от искомым переменных [7].

Качество идентификации объекта управления в большей степени определяет и качество управления сложным объектом. Большую роль при этом играет учет априорной информации о структуре и параметрах объекта. В статье исследуется работа специального алгоритма идентификации, учитывающего определенную информацию о параметрах. Исследуется работа алгоритма при наличии помехи при измерении выхода. Анализируется связь точности идентификации и величины ошибки измерения.

В работе предпринимается попытка встроить проверку оценок в сам алгоритм идентификации. До недавнего времени

такие проверки невозможно было использовать из-за недостаточной мощности вычислительных машин.

2. Постановка задачи

Рассмотрим алгоритм идентификации, учитывающий априорную информацию о параметрах объекта. Будем рассматривать объект вида

$$(1) \quad y = h^T x,$$

где y – скалярный выход объекта; x – вектор-строка входных переменных размерности n ; h – вектор-строка неизвестных параметров объекта размерности n . Дополнительно об объекте (1) известно, что параметры h , принадлежат априорно известной области H , т.е.

$$(2) \quad h \in H.$$

Задача состоит в том, чтобы по экспериментальным данным, заданным в виде матрицы

$$(3) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} & y_1 \\ 2 & x_{22} & x_{22} & \dots & x_{2n} & y_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ i & x_{i1} & x_{i2} & \dots & x_{in} & y_i \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s & x_{s1} & x_{s2} & \dots & x_{sn} & y_s \end{pmatrix},$$

определить оценки параметров h с учетом условия (2). Критерием точности определения оценок параметров объекта является известная область принадлежности параметров h .

3. Алгоритм идентификации

Из матрицы исходных экспериментальных данных (3) выделим матрицу входов размеров $n \times s$

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{s1} & x_{s2} & \dots & x_{sn} \end{pmatrix}$$

и матрицу выхода $1 \times s$

$$Y^T = \|y_1, y_2 \dots y_s\|.$$

Алгоритм идентификации, подробно описанный в [9], состоит в следующем. Из матрицы исходных данных (3) выбираются блоки из произвольных n строк (по размерности объекта). Для каждого блока составляется своя система уравнений. Ниже приведена система уравнений, соответствующая первому из таких блоков

$$k_1 x_{11} + k_2 x_{12} + \dots + k_n x_{1n} = y_1,$$

$$k_1 x_{21} + k_2 x_{22} + \dots + k_n x_{2n} = y_2,$$

...

$$k_1 x_{n1} + k_2 x_{n2} + \dots + k_n x_{nn} = y_n;$$

где k – оценки параметров объекта h , или в матричном виде

$$Xk^T = Y.$$

Произведя умножение левой и правой частей этого равенства слева на X^T , получим систему нормальных уравнений

$$X^T X k^T = X^T Y,$$

по которой с помощью МНК вычисляются оценки параметров объекта (1).

Из матрицы (3) можно получить C_s^n таких n -мерных блоков, для каждого из которых строится свой вектор оценок параметров объекта (1). Все эти оценки параметров собраны в матрицу B , содержащую C_s^n строк и $2n$ столбцов и имеющую вид:

$$(4) \quad B = \left\| \begin{array}{cccccccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{L1} & a_{L2} & \dots & a_{Ln} & k_{L1} & k_{L2} & \dots & k_{Ln} \end{array} \right\|,$$

где $L = C_s^n$.

В любой i -й строке матрицы B в первых n позициях перечислены номера строк a_{ij} матрицы A , использованные для вычисления n оценок k_{ij} , вычисленных по этим строкам и расположенных в (4) в i -й строке на последних n позициях. Априорное условие (2) учитывается путем вычеркивания из (4) всех строк, в которых оценки k не удовлетворяют условию

$$k_i \in H,$$

где

$$k_i = \|k_{i1} \quad k_{i2} \quad \dots \quad k_{in}\|, \quad i = 1, 2, \dots, s.$$

В результате вычеркивания получается матрица

$$B_0 = \left\| \begin{array}{cccccccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{N1} & a_{N2} & \dots & a_{Nn} & k_{N1} & k_{N2} & \dots & k_{Nn} \end{array} \right\|,$$

$$k_i \in H,$$

где $N \leq L$.

Введем вектор частоты w , размерности s , имеющий вид

$$w^T = \|w(1) \quad w(2) \quad \dots \quad w(s)\|,$$

где $w(j)$ – частота использования номера j -й строки матрицы A в матрице B_0 .

Введем новую матрицу F , отличающуюся от A тем, что в нее добавлен столбец, включающий вектор w

$$(5) \quad F = \left\| \begin{array}{cccccc} w(1) & 1 & x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} & y_1 \\ w(2) & 2 & x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} & y_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ w(s) & s & x_{s1} & x_{s2} & \dots & x_{sn} & y_s \end{array} \right\|.$$

Последний шаг алгоритма состоит в следующем. Строки матрицы F сортируются по первому столбцу так, чтобы значения $w(j)$ возрастали снизу вверх. Обозначим полученную таким образом матрицу через F_0 .

Оператор, реализующий описанный алгоритм, обозначим через Ψ . Этот оператор преобразует матрицу исходных данных A в матрицу данных, отсортированную по частоте использования строк, в матрице B_0 , учитывающей априорные условия $k_i \in H$. Это можно записать так

$$(6) \quad F_0 = \Psi\{A\}, \quad k_i \in H.$$

Рассмотрим некоторые свойства оператора Ψ , позволяющие существенно увеличить точность идентификации, но для начала приведем сравнение приведенного алгоритма идентификации статического объекта с алгоритмом идентификации статического объекта работы [9].

В работе [9] алгоритм идентификации статического объекта состоит в следующем. Из матрицы исходных данных (3) выбираются блоки из произвольных n строк (по размерности объекта). Для каждого блока составляется своя система уравнений. Из матрицы (3) можно получить C_s^n таких n -мерных блоков, для каждого из которых строится свой вектор оценок параметров объекта (1). Все эти оценки параметров собраны в матрицу B , содержащую C_s^n строк и $2n$ столбцов.

Отличительной особенностью приведенного выше алгоритма от алгоритма, описанного в работе [9] является наличие дополнительного вектора частоты w , по которому сортируются строки, представляя новую матрицу F , которая отличается от матрицы A тем, что в нее добавлен столбец, включающий вектор частоты w . Строки матрицы F

сортируются по первому столбцу так, чтобы значения $w(j)$ возрастали снизу вверх.

4. Основные результаты

Докажем, что оператор Ψ преобразует матрицу исходных данных (3) таким образом, что данные с большими ошибками измерения с большой вероятностью оказываются внизу блока данных. Это позволяет отбросить часть данных с большими ошибками и использовать для идентификации только отфильтрованные данные.

Предположим, что входные переменные x измеряются без ошибок, а выход y – с ошибкой ε . Рассмотрим несколько основных случаев.

4.1. БОЛЬШИЕ ОШИБКИ

Предварительно введем некоторые определения.

Будем называть ошибку измерения конкретного выхода y_i большой, если при использовании этого выхода в любом n -мерном блоке оценки $k \notin H$.

Докажем следующее утверждение.

Теорема 1. Если в блоке исходных данных (3) точно в m произвольных строках выход y измеряется с большой ошибкой и выполняется условие $s > n + m$, то в результате использования оператора Ψ все строки с ошибкой окажутся внизу матрицы F_0 , по верхним $s - m - n$ строкам этой матрицы могут быть получены точные оценки параметров объекта (1).

Доказательство приведено в [8].

4.2. ОБЩИЙ СЛУЧАЙ

Рассмотрим теперь случай, когда ошибка измерения выхода y приводит к выходу оценок за область H только с некоторой вероятностью p для всех n -мерных блоков, в который вошел этот выход y . Ранее, при больших ошибках, эта вероятность строго была равна единице.

Пусть среди всех s данных (3) только два произвольных измерения выхода сделаны с ошибкой. Для краткости будем называть n -мерных блок, не содержащий строки с ошибочными измерениями, чистым, а содержащий – ошибочным. Ссылки на n -мерный блок и однозначно ему соответствующую строку в B , будем использовать одновременно.

Тогда имеет место следующая теорема.

Теорема 2. Если среди исходных данных (3) есть только два измерения выхода y_i и y_j , сделанные с ошибками, которые приводят к выходу оценок за область H с вероятностью p_i и p_j соответственно, и для определенности $p_i > p_j$, то в результате применения оператора Ψ в среднем будут выполняться неравенства

$$(7) \quad w(k) > w(j) > w(i), \quad k \neq i, \quad k \neq j.$$

Доказательство. Число всех возможных n -мерных блоков равно C_s^n и столько же строк в матрице B . Вычислим число строк матрицы B , содержащих 0, 1 и 2 ошибки соответственно.

Не содержат ошибок

$$(8) \quad N_0 = C_{s-2}^n \text{ строк.}$$

При этом каждая из $(s - 2)$ чистых строк упоминается

$$(9) \quad N_{01} = \frac{n}{s-2} C_{s-2}^n = C_{s-3}^{n-1} \text{ раз.}$$

Содержит строку i

$$(10) \quad N_i = C_{s-1}^{n-1}.$$

Грязная строка i в этом блоке упоминается все N_i раз

$$N_{i1} = C_{s-1}^{n-1},$$

Каждая чистая в этом блоке упоминается

$$N_{i01} = \frac{n-1}{s-1} C_{s-2}^{n-2}.$$

Содержит строку j

$$(11) \quad N_j = C_{s-1}^{n-1}.$$

Содержит строки j и i

$$(12) N_{ij} = C_{s-2}^{n-2}.$$

Среднее число строк с одной ошибкой i или j или двойной ошибкой i, j , попавших в блок B_0 (т.е. в которых оценки не вышли за границы области H), будет равно

$$(13) N_{iq} = (1 - p_i)C_{s-1}^{n-1}, \quad N_{jq} = (1 - p_j)C_{s-1}^{n-1}.$$

$$(14) N_{ij} = (1 - p_i)(1 - p_j)C_{s-2}^{n-2}.$$

Комбинируя формулы (5)–(14), вычислим средние частоты упоминания строк в матрице B_0 .

Частота упоминания каждой чистой строки состоит из четырех компонент:

$$N_{01} = C_{s-3}^{n-1} = \frac{n(s-n)(s-n-1)}{s(s-1)} C_s^n,$$

$$N_{0i} = (1 - p_i)C_{s-2}^{n-2} = (1 - p_i) \frac{n(n-1)}{s(s-1)} C_s^n,$$

$$N_{0j} = (1 - p_j) \frac{n(n-1)}{s(s-1)} C_s^n,$$

$$N_{0ij} = (1 - p_i p_j) \frac{n(n-1)(n-2)}{s(s-1)(s-2)} C_s^n.$$

Общая частота упоминания каждой чистой строки

$$N_{01} = \frac{n(n-1)}{s(s-1)} \left[\frac{(s-n)(s-n-1)}{(n-1)} + (2 - p_i - p_j) + (1 - p_i p_j) \frac{(n-2)}{(s-2)} \right] C_s^n.$$

Частота упоминания строк с помехой i и j

$$(15) N_i = \frac{n(n-1)}{s(s-1)} \left[(1 - p_i) + (1 - p_i p_j) \frac{n-2}{s-2} \right] C_s^n,$$

$$(16) N_j = \frac{n(n-1)}{s(s-1)} \left[(1 - p_j) + (1 - p_i p_j) \frac{n-2}{s-2} \right] C_s^n.$$

Чтобы частота упоминания чистых строк была больше частоты упоминания грязных строк, т.е. соблюдалось условие

$$N_i > N_j,$$

как следует из (15) и (16), должно соблюдаться условие

$$N_i = 1 - p_i > 1 - p_j = N_j$$

или $p_j > p_i$. Что доказывает требования теоремы.

Чтобы соблюдалось условие

$$N_{01} > N_i,$$

необходимо

$$N_{01} = \left[\frac{(s-n)(s-n-1)}{(n-1)} + (2 - p_i - p_j) + (1 - p_i p_j) \frac{(n-2)}{(s-2)} \right] >$$

$$> (1 - p_i) + (1 - p_i p_j) \frac{(n-2)}{(s-2)}$$

$$N_{01} = \frac{(s-n)(s-n-1)}{(n-1)} + 2 - p_j > 1,$$

$$\frac{(s-n)(s-n-1)}{(n-1)} + 1 > p_j.$$

То есть всегда, когда $s > n + 2$.

Стоит подчеркнуть, что последовательность строк, задаваемая теоремой 2, выполняется только в среднем, а не в каждом конкретном случае.

5. Связь ошибки и вероятностей

При реализации описанного алгоритма промежуточные оценки вычисляются по МНК с использованием формулы Крамера

$$k_i = \frac{|U_i|}{|U|}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

где $U = X^T X$ – определитель матрицы (3); U_i – определитель, который получается из определителя матрицы U заменой i -го столбца столбцом свободных членов.

При наличии ошибок измерения выхода оценки можно представить в следующем виде [6]:

$$k_j = \frac{|U_j|}{|U|} = h_j + \frac{|U_\varepsilon|}{|U|},$$

где U_ε – матрица, содержащая ошибку ε в j -м столбце.

Или подробнее, ошибка определения оценки k будет определяться формулой

$$(17) \quad k_j = h_j + \varepsilon \frac{|B_{ij}|}{|U|},$$

где $|B_{ij}|$ – минор матрицы U_j , не содержащий ошибок измерения выхода.

Ошибка оценки параметров

$$\Delta h_j = h_j - k_j$$

и ошибка измерения выхода ε связаны, как следует из (17), следующим образом:

$$\Delta h = -\varepsilon \frac{|B_{ij}|}{|U|}.$$

Вероятностное распределение ошибки определения параметра Δh будет иметь то же самое распределение, что и распределение ошибки измерения выхода с точностью до не зависящего от помехи коэффициента $|B_{ij}| / |U|$.

Если $f(\varepsilon)$ – плотность вероятности распределения центрированной ошибки измерения выхода ($M\{\varepsilon\} = 0$), то среднее значение ошибки определения параметра объекта будет определяться формулой

$$M\{\Delta h\} = - \int_{\varepsilon \in Q} f(\varepsilon) \varepsilon \frac{|B_{ij}|}{|U|} d\varepsilon.$$

И, очевидно, будет равно нулю.

Дисперсия ошибки определения параметра будет равна

$$D\{\Delta h\} = - \int_{\varepsilon \in Q} f(\varepsilon) \varepsilon^2 \frac{|B_{ij}|^2}{|U|^2} d\varepsilon.$$

Рассмотрим случай, когда априорно известная область существования параметров H представляет собой параллелепипед с ребрами, параллельными осям в пространстве параметров. Ошибка измерения выхода имеет центрированное нормальное распределение $N(0, \sigma)$. Для оценок параметров используются блоки (типа (4)), в которых только один выход измеряется с ошибкой. Рассмотрим два блока данных, отличающихся тем и только тем, что в одном случае ошибка измерения выхода имеет распределение $N(0, \sigma_1)$, а в другом $N(0, \sigma_2)$. Для определенности $\sigma_1 > \sigma_2$.

Тогда имеет место следующее утверждение.

При прочих равных условиях вероятность p_1 выхода оценки k_j за границы области H в первом случае будет больше вероятности p_2 выхода оценки k_j за границы области H во втором.

Доказательство непосредственно следует из рис. 1.

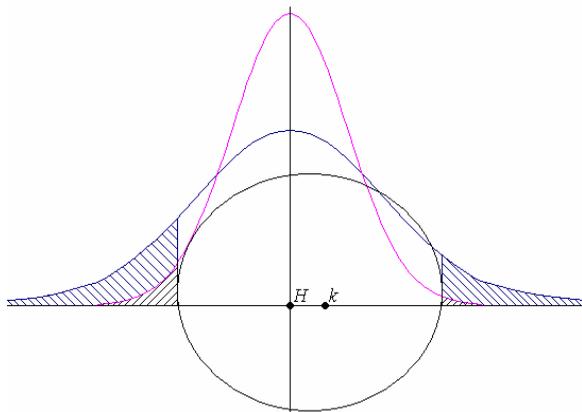


Рис. 1. Распределение ошибки оценки

Дисперсии ошибки измерения выхода ε и ошибки оценки Δh параметров связаны (в соответствии с (17)) коэффициентом

$$a = -\frac{|B_{ij}|}{|U|},$$

т.е. дисперсии оценок σ_{1h} и σ_{2h} вычисляются через дисперсии ошибки измерения выхода по формулам

$$\sigma_{1h} = a\sigma_1,$$

$$\sigma_{2h} = a\sigma_2.$$

Плотность вероятности ошибки определения параметров при ошибке измерения выхода с параметрами $N(0, \sigma_1)$ и $N(0, \sigma_2)$ определяется формулами

$$f_1(k_1) = \frac{1}{\sigma_{1h}\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(h-k_1)^2}{2\sigma_{1h}^2}},$$

$$f_2(k_2) = \frac{1}{\sigma_{2h}\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(h-k_2)^2}{2\sigma_{2h}^2}}.$$

Поскольку априорная область существования оценок в обоих случаях одна и та же:

$$h_{\min} < h_i < h_{\max},$$

то для вычисления вероятностей необходимо выполнять интегрирование то же в одинаковых пределах.

Вероятности выхода оценок за область H задаются формулами

$$p_1 = 1 - \int_{h_{\min}}^{h_{\max}} f_1(k_1)dh, \quad p_2 = 1 - \int_{h_{\min}}^{h_{\max}} f_2(k_2)dh.$$

6. Пример идентификации статического объекта

6.1. ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ

Для примера рассмотрим статический объект с тремя входами [9]. Структура модели, которая считается известной, задается уравнением

$$(18) y_i^* = ax_{1i} + bx_{2i} + cx_{3i}, \quad i = 1, 2, \dots, 9.$$

Исходные данные приведены в таблице 1.

Заранее известно, что оценки параметров a , b и c лежат в пределах:

$$(19) 0 < a < 2; \quad -1 < b < 0; \quad 0 < c < 1,4.$$

Необходимо по данным 9 экспериментам получить оценки параметров модели (18), учитывая априорную информацию о неизвестных параметрах a , b и c , содержащуюся в неравенствах (19), и оценить точность полученных оценок.

Таблица 1. Исходные данные для идентификации трехмерного объекта

| № | x_1 | x_2 | x_3 | y |
|---|-------|-------|-------|-----|
| 1 | 1 | 2 | 3 | 11 |
| 2 | 1 | 1 | 4 | 9 |
| 3 | 1 | 5 | 3 | 15 |
| 4 | 2 | 2 | 3 | 14 |
| 5 | 2 | 6 | 1 | 11 |
| 6 | 3 | 2 | 2 | 15 |
| 7 | 1 | 0 | 3 | 6 |
| 8 | 1 | 3 | 1 | 8 |
| 9 | 0 | 0 | 7 | 7 |

6.2. МНК ОЦЕНКИ БЕЗ УЧЕТА АПРИОРНОЙ ИНФОРМАЦИИ

Прежде чем использовать алгоритм, учитывающий априорную информацию, вычислим оценки параметров модели (18) с помощью обычной процедуры метода наименьших квадратов. В результате получим следующие значения оценок параметров по 9 экспериментам:

$$\hat{a} = 0,18 \pm 0,33; \quad \hat{b} = 0,29 \pm 0,41; \quad \hat{c} = 0,78 \pm 0,23.$$

Множественный коэффициент корреляции для такой модели будет равен $R^2 = 0,83$. Эти результаты используем в дальнейшем для сравнения с методом идентификации, учитывающим априорную информацию. Множественный коэффициент корреляции используется для исследования тесноты взаимосвязи между одним показателем и некоторым набором других показателей [6, 7].

6.3. ПЕРЕХОД В ПРОСТРАНСТВО ПАРАМЕТРОВ

Поскольку нам задан трехмерный объект, то для получения какой-либо оценки требуется не менее трех экспериментов, т.е. трех строк из таблицы 1. Используя все возможные комбинации из 9 по 3, получим 84 оценки, вычисленные по разным сочетаниям трех строк из таблицы исходных данных. На рис. 2 показана схема отбора трехстрочных блоков из блока исходных данных.

Для вычисления одного вектора оценок необходимо отобрать не менее трех строк. На рисунке выбираются 2, 6 и 8 строки из блока исходных данных.

Все данные о промежуточных оценках сведены в таблицу 2. Таблица содержит 84 строки оценок параметров a , b и c и номера строк блока исходных данных, которые были использованы для получения оценок в данной строке. Все полученные 84 оценки сведены в блок промежуточных оценок, показанный в таблице 2.



Рис. 2. Схема отбора трехстрочных блоков из блока исходных данных

Таблица 2. Полный блок промежуточных оценок

| № | Оценки параметров | | | Номера выбранных строк | | | Ind |
|----------|-------------------|----------|----------|------------------------|-----------------------|-----------------------|-----|
| | <i>a</i> | <i>b</i> | <i>c</i> | <i>n</i> ₁ | <i>n</i> ₂ | <i>n</i> ₃ | |
| 1 | 10 | 1,3 | 2 | 1 | 2 | 3 | 1 |
| 2 | 4 | 2,6 | 0,6 | 1 | 2 | 4 | 1 |
| 3 | -18 | 7 | 5 | 1 | 2 | 5 | 1 |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | |
| <i>i</i> | 3,5 | 1,1 | 1,1 | 2 | 6 | 8 | 1 |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | |
| 84 | 3 | 1,3 | 1 | 7 | 8 | 9 | 1 |

Для учета априорных ограничений нужно из таблицы 2 удалить строки, в которых содержатся оценки, не удовлетворяющие ограничениям (19). Выполнив это удаление, получим усеченный блок промежуточных оценок, фрагмент которого приведен в таблице 3.

Таблица 3. Усеченный блок промежуточных оценок

| № | Оценки параметров | | | Номера выбранных строк | | |
|----------|-------------------|----------|----------|------------------------|-----------------------|-----------------------|
| | <i>a</i> | <i>b</i> | <i>c</i> | <i>n</i> ₁ | <i>n</i> ₂ | <i>n</i> ₃ |
| 1 | 0,73 | -0,56 | 1,03 | 1 | 2 | 3 |
| 2 | 0,68 | -0,52 | 1,02 | 1 | 2 | 4 |
| 3 | 0,72 | -0,55 | 1,03 | 1 | 2 | 5 |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| <i>i</i> | 0,73 | -0,57 | 1,01 | 2 | 6 | 9 |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| 35 | 0,72 | -0,53 | 1,03 | 7 | 8 | 9 |

В таблице 3 содержатся только оценки, удовлетворяющие априорным ограничениям (14). Номера строк исходных данных, по которым вычислялись эти «хорошие» оценки, записаны в трех последних столбцах таблицы 3. На рис. 3 приведены гистограммы частоты использования разных строк блока исходных данных.

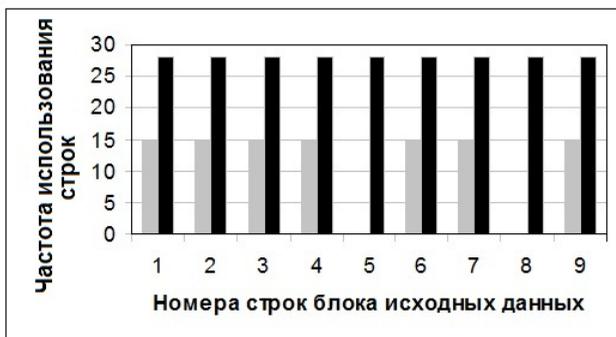


Рис. 3. Гистограммы частоты использования разных строк блока исходных данных; черные прямоугольники в полном блоке промежуточных оценок, серые – в усеченном блоке

Как видно из рис. 3, в полном блоке промежуточных оценок (черные прямоугольники) все строки блока исходных данных используются одинаковое число раз, а именно 28. Совершенно другая картина в усеченном блоке промежуточных оценок, хранящем только «хорошие» оценки, удовлетворяющие условиям (19).

Серые прямоугольники, соответствующие усеченному блоку, имеют разную высоту. Строки 1–4, 6, 7 и 9 используются по 15 раз, а строки 5 и 8 не используются совсем. Естественно предположить, что для получения «хороших» оценок, удовлетворяющих априорным условиям, использовались менее зашумленные исходные данные. Если принять эту гипотезу, то следует из блока исходных данных удалить те строки, которые редко используются.

6.4 ВОЗВРАЩЕНИЕ В ПРОСТРАНСТВО ИСХОДНЫХ ДАННЫХ

После удаления 5 и 8 строки блок исходных данных примет вид таблицы 4.

Проведем определение параметров модели (18) методом наименьших квадратов, используя данные из усеченной таблицы данных 3.

Таблица 4. Блок исходных данных, в котором удалены малоинформативные строки 5 и 8

| УСЕЧЕННЫЙ БЛОК ИСХОДНЫХ ДАННЫХ | | | | |
|--------------------------------|-------|-------|-------|-----|
| No | x_1 | x_2 | x_3 | y |
| 1 | 1 | 2 | 3 | 11 |
| 2 | 1 | 1 | 4 | 9 |
| 3 | 1 | 5 | 3 | 15 |
| 4 | 2 | 2 | 3 | 14 |
| 5 | 2 | 6 | 1 | 11 |
| 6 | 3 | 2 | 2 | 15 |
| 7 | 1 | 0 | 3 | 6 |
| 8 | 1 | 3 | 1 | 8 |
| 9 | 0 | 0 | 7 | 7 |

В результате получим следующие значения оценок параметров по 7 экспериментам:

$$\hat{a} = 0,72 \pm 0,0099; \quad \hat{b} = -0,53 \pm 0,0149; \quad \hat{c} = 1,01 \pm 0,0066.$$

Множественный коэффициент корреляции для такой модели будет равен $R^2 = 0,999910$. Сравнивая эти результаты с идентификацией по 9 экспериментам, видим, что точность оценок резко увеличилась.

В заключение заметим, что истинные значения параметров объекта были равны

$$a = 0,7; \quad b = -0,5; \quad c = 1.$$

7. Алгоритмы идентификации класса статических объектов управления

7.1. ПРИМЕР АЛГОРИТМА ИДЕНТИФИКАЦИИ ДЛЯ КЛАССА СТАТИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ УПРАВЛЕНИЯ

Примером исследуемого алгоритма идентификации для класса статических объектов будет служить метод идентификации статического объекта Чадеева – Илюшина, приведенный в работе [9].

В [9] рассматривается алгоритм идентификации по вероятностному критерию. Исходные экспериментальные

данные из пространства входов–выходов преобразуются в пространство оценок параметров. В пространстве параметров выделяется множество оценок, удовлетворяющих априорным ограничениям. На этом множестве по вероятностному критерию строятся оценки параметров. Приводится пример, иллюстрирующий эффективность предлагаемой процедуры, учитывающий априорную информацию о параметрах.

7.2. СРАВНЕНИЕ АЛГОРИТМА СТАТИЧЕСКОГО ОБЪЕКТА С ПЕРЕХОДОМ ИЗ ПРОСТРАНСТВА ВХОДОВ-ВЫХОДОВ В ПРОСТРАНСТВО ПАРАМЕТРОВ С ПРИВЕДЕННЫМ АЛГОРИТМОМ ДЛЯ ДАННОГО КЛАССА ОБЪЕКТОВ

Отличительной особенностью выбранного для сравнения алгоритма Чадеева – Илюшина с алгоритмом идентификации статического объекта с переходом из пространства входов–выходов в пространство параметров является то, что алгоритмы схожи по своей структуре и математическому описанию, за исключением отсутствия вектора частоты w (частоте упоминания строк) в алгоритме Чадеева – Илюшина по сравнению с алгоритмом идентификации статического объекта с переходом из пространства входов–выходов в пространство параметров. Вектор-столбец частоты w в алгоритме идентификации статического объекта с переходом из пространства входов–выходов в пространство параметров позволяет структурировать матрицу с исходными данными по частоте упоминания строк, что позволяет отсеивать нижние строки матрицы, которые являются малоинформативными, тем самым сокращая число строк в матрице, количество всевозможных переборov из оставшихся строк в усеченной матрице и, соответственно, сокращается время перебора «хороших» строк. Этой положительной особенностью не обладают другие алгоритмы идентификации статических объектов. Можно сказать, что алгоритм идентификации статических объектов управления является своего рода продолжением развития алгоритма Чадеева – Илюшина для класса статических объектов. Поэтому излагать математические

итерации алгоритма Чадеева –Илюшина, подобные тем, которые приведены в статье для алгоритма идентификации статического объекта с переходом из пространства входов–выходов в пространство параметров, нет смысла, так как результаты расчетов будут отличаться только отсутствием вектора частоты w алгоритма Чадеева – Илюшина из [9]. Использование алгоритма идентификации статического объекта с переходом из пространства входов–выходов в пространство параметров на практике показывает, что автор настоящей статьи, разработавший данный алгоритм идентификации для класса статических объектов, внес изменения в класс статических объектов. Единственным фактором алгоритма идентификации статического объекта с переходом из пространства входов–выходов в пространство параметров является наличие вектора частоты w , которая позволяет существенно увеличить точность расчета оценки параметров объекта управления путем отсеивания малоинформативных строк. Эти небольшие изменения в алгоритме идентификации статического объекта с переходом из пространства входов–выходов в пространство параметров, во-первых, отличают его от других алгоритмов класса статических объектов управления, а во-вторых, позволяют получать более точные оценки параметров объекта управления. Это позволяет обеспечить получение более точного значения множественного коэффициента корреляции для объекта управления и существенно повысить его быстродействие.

Научную новизну и практическую ценность [1] настоящей работы, обусловленные сравнительным результатом обоих алгоритмов, определяет:

- введение вектора частоты w , позволяющего отсеивать малоинформативные строки [1], тем самым сокращая время перебора строк блока преобразованных исходных данных статического объекта управления;
- увеличение точности расчета оценок параметров статических объектов управления;

- практическое применение алгоритма идентификации статического объекта с переходом из пространства входов-выходов в пространство параметров;
- математическая простота [1] использования математического аппарата на практике применительно к статическим объектам управления.

7.3. ВЫВОДЫ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ИССЛЕДОВАНИЯ

Результаты исследований уже существующих алгоритмов идентификации для класса статических объектов управления с алгоритмом идентификации статического объекта с переходом из пространства входов–выходов в пространство параметров показывают, что разработанный алгоритм идентификации для класса статических объектов управления показывает лучшие результаты в увеличении точности расчета оценок параметров статических объектов управления, определении множественного коэффициента корреляции [2, 3] и других характерных показателей для данного класса объектов. Алгоритм идентификации статического объекта с переходом из пространства входов–выходов в пространство параметров подходит для решения задач, связанных с классом статических объектов. Результат очевиден.

8. Заключение

В работе рассмотрен алгоритм идентификации статического объекта, учитывающий априорную информацию о его параметрах. Алгоритм преобразовывал блок исходных данных в множество блоков меньшей размерности. Для каждого из этих блоков вычислялись оценки параметров объекта и запоминались номера строк, использованных для вычисления этих оценок. Оператор, реализующий описанный алгоритм, преобразовывал матрицу исходных данных в специальную матрицу, учитывающую частоту попадания оценок в область H . При этом рассматривался объект, в котором входные переменные измерялись без ошибки, а выходные – с ошибкой.

Также проведен анализ связи ошибки измерения выхода с вероятностью выхода оценок параметров за априорно известную область существования параметров объекта.

Литература

1. ГУСЕВ С.С. *Построение модифицированного алгоритма идентификации динамического объекта управления по экспериментальным данным ядерной энергетической установки* // Управление большими системами. – 2014. – №47. – С. 167–186.
2. КЕНДАЛЛ М.Дж., СТЬЮАРД А. *Статистические выводы и связи*. – М.: Изд-во Наука, 1973. – 896 с.
3. КРАМЕР Г. *Математические методы статистики*. – М.: Изд-во 2, стерео., 1975. – 648 с.
4. ЛИННИК Ю.В. *Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической теории обработки наблюдений*. – М.: Изд-во Физматгиз, 1962. – 349 с.
5. НОВИКОВ Д.А. *Теория управления организационными системами*. – М.: Московский психолого-социальный институт, 2005. – 584 с.
6. РАЙБМАН Н.С., ЧАДЕЕВ В.М. *Построение моделей процессов производства*. – М., «Энергия», 1975. – 376 с.
7. САМАРСКИЙ А.А., МИХАЙЛОВ А.П. *Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры*. – 2-е изд., испр. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 320 с.
8. ЧАДЕЕВ В.М., ГУСЕВ С.С. *Идентификация с ограничениями. Определение оценок параметров статического объекта* // Труды VII Международной конференции «Идентификация систем и задачи управления» SICPRO '08. Москва, 28–31 января 2008 г. – М.: Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2008. – С. 261–269.
9. ЧАДЕЕВ В.М., ИЛЮШИН В.Б. *Метод идентификации, учитывающий априорную информацию о параметрах объекта* // Труды V Международной конференции «Идентификация систем и задачи управления» SICPRO

’06. Москва, 30 января – 2 февраля 2006 г. – М.: Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2006. – С. 1091–1105.

**IDENTIFICATION ALGORITHM FOR STATIC OBJECT:
TRANSITION FROM SPACE OF INPUTS-OUTPUTS TO
SPACE OF PARAMETERS ESTIMATES**

Sergey Gusev, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, PhD student (*gs-serg@mail.ru*).

Abstract: We suggest an algorithm to identify a static control object with restrictions. We start with the case when the output measurement error leads to some probability of parameter estimates to leave the admissible set for all n -dimensional blocks. We then consider the case of large errors, when this probability is equal to zero. We study the connection between errors and probabilities using the Cramer formula.

Keywords: identification, restrictions, static control object, parameter estimation, output measurement error.

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии М.В. Губко*

*Поступила в редакцию 09.02.2014.
Опубликована 31.05.2014.*

УДК 531.3:681.883

СТОХАСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЗВУКОРЯДА¹

Рудько И. М.²

(ФГБУН Институт проблем управления РАН, Москва)

Рассматриваются математические модели дискретных составляющих и звукорядов, содержащихся в энергетическом спектре шумоизлучения вращающихся механизмов и машин. На основе теории случайных функций предлагается стохастическая модель звукоряда, которая является более адекватной по сравнению с существующими эвристическими моделями. Предлагаемая стохастическая модель может найти применение при моделировании и разработке устройств обнаружения узкополосных шумовых сигналов и при исследовании, моделировании и разработке устройств виброгашения.

Ключевые слова: дискретные составляющие, звукоряды, спектральная плотность мощности, теория случайных функций.

1. Введение

Современные гидроакустические средства обнаружения и классификации морских судов работают в широкой полосе частот и производят обработку сигналов как во временной, так и в частотной областях [1, 2]. Однако низкочастотный диапазон частот является наиболее значимым, так как в энергетическом спектре этого диапазона наблюдаются узкие локальные максимумы – дискретные составляющие (ДС), обусловленные работой вала, гребного винта и наиболее шумящих механизмов и машин, несущие информацию о типе и режиме работы движителя

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ №13-08-00744А.

² Игорь Михайлович Рудько, кандидат технических наук, с.н.с. (igor-rudko@mail.ru).

судна, количестве лопастей у винта и т.д., на основании которой появляется возможность разделить морские суда на основные классы и определить параметры их движения.

Основными составляющими шумов судов и кораблей считаются [11]:

- собственный шум гребных винтов, включающий кавитационный шум, шум вращения винтов и вихревой шум;

- шум корпуса корабля, обусловленный его вибрацией под воздействием вращения гребных винтов, работы главных и вспомогательных механизмов, срывов вихрей с кормовой оконечности корабля и кавитацией на плохо обтекаемых частях корпуса;

- прочие шумы, в частности шум, создаваемый пограничным слоем корпуса корабля, шум носового буруна и др.

Сплошная часть спектра шумов судна перекрывает диапазон от десятков до тысяч герц, дискретные спектральные составляющие обычно сосредоточены в области низких частот.

Часто ДС, возбуждаемые от одного и того же источника, бывают синхронизированы между собой и образуют так называемые звукоряды (ЗР), т.е. наборы ДС, частоты которых кратны между собой. ДС, образующие звукоряд, в литературе по гидроакустике часто называют «гармоники» [5, 12], а первую гармонику – основной гармоникой.

ДС, обусловленные вращением винтов, проявляются на частотах, кратных основной гармонике. ДС, связанные с работой механизмов, обычно кратны половине частоты сети электропитания (25 Гц при частоте сети 50 Гц и 30 Гц при частоте сети 60 Гц) [5].

На низких частотах, как правило, ширина дискретных составляющих существенно меньше, чем на высоких частотах. Обработка корабельных шумов с использованием аппаратуры сверхтонкого спектрального анализа показывает [5], что

- в диапазоне частот 10–60 Гц ширина дискретных составляющих может достигать до 0,025–0,05 Гц;

- в диапазоне частот 100–400 Гц – до 0,1 Гц;

- в диапазоне частот 400–1000 Гц – до 0,5–1,0 Гц.

Так, например, вальный ЗР может содержать ДС на частотах, кратных частоте вращения вала:

$$(1) f_{B_k} = \frac{kv}{60} = kf_{B_1},$$

где $k = 1, 2, 3, \dots, K$, – номера гармоник; v – скорость вращения вала (об/мин); f_{B_1} – частота вращения вала (Гц).

Лопастной ЗР может содержать ДС на частотах, кратных произведению частоты вращения линии вала и числа лопастей винта:

$$(2) f_{L_k} = z \frac{kv}{60} = zkf_{B_1},$$

где z – число лопастей винта.

Тональные компоненты ЗР являются высокостабильными и имеют очень узкие полосы частот [1, 2, 12]. Уместно заметить, что в отличие от отдельных ДС шум в виде ЗР, несмотря на то, что содержит узкополосные составляющие, в целом представляет собой широкополосный шумовой процесс.

Узкополосный гидроакустический шум (т.е. ДС общего суммарного шума) движущегося в воде объекта является полезным сигналом, обнаруживаемым на фоне помех, для узкополосных систем шумопеленгования.

Основной характеристикой, используемой для описания моделей ДС шума гидроакустических целей, является их спектральная плотность мощности (СПМ). При этом в известных способах и устройствах обнаружения узкополосных шумовых сигналов (при синтезе алгоритмов обработки) традиционно используются идеализированные модели СПМ ДС. Эти же способы и реализующие их устройства приема используются в настоящее время и для обнаружения широкополосных шумов в виде звукорядов из кратных гармоник (1), (2). Применяются две детерминированные модели звукоряда:

- **частотная модель (Ч-модель).**

СПМ отдельной ДС упрощенно представляется в виде δ -функции, сдвинутой относительно начала координат («нулевой частоты») на значение центральной частоты ДС f_1 [1, 2, 9]:

$$G_{дс}(f) = A^2 \delta(f - f_1).$$

Соответственно, СПМ звукоряда из K ДС представляется в виде ряда δ -функций, сдвинутых на кратные частотные интервалы kf_1 [9]:

$$(3) \quad G_{зр}(f) = \sum_{k=1}^K A_k^2 \delta(f - kf_1).$$

• **масштабно-частотная модель (МЧ-модель).**

Как отмечается в работе [5], эффективная ширина полосы СПМ ДС Δf зависит от значения частоты, на которой она образуется. Причем (как показывают эксперименты) она прямо пропорциональна центральной частоте ДС $f = f_1$ и составляет (0,03–0,3)% от значения f_1 .

Случайные искажения, вносимые гидроакустическим каналом при распространении сигнала, а также доплеровские преобразования, вызванные кинематикой шумящего объекта и носителя ГАС шумопеленгования, приводят к дополнительному увеличению ширины полосы Δf до $\approx 0,5\%$ от значения f_1 . Но при этом сохраняются масштабно-частотные свойства СПМ отдельных ДС или общей СПМ всего звукоряда. То есть относительная полоса СПМ каждой отдельной ДС (или ДС, входящих в состав звукоряда, образованного одним общим источником) всегда является постоянной величиной и имеет порядок:

$$(4) \quad \beta = \frac{\Delta f}{f} = 0,0003 \div 0,005.$$

Другими словами, эффективная полоса ДС является линейной функцией ее центральной частоты:

$$\Delta f = \beta f_1.$$

Соответственно, эффективная полоса каждой k -й гармоники в звукоряде также является линейной функцией частоты:

$$\Delta f_k = k\beta f_1,$$

а общая СПМ всего звукоряда из K ДС обладает масштабными (мультипликативными) свойствами в области частоты.

Данные соотношения положены в основу более точной МЧ-модели СПМ узкополосного шума в виде отдельной ДС или широкополосного шума в виде ЗР ДС, учитывающей масштаб-

ные свойства ДС [8, 9, 10, 12]. Ниже приводится описание этой модели:

1. СПМ отдельной ДС с центральной частотой f_1 может быть представлена в виде:

$$G_{ДС}(f) = \alpha_0 G_0[\alpha_0(f - f_1)],$$

где $G_0(f)$ – моделирующая СПМ, локализованная в области нулевой частоты (задающая общую форму СПМ ДС);

α_0 – масштабный коэффициент, соответствующий мультипликативному преобразованию (сжатию) исходной СПМ $G_0(f)$;

f_1 – сдвиг частоты, соответствующий конкретному значению центральной частоты ДС.

Выбранные значения α_0 и f_1 однозначно определяют требуемую относительную полосу ДС $-\beta$ (4).

2. Для широкополосного шума в виде звукоряда из K ДС масштабно-частотная модель СПМ описывается путем представления общей СПМ ЗР в виде суммы расширяющихся в k раз СПМ основной гармоники, где в качестве масштабного коэффициента выступает номер гармоники k [9, 12]:

$$(5) \quad G_{ЗР}(f) = \sum_{k=1}^K G_{ДС_k}(f) = \sum_{k=1}^K \frac{1}{k} G_{ДС_1}\left(\frac{f}{k}\right) = \sum_{k=1}^K \frac{\alpha_0}{k} G_0\left(\alpha_0\left(\frac{f}{k} - f_1\right)\right).$$

Таким образом, масштабно-частотная модель (5) является эвристической и основана на трех предположениях:

- известна $G_0(f)$ – моделирующая СПМ;
- СПМ всех ДС звукоряда подчиняются мультипликативному преобразованию исходной СПМ $G_0(f)$;
- эффективная ширина полосы каждой k -й ДС в звукоряде является линейной функцией от номера гармоники k .

МЧ-модель лишь констатирует факт расширения ДС звукоряда с ростом номера гармоники k . При этом не учитывается, что каждая ДС обладает своей энергией, значение максимума которой также зависит от эффективной ширины полосы ДС («размывание» ДС). Тем не менее во многих задачах обнаружения ДС и ЗВ МЧ-модели бывает достаточно.

Альтернативой решения задачи обнаружения ДС и ЗВ является задача разрушения когерентной структуры ДС, порождает

мых работой корабельного оборудования, с целью снижения их заметности в гидроакустическом поле. Одним из применяемых с этой целью методов является метод модуляции частоты вращения [3, 4]. Существо этого метода сводится к следующему.

Пусть угловая скорость агрегата непостоянна и характеризуется изменением во времени в виде

$$\omega(t) = \omega_1 + f(t),$$

тогда (при $\left| \frac{f(t)}{\omega_1} \right| \ll 1$) основная гармоника колебания конструкции описывается [4] формулой

$$x(t) = A\omega_1^2 \cos \left[\omega_1 t + \int_0^t f(t) dt + \varphi_0 \right].$$

Данное выражение описывает колебание, модулируемое по частоте, а функция $f(t)$ называется модулирующим сигналом.

В работе [6] было показано, что спектры $F(\omega)$ модулирующего сигнала $f(t)$ и частотно-модулируемого (ЧМ) сигнала $S_x(\omega)$ связаны нелинейным интегральным уравнением

$$S_x(\omega) = \frac{(\omega_1^2 A)^2}{2\pi} \int_0^\infty \exp \left\{ -\int_0^\infty F(u) \frac{1 - \cos u\tau}{u^2} du \right\} \cos(\omega - \omega_1)\tau d\tau.$$

В общем случае данное уравнение решения не имеет.

Решение этого уравнения даже для случая одной ДС возможно только для некоторых частных случаев с введением множества ограничений и предположений и очень громоздко. В случае ЗР аналитическое решение найти практически невозможно. Поэтому представляет интерес создание простой модели, позволяющей оценивать изменения СПМ шумоизлучающего механизма в случае применения метода модуляции частоты вращения.

Целью настоящей работы является разработка на основе теории случайных функций новой математической модели звукоряда. Модель должна быть существенно более простой, чем модель, основанная на методе модуляции частоты вращения, учитывать физические особенности процесса шумообразования, такие как частотно-фазовая зависимость всех ДС звукоряда и

различную энергию каждой из его ДС, и позволять оценивать изменения в СПМ шумоизлучающего механизма при изменении в параметрах модуляции частоты вращения.

2. Стохастическая модель звукоряда

Рассмотрим гармонику (ДС) с фиксированной частотой Ω и случайной фазой Ψ :

$$(6) \quad X_1(t) = A \cos(\Omega t + \Psi) = U \cos(\Omega t) + V \sin(\Omega t),$$

где $X_1(t)$ – случайная функция от угла $\Psi \in [-\pi, \pi]$; U и V – некоррелированные случайные величины с нулевым математическим ожиданием и с одинаковыми дисперсиями, равными D ; t – время.

Используя формулу (6), сформируем звукоряд, состоящий из K гармоник и описываемый формулой

$$(7) \quad X(t) = \sum_{k=1}^K (U_k \cos(k\Omega t) + V_k \sin(k\Omega t)),$$

где $U_1, \dots, U_K, V_1, \dots, V_K$ – некоррелированные случайные величины с нулевым математическим ожиданием и дисперсиями $D(U_k) = D(V_k) = D_k$. Очевидно, при условии, что $U_1, \dots, U_K, V_1, \dots, V_K$ равны постоянным величинам, формула (7) сводится к формуле (3), т.е. к частотной модели.

Случайная функция $X(t)$ стационарна в широком смысле [7] и ее корреляционная функция определяется формулой

$$(8) \quad K_x(\tau) = \sum_{k=1}^K D_k \cos(k\Omega \tau).$$

На практике частота $\Omega \neq \text{const}$, а колеблется в определенном интервале частот, определяемом динамическими характеристиками шумоизлучающего механизма и параметрами системы стабилизации его частоты вращения.

Предположим, что в формуле (7) частота Ω – случайная величина с плотностью вероятности $p(\omega)$, заданной на пространстве $\Omega = (0, \omega)$. Таким образом, функция $X(t)$ является случайной функцией от Ω . В дальнейшем будем называть эту модель стохастической моделью (С-моделью).

Корреляционная функция (8) для фиксированной частоты Ω в случае, если Ω – случайная величина с плотностью вероятности $p(\omega)$, преобразуется, с учетом формулы полной вероятности, к виду

$$K_x(\tau) = \int_0^\infty \sum_{k=1}^K D_k p(\bar{\omega}) \cos(k\bar{\omega}\tau) d\bar{\omega} = \sum_{k=1}^K D_k \int_0^\infty p(\bar{\omega}) \cos(k\bar{\omega}\tau) d\bar{\omega}.$$

Для действительной стационарной случайной функции $X(t)$ на основании формул Эйлера по корреляционной функции $K_x(\tau)$ можно определить ее спектральную плотность [7] по формуле

$$\begin{aligned} S_x(\omega) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty K_x(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \sum_{k=1}^K D_k \left[\int_0^\infty p(\bar{\omega}) \cos(k\bar{\omega}\tau) d\bar{\omega} \right] \cos(\omega\tau) d\tau = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty p(\bar{\omega}) d\bar{\omega} \sum_{k=1}^K D_k \int_0^\infty \cos(k\bar{\omega}\tau) \cos(\omega\tau) d\tau = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty p(\bar{\omega}) d\bar{\omega} \sum_{k=1}^K D_k \int_0^\infty [\cos(k\bar{\omega} - \omega)\tau + \cos(k\bar{\omega} + \omega)\tau] d\tau = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty p(\bar{\omega}) d\bar{\omega} \sum_{k=1}^K D_k \int_0^\infty [e^{j(\omega - k\bar{\omega})\tau} + e^{-j(\omega - k\bar{\omega})\tau} + e^{j(\omega + k\bar{\omega})\tau} + e^{-j(\omega + k\bar{\omega})\tau}] d\tau = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \sum_{k=1}^K D_k [\delta(\omega - k\bar{\omega}) + \delta(\omega + k\bar{\omega})] p(\bar{\omega}) d\bar{\omega} = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \sum_{k=1}^K \frac{D_k}{k} [\delta(\omega - \mu) + \delta(\omega + \mu)] p\left(\frac{\mu}{k}\right) d\mu = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K \frac{D_k}{k} p\left(\frac{\omega}{k}\right) \quad (-\infty < \omega < \infty) \end{aligned}$$

Для действительной стационарной случайной функции достаточно задать спектральную плотность в диапазоне положительных частот

$$G_x(\omega) = 2S_x(\omega) = \sum_{k=1}^K \frac{D_k}{k} p\left(\frac{\omega}{k}\right), \quad 0 \leq \omega < \infty.$$

Если математическое ожидание $\Omega - m_\Omega = \omega_1$, то эта формула приобретает вид

$$(9) \quad G_x(\omega) = \sum_{k=1}^K \frac{D_k}{k} p\left(\frac{\omega - k\omega_1}{k}\right), \quad 0 \leq \omega < \infty.$$

Используя формулу (9) легко показать, что, если дисперсия $\Omega - \sigma^2$, то с ростом σ^2 от σ_1^2 до σ_2^2 максимальное значение СПМ k -й гармоники уменьшается в $\Delta = \sigma_2/\sigma_1$ раз или на $\Delta_{дБ} = -10 \lg \Delta$ дБ. Этот результат, в общем, совпадает со случаем модуляции гармонического сигнала узкополосным шумом.

Сравним формулы (5) и (9).

Формула (5) дает оценку общей СПМ ЗР в виде суммы расширяющихся в кратное число раз СПМ первой гармоники, ширина и вид которой известны (или известна ее оценка).

Формула (9) содержит два множителя:

– D_k/k – дисперсия k -й гармоники, которая, в отличие от Ч-модели и МЧ-модели нормируется номером гармоники k ;

– $p(\omega/k)$ – нормированная к номеру гармоники k плотность вероятности случайной величины Ω (частоты основной гармоники).

Таким образом, для случая одной гармоники С-модель и МЧ-модель полностью совпадают. Ширина СПМ k -й гармоники растет пропорционально k для обеих моделей, максимальное значение СПМ k -й гармоники для С-модели уменьшается пропорционально $1/k^2$.

МЧ-модель декларирует, что СПМ описывается путем представления общей СПМ ЗР в виде суммы расширяющихся в кратное число раз СПМ основной гармоники, где в качестве масштабного коэффициента выступает номер гармоники k . С-модель математически доказывает этот факт.

Для МЧ-модели параметр «энергия ДС» – D_k вообще не учитывается. Наличие множителя $1/k^2$ объясняет тот факт, что в ЗР не наблюдается высоких гармоник – они маскируются широкополосным шумом.

3. Результаты математического моделирования

Для подтверждения справедливости стохастической модели на языке MATLAB была создана программа, генерирующая звукоряд (7) с заданными D_k , $p(\omega)$ и частотой первой гармоники. Для получения СПМ этого ЗР методом БПФ проводится его спектральный анализ. Ниже приведены результаты моделирования для двух моделей – Ч-модели и С-модели.

На рис. 1 приведены временные реализации сигнала, содержащего одну ДС, для Ч-модели и С-модели при условии, что центральная частота для С-модели совпадает с частотой Ч-модели, а $D_1 = A_1^2 = 1$.

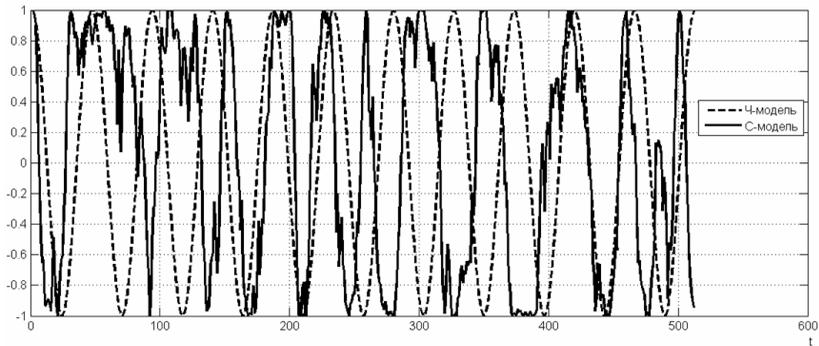


Рис. 1. Пример временных реализаций сигнала для Ч-модели и С-модели

На рис. 2 для Ч-модели приведена СПМ звукоряда, состоящего из четырёх гармоник с одинаковыми амплитудами $A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = 1$, числом временных отсчетов $n = 8192$ и $f_1 = 900$ у.е. (в единицах разрешения по частоте для БПФ).

На рис. 3 для С-модели приведена СПМ этого же звукоряда при $D_1 = D_2 = D_3 = D_4 = 1$ и плотностью вероятности $p(\omega)$, описываемой нормальным законом распределения (программа «randn»). Для получения состоятельной оценки СПМ проведено сглаживание по 32 реализациям.

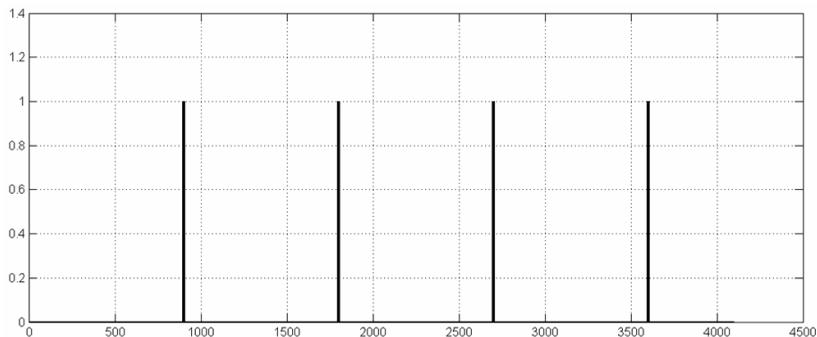


Рис. 2. Энергетический спектр сигнала для Ч-модели

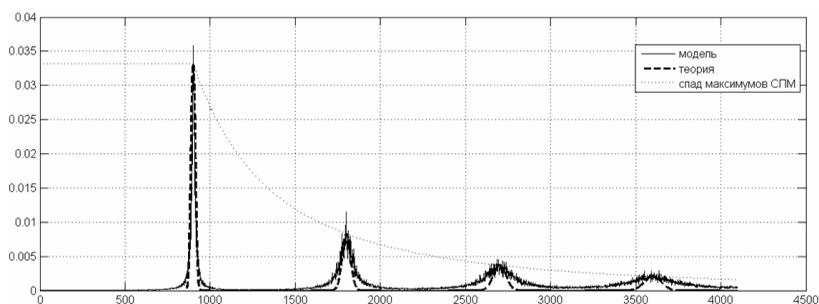


Рис. 3. Энергетический спектр сигнала для С-модели

Из приведенной на рис. 3 СПМ можно получить следующие данные:

- оценка максимума СПМ для первой гармоники равна 0,033, для второй гармоники равна 0,008, для третьей гармоники равна 0,0035, для четвертой гармоники равна 0,002; максимальное значение СПМ k -й гармоники уменьшается пропорционально $1/k^2$, т.е. совпадает с теоретическим значением, рассчитанным по формуле (9);

- ширина ДС на уровне 0,5 максимума СПМ (соответствует уровню -3дБ) для первой гармоники приблизительно равна (в у.е.) 13, для второй гармоники равна 28, для третьей гармоники – 54, для четвертой – 81, т.е. с ростом номера гармоники k ДС расширяется больше значения, рассчитанного по форму-

ле (9), что можно объяснить наличием шума дискретизации при моделировании.

Таким образом, с увеличением номера k ширина ДС увеличивается линейно, а величина максимума СПМ ДС спадает согласно квадратичному закону, что полностью соответствует формуле (9).

При сравнении рис. 2 и рис. 3 видно, что при заданных параметрах моделей максимум первой гармоники для С-модели (0,0332) на 14,8 дБ меньше, чем у Ч-модели (1,0).

Из рассмотренного выше примера можно сделать вывод, что при «подмешивании» в контур управления системы стабилизации частоты вращения какого-либо механизма шумоподобного сигнала происходит существенное «размывание» дискретных составляющих в спектре его шумоизлучения.

4. Заключение

Описание звукоряда эвристической масштабнo-частотной моделью (5) является более точным, чем описание частотной моделью (3), так как кроме определения места ДС в ЗР можно оценить ее ширину, зная СПМ первой гармоники. Однако использовать эту модель в задачах моделирования, исследования и проектирования шумоизлучающих механизмов затруднительно, так как МЧ-модель является «констатирующей» и не учитывает реальные физические процессы шумоизлучения.

Рассмотренная выше стохастическая модель звукоряда (9) является более полной по сравнению с МЧ-моделью, так как учитывает физические процессы шумоизлучения и позволяет оценить как ширину каждой ДС звукоряда, так и уменьшение максимума СПМ для каждой ДС в зависимости от изменения дисперсии случайной величины Ω (первой гармоники). Эта модель является существенно более простой, чем модель, основанная на методе модуляции частоты вращения, но позволяет сделать оценку изменений в СПМ k -й гармоники звукоряда (расширение полосы и уменьшение максимального значения

СПМ) при нестабильной частоте вращения механизма без использования достаточно сложной теории модуляции сигнала.

Такая модель может найти применение при моделировании и разработке устройств обнаружения узкополосных шумовых сигналов [9, 10] и при исследовании и моделировании методов воздействия на когерентную структуру узкополосных процессов, порождаемых работой корабельного оборудования, с целью снижения их заметности в гидроакустическом поле [3, 4].

Литература

1. БОЛГОВ В.М., ПЛАХОВ Д.Д., ЯКОВЛЕВ В.Е. *Акустические шумы и помехи на судах*. – Л.: Судостроение, 1984. – 192 с.
2. БУРДИК В.С. *Анализ гидроакустических систем*. – Л.: Судостроение, 1988. – 392 с.
3. ВЛАСОВ С.В., ГЕНКИН М.Д., МЕДВЕДКОВ А.М., НОВИКОВ А.К. *Модуляция вибраций и ее применение для виброгашения* // Акустический журнал. – 1983. – Т. 29, №4. – С. 564–566.
4. ГЛАЗОВ Ю.Е., РАКИТИНА И.С., ЭПЕНДИЕВ М.Б., ГЛАЗКОВА В.Н., МЕЛЬНИКОВА Е.А. *Методы снижения заметности узкополосных процессов в гидроакустическом поле морских подвижных объектов (краткий обзор)* // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2009. – №3. – С. 69–76.
5. ГОРБАНЬ И.И. *Обработка гидроакустических сигналов в сложных динамических условиях*. – Киев: Наукова думка, 2008. – 276 с.
6. ЛЕВИН Б.Р. *Теоретические основы статистической радиотехники*. – Т. 1. – М.: Советское радио, 1969. – 752 с.
7. ПУГАЧЕВ В.С. *Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления*. – М.: Физматгиз, 1962. – 884 с.
8. РОХМАНИЙКО А.Ю. *Масштабно-частотная модель первичного гидроакустического поля кораблей в виде звуко-*

- ряда // Морская радиоэлектроника. – 2012. – №3(41). – С. 30–31.
9. РОХМАНИЙКО А.Ю., ЯКУНИН К.В., САПРЫКИН В.А., МАЛЫЙ В.В., ЕСИПОВ В.С. «Устройство обнаружения шумовых гидроакустических сигналов в виде звукоряда на основе вычисления интегрального вейвлет-спектра». Патент на изобретение РФ № 2464588 от 20.10.2012 с приоритетом от 15.06.2011.
 10. САПРЫКИН В.А., МАЛЫЙ В.В., ШАТАЛОВ Г.В. «Устройство обнаружения узкополосных шумовых гидроакустических сигналов на основе вычисления интегрального вейвлет-спектра». Патент на изобретение РФ № 2367970 от 20.09.2009 с приоритетом от 24.12.2007.
 11. УРИК Р.Дж. *Основы гидроакустики*. – Л.: Судостроение, 1978. – 446 с.
 12. ШАТАЛОВ Г.В. *Моделирование узкополосного шума в виде отдельных дискретных составляющих и широкополосного шума в виде звукорядов* // Морская радиоэлектроника. – 2010. – №2(32). – С. 38–41.

STOCHASTIC MODEL OF HARMONIC SERIES

Igor Rudko, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Cand.Sc. (igor-rudko@mail.ru).

Abstract: We develop mathematical models for discrete components and harmonic series in an energy spectrum of rotating equipment and machinery noise emission. Using the theory of random functions we build a stochastic model of harmonic series, which is more realistic than existing heuristic models. The proposed stochastic model can be used in modeling and designing of detection devices narrowband signals, as well as in studying, modeling, and designing vibration damping devices.

Keywords: discrete components, harmonic series, spectral power density, the theory of random functions.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии А.П. Курдюковым

*Поступила в редакцию 18.09.2014.
Опубликована 31.05.2014.*

УДК 021.8 + 025.1

ББК 78.34

ОПЫТ ПОСТРОЕНИЯ МОДЕЛИ ПСИХИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ ОБУЧАЕМЫХ ПО ИСТОРИИ ИХ РАБОТЫ В СЛЕДЯЩЕЙ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЙ ОБУЧАЮЩЕЙ СИСТЕМЕ

Смирнова Н. В.¹

(ФГБУН Институт проблем управления РАН, Москва)

Представлены результаты по построению модели психического состояния обучаемого по истории его работы в интеллектуальной обучающей системе. Данная модель может задействоваться алгоритмом управления учебным процессом во время решения задач обучаемым. Для построения модели использовались известные методы машинного обучения. Полученные результаты могут быть полезными не только для моделирования обучаемых, но и для моделирования пользователей любого программного обеспечения, в котором логируются действия пользователя.

Ключевые слова: автоматизированная обучающая система, интеллектуальная обучающая система, модель обучаемого, машинное обучение, модель пользователя.

1. Введение

В последние годы задачи автоматизированного выявления психического состояния пользователя вызывают все больший интерес исследователей в области человеко-машинного взаимодействия. Наименее инвазивным для пользователя² источником

¹ *Наталья Викторовна Смирнова, научный сотрудник (smirnovanatalia2008@gmail.com).*

² *То есть не приводящим к возникновению у пользователя чувства слежения за его действиями и не требующим наличия дополнительного оборудования*

получения данных для подобного анализа является история работы пользователя в прикладном программном обеспечении. Перечислим несколько основных применений мониторинга состояния пользователей ПК.

Актуальными являются такие применения мониторинга психического состояния пользователей, как оценка новых программных продуктов с точки зрения их удобства использования и интеллектуализация пользовательских интерфейсов программ. При выявлении негативного эмоционального состояния пользователя можно перестроить интерфейс программы на более простой, предложить ему посмотреть подходящий справочный материал или отложить действия, которые могут вызвать раздражение у пользователя (например такие действия, как предложение обновить программу). При выявлении ситуаций, когда неадекватное поведение пользователя может нанести существенный ущерб, можно наложить временные ограничения на использование некоторых функций программы или даже запретить доступ к программе. Мониторинг психического состояния пользователя применим и для реализации здоровьесберегающих информационных технологий, позволяющих пользователю контролировать уровень стресса (см. например, технологию для мобильных устройств AndroidRemoteSensingApp (AIRS) [21]).

Наконец, мониторинг состояния пользователей необходим для интеллектуального управления учебным процессом в обучающих системах, в частности, для управления процессом выполнения заданий обучаемыми. В качестве управляющих воздействий можно выделить следующие: рекомендация другого задания или временного прекращения работы в системе (отдыха); предоставление необходимого справочного материала. Модель психического состояния обучаемого также может задействоваться инструментами генерации отчетности для преподавателя, позволяющими выявить плохо проработанные места учебного курса, выделить студентов, которым следует уделить более пристальное внимание на экзамене или зачете, и т.д.

Результаты статьи получены в рамках моделирования обучаемых в следящих интеллектуальных обучающих системах¹, но могут быть полезны и в других, перечисленных выше случаях.

2. Постановка задачи

Для построения моделей, позволяющих выявить психическое состояние обучаемого по истории его работы, требуется прибегать к методам машинного обучения, в частности, решать задачи классификации [2], постановка которых выглядит следующим образом. Психическое состояние студента трактуется как один или несколько процессов P_i , $i = 1, \dots, n$, состояния которых можно описать с помощью конечных множеств M_i значений некоторых нечетких переменных (например, «злость», «усталость», «радость», «обычное состояние»). Для построения модели собираются экспериментальные данные, включающие истории работы обучаемых и экспертные оценки динамики их психического состояния в ходе работы с обучающей системой. На основе экспериментальных данных для каждого процесса формируется конечная совокупность пар <состояние обучаемого, метка>. Состояние обучаемого задается посредством вектора значений некоторых показателей (в литературе эти показатели называют признаками [2]). Метка соответствует одному из значений M_i . Предполагается, что существует некоторая зависимость между метками и значениями признаков, но она неизвестна. На основе экспериментальных данных требуется восстановить эту зависимость, т.е. построить алгоритм, способный любому новому описанию психического состояния обучаемого (т.е. вектору значений признаков) достаточно точно присвоить метку.

Несмотря на достаточное количество работ, посвященных диагностике психического состояния обучаемого по истории его работы, эта проблема еще до конца не решена. Критическим

¹ Следящими интеллектуальными обучающими системами называются системы, обеспечивающие интерактивную поддержку процесса решения задач обучаемым и автоматизированную оценку его решений.

местом моделей такого рода является трудоемкость процесса сбора экспертных оценок. К примеру, для построения модели на основе историй работы хотя бы 30 студентов необходимо затратить около 30 часов работы времени экспертов. В качестве экспертов, как правило, задействуются преподаватели, осуществляющие оценивание без отрыва от основной работы. Исходя из того, что 1) один эксперт имеет возможность отсматривать не более 3 видеозаписей в неделю длиной не более 1,5 ч¹; 2) необходимо дополнительное время на процедуру предварительного согласования оценок экспертов, при участии 2 экспертов на сбор экспертных оценок потребуется не менее месяца.

Кроме того, сбор экспертных оценок осложняется тем, что в течение сеанса работы обучаемого происходит достаточно много событий, которые могут свидетельствовать об изменении его психического состояния. Возникает вопрос о том, в какие моменты времени эксперт должен выставлять оценки в ходе наблюдения за работой обучаемого, насколько точными должны быть эти оценки и т.д., т.е. необходимость создания правил, регулирующих экспертную деятельность. При разработке таких правил необходимо учитывать тот факт, что увеличение требований к эксперту ведет к возрастанию усталости эксперта и, как следствие, снижению надежности выставляемых им оценок, а понижение требований – к меньшей информативности и количеству экспертных оценок и, как следствие, к затруднениям при формировании совокупности пар <состояние студента, метка>. Поэтому правила, регулирующие экспертную деятельность, должны сопровождаться соответствующей методикой формирования совокупности пар <состояние обучаемого, метка> на основе экспериментальных данных.

Как будет показано далее, совершенствование таких правил и сопутствующих им методик формирования данных для построения модели является наиболее перспективным направлением улучшения существующих подходов к диагностике психического состояния обучаемых по истории их работы. В статье

¹ Оценка получена из опыта общения с экспертами в ходе исследований по данному вопросу.

предлагаются правила сбора и обработки экспертных оценок, включающие:

- инструкцию для эксперта по выставлению оценок, определяющую моменты времени выставления оценок и другие предъявляемые к ним требования;
- методику формирования совокупности пар <состояние обучаемого, метка> на основе экспериментальных данных.

Далее в статье приводится более подробный обзор известных подходов и обосновывается выбор направления их улучшения (раздел 3); описываются применявшиеся в исследовании известные методы и технологии машинного обучения (п. 4.1); предлагаются правила сбора и обработки экспертных оценок (п. 4.2); описываются условия и результаты эксперимента, проведенного для апробации предлагаемых правил (п. 5.1–5.3). Также приводятся описания выделенных в результате проведения эксперимента признаков (п. 5.4), мало зависящих от интерфейса и возможностей обучающей системы, использование которых привело к повышению качества модели. Эти признаки могут быть полезны при построении подобных моделей в обучающих системах других типов, отличных от рассмотренного.

3. Известные результаты

Исследования различных аспектов поведения обучаемых по истории их работы в обучающей программе были начаты еще в 90-е годы прошлого века. Исследования проводились для обучающих систем различной направленности: следящих обучающих систем, содержащих курсы по предметам естественнонаучного цикла [8, 9], для автоматизированных систем обучения программированию [4, 20], виртуальных лабораторий [14], систем для обучения иностранному языку [15], гипертекстовых обучающих сред с тестами по различным предметам [12] и т.д. (более подробный обзор см. в [6]).

К наиболее часто выделяемым исследователями компонентам психического состояния обучаемого относятся «Самостоятельность» [8, 20, 22] и «Усилия» [4, 15, 22]. Ряд работ посвящен детектированию нерационального поведения студента в обу-

чающей среде (см. исследования в соавторстве с R.S.J.D. Baker, например, [9]).

Исследователями были предложены различные списки формулировок «значимых» для оценки психического состояния обучаемых событий и способы вычисления значений признаков на их основе. Наиболее часто используются признаки, характеризующие взаимодействие обучаемого с подсистемой выдачи подсказок ([8, 9, 18, 20]) и подсистемой автоматической проверки фрагментов выполняемого задания [8, 9, 14, 15, 18, 20, 22]. Методы построения моделей варьируются (например, в [20] компоненты психического состояния представляются в виде линейно изменяющихся величин с эмпирически заданными коэффициентами прироста, а в [14] и [18] – в виде байесовских сетей).

Как отмечалось выше, проблема диагностики психического состояния обучаемого по истории его работы еще до конца не решена. Направления улучшения существующих подходов включают:

- 1) совершенствование процедур подбора экспертов и согласования их оценок;
- 2) добавление новых признаков;
- 3) выбор наиболее подходящего алгоритма машинного обучения (например, логистическая регрессия, метод опорных векторов, байесовский классификатор и т.д.);
- 4) совершенствование правил сбора и обработки экспертных оценок (подробнее см. предыдущий раздел).

Обсудим перспективность работ по каждому из перечисленных направлений улучшения.

Процедуры отбора, проверки компетентности и формирования группы экспертов, а также генерации совместных экспертных оценок на основе индивидуальных достаточно хорошо исследованы в рамках области принятия решений (см., например, [3, 5]) и могут быть использованы и в рассматриваемом случае.

На формирование признаков влияют как возможности обучающей системы, так и удобство ее интерфейса. Действительно, при работе в простом гипертекстовом учебнике с тестами поведение студента менее вариативно, чем в следящей обучающей

системе, в которой студент может вводить фрагменты своего решения, проверять их на правильность, брать подсказки и т.д. Недостатки интерфейса способствуют проявлению поведения, кажущегося хаотическим и нецеленаправленным, но таковым не являющимся. Например, студент, боясь потерять результаты своей работы, на всякий случай может держать открытыми одновременно несколько окон программы, и иногда, в поисках нужного окна, быстро осуществлять последовательность действий переключения между ними. Поскольку архитектура и возможности обучающих систем со временем изменяются, то выделение новых признаков, более точно характеризующих состояние студента в той или иной обучающей системе, имеет кратковременное скорее практическое, нежели научное значение. Некоторый интерес может представлять выделение признаков, применимых для ряда обучающих систем и слабо зависящих от особенностей интерфейса конкретных обучающих систем из этого ряда.

Как известно, в случаях, когда исследователю доступно большое количество данных, выбор того или иного алгоритма машинного обучения не играет большой роли [17]. В противном случае рекомендуется сначала построить первоначальный вариант модели, используя простой алгоритм, а затем в случае недостаточного качества модели стараться улучшить качество модели с помощью различных способов, в том числе и путем подбора наиболее подходящего алгоритма машинного обучения. Поскольку на результаты работы любого алгоритма машинного обучения влияет не только количество данных, но и их степень зашумленности, которая может существенно варьироваться между различными экспериментами, представляется целесообразным рассматривать подбор подходящего алгоритма машинного обучения как один из этапов построения моделей для конкретных обучающих систем, а не как направление улучшения существующих подходов.

Как отмечалось ранее, проблема совершенствования правил сбора и обработки экспертных оценок для построения модели психического состояния студентов особенно актуальна: требуется уменьшить трудоемкость процесса сбора экспертных оценок, не снижая обоснованность и информативность результатов

экспертной деятельности. При этом под трудоемкостью понимается не только количество часов работы экспертов, но и степень когнитивной нагрузки на них.

Рассмотрим два известных варианта правил сбора и обработки экспертных оценок [9, 10]. Первый вариант, согласно упоминаниям в статьях по рассматриваемому вопросу, соответствует наиболее часто используемым исследователями правилам. Второй вариант был предложен в качестве решения проблемы уменьшения трудоемкости сбора экспертных оценок.

В [9] эксперты наблюдали за работой студентов в режиме реального времени и оценивали поведение студентов только в те моменты, когда, по их мнению, оно существенно изменялось. Для сопоставления векторов признаков, формируемых на основе истории работы студентов и оценок экспертов, использовались «временные окна». Например, при 2-минутном «временном окне» для формирования пары <состояние обучаемого, метка> использовались действия, произошедшие не ранее чем за 1 минуту до t_0 и не позднее чем за 1 минуту после t_0 , где t_0 – время фиксации экспертной оценки. Данный подход имеет следующие недостатки. Затрудняется оценивание качества работы экспертов: возникают вопросы о том, достаточно ли оценок выставлено экспертами. От экспертов требуется внимательно следить не только за тем, в каком состоянии находится обучаемый, но и как можно более точно фиксировать точное время изменения этого состояния, что зачастую невозможно из-за недостаточной быстроты работы эксперта и приводит к его быстрой утомляемости.

В [10] для повышения эффективности сбора экспертных оценок предлагается предоставлять экспертам для оценивания не видеозаписи работы студентов, а некоторое множество избранных фрагментов истории их работы в системе. Множество избранных фрагментов формируется почти случайным образом, при этом для каждого фрагмента справедливо следующее: чем больше действий обучаемого в нем зафиксировано, тем больше вероятность того, что он будет выбран для экспертной оценки. Данный подход имеет следующие недостатки. Отдельные фрагменты истории работы обучаемого зачастую не содержат всю необходимую эксперту информацию: теряется информация о

жестах, выражении лица обучаемого, его действиях вне обучающей системы, которые, как будет показано далее, могут соответствовать как полезному, так и вредному с точки зрения учебного процесса психическому состоянию. Теряется контекст: эксперт не успевает получить общее впечатление об обучаемом. Между тем, при сравнении поведения обучаемого в текущий момент времени с поведением в предыдущие моменты эксперт может рассматривать часть его действий как малозначительные, если они характерны для большинства периодов работы обучаемого, или, наоборот, при появлении одного-двух, казалось бы, незначительных, но не характерных для обучаемого действий, сделать выводы об изменении психического состояния обучаемого.

Из вышесказанного следует, что проблема усовершенствования правил сбора и обработки экспертных оценок для построения модели психического состояния обучаемого является актуальным и наиболее перспективным направлением улучшения существующих подходов.

Далее в статье предлагаются правила, при использовании которых эксперты оценивают динамику состояний обучаемых на основе видеозаписей их работы через одинаковые промежутки времени. При этом в качестве оценки каждого компонента психического состояния обучаемых эксперты предоставляют только одно (максимум 3) наиболее частых, т.е. превалирующих значений этого компонента в течение рассматриваемого промежутка времени. Исследуется несколько возможных вариантов формирования совокупности пар <состояние обучаемого, метка> на основе экспериментальных данных, собранных с использованием предлагаемых правил.

На данном этапе исследований сравнение с другими подходами не представляется возможным, поскольку построение модели психического состояния обучаемого необходимо осуществлять на основе данных, собранных в разные дни с участием разных групп студентов, а процесс сбора экспертных оценок даже для одной группы обучаемых, работавших в системе в течение одного занятия, трудоемок. Насколько известно автору, единственными исследованиями по рассматриваемому вопросу, которые удовлетворяют этому требованию, является ряд иссле-

дований R.S.J.D. Baker и др.[9, 10], в которых отмечается неустойчивость полученной модели. Так как в данной статье описываются результаты разового эксперимента, проведенного с участием одной группы студентов, то сравнение с известными исследованиями не проводится. Вместо этого, исходя из оценки качества полученной модели, делаются выводы о применимости предлагаемых правил сбора и обработки экспертных оценок.

4. Модель психического состояния обучаемого

Прежде чем переходить к описанию предлагаемых правил сбора и обработки экспертных оценок, вкратце опишем возможности следящей интеллектуальной обучающей системы «Волга» (в рамках этого проекта разрабатывалась модель психического состояния обучаемого), а также саму модель.

4.1. ВОЗМОЖНОСТИ СЛЕДЯЩЕЙ ОБУЧАЮЩЕЙ СИСТЕМЫ «ВОЛГА»

На рис. 1 представлен скриншот «трудного» интерфейса ввода решения задачи в следящей обучающей системе «Волга».

В обучающей системе «Волга» обучаемый в качестве шага решения вводит формулу в LaTeX-подобном синтаксисе в специальное поле. Далее он нажимает на кнопку «Проверить шаг». Если он ввел правильный шаг решения, то поле ввода очищается, а введенная формула появляется в поле «Решение». В противном случае форма ввода шага решения окрашивается в красный цвет.

В обучающей программе доступен также «легкий» интерфейс ввода решения (см. рис. 2).

В «легком» интерфейсе после выбора типа шага в диалоговом окне в форму ввода шага подгружается шаблон формулы с пропусками. Обучаемый заполняет пропуски, вводя цифры с клавиатуры, а обозначения – перетаскивая из окна «Обозначения». Обучаемый может в любой момент решения задачи сменить «легкий» интерфейс на «трудный», и наоборот.

Полученные подсказки Обозначения Подсказка по плану решения Получить оценку Отправить Попробовать

Расстояние между векторами

Даны два вектора евклидова пространства: $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ и $b = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$. Вычислить расстояние между ними.

Решение развернуть

Шаг 1, тип: расстояние м/у векторами a и b через длину c.
 $p(a, b) = |c|$

Шаг 2

Проверить шаг Подсказка по шагу Правила ввода

$|c| = \sqrt{(c, c)}$

$|c| = \sqrt{(c, c)}$

[переключить на легкий интерфейс](#)

| Обозначение | Код | Значение |
|----------------|--------|----------------------------------|
| a | a | вектор a |
| a ₁ | a_1 | первая координата вектора a |
| a ₂ | a_2 | вторая координата вектора a |
| a ₃ | a_3 | третья координата вектора a |
| a ₄ | a_4 | четвертая координата вектора a |
| b | b | вектор b |
| b ₁ | b_1 | первая координата вектора b |
| b ₂ | b_2 | вторая координата вектора b |
| b ₃ | b_3 | третья координата вектора b |
| b ₄ | b_4 | четвертая координата вектора b |
| p(a, b) | p(a,b) | расстояние между векторами a и b |
| c | c | вектор c = a - b |
| c ₁ | c_1 | первая координата вектора c |
| c ₂ | c_2 | вторая координата вектора c |
| c ₃ | c_3 | третья координата вектора c |
| c ₄ | c_4 | четвертая координата вектора c |
| c | c | длина вектора c |

Рис. 1. «Трудный» интерфейс ввода решения задачи в следящей обучающей системе «Волга»

Полученные подсказки Обозначения Получить оценку Отправить Попробовать снова

Скалярное произведение векторов

Вычислить скалярное произведение векторов евклидова пространства $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ и $b = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$.

Решение развернуть

Шаг 1, тип: формула скалярного произведения векторов a и b: вычисления.
 $(a, b) = 69$

Шаг 2, тип: формула скалярного произведения векторов a и b: общий вид

Выбрать тип шага Проверить шаг Подсказка по шагу Сбросить Отправить

$(a, b) = \square \times \square + \square \times \square + \square \times \square + \square \times \square$

[переключить на трудный интерфейс](#)

| Обозначение | Код | Значение |
|----------------|-------|---------------------------------------|
| a | a | вектор a |
| a ₁ | a_1 | первая координата вектора a |
| a ₂ | a_2 | вторая координата вектора a |
| a ₃ | a_3 | третья координата вектора a |
| a ₄ | a_4 | четвертая координата вектора a |
| b | b | вектор b |
| b ₁ | b_1 | первая координата вектора b |
| b ₂ | b_2 | вторая координата вектора b |
| b ₃ | b_3 | третья координата вектора b |
| b ₄ | b_4 | четвертая координата вектора b |
| (a, b) | (a,b) | скалярное произведение векторов a и b |

Рис. 2. «Легкий» интерфейс ввода решения задачи в следящей обучающей системе «Волга»

Таким образом, под шагом решения обучаемого (далее, для краткости, иногда просто шагом) понимается часть решения, которую может проверить на правильность обучающая система, при этом в «трудном» интерфейсе шаг представляет собой одну формулу в специальном синтаксисе, а в «легком» – часть решения, введенную с помощью одного шаблона.

«Следящей» обучающая система «Волга» называется потому, что алгоритм проверки решения обучаемого сравнивает каждый шаг решения обучаемого с шагами решений, имеющихся в системе.

Обучаемый может получить подсказку, нажав на одну из кнопок: «Подсказка по плану решения» или «Подсказка по шагу». В любой момент времени он может просмотреть полученные ранее подсказки, нажав на кнопку «Полученные подсказки». Для того чтобы почитать теоретический материал, обучаемый должен нажать на кнопку «Оглавление».

В процессе работы обучаемого с системой в режиме реального времени сохраняется история его работы (см. рис. 3). На основе этой истории будут вычисляться текущие значения компонент психического состояния обучаемого после построения соответствующей модели.

| | Вид действия | Параметры действия |
|---------------------------|-------------------------|---|
| 139 | STUDENT EDIT_STEP | REPEATED_FIXES UNDEFINED UNDEFINED 16.0 1/1 |
| 140 | STUDENT ASK_HELP | THEORETICAL UNDEFINED UNDEFINED 0 1/1 |
| 145 | SYSTEM PROVIDE_HELP | THEORETICAL ABSTRACT_HINT |
| INITIATOR_STUDENT 0.0 1/1 | | |
| | Время фиксации действия | Вид действующего лица |

Рис. 3. Фрагмент истории работы обучаемого

В фрагменте на рис. 3 зафиксированы следующие события:

- обучаемый редактировал шаг решения с переисправлениями в течение 16 с;
- обучаемый запросил теоретическую подсказку;

- система предоставила теоретическую подсказку по запросу обучаемого.

В обучающей системе действует следующий простой алгоритм управления учебным процессом. Этот алгоритм запускается один раз в 5 мин, если в браузере есть активная вкладка с интерфейсом решения задачи. В таблице 1 приведены виды предлагаемой системой помощи в зависимости от прогресса обучаемого в решении задачи.

Таблица 1. Виды предлагаемой системой помощи в зависимости от прогресса обучаемого в решении

| № | Кол-во правильно введенных шагов за последние 5 мин | Последний правильный шаг введен | Предлагаемая помощь |
|---|---|---------------------------------|---|
| 1 | 2–3 | > 2 мин назад | Предложить перейти к теоретическому материалу |
| 2 | 1 | <= 2 мин назад | Предложить взять помощь (теоретическую или схематическую) по текущему шагу или по плану решения |
| 3 | 1 | > 2 мин назад | 1. Предложить переключиться на легкий интерфейс. 2. Предложить конкретную подсказку. 3. Предложить перейти к теоретическому материалу. 4. Предложить перейти к более простой задаче. |
| | 0 | | |

В таблице 1 под теоретической и схематической помощью понимаются

- краткие текстовые подсказки, подводящие обучаемого к нужному шагу (например, «Скалярное произведение вектора на самого себя равно сумме квадратов его координат»);
- подсказки части внешнего вида формулы (например, «Подсказка части внешнего вида формулы: $(c, c) = \dots * \dots + \dots * \dots + \dots * \dots$);
- ссылки на релевантный теоретический материал (вида «Посмотрите теоретический материал»);
- предложения перейти к более простой задаче, являющейся подзадачей по отношению к решаемой (вида «Вы можете сначала решить более простую задачу»).

Под конкретными подсказками понимаются подсказки вида «Вам нужно ввести следующую формулу ...», непосредственно указывающие на то, каким должен быть текущий шаг решения.

Отказ в помощи происходит в силу следующих ограничений:

- интервал между выдачей конкретных подсказок должен составлять не менее 2 минут;
- если студент получил 4 любые подсказки по своему запросу меньше чем за минуту, то при запросе пятой подсказки вводится ограничение на получение подсказок на 2 минуты.

4.2. МОДЕЛЬ ПСИХИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ СТУДЕНТА И ЕЕ ПОСТРОЕНИЕ

Для построения модели был выбран известный метод логистической регрессии, так как этот метод сочетает простоту реализации и вычислительную эффективность.

Предполагается, что совокупность важных для управления учебным процессом в обучающей системе компонент психического состояния студента включает «Самостоятельность», «Усилия» и «Фрустрационное поведение». Психолого-педагогические основы построения модели психического состояния студентов разработаны при участии Шварц А.Ю. (см. Приложение 1)¹

¹ *Н.с. психологического факультета МГУ.*

Текущее значение каждой компоненты психического состояния обучаемого определяется вектором вида

$$(1) (f_{\theta'}(X), f_{\theta''}(X), f_{\theta'''}(X)).$$

Координаты вектора вычисляются с помощью логистической функции с соответствующим набором регрессионных коэффициентов (θ' , θ'' или θ''') и выражают вероятности того, что уровень текущего значения компоненты подпадает под одну из категорий: «высокий», «средний», «низкий». Логистические функции в качестве аргумента используют переменную со следующей структурой:

$$(2) z = \theta_0 + \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \dots + \theta_k x_k.$$

В (2) $x_j, j = 1, \dots, k$, — признаки модели, которые могут принимать любые вещественные значения, а $\theta_j, j = 1, \dots, k$, — регрессионные коэффициенты.

Значения признаков формируются на основе сведений о произошедших «значимых» событиях в истории работы обучаемого в течение соответствующего «временного окна». «Значимые» события могут быть одномоментными (например, проверка фрагмента решения на правильность) или длительными (например, чтение справочного материала). В качестве признаков в случае одномоментных событий используются сведения об их количестве, а для длительных — значения различных характеристик, например, средняя длительность, совокупная длительность и т.д. Также могут использоваться и другие признаки, не связанные со «значимыми» событиями, например, объективная сложность решаемой задачи. В приложении 2 приведены формулировки признаков, использовавшихся в модели в начале ее построения, а также формулировки признаков, полученных в результате построения модели.

Регрессионные коэффициенты подбираются следующим образом. Выборка (т.е. совокупность пар <состояние обучаемого, метка>) делится на две части — обучающую и контрольную. На обучающей выборке происходит настройка алгоритма (с использованием численных методов оптимизации решается задача минимизации функции ошибок, отражающей величину расхождений между метками алгоритма и метками эксперта), а на тестовой выборке — оценка качества алгоритма. В данном

случае, так как каждая компонента психического состояния обучаемого измеряется посредством нечеткой переменной, имеющей 3 возможных значения, при построении модели для каждой компоненты психического состояния студента необходимо найти 3 набора регрессионных коэффициентов и, соответственно, решить 3 задачи минимизации функции ошибок.

Модель считается хорошей, если значения F -мер¹ на тестовой выборке достаточно высоки и существенно не отличаются от соответствующих значений на обучающей выборке (в противном случае имеет место недообучение или переобучение, см. [1]).

В данном исследовании для подбора коэффициентов логистических функций используется программный пакет *scikit-learn*[13]. Для минимизации функции ошибок в программном пакете используется «Trust region newton method» – метод доверительных областей [11]. Основная идея метода заключается в том, что для нахождения минимума функции $f(x)$ можно осуществлять итеративно, при этом на каждой итерации f аппроксимируется посредством более простой функции q , которая достаточно правдоподобно отображает поведение f в окрестности N точки x . Достоинством метода является возможность использования в оптимизационных задачах большой размерности.

5. Предлагаемые правила сбора и обработки экспертных оценок

Для оценки поведения обучаемого эксперту предоставляется текстовое описание поведения и успехов студента во время обучения интерфейсу программы и видеозапись, на которой зафиксирован процесс решения задач. Видеозаписи предварительно обрабатываются таким образом, чтобы эксперту были одновременно доступны как запись с экрана обучаемого, так и запись его лица с веб-камеры. Каждая видеозапись заранее делится на 5-минутные фрагменты. После окончания каждого

¹ F -мера – гармоническое среднее точности и полноты классификации, принимает значения из $[0, 1]$.

5-минутного фрагмента видеозапись останавливается, для того чтобы эксперт внес оценки (см. рис. 4).

Ниже приведена часть инструкции эксперта, регламентирующая выставление оценок после просмотра очередного 5-минутного фрагмента.

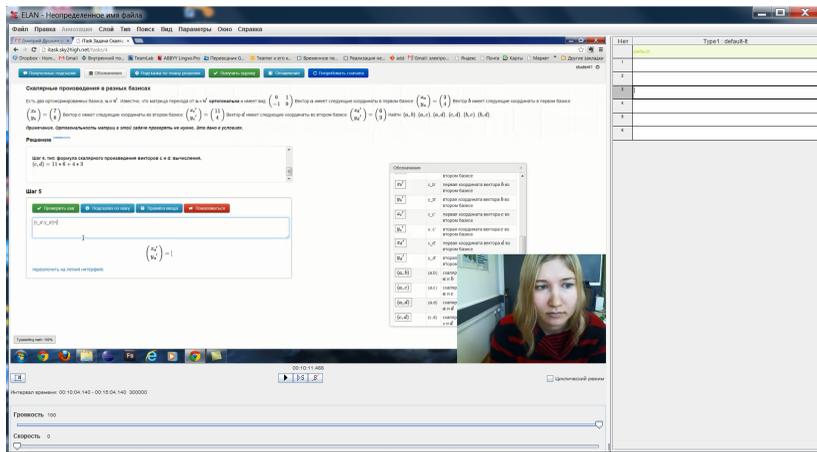


Рис. 4. Рабочее место эксперта во время оценки психического состояния обучаемого

«Если в течение 5-минутного фрагмента

- значение компоненты психического состояния существенно не изменялось, укажите ее преобладающее значение. *Например: Н (т.е. значение преимущественно было низким);*
- существенно изменялось один раз, укажите ее преобладающее значение ближе к началу, середине и концу 5-минутного фрагмента. *Например: НСН (в начале значение параметра было низким, ближе к середине – средним, к концу – опять низким);*
- существенно изменялось более одного раза, напишите МН. Этот фрагмент будет в дальнейшем просмотрен с другим экспертом или исключен из рассмотрения при подборе коэффициентов модели.»

Перед тем как переходить к оцениванию основного набора видеозаписей, эксперты согласовывают свои оценки на неболь-

шом наборе видеозаписей. Видеозаписи для согласования оценок должны давать представление о том, как решают задачи в обучающей системе студенты из разных групп. Деление студентов на группы осуществляется с помощью показателя «% незасчитанных шагов», равного отношению количества незасчитанных системой шагов (т.е. фрагментов решения) к общему количеству проверенных шагов решения студента.

Соотнесение оценок эксперта вида $X_1X_2X_3$ с действиями обучаемого во время 5-минутного фрагмента для формирования совокупности пар <состояние студента, метка> может быть реализовано несколькими способами. Рассмотрим два наиболее очевидных способа.

Первый способ заключается в огрублении экспертных оценок путем преобразования оценок вида $X_1X_2X_3$ в оценки вида X_{1-3} с использованием некоторого набора эвристических правил (например, оценка «НСС» преобразуется в «С», а оценка «ВСВ» в «В» и т.д.). В этом случае на основе данных по каждому 5-минутному фрагменту формируется только одна пара <состояние обучаемого, метка>, причем в качестве метки используется оценка X_{1-3} . Для краткости будем называть этот способ формирования точек обучающей выборки «огрублением».

Второй способ заключается в том, что 5-минутный фрагмент делится на 3 «временных окна» длительностью 100 с. В этом случае формируются 3 пары вида <состояние обучаемого, метка>, причем в качестве меток выступают оценки X_1, X_2, X_3 соответственно (этот способ будем называть «равномерным разбиением»).

6. Апробация предлагаемых правил сбора и обработки экспертных оценок

6.1. УСЛОВИЯ ПРОВЕДЕНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТА

В качестве участников эксперимента были задействовано 23 студента, изучавших курс линейной алгебры. Им было предложено пройти обучение интерфейсу программы, а затем попытаться решить задачи в системе. Студентам предлагалось решить одну задачу высокой сложности или одну задачу средней сложности и одну простую задачу. Во время работы студентов,

помимо фиксации их деятельности в журнале действий системы, осуществлялась запись видео с экрана студента, а также видео с веб-камеры ноутбука студента. Для интерактивного оценивания видеозаписей использовался программный продукт ELAN v.4.4.0 [16, 19].

Перед экспериментом, на основе оценок студентов за домашние работы в течение семестра, множество участников было разбито на 3 группы: «сильные», «средние» и «слабые» студенты. Условия работы с участниками, входящими в каждую группу, варьировались: так, некоторым участникам предлагались предположительно слишком трудные или слишком легкие задачи, а также иногда предоставлялась ложная информация о трудности их задач. Получение инструкции того или иного типа зависело от того, к какой группе относится студент и каким по очереди он подошел к столу с инструкциями. Варьирование условий эксперимента осуществлялось с целью повышения разнообразия поведения и динамики проявления и смен психических состояний участников эксперимента.

Во время эксперимента в ИОС «Волга» был включен простой алгоритм управления учебным процессом, запускавшийся раз в 5 мин и предлагавший студентам различные подсказки в зависимости от их прогресса в задаче (подробнее см. [7]). Поскольку в случае успешного решения задач в системе студенты имели право получить предварительную оценку за экзамен, а оценка за решение задач снижалась за использование большого количества подсказок, то большинство студентов старались использовать подсказки только в самом крайнем случае. Поэтому показатель «Самостоятельность» был исключен из списка показателей, для которых будет осуществлен подбор коэффициентов.

К оценке видеозаписей были привлечены два эксперта (преподаватели психологического факультета). Эксперты участвовали в процедуре согласования оценок два раза: перед началом оценивания видеозаписей и после того как оценили половину видеозаписей (в последнем случае потребовалось повторное согласование оценок, так как в силу жизненных обстоятельств пришлось изменить первоначальную политику распределения видеозаписей по экспертам). С целью минимизации денежных и

временных затрат большинство видеозаписей были оценены только одним из экспертов. Экспертами было оценено 215 5-минутных фрагментов. Как видно из рис. 5, в обеих задачах классификации имеет место проблема смещенных классов (англ. *skewed classes*). Например, для показателя «Усилия» преобладающими являются оценки *B* («высокий уровень»), а для показателя «Фрустрационное поведение» – оценки *H* («низкий уровень»).

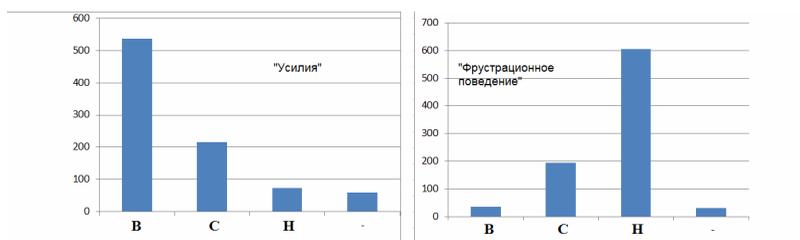


Рис. 5. Распределение количеств экспертных оценок, соответствующих высокому/среднему/низкому/неопределенному уровню компоненты «Усилия» и компоненты «Фрустрационное поведение».

6.2. ПОДБОР КОЭФФИЦИЕНТОВ ДЛЯ КОМПОНЕНТЫ «УСИЛИЯ»

Сначала было проведено сравнение двух упомянутых выше способов формирования совокупностей пар <состояние обучаемого, метка>на основе экспериментальных данных. Оценки качества модели, полученной каждым способом, вычислялись с помощью процедуры стратифицированного 10-кратного скользящего контроля. Вкратце суть данной процедуры заключается в следующем. Исходная выборка данных для обучения делится на обучающую и контрольную несколькими возможными способами, а оценка качества модели вычисляется как средняя оценка качества модели по всем разбиениям. Требование стратифицированности означает, что в обеих частях каждого разбиения исходной выборки количество элементов каждого класса (т.е. с одинаковой меткой) должно быть пропорционально количеству элементов этого класса во всей выборке данных для обучения.

Построение модели осуществлялось с помощью класса `sklearn.linear_model.LogisticRegression` пакета `scikit-learn` со следующими значениями параметров: `fit_intercept = True`, `penalty = 'l2'`, `C = 100`, `class_weight = 'auto'`. Поясним роль этих параметров. Параметр `fit_intercept` указывает на то, должна ли присутствовать в величине z константа, т.е. слагаемое θ_0 . `Penalty` и `C` влияют на степень регуляризации (регуляризация приводит к уменьшению всех регрессионных коэффициентов и позволяет избежать переобучения модели). Параметр `class_weight` изменяет функцию ошибок, повышая относительную значимость правильного определения тех или иных классов по сравнению с другими классами. Использование процедуры *стратифицированного k -кратного скользящего контроля* и настройка параметра `class_weight = 'auto'` позволяют до некоторой степени решить проблему смещенных классов.

Результаты сравнения двух различных способов формирования совокупности пар <состояние обучаемого, метка> представлены в таблице 2.

Таблица 2. Обобщающие способности различных алгоритмов формирования совокупности пар <состояние обучаемого, метка> на основе экспериментальных данных

| Способ формирования данных для обучения | F -мера на обучающей выборке | | | F -мера на тестирующей выборке | | |
|---|--------------------------------|------|------|----------------------------------|------|------|
| | выс. | ср. | низ. | выс. | ср. | низ. |
| Уровни компоненты «Усилия» | | | | | | |
| «Равномерное разбиение» | 0,74 | 0,43 | 0,42 | 0,69 | 0,27 | 0,29 |
| «Огрубление» | 0,81 | 0,71 | 0,64 | 0,67 | 0,29 | 0,34 |

Как видно из таблицы 2, оба способа формирования данных для обучения показывают примерно одинаковые результаты. Для построения модели был выбран способ «огрубление».

Далее был осуществлен анализ ошибок, проведена беседа с экспертами. Была сформирована вторая версия набора признаков логистических функций для компоненты «Усилия».

Затем было апробировано несколько эвристических правил преобразования оценок $X_1X_2X_3$ в оценку X_{1-3} . Наилучшие результаты дали следующие правила:

1) X_{1-3} равно той оценке, которой соответствует наибольшая частота в $X_1X_2X_3$. Если же такой оценки нет, то $X_{1-3} = H$ (F -мера на тестирующей выборке $[0,75; 0,42; 0,42]$);

2) X_{1-3} равно В, если частота В в $X_1X_2X_3 \geq 2$, иначе X_{1-3} равно С (т.е. «не-В», низкий или средний уровень).

Для дальнейшей работы было выбрано правило 2). После отбрасывания незначимых признаков и поиска комбинации параметров алгоритма машинного обучения, обеспечивающих наиболее высокое качество модели, была выбрана комбинация параметров $fit_intercept = False$, $penalty = 'l1'$, $C = 100$, $class_weight = \{0: 0,2; 1: 0,8\}$ со следующими F -мерами на обучающей и контрольной выборках: $[0,75; 0,66]$, $[0,75; 0,65]$.

6.3. ПОДБОР КОЭФФИЦИЕНТОВ ДЛЯ КОМПОНЕНТЫ «ФРУСТРАЦИОННОЕ ПОВЕДЕНИЕ»

Перед формированием набора признаков логистических функций была проведена беседа с экспертами, которые предположили, что в истории действий студента фрустрационное поведение может быть мало выражено. При оценке уровня фрустрационного поведения эксперты в большой степени ориентировались на изменения выражения лица и невербальных жестов студентов. При этом «хаотическая деятельность» в системе¹, которая предположительно сопутствует высокому уровню фрустрационного поведения, встречалась редко. Чаще всего фрустрационное поведение возникало после неуспешной проверки фрагмента решения и выражалось в том, что студент прекращал работу в системе и пытался получить помощь у соседей или экспериментаторов (средний уровень фрустрационного поведения), или впадал в ступор (высокий уровень фруст-

¹ Такой деятельности могут соответствовать совокупности возникающих через короткие промежутки времени актов нецеленаправленного выбора и просмотра различных элементов интерфейса программы.

рационального поведения). Также эксперты отметили, что фрустрационное поведение длилось недолго (не более чем 100 с) и сразу же прекращалось после того, как студенту помогали соседи или преподаватели.

С учетом результатов п. 4.2 формирование совокупности пар <состояние обучаемого, метка> осуществлялось методом «огрубление». Наилучшие результаты дало следующее правило преобразования оценок $X_1X_2X_3$ в оценку X_{1-3} : если в оценке $X_1X_2X_3$ нет оценок B и/или C , то $X_{1-3} = H$, иначе $X_{1-3} = C$. Таким образом, 5-минутные фрагменты разделились на 2 группы: те, в которых было зафиксировано повышение уровня фрустрационного поведения, и те, в которых повышения не было. Процедура отбрасывания незначимых признаков не привела к повышению качества модели.

Наилучшей оказалась следующая комбинация параметров алгоритма $fit_intercept = False$, $penalty = 'l1'$, $C = 200$, $class_weight = \{\}$ со следующими F -мерами на обучающей и контрольной выборках: $[0,79; 0,69]$, $[0,72; 0,61]$.

6.4. ВЫДЕЛЕННЫЕ ПРИЗНАКИ ДЛЯ ДИАГНОСТИКИ ПСИХИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ СТУДЕНТА ПО ИСТОРИИ ЕГО РАБОТЫ

Опишем способы измерения признаков, которые привели к повышению качества модели хотя бы одной компоненты психического состояния студента и удовлетворяют следующему условию: малая зависимость от особенностей интерфейса обучающих систем.

Выделим несколько групп возможных действий обучаемого в системе:

- *поисковые* (просмотр полученных подсказок, обозначений, введенного решения, поиск нужного параграфа в оглавлении и т.д., обозначается буквой «s»);
- *диалоговые* (проверка введенного фрагмента решения, запрос подсказки и т.д., обозначается буквой «d»);
- *редактирование фрагментов решения* (обозначается буквой «e»);

- чтение теоретического материала (обозначается буквой «t»);
- бездействие (т.е. отсутствие действий из вышеупомянутых групп, обозначается знаком «-»).

Предлагается разделить 5-минутный фрагмент на m интервалов (в данном случае $m = 10$) и поставить в соответствие фрагменту вектор с обозначениями групп действий, превалирующих на соответствующих интервалах. Поскольку события «редактирование фрагментов решения» и «чтение теоретического материала» являются длительными событиями, то для сравнения с одномоментными событиями были получены их количества путем деления длительности события на некоторое число (10 и 30 с соответственно). Примером такого вектора является вектор «eestttt - - -», который расшифровывается следующим образом: в течение первой минуты студент преимущественно редактировал фрагмент решения, в течение следующих 30 с он преимущественно осуществлял поисковые действия, в течение следующих 2 мин. студент преимущественно был занят чтением теоретического материала и т.д.

Для описания вектора превалирующих групп действий обучаемого p используются следующие признаки:

- количество встречающихся в нем обозначений «s»;
- количество обозначений «d»;
- количество обозначений «t» и «e» на позициях 0–2, 3–6, 7–9 (т.е. в начале, середине и конце вектора);
- количество обозначений «-» на позициях 0–2, 3–6, 7–9.

Также на основе данного вектора вычисляется значение признака «рваность (непоследовательность) действий обучаемого» по следующей формуле:

$$\frac{\sum_{i=1}^{m-1} \varphi(i)}{m-1}, \text{ где } \varphi(i) = \begin{cases} 1, & \text{если } p(i) \neq p(i-1), \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Например, для вектора «eeeeeeee» значение этого признака будет равно 0, а для вектора «etetetetet» – 1.

Также оказались важными события «Бездействие дольше 7 с». Эксперты отметили, что появление таких событий может свидетельствовать как о понижении «Усилий» и/или повышении

«Фрустрационного поведения» (студент слишком часто отвлекается на посторонние звуки, на диалоги с соседями или впадает в ступор после неуспешной проверки шага решения), так и о повышении «Усилий» и/или понижении «Фрустрационного поведения» (студент что-то вычисляет с помощью листа бумаги и ручки перед вводом следующего шага).

Поэтому было решено отдельно учитывать «хорошие» и «плохие» периоды бездействия: хорошим предшествует успешная проверка фрагмента решения, а «плохим» – неуспешная. Для обеих компонент психического состояния обучаемого оказались полезными признаки, отражающие количество «хороших» и «плохих» периодов бездействия длительностью [7, 25) с, [25, 50) с, > 50 с.

7. Выводы

В статье изложен опыт решения задач классификации, возникающих при построении модели психического состояния обучаемого по истории его работы. Апробирован оригинальный протокол сбора и обработки экспертных оценок, при использовании которого эксперты каждой компоненте психического состояния обучаемого должны давать оценки вида $X_1X_2X_3$ каждые n секунд (в статье $n = 300$). Показано, что в этом случае перспективным способом формирования совокупности пар <состояние обучаемого, метка> является способ «огрубление», когда на основе каждого 5-минутного фрагмента формируется одна пара с оценкой X_{1-3} , полученной в результате преобразования оценок $X_1X_2X_3$ с помощью некоторого набора эвристических правил.

В ходе решения вышеописанных задач классификации предложено несколько признаков, которые могут быть полезными для любых автоматизированных обучающих сред.

Предложенный протокол сбора и обработки экспертных оценок может быть использован для построения модели психического состояния обучаемого по истории его работы. При его использовании будут классифицированы 2 градации уровня показателей «Усилия» («высокий уровень» и «средний или низкий уровень») и 2 градации уровня показателя «Фрустраци-

онное поведение» («зафиксировано повышение уровня» и «повышения уровня не было»).

Для повышения качества построенной модели требуется больше данных. Поскольку существуют временные и денежные ограничения на затрачиваемое экспертами время, рекомендуется включать в выборку больше данных от тех студентов, у которых показатель «% незасчитанных шагов» (см. п. 4.1) имеет более высокое значение. Такие студенты демонстрируют более вариативное поведение. Поскольку в большинстве случаев при оценке каждой компоненты психического состояния студента в течение 5-минутного фрагмента эксперты давали более одной оценки, то может оказаться полезной следующая модификация протокола: вместо 5-минутных фрагментов просить экспертов давать оценки показателям МВК каждые 100 с.

Приложение 1

Ниже представлен фрагмент из инструкции для экспертов, в котором перечисляются теоретические соображения по измерению компонент психического состояния обучаемых.

«Самостоятельность» увеличивается, когда обучаемый

- отказывается от помощи;
- переключается на «трудный» интерфейс;
- вводит шаг решения правильно (в зависимости от вида интерфейса и полученных ранее подсказок);
- читает теоретический материал по собственному желанию.

«Самостоятельность» уменьшается, когда обучаемый

- просит подсказку;
- соглашается на помощь, предложенную обучающей системой.

«Усилия» увеличиваются, когда обучаемый выполняет любые продуктивные действия:

- редактирует шаг решения;
- просматривает обозначения;
- читает теоретический материал;

- просматривает полученные подсказки или введенное решение.

«Усилия» уменьшаются, когда обучаемый

- получает подсказки (особенно конкретные);
- смотрит, что есть в «легком» интерфейсе;
- бездействует в обучающей системе.

Уровень «Фрустрационного поведения» увеличивается, когда обучаемый осуществляет «хаотичную» деятельность:

- во время редактирования шага много раз и быстро пересправляет введенную информацию;
- несколько раз проверяет введенный шаг, а система его не засчитывает как правильный;
- нецеленаправленно обращается то к одному, то к другому элементу интерфейса, переключается между окнами.

Уровень «Фрустрационного поведения» понижается, когда

- обучаемый вводит шаг правильно;
- с течением времени, если отсутствуют проявления хаотичной деятельности.

Приложение 2

Ниже приведены формулировки признаков модели психического состояния обучаемого, использовавшихся в начале построения модели.

Таблица 3. Признаки модели психического состояния обучаемого (перед началом построения модели) для компоненты «Усилия»

| Признак | Код |
|--|-----|
| Обучаемый почитал релевантный теоретический материал не по интерфейсу программы ≥ 30 с | E1 |
| Обучаемый выполнил шаг правильно в подзадаче или задаче, помогающей освоить правила ввода данных в Системе | E2 |

| Признак | | | Код |
|--|---------------------------|---------------------|-----|
| Обучаемый получил конкретную подсказку | | | E3 |
| Обучаемый редактировал шаг ¹ >5 с | | | E4 |
| Обучаемый просмотрел обозначения или введенное Решение | | | E5 |
| Обучаемый посмотрел доступные типы для ввода текущего шага решения в «легком» интерфейсе | | | E6 |
| Обучаемый просмотрел полученные ранее подсказки | | | E7 |
| Обучаемый почитал теорию по интерфейсу программы ≥ 10 с | | | E8 |
| Обучаемый проверил шаг (в основной задаче) | шаг оказался правильным | «трудный» интерфейс | E9 |
| | | «легкий» интерфейс | E10 |
| | шаг оказался неправильным | | E11 |
| Обучаемый бездействует > 3 мин. | | | E12 |
| Обучаемый вернулся к работе | | | E13 |

Таблица 4. Признаки модели психического состояния обучаемого (перед началом построения модели) для компоненты «Фрустрационное поведение»

| Признак | | | Код |
|---|---------------|--|-----|
| Обучаемый сбросил данные «легкого» интерфейса | | | F1 |
| Обучаемый отредактировал шаг с переисправлениями | | | F2 |
| Обучаемый столкнулся с ограничениями на помощь (по конкретным подсказкам) | | | F3 |
| Обучаемый столкнулся с ограничениями на помощь (по получению любых подсказок) | | | F4 |
| Обучаемый последовательно открыл 4 или более нерелевантных теоретических раздела | | | F5 |
| Обучаемый проверил шаг, шаг оказался правильным | | | F6 |
| Обучаемый проверил шаг, шаг оказался неправильным, после предыдущего действия проверки... | прошло < 30 с | | F7 |
| | прошло > 30 с | | F8 |
| Обучаемый поменял интерфейс на «трудный» | | | F9 |
| Обучаемый поменял интерфейс на «легкий» | | | F10 |

¹ Если между действиями редактирования прошло < 10 с, то они считаются одним действием редактирования.

| Признак | Код |
|--|-----|
| Обучаемый заново начал решать задачу | F11 |
| Обучаемый бездействует > 3 мин. | F12 |
| Обучаемый вернулся к работе | F13 |
| Обучаемый последовательно выполнил 8 или более действий из списка (между этими действиями не должно быть действий редактирования шага и потери фокуса окна) менее чем за 1,5 мин. Список действий: просмотреть решение, просмотреть подсказки, провести мышкой по окну решения задачи, прокрутить окно, просмотреть обозначения, посмотреть на типы шагов, переключиться между интерфейсами | F14 |

В результате построения модели для компонент «Усилия» и «Фрустрационное поведение» наборы используемых для вычисления их текущих значений признаков были скорректированы (см. таблицу 5). Также в результате построения модели были получены наборы регрессионных коэффициентов, которые здесь не приводятся, поскольку в силу недостатка данных для построения модели не имеют практической ценности. Отметим, что в построенной модели «единицей времени» является 5-минутный фрагмент, т.е. психическое состояние обучаемого оценивается каждые 5 мин.

Таблица 5. Признаки модели психического состояния обучаемого после ее построения

| № | Признак | Описание |
|---|----------|--|
| 1 | dnum | Признаки, характеризующие вектор превалирующих действий (см. раздел 6.4) |
| 2 | snum | |
| 3 | etnum0_2 | |
| 4 | etnum3_6 | |
| 5 | etnum7_9 | |
| 6 | inum0_2 | |
| 7 | inum3_6 | |
| 8 | inum7_9 | |
| 9 | ntheory | Кол-во событий E1 (см. таблицу 3) |

| № | Признак | Описание |
|----|-------------|--|
| 10 | nedit | Кол-во событий E4 (но вместо 5 с исп. 10 с, см. таблицу 3) |
| 11 | snum | Кол-во событий E5–E7, а также действий просмотра обозначений/типов шага в «легком» интерфейсе, щелкания мышью по узлам дерева, представляющего собой оглавление курса, см. таблицу 3 |
| 12 | prev_estim | Оценка состояния обучаемого в течение предыдущего 5-минутного фрагмента, вычисляется по правилу: если в течение предыдущего фрагмента итоговое значение компоненты соответствовало высокому уровню, то 1, иначе 0 |
| 13 | num_asks | Кол-во запросов помощи в течение этого и предыдущего 5-минутных фрагментов |
| 14 | num_wrong | Кол-во проверок шага (шаг признан неправильным) в течение этого и предыдущего 5-минутных фрагментов |
| 15 | bad7_25 | Признаки, характеризующие количество «хороших» и «плохих» периодов бездействия (см. раздел 6.4) |
| 16 | bad25_50 | |
| 17 | badb50 | |
| 18 | good7_25 | |
| 19 | good25_50 | |
| 20 | goodb50 | |
| 21 | num_correct | Кол-во проверок шага (шаг признан правильным) в течение этого и предыдущего 5-минутных фрагментов |
| 22 | shft | Рваность действий обучаемого (см. раздел 6.4) |

Для диагностики текущего значения компоненты «Усилия» были выбраны признаки с номерами 3, 7–10, 12–14, 17–18, а для компоненты «Фрустрационное поведение» – все перечисленные в таблице 5 признаки.

Литература

1. ВОРОНЦОВ К.В. *Комбинаторный подход к оценке качества обучающих алгоритмов* // Математические вопросы кибернетики. Т. 13. – Москва: Физматлит, 2004. – С. 5–36.
2. ВОРОНЦОВ К.В. *Математические методы обучения по прецедентам (теория обучения машин). Курс лекций ВМК МГУ и МФТИ.* – [Электронный ресурс]. – URL: <http://www.machinelearning.ru/wiki/images/6/6d/Voron-ML-1.pdf> (дата обращения: 18.12.2013).
3. ЛИТВАК Б.Г. *Экспертные оценки и принятие решений.* – Москва: Патент, 1996. – 271 с.
4. НИКИФОРОВ А.Ю., РУСАКОВ В.А. *Модель студента в программном комплексе поддержки лабораторных занятий* // Научная сессия МИФИ-2005. Сборник научных трудов. – Т. 2. – С. 79–80.
5. ОРЛОВ А.И. *Экспертные оценки. Учебное пособие.* – Москва, 2002. – 31 с.
6. СМИРНОВА Н.В., ШВАРЦ А.Ю. *Мотивационно-волевой компонент модели обучаемого в следящих интеллектуальных системах* // Искусственный интеллект и принятие решений. – 2012. – Часть 1, Т. 1, №1. – С. 65–80.
7. СМИРНОВА Н.В., ШВАРЦ А.Ю. *К вопросу об измерении и параметрической идентификации мотивационно-волевого компонента модели обучаемого* // Информационно-технологическое обеспечение образовательного процесса государств–участников СНГ, сборник докладов Международной интернет-конференции. Минск: БГУ, 2012. – [Электронный ресурс]. – URL: <http://elib.bsu.by/handle/123456789/27772> (дата обращения: 18.12.2013).
8. ALEVEN V. *Toward Meta-cognitive Tutoring: A Model of Help-Seeking with a Cognitive Tutor* // International Journal of Artificial Intelligence in Education. – 2006. – №16. – P. 101–130.
9. BAKER R.S.J. D., CORBETT A.T., ROLL I. et al. *Developing a Generalizable Detector of When Students Game the System* // User Modeling and User-Adapted Interaction. – 2008. – Vol. 18, №3. – P. 287–314.

10. BAKER R.S.J.D, CARVALHO A.M.J.B. DE. *Labeling Student Behavior Faster and More Precisely with Text Replays* // The 1st International Conference on Educational Data Mining. Montreal, Quebec, Canada. Proceedings.– 2008. – P. 38–47.
11. CHIH-JEN L., WENG R.C., KEERTHI S.S. *Trust Region Newton Method for Large-Scale Logistic Regression* // Journal of Machine Learning Research. – 2008. – №9. – P. 627–650.
12. COCEA M., WEIBELZAHN S. *Disengagement detection in online learning: validation studies and perspectives* // IEEE Transactions on Learning Technologies. – 2011. – Vol. 4, №2. – P. 114–124.
13. PEDREGOSA F., VAROQUAUX G., GRAMFORT A. *Scikit-learn: Machine learning in Python* // Journal of Machine Learning Research. – 2011. – Vol. 12. – P. 2825–2830.
14. HERNANDEZ Y. NOGUEZ J., SUCAR E. *A Probabilistic Model of Affective Behavior for Intelligent Tutoring Systems* // MICAI 2005. LNAI 3789 Berlin: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2005. – P. 1175–1184.
15. HERSHKOVITZ A., NACHMIAS R. *Developing a Log-based Motivation Measuring Tool* // Interdisciplinary Journal of E-Learning and Learning objects.– 2008– Vol. 5. – P. 197–214.
16. LAUSBERG H., SLOETJES H. *Coding gestural behavior with the NEUROGES-ELAN system* // Behavior Research Methods, Instruments & Computers. – 2009 –Vol. 41, №3.– P. 841–849.
17. MANNING C.D., RAGHAVAN P., SCHÜTZE P. *Introduction to Information Retrieval* // Cambridge University Press. – 2008. – 496 P.
18. MAVRIKIS M. *Data-driven Modelling of Students' Interactions in an ILE* // Proc. 1st International Conference on Educational Data Mining. Montreal, Canada, 2008. – P. 87-96.
19. ELAN T.N. *A professional tool for the creation of complex annotations on video and audio resources.* –Max Planck Institute for Psycholinguistics, The Language Archive, Nijmegen. – [Электронный ресурс]. – URL: <http://tla.mpi.nl/tools/tla-tools/elan/> (дата обращения: 31.05.2013).
20. SOLDATO T., BOULAY B. DE. *Formalization and Implementation of Motivational Tactics in Tutoring Systems* //

Journal of Artificial Intelligence in Education. – 1995. – Vol. 6, №4. – P. 337–378.

21. TROSSEN D., PAVEL D. *AIRS: A Mobile Sensing Platform for Lifestyle Management Research and Applications* // Lecture Notes of the Institute for Computer Sciences, Social Informatics and Telecommunications Engineering. –2013. – Vol. 65. – P. 1–15.
22. YUSOFF M., BOULAY B. DE. *Integrating Domain-Independent Strategies into an Emotionally Sound Affective Framework for an Intelligent Learning Environment*. – [Электронный ресурс]. – URL: <http://www.cogs.susx.ac.uk/users/bend/papers/aisb2005.pdf> (датаобращения: 09.07.2011).

STUDENT’S PSYCHOLOGICAL STATE MODEL BASED ON LOGS OF HIS/HER ACTIVITY IN A MODEL-TRACING INTELLIGENT TUTORING SYSTEM: CONSTRUCTION EXPERIENCE

Natalia Smirnova, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, researcher (smirnovanatalia2008@gmail.com).

Abstract: We employ machine learning techniques to develop a mathematical model, which predicts student’s psychological state basing on logs of his/her problem-solving activity in an intelligent teaching system. The suggested model can be extended to predict the state of a user of any information system, which stores user activity logs.

Keywords: intelligent teaching system, student model, machine learning, user model.

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии М.В. Губко*

*Поступила в редакцию 18.12.2013.
Опубликована 31.05.2014.*

УДК 656.02 + 51-74
ББК 22.18

КОНКУРЕНТНАЯ МАРШРУТИЗАЦИЯ ТРАНСПОРТНЫХ ПОТОКОВ ПОСТАВЩИКАМИ УСЛУГ НАВИГАЦИИ

Захаров В. В.¹,

(Санкт-Петербургский государственный университет,
Санкт-Петербург)

Крылатов А. Ю.²

(Институт проблем транспорта им. Н.С. Соломенко РАН,
Санкт-Петербургский государственный университет,
Санкт-Петербург)

Исследована теоретико-игровая модель распределения транспортных потоков с множеством групп участников движения и с использованием ВРР-функции задержки на сети из параллельных каналов. Доказано существование и единственность равновесия по Нэшу в игре $m \geq 2$ поставщиков услуг навигации, равновесные стратегии получены в явном виде. Показано, что появление конкурирующих на сети поставщиков услуг навигации приводит к увеличению среднего времени передвижения между районами отправления/прибытия.

Ключевые слова: конкурентная маршрутизация, равновесие по Нэшу, распределение транспортных потоков.

Введение

В условиях повышенной загрузки ограниченных инфраструктурных мощностей улично-дорожных сетей (УДС) крупных

¹ Виктор Васильевич Захаров, доктор физико-математических наук, профессор, (mvector@mail.ru).

² Александр Юрьевич Крылатов, ассистент (СПбГУ), младший научный сотрудник (ИПТ РАН), (aykrylatov@yandex.ru).

городов крайне актуальной является задача оценки распределения транспортных потоков на сети и маршрутизации транспорта. В современных условиях наибольшее влияние на распределение транспортных потоков могут оказывать администрация города, а также поставщики услуг навигации, количество клиентов у которых неуклонно возрастает. При этом, если административное влияние может быть реализовано через опосредованные инфраструктурные или организационные преобразования [2], то поставщики услуг навигации, предлагая маршруты движения своим клиентам, оказывают непосредственное влияние на процесс распределения транспортных потоков в режиме он-лайн [18]. В настоящей работе нас будут интересовать стратегии распределения транспортных потоков поставщиками услуг навигации. Следует также отметить, что вопрос организации работы различных систем навигации актуален и с точки зрения исследования киберфизических систем [19].

Важнейшей концепцией в области распределения транспортных потоков на УДС города является равновесие по Вардропу [5, 16], рассматриваемое в двух контекстах. Первый состоит в предположении, что транспортные потоки в течение определенного периода времени сами приходят в равновесное по Вардропу состояние [1]. Второй заключается в том, что администрация УДС доступными ей средствами приводит транспортные потоки на сети в равновесное по Вардропу состояние [17]. В данной работе мы будем исследовать проблему *конкурентной маршрутизации* (*competitive routing*) – когда на сети действует несколько поставщиков услуг навигации и каждый из них стремится распределить транспортный поток своих клиентов наилучшим образом (например, предлагая своим клиентам наиболее быстрые маршруты) [6, 7, 13]. Навигаторы, как правило, выбирают решения о маршрутах своих клиентов независимо от действий других навигаторов, ориентируясь лишь на имеющуюся у них информацию о текущей дорожной обстановке. Однако следует заметить, что время перемещения потока по выбранному навигатором маршруту будет зависеть не только от объёма этого потока, но и от

потоков, направляемых по тому же маршруту другими навигаторами. В этом случае в качестве модели конкурентной маршрутизации представляется целесообразным использовать бескоалиционную игру (игроки – поставщики услуг навигации), а в качестве принципа оптимальности – равновесие по Нэшу. Ситуация равновесия по Нэшу представляет собой набор стратегий игроков, от которых невыгодно отклоняться каждому из них, если все другие игроки придерживаются своих равновесных стратегий. Известно, что если ситуация равновесия по Нэшу единственна, то игрокам для реализации равновесия не требуется прибегать к услугам какого-либо посредника, координирующего их действия. Естественно, что в таком случае вопрос о соотношении равновесных по Нэшу и по Вардропу состояний системы вызывает исследовательский интерес.

Впервые вопрос о соотношении равновесий по Нэшу и Вардропу был рассмотрен в [10], где в качестве игроков были взяты пары районов отправления/прибытия. В работе было показано, что при определённых условиях равновесие по Нэшу в поставленной задаче стремится к равновесию по Вардропу. Однако, несмотря на естественный интерес к такого рода исследованиям, работа [10] так и осталась, по большому счёту, единственной в своём роде. Конечно, существуют работы, в которых поднимается вопрос о соотношении двух видов равновесия, как например [8], однако, к сожалению, ставится он в большей степени в дискуссионной форме и, как правило, не касается аналитической формы представления оптимальных решений. Общая постановка транспортной задачи с несколькими перевозчиками, в которой затраты на перевозки по отдельным дугам каждого участника являются квадратичной функцией от объёмов перевозимых им грузов при фиксированных объёмах перевозок других участников, описана в работе [3]. В ней показано, что задача поиска равновесия Нэша для этой модели сводится к решению задачи выпуклого квадратичного программирования. Предлагаемая в нашей работе модель конкурентной маршрутизации, являясь частным случаем рассмотренной авторами модели, позволяет описать равновесные

по Нэшу стратегии маршрутизации в аналитическом виде.

Исследуя проблему распределения транспортных потоков, мы будем опираться на идею, согласно которой УДС произвольной топологии следует представлять набором независимых подсетей, каждая из которых состоит из двух узлов (районы отправления и прибытия) и параллельных маршрутов [4]. Такая идея строится на том, что основные потоки между районами отправления и прибытия не должны пересекаться, а под основными потоками понимаются наиболее значимые по своей величине корреспонденции между районами отправления и прибытия на всей УДС. С одной стороны, данная идея базируется на исследованиях, согласно которым сужение дороги (использование несколькими маршрутами одной и той же дуги или системы дуг) всегда приводит к возникновению пробок при нарастании потока во времени [9]. С другой стороны, было показано, что для избегания парадокса Браесса следует конструировать транспортную сеть таким образом, чтобы из района отправления в район прибытия потоки распределялись по параллельным (непересекающимся) маршрутам [11, 12].

Будем считать, что УДС представлена в виде множества независимых (не имеющих общих дуг) подсетей, каждая из которых содержит одну пару районов отправления/прибытия и определённое количество параллельных маршрутов. В связи с этим мы можем сформулировать задачу конкурентной маршрутизации для любой пары районов отправления/прибытия и перенести полученные результаты на любую другую пару районов. Более того, сопоставление полученных равновесных по Нэшу стратегий распределения транспортных потоков со стратегиями, равновесными по Вардропу, мы также можем проводить для отдельно взятой пары районов отправления/прибытия (подсети) УДС.

Таким образом, в данной статье мы будем рассматривать задачу маршрутизации транспортных потоков конкурирующими поставщиками услуг навигации (Навигаторами) на УДС большого города, представленной как совокупность подсетей, включающих в себя пары районов отправления/прибытия. В силу того, что

каждый Навигатор должен принимать решения о маршрутизации своих клиентов с учетом постоянно обновляющейся информации об улично-дорожной ситуации в режиме он-лайн, крайне важно для сокращения времени принятия решений иметь явный вид стратегий распределения транспортных потоков. Рассмотренная в данной статье постановка задачи конкурентной маршрутизации формулируется в следующей форме.

Пусть имеется $m \geq 2$ поставщиков услуг навигации на УДС. Все Навигаторы стремятся минимизировать общее время движения транспортных средств своих клиентов. При этом в качестве оценки времени движения транспортного потока по дуге любой подсети выберем BPR-функцию задержки [15], часто используемую Бюро общественных дорог в США. Ситуации равновесия по Нэшу в сформулированной игре на подсети из параллельных каналов будут найдены в явном виде. Более того, будет показано, что если на транспортной сети появляются конкурирующие между собой поставщики услуг навигации, то среднее время передвижения транспортных потоков между районами отправления/прибытия может только увеличиться по сравнению с тем, которое может обеспечить одна централизованная система навигации.

1. Математическая модель игры поставщиков услуг навигации на произвольной транспортной сети

В качестве модели транспортной сети будем рассматривать ориентированный граф G , состоящий из множества последовательно пронумерованных узлов и множества последовательно пронумерованных дуг. На сети G распределяют транспортные потоки своих клиентов $m \geq 2$ Навигаторов. Введем следующие обозначения: N – множество последовательно пронумерованных узлов графа G ; A – множество последовательно пронумерованных дуг графа G ; R – множество узлов, являющихся районами отправления, $R \subseteq N$; S – множество узлов, являющихся районами прибытия, $S \subseteq N$; подразумевается, что $R \cap S = \emptyset$; $K_{r,s}$ – множество маршрутов между районом отправления $r \in R$ и

районом прибытия $s \in S$; x_a – транспортный поток по дуге $a \in A$, $x = (\dots, x_a, \dots)$; $d_a(x_a)$ – время передвижения (задержка) потока объемом x_a по дуге $a \in A$; $M = \{1, \dots, m\}$ – множество номеров Навигаторов; $F^{j,rs} > 0$ – величина транспортного потока (число клиентов), распределяемого Навигатором j между районом отправления $r \in R$ и районом прибытия $s \in S$; $F^{rs} = \sum_{j=1}^m F^{j,rs}$ – совокупный транспортный спрос между районом отправления $r \in R$ и районом прибытия $s \in S$; x_a^j – величина транспортного потока, направляемого Навигатором j по дуге $a \in A$, $x^j = (\dots, x_a^j, \dots)$; $f_k^{j,rs}$ – величина транспортного потока, направляемого Навигатором j по маршруту $k \in K_{rs}$; $f^{j,rs} = (f_1^{j,rs}, \dots, f_{|K_{rs}|}^{j,rs})^\top$ – стратегия распределения транспортного потока $F^{j,rs}$ Навигатора j по возможным маршрутам K_{rs} ; $f^j = (\dots, f^{j,rs}, \dots)$ – стратегия распределения транспортных потоков $F^{j,rs}$ Навигатора j между всеми парами районов отправления/прибытия r - s , при этом $f^{-j} = (f^1, \dots, f^{j-1}, f^{j+1}, \dots, f^m)$; $f = (f^1, \dots, f^m)$ – набор всех стратегий Навигаторов; $\delta_{a,k}^{j,rs}$ – индикатор:

$$\delta_{a,k}^{j,rs} = \begin{cases} 1, & \text{если Навигатор } j \text{ использует маршрут } k \in K_{rs}, \\ & \text{в который «входит» дуга } a \in A; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Рассмотрим бескоалиционную игру

$\Gamma(M, \{\mathfrak{F}^{j,rs}\}_{j \in M}^{r \in R, s \in S}, \{H_j\}_{j \in M})$, где

$$\mathfrak{F}^{j,rs} = \{f^{j,rs} | f_k^{j,rs} \geq 0 \forall k \in K_{rs}, \sum_{k \in K_{rs}} f_k^{j,rs} = F^{j,rs}\}$$

$\forall j \in M$, а

$$H_j(f) = - \sum_{a \in A} d_a(x_a) x_a^j \quad \forall j \in M,$$

при условии, что

$$x_a^j = \sum_{r \in R} \sum_{s \in S} \sum_{k \in K_{rs}} f_k^{j,rs} \delta_{a,k}^{j,rs},$$

$$x_a = \sum_{j=1}^m x_a^j.$$

Максимизация функции выигрыша H_j Навигатора j ведёт к минимизации среднего времени движения всего транспортного потока F^j . В самом деле, максимизация функционала H_j равносильна минимизации функционала

$$v_j = \sum_{a \in A} d_a(x_a)x_a^j.$$

В свою очередь, минимизация функционала данного вида приведёт к минимизации среднего времени движения всего транспортного потока F^j в силу того, что для любого фиксированного f^{-j} мы получаем системный оптимум Вардропы клиентов j -го Навигатора [1, 14].

Таким образом, максимизация функций выигрышей игроков в игре Γ ведёт к минимизации среднего времени движения их клиентов. При этом для каждого $j \in M$ f^{-j} не является фиксированным, а формируется в результате реализации своих стратегий другими поставщиками услуг навигации. В связи с этим приходим к задаче конкурентной маршрутизации и, следовательно, поиску равновесия по Нэшу в игре Γ . Равновесие по Нэшу в игре Γ достигается реализацией таких стратегий f^* , что

$$H_j(f^*) \geq H_j(f^j, f^{-j*}) \quad \forall j \in M.$$

2. Математическая модель игры поставщиков услуг навигации на транспортной сети из параллельных каналов

Сформулированная в предыдущем пункте игра Γ является сложной вычислительной задачей. Проблемы, возникающие при решении подобных задач, описаны в [4]. Более того, в ряде исследований было показано, что для повышения эффективности транспортной сети её следует представлять набором независимых подсетей, каждая из которых состоит из двух узлов (районы отправления и прибытия) и параллельных маршрутов [9, 11, 12]. В таком случае формулируем задачу конкурентной маршрутизации для любой пары районов отправления/прибытия, и получен-

ные в процессе решения такой задачи результаты смогут быть перенесены на любую другую пару районов.

Рассмотрим граф, состоящий из двух районов отправления и прибытия, соединённых n параллельными дугами (маршрутами). На заданной сети распределяют транспортные потоки своих клиентов m Навигаторов. Введём следующие обозначения: $N = \{1, \dots, n\}$ – множество номеров маршрутов; $M = \{1, \dots, m\}$ – множество номеров Навигаторов; i – номера маршрутов, $i \in N$; j, q – номера Навигаторов, $j, q \in M$; $F^j > 0$ – величина транспортного потока (число клиентов), распределяемого Навигатором j ; $F = \sum_{j=1}^m F^j$ – величина транспортного потока, распределяемого в совокупности всеми Навигаторами; $f_i^j \geq 0$ – величина транспортного потока, направляемого Навигатором j по i -му маршруту; $f_i = (f_i^1, \dots, f_i^m)$ – набор транспортных потоков всех Навигаторов, направленных по i -му маршруту, при этом $f_i^{-j} = (f_i^1, \dots, f_i^{j-1}, f_i^{j+1}, \dots, f_i^m)$; F_i – величина транспортного потока на i -ом маршруте; $t_i^0 > 0$ – время свободного движения по i -му маршруту; $c_i > 0$ – пропускная способность i -го маршрута; $d_i(F_i) > 0$ – время движения (задержка) транспортного потока F_i по i -му маршруту.

Определим набор стратегий j -го игрока в виде вектора $f^j = (f_1^j, \dots, f_n^j)^\top$ такого, что

$$(1) \quad \sum_{i=1}^n f_i^j = F^j.$$

Обозначим также $f = (f^1, \dots, f^m)$.

Время движения транспортного потока j -го Навигатора по i -му маршруту зависит не только от величины этого потока, но и от величины потоков, направляемых всеми остальными Навигаторами по данному маршруту. Другими словами, время движения транспортного потока j -го Навигатора по i -му маршруту равно времени движения транспортного потока F_i по i -му маршруту. В качестве оценки времени движения транспортного потока F_i по i -му маршруту будем использовать BPR-функцию задержки:

$$d_i = t_i^0 \left(1 + \frac{F_i}{c_i} \right).$$

Следует отметить, что в общем случае в BPR-функции задержки отношение (F_i/c_i) возводится в степень β , значение которой определяется посредством оценки реального времени движения транспортных потоков по сегментам УДС.

Величина F_i равна сумме всех транспортных средств, использующих i -й маршрут для движения из района отправления в район прибытия. Таким образом, в рассматриваемом нами случае игры m Навигаторов $F_i = \sum_{j=1}^m f_i^j$, и, соответственно, время движения транспортного потока F_i по i -му маршруту примет вид

$$d_i = t_i^0 \left(1 + \frac{\sum_{j=1}^m f_i^j}{c_i} \right).$$

Рассмотрим бескоалиционную игру $\Gamma_m(M, \{\mathfrak{F}^j\}_{j \in M}, \{H_j\}_{j \in M})$, где $\mathfrak{F}^j = \{f_i^j | f_i^j \geq 0 \ \forall i = \overline{1, n}, \sum_{i=1}^n f_i^j = F^j\} \ \forall j \in M$, а

$$H_j = - \sum_{i=1}^n t_i^0 \left(1 + \frac{\sum_{q=1}^m f_i^q}{c_i} \right) f_i^j \quad \forall j \in M.$$

Максимизация функции выигрыша H_j Навигатора j ведёт к минимизации среднего времени движения всего транспортного потока F^j . В самом деле, максимизация функционала H_j равносильна минимизации функционала

$$(2) \quad v_j = \sum_{i=1}^n t_i^0 \left(1 + \frac{\sum_{q=1}^m f_i^q}{c_i} \right) f_i^j.$$

В свою очередь, минимизация функционала данного вида приведёт к минимизации среднего времени движения всего транспортного потока F^j в силу того, что для любого фиксированного множества $\{f_i^{-j}\}_{i=1}^n$ мы получаем системный оптимум Вардропа клиентов j -го Навигатора [1, 14].

Таким образом, максимизация функций выигрышей игроков в игре Γ_m ведёт к минимизации среднего времени движения их клиентов. При этом для каждого $j \in M$ множество $\{f_i^{-j}\}_{i=1}^n$ не является фиксированным, а формируется из стратегий других

поставщиков услуг навигации. В связи с этим приходим к задаче конкурентной маршрутизации и, следовательно, поиску равновесия по Нэшу в игре Γ_m .

3. Равновесие по Нэшу в игре поставщиков услуг навигации на сети из параллельных каналов

Лемма 1. f^* является равновесием по Нэшу в игре Γ_m тогда и только тогда, когда существуют неотрицательные ω_j (множители Лагранжа) такие, что

$$(3) \quad t_i^0 \left(1 + \frac{\sum_{q=1}^{j-1} f_i^q + 2f_i^{j*} + \sum_{q=j+1}^m f_i^q}{c_i} \right) \begin{cases} = \omega_j, & \text{при } f_i^{j*} > 0, \\ \geq \omega_j, & \text{при } f_i^{j*} = 0, \end{cases} \\ \forall i = \overline{1, n} \text{ и } j = \overline{1, m}.$$

Доказательство. Воспользуемся условиями теоремы Куна – Таккера. Заметим, что в силу выпуклости функционалов (2), а также области допустимых решений $\mathfrak{F}^j \forall j = \overline{1, m}$, условия Куна – Таккера являются как необходимыми, так и достаточными. Построим лагранжиан для задачи минимизации (2) с ограничением (1) и требованием $f_i^j \geq 0 \forall i = \overline{1, n}$ и $j = \overline{1, m}$:

$$L^j = \sum_{i=1}^n t_i^0 \left(1 + \frac{\sum_{q=1}^m f_i^q}{c_i} \right) f_i^j + \omega_j \left(F^j - \sum_{i=1}^n f_i^j \right) + \sum_{i=1}^n \eta_i^j (-f_i^j).$$

Продифференцируем лагранжиан по f_i^j и, приравняв полученное выражение к нулю, получим

$$\omega_j = t_i^0 \left(1 + \frac{\sum_{q=1}^{j-1} f_i^q + f_i^{j*} + \sum_{q=j+1}^m f_i^q}{c_i} \right) + \frac{t_i^0}{c_i} f_i^{j*} - \eta_i^j,$$

$\forall i = \overline{1, n}$ и $j = \overline{1, m}$. Из необходимости выполнения условия дополняющей нежёсткости $\eta_i^j f_i^{j*} = 0 \forall i = \overline{1, n}$ и $j = \overline{1, m}$ следует, что если $f_i^{j*} > 0$, то $\eta_i^j = 0$ и мы получаем первое условие из (3), а если $f_i^{j*} = 0$, то, с учётом требования к множителям Лагранжа $\eta_i^j \geq 0$, мы получаем второе условие из (3). Лемма доказана.

Следствие 1. f^* такое, что $f_i^{j*} > 0 \ \forall i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}$ является равновесием по Нэшу в игре Γ_m тогда и только тогда, когда существуют неотрицательные ω_j (множители Лагранжа) такие, что

$$(4) \quad f_i^{1*} + \dots + 2f_i^{j*} + \dots + f_i^{m*} = \left(\frac{\omega_j}{t_i^0} - 1 \right) c_i,$$

$\forall i = \overline{1, n}$ и $j = \overline{1, m}$,

при этом $\omega_j > t_i^0, \ \forall i = \overline{1, n}$ и $j = \overline{1, m}$.

Доказательство. Согласно Лемме 1, если $f_i^{j*} > 0 \ \forall i = \overline{1, n}$ и $j = \overline{1, m}$, то имеет место

$$f_i^{1*} + \dots + 2f_i^{j*} + \dots + f_i^{m*} = \left(\frac{\omega_j}{t_i^0} - 1 \right) c_i > 0,$$

из чего следует $t_i^0 < \omega_j$. Следствие доказано.

Следствие 2. Равновесие по Нэшу f^* , состоящее из положительных компонент, в игре Γ_m имеет форму $f^*(\omega_1, \dots, \omega_m)$ для некоторых $\omega_j > 0, j = \overline{1, m}$.

Доказательство. Введём следующие обозначения

$$A = A_{m \times m} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 2 \end{pmatrix}_{m \times m},$$

а $b_i = (b_i^1, \dots, b_i^m)^\top$, где

$$(5) \quad b_i^j = \left(\frac{\omega_j}{t_i^0} - 1 \right) c_i, \text{ при } \omega_j > t_i^0,$$

$\forall i = \overline{1, n}$ и $j = \overline{1, m}$.

Тогда (4) можно переписать в следующей матричной форме:

$$A f_i^* = b_i, \ \forall i = \overline{1, n}.$$

Данное матричное уравнение имеет единственное решение, так как все строки квадратной матрицы $A_{m \times m}$ линейно независимы. Другими словами, в рассматриваемой игре Γ_m равновесие по Нэшу, состоящее из положительных компонент, единственно.

Матрицей, обратной к A , является следующая

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{m}{m+1} & -\frac{1}{m+1} & \cdots & -\frac{1}{m+1} \\ -\frac{1}{m+1} & \frac{m}{m+1} & \cdots & -\frac{1}{m+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{1}{m+1} & -\frac{1}{m+1} & \cdots & \frac{m}{m+1} \end{pmatrix}_{m \times m}.$$

Вычислив f_i^* как $f_i^* = A^{-1}b_i$, получаем

$$f_i^{j*} = \frac{m}{m+1} b_i^j - \frac{1}{m+1} \sum_{q=1, q \neq j}^m b_i^q,$$

$\forall i = \overline{1, n}$ и $j = \overline{1, m}$, или для удобства можно переписать в виде

$$(6) \quad f_i^{j*} = b_i^j - \frac{1}{m+1} \sum_{q=1}^m b_i^q,$$

$\forall i = \overline{1, n}$ и $j = \overline{1, m}$.

В силу того, что $b_i^j = b_i^j(\omega_j)$, $\forall i = \overline{1, n}$ и $j = \overline{1, m}$, приходим к тому, что $f_i^{j*} = f_i^{j*}(\omega_1, \dots, \omega_m)$ при $f_i^{j*} > 0 \forall i = \overline{1, n}$ и $j = \overline{1, m}$. Следствие доказано.

Лемма 2. Пусть $f^*(\omega_1, \dots, \omega_m)$, состоящее из положительных компонент, является равновесием по Нэшу в игре Γ_m . Если $F^j > F^q$, то $\omega_j > \omega_q, \forall j, q = \overline{1, m}$.

Доказательство. Подставив (6) в (1), получим

$$(7) \quad F^j = \sum_{i=1}^n b_i^j - \frac{1}{m+1} \sum_{i=1}^n \sum_{s=1}^m b_i^s,$$

$\forall j = \overline{1, m}$.

Таким образом, получаем, что если мы хотим сравнить F^j и F^q , $\forall j, q = \overline{1, m}$, то нам необходимо сравнивать $\sum_{i=1}^n b_i^j$ и $\sum_{i=1}^n b_i^q$.

Предположим, что $F^j > F^q$, однако $\omega^j < \omega^q$. Тогда имеем

$$\sum_{i=1}^n b_i^j = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\omega_j}{t_i^0} - 1 \right) c_i \stackrel{\omega^j < \omega^q}{<} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\omega_q}{t_i^0} - 1 \right) c_i = \sum_{i=1}^n b_i^q,$$

следовательно, согласно выражению (7) приходим к тому, что $F^j < F^q$. Получаем противоречие. Лемма доказана.

Без умаления общности перенумеруем маршруты таким образом, чтобы

$$(8) \quad t_1^0 < t_2^0 < \dots < t_n^0.$$

Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Равновесие по Нэшу в игре Γ_m , при условии (8), достигается следующими стратегиями:*

$$(9) \quad f_i^{j*} = b_i^j - \frac{1}{m+1} \sum_{q=1}^m b_i^q,$$

где

$$(10) \quad b_i^j = \frac{c_i F^j + \sum_{s=1}^m F^s + \sum_{r=1}^n c_r}{\frac{t_i^0}{t_r^0}} - c_i,$$

$\forall i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}$, когда выполняется

$$(11) \quad F^j > \frac{1}{m+1} \sum_{i=1}^n c_i \left(\frac{t_n^0}{t_i^0} - 1 \right),$$

$\forall j = \overline{1, m}$.

Доказательство. Выражение (9) напрямую следует из (6) доказательства Следствия 2.

В силу того, что $f_i^{1*} + \dots + 2f_i^{j*} + \dots + f_i^{m*} = b_i^j \forall j = \overline{1, m}$, получаем

$$(12) \quad \sum_{i=1}^n b_i^j = F^1 + \dots + 2F^j + \dots + F^m,$$

$\forall j = \overline{1, m}$.

Подставив (5) в (12), получим

$$(13) \quad \sum_{i=1}^n \left(\frac{\omega_j}{t_i^0} - 1 \right) c_i = \sum_{s=1}^m F^s + F^j,$$

откуда

$$\omega_j = \frac{\sum_{s=1}^m F^s + F^j + \sum_{i=1}^n c_i}{\sum_{i=1}^n \frac{c_i}{t_i^0}}.$$

Подставляя полученное ω_j в (5), приходим к выражению (10).

Полученные выражения имеют место, когда $\omega_j > t_i^0 \forall i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}$. Таким образом, необходимо найти условия при которых данное соотношение имеет место. Рассмотрим систему

уравнений (12) $\forall j = \overline{1, m}$. В матричной форме данная система примет вид:

$$A(F^1, \dots, F^m)^\top = \left(\sum_{i=1}^n b_i^1, \dots, \sum_{i=1}^n b_i^m \right)^\top,$$

следовательно,

$$(F^1, \dots, F^m)^\top = A^{-1} \left(\sum_{i=1}^n b_i^1, \dots, \sum_{i=1}^n b_i^m \right)^\top,$$

окончательно получаем $F^j = \frac{1}{m+1} \sum_{i=1}^n c_i \left(\frac{\omega^j}{t_i^0} - 1 \right)$. При выполнении условия (8) приходим к (11). Теорема доказана.

4. Соотношение равновесия по Нэшу и равновесия по Вардропу

В предыдущем разделе мы рассмотрели игру $m \geq 2$ поставщиков услуг навигации и получили m взаимозависимых задач минимизации с ограничениями, решение которых является равновесием по Нэшу. Рассмотрим случай, когда все транспортные средства потока пользуются услугами одного Навигатора. Получаем следующую задачу максимизации:

$$(14) \quad \max_{(F_1, \dots, F_n)} H(F_1, \dots, F_n) = \max_{(F_1, \dots, F_n)} \left(- \sum_{i=1}^n t_i^0 \left(1 + \frac{F_i}{c_i} \right) F_i \right)$$

при ограничениях

$$(15) \quad \sum_{i=1}^n F_i = F,$$

$$(16) \quad F_i \geq 0 \quad \forall i = \overline{1, n},$$

решение которой является по определению равновесием по Вардропу (*системным оптимумом*) [14].

Если просуммировать целевые функционалы всех навигаторов (2), то получится функционал типа (14), в котором $F_i = \sum_{j=1}^m f_i^j$, и, следовательно, можно сравнивать величины H и

$\sum_{j=1}^m H^j$ при разных значениях распределения транспортных потоков.

Теорема 2. Сумма выигрышей игроков в игре Γ_m в ситуации равновесия по Нэшу строго меньше значения целевой функции задачи (14)–(16) в ситуации системного оптимума Вардрона (при положительности компонент равновесия и системного оптимума).

Доказательство. Пусть имеется решение задачи (14)–(16) (F_1^*, \dots, F_n^*) в ситуации системного оптимума. Значение целевой функции в этой ситуации равно

$$H^* = - \sum_{i=1}^n t_i^0 \left(1 + \frac{F_i^*}{c_i} \right) F_i^* = -nt_i^0 - \frac{t_i^0}{c_i} \sum_{i=1}^n [F_i^*]^2.$$

Пусть имеется ситуация равновесия по Нэшу в игре Γ_m : $(f_1^{j*}, \dots, f_n^{j*}) \forall j = \overline{1, m}$. Суммарный выигрыш игроков в этой ситуации равен

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m H^{j*} &= - \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n t_i^0 \left(1 + \frac{\sum_{j=1}^m f_i^{j*}}{c_i} \right) f_i^{j*} = \\ &= -nt_i^0 - \frac{t_i^0}{c_i} \sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=1}^m f_i^{j*} \right]^2. \end{aligned}$$

Поскольку для множеств $\mathfrak{F}^1, \dots, \mathfrak{F}^m$ и $\mathfrak{F} = \{(F_1, \dots, F_n) | F_i \geq 0 \forall i = \overline{1, n}, \sum_{i=1}^n F_i = F\}$ справедливо следующее соотношение $\cup_{j=1}^m \mathfrak{F}^j \supseteq \mathfrak{F}$, то имеет место неравенство $\sum_{j=1}^m f_i^{j*} \geq F_i^* \forall i = \overline{1, n}$, из чего получаем

$$(17) \quad \sum_{j=1}^m H^{j*} \leq H^*.$$

Равенство в (17) возможно тогда и только тогда, когда $\sum_{j=1}^m f_i^{j*} = F_i^* \forall i = \overline{1, n}$.

Согласно [4], равновесное по Вардропу (при положительных компонентах стратегии распределения транспортного потока) достигается следующими стратегиями:

$$(18) \quad F_i^* = \frac{c_i F + \frac{1}{2} \sum_{r=1}^n c_r}{t_i^0 \sum_{r=1}^n \frac{c_r}{t_r^0}} - \frac{1}{2} c_i,$$

$\forall i = \overline{1, n}$, где $F = \sum_{i=1}^n F_i$. Однако, если воспользоваться Теоремой 1 и найти сумму равновесно по Нэшу распределённых транспортных потоков $\sum_{j=1}^m f_i^{j*}$, получим

$$(19) \quad \sum_{j=1}^m f_i^{j*} = \frac{c_i F + \frac{m}{m+1} \sum_{r=1}^n c_r}{t_i^0 \sum_{r=1}^n \frac{c_r}{t_r^0}} - \frac{m}{m+1} c_i,$$

$\forall i = \overline{1, n}$.

Видим, что при любом $m \geq 2$ выражения (18) и (19) не совпадают. Окончательно получаем $\sum_{j=1}^m H^{j*} < H^*$. Теорема доказана.

Теорема 2 свидетельствует о том, что если на транспортной сети появляются конкурирующие между собой поставщики услуг навигации, то среднее время передвижения транспортных потоков между районами отправления/прибытия может только увеличиться по сравнению с тем, которое может обеспечить одна централизованная система навигации.

5. Заключение

В данной работе была рассмотрена задача конкурентной маршрутизации $m \geq 2$ поставщиков услуг навигации на сети, состоящей из района прибытия и района отправления, соединённых параллельными дугами. Все поставщики услуг навигации стремятся минимизировать общее время движения транспортного потока своих клиентов. При этом в качестве оценки времени движения транспортного потока по дуге использовалась BPR-функция задержки. Ситуации равновесия по Нэшу в сформулированной на сети из параллельных каналов игре была найдена в явном виде. Более того, было показано, что если на транспортной сети появляются конкурирующие между собой поставщики услуг

навигации, то среднее время передвижения транспортных потоков между районами отправления/прибытия может только увеличиться по сравнению с тем, которое может обеспечить одна централизованная система навигации.

Литература

1. ГАСНИКОВ А.В., КЛЕНОВ С.Л., НУРМИНСКИЙ Е.А. И ДР. *Введение в математическое моделирование транспортных потоков* / Моск. физ.-техн. ин-т [под ред. А. В. Гасникова, с приложениями М. Л. Бланка, Е. В. Гасниковой, А. А. Замятина и В. А. Малышева, А. М. Райгородского]. – М.: Изд-во МФТИ, 2010. – 360 с.
2. ЗАХАРОВ В.В., КРЫЛАТОВ А.Ю. *Системное равновесие транспортных потоков в мегаполисе и стратегии навигаторов: теоретико-игровой подход* // Математическая теория игр и ее приложения. – 2012. – Т. 4, №4. – С. 23–44.
3. ЗОРКАЛЬЦЕВ В.И., КИСЕЛЕВА М.А. *Равновесие Нэша в транспортной модели с квадратичными затратами* // Дискретн. анализ и исслед. опер. – 2008. – Т. 15, №3. – С. 31–42.
4. КРЫЛАТОВ А.Ю. *Оптимальные стратегии управления транспортными потоками на сети из параллельных каналов* // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 10. Прикл. матем. Информ. Проц. упр. – 2014. – №2. – С. 121–130.
5. ШВЕЦОВ В.И. *Математическое моделирование транспортных потоков* // Автоматика и телемеханика. – 2003. – №11. – С. 3–46.
6. ALTMAN E., BASAR T., JIMENEZ T., SHIMKIN N. *Competitive routing in networks with polynomial cost* // IEEE Transactions on Automatic Control. – 2002. – Vol. 47, №1. – P. 92–96.
7. ALTMAN E., COMBES R., ALTMAN Z., SORIN S. *Routing games in the many players regime* // Proc. 5th International

- ICST Conference on Performance Evaluation Methodologies and Tools. – 2011. – P. 525–527.
8. ALTMAN E., WYNTER L. *Equilibrium, games, and pricing in transportation and telecommunication networks* // Networks and Spatial Economics. – 2004. – Vol. 4. – P. 7–21.
 9. DAGANZO C.F. *The cell transmission model: A dynamic representation of highway traffic consistent with the hydrodynamic theory* // Transpn. Res. B. – 1994. – Vol. 28. – P. 269–287.
 10. HAURIE A., MARCOTTE P. *On the relationship between Nash-Cournot and Wardrop Equilibria* // Networks. – 1985. – Vol. 15. – P. 295–308.
 11. KORILIS Y.A., LAZAR A.A., ORDA A. *Architecting noncooperative networks* // IEEE Journal on selected areas in communications. – 1995. – Vol. 13, №7. – P. 1241–1251.
 12. KORILIS Y.A., LAZAR A.A., ORDA A. *Avoiding the Braess paradox in non-cooperative networks* // J. Appl. Prob. – 1999. – Vol. 36. – P. 211–222.
 13. ORDA A., ROM R., SHIMKIN N. *Competitive routing in multiuser communication networks* // IEEE/ACM Transactions on Networking. – 1993. – Vol. 1, №5. – P. 510–521.
 14. SHEFFI Y. *Urban transportation networks: equilibrium analysis with mathematical programming methods*. – New Jersey: Prentice-Hall Inc; Englewood Cliffs, 1985. – 416 p.
 15. U.S. BUREAU OF PUBLIC ROADS, EDITOR. *Traffic Assignment Manual*. – U.S. Department of Commerce, Washington, D.C., 1964. – 358 p.
 16. WARDROP J.G. *Some theoretical aspects of road traffic research* // Proc. Inst. Civ. Eng. – 1952. – Pt. 2, №1. – P. 325–378.
 17. YANG H., HUANG H.-J. *The multi-class, multi-criteria traffic network equilibrium and systems optimum problem* // Transportation Research Pt B. – 2004. – Vol. 38. – P. 1–15.
 18. ZAKHAROV V., KRYLATOV A., IVANOV D. *Equilibrium*

traffic flow assignment in case of two navigation providers // Collaborative Systems for Reindustrialization. Proc. of the 14th IFIP Conference on Virtual Enterprises PRO-VE 2013. – Dresden: Springer, 2013. – P. 156–163.

19. ZHUGE H. *Semantic linking through spaces for cyber-physical-socio intelligence: A methodology // Artif Intell. – 2011. – Vol. 175, №5. – P. 988–1019.*

COMPETITIVE ROUTING OF TRAFFIC NAVIGATION SYSTEMS

Victor Zakharov, Saint-Petersburg State University, Saint-Petersburg, Doctor of Science, professor (mcvictor@mail.ru).
Alexander Krylatov, Institute of Transportation Problems of RAS, Saint-Petersburg State University, Saint-Petersburg, Researcher, Tutor (aykrylatov@yandex.ru).

Abstract: We study a game-theoretic model of traffic flow assignment with multiple customer groups and a BPR-delay function on a network of parallel links. We prove existence of a unique Nash equilibrium in the game of $m \geq 2$ traffic navigation systems and provide closed-form expressions for equilibrium strategies. Finally, we show that under navigation systems' competitions the average travel time between origin-destination areas increases.

Keywords: competitive routing, Nash equilibrium, traffic flow assignment.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии А. Г. Чхартишвили

*Поступила в редакцию 06.02.2014.
Опубликована 31.05.2014.*

УДК 004.75
ББК 32.81

ОРГАНИЗАЦИЯ КОММУТИРУЕМЫХ НЕПОСРЕДСТВЕННЫХ СОЕДИНЕНИЙ АКТИВНЫХ ОБЪЕКТОВ СЛОЖНЫХ ЦИФРОВЫХ СИСТЕМ

Стецюра Г. Г.¹

(ФГБУН Институт проблем управления РАН, Москва)

Предложен способ создания коммутируемых непосредственных соединений большого количества цифровых источников и приемников сообщений. Быстро разрешаются конфликты на входе приемника. Устранение отказов в соединениях требует небольшого количества аппаратных средств. Показана возможность реализации таких соединений с применением оптоэлектронных средств.

Ключевые слова: распределенная коммутация, ретрорефлектор, отказоустойчивость, бесконфликтный доступ.

1. Введение

Современные сложные вычислительные и управляющие системы содержат тысячи активных объектов (далее объектов), которые по собственной инициативе вступают в сложные взаимодействия, часто сопровождаемые конфликтами доступа к ресурсам. В таких системах требуется обеспечивать быстрые связи объектов, трансформировать структуры связей с привлечением достаточно простых аппаратных средств и аппаратно синхронизовать процессы обмена сообщениями.

В статье предлагается способ организации таких связей. Реализацию способа нельзя обеспечить средствами электроники, поэтому в статье предложена распределенная коммутация, использующая средства оптоэлектроники для установления

¹ Геннадий Георгиевич Стецюра, г.н.с., доктор технических наук, профессор (stetsura@ipu.ru).

беспроводных связей между объектами. Обеспечиваются следующие особенности способа.

– Для соединения объекта с любым из n объектов в каждом объекте используется демультиплексор, состоящий из $2 \lceil \log_2 \sqrt{n} \rceil$ оптических дефлекторов – двоичных переключателей направления передачи оптического сигнала.

– Каждый приемник сообщений имеет единственный приемник оптических сигналов, и на входе последнего возникают конфликты, если источникам требуется одновременный доступ к приемнику. Такие внешние по отношению к коммутатору конфликты быстро разрешаются непосредственно средствами коммутатора. Это требуется и при борьбе с отказами коммутатора, как показано ниже. Источники после обнаружения конфликта доставляют приемникам свои сообщения как единое сообщение без временных пауз между его составляющими.

– Обычно объекты невозможно разместить так, чтобы оптические сигналы источника поступали в любой из приемников, и для обеспечения доставки этих сигналов применен не содержащий коммутирующих элементов центр – группа оптоэлектронных ретрорефлекторных стыковочных модулей, по одному модулю для каждого объекта – приемника сообщений. Модули в центре между собой не связаны.

– Модуль не закреплен постоянно за конкретным приемником, но соответствие модуля приемнику известно каждому объекту и может быть изменено в динамике.

– При ожидаемых m отказах в модулях достаточно добавить в центр m модулей и количество переключателей в каждом демультиплексоре увеличить до $2 \lceil \log_2 \sqrt{n+m} \rceil$. Если допустимо увеличивать времена соединения объектов, то добавлять оборудование не требуется.

– Для передачи сообщений объекты не создают оптические сигналы, а модулируют сигналы внешних источников, что уменьшает энергопотребление объектов.

Хотя центральной задачей способа является обеспечение коммутации распределенных объектов, из перечисленных возможностей способа видно, что они не ограничиваются коммута-

цией и решают более широкие задачи обеспечения взаимодействия распределенных объектов, включающие устранение конфликтов на входах приемников и повышение отказоустойчивости связей. Можно надеяться, что быстрое и гибкое формирование связей между объектами системы позволит создавать более быстрые способы управления работой цифровой системы в целом.

Рассмотрим кратко известные результаты, использованные в настоящей статье. Предлагаемая структура оптоэлектронных связей является развитием структуры, приведенной в [4, 5]. Предлагается использовать демультиплексор, аналогичный демультиплексору в [4, 5], но введен дополнительный ретро-рефлекторный стыковочный модуль, существенно расширивший возможности способа. В [4, 5] посылаемые источником световые сигналы обычно не могут непосредственно поступить к требуемому приемнику и направляются к нему дополнительным неуправляемым отражателем. Для каждого источника их количество равно количеству приемников сигналов источника, что при большом количестве коммутируемых объектов представляет трудности. В настоящей статье количество стыковочных модулей может быть равно количеству приемников, а также быть больше или меньше их количества. Каждый приемник в динамике выбирает для взаимодействия с источниками один из модулей. Источник посылает свое сообщение не приемнику, а модулю, соответствующему приемнику, изменяя состояние модуля. Приемник посылает луч света в модуль, который отражает его приемнику, модулируя луч сигналами источника.

Центральные устройства, используемые в статье – оптоэлектронный демультиплексор и ретрорефлекторный стыковочный модуль, содержащий ретрорефлектор и оптический модулятор. Демультиплексор содержит группу двоичных переключателей направления светового луча. Известно довольно много таких переключателей, но для целей статьи нужны переключатели, в которых направление выходящего из них луча не зависит от нестабильности управляющего электрического сигнала. Это довольно сильное ограничение и практически ему удовлетворяют переключатели на основе микрооптоэлектромеханических систем (МОЭМС) и переключатели, использующие

соединения ванадия, которые пропускают или отражают свет при изменении управляющего воздействия.

МОЭМС выпускаются промышленно для многих видов приложений, широко отраженных в интернете. В качестве публикаций, близких к рассматриваемой теме, приведем обзоры [7, 12]. Недостаток МОЭМС: их быстродействие ограничено долями миллисекунды. Поэтому в цифровых системах их можно использовать только для реконфигурации структуры системы, где указанное время приемлемо. Такие средства могут сохранять результат переключения при снятии управляющего воздействия.

Чисто электронные переключатели на соединениях ванадия находятся в стадии научных разработок, их преимущество – высокое быстродействие, измеряемое долями пикосекунды. В последние годы публикаций по этой тематике появилось много, здесь приведены [1, 6, 8, 9].

Доведенные до уровня технических устройств разработки ретрорефлекторов и модуляторов, требуемые в статье, можно найти в [10, 11]. Заметим, что в качестве модуляторов можно использовать указанные выше отклоняющие свет устройства. Они имеют преимущество: сигналы, которые не требуется передавать далее в системе, из нее удаляются.

2. Оптоэлектронный ретрорефлекторный стыковочный модуль

Организация каждого ретрорефлекторного стыковочного модуля (далее *RCM*) центра показана на рис. 1. Он имеет фотоприемник FR_s , ретрорефлектор RRF и модулятор оптических сигналов M_s . На FR_s поступает группа сигналов F_s . Сигналы группы F_s посылают источник сообщения – S и приемник сообщения – R . Сигналы в группе имеют различные частоты, часть из них вырабатывает в фотоприемнике электрические сигналы, управляющие пропускной способностью модулятора.

Ретрорефлектор (на рис. 1 катафот, но может быть использован «кошачий глаз», как в [10, 11]) обладает свойством возвращать поступающий на него оптический сигнал в направлении источника сигнала.

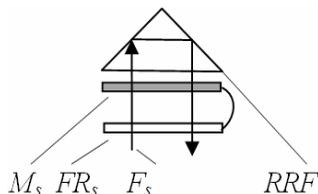


Рис. 1. Стыковочный модуль с ретрорефлектором

Источник S_i , чтобы послать сообщение приемнику R_k , посылает в RCM_j , выделенный для соединения всех источников с R_k , сигналы группы F_s : сигналы сообщения f_{2s} на частоте f_{2s} и непрерывный сигнал f_{3s} на частоте f_{3s} . Все используемые сигналами частоты обозначаются как соответствующие им сигналы. Эти обозначения соответствуют обозначениям в статьях [2, 3], результаты которых использованы ниже. Приемник постоянно посылает в RCM_j непрерывный сигнал f_{3s} из группы F_s на частоте f_{3s} . Получив от источника очередной сигнал f_{2s} , приемник FR_s модуля воздействует на модулятор M_s , который на время действия этого сигнала перекрывает поступление сигнала f_{3s} на ретрорефлектор RRF . В результате действия модулятора M_s приемник R_k , следящий за модулем, зафиксирует поступление в RCM_j сигнала источника.

Для посылки ответных сигналов от приемника к источнику приемник в выделенный ему модуль посылает сигнал f_{2s} , который, пройдя через фотоприемник FR_s , воздействует на модулятор M_s , и источник зафиксирует поступление в RCM сигнала приемника в результате модуляции сигнала f_{3s} источника.

В таком стыковочном модуле могут быть использованы приведенные в [10, 11] способы реализации ретрорефлектора типа «кошачий глаз», а также фотоприемника и модулятора оптических сигналов на фотонных кристаллах.

Желательно между объектами и ретрорефлектором размещать последовательно дополнительные селективные фотоприемники и модуляторы, реагирующие на различные частоты. В частности, это позволит ускорить и упростить обнаружение искажений сообщений, применяя передачу источником разрядов сообщения на разных частотах – частотами f_{2s} и f_{3s} для сигнала 1

и частотами f_{2s0} и f_{3s0} для сигнала 0. На дополнительных частотах можно передавать синхросигналы, разделять на подгруппы группу объектов, направляющих сигналы на RCM , передавать параллельно несколько битов и т.п.

На рис. 2 показан пример конструкции RCM с группой из двух фотоприемников и модуляторов.

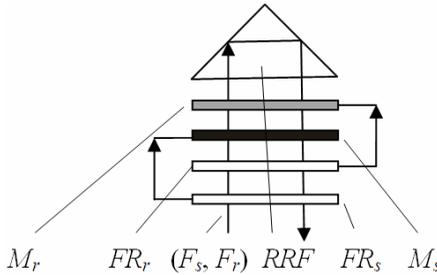


Рис. 2 Стыковочный модуль с группой приемников и модуляторов

Здесь между объектами и ретрорефлектором последовательно размещены узлы FR_s , FR_r , M_s и M_r , что предъявляет к фотоприемникам и модуляторам более жесткие требования: каждый из них должен реагировать указанным выше способом только на сигналы соответствующей ему частоты, пропуская остальные сигналы. Электрические сигналы каждого фотоприемника действуют на соответствующий модулятор.

В приведенных взаимодействиях источника и приемника от RCM не требуется генерация оптических сигналов – энергия нужна только для изменения состояния модуляторов сигналов.

Таким образом, особенность предложенного взаимодействия объектов в том, что сигналы источника сообщения непосредственно в приемник не поступают, и приемник для их приема должен передавать сигнал f_{3s} .

3. Структура демультиплексора

Рассмотрим структуру демультиплексора D , который для посылки луча света в одном из n направлений состоит из

$S_d = 2 \lceil \log_2 \sqrt{n} \rceil$ переключателей на два направления. На рис. 3 показано сечение плоскостью xu демультиплексора D на 4 направления луча, выбранного в качестве примера.

Переключатели в D имеют протяженность вдоль оси z и ортогональны плоскости xu , причем D состоит из двух переключателей на два направления s_1 и s_2 . На первый переключатель вдоль оси x поступает луч света. Каждый из двух переключателей содержит отражающие или пропускающие свет управляемые элементы (1, 3) и отражающие свет неуправляемые элементы (2, 4). Под действием управляющего сигнала элемент 1, 3 либо пропускает свет на элемент 2, 4, либо отражает его. При этом управляемые элементы или меняют прозрачность, или удаляются с пути поступления входного сигнала [4, 5]. Пусть по отношению к входящему лучу элементы наклонены на 45° (при различных реализациях углы могут быть другими [4, 5]). Расстояния между элементами переключателей выбраны так, чтобы расстояния между выходящими лучами были одинаковы.

Добавим к этому демультиплексору такой же демультиплексор D_1 , расположенный в плоскости xz , в который луч лазера поступает по осиз. Выходные лучи D_1 поступают на вход демультиплексора D . В результате совместного действия D и D_1 получим 16 направлений сигнала на выходе D при $S_d = 4$.

Демультиплексор каждого объекта при вхождении в систему должен быть ориентирован так, чтобы лучи с его выхода попали в адресованный демультиплексором CRM.

На рис. 3 используется небольшая часть площади элементов 1–4, поэтому каждый элемент можно заменить группой элементов меньшего размера, управляемых одним и тем же сигналом. По управлению сложность обоих решений одинакова, и выбор решения определяется требованиями технологии.

Пропускающий луч элемент частично отражает его, что создает помеху. Если необходимо дополнительно уменьшать такие помехи, то поместим на выходе каждого управляемого элемента управляемый фильтр, дополнительно ослабляющий помеху. Это могут быть фильтры, изменяющие пропускную способность при подаче управляющего сигнала, либо управляемые элементы из VO_2 , отводящие нежелательный сигнал в

сторону. Для управления фильтрами не требуются дополнительные сигналы, и сложность по управлению сохраняется.

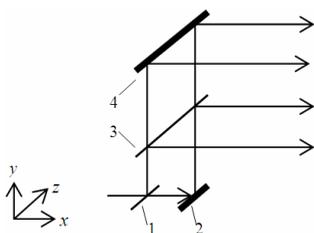


Рис. 3. Структура демультиплексора

Заметим, что вводить фильтры потребуется только для систем, в которых допускаются конфликты доступа с одновременным обращением к соседним *RCM* такого количества источников, что полезный сигнал не будет отличаться от помехи. Но и в этом случае можно воспользоваться случайным доступом.

На рис. 4 показана структура связей объектов *O* с применением стыковочных модулей *RCM*.

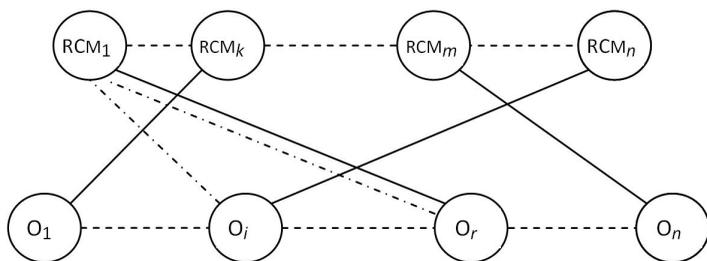


Рис. 4. Структура связей объектов со стыковочными модулями

Сплошными линиями показаны связи приемников сообщений с модулями *RCM*. Связи приемники устанавливают заданием адреса *RCM*, который выделен данному приемнику. Источник сообщения для связи с приемником сообщения с помощью демультиплексора направляет свой сигнал в *RCM* этого приемника. Например, объект O_i для отправки сообщения приемнику O_r направляет его в RCM_1 , из которого его получает приемник (штрихпунктирные линии).

Рассмотрим организацию групповых обменов сообщениями. Так как сложность демультиплексора мала, то введем в объекты дополнительный демультиплексор. Выделим объект – источник групповых сообщений (ИГС). Объекты, объединенные в группу, используют второй демультиплексор, чтобы постоянно следить за ИГС. Чтобы послать сообщение всем объектам группы, любой объект группы посылает его в ИГС, что автоматически обеспечивает требуемую доставку сообщения.

Если посылается ширококвотельное сообщение всем объектам системы, то решение упрощается. Должен быть выделен источник ширококвотельных сообщений (ИШС), используемый подобно ИГС, который имеет источник оптических сигналов, излучающий в конусе, охватывающем все объекты системы. Для получения сигналов ИШС каждый приемник должен вместо демультиплексора иметь простой фотоприемник этих сигналов.

Так как демультиплексоры имеют малую сложность, то их можно делать «с запасом», в расчете на максимальное для конкретного вида систем количество коммутируемых объектов.

Из раздела следует, что технические средства связи источника и приемника одинаковы, отличие только в способе использования модулей *RCM*, выделяемых приемникам.

4. Устранение конфликтов доступа к *RCM*

Пусть источник передает сообщение. Для *RCM* по рис. 1 передача возможна, если в течение интервала времени $1,5T_{max}$ источник не получает сигналов f_{2s} от приемника. Для *RCM* по рис. 2 надо на запрос источника – дополнительного сигнала f_{2q} , действующего подобно сигналу f_{2s} , получить разрешение от приемника.

Если после начала передачи сообщения на *RCM* приемника не приходят одновременно сигналы от нескольких источников, то рассмотренный коммутатор обеспечивает бесконфликтный обмен сообщениями. Однако отсутствие конфликтов на входе приемника обычно нереализуемо в системах управления, где трудно синхронизовать действия источников. Конфликты возможны также в одном из предлагаемых ниже способов борьбы с

отказами коммутатора. В данном разделе рассмотрен способ устранения конфликтов доступа с применением *RCM*.

Способ разрешения конфликта на входе *RCM* близок к способу разрешения конфликта на входе приемника объекта, показанному в [2], он требует выполнения следующих шагов.

Шаг 1. Источники сообщений измеряют интервал времени прохода сигнала от объекта к *RCM* и обратно. Свойства ретро-рефлектора позволяют всем источникам выполнять это измерение одновременно без конфликтов.

Шаг 2. Источники обнаруживают конфликт.

Шаг 3. Источники определяют момент начала передачи своего сообщения, обеспечивающего устранение конфликта.

Шаг 4. Источники, воспользовавшись результатами шага 1, передают свои сообщения одно за другим *без временных пробоев* между ними, как единое сообщение.

Операции шага 1. Каждый источник S_i измеряет интервал времени T_i прохода сигнала от объекта к *RCM* и обратно. Для этого в группу сигналов F_s вводится сигнал f_{1s} , который проходит через модулятор M_s без модуляции и возвращается ретро-рефлектором RRF_s источнику сигнала, что позволяет последнему измерить T_i .

Операции шага 2. Первый способ: если источник, принимая свои сигналы f_{3s} , модулированные в M_s , обнаруживает искажение своего сообщения другими источниками, то возник конфликт и требуется выполнение шага 3.

Второй способ: конфликт обнаруживает приемник и сигналами f_{2s} посылает в *RCM* сообщение о конфликте. Это сообщение поступает к источнику и требует перехода к шагу 3.

Замечание. Обнаружение искажений ускоряет передача разрядов сообщения на разных частотах – частотами f_{2s} и f_{3s} для сигнала 1 и частотами f_{2s0} и f_{3s0} для сигнала 0 (см. раздел 2).

Операции шага 3. Источникам известно l – количество источников, которым разрешено обращаться к данному приемнику. В частности l равно n . Все эти источники упорядочены. Полученное на шаге 2 сообщение о конфликте инициирует синхронизацию следующих действий источников.

Конфликтующие источники посылают в *RCM* координирующее сообщение, содержащее l разрядов. Посылка этого

сообщения выполняется так. Обнаружив конфликт (шаг 2), конфликтующий источник с номером i с задержкой $\tilde{T}_i = T_{\max} - T_i$ посылает сообщение в RCM . Здесь $T_{\max} \geq \max T_i$. Все такие сообщения поступят в RCM одновременно, с задержкой T_{\max} после завершения шага 2 в источнике. Таким образом, все сообщения группы источников в RCM накладываются одно на другое и представляют собой одно сообщение. В него каждый конфликтующий источник вносит единицу в разряд сообщения, соответствующий порядковому номеру (приоритету) источника. Сообщение получают все его источники, длительность этого сообщения известна источникам, и его окончание – начало шага 4.

Операции шага 4. Завершив шаг 3, каждый конфликтующий источник S_i знает, сколько источников передадут свои сообщения раньше него, и передает свое сообщение с задержкой $T_{\max} - T_i + Q$, где Q – суммарная длительность сообщений, переданных источниками с более высоким приоритетом (Q известно источнику). Конфликт устранен.

Изложенный способ разрешения конфликтов следует результатам статьи [2]. В статье [3] приведено ускорение способа, существенное для наиболее скоростных современных систем. Это ускорение достигалось усложнением оборудования, рассмотренного в [2], и применением более сложной совокупности оптических сигналов. Результаты [3] также реализуемы в предлагаемом коммутаторе. Но это потребует дополнительных оптических сигналов f_{4s} и f_{5s} , используемых подобно сигналам f_{2s} и f_{3s} соответственно, на которые должен реагировать RCM .

Замечание к разделу 4. Использовать шаг 1 не требуется, если на шаге 3 сигналы имеют малую длительность и скорость передачи сигналов достаточно низкая, такие, что сдвиг во времени передачи сигналов источниками не приводит к наложению разрядов в сообщении шага 3, т.е. $\max_{i,j} |T_i - T_j| < \tau$, $i, j = 1, \dots, l$, где τ – интервал времени между сигналами сообщения шага 3. При этом на шаге 4 сообщения надо передавать с задержкой $Q_i + \tau$ которая исключает наложение сообщений, но не требует ограничивать скорость передачи сообщения.

5. Борьба с отказами RCM

Отказы в коммутаторе возможны в демультиплексорах и в RCM. Отказ в демультиплексоре отключает от системы только владеющий им объект, такой отказ должен обнаруживаться и нейтрализоваться средствами объекта. Отметим, что частичные отказы в демультиплексоре, исключающие связь с отдельными приемниками, можно устранять системными средствами. Достаточно объекту с таким отказом потребовать переключения приемника на другой RCM, как показано ниже.

Модули RCM находятся вне объекта, с их отказами надо бороться системными средствами. Возможны два способа. При первом способе в центр добавляются резервные RCM. При обнаружении отказа конкретного RCM выполняется переход приемника и источников на один из резервных RCM. Для этого потребуется добавить в центр m дополнительных модулей и увеличить количество переключателей в каждом демультиплексоре до $2 \lceil \log_2 \sqrt{n+m} \rceil$. Во втором способе при отказе RCM приемник разделяет один из работоспособных RCM с другими приемниками. Возможные конфликты доступа к приемнику и, следовательно, к RCM разрешаются способом, изложенным в разделе 4. В обоих случаях источники и приемники сообщений должны обнаруживать отказы в RCM и иметь информацию для перехода к новому RCM.

Объект для обнаружения отказа RCM посылает в RCM контрольное сообщение сигналами f_{2s} и непрерывный сигнал f_{3s} . При исправном RCM объект получит от RCM сигнал f_{3s} , модулированный сигналами f_{2s} .

При обнаружении отказа RCM требуется перейти к исправному RCM. Для этого используем способ из раздела 3 выполнения групповых обменов сообщениями с помощью источника групповых сообщений ИГС. Объект, обнаруживший отказавший RCM, сообщает об этом в ИГС, и все объекты получают эту информацию, возможно с дополнительной информацией для выбора заменяемого RCM.

Если переключение выполняется на уже занятый приемником RCM, то может потребоваться, чтобы приемники созданной

группы выдавали сигналы в *RCM* синхронно, действуя как один объект. Это надо, например, для операции шага 2 из раздела 4.

Для этого приведенные выше времена T_i и T_{max} , применим в объекте-приемнике. Обнаружив необходимость передать сообщение, приемники с задержкой $\tilde{T}_i = T_{max} - T_i$ начинают отправку сигналов сообщения в *RCM*, что эквивалентно действиям единственного приемника.

Использование общего *RCM* группой приемников позволяет регулировать сложность центра и, что особенно важно, сохранять его работоспособность при множественных отказах в центре ценой постепенного уменьшения пропускной способности коммутатора. В пределе при наличии только одного *RCM* центр превращается в разделяемый всеми источниками общий канал связи. В последнем случае не требуется точно определять местонахождение *RCM*.

6. Формирование групп объектов и сложных связей в системе

Рассмотрим взаимодействие групп активных объектов и сложные взаимодействия объектов в группах. Так как в каждый объект заложена возможность связи с любым другим объектом системы, то формирование связей в системе сводится к наложению запретов на связи отдельных объектов, чтобы обеспечить бесконфликтное параллельное выполнение процессов. Таким способом очень быстро создаются группы, изменяются их состав и функции.

Подробное рассмотрение способов взаимодействия объектов в задачи статьи не входит, но ряд примеров приводится ниже.

Пусть выполняются следующие условия. Имеется n мест, в любое из которых должен быть помещен объект, претендующий на включение в состав системы. Места пронумерованы, помещенному в одно из мест объекту присваивается номер места. Демультимплексор объекта, занявшего одно из мест, может устанавливать связь с любым *RCM* центра, как показано в разделе 3. Пусть объект с номером 1 выполняет функции организатора

системы. Вопросы, связанные с изменениями в системе, объекты разрешают, обращаясь к объекту 1. В частности, входящий с систему объект, объявляет объекту 1 о своем появлении. Перейдем к примерам взаимодействия объектов.

6.1. ФОРМИРОВАНИЕ ГРУПП, ЗАДАНИЕ ОБЪЕКТАМ ИХ ФУНКЦИЙ

1. Создание групп и изменение их состава в динамике выполняется объектом 1 в ответ на поступающие запросы объектов и сводится к сообщению объектам разрешенных адресов для связи с другими объектами системы. Достаточные для этого средства даны в разделах 1–4.

2. Для создания в группе источников групповых обменов сообщениями – ИГС – объект 1 посылает команду будущим ИГС выполнять групповые обмены и информирует о выделенных ИГС другие объекты группы. В сформированной группе переназначение ИГС могут выполнять ИГС группы.

3. Рассылка широковебательных сообщений, посылаемых всем объектам системы, выполняется с использованием объекта 1, имеющего *RCM* с источником ненаправленных оптических сигналов, как это изложено в разделе 3.

6.2. ФОРМИРОВАНИЕ ЦЕПОЧЕЧНЫХ И ДРЕВОВИДНЫХ СОЕДИНЕНИЙ ОБЪЕКТОВ В ГРУППЕ.

Такие соединения полезны, если требуется, чтобы сообщения передавались через последовательность объектов и объекты вносили изменения и дополнения в проходящее через них сообщение. Формирующий структуру соединений объект посылает объектам команду или программу, задающую их действия. Каждый объект формируемой структуры получает адрес объекта – предшественника в структуре. Для защиты объектов формируемой структуры от запрещенных обращений к ним исключаются адреса этих объектов из списка адресов связи, хранящихся у объектов, не участвующих в данной операции.

Демультимплексор любого включенного в структуру объекта устанавливает связь с *RCM* предшественника, посылая ему непрерывный луч f_{3s} . Первый объект структуры, используя луч f_{2s} , направит сообщение в свой *RCM*. Следящие за этим *RCM*

объекты получают сообщение первого объекта в виде своих сигналов f_{3s} , модулированных битами сообщения. Объекты, получившие сообщение, при необходимости преобразуют его содержимое или добавляют в сообщение дополнительную информацию и отправят сообщение в свои RCM сигналами f_{2s} . Эти сообщения получают объекты, посылавшие сигналы f_{3s} своим предшественникам и т.д.

Объекты, не задерживая сообщение на обработку, могут выполнять над его содержимым логические операции **И** и **ИЛИ**, а также, задерживая сообщение на время формирования одного бита результата операции, выполнять другие логические операции и арифметические сложение, вычитание, умножение.

На рис. 5 даны примеры построения цепочки и дерева соединений.

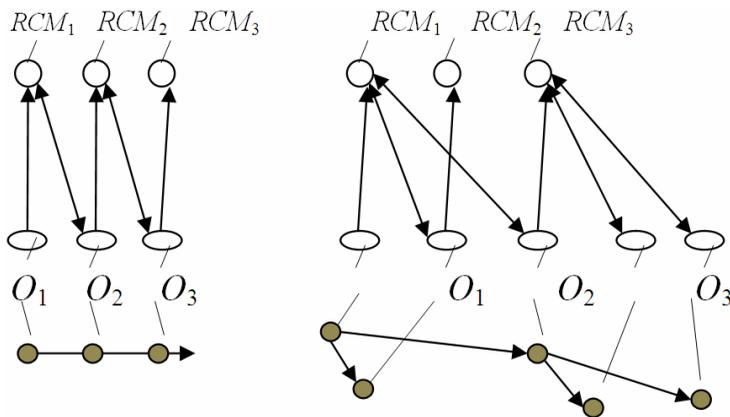


Рис. 5. Последовательности связей объектов объектов

Здесь O_i – коммутируемые объекты; однонаправленные линии – посылка в RCM сигналов f_{2s} ; двунаправленные линии – посылка сигналов f_{3s} .

На нижней части рисунка показаны цепочечное и древовидное соединения между объектами, реализуемые структурами верхней части рисунка.

От объектов в дереве требуются затраты энергии такие же, как в цепочке, поскольку передача сигналов выполняется за счет энергии сигналов f_3 , приемников сообщения.

Раздел показывает, что группа объектов ведет себя как единое образование – метаобъект, который, используя встроенные в объекты средства коммутации, может в динамике изменять набор объектов, их функционирование и характер взаимодействия метаобъекта с другими метаобъектами.

7. Заключение

Перечисленные во введении требования к предлагаемой коммутации связей достигнуты. Каждый источник и приемник сообщения соединяются непосредственно. Для выбора одного из n объектов-приемников беспроводные оптические соединения формируются демультиплексорами, находящимися в коммутируемых объектах и содержащими $2 \lceil \log_2 \sqrt{n} \rceil$ двоичных переключателей направления передачи оптического сигнала. Выполняются парные, групповые и широкоэмиттерные обмены сообщениями, а также сложные последовательности перемещения сообщений между объектами, в том числе с обработкой их содержимого.

Экономично устраняются отказы в оборудовании коммутации. Аппаратными средствами устраняются конфликты при одновременном обращении к приемнику группы источников сообщений.

С учетом изложенного в статье еще раз остановимся на возможности создания необходимых технических устройств. Необходимые для ретрорефлекторного стыковочного модуля ретрорефлектор, модулятор и фотоприемник, как показано в [10, 11], реализуемы. Уровень развития микрооптоэлектромеханических систем также показывает возможность создания требуемых в демультиплексоре переключателей [7, 12]. Быстродействующие оптические переключатели [1, 6, 8, 9] пока находятся в стадии быстро развивающихся научных исследований.

Так как источник оптического излучения в предлагаемых решениях может находиться вне коммутируемых объектов, то

увеличение его мощности компенсирует потери света в многокаскадных демультиплексорах.

Литература

1. ГОЛУБЕВ В.Г., КАПЛЯНСКИЙ А.А. *Управляемые трехмерные фотонные кристаллы на основе нанокompозитов опал-полупроводник*. [Электронный ресурс] – URL: <http://85.142.23.144/packages/mifi/45B8BA7D-22B8-4275-A73A-BC1C89DB981B/1.0.0.0/11.pdf> (дата обращения: 10.01.2014).
2. СТЕЦЮРА Г.Г. *Способ устранения конфликтов доступа* // Журнал радиоэлектроники. – 2012. – №5. – [Электронный ресурс]. – URL: <http://jre.cplire.ru/jre/may12/7/text.pdf> (дата обращения: 10.01.14).
3. СТЕЦЮРА Г.Г. *Исключение задержки в передаче сообщений при устранении конфликтов доступа* // Журнал радиоэлектроники. – 2012. – №8. – [Электронный ресурс]. – URL: <http://jre.cplire.ru/jre/aug12/9/text.pdf> (дата обращения: 10.01.14).
4. СТЕЦЮРА Г.Г. *Уменьшение сложности распределенного коммутатора для параллельных систем обработки данных* // Автоматика и телемеханика. – 2010. – №5. – С. 147–154.
5. СТЕЦЮРА Г.Г. *Базовые механизмы взаимодействия активных объектов цифровых систем и возможные способы их технической реализации* // Проблемы управления. – 2013. – №5. – С. 39–53.
6. DONEV E.U., SUH J., LOPEZ Y. et al. *Review Article. Using a Semiconductor-to-Metal Transition to Control Optical Transmission through Subwavelength Hole Arrays* // Hindawi Publishing Corporation Advances in OptoElectronics. – 2008. – Vol. 2008. – ArticleID 739135.doi:10.1155/2008/739135. – [Электронный ресурс]. – URL: http://www.eudonev.com/CV/docs/Donev_Metal-VO2_VO2_Hole-arrays_review.pdf (дата обращения: 25.03.2014).

7. KIM S., BARBASTATHIS G., TULLER H.L. *MEMS for Optical Functionality* // Journal of Electroceramics. – 2004. – №12. – P. 133–144.
8. MAZURENKO D.A., KERST R., DIJKHUIS J.I. et al. *Subpicosecond shifting of the photonic band gap in a three-dimensional photonic crystal* // Applied Physics Letters. – 2005. – Vol. 86. – P. 041114-1–041114-3.
9. PEVTSOV A.B., KURDYUKOV D.A., GOLUBEV V.G. et al. *Ultrafast stop band kinetics in a three-dimensional opal-VO₂ photonic crystal controlled by a photoinduced semiconductor-metal phase transition* // Phys. Rev. – 2007. – Vol. B 75. – P. 153101-1–153101-4.
10. RABINOVICH W.S., MEEHAN T.J., KATZER D.S., et al. *Modulating Retroreflector Implementation of MIL-STD-1553 Protocol with Free-Space Optics* // Proc. 2003 IEEE Aerospace Conf. – Paper №1559.–[Электронный ресурс]. – URL: <http://www.nrl.navy.mil/fpc/pubs/03-1226-0334.pdf> (дата обращения: 10.01.14).
11. RABINOVICH W.S., GOETZ P.G., MAHON R. et al. *45-Mbit/s cat's-eye modulating retroreflectors* // Optical Engineering. – 2007. – Vol. 46.– №10. – P. 1–8.
12. WU M.C., SOLGAARD O., FORD J.E. *Invited Paper. Optical MEMS for Lightwave Communication* // Journal of Lightwave Technology. – 2006. – Vol. 24, №12. – P. 4433–4454.

ORGANIZATION OF SWITCHED DIRECT CONNECTIONS OF ACTIVE OBJECTS IN COMPLEX DIGITAL SYSTEMS

Gennady Stetsyura, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Doctor of Science, professor (stetsura@ipu.ru).

Abstract: We suggest a routine for designing direct switching connections between a large number of digital message sources and receivers. Conflicts on a receiver input are being quickly removed. Elimination of connection refusals is hardware-efficient. It is shown that the scheme of direct switching connections can be implemented by virtue of optoelectronic equipment.

Keywords: distributed switching, retroreflector, fault tolerance, conflict-free access.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии М.Ф. Караваем

Поступила в редакцию 14.01.2014.

Опубликована 31.05.2014.

**XIV – международная конференция
Системы проектирования, технологической
подготовки производства и управления
этапами жизненного цикла промышленного
продукта
(CAD/CAM/PDM-2014)**

14–16 октября 2014 года, Москва, ИПУ РАН

<http://lab18.ipu.ru>

КЛЮЧЕВЫЕ ДАТЫ:

До 15 сентября 2014 года – заявка на участие в конференции и/или выставке.

До 2 октября 2014 года – полные тексты докладов.

УДК 021.8 + 025.1

ББК 78.34

ОПТИМАЛЬНЫЕ СОГЛАСОВАННЫЕ МЕХАНИЗМЫ В АКТИВНЫХ СИСТЕМАХ И ЗАДАЧА ТЕОРИИ КОНТРАКТОВ

Еналеев А. К.¹

*(ФГБУН Институт проблем управления
им. В.А.Трапезникова РАН, Москва)*

Исследуется механизм функционирования двухуровневой активной системы, в которой целевая функция центра может явно зависеть от системы стимулирования, доказываемся оптимальность согласованных механизмов для этого случая и устанавливается связь задачи синтеза оптимальных механизмов с задачей стимулирования в теории контрактов.

Ключевые слова: согласованность планирования и стимулирования, принцип открытого управления, неманипулируемость, синтез оптимального механизма, теория контрактов.

1. Введение

В постановках задач управления в активных системах в основном (за исключением, пожалуй, работ [6, 7, 12]) целевая функция центра не зависит явно от системы стимулирования, применяемой центром в отношении активных элементов. При этом в [6, 7] исследовался в основном случай полной информированности центра, а в [12] – случай со стохастическим активным элементом. В настоящей работе продолжают исследования, начатые в работах [4, 10, 11], и рассматриваются задачи управления при неполной информации, в которых вводится явная зависимость целевой функции центра от системы стимулирования. Результатами работы являются доказательства для

¹ Анвер Касимович Еналеев, кандидат технических наук, старший научный сотрудник (anver.en@gmail.com).

рассматриваемых задач оптимальности согласованных механизмов, обеспечивающих неманипулируемость (сообщение активным элементом достоверной информации и выполнение плана) и выявление связи с задачей построения соответствующего механизма в теории контрактов [6, 15, 17]. В частности, показывается, что одна из базовых постановок задач и, соответственно, результаты решения задачи теории контрактов являются частным случаем решения рассмотренной задачи синтеза оптимального согласованного механизма.

2. Модель и постановка задачи

Пусть активная система состоит из центра и активного элемента (АЭ). Обозначим $f(x, y, r)$ целевую функцию АЭ. Здесь x – назначаемый центром план; X – множество допустимых планов; y – выбираемое активным элементом состояние; Y – множество допустимых состояний; r – параметр, характеризующий систему; A – множество допустимых значений параметра r . Далее для простоты примем $X = Y$. Предположим, что X , Y , также как и A , являются ограниченными замкнутыми множествами.

Будем рассматривать целевые функции АЭ вида

$$(1) f(x, y, r) = s(x, y) - \zeta(y, r),$$

где $\zeta(y, r)$ – функция затрат АЭ при выборе состояния y ; $s(x, y) = \sigma(y) - \chi(x, y)$ – функция стимулирования за выбор активным элементом состояния y при плане x . Здесь функция $\sigma(y)$ – поощрение за выбор величины y , $0 \leq \sigma(y) \leq g$, где g – фонд поощрения, а $\chi(x, y)$ – функция штрафов за отклонение состояния y от плана x , причем $\chi(x, y) \geq 0$, $\chi(y, y) = 0$. Будем считать далее, что функции $\sigma(y)$ полунепрерывны сверху, а $\chi(x, y)$ полунепрерывны снизу.

Обозначим $\Phi(x, y, \sigma(x), \chi(x, y), r)$ целевую функцию центра и предположим

$$(2) \Phi(y, y, \sigma, \chi(y, y), r) = \Phi(y, y, \sigma, 0, r) \geq \Phi(x, y, \sigma, \chi(x, y), r) \geq 0,$$

где функция $\Phi(y, y, \sigma, \chi, r)$ непрерывна, не возрастает по σ и строго вогнута по y при всех $r \in A^1$. План x назначается центром в соответствии с некоторой выбранной процедурой планирования $x = \pi(\cdot)$, где $\pi(\cdot)$ отображает множество A в множество X ; $\pi: A \rightarrow X$. Далее предполагается непрерывность отображения $\pi(\cdot)$.

Совокупность процедуры планирования $x = \pi(\cdot)$ и функции стимулирования $s(x, y)$ составляет механизм функционирования $\mu = \{\pi(\cdot), s(x, y)\}$.

Введем предположения об информированности и порядке функционирования в рассматриваемой активной системе.

Активному элементу известно значение параметра r , а центру известно только множество A допустимых значений этого параметра. Функционирование рассматриваемой активной системы описывается следующим образом (порядок ходов). Центр выбирает и сообщает механизм μ , после этого АЭ сообщает оценку ρ параметра r , затем в соответствии с процедурой планирования $\pi(\cdot)$ назначается план $x = \pi(\rho)$, затем АЭ выбирает состояние y , стремясь максимизировать по y свою целевую функцию $f(x, y, r)$.

Обозначим функцию предпочтения активного элемента $\varphi(x, r) = \max_{y \in Y} f(x, y, r)$ и функцию предпочтения центра

$$\Psi(x, \sigma(x), r) = \inf_{y \in Z(x, r)} \Phi(x, y, \sigma(x), \chi(x, y), r),$$

где $Z(x, r)$ – множество рациональных стратегий активного элемента при выборе состояния y (определение используемого в данной работе множества рациональных стратегий $Z(x, r)$ приведено ниже).

Для заданного механизма функционирования μ определим показатель его эффективности

$$(3) \quad K(\mu) = \inf_{r \in A} [\inf_{\rho \in R(r)} \Psi(\pi(\rho), \sigma(\pi(\rho)), r) / \Psi_{\text{в}}(r)],$$

¹ Условие (2) было введено еще в работах [1, 3] и означает, что центр несет потери от невыполнения плана.

где $R(r)$ – множество рациональных стратегий АЭ при выборе им сообщения ρ (определение множества $R(r)$ приведено ниже); $\Psi_B(r)$ – заданная нормирующая функция. В качестве нормирующей функции могут быть выбраны, например, одна из следующих функций: $\Psi_B(r) = \max_{x \in X} \Phi(x, x, 0, 0, r)$, либо $\Psi_B(r) = \text{const} > 0$.

Далее будем предполагать выполнение «слабого условия благожелательности АЭ» [10, 11], при котором множества рациональных стратегий АЭ принимают следующий вид:

$$Z(x, r) = \begin{cases} \{x\}, & \text{если } x \in \text{Arg max}_{y \in Y} f(x, y, r), \\ \text{Arg max}_{y \in Y} f(x, y, r) & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$R(r) = \begin{cases} \{r\}, & \text{если } r \in \text{Arg max}_{\rho \in A} \varphi(\pi(\rho), r), \\ \text{Arg max}_{\rho \in A} \varphi(\pi(\rho), r) & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Содержательно это условие означает, что если для АЭ сообщение достоверной информации является рациональной стратегией, то сообщается именно достоверная информация, и, соответственно, если стратегия выполнения плана является рациональной, то выбирается именно она. Нетрудно убедиться, что «слабое условие благожелательности» выполняется, если справедливо «условие благожелательности», используемое в работах [8, 9, 13].

Особый интерес представляют собой механизмы, которые обеспечивают выполнение планов и сообщение достоверной информации (неманипулируемость), т.е.

$$(4) \quad Z(x, r) = \{x\},$$

$$(5) \quad R(r) = \{r\}.$$

Такие механизмы $\mu_{\text{пр}}$ в теории активных систем принято называть правильными. Заметим, что для правильных механизмов $\mu_{\text{пр}}$ выражение для критерия эффективности существенно упрощается (по сравнению с (3)):

$$(6) \quad K(\mu_{\text{пр}}) = \min_{r \in A} [\Phi(\pi(r), \pi(r), \sigma(\pi(r)), 0, r) / \Psi_B(r)].$$

Обозначим $M_{\text{пр}}$ множество правильных механизмов (то, что множество $M_{\text{пр}}$ не пусто, подтверждается, например, результатами работы [11]).

В теории активных систем ставится следующая общая задача синтеза оптимального механизма функционирования μ^* :

$$(7) \quad K(\mu^*) = \sup_{\mu \in M} K(\mu) - \varepsilon,$$

где M – некоторое заданное множество механизмов, а ε – достаточно малое положительное число.

Итак, пусть задано некоторое множество M такое, что

$$M \cap M_{\text{пр}} \neq \emptyset.$$

Задача. Охарактеризовать множества допустимых механизмов M , для которых выполняется¹

$$K(\mu^*) = \max_{\mu \in M} K(\mu) = \max_{\mu \in M \cap M_{\text{пр}}} K(\mu),$$

т.е. оптимальный механизм на множестве M принадлежит множеству правильных механизмов,

$$(8) \quad \mu^* \in M \cap M_{\text{пр}}.$$

Ниже будут найдены и исследованы достаточные условия выполнения (8), характеризующие множество механизмов M для рассматриваемой модели активной системы.

Забегая вперед, скажем, что эти условия будут представлять собой некоторые условия согласованности механизмов функционирования.

Дальнейшее изложение потребует дополнительных предположений о свойствах модели АЭ.

Во-первых, будем предполагать, что $Y = X = [x^H, x^B]$, $A = [r^H, r^B]$, т.е. множества допустимых состояний, планов и значений параметра r представляют собой отрезки на числовой оси.

¹ Здесь вместо *sup* используется *max* и принимается $\varepsilon = 0$, так как для принятых в работе предположений (правильность механизма, свойства функции затрат, условия благожелательности АЭ)

$\max_{\mu \in M \cap M_{\text{пр}}} K(\mu)$ достижим.

Во-вторых, предположим, что функция затрат $\zeta(x, r)$ дважды дифференцируема по x , дифференцируема по r и $\zeta'_x(x, r) > 0$, $\zeta''_{xx}(x, r) > 0$, $\zeta'_r(x, r) < 0$, $\zeta''_{xr}(x, r) < 0$ при всех $x \in X, r \in A$.

Первые два неравенства указывают, соответственно, на возрастание функции затрат и ее выпуклость. Третье неравенство характеризует монотонность функции затрат по параметру r . Четвертое неравенство соответствует хорошо известным в микроэкономике условиям Спенса–Мирлиса [18] и характеризует упорядоченность АЭ по возможным значениям параметра r , причем с увеличением r происходит снижение затрат и темпа роста затрат с увеличением x .

В качестве множества допустимых систем стимулирования примем

$$S = \{s(x, y) \mid 0 \leq \sigma(x) \leq g, \chi(x, y') - \chi(x, y) \leq u_\chi(y, y'), \\ x, y, y' \in Y\},$$

где g – заданное положительное число (фонд поощрения), а $u_\chi(y, y')$ – заданный показатель максимального роста функции штрафов за невыполнение плана [11], функция $u_\chi(\cdot, \cdot)$ удовлетворяет неравенству «треугольника»: $u_\chi(x, y) + u_\chi(y, y') \geq u_\chi(x, y')$.

Отметим, что, вообще говоря, функция максимального роста $u_\chi(x, y)$ может явно зависеть от значений функции стимулирования σ в точках x , либо y , т.е. может быть, что $u_\chi(x, y) = u_{\chi\sigma}(x, y, \sigma(x))$ или $u_\chi(x, y) = u_{\chi\sigma}(x, y, \sigma(y))$.

Обозначим множество выгодных для АЭ планов, а значит планов, согласованных с интересами АЭ,

$$P(r) = \{x \in X \mid f(x, y, r) \leq f(x, x, r), \forall y \in Y\}.$$

Таким образом, центр, назначая планы из множества $P(r)$, некоторым образом согласовывает свои интересы с интересами АЭ. Это множество будем называть *множеством согласованных планов*.

В [11] доказано, что множество согласованных планов $P(r)$ при сделанных предположениях о свойствах функции затрат представимо в виде отрезка $P(r) = [x^H, x^P(r)]$, где $x^P(r)$ – неубывающая функция.

Пусть $y^* = y^*(x)$ – выбор состояния АЭ при плане x , т.е. $y^* \in Z(x, r)$. Известно [11], что если функция штрафов является сильно согласованной, т.е. удовлетворяет неравенству «треугольника», и план x^c удовлетворяет условию согласования $x^c \in P(r)$, то $y^* = x^c$, если же $x \notin P(r)$, то $y^* \in P(r) = [x^H, x^P(r)]$.

Тогда функцию предпочтения АЭ можно записать в виде

$$\varphi(x, r) = \begin{cases} \sigma(x) - \zeta(x, r), & \text{если } x \in P(r), \\ \sigma(y^*) - \zeta(y^*, r) - \chi(x, y^*), & \text{если } x \notin P(r), \end{cases}$$

где $y^* = y^*(x)$.

Соответственно, функцию предпочтения центра можно представить в виде

$$\Psi(x, r) = \begin{cases} \Phi(x, x, \sigma(x), 0, r), & \text{если } x \in P(r), \\ \Phi(x, y^*, \sigma(x), \chi(x, y^*), r), & \text{если } x \notin P(r). \end{cases}$$

Заметим, что в силу предположения (2) имеет место $\Phi(y^*, y^*, \sigma, 0, r) \geq \Phi(x, y^*, \sigma, \chi(x, y), r)$. Но так как $y^* \in P(r)$, то выбором плана $x = y^*$ всегда можно обеспечить выбор активным элементом состояния y^* , т.е. функцию предпочтения центра достаточно рассматривать в области определения $x \in P(r)$, а следовательно достаточно рассматривать только те процедуры планирования $\pi(\cdot)$, значение которых принадлежит множеству $P(\rho)$.

В [2] показано, что оптимальная процедура планирования содержится в множестве так называемых *процедур открытого управления* [1]. По определению процедура открытого управления $\pi^{OY}(\cdot)$ задается условием «совершенного согласования» [2]:

$$(9) \quad \forall \rho \in A: \varphi(\pi^{OY}(\rho), \rho) = \max_{x \in X_c} \varphi(x, \rho),$$

где X_c – устанавливаемое центром замкнутое подмножество множества X , не зависящее от сообщаемой активным элементом оценки ρ . Именно заданием центром множества X_c и условия (9) определяется процедура открытого управления.

В [2] доказано, что процедура открытого управления стимулирует АЭ сообщать достоверную информацию $\rho = r$, так как $\forall \rho, r \in A: \varphi(\pi^{OY}(\rho), r) \leq \varphi(\pi^{OY}(r), r)$.

Отсюда следует, что для процедур открытого управления функция предпочтения центра имеет вид $\Psi(\pi^{\text{OY}}(r), \sigma(\pi^{\text{OY}}(r)), r)$. Из этого свойства вытекает, что для процедуры открытого управления критерий эффективности (3) имеет вид

$$K(\mu) = \min_{r \in A} [\Phi(\pi^{\text{OY}}(r), \pi^{\text{OY}}(r), \sigma(\pi^{\text{OY}}(r)), 0, r) / \Psi_{\epsilon}(r)].$$

Поскольку оптимальной процедурой планирования при произвольной фиксированной целевой функции АЭ [2] является процедура открытого управления (9), то определение оптимального механизма сводится к нахождению оптимальной системы стимулирования $s^*(x, y) = \sigma^*(x) - \chi^*(x, y)$.

Таким образом, ниже для рассматриваемого случая неполной информированности центра будет исследована задача (7) синтеза оптимального механизма μ_* на множестве

$$M = \{\mu \mid s(x, y) \in S, x = \pi(\rho), x, y \in X, \rho \in A\},$$

где $\pi(\rho)$ – непрерывные функции, определенные на множестве A и принимающие значения в X .

3. Оптимальность согласованного механизма

В [10, 11] показано, что процедура открытого управления $\pi^{\text{OY}}(r)$ представляет собой неубывающую непрерывную функцию, принимающую значения в множестве согласованных планов $P(r)$.

Зафиксируем некоторое значение γ показателя эффективности механизма μ . Введем в рассмотрение множество $N_{\gamma\sigma}$ неубывающих непрерывных функций $x = \pi_{\gamma}(r)$, отображающих множество A в множество $P(r)$ при выполнении также условия

$$(10) \quad \Phi(x, x, \sigma(x), 0, r) \geq \gamma \Psi_{\epsilon}(r),$$

т.е.

$$\forall r \in A, x = \pi_{\gamma}(r) \in P(r) : \Phi(x, x, \sigma(x), 0, r) \geq \gamma \Psi_{\epsilon}(r).$$

Справедливо следующее утверждение [10].

Утверждение. Предположим, что функция $\Phi(x, x, \sigma(x), 0, r)$ непрерывна и строго квазивогнута по x , и пусть γ таково, что неравенство $\Phi(x, x, \sigma(x), 0, r) \geq \gamma \Psi_{\epsilon}(r)$ разрешимо в множестве X при $\forall r \in A$, тогда множество $Q_{\gamma\sigma}$ всех точек (x, r) , удовлетворяющих этому неравенству, можно представить в виде

$$Q_{\gamma\sigma} = \left\{ (x, r) \mid q_1^\sigma(\gamma, r) \leq x \leq q_2^\sigma(\gamma, r), r \in A, x \in X \right\},$$

где $q_1^\sigma(\gamma, r)$ и $q_2^\sigma(\gamma, r)$ – непрерывные функции.

Замечание. Проверка условия непрерывности и квазивогнутости функции $\Phi(x, x, \sigma(x), 0, r)$, когда она явно зависит от искомой функции $\sigma(x)$, может представлять нетривиальную задачу. Поэтому ниже приводятся примеры, когда условие непрерывности и квазивогнутости заведомо выполняются. Примером является функция $\Phi(x, x, \sigma(x), 0, r) = \Phi^*(x, x, r) - \sigma(x)$, где $\Phi^*(x, x, r)$ – непрерывная, строго вогнутая функция по x , а $\sigma(x)$ – выпуклая, непрерывная функция. В этом случае $\Phi(x, x, \sigma(x), 0, r)$ строго вогнутая функция. Достаточным условием квазивогнутости функции $\Phi(x, x, \sigma(x), 0, r)$ является представление ее в виде $\Phi(x, x, \sigma(x), 0, r) = \omega(\Phi^*(x, x, 0, r) - \sigma(x))$, где $\omega(\cdot)$ – неубывающая функция, а $\Phi^*(x, x, 0, r) - \sigma(x)$ удовлетворяют условиям предыдущего примера [16].

Рассмотрим функции

$$\overline{q_1^\sigma}(\gamma, r) = \max_{r'' \leq p \leq r} q_1^\sigma(\gamma, p), \quad \underline{q_2^\sigma}(\gamma, r) = \min_{r \leq p \leq r''} q_2^\sigma(\gamma, p),$$

где $q_2^p(\gamma, p) = \min \{ \overline{q_2^\sigma}(\gamma, p), x^p(p) \}$.

Очевидно, что $\overline{q_1^\sigma}(\gamma, r)$ и $\underline{q_2^\sigma}(\gamma, r)$ – неубывающие, непрерывные функции.

Справедливо также следующее утверждение (доказательство приведено в [10]).

Утверждение. Если $Q_{\gamma\sigma} \neq \emptyset$, то $\overline{q_1^\sigma}(\gamma, r) \leq \underline{q_2^\sigma}(\gamma, r)$ при всех $r \in A$, и условие (10) в определении множества $N_{\gamma\sigma}$ можно заменить условием $\overline{q_1^\sigma}(\gamma, r) \leq x(r) \leq \underline{q_2^\sigma}(\gamma, r)$, т.е.

$$(11) \quad N_{\gamma\sigma} = \left\{ x(r) \in P(r) \mid \overline{q_1^\sigma}(\gamma, r) \leq x(r) \leq \underline{q_2^\sigma}(\gamma, r), r \in A \right\},$$

где $x(r)$ – непрерывные, неубывающие функции.

Заметим, что $N_{\gamma_1\sigma} \subseteq N_{\gamma_2\sigma}$, если $\gamma_1 > \gamma_2$.

Пусть γ такое, что $N_{\gamma\sigma} \neq \emptyset$. Обозначим $\alpha = \underline{q}_2^\sigma(\gamma, r^h)$.

Рассмотрим процедуру планирования

$$(12) \pi_\gamma^\sigma(r) = \begin{cases} \alpha^\sigma, & \text{если } r^h \leq r \leq \beta, \\ \overline{q}_1^\sigma(\gamma, r), & \text{если } \beta < r \leq r^B; \end{cases}$$

где $\beta = r^B$, если $\alpha^\sigma \geq \overline{q}_1^\sigma(\gamma, r^B)$, либо β определяется как решение уравнения $\overline{q}_1^\sigma(\gamma, \beta) = \alpha^\sigma$, если $\alpha^\sigma < \overline{q}_1^\sigma(\gamma, r^B)$.

Заметим, что по построению $\pi_\gamma^\sigma(r)$ является неубывающей непрерывной функцией. Отсюда следует, что существует функция $\tilde{r}_\gamma^\sigma(x)$, обратная к $\pi_\gamma^\sigma(r)$, определенная на множестве допустимых планов X за исключением, быть может, счетного числа точек, при этом $\tilde{r}_\gamma^\sigma(x)$ является неубывающей.

Обозначим:

$$(13) K(\mu) = \gamma,$$

$$(14) x = \pi_\gamma(r) = \begin{cases} \alpha^\sigma, & \text{если } r^h \leq r \leq \beta, \\ \overline{q}_1^\sigma(\gamma, r), & \text{если } \beta < r \leq r^B, \end{cases}$$

$$(15) \chi(x, y) = u_\chi(x, y),$$

$$(16) \sigma(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x^h \leq x \leq \alpha^\sigma, \\ \int_{\alpha^\sigma}^x \zeta_t'(t, \tilde{r}_\gamma(t)) dt & \text{при } \alpha^\sigma < x \leq \pi_\gamma(r^B), \\ \overline{g} & \text{при } \pi_\gamma(r^B) < x \leq x^B. \end{cases}$$

$$(17) \overline{g} = \int_{\alpha^\sigma}^{\pi_\gamma(r^B)} \zeta_t'(t, \tilde{r}_\gamma(t)) dt.$$

Теорема. Существует оптимальный механизм μ^* такой, что справедливы (13)–(17) и показатель эффективности оптимального механизма функционирования γ^* удовлетворяет условиям

$$\gamma^* = \max \{ \gamma \mid Q_{\gamma\sigma} \neq \emptyset \}, \quad \bar{g} = \int_{\alpha^\sigma}^{\pi_\gamma^*(r^\sigma)} \zeta'_t(t, \tilde{r}_\gamma^*(t)) dt \leq g.$$

Примечание. В математических выражениях(16),(17) и в формулировке теоремы $\zeta'_t(t, \tilde{r}_\gamma^*(t))$ обозначает частную производную по первой переменной функции затрат АЭ.

Доказательство теоремы приведено в приложении.

В содержательных терминах теорема показывает, что для рассмотренной модели активной системы выполнение планов обеспечивается применением штрафов с максимальным показателем роста, а процедура планирования конструируется таким образом, чтобы функция стимулирования, при которой эта процедура планирования удовлетворяла условиям совершенного согласования, возростала с минимальной скоростью.

Рассмотрим теперь случай, когда множество «ограниченных» функций штрафа задается следующим образом

$$(18) u_\chi(x, y) = u^C(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } y = x, \\ C(x), & \text{если } y \neq x, \end{cases}$$

где $C(x) \geq 0$. Здесь ограничивающая функция $C(x)$ зависит уже не от y , как рассматривалось в примере, приведенном в [11], а от x .

Нетрудно проверить, что функция штрафов вида (18) является сильно согласованной, т.е. удовлетворяет «неравенству треугольника».

Выберем $C(x) = \zeta(a, r^H) + \sigma(x)$, отсюда получаем важное

Следствие. На множестве механизмов

$$M = \{ \mu \mid s(y, x) \in S, x = \pi(\rho), y, x \in Y, \rho \in A \},$$

где

$$S = \{ s(y, x) \mid 0 \leq \sigma(x) \leq g, 0 \leq \chi(x, y) \leq \zeta(a, r^H) + \sigma(x), x, y \in Y \},$$

механизм, удовлетворяющий (14), (15), (17) при использовании функции штрафов

$$\chi^*(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } y = x, \\ \zeta(a, r^H) + \sigma^*(x), & \text{если } y \neq x, \end{cases}$$

является оптимальным.

4. Связь с одной из базовых задач теории контрактов

Рассмотрим частный случай представленной выше модели.

А) Положим, что целевая функция центра имеет вид $\Phi(x, y, \sigma(y), \chi(x, y), r) = H(y) - \sigma(y)$, где $H(y)$ – неубывающая вогнутая функция дохода центра.

Б) Весовая функция $\Psi_b(r) = 1$.

В) Исключим из рассмотрения ограничение $\sigma(y) \leq g$ (например, фонд стимулирования g является настолько большой величиной, что ограничение $\sigma(y) \leq g$ можно не учитывать).

Г) Штрафы за невыполнение плана имеют вид

$$\chi(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } y = x, \\ \sigma(x), & \text{если } y \neq x. \end{cases}$$

При использовании функции штрафов, определенной в пункте Г), в силу ее сильной согласованности выбираемое состояние y совпадает с назначаемым согласованным планом x .

В этом случае рассматриваемую в настоящей статье задачу синтеза механизма (7) можно представить в виде задачи

$$\min_{r \in A} [H(x(r)) - \sigma(x(r))] \rightarrow \max_{\sigma}$$

где $x(r) = \arg \max_{x \in X} [-\zeta(x, r) + \sigma(x)]$.

Эта модель соответствует одной из базовых моделей теории контрактов [15, 17]. Тем самым установлена связь рассматриваемой в теории активных систем задачи с одной из задач теории контрактов.

5. Заключение

В настоящей статье обобщены ранее полученные результаты в теории активных систем на случай явной зависимости целевой функции центра от функции поощрения.

Отметим, что требование строгой квазивогнутости функции $\Phi(x, x, \sigma(x), 0, r)$ по x введено здесь только для обеспечения однозначности определения процедур планирования в (14). Вообще говоря, если функция $\Phi(x, x, \sigma(x), 0, r)$ является много-

пиковой, то необходимо рассматривать несколько множеств, определяемых согласно (11), и анализировать несколько процедур планирования вида (14). Это усложнило бы анализ задачи и отвлекло бы от рассмотрения основного направления исследования.

Важным выводом из приведенного выше исследования является установление связи базовой постановки задачи и соответствующих результатов теории активных систем с постановкой и результатами решения одной из базовых задач теории контрактов.

Приложение

Доказательство теоремы. Пусть задана некоторая неубывающая непрерывная функция $\sigma(x)$, такая, что $\sigma(x) \leq g$. Рассмотрим множество всех неубывающих непрерывных функций $x = \pi(r)$, удовлетворяющих неравенству

$$\Phi(\pi(r), \pi(r), \sigma(x), r) \geq \gamma \Psi_g(r)$$

при всех $r \in A$, где γ таково, что рассматриваемое множество не пусто. Для этого множества определим множество $N_{\gamma\sigma} \neq \emptyset$ согласно с (11) и построим функцию $\pi_\gamma^\sigma(r)$ вида (14). Для этой процедуры планирования построим функцию поощрения $\sigma^*(x)$, имеющую вид

$$\sigma^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x^u \leq x \leq \alpha^\sigma, \\ \int_{\alpha^{\sigma^*}}^x \zeta'_t(t, \tilde{r}_\gamma^\sigma(t)) dt & \text{при } \alpha^{\sigma^*} < x \leq \pi_\gamma^\sigma(r^e), \\ \bar{g} & \text{при } \pi_\gamma^\sigma(r^e) < x \leq x^e. \end{cases}$$

Функция $\sigma^*(x)$ построена так, что при ее выборе функция $\pi_\gamma^\sigma(r)$ является процедурой открытого управления. Пара $\pi_\gamma^\sigma(r)$ и $\sigma^*(x)$ обеспечивают эффективность механизма не меньше, чем γ . Из доказательства теоремы в [10] и по построению функции $\sigma^*(x)$, следует неравенство $\sigma^*(x) \leq \sigma(x)$.

Отсюда следует, что $N_{\gamma\sigma} \subseteq N_{\gamma\sigma^*}$. Увеличивая величину γ до тех пор, пока при превышении некоторого γ^* множество $N_{\gamma\sigma^*}$ станет пустым или будет нарушено неравенство $\sigma(x) \leq g$, получим предельное значение эффективности γ^* оптимального согласованного механизма.
Теорема доказана.

Литература

1. БУРКОВ В.Н. *Основы математической теории активных систем.* – М.: Наука, 1977. – 256 с.
2. БУРКОВ В.Н., ЕНАЛЕЕВ А.К. *Оптимальность принципа открытого управления. Необходимые и достаточные условия достоверности информации в активных системах // Автоматика и телемеханика.* – 1985. – №3. – С. 73–80.
3. БУРКОВ В.Н., ЕНАЛЕЕВ А.К., КОНДРАТЬЕВ В.В. *Двухуровневые активные системы. IV. Цена децентрализации механизмов функционирования // Автоматика и телемеханика.* – 1980. – №6. – С. 110–116.
4. БУРКОВ В.Н., ЕНАЛЕЕВ А.К., ЛАВРОВ Ю.Г. *Синтез оптимальных механизмов планирования и стимулирования в активной системе // Автоматика и телемеханика.* – 1992. – №10. – С. 113–120.
5. БУРКОВ В.Н., КОНДРАТЬЕВ В.В. *Механизмы функционирования организационных систем.* – М.: Наука. 1981. – 384 с.
6. БУРКОВ В.Н., КОРГИН Н.А., НОВИКОВ Д.А. *Введение в теорию управления организационными системами: Учебник.* – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. – 264 с.
7. БУРКОВ В.Н., НОВИКОВ Д.А. *Как управлять организациями.* – М.: Синтег, 2004. – 400 с.
8. ГЕРМЕЙЕР Ю.Б. *Игры с противоположными интересами.* – М.: Наука, 1978. – 327 с.
9. ГОРЕЛИК В.А., КОНОНЕНКО А.Ф. *Теоретико-игровые модели принятия решений в эколого-экономических системах.* – М.: Радио и связь, 1982. – 144 с.

10. ЕНАЛЕЕВ А.К. *Оптимальный механизм функционирования в активной системе с обменом информацией* // Управление большими системами. – 2010. – №29. – С. 108–127.
11. ЕНАЛЕЕВ А.К. *Оптимальность согласованных механизмов функционирования в активных системах* // Управление большими системами. – 2011. – №33. – С. 143–166.
12. ЕНАЛЕЕВ А.К., ЛАВРОВ Ю.Г. *Оптимальное стимулирование в активной системе со стохастическим элементом* // Автоматика и телемеханика. – 1990. – №2. – С. 104–113.
13. КОНОНЕНКО А.Ф. *Роль информации о функции цели противника в играх двух лиц с фиксированной последовательностью ходов* // ЖВМиМФ. – 1973. – №2. – С. 311–317.
14. *МЕХАНИЗМЫ УПРАВЛЕНИЯ: Учебное пособие*/Под ред. Д.А. Новикова. – М.: ЛЕНАНД, 2011. – 192 с.
15. МИЛЬГРОМ П., РОБЕРТС ДЖ. *Экономика, организация и менеджмент*: в 2-х томах. – СПб: Экономическая школа, 2004. – 890 с.
16. CHIANG A.C. *Fundamental Methods of Mathematical Economics. Third Edition.* – McGraw Hill Book Company, 1984. – 788 p.
17. BOLTON P., DEWATRIPONT M. *Contract Theory.* – Cambridge, Mass & London, England: MIT Press, 2005. – 740 p.
18. MAS-COLLEL A., WHINSTON M.D. GREEN J.R. *Microeconomic theory.* – N.Y.: Oxford Univ. Press, 1995. – 977 p.

OPTIMAL COORDINATED MECHANISMS IN ACTIVE SYSTEMS AND CONTRACT THEORY

Anver Enaleev, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Cand.Sc., chief researcher (anver.en@gmail.com).

The principal-agent model is considered, where the principal's payoff depends on the monetary incentive she provides to the agent. We seek an optimal incentive scheme and prove that the, so-called, coordinated mechanisms are optimal for the principal. We also establish connection between the considered model and the adverse selection model in contact theory.

Keywords: plans and incentives coordination, open control principle, information reliability, optimal mechanism design, contract theory.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии В.Н. Бурковым

Поступила в редакцию 06.09.2013.

Опубликована 31.05.2014.

**XI Всероссийская школа-конференция
молодых ученых**

«Управление большими системами»

9-12 сентября, 2014, Арзамас

<http://ubs2014.ru/>

Срок подачи доклада

23. 06. 2014

УДК 519.863+517.977.1+658.513.3

ББК 65.050

МОДЕЛЬ УПРАВЛЕНИЯ ПРЕДПРИЯТИЕМ ПРИ ПОПЕРЕДЕЛЬНОМ МЕТОДЕ КАЛЬКУЛЯЦИИ

Лосев А. Г.¹, Радчик М. В.²

(Волгоградский государственный университет, Волгоград)

Работа посвящена построению дескриптивно-оптимизационной модели управления промышленным предприятием в условиях среднесрочного планирования. Приводятся результаты для случая применения попередельного метода калькулирования себестоимости продукции предприятия с комбинированным способом распределения затрат по полуфабрикатам. В частности, установлена линейность функционала прибыли относительно сортамента выпуска.

Ключевые слова: модель управления предприятием, попередельный метод калькуляции себестоимости.

1. Общая постановка задачи

Управление предприятием представляет собой организацию производственно-хозяйственной деятельности, направленную на достижение определенных результатов, таких как, например, финансово-экономическая устойчивость или эффективность функционирования. Постановка целей в этой связи определяет направление принимаемых управленческих решений. В настоящей работе в качестве цели управления рассматривается максимизация прибыли.

Действительно, прибыль от реализации продукции, определяемая как разница между выручкой от продажи по действующей

¹ Александр Георгиевич Лосев, доктор физико-математических наук, профессор (alexander.losev@volsu.ru).

² Мария Владимировна Радчик, ассистент кафедры МАТФ ВолГУ (radchikmv@mail.ru).

щим рыночным ценам (без НДС и акцизов) и себестоимостью выпуска, характеризует доходность работы промышленного предприятия, т.е. эффективность его основной деятельности. Себестоимость в полном соответствии с [7] отражает затраты, которые предприятие несет по созданию (естественно, с соблюдением всех норм качества) и реализации продукции. Следовательно, данный экономический показатель оказывает непосредственное влияние на величину ожидаемой прибыли. Действующие по сей день методики расчета себестоимости, к сожалению, не позволяют осуществлять полноценное ее планирование, так как используются в основном по факту изготовления, в том числе по причине зависимости себестоимости продукции от пропорции выпуска, так называемого сортамента. При этом резко меняющаяся экономическая ситуация, положившая на рынках сбыта, а также целый ряд объективных и субъективных причин сделал достаточно обыденной практику подстраивания под рыночные требования уже в процессе производства. Кроме того, несмотря на наличие информации о предварительном спросе на продукцию, особенности целей и учета затрат на предприятии далеко не всегда позволяют планировать показатели выпуска и не отвечают требованию их оптимальности. В частности, при нормативном методе калькуляции себестоимости основной задачей является своевременное предупреждение нерационального использования ресурсов, а не определение оптимальных объемов выпуска. При позаказном методе калькуляции себестоимости задача планирования себестоимости вовсе не имеет смысла, поскольку объектом калькуляции является отдельный производственный заказ. Сложившаяся ситуация в свою очередь существенно затрудняет управление размерами получаемой прибыли, ограничивает возможности для ее планирования.

В настоящей статье рассматривается задача управления промышленным предприятием, использующим наиболее распространенный метод калькуляции себестоимости – попере-

дельный¹. В качестве цели управления, как уже было отмечено выше, определим максимизацию прибыли.

Данная работа является обобщением результатов, полученных ранее в ходе решения поставленной задачи для попроцессного производства [5], на случай предприятия с несколькими переделами.

Предположим, что производственный процесс разделен на H технологических стадий (переделов)², на каждой из которых выпускается n_h видов продукции³. Тогда общее количество видов продукции, включая полуфабрикаты всех стадий, по предприятию в целом составляет

$$N = \sum_{h=1}^H n_h .$$

Обозначим количество видов продукции, произведенных до u -го передела включительно, как

$$n_u^* \equiv \sum_{g=1}^u n_g, \quad (n_0^* \equiv 0).$$

Тогда прибыль за период планирования $[T_0, T_H]$ можно представить в виде

$$(1) \quad \pi = (1 - \beta) \sum_{h=1}^H \sum_{i=n_{h-1}^*+1}^{n_h^*} \int_{T_{h-1}}^{T_h} D(\tau) \cdot (p_i(\tau) - \hat{s}_i(\tau)) \cdot t_i(\tau) d\tau,$$

где β – ставка налога на прибыль; $D(\tau)$ – дефлятор, учитывающий прогнозируемый уровень инфляции за период $[0, \tau]$;

¹ В дальнейшем промышленное предприятие, применяющее такой метод при калькуляции себестоимости, именуем ПМКС-предприятием.

² Передел – это совокупность технологических операций, которая завершается выработкой промежуточного продукта (полуфабриката) или получением законченного продукта.

³ Продукция каждой стадии может быть реализована как самостоятельный продукт либо участвовать в изготовлении изделий другого передела.

$t_i(\tau)$, $\hat{s}_i(\tau)$ и $p_i(\tau)$ – объем выпуска, себестоимость¹ и цена реализации (за вычетом НДС и акцизов) продукции i -го вида продукции в момент времени τ .

На практике функция себестоимости обладает достаточно сложной структурой: в рамках каждого передела себестоимость выпускаемых видов продукции зависит от совокупности характеристик (цен, технологий и пропорций выпуска), которые в свою очередь являются функциями времени:

$$(2) \quad \hat{s}_i(\tau) = s_i \left(\tau, z(\tau), \gamma(\tau), t_{n_{i-1}+1}^*(\tau), \dots, t_{n_i}^*(\tau) \right), i = n_{i-1}^* + 1, \dots, n_i^*,$$

где $\gamma(\tau)$, $z(\tau)$ – вектор-функции совокупности технологических и ценовых характеристик соответственно.

В управлении промышленным предприятием планирование разделяют на краткосрочное, среднесрочное и долгосрочное². Единое мнение в понимании критериев такой классификации отсутствует; наблюдаются различия и во временных рамках периодов планирования. Для предприятий с различной специализацией определение промежутка времени (далее «горизонт планирования»), на который разрабатывается соответствующий вид плана, может существенно расходиться. Данное обстоятельство можно объяснить несогласованностью производственных циклов, сложностью технологических процессов и др. В статье решается задача среднесрочного планирования: варьируются текущие производственные мощности и ценовые показатели, но базовые технологии остаются неизменными.

Сформулируем основные гипотезы модели.

- Цены на материалы, сырье, готовые изделия – $z(\tau)$, $p_i(\tau)$ – являются известными функциями времени.

Конечно, на практике точные ценовые характеристики отсутствуют (ведь речь идет о планируемых показателях), вместо них используют экспертные оценки соответствующих прогнозов

¹ Более подробное описание структуры функции себестоимости приведено ниже.

² При построении экономико-математических моделей придерживаются той же классификации, учитывая особенности экономических явлений и используемый математический аппарат.

ных значений. В настоящей работе предполагается, что все ценовые показатели $z_i(\tau), p_i(\tau), i = 1, \dots, N$ (здесь $z_i(\tau)$ – компоненты вектор-функции $z(\tau)$) являются кусочно-постоянными функциями времени, что вполне соотносится с реальностью.

• Компоненты вектор-функции базовых технологий $\gamma(\tau), \gamma_i(\tau) \equiv C_i = const$ на протяжении всего периода $[T_0, T_H]$ остаются неизменными.

Таким образом, получаем, что плановая себестоимость является функцией сортамента – т.е. набора, состоящего из упорядоченных пар $\{i, t_i\}$, где i – вид (номер) изделия $i = n_{h-1}^* + 1, \dots, n_h^*, \forall h = 1, \dots, H; t_i(\tau)$ – планируемый объем выпуска продукции данного вида в момент времени τ :

$$s_i(\tau, z(\tau), \gamma(\tau), t_{n_{h-1}^*+1}^*(\tau), \dots, t_{n_h^*}^*(\tau)) = \tilde{s}_i(\tau, t_{n_{h-1}^*+1}^*(\tau), \dots, t_{n_h^*}^*(\tau)).$$

Для прогнозирования прибыли необходимо знать себестоимость продукции до начала выпуска, но она, в свою очередь, зависит от сортамента, который становится известным, как правило, по факту изготовления. Сложившуюся ситуацию предлагается разрешить с помощью реализации следующего алгоритма:

1) формирование прибыли как функции от сортамента $\pi = \pi(\tau, t_1(\tau), \dots, t_N(\tau));$

2) максимизация функционала прибыли:

$$(1') \quad \pi = (1 - \beta) \sum_{h=1}^H \sum_{i=n_{h-1}^*+1}^{n_h^*} \int_{T_{h-1}}^{T_h} D(\tau) (p_i(\tau) - \tilde{s}_i(\tau, t_{n_{h-1}^*+1}^*(\tau), \dots, t_{n_h^*}^*(\tau))) \cdot t_i(\tau) d\tau \rightarrow \max_{t_1(\tau), \dots, t_N(\tau)}$$

3) определение сортамента $t_1(\tau), \dots, t_N(\tau)$, доставляющего экстремум функционала прибыли (1');

4) вычисление искомых значений себестоимости \tilde{s}_i и прибыли π .

2. Структура затрат в себестоимости и другие особенности попередельного метода калькуляции

В отечественной¹ практике состав и классификация затрат, включаемых в себестоимость продукции, определяют в соответствии с [7]. При этом часть затрат может быть отнесена на себестоимость выпускаемой продукции прямым образом, другая учитывается косвенно (с помощью специальных коэффициентов). Для удобства распределения затрат выделяем: M – затраты на материалы, допускающие прямое отнесение на себестоимость выпуска (известны коэффициенты расхода² – сколько какого материала необходимо для производства единицы каждого вида продукции); R – затраты на сырье, прямое отнесение на конкретное изделие которых затруднительно или даже невозможно. Важно в качестве отдельных категорий выделить «коммерческие расходы», как расходы на реализацию готовой продукции (C) [7, п. 40], и «общехозяйственные расходы» (Fa), как затраты, связанные с управлением предприятием и организацией производства (в том числе расходы по амортизации основных производственных фондов) в целом [7, п. 37]. Остальные статьи калькуляции, за исключением «возвратных отходов» (W), объединяем в отдельную категорию (Fi). Таким образом, структура совокупных затрат производства ($Cost$), учитываемых при расчете себестоимости продукции, может быть представлена в виде

$$Cost = M + R + C + Fa + Fi - W.$$

В соответствии с [7, п. 80], если технологический процесс комплексной переработки сырья состоит из нескольких переделов и имеется возможность определения величины затрат по этим этапам производства, то должно применяться попередельное калькулирование полуфабрикатов или конечных продуктов.

¹ Методика отечественных расчетов аналогична западным технологиям.

² Нормы их использования в производстве.

Сущность попередельного метода калькуляции себестоимости заключается в том, что объектом учета затрат является передел, т.е. учет затрат ведется по переделам, несмотря на то, что в каждом из них могут быть выпущены изделия нескольких видов. При этом на каждой технологической стадии в качестве объекта калькулирования себестоимости выступают полуфабрикаты или их группы (в частности, в тех случаях, когда полуфабрикаты передела получены из однородного исходного сырья).

Сочетание объектов учета затрат и калькулирования себестоимости в попередельном методе для калькуляционных работ предполагает использования следующих приемов¹ [1, 7]:

- способ прямого расчета;
- способ исключения затрат на побочную продукцию;
- способ пропорционального распределения затрат;
- комбинированный способ калькулирования.

В рамках настоящей статьи рассматриваются комплексные производства, на которых учет затрат по видам выпускаемой продукции (тем более калькуляции себестоимости единицы каждого) предполагает совместное использование нескольких приемов калькулирования². Разнообразные сочетания последних объединены в комбинированный способ распределения издержек комплексного производства по объектам калькулирования.

Заметим, что влияние на систему калькулирования³ оказывает и выбор варианта систематизации производственных затрат (бесполуфабрикатный и полуфабрикатный). При бесполуфабрикатном способе определяется себестоимость только конечного

¹ Под приемом калькулирования понимают распределение затрат каждого передела (объект учета) по видам полуфабрикатов или их группами (объектам калькулирования) на нем выпускаемых.

² Для определенности в работе рассматриваем сочетание двух приемов калькулирования: способа пропорционального распределения затрат (при расчете себестоимости вида продукции) и способа прямого расчета (при исчислении себестоимости единицы продукции).

³ Система калькулирования – это система расчетов, позволяющая определить себестоимость готовой продукции.

продукта (полуфабриката, прошедшего все технологически необходимые стадии производства), в полуфабрикатном варианте исчисляется себестоимость полуфабрикатов собственного производства после каждого передела. Организации, не имеющие собственных полуфабрикатов или использующие их только для внутреннего потребления, выбирают более простой – бесполуфабрикатный способ. Себестоимость готового изделия в этом случае определяется путем суммирования долевого участия затрат каждого передела [2]. Для предприятий, хотя бы частично использующих в производственном процессе полуфабрикаты собственного изготовления, предпочтительным оказывается полуфабрикатный способ¹, обеспечивающий постадийный контроль над формированием себестоимости. В ходе дальнейшего изложения материала статьи рассматривается полуфабрикатный вариант исчисления.

Вид калькуляции себестоимости (см. таблицу 1) определяют технологические и организационные особенности производства [2]:

- количество технологических стадий (фаз, переделов) производственного процесса, по которым учитываются фактические расходы;
- число разновидностей продукции на стадии.

В этой связи методика расчета себестоимости продукции варьируется.

Таблица 1. Виды калькуляции себестоимости продукции

| Число разновидностей продукции, n | Число технологических этапов изготовления, h | Вид калькуляции |
|-------------------------------------|--|---------------------------------|
| $n=1$ | $h=1$ | Простая однопередельная |
| $n>1$ | $h=1$ | Коэффициентная однопередельная |
| $n=1$ | $h>1$ | Простая многопередельная |
| $n>1$ | $h>1$ | Коэффициентная многопередельная |

¹ Главным образом по той причине, что полуфабрикаты собственного производства могут быть (порой в значительной мере) реализованы сторонними организациями в качестве самостоятельного продукта.

Простая и коэффициентная однопередельные калькуляции относятся к попроцессному методу учета, общие результаты для которого были изложены ранее в работе [5]. Простая многопередельная калькуляция иллюстрирует бесполуфабрикатный вариант – на протяжении производственного процесса исчисляется себестоимость единственного вида продукции без калькуляции себестоимостей полуфабрикатов, используемых в его изготовлении. По этой причине в рамках статьи данный вид калькуляции не освещается.

Таким образом, в настоящей работе рассматривается задача управления предприятием, использующим попередельный метод калькуляции при комбинированном распределении затрат по полуфабрикатам, а следовательно, исследуется только коэффициентная многопередельная калькуляция, наблюдаемая на производствах при многоступенчатом изготовлении продукции.

На основании [7, п. 90] при попередельном методе затраты на производство, начиная с обработки исходного сырья и до выпуска конечного продукта, учитываются в каждом переделе. Себестоимость продукции каждого последующего передела представляет собой сумму собственных затрат и себестоимости используемых полуфабрикатов предшествующих переделов, затраты при этом наслаиваются и в выпускающем цехе определяется себестоимость готового изделия [2, 7].

3. Производственная себестоимость продукции h -го передела

Расчету себестоимости полуфабрикатов и конечной продукции предшествует определение себестоимости обработки i -го вида продукции, которую будем обозначать

$$g_i(\tau, t_{n_{h-1}+1}^*(\tau), \dots, t_{n_h}^*(\tau)), \forall \tau \in [T_{h-1}; T_h],$$

$$\forall h = 1, \dots, H, i = n_{h-1}^* + 1, \dots, n_h^*.$$

В общем объеме продукции предприятия принято выделять товарную продукцию передела ($\tilde{t}_i(\tau)$), которая реализуется

сторонним организациям, и продукцию ($t_i(\tau)$), потребляемую самим предприятием в производственных целях. В этой связи следует различать производственную и полную себестоимости продукции передела

Производственная себестоимость (g_i), рассматриваемая в данном пункте, не включает в себя расходы обращения (C_h) и управления (Fa_h), учитываемые в полной себестоимости продукции передела (см. далее п. 4). Полная себестоимость продукции передела (т.е. себестоимость товарной продукции) определяется распределением совокупных расходов передела ($Cost_h^*$) на объем товарной продукции. Совокупные расходы передела складываются из производственных ($Cost_h$) и непроизводственных ($Fa_h + C_h$) издержек:

$$\forall h = 1, \dots, H,$$

$$(3) \quad Cost_h^* = Cost_h + Fa_h + C_h.$$

Производственные затраты каждого передела $Cost_h = M_h + R_h + Fi_h + W_h$ распределяют на всю продукцию, выпущенную в нем:

$$\sum_{i=n_{h-1}^*+1}^{n_h^*} (t_i + \tilde{t}_i),$$

где $t_i \equiv \int_{T_{h-1}}^{T_h} t_i(\tau) d\tau$ – валовой и $\tilde{t}_i \equiv \int_{T_{h-1}}^{T_h} \tilde{t}_i(\tau) d\tau$ – товарный выпуск h -го передела (сортамент выпуска в рамках передела от времени не зависит).

Для расчета производственной себестоимости продукции h -го передела необходимо определить производственные издержки передела.

Пусть для производства продукции h -го передела требуется m видов материалов и k видов сырья. Кроме того, известны экспертные оценки прогноза цен на используемые ресурсы, которые составляют z_j и zb_l за единицу j -го вида материала и l -го вида сырья, соответственно ($j = 1, \dots, m; l = 1, \dots, k$); a_{ij} и b_{il} – норма расхода материалов и сырья для обработки в данной стадии. Тогда в стоимостном выражении затраты на материалы

и сырье передела (см. п. 1 в соответствие с гипотезами модели технологические и ценовые показатели постоянны) составляют

$$M_h = \sum_{i=n_{h-1}+1}^{n_h} \sum_{j=1}^m a_{ij} z_j (t_i + \tilde{t}_i), \quad R_h = \sum_{i=n_{h-1}+1}^{n_h} \sum_{l=1}^k b_{il} z_l (t_i + \tilde{t}_i),$$

Компоненты M_h и R_h отражают затраты на материалы и сырье, используемые только в текущей технологической стадии. В состав M_h могут быть включены и расходы на приобретение покупных полуфабрикатов¹. Удельный вес таких затрат на каждом переделе характеризует степень кооперирования между другими подразделениями, организациями, потому как закупки осуществляются по трансфертным ценам².

В ходе производства образуются технологические отходы (W_h), поэтому расход сырья, материалов и покупных полуфабрикатов определяется по стоимости опущенных в передел за вычетом неиспользованной их части. Для каждого вида материала и сырья существуют коэффициенты их использования (km_j и kr_l соответственно), т.е. $(1 - km_j)$ и $(1 - kr_l)$ – это «коэффициенты не использованного сырья и материалов». С позиции дальнейшего применения отходы производства подразделяются на возвратные и безвозвратные [6, ст. 254]. Обозначим zm_j и zr_l – планируемые цены на отходы материалов j -го вида и сырья l -го типа, причем $zm_j > 0$ и $zr_l > 0$, если предприятие может продать или переработать соответствующие производственные отходы (возвратные отходы), и $zm_j < 0$ и $zr_l < 0$, если отходы являются безвозвратными, т.е. необходимы затраты на их утилизацию. Определим величину производственных отходов h -й технологической стадий в стоимостном выражении:

$$W_h = \sum_{i=n_{h-1}+1}^{n_h} \left(\sum_{j=1}^m a_{ij} z_m_j (1 - km_j) (t_i + \tilde{t}_i) + \sum_{l=1}^k b_{il} z_r_l (1 - kr_l) (t_i + \tilde{t}_i) \right).$$

¹ Покупные изделия и полуфабрикаты относятся непосредственно на конкретный вид продукции.

² Трансфертная цена – цена, обусловленная коммерческими принципами взаимоотношений с дочерними предприятиями, филиалами, подразделениями при поставке комплектующих; как правило, величина данного показателя существенно ниже рынка.

Суммируя все производственные затраты, в том числе и Fi_h , на обработку продукции в h -м переделе, получаем

$$Cost_h = M_h + R_h + Fi_h - W_h.$$

Принимая во внимание, что отдельный учет издержек обработки (кроме M_h^1) передела по видам выпускаемых на нем полуфабрикатов невозможен (или нецелесообразен из-за высокой стоимости учетных работ), для расчета себестоимости обработки i -го вида продукции используем пропорциональное распределение: принимаем за единицу (эталон) одно из изделий; на другие, исходя из технологии, качества сырья, трудоемкости и иных параметров, устанавливаем коэффициент выше или ниже базового [2]. В соответствии с указанным в п. 2 способом расчета производственная себестоимость единицы i -го вида продукции определяется формулой

$$\begin{aligned} \forall i = n_{h-1}^* + 1, \dots, n_h^*, \\ g_i(t_{n_{h-1}^*+1}^*, \dots, t_{n_h^*}^*) = \frac{(Cost_h(\tau))_i}{t_i + \tilde{t}_i} = \sum_{j=1}^m a_{ij} (z_j - z m_j (1 - k m_j)) + \\ (4) \quad + \frac{f_i^1}{\sum_{i=n_{h-1}^*+1}^{n_h^*} f_i^1(t_i + \tilde{t}_i)} \sum_{i=n_{h-1}^*+1}^{n_h^*} \sum_{l=1}^k b_{il} (z b_l - z r_l (1 - k r_l)) \cdot (t_i + \tilde{t}_i) + \\ + \frac{f_i^2}{\sum_{i=n_{h-1}^*+1}^{n_h^*} f_i^2(t_i + \tilde{t}_i)} Fi_h, \end{aligned}$$

где f_i^1, f_i^2 – коэффициенты пропорциональности (или коэффициенты трудоемкости) соответствующих видов издержек.

После того как известна производственная себестоимость продукции передела, становится возможным расчет полной себестоимости.

¹ Расходы на материалы (M_h), допускающих прямое отнесение на соответствующие виды продукции.

4. Полная себестоимость продукции h -го передела

Условия многоступенчатого производства продукции требуют введения технологической матрицы Ω , элементы которой $\omega_{\alpha i}$ указывают, сколько полуфабриката вида α необходимо для изготовления единицы i -го вида продукции. Ω – матрица с блочной структурой: блоки $\Omega_{\alpha i} = 0$ при $\alpha \geq i$, где $i = n_{h-1}^* + 1, n_h^*$, $\forall h = 1, \dots, H$. Данная конструкция позволяет учитывать особенности использования полуфабрикатов различных переделов в ходе внутреннего производственного потребления¹. Таким образом, фактическая производственная себестоимость полуфабриката определяется следующей итерационной схемой:

$$\forall i = 1, \dots, n_1,$$

$$\tilde{s}_i(t_1, \dots, t_{n_1}^*) = g_i(t_1, \dots, t_{n_1}^*),$$

$$(5) \quad \forall i = n_{h-1}^* + 1, \dots, n_h^*,$$

$$\forall h = 2, \dots, H, \quad \alpha = 1, \dots, n_{h-1}^*,$$

$$\tilde{s}_i(t_{n_{h-1}^*+1}, \dots, t_{n_h}^*) = \sum_{\alpha=1}^{n_{h-1}^*} g_{\alpha} (t_1, \dots, t_{n_{h-1}^*}) \omega_{\alpha i} + g_i,$$

где g_{α} – себестоимость обработки единицы полуфабриката α на одной из предыдущих стадий; g_i – себестоимость изготовления i -го вида продукции в рамках текущего передела.

Производственная себестоимость полуфабриката i -го вида имеет кумулятивный характер [2] в виду присутствия $g_{\alpha}(t_1, \dots, t_{n_{h-1}^*})$, $\alpha = 1, \dots, n_{h-1}^*$: во втором выражении (5) затраты изготовления полуфабрикатов в себестоимости различных изделий повторяются неоднократно, начиная со второго передела. Такое наложение в бухгалтерском учете именуется *внутризаводским оборотом*², который следует исключать из совокуп-

¹ Естественно, с дальнейшим учетом в системе ограничений модели на выпуск продукции.

² Так, стоимость полуфабрикатов и изделий своей выработки, израсходованных на производство товарной продукции (например, стои-

ных затрат для определения реальной прибыли предприятия [3]. Внутри заводский оборот¹ – стоимость продукции своего производства, потреблённой на собственные промышленно-производственные нужды в определенных выше категориях, может быть представлена в виде

$$\sum_{h=2}^H \sum_{\alpha=n_{h-2}^*+1}^{n_{h-1}^*} \sum_{i=n_{h-1}^*+1}^{n_h^*} g_{\alpha} \left(t_1, \dots, t_{n_{h-1}^*} \right) \omega_{\alpha i} \left(t_i + \tilde{t}_i \right).$$

Таким образом, учитывая соответствующую долю внутри-заводского оборота в производственной себестоимости i -го вида продукции, скорректируем ее фактическое значение на величину наслонения:

$$\begin{aligned} \Delta s_i &= \sum_{\alpha=n_{h-2}^*+1}^{n_{h-1}^*} g_{\alpha} \left(t_1, \dots, t_{n_{h-1}^*} \right) \omega_{\alpha i} : \\ \forall i &= n_{h-1}^* + 1, \dots, n_h^*, \forall h = 2, \dots, H, \\ (6) \quad \tilde{s}_i \left(t_{n_{h-1}^*+1}^*, \dots, t_{n_h^*}^* \right) &= \tilde{\tilde{s}}_i \left(t_{n_{h-1}^*+1}^*, \dots, t_{n_h^*}^* \right) - \Delta s_i = g_i \left(t_{n_{h-1}^*+1}^*, \dots, t_{n_h^*}^* \right), \end{aligned}$$

что совпадает с себестоимостью обработки единицы i -го вида продукции.

Принимая во внимание, что коммерческие (C_h) и общехозяйственные (Fa_h) расходы соответствующего передела (3) учитываются только в полной себестоимости продукции i -го вида², получаем

мость стали своего производства, израсходованной на изготовление проката; стоимость деталей своего изготовления, вошедших в собранное изделие), входит в состав внутризаводского оборота.

¹ Внутри заводской оборот считается основным недостатком полуфабрикатного способа.

² На стадии $h = H$ реализуемые полуфабрикаты являются конечными видами продукции промышленного предприятия, т.е. в рассматриваемой задаче управления полагаем, что $\omega_i \equiv 0$, $i = n_{H-1}^* + 1, n_H^*$.

$$\forall h = 1, \dots, H, \quad \forall i = n_{h-1}^* + 1, \dots, n_h^*,$$

$$(7) \quad \tilde{s}_i \left(t_{n_{h-1}^*+1}^*, \dots, t_{n_h^*}^* \right) = \bar{s}_i \left(t_{n_{h-1}^*+1}^*, \dots, t_{n_h^*}^* \right) + \frac{Fa_h + C_h}{\sum_{i=n_{h-1}^*+1}^{n_h^*} (t_i + \tilde{t}_i)},$$

с учетом (6) в (7) расчетное значение плановой себестоимости полуфабриката i -го вида (\tilde{s}_i), учитываемое в функционале прибыли, приобретает вид

$$(8) \quad \tilde{s}_i \left(\tau, t_{n_{h-1}^*+1}^*(\tau), \dots, t_{n_h^*}^*(\tau) \right) = g_i \left(t_{n_{h-1}^*+1}^*(\tau), \dots, t_{n_h^*}^*(\tau) \right) + \frac{Fa_h + C_h}{\sum_{i=n_{h-1}^*+1}^{n_h^*} (t_i + \tilde{t}_i)}.$$

5. Целевой функционал и особенности системы ограничений

В силу предположения модели о том, что ценовых характеристики являются кусочно-постоянными функциями времени, горизонт планирования $[T_0, T_H]$ может быть разбит на несколько H временных отрезков, на каждом из этих которых общая постановка задачи оптимизации (1') определяет стационарную модель, аналогичную приводимой в работе [4]. Согласованность производственного цикла (среднесрочного планирования с краткосрочным) позволяет рассматривать динамическую модель управления предприятием как совокупность стационарных моделей на отрезках разбиения $[T_{h-1}, T_h]$ периода $[T_0, T_H]$, соответствующих переделам.

В этой связи исходная задача управления (1') может быть переформулирована:

$$(1'') \quad \pi = (1 - \beta) \sum_{h=1}^H \sum_{i=n_{h-1}^*+1}^{n_h^*} \left(\int_{T_{h-1}}^{T_h} D(\tau) \left(p_i(\tau) - \tilde{s}_i \left(\tau, t_{n_{h-1}^*+1}^*(\tau), \dots, t_{n_h^*}^*(\tau) \right) \right) \times \right. \\ \left. \times \left(t_i(\tau) + \tilde{t}_i(\tau) \right) d\tau \right) \rightarrow \max_{t_1(\tau), \dots, t_N(\tau)},$$

где D_h , $h = 1, \dots, H$ – индивидуальный дефлятор. Максимизация прибыли осуществляется в предположении, что затраты на

хранение отсутствуют (вся продукция \tilde{t}_i реализуется в том же временном периоде, что и выпуск). Предприятия подобного типа используют складские помещения для некоторого запаса материалов, который предназначен для обеспечения непрерывности производственного процесса. Расходы по содержанию и эксплуатации такого рода объектов включаются в общезаводские расходы (Fa).

Принимая во внимание то, что $\forall h = 1, \dots, H, \forall \tau \in [T_{h-1}, T_h]$: $D(\tau)p_i(\tau) \equiv p_i^h, D(\tau)g_i(\tau) \equiv g_i^h$, преобразуем целевой функционал динамической модели управления ($1''$):

$$(9) \quad \begin{aligned} \pi = & (1-\beta) \sum_{h=1}^H \sum_{i=n_{h-1}^*+1}^{n_h^*} \int_{T_{h-1}}^{T_h} D(\tau) \left(p_i(\tau) - \tilde{s}_i \left(\tau, t_{n_{h-1}^*+1}^*(\tau), \dots, t_{n_h^*}^*(\tau) \right) \right) \times \\ & \times (t_i(\tau) + \tilde{t}_i(\tau)) d\tau = (1-\beta) \sum_{h=1}^H \sum_{i=n_{h-1}^*+1}^{n_h^*} \left(p_i^h \int_{T_{h-1}}^{T_h} (t_i(\tau) + \tilde{t}_i(\tau)) d\tau - \right. \\ & \left. - \int_{T_{h-1}}^{T_h} \tilde{s}_i \left(\tau, t_{n_{h-1}^*+1}^*(\tau), \dots, t_{n_h^*}^*(\tau) \right) (t_i(\tau) + \tilde{t}_i(\tau)) d\tau \right). \end{aligned}$$

Подставляя расчетное значение себестоимости i -го продукта (8) в (9) на основании предположений модели (п. 1), получаем

$$(10) \quad \begin{aligned} \pi = & (1-\beta) \sum_{h=1}^H \sum_{i=n_{h-1}^*+1}^{n_h^*} \left(p_i^h \int_{T_{h-1}}^{T_h} (t_i(\tau) + \tilde{t}_i(\tau)) d\tau - \right. \\ & \left. - \int_{T_{h-1}}^{T_h} \tilde{s}_i \left(\tau, t_{n_{h-1}^*+1}^*(\tau), \dots, t_{n_h^*}^*(\tau) \right) (t_i(\tau) + \tilde{t}_i(\tau)) d\tau \right) = \\ & = (1-\beta) \left(\sum_{h=1}^H \sum_{i=n_{h-1}^*+1}^{n_h^*} p_i^h (t_i + \tilde{t}_i) - \sum_{h=1}^H \sum_{i=n_{h-1}^*+1}^{n_h^*} \int_{T_{h-1}}^{T_h} g_i \left(t_{n_{h-1}^*+1}^*, \dots, t_{n_h^*}^* \right) \times \right. \\ & \times (t_i(\tau) + \tilde{t}_i(\tau)) d\tau - (Fa + C) \Big) = \\ & = (1-\beta) \left(\sum_{h=1}^H \sum_{i=n_{h-1}^*+1}^{n_h^*} \left(p_i^h - g_i^h \left(t_{n_{h-1}^*+1}^*, \dots, t_{n_h^*}^* \right) \right) (t_i + \tilde{t}_i) - (Fa + C) \right). \end{aligned}$$

где p_i^h – цена реализации; $g_i^h \left(t_{n_{h-1}^*+1}^*, \dots, t_{n_h^*}^* \right)$ – себестоимость обработки i -го вида продукции в h -м пердеделе соответственно.

Учитывая методику калькуляции плановой себестоимости комбинированным способом распределения затрат между разными полуфабрикатами каждой технологической стадии (4), получаем¹:

$$(11) \quad \sum_{h=1}^H \sum_{i=n_{h-1}^*+1}^{n_h^*} g_i^h \left(t_{n_{h-1}^*+1}^*, \dots, t_{n_h^*}^* \right) (t_i + \tilde{t}_i) = \\ = \sum_{h=1}^H \sum_{i=n_{h-1}^*+1}^{n_h^*} \left(\sum_{j=1}^m a_{ij} \cdot (z_j^h - (1 - km_j) \cdot zm_j^h) + \right. \\ \left. + \sum_{l=1}^k b_{il} \cdot (zb_l^h - (1 - kr_l) \cdot zr_l^h) \right) (t_i + \tilde{t}_i) + Fi.$$

Приведенный функционал прибыли (10) с учетом (11) приобретает вид

$$(12) \quad \pi = (1 - \beta) \left(\sum_{h=1}^H \sum_{i=n_{h-1}^*+1}^{n_h^*} \left(p_i^h - g_i^h \left(t_{n_{h-1}^*+1}^*, \dots, t_{n_h^*}^* \right) \right) (t_i + \tilde{t}_i) - (Fa + C) \right) = \\ = (1 - \beta) \left(\sum_{h=1}^H \sum_{i=n_{h-1}^*+1}^{n_h^*} p_i^h (t_i + \tilde{t}_i) - \right. \\ \left. - \sum_{h=1}^H \sum_{i=n_{h-1}^*+1}^{n_h^*} \int_{T_{h-1}}^{T_h} g_i \left(\tau, t_{n_{h-1}^*+1}^*(\tau), \dots, t_{n_h^*}^*(\tau) \right) (t_i(\tau) + \tilde{t}_i(\tau)) d\tau - (Fa + C) \right) = \\ = (1 - \beta) \left(\sum_{h=1}^H \sum_{i=n_{h-1}^*+1}^{n_h^*} \left(p_i^h - \sum_{j=1}^m a_{ij} \cdot (z_j^h - (1 - km_j) \cdot zm_j^h) - \right. \right. \\ \left. \left. - \sum_{l=1}^k b_{il} \cdot (zb_l^h - (1 - kr_l) \cdot zr_l^h) \right) (t_i + \tilde{t}_i) - (Fi + Fa + C) \right) = \\ = (1 - \beta) \left(\sum_{i=1}^N \left(p_i - \sum_{j=1}^m a_{ij} \cdot (z_j - (1 - km_j) \cdot zm_j) - \right. \right. \\ \left. \left. - \sum_{l=1}^k b_{il} \cdot (zb_l - (1 - kr_l) \cdot zr_l) \right) \times (t_i + \tilde{t}_i) - (Fi + Fa + C) \right)$$

¹ Заметим, что $t_i \equiv 0$, $i = n_{H-1}^* + 1, n_H^*$.

Из (12) видно, что функционал прибыли линеен относительно сортамента $(t_1, \tilde{t}_1, \dots, t_N, \tilde{t}_N)$.

Естественно полагать наличие некоторых ограничений, обусловленных особенностями промышленного технологического процесса, использования ресурсов и т.д. Вследствие поперечного учета затрат на предприятии (см. п.2) возникают дополнительные ограничения на выпуск, в частности, на i -й вид продукции $\tilde{t}_i, \forall i = 1, \dots, N$, может быть наложено условие вида

$$(13) \min(\tilde{t}_i + t_i) \leq \sum_{i=1}^N (\tilde{t}_i + t_i) \leq \max(\tilde{t}_i + t_i),$$

где $\min(\tilde{t}_i + t_i)$ и $\max(\tilde{t}_i + t_i)$ – минимальные и максимальные производственные мощности предприятия

Организация производственного цикла по переделам вносит и технологические коррективы в систему ограничений: согласованность технологических коэффициентов использования полуфабрикатов для внутреннего потребления с объемом выпуска продукции:

$$(14) \sum_{i=1}^N \omega_{\alpha i} t_i = t_{\alpha}, \alpha = \overline{1, n_{h-1}^*}.$$

Список ограничений модели при необходимости может быть расширен.

Задача оптимизации состоит в нахождении сортамента $t_1, \tilde{t}_1, \dots, t_N, \tilde{t}_N$ и последующем вычислении значений себестоимости при условиях (13)–(14), максимизирующего функционал прибыли (12).

6. Модельный пример

Проиллюстрируем работу модели на численном примере. Пусть

$N = 3$ (количество видов выпускаемой продукции);

$H = 1$ (количество переделов);

$m = 2$ (количество видов материалов);

$k = 2$ (количество видов сырья).

Полная себестоимость единицы i -го вида продукции в этом случае определяется формулой

$$s_i = \sum_{j=1}^m a_{ij} (z_j - z_{m_j} (1 - km_j)) + \frac{f_i^1}{\sum_{i=1}^N t_i} \sum_{i=1}^N \sum_{l=1}^k b_{il} (zb_l - zr_l (1 - kr_l)) t_i +$$

$$+ \frac{f_i^2}{\sum_{i=1}^N f_i^2 t_i} Fi + \frac{Fa + C}{\sum_{i=1}^N t_i} = \sum_{j=1}^2 a_{ij} (z_j - z_{m_j} (1 - km_j)) +$$

$$+ \frac{f_i^1}{\sum_{i=1}^3 f_i^1 t_i} \sum_{i=1}^3 \sum_{l=1}^2 b_{il} (zb_l - zr_l (1 - kr_l)) t_i + \frac{f_i^2}{\sum_{i=1}^3 f_i^2 t_i} Fi + \frac{Fa + C}{\sum_{i=1}^3 t_i}$$

Сделаем предположения относительно величины издержек, включаемых в себестоимость продукции:

$Fi = 1000$ у. е. (постоянные);

$Fa = 2500$ у. е. (общехозяйственные);

$C = 3000$ у. е. (коммерческие).

Для определения издержек на выпуск продукции соответствующего вида воспользуемся матрицами затрат материалов и сырья¹.

Таблица 1. Матрицы затрат материалов и сырья

| Матрица затрат материалов, a_{ij} | | | | | |
|---|-----------------------|---|---|----------------------|-----------------------------------|
| Вид материала, j | Вид продукции, $m/ед$ | | | Цена за 1т материала | Коэффициент использования, kt_j |
| | 1 | 2 | 3 | | |
| 1 | 5 | 4 | 1 | 10 | 0,7 |
| 2 | 3 | 1 | 2 | 15 | 0,85 |
| Матрица затрат сырья, b_{il} | | | | | |
| Вид сырья, l | Вид продукции, $m/ед$ | | | Цена за 1т сырья | Коэффициент использования, kt_l |
| | 1 | 2 | 3 | | |
| 1 | 1 | 1 | 2 | 12 | 0,8 |
| 2 | 2 | 1 | 1 | 4 | 0,7 |

¹ Для наглядности полагаем $z_j = z_{m_j}$ и $zr_l = zb_l$, во избежание дополнительных преобразований в вычислениях.

Косвенные затраты, включаемые в себестоимость, учитываются с помощью коэффициентов трудоемкости

Таблица 2. Коэффициенты распределения косвенных затрат, включаемых в себестоимость продукции

| Коэффициенты трудоемкости | Вид продукции | | |
|---------------------------|---------------|-----|-----|
| | 1 | 2 | 3 |
| f^1 | 0,4 | 0,1 | 0,9 |
| f^2 | 0,7 | 0,4 | 0,9 |

Теперь рассчитаем себестоимость для соответствующих видов продукции:

$$s_1 = 73,25 + \frac{0,4(15,2t_1 + 12,4t_2 + 22t_3)}{0,4t_1 + 0,1t_2 + 0,9t_3} + \frac{700}{0,7t_1 + 0,4t_2 + 0,9t_3} + \frac{5500}{\sum_{i=1}^3 t_i};$$

$$s_2 = 40,75 + \frac{0,1(15,2t_1 + 12,4t_2 + 22t_3)}{0,4t_1 + 0,1t_2 + 0,9t_3} + \frac{400}{0,7t_1 + 0,4t_2 + 0,9t_3} + \frac{5500}{\sum_{i=1}^3 t_i};$$

$$s_3 = 32,5 + \frac{0,9(15,2t_1 + 12,4t_2 + 22t_3)}{0,4t_1 + 0,1t_2 + 0,9t_3} + \frac{900}{0,7t_1 + 0,4t_2 + 0,9t_3} + \frac{5500}{\sum_{i=1}^3 t_i}.$$

Несмотря на то, что цена реализации продукции на момент выпуска известна, мы не владем информацией относительно того выпуск какого вида продукции выгоднее. При опорном производственном плане {3000; 1000; 500} наиболее выгодным оказывается выпуск второго вида продукции (так как $\max(p_i - s_i) = p_2 - s_2$).

| вид продукции, i | объем выпуска, t _i | себестоимость | цена реализации | прибыльность |
|------------------|-------------------------------|---------------|-----------------|--------------|
| 1 | 3000 | 90,7213207 | 94 | 3,278679303 |
| 2 | 1000 | 56,93865773 | 66 | 9,061342272 |
| 3 | 500 | 46,29476036 | 55 | 8,705239636 |
| | 4500 | | | |

Рис. 1. Прибыльность при сортаменте {3000; 1000; 500}

Но уже при сортаменте {1000; 2000; 1500} выпуск третьего вида продукции характеризуется максимальной прибыльностью.

| вид продукции, i | объем выпуска, t _i | себестоимость | цена реализации | прибыльность |
|------------------|-------------------------------|---------------|-----------------|--------------|
| 1 | 1000 | 93,03677646 | 94 | 0,963223535 |
| 2 | 2000 | 59,04075069 | 66 | 6,959249314 |
| 3 | 1500 | 47,92114811 | 55 | 7,078851892 |
| | 4500 | | | |

Рис. 2. Прибыльность при сортаменте {1000; 2000; 1500}

Определим величину чистой прибыли для каждого из двух приведенных выше производственных планов. В соответствии с (12) в рассматриваемом случае формула для вычисления прибыли¹ принимает вид

$$\pi = (1 - \beta) \left(\sum_{i=1}^3 \left(p_i - \sum_{j=1}^2 a_{ij} \cdot (z_j - (1 - km_j) \cdot zm_j) - \sum_{l=1}^2 b_{il} \cdot (zb_l - (1 - kr_l) \cdot zr_l) \right) t_i - (Fi + Fa + C) \right).$$

Учитывая текущую ставку налога на прибыль 20% (т.е. $\beta = 0,2$) и подставляя известные характеристики, после преобразований получаем

$$\pi = 5,55t_1 + 12,85t_2 + 0,5t_3 - 6500.$$

Таким образом, $\pi_1 = 18\ 600$ и $\pi_2 = 20\ 400$.

Введем некоторые ограничения на выпуск:

1) на минимальный индивидуальный выпуск каждого вида продукции (обусловлено уже заключенными контрактами на поставку)

$$t_i \geq 100, \forall i = \overline{1,3};$$

2) на совокупный выпуск продукции (обусловлено производственными мощностями предприятия)

$$1200 \leq \sum_{i=1}^3 t_i \leq 4500;$$

3) на использование материально-сырьевой базы

¹ Величину дефлятора (D) для определенности полагаем равной 1.

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 a_{ij} (z_j - (1 - km_j) \cdot zm_j) t_i + \sum_{i=1}^3 \sum_{l=1}^2 b_{il} (zb_l - zr_l (1 - kr_l)) t_i \leq 250000.$$

Максимизируя прибыль, с учетом ограничений на материалы и объемы производства

$$\left\{ \begin{array}{l} t_i \geq 100, \forall i = \overline{1,3} \\ 1200 \leq \sum_{i=1}^3 t_i \leq 4500, \\ \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 a_{ij} (z_j - (1 - km_j) \cdot zm_j) t_i + \sum_{i=1}^3 \sum_{l=1}^2 b_{il} (zb_l - zr_l (1 - kr_l)) t_i \leq 250000 \end{array} \right.$$

с помощью встроенной функции «Поиск решения» в среде MS Excel получаем

| вид продукции, i | объем выпуска, t _i | себестоимость | цена реализации | доход | полные издержки | | прибыльность 1 ед. |
|------------------|-------------------------------|---------------|-----------------|--------|-----------------|----------|--------------------|
| 1 | 100 | 88,49113615 | 94 | 9400 | 8849,113615 | 550,8864 | 5,508863854 |
| 2 | 4300 | 54,8908281 | 66 | 283800 | 236030,5608 | 47769,44 | 11,1091719 |
| 3 | 100 | 44,60325549 | 55 | 5500 | 4460,325549 | 1039,674 | 10,39674451 |
| | 4500 | | | | прибыль | 39488 | |

Рис. 3. Оптимальный сортамент выпуска {100; 4300; 100}

Таким образом, сортамент выпуска {100; 4300; 100} доставляет максимальное значение функции прибыли в размере 39488 у.е.

Проведенный эксперимент имеет методическую ценность, подтверждая работоспособность предлагаемой модели.

7. Заключение

В работе построена математическая модель управления промышленным предприятием в целях максимизации прибыли на среднесрочную перспективу. Результаты моделирования приведены для поперечного метода калькулирования себестоимости продукции предприятий с комбинированным способом распределения затрат по полуфабрикатам. В ходе исследования установлена линейность функционала прибыли относительно сортамента выпускаемой продукции, что позволяет использовать аппарат линейного программирования для его оптимизации.

Безусловно, отдельный интерес представляет построение аналогичной модели долгосрочного планирования. В ее рамках естественно рассматривать изменение технологических показателей и факторов производства, объем производственной инфраструктуры и ее организации, влияние эффектов масштаба производств и обучения на изменение постоянных издержек и т.п. Конечно, авторы не претендуют на всеобъемлемость данной модели, вполне возможны и обоснованы и так иные пути оптимизации.

Предлагаемая модель управления может быть применена и в случае использования иных приемов калькулирования (см. п. 2), употребляемых в рамках попередельного метода калькуляции себестоимости. На практике модель допускает модификацию в целях применения как к горизонтально-интегрированным предприятиям, так и для производств с сетевой организацией.

Литература

1. ЕФРЕМОВА А.А. *Способы калькулирования себестоимости* // Справочник экономиста. – 2003. – №5. – [Электронный ресурс]. – URL: http://www.profiz.ru/se/5_2003/863/ (дата доступа: 13.09.12).
2. ЖАРИКОВА Л.А. *Управленческий учет: Учебное пособие.* – Тамбов: Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2004. – 136 с.
3. КОЗЛОВА Е.П., ПАРАШУТИН Н.В., БАБЧЕНКО Т.Н. *Бухгалтерский учет в промышленности.* – М.: Финансы и статистика, 1993. – 432с.
4. ЛАРИНА И.А., ЛОСЕВ А.Г. *Об одной дескриптивно-оптимизационной модели планирования себестоимости продукции* // Вестник ВолГУ. – 2003–2004. – Серия 9, вып. 3, ч. 2. – С. 29–35.
5. ЛОСЕВ А.Г., РАДЧИК М.В. *Об одной дескриптивно-оптимизационной модели среднесрочного планирования* // Проблемы управления. – 2008. – №2. – С. 42–47.
6. *Налоговый Кодекс Российской Федерации: Части первая и вторая* – М.: ТК Велби, Издательство «Проспект», 2004. – 600 с.

7. Основные положения по планированию, учету и калькулированию себестоимости продукции на промышленных предприятиях(утв. ЦСУ СССР, Госпланом СССР, Госкомцен СССР и Минфином СССР 20 июля 1970 г. N АБ-21-Д.– [Электронный ресурс]. –URL: <http://zakon.law7.ru/legal2/se3/pravo3159/index.htm>.

PROCESSING METHOD OF COST ACCOUNTING AND MODEL OF ENTERPRISE MANAGEMENT

Alexander Losev, Volgograd state University, Volgograd, Doctor of Science, professor (alexander.losev@volsu.ru).

Radchik Maria, Volgograd state University, Volgograd, assistant of the Department of Mathematical analysis and theory of functions (radchikmv@mail.ru).

Abstract: We suggest a descriptive and optimization model of medium-term planning and decision-making at an industrial enterprise. This model is studied for an enterprise employing processing method of cost accounting with combined scheme of cost distribution over intermediate products. In particular, we establish that profit function is linear with respect to the product mix.

Keywords: enterprise management model, processing method of cost accounting.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии Р.М. Нижегородцевым

*Поступила в редакцию 17.11.2013.
Опубликована 31.05.2014.*

УДК 519.83
ББК 22.18

ТЕОРЕТИКО-ИГРОВАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ИНСАЙДЕРСКИХ ТОРГОВ С НЕНУЛЕВЫМ СПРЭДОМ¹

Сандомирская М. С.²

(Санкт-Петербургский экономико-математический институт
РАН, Санкт-Петербург,
НИУ Высшая школа экономики, Санкт-Петербург)

Исследована модель многошаговых инсайдерских торгов рисковыми активами одного типа между двумя маркет-мейкерами на фондовом рынке. Один из игроков (инсайдер) обладает приватной информацией об ликвидной цене актива. На каждом шаге торгов игроки назначают цены покупки и продажи одной акции с фиксированным ненулевым спрэдом. На основе действий инсайдера неинформированный игрок пересчитывает условное математическое ожидание ликвидной цены. Для торгов бесконечной продолжительности построены верхняя и нижняя границы гарантированного выигрыша инсайдера и стратегии обоих игроков, обеспечивающие эти границы. Вычислены потери инсайдера при раскрытии его приватной информации.

Ключевые слова: биржевые торги, бид-аск спрэд, инсайдер, повторяющиеся игры с неполной информацией, простое случайное блуждание.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, гранты № 10-06-00368-а и 13-01-00462-а, и премии им. Б.Л. Овсевича (2012 г.) Автор признателен В.К. Доманскому и В.Л. Крепс за ценное обсуждение содержания статьи.

² Марина Сергеевна Сандомирская, кандидат физико-математических наук (sandomirskaya_ms@mail.ru, msandomirskaya@hse.ru).

Введение. Гипотеза об эндогенном происхождении колебаний цен на фондовых рынках

Анализ процесса ценообразования и определение цены приватной информации на финансовых рынках являются важными задачами современной финансовой теории. В качестве модели для описания эволюции цен, начиная с работы Башелье [7], используется модель случайных блужданий и ее непрерывный аналог – броуновское движение. Возникновение случайных колебаний цен традиционно принято объяснять экзогенными воздействиями независимых внешних факторов, случайно изменяющихся с течением времени. Однако такое объяснение не учитывает возможного стратегического влияния маркет-мейкеров на флуктуации цен. Так, в ряде теоретико-игровых работ (см. [1, 9, 10, 11]) выдвигается и подтверждается результатами исследований гипотеза о возможном эндогенном происхождении колебаний цен на финансовых рынках.

Эта гипотеза состоит в следующем. Институциональные инвесторы по ряду причин могут иметь доступ к конфиденциальной информации о состоянии финансового рынка. Например, эти инвесторы могут обладать передовыми инструментами анализа поступающего потока информации. Биржевые агенты, имеющие дополнительную инсайдерскую информацию, при длительном взаимодействии неизбежно выдают эту информацию другим участникам рынка через свои действия. Однако инсайдер не заинтересован в немедленном раскрытии своей приватной информации, влекущем утрату стратегического преимущества. Это стремление инсайдера скрывать свою информацию вынуждает его к стратегическому маневрированию, выражающемуся в рандомизации своих действий. Идея состоит в том, что именно эта рандомизация приводит к сглаживанию резких скачков рыночных цен (обуславливаемых внешними шоковыми факторами) и влечет появление в эволюции цен броуновской компоненты.

Впервые эндогенная гипотеза в таком виде была высказана в работе Де Мейера и Салей [9], хотя модели торгов с крупным

игроком рассматривались и в более ранних работах, например, в работе Кайла [14]. Принципиальное отличие модели Кайла от модели Де Мейера и Салей состоит в наличии на финансовом рынке фоновых игроков (noise traders), которые добавляют определенный шум сигналу, получаемому неинформированным игроком, и таким образом «обеспечивают маскировку» действиям инсайдера. Фактически в этом случае наблюдаемые флуктуации носят экзогенный, а не стратегический характер.

Используя теорию повторяющихся игр с неполной информацией, которая дает возможность исследования стратегических и информационных аспектов формирования цен на фондовых рынках, Де Мейер и Салей демонстрируют эту идею на примере сильно упрощенной, как пишут сами авторы, модели биржевых торгов. Авторы показывают, что при бесконечном увеличении числа шагов n значение игры неограниченно растет как \sqrt{n} , и в асимптотике цен сделок появляется броуновская составляющая.

В модели [9] допускались произвольные цены. Однако более естественно рассматривать дискретные модели, где в качестве единицы выбирается цена пункта (минимального изменения котировки акции).

Такие модели рассматривались в работах Доманского и Крепс [1, 11], и результаты также говорят в пользу эндогенной гипотезы. Более подробно остановимся на этих моделях в разделе 1.

Работа [9] завершается перечислением возможных усложненных модели, которые могли бы сделать ее более реалистичной. В списке усложнений значится более общий торговый механизм, о котором также идет речь в работе [10], где, в частности, предлагается рассматривать модель, в которой игроки назначают различные цены покупки (бид) и продажи акции (аск). Во всех рассматриваемых ранее моделях игроки назначали на каждом шаге только одну цену, т.е. цены покупки и продажи совпадали.

В настоящей работе исследуется упрощенная теоретико-игровая модель биржевых торгов между двумя агентами, которые на каждом этапе торгов назначают несовпадающие целочис-

ленные цены покупки и продажи актива. Максимальная разница между ценой предложения на покупку и ценой предложения на продажу (спрэд двусторонней котировки), устанавливаемыми маркет-мейкером, определяются его соглашением с биржей (например, при торговле на Фондовой бирже ММВБ). Рассмотрена модель с фиксированным спрэдом, который не меняется при колебании котировки. Фиксированный спрэд возникает на рынках с высокой ликвидностью активов, например, на международном валютном (фиксированная разница между ценой покупки и продажи валюты). На фондовом рынке фиксированный спрэд встречается при торговле некоторыми производными финансовыми инструментами (так называемыми контрактами CFD – Contract For Difference).

Целью работы является дальнейшее исследование эндогенной гипотезы для этого варианта модели: опираясь на предположение о разумном поведении инсайдера, мы показываем, каким образом стратегия инсайдера может порождать случайные флуктуации цен на финансовых рынках. Одновременно исследуется вопрос о влиянии величины спреда на информационную ренту инсайдера.

Модель анализируется при помощи повторяющейся игры с асимметричной информацией. Показано, что при неограниченной продолжительности торгового периода инсайдер может гарантировать лишь конечный выигрыш, величина которого обратно пропорциональна величине спреда. Получены функции, дающие верхнюю и нижнюю оценки значения бесконечношаговой игры. Построены разумные стратегии игроков, гарантирующие значения этих функций. Показано, что в случае минимального (тривиального) спреда верхняя и нижняя границы совпадают и дают значение игры. Вычислены средние потери инсайдера относительно ожидаемого уровня прибыли в случае непредвиденного раскрытия инсайдерской информации.

1. Обзор теоретико-игровых результатов и моделей инсайдерских торгов

Упрощенная дискретная модель инсайдерских биржевых торгов с нулевым бид-аск спрэдом была введена в работе Доманского [11]. Эта модель является дискретным аналогом непрерывной модели Де Мейера и Салей [9].

В этой модели имеются два риск-нейтральных агента с противоположными интересами, вступающих в n -шаговые торги за рисковый актив (акции одного типа). Ликвидная цена акции определяется случайным ходом (шоковым внешним воздействием, например, политическим событием, переходом к новой технологии производства и т.п.) перед началом торгов и может принимать два различных целочисленных значения. Не умаляя общности, полагается, что низкое значение цены равно 0 с вероятностью $1 - p$ (состояние L) и высокое равно $t \in \mathbb{N}$ с вероятностью p (состояние H). Игрок 1 информирован о результате случайного хода (это и составляет его инсайдерскую информацию), Игрок 2 не информирован. Оба игрока знают вероятность p . То, что Игрок 1 – инсайдер, является общим знанием. Риск-нейтральность игроков заключается в том, что полезность случайного выигрыша для них равна его математическому ожиданию.

На каждом шаге торгов игроки одновременно предлагают свою целочисленную цену за одну акцию, т.е. цена покупки и цена продажи совпадают. Назвавший более высокую цену покупает по этой цене одну акцию у оппонента. Если игроки назвали одинаковые цены, то транзакции не происходит. Предполагается, что транзакционные издержки равны нулю. Каждый игрок стремится увеличить свой итоговый капитал (деньги плюс акции по ликвидной цене).

Модель формализуется при помощи антагонистической повторяющейся n -шаговой игры с неполной информацией у второго игрока. Такие игры впервые были введены Ауманом и Машлером в 1966 г. [6]. Они задаются конечным множеством состояний (в данной модели это L и H) и матрицей одношаговой антагони-

стической игры для каждого состояния. Информационная структура соответствует описанной выше. Для данной модели из общей теории, разработанной Ауманом и Машлером, следует существование значения n -шаговой игры и оптимальных радомизированных стратегий обоих игроков, обеспечивающих это значение.

Информационное преимущество инсайдера обеспечивает ему ожидаемый положительный выигрыш в многошаговой игре. Возникает естественный вопрос о том, почему неинформированный игрок принимает участие в заведомо невыгодной игре. В работах [1, 10] обсуждается мотивация рассмотрения таких моделей торгов. Не повторяя аргументацию этих авторов, отметим лишь, что маркет-мейкеры (в том числе неинформированные), заключая договор с биржей, принимают на себя обязательства постоянно (за исключением времени котировального перерыва) подавать заявки и обеспечивать ликвидность рынка. Очевидно, что в данной постановке рынок не является строго эффективным в течении всего торгового периода до момента полного раскрытия инсайдерской информации.

Для модели [11] доказана ограниченность значений повторяющихся игр при числе шагов, стремящемся к бесконечности. Такой эффект является следствием дискретности цен и не наблюдался в модели [9] с произвольными ставками и ценами. В [16] описано свойство, ответственное за ограниченность значения бесконечношаговой игры в более широком классе повторяющихся игр с неполной информацией.

В [11] для любых параметров m и p найдено значение бесконечношаговой игры и построены оптимальные стратегии обоих игроков. Инсайдер своими действиями управляет последовательностью апостериорных вероятностей высокой цены, которые после каждого шага торгов обновляются Игроком 2 по байесовскому правилу на основе ставок текущего хода. Доказано, что оптимальная стратегия инсайдера порождает простое случайное блуждание (симметричное случайное блуждание, где из данной точки за шаг можно попасть только в ближайшую соседнюю точку решетки) по решетке апостериорных вероятностей.

стей k/m , $k = 0, \dots, m$, с поглощением в 0 и 1. Другими словами, инсайдер на каждом шаге устанавливает такие цены сделки, что последовательность условных математических ожиданий ликвидной цены акции представляет собой простое случайное блуждание по множеству разумных ставок $\{0, 1, \dots, m\}$ с поглощением в крайних точках 0 и m .

В дальнейших исследованиях модель была усложнена. Торги со счетным множеством возможных ликвидных цен акции рассматривались в [1]. Также были разработаны модели с двумя различными рисковыми активами [13]. В этих работах получены решения бесконечно повторяющихся игр с неполной информацией, соответствующих торгам неограниченной продолжительности.

Если число шагов конечно, то анализ игр становится гораздо более сложным, что вызвано комбинаторными и иными математическими трудностями. Аналитическое решение получено лишь для двух простейших случаев: для одношаговых игр с нулевым спрэдом [3] и игр с минимальным нетривиальным числом ставок, равным трем [2].

В общем случае (произвольное m и большое конечное число шагов n) в [5] получены оценки ожидаемого выигрыша инсайдера в конечношаговой игре. Найден гарантированный выигрыш инсайдера при использовании им стратегии, оптимальной при бесконечношаговом взаимодействии. Показано, что при бесконечном увеличении числа повторений значение конечной игры стремится к значению бесконечношаговой игры как минимум с экспоненциальной скоростью.

Все указанные выше работы посвящены исследованию моделей с нулевым спрэдом. Одношаговая модель с ненулевым фиксированным спрэдом была исследована в [4].

Теоретико-игровая динамическая модель взаимодействия маркет-мейкеров в условиях асимметричной информации с ненулевым спрэдом рассматривалась в [8]. Авторы характеризуют репутационное равновесие в многошаговой игре с ненулевой суммой и возникающий эффект ценового лидерства инсайдера. В рамках модели [8] величина спрэда не ограничена, что являет-

ся серьезным модельным предположением, не соответствующим правилам ведения торгов на ряде фондовых бирж. Поэтому рассмотренная в данной работе постановка с ограниченным фиксированным спрэдом в этом отношении представляется более реалистичной.

Настоящая работа посвящена исследованию динамической модели с ненулевым спрэдом с неограниченным и конечным числом повторений.

2. Модель торгов с ненулевым спрэдом

2.1. МЕХАНИЗМ ТОРГОВ

Рассмотрим упрощенную модель биржевых торгов однотипными рисковыми активами (акциями) между двумя игроками, которые на каждом шаге торгов делают две ставки – назначают цену продажи и цену покупки одной акции. Все ставки и цены целочисленны. Случайная цена акции, определяемая случайным ходом перед началом торгов на весь период, может принимать два значения: высокое значение, равное $m \in \mathbb{Z}_+$, с вероятностью p (состояние $\theta = H$) и низкое, равное нулю, с вероятностью $1 - p$ (состояние $\theta = L$). Вероятность p известна обоим игрокам. Игрок 1 (инсайдер) знает исход случайного хода, Игрок 2 не имеет этой информации. То, что Игрок 1 – инсайдер, является общим знанием.

На каждом шаге торгов $t = 1, \dots, n$ каждый игрок предлагает свою цену покупки и цену продажи одной акции. Разница s между ценами покупки и продажи (бид-аск спрэд) фиксирована правилами торгов (одинакова для обоих игроков). Обозначим i_t цену покупки одной акции Игроком 1 и j_t цену покупки одной акции Игроком 2 на шаге t . Ввиду фиксированности спрэда s , цены продажи на шаге t будут $i_t + s$ и $j_t + s$ для Игроков 1 и 2 соответственно. Множества разумных цен покупки Игроков 1 и 2 обозначим, соответственно, через I и J , причем $I = J = \{-s, -s + 1, \dots, m - 1, m\}$.

Трансакция происходит, если цена покупки акции, названная одним из игроков, превосходит или равна цене продажи, назван-

ной его оппонентом на данном шаге, т.е. либо $i_t + s \leq j_t$, либо $j_t + s \leq i_t$. Если соотношение предложенных цен позволяет провести сделку, то игрок, предложивший максимальную цену покупки, покупает по этой цене одну акцию у другого игрока.

После каждого шага торгов оглашаются ставки этого шага, но ликвидная цена по-прежнему является частным знанием инсайдера. Игрок 2 узнает ликвидную цену только после окончания торгов и, следовательно, лишь тогда может посчитать свою прибыль или убытки в денежном эквиваленте. Задачей обоих игроков является максимизация цены итогового портфеля. Перед началом торгов оба игрока имеют достаточное количество денег и акций.

Отметим, что модели без введения спреда, исследованные в [11], являются частным случаем описанной выше модели и соответствуют единичному спреду.

Возникает вопрос, какие из результатов, полученных в [11], переносятся на случай модели с произвольным ненулевым спредом, а именно:

1) насколько корректно рассмотрение модели торгов неограниченной продолжительности, т.е. вопрос об ограниченности сверху значения бесконечношаговой игры;

2) порождает ли оптимальная стратегия инсайдера в модели с ненулевым спредом простое случайное блуждание цен совершаемых сделок.

В статье мы даем ответ на эти вопросы.

2.2. ОПИСАНИЕ ИГРЫ

Стратегия Игрока 1 представляет собой последовательность $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_t, \dots, \sigma_n)$, где σ_t – ход инсайдера на шаге t – задает вероятностное распределение $\Delta(I)$ на множестве допустимых цен, в соответствии с которым Игрок 1 рандомизирует свои ставки $i_t \in I$, т.е. σ_t отображает пару, состоящую из предыстории ставок $(i_r, j_r)_{r=1}^{t-1}$ и состояния $\theta \in \Theta = \{L, H\}$, в $\Delta(I)$. Аналогично определяется стратегия неинформированного игрока $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_t, \dots, \tau_n)$, но ход τ_t зависит только от предыстории.

Одношаговые выигрыши $a^{\theta, m, s}(i_t, j_t)$ Игрока 1 в состояниях L и H определены матрицами

$$a^{L, m, s}(i, j) = \begin{cases} -i, & \text{если } i \geq j + s, \\ 0, & \text{если } |i - j| < s, \\ j, & \text{если } j \geq i + s, \end{cases}$$

$$a^{H, m, s}(i, j) = \begin{cases} m - i, & \text{если } i \geq j + s, \\ 0, & \text{если } |i - j| < s, \\ -m + j, & \text{если } j \geq i + s. \end{cases}$$

Функция выигрыша $K_n^{m, s}(p, \sigma, \tau)$ Игрока 1 в n -шаговой игре имеет вид

$$K_n^{m, s}(p, \sigma, \tau) = \mathbf{E}_{p, \sigma, \tau} \left[\sum_{t=1}^n a^{\theta, m, s}(i_t, j_t) \right],$$

где $\mathbf{E}_{p, \sigma, \tau}$ – математическое ожидание по распределению, которое порождает тройка (p, σ, τ) на $\Theta \times (I \times J)^n$.

Отметим, что приведенные матрицы одношаговых выигрышей инсайдера имеют более сложную структуру, чем матрицы одношаговых выигрышей для модели без спрэда. Наличие в матрицах полосы нулей шириной $2s - 1$ вдоль главной диагонали значительно усложняет исследование игры $G_n^{m, s}(p)$.

Значение $V_n^{m, s}(p)$ игры (выделяем явно зависимость от параметра p), т.е. ожидаемый итоговый выигрыш инсайдера, дается формулой

$$V_n^{m, s}(p) = \inf_{\tau} K_n^{m, s}(p, \sigma^*, \tau) = \sup_{\sigma} K_n^{m, s}(p, \sigma, \tau^*),$$

где (σ^*, τ^*) – пара оптимальных стратегий игроков.

Для упрощения расчетов далее везде полагаем, что m кратно s .

3. Верхняя оценка выигрыша инсайдера

Рассмотрим семейство стратегий неинформированного игрока, параметризованных первым ходом и являющихся естественным обобщением стратегии, оптимальной в модели без спрэда.

Определение 1. Первый ход Игрока 2 в стратегии $\tau_1^{w,m,s}$ – ставка w . Последующие ходы Игрока 2 на каждом шаге t определяются действиями обоих игроков на $(t - 1)$ -м шаге:

$$\tau_t^{w,m,s}(i_{t-1}, j_{t-1}) = \begin{cases} j_{t-1} - s, & \text{при } i_{t-1} \leq j_{t-1} - s; \\ j_{t-1}, & \text{при } |i_{t-1} - j_{t-1}| < s \\ j_{t-1} + s, & \text{при } i_{t-1} \geq j_{t-1} + s. \end{cases}$$

Стратегия $\tau^{w,m,s}$ определена для любого числа шагов n . Отметим, что действия Игрока 2 на каждом шаге детерминировано зависят от предыстории, которая может быть случайной, если Игрок 1 рандомизирует свои действия.

Утверждение 1. Стратегия $\tau^{w,m,s}$ в n -шаговой игре гарантирует векторный выигрыш (выигрыш в обоих возможных состояниях) $h_n(\tau^{w,m,s})$ с компонентами

$$h_n^L(\tau^{w,m,s}) = \sum_{l=0}^{n-1} (w - ls)^+,$$

$$h_n^H(\tau^{w,m,s}) = \sum_{l=0}^{n-1} (m - w - s - ls)^+,$$

где $(a)^+$ означает $\max\{0, a\}$.

Доказательство. Утверждение доказывается по индукции по числу шагов.

Пусть $n = 1$. Для $w = 0, 1, \dots, m - s$

$$h_1^L(\tau^{w,m,s}) = \max_l a^{L,m,s}(l, w) = w,$$

$$h_1^H(\tau^{w,m,s}) = \max_l a^{H,m,s}(l, w) = m - w - s.$$

Предположим, что формулы верны для n -шаговой игры. Покажем, что они выполняются также и для числа шагов $n + 1$. Пусть векторный выигрыш $h_n(\tau^{w,m,s})$ на n -м шаге определен согласно формулам из утверждения. Докажем, что они справедливы и для $h_{n+1}(\tau^{w,m,s})$.

В состоянии L для стратегии $\tau^{0,m,s}$ наилучший ответ инсайдера – ставка $-s$, что дает $h_n^L(\tau^{w,m,s}) = 0$ для всех n .

Аналогично, в состоянии H для стратегий $\tau^{w,m,s}$ с $w > m-s$ наилучший ответ инсайдела – ставка $m-s$, и $h_n^H(\tau^{w,m,s}) = 0$ для всех n .

Рассмотрим стратегию $\tau^{w,m,s}$, $w = 1, \dots, m-s$. Первый ход в наилучшем ответе инсайдера на эту стратегию в состоянии L – это ставка $l \leq w-s$. Согласно рекурсивному представлению функции платежей (см. [6]) получаем

$$\begin{aligned} h_{n+1}^L(\tau^{w,m,s}) &= \max_l (a^{L,m,s}(l, w) + h_n^L(\tau^{l,m,s})) = \\ &= w + \sum_{l=0}^{n-1} (w-s-ls)^+ = \sum_{l=0}^n (w-ls)^+. \end{aligned}$$

Первый ход в наилучшем ответе инсайдера на эту стратегию в состоянии H – это ставка $l = w+s$.

$$\begin{aligned} h_{n+1}^H(\tau^{w,m,s}) &= \max_l (a^{H,m,s}(l, w) + h_n^H(\tau^{l,m,s})) = m - (w+s) + \\ &+ \sum_{l=0}^{n-1} (m - (w+s) - s - ls)^+ = \sum_{l=0}^n (m - w - s - ls)^+. \end{aligned}$$

Это доказывает предположение индукции.

При больших n векторные выигрыши стабилизируются

$$h_n(\tau^{w,m,s}) = h_{n+1}(\tau^{w,m,s}) = h(\tau^{w,m,s}), \text{ при } n \geq m-s.$$

Из определения значения игры следует, что выполняется неравенство

$$V_n^{m,s}(p) \leq \min_w \{h^L(\tau^{w,m,s})(1-p) + h^H(\tau^{w,m,s})p\}.$$

При $p \in \left(\frac{sk}{m}, \frac{s(k+1)}{m}\right)$, $k = 0, 1, \dots, \frac{m}{s} - 1$, минимум в правой части неравенства достигается на стратегии с $w = sk$.

При $p_k = sk/m$, $k = 1, \dots, m/s - 1$, минимум достигается одновременно на s стратегиях с $w = sk - s + 1, sk - s + 2, \dots, sk$.

Вычисляя этот минимум, получаем верхнюю оценку для значения игры $G_n^{m,s}(p)$.

Теорема 1. *Функции $V_n^{m,s}(p)$ для любого n ограничены сверху функцией $H^{m,s}(p)$ – непрерывной, выпуклой вверх, кусочно-линейной функцией с m/s областями линейности $[sk/m, s(k+1)/m]$, $k = 0, 1, \dots, m/s-1$. Эта функция однозначно определена своими значениями в точках излома $p_k = sk/m$, $k = 0, 1, \dots, m/s$:*

$$(1) \quad H^{m,s}(p_k) = \frac{m^2}{2s} p_k(1 - p_k).$$

Таким образом, у Игрока 2 есть стратегия $\tau^{w,m,s}$, не зависящая от числа шагов n , которая в n -шаговой игре гарантирует ему проигрыш не больше величины $H^{m,s}$, тоже не зависящей от n . Это позволяет говорить, что Игрок 2 гарантирует $H^{m,s}$ в игре $G_\infty^{m,s}(p)$ заранее не ограниченной (бесконечной) продолжительности.

Напомним определения основных понятий бесконечношаговых игр (см., например, [15]).

Стратегиями в бесконечношаговой игре называются бесконечные последовательности ходов $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_t, \dots)$ для Игрока 1 и $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_t, \dots)$ для Игрока 2.

Будем говорить, что стратегия σ в игре $G_\infty^{m,s}(p)$ гарантирует Игроку 1 выигрыш \underline{v} , если $\forall \varepsilon > 0 \exists N$, такое что $\forall n > N$ выполнено $\inf_\tau K_n^{m,s}(p, \sigma, \tau) > \underline{v} - \varepsilon$.

Аналогично дается определение того, что стратегия τ Игрока 2 гарантирует проигрыш \bar{v} .

Говорят, что игра $G_\infty^{m,s}(p)$ имеет равномерное значение $V_\infty^{m,s}(p)$, если $\sup_\sigma \underline{v} = \inf_\tau \bar{v} = V_\infty^{m,s}$.

Если значение $V_\infty^{m,s}$ не существует, то $\sup_\sigma \underline{v}$ и $\inf_\tau \bar{v}$ называются нижним $\underline{V}_\infty^{m,s}$ и верхним $\bar{V}_\infty^{m,s}$ равномерными значениями, соответственно.

Из Теоремы 1 следует оценка сверху на $\bar{V}_\infty^{m,s}$.

Замечание 1. Если нормировать игру так, чтобы высокая цена акции равнялась 1, а ставки были кратны $1/m$, и устремить s и m к ∞ при $s/m = \alpha < 1$, то текущая модель превращается в непрерывную с ненулевым спрэдом α и «произвольными» ставками. При этом имеет место верхняя оценка значения игры

кусочно-линейной функцией $H^\alpha(p)$ с точками излома $p_k = \alpha k$, $k = 0, 1, \dots, 1/\alpha$:

$$H^\alpha(p_k) = \frac{1}{2\alpha} p_k (1 - p_k).$$

Отсюда делаем вывод, что наличие ненулевого спрэда принципиально влияет на результат модели Де Мейера и Салей [9], в которой в случае нулевого спрэда наблюдался неограниченный рост значения игры при бесконечном увеличении числа шагов. Неинформированный игрок изменяет свои ставки с шагом α , поэтому данную модель можно асимптотически рассматривать как дискретную с шагом дискретизации α .

Из формулы (1) следует, что максимальный выигрыш инсайдера уменьшается по крайней мере в s раз по сравнению с моделью без спрэда.

4. О стратегии инсайдера и случайных колебаниях

Предположим, что информированный игрок использует стратегию σ . Рассмотрим вопрос о том, какой выигрыш гарантирует ему эта стратегия. При этом можно считать, что для Игрока 1 реализуется наихудшая ситуация: Игрок 2 использует свой наилучший ответ на σ , или другими словами, Игрок 2 знает σ . Тогда, наблюдая за действиями Игрока 1 на шагах $1, \dots, t-1$, Игрок 2 на шаге t может вычислить апостериорную (условную) вероятность события $\{\theta = H\}$, т.е. высокой цены акции, при условии реализовавшейся предыстории $(i_r, j_r)_{r=1}^{t-1}$. Обозначим апостериорную вероятность высокой цены на шаге t через $p(t)$. Заметим, что $p(t)$ зависит от σ и является в общем случае случайным процессом, поскольку зависит от предыстории, которая в свою очередь тоже является случайной.

По аналогии с моделью без спрэда [11], естественной может представляться гипотеза о том, что оптимальная стратегия инсайдера в модели с ненулевым спрэдом порождает простое случайное блуждание апостериорных вероятностей (см. Введение). Ниже мы покажем, что это не так.

Рассмотрим такие стратегии инсайдера, для которых $p(t)$, $t = 1, \dots$, является простым случайным блужданием по решетке $\{\frac{sk}{m} \mid k = 0, \dots, m/s\}$, обозначим множество таких стратегий Σ^{SRW} . Отметим, что эта решетка является непосредственным аналогом решетки $\{\frac{k}{m}\}$ для модели без спреда, поскольку прыжку ставок на s в модели с ненулевым спредом соответствует прыжок на 1 в модели без спреда.

Мы ставим задачу найти наилучшую стратегию инсайдера $\sigma^{k,m,s}$ в этом классе, то есть такую, что $\forall \sigma \in \Sigma^{SRW}$

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \inf_{\tau} K_n^{m,s}(p, \sigma^{k,m,s}, \tau) \geq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \inf_{\tau} K_n^{m,s}(p, \sigma, \tau).$$

Определим стратегию инсайдера $\sigma^{m,s}$, порождающую простое случайное блуждание апостериорных вероятностей по решетке $p_k = sk/m$, $k = 0, 1, \dots, m/s$, и гарантирующую инсайдеру положительный выигрыш на каждом шаге блуждания до поглощения в 0 и 1.

Рассмотрим сумму

$$g(d) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s-1} + \dots + \frac{1}{s-d}.$$

Введем обозначения:

$$d^* = \max\{d \mid g(d) \leq 1\}, \quad \varepsilon^* = 1 - g(d^*).$$

Определение 2. Если на шаге t , $t = 1, 2, \dots$, апостериорная вероятность состояния H равна $p_k = sk/m$, $k = 1, \dots, m/s - 1$, то ход инсайдера $\sigma_t^{m,s}$ равен $\mu^{k,m,s}$, где $\mu^{k,m,s}$ – это ход инсайдера в одношаговой игре с априорной вероятностью высокой цены p_k , состоящий в смешивании ставок $sk - 2s, sk, sk + 1, \dots, sk + d^*, sk + d^* + 1$ в соответствии с условными вероятностями

$$\begin{aligned} \mu^{k,m,s}(sk - 2s|H) &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{k}\right), \\ \mu^{k,m,s}(sk - 2s|L) &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{s}{m - sk}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu^{k,m,s}(sk + d|H) &= \frac{1}{2(s-d)} \left(1 + \frac{1}{k}\right), \\ \mu^{k,m,s}(sk + d|L) &= \frac{1}{2(s-d)} \left(1 - \frac{s}{m-sk}\right), \quad d = 0, 1, \dots, d^*, \\ \mu^{k,m,s}(sk + d^* + 1|H) &= \frac{1}{2}\varepsilon^* \left(1 + \frac{1}{k}\right), \\ \mu^{k,m,s}(sk + d^* + 1|L) &= \frac{1}{2}\varepsilon^* \left(1 - \frac{s}{m-sk}\right),\end{aligned}$$

где $\mu^{k,m,s}(i|\theta)$ обозначает вероятность использовать ставку i в состоянии θ .

Если на шаге t апостериорная вероятность состояния H равна $p = 0$ (при $k = 0$), то ход инсайдера – ставить 0 , а если $p = 1$ ($k = m/s$), то ставить любую из ставок $m - s + 1, \dots, m$.

Ход инсайдера в каждом из состояний рандомизирует одно и то же множество ставок, но с различными весами, зависящими от состояния (ликвидной цены акции) и текущей апостериорной вероятности.

Обозначим через $\mu^{k,m,s}(i)$ полную (безусловную) вероятность выбора инсайдером действия i при использовании хода $\mu^{k,m,s}$, т.е.

$$\mu^{k,m,s}(i) = \sum_{\theta} \mu^{k,m,s}(i|\theta)P(\theta).$$

С учетом Определения 2 получаем

$$\begin{aligned}\mu^{k,m,s}(sk - 2s) &= \frac{1}{2}, \\ \mu^{k,m,s}(sk + d) &= \frac{1}{2(s-d)}, \quad d = 0, 1, \dots, d^*, \\ \mu^{k,m,s}(sk + d^* + 1) &= \frac{1}{2}\varepsilon^*.\end{aligned}$$

Если на шаге t апостериорная вероятность $p(t) = p_k$, то при использовании инсайдером ставки $i_t = i$ для апостериорной вероятности на шаге $t + 1$ по формуле Байеса получаем

$$p(t + 1|i_t = i) = p_k \frac{\mu^{k,m,s}(i|H)}{\mu^{k,m,s}(i)}.$$

Таким образом,

$$p(t+1|i_t = sk - 2s) = p_k - s/m = s(k-1)/m = p_{k-1},$$

$$p(t+1|i_t \neq sk - 2s) = p_k + s/m = s(k+1)/m = p_{k+1}.$$

Отсюда непосредственно следует, что построенная стратегия инсайдера $\sigma^{m,s}$ входит в класс стратегий Σ^{SRW} .

Теорема 2. *Стратегия $\sigma^{m,s}$ порождает простое случайное блуждание апостериорных вероятностей по решетке $\{\frac{sk}{m} \mid k = 0, \dots, m/s\}$ с поглощением в крайних точках 0 и 1 и на каждом шаге до поглощения гарантирует инсайдеру выигрыш*

$$(2) \quad V_1(s) = \frac{1}{2}(d^* + 1 + \varepsilon^*(s - d^* - 1)).$$

Доказательство. Пусть апостериорная вероятность состояния H на шаге t равна $p_k = sk/m$. Стратегия $\sigma^{m,s}$ на данном шаге гарантирует инсайдеру одношаговый выигрыш, равный

$$\min_j K_1^{m,s}(p_k, \mu^{k,m,s}, j) = \min_j \left(p_k \sum_i \mu^{k,m,s}(i|H) a^{H,m,s}(i, j) + (1 - p_k) \sum_i \mu^{k,m,s}(i|L) a^{L,m,s}(i, j) \right).$$

Достаточно для всех ставок j неинформированного игрока проверить, что $K_1^{m,s}(p_k, \mu^{k,m,s}, j) \geq V_1(s)$.

Если неинформированный игрок назначает цены покупки $j \leq sk - 3s$, то ставка инсайдера $sk - 2s$ приносит в его одношаговый выигрыш величину $s/2$, каждая из ставок $sk, sk + 1, \dots, sk + d^*$ дает по $1/2$, и ставка $sk + d^* + 1$ дает $(s - d^* - 1)\varepsilon^*/2$. В этом случае инсайдер получит

$$K_1^{m,s}(p_k, \mu^{k,m,s}, j) = s/2 + \frac{1}{2}(d^* + 1) + (s - d^* - 1)\varepsilon^*/2.$$

Если неинформированный игрок ставит $j = sk - 3s + 1, \dots, sk - s$, то ставка $sk - 2s$ дает нулевой вклад в выигрыш инсайдера, а все остальные ставки дают такой же вклад, что и ранее. Тогда

$$K_1^{m,s}(p_k, \mu^{k,m,s}, j) = \frac{1}{2}(d^* + 1) + (s - d^* - 1)\varepsilon^*/2 = V_1(s).$$

Если неинформированный игрок ставит $j = sk - s + h$, где $h = 1, 2, \dots, d^* + 1$, то ставка инсайдера $sk - 2s$ приносит в его одношаговый выигрыш величину $h/2$, ставки $sk, sk + 1, \dots, sk + h - 1$ дают нулевой вклад, каждая из ставок $sk + h, \dots, sk + d^*$ дает по $1/2$, и ставка $sk + d^* + 1$ дает $(s - d^* - 1)\varepsilon^*/2$. Тогда

$$K_1^{m,s}(p_k, \mu^{k,m,s}, j) = h/2 + \frac{1}{2}(d^* + 1 - h) + (s - d^* - 1)\varepsilon^*/2 = V_1(s).$$

Если неинформированный игрок ставит $j = sk - s + d^* + 2$, то ставка $sk - 2s$ приносит в одношаговый выигрыш инсайдера величину $(d^* + 2)/2$, остальные ставки дают нулевой вклад.

$$K_1^{m,s}(p_k, \mu^{k,m,s}, j) = (d^* + 2)/2 > V_1(s).$$

Легко показать, что бóльшие ставки также дадут инсайдеру выигрыш бóльший, чем $V_1(s)$.

Значит, гарантированный одношаговый выигрыш инсайдера составляет $V_1(s)$.

В случае если априорная вероятность не лежит на данной решетке, $p \in (sk/m, s(k+1)/m)$, то первый ход инсайдера состоит в использовании выпуклой линейной комбинации ходов, описанных для крайних точек интервала, причем ход $\mu^{k,m,s}$ входит в эту комбинацию с коэффициентом $k + 1 - p\frac{m}{s}$, а ход $\mu^{k+1,m,s}$ с коэффициентом $p\frac{m}{s} - k$.

Так как продолжительность случайного блуждания по решетке sk/m до поглощения в 0 и 1 из точки p_k равна $\frac{m^2}{s^2}p_k(1 - p_k)$, то справедлива теорема, дающая нижнюю оценку значения игры.

Теорема 3. *Функции $V_n^{m,s}$ при $n \rightarrow \infty$ ограничены снизу функцией $L^{m,s}$ — непрерывной, выпуклой вверх, кусочно-линейной функцией со значениями в точках излома $p_k = sk/m$, $k = 0, 1, \dots, m/s$:*

$$(3) \quad L^{m,s}(p_k) = V_1(s) \frac{m^2}{s^2} p_k(1 - p_k).$$

Утверждение 2. *Описанная стратегия $\sigma^{m,s}$ является лучшей в классе Σ^{SRW} .*

Доказательство. Доказательство проводится в два этапа. На первом этапе строится ход ν неинформированного игрока, представляющий собой одношаговый наилучший ответ Игрока 2 на ход $\mu^{k,m,s}$, заданный в Определении 2 и используемый инсайдером при апостериорной вероятности $p_k = sk/m$. На втором этапе строится наилучший одношаговый ответ инсайдера на ход ν Игрока 2 и демонстрируется, что он дает тот же выигрыш за шаг, что и исходный ход $\mu^{k,m,s}$.

Шаг 1. Пусть инсайдер использует стратегию $\sigma^{m,s}$ (см. Определение 2) из Σ^{SRW} , такую что если инсайдер делает ставку $x_{\downarrow} = sk - 2s$, то апостериорная вероятность p сдвигается по решетке влево ($p_k - s/m$), а если инсайдер делает любую из ставок $x_{\uparrow} = sk, sk + 1, \dots, sk + d^* + 1$, то апостериорная вероятность p сдвигается вправо ($p_k + s/m$). Пусть Игрок 2 использует ход $\nu \in \Delta(J)$ в ответ на ход $\mu^{k,m,s}$.

Это гарантирует неинформированному игроку одношаговый проигрыш не больше, чем

$$K_1^{m,s}(p_k, \mu^{k,m,s}, \nu) = \max_{x_{\downarrow}, x_{\uparrow}} \left(\frac{1}{2} \left[\sum_{y=0}^{x_{\downarrow}-s} \nu(y)(sk - s - x_{\downarrow}) + \sum_{y=x_{\downarrow}+s}^{\infty} \nu(y)(y - sk + s) \right] + \frac{1}{2} \left[\sum_{y=0}^{x_{\uparrow}-s} \nu(y)(sk + s - x_{\uparrow}) + \sum_{y=x_{\uparrow}+s}^{\infty} \nu(y)(y - sk - s) \right] \right).$$

Предположим, что носитель хода ν представляет собой множество $\{sk - s, sk - s + 1, \dots, sk - s + d^* + 1\}$.

Поскольку ход ν строится как наилучший одношаговый ответ на ход $\mu^{k,m,s}$, то сумма $\sum_{y=sk-s}^{x_{\uparrow}-s} \nu(y)(sk + s - x_{\uparrow})$ не зависит от x_{\uparrow} , выбираемого из множества $\{sk, sk + 1, \dots, sk + d^* + 1\}$.

Пусть $x_{\uparrow} = sk + d$, $d = 0, 1, \dots, d^* + 1$. Тогда

$$\sum_{y=sk-s}^{sk-s+d} \nu(y) = \frac{c}{s-d}, \quad \text{для некоторого } c > 0.$$

Учитывая, что $\sum_{y=sk-s}^{sk-s+d^*+1} \nu(y) = 1$, получим $c = s - d^* - 1$. Следовательно, мы полностью определили ход ν :

$$\nu(sk - s) = (s - d^* - 1)/s,$$

$$\nu(sk - s + d) = \frac{s - d^* - 1}{(s - d)(s - d + 1)}, \quad \text{для } d = 1, \dots, d^* + 1.$$

Шаг 2. Вычислим, что гарантирует построенный ход ν Игроку 2 при наилучшем поведении инсайдера из класса стратегий Σ^{SRW} .

$$K(\nu) = \max_{x_{\downarrow}, x_{\uparrow}} \left(\frac{1}{2} \left[\sum_{y=sk-s}^{x_{\downarrow}-s} \nu(y)(sk - s - x_{\downarrow}) + \sum_{y=x_{\downarrow}+s}^{sk-s+d^*+1} \nu(y)(y - sk + s) \right] + \frac{1}{2} \left[\sum_{y=sk-s}^{x_{\uparrow}-s} \nu(y)(sk + s - x_{\uparrow}) + \sum_{y=x_{\uparrow}+s}^{sk-s+d^*+1} \nu(y)(y - sk - s) \right] \right).$$

Выражение в первых квадратных скобках максимизируется при $x_{\downarrow} \leq sk - 2s$, при этом значение выражения равно $\varepsilon^*(s - d^* - 1) + d^* + 1 - (s - d^* - 1)$.

Выражение во вторых квадратных скобках максимизируется при любом x_{\uparrow} из множества $\{sk, sk + 1, \dots, sk + d^* + 1\}$, этот максимум равен $s - d^* - 1$.

$$\text{Тогда } K(\nu) = \frac{1}{2}(\varepsilon^*(s - d^* - 1) + d^* + 1) = V_1(s).$$

Отметим, что описанная в разделе 3 стратегия неинформированного игрока является естественным ответом на стратегию $\sigma^{m,s}$ инсайдера (и в случае $s = 1$ они составляют пару оптимальных стратегий), порождающую простое случайное блуждание апостериорных вероятностей.

Однако, несмотря на то что построенная стратегия, согласно утверждению 2, является лучшей из порождающих простое случайное блуждание, ответ на вопрос об оптимальности этой стратегии при произвольном s отрицательный.

Утверждение 3. Стратегию $\sigma^{m,s}$ в случае минимального нетривиального спреда $s = 2$ можно улучшить, что обеспечит инсайдеру больший выигрыш.

Доказательство. При $s = 2$ и $m = 2m'$ строится стратегия инсайдера, которая обеспечит ему нижнюю границу выигрыша $\bar{L}^{m,2}$, превосходящую $L^{m,2}$.

Для точек $p_k = 2k/m$ эта стратегия совпадает с описанной в Определении 2.

Для точек $q_k = (2k - 1)/m$, если $q_k \neq 1/m$ и $q_k \neq 1 - 1/m$, Игрок 1 так же, как и в ходе μ из Определения 2, генерирует скачок апостериорных вероятностей на $2/m$ влево и вправо с равными вероятностями.

Если $q_k = 1/m$, то Игрок 1 генерирует скачок апостериорных вероятностей в точку 0 с вероятностью $2/3$ с помощью ставки -1 , и скачок в точку $3/m$ с вероятностью $1/3$ с помощью ставки 2.

Если $q_k = 1 - 1/m$, то Игрок 1 генерирует скачок апостериорных вероятностей в точку 1 с вероятностью $2/3$ с помощью ставки $m - 1$, и скачок в точку $1 - 3/m$ с вероятностью $1/3$ с помощью ставки $m - 4$.

Таким образом, при начальной вероятности q_k на последнем шаге симметрия блуждания нарушается. Такая стратегия обеспечивает одношаговый выигрыш инсайдеру, равный $3/4$ во всех точках, кроме точек q_1 и $q_{m'}$. В этих последних точках одношаговый выигрыш равен $1/3$.

Эта стратегия в точках p_k гарантирует инсайдеру ожидаемый выигрыш в n -шаговой игре равный $L^{m,2}(p_k)$, а в точках q_k выигрыш $\bar{L}^{m,2}(q_k)$, где

$$\bar{L}^{m,2}(q_k) = 3/4k(m' - k + 1) - (3m' + 2)/8 > L^{m,2}(q_k).$$

Положив для наглядности $m = 6$, имеем $q_1 = 1/6$, $q_2 = 1/2$,

$q_3 = 5/6$ и

$$\bar{L}^{6,2}(q_1) = \bar{L}^{6,2}(q_3) = 7/8 > L^{m,2}(q_k) = 3/4,$$

$$\bar{L}^{6,2}(q_2) = 13/8 > L^{m,2}(q_2) = 3/2.$$

Из того факта, что наилучшая стратегия инсайдера, генерирующая простое случайное блуждание апостериорных вероятностей, не является оптимальной в игре $G_n^{m,2}(p)$ для всех $p \in [0, 1]$, $n \rightarrow \infty$, следует, что гипотеза о том, что оптимальная стратегия инсайдера порождает простое случайное блуждание, неверна.

Нельзя расценивать это утверждение как опровержение более общей эндогенной гипотезы, поскольку блуждание, соответствующее оптимальному поведению инсайдера, может иметь более сложную структуру. Однако так как во всех упрощенных моделях наблюдалось именно простое случайное блуждание апостериорных вероятностей высокой ликвидной цены акции, данный результат имеет большое значение для понимания того факта, что механизм ценообразования на реальных финансовых рынках может носить гораздо более сложный характер и иметь особенности, которые нельзя обнаружить при исследовании упрощенных моделей.

Поэтому мы выдвигаем гипотезу о том, что блуждание цен сделок имеет более сложную структуру: на каждом этапе стратегия инсайдера порождает больше двух апостериорных вероятностей. Подробная характеристика этой структуры представляет открытую задачу для будущих исследований.

5. Соотношение верхней и нижней границ

Из формул (1) и (3) следует, что верхняя и нижняя оценки имеют одинаковую форму, в частности, они имеют одни и те же точки излома. Естественно определить, каково соотношение полученных границ или, другими словами, в каком коридоре лежит значение игры $G_\infty^{m,s}(p)$, если оно существует.

I. Случай $s = 1$ эквивалентен модели без спреда, решенной в [11]. Согласно формулам (1), (2), (3), вычисляем:

$$V_1(1) = 1/2, \quad H^{m,1} = L^{m,1} = \frac{m^2}{2} p_k(1 - p_k) = V_\infty^{m,1}$$

в точках $p_k = k/m$.

Эти формулы совпадают с результатами, полученными в работе [11]. Таким образом, результаты модели без введения спреда являются частным случаем результатов, полученных в данной работе.

II. В случае минимального нетривиального спреда $s = 2$ гарантированный выигрыш инсайдера на каждом шаге торгов до поглощения составляет $V_1(2) = 3/4$. Верхняя и нижняя оценки представляют собой кусочно-линейные функции со значениями в точках излома $p_k = 2k/m$

$$H^{m,2}(p_k) = \frac{m^2}{4} p_k(1 - p_k),$$

$$L^{m,2}(p_k) = \frac{3m^2}{16} p_k(1 - p_k) = \frac{3}{4} H^{m,2}(p_k).$$

III. При $s \rightarrow \infty$ (автоматически $m \rightarrow \infty$) нижняя оценка из формулы (3) принимает вид

$$L^{m,s}(p_k) = \left(1 - \frac{1}{e}\right) (1 + o(1)) \frac{m^2}{2s} p_k(1 - p_k).$$

Можно записать приближенное соотношение границ в виде:

$$L^{m,s}(p_k) \approx 0,63 \cdot H^{m,s}(p_k).$$

6. Раскрытие информации на шаге n

Для модели без спреда ситуация внезапного раскрытия инсайдерской информации была исследована в [5]. В [5] найден выигрыш инсайдера в игре с конечным числом повторений при

использовании стратегии, оптимальной в бесконечношаговой игре. Разница $\varepsilon_n^m(k)$ между значением $V_\infty^m(k/m)$ игры $G_\infty^m(k/m)$ и выигрышем инсайдера за конечное число шагов n , гарантированным бесконечношаговой оптимальной стратегией, интерпретируется как цена внезапного раскрытия инсайдерской информации в бесконечношаговой игре.

Теорема 4 (см. Теорему 1 в [5]). *Цена внезапного раскрытия инсайдерской информации экспоненциально убывает с ростом n и вычисляется по формуле*

$$(4) \quad \varepsilon_n^m(k) = \sum_{l=1}^{[m/2]} \left(\cos \frac{\pi(2l-1)}{m} \right)^n A_l^m(k),$$

где $[\alpha]$ – целая часть числа α , и коэффициенты $A_l^m(k)$ равны

$$A_l^m(k) = \frac{1}{2m} \sin \frac{\pi k(2l-1)}{m} \operatorname{ctg} \frac{\pi(2l-1)}{2m} \left(1 + \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi(2l-1)}{2m} \right).$$

Результаты работы [5] обусловлены тем, что оптимальная стратегия инсайдера в модели без спрэда порождает простое случайное блуждание апостериорных вероятностей. Поэтому их оказывается нетрудно перенести и на модель с произвольным спрэдом.

Для модели биржевых торгов неограниченной продолжительности с ненулевым спрэдом в разделе 4 найдена нижняя граница $L^{m,s}$, которую инсайдер гарантирует при использовании стратегии $\sigma^{m,s}$. Эта стратегия, согласно Теореме 2, порождает простое случайное блуждание по решетке $\left\{ \frac{sk}{m} \mid k = 0, \dots, m/s \right\}$, которая содержит в s раз меньше точек, чем решетка $\left\{ \frac{k}{m} \mid k = 0, \dots, m \right\}$.

Ценой внезапного раскрытия инсайдерской информации в этом случае называем величину

$$\varepsilon_n^{m,s}(k) = L^{m,s}(sk/m) - \inf_{\tau} K_n^{m,s}(sk/m, \sigma^{m,s}, \tau).$$

Другими словами, эта та сумма, которую инсайдер не успевает получить относительно своих гарантированных ожиданий $L^{m,s}$ вследствие того, что его приватная информация раскрылась раньше, чем он ожидал.

Теорема 5. Цена внезапного раскрытия инсайдерской информации в бесконечношаговой игре $G_{\infty}^{m,s}(sk/m)$ после шага n вычисляется по формуле

$$(5) \quad \varepsilon_n^{m,s}(k) = 2V_1(s)\varepsilon_n^{m/s}(k),$$

где функция $\varepsilon_n^{(\cdot)}(k)$ определена формулой (4).

Отсюда непосредственно следует, что значение $V_n^{m,s}(sk/m)$ конечношаговой игры $G_n^{m,s}(sk/m)$ ограничено снизу функцией $L_n^{m,s}(sk/m)$ – выигрышем, гарантированным стратегией $\sigma^{m,s}$ Игрока 1:

$$L_n^{m,s}(sk/m) = L^{m,s}(sk/m) - \varepsilon_n^{m,s}(k), \quad k = 1, \dots, \frac{m}{s} - 1.$$

7. Выводы и перспективы

Для упрощенной модели биржевых торгов с фиксированным ненулевым спрэдом описано разумное поведение игроков. Несмотря на то, что это поведение не является оптимальным, на основе результатов исследования можно сделать ряд выводов.

Наличие ненулевого бид-аск спреда естественным образом ограничивает способность инсайдера получать выгоду из своей приватной информации, так как максимальный ожидаемый выигрыш инсайдера уменьшается по сравнению с выигрышем, получаемым в модели без спреда.

Выдвигается гипотеза о том, что оптимальная стратегия инсайдера порождает более сложный механизм ценообразования, чем простое случайное блуждание цен сделок, характерное для моделей без спреда.

Разработанный в [5] подход к анализу конечношаговых игр, соответствующих упрощенным моделям без спреда, эффективно применен к модели с произвольным спрэдом, что позволило получить нижнюю оценку ожидаемого выигрыша инсайдера.

Результаты, полученные для модели с двумя возможными значениями ликвидной цены акции, легко обобщаются на случай счетного множества возможных ликвидных цен, по аналогии с

тем, как это сделано в работе [1] для модели без спреда. Не повторяя технических выкладок, отметим, что центральной идеей является каноническое симметричное представление вероятностного распределения на целочисленной решетке как выпуклой комбинации распределений с двухточечными носителями. Детально структура этого представления описана в статье [12].

В качестве открытого вопроса отметим следующий: сохраняется ли при оптимальном поведении маркет-мейкеров эффект полного раскрытия инсайдерской информации в среднем за конечное время для модели с произвольным спредом.

Литература

1. ДОМАНСКИЙ В.К., КРЕПС В.Л. *Теоретико-игровая модель биржевых торгов: стратегические аспекты формирования цен на фондовых рынках* // Журнал Новой экономической ассоциации. – 2011. – Вып. 11. – С. 39–62.
2. КРЕПС В.Л. *Повторяющиеся игры, моделирующие биржевые торги, и возвратные последовательности* // Изв. РАН, Теория и системы управления. – 2009. – Вып. 4. – С. 109–120.
3. САНДОМИРСКАЯ М.С., ДОМАНСКИЙ В.К. *Решение одношаговой игры биржевых торгов с неполной информацией* // Математическая теория игр и ее приложения. – 2012. – Т. 4, Вып. 1. – С. 32–54.
4. САНДОМИРСКАЯ М.С. *Теоретико-игровая модель одношаговых инсайдерских торгов с ненулевой маржой* // Обзорные прикладной и промышленной математики. – 2012. – Т. 19, Вып. 2. – С. 219–220.
5. САНДОМИРСКАЯ М.С. *Цена внезапного раскрытия инсайдерской информации на фондовом рынке* // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. – 2014. – Вып. 1. – С. 120–127.

6. AUMANN R.J., MASCHLER M. *Repeated Games with Incomplete Information*. – Cambridge, Massachusetts – London, England: The MIT Press. – 1995. – 360 p.
7. BACHELIER L. *Theorie de speculation* // Ann. Ecole Norm. Sup. – 1900 – Vol. 17. – P. 21–86.
8. CALCAGNOR., LOVOS. *Bid-Ask price competition with asymmetric information between market-makers* // The Review of Economic Studies. – 2006. – Vol. 73(2). – P. 329–355.
9. DE MEYER B., MOUSSA SALEY H. *On the Strategic Origin of Brownian Motion in Finance* // Int. Journal of Game Theory. – 2002. – Vol. 31. – P. 285–319.
10. DE MEYER B. *Price dynamics on a stock market with asymmetric information* // Games and economic behavior. – 2010. – Vol. 69. – P. 42–71.
11. DOMANSKY V. *Repeated games with asymmetric information and random price fluctuations at finance markets* // Int. Journal of Game Theory. – 2007. – Vol. 36(2). – P. 241–257.
12. DOMANSKY V. *Symmetric representations of bivariate distributions* // Statistics and Probability Letters. – 2013. – Vol. 83. – P. 1054–1061.
13. DOMANSKY V., KREPS V. *Repeated games with asymmetric information modeling financial markets with two risky assets* // RAIRO Operations Research. – 2013. – Vol. 47. – P. 251–272.
14. KYLE A.S. *Continuous Auctions and Insider Trading* // Econometrica. – 1985. – Vol. 53. – P. 1315–1335.
15. MERTENS J.F., SORIN S., ZAMIR S. *Repeated games* // CORE Discussion Paper №№9420, 9421, 9422. – Univ. Catholique de Louvain, Center for Operations Research & Econometrics. – 1994. – 544 p.
16. SANDOMIRSKII F. *Repeated games with incomplete information and slowly growing value* // The 7th Int. Conf. Game Theory and Management GTM2013. Abstracts / Eds. L. Petrosjan and N. Zenkevich. – 2013. – P. 207–209.

GAME-THEORETICAL DYNAMIC INSIDER TRADING MODEL WITH NON-ZERO BID-ASK SPREAD

Marina Sandomirskaya, St.Petersburg Institute for Economics and Mathematics of RAS, St.Petersburg; NRU Higher School of Economics, St.Petersburg, Cand.Sc. (sandomirskaya_ms@mail.ru, msandomirskaya@hse.ru).

Abstract: We consider the model of multistage insider trading between two market agents for one-type risky assets. One of the players (the insider) has private information about the liquidation value of the asset. At each step of the bidding each player simultaneously proposes bid and ask prices for one share with fixed non-zero spread. The uninformed player uses history of insider's moves to update his beliefs. For the unlimited duration bidding we construct upper and lower bounds of the guaranteed insider's gain and the strategies of both players insuring these bounds. We also calculate insider's losses in the case of disclosure of his private information.

Keywords: multistage bidding, bid-ask spread, insider, repeated games with incomplete information, the simple random walk.

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии В. В. Мазоловым*

Поступила в редакцию 16.03.2014.

Опубликована 31.05.2014.

УДК 519
ББК 32.817

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
СПРОСА НА МЕДИЦИНСКИЕ УСЛУГИ
В ТЕРРИТОРИАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ
ЗДРАВООХРАНЕНИЯ
(НА ПРИМЕРЕ СТОМАТОЛОГИЧЕСКИХ УСЛУГ)**

Гаценко С. М.¹, Мирзоян Г. Л.²
(ФГБУН Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)
Новочадов В. В.³

(Волгоградский государственный университет, Волгоград)

Шемонаев В. И.⁴, Шкарин В. В.⁵
(Волгоградский государственный медицинский
университет, Волгоград)

На примере собранных и обработанных данных о рынке стоматологических услуг в крупном промышленном городе идентифицируются предложенные математические модели зависимости спроса на данные медицинские услуги от их цены и качества.

¹ Сергей Михайлович Гаценко, кандидат медицинских наук, главный врач стоматологической поликлиники №8 г. Волгограда (dantist8@mail.ru).

² Гагик Левонович Мирзоян, аспирант ИПУ РАН (mirzoyangl@yandex.ru).

³ Валерий Валерьевич Новочадов, доктор медицинских наук, проф., зав. кафедрой биоинженерии и биоинформатики Волгоградского государственного университета (novovv@rambler.ru).

⁴ Виктор Иванович Шемонаев, доктор медицинских наук, проф., зав. кафедрой ортопедической стоматологии Волгоградского государственного медицинского университета (shemonaevvi@yandex.ru).

⁵ Владимир Вячеславович Шкарин, кандидат медицинских наук, доцент кафедры ортопедической стоматологии Волгоградского государственного медицинского университета (oblzdrav@volganet.ru).

Ключевые слова: медицинские организации, стоматологическая поликлиника, спрос на медицинскую услугу, моделирование математическое, показатели функционирования медицинских организаций.

1. Введение

В литературе (как в отечественной, так и в зарубежной) существует ряд исследований, так или иначе использующих различные разделы прикладной математики для построения и изучения моделей систем здравоохранения.

За рубежом существуют такие развитые (десятки журналов – «Journal of Health Economics», «Health Economics» и др., конференций; десятки тысяч публикаций) разделы экономической теории, как *экономика здравоохранения* (Health Economics) [15, 20, 22] и *экономика здоровья* – см. классические работы К. Эрроу [12], Г. Беккера и М. Гроссмана (см. концепцию *человеческого капитала* и спроса на здоровье [13, 19], а также работы российских авторов [1, 3, 9]) и отличающиеся от российского аналога, в том числе активным использованием экономико-математических моделей и аппарата эконометрики [20, 21] (см., например, ниже обсуждение некоторых результатов моделирования конкуренции на рынке медицинских услуг).

В хрестоматийной работе [16] рассматриваются несколько моделей. В первой фирма (организация) выбирает цену на продукт (оказываемую услугу) и размер инвестиций в рекламу. Во второй модели фирма принимает решение, какую цену установить на продукт (оказываемую услугу), а также выбирает уровень качества. В третьей модели фирма (организация) выбирает цену на продукт (оказываемую услугу), размер инвестиций в рекламу, цену и качество. Также в указанной работе рассмотрены модели с фиксированной ценой: 1) фирма выбирает размер инвестиций в рекламу; 2) фирма выбирает качество продукта (оказываемой услуги).

В классической работе [18] спрос на медицинские услуги рассматривается как производный от спроса на здоровье. В рамках предложенной модели каждый индивид в каждый момент времени осуществляет рациональный выбор между набо-

ром медицинских услуг, которые воспроизводят запас его здоровья, и всеми остальными благами (возможно бюджетное ограничение). Также было предложено включать в общую стоимость лечения издержки, связанные с затратами времени на поддержание здоровья.

В работе [17] различают две ситуации: когда «рыночная» цена фиксирована (например, соответствующим государственным регулятором), а конкуренция идет только за счет различий в качестве услуг, и когда оба параметра (и цена, и качество услуг каждой медицинской организации (МО)) влияют, в том числе, на рыночный спрос на медицинские услуги.

Теоретические модели определения объемов (число коек) и цен услуг для трех видов больниц: некоммерческой, коммерческой в условиях монополистической конкуренции и коммерческой больницы монополиста, построены и исследованы, например, в [1].

Настоящая статья является попыткой построить «эмпирический мост» между теорией управления организационными системами [8] и экономикой здравоохранения в рамках программы исследований, намеченной в [7].

Стоит отметить, что в [5] уже строились и исследовались модели мотивационного управления для оптимизации процессов взаимодействия МО и работающего в ней персонала, а в [6] – для одной МО, функционирующей на территориальном рынке, строилась и исследовалась модель принятия им решений о цене и качестве предоставляемых медуслуг с учетом внутренних механизмов экономической мотивации его сотрудников. Кроме того, в [4] была проведена идентификация предложенных в [6] моделей конкуренции по цене и качеству услуг на примере вузов.

Структура изложения материала настоящей работы следующая. Сначала представлен анализ исходных данных о рынке стоматологических услуг в городе Волгограде, также приведена описательная статистика и выявлены некоторые зависимости между рассматриваемыми показателями функционирования МО. Далее приведены используемые модели зависимости показателей функционирования МО от цены и качества и, соответственно, представлены результаты моделирования.

2. Исходные данные

Для верификации математических моделей и анализа конкретной территориальной системы здравоохранения авторами была собрана и обработана информация о рынке стоматологических услуг в городе Волгограде. Выбор стоматологических услуг (в качестве примера) был обусловлен тем, что данный вид медицинских услуг – один из наиболее распространенных среди оказываемых бюджетными учреждениями платных услуг (т.е. стоматология – наиболее коммерциализованная и массовая отрасль в рамках типовых (неспециализированных) медуслуг).

МО, оказывающие стоматологические услуги, включают в себя:

- сеть из 10 государственных стоматологических поликлиник (СП), в которых осуществляется прием взрослого населения города (см. рис. 1, на котором указано их местоположение и номера), в том числе оказываются коммерческие услуги;

- сеть негосударственных стоматологических поликлиник и кабинетов, оказывающих, соответственно, только коммерческие услуги;

- несколько учреждений ведомственной принадлежности, объем стоматологических услуг которых не превышает 2% от общего объема в городе Волгограде.

С учетом оценочных данных о количестве стоматологических негосударственных учреждений в городе можно предположительно представить долю государственного и негосударственного сектора по районам следующим образом (таблица 1).

Ниже анализируется функционирование сети государственных СП, условно перенумерованных от 1 до 10 (используемая произвольная нумерация – СП₁, ..., СП₁₀ – в целях анонимизации не соответствует номерам реальных СП).

Исходные данные для каждой СП_{*i*}, *i* = 1, ..., 10, включали следующие первичные показатели:

- число посещений (в год, чел.), в том числе – коммерческие услуги (в год, чел.), в том числе – число повторных посещений (в год, чел.);

- объем оказанных услуг в условных единицах трудоемкости (УЕТ) в год, в том числе – коммерческие услуги;

- средний объем услуг, оказываемых одним врачом за рабочий день (УЕТ);
- площадь помещения поликлиники (м²);
- число врачей (чел.);
- доля врачей высшей категории;
- спрос «географический» (чел.) определялся исходя из территориального распределения населения г. Волгограда (таблица 2.) и местоположений поликлиник (рис. 1), при этом считалось, что житель обращается в ближайшую к его месту проживания⁶ поликлинику (таблица 3);
- спрос «административный» (чел.) определялся исходя из той же информации, но считалось, что житель обращается в поликлинику, находящуюся в административном районе его проживания;
- спрос «плановый» (чел.), определялся исходя из гипотезы, что плановая численность врачей в СП пропорциональна потенциальному спросу на стоматологические услуги (т.е. норматив на одного врача одинаков) и наоборот⁷; если эта гипотеза справедлива, то можно предположить, что неоднородность фактиче-

⁶ Так как город Волгоград существенно «вытянут» вдоль реки Волги, то в первом приближении предлагается считать, что население равномерно распределено на каждом отрезке кривой, соответствующей основной транспортной магистрали, идущей вдоль реки Волги. Конечно, учет второго измерения и неоднородности локальных плотностей проживания и мест работы населения, возможно, позволит строить более точные модели.

⁷ Можно также считать, что при однозначно одинаковой заболеваемости, нуждаемости и обращаемости в масштабах одного крупного промышленного города потенциальный спрос идентичен плановой размерности самой поликлиники (т.е. плановому числу посещений и УЕТ за смену), которые, в свою очередь, планируются числом ставок. Таким образом, потенциальный спрос может быть пропорционален числу врачей в СП. В рассматриваемых поликлиниках всего 438 врачей-стоматологов на потребности населения $\approx 993\,200$ человек, тогда на одного врача приходится $\approx 2\,268$ человек. Величина расчетного «планового» спроса для каждой СП также представлена в таблице 3.

ской нагрузки на врачей обусловлена зависимостью спроса от цен и качества медуслуг;

– спрос «расчетный» (чел.) определялся исходя из той же информации, что и «административный», но учитывает оценочные данные о доле государственных СП в г. Волгограде.

Таблица 1. Доля объема стоматологической помощи, оказываемой государственными и негосударственными стоматологическими поликлиниками в г. Волгограде

| Район | СП | Объем услуг, % | |
|-------------------|------|----------------------|------------------------|
| | | в государственных СП | в негосударственных СП |
| Тракторозаводский | 3, 4 | 75 | 25 |
| Краснооктябрьский | 6, 7 | 70 | 30 |
| Центральный | 1 | 65 | 35 |
| Дзержинский | 8 | 70 | 30 |
| Ворошиловский | 9 | 70 | 30 |
| Советский | 10 | 80 | 20 |
| Кировский | 11 | 85 | 15 |
| Красноармейский | 12 | 75 | 25 |

Оценка «цены» медуслуг формировалась следующим образом. Для каждой из СП использовалась информация о ценах на следующие достаточно распространенные стоматологические услуги:

- врачебный прием стоматологический первичный;
- избирательное шлифование одного зуба;
- проведение анестезии препаратом Ультракаин (одна инъекция);
- пластика уздечки;
- лечение пульпита ампутированным методом без наложения пломбы;
- распломбирование одного корневого канала (пломбированного резорцин-формалиновой пастой);
- удаление зуба простое.



Рис. 1. Расположение государственных стоматологических поликлиник (1, 3, 4, 6–12) в г. Волгограде. Жирной линией показаны основные транспортные магистрали. Серым фоном (вдоль реки) выделена зона жилой застройки; неосвоенные, малонаселенные территории и промышленные зоны заштрихованы

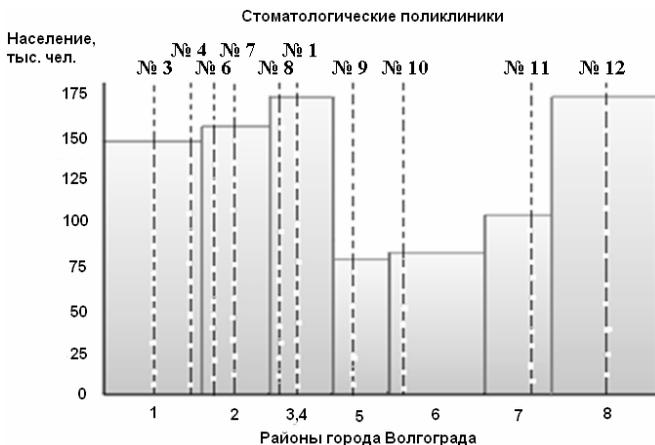


Рис. 2. «Географический» спрос на стоматологические услуги

Таблица 2. «Географический» спрос на стоматологические услуги по районам г. Волгограда

| № | Районы г. Волгограда | Население, тыс. чел. | Доля, % | Протяженность (условная) |
|-------|----------------------|----------------------|---------|--------------------------|
| 1 | Тракторозаводский | 145,6 | 14,66 | 20 |
| 2 | Краснооктябрьский | 154,3 | 15,54 | 13 |
| 3 | Дзержинский | 171,1 | 17,23 | 12 |
| 4 | Центральный | 88,8 | 8,94 | 8 |
| 5 | Ворошиловский | 77,6 | 7,81 | 11 |
| 6 | Советский | 81,3 | 8,19 | 19 |
| 7 | Кировский | 103,1 | 10,38 | 13 |
| 8 | Красноармейский | 171,4 | 17,26 | 21 |
| ИТОГО | | 993,2 | 100 | 117 |

Таблица 3. Спрос на стоматологические услуги г. Волгограда, рассчитанный различными способами

| СП _i | Потенциальный спрос, тыс. чел. | | | |
|-----------------|--------------------------------|----------|---------|-----------|
| | «географ.» | «админ.» | «план.» | «расчет.» |
| 1 | 155,94 | 88,8 | 106,6 | 57,72 |
| 2 | 101,92 | 72,8 | 77,1 | 54,6 |
| 3 | 43,68 | 72,8 | 72,5 | 54,6 |
| 4 | 30,86 | 77,15 | 68,0 | 54,01 |
| 5 | 77,15 | 77,15 | 111,1 | 54,01 |
| 6 | 98,27 | 171,1 | 124,7 | 119,77 |
| 7 | 114,06 | 77,6 | 127,0 | 54,32 |
| 8 | 80,56 | 81,3 | 115,6 | 65,04 |
| 9 | 145,07 | 103,1 | 54,4 | 87,64 |
| 10 | 145,69 | 171,4 | 136,0 | 128,55 |
| Итого | 993,2 | 993,2 | 993,2 | 730,2 |

Анализ этих данных методом главных компонент позволил сформировать для каждой СП скалярный показатель (являющийся линейной сверткой (с одинаковыми для всех СП коэффициентами) семи цен), отражающий более 90% вариации цен. Этот показатель в дальнейшем использовался как «цена» услуг.

Для оценки «качества»⁸ оказываемых стоматологических услуг был проведен опрос (см. анкету на рис. 3) среди 12 экспертов (преподавателей профильных кафедр в Волгоградском государственном медицинском университете, сотрудников областных органов управления здравоохранением) и 58 сотрудников анализируемых СП (не менее 5 врачей из каждой СП).

В качестве агрегированной оценки по каждому из трех показателей использовалась медиана Кемени (следует отметить, что последняя почти совпала со средними значениями) неполных векторов оценок респондентов.

Отметьте, пожалуйста, на шкале место, соответствующее Вашему удовлетворению от перечисленных ниже факторов, характеризующих условия труда в поликлинике:

1. Материально-техническая база (оборудование, инструменты, материалы)

полное 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 полное
неудовольствие удовлетворение

☹ ☺

2. Уровень заработка

полное 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 полное
неудовольствие удовлетворение

☹ ☺

3. Загруженность работой

полное 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 полное
неудовольствие удовлетворение

☹ ☺

Рис. 3. Анкета, использовавшаяся при проведении опроса

⁸ Ниже используются именно экспертные оценки «качества». Конечно, этот показатель не является непосредственной характеристикой собственно качества медуслуг, оцениваемого их потребителями. Тем не менее, предполагается, что в отсутствии результатов «прямых измерений» оценки экспертов косвенно отражают последнее.

Далее методом главных компонент для каждой СП был найден скалярный показатель (являющийся линейной сверткой (с одинаковыми для всех СП коэффициентами) оценок по трем критериям), отражающий более 90% вариации оценок респондентов. Этот показатель в дальнейшем использовался как «*качество*» услуг, причем отдельно были рассчитаны показатели качества по ответам экспертов и по оценкам сотрудников СП.

3. Описательная статистика и анализ зависимостей

Для анализа были выбраны следующие шесть показателей:

- число посещений (всего);
- число оказанных коммерческих услуг;
- объем оказанных услуг в условных единицах трудоемкости;
- объем оказанных коммерческих услуг в условных единицах трудоемкости;
- условные единицы трудоемкости в день на одного врача;
- доля повторных посещений».

Из рис. 4–10 видно, что рассматриваемые поликлиники достаточно сильно различаются по своим показателям.

Из таблицы 4 видно, что коэффициенты линейной корреляции между первичными показателями не очень высоки.

По шести выбранным для анализа показателям были найдены их средние значения и соответствующие средние относительные ошибки – d_{cp} (средние относительных отклонений фактических значений от среднего). Отметим, что среднее значение может использоваться в качестве нулевого приближения соответствующего изучаемого показателя, а соответствующую ему «ошибку» целесообразно сравнивать с ошибками, которые дает та или иная модель.

Среднее число посещений (всего) 51 592 дает среднюю относительную ошибку 27,05% аппроксимации этого показателя (см. рис. 4).

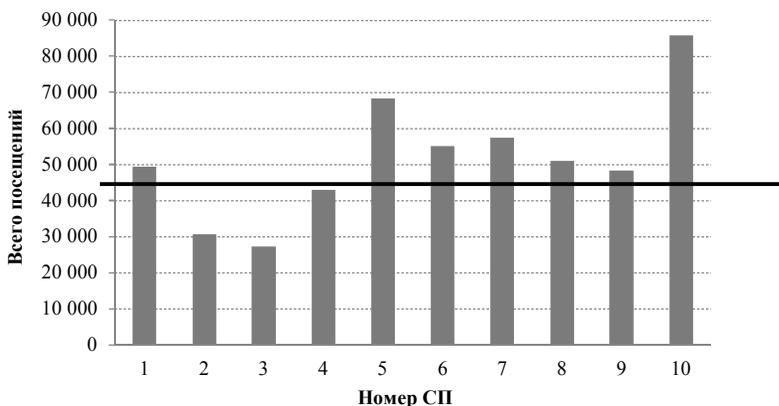


Рис. 4. Число посещений (всего)

Среднее число оказанных коммерческих услуг 1 334 дает среднюю относительную ошибку 113,55% аппроксимации этого показателя (см. рис. 5).

Среднее число оказанных услуг в условных единицах трудоемкости (УЕТ, всего) 201 733 дает среднюю относительную ошибку 25,35% аппроксимации этого показателя (см. рис. 6).

Среднее число оказанных коммерческих услуг в УЕТ 9 435 дает среднюю относительную ошибку 92,67% аппроксимации этого показателя (см. рис. 7).

Среднее число УЕТ на одного врача в день 32,3 дает среднюю относительную ошибку 7,82% аппроксимации этого показателя (см. рис. 8).

Средняя доля повторных посещений 0,625 дает среднюю относительную ошибку 7,68% аппроксимации этого показателя (см. рис. 9).

Величина «нагрузки» на одного врача (число посещений на одного врача) в рассматриваемых поликлиниках колеблется от 0,85 до 2,02 (более, чем в два раза) – см. таблицу 5 и рис. 10 (см. выше гипотезу о наличии «планового» спроса).

Таблица 4. Коэффициенты линейной корреляции между первичными показателями

| | Спрос «Расчет.» | Спрос "План." | Спрос "Географ." | Спрос "Админ." | Качество (эксперты) | Качество (сотрудники) | Цена | Число посещений (Всего) | Число повторных посещений | Число оказанных коммерческих услуг | Доля повторных посещений | УЕТ (всего) | Коммерческие УЕТ | УЕТ в день на одного врача | Площадь помещения (кв. м.) | Число врачей (всего) | Доля врачей высшей категории |
|------------------------------------|-----------------|---------------|------------------|----------------|---------------------|-----------------------|--------------|-------------------------|---------------------------|------------------------------------|--------------------------|-------------|------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------|------------------------------|
| Спрос «Расчет.» | 1,00 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Спрос "План." | 0,41 | 1,00 | | | | | | | | | | | | | | | |
| Спрос "Географ." | 0,44 | 0,31 | 1,00 | | | | | | | | | | | | | | |
| Спрос "Админ." | 0,98 | 0,50 | 0,42 | 1,00 | | | | | | | | | | | | | |
| Качество (эксперты) | 0,42 | 0,17 | -0,18 | 0,45 | 1,00 | | | | | | | | | | | | |
| Качество (сотрудники) | -0,44 | -0,11 | -0,24 | -0,53 | -0,24 | 1,00 | | | | | | | | | | | |
| ЦЕНА | -0,07 | -0,15 | 0,55 | -0,03 | -0,49 | -0,51 | 1,00 | | | | | | | | | | |
| Число посещений (Всего) | 0,59 | 0,73 | 0,45 | 0,61 | 0,17 | 0,13 | -0,13 | 1,00 | | | | | | | | | |
| Число повторных посещений | 0,69 | 0,70 | 0,60 | 0,70 | -0,28 | 0,00 | -0,01 | 0,96 | 1,00 | | | | | | | | |
| Число оказанных коммерческих услуг | 0,29 | 0,46 | 0,43 | 0,32 | -0,25 | -0,19 | 0,51 | 0,58 | 0,57 | 1,00 | | | | | | | |
| Доля повторных посещений | 0,30 | -0,14 | 0,50 | 0,29 | -0,28 | -0,40 | 0,43 | -0,13 | 0,15 | 0,07 | 1,00 | | | | | | |
| УЕТ (всего) | 0,56 | 0,83 | 0,42 | 0,58 | 0,17 | 0,16 | -0,28 | 0,94 | 0,93 | 0,42 | -0,05 | 1,00 | | | | | |
| Коммерческие УЕТ | -0,17 | 0,61 | 0,13 | -0,18 | -0,26 | 0,52 | -0,22 | 0,48 | 0,38 | 0,41 | -0,27 | 0,60 | 1,00 | | | | |
| УЕТ в день на одного врача | 0,09 | -0,32 | -0,40 | 0,02 | 0,58 | 0,24 | -0,70 | -0,27 | -0,27 | -0,58 | 0,03 | -0,16 | -0,19 | 1,00 | | | |
| Площадь помещения (кв. м.) | -0,01 | 0,61 | 0,63 | 0,06 | -0,44 | -0,17 | 0,57 | 0,38 | 0,41 | 0,57 | 0,05 | 0,39 | 0,48 | -0,83 | 1,00 | | |
| Число врачей (всего) | 0,41 | 1,00 | 0,31 | 0,50 | 0,17 | -0,11 | -0,15 | 0,73 | 0,70 | 0,46 | -0,14 | 0,83 | 0,61 | -0,32 | 0,61 | 1,00 | |
| Доля врачей высшей категории | -0,77 | 0,02 | -0,28 | -0,67 | -0,38 | 0,17 | 0,23 | -0,18 | -0,29 | 0,03 | -0,39 | -0,18 | 0,26 | -0,55 | 0,39 | 0,02 | 1,00 |

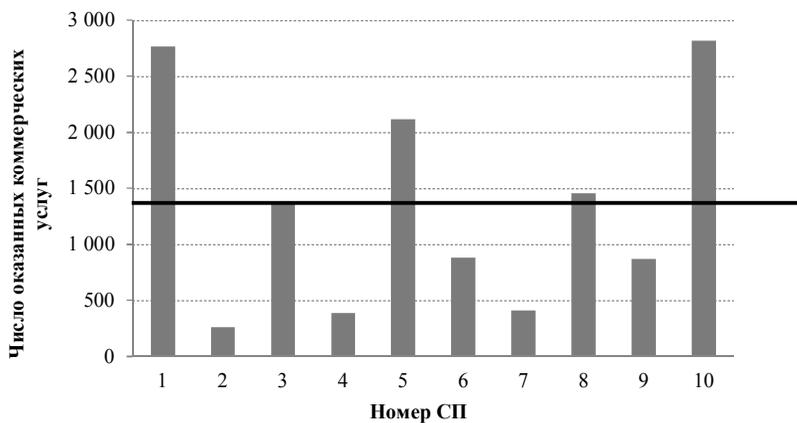


Рис. 5. Число оказанных коммерческих услуг населению

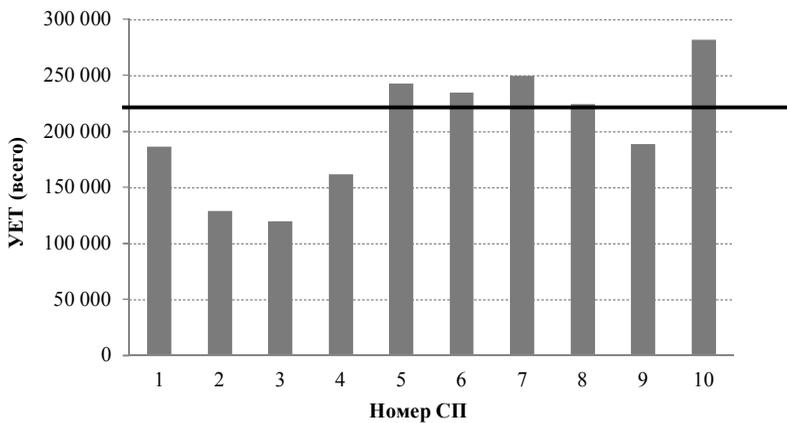


Рис. 6. Объем оказанных услуг в УЕТ (всего)

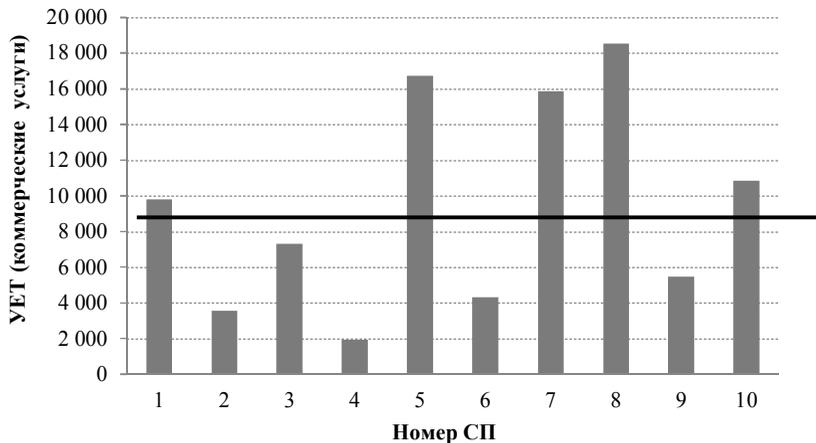


Рис. 7. Объем оказанных коммерческих услуг в УЕТ

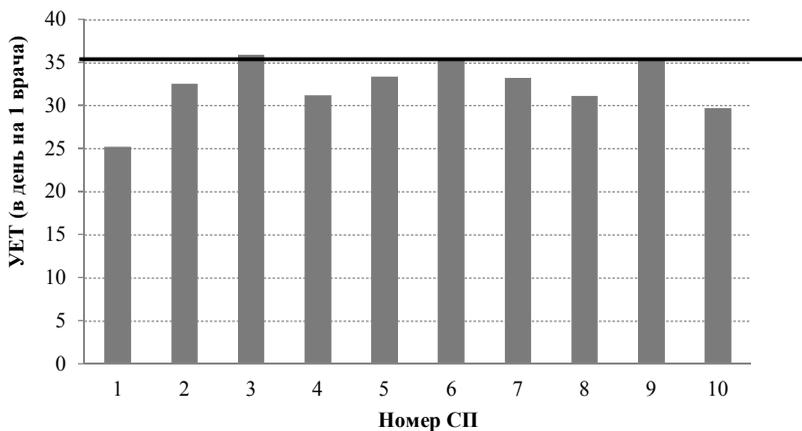


Рис. 8. УЕТ на одного врача в день

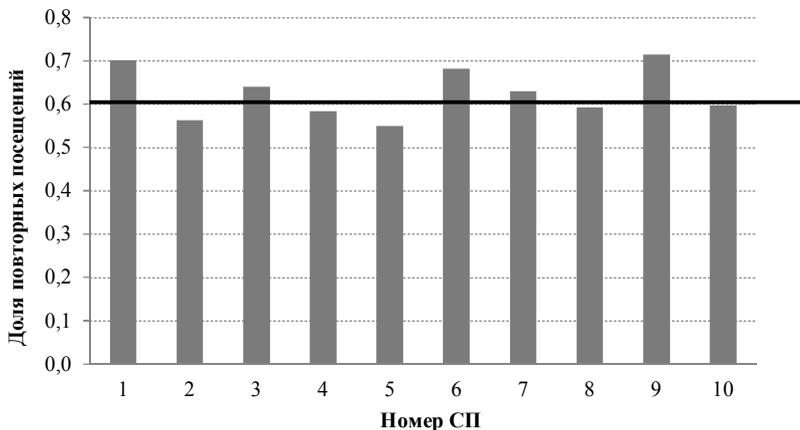


Рис. 9. Доля повторных посещений

Таблица 5. Число посещений на одного врача

| № | Число посещений (всего), тыс. чел. | Число врачей (всего) | На 1 врача приходится, тыс. чел. |
|----|------------------------------------|----------------------|----------------------------------|
| 1 | 49,35 | 47 | 1,05 |
| 2 | 30,69 | 34 | 0,90 |
| 3 | 27,20 | 32 | 0,85 |
| 4 | 43,01 | 30 | 1,43 |
| 5 | 68,18 | 49 | 1,39 |
| 6 | 55,02 | 55 | 1,00 |
| 7 | 57,37 | 56 | 1,02 |
| 8 | 51,03 | 51 | 1,00 |
| 9 | 48,36 | 24 | 2,02 |
| 10 | 85,71 | 60 | 1,43 |

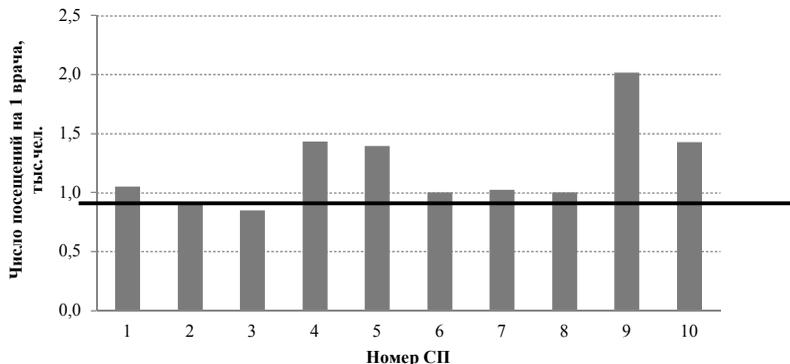


Рис. 10. Число посещений на одного врача

Интересно, что за редким исключением (одна СП, соответствующая ей точка обведена пунктирной линией) оценки качества, данные экспертами, и оценки сотрудников были «противоположными» (статистически значимая отрицательная линейная корреляция более 0,7), т.е. «взгляд со стороны» и «взгляд изнутри» на функционирование СП существенно различны (см. рис. 11).

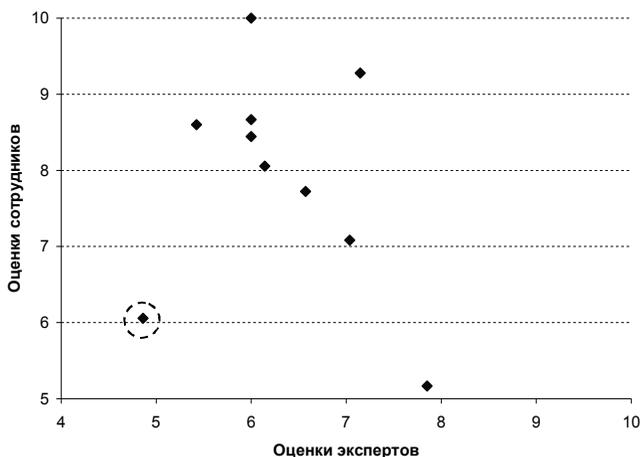


Рис. 11. Агрегированные оценки качества (мнение экспертов vs мнения сотрудников)

Рассмотрим соотношение цены и качества. На рис. 12 приведено соотношение между агрегированными оценками цены и качества, оцененного экспертами. Видно, что одна СП (причем та же, что и на рис. 11) является «выбросом».

Исследуем, являются ли «цена» и «качество» оказываемых стоматологических услуг существенными характеристиками, т.е. оказывающими значительное влияние на другие показатели функционирования стоматологических поликлиник. Можно ли на их основании прогнозировать значения последних, например, величины или доли спроса на коммерческие услуги и др.

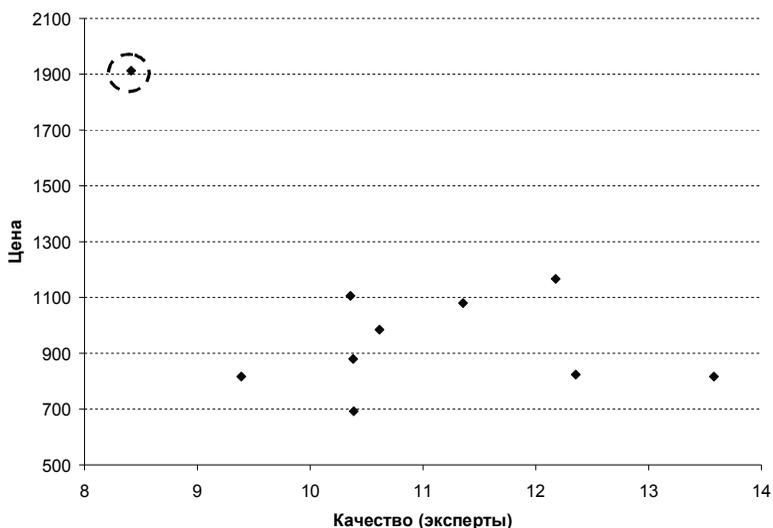


Рис. 12. Цена и качество (мнение экспертов)

4. Модели зависимости показателей функционирования МО от цены и качества

Для моделирования зависимости шести рассматриваемых показателей X от качества и цены (подбирались значения параметров a , ε , β и p , минимизирующие расхождение между реаль-

ными и прогнозными данными) рассматривались следующие модели (см. таблицы 6–8) [4]:

$$(1) \quad X_i = A_i \left(a + \varepsilon \frac{(Q_i)^\beta}{\sum_{j \in N} (Q_j)^\beta} + p \left(\frac{1}{n-1} \sum_{j \neq i} \lambda_j - \lambda_i \right) \right),$$

$$(2) \quad X_i = A_i \left(\varepsilon \frac{(Q_i)^\beta}{\sum_{j \in N} (Q_j)^\beta} + p \left(\frac{1}{n-1} \sum_{j \neq i} \lambda_j - \lambda_i \right) \right),$$

$$(3) \quad X_i = A_i (a + \varepsilon Q_i - p \lambda_i),$$

$$(4) \quad X_i = a + \varepsilon \frac{(Q_i)^\beta}{\sum_{j \in N} (Q_j)^\beta} + p \left(\frac{1}{n-1} \sum_{j \neq i} \lambda_j - \lambda_i \right),$$

$$(5) \quad X_i = a + \varepsilon \frac{(Q_i)^2}{\sum_{j \in N} (Q_j)^2} + p \left(\frac{1}{n-1} \sum_{j \neq i} \lambda_j - \lambda_i \right),$$

где

- A_i – территориальный («административный», «географический», «плановый» или «расчетный») спрос на стоматологические услуги в i -й СП;

- a – коэффициент (например, при оценке величины M_i условно отражающий «среднюю» долю рынка коммерческих стоматологических услуг, занимаемую государственными СП);

- Q_i – качество стоматологической услуги в i -й СП;

- ε – степень конкурентности по качеству;

- $\frac{(Q_i)^\beta}{\sum_{j \in N} (Q_j)^\beta}$ – функция, отражающая «нормированное» влияние качества;

ние качества;

- β – показатель степени, условно отражающий, насколько более существенно изменение качества медуслуг влияет на оцениваемый показатель по сравнению с их ценой;

- λ_i – цена стоматологической услуги в i -й СП;

- $(\frac{1}{n-1} \sum_{j \neq i} \lambda_j - \lambda_i)$ – доля спроса на стоматологическую услугу

(пропорционально цене);

- p – степень конкурентности по цене.

Модель (1), в которой подбираются значения параметров a , ε , β и p , учитывает численность населения рассматриваемого района г. Волгограда (параметр A_i), а также «среднюю» долю рынка коммерческих стоматологических услуг, занимаемую государственными СП (параметр a). При оценке числа посещений ($X_i = N_i$ или $X_i = M_i$), согласно модели (1), рост качества (Q_i) оказываемой в i -й МО стоматологической услуги ведет к увеличению «спроса». В данной модели также учитывается и то, какого качества стоматологическую услугу предоставляют в прочих государственных СП города (возможно, потенциальный пациент предпочтет потратить часть своего времени на то, чтобы добраться до другой СП с целью получения услуги более высокого качества). Уменьшение цены (λ_i) на рассматриваемую стоматологическую услугу, а также рост цен в прочих государственных СП г. Волгограда ($\sum_{j \neq i} \lambda_j$) также способствуют росту «спроса» на услуги данного.

Модель (2) является частным случаем модели (1) при $a = 0$ (подбираются значения параметров ε , β и p), т.е. условно можно считать, что в этой модели не учитываются функционирующие на рассматриваемой территории негосударственные СП (стоматологические кабинеты).

Модель (3) является «линеаризацией» функций, отражающих зависимость оцениваемых показателей от цены и качества (подбираются значения параметров a , ε и p). В данной модели учитываются цена и качество только i -й (рассматриваемой) СП.

Модель (4), в которой подбираются значения параметров a , ε и p , в отличие от модели (1) не учитывает в явном виде численность населения рассматриваемого района г. Волгограда (параметр A_i).

Модель (5) является частным случаем модели (4) при $\beta = 2$ (подбираются значения параметров a , ε и p). Модели (4) и (5) предназначены скорее для оценки относительных (например,

доля повторных посещений или удельная трудоемкость и т.п.), а не «абсолютных» (например, число посещений) показателей.

5. Результаты моделирования

При моделировании зависимости исследуемого показателя от качества медуслуг (оценке экспертов или сотрудников) и их цены для подбора значений a , ε , β и p , минимизирующих расхождение между реальными и прогнозными данными, использовались программы Microsoft Excel 2010 (без наложения ограничений на подбираемые параметры) и Wolfram Mathematica 8.0.1 (при следующем ограничении: $a, \varepsilon, p, \beta \geq 0$). Результаты моделирования всех рассматриваемых комбинаций «Спроса», «Качества», «Показателей» и «Моделей» представлены в таблицах 6–7.

В таблицах 6–7 жирным шрифтом отмечены «рекорды» – минимальные (из приведенных) для рассматриваемых показателей значения «ошибки» (отклонения прогнозных данных от реальных).

Для «рекордов» в таблице 9 представлены значения подбираемых с помощью программ Microsoft Excel 2010 (без наложения ограничений) и Wolfram Mathematica 8.0.1 (при следующем ограничении: $a, \varepsilon, p, \beta \geq 0$) параметров.

Таблица 6. Результаты моделирования

| Спрос | | Оценка качества | ПОКАЗАТЕЛЬ: | Функция спроса | | | | | | | |
|------------------------------------|------------|------------------------------------|--------------|----------------|-------|-------|-------|--------|--------|----------|-----|
| | | | | 1 | | 2 | | 3 | | d_{cp} | |
| | | | | d | WM | d | WM | d | WM | | d |
| «доминирующий» | эксперты | Число посещений (всего) | 22,91 | 14,13 | 38,47 | 15,76 | 23,23 | 14,81 | 27,05 | | |
| | | Число оказанных коммерческих услуг | 45,96 | 46,87 | 54,39 | 39,81 | 54,15 | 46,08 | 113,55 | | |
| | | УЕТ (всего) | 26,33 | 13,39 | 35,67 | 13,41 | 23,30 | 14,57 | 25,35 | | |
| | | УЕТ (коммерческий прием) | 60,44 | 39,69 | 62,90 | 39,67 | 57,02 | 39,71 | 92,67 | | |
| | | УЕТ (в день на 1 врача) | 27,13 | 22,69 | 31,08 | 23,73 | 38,80 | 22,58 | 7,82 | | |
| | | Доля повторных посещений | 38,22 | 20,40 | 44,15 | 20,74 | 99,50 | 20,60 | 7,68 | | |
| | сотрудники | Число посещений (всего) | 14,05 | 12,31 | 15,14 | 15,16 | 22,53 | 15,68 | 27,05 | | |
| Число оказанных коммерческих услуг | | 46,17 | 45,97 | 52,63 | 46,01 | 46,41 | 47,55 | 113,55 | | | |

| Спрос | Оценка качества | ПОКАЗАТЕЛЬ: | Функция спроса | | | | | | d_{cp} |
|------------------|-----------------|------------------------------------|----------------|--------------|----------|-------------|----------|-------------|----------|
| | | | 1 | | 2 | | 3 | | |
| | | | d_{WM} | d_{Excel} | d_{WM} | d_{Excel} | d_{WM} | d_{Excel} | |
| «Географический» | эксперты | УЕТ (всего) | 15,07 | 10,14 | 20,07 | 15,89 | 15,75 | 16,67 | 25,35 |
| | | УЕТ (коммерческий прием) | 49,76 | 29,00 | 51,11 | 39,50 | 50,71 | 43,31 | 92,67 |
| | | УЕТ (в день на 1 врача) | 23,81 | 19,63 | 26,39 | 22,25 | 19,91 | 19,17 | 7,82 |
| | | Доля повторных посещений | 24,12 | 19,58 | 34,69 | 42,43 | 99,29 | 17,85 | 7,68 |
| | | Число посещений (всего) | 27,06 | 20,83 | 36,29 | 26,65 | 26,58 | 26,73 | 27,05 |
| | сотрудники | Число оказанных коммерческих услуг | 66,25 | 62,05 | 66,27 | 61,55 | 62,97 | 64,07 | 113,55 |
| | | УЕТ (всего) | 29,13 | 18,15 | 34,01 | 23,24 | 26,73 | 24,48 | 25,35 |
| | | УЕТ (коммерческий прием) | 45,13 | 34,77 | 54,71 | 34,97 | 44,64 | 39,11 | 92,67 |
| | | УЕТ (в день на 1 врача) | 25,84 | 27,40 | 45,63 | 27,38 | 27,69 | 27,24 | 7,82 |
| | | Доля повторных посещений | 32,58 | 24,47 | 32,91 | 26,67 | 99,63 | 24,95 | 7,68 |
| | | Число посещений (всего) | 26,63 | 26,57 | 36,34 | 26,50 | 26,61 | 25,84 | 27,05 |
| | | Число оказанных коммерческих услуг | 62,70 | 61,99 | 67,19 | 62,54 | 63,33 | 62,19 | 113,55 |
| | | УЕТ (всего) | 30,97 | 23,57 | 33,33 | 23,47 | 24,66 | 23,46 | 25,35 |
| «Расчетный» | эксперты | УЕТ (коммерческий прием) | 42,53 | 36,35 | 46,71 | 42,05 | 42,73 | 42,08 | 92,67 |
| | | УЕТ (в день на 1 врача) | 31,57 | 26,09 | 37,57 | 32,27 | 28,21 | 26,38 | 7,82 |
| | | Доля повторных посещений | 24,09 | 22,67 | 42,96 | 35,93 | 99,43 | 23,02 | 7,68 |

Таблица 7. Результаты моделирования (продолжение)

| Спрос | Оценка качества | ПОКАЗАТЕЛЬ: | Функция спроса | | | | | | d_{cp} |
|---|-----------------|------------------------------------|----------------|-------------------------|----------|-------------|----------|-------------|----------|
| | | | 1 | | 2 | | 3 | | |
| | | | d_{WM} | d_{Excel} | d_{WM} | d_{Excel} | d_{WM} | d_{Excel} | |
| «Плановый» | эксперты | Число посещений (всего) | 17,36 | 16,97 | 17,36 | 17,09 | 17,36 | 17,05 | 27,05 |
| | | Число оказанных коммерческих услуг | 56,88 | 45,86 | 57,30 | 46,46 | 57,74 | 54,96 | 113,55 |
| | | УЕТ (всего) | 17,55 | 11,31 | 17,64 | 11,72 | 13,58 | 11,55 | 25,35 |
| | | УЕТ (коммерческий прием) | 50,05 | 39,91 | 53,52 | 41,05 | 50,95 | 39,00 | 92,67 |
| | | УЕТ (в день на 1 врача) | 24,80 | 21,84 | 25,19 | 23,91 | 25,43 | 21,80 | 7,82 |
| | | Доля повторных посещений | 26,09 | 21,67 | 29,53 | 21,79 | 99,48 | 21,94 | 7,68 |
| | сотрудники | Число посещений (всего) | 17,16 | 16,83 | 30,29 | 16,83 | 17,36 | 17,03 | 27,05 |
| | | Число оказанных коммерческих услуг | 56,15 | 52,51 | 58,01 | 53,93 | 60,93 | 55,72 | 113,55 |
| | | УЕТ (всего) | 11,21 | 11,13 | 11,27 | 11,13 | 12,75 | 11,13 | 25,35 |
| | | УЕТ (коммерческий прием) | 41,11 | 38,61 | 41,98 | 38,61 | 50,13 | 39,14 | 92,67 |
| | | УЕТ (в день на 1 врача) | 33,63 | 22,82 | 34,76 | 24,87 | 29,05 | 23,05 | 7,82 |
| | | Доля повторных посещений | 22,59 | 21,73 | 40,46 | 21,89 | 22,59 | 21,62 | 7,68 |
| | | «Расчетный» | эксперты | Число посещений (всего) | 24,74 | 17,52 | 24,76 | 19,55 | 24,70 |
| Число оказанных коммерческих услуг | 44,96 | | | 33,48 | 44,97 | 39,24 | 45,01 | 44,96 | 113,55 |
| УЕТ (всего) | 21,96 | | | 15,31 | 21,96 | 15,89 | 24,21 | 18,23 | 25,35 |
| УЕТ (коммерческий прием) | 53,21 | | | 37,80 | 64,73 | 39,03 | 54,75 | 40,41 | 92,67 |
| УЕТ (в день на 1 врача) | 29,21 | | | 25,38 | 29,31 | 25,41 | 30,09 | 24,29 | 7,82 |
| Доля повторных посещений | 27,55 | | | 23,24 | 28,33 | 23,28 | 99,87 | 34,28 | 7,68 |

| Спрос | Оценка качества | ПОКАЗАТЕЛЬ: | Функция спроса | | | | | | $d_{ср}$ |
|------------|-----------------|------------------------------------|----------------|-------------|----------|-------------|----------|-------------|----------|
| | | | 1 | 2 | | 3 | | | |
| | | | d_{WM} | d_{Excel} | d_{WM} | d_{Excel} | d_{WM} | d_{Excel} | |
| сотрудники | | Число посещений (всего) | 19,42 | 15,29 | 19,65 | 18,65 | 18,78 | 19,00 | 27,05 |
| | | Число оказанных коммерческих услуг | 44,97 | 44,93 | 45,05 | 45,03 | 49,40 | 48,22 | 113,55 |
| | | УЕТ (всего) | 14,91 | 12,73 | 20,91 | 19,98 | 19,55 | 20,46 | 25,35 |
| | | УЕТ (коммерческий прием) | 40,16 | 30,94 | 49,12 | 38,36 | 53,15 | 39,89 | 92,67 |
| | | УЕТ (в день на 1 врача) | 29,10 | 21,91 | 40,18 | 23,79 | 34,05 | 22,88 | 7,82 |
| | | Доля повторных посещений | 29,66 | 21,52 | 32,39 | 21,52 | 99,38 | 29,95 | 7,68 |

Таблица 8. Результаты моделирования (продолжение)

| Оценка качества | ПОКАЗАТЕЛЬ: | Функция спроса | | | | $d_{ср}$ |
|-----------------|------------------------------------|----------------|-------------|----------|-------------|----------|
| | | 4 | | 5 | | |
| | | d_{WM} | d_{Excel} | d_{WM} | d_{Excel} | |
| эксперты | Число посещений (всего) | 25,55 | 24,27 | 25,55 | 25,55 | 27,05 |
| | Число оказанных коммерческих услуг | 55,20 | 42,20 | 55,20 | 55,20 | 113,55 |
| | УЕТ (всего) | 23,58 | 16,20 | 23,63 | 23,47 | 25,35 |
| | УЕТ (коммерческий прием) | 54,82 | 48,37 | 54,82 | 49,22 | 92,67 |
| | УЕТ (в день на 1 врача) | 4,46 | 3,89 | 5,52 | 3,95 | 7,82 |
| | Доля повторных посещений | 7,39 | 5,96 | 7,39 | 6,00 | 7,68 |
| сотрудники | Число посещений (всего) | 25,49 | 23,10 | 25,54 | 25,59 | 27,05 |
| | Число оказанных коммерческих услуг | 55,22 | 51,55 | 55,25 | 55,75 | 113,55 |
| | УЕТ (всего) | 23,07 | 21,45 | 23,46 | 23,45 | 25,35 |
| | УЕТ (коммерческий прием) | 54,95 | 41,09 | 55,41 | 50,33 | 92,67 |
| | УЕТ (в день на 1 врача) | 5,52 | 5,07 | 5,52 | 5,13 | 7,82 |
| | Доля повторных посещений | 7,39 | 5,76 | 7,39 | 6,37 | 7,68 |

Таблица 9. Значения параметров

| Показатель | Спрос | Оценка качества | Функция спроса | Используемая программа | Параметры | | | | $d, \%$ | $d_{ср}, \%$ |
|------------------------------------|------------|-----------------|----------------|------------------------|-----------|-------|---------|----------|--------------|--------------|
| | | | | | a | e | b | p | | |
| Число посещений (всего) | «Ад-мин.» | сотр. | 1 | Excel | 0,340 | 1,949 | 4,612 | -0,00017 | 12,31 | 27,05 |
| | | | | WM | 0,256 | 2,536 | 3,027 | 0,00001 | 14,05 | |
| Число оказанных коммерческих услуг | «Рас-чет.» | эксп. | 1 | Excel | 0,006 | 0,061 | -16,775 | 0,00001 | 33,48 | 113,55 |
| | | | 1 | WM | 0,006 | 0,005 | 0,000 | 0,00000 | 44,96 | |

| Показатель | Спрос | Оценка качества | Функция спроса | Используемая программа | Параметры | | | | $d, \%$ | $d_{ср}, \%$ |
|--------------------------|-----------|-----------------|----------------|------------------------|-----------|--------|--------|----------|--------------|--------------|
| | | | | | a | e | b | p | | |
| Ует (всего) | «Админ.» | сотр. | 1 | Excel | 1,500 | 5,119 | 8,607 | -0,00058 | 10,14 | 25,35 |
| | «План.» | | | WM | 0,963 | 9,302 | 0,099 | 0,00013 | 11,21 | |
| УЕТ (коммерческий прием) | «Админ.» | сотр. | 1 | Excel | 0,042 | 0,231 | 25,021 | -0,00007 | 29,00 | 92,67 |
| | «Расчет.» | | | WM | 0,013 | 0,430 | 0,047 | 0,00008 | 40,16 | |
| УЕТ (в день на 1 врача) | – | сотр. | 4 | Excel | 32,508 | -4,455 | 11,057 | 0,00743 | 5,07 | 7,82 |
| | | | | WM | 31,779 | 0,005 | 2,000 | 0,00669 | 5,52 | |
| Доля повторных посещений | – | сотр. | 4 | Excel | 1,355 | -7,361 | 0,249 | -0,00004 | 5,76 | 7,68 |
| | | | | WM | 0,600 | 0,000 | 2,001 | 0,00000 | 7,39 | |

6. Анализ результатов моделирования

Остановимся на каждом из моделируемых показателей более подробно.

При моделировании показателя «Число посещений (всего)» на основе оценок качества сотрудниками и «административного» спроса в рамках модели (1) получаем «ошибку» $d = 12,31\%$ при использовании Excel (здесь и далее для Excel – без ограничений на значения подбираемых параметров) и ошибку $d = 14,05\%$ при использовании программы Mathematica (см. рис. 13). В целом, в рамках данной модели удастся снизить значение средней относительной ошибки $27,05\%$ аппроксимации этого показателя примерно в 2 раза.

При моделировании показателя «Число оказанных коммерческих услуг» на основе оценок качества экспертами и «расчетного» спроса, в рамках модели (1) получаем «ошибку» $d = 33,48\%$ при использовании Excel и ошибку $d = 44,96\%$ при использовании программы Mathematica (см. рис. 14). В целом в рамках моделей удастся снизить значение средней относитель-

ной ошибки аппроксимации этого показателя примерно в 2,5 раза.

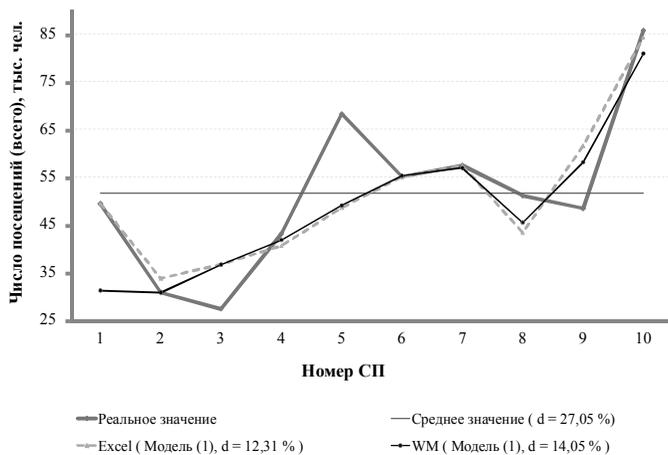


Рис. 13. Число посещений (всего)

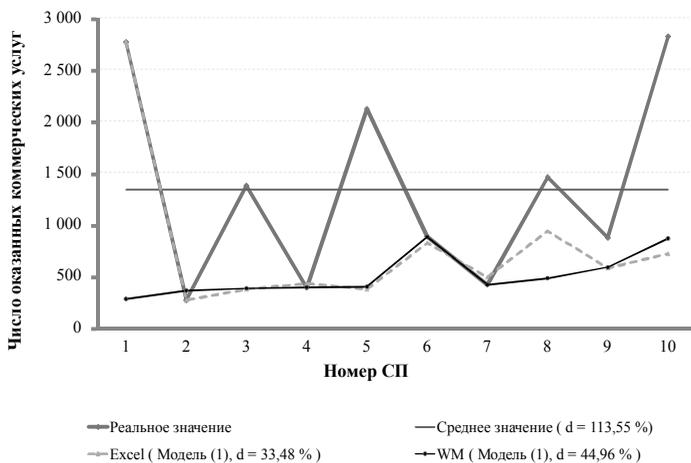


Рис. 14. Число оказанных коммерческих услуг

При моделировании показателя «УЕТ (всего)» на основе оценок качества сотрудниками в рамках модели (1) получаем «ошибку» $d = 10,14\%$ («административный» спрос) при использовании Excel и ошибку $d = 11,21\%$ («плановый» спрос) при использовании программы Mathematica 8.0.1 (см. рис. 15). В целом в рамках данной модели удастся снизить значение средней относительной ошибки аппроксимации этого показателя примерно в два раза.

При моделировании показателя «УЕТ (коммерческий прием)» на основе оценок качества сотрудниками получаем «ошибку» $d = 29\%$ («административный» спрос, модель (1)) при использовании Excel, и в рамках этой же модели на основе «расчетного» спроса получаем ошибку $d = 40,16\%$ при использовании программы Mathematica (см. рис. 16). В целом в рамках данной модели удастся снизить значение средней относительной ошибки аппроксимации этого показателя более чем в 2 раза.

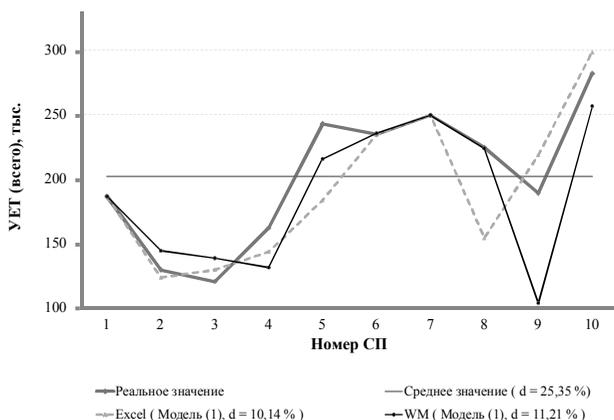


Рис. 15. УЕТ (всего)

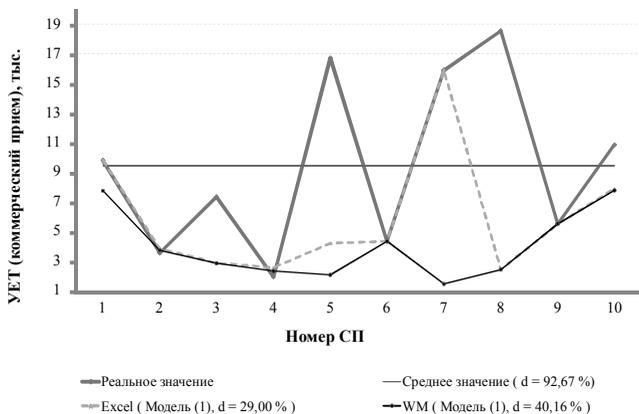


Рис. 16. УЕТ (коммерческий прием)

При моделировании показателя «УЕТ (в день на 1 врача)» на основе оценок качества сотрудниками в рамках модели (4) получаем «ошибку» $d = 5,07\%$ при использовании Excel и ошибку $d = 5,52\%$ при использовании Mathematica (см. рис. 17). В целом в рамках данной модели удастся снизить значение средней относительной ошибки аппроксимации этого показателя примерно в 1,5 раза.

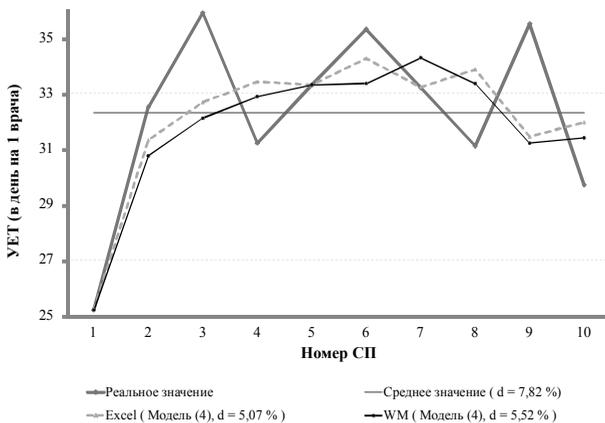


Рис. 17. УЕТ (в день на 1 врача)

При моделировании показателя «Доля повторных посещений» на основе оценок качества сотрудниками в рамках модели (4) получаем «ошибку» $d = 5,76\%$ при использовании Excel и ошибку $d = 7,39\%$ при использовании программы Mathematica (см. рис. 18). В целом в рамках данной модели удастся несколько снизить значение средней относительной ошибки аппроксимации этого показателя.

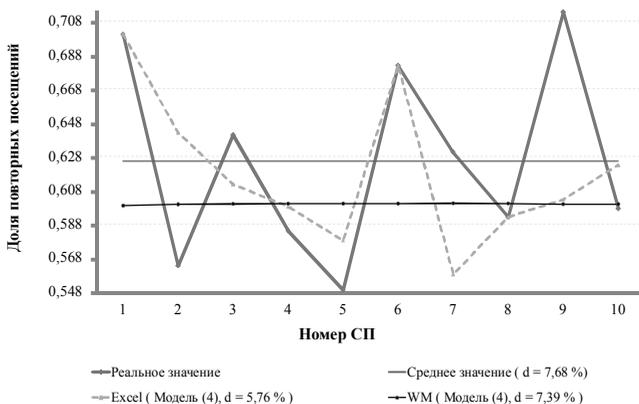


Рис. 18. Доля повторных посещений

Проведем сравнение моделей (1)–(3) на примере показателя «Число посещений (всего)» (см. рис. 19). При моделировании рассматриваемого показателя на основе оценок качества сотрудниками, «административного» спроса и цен при использовании программы Mathematica 8.0.1 на основе модели (1) получаем «ошибку» $d = 14,05\%$, на модели (2) – ошибку $d = 15,14\%$, на основе модели (3) – ошибку $d = 22,53\%$, что наглядно иллюстрирует размер «погрешности», вызванной «линеаризацией».

До сих пор при анализе моделей (1)–(5), в которых фигурировали три или четыре параметра (a , ε , β и p), считалось, что эти параметры одинаковы для всех МО, и искались значения этих параметров, минимизирующих отклонение прогнозных от фактических значений в десяти точках (поскольку в модели взято 10 МО). Рассмотрим теперь две модели, в которых фигурирует

всего один параметр, но значения этого параметра «индивидуальны» для каждой МО. «Ошибка» при этом будет, естественно, близка к нулю, так как десять параметров оцениваются по десяти точкам.

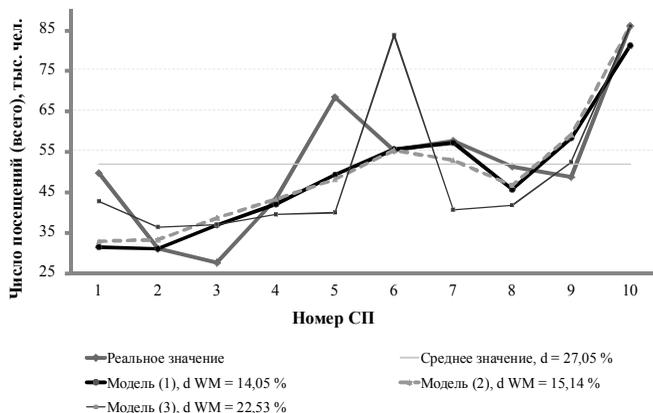


Рис. 19. Число посещений (всего)

При моделировании показателя «Число оказанных коммерческих услуг», используя следующую модель спроса:

$$(6) \quad X_i = A_i(Q_i - p_i \lambda_i),$$

т.е. подбирая индивидуальные для каждой МО значения параметра p_i (на основе оценок качества сотрудниками, «административного» спроса и цен), получаем значения параметров $\{p_i\}$, представленные в таблице 10. Отметим, что в модели (6) считается, что спрос на услуги некоторой МО зависит только от цены и качества его услуг и не зависит от соответствующих характеристик других МО.

Таблица 10. Значения параметров $\{p_i\}$ в модели (6)

| СП _i | p_i |
|-----------------|--------|
| 1 | 0,0054 |
| 2 | 0,0105 |
| 3 | 0,0141 |

| СП _i | p_i |
|-----------------|--------|
| 4 | 0,0166 |
| 5 | 0,0195 |
| 6 | 0,0109 |
| 7 | 0,0251 |
| 8 | 0,0182 |
| 9 | 0,0136 |
| 10 | 0,0124 |

Отметим, что все найденные значения положительны, т.е. для каждой СП в рамках модели (6) рост цены приводит к снижению спроса на коммерческие стоматологические услуги.

На рис. 20 представлено сопоставление полученных значений подбираемых параметров p (левая ось) и «цен» услуг СП (правая ось).

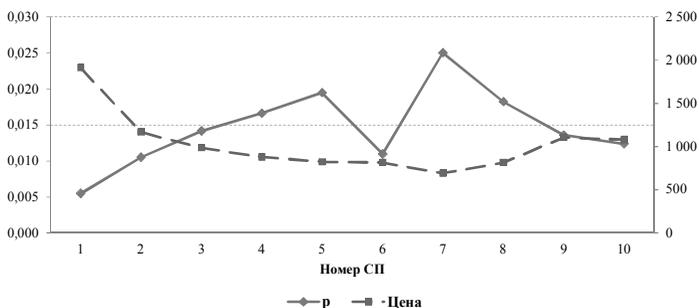


Рис. 20. Значение подбираемых параметров p и «цен» услуг СП в модели (6)

Рассмотрим несколько более сложную модель, в которой спрос на услуги некоторой СП зависит от цен и качества услуг всех СП. Используя следующую модель спроса при моделировании показателя «Число оказанных коммерческих услуг»:

$$(7) \quad X_i = A_i \left(\frac{(Q_i)^2}{\sum_{j \in N} (Q_j)^2} + p_i \left(\frac{1}{n-1} \sum_{j \neq i} \lambda_j - \lambda_i \right) \right),$$

т.е. подбирая индивидуальные для каждой СП значения параметра p_i (на основе оценок качества сотрудниками, «административного» спроса и цен), получаем значения параметров $\{p_i\}$, представленные в таблице 11. В этой таблице также представлены значения «относительных цен» услуг СП ($\lambda_{i, \text{cp}} = \bar{\lambda}_i - \lambda_i$, где

$$\bar{\lambda}_i = \frac{1}{n-1} \sum_{j \neq i} \lambda_j).$$

На рис. 21 представлено сопоставление полученных значений подбираемых параметров $\{p_i\}$ (левая ось) и «относительных цен» услуг СП (λ_{cp}) (правая ось).

Таблица 11. Значения параметров $\{p_i\}$ и «относительных» цен в модели $\{7\}$

| СП _i | p_i | $\lambda_{i, \text{cp}}$ |
|-----------------|----------|--------------------------|
| 1 | 0,00003 | -983 |
| 2 | 0,00048 | -155 |
| 3 | -0,00171 | 48 |
| 4 | -0,00064 | 164 |
| 5 | -0,00047 | 227 |
| 6 | -0,00015 | 235 |
| 7 | -0,00040 | 373 |
| 8 | -0,00041 | 235 |
| 9 | 0,00125 | -87 |
| 10 | 0,00132 | -58 |

Следует отметить, что:

- если $\lambda_i \geq \bar{\lambda}_i$, то $p_i \geq 0$, и $p_i(\bar{\lambda}_i - \lambda_i) \leq 0$,
- если $\lambda_i \leq \bar{\lambda}_i$, то $p_i \leq 0$, и $p_i(\bar{\lambda}_i - \lambda_i) \leq 0$.

Видно, что в обоих рассмотренных случаях с ростом цены услуги i -й СП (λ_i) «спрос» на эти услуги (X_i) уменьшается.

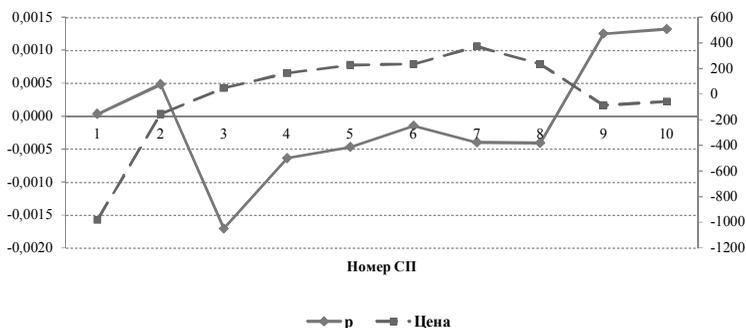


Рис. 21. Значение подбираемых параметров $\{p_i\}$ и «средних цен» услуг СП в модели (7)

7. Заключение

Рассмотренные в настоящей работе модели зависимости показателей функционирования МО от цены и качества оказываемых ими медицинских услуг позволяют с удовлетворительными (по сравнению с «усредненным» описанием) погрешностями, во-первых, анализировать влияние цены и качества на рассматриваемые параметры, в том числе отчасти объяснять географическую дифференциацию спроса и предложения медуслуг. Во-вторых – прогнозировать возможную реакцию территориального рынка медуслуг на изменения цен и качества в тех или иных МО. В-третьих, ставить и решать на их основе задачи «управления», находящиеся в ведении различных субъектов, в том числе:

- планирования развития сети стоматологических учреждений города в условиях частно-государственного партнерства на ближайшую перспективу в связи с фактическими и планируемыми объемами массового строительства;

- формировании ценовой политики и политики в отношении качества оказываемой медуслуги;
- выработки и совершенствовании стратегии взаимодействия государственных и негосударственных МО (например в рамках отделений ассоциации стоматологов России);
- выработки предложений бизнес-сообществу программ оптимизации медуслуг в регионе (например, при развитии территорий, строительстве крупных офисных и торгово-развлекательных центров).

Литература

1. ДАРГАУ Л.А. *Теоретические аспекты управления здоровьем и возможности его реализации в условиях Российской Федерации* // Проблемы управления. – 2003. – №2. – С. 43–52.
2. КОЛОСНИЦЫНА М.Г., ШЕЙМАН И.М., ШИШКИН С.В. *Экономика здравоохранения*. – М.: Издательский дом ГУ-ВШЭ, 2009. – 479 с.
3. КОРГИН Н.А., НОВОЖЕНИНА Н.А., СУДАКОВ Ю.Н. *Моделирование здоровья человека как параметра субъекта организационной системы* // Труды V Всероссийской школы-семинара молодых ученых «Управление большими системами». – Липецк: ЛГТУ, 2008. – С. 202–207.
4. МИРЗОЯН Г.Л. *Идентификация модели конкуренции в сфере услуг на примере ВУЗов* // Труды 56-й научной конференции МФТИ. – М.: МФТИ, 2013. – С. 106–107.
5. МИРЗОЯН Г.Л. *Модели мотивационного управления в лечебно-профилактическом учреждении* // Системы управления и информационные технологии. – 2013. – №1.1(51). – С. 207–210.
6. МИРЗОЯН Г.Л. *Модель поведения лечебно-профилактического учреждения на территориальном рынке медицинских услуг* // Управление большими системами. – 2013. – №45. – С. 330–343.
7. МИРЗОЯН Г.Л. *Модель территориальной системы здравоохранения и классификация задач управления* // Труды меж-

- дународной конференции по проблемам управления. – С.–Пб.: ЦНИИ «Электроприбор», 2012. – С. 172–174.
8. НОВИКОВ Д.А. *Теория управления организационными системами*. – 3-е изд. испр. и дополн. – М.: Издательство физико-математической литературы, 2012. – 604 с.
 9. СЕМКИН Г.И., ДАРТАУ Л.А., СТЕФАНЮК Е.А. *Здоровье и образ жизни человека: возможности управления*. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. – 64 с.
 10. ШИШКИН С.В., БОНДАРЕНКО Н.В., КЕЛЬМАНЗОН К.М. *Российское здравоохранение: мотивация врачей и общественная доступность*. – М.: Независимый институт социальной политики, 2008. – 288 с.
 11. ЩЕПИН О.П., МЕДИК В.А. *Общественное здоровье и здравоохранение: учебник*. – М.: ГЭОТАР-Медиа, 2011. – 592 с.
 12. ARROW K. *Uncertainty and the Welfare Economics of Medical Care* // *American Economic Review*. – 1963. – Vol. 53, №5. – P. 941–973.
 13. BECKER G. *A Theory of the Allocation Time* // *The Economic Journal*. – 1965. – Vol. 75, №299. – P. 493 – 517.
 14. BREKKE K., SICILIANI L., STRAUME O. *Hospital Competition and Quality with Regulated Prices*. *Cesifo Working Paper Series 2635*. – Munich: cesifo Group, 2009. – 19 p.
 15. CULYER A., NEWHOUSE J. *The State and Scope of Health Economic*. *Handbook of Health Economics*. –Vol. 1. Part A. – Amsterdam: Elsevier, 2000. – P. 1–8.
 16. DORFMAN R., STEINER P. *Optimal Advertising and Optimal Quality* // *American Economic Review*. – 1954. – Vol. 44, №5. – P. 826–836.
 17. GAYNOR M., TOWN R. *Competition in Health Care Markets*. *Working Paper № 12/282*. – Bristol: University of Bristol, 2012. – 153 p.
 18. GROSSMAN M. *The Demand for Health: the Theoretical and Empirical Investigation* // *National Bureau of Economic Research*. N.Y., 1972. – 115 p.
 19. GROSSMAN M. *The Human Capital Model of the Demand for Health*. – NBER Working Paper № 7078, 1999. – 102 p.

20. *Handbook of Health Economics*. Vol. 2. – Amsterdam: Elsevier, 2012. – 1126 p.
21. JONES A. *Health Econometrics*. – NY.: University of New York, 1998. – 81 p.
22. WAGSTAFF A., CULYER A. *Four Decades of Health Economics through a Bibliometric Lens* // Policy Research Working Paper 5829. – Washington DC: The World Bank. 2011 – 72 p.

MATHEMATICAL MODELS FOR HEALTHCARE DEMAND IN REGIONAL MARKETS (CASE OF DENTAL SERVICES)

Sergey Gatsenko, stomatological polyclinic #8, Volgograd, Cand. Sc. (medic.) (dantist8@mail.ru).

Gagik Mirzoyan, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, post-graduate student (mirzoyangl@yandex.ru).

Valeriy Novochadov, Volgograd State University, Volgograd, Dr. Sc. (medic.) (novovv@rambler.ru).

Viktor Shemonaev, Volgograd State Medical University, Volgograd, Dr. Sc. (medic.) (shemonaevvi@yandex.ru).

Vladimir Shkarin, Volgograd State Medical University, Volgograd, Cand. Sc. (medic.) (oblzdrav@volganet.ru).

Abstract: We suggest mathematical models of healthcare demand on a regional market under price and quality competition. The models are identified using the data on dental services market in an industrial megalopolis.

Keywords: medical institution, dental clinic, healthcare demand, mathematical model, medical institution performance indicators.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии Д.А. Новиковым

Поступила в редакцию 15.02.2014.

Опубликована 31.05.2014.

УДК 519.86

ББК 22.18

ЭФФЕКТИВНЫЕ АЛГОРИТМЫ ПЛАНИРОВАНИЯ ВЫЧИСЛЕНИЙ В МНОГОПРОЦЕССОРНЫХ СИСТЕМАХ РЕАЛЬНОГО ВРЕМЕНИ

Гончар Д. Р.¹, Фуругян М. Г.²
(ФГБУН Вычислительный центр
им.А.А. Дородницына РАН, Москва)

Исследуется задача составления многопроцессорного расписания в системах реального времени. Рассматриваются случаи, когда (а) работы допускают прерывания и переключения с одного процессора на другой; (б) прерывания и переключения не допускаются; (в) часть работ допускает прерывания и переключения, а часть не допускает. Разработан ряд приближенных алгоритмов. Приводятся результаты машинных экспериментов. Проведен сравнительный анализ разработанных алгоритмов.

Ключевые слова: многопроцессорная система, допустимое расписание, прерывание, директивные интервалы, задача на быстроедействие.

1. Введение

Одна из основных задач, возникающих при разработке программного обеспечения многопроцессорных вычислительных систем жесткого реального времени (МПВСРВ, систем, в которых заданиям сопоставляются директивные сроки, не подлежа-

¹ Дмитрий Русланович Гончар, кандидат технических наук (riscas@ya.ru).

² Меран Габибуллаевич Фуругян, кандидат физико-математических наук, доцент (Москва, ул. Вавилова, д. 40, тел. (499) 135-40-29).

щие нарушению), заключается, во-первых, в создании математической модели, адекватной реальной вычислительной системе, и, во-вторых, в расчете с помощью этой модели режима функционирования системы, в результате которого получается расписание, показывающее, когда и какой программе должны быть выделены те или иные ресурсы ЭВМ. Это необходимо для обеспечения работоспособности и надежности таких систем. В данной статье предлагаются эффективные алгоритмы составления расписаний для МПВСРВ.

Рассматриваемый класс задач имеет, помимо чисто научной, большую практическую важность. Потребность в быстрых алгоритмах, составляющих многопроцессорные расписания, часто возникает в задачах оперативного управления на основе обработки и анализа поступающих в реальном времени данных. В качестве примеров можно привести задачи управления работой ядерных реакторов, управления испытаниями летательных аппаратов, анализа текущей ситуации в космосе на предмет оповещения об атаке баллистическими ракетами и многие другие практические задачи управления, в которых для принятия адекватных решений нужно успевать обрабатывать данные в темпе поступления. Корректность систем реального времени зависит не только от правильности результатов ее вычислений, но и от времени, за которое эти результаты были получены. В секторе проектирования систем реального времени вычислительного центра им. А.А. Дородницына РАН разрабатывается инструментальная система автоматизации проектирования вычислительных систем реального времени. Составление расписаний реального времени – важная часть подобных систем, так как все задания должны быть выполнены в срок. В настоящей статье предложены некоторые алгоритмы, разработанные авторами для данной системы. В разделе 2 рассматривается задача составления многопроцессорных расписаний с прерываниями и переключениями с одного процессора на другой для случая, когда заданы директивные интервалы. В разделе 3 рассматривается задача составления оптимального по быстродействию расписания без прерываний и переключений. В разделе 4 рас-

сма­три­ва­ет­ся за­да­ча с ди­рек­тив­ны­ми ин­тер­ва­ла­ми для слу­чая, ко­гда часть ра­бот до­пус­ка­ет прерыва­ния и пере­клю­че­ния, а часть не до­пус­ка­ет.

2. Построение расписаний с прерываниями

В на­сто­я­щем раз­де­ле рас­сма­три­ва­ет­ся за­да­ча со­став­ле­ния до­пус­ти­мо­го рас­пи­са­ния с прерыва­ния­ми при за­дан­ных слож­но­стях (или объ­е­мах) ра­бот, ди­рек­тив­ных ин­тер­ва­лах и про­из­водитель­но­стях про­цес­со­ров. Раз­ра­бо­та­ны эври­сти­че­ские ал­го­рит­мы для слу­чая, ко­гда из­дер­жки на об­ра­бот­ку прерыва­ний и пере­клю­че­ний не учи­ты­ва­ют­ся [19]. Вы­чис­ли­тель­ная слож­ность пред­ло­жен­ных ал­го­рит­мов зна­чи­тель­но мень­ше слож­ности точ­но­го по­то­ко­во­го ал­го­рит­ма, что под­твер­жда­ет­ся так­же ма­шин­ны­ми экс­пе­ри­мен­та­ми (вы­иг­рыш во вре­мени со­став­ля­ет до не­сколь­ких ты­сяч раз). При этом про­цент не­кор­рек­тной ра­боты ал­го­рит­мов не­зна­чи­тель­ный (от 1 до 20% в за­ви­си­мо­сти от па­ра­мет­ров за­да­чи). Эври­сти­че­ский ал­го­рит­м ра­бо­та­ет не­кор­рек­тно, если он не на­хо­дит до­пус­ти­мо­го рас­пи­са­ния в том слу­чае, ко­гда оно на са­мом де­ле есть.

2.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рас­сма­три­ва­ет­ся вы­чис­ли­тель­ная си­сте­ма, со­сто­я­щая из m про­цес­со­ров. Ка­ждый про­цес­со­р $j, j = 1, \dots, m$, ха­рак­те­ри­зу­ет­ся про­из­водитель­но­стью s_j . Пред­по­ла­га­ет­ся, что про­цес­со­ры упо­ря­до­че­ны по не­воз­ра­ста­нию про­из­водитель­но­стей ($s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_m$). За­дан на­бор ра­бот $N = \{1, 2, \dots, n\}$, под­ле­жа­щих вы­пол­не­нию. Ка­ждая ра­бота i ха­рак­те­ри­зу­ет­ся сво­им ди­рек­тив­ным ин­тер­ва­лом $A_i = [b_i, f_i]$ (т.е. ра­бота i может быть на­ча­та не ра­нее мо­мен­та вре­мени b_i и долж­на быть вы­пол­не­на не позд­нее мо­мен­та вре­мени f_i), а так­же слож­но­стью (или объ­е­мом ра­боты про­цес­со­ров по ее вы­пол­не­нию) $Q_i, i = 1, \dots, n$. Ра­бота слож­ности Q_i может быть вы­пол­не­на на про­цес­со­ре j за вре­мя Q_i/s_j . В фик­си­ро­ван­ный мо­мен­т вре­мени ка­ждая ра­бота может вы­пол­нять­ся не более чем од­ним про­цес­со­ром и ка­ждый про­цес­со­р может вы­пол­нять не более од­ной ра­боты. При вы­пол­-

нении работ допускаются прерывания и переключения с одного процессора на другой. Предполагается, что прерывания и переключения не требуют временных затрат. Задача состоит в том, чтобы определить, существует ли допустимое расписание (т.е. расписание, позволяющее выполнить все работы в их директивные интервалы на имеющихся процессорах) и, если оно существует, указать такое расписание.

2.2. ТОЧНЫЙ АЛГОРИТМ

Алгоритм, находящий точное решение рассматриваемой в этом разделе задачи, был разработан и реализован как комбинация полиномиальных алгоритмов, предложенных в [23] и [25]. Будем предполагать, что имеется t типов процессоров, каждый из которых характеризуется скоростью s_j , $j = 1, \dots, t$, всего имеется m_j , $j = 1, \dots, t$, процессоров j -го типа, $m = \sum_{j=1}^t m_j$.

В [23] доказывается, что такая задача может быть сведена к задаче поиска максимального потока в сети, построенной специальным образом. Для поиска максимального потока в построенной сети применялся алгоритм «поднять-и-в-начало», описанный в [9]. Предложенный алгоритм находит точное решение задачи о многопроцессорном расписании за время $O(t^3 n^3)$, допуская при этом не более $2(n^2 + 2mn - 3n - m + 1)$ прерываний. Несмотря на то, что предложенный алгоритм является полиномиальным, время его работы в ряде случаев является слишком большим для практического применения в задачах достаточно большой размерности, имеющих практический смысл и возникающих при разработке МПВСПВ. Одним из решений возникшей проблемы может быть разработка существенно более быстрого эвристического алгоритма, который находил бы правильное решение задачи в достаточно широком спектре случаев.

Построим и проанализируем два эвристических алгоритма, эффективно решающих поставленную задачу. Оба эти алгоритма будут являться обобщениями однопроцессорного алгоритма Коффмана [15] на случай нескольких процессоров с различны-

ми производительностями. Назовем эти два алгоритма Эвристика 1 и Эвристика 2.

2.3. ЭВРИСТИЧЕСКИЕ АЛГОРИТМЫ

Пусть $\tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_k$, $k \leq 2n$, – все различные моменты времени, в каждый из которых либо завершается выполнение одной или нескольких работ, либо наступает готовность одной или нескольких работ, либо происходят оба эти события. Работа i завершается, когда суммарный объем работы процессоров по ее выполнению становится равным Q_i (если работа в течение интервала времени величиной Δ выполняется процессором j , то объем выполненной работы составляет $s_j \Delta$). В момент τ наступает готовность работы i , если $\tau = b_i$. Величины τ_l вычисляются в ходе работы алгоритма следующим образом. Пусть $a_1 < a_2 < \dots < a_p$ – все различные величины b_i , $i = 1, \dots, n$. Тогда полагаем $\tau_1 = a_1$. Пусть $\Delta_j = \bar{Q}_i / s_j$, если на процессоре j в момент τ_l выполняется работа i (\bar{Q}_i – невыполненный объем работы i к моменту τ_l), и $\Delta_j = 0$, если процессор j в момент τ_l простаивает. Пусть $\Delta = \min_{j=1, \dots, m} \{\Delta_j : \Delta_j > 0\}$. Далее, полагаем $\tau_{l+1} = \min\{\tau_l + \Delta, a_v\}$, если $\tau_l \in [a_{v-1}, a_v)$, $1 \leq v \leq p$, и $\tau_{l+1} = \tau_l + \Delta$, если $\tau_l \geq a_p$.

Для каждого момента τ_l , $l = 1, \dots, k$, определим два множества: C – множество работ, выполняемых в момент τ_l , и D – множество работ, готовых к выполнению в момент τ_l . Введем обозначения: если $C \neq \emptyset$, то i_1 – это работа из C с наибольшим директивным сроком, т.е. $d_{i_1} = \max_{i \in C} f_i$; если $D \neq \emptyset$, то i_2 – это работа из D с минимальным директивным сроком, т.е. $d_{i_2} = \min_{i \in D} f_i$. Алгоритм Эвристика 1 основан на следующих трех процедурах.

Процедура 1. Если в момент времени l наступает готовность работы i_0 , то i_0 включается в D . Если таких работ несколько, включение выполняется поочередно в произвольном порядке.

Процедура 2. Если в момент времени τ_l работа $i_0 \in C$, которая выполнялась на процессоре j_0 , завершается, то она исключается из C , а процессор j_0 освобождается. Если таких работ несколько, данная процедура выполняется для каждой из них в произвольном порядке.

Процедура 3. Если в момент времени τ_l не все процессоры заняты, то работа $i_2 \in D$ назначается на свободный процессор с минимальным номером, включается в C и исключается из D . Если свободных процессоров нет, $d_{i_1} > d_{i_2}$ и работа i_1 выполнялась на процессоре j_0 , то работа i_1 снимается с процессора j_0 , работа i_2 исключается из D , назначается на процессор j_0 и включается в C , а работа i_1 включается в D .

Величины f_i для работ $i \in C$ хранятся в виде кучи с максимальным элементом в вершине, а величины f_i для работ $i \in D$ хранятся в виде кучи с минимальным элементом в вершине. Таким образом, в вершине первой кучи хранится значение d_{i_1} , а в вершине второй кучи – значение d_{i_2} . Добавление элементов в множества C и D и исключение их предполагает такие преобразования этих множеств, при которых сохраняется основное свойство кучи [9].

Алгоритм Эвристика 1.

Для каждого $l = 1, 2, \dots, k$ выполнять шаги 1 – 3.

1) Вычислить τ_l .

2) Выполнить процедуру 1. (Пусть h – число работ, готовность которых наступила в момент τ_l).

3) Выполнить процедуру 2.

4) Выполнять процедуру 3 до тех пор, пока изменяется множество D (но не более h раз).

Вычислительная сложность шага 1 и процедур 1, 2 и 3 (для одной работы) составляет соответственно $O(m)$, $O(\log_2 n)$, $O(\log_2 n)$ и $O(m + \log_2 n)$, а алгоритма Эвристика 1 – $O(n(m + \log_2 n))$. Число прерываний в полученном расписании есть $O(n)$.

Алгоритм Эвристика 2 отличается от Эвристики 1 тем, что при назначении работы на процессор сначала она включается в множество C , после чего все работы из C переназначаются на процессоры так, что работа с меньшим директивным сроком назначается на процессор с меньшим номером (т.е. на процессор с большей производительностью). В этом случае сложность процедуры 3 (для одной работы) составляет $O(m \log_2 m + \log_2 n)$ (с учетом сортировки множества C), а сложность алгоритма Эвристика 2 составляет $O(n (m \log_2 m + \log_2 n))$. Число прерываний в полученном расписании есть $O(mn)$.

2.4. СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ТОЧНОГО И ЭВРИСТИЧЕСКИХ АЛГОРИТМОВ

Были проведены машинные эксперименты по сравнительному анализу точного и эвристических алгоритмов. Машинные программы были разработаны Д.С. Гузом, который также провел вычислительные эксперименты. В таблице 1 приводится среднее время (в условных единицах) работы алгоритмов при различных значениях параметров. Как видно из таблицы 1, алгоритм Эвристика 1 является более быстрым, чем Эвристика 2, а при больших размерностях задачи оба эти алгоритма в тысячи раз быстрее точного алгоритма.

Таблица 1. Среднее время работы точного и эвристических алгоритмов в зависимости от размерности задачи

| Размерность задачи | | Среднее время работы | | |
|--------------------|-------------|----------------------|-------------|-----------------|
| Число процессоров | Число работ | Эвристика 1 | Эвристика 2 | Точный алгоритм |
| 4 | 10 | 0,03 | 0,06 | 1,23 |
| 8 | 25 | 0,11 | 0,32 | 14,32 |
| 16 | 50 | 0,28 | 1,36 | 1090,87 |
| 16 | 100 | 1,23 | 4,86 | 6311,1 |
| 64 | 500 | 3,45 | 14,6 | 39600 |

Исследуем теперь вопрос о корректности обоих эвристических алгоритмов. Для этого были проведены серии численных экспериментов. Каждый эксперимент заключался в запуске при

одних и тех же условиях последовательно Эвристики 1, Эвристики 2 и алгоритма поиска точного решения. Было проведено около 25 000 серий численных экспериментов с рандомизированными и плавно варьируемыми переменными в условиях исходной задачи. В приведенной ниже таблице 2 показано, какой процент от общего числа испытаний составляют эксперименты, в которых эвристические алгоритмы Эвристика 1 и Эвристика 2 отработали некорректно. На основании этой таблицы можно сделать вывод, что Эвристика 2 работает некорректно существенно реже, чем Эвристика 1, и поэтому является более предпочтительным алгоритмом (несмотря на то, что Эвристика 2 требует несколько больше вычислительных ресурсов, чем Эвристика 1, а также генерирует расписание с большим, чем эвристика 1, числом прерываний).

Таблица 2. Процент некорректной работы эвристических алгоритмов в зависимости от размерности задачи

| Размерность задачи | | % некорректной работы | |
|--------------------|-------------|-----------------------|-------------|
| Число процессоров | Число работ | Эвристика 1 | Эвристика 2 |
| 4 | 10 | 18% | 2% |
| 8 | 25 | 19% | 3% |
| 16 | 50 | 22% | 2% |
| 16 | 100 | 19% | 1% |
| 64 | 500 | 17% | 2% |

Таким образом, можно эффективно находить допустимые расписания при помощи алгоритмов Эвристика 1 и 2, лишь иногда (когда оба эвристических алгоритма дали отрицательный ответ) прибегая к точному алгоритму.

3. Алгоритмы решения минимаксной задачи составления расписания без прерываний

Для задачи составления оптимального по быстродействию расписания без прерываний и переключений в многопроцессорной системе разработан ряд точных и приближенных алгорит-

мов [16, 20]. Определяется эффективность алгоритмов и проводится их сравнительный анализ.

3.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В отличие от задачи, рассмотренной в разделе 2, в настоящем разделе предполагается, что при выполнении работ не допускаются прерывания и переключения. Кроме того, директивные интервалы не задаются, а решается задача на быстродействие. Время выполнения работы i на процессоре j равно

$$\tau_{ij} = Q_i/s_j, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m.$$

Под расписанием выполнения работ будем понимать разбиение множества N на m непересекающихся подмножеств

$$N_1, N_2, \dots, N_m \quad (N = \bigcup_{j=1}^m N_j; \quad N_{j_1} \cap N_{j_2} = \emptyset \text{ при } j_1 \neq j_2).$$

Работы из множества N_j приписываются процессору j и выполняются на нем одна за другой в произвольном порядке. Величина $B_j = \sum_{i \in N_j} \tau_{ij}$ – загруженность процессора j , $j = 1, \dots, m$,

а $\max_{j=1, \dots, m} B_j$ – это длина расписания. Задача заключается в построении оптимального по быстродействию расписания, т.е. расписания минимальной длины.

Известно [9], что данная задача является NP-трудной в сильном смысле и все известные точные алгоритмы их решения имеют переборный характер, а точных полиномиальных (эффективных) алгоритмов в настоящее время не известно. Число шагов переборного метода, как правило, растет экспоненциально в зависимости от размеров задачи. Поэтому возникает необходимость в разработке приближенных методов.

Подобные задачи широко освещены в литературе. Отметим, например, такие методы, применяемые при их решении, как случайный и исчерпывающий поиск [8, 13], методы математического программирования [14], метод ветвей и границ [1], муравьиные алгоритмы [11, 21], поиск с запретами [24], вероятностные алгоритмы [27], генетические алгоритмы [12], метод

имитации отжига [26, 28], различные эвристические алгоритмы [4, 10, 22] и др.

3.2. ПРИБЛИЖЕННЫЕ АЛГОРИТМЫ.

Эвристический алгоритм «Процессор с ранним окончанием первым» (ПРОП). Работа этого алгоритма состоит в следующем. На k -м шаге задание k назначается на тот процессор, суммарное время выполнения работ на котором с учетом данной работы минимальное. Иными словами, минимизируется по j величина $(B_{k-1}^j + \tau_{kj})$, где B_{k-1}^j – суммарное время выполнения работ, назначенных на j -й процессор на первых $k - 1$ шагах. После чего работа k назначается на процессор j . Вычислительная сложность алгоритма составляет $O(nt)$.

Вероятностный алгоритм (ВА). Предлагаемый алгоритм основан на методе решения задачи упаковки, изложенном в [27]. Запишем поставленную задачу в виде задачи булевого линейного программирования:

$$(1) \quad \sum_{j=1}^m x_{ji} = 1, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$(2) \quad \sum_{i=1}^n x_{ji} \tau_{ij} \leq B, \quad j = 1, \dots, m,$$

$$(3) \quad x_{ji} \in \{0, 1\},$$

$$(4) \quad Z = B \rightarrow \min.$$

При этом работа i выполняется на процессоре j тогда и только тогда, когда $x_{ji} = 1$. В силу условий (1) и (3) каждая работа будет выполнена ровно на одном процессоре (расписание без прерываний). Условие (2) – это ограничение на длину расписания, а в силу условия (4) будет найдено расписание с минимальной длиной.

Сначала найдем решение релаксационной задачи линейного программирования, в которой $x_{ji} \in [0, 1]$. Это может быть сделано, например, симплексным методом или одним из полиномиальных алгоритмов. Пусть в результате получена матрица с элементами x_{ji}^* . Затем найдем такую целочисленную матрицу

$\|\bar{x}_{ji}\|$, аппроксимирующую x_{ji}^* , что $P(\bar{x}_{ji} = 1) = x_{ji}^*$ и выполняется условие (1). Это можно сделать следующим образом. Заполним элементы матрицы $\|\bar{x}_{ji}\|$ по строкам: для каждого j будем брать последовательно элементы \bar{x}_{ji} с i от 1 до n , полагая \bar{x}_{ji} равным 1 с вероятностью x_{ji}^* . Если некоторый элемент \bar{x}_{ji} , полученный таким образом, окажется равным 1, то остальные элементы строки j полагаем равными 0. Матрица $\|\bar{x}_{ji}\|$ определяет искомое расписание.

Псевдополиномиальный алгоритм (ПА). Теперь будем предполагать, что система состоит из m идентичных процессоров. Длительность работы $i \in N$ на любом процессоре равна t_i . Задан общий директивный срок T выполнения работ N . Предполагается, что $t_i \leq T$ при всех $i \in N$. Требуется определить, существует ли допустимое расписание для работ N (т.е. такое расписание без прерываний и переключений, при котором каждая работа завершается не позднее момента времени T), и построить его, если оно существует. Будем строить допустимое расписание с помощью $(n + 1)$ -уровневого дерева решений, каждый лист которого соответствует одному из возможных вариантов распределения работ по процессорам при заданном директивном сроке. Корень дерева (нулевой уровень) соответствует множеству всех вариантов распределения. С корнем ребрами связаны m вершин первого уровня, соответствующих множеству всех вариантов распределения, в которых первая работа назначена на определенный процессор. Каждой такой вершине соответствует m -мерный вектор, j -я компонента которого равна временной загрузке j -го процессора. Таким образом, вершинам первого уровня дерева решений соответствуют m -мерные векторы $(t_1, 0, \dots, 0)$, $(0, t_1, 0, \dots, 0)$, ..., $(0, \dots, 0, t_1)$ (всего m векторов). Каждая вершина первого уровня связана ребрами с m вершинами второго уровня, соответствующими множеству всех вариантов распределения работ по процессорам, в которых первые две работы закреплены за определенными процессорами. Например, вершина первого уровня

$(0, \dots, 0, t_1, 0, \dots, 0)$ связана с m вершинами второго уровня, которым соответствуют m -мерные векторы $(t_2, 0, \dots, 0, t_1, \dots, 0)$, $(0, t_2, 0, \dots, 0, t_1, \dots, 0)$, \dots , $(0, \dots, t_2, t_1, 0, \dots, 0)$, $(0, \dots, t_1 + t_2, 0, \dots, 0)$, \dots , $(0, \dots, t_1, t_2, \dots, 0)$, $(0, \dots, t_1, 0, \dots, t_2)$. Далее, с вершинами второго уровня дерева решений связаны вершины третьего уровня и т.д. Каждая вершина (c_1, c_2, \dots, c_m) уровня k связана ребрами с m вершинами уровня $k + 1$, $k = 2, \dots, n - 1$, которым соответствуют m -мерные векторы $(c_1 + t_{k+1}, c_2, \dots, c_m)$, $(c_1, c_2 + t_{k+1}, \dots, c_m)$, \dots , $(c_1, c_2, \dots, c_m + t_{k+1})$.

Если хотя бы одна компонента вектора, приписываемого вершине, превышает величину T , то данная вершина в дерево решений не включается и дальнейшее ветвление из нее не производится. Допустимое расписание в поставленной задаче существует в том случае, если построенное дерево решений содержит хотя бы одну вершину n -го уровня (т.е. если вектор (τ_1, \dots, τ_m) , соответствующий некоторой вершине n -го уровня, содержится в m -мерном кубе с ребром T или $\tau_j \leq T$ при всех $j = 1, \dots, m$). Для построения допустимого расписания следует построить путь, соединяющий вершину n -го уровня с корнем дерева решений. Если вершина k -го уровня ($k = 1, \dots, n$) в этом пути соответствует процессору j , то работа k назначается на процессор j .

Определим вычислительную сложность предложенного алгоритма. Число вершин дерева решений, которые могут быть получены в результате работы алгоритма, не превосходит числа точек с целочисленными координатами в m -мерном кубе с ребром T , т.е. $(T + 1)^m$. Для каждой вершины строится не более m вершин следующего уровня. Таким образом, сложность алгоритма составляет $O(m(T + 1)^m)$ операций с m -мерными векторами. Выполнение одной операции заключается в сложении одной компоненты вектора с числом t_i , $i \in N$. Максимальное значение одной компоненты каждого вектора равно $\sum_{i \in N} t_i$, т.е. длина слова, соответствующего одной компоненте каждого вектора, с которым работает алгоритм, есть $O(\log_2 \sum_{i \in N} t_i)$. Таким образом,

предложенный алгоритм является псевдополиномиальным при фиксированном значении m .

Агрегирующий алгоритм. Метод агрегирования для поставленной задачи заключается в том, что исходное множество заданий разбивается на несколько подмножеств, для каждого из которых применяется один из точных алгоритмов построения расписания. Из полученных таким образом расписаний строится расписание выполнения исходного множества заданий. Авторами были разработаны и исследованы несколько агрегирующих алгоритмов для случая, когда все процессоры идентичны. В этом случае для каждого задания i задается его длительность t_i , которая не зависит от процессора. Лучшие результаты были получены для многоуровневого агрегирующего алгоритма (МАО), который может быть описан следующим образом. Множество всех заданий, предварительно упорядоченных по не возрастанию длительностей, разбивается на k_1 подмножеств. Если n кратно k_1 , то в каждое подмножество попадает $[n/k_1]$ соседних заданий. В противном случае в некоторые подмножества может попасть на одно задание больше, при этом разброс длительностей в пределах одного подмножества должен быть минимальным. Для каждого из полученных подмножеств с помощью ПА строится оптимальное m -процессорное расписание. Задания из одного подмножества, назначенные на один и тот же процессор, объединяются в одно задание, длительность которого равна сумме длительностей соответствующих заданий. В результате получаем множество из mk_1 агрегированных заданий, которое, свою очередь, может быть аналогично разбито на k_2 подмножеств. После выполнения нескольких процедур агрегирования будет получено решение исходной задачи. При реализации данного метода полагалось $k_i = [k_{i-1}/2]$. Отметим, что подобный подход для решения задачи коммивояжера описан в [17].

3.3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Продемонстрируем результаты работы описанных выше алгоритмов. Машинные программы были разработаны

Д.В. Красовским, который также провел вычислительные эксперименты. Используемые обозначения: B – длина полученного расписания; $\Delta = \frac{B - \underline{B}}{\underline{B}} \times 100\%$ – относительная погрешность (в процентах); t – время работы алгоритма (в условных единицах); m – количество процессоров; n – количество работ; k_1 – число подмножеств заданий на первом уровне агрегирования при работе МАА. Для каждого набора (m, n) проводилось 50 экспериментов со значениями длительностей работ, полученных с помощью программного генератора случайных чисел, позволяющего получать псевдослучайные числа с равномерным распределением на отрезке $[1, 1000]$. Полученные значения погрешности и времени работы алгоритма затем усреднялись путем отбрасывания 5 самых лучших и 5 самых худших значений и вычисления среднего арифметического оставшихся значений.

Для случая различных процессоров в таблице 3 приведены результаты работы алгоритмов ПРОП, ВА и ПА, а также, для сравнения, одного из лучших ранее известных алгоритмов – алгоритма, основанного на методе имитации отжига (МИО), для пяти вариантов данных. Как видно из результатов расчета, из приближенных алгоритмов наиболее предпочтительным является ВА. ПА позволяет находить точные решения, однако для задач больших размерностей время его работы существенно превосходит время работы остальных алгоритмов. Для случая идентичных процессоров в таблице 4 приведены результаты работы алгоритмов МАА, ПРОП и МИО для шести вариантов данных. Как видно из результатов расчета, наименьшую погрешность имеет МАА, однако для задач больших размерностей время его работы существенно превосходит время работы остальных алгоритмов. Время работы алгоритма ПРОП существенно меньше времени работы остальных алгоритмов. Что касается погрешности, то ПРОП ненамного уступает МИО, а в ряде случаев превосходит его.

Таблица 3. Сравнительные характеристики алгоритмов ПРОП, ВА, ПА и МИО

| Условия задачи | ПРОП | ВА | ПА | МИО |
|-------------------|---------------------------------|-------------------------------|------------------------------|-------------------------------|
| $m = 2, n = 20$ | $\Delta = 18,2,$ $t = 0,001$ | $\Delta = 6,1,$ $t = 0,1$ | $\Delta = 0,$ $t = 0,02$ | $\Delta = 12,6,$ $t = 1,4$ |
| $m = 2, n = 50$ | $\Delta = 14,2,$ $t = 0,002$ | $\Delta = 3,1,$ $t = 0,2$ | $\Delta = 2,9,$ $t = 320$ | $\Delta = 16,4,$ $t = 2,5$ |
| $m = 8, n = 30$ | $\Delta = 47,6,$ $t = 0,001$ | $\Delta = 46,2,$ $t = 0,1$ | $\Delta = 0,$ $t = 120$ | $\Delta = 46,3,$ $t = 1,8$ |
| $m = 2, n = 1000$ | $\Delta = 13,6,$ $t = 0,016$ | $\Delta = 0,2,$ $t = 1,0$ | – | $\Delta = 12,3,$ $t = 8,7$ |
| $m = 4, n = 5000$ | $\Delta = 25,1,$ $t = 0,042$ | $\Delta = 0,1,$ $t = 56$ | – | $\Delta = 22,9,$ $t = 1,8$ |

Таблица 4. Сравнительные характеристики алгоритмов МАА, ПРОП и МИО

| Условия задачи | МАА | ПРОП | МИО |
|------------------------------|------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| $m = 2, n = 20, s_1 = 2$ | $\Delta = 0,05,$ $t < 1$ | $\Delta = 0,5,$ $t < 0,01$ | $\Delta = 3,7,$ $t = 1,5$ |
| $m = 2, n = 100, s_1 = 8$ | $\Delta = 0,0,$ $t = 1$ | $\Delta = 2,$ $t < 0,01$ | $\Delta = 0,1,$ $t = 2,1$ |
| $m = 4, n = 20, s_1 = 2$ | $\Delta = 0,5,$ $t = 2,1$ | $\Delta = 15,$ $t < 0,01$ | $\Delta = 14,9,$ $t = 1,6$ |
| $m = 4, n = 100, s_1 = 16$ | $\Delta = 0,5,$ $t = 12$ | $\Delta = 1,$ $t = 0,01$ | $\Delta = 1,4,$ $t = 2,4$ |
| $m = 2, n = 1000, s_1 = 16$ | $\Delta = 0,5,$ $t = 12$ | $\Delta = 3,5,$ $t = 0,02$ | $\Delta = 0,8,$ $t = 9,1$ |
| $m = 4, n = 1000, s_1 = 100$ | $\Delta = 2,4,$ $t = 317$ | $\Delta = 3,5,$ $t = 0,02$ | $\Delta = 3,2,$ $t = 12,4$ |

4. Алгоритмы составления многопроцессорного расписания для неоднородного множества работ с директивными интервалами

В настоящем разделе рассматривается задача составления многопроцессорного расписания с директивными интервалами для случая, когда часть работ допускает прерывания и переключения с одного процессора на другой, а часть не допускает. Предлагается два приближенных алгоритма, минимизирующих максимальное запаздывание [6].

4.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В отличие от постановок, рассмотренных в разделах 2 и 3, предполагается, что множество работ $N = N_1 \cup N_2$, $N_1 \cap N_2 = \emptyset$, где N_1 – непрерываемые работы, N_2 – работы, допускающие прерывания и переключения с одного процессора на другой. Работы N_1 могут выполняться только процессорами $j = 1, \dots, m_1$, $m_1 < m$ (процессорами первой группы), а работы N_2 – как процессорами первой, так и процессорами второй группы ($j = m_1 + 1, \dots, m$).

Заданы объемы w_i работ $i \in N$. Для работ $i \in N_1$ установлен единый директивный интервал $[0; T]$, который не может быть нарушен. Для каждой работы $i \in N_2$ установлен директивный интервал $[b_i, f_i]$ ($f_i - b_i \geq t_i$). Выполнение работы $i \in N_2$ может быть начато не ранее момента b_i , а если она завершится в момент \bar{f}_i , то штраф за несвоевременное выполнение работ N_2 составит величину $F = \max_{i \in N_2} \max(\bar{f}_i - f_i, 0)$. Требуется найти

такое расписание выполнения работ N , при котором все работы N_1 выполняются в интервале $[0; T]$ и при этом штраф F минимален.

Задачи со смешанным типом работ мало освещены в литературе. Так, например, в [5] исследована задача на быстродействие, в [2, 3] предполагается, что каждая работа строго закреплена за конкретным процессором, на множестве работ

задан частичный порядок выполнения и, кроме того, только один из приборов допускает прерывания. В [18] рассмотрены случаи, когда директивные интервалы одинаковые, а также, когда директивные интервалы могут различаться, но с рядом дополнительных ограничений.

4.2. ПЛАНИРОВАНИЕ ВЫПОЛНЕНИЯ НЕПРЕРЫВАЕМЫХ РАБОТ

Для построения расписания выполнения работ N_1 на m_1 процессорах первой группы используется приближенный оптимизационный мультиэволюционный алгоритм с калибровкой [7], который, как показали численные эксперименты, имеет высокую точность и является достаточно быстрым. Если длина полученного расписания не превышает T , строится расписание прерываемых работ (раздел 4.3). Далее будем предполагать, что построено расписание выполнения работ N_1 и его длина не превосходит T . Введем следующие обозначения:

$$M_1 = \{j: j = 1, \dots, m_1\}; \quad M_2 = \{j: j = m_1 + 1, \dots, m\}; \\ M = M_1 \cup M_2.$$

Для $j \in M_1$ определим величины: Q_j – длина интервала загрузки процессора j ; $L_j = T - Q_j$, $L_j \geq 0$; $N_1(j)$ – номера работ из N_1 , назначенных на процессор j ; a_{ij} , $i \in N_1(j)$, – момент начала выполнения работы i процессором j .

4.3. ПЛАНИРОВАНИЕ ВЫПОЛНЕНИЯ ПРЕРЫВАЕМЫХ РАБОТ

Для выполнения работ N_2 используются процессоры второй группы и частично процессоры первой группы. Каждой работе $i \in N_2$ приписывается заданная величина p_i , характеризующая ее срочность. Работы с меньшей величиной p_i являются более срочными. Рассмотрим два варианта вычисления величин p_i : в первом варианте $p_i = f_i$; во втором $p_i = f_i - b_i - t_i$.

Пусть $d_1 < d_2 < \dots < d_s$ – все различные величины b_i , $i \in N_2$. Для интервала $[d_k; d_{k+1}]$, $k = 1, \dots, s - 1$, введем следующие обозначения:

$N_2(d_k)$ – список номеров работ $i \in N_2$, готовых к выполнению в интервале $[d_k; d_{k+1}]$ (т.е. работ $i \in N_2$, для которых $b_i \leq d_k$); список $N_2(d_k)$ будем хранить упорядоченным по неубыванию величин p_i (т.е. первая работа в списке самая срочная);

τ_j – момент времени, начиная с которого на процессор j можно назначить очередную работу из $N_2(d_k)$;

$v_j, j \in M$, – максимальное время, которое может быть выделено процессором j на выполнение работ в интервале $[d_k; d_{k+1}]$;

$M_{11}(d_k)$ – номера процессоров первой группы, на которые можно дополнительно назначить работы из $N_2(d_k)$ в интервале $[d_k; d_{k+1}]$, корректируя при этом построенное ранее расписание выполнения работ N_1 ;

$M_{12}(d_k)$ – номера процессоров первой группы, на которые можно дополнительно назначить работы из $N_2(d_k)$ в интервале $[d_k; d_{k+1}]$, не корректируя при этом построенное ранее расписание выполнения работ N_1 .

При описании алгоритма составления расписания выполнения работ N_2 будут использованы следующие процедуры.

1. Процедура $\Pi_1(i_0, j_0)$ назначает работу $i_0 \in N_2(d_k)$ на процессор $j_0 \in M_2$ в интервале $[d_k; d_{k+1}]$.

Положить $t_{i_0} = w_{i_0} / s_{j_0}$; $\tau = \min(t_{i_0}; v_{j_0})$. Работу i_0 назначить на процессор j_0 в интервале $[\tau_{j_0}; \tau_{j_0} + \tau]$. Положить $\tau_{j_0} = \tau_{j_0} + \tau$; $w_{i_0} = w_{i_0} - \tau \cdot s_{j_0}$; $v_{i_0} = v_{i_0} - \tau$. Работу i_0 исключить из $N_2(d_k)$. Если $w_{i_0} \neq 0$ и $k < S$, то работу i_0 включить в $N_2(d_{k+1})$.

2. Процедура $M_{11}(d_k)$ строит множество $M_{11}(d_k)$ и вычисляет величины v_j и $\tau_j, j \in M_{11}(d_k)$.

Множество $M_{11}(d_k)$ определяется по правилу:

$$M_{11}(d_k) = \{j: j \in M_1, L_j > 0, Q_j \geq d_{k+1}; \exists i \in N_1(j), d_k \leq a_{ij} \leq d_{k+1}\}$$

Для каждого $j_0 \in M_{11}(d_k)$ положить $\tau_{j_0} = \min_{i \in N_1(j_0)} \{a_{ij_0} : d_k \leq a_{ij_0}\}$;

$$v_{j_0} = \min(d_{k+1} - \tau_{j_0}; L_{j_0}).$$

3. Процедура $\Pi_2(i_0, j_0)$ назначает работу $i_0 \in N_2(d_k)$ на процессор $j_0 \in M_{11}(d_k)$ в интервале $[d_k; d_{k+1}]$.

Положить $t_{i_0} = w_{i_0} / s_{j_0}$; $\tau = \min(t_{i_0}; v_{j_0})$.

Для всех работ $i \in N_1(j_0)$, у которых $a_{ij_0} \geq \tau_{j_0}$, положить

$$a_{ij_0} = a_{ij_0} + \tau.$$

Назначить работу i_0 на процессор j_0 в интервале $[\tau_{j_0}; \tau_{j_0} + \tau]$.

$$\begin{aligned} \text{Положить } w_{i_0} &= w_{i_0} - \tau \cdot s_{j_0}; & L_{j_0} &= L_{j_0} - \tau; & \tau_{j_0} &= \tau_{j_0} + \tau; \\ Q_{j_0} &= Q_{j_0} + \tau; & v_{j_0} &= v_{j_0} - \tau. \end{aligned}$$

Работу i_0 исключить из $N_2(d_k)$. Если $w_{i_0} \neq 0$ и $k < s$, то работу i_0 включить в $N_2(d_{k+1})$.

Если для j_0 условие принадлежности множеству $M_{11}(d_k)$ не выполняется, то исключить j_0 из $M_{11}(d_k)$.

4. Процедура $M_{12}(d_k)$ строит множество $M_{12}(d_k)$ и вычисляет величины v_j и $\tau_j, j \in M_{12}(d_k)$.

Множество $M_{12}(d_k)$ определяется по правилу:

$$M_{12}(d_k) = \{j : j \in M_1, Q_j < d_{k+1}\}.$$

Для каждого $j_0 \in M_{12}(d_k)$ положить

$$\tau_{j_0} = \max\{Q_{j_0}; d_k\};$$

$$v_{j_0} = d_{k+1} - \tau_{j_0}.$$

5. Процедура $\Pi_3(i_0, j_0)$ назначает работу $i_0 \in N_2(d_k)$ на процессор $j_0 \in M_{12}(d_k)$ в интервале $[d_k; d_{k+1}]$.

Положить $t_{i_0} = w_{i_0} / s_{j_0}$; $\tau = \min(t_{i_0}; v_{j_0})$.

Работу i_0 назначить на процессор j_0 в интервале $[\tau_{j_0}; \tau_{j_0} + \tau]$.

Положить $\tau_{j_0} = \tau_{j_0} + \tau$; $v_{j_0} = v_{j_0} - \tau$; $Q_{j_0} = Q_{j_0} + \tau_{j_0}$.

Перейдем к описанию алгоритма 1 распределения прерываемых работ и построения окончательного расписания выполнения работ N . Алгоритм является обобщением известного однопроцессорного алгоритма относительной срочности (RU-алгоритм Э.Г. Коффмана [15]), который при $N_1 = \emptyset$, $m = 1$ и $p_i = f_i$ находит допустимое расписание, если оно существует.

Алгоритм 1.

1. Положить $k = 1$.
2. Включить в $N_2(d_k)$ все работы $i \in N_2$, для которых $b_i = d_k$.
3. Если $k < s$, перейти на шаг 4,
если $k = s$, перейти на шаг 10.
4. Положить $\tau_j = d_k$, $v_j = d_{k+1} - d_k$ для $j \in M_2$.
5. С помощью процедуры $M_{11}(d_k)$ построить множество $M_{11}(d_k)$ и вычислить величины τ_j и v_j , $j \in M_{11}(d_k)$. С помощью процедуры $M_{12}(d_k)$ построить множество $M_{12}(d_k)$ и вычислить величины τ_j и v_j , $j \in M_{12}(d_k)$.
Для $j \in M_1 \setminus (M_{11}(d_k) \cup M_{12}(d_k))$ положить $v_j = 0$.
6. Если $N_2(d_k) = \emptyset$, перейти на шаг 9;
если $N_2(d_k) \neq \emptyset$, перейти на шаг 7.
7. Пусть $\max_{j \in M} v_j = v_{j_0}$.
Если $v_{j_0} = 0$, перейти на шаг 9;
если $v_{j_0} \neq 0$, перейти на шаг 8.
8. Пусть i_0 – номер первой в списке $N_2(d_k)$ работы.
Если $j_0 \in M_2$, выполнить процедуру $\Pi_1(i_0, j_0)$
если $j_0 \in M_{11}(d_k)$ выполнить процедуру $\Pi_2(i_0, j_0)$;
если $j_0 \in M_{12}(d_k)$, выполнить процедуру $\Pi_3(i_0, j_0)$.
9. Положить $k = k + 1$. Перейти на шаг 2.
10. Положить $\tau_j = \max(Q_j; d_s)$ для $j \in M_1$ и $\tau_j = d_s$ для $j \in M_2$.
11. Если $N_2(d_s) = \emptyset$, остановиться, расписание построено; если $N_2(d_s) \neq \emptyset$, перейти на шаг 12.
12. Пусть i_0 – первая в списке $N_2(d_s)$ работа; $\min_{j \in M} \tau_j = \tau_{j_0}$;
 $t_{i_0} = w_{i_0} / s_{j_0}$. Назначить работу i_0 на процессор j_0 в интервале $[\tau_{j_0}; \tau_{j_0} + t_{i_0}]$; исключить работу i_0 из $N_2(d_s)$; положить $\tau_{j_0} = \tau_{j_0} + t_{i_0}$; перейти на шаг 11.

Дадим некоторые пояснения к алгоритму 1. На шаге 2 к работам, которые могли быть включены в $N_2(d_k)$ при выполнении процедур Π_1 и Π_2 , добавляются работы с начальным директив-

ным сроком b_i , равным d_k . На шаге 5 определяются процессоры $j \in M_1$, которые могут выполнять в интервале $[d_k; d_{k+1}]$ прерываемые работы. На шаге 7 определяется процессор, который может выделить в интервале $[d_k; d_{k+1}]$ наибольший объем процессорного времени. На шаге 8 выбирается наиболее срочная из числа готовых к выполнению работ из N_2 и назначается на процессор, выбранный на шаге 8. Шаги 10–12 описывают построение расписания после момента d_s , которое строится по «жадному» алгоритму.

Алгоритм 2 отличается от алгоритма 1 тем, что расписание выполнения работ N_1 остается неизменным, а процессор $j \in M_1$ может использоваться только после момента Q_j . На шаге 5 вызывается только процедура $M_{12}(d_k)$ (процедура $M_{11}(d_k)$ никогда не вызывается) и полагается $v_j = 0$ для $j \in M_1 \setminus (M_{12}(d_k))$. На шаге 8 проверка $j_0 \in M_{11}(d_k)$ не выполняется (и поэтому процедура Π_2 вообще никогда не вызывается). Остальные шаги алгоритма 1 не изменяются.

4.4. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ СЛОЖНОСТЬ АЛГОРИТМА

Определим сначала вычислительную сложность процедур, используемых в предложенных алгоритмах. Вычислительная сложность процедуры $\Pi_1(i_0, j_0)$ есть $O(1)$, процедуры $\Pi_2(i_0, j_0) - O(|N_1|)$, процедуры $\Pi_3(i_0, j_0) - O(1)$, процедуры $M_{11}(d_k) - O(m_1|N_1|)$, процедуры $M_{12}(d_k) - O(m_1)$. Кроме того, $s = O(|N_2|)$. Шаги 2 – 10 выполняются s раз, поэтому сложность этой части алгоритма составляет $O(m_1|N_1||N_2|)$. Сложность части алгоритма, соответствующей шагам 11, 12, составляет $O(m|N_2|)$. Таким образом, вычислительная сложность алгоритмов 1 и 2 составляет $O(|N_2| \cdot \max(m_1|N_1|, m))$.

4.5. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Были проведены численные эксперименты по сравнительному анализу алгоритмов 1, 2 и алгоритма, описанного в [5], для решения задачи на быстродействие, в которой, как и в рассмотренной в настоящей работе, N_1 – непрерываемые работы, N_2 – работы, допускающие прерывания и переключения с одного

процессора на другой, s_1, s_2, \dots, s_m – производительности процессоров, w_i – объемы работ. Алгоритм, описанный в [5], будем называть алгоритмом 3. Отметим, что вычислительная сложность алгоритма 3 составляет $O(|N_1| \log |N_1| + (|N_2| \log |N_2|) \cdot \log \widehat{T})$ [5], а сложность алгоритмов 1 и 2, приспособленных для решения задачи на быстродействие, составляет $O(|N_2| \cdot \max(m_1 |N_1|, m) \cdot \log \widehat{T})$. Таким образом, в случае, когда число прерываемых работ существенно превосходит число непрерываемых работ, алгоритм 3 является более трудоемким, чем алгоритмы 1 и 2. В остальных случаях более трудоемкими являются алгоритмы 1 и 2. Следует также отметить, что алгоритм 3 может быть использован только для решения задачи на быстродействие, а алгоритмы 1 и 2 – как для решения задачи минимизации максимального запаздывания, так и для решения задачи на быстродействие.

Вычисления проводились для частного случая, когда производительности процессоров одинаковые (т.е. заданы длительности $t_i = w_i$ выполнения работ $i \in N$, а производительности процессоров равны $s_j = 1, j = 1, 2, \dots, m$). Для проведения сравнительного анализа алгоритмы 1, 2 были приспособлены для решения задачи на быстродействие (которую решает алгоритм 3). Для этого рассматривался отрезок $[0; \widehat{T}]$, где

$$\widehat{T} = \max(t_{\max}, 2 \cdot T^*), \quad t_{\max} = \max_{i \in N} t_i, \quad T^* = \left[\left(\sum_{i \in N} t_i \right) / m \right].$$

С помощью процедуры деления отрезка $[0; \widehat{T}]$ пополам определялось такое целое значение R , что $F \neq 0$ при значениях параметров $T = R, b_i = 0, f_i = R$ и $F = 0$ при $T = R + 1, b_i = 0, f_i = R + 1 (i \in N)$.

Число работ n и число процессоров m полагались равными $n = 100, m = 20, n = 400, m = 60$ и $n = 1000, m = 100$ (см. таблицу 5). Эксперименты проводились для различных значений числа n_1 непрерываемых работ и числа n_2 прерываемых работ. Для каждого набора значений n, m, n_1, n_2 проводилось по 50 экспериментов с произвольными значениями длительностей работ, полученных с помощью программного генератора слу-

чайных чисел, позволяющего получать псевдослучайные числа с равномерным распределением на отрезке $[1, 2600]$. В каждом эксперименте для алгоритмов 1, 2, 3 вычислялось среднее значение Δ оценки погрешности (по 50 расчетам) для каждого набора n, m, n_1, n_2 . Относительная погрешность алгоритма вычислялась по формуле $\Delta = ((R - T^*)/T^*) \times 100 \%$.

Из результатов численных экспериментов можно сделать следующие выводы.

1. Алгоритм 3 во всех экспериментах показал наименьшую погрешность и поэтому является наиболее точным.

2. При увеличении доли числа непрерываемых работ в общем числе работ погрешность алгоритмов 2 и 3 уменьшается, а погрешность алгоритма 1 увеличивается.

Таблица 5. Результаты численных экспериментов

| m | n_1 | n_2 | Δ (%) | | |
|-----|-------|-------|--------------|------------|------------|
| | | | Алгоритм 1 | Алгоритм 2 | Алгоритм 3 |
| 20 | 99 | 1 | 12,8758 | 12,8758 | 5,3422 |
| | 90 | 10 | 10,5927 | 9,9584 | 1,8969 |
| | 80 | 20 | 11,6868 | 9,7330 | 0,1402 |
| | 70 | 30 | 12,5248 | 8,3514 | 0,0350 |
| | 60 | 40 | 13,5868 | 7,4849 | 0,0485 |
| | 50 | 50 | 14,8923 | 6,5079 | 0,0110 |
| | 40 | 60 | 16,1697 | 5,3710 | 0,0100 |
| | 30 | 70 | 17,3155 | 4,9975 | 0,0017 |
| | 20 | 80 | 18,3677 | 4,9338 | 0,0000 |
| | 10 | 90 | 20,3087 | 3,8595 | 0,0000 |
| 60 | 1 | 99 | 20,1817 | 2,2781 | 0,0001 |
| | 399 | 1 | 10,7130 | 10,7130 | 2,1668 |
| | 350 | 50 | 10,5679 | 9,1204 | 0,2786 |
| | 300 | 100 | 13,6249 | 7,7860 | 0,0975 |
| | 250 | 150 | 13,0765 | 6,6231 | 0,0641 |
| | 200 | 200 | 14,1618 | 4,9706 | 0,0060 |
| | 150 | 250 | 14,8607 | 3,4407 | 0,0014 |
| | 100 | 300 | 15,3573 | 2,8331 | 0,0061 |
| | 50 | 350 | 15,8864 | 2,1975 | 0,0006 |
| | 1 | 399 | 16,6970 | 1,2249 | 0,0000 |

| m | n_1 | n_2 | Δ (%) | | |
|-----|-------|-------|--------------|------------|------------|
| | | | Алгоритм 1 | Алгоритм 2 | Алгоритм 3 |
| 100 | 999 | 1 | 7,0942 | 7,0942 | 1,2892 |
| | 900 | 100 | 7,1364 | 6,1736 | 0,0746 |
| | 800 | 200 | 7,7099 | 5,4968 | 0,0662 |
| | 700 | 300 | 8,7774 | 5,0084 | 0,0172 |
| | 600 | 400 | 9,1372 | 3,9406 | 0,0218 |
| | 500 | 500 | 9,7690 | 3,3775 | 0,0215 |
| | 400 | 600 | 10,2068 | 2,6450 | 0,0002 |
| | 300 | 700 | 10,5510 | 0,5969 | 0,0041 |
| | 200 | 800 | 10,6646 | 2,1021 | 0,0000 |
| | 100 | 900 | 11,0718 | 1,0274 | 0,0005 |
| | 1 | 999 | 11,6089 | 0,4214 | 0,0006 |

5. Заключение

Для задачи составления многопроцессорного расписания с прерываниями разработано два эвристических алгоритма. Вычислительная сложность предложенных алгоритмов значительно меньше сложности точного потокового алгоритма, что подтверждается также машинными экспериментами (выигрыш во времени составляет до нескольких тысяч раз). При этом процент некорректной работы алгоритмов незначительный (от 1 до 20 % в зависимости от параметров задачи). Для задачи составления оптимального по быстродействию расписания без прерываний и переключений в многопроцессорной системе разработан ряд точных и приближенных алгоритмов. Определена эффективность алгоритмов и проведен их сравнительный анализ. Для задачи составления допустимого расписания со смешанным набором работ (часть работ допускает прерывания и переключения, а часть не допускает) разработано два приближенных алгоритма. Определена сложность алгоритмов и проведен их сравнительный анализ.

Литература

1. АЛЕКСЕЕВ О.Г. *Комплексное применение методов дискретной оптимизации*. – М.: Наука, 1986. – 247 с.
2. БУЛАНЖЕ Д.Ю., СУШКОВ Б.Г. *Алгоритмы управления вычислительными системами жесткого реального времени* // Изв. АН СССР, Техн. кибернетика. – 1982. – №6. – С. 160–169.
3. БУЛАНЖЕ Д.Ю. *Оптимальная коррекция директивных интервалов для задачи одного прибора*. – М.: ВЦ АН СССР, 1983. – 20 с.
4. ГОЛОВКИН Б.А. *Расчет характеристик и планирование параллельных вычислительных процессов*. – М.: Радио и связь, 1983. – 272 с.
5. ГОНЧАР Д.Р., ФУРУГЯН М.Г. *Алгоритмы управления многопроцессорными системами с неоднородным множеством работ* // Управление большими системами. – 2010. – №29. – С. 232–244.
6. ГОНЧАР Д.Р., ФУРУГЯН М.Г. *Алгоритмы составления многопроцессорного расписания для неоднородного множества работ с директивными интервалами и произвольными процессорами* // Системы управления и информационные технологии. – 2013. – № 3.1(53). – С. 204–208.
7. ГОНЧАР Д.Р. *Мультиоценочный алгоритм решения минимаксной задачи составления расписания* // Системы управления и информационные технологии. – 2007. – №1.3(27). – С. 324–328.
8. ГОНЧАРОВ Е.Н., КОЧЕТОВ Ю.А. *Вероятностный поиск с запретами для дискретных задач безусловной оптимизации* // Дискретный анализ и исследования операций. Сер. 2. – 2002. – Т. 9, №2. – С. 13–30.
9. КОРМЕН Т., ЛЕЙЗЕРСОН Ч., РИВЕСТ Р. и др. *Алгоритмы: построение и анализ*. – М.: МЦНМО, 2005. – 1291 с.
10. КОСТЕНКО В.А. *Алгоритмы построения расписаний для вычислительных систем реального времени, допускающие*

- использование имитационных моделей // Программирование. – 2013. – №5 – С. 53–71.*
11. КОСТЕНКО В.А., ПЛАКУНОВ А.В. *Алгоритм построения одноприборных расписаний, основанный на схеме муравьиных колоний // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2013. – № 6. – С. 87–96.*
 12. КОСТЕНКО В.А., СМЕЛЯНСКИЙ Р.Л., ТРЕКИН А.Г. *Синтез структур вычислительных систем реального времени с использованием генетических алгоритмов // Программирование. – 2000. – №5. – С. 63–72.*
 13. КОЧЕТОВ Ю., МЛАДЕНОВИЧ Н., ХАНСЕН П. *Локальный поиск с чередующимися окрестностями // Дискретный анализ и исследования операций. Сер. 2. – 2003. – Т. 10, №1. – С. 11–44.*
 14. КОЧЕТОВ Ю.А., СТОЛЯР А.А. *Использование чередующихся окрестностей для приближенного решения задачи календарного планирования с ограниченными ресурсами // Дискретный анализ и исследования операций. Сер. 2. – 2003. – Т. 10, №2. – С. 29–56.*
 15. КОФФМАН Э.Г. *Введение в детерминированную теорию расписаний // Теория расписаний и вычислительные машины / Под ред. Коффмана Э.Г. – М.: Наука, 1984. – С. 9–64.*
 16. КРАСОВСКИЙ Д.В., ФУРУГЯН М.Г. *Алгоритмы решения минимаксной задачи составления расписания // Изв. РАН, ТиСУ. – 2008. – Т. 47, №5. – С. 732–736.*
 17. СИГАЛ И.Х., ИВАНОВА А.П. *Введение в прикладное дискретное программирование. – М.: Физматлит, 2002. – 240 с.*
 18. СКИНДЕРЕВ С.А., ФУРУГЯН М.Г. *Алгоритмы планирования вычислений в многопроцессорных системах с неоднородным множеством работ. – М.: ВЦ РАН, 2006. – 28 с.*
 19. ФУРУГЯН М.Г. *Некоторые алгоритмы анализа и синтеза многопроцессорных вычислительных систем реального времени // Программирование. – 2014. – №1. – С. 36–44.*
 20. ФУРУГЯН М.Г. *Некоторые алгоритмы решения минимаксной задачи составления многопроцессорного расписания // Изв. РАН, ТиСУ. – 2014. – №2. – С. 48–54.*

21. ШТОВБА С.Д. *Муравьиные алгоритмы* // ExponentaPro. Математика в приложениях. – 2003. – №4(4). – С. 70–75.
22. BRUCKER P. *Scheduling Algorithms*. – Heidelberg, Springer, 2007. – 371 p.
23. FEDERGRUEN A., GROENEVELD H.T. *Preemptive Scheduling of Uniform Machines by Ordinary Network Flow Technique* // Management Science. – 1986. – Vol. 32, №3. – P. 341–349.
24. GLOVER F., LAGUNA M. *Chapter 3: Tabu search* / Ed. R. Colin Reeves, Modern Heuristics Techniques for Combinatorial Problems. – Oxford, Blackwell Scientific Publications, 1993. – P. 70–150.
25. GONZALES T., SAHNI S. *Preemptive Scheduling of Uniform Processor Systems* // Journal of the Association for Computing Machinery, January. – 1978. – Vol. 25, №1. – P. 92–101.
26. LAARHOVEN P., AARTS E., LENSTRA J. *Job Shop Scheduling by Simulated Annealing* // Operations Research. – 1992. – Vol. 40(1). – P. 113–125.
27. RAGHAVAN R. *Probabilistic Construction of Deterministic Algorithms: Approximating Packing Integer Programs* // J. Computer and System Sciences. – 1988. – Vol.37. – P. 130–143.
28. SHEN C., PAO Y., YIP P. *Scheduling multiple job problems with guided evolutionary simulated annealing approach* // Proc. First IEEE Conf. on Evolutionary Computations. – Orlando, 1994. – P. 702–706.

EFFICIENT SCHEDULING ALGORITHMS IN MULTI-PROCESSOR REAL TIME SYSTEMS

Dmitry R. Gonchar, Computing Center of RAS, Moscow, Cand. Sc. (rtscas@ya.ru).

Meran G. Furugyan, Computing Center of RAS, Moscow, Cand. Sc. assistant professor (rtscas@ya.ru).

Abstract: We study a task scheduling problem for real-time multi-processor systems and consider the cases when (a) – jobs are pre-emptive and allow for processor switch, (b) – jobs are not pre-emptive and processor switch are prohibited, (c) – only a part of tasks are pre-emptive and allow for processor switch. We suggest a number of approximate algorithms, provide simulation results, and carry out comparative analysis of the developed algorithms.

Keywords: multiprocessor system, preemptive and no preemptive jobs, scheduling.

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии М.Ф. Караваем*

Поступила в редакцию 14.02.2014.

Опубликована 31.05.2014.

XI Всероссийская школа-конференция

молодых ученых

«Управление большими системами»

9-12 сентября, 2014, Арзамас

<http://ubs2014.ru/>

Срок подачи доклада

23. 06. 2014

www.mtas.ru

ИНТЕРНЕТ-сайт теории управления организационными системами

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ ОРГАНИЗАЦИОННЫМИ СИСТЕМАМИ

ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ УПРАВЛЕНИЯ ИМ. В.А. ТРАПЕЗНИКОВА РАН



Целью сайта является предоставление специалистам по теории и практике управления организационными системами (ученым, преподавателям, аспирантам, студентам, а также реальным управленцам) доступа к ресурсам, отражающим современное состояние теории и возможности обмена идеями и результатами.

На сайте имеются разделы:

Теория – с обзором теории управления организационными системами, глоссарием, информацией для аспирантов;

Практика – с обзором результатов внедрения механизмов управления в реальных организациях;

Библиография – около 2500 публикаций по теории управления, снабжена классификатором и аннотациями;

Электронная библиотека – около 700 полнотекстовых монографий, статей и учебных пособий;

а также многое другое.

На сайте работает **форум**, на котором можно обсудить вопросы, относящиеся к математике, экономике, управлению организациями, узнать новости теории управления и ознакомиться с планируемыми конференциями и семинарами.

ubs.mtas.ru

Интернет-сайт электронного периодического
научного издания «Управление большими
системами: сборник трудов»

УПРАВЛЕНИЕ БОЛЬШИМИ СИСТЕМАМИ

ЭЛЕКТРОННЫЙ СБОРНИК НАУЧНЫХ ТРУДОВ
ИНСТИТУТА ПРОБЛЕМ УПРАВЛЕНИЯ ИМ. В.А. ТРАПЕЗНИКОВА РАН

С 1998 года Институт проблем управления РАН выпускает периодический сборник трудов ученых, занимающихся разработкой и исследованием математических моделей управления большими (социально-экономическими, организационными, организационно-техническими и др.) системами. Все статьи, публикуемые в сборнике, проходят рецензирование ведущими специалистами по теории управления.

С 2006 года сборник "Управление большими системами" вместе с ведущим журналом ИПУ РАН "Проблемы управления" – включены в Российский индекс научного цитирования (РИНЦ).

С июля 2007 года Сборник входит в список ВАК (перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертации на соискание ученой степени доктора и кандидата наук):

- * по управлению, вычислительной технике и информатике (для докторов наук);

- * по электронике, измерительной технике, радиотехнике и связи; по энергетике (для кандидатов наук).

**Уважаемые коллеги! Приглашаем Вас опубликовать
Вашу статью в очередном выпуске сборника
"Управление большими системами"!**

Периодичность сборника - 4 раза в год. Время выхода прошедшей рецензирование статьи - 3-4 месяца. Плата с авторов за публикацию рукописей не взимается.