

**Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН**

УПРАВЛЕНИЕ БОЛЬШИМИ СИСТЕМАМИ

Выпуск 50
Июль 2014

**СБОРНИК
ТРУДОВ**

ISSN 1819-2467

Регистрационный номер Эл. №ФС77-44158 от 09 марта 2011 г.

Москва – 2014

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова

**УПРАВЛЕНИЕ
БОЛЬШИМИ
СИСТЕМАМИ**

СБОРНИК ТРУДОВ

Выпуск 50

Москва – 2014

КООРДИНАЦИОННЫЙ СОВЕТ

Академики РАН: Васильев С.Н., Емельянов С.В., Куржанский А.Б., Федосов Е.А., Черноусько Ф.Л.; члены-корреспонденты РАН: Желтов С.Ю., Каляев И.А., Пархоменко П.П., Попков Ю.С.; д-ра техн. наук: Дорофеюк А.А., Кузнецов О.П., Кульба В.В., Кротов В.Ф., Лотоцкий В.А., Павлов Б.В., Поляк Б.Т., Рутковский В.Ю.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор: член-корр. РАН Новиков Д.А. **Отв. секретарь:** канд. техн. наук Губко М.В. **Редактор:** канд. техн. наук Квинто Я.И. **Техн. редактор:** канд. техн. наук Куливец С.Г.

Д-ра техн. наук: проф. Алескеров Ф.Т. (ГУ ВШЭ), проф. Артамонов Е.И. (ИПУ РАН), д-р экон. наук, проф. Архипова М.Ю. (ИПИ РАН), д-ра техн. наук: проф. Афанасьев В.Н. (МИЭМ), проф. Бахтадзе Н.Н. (ИПУ РАН), проф. Бурков В.Н. (ИПУ РАН), проф. Вишневский В.М. (ИППИ РАН), д-р экон. наук, проф. Голиченко О.Г. (ЦЭМИ РАН), д-р физ.-мат. наук, проф. Добровидов А.В. (ИПУ РАН), д-ра техн. наук: проф. Заложнев А.Ю. (ИПУ РАН), проф. Ириков В.А. (МФТИ), проф. Калянов Г.Н. (ИПУ РАН), проф. Касаткин С.И. (ИПУ РАН), проф. Каравай М.Ф. (ИПУ РАН), д-р экон. наук, проф. Клочков В.В. (ИПУ РАН), д-ра техн. наук: проф. Кононенко А.Ф. (ВЦ РАН), проф. Курдюков А.П. (ИПУ РАН), проф. Лебедев В.Г. (ИПУ РАН), к-т техн. наук, доцент Лебедев В.Н. (ИПУ РАН), д-р экон. наук, проф. Ловчиновский Э.В. (ИПУ РАН), д-р техн. наук, проф. Мандель А.С. (ИПУ РАН), д-р физ.-мат. наук, проф. Непейвода Н.Н. (ИПС РАН), д-р экон. наук, проф. Нижегородцев Р.М. (ИПУ РАН), д-ра техн. наук: проф. Новосельцев В.Н. (ИПУ РАН), проф. Орлов А.И. (МВТУ), д-р физ.-мат. наук, проф. Рапопорт Л.Б. (ИПУ РАН), д-р экон. наук, проф. Секерин В.Д. (ИПУ РАН), д-ра техн. наук: проф. Сидельников Ю.В. (МАИ), проф. Совлуков А.С. (ИПУ РАН), д-р экон. наук, проф. Сухарев О.С. (Ин-т экономики РАН), д-ра техн. наук: проф. Уткин В.А. (ИПУ РАН), проф. Хоботов Е.Н. (МВТУ), д-ра физ.-мат. наук: доцент Чеботарев П.Ю. (ИПУ РАН), проф. Чхартишвили А.Г. (ИПУ РАН), проф. Щербаков П.С. (ИПУ РАН).

РЕГИОНАЛЬНЫЕ РЕДАКЦИОННЫЕ СОВЕТЫ

Волгоград – д-ра физ.-мат. наук: проф. Воронин А.А., проф. Лосев А.Г. (ВолГУ); **Воронеж** – д-р техн. наук, проф. Баркалов С.А., д-р физ.-мат. наук, проф. Головинский П.А. (ВГАСУ), д-р техн. наук, проф. Подвальный С.Л. (ВГТУ); **Иркутск** – академик РАН Бычков И.В., проф. Лакеев А.В. (ИДСТУ СО РАН); **Казань** – д-р физ.-мат. наук, проф. Маликов А.И., д-р техн. наук, проф. Сиразетдинов Р.Т. (КГТУ-КАИ); **Липецк** – д-ра техн. наук: проф. Кузнецов Л.А., проф. Погодаев А.К. (ЛГТУ); **Самара** – д-ра экон. наук: проф. Богатырев В.Д., проф. Гераскин М.И., д-р техн. наук, проф. Засканов В.Г. (СГАУ); **Петрозаводск** – д-р физ.-мат. наук, проф. Мазалов В.В., д-р техн. наук, доц. Печников А.А. (ИПМИ КарНЦ РАН); **Санкт-Петербург** – д-ра физ.-мат. наук: проф. Петросян Л.А. (СПбГУ), проф. Фрадков А.Л. (ИПМ РАН); **Старый Оскол** – д-р техн. наук, проф. Еременко Ю.И. (СТИ); **Тверь** – д-ра техн. наук: проф. Кузнецов В.Н., проф. Палюх Б.В. (ТГТУ).

Адрес редакции: 117997, г. Москва, ул. Профсоюзная, д. 65.

Адрес в Интернет: ubs.mtas.ru.

Номер гос. регистрации электронного научного издания (ЭНИ): 0421200023.

© ИПУ РАН, 2014

СОДЕРЖАНИЕ

Математическая теория управления

Кустов А. Ю.

Анизотропный анализ в случае ненулевого математического ожидания входного возмущения 6

Юрченков А. В.

Синтез анизотропного робастного регулятора при структурированной неопределенности объекта управления..... 24

Информационные технологии в управлении

Черных Н. В.

Неявные сильные методы численного моделирования решений СДУ с марковскими переключениями..... 58

Чесноков А. М.

Интеллектуальные системы на основе колонок при неполной информации..... 84

Управление в социально-экономических системах

Бахитова Р. Х., Ахметшина Г. А., Лакман И. А.

Панельное моделирование объема выпуска продукции для регионов России 99

Топинский В. А.

Эффективность резервной цены и давление конкуренции в аукционах..... 110

АНИЗОТРОПИЙНЫЙ АНАЛИЗ В СЛУЧАЕ НЕНУЛЕВОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОЖИДАНИЯ ВХОДНОГО ВОЗМУЩЕНИЯ

Кустов А. Ю.¹,

(ФГБУН Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

В созданной с 90-х гг. анизотропийной теории управления в качестве входных возмущений, действующих на линейную систему, принимается последовательность гауссовских случайных векторов с нулевым математическим ожиданием и заданной средней анизотропией. В данной работе введены понятия средней анизотропии последовательности с ненулевым математическим ожиданием и анизотропийной нормы системы, на вход которой поступает данная последовательность. Рассмотрена задача анизотропийного анализа в частотной области и показано отличие от способа вычисления анизотропийной нормы в частотной области при нулевом математическом ожидании.

Ключевые слова: анизотропийная теория управления, средняя анизотропия, анизотропийная норма, гауссовские случайные вектора, частотная область.

1. Введение

В период 1994–2008 годов в России для линейных дискретных стационарных систем была создана теория оптимального стохастического управления [1, 4], позволяющая строить управление, минимизирующее специально определенную норму замкнутой системы (анизотропийную норму системы). В период с 2008 по 2012 годы в работах [6] для систем указанного выше типа была создана теория стохастического субоптимального

¹ Аркадий Юрьевич Кустов, м.н.с., (arkadiy.kustov@gmail.com).

робастного управления, позволяющая строить управление, обеспечивающее ограниченность анизотропийной нормы замкнутой системы. В настоящее время эти математические теории находят свое применение в различных задачах управления и фильтрации.

Созданные теории в известной степени лежат между классическими теориями \mathcal{H}_2 - и \mathcal{H}_∞ -оптимальных (субоптимальных) управлений. Основными ключевыми понятиями созданных теорий являются анизотропия случайного вектора и средняя анизотропия сигнала, представляющего собой последовательность случайных векторов. Анизотропия вектора характеризует «цветность» сигнала как меру отличия его плотности распределения от эталонной плотности, за которую принимается плотность нормального распределения с нулевым средним и скалярной ковариационной матрицей. С основами анизотропийной теории можно ознакомиться в [3].

В построенной ранее анизотропийной теории предполагается, что на вход объекта управления поступает сигнал определенной «цветности» и нулевым математическим ожиданием. Однако в реальных технических системах на вход объекта может поступать сигнал с ненулевым математическим ожиданием. Поэтому представляет интерес создание анизотропийной теории управления в случае ненулевого среднего векторов входной последовательности. В данной статье приводится решение задачи анизотропийного анализа, состоящей в получении формул для вычисления анизотропии случайного вектора и средней анизотропии последовательности случайных векторов, а также вывод формул для вычисления в частотной области анизотропийной нормы системы в случае ненулевого математического ожидания случайного сигнала. Некоторые результаты были уже опубликованы в [5].

2. Анизотропия вектора, средняя анизотропия последовательности

Для описания степени различия между случайными векторами в теории информации используется понятие относительной энтропии. Применяя ее, приведем определение анизотропии случайного вектора и средней анизотропии последовательности случайных векторов.

Пусть W – m -мерный гауссовский случайный вектор с ненулевым матожиданием μ и ковариационной матрицей S с плотностью распределения вероятности

$$f(x) = ((2\pi)^m |S|)^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2}(x - \mu)^T S^{-1}(x - \mu)\right), \quad x \in \mathbb{R}^m.$$

Согласно определению анизотропия вектора W равна минимуму расстояния Кульбака–Лейблера (относительной энтропии) f относительно плотности распределения вероятности $p_{m,\lambda}$ гауссовского случайного вектора с нулевым средним и скалярной ковариационной матрицей λI_m [1]:

$$\mathbf{A}(W) \triangleq \min_{\lambda > 0} \mathbf{E}_f \ln \frac{f(x)}{p_{m,\lambda}(x)} = -\frac{1}{2} \ln \det \left(\frac{mS}{\text{tr}S + |\mu|^2} \right).$$

В силу свойств логарифма $\mathbf{A}(W) > 0 \forall \mu \neq 0$. Относительная энтропия может трактоваться как «расстояние» между плотностью f и эталонной плотностью $p_{m,\lambda}$, а анизотропия – как «расстояние» между плотностью f и множеством эталонных плотностей $\{p_{m,\lambda} : \lambda > 0\}$.

Средняя анизотропия стационарной эргодической последовательности $W = \{w_k\}$ введена в [1] как

$$\overline{\mathbf{A}}(W) \triangleq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{A}(W_{0:N-1})}{N},$$

где $W_{0:N-1}$ – расширенный вектор последовательности, определяемый как

$$W_{0:N-1} = \begin{bmatrix} w_0 \\ \vdots \\ w_{N-1} \end{bmatrix}.$$

Правило вычисления средней анизотропии последовательности

случайных векторов с ненулевыми математическими ожиданиями дает следующая теорема [5]:

Теорема 1. Пусть последовательность $W = \{w_k\}$ генерируется из гауссовского белого шума $\{v_k\}$ формирующим фильтром

$$G \sim \begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Bv_k + \nu, \\ w_k = Cx_k + Dv_k + \mu, \end{cases}$$

с асимптотически устойчивой матрицей $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ($\rho(A) = \max |\lambda(A)| < 1$), невырожденной матрицей $D \in \mathbb{R}^{m \times m}$ и векторами μ и ν , такими, что $|\mu| < \infty$, $|\nu| < \infty$. Тогда средняя анизотропия $\bar{\mathbf{A}}(W)$ последовательности W равна

$$\bar{\mathbf{A}}(W) = -\frac{1}{2} \ln \det \left(\frac{m(\Sigma + \Xi)}{\text{tr} \Sigma + |\mathcal{M}|^2} \right),$$

где Σ и Ξ связаны с решениями P и R уравнений Ляпунова и Риккати формулами

$$\begin{aligned} \Sigma &= CPC^\top + DD^\top, & \Xi &= CRC^\top, \\ P &= APA^\top + BB^\top, & R &= ARA^\top - \Lambda(\Sigma + \Xi)^{-1}\Lambda^\top, \\ & & \Lambda &= BD^\top + A(P + R)C^\top, \end{aligned}$$

а вектор \mathcal{M} равен

$$\mathcal{M} = \mu + C(I_n - A)^{-1}\nu.$$

Доказательство. В силу определения средней анизотропии справедливо

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{A}}(W) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \mathbf{A}(W_{0:N-1}) = \\ &= -\frac{1}{2} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln \det \left(\frac{mN \Sigma_{0:N-1}}{\text{tr} \Sigma_{0:N-1} + |\mu_{0:N-1}|^2} \right) = \\ &= -\frac{1}{2} \ln \frac{\lim_{N \rightarrow \infty} |\Sigma_{0:N-1}|^{1/N}}{\left(\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{mN} (\text{tr} \Sigma_{0:N-1} + |\mu_{0:N-1}|^2) \right)^m}, \end{aligned}$$

где $\Sigma_{0:N-1} = \text{cov}(W_{0:N-1})$ обладает следующими свойствами:

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \text{tr} \Sigma_{0:N-1} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \text{tr} \Sigma_k = \lim_{N \rightarrow \infty} \text{tr} \Sigma_N = \\ &= \text{tr}(DD^\top + \sum_{k=0}^{\infty} CA^k B(CA^k B)^\top) = \text{tr} \Sigma \end{aligned}$$

и

$$\lim_{N \rightarrow \infty} |\Sigma_{0:N-1}|^{1/N} = |\Sigma + \Xi|,$$

а $\mu_{0:N-1} = \mathbf{E}W_{0:N-1}$, причем

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} |\mu_{0:N-1}|^2 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |\mathbf{E}w_k|^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} |\mathbf{E}w_N|^2 = \\ &= |\mu + C\nu + CA\nu + CA^2\nu + \dots|^2 = |\mathcal{M}|^2. \end{aligned}$$

Подставляя полученные выражения в формулу для средней анизотропии, завершим доказательство. ■

Пример 1. Пусть формирующий фильтр образован матрица-

$$A = \begin{bmatrix} -0,2 & -0,8 \\ 0,8 & -1,4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,3 \\ 0,4 & -0,5 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1,5 & 1 \end{bmatrix},$$

а векторы ν и μ , определяющие матожидания векторов $\{w_k\}$, равны

$$\nu = \begin{bmatrix} 0,2 \\ -0,3 \end{bmatrix}, \quad \mu = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,1 \end{bmatrix}.$$

Согласно Теореме 1, имеем

$$\Sigma \simeq \begin{bmatrix} 9,82 & 2,71 \\ 2,71 & 5,61 \end{bmatrix}, \quad \Xi \simeq \begin{bmatrix} -4,38 & 0,94 \\ 0,94 & -2,08 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{M} \simeq \begin{bmatrix} 0,03 \\ 0,34 \end{bmatrix},$$

и, следовательно,

$$\overline{\mathbf{A}}(W) = -\frac{1}{2} \ln \det \left(\frac{m(\Sigma + \Xi)}{\text{tr} \Sigma + |\mathcal{M}|^2} \right) \simeq 1,164.$$

•

3. Анизотропийная норма

Обычно одной из целей управления является минимизация функционала качества, который обычно выбирают как некоторую норму передаточной функции замкнутой системы. В анизотропийной теории управления в качестве такого функционала выступает супремум отношения стохастической мощностной нормы выхода к аналогичной норме входа. Приведем определение анизотропийной нормы системы.

Пусть $y = \{y_k\}$ – последовательность m -мерных векторов. Стохастической мощностной нормой сигнала y будем называть число

$$\|y\|_{\mathcal{P}} = \sqrt{\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{E}|y_k|^2}.$$

Пусть $F(z)$ – матричная передаточная функция некоторой устойчивой системы. Определим основные нормы систем:

$$1. \|F\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \operatorname{tr} \int_{-\pi}^{\pi} \widehat{F}^*(\omega) \widehat{F}(\omega) d\omega} - \mathcal{H}_2\text{-норма системы } F,$$

$$\widehat{F}(\omega) = \lim_{r \rightarrow 1-0} F(re^{j\omega});$$

$$2. \|F\|_{\infty} = \sup_{\omega \in [-\pi; \pi]} \sigma_{\max}(\widehat{F}(\omega)) - \mathcal{H}_{\infty}\text{-норма системы } F,$$

$$\sigma_{\max}(\widehat{F}) = \sqrt{\lambda_{\max}(\widehat{F}^{\top} \widehat{F})}.$$

Пусть $F(z)$ – матричная передаточная функция замкнутой системы со входом $\{w_k\}$ (последовательность гауссовских векторов с ненулевым средним) и выходом $\{z_k\}$. Определим среднеквадратичный коэффициент усиления как

$$Q(F, W) \triangleq \frac{\|z\|_{\mathcal{P}}}{\|w\|_{\mathcal{P}}} = \sqrt{\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{E}|z_k|^2}{\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{E}|w_k|^2}}.$$

Пусть система, описывающая объект управления, замкнутый регулятором, имеет вид

$$F \sim \begin{cases} x_{k+1}^o = A_{cl}x_k^o + B_{cl}w_k, \\ z_k = C_{cl}x_k^o + D_{cl}w_k, \end{cases}$$

где $x_k^o \in \mathbb{R}^n$ – состояние объекта, $\{w_k\}$ – входное возмущение, $z_k \in \mathbb{R}^p$ – выход. Матричная передаточная функция системы равна $F(z) = D_{cl} + C_{cl}(zI_n - A_{cl})^{-1}B_{cl}$, $z \in \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

Для выходов системы F и формирующего фильтра G с представлениями

$$F \sim \begin{cases} x_{k+1}^o = A_{cl}x_k^o + B_{cl}w_k, \\ z_k = C_{cl}x_k^o + D_{cl}w_k, \end{cases} \quad G \sim \begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Bv_k + \nu, \\ w_k = Cx_k + Dv_k + \mu, \end{cases}$$

справедливы следующие утверждения. Для формирующего фильтра G стохастическая мощностная норма выхода $\{w_k\}$ равна

$$\|w\|_{\mathcal{P}}^2 = \lim_{k \rightarrow \infty} (\text{tr cov}(w_k) + |\mathbf{E}w_k|^2) = \|G_0\|_2^2 + |\mathcal{M}|^2.$$

Аналогично для системы F стохастическая мощностная норма выхода $\{z_k\}$ равна

$$\|z\|_{\mathcal{P}}^2 = \lim_{k \rightarrow \infty} (\text{tr cov}(z_k) + |\mathbf{E}z_k|^2) = \|FG_0\|_2^2 + |\mathcal{FM}|^2,$$

где при разложении $w_k = w_{0,k} + w_{E,k}$ для векторов $w_{0,k}$ (с нулевым средним и ненулевой ковариационной матрицей) и $w_{E,k}$ (с ненулевым средним и нулевой ковариационной матрицей) введены генерирующие фильтры

$$G_0 \sim \begin{cases} x_{0,k+1} = Ax_{0,k} + Bv_k, \\ w_{0,k} = Cx_{0,k} + Dv_k, \end{cases} \quad G_E \sim \begin{cases} x_{E,k+1} = Ax_{E,k} + \nu, \\ w_{E,k} = Cx_{E,k} + \mu. \end{cases}$$

При этом матрица \mathcal{F} определяется как

$$\mathcal{F} \doteq F(1) = T_{zw}(1) = D_{cl} + C_{cl}(I_n - A_{cl})^{-1}B_{cl}.$$

Будем считать природу «игроком», целью которого является генерация наихудшего в некотором смысле входного сигнала, и предположим, что «стратегия» природы основана на полном знании о нашей системе, т.е. верхние подсистемы фильтра и объекта управления тождественны, что приводит к условиям

$$A = A_{cl} + B_{cl}C, \quad B = B_{cl}D$$

для матриц A и B и к условию

$$\nu = B_{cl}\mu$$

для вектора ν . В связи с этим вектор \mathcal{M} равен

$$\begin{aligned} \mathcal{M} = T_{w\mu}(1)\mu &= (I_m + C(I_n - A)^{-1}B_{cl})\mu = \\ &= (I_m + C(I_n - A_{cl} - B_{cl}C)^{-1}B_{cl})\mu. \end{aligned}$$

В дальнейшем будем считать, что известен не вектор μ (и соответственно ν), а вектор \mathcal{M} . При таком предположении зависимость \mathcal{M} от матрицы C формирующего фильтра «пропадает».

Итак, среднеквадратичный коэффициент усиления равен

$$Q(F, W) = \sqrt{\frac{\|FG_0\|_2^2 + |\mathcal{FM}|^2}{\|G_0\|_2^2 + |\mathcal{M}|^2}} = \sqrt{\frac{\|FG_0\|_2^2 + |T_{zw}(1)T_{w\mu}(1)\mu|^2}{\|G_0\|_2^2 + |T_{w\mu}(1)\mu|^2}}.$$

Анизотропийная норма системы определена как

$$(1) \quad \|F\|_a \triangleq \sup_{W: \bar{A}(W) \leq a} Q(F, W)$$

и равна максимальному коэффициенту усиления по всем возможным формирующим фильтрам с уровнем средней анизотропии не более a .

Пример 2. Рассмотрим замкнутую систему

$$\begin{cases} x_{k+1} = A_{cl}x_k + B_{cl}w_k, \\ z_k = C_{cl}x_k + D_{cl}w_k, \end{cases}$$

с матрицами

$$\begin{aligned} A_{cl} &= \begin{bmatrix} -0,662 & -0,952 \\ 0,087 & 0,962 \end{bmatrix}, \quad B_{cl} = \begin{bmatrix} 1 & -0,2 \\ 0,4 & -0,3 \end{bmatrix}, \\ C_{cl} &= \begin{bmatrix} -0,25 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad D_{cl} = \begin{bmatrix} 1 & 0,25 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Пусть на вход описанной системы подается окрашенная последовательность со следующими устойчивой матрицей A формирующего фильтра и ненулевым вектором μ :

$$A = \begin{bmatrix} 0,3 & -1,27 \\ 0,43 & 1,2 \end{bmatrix}, \quad \mu = \begin{bmatrix} 0,05 \\ -0,01 \end{bmatrix}.$$

Согласно выражениям

$$A = A_{cl} + B_{cl}C, \quad B = B_{cl}, \quad \nu = B_{cl}\mu,$$

определим матрицы B, C, D и вектор ν следующим образом:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -0,1 & 0,1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -0,65 \\ 0,19 & -1,66 \end{bmatrix}, \\ D = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,1 \\ -0,1 & 0,1 \end{bmatrix}, \quad \nu = \begin{bmatrix} 0,052 \\ 0,023 \end{bmatrix}.$$

Тогда $\|G_0\|_2^2 = 1,487$, $\|FG_0\|_2^2 = 11,386$, $|\mathcal{M}|^2 = 0,046$, $|\mathcal{FM}|^2 = 0,693$ и, следовательно, среднеквадратичный коэффициент усиления равен

$$Q(F, W) = \sqrt{\frac{\|FG_0\|_2^2 + |\mathcal{FM}|^2}{\|G_0\|_2^2 + |\mathcal{M}|^2}} = 2,807.$$

•

4. Анизотропийная норма: частотная область

Вычисление анизотропийной нормы непосредственно по определению (1) затруднительно, поэтому целесообразен переход в частотную область. Для этого необходимо ввести дополнительные функции, которые являются частотными аналогами средней анизотропии и среднеквадратичного коэффициента усиления.

Пусть $\mathbb{S}(\omega)$ – спектральная плотность формирующего фильтра G_0 ,

$$\mathbb{S}(\omega) = \widehat{G}_0^*(\omega)\widehat{G}_0(\omega), \quad \widehat{G}_0(\omega) \doteq G(e^{j\omega}).$$

Введем следующие функции параметра $q \in [0; \|F\|_\infty^{-2}]$:

$$(2) \quad \Phi(q) = \frac{1}{2\pi m} \int_{-\pi}^{\pi} \text{tr} S(q, \Lambda(\omega)) d\omega,$$

$$(3) \quad \Psi(q) = \frac{1}{2\pi m} \int_{-\pi}^{\pi} \ln \det S(q, \Lambda(\omega)) d\omega,$$

$$(4) \quad A(q) = \frac{m}{2} \left(\ln \left(\Phi(q) + \frac{1}{m} |\mathcal{M}|^2 \right) - \Psi(q) \right),$$

$$(5) \quad N(q) = \sqrt{\frac{\Phi(q) - 1 + \frac{q}{m} |\mathcal{FM}|^2}{q\Phi(q) + \frac{q}{m} |\mathcal{M}|^2}}.$$

Покажем, что для $S(q, \Lambda(\omega)) = (I_m - q\widehat{F}^*(\omega)\widehat{F}(\omega))^{-1}$ введенные функции $A(q)$ и $N(q)$ равны соответственно $\overline{\mathbf{A}}(W)$ и $Q(F, W)$ и что спектральная плотность, обеспечивающая супремум среднеквадратичного коэффициента усиления, принадлежит множеству $\mathbb{S}(\omega) \in \{\sigma(I_m - q\Lambda(\omega))^{-1} \mid \sigma > 0, q \in [0; \|F\|_\infty^{-2}]\}$, $\Lambda(\omega) = \widehat{F}^*(\omega)\widehat{F}(\omega)$.

Равенство $A(q) = \overline{\mathbf{A}}(W)$ верно для любой $S(q, \Lambda(\omega)) = \mathbb{S}(\omega) = \widehat{G}_0^*(\omega)\widehat{G}_0(\omega)$, так как в этом случае $m\Phi(q) = \|G_0\|_2^2$ и, следовательно,

$$\begin{aligned} A(q) &= \frac{m}{2} \left(\ln \left(\Phi(q) + \frac{1}{m} |\mathcal{M}|^2 \right) - \Psi(q) \right) = \\ &= \frac{m}{2} \left(\ln \left(\frac{1}{2\pi m} \int_{-\pi}^{\pi} \text{tr} S(q, \Lambda(\omega)) d\omega + \frac{1}{m} |\mathcal{M}|^2 \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2\pi m} \int_{-\pi}^{\pi} \ln \det S(q, \Lambda(\omega)) d\omega \right) - \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int_{\pi}^{\pi} \left(\ln \det S(q, \Lambda(\omega)) - m \ln \left(\frac{\|G_0\|_2^2 + |\mathcal{M}|^2}{m} \right) \right) d\omega = \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln \det \frac{m\widehat{G}_0^*(\omega)\widehat{G}_0(\omega)}{\|G_0\|_2^2 + |\mathcal{M}|^2} d\omega = \overline{\mathbf{A}}(W). \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим функцию $N^2(q)$:

$$N^2(q) = \frac{\Phi(q) - 1 + \frac{q}{m} |\mathcal{F}\mathcal{M}|^2}{q\Phi(q) + \frac{q}{m} |\mathcal{M}|^2} = \frac{\frac{1}{q} \|G_0\|_2^2 - \frac{m}{q} + |\mathcal{F}\mathcal{M}|^2}{\|G_0\|_2^2 + |\mathcal{M}|^2},$$

что совпадает с $Q^2(F, W)$ при $q\|FG_0\|_2^2 = \|G_0\|_2^2 - m$. Это условие представимо в виде

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \text{tr} \left(\Lambda(\omega) S(q, \Lambda(\omega)) - \frac{1}{q} S(q, \Lambda(\omega)) + \frac{1}{q} I_m \right) d\omega = 0.$$

Если $S(q, \Lambda(\omega)) = (I_m - q\Lambda(\omega))^{-1}$, то

$$\Lambda(\omega) S(q, \Lambda(\omega)) = \frac{1}{q} S(q, \Lambda(\omega)) - \frac{1}{q} I_m.$$

Таким образом, для фильтров со спектральной плотностью вида

$$(6) \quad S(q, \Lambda(\omega)) = (I_m - q\Lambda(\omega))^{-1}$$

выполняется равенство $N(q) = Q(F, W)$.

Покажем, что супремум в выражении (1) достигается именно на спектральных плотностях $\mathbb{S}(\omega) = S(q, \Lambda(\omega))$. Учитывая, что при умножении векторов w_k последовательности на произвольное ненулевое число α ($w'_k = \alpha w_k$) уровень средней анизотропии и значение среднеквадратичного коэффициента усиления не изменятся:

$\overline{\mathbf{A}}(W') = \overline{\mathbf{A}}(\alpha W) = \overline{\mathbf{A}}(W)$, $Q(F, W') = Q(F, \alpha W) = Q(F, W)$,
причем нормы соответствующих фильтров и матожиданий связаны соотношениями

$$\|G'_0\|_2^2 = \|\alpha G_0\|_2^2 = \alpha^2 \|G_0\|_2^2, \quad |\mathcal{M}'|^2 = |\alpha \mathcal{M}|^2 = \alpha^2 |\mathcal{M}|^2,$$

то без потери общности можно положить

$$\|G_0\|_2^2 + |\mathcal{M}|^2 = 1.$$

При этом формулы для средней анизотропии и среднеквадратичного коэффициента усиления можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{A}}(W) &= -\frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln \det (mS(q, \Lambda(\omega))) d\omega, \\ Q^2(F, W) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \text{tr} (\Lambda(\omega)S(q, \Lambda(\omega))) d\omega + |\mathcal{F}\mathcal{M}|^2, \end{aligned}$$

а задача вычисления анизотропийной нормы сводится к задаче нахождения супремума $Q(F, W)$ при двух ограничениях:

$$\|F\|_a = \sup_W \{Q(F, W) \mid \overline{\mathbf{A}}(W) \leq a, \|G_0\|_2^2 + |\mathcal{M}|^2 = 1\}.$$

Для приведенной задачи оптимизации с ограничениями функция

Лагранжа имеет вид

$$\begin{aligned}
 L(S) = & -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \text{tr}(\Lambda(\omega)S(q, \Lambda(\omega)))d\omega + \\
 & + \lambda \left(-\frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln \det(mS(q, \Lambda(\omega)))d\omega - a \right) + \\
 & + \rho \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \text{tr}(S(q, \Lambda(\omega)))d\omega + |\mathcal{M}|^2 - 1 \right).
 \end{aligned}$$

Целевая функция L выпукла по S , а в силу выпуклости функции $\ln \det(\cdot)$ ограничения также выпуклые, значит, можно применить теорему Каруша–Куна–Таккера, которая даст решение

$$S(q, \Lambda(\omega)) = \sigma(I_m - q\Lambda(\omega))^{-1},$$

где

$$\sigma \doteq \frac{\lambda}{2\rho}, \quad q \doteq \frac{1}{\rho} \in [0; \|F\|_{\infty}^{-2}).$$

Коэффициенты λ и ρ находятся из уравнений

$$\overline{\mathbf{A}}(W) = a \quad \text{и} \quad \|G_0\|_2^2 + |\mathcal{M}|^2 = 1.$$

Таким образом, поставленная задача решена, и формула для нахождения анизотропийной нормы в частотной области имеет вид

$$(7) \quad \|F\|_a \triangleq \sup_W \{Q(F, W) | \overline{\mathbf{A}}(W) \leq a\} = \sup_{q \in [0; \|F\|_{\infty}^{-2})} \{N(q) | A(q) \leq a\}.$$

Полученные результаты собраны в виде теоремы:

Теорема 2. Для асимптотически устойчивой системы F , на вход которой поступает внешнее входное возмущение в виде последовательности гауссовских случайных векторов с ненулевым математическим ожиданием и ограничением на уровень средней анизотропии, анизотропийная норма в частотной области вычисляется по формуле

$$\|F\|_a = \sup_{q \in [0; \|F\|_{\infty}^{-2})} \{N(q) | A(q) \leq a\},$$

где функции $A(q)$ и $N(q)$ определены через (4), (5).

5. Особенности вычисления анизотропийной нормы в частотной области

Для нахождения значения q_* , на котором достигается супремум среднеквадратичного коэффициента усиления, в случае нулевого матожидания можно было воспользоваться численным методом, использующем свойства выпуклости и монотонности функций $A(q)$ и $N(q)$ (например, методом Ньютона). При этом формула для анизотропийной нормы принимает вид

$$\|F\|_a = N(A^{-1}(a)), \quad A^{-1}(a) = \{q : A(q) = a\},$$

причем последнее множество в силу монотонности функции $A(q)$ состоит из одного элемента, и решение задачи единственно. Покажем, что при ненулевом матожидании $\mathcal{M} \neq 0$ функция $A(q)$ теряет свойство монотонности.

Поскольку

$$\frac{\partial S(q, \omega)}{\partial q} = \frac{1}{q} S^2(q, \omega) - \frac{1}{q} S(q, \omega),$$

то

$$\dot{\Phi}(q) \doteq \frac{d\Phi(q)}{dq} = \frac{1}{2\pi m} \int_{-\pi}^{\pi} \text{tr} \left(\frac{1}{q} S^2(q, \omega) - \frac{1}{q} S(q, \omega) \right) d\omega,$$

$$\dot{\Psi}(q) \doteq \frac{d\Psi(q)}{dq} = \frac{1}{2\pi m} \int_{-\pi}^{\pi} \text{tr} \left(\frac{1}{q} S(q, \omega) - \frac{1}{q} I_m \right) d\omega$$

и

$$\dot{A}(q) \doteq \frac{dA(q)}{dq} = \frac{m}{2} \left(\frac{\dot{\Phi}(q)}{\Phi(q) + \frac{1}{m} |\mathcal{M}|^2} - \dot{\Psi}(q) \right).$$

Функция $A(q)$ стремится к бесконечности при $q \rightarrow \|F\|_{\infty}^{-2} - 0$. Покажем, что при $q \rightarrow 0 + 0$ функция $A(q)$ убывает. В силу

$$\begin{aligned} \lim_{q \rightarrow 0+0} S(q) &= \lim_{q \rightarrow 0+0} (I_m - q\Lambda(\omega))^{-1} \simeq I_m + q\Lambda(\omega), \\ \lim_{q \rightarrow 0+0} S^2(q) &= \lim_{q \rightarrow 0+0} (I_m - q\Lambda(\omega))^{-2} \simeq I_m + 2q\Lambda(\omega) \end{aligned}$$

имеем

$$\begin{aligned} \lim_{q \rightarrow 0+0} \dot{\Phi}(q) &= \lim_{q \rightarrow 0+0} \frac{1}{2\pi m} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{tr} \left(\frac{1}{q} S^2(q, \omega) - \frac{1}{q} S(q, \omega) \right) d\omega \simeq \\ &\simeq \frac{1}{2\pi m} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{tr} \left(\frac{1}{q} I_m + 2\Lambda(\omega) - \frac{1}{q} I_m - \Lambda(\omega) \right) d\omega = \frac{1}{m} \|F\|_2^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{q \rightarrow 0+0} \dot{\Psi}(q) &= \lim_{q \rightarrow 0+0} \frac{1}{2\pi m} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{tr} \left(\frac{1}{q} S(q, \omega) - \frac{1}{q} I_m \right) d\omega \simeq \\ &\simeq \frac{1}{2\pi m} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{tr} \left(\frac{1}{q} I_m + \Lambda(\omega) - \frac{1}{q} I_m \right) d\omega = \frac{1}{m} \|F\|_2^2, \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\lim_{q \rightarrow 0+0} \dot{A}(q) = \lim_{q \rightarrow 0+0} \frac{m}{2} \left(\frac{\dot{\Phi}(q)}{\Phi(q) + \frac{1}{m} |\mathcal{M}|^2} - \dot{\Psi}(q) \right) \simeq \frac{\alpha - 1}{m} \|F\|_2^2,$$

где

$$\alpha = \left(1 + \frac{1}{m} |\mathcal{M}|^2 \right)^{-1} < 1 \quad \forall \mathcal{M} \neq 0.$$

Таким образом,

$$\lim_{q \rightarrow 0+0} \dot{A}(q) < 0, \quad \lim_{q \rightarrow \|F\|_{\infty}^{-2} - 0} \dot{A}(q) > 0,$$

что означает, что функция $A(q)$ является немонотонной. В связи с этим уравнение $A(q) = a$ будет иметь несколько решений.

Если бы функция $N(q)$ была неубывающей по q , то формула (7) приняла бы вид

$$\|F\|_a = N(q_{max}), \quad q_{max} = \max \{ q \in [0; \|F\|_{\infty}^{-2}] : A(q) = a \}.$$

Тем не менее функция $N(q)$ не обязательно является монотонной.

Приведем условие ее немонотонности. Поскольку

$$\frac{dN^2(q)}{dq} = 2N(q) \frac{dN(q)}{dq} \quad \text{и} \quad N(q) \geq 0,$$

то

$$\frac{dN(q)}{dq} \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dN^2(q)}{dq} \leq 0.$$

Для функции $N^2(q)$ справедливо, что

$$\lim_{q \rightarrow 0+0} \frac{dN^2(q)}{dq} = \frac{\|F\|_4^4 |\mathcal{M}|^2 - \|F\|_2^4 + m \|F\|_4^4 - \|F\|_2^2 |\mathcal{F}\mathcal{M}|^2}{(m + |\mathcal{M}|^2)^2},$$

следовательно,

$$\lim_{q \rightarrow 0+0} \frac{dN(q)}{dq} \leq 0 \Leftrightarrow \|F\|_4^4 \leq \|F\|_2^2 \frac{\|F\|_2^2 + |\mathcal{F}\mathcal{M}|^2}{m + |\mathcal{M}|^2}.$$

Ввиду того, что для системы F имеет место неравенство [2]

$$m \|F\|_4^4 \geq \|F\|_2^4,$$

необходимое условие убывания функции $N(q)$ в окрестности нуля примет вид

$$\frac{|\mathcal{F}\mathcal{M}|^2}{|\mathcal{M}|^2} \geq \frac{\|F\|_2^2}{m}.$$

В заключение приведем пример, демонстрирующий графический метод вычисления анизотропийной нормы системы в частотной области.

Пример 3. Рассмотрим систему

$$F \sim \begin{cases} x_{k+1} = ax_k + w_k, \\ z_k = x_k, \end{cases}$$

где $|a| < 1$, а $\{w_k\}$ – случайное воздействие с ненулевым средним μ и средней анизотропией α . Передаточная функция системы равна

$$F(z) = \frac{1}{z - \alpha}, \quad z \in \mathbb{C},$$

а \mathcal{H}_∞ -норма системы равна $\|F\|_\infty = 1/|\alpha|$. Согласно (6), спектральная плотность формирующего фильтра имеет вид

$$S(q, \omega) = 1 + \frac{q}{1 + \alpha^2 - q - 2\alpha \cos \omega}, \quad \omega \in [-\pi; \pi), \quad q \in [0; \alpha^2).$$

Подставляя в (2) и (3) найденную выше $S(q, \omega)$, получим

$$\Phi(q) = 1 + \frac{q}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \alpha^2 - q - 2\alpha \cos \omega)^{-1} d\omega,$$

$$\Psi(q) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln \left(\frac{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos \omega}{1 + \alpha^2 - q - 2\alpha \cos \omega} \right) d\omega.$$

В рамках примера ограничимся вариантом $|\alpha| < 0,5$, при котором для любого $q \in [0; \alpha^2)$ выполнено $(1 + \alpha^2 - q) - (2\alpha)^2 > 0$, а функции $\Phi(q)$ и $\Psi(q)$ равны

$$\Phi(q) = 1 + \frac{q}{\sqrt{q^2 - 2(1 - \alpha^2)q + (1 - \alpha^2)^2}},$$

$$\Psi(q) = \ln 2 - \ln \left(1 + a^2 - q + \sqrt{q^2 - 2(1 + a^2)q + (1 - a^2)^2} \right),$$

где $q \in [0; a^2)$. На рис. 1 приведены графики зависимостей $A(q)$, $N(q)$ и $N(A)$ для различных матожиданий.

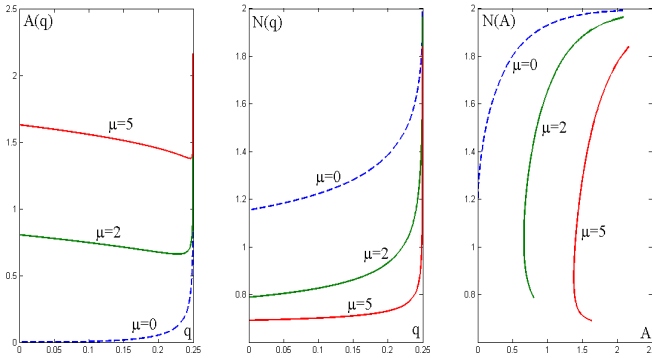


Рис. 1. Графики функций $A(q)$ (слева), $N(q)$ (по центру) и $N(A)$ (справа)

Из графиков видно, что при ненулевых математических ожиданиях уравнение $A(q) = a$ может иметь неединственное решение, и существуют два различных формирующих фильтра с одинаковым уровнем средней анизотропии. Однако согласно формуле (7) лишь один из них будет задавать анизотропийную норму. Этому фильтру будет соответствовать большее значение функции $N(q)$.

В данном примере в силу небольшой размерности исходной системы получены довольно простые уравнения, позволяющие практически напрямую находить анизотропийную норму системы. Однако с увеличением размерности аналитическое вычисление анизотропийной нормы представляет большую сложность. В

этом случае уместно использовать численный метод для нахождения решения задачи (7). •

6. Заключение

В данной работе введены понятия средней анизотропии последовательности с ненулевым математическим ожиданием и анизотропийной нормы системы, на вход которой поступает данная последовательность. Приведены формулы для вычисления средней анизотропии последовательности и анизотропийной нормы в частотной области, и показано отличие от способа вычисления анизотропийной нормы в частотной области при нулевом математическом ожидании. Приведен пример вычисления средней анизотропии и анизотропийной нормы.

Литература

1. ВЛАДИМИРОВ И.Г., КУРДЮКОВ А.П., СЕМЕНОВ А.В. *Анизотропия сигналов и энтропия линейных стационарных систем* // ДАН. – 1995. – №3. – С. 583–585.
2. ВЛАДИМИРОВ И.Г., КУРДЮКОВ А.П., СЕМЕНОВ А.В. *Асимптотика анизотропийной нормы линейных стационарных систем* // Автоматика и телемеханика. – 1999. – №3. – С. 78–87.
3. КУСТОВ А.Ю., КУРДЮКОВ А.П., НАЧИНКИНА Г.Н. *Стохастическая теория анизотропийного робастного управления*. – Москва: ИПУ РАН, 2012. – 128 с.
4. DIAMOND P., VLADIMIROV I., KURDJUKOV A. ET AL. *Anisotropy-based performance analysis of linear discrete time invariant control systems* // International Journal of Control. – 2001. – Vol. 74(1). – P. 28–42.
5. KURDYUKOV A., KUSTOV A., TCHAIKOVSKY M. ET AL. *The concept of mean anisotropy of signals with nonzero mean* // Proc. 2013 International Conference on Process Control. – Strbske Pleso, Slovakia, 2003. – P. 37–41.

6. TCHAIKOVSKY M.M., KURDJUKOV A.P., TIMIN V.N. *Strict anisotropic norm bounded real lemma in terms of inequalities* // Proc. 18th IFAC World Congress. – Milano, 2011. – P. 2332–2337.

ANISOTROPY-BASED ANALYSIS FOR CASE OF NONZERO-MEAN INPUT DISTURBANCE

Arkadiy Kustov, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, (arkadiykustov@gmail.com).

Abstract: In the created in the 90th anisotropy-based control theory the sequence of Gaussian random vectors with zero mean and certain mean anisotropy level was accepted as input perturbations acting on a linear system. This paper introduces the concepts of mean anisotropy of the sequence with nonzero mean and anisotropic norm of the system with given input. The problem of anisotropy-based analysis in frequency domain is considered and the difference is shown between classical formulas for computing mean anisotropy and anisotropic norm under the zero mean and the new formulas.

Keywords: anisotropy-based control theory, mean anisotropy, anisotropic norm, Gaussian random vectors, frequency domain.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии А. П. Курдюковым

Поступила в редакцию 15.11.2013.

Опубликована 31.07.2014.

УДК 519.715 + 681.514
ББК 22.1

СИНТЕЗ АНИЗОТРОПИЙНОГО РОБАСТНОГО РЕГУЛЯТОРА ПРИ СТРУКТУРИРОВАННОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ОБЪЕКТА УПРАВЛЕНИЯ¹

Юрченков А. В.²

(ФГБУН Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

Получено решение задачи синтеза анизотропийного регулятора при структурированной неопределенности в модели объекта управления. Показано, что исходная задача сводится к задаче \mathcal{H}_∞ -оптимизации для системы с одним дополнительным входом. Разработан численный алгоритм на основе метода гомотопий, который вычисляет матрицы анизотропийного внутренне стабилизирующего регулятора на базе \mathcal{H}_2 -регулятора. Исследованы отличия полученного регулятора и регулятора, построенного для объекта с неструктурированной неопределенностью. Показано, что синтезированный регулятор обеспечивает лучшее качество замкнутой системы управления.

Ключевые слова: анизотропийная теория робастного стохастического управления, структурированная неопределенность, метод гомотопий.

Введение

Последние двадцать лет в теории управления развивается направление, названное авторами анизотропийной теорией робастного управления [11, 25, 28]. Особенностью этой теории является выбор таких способов описания внешнего возмущения и

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант №12-07-00267.

² Александр Викторович Юрченков, аспирант (Москва, ул. Профсоюзная, д. 65, тел. (495) 334-92-60 внутр. тел. 1645).

коэффициента усиления от входа к управляемому выходу системы, которые обобщают постановки известных задач \mathcal{H}_2 - и \mathcal{H}_∞ -управления. При определении коэффициента усиления, который называется анизотропийной нормой, вводится характеристика отличия одной случайной последовательности от другой — эталонной. В задачах анизотропийной теории робастного стохастического управления используется свойство входной последовательности отличаться от «белого шума».

Мера отличия расширенного вектора случайной последовательности от гауссовского «белого шума» связана с хорошо известным в теории информации уклонением Кульбака–Лейблера или относительной энтропией.

Широко известные подходы \mathcal{H}_2 - или \mathcal{H}_∞ -теорий управления предполагают выполнение ряда предположений о входных возмущениях. Для задачи \mathcal{H}_2 -управления существенное требование состоит в том, что внешнее возмущение является гауссовским «белым шумом», в противном случае синтезированный закон управления будет крайне неэффективным. Основы этого подхода были заложены в работах Р.Е. Калмана и А.М. Летова в середине XX века. Позже задача \mathcal{H}_2 -оптимизации рассматривалась авторами J.C. Doyle, K. Glover, P.P. Khargonekar и В.А. Francis в работе [12]. В свою очередь \mathcal{H}_∞ -регуляторы проявляют излишнюю консервативность, поскольку строятся для наихудшего случая входной последовательности из l_2 . Иными словами, если входной сигнал близок по своим стохастическим характеристикам к «белому шуму», то затраты энергии на построение управления будут весьма значительными. Примеры задач \mathcal{H}_∞ -оптимизации могут быть найдены в работах G. Zames [29], J. Doyle [13], В.А. Francis [19], K. Glover [12], D. Gu [19], N. Berman, U. Shaked [9, 17], C. Scherer [26, 27], T. Iwasaki, R.E. Skelton [21, 25], P. Gahinet [15, 16], P. Apkarian [7, 8] и др.

При рассмотрении задач робастного управления для систем с параметрической неопределенностью или отсутствием оценок вероятностных характеристик задающего сигнала, можно использовать методы синтеза оптимальных анизотропийных регу-

ляторов. Можно легко показать, что параметрическая неопределенность может быть сведена к структурированной, хотя обратное утверждение не всегда верно. Следовательно, все результаты, полученные для параметрической неопределенности, остаются в силе и для структурированной, как наиболее общей. То есть имеет смысл формулировать задачи робастного управления именно в терминах неопределенности, имеющей специальную структуру. Дискретная линейная математическая модель объекта, содержащего этот вид неопределенности, представлена ниже:

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= Ax_k + B_0w_k + B_1u_k, \\y_k &= C_1x_k + D_{11}w_k, \\z_k &= C_2x_k + D_{22}u_k, \\w_k &= \Delta z_k,\end{aligned}$$

где Δ принадлежит множеству

$$\Delta = \{ \text{block diag} (\delta_1 I_{k_1}, \dots, \delta_s I_{k_s}, \Delta_1, \dots, \Delta_f) : \delta_i \in \mathbb{R}, \Delta_i \in \mathbb{R}^{l_i \times l_i} \}.$$

При решении задачи обеспечения робастного качества для линейной дискретной системы вводится a -анизотропийная норма системы $\|F\|_a$, которая является частным случаем стохастической нормы. Это направление развивается в ряде работ А.В. Семенова, И.Г. Владимирова, А.П. Курдюкова [25, 28], М. Karny [22], I.R. Petersen, M.R. James, P. Diamond [11, 24]. Поскольку значение a -анизотропийной нормы принадлежит интервалу, левым концом которого является масштабированная \mathcal{H}_2 -норма системы $\frac{1}{\sqrt{m}} \|F\|_2$, а правым — \mathcal{H}_∞ -норма $\|F\|_\infty$, то при предельных значениях уровня средней анизотропии входного сигнала a , равным нулю или бесконечности, величина a -анизотропийной нормы $\|F\|_a$ будет совпадать с одним из значений $\frac{1}{\sqrt{m}} \|F\|_2$ или $\|F\|_\infty$ соответственно.

К известным результатам анизотропийной теории относятся задача стохастической \mathcal{H}_∞ -оптимизации систем с параметрической неопределенностью, многокритериальные задачи оптимизации, построение анизотропийных субоптимальных регуляторов для дескрипторных систем, синтез субоптимальных регуляторов методами выпуклой оптимизации.

В работе [2] приведено решение стохастической задачи \mathcal{H}_∞ -оптимизации для системы с параметрической неопределенностью. Авторами продемонстрировано, как можно изменить математическую модель системы путем введения дополнительного входа, что позволяет погрузить задачу в более общую, которая решается методами анизотропийной теории.

Обеспечение робастного качества для системы со структурированной неопределенностью с критерием в виде a -анизотропийной нормы передаточной функции от задающего возмущения к управляемому выходу имеет ряд преимуществ перед критерием качества, взятым в виде \mathcal{H}_2 - или \mathcal{H}_∞ -нормы передаточной функции замкнутой системы. В данной работе формулируется и решается анизотропийная задача стохастической \mathcal{H}_∞ -оптимизации для линейных дискретных систем со структурированной неопределенностью. Постановка заключается в том, что нужно найти такой регулятор K , который внутренне стабилизирует замкнутую систему и минимизирует максимальное значение a -анизотропийной нормы замкнутой системы, где $a \geq 0$ — уровень средней анизотропии входного сигнала, а максимум берется по всем неопределенностям из заданного класса Δ .

В первом разделе статьи приводится постановка задачи. Во втором разделе показано как свести исходную задачу со структурированной неопределенностью к более общей задаче, модель объекта управления которой не содержит неопределенность, хотя имеет один дополнительный вход. В третьем разделе продемонстрировано, что новая задача эквивалентна смешанной задаче $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ -оптимизации, а ее функционал качества является мажорирующим для функционала исходной задачи. В четвертом и пятом разделах строятся «наихудшие» последовательности вход-

ных воздействий для системы. В шестом разделе описывается построение оптимального регулятора в виде наблюдателя. Седьмой раздел содержит описание алгоритма построения регулятора. Заключительный, восьмой, раздел иллюстрирует преимущества синтезированного регулятора на численном примере.

1. Постановка задачи

Рассмотрим линейную дискретную стационарную систему F , описываемую уравнениями

$$(1) \quad \begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + B_0q_k + B_1w_k + B_2u_k, \\ z_k &= C_1x_k + D_{12}u_k, \\ p_k &= C_2x_k + D_{22}u_k, \\ y_k &= C_3x_k + D_{33}w_k, \\ q_k &= \Delta p_k, \end{aligned}$$

где $k \in \mathbb{Z}$, $x_k \in \mathbb{R}^n$ — состояние системы; $z_k \in \mathbb{R}^{r_1}$ — управляемый выход; $p_k \in \mathbb{R}^{m_0}$ — выход неопределенности; $y_k \in \mathbb{R}^{r_2}$ — наблюдаемый выход; $q_k \in \mathbb{R}^{m_0}$ — вход неопределенности; $u_k \in \mathbb{R}^{m_2}$ — управление; $w_k \in \mathbb{R}^{m_1}$ — возмущение. Матрицы системы (1) будем считать известными, за исключением матрицы оператора неопределенности Δ , которая принадлежит множеству

$$(2) \quad \Delta = \left\{ \Delta = \text{block diag} (\Delta_1, \Delta_2) : \Delta_i \in \mathbb{R}^{l_i \times l_i}, \|\Delta_i\|_\infty \leq 1 \right\}.$$

Последнее равенство в системе (1) представляет собой связь между входом p и выходом q с точки зрения сохранения вход-выходных соотношений посредством матрицы оператора неопределенности Δ .

Структурная схема рассматриваемого объекта представлена на рис. 1.

Задача анизотропной оптимизации состоит в следующем:
Задача 1. Для системы вида (1) и верхней границы уровня средней анизотропии возмущения $a \geq 0$ найти стабилизирующий регулятор $K \in \mathcal{K}$, который минимизирует максимальное значение a -анизотропной нормы системы $F_l(F_u(M, \Delta), K)$ по всем допустимым значениям неопределенности $\Delta \in \Delta$, т.е. доставляет

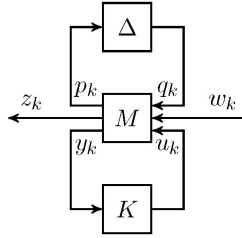


Рис. 1. Система с неопределенностью и регулятором в контуре обратной связи

минимум функционалу

$$(3) \quad J_0(K) = \sup_{\Delta \in \Delta} \|F_l(F_u(M, \Delta), K)\|_a.$$

Здесь стоит описать множество допустимых регуляторов \mathcal{K} . Регулятор K будем называть допустимым (из множества \mathcal{K}), если он является стабилизирующим и причинным, т.е. управление на каждом шаге u_k зависит только от предыстории измерений $\{y_j\}_{j < k}$ и не зависит от текущего измерения состояния y_k .

Первым шагом на пути решения задачи анизотропийной оптимизации для системы, содержащей структурированную неопределенность, будет погружение исходной задачи в более общую, модель объекта управления которой не содержит в себе неопределенность, но в которой присутствует дополнительный входной сигнал. Такой метод позволит свести задачу анизотропийной оптимизации для системы со структурированной неопределенностью к задаче анизотропийной оптимизации для полностью определенной системы.

В рамках рассматриваемой системы потребуем выполнение основных предположений:

$$(A) \quad \begin{aligned} D_{12}^\top C_1 &= 0, \\ D_{12}^\top D_{12} &= I; \end{aligned}$$

(B) номинальная система (при $\Delta \equiv 0$) наблюдаема и управляема;

(C) $r_1 < m_1$;

(D) матрица D_{33} в (1) имеет полный строчный ранг:

$$\text{rank}D_{33} = r_2 \leq m_1;$$

(E) матрица D_{12} в (1) имеет полный столбцовый ранг:

$$\text{rank}D_{12} = m_2 \leq r_1;$$

Предположение (A) не ограничивает общности, так как если оно не выполнено, то к системе следует применить преобразование, указанное в [18], которое приводит ее к указанному виду. Предположения (B) являются стандартными для задач управления. Предположение (C) гарантирует, что для любого регулятора K система $F_l(F_u(M, \Delta), K)$ удовлетворяет неравенству $\frac{1}{\sqrt{m}} \|F_l(*)\|_2 < \|F_l(*)\|_\infty$. Предположение (D) гарантирует невырожденность уравнения Риккати для оптимального оценщика из раздела 7.1, а (E) — невырожденность уравнения Риккати для оптимального \mathcal{H}_2 -регулятора, полученного в 8.2.

2. Погружение в более общую задачу стохастической \mathcal{H}_∞ -оптимизации

На основе модели (1) введем вспомогательную систему:

$$(4) \quad \begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + B_1w_k + B_2u_k + B_3\eta_k, \\ \tilde{z}_k &= \begin{bmatrix} C_1x_k + D_{12}u_k \\ \gamma_1 C_{12}x_k \\ \gamma_2 C_{22}x_k \\ \gamma_1 D_{1,22}u_k \\ \gamma_2 D_{2,22}u_k \end{bmatrix}, \\ y_k &= C_3x_k + D_{33}w_k, \end{aligned}$$

где $\gamma_i, i = \overline{1, 2}$ — некоторые положительные параметры, матрица неопределенности имеет диагональный вид $\Delta = \text{diag}(\Delta_1, \Delta_2)$, $\Delta_i \in \mathbb{R}^{s_i \times s_i}$, $s_1 + s_2 = m_0$, а матрица B_3 имеет блочный вид $B_3 = [B_{01}, B_{02}, B_{01}, B_{02}]^\top$, где отдельные блоки получены из матрицы B_0 следующим образом $B_0 = [B_{01}, B_{02}]$, $B_{0i} \in \mathbb{R}^{n \times s_i}$, новый векторный вход системы будет иметь размерность \mathbb{R}^{2m_0} , остальные матрицы совпадают с матрицами в (1), матрицы C_2

и D_{22} также разбивается на блоки $[C_{12}, C_{22}]^\top, C_{i2} \in \mathbb{R}^{s_i \times n}$ и $D_{22} = [D_{1,22}, D_{2,22}]^\top, D_{i,22} \in \mathbb{R}^{s_i \times m_2}$. Единственная априорная информация о входном воздействии η_k заключается в том, что оно берется из множества сигналов в ограниченной мощностной нормой, т.е. $\|\eta_k\|_{\mathcal{P}} < \infty$. Тогда схема замкнутой системы примет вид, изображенный на рис. 2.

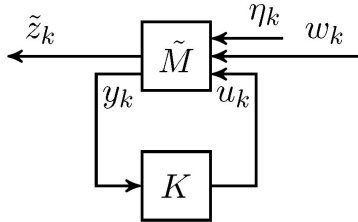


Рис. 2. Замкнутая система с дополнительным входом

Исходная система (1) будет являться вложенной по отношению к системе (4), если принять $\eta_k = (\Delta_1 C_{12} x_k, \Delta_2 C_{22} x_k, \Delta_1 D_{1,22} u_k, \Delta_2 D_{2,22} u_k)^\top$. Теперь можно сформулировать задачу стохастической \mathcal{H}_∞ -оптимизации для системы (4):

Задача 2. Для системы вида (4) и верхней границы уровня анизотропии входного сигнала $a \geq 0$ найти допустимый регулятор $K \in \mathcal{K}$, который минимизирует максимальное значение a -анизотропийной нормы передаточной функции системы $F_l(\tilde{M}, K)$ для любых входных воздействий, т.е. доставляет минимум функционалу

$$(5) \quad J(K, \gamma) = \sup_{\eta_k \in l_{\mathcal{P}}^{2m_0}} \sup_{W \in \mathcal{B}W_a} \left(\|\tilde{Z}\|_{\mathcal{P}}^2 - \|\Gamma \eta\|_{\mathcal{P}}^2 \right).$$

3. Связь между задачей 2 и смешанной задачей оптимизации

Следующая теорема поясняет, почему решение задачи 2 эквивалентно решению смешанной задачи оптимизации.

Теорема 1. Решение задачи 2 является также решением

следующей смешанной задачи оптимизации: для фиксированных параметров γ_1 и γ_2 найти допустимый регулятор $K \in \mathcal{K}$, такой что

$$(6) \quad \|T_{\tilde{z}w}\|_a \rightarrow \min_K,$$

$$(7) \quad \|T_{\tilde{z}\eta_i}\|_\infty \leq \gamma_i, \quad i = \overline{1, 4}.$$

Доказательство. Рассмотрим анизотропийную норму передаточной функции системы на рис. 2 от входа w к выходу \tilde{z} , т.е. $\|T_{\tilde{z}w}\|_a$. По определению,

$$(8) \quad \|T_{\tilde{z}w}\|_a \stackrel{def}{=} \sup_{W \in \mathcal{W}_a} \frac{\|\tilde{Z}\|_{\mathcal{P}}}{\|W\|_{\mathcal{P}}} = \sup_{W \in \mathcal{WB}_a} \|\tilde{Z}\|_{\mathcal{P}}.$$

Заметим, что указанная норма (8) будет принимать минимальное значение при том же значении аргумента W , что и функционал (5) при $\eta \equiv 0$

$$J(K, \gamma) = \sup_{W \in \mathcal{WB}_a} \|\tilde{Z}\|_{\mathcal{P}}^2 = \|T_{\tilde{z}w}\|_a^2.$$

Первое утверждение (6) теоремы доказано. Докажем неравенства (7). Поскольку требуется найти максимальное значение \mathcal{H}_∞ -нормы передаточной функции замкнутой системы изображенной на рис. 2 от входа η_1 к выходу \tilde{z} , будем полагать, что $W \equiv 0$ и $\eta_i \equiv 0, i = \overline{2, 4}$. Функционал (5) примет вид

$$J(K, \gamma) = \sup_{\eta_1 \in l_{\mathcal{P}}^{s_1}} \left(\|\tilde{Z}\|_{\mathcal{P}}^2 - \gamma_1^2 \|\eta_1\|_{\mathcal{P}}^2 \right).$$

Сперва покажем, что \mathcal{H}_∞ -норма является подчиненной по отношению к мощностной полунорме $\|\cdot\|_{\mathcal{P}}$.

$$\begin{aligned}
 (9) \quad \|T_{\tilde{z}\eta_1}\eta_1\|_{\mathcal{P}} &= \left(\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^{k=N} \mathbf{E} |T_{\tilde{z}\eta_k}\eta_{1k}|^2 \right)^{1/2} \leq \\
 &\leq \left(\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^{k=N} \mathbf{E} |T_{\max}\eta_{1k}|^2 \right)^{1/2} = \\
 &= |T_{\max}| \left(\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^{k=N} \mathbf{E} |\eta_{1k}|^2 \right)^{1/2} = \|T_{\tilde{z}\eta_1}\|_{\infty} \|\eta_1\|_{\mathcal{P}}.
 \end{aligned}$$

Фактически, мы доказали неравенство:

$$(10) \quad \|T_{\tilde{z}\eta_1}\eta_1\|_{\mathcal{P}} \leq \|T_{\tilde{z}\eta_1}\|_{\infty} \|\eta_1\|_{\mathcal{P}},$$

где равенство достигается для некоторого $\eta_1^* = \arg \max \in l_{\mathcal{P}}^{s_1}$. Поскольку поставленная задача разрешима, то функционал $\|\tilde{Z}\|_{\mathcal{P}}^2 - \gamma_1^2 \|\eta\|_{\mathcal{P}}^2$ достигает максимального значения, а значит, может быть ограничен сверху, в том числе и для η_1^* . Не ограничивая общности, можно заявить, что точная верхняя граница (5) существует и равна α . Тогда выполняется следующее неравенство:

$$\|\tilde{Z}\|_{\mathcal{P}} - \gamma_1^2 \|\eta_1\|_{\mathcal{P}}^2 = \|T_{\tilde{z}\eta_1}\eta_1\|_{\mathcal{P}}^2 - \gamma_1^2 \|\eta_1\|_{\mathcal{P}}^2 \leq \alpha.$$

Принимая во внимание доказанное утверждение о подчиненной мощностной полунорме (10), получаем

$$\|T_{\tilde{z}\eta_1}\|_{\infty}^2 \|\eta_1^*\|_{\mathcal{P}}^2 - \gamma_1^2 \|\eta_1^*\|_{\mathcal{P}} \leq \alpha.$$

Разделив обе части последнего неравенства на положительную величину $\|\eta_1^*\|_{\mathcal{P}}$ и выражая \mathcal{H}_∞ -норму передаточной функции от входа η_1 к выходу \tilde{z} , получаем

$$(11) \quad \|T_{\tilde{z}\eta_1}\|_{\infty} \leq \gamma_1 \sqrt{1 + \frac{\alpha}{\gamma_1^2 \|\eta_1^*\|_{\mathcal{P}}^2}}.$$

Неравенство (11) должно выполняться для любых значений $\alpha > 0$. Минимальное значение правой части (11) будет равно γ_1 , что означает условие $\|T_{\tilde{z}\eta_1}\|_{\infty} \leq \gamma_1$. Аналогично доказывается, что

$\|T_{\tilde{z}\eta_i}\|_\infty \leq \gamma_i$, $i = \overline{2,4}$. Согласно (4), при постановке задачи используются только два положительных параметра γ_1 и γ_2 , т.е. для задачи 2 условие (7) применимо при $\gamma_3 = \gamma_1$ и $\gamma_4 = \gamma_2$.

Теорема 2. Для любых входных воздействий $W \in \mathcal{BW}_a$ и $\eta_k \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}}^{2m_0}$ выполняется неравенство

$$(12) \quad J_0(K) \leq J(K, \gamma).$$

Доказательство. Для доказательства утверждения теоремы нам понадобится одно равенство

$$(13) \quad \|\tilde{z}_k\|_{\mathcal{P}}^2 = \|z_k\|_{\mathcal{P}}^2 + \gamma_1^2 \|C_{12}x_k\|_{\mathcal{P}}^2 + \gamma_2^2 \|C_{22}x_k\|_{\mathcal{P}}^2 + \gamma_1^2 \|D_{1,22}u_k\|_{\mathcal{P}}^2 + \gamma_2^2 \|D_{2,22}u_k\|_{\mathcal{P}}^2.$$

Функционал

$$(14) \quad \mathcal{L}(K, W, \eta) = \|\tilde{Z}\|_{\mathcal{P}}^2 - \|\Gamma\eta\|_{\mathcal{P}}^2$$

является функцией Лагранжа для задачи условной стохастической оптимизации с критерием качества

$$(15) \quad \sup_{\eta \in \mathcal{D}_\eta} \|\tilde{Z}\|_{\mathcal{P}}^2,$$

при ограничениях

$$(16) \quad \eta \in \mathcal{D}_\eta = \left\{ \eta \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}}^{2m_0} : \|\eta_i\|_{\mathcal{P}} \leq \|C_{i2}X\|_{\mathcal{P}}, \|\eta_{i+2}\|_{\mathcal{P}} \leq \|D_{i,22}U\|_{\mathcal{P}}, i = \overline{1,2} \right\}.$$

Преобразуем функционал (14), используя (13):

$$\mathcal{L}(K, W, \eta) = \|Z\|_{\mathcal{P}}^2 + \sum_{i=1}^2 \gamma_i^2 \left(\|C_{i2}X\|_{\mathcal{P}}^2 - \|\eta_i\|_{\mathcal{P}}^2 + \|D_{i,22}U\|_{\mathcal{P}}^2 - \|\eta_{i+2}\|_{\mathcal{P}}^2 \right).$$

Оценка сверху для функции Лагранжа (14) имеет вид:

$$(17) \quad \sup_{W \in \mathcal{BW}_a} \sup_{\eta \in \mathcal{D}_\eta} \mathcal{L}(K, W, \eta) = \sup_{W \in \mathcal{BW}_a} \sup_{\eta \in \mathcal{D}_\eta} \left\{ \|Z\|_{\mathcal{P}}^2 + \sum_{i=1}^2 \gamma_i^2 \left(\|C_{i2}X\|_{\mathcal{P}}^2 - \|\eta_i\|_{\mathcal{P}}^2 \right) + \sum_{i=1}^2 \gamma_i^2 \left(\|D_{i,22}U\|_{\mathcal{P}}^2 - \|\eta_{i+2}\|_{\mathcal{P}}^2 \right) \right\}.$$

Заметим, что для наилучшего входного воздействия \tilde{W} и соответствующего ему сигнала η последние два слагаемых в правой части (17) стремятся к нулю, т.е.

$$\sup_{W \in \mathcal{B}W_a} \sup_{\eta \in \mathcal{D}_\eta} \mathcal{L}(K, W, \eta) \geq \sup_{W \in \mathcal{B}W_a} \sup_{\eta \in \tilde{\mathcal{D}}_\eta} \mathcal{L}(K, W, \eta),$$

где

$$(18) \quad \tilde{\mathcal{D}}_\eta = \left\{ \eta \in l_{\mathcal{P}}^{2m_0} : \|\eta_i\|_{\mathcal{P}} \leq \|C_{i2}X(\eta, \tilde{W})\|_{\mathcal{P}}, \right. \\ \left. \|\eta_{i+2}\|_{\mathcal{P}} \leq \|D_{i,22}U\|_{\mathcal{P}}, i = \overline{1, 2} \right\}.$$

Очевидно, что множество $\tilde{\mathcal{D}}_\eta$ (18) является вложенным в множество \mathcal{D}_η (16). При рассмотрении системы (4) мы полагали, что новое входное воздействие η связано с исходной неопределенностью Δ специальным образом, а именно $\eta_k = (\Delta C_{12}x_k, \Delta C_{22}x_k, \Delta D_{1,22}u_k, \Delta D_{2,22}u_k)^T$. Данное предположение позволяет привести неравенства, которые завершают доказательство теоремы:

$$(19) \quad J(K, \gamma) \geq \sup_{W \in \mathcal{B}W_a} \sup_{\eta \in \mathcal{D}_\eta} \|Z\|_{\mathcal{P}}^2 \geq \sup_{W \in \mathcal{B}W_a} \sup_{\eta \in \tilde{\mathcal{D}}_\eta} \|Z\|_{\mathcal{P}}^2 = \\ = \sup_{W \in \mathcal{B}W_a} \sup_{\Delta \in \mathbf{\Delta}} \|Z\|_{\mathcal{P}}^2 = J_0(K).$$

Так как постоянные γ_1 и γ_2 являются множителями Лагранжа в задаче условной оптимизации и не равны нулю, то следующие условия можно считать достаточными условиями экстремума: если найдется такой параметр γ_0 , что

$$(20) \quad \|\tilde{\eta}_i\|_{\mathcal{P}} = \|C_{i2}X\|_{\mathcal{P}}, \|\tilde{\eta}_{i+2}\|_{\mathcal{P}} = \|D_{i,22}U\|_{\mathcal{P}}, i = \overline{1, 2},$$

где $\tilde{\eta} = \text{Arg max}_{\eta} J(K, \gamma)$, то $\inf_{\gamma} J(K, \gamma) = J(K, \gamma_0)$ для любого $K \in \mathcal{K}$, а пара $((\tilde{w}(K), \tilde{\eta}(K)), \gamma_0)$ является седловой точкой функции Лагранжа $\mathcal{L}(K, w, \eta, \gamma_0)$. Теоремы 1 и 2 означают, что исходную задачу с критерием качества (3) можно свести к задаче 2. Критерий качества (5) будет мажорирующим критерием для (3), причем разность $J(K, \gamma) - J(K)$ будет минимальна, если найдется γ_0 , удовлетворяющее условиям теоремы 2.

Рассматривая систему (4) с критерием качества (5), будем говорить о смешанной задаче $\mathcal{AB}_a/\mathcal{H}_\infty$ -оптимизации, поскольку

на вход поступают два сигнала: w_k имеет заданный уровень средней анизотропии, а η_k принадлежит множеству ограниченных по $\|\cdot\|_{\mathcal{P}}$ -норме сигналов. Решением ее будет тройка (K^*, G_0^*, G_1^*) , которая является седловой точкой функционала качества (5), причем

$$(21) \quad \mathcal{L}(K^*, G_0, G_1) \leq \mathcal{L}(K^*, G_0^*, G_1^*) \leq \mathcal{L}(K, G_0^*, G_1^*),$$

где K^* — оптимальный регулятор, G_0^* — наихудший формирующий фильтр для входа w_k , а G_1^* — наихудший формирующий фильтр для входа η_k . Другими словами, строгое математическое описание множеств, содержащих вышеперечисленные элементы K^* , G_0^* и G_1^* выглядит так

$$(22) \quad \mathcal{K}^*(G_0, G_1) = \text{Arg} \min_{K \in \mathcal{K}} \mathcal{L} \subseteq \mathcal{K},$$

$$(23) \quad \mathcal{G}_0^*(K, G_1) = \text{Arg} \max_{G \in \mathcal{G}_a, \|G_0\|_2=1} \mathcal{L} \subseteq \mathcal{G}_a,$$

$$(24) \quad \mathcal{G}_1^*(K, G_0) = \text{Arg} \max_{G_1 \in \mathcal{RH}_{\infty}^{(2m_0) \times m_1}} \mathcal{L} \subseteq \mathcal{RH}_{\infty}^{(2m_0) \times m_1}.$$

Элементы множества (22) является решением смешанной задачи $\mathcal{AB}_a/\mathcal{H}_{\infty}$ -оптимизации, при условии, что вход W замкнутой системы генерируется известным формирующим фильтром $G_0 \in \mathcal{G}_a$, т.е. $W = G_0 * V$. Вход η генерируется с помощью известного формирующего фильтра $G_1 \in \mathcal{RH}_{\infty}^{(2m_0) \times m_1}$, $\eta = G_1 * W$. Множество (23) образовано формирующими фильтрами, генерирующими «наихудшие» входные сигналы с ограниченным уровнем средней анизотропии при фиксированном регуляторе $K \in \mathcal{K}$ и фильтре $G_1 \in \mathcal{RH}_{\infty}^{(2m_0) \times m_1}$. Последнее множество (24) представляет собой множество фильтров $G_1 \in \mathcal{RH}_{\infty}^{(2m_0) \times m_1}$, генерирующих входные последовательности при фиксированном регуляторе $K \in \mathcal{K}$ и фильтре $G_0 \in \mathcal{G}_a$.

4. «Наихудший» вход с ограниченной энергией для системы, замкнутой произвольным регулятором

Решение задачи 2 начнем с поиска наихудшего входного воздействия η с ограниченной энергией. Поскольку входная после-

довательность η полностью определяется формирующим фильтром G_1 , то будем искать такую реализацию фильтра G_1 в пространстве состояний, которая доставляет максимум функционалу (5) при фиксированном фильтре G_0 и регуляторе K . Регулятор K будем искать в виде

$$(25) \quad \begin{aligned} \xi_{k+1} &= \hat{A}\xi_k + \hat{B}y_k, \\ u_k &= \hat{C}\xi_k, \end{aligned}$$

где \hat{A} , \hat{B} и \hat{C} — неизвестные матрицы. Наихудший вход η формируется следующим образом:

$$(26) \quad \tilde{\eta}_k = L\zeta_k + \Sigma^{1/2}w_k = L_1x_k + L_2\xi_k + \Sigma^{1/2}w_k,$$

где матрицы L и $\Sigma^{1/2}$ подлежат определению. Замкнутая система $F_l(\tilde{M}, K)$ представлена на рис. 2, ее реализация в пространстве состояний представлена ниже:

$$(27) \quad F_l(\tilde{M}, K) = \left[\begin{array}{cc|cc} A & B_2\hat{C} & B_1 & B_3 \\ \hat{B}C_3 & \hat{A} & \hat{B}D_{33} & 0 \\ \hline C_1 & D_{12}\hat{C} & 0 & 0 \\ \gamma_1 C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \gamma_2 C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_1 D_{1,22}\hat{C} & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2 D_{2,22}\hat{C} & 0 & 0 \end{array} \right] \equiv \left[\begin{array}{c|cc} \tilde{A} & \tilde{B} & \tilde{F} \\ \hline \tilde{C} & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Обозначим вектор состояния замкнутой системы $F_l(\tilde{M}, K)$ как объединенный вектор состояния объекта управления x_k и регулятора ξ_k , т.е. $\zeta_k \equiv (x_k, \xi_k)^\top$ и введем следующую матрицу:

$$(28) \quad Q \equiv \begin{bmatrix} C_1^\top C_1 + \gamma_1^2 C_{12}^\top C_{12} + \gamma_2^2 C_{22}^\top C_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \hat{C}^\top (D_{12}^\top D_{12} + \gamma_1^2 D_{1,22}^\top D_{1,22} + \gamma_2^2 D_{2,22}^\top D_{2,22}) \hat{C} \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим дискретное алгебраическое уравнение Риккати относительно матрицы $\tilde{Y} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$:

$$(29) \quad \tilde{Y} = \tilde{A}^\top \tilde{Y} \tilde{A} + L^\top \Sigma^{-1} L + Q,$$

$$(30) \quad L = [L_1, L_2] = \Sigma \tilde{F}^\top \tilde{Y} \tilde{A},$$

$$(31) \quad \Sigma = (\Gamma^2 - \tilde{F}^\top \tilde{Y} \tilde{F})^{-1},$$

где матрица $L \in \mathbb{R}^{l \times 2n}$ разделена на два блока L_1 и L_2 . Решение \tilde{Y} уравнения (29)–(31) называется стабилизирующим, если матрица \tilde{Y} симметрическая, матрица Σ положительно определена и матрица $\tilde{A} + \tilde{F}L$ асимптотически устойчива. Заметим, что для любых фиксированных $\gamma_i > \|T_{\tilde{z}\eta_i}\|_\infty$, $i = \overline{1,4}$, уравнение (29)–(31) имеет единственное решение.

Теорема 3. Пусть $\|T_{\tilde{z}\eta_i}\|_\infty < \gamma_i$, $i = \overline{1,4}$. Тогда

$$(32) \quad \sup_{\eta \in l_{\mathcal{P}}^{2m_0}} \left\{ \|\tilde{Z}\|_{\mathcal{P}}^2 - \|\Gamma\eta\|_{\mathcal{P}}^2 \right\} = \\ = \text{Trace} \left\{ (\tilde{B}^\top \tilde{Y} \tilde{B} + \tilde{B}^\top \tilde{Y} \tilde{F} \Sigma \tilde{F}^\top \tilde{Y} \tilde{B}) R_{ww}(0) + \right. \\ \left. + 2(\tilde{A}^\top \tilde{Y} \tilde{F} \Sigma \tilde{F}^\top \tilde{Y} \tilde{B} + \tilde{A}^\top \tilde{Y} \tilde{B}) R_{w\zeta}(0) \right\},$$

где \tilde{Y} , L и Σ удовлетворяют уравнению (29)–(31), а наилучший вход формируется согласно (26).

Доказательство. Сначала преобразуем функционал (5) согласно введенному обозначению (28):

$$(33) \quad J(K, \gamma) = \sup_{\eta_k \in l_{\mathcal{P}}^{2m_0}} \sup_{W \in \mathcal{B}W_a} \mathcal{L},$$

где \mathcal{L} представим в виде

$$\mathcal{L} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2N+1} \mathbf{E} \sum_{k=-N}^{k=N} (\zeta_k^\top Q \zeta_k - \eta_k^\top \Gamma^2 \eta_k).$$

Распишем разность $\zeta_{k+1}^\top \tilde{Y} \zeta_{k+1} - \zeta_k^\top \tilde{Y} \zeta_k$ следующим образом:

$$\zeta_{k+1}^\top \tilde{Y} \zeta_{k+1} - \zeta_k^\top \tilde{Y} \zeta_k = \\ = (\tilde{A} \zeta_k + \tilde{B} w_k + \tilde{F} \eta_k)^\top \tilde{Y} (\tilde{A} \zeta_k + \tilde{B} w_k + \tilde{F} \eta_k) - \zeta_k^\top \tilde{Y} \zeta_k = \\ = -\zeta_k^\top Q \zeta_k + \eta_k^\top \Gamma^2 \eta_k + \zeta_k^\top (\tilde{A}^\top \tilde{Y} \tilde{A} - \tilde{Y} + Q) \zeta_k + w_k^\top \tilde{B}^\top \tilde{Y} \tilde{B} w_k + \\ + \eta_k^\top (\tilde{F}^\top \tilde{Y} \tilde{F} - \Gamma^2) \eta_k + 2(\tilde{A} \zeta_k + \tilde{B} w_k)^\top \tilde{Y} \tilde{F} \eta_k + \\ + 2w_k^\top \tilde{B}^\top \tilde{Y} \tilde{B} w_k + 2\zeta_k^\top \tilde{A}^\top \tilde{Y} \tilde{B} w_k,$$

теперь сгруппируем слагаемые так, чтобы получить в качестве аддитивной добавки мощностную полунорму:

$$\begin{aligned}
 \zeta_{k+1}^\top \tilde{Y} \zeta_{k+1} - \zeta_k^\top \tilde{Y} \zeta_k &= -\zeta_k^\top Q \zeta_k + \eta_k^\top \Gamma^2 \eta_k + \zeta^\top (\tilde{A}^\top \tilde{Y} \tilde{A} - \tilde{Y} + Q) \zeta_k + \\
 &\quad + w_k^\top \tilde{B}^\top \tilde{Y} \tilde{B} w_k + \eta_k^\top (\tilde{F}^\top \tilde{Y} \tilde{F} - \Gamma^2) \eta_k \\
 &\quad + 2(\tilde{A} \zeta_k + \tilde{B} w_k)^\top \tilde{Y} \tilde{F} (\tilde{F}^\top \tilde{Y} \tilde{F} - \Gamma^2)^{-1/2} (\tilde{F}^\top \tilde{Y} \tilde{F} - \Gamma^2)^{1/2} \eta_k + \\
 &\quad + ((\Gamma^2 - \tilde{F}^\top \tilde{Y} \tilde{F}) \tilde{F}^\top \tilde{Y} (\tilde{A} \zeta_k + \tilde{B} w_k))^\top (\Gamma^2 - \tilde{F}^\top \tilde{Y} \tilde{F})^{-1/2} \tilde{F}^\top \tilde{Y} (\tilde{A} \zeta_k + \tilde{B} w_k) - \\
 &\quad - ((\Gamma^2 - \tilde{F}^\top \tilde{Y} \tilde{F}) \tilde{F}^\top \tilde{Y} (\tilde{A} \zeta_k + \tilde{B} w_k))^\top (\Gamma^2 - \tilde{F}^\top \tilde{Y} \tilde{F})^{-1/2} \tilde{F}^\top \tilde{Y} (\tilde{A} \zeta_k + \tilde{B} w_k) + \\
 &\quad + 2\zeta_k^\top \tilde{A}^\top \tilde{Y} \tilde{B} w_k = -\zeta_k^\top Q \zeta_k + \eta_k^\top \Gamma^2 \eta_k + \\
 &\quad + \zeta^\top (\tilde{A}^\top \tilde{Y} \tilde{A} - \tilde{Y} + Q) \zeta_k + w_k^\top \tilde{B}^\top \tilde{Y} \tilde{B} w_k - \\
 &\quad - \left\| (\Gamma^2 - \tilde{F}^\top \tilde{Y} \tilde{F})^{1/2} \eta_k - (\Gamma^2 - \tilde{F}^\top \tilde{Y} \tilde{F})^{-1/2} \tilde{F}^\top \tilde{Y} (\tilde{A} \zeta_k + \tilde{B} w_k) \right\|_{\mathcal{P}}^2 + \\
 &\quad + (\tilde{A} \zeta_k + \tilde{B} w_k)^\top \tilde{Y} \tilde{F} (\Gamma^2 - \tilde{F}^\top \tilde{Y} \tilde{F})^{-1} \tilde{F}^\top \tilde{Y} (\tilde{A} \zeta_k + \tilde{B} w_k) + 2\zeta_k^\top \tilde{A}^\top \tilde{Y} \tilde{B} w_k,
 \end{aligned}$$

упрощая последнее выражение, получим:

$$\begin{aligned}
 \zeta_{k+1}^\top \tilde{Y} \zeta_{k+1} - \zeta_k^\top \tilde{Y} \zeta_k &= -\zeta_k^\top Q \zeta_k + \\
 &\quad + \eta_k^\top \Gamma^2 \eta_k + \zeta^\top (\tilde{A}^\top \tilde{Y} \tilde{A} - \tilde{Y} + Q + \tilde{A}^\top \tilde{Y} \tilde{F} (\Gamma^2 - \tilde{F}^\top \tilde{Y} \tilde{F})^{-1} \tilde{F}^\top \tilde{Y} \tilde{A}) \zeta_k + \\
 &\quad + w_k^\top (\tilde{B}^\top \tilde{Y} \tilde{B} + \tilde{B}^\top \tilde{Y} \tilde{F} (\Gamma^2 - \tilde{F}^\top \tilde{Y} \tilde{F})^{-1} \tilde{F}^\top \tilde{Y} \tilde{B}) + \\
 &\quad + 2\zeta_k^\top (\tilde{A}^\top \tilde{Y} \tilde{B} + \tilde{A}^\top \tilde{Y} \tilde{F} (\Gamma^2 - \tilde{F}^\top \tilde{Y} \tilde{F})^{-1} \tilde{F}^\top \tilde{Y} \tilde{B}) w_k - \\
 &\quad - \left\| (\Gamma^2 - \tilde{F}^\top \tilde{Y} \tilde{F})^{1/2} \eta_k - (\Gamma^2 - \tilde{F}^\top \tilde{Y} \tilde{F})^{-1/2} \tilde{F}^\top \tilde{Y} (\tilde{A} \zeta_k + \tilde{B} w_k) \right\|_{\mathcal{P}}^2.
 \end{aligned}$$

Суммируя от $-N$ до N , беря среднее, учитывая (29), (31) и переходя к пределу при $N \rightarrow +\infty$, имеем следующее:

$$\begin{aligned}
 (34) \quad \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2N+1} \mathbf{E} \sum_{k=-N}^{k=N} (\zeta_{k+1}^\top \tilde{Y} \zeta_{k+1} - \zeta_k^\top \tilde{Y} \zeta_k) &= \\
 &= \mathcal{L} - \left\| \Sigma^{-1/2} \eta_k - \Sigma^{1/2} (\tilde{A} \zeta_k + \tilde{B} w_k) \right\|_{\mathcal{P}} + \\
 &\quad + \text{Trace} \left\{ (\tilde{B}^\top \tilde{Y} \tilde{B} + \tilde{B}^\top \tilde{Y} \tilde{F} \Sigma \tilde{F}^\top \tilde{Y} \tilde{B}) R_{w\tilde{w}}(0) + \right. \\
 &\quad \left. + 2(\tilde{A}^\top \tilde{Y} \tilde{B} + \tilde{A}^\top \tilde{Y} \tilde{F} \Sigma \tilde{F}^\top \tilde{Y} \tilde{B}) R_{w\zeta}(0) \right\}.
 \end{aligned}$$

Левая часть последнего неравенства равна нулю вследствие предположений о внешних входных сигналах, поэтому

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\|\Sigma^{-1/2}\eta_k - \Sigma^{1/2}(\tilde{A}\zeta_k + \tilde{B}w_k)\|_{\mathcal{P}} + \\ & + \text{Trace} \left\{ (\tilde{B}^\top \tilde{Y} \tilde{B} + \tilde{B}^\top \tilde{Y} \tilde{F} \Sigma \tilde{F}^\top \tilde{Y} \tilde{B}) R_{ww}(0) + \right. \\ & \left. + 2(\tilde{A}^\top \tilde{Y} \tilde{B} + \tilde{A}^\top \tilde{Y} \tilde{F} \Sigma \tilde{F}^\top \tilde{Y} \tilde{B}) R_{w\zeta}(0) \right\}. \end{aligned}$$

Последнее равенство завершает доказательство теоремы после обнуления первого слагаемого в силу (26).

Наихудший вход $\tilde{\eta}$ может быть сгенерирован из входного сигнала W посредством формирующего фильтра $G_1 \in \mathcal{RH}_\infty^{(2m_0) \times m_1}$, внутреннее состояние которого является копией состояния ζ_k системы $F_l(\tilde{M}, K)$. Реализация такого фильтра имеет вид

$$(35) \quad \tilde{G}_1 = \left[\begin{array}{c|c} \tilde{A} + \tilde{F}L & \tilde{B} + \tilde{F}\Sigma^{1/2} \\ \hline L & \Sigma^{1/2} \end{array} \right].$$

5. «Наихудший» вход с ограниченным спектром для системы, замкнутой допустимым регулятором при «наихудшем» дополнительном входе с ограниченной энергией

Рассмотрим систему (4), на вход которой подается (26). На языке передаточных функций вход–выходное соотношение имеет вид $Z = F_w W$, где F_w имеет следующую структуру:

$$(36) \quad F_w = F_l(\tilde{M}, K) \left[\begin{array}{c} I \\ \tilde{G}_1 \end{array} \right] \equiv \left[\begin{array}{c|c} A_w & B_w \\ \hline C_w & 0 \end{array} \right] =$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} A + B_3L_1 & B_2\hat{C} + B_3L_2 & B_1 + B_3\Sigma^{1/2} \\ \hline \hat{B}C_3 & \hat{A} & \hat{B}D_{33} \\ \hline C_1 & D_{12}\hat{C} & 0 \\ \gamma_1 C_{12} & 0 & 0 \\ \gamma_2 C_{22} & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_1 D_{1,22}\hat{C} & 0 \\ 0 & \gamma_2 D_{2,22}\hat{C} & 0 \end{array} \right],$$

где матрицы $L = [L_1, L_2]$ и $\Sigma^{1/2}$ определяются из (29)–(31). Структурная схема системы представлена на рис. 3.

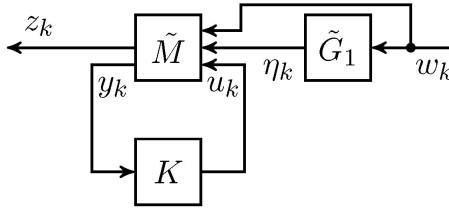


Рис. 3. Замкнутая система с дополнительным входом

На данном этапе необходимо обеспечить на вход системы наилучшую входную последовательность $\tilde{W} \in \mathcal{W}_a$, доставляющую максимум функционалу $\|F_w\|_2^2$. Под поиском наилучшей входной последовательности \tilde{W} подразумевается синтез фильтра \tilde{G}_0 из (23), который сводится к следующей задаче оптимизации:

$$(37) \quad \sup_{G_0 \in \mathcal{G}_a} \|F_w G_0\|_2^2 = \sup_{G_0 \in \mathcal{G}_a} \left\| F_l(\tilde{M}, K) \begin{bmatrix} I_{m_1} \\ \tilde{G}_1 \end{bmatrix} G_0 \right\|_2^2.$$

Задача (37) может быть решена с помощью анизотропийной теории.

Частотное описание наилучшего фильтра \tilde{G}_0 можно получить согласно утверждению.

Теорема 4. Пусть система $F_w \in \mathcal{RH}^{(r_1+2m_0) \times m_1}$ удовлетворяет условию $\frac{1}{\sqrt{m}} \|F_w\|_2 < \|F_w\|_\infty$. Если спектральная плотность фильтра $G_0 \in \mathcal{RH}^{m_1 \times m_1}$ имеет вид

$$(38) \quad \hat{G}_0(\omega) \hat{G}_0^*(\omega) = \left(I_{m_1} - q \hat{F}_w^* \hat{F}_w \right)^{-1}, \quad -\pi \leq \omega < \pi$$

для $q = \bar{A}^{-1}(G_0)$, то G_0 принадлежит множеству наилучших формирующих фильтров (23).

Чтобы описать наилучший формирующий фильтр \tilde{G}_0 в пространстве состояний, будем искать входной сигнал \tilde{w}_k в виде

$$(39) \quad \tilde{w}_k = L_w \zeta_k + \Sigma_w^{1/2} v_k,$$

где $L_w \in \mathbb{R}^{m_1 \times 2n}$ такая, что $A_w + B_w L_w$ асимптотически устойчива, а $\Sigma_w \in \mathbb{R}^{m_1 \times m_1}$ — положительно определенная симметрическая матрица. Соответствующий формирующий фильтр G_0 со

входом $V \in \mathcal{W}_0$ и выходом $W \in \mathcal{W}_a$ имеет следующую реализацию в пространстве состояний:

$$(40) \quad \tilde{G}_0 = \left[\begin{array}{c|c} A_w + B_w L_w & B_w \Sigma_w^{1/2} \\ \hline L_w & \Sigma_w^{1/2} \end{array} \right].$$

Рассмотрим следующее уравнение Риккати относительно матрицы $R \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$:

$$(41) \quad R = A_w^\top R A_w + q C_w^\top C_w + L_w^\top \Sigma_w^{-1} L_w,$$

$$(42) \quad L_w = \Sigma_w (B_w^\top R A_w + q D_w^\top C_w),$$

$$(43) \quad \Sigma_w = (I_{m_1} - B_w^\top R B_w)^{-1}.$$

Решение уравнения (41)–(43) называется стабилизирующим, если матрица R симметрическая, матрица Σ_w положительно определена, а матрица $A_w + B_w L_w$ асимптотически устойчива. Заметим, что для любого $q \in [0, \|F_w\|_\infty^{-2})$ уравнение Риккати имеет единственное стабилизирующее решение, которое положительно полуопределено. Следующая теорема дает явные выражения для матриц L_w и Σ_w , т.е. реализацию фильтра (40).

Теорема 5. Пусть система (36) асимптотически устойчива, $q \in [0, \|F_w\|_\infty^{-2})$ и матрицы L_w и Σ_w соответствуют стабилизирующему решению R уравнения Риккати (41)–(43). Тогда

- 1) формирующий фильтр (40) удовлетворяет (38);
- 2) a -анизотропийная норма системы F_w задается выражением

$$\|F_w\|_a = \frac{1}{q} \left(1 - \frac{m_1}{\text{Trace}(L_w P L_w^\top + \Sigma_w)} \right),$$

где P – это решение уравнения Ляпунова

$$(44) \quad P = (A_w + B_w L_w) P (A_w + B_w L_w)^\top + B_w \Sigma_w B_w^\top$$

и параметр $q \in [0, \|F_w\|_\infty^{-2})$ удовлетворяет уравнению

$$(45) \quad a = -\frac{1}{2} \ln \det \left(\frac{m_1 \Sigma_w}{\text{Trace}(L_w P L_w^\top + \Sigma_w)} \right).$$

Из теоремы 5 следует, что

$$J(K, \gamma) = \frac{1}{q} \left(1 - \frac{m_1}{\text{Trace}(L_w P L_w^\top + \Sigma_w)} \right)^{1/2}.$$

Представление входного сигнала \tilde{w}_k в виде (39) позволяет преобразовать выражение (32) для функционала $J(K, \gamma)$, явно выражая ковариации $R_{ww}(0)$ и $R_{w\zeta}(0)$:

$$\begin{aligned} R_{ww}(0) &= L_w P L_w^\top + \Sigma_w, \\ R_{w\zeta}(0) &= L_w P, \end{aligned}$$

где P — это решение уравнения Ляпунова (44).

Лемма 1. Для заданной системы (4) с входными сигналами η_k и w_k , формирующимися согласно (26) и (39), значение критерия качества (5) будет равно

$$(46) \quad J(K, \gamma) = \text{Trace} \left\{ (\tilde{B}^\top \tilde{Y} \tilde{B} + \tilde{B}^\top \tilde{Y} \tilde{F} \tilde{\Sigma} \tilde{F}^\top \tilde{Y} \tilde{B}) (L_w P L_w^\top + \Sigma_w) + 2(\tilde{A}^\top \tilde{Y} \tilde{F} \tilde{\Sigma} \tilde{F}^\top \tilde{Y} \tilde{B} + \tilde{A}^\top \tilde{Y} \tilde{B}) L_w P \right\},$$

где матрицы входящие в правую часть вычисляются согласно выражению (27), решениям уравнений Риккати (29)–(31) и (41)–(43).

Доказательство. Лемма может быть прямым следствием теоремы 3, если справедливы следующие равенства $R_{ww}(0) = L_w P L_w^\top + \Sigma_w$ и $R_{w\zeta}(0) = L_w P$. Докажем сначала первое:

$$\begin{aligned} R_{ww}(0) &= \mathbf{E} \left[w_0 w_0^\top \right] = \mathbf{E} \left[\left(L_w \zeta_0 + \Sigma_w^{1/2} v_0 \right) \left(L_w \zeta_0 + \Sigma_w^{1/2} v_0 \right)^\top \right] = \\ &= L_w \mathbf{E} \left[\zeta_0 \zeta_0^\top \right] L_w^\top + \Sigma_w, \end{aligned}$$

здесь последний знак равенства обусловлен независимостью векторов ζ_0 и v_0 . Аналогично доказывается и второе равенство:

$$R_{w\zeta}(0) = \mathbf{E} \left[w_0 \zeta_0^\top \right] = \mathbf{E} \left[\left(L_w \zeta_0 + \Sigma_w^{1/2} v_0 \right) \zeta_0^\top \right] = L_w \mathbf{E} \left[\zeta_0 \zeta_0^\top \right].$$

Поскольку $\mathbf{E} [\zeta_0 \zeta_0^\top]$ — это решение уравнения Ляпунова вида (44), критерий качества (5) может вычисляться согласно (46). После синтеза обоих формирующих фильтров G_0 и G_1 замкнутая система имеет вид, представленный рис. 4.

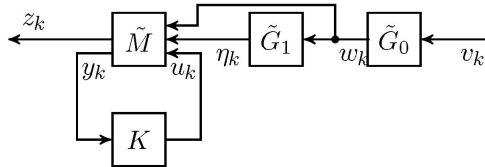


Рис. 4. Замкнутая система с «наихудшими» формирующими фильтрами

6. \mathcal{H}_2 -регулятор в форме наблюдателя

Рассмотрим систему

$$(47) \quad \mathcal{F} = F_l(\tilde{M}, K) \begin{bmatrix} I \\ \tilde{G}_1 \end{bmatrix} \tilde{G}_0 = F_l(\tilde{M}, K) \begin{bmatrix} \tilde{G}_0 \\ \tilde{G}_1 \tilde{G}_0 \end{bmatrix},$$

представленную на рис. 4, где фильтры построены в соответствии с процедурами, описанными в предыдущем разделе, для некоторого регулятора K . Замкнутая система имеет реализацию в пространстве состояний

$$\mathcal{F} = \left[\begin{array}{cc|c} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} & \tilde{B} \\ * & * & * \\ \hline * & * & * \\ \tilde{C}_{21} & \tilde{C}_{22} & \tilde{D} \end{array} \right],$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{11} &= A + B_3 L_1 + (B_1 + B_3 \Sigma^{1/2}) L_{w1}, \\ \tilde{A}_{12} &= B_2 \hat{C} + B_3 L_2 + (B_1 + B_3 \Sigma^{1/2}) L_{w2}, \\ \tilde{B} &= (B_1 + B_3 \Sigma^{1/2}) \Sigma_w^{1/2}, \\ \tilde{C}_{21} &= C_3 + D_{33} L_{w1}, \\ \tilde{C}_{22} &= D_{33} L_{w2}, \\ \tilde{D} &= D_{33} \Sigma_w^{1/2}, \end{aligned}$$

а матрицы L, Σ, L_w и Σ_w такие, как в (30)–(31) и (42)–(43). Задача 2 эквивалента задаче оптимизации

$$\inf_{K \in \mathcal{K}} J(K, \gamma) = \inf_{K \in \mathcal{K}} \|\mathcal{F}\|_2^2 = \inf_{K \in \mathcal{K}} \left\| F_l(\tilde{M}, K) \begin{bmatrix} I \\ \tilde{G}_1(K) \end{bmatrix} \tilde{G}_0(K) \right\|_2^2.$$

Это задача \mathcal{H}_2 -оптимизации в условиях неполной информации о векторе состояния для системы (47), на вход которой поступает «белый шум» с единичной ковариационной матрицей. Решение такой задачи хорошо известно [12]. В соответствии с принципом разделения, решение указанной задачи разбивается на два этапа. На первом этапе строится оцениватель состояния (оценивающий фильтр Калмана). На втором этапе строится статический регулятор, обеспечивающий заданное качество, а именно минимум \mathcal{H}_2 -нормы передаточной функции замкнутой системы. Полученный таким образом регулятор является оценивающим, т.е. его состояние является оптимальной в среднеквадратичном смысле оценкой состояния системы по выходу.

6.1. ОЦЕНИВАТЕЛЬ СОСТОЯНИЯ

Опишем процедуру построения регулятора, оценивающего состояние системы. Рассмотрим уравнение Риккати относительно матрицы $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$:

$$(48) \quad S = \tilde{A}_{11} S \tilde{A}_{11}^\top + \tilde{B} \tilde{B}^\top - \Lambda \Theta \Lambda^\top,$$

$$(49) \quad \Theta = \tilde{C}_{21} S \tilde{C}_{21}^\top + \tilde{D} \tilde{D}^\top,$$

$$(50) \quad \Lambda = (\tilde{A}_{11} S \tilde{C}_{21}^\top + \tilde{B} \tilde{D}^\top) \Theta^{-1}.$$

Решение $S = S^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$ уравнения (48)–(50) называется стабилизирующим, если матрица S является положительно полуопределенной и матрица $\tilde{A}_{11} - \Lambda \tilde{C}_{21}$ асимптотически устойчива. Заметим, что в силу предположения (D) уравнение (48)–(50) имеет не более одного стабилизирующего решения.

Теорема 6. Пусть система (4) удовлетворяет предположениям (A), (B) и (D) и пусть матрицы реализации в пространстве

состояний допустимого регулятора (25) удовлетворяют соотношениям

$$(51) \quad \begin{aligned} \hat{A} &= \tilde{A}_{11} + \tilde{A}_{12} - \Lambda(\tilde{C}_{21} + \tilde{C}_{22}), \\ \hat{B} &= \Lambda, \end{aligned}$$

где матрица Λ выражается через стабилизирующее уравнение Риккати (48)–(50). Тогда регулятор (25) является оценивающим.

Поскольку доказательство теоремы 6 принципиально не отличается от доказательства теоремы 2, приведенной в [28], оно здесь пропущено. Пожалуй стоит отметить, что доказательство теоремы — суть хорошо известная процедура построения фильтра Калмана для замкнутой системы (47), на вход которой поступает «белый шум». Подробности такого синтеза могут быть найдены в [18, 26]. Поскольку размерность системы (47) равна $2n$, указанная процедура приводит к получению оценивателя состояния такой же размерности. Однако учитывая тот факт, что состояние замкнутой системы (47) имеет вид $(x_k, \xi_k)^\top$, где ξ_k — состояние искомого оценивающего регулятора, то возможно понизить размерность вектора пространства состояний регулятора до n .

6.2. ОПТИМАЛЬНЫЙ РЕГУЛЯТОР

Заключительный этап в решении задачи 2 заключается в построении статического регулятора для разомкнутой системы

$$T = \left[\begin{array}{cc|cc} A & B_3L + (B_1 + B_3\Sigma^{1/2})L_w & (B_1 + B_3\Sigma^{1/2})\Sigma_w^{1/2} & B_2 \\ 0 & A_w + B_wL & B_w\Sigma^{1/2} & 0 \\ \hline C_1 & 0 & 0 & D_{12} \\ C_3 & D_{33}L_w & D_{33}\Sigma_w^{1/2} & 0 \end{array} \right] =$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} A & B_3L_1 + (B_1 + B_3\Sigma^{1/2})L_{w_1} & & \\ 0 & A + (B_1 + B_3\Sigma^{1/2})L_{w_1} + B_3L_1 & & \\ * & * & \dots & \\ \hline C_1 & 0 & & \\ C_3 & D_{33}L_{w_1} & & \end{array} \right]$$

$$\dots \left[\begin{array}{cc|cc} B_3 L_2 + (B_1 + B_3 \Sigma^{1/2}) L_{w_2} & & * & B_2 \\ (B_1 + B_3 \Sigma^{1/2}) L_{w_2} + B_3 L_2 + B_2 \hat{C} & & * & 0 \\ \dots & * & * & * \\ \hline & 0 & 0 & D_{12} \\ & D_{33} L_{w_2} & D_{33} \Sigma_w^{1/2} & 0 \end{array} \right],$$

где матрицы $L, \Sigma^{1/2}, L_w, \Sigma_w^{1/2}$ такие же, как и в теоремах 3 и 5. Система \mathcal{T} изображена на рис. 5.

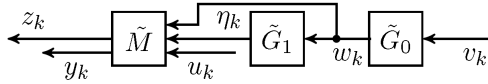


Рис. 5. Разомкнутая система

Рассмотрим уравнение Риккати относительно матрицы $T \in \mathbf{R}^{2n \times 2n}$:

$$(52) \quad T = A_u^\top T A_u + C_u^\top C_u - N^\top \Upsilon N,$$

$$(53) \quad \Upsilon = B_u^\top T B_u + D_{12}^\top D_{12},$$

$$(54) \quad N = [N_1, N_2] = -\Upsilon^{-1} (B_u^\top T A_u + D_{12}^\top C_u),$$

где $A_u \in \mathbf{R}^{2n \times 2n}$, $B_u \in \mathbf{R}^{2n \times m_2}$ и $C_u \in \mathbf{R}^{p_1 \times 2n}$ определяются следующим образом:

$$A_u = \begin{bmatrix} A & (B_1 + B_3 \Sigma^{1/2}) L_w + B_3 L \\ 0 & A + (B_1 + B_3 \Sigma^{1/2}) L_w + B_3 L + B_2 \hat{C} \end{bmatrix},$$

$$B_u = \begin{bmatrix} B_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_u = [C_1 \ 0].$$

Решение $T = T^\top \in \mathbf{R}^{2n \times 2n}$ уравнения (52)–(54) будем называть стабилизирующим, если матрица T положительно определена, а матрица $A_u + B_u N$ асимптотически устойчива. Из-за предположения, что матрица D_{12} в (1) имеет полный столбцовый ранг, уравнение (52)–(54) имеет не более одного решения.

Теорема 7. Пусть система (1) удовлетворяет предположениям (A), (B), (E) и пусть матрицы реализации в пространстве

состояний оценивающего регулятора (25) вычисляются согласно соотношениям (51) и уравнению

$$(55) \quad \hat{C} = N_1 + N_2,$$

где матрицы N_1 и N_2 выражаются через стабилизирующее решение уравнения Риккати (52)–(54). Тогда регулятор (25) является решением задачи 2.

Доказательство теоремы представляет собой синтез оптимального LQG -регулятора с критерием минимизации \mathcal{H}_2 -нормы передаточной матрицы замкнутой системы. Подробное изложение которого можно найти в [18].

7. Окончательный алгоритм синтеза регулятора

В данном разделе опишем окончательный алгоритм решения задачи 1. Поскольку исходная задача заменяется вспомогательной смешанной задачей AB_a/\mathcal{H}_∞ -оптимизации, опишем основные этапы решения последней:

- 1) фиксируем величины $\gamma_1 \neq 0$ и $\gamma_2 \neq 0$, при этом эти величины должны быть достаточно большими, чтобы уравнение (29)–(31) имело решение;
- 2) решаем систему из четырех уравнений Риккати (29)–(31), (41)–(43), (48)–(50), (52)–(54), уравнения Ляпунова (44) и нелинейного уравнения специального вида (45). Эту систему можно решить с помощью метода гомотопий [10, 23]. Решение этих уравнений дает (A, B, C, D) –представление регулятора K_γ , который является решением задачи 2.

Для того, чтобы получить оптимальное решение $K_{\gamma_0} = \arg \min_{\gamma} J(K_\gamma, \gamma)$, соответствующее наилучшему приближению к исходной задаче 1, необходимо найти $\gamma_0 = \arg \min_K J(K_\gamma, \gamma)$.

Построение итерационной процедуры выбора параметров γ_i , при котором субоптимальное решение сходится к оптимальному, должно основываться на теореме 2.

Минимальное значение функционала качества (5) равно

$$(56) \quad J(K_{\gamma_0}, \gamma_0) = \frac{1}{q} \left(1 - \frac{m_1}{\text{Trace}(L_w P L_w^\top + \Sigma_w)} \right)^{1/2},$$

где матрицы L_w, P, Σ_w и параметр q — суть решение описанной системы уравнений при $\gamma = \gamma_0$. Число (56) является мажорантой для исходного функционала качества (3).

Отметим частные случаи решения задачи. В случае $a = 0$ (в случае «белого шума» на входе системы)

$$\|T_{\dot{z}w}\|_a = \frac{1}{\sqrt{m}} \|T_{\dot{z}w}\|_2,$$

откуда в силу теоремы 1 построенный регулятор является решением задачи смешанной $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ -оптимизации [13]. В случае $a \rightarrow +\infty$ имеем

$$(57) \quad \|T_{\dot{z}w}\|_a \rightarrow \|T_{\dot{z}w}\|_\infty,$$

т.е. регулятор, полученный при достаточно больших значениях a средней анизотропии входного сигнала, является аппроксимацией центрального регулятора в задаче \mathcal{H}_∞ -оптимизации [11]. Характер поведения анизотропийной нормы в окрестности несобственной точки $a = +\infty$ и, соответственно, скорость сходимости (57) могут быть найдены в [28].

8. Численный пример

В данном разделе приводятся результаты численного расчета анизотропийного регулятора для дискретной линейной системы со структурированной неопределенностью. В качестве объекта управления была выбрана модель движения самолета при заходе на посадку [4, 5]. Результаты моделирования, такие как значения переменных управляемого выхода и управления, сравниваются с результатами, полученными при моделировании системы с неструктурированной неопределенностью.

Математическая модель объекта управления приведена ниже:

$$(58) \quad \begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + B_0q_k + B_1w_k + B_2u_k, \\ z_k &= C_1x_k + D_{12}u_k, \\ y_k &= C_2x_k + D_{22}w_k, \\ q_k &= \Delta z_k, \end{aligned}$$

где x_k — вектор состояния объекта; u_k — управляющий сигнал; w_k — внешнее возмущение; y_k — наблюдаемый выход; z_k — управляемый выход; Δ — структурированная неопределенность.

Если рассматривать систему M , замкнутую регулятором K , с передаточной матрицей $T_{zw} = \mathcal{F}_l(M, K)$ от входа внешних возмущений к управляемому выходу

$$M \sim \left[\begin{array}{cc|c} A & B_2 & B_1 \\ \hline C_1 & D_{12} & 0 \\ C_2 & 0 & D_{22} \end{array} \right], \quad K \sim \left[\begin{array}{c|c} \hat{A} & \hat{B} \\ \hline \hat{C} & 0 \end{array} \right],$$

то задача анизотропного робастного управления заключается в поиске a -анизотропного оптимального регулятора, минимизирующего влияние внешних возмущений и наличия структурированной неопределенности.

Матрицы модели объекта управления (58) имеют вид

$$A = \left[\begin{array}{cccccc} 0,9994 & -0,0008 & 0,0000 & -0,0009 & 0,0000 & 0,0009 \\ 0,0022 & 0,9938 & 0,0011 & 0,0072 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0001 & 0,0052 & 0,9842 & -0,0154 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0099 & 0,9999 & 0,0000 & 0,0000 \\ -0,0005 & 0,0124 & 0,0000 & 0,0000 & 1,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,9960 \end{array} \right],$$

$$B_0 = \left[\begin{array}{ccccc} 0,0000 & -0,0100 & 0,0005 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & -0,0004 & -0,0080 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0100 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \end{array} \right],$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0,0000 & 0,0000 \\ -0,0012 & 0,0000 \\ 0,0117 & 0,0000 \\ 0,0001 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0040 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

При заданном уровне $a \leq 0,8$ средней анизотропии внешних возмущений w_k и параметров $\gamma = [0,131 \cdot 10^{-3}, 0,131 \cdot 10^{-3}]$ методом гомотопий с ньютоновскими итерациями был построен анизотропийный регулятор со следующей (A, B, C, D) -реализацией:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 0,9886 & 0,0000 & 0,0002 & -0,0007 & -0,0018 & 0,0016 \\ 0,0014 & 0,9971 & 0,0023 & 0,0090 & -0,0051 & 0,0003 \\ -0,0161 & -0,0216 & 0,9745 & -0,0304 & -0,0151 & -0,0022 \\ -0,0010 & -0,0002 & 0,0098 & 0,9998 & -0,0041 & -0,0000 \\ -0,0023 & 0,0129 & 0,0001 & 0,0002 & 0,9828 & 0,0001 \\ -0,0134 & -0,0029 & -0,0006 & -0,0006 & -0,0025 & 0,9931 \end{bmatrix},$$

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} 0,0139 & 0,0023 \\ 0,0029 & 0,0069 \\ 0,0010 & 0,0017 \\ 0,0009 & 0,0040 \\ 0,0023 & 0,0176 \\ 0,0007 & 0,0004 \end{bmatrix},$$

$$\hat{C} = \begin{bmatrix} -1,2698 & -2,4460 & -0,8849 & -1,3832 & -1,2309 & -0,1716 \\ -3,3119 & -0,7485 & -0,1432 & -0,1570 & -0,5452 & -0,7420 \end{bmatrix}.$$

Ниже представлены результаты моделирования при наличии структурированной неопределенности в модели объекта следующего вида

$$\Delta = \begin{bmatrix} \Delta_1 & 0 \\ 0 & \Delta_1 \end{bmatrix},$$

где каждая квадратная матрица $\Delta_i \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, $i = 1, 2$. Для случая неструктурированной неопределенности $\Delta \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$.

На рис. 6,7 представлены графики управляющего воздействия и управляемого выхода.

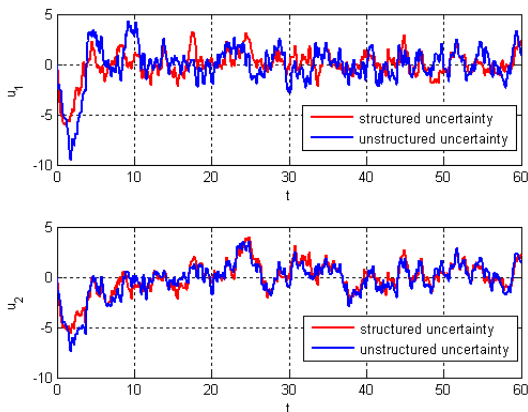


Рис. 6. Управляющие сигналы

Значение критерия качества $J(K, \gamma)$ для случая структурированной неопределенности оказывается равным $J(K, \gamma) = 1,1154$, что ниже аналогичного критерия при неструктурированной неопределенности на 0,0210.

9. Заключение

В данной работе получен и описан алгоритм построения оптимального управления на основе минимизации анизотропийной нормы замкнутой системы. Задача ставится для дискретной ли-

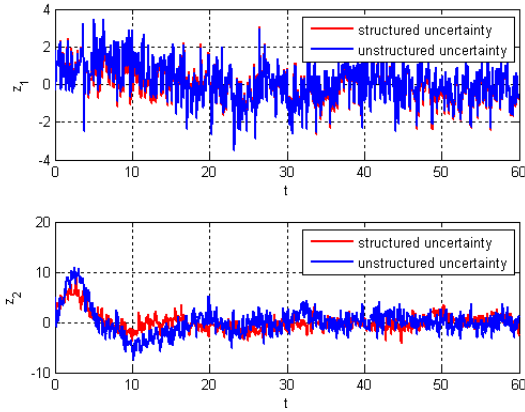


Рис. 7. Управляемый выход

нейной системы со структурированной неопределенностью и заданным уровнем средней анизотропии входного сигнала. Показано, что решение задачи построения анизотропийного регулятора может быть сведено к решению задачи \mathcal{H}_∞ -оптимизации для системы с одним дополнительным входом. Которая, в свою очередь, сводится к решению системы из четырех связанных уравнений Риккати, уравнения Ляпунова и уравнения специального вида. Численный алгоритм, разработанный на основе метода гомотопий, вычисляет матрицы искомого внутренне стабилизирующего анизотропийного регулятора на базе \mathcal{H}_2 -регулятора. Сравнительный анализ регуляторов для случая структурированной и неструктурированной неопределенности показывает, что регулятор, учитывающий структуру неопределенности, входящей в систему, дает лучшую оценку критерия качества и более низкие пиковые значения для переменных состояния объекта моделирования и закона управления. При рассмотрении номинальной системы (1) при $\Delta \equiv 0$ можно отметить, что построенный регулятор в точности совпадет с построенным в [28].

Литература

1. КИЦУЛ П.И., ЛИПЦЕР Р.Ш. *Рекуррентное оценивание случайных последовательностей*. – М.: Изд-во Ин-та пробл. упр, 1976. – 68 с.
2. КУРДЮКОВ А.П., МАКСИМОВ Е.А. *Решение стохастической задачи \mathcal{H}_∞ -оптимизации для линейных дискретных систем с параметрической неопределенностью* // Автоматика и телемеханика. – 2006. – №8. – С. 112–142.
3. КУСТОВ А.Ю., КУРДЮКОВ А.П., НАЧИНКИНА Г.Н. *Стохастическая теория анизотропного робастного управления*. – М.: ИПУ РАН, 2012. – 128 с.
4. *Разработка принципов автоматизации полета и исследование новых алгоритмов управления на этапах захода на посадку и приземления* // Отчет о научно-исследовательской работе по теме №053-93/01. – М.: Институт проблем управления РАН, 1993.
5. *Разработка основ теории нетрадиционных подходов и исследование алгоритмов управления полетом в сложных условиях* // Отчет о научно-исследовательской работе по теме №074–95/01. – М.: Институт проблем управления РАН, 1995.
6. APKARIAN P., GAHINET P., BECKER G. *Self-scheduled \mathcal{H}_∞ control of linear parameter-varying systems: a design example* // Automatica. – 1995. – Vol. 31, №9. – P. 1251–1261.
7. APKARIAN P., NOLL D. *Nonsmooth \mathcal{H}_∞ -synthesis* // IEEE Trans. Automat. Control. – 2006. – Vol. 51, №1. – P. 71–86.
8. APKARIAN P., RAVANBOD-HOSSEINI L., NOLL D. *Time domain constrained \mathcal{H}_∞ -synthesis* // Int. J. Robust Nonlinear Contr. – 2011. – Vol. 21, №2. – P. 197–217.
9. BERMAN N., SHAKED U. *\mathcal{H}_∞ Control for Discrete-Time Nonlinear Stochastic Systems* // IEEE Trans. Automat. Control. – 2006. – Vol. 51, №6. – P. 1041–1046.
10. DIAMOND P., KURDJUKOV A.P., SEMYONOV A.V. ET

- AL. *Homotopy methods and anisotropy-based stochastic \mathcal{H}_∞ -optimization of control systems* // Report 97-14, The University of Queensland, Australia. – 1997. – P. 1-22.
11. DIAMOND P., VLADIMIROV I.G., KURDJUKOV A.P. ET AL. *Anisotropy-based performance analysis of linear discrete time invariant control systems* // Int. J. Control. – 2001. – Vol. 74, №1. – P. 28-42.
 12. DOYLE J.C., GLOVER K., KHARGONEKAR P.P. ET AL. *State-space solution to standard \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ control problems* // IEEE Trans. AC. – 1989. – Vol. 34. – P. 831-846.
 13. DOYLE J., ZHOU K., GLOVER K. ET AL. *Mixed \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ performance objectives II: Optimal control* // IEEE Trans. Automat. Control. – 1994. – Vol. 39. – P. 1575-1587.
 14. FRANCIS B.A. *A Course of \mathcal{H}_∞ Control Theory* // Lecture Notes in Control and Information Sciences. – Berlin, Heidelberg: Springer. – 1987. – Vol. 88. – 141 p.
 15. GAHINET P. *Explicit controller formulas for LMI-based \mathcal{H}_∞ synthesis* // Automatica. – 1996. – Vol. 32, №7. – P. 1007-1014.
 16. GAHINET P., APKARIAN P. *A linear matrix inequality approach to \mathcal{H}_∞ control* // Int. J. of Robust Nonlinear Contr. – 1994. – Vol. 4, №4. – P. 421-448.
 17. GERSON E., SHAKED U., YAESH I. *\mathcal{H}_∞ control and filtering of discrete-time stochastic systems with multiplicative noise* // Automatica. – 2001. – Vol. 37. – P. 409-417.
 18. GREEN M., LIMEBEER D.J.N. *Linear robust control*. – N.J.: Prentice Hall, 1995. – 538 p.
 19. GU D.-W., TSAI M.C., O'YOUNG S.D. AND OTHER *State-space formulae for discrete-time \mathcal{H}_∞ optimization* // Int. J. of Contr. – 1989. – Vol. 49. – P. 1683-1723.
 20. IWASAKI T., SKELTON R.E. *All controllers for the general \mathcal{H}_∞ control problem: LMI existence conditions and state space formulas* // Automatica. – 1994. – Vol. 30, №8. – P. 1307-1317.
 21. IWASAKI T., SKELTON R.E., GRIGORIADIS K.M. *A*

- United Algebraic Approach to Linear Control Design.* – Taylor & Francis series in Systems and Control, London, 1997. – 300 p.
22. KARNY M. *Towards fully probabilistic control design* // Automatica. – 1996. – Vol. 32. – P. 1719–1722.
 23. MARITON M., BERTRAND R. *A homotopy algorithm for solving coupled Riccati equations* // Optimal. Contr. Appl. Meth. – 1985. – Vol. 6. – P. 351–357.
 24. PETERSEN I.R., JAMES M.R., DUPUIS P. *Minimax optimal control of stochastic uncertain systems with relative entropy constraints* // IEEE Trans. Automat. Control. – 2000. – Vol. 45. – P. 398–412.
 25. SEMYONOV A.V., VLADIMIROV I.G., KURDJUKOV A.P. *Stochastic approach to \mathcal{H}_∞ -optimization* // Proc. 33rd Conference on Decision and Control, Florida, USA. – 1994. – Vol. 3. – P. 2249–2250.
 26. SCHERER C. *Theory of Robust Control.* – Mechanical Engineering Systems and Control Group, Delft University of Technology, The Netherlands, April 2001. – 160 p.
 27. SCHERER C., GAHINET P., CHILALI M. *Multiobjective output-feedback control via LMI optimization* // IEEE Trans. Automat. Contr. – 1997. – Vol. 42, №7. – P. 896–911.
 28. VLADIMIROV I.G., KURDJUKOV A.P., SEMYONOV A.V. *State-space solution to anisotropy-based stochastic \mathcal{H}_∞ -optimization problem* // Proc. 13 IFAC World Congr., USA, 1996. – P. 427–432.
 29. ZAMES G. *Feedback and optimal sensitivity: Model reference transformations, multiplicative seminorms, and approximate inverses* // IEEE Trans. Automat. Control. – 1981. – Vol. 26, №2. – P. 301–320.

ANISOTROPIC ROBUST REGULATOR SYNTHESIS FOR STRUCTURED UNCERTAINTY CONTROL MODEL

Alexander Yurchenkov, Institute of Control Sciences of RAS,
Moscow.

Abstract: A problem of anisotropic control synthesis is considered and solved for the model of a control plant containing structured uncertainty. Adding a fictive input reduces the problem to the one of \mathcal{H}_∞ -optimization. The suggested numerical algorithm uses the homotopy method to calculate matrices of an anisotropic regulator basing on an \mathcal{H}_2 -regulator. The designed regulator and the standard regulator for an unstructured uncertainty model are compared. Computer simulation shows advantages of the proposed regulator.

Keywords: robust stochastic control anisotropic theory, structured uncertainty, homotopy method.

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии В. А. Уткиным*

Поступила в редакцию 10.04.2014.

Опубликована 31.07.2014.

УДК 519.6+004.94
ББК 22.193

НЕЯВНЫЕ СИЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ РЕШЕНИЙ СДУ С МАРКОВСКИМИ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯМИ

Черных Н. В.¹

*(Арзамасский политехнический институт (филиал)
Нижегородского государственного технического
университета им Р.Е. Алексеева)*

Рассматриваются неявные сильные схемы численного решения стохастических дифференциальных уравнений с марковскими переключениями диффузионной составляющей. Теоретические исследования подтверждаются примерами численного моделирования в среде Scilab.

Ключевые слова: стохастические системы, марковские переключения, модель с переключениями, зависящими от фазового состояния, неявные сильные численные схемы, сходимость.

Введение

G. George Yin, Chao Zhu в своей книге «*Stochastic modeling and applied probability. Hybrid switching diffusions. Properties and applications*» [15] подробно рассматривают сложные переключаемые диффузионные процессы (hybrid switching diffusion processes) и их применения. Слово «hybrid» означает сосуществование непрерывной динамики и дискретных событий. Изучение таких процессов необходимо, так как они применяются в радиосвязи, при обработке сигнала, в организации сетей, процессах производственного планирования, моделировании био-

¹ Надежда Валентиновна Черных, аспирантка
(nadezdacher@mail.ru).

логических систем, экосистем, в финансовом проектировании, а также для моделирования, анализа, управления и оптимизации больших систем под воздействием влияний окружающей среды.

Один из важных классов гибридных систем – стохастические дифференциальные уравнения с марковскими переключениями (SDEwMSs). Методы численного решения стохастической дифференциальных уравнений с марковскими переключениями и пуассоновскими скачками интенсивно изучались в последние годы. Многие исследователи теоретически и экспериментально рассматривают метод Эйлера (Euler–Maruyama Method), в их числе [4, 6, 11, 13, 14–15]. В [3] для решения SDEwMSs применяются методы, основанные на стохастическом разложении Тейлора (Платена). Среди последних работ в этой сфере можно также отметить [7–10, 12].

В численном моделировании стремление конструировать большое количество методов, как явных, так и неявных, вызвано тем, что различные методы обладают разными возможностями в отношении точности, устойчивости, трудоемкости и т.д.

Неявные строгие схемы обычно имеют широкий диапазон размеров шага, подходящий для приближения стохастических динамических систем, в особенности тех, которые вовлекают весьма различные временные шкалы, без чрезмерного накопления неизбежных ошибок округления. Таким образом, неявные схемы хорошо подходят, чтобы моделировать решения жестких стохастических дифференциальных уравнений. [2]

Неявные схемы для решения SDEwMSs и SDE с пуассоновскими скачками рассматривались, например, в [4, 11, 13]. В [13] авторы изучают полунявные методы (Semi-Implicit Euler–Maruyama Methods) и отмечают, что явные численные схемы являются намного менее точными в приближении, чем их неявные или полунявные аналоги.

1. Предварительные сведения

Пусть (Ω, F, P) – вероятностное пространство;
 $F_t, t_0 \leq t \leq t_0 + T$ – неубывающее семейство σ -подалгебр F ;

$\omega_r(\cdot)$ – винеровский процесс. Пусть $M = \{1, \dots, m\}$ – конечное множество.

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение с марковскими переключениями в форме

$$(1) \quad dX(t) = a(\beta(t), X(t))dt + \sigma(\beta(t), X(t))d\omega(t),$$

где $\beta(t)$ – однородный марковский процесс со счетным множеством состояний M , $\beta(0) = u_0$, $X(0) = x_0$.

$$(2) \quad P(\beta(t+h) = l \mid \beta(t) = u, x(s), \beta(s), s \leq t) = q_{ul}(x(t))h + o(h), \quad u \neq l,$$

где $x(t) \in \mathfrak{R}^n$, $a(\cdot, \cdot): \mathfrak{R}^n \times M \mapsto \mathfrak{R}^n$ и $\sigma(\cdot, \cdot): \mathfrak{R}^n \times M \mapsto \mathfrak{R}^{n \times n}$.

$Q(x) = (q_{ul}(x(t))) \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ – матрица интенсивности переходов, где для каждого t $q_{ul}(x) \geq 0$ при $u \neq l$, $q_{uu} = -q_u$, $\sum_{l=1}^m q_{ul}(x) = 0$

для каждого $u \in M$.

Предполагается, что функции $a(\beta(t), x(t))$ и $\sigma(\beta(t), x(t))$ определены при $t \in [t_0, t_0 + T]$, $x \in \mathfrak{R}^n$ и удовлетворяют следующим условиям:

– условию Липшица при всех $t \in [t_0, t_0 + T]$, $x \in \mathfrak{R}^n$, $y \in \mathfrak{R}^n$, $u \in M$:

$$(3) \quad |a(u, x) - a(u, y)| + |\sigma(u, x) - \sigma(u, y)| \leq K|x - y|, \text{ а также}$$

$$(4) \quad |a(u, x)| + |\sigma(u, x)| \leq K(1 + |x|),$$

(5) функция $a(\beta(t), x(t))$ и все ее производные непрерывны;

– первые производные по x равномерно ограничены (чтобы выполнялось условие Липшица), $a(\beta(t), x(t))$ имеет ограниченные третьи производные по x (таким образом La удовлетворяет равномерному условию Липшица), а остальные производные растут по x при $|x| \rightarrow \infty$ не быстрее линейной функции от $|x|$;

– функция $\sigma(\beta(t), x(t))$ непрерывна и дважды непрерывно дифференцируема;

Здесь и далее используем следующие обозначения: $|x|$ означает евклидову норму вектора x , xu – скалярное произведение векторов x и y ; K – положительная константа.

$X_{u,x}(t)$ или просто $X(t)$ – решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным данным $X_{u,x}(0) = x$. Разобьем промежутки $[t_0, t_0 + T]$ точками деления t_k на N равных частей, так что

$t_{k+1} - t_k = h, k = 0, 1, \dots, N - 1, t_0 + T = t_N, h = T/N$. Приближение к $X(t_k)$ будем обозначать $\bar{X}(t_k)$, где $\bar{X}_0 = X(t_0)$. Далее пусть $X - F_{t_k}$ - измеримая случайная величина и $E|X|^2 < \infty$; $X_{t_k, x}(t)$ означает решение уравнения (1) для $t_k \leq t \leq t_0 + T$, удовлетворяющее начальным данным при $t = t_k$.

Будем использовать разложение Платена, подробно рассмотренное в [2, 3], для конструирования неявных методов численного решения уравнения (1). При построении численной схемы будем использовать функцию $f(\beta(t), x(t))$ с переключаемой компонентой.

Пусть $X_{u, x}(s) = X(s)$ - решение уравнения (1); $f(\beta, x)$, где $\beta = \beta(t), X = X(t)$, - достаточно гладкая функция (скалярная или векторная). Согласно формуле Ито имеем для $t_0 \leq t \leq t_0 + T$

$$(6) \quad f(\beta(\vartheta), X(\vartheta)) = f(\beta, x) + \int_t^\vartheta \Lambda f(\beta(\vartheta_1), X(\vartheta_1)) d\omega(\vartheta_1) + \int_t^\vartheta Lf(\beta(\vartheta_1), X(\vartheta_1)) d\vartheta_1,$$

где операторы Λ и L определены следующим образом:

$$(7) \quad \Lambda = \left(\sigma, \frac{\partial}{\partial x} \right),$$

$$(8) \quad L = \left(a, \frac{\partial}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma^i \sigma^j \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j}.$$

Применим формулу (6) к функциям Λf и Lf , а затем полученные выражения для $\Lambda f(\beta(\vartheta), X(\vartheta))$ и $Lf(\beta(\vartheta), X(\vartheta))$ подставим в (6). Поступая так дальше можно получить разложения для $f(\beta(t+h), X(t+h))$, где роль степеней выполняют повторные интегралы Ито (см. [3]). Путем ряда непосредственных подстановок далее получаем следующую формулу:

$$(9) \quad f(\beta(t+h), X(t+h)) = f + \Lambda f \int_t^{t+h} d\omega(\vartheta) + Lf \int_t^{t+h} d\vartheta + \Lambda^2 f \int_t^{t+h} d\omega(\vartheta) \int_t^\vartheta d\omega(\vartheta_1) + \Lambda^3 f \int_t^{t+h} d\omega(\vartheta) \int_t^\vartheta d\omega(\vartheta_1) \int_t^{\vartheta_1} d\omega(\vartheta_2) +$$

$$+ \Lambda Lf \int_t^{t+h} d\mathcal{G} \int_t^{\mathcal{G}} d\omega(\mathcal{G}_1) + L\Lambda f \int_t^{t+h} d\omega(\mathcal{G}) \int_t^{\mathcal{G}} d\mathcal{G}_1 + L^2 f \int_t^{t+h} d\mathcal{G} \int_t^{\mathcal{G}} d\mathcal{G}_1 + R_1,$$

где $f \equiv f(\beta(t), X(t))$.

$$\begin{aligned} (10) \quad R_1 = & \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\mathcal{G}} \left(\int_t^{\mathcal{G}_1} \left(\int_t^{\mathcal{G}_2} \Lambda^4 f(\beta(\mathcal{G}_3), X(\mathcal{G}_3)) d\omega(\mathcal{G}_3) \right) d\omega(\mathcal{G}_2) \right) \times \right. \\ & \times d\omega(\mathcal{G}_1) \Big) d\omega(\mathcal{G}) + \\ & + \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\mathcal{G}} \left(\int_t^{\mathcal{G}_1} \left(\int_t^{\mathcal{G}_2} \Lambda^2 f(\beta(\mathcal{G}_2), X(\mathcal{G}_2)) d\mathcal{G}_2 \right) d\omega(\mathcal{G}_1) \right) d\omega(\mathcal{G}) + \right. \\ & + \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\mathcal{G}} \left(\int_t^{\mathcal{G}_1} \left(\int_t^{\mathcal{G}_2} \Lambda^2 Lf(\beta(\mathcal{G}_2), X(\mathcal{G}_2)) d\omega(\mathcal{G}_2) \right) d\mathcal{G}_1 \right) d\omega(\mathcal{G}) + \right. \\ & + \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\mathcal{G}} \left(\int_t^{\mathcal{G}_1} \left(\int_t^{\mathcal{G}_2} \Lambda^2 Lf(\beta(\mathcal{G}_2), X(\mathcal{G}_2)) d\omega(\mathcal{G}_2) \right) d\omega(\mathcal{G}_1) \right) d\mathcal{G} + \right. \\ & + \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\mathcal{G}} \left(\int_t^{\mathcal{G}_1} \left(\int_t^{\mathcal{G}_2} \Lambda^3 f(X(\mathcal{G}_3), X(\mathcal{G}_3)) d\mathcal{G}_3 \right) d\omega(\mathcal{G}_2) \right) d\omega(\mathcal{G}_1) \right) d\omega(\mathcal{G}) + \\ & + \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\mathcal{G}} \left(\int_t^{\mathcal{G}_1} \left(\int_t^{\mathcal{G}_2} L^2 \Lambda f(\beta(\mathcal{G}_2), X(\mathcal{G}_2)) d\mathcal{G}_2 \right) d\mathcal{G}_1 \right) d\omega(\mathcal{G}) + \right. \\ & + \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\mathcal{G}} \left(\int_t^{\mathcal{G}_1} \left(\int_t^{\mathcal{G}_2} L^2 \Lambda f(\beta(\mathcal{G}_2), X(\mathcal{G}_2)) d\mathcal{G}_2 \right) d\omega(\mathcal{G}_1) \right) d\mathcal{G} + \right. \\ & + \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\mathcal{G}} \left(\int_t^{\mathcal{G}_1} \left(\int_t^{\mathcal{G}_2} \Lambda L^2 f(\beta(\mathcal{G}_2), X(\mathcal{G}_2)) d\omega(\mathcal{G}_2) \right) d\mathcal{G}_1 \right) d\mathcal{G} + \right. \\ & + \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\mathcal{G}} \left(\int_t^{\mathcal{G}_1} \left(\int_t^{\mathcal{G}_2} L^3 f(\beta(\mathcal{G}_2), X(\mathcal{G}_2)) d\mathcal{G}_2 \right) d\mathcal{G}_1 \right) d\mathcal{G}. \end{aligned}$$

В [2] рассмотрены общие принципы построения неявных методов решения стохастических дифференциальных уравнений. Г.Н. Мильштейном показано, что введение неявности за счет выражений, входящих в стохастические интегралы, может привести к заведомо неприемлемому методу. Напротив, путем введения неявности лишь за счет выражений, входящих в нестохастические интегралы, пытаются добиться

устойчивости методов, для чего, собственно, и конструируются неявные методы [2].

Далее построим конструктивный неявный метод, подходящий для практических моделирований решений уравнений вида (1). За основу берем неявную строгую схему порядка 1,5, используемую в [5, схема (3.9), стр. 162]. Для доказательства сходимости конструируемой численной схемы к решению уравнения (1) будем использовать метод Г.Н. Мильштейна, который автор применял для доказательства сходимости другой численной схемы к решению СДУ с аддитивными шумами ([2], стр. 59). Также будем опираться на теорему о порядке точности метода, основанного на одношаговой аппроксимации Г.Н. Мильштейна (см. [2], стр. 17 или [3], стр. 5). Приведем здесь теорему без пояснений для удобства ссылок.

Теорема 1. Пусть одношаговая аппроксимация $\bar{X}_{t,x}(t+h)$ имеет порядок точности η_1 для математического ожидания отклонения и порядок точности η_2 для среднеквадратичного отклонения, т.е., при любых $t_0 \leq t \leq t_0 + T - h$, $x \in \mathfrak{R}^n$ выполняются неравенства

$$\begin{aligned} \left| E\left(X_{t,x}(t+h) - \bar{X}_{t,x}(t+h)\right) \right| &\leq K(1 + |x|^2)^{1/2} h^{\eta_1}, \\ \left[E\left|X_{t,x}(t+h) - \bar{X}_{t,x}(t+h)\right|^2 \right]^{1/2} &\leq K(1 + |x|^2)^{1/2} h^{\eta_2}, \end{aligned}$$

и пусть

$$\eta_2 \geq 1/2, \quad \eta_1 \geq \eta_2 + \frac{1}{2}.$$

Тогда при любых N и $k = 0, 1, \dots, N$ выполняется неравенство

$$\left[E\left|X_{t_0, X_0}(t_k) - \bar{X}_{t_0, X_0}(t_k)\right|^2 \right]^{1/2} \leq K\left(1 + E|X_0|^2\right)^{1/2} h^{\eta_2 - \frac{1}{2}},$$

т.е. порядок точности метода, построенного с использованием одношаговой аппроксимации $\bar{X}_{t,x}(t+h)$, равен $\eta = \eta_2 - 1/2$.

2. Постановка задачи

Рассмотрим следующую формулу, которая получается из (9) заменой $f(\beta, x)$ на вектор x . В этом случае $\Lambda f = \sigma$, $Lf = a$ (см. [3], стр. 12):

$$(11) \quad X_{u,x}(t+h) = x + \sigma \int_t^{t+h} d\omega(\mathcal{G}) + ah + \\ + \Lambda\sigma \int_t^{t+h} (\omega(\mathcal{G}) - \omega(t))d\omega(\mathcal{G}) + \\ + L\sigma \int_t^{t+h} (\mathcal{G} - t)d\omega(\mathcal{G}) + \Lambda a \int_t^{t+h} (\omega(\mathcal{G}) - \omega(t))d\mathcal{G} + \\ + \Lambda^2\sigma \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\mathcal{G}} (\omega(\mathcal{G}_1) - \omega(t))d\omega(\mathcal{G}_1) \right) d\omega(\mathcal{G}) + La \frac{h^2}{2} + R_3$$

В формуле (11) все коэффициенты σ , a , $\Lambda\sigma$, $L\sigma$, Λa , $\Lambda^2\sigma$, La вычисляются в точке (β, x) , а остаток R_2 равен

$$(12) \quad R_2 = \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\mathcal{G}} \left(\int_t^{\mathcal{G}_1} \left(\int_t^{\mathcal{G}_2} \Lambda^3\sigma(\beta(\mathcal{G}_3), X(\mathcal{G}_3))d\omega(\mathcal{G}_3) \right) d\omega(\mathcal{G}_2) \right) \right) \times \\ \times d\omega(\mathcal{G}_1) \right) d\omega(\mathcal{G}) + \\ + \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\mathcal{G}} \left(\int_t^{\mathcal{G}_1} \Lambda\Lambda\sigma(\beta(\mathcal{G}_2), X(\mathcal{G}_2))d\mathcal{G}_2 \right) d\omega(\mathcal{G}_1) \right) d\omega(\mathcal{G}) + \\ + \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\mathcal{G}} \left(\int_t^{\mathcal{G}_1} \Lambda L\sigma(\beta(\mathcal{G}_2), X(\mathcal{G}_2))d\omega(\mathcal{G}_2) \right) d\mathcal{G}_1 \right) d\omega(\mathcal{G}) + \\ + \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\mathcal{G}} \left(\int_t^{\mathcal{G}_1} \Lambda^2 a(\beta(\mathcal{G}_2), X(\mathcal{G}_2))d\omega(\mathcal{G}_2) \right) d\omega(\mathcal{G}_1) \right) d\mathcal{G} + \\ + \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\mathcal{G}} \left(\int_t^{\mathcal{G}_1} \left(\int_t^{\mathcal{G}_2} \Lambda^2\sigma(\beta(\mathcal{G}_3), X(\mathcal{G}_3))d\mathcal{G}_3 \right) d\omega(\mathcal{G}_2) \right) d\omega(\mathcal{G}_1) \right) d\omega(\mathcal{G}) + \\ + \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\mathcal{G}} \left(\int_t^{\mathcal{G}_1} L^2\sigma(\beta(\mathcal{G}_2), X(\mathcal{G}_2))d\mathcal{G}_2 \right) d\mathcal{G}_1 \right) d\omega(\mathcal{G}) +$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\mathcal{G}} \left(\int_t^{\mathcal{G}_1} L\Lambda a(\beta(\mathcal{G}_2), X(\mathcal{G}_2)) d\mathcal{G}_2 \right) d\omega(\mathcal{G}_1) \right) + \\
 & + \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\mathcal{G}} \left(\int_t^{\mathcal{G}_1} \Lambda La(\beta(\mathcal{G}_2), X(\mathcal{G}_2)) d\omega(\mathcal{G}_2) \right) d\mathcal{G}_1 \right) d\mathcal{G} + \\
 & + \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\mathcal{G}} \left(\int_t^{\mathcal{G}_1} L^2 a(\beta(\mathcal{G}_2), X(\mathcal{G}_2)) d\mathcal{G}_2 \right) d\mathcal{G}_1 \right) d\mathcal{G}.
 \end{aligned}$$

Слагаемое a представим в виде суммы $\mu a + (1 - \mu)a$. В первом слагаемом этой суммы функцию a заменим выражением

$$\begin{aligned}
 (13) \quad a(\beta, x) &= a(\beta(t+h), X(t+h)) - \int_t^{t+h} \Lambda a(\beta(\mathcal{G}), X(\mathcal{G})) d\omega(\mathcal{G}) - \\
 & - \int_t^{t+h} La(\beta(\mathcal{G}), X(\mathcal{G})) = \\
 & = a(\beta(t+h), X(t+h)) - \Lambda a \int_t^{t+h} d\omega(\mathcal{G}) - Lah + R_4,
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 (14) \quad R_4 &= - \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\mathcal{G}} \Lambda^2 a(\beta(\mathcal{G}_1), X(\mathcal{G}_1)) d\omega(\mathcal{G}_1) \right) d\omega(\mathcal{G}) - \\
 & - Lah - \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\mathcal{G}} L\Lambda a(\beta(\mathcal{G}_1), X(\mathcal{G}_1)) d\mathcal{G}_1 \right) d\omega(\mathcal{G}) - \\
 & - \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\mathcal{G}} \Lambda La(\beta(\mathcal{G}_1), X(\mathcal{G}_1)) d\omega(\mathcal{G}_1) \right) d\mathcal{G} - \\
 & - \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\mathcal{G}} L^2 a(\beta(\mathcal{G}_1), X(\mathcal{G}_1)) d\mathcal{G}_1 \right) d\mathcal{G}.
 \end{aligned}$$

Подставим (13) в (11):

$$\begin{aligned}
 (15) \quad X_{u,x}(t+h) &= x + \sigma \int_t^{t+h} d\omega(\mathcal{G}) + \mu a(\beta(t+h), X(t+h))h - \\
 & - \mu h \Lambda a \int_t^{t+h} d\omega(\mathcal{G}) + (1 - 2\mu)La \frac{h^2}{2} + (1 - \mu)ah +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \Lambda \sigma \int_t^{t+h} (\omega(\vartheta) - \omega(t)) d\omega(\vartheta) + \\
 & + L \sigma \int_t^{t+h} (\vartheta - t) d\omega(\vartheta) + \Lambda a \int_t^{t+h} (\omega(\vartheta) - \omega(t)) d\vartheta + \\
 & + \Lambda^2 \sigma \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\vartheta} (\omega(\vartheta_1) - \omega(t)) d\omega(\vartheta_1) \right) d\omega(\vartheta) + \mu h R_4 + R_3 .
 \end{aligned}$$

В слагаемом $(1 - 2\mu)Lah^2/2$ снова представим La в виде суммы $\gamma La + (1 - \gamma)La$ и в первом слагаемом функцию La заменим выражением

$$(16) \quad La(\beta, x) = La(\beta(t+h), X(t+h)) + R_5,$$

где

$$(17) \quad R_5 = - \int_t^{t+h} L^2 a(\beta(\vartheta), X(\vartheta)) d\vartheta - \int_t^{t+h} \Lambda La(\beta(\vartheta), X(\vartheta)) d\omega(\vartheta).$$

Собирая все выкладки вместе, получим

$$\begin{aligned}
 (18) \quad X(t+h) & = x + \sigma \int_t^{t+h} d\omega(\vartheta) + \mu a(\beta(t+h), X(t+h))h + \\
 & + (1 - \mu)ah - \mu h \Lambda a \int_t^{t+h} d\omega(\vartheta) + \Lambda \sigma \int_t^{t+h} (\omega(\vartheta) - \omega(t)) d\omega(\vartheta) + \\
 & + L \sigma \int_t^{t+h} (\vartheta - t) d\omega(\vartheta) + \Lambda a \int_t^{t+h} (\omega(\vartheta) - \omega(t)) d\vartheta + \\
 & + \Lambda^2 \sigma \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\vartheta} (\omega(\vartheta_1) - \omega(t)) d\omega(\vartheta_1) \right) d\omega(\vartheta) + \\
 & + (1 - \gamma)(1 - 2\mu)La \frac{h^2}{2} + \gamma(1 - 2\mu)La(\beta(t+h), X(t+h)) \frac{h^2}{2} + R_3 + \\
 & + \mu R_4 h + \beta(1 - 2\mu)R_5 \frac{h^2}{2}.
 \end{aligned}$$

На основании лемм 1 и 2, доказанных Г.Н. Мильштейном (см. [2], стр. 37–40 или [3], стр. 11) и при соответствующих условиях (3), (4), (5), наложенных на функции $a(\beta(t), x(t))$ и $\sigma_r(\beta(t), x(t))$,

$$\Phi = R_3 + \mu R_4 h + \gamma(1 - 2\mu)R_5 \frac{h^2}{2}$$

удовлетворяет условиям

$$(19) |E\Phi| \leq K(1 + |x|^2)^{\frac{1}{2}} h^3, \quad (E\Phi^2)^{\frac{1}{2}} \leq K(1 + |x|^2)^{\frac{1}{2}} h^2.$$

Если в формуле (19) отбросить Φ , то получим неявную одношаговую аппроксимацию:

$$(20) \begin{aligned} \bar{X}(t+h) = & x + \sigma(\beta, x)(\omega(t+h) - \omega(t)) + \\ & + \mu a(\beta(t+h), \bar{X}(t+h))h + (1 - \mu)a(\beta, x)h - \\ & - \mu h \Lambda a(\beta, x)(\omega(t+h) - \omega(t)) + \Lambda \sigma(\beta, x) \int_t^{t+h} (\omega(\vartheta) - \omega(t)) d\omega(\vartheta) + \\ & + L \sigma(\beta, x) \int_t^{t+h} (\vartheta - t) d\omega(\vartheta) + \Lambda a(\beta, x) \int_t^{t+h} (\omega(\vartheta) - \omega(t)) d\vartheta + \\ & + \Lambda^2 \sigma \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\vartheta} (\omega(\vartheta_1) - \omega(t)) d\omega(\vartheta_1) \right) d\omega(\vartheta) + \\ & + (1 - \gamma)(1 - 2\mu)La(\beta, x) \frac{h^2}{2} + \gamma(1 - 2\mu)La(\beta(t+h), \bar{X}(t+h)) \frac{h^2}{2}. \end{aligned}$$

Одношаговой аппроксимации (20) отвечает двухпараметрический неявный метод (обозначим далее $\bar{X}_{t_k} = Y_k$, $\bar{\beta}_{t_k} = \beta_k$, $h = \Delta_k$):

$$(21) \begin{aligned} Y_{k+1} = & Y_k + \{ \mu a(\beta_{k+1}, Y_{k+1}) + (1 - \mu)a(\beta_k, Y_k) \} \Delta_k + \\ & + \left(\frac{1}{2} - \mu \right) \{ \gamma La(\beta_{k+1}, Y_{k+1}) + (1 - \gamma)La(\beta_k, Y_k) \} \Delta_k^2 + \\ & + \left(\sigma(\beta_k, X_k) \Delta\omega + L\sigma(\beta_k, X_k) I_{(0,1)} + \right. \\ & + \left. \Lambda a(\beta_k, X_k) \{ I_{(1,0)} - \mu \Delta\omega \Delta_k \} \right) + \Lambda \sigma(\beta_k, X_k) I_{(1,1)} + \\ & + \Lambda^2 \sigma I_{(1,1,1)}, \end{aligned}$$

где $I_{(0,1)}$, $I_{(1,0)}$, $I_{(1,1)}$, $I_{(1,1,1)}$ – повторные интегралы Ито (см. [3], стр. 9).

Рассмотрим, как осуществляется с помощью данной численной схемы состояние – зависимая модель переключений. Будем считать, что $\beta(t)$ – стохастически непрерывный процесс,

для которого $\beta(t+h) \xrightarrow{q} \beta(t)$ при $h \rightarrow 0$. Временной интервал разбивается на подынтервалы $[0, t_1), [t_1, t_1 + t_2), \dots$, на которых $\beta(t)$ постоянно, t_k – случайные моменты переключения марковской цепи. Далее будем рассматривать последовательность $\beta(t_k)$ как дискретно-временной стохастический процесс, аппроксимирующий $\beta(t)$ в соответствующем значении.

Будем рассматривать пару процессов $\beta(t)$ и $x(t)$ совместно как марковскую цепь следующим образом. Значения Y_{k+1} генерируются рекурсивно согласно (21), используя предыдущие значение Y_k , и одновременно генерируются значения β_{k+1} , также используя значение Y_k ($x = Y_k$ в матрице переходных вероятностей $P = I + \Delta Q(x)$) [3].

Сформулируем и докажем теорему сходимости метода (21) с среднеквадратичным порядком точности $3/2$ к решению уравнений вида (1).

Теорема 2. Пусть коэффициенты $a(\beta, x)$ и $\sigma(\beta, x)$ уравнения (1) удовлетворяют условиям (3), (4), (5). Тогда порядок точности метода (21), построенного с использованием одношаговой аппроксимации (20), равен $3/2$.

Доказательство.

Подсчитаем разность

$$(22) \quad X(t+h) - \bar{X}(t+h) = \\ = \mu(a(\beta(t+h), X(t+h)) - a(\beta(t+h), \bar{X}(t+h)))h + \\ + (1 - 2\mu)\gamma(La(\beta(t+h), X(t+h)) - La(\beta(t+h), \bar{X}(t+h)))\frac{h^2}{2} + \Phi.$$

Так как функции a и La удовлетворяют условиям Липшица, то

$$(23) \quad |X(t+h) - \bar{X}(t+h)| \leq |\mu| \cdot hK \cdot |X(t+h) - \bar{X}(t+h)| + \\ + |1 - 2\mu| \cdot |\gamma| \cdot K \frac{h^2}{2} \cdot |X(t+h) - \bar{X}(t+h)| + |\Phi|.$$

Тогда при достаточно малых h

$$(24) \quad |X(t+h) - \bar{X}(t+h)| \leq 2\Phi.$$

Поэтому, используя (19),

$$(25) E|X(t+h) - \bar{X}(t+h)|^2 \leq K(1+|x|^2)h^4.$$

Из (24) следует

$$(26) |E(X(t+h) - \bar{X}(t+h))| \leq |\mu| \cdot hK \cdot E|X(t+h) - \bar{X}(t+h)| + \\ + |1 - 2\mu| \cdot |\gamma| \cdot K \frac{h^2}{2} \cdot E|X(t+h) - \bar{X}(t+h)| + |E\Phi|.$$

Отсюда, благодаря (25),

$$(27) E|X(t+h) - \bar{X}(t+h)| \leq K(1+|x|^2)^{\frac{1}{2}} h^2, \text{ и далее}$$

$$(28) |E(X(t+h) - \bar{X}(t+h))| \leq K(1+|x|^2)^{\frac{1}{2}} h^3.$$

Неравенства (25), (28) и теорема 1 доказывают, что метод (21) имеет порядок точности 3/2 и может обеспечивать приближение решения уравнений вида (1). Теорема доказана.

Аналогично можно рассмотреть более простые методы (частные случаи рассмотренной схемы (21)), основанные на явных сильных схемах Эйлера (Euler–Maruyama) и Мильштейна, подобным образом доказывая их сходимость к решению уравнения (1).

3. Пример

Рассмотрим следующее линейное стохастическое уравнение

$$(29) dX_t = FX_t dt + GX_t d\omega_t,$$

на временном интервале $[0, T]$, $X_0=1$.

Определим матрицы

$$F = \begin{pmatrix} -f(\beta, x) & f(\beta, x) \\ f(\beta, x) & -f(\beta, x) \end{pmatrix}; \\ G = g(\beta, x)I = \begin{pmatrix} g(\beta, x) & 0 \\ 0 & g(\beta, x) \end{pmatrix},$$

где I – единичная матрица, $\beta = \beta(t)$, $x = x(t)$;

$$(30) X_t = X_0 \exp\left(\left(F - \frac{1}{2}G^2\right)t + G\omega_t\right)$$

– решение уравнения для $t \in [0, T]$ и данного винеровского процесса $\omega = \{\omega_t, t \geq 0\}$; $M = \{1, 2, \dots, m\}$ – число состояний марковской цепи.

Зададим начальные значения $Y_0 = X_0$, $\beta_0 = u_0$ и будем рекурсивно генерировать 100 значений Y_k с равным значением шага Δ согласно (21), где Δ_k – есть длина временного интервала дискретизации $t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_k < \dots < \tau_N = T$ на временном интервале $[t_0, T]$.

Для сравнения будем использовать (30), чтобы определить соответствующие значения точного решения, используя ту же примерную траекторию винеровского процесса ω_t на подынтервалах $\tau_n \leq t \leq \tau_{n+1}$.

Рассмотрим результаты численного решения уравнения (29), выбирая различные варианты задания матрицы переходов P , шага дискретизации Δ , значений функций $f(\beta_t, x_t)$, $g(\beta_t, x_t)$.

Пусть $f(\beta_t, x_t)$ принимает два значения – $\{\alpha_1, \alpha_2\}$, соответствующие первому и второму состоянию марковской цепи. $g(\beta_t, x_t)$ принимает два значения – $\{\lambda_1, \lambda_2\}$.

$\mu_1 = 0,5$, $\mu_2 = 0,5$, $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = 1$.

$$1. \quad Q = \begin{pmatrix} -5 \cos^2 x & 5 \cos^2 x \\ 10 \cos x & -10 \cos x \end{pmatrix}; \quad P = I + Q \Delta;$$

$$\alpha_1 = \sin x + \cos x; \quad \alpha_2 = 2 - \sin 2x;$$

$$\lambda_1 = 0,2; \quad \lambda_2 = 0,005;$$

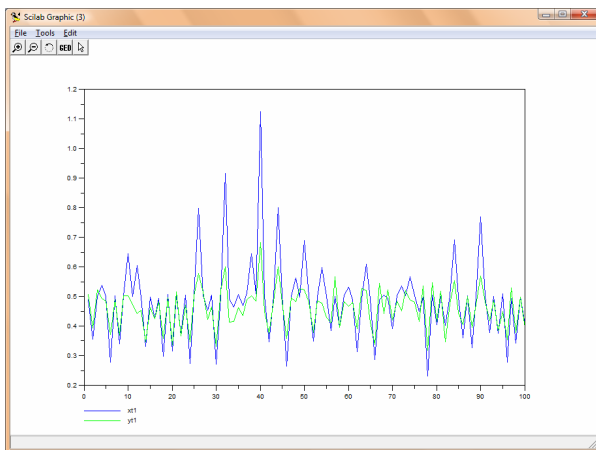


Рис. 1. Аппроксимация y_1 (зеленая кривая) и первая компонента точного решения x_1 (синяя кривая) $\Delta = 0,5$ ($T = 5$)

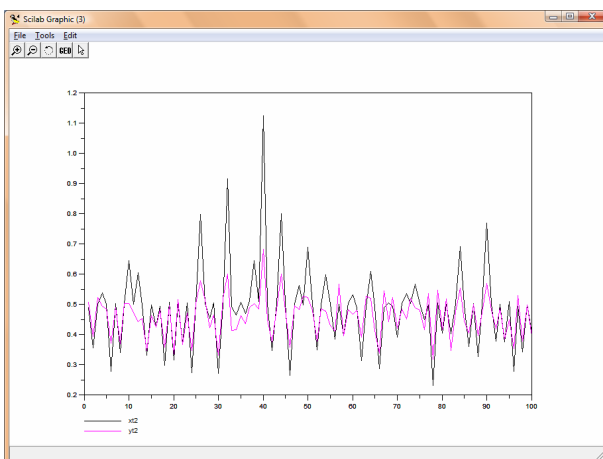


Рис. 2. Аппроксимация y_2 (лиловая линия) и вторая компонента решения x_2 (черная)

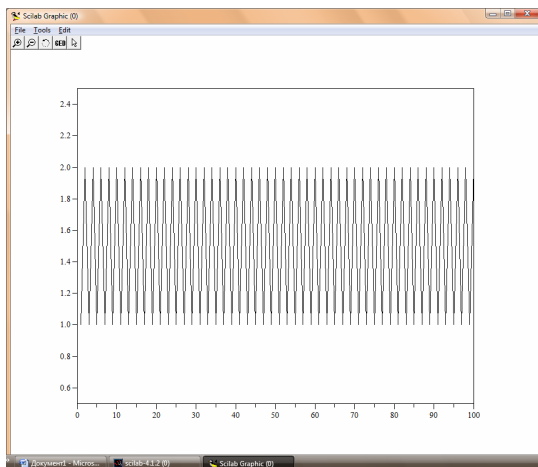


Рис. 3. Марковская цепь

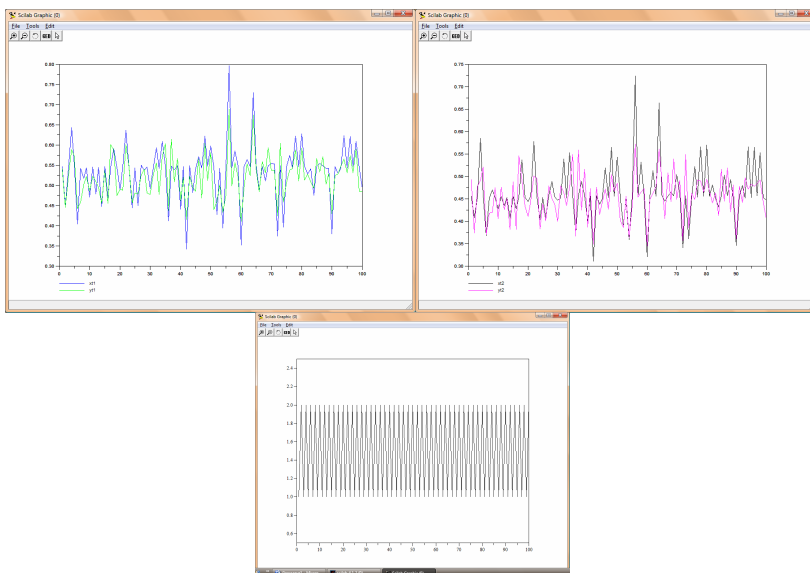


Рис. 4. $\Delta = 0,1$ ($T = 1$)

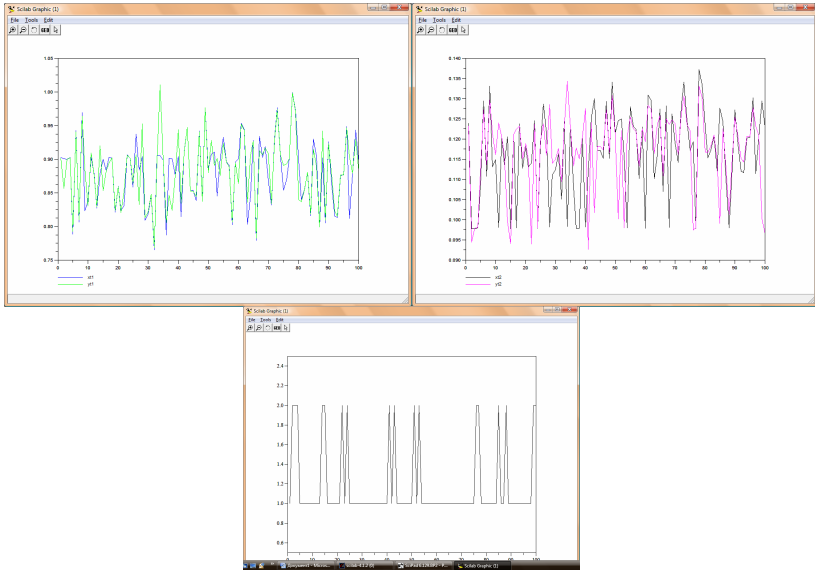


Рис. 5. $\Delta = 0,05$ ($T = 0,1$)

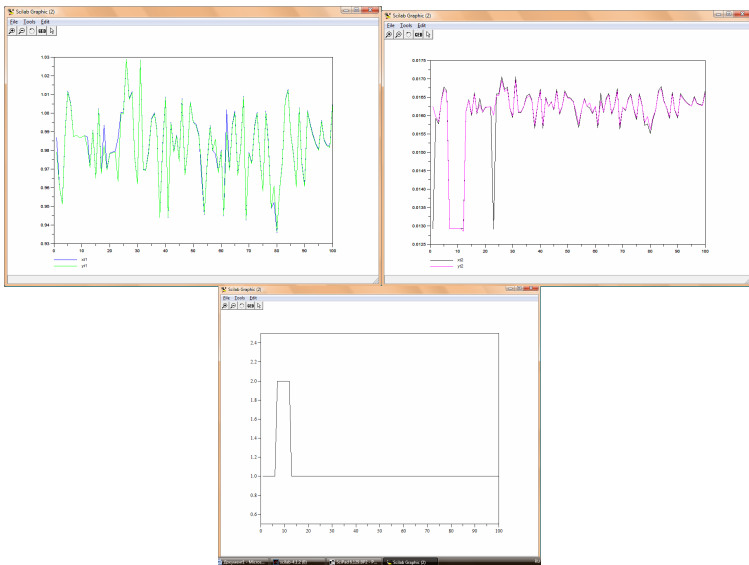


Рис. 6. $\Delta = 0,002$ ($T = 0,02$)

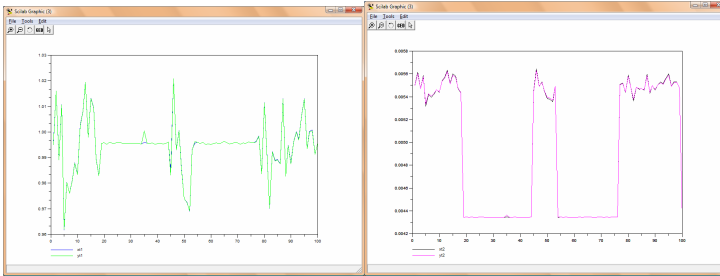


Рис. 7. $\Delta = 0,0008$ ($T = 0,004$)

2.
$$Q = \begin{pmatrix} -\cos^2 x & \cos^2 x \\ -3\sin x & 3\sin x \end{pmatrix}; P = I + Q\Delta;$$

$$\alpha_1 = 2 + \sin x; \alpha_2 = 1 + \sin x \cos x;$$

$$\lambda_1 = 0,2; \lambda_2 = 0,8;$$

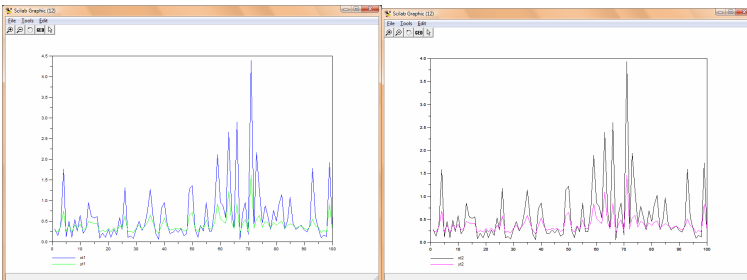


Рис. 8. $\Delta = 0,6$ ($T = 3$)

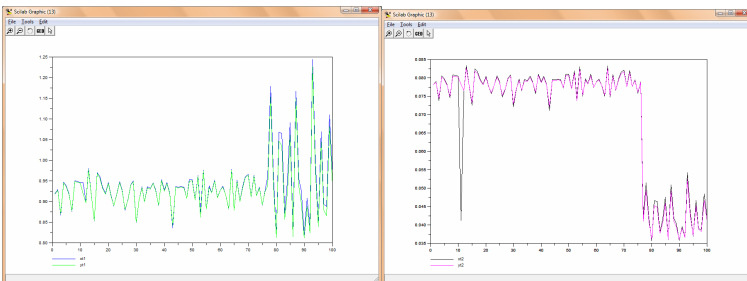


Рис. 9. $\Delta = 0,0006$ ($T = 0,3$)

$$3. \quad Q = \begin{pmatrix} -5 \cos^2 x & 5 \cos^2 x \\ 10 \cos^2 x & -10 \cos^2 x \end{pmatrix}; \quad P = I + Q \Delta;$$

$$\alpha_1 = \sin x + \cos x; \quad \alpha_2 = 1 + \cos x;$$

$$\lambda_1 = 0,02; \quad \lambda_2 = 0,3;$$

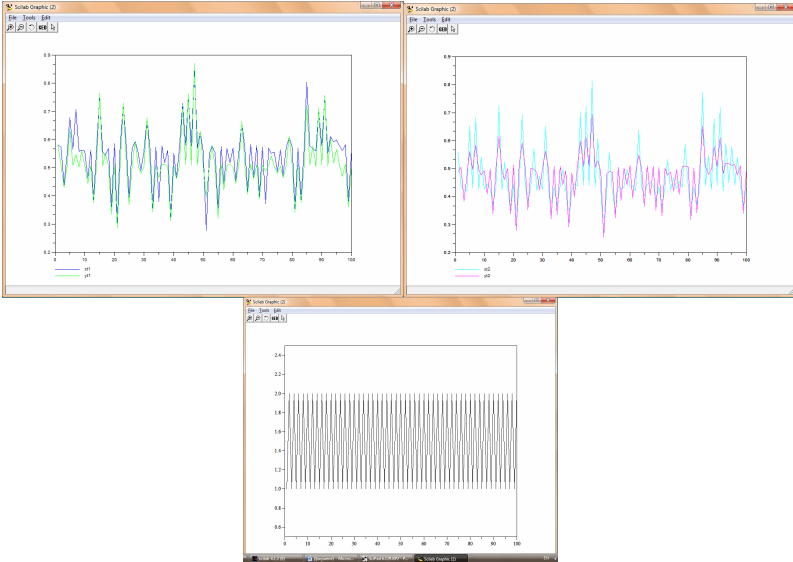


Рис. 10. $\Delta = 0,5$ ($T = I$); марковская цепь

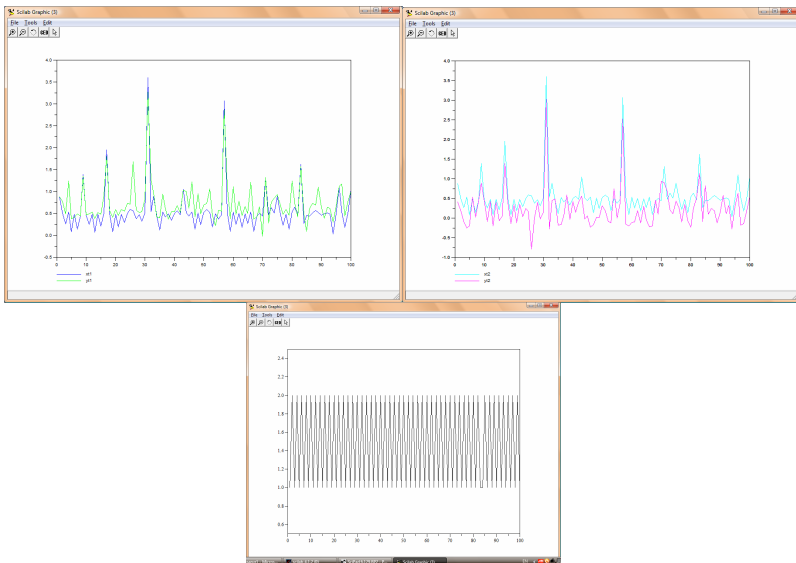


Рис. 11. $\Delta = 5$ ($T = 10$); марковская цепь

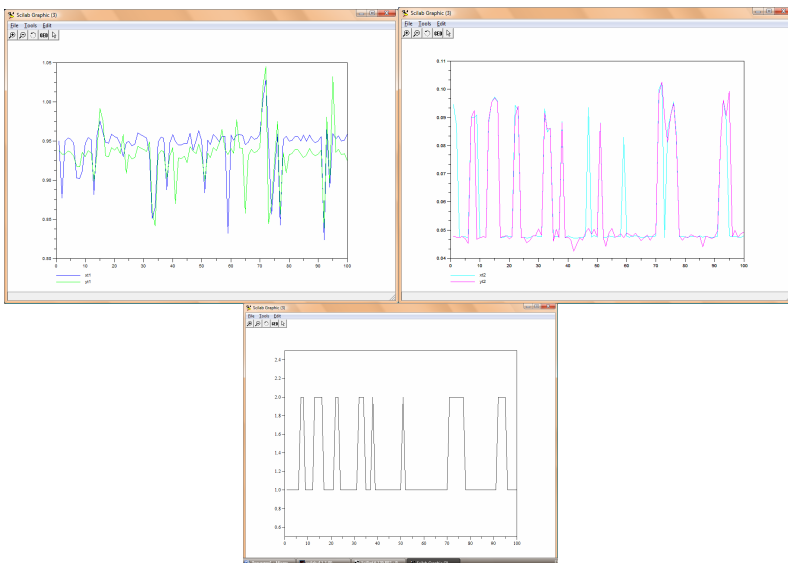


Рис. 12. $\Delta = 0,01$ ($T = 0,05$); марковская цепь

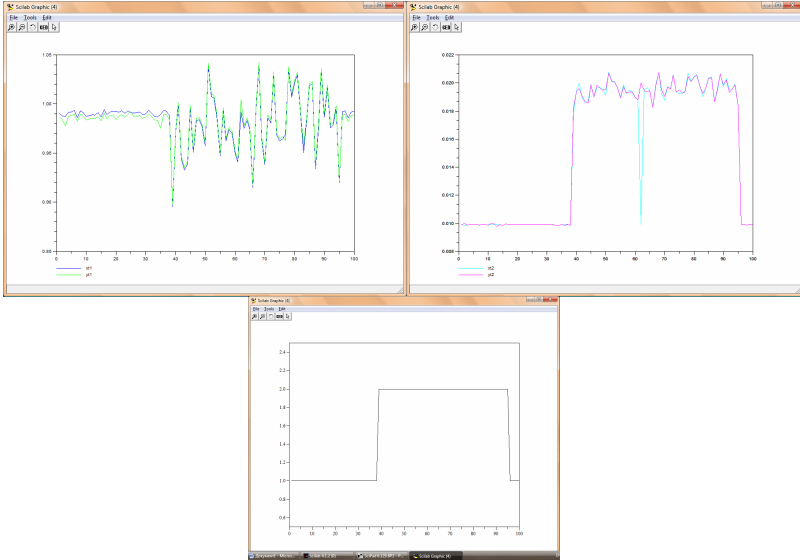


Рис. 13. $\Delta = 0,001$ ($T = 0,01$); марковская цепь

Далее приведем пример использования неявной схемы Эйлера:

$$Y_{k+1} = Y_k + \left\{ \mu a(\beta_{k+1}, Y_{k+1}) + (1 - \mu) a(\beta_k, Y_k) \right\} \Delta_k + \sum_{r=1}^d \sigma_r(\beta_k, X_k) \Delta \omega_r,$$

$$Q = \begin{pmatrix} -5 \cos^2 x & 5 \cos^2 x \\ 10 \cos^2 x & -10 \cos^2 x \end{pmatrix}; \quad P = I + Q \Delta;$$

$$\alpha_1 = 2 + \sin x; \quad \alpha_2 = 1 + \sin x \cos x;$$

$$\lambda_1 = 0,2; \quad \lambda_2 = 0,01;$$

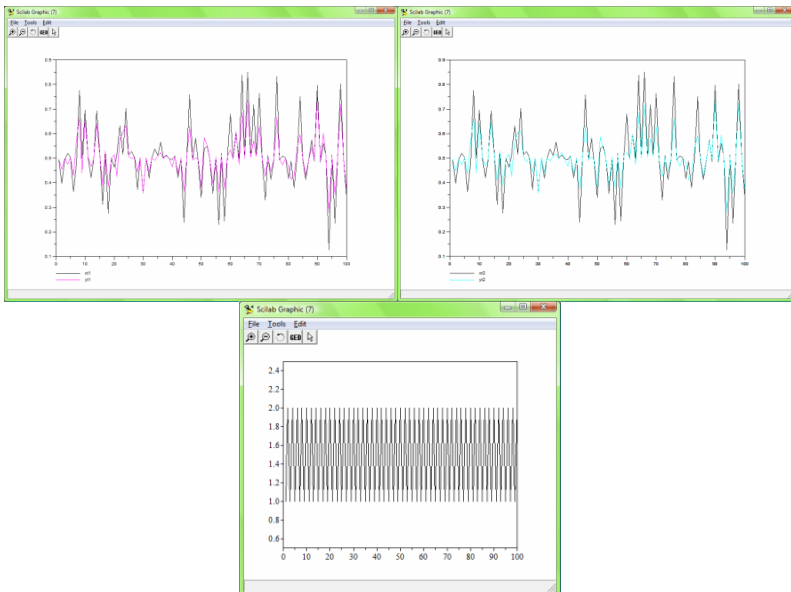


Рис. 14. $\Delta = 0,5$ ($T = 5$); марковская цепь

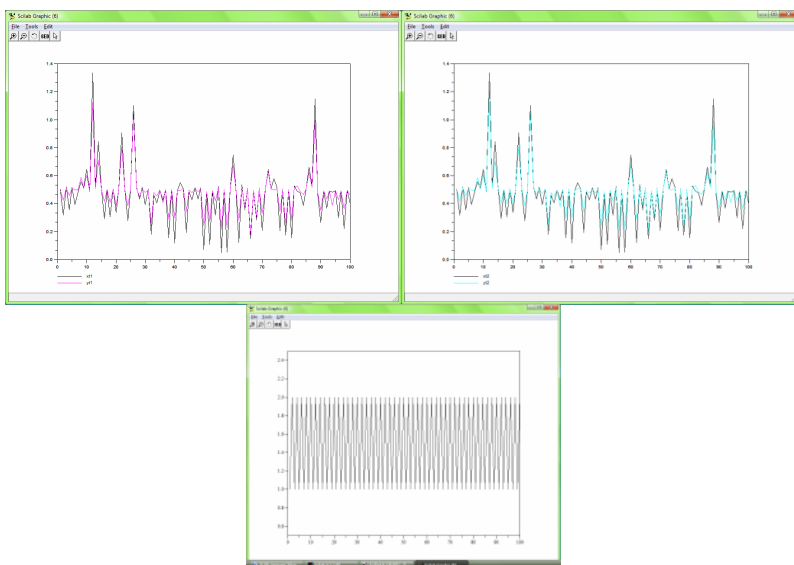


Рис. 15. $\Delta = 0,8$ ($T = 10$); марковская цепь

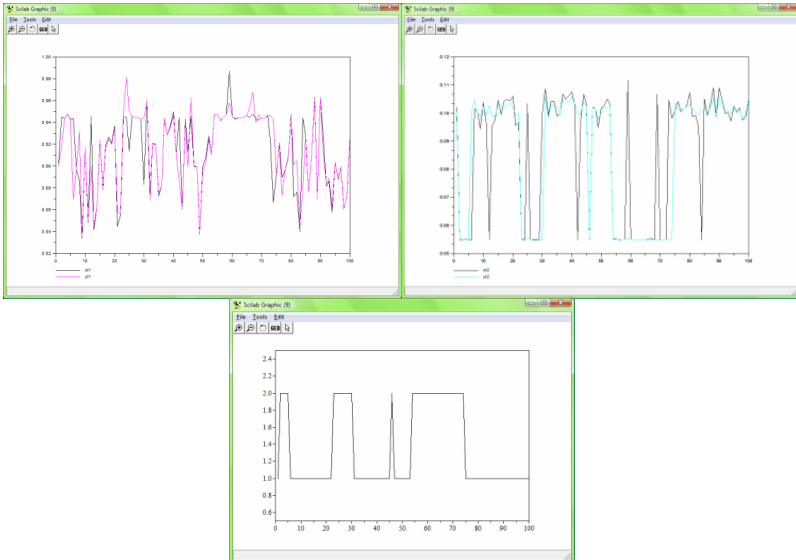


Рис. 16. $\Delta = 0,008$ ($T = 0,04$); марковская цепь

Пример применения неявной схемы Мильштейна:

$$Y_{k+1} = Y_k + \{\mu a(\beta_{k+1}, Y_{k+1}) + (1 - \mu)a(\beta_k, Y_k)\}\Delta_k + \sum_{r=1}^d \sigma_r(\beta_k, X_k)\Delta\omega_r + \sum_{r=1}^d \sum_{i=1}^d \Lambda_i \sigma_r(\beta_k, X_k) I_{(1,1)},$$

где $I_{(0,1)}$, $I_{(1,0)}$, $I_{(1,1)}$, $I_{(1,1,1)}$ – повторные интегралы Ито (см. [3], стр. 9).

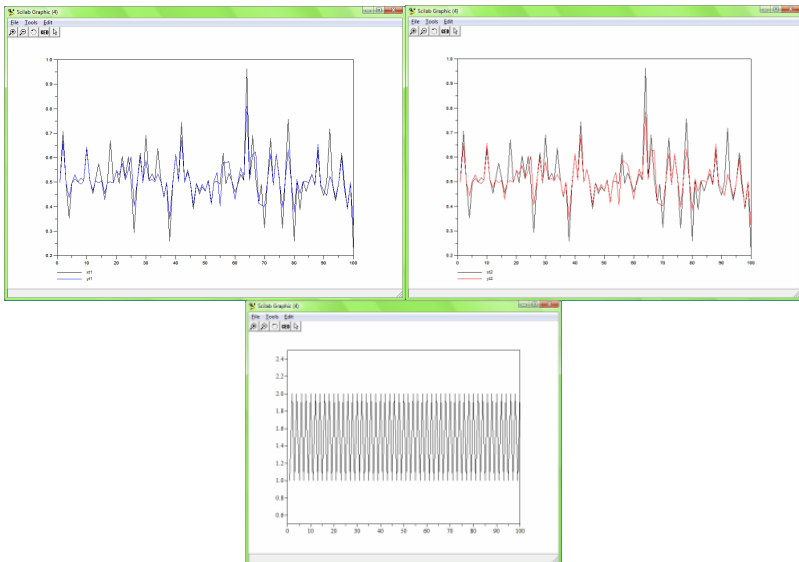


Рис. 17. $\Delta = 0,6$ ($T = 3$); марковская цепь

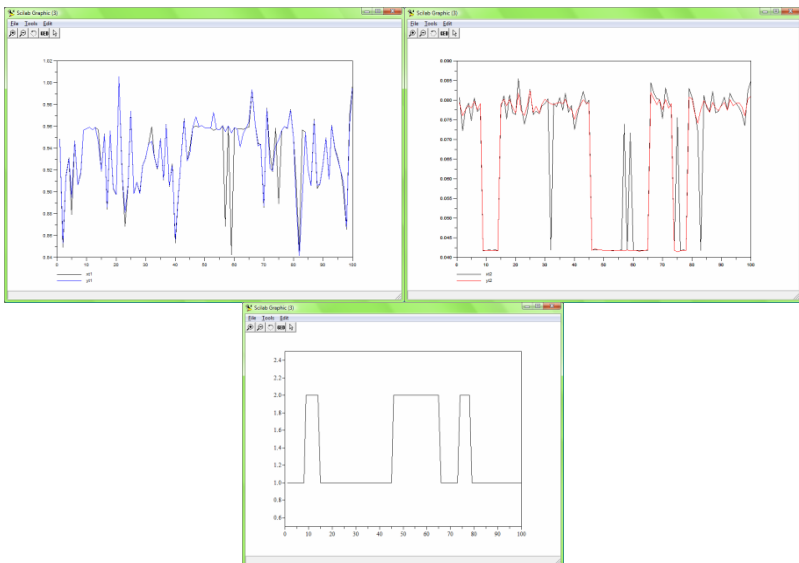


Рис. 18. $\Delta = 0,008$ ($T = 0,04$); марковская цепь

Литература

1. КУЗНЕЦОВ Д.Ф. *Стохастические дифференциальные уравнения: теория и практика численного решения*. – СПб.: Изд-во Политехнического университета, 2007. – 800 с.
2. МИЛЬШТЕЙН Г.Н. *Численное интегрирование стохастических дифференциальных уравнений*. – Свердловск: Изд-во Уральского университета, 1988. – 224 с.
3. ЧЕРНЫХ Н.В., ПАКШИН П.В. *Алгоритмы численного решения стохастических дифференциальных систем с переключаемой диффузией // Управление большими системами*. – 2012. – №36. – 315 с.
4. HIGHAM D.J. *Convergence and stability of implicit methods for jump-diffusion systems // Int. J. Numer. Anal. Mod.* – 2006 – №3. – P. 125–140.
5. KLOEDEN P. E., PLATEN E., SCHURZ H. *Numerical Solution of SDE Through Computer Experiments*. – Berlin: Springer-Verlag, 1994. – 294 p.
6. LI H., XIAO L., YE J. *Strong predictor-corrector Euler-Maruyama methods for stochastic differential equations with Markovian switching // Journal of Computational and Applied Mathematics*. – 2013 – Vol. 237, Issue 1. – P. 5–17.
7. LI R., PANG W. K., LEUNG P. K. *Convergence of numerical solutions to stochastic age-structured population equations with diffusions and Markovian switching // Applied Mathematics and Computation*. – 2010 – Vol. 216, Issue 3. – P. 744–752.
8. MAO X., YUAN C., YIN G. *Approximations of Euler-Maruyama type for stochastic differential equations with Markovian switching, under non-Lipschitz conditions // Journal of Computational and Applied Mathematics*. – 2007. – Vol. 205, Issue 2. – P. 936–948.
9. MILOŠEVIĆ M., JOVANOVIĆ M. *A Taylor polynomial approach in approximations of solution to pantograph stochastic differential equations with Markovian switching // Mathematical and Computer Modelling*. – 2011 – Vol. 53, Issues 1–2. – P. 280–293.

10. RATHINASAMY A. *Split-step θ -methods for stochastic age-dependent population equations with Markovian switching* // Nonlinear Analysis: Real World Applications. – 2012 – Vol. 13, Issue 3. – P. 1334–1345.
11. RATHINASAMY A., YIN B., YASODHA B. *Numerical analysis for stochastic age-dependent population equations with Poisson jump and phase semi-Markovian switching* // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. – 2011 – Vol. 16, Issue 1. – P. 350–362.
12. WU S.J. AND ZHOU B. *Existence and uniqueness of stochastic differential equations with random impulses and Markovian switching under non-lipschitz conditions* // Acta Mathematica Sinica. – 2011. – Vol. 27, Issue 3. – P. 519–536.
13. YIN B., MA Z.. *Convergence of the semi-implicit Euler method for neutral stochastic delay differential equations with phase semi-Markovian switching* // Applied Mathematical Modelling. – 2011 – Vol. 35, Issue 5. – P. 2094–2109.
14. YIN G., MAO X., YUAN C. AND CAO D. *Approximation methods for hybrid diffusion systems with state-dependent switching processes: numerical algorithms and existence and uniqueness of solutions* // SIAM Journal on Mathematical Analysis. – 2010 – Vol. 41, №6. – P. 2335–2352.
15. YIN G., ZHU C. *Hybrid switching diffusions. Properties and applications.* – Stochastic modeling and applied probability, Springer Science + Business Media, LLC, 2010.
16. YUAN C., MAO X. *Convergence of the Euler–Maruyama method for stochastic differential equations with Markovian switching* // Mathematics and Computers in Simulation. – 2004. – Vol. 64, Issue 2. – P. 223–235.

**IMPLICIT STRONG METHODS FOR THE
NUMERICAL SOLUTION MODELLING FOR
STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH
MARKOVIAN SWITCHING**

Nadezda Chernykh, post-graduate student (nadezdacher@mail.ru).

Abstract: We study implicit strong approximate methods for stochastic differential equations with Markovian switching (SDEwMSs). Theoretical results are verified with numerical examples in Scilab framework.

Keywords: stochastic systems, Markovian switching, state-dependent switching, implicit strong numerical scheme, convergence.

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии А.П. Курдюковым*

*Поступила в редакцию 17.08.2012.
Опубликована 31.07.2014.*

УДК 004.8
ББК 32.813

ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ НА ОСНОВЕ КОЛОНОК ПРИ НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИИ

Чесноков А. М.¹

(ФГБУН Институт проблем управления
им. В.А.Трапезникова РАН, Москва)

Рассматриваются интеллектуальные системы на основе колонок в условиях неполной информации, когда по тем или иным причинам на вход системы поступает только часть исходного образа. Приводится решение прямой и обратной задачи. Показана связь между способностью системы работать при неполной информации и прогнозом.

Ключевые слова: искусственный интеллект, интеллектуальные системы на основе колонок, колонка, неполная информация, прогноз.

1. Введение

Интеллектуальные системы на основе колонок представляют собой системы, рассматриваемые в рамках следующей модели (более подробно см. [1, 2]).

Имеется пусть и очень большое, но *конечное множество имен U* , предназначенных для наименования объектов произвольной природы. Не ограничивая общности, считается, что множество имен U является подмножеством множества целых чисел. В множестве имен U выделяются непересекающиеся подмножества, получившие название *областей имен*. В реальных предметных областях причины, приводящие к необходимости выделения областей имен, могут быть совершенно различ-

¹ Александр Михайлович Чесноков, старший научный сотрудник, кандидат технических наук (alex-ches@yandex.ru).

ными. Например, это может быть связано с типизацией. Одной из важнейших причин является необходимость обеспечить отсутствие случайных совпадений имен в различных частях большой системы и тем самым исключить возникновение соответствующих ошибок. Для рассматриваемой модели не важны исходные причины, которые требуют выделения областей имен. Главное, они существуют, и это нашло отражение в модели.

Любое конечное множество имен, принадлежащих тем или иным областям имен, называется *образом*.

Образы любого множества образов P можно перенумеровать, используя для этого имена некоторой области имен U' :

$$P = \{p_i \mid i \in U'\},$$

где $|U'| = |P|$; $|\cdot|$ – мощность множества.

Упорядоченная пара (i, p_i) получила название *колонки*. Колонка обозначается как $(i \mid p_i)$, где i – имя колонки, p_i – образ, содержащийся в колонке. Также используется обозначение $i \rightarrow p_i$. В этом случае говорится, что имя колонки i является *ссылкой* или *указателем* на содержащийся в колонке образ p_i . В свою очередь, про сам образ в колонке p_i будет говориться, что он имеет имя i .

Имя i , которое еще не использовалось для наименования образов, называется *чистым* или *пустым* именем. Его можно представить как колонку, имеющую пустой образ, т.е. колонку вида $(i \mid \emptyset)$ или $i \rightarrow \emptyset$.

В образы колонок могут входить имена других колонок, а также чистые имена. Таким образом, можно считать, что в образе одной колонки содержатся имена других колонок, каждое из которых служит указателем на соответствующий образ, возможно, пустой. В результате образуется показанная на рис. 1 сложная структура колонок (для наглядности на рисунке дублируются имена колонок).

Индексом называется любое конечное множество колонок. Состав любого индекса может меняться за счет добавления или удаления колонок. Эти операции называются сложением и вычитанием индексов и обозначаются через $+$ и $-$.

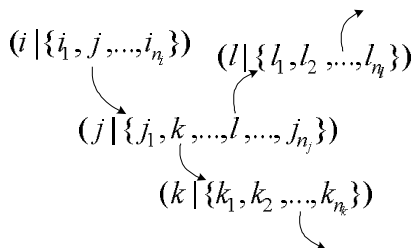


Рис. 1. Структура из колонок

Индекс может быть представлен в виде таблицы, состоящей из вертикальных колонок (столбцов) переменной высоты. В нижней строке таблицы (под чертой) – имена колонок. Над именем каждой колонки перечислены все имена, входящие в образ колонки. По умолчанию считается, что имена колонок и имена в образах принадлежат различным областям имен. В качестве простейшего примера на рис. 2 приведен индекс A , состоящий из трех колонок $(1 | \{1, 3\})$, $(2 | \{2, 3, 4\})$, $(3 | \{4, 5\})$.

A
4
3 3 5
<u>1 2 4</u>
1 2 3

Рис. 2

Интеллектуальная система на основе колонок представляет собой один или несколько индексов, и работающий с ними механизм (машина колонок), который, получая информацию о внешнем мире в виде образов, формирует новые колонки, изменяет уже существующие, удаляет ненужные и выполняет другие необходимые операции (рис. 3).

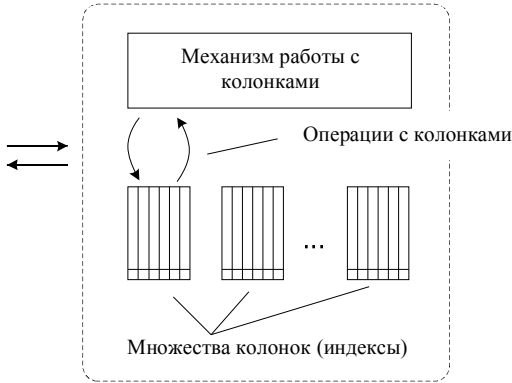


Рис. 3. Система на основе колонок

Знания в рассматриваемых системах представлены с помощью колонок, а в основе процесса накопления знаний лежит запоминание новых образов под определенными именами. При этом *элементарными базовыми задачами*, без которых невозможно функционирование системы, очевидно, являются *прямая задача* – по образу получить его имя, и *обратная задача* – по имени получить соответствующий образ.

В [1] при решении прямой и обратной задачи предполагалось, что все рассматриваемые образы представлены полностью. Однако в реальных условиях системе часто приходится работать при неполной информации, когда по тем или иным причинам рассматриваемые образы представлены лишь частично (рис. 4).

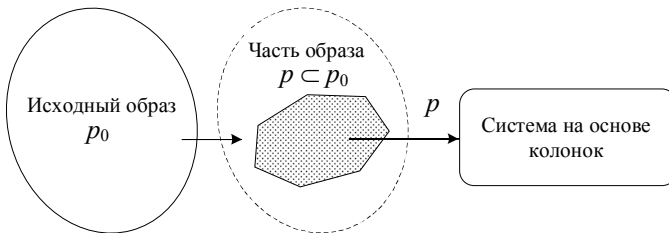


Рис. 4. Часть исходного образа на входе системы

Базовые задачи служат основой решения всех остальных задач [1, 2]. Поэтому для того чтобы система могла работать в условиях реального мира, она должна решать прямую и обратную задачи при неполной информации. Этому и посвящена данная работа.

В следующем разделе показывается существование решения базовых задач в условиях неполноты информации для любых типов образов. Затем для образов в виде конечных неупорядоченных множеств и образов в виде конечных последовательностей или векторов рассматривается метод пересечений. Наконец, в заключение показывается связь между способностью системы работать при неполной информации и прогнозом.

2. Решение прямой и обратной задачи при неполной информации

Рассматриваемые элементарные базовые задачи являются простейшими, при решении которых фрагменты каких-то неизвестных образов не запоминаются, так как в данном случае это не имеет смысла. Все, что требуется, – это по неполному образу p (рис. 4) определить, что из себя может представлять полный образ, т.е. указать имена всех известных системе образов, частью которых является образ p .

В дальнейшем будем полагать, что у системы имеется информация, с помощью которой она может различать полные и неполные образы. Наиболее просто это обеспечивается за счет замены недостающих элементов образа специальными служебными именами. Очевидным признаком того, что образ является полным, является отсутствие в его составе указанных служебных имен. Для образов в виде конечных неупорядоченных множеств число недостающих элементов образа можно заменить числом элементов n_0 исходного образа p_0 . Признаком полноты в этом случае будет совпадение мощности входного образа p с полученной системой величиной n_0 .

Постановка базовых задач при неполной информации выглядит следующим образом.

Если образ p полный, то решается обычная прямая задача [1]. Система пытается определить имя i образа p . Если ей это удастся, то имя i является решением прямой задачи. В противном случае образ p является новым и система его запоминает под некоторым именем, которое и является в данном случае решением прямой задачи.

Если же образ p представляет собой лишь часть исходного образа p_0 , то системе необходимо определить имена всех известных ей образов, частью которых является образ p (рис. 5). Если ей это удастся, то множество имен таких образов является решением прямой задачи. В противном случае рассматриваемый образ p представляет собой часть какого-то неизвестного системе образа. Как уже говорилось, запоминать его не имеет смысла.

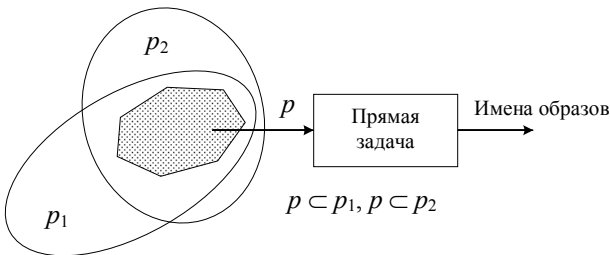


Рис. 5. К постановке прямой задачи

Обратная задача в условиях неполной информации остается без изменений – необходимо по имени образа i получить сам образ.

2.1. МЕТОД РЕШЕНИЯ БАЗОВЫХ ЗАДАЧ НА ОСНОВЕ ПОЭЛЕМЕНТНОГО СРАВНЕНИЯ

Для прямой и обратной задачи существует общий метод решения, применимый к любым типам образов. Это метод, использующий поэлементное сравнение [1].

Известные системе образы хранятся в индексе A , который представляет собой множество колонок вида $(i | p_i)$, где p_i – образ, известный под именем i . В исходном состоянии $A = \emptyset$.

Пусть p – произвольный полный образ, для которого надо решить прямую задачу. Он поэлементно сравнивается с образами всех колонок индекса A . Если найден совпадающий образ p_i , то его имя, т.е. имя колонки $(i | p_i) \in A$, является именем образа p и решением прямой задачи. В противном случае выбирается некоторое чистое имя i_p из соответствующей области имен и выполняется сложение $A + (i_p | p)$, т.е. к индексу A добавляется колонка $(i_p | p)$. Если полный образ p снова появится на входе системы, то поэлементное сравнение даст для него имя i_p .

Пусть теперь образ p представляет собой лишь часть некоторого исходного образа p_0 . Решением прямой задачи в этом случае будет множество имен $\eta(p)$, состоящее из имен всех известных системе полных образов, частью которых является образ p . Перед началом сравнения устанавливается $\eta(p) = \emptyset$. Поступивший неполный образ p поэлементно сравнивается с образами колонок индекса A . Если все элементы образа p совпадают с соответствующими элементами образа колонки $(i_k | p_k) \in A$, то имя i_k добавляется в множество $\eta(p)$. После того как поэлементное сравнение с колонками индекса A закончено, множество $\eta(p)$ представляет собой решение прямой задачи для образа p . Если после всех сравнений окажется, что $\eta(p) = \emptyset$, то образ p – это часть какого-то неизвестного системе образа.

Обратная задача решается точно так же, как и в случае полной информации. Если имеется имя i , для которого необходимо решить обратную задачу, то соответствующий образ равен образу p_i колонки $(i | p_i) \in A$. Если колонки с таким именем не существует, то i – чистое имя.

Очевидно, для образов тех или иных типов могут существовать более эффективные методы решения прямой и обратной задачи при неполной информации. В частности, более эффективным является метод пересечений [1], который далее рассматривается для образов в виде неупорядоченных конечных множеств и образов в виде конечных последовательностей или векторов.

2.2. МЕТОД ПЕРЕСЕЧЕНИЙ ДЛЯ ОБРАЗОВ В ВИДЕ КОНЕЧНЫХ НЕУПОРЯДОЧЕННЫХ МНОЖЕСТВ

Будем полагать, что образы представляют собой конечные неупорядоченные множества имен вида $p = \{i_1, \dots, i_m\}$, $m \geq 1$, где $i_k \in U'$, U' – некоторая область имен. Очевидно, любой такой образ $p \in P$, где P – множество всех подмножеств множества U' , исключая пустое.

Кроме того, будем полагать, что для каждого входного образа p известна *истинная мощность* n_0 , т.е. мощность, которую имеет полный образ p_0 . Так как $p \subset p_0$, то $|p| \leq n_0$, и признаком полноты образа p является равенство $|p| = n_0$.

Для решения прямой и обратной задачи будут использоваться индексы A, B и заданная в виде множества пар функция $n(i)$ [1], которая в данном случае будет содержать мощности известных системе *полных* образов.

В начале работы системы $A = \emptyset$, $B = \emptyset$ и $n(i) = \emptyset$.

Для $\forall p \in P$ обозначим через $\eta(p)$ пересечение образов колонок $(k | a_k) \in A$ для всех имен $k \in p$, т.е. $\eta(p) = \bigcap_{k \in p} a_k$. Если в индексе A отсутствует колонка с именем k , то считается, что ее образ $a_k = \emptyset$, т.е. отсутствующая колонка заменяется пустой колонкой $(k | \emptyset)$.

Пусть $p \in P$ – некоторый *полный* образ на входе системы, т.е. $|p| = n_0$. Для него базовые задачи решаются обычным образом [1].

Если пересечение $\eta(p) = \emptyset$ или если $\eta(p) \neq \emptyset$ и $n(i) \neq |p|$ для $\forall i \in \eta(p)$, то образ p является новым и его необходимо запомнить под некоторым именем. Для этого система выбирает любое чистое имя i из множества $U'' \setminus U_p$, где U'' – область имен для наименования образов, U_p – множество имен всех известных образов. Затем выполняется сложение $A + (p | \{i\})$, т.е. к индексу A добавляется $|p|$ колонок $(k | \{i\})$ для всех имен $k \in p$. Кроме того, выполняется сложение $B + (i | p)$, а в определение функции $n(i)$ добавляется пара $(i, |p|)$. Имя i является решением прямой задачи.

Таким образом, запоминание системой l неизвестных полных образов можно представить в виде цепочки сложений:

$$A = \sum_{k=1}^l (p_k | \{i_k\}), \quad B = \sum_{k=1}^l (i_k | p_k), \quad n(i) = \bigcup_{k=1}^l (i_k, | p_k |),$$

где i_k – имя образа p_k .

Если же для входного образа p пересечение $\eta(p) \neq \emptyset$ и имеется по крайней мере одно имя $i \in \eta(p)$, для которого $n(i) = |p|$, то такое имя является единственным, представляет собой имя образа p и является решением прямой задачи [1].

Пусть теперь $|p| < n_0$, т.е. p – *неполный* образ. Как уже говорилось, в этом случае будет определяться только множество имен известных системе образов, частью которых является входной образ p . Очевидно, для любого непустого подмножества p , входящего в некоторый известный образ, пересечение $\eta(p) \neq \emptyset$. Следовательно, если $\eta(p) = \emptyset$, то на входе образ, являющееся подмножеством неизвестного образа.

Если $\eta(p) \neq \emptyset$ и $n(i) \neq n_0$ для $\forall i \in \eta(p)$, то образ p также является частью неизвестного образа.

Наконец, пусть $\eta(p) \neq \emptyset$ и существует по крайней мере одно имя $i \in \eta(p)$ такое, что $n(i) = n_0$. Обозначим через S_0 подмножество $S_0 = \{i \in \eta(p) | n(i) = n_0\}$. Очевидно, множество имен S_0 , является решением прямой задачи, так как для $\forall i \in S_0$ образ, известный под этим именем, содержит p в качестве подмножества и имеет мощность, равную мощности n_0 исходного образа p_0 .

Обратная задача решается обычным образом [1]. Если входное имя $i \in U_p$, то соответствующий образ равен образу b_i колонки $(i | b_i) \in B$. В противном случае имя i – это чистое имя.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если в постановке задачи оговаривается наличие у системы лишь признака полноты входного образа (истинная мощность n_0 неизвестна), то задача будет решаться с меньшей определенностью. Для неполного входного образа p множество $S_0 = \eta(p)$, т.е. в него будут включены вообще все известные образы, содержащие образ p как подмножество.

ПРИМЕР. Пусть имеются показанные на рис. 6 индексы A , B и функция $n(i)$:

A		B										
4 4		3 4										
3 3 3 4	$n(i)$	3 4 2 3										
1 2 1 2	<table style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">i</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">1</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">2</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">3</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">4</td> </tr> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">n</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">2</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">2</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">3</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">3</td> </tr> </table>	i	1	2	3	4	n	2	2	3	3	1 2 1 2
i	1	2	3	4								
n	2	2	3	3								
1 2 3 4		1 2 3 4										

Рис. 6

Предположим, что на вход системы поступил образ $p = \{1, 3\}$. Пересечение $\eta(p) = \{1, 3\}$. Если $n_0 = 2$, то p – полный образ. Так как $n(1) = |p|$, то p – образ, известный под именем 1. Если $n_0 = 3$, то p – неполный образ. Так как $n(3) = n_0$, то $S_0 = \{3\}$ и p – это часть образа, известного под именем 3.

Пусть теперь на входе появился образ $p = \{2, 3\}$ и $n_0 = 2$, т.е. p – полный образ. Так как $\eta(p) = \{3, 4\}$ и $n(3) = n(4) \neq |p|$, то это неизвестный новый образ. После запоминания его под именем 5 будем иметь (рис. 7):

A		B												
5 5														
4 4		3 4												
3 3 3 4	$n(i)$	3 4 2 3 3												
1 2 1 2	<table style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">i</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">1</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">2</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">3</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">4</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">5</td> </tr> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">n</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">2</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">2</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">3</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">3</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">2</td> </tr> </table>	i	1	2	3	4	5	n	2	2	3	3	2	1 2 1 2 2
i	1	2	3	4	5									
n	2	2	3	3	2									
1 2 3 4		1 2 3 4 5												

Рис. 7

Пусть опять на вход поступил образ $p = \{2, 3\}$. Пересечение $\eta(p) = \{3, 4, 5\}$. Если $n_0 = 2$, то p – полный образ, известный под именем 5, так как $n(5) = |p|$. Если $n_0 = 3$, то на входе неполный образ. Так как $n(3) = n(4) = n_0$, то $S_0 = \{3, 4\}$, т.е. образ p представляет собой подмножество, являющееся частью образов по

имени 3 и 4. Если же $n_0 = 4$, то $S_0 = \emptyset$, и образ p – часть некоторого неизвестного образа, состоящего из четырех имен.

Наконец, пусть решается обратная задача для имени $i = 3$. Так как $i \in U_p$, то образ p_i равен образу колонки 3 индекса B , т.е. $p_i = \{1, 2, 3\}$.

2.3. МЕТОД ПЕРЕСЕЧЕНИЙ ДЛЯ ОБРАЗОВ В ВИДЕ КОНЕЧНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ИЛИ ВЕКТОРОВ

Рассмотрим теперь прямую и обратную задачи при неполной информации для образов в виде конечных последовательностей или векторов вида (i_1, i_2, \dots, i_m) . В условиях неполноты информации координаты входного образа p могут быть известны лишь частично и содержать специальное служебное имя i_0 или просто 0, которое интерпретируется как отсутствие данных о соответствующей координате. Например, $(0, i_2, \dots, i_m)$ или $(0, i_2, \dots, i_{m-1}, 0)$. В связи с этим будем полагать, что любой

входной образ p принадлежит множеству $P = \bigcup_{k=1}^n P^k$, где

$P^k = U_1^0 \times \dots \times U_k^0$, $U_k^0 = U_k \cup \{0\}$, U_k – область имен k -й координаты. Через $|p|$ будет обозначаться число координат (размерность) образа p .

Прямая задача при неполной информации для образов $p \in P$ формулируются следующим образом. Если образ p не имеет координат, содержащих имя 0, т.е. является полным образом, то прямая задача решаются обычным образом [1]. Если же образ p содержит координаты с именем 0, то необходимо указать имена всех известных системе образов той же размерности, с соответствующими координатами которых совпадают все ненулевые координаты образа p . Обратная задача остается без изменений.

Для решения прямой и обратной задачи будут использоваться индекс $A = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$, где A_k – индекс для k -й координаты, индекс B для решения обратной задачи и заданная с помощью множества пар функция $m(i)$ [1], которая в

данном случае содержит размерности известных системе *полных* образов.

Пусть $p = (i_1, i_2, \dots, i_m) \in P$ – произвольный образ. Обозначим через $\eta(p)$ пересечение $\eta(p) = \bigcap_{\substack{k=1 \\ i_k \neq 0}}^m a_{i_k}$, где i_k – имя, являющееся k -й координатой образа $p = (i_1, i_2, \dots, i_m)$, a_{i_k} – образ колонки $(i_k | a_{i_k}) \in A_k$. Очевидно, если образ p не содержит нулевых координат, то $\eta(p)$ – это обычное покоординатное пересечение, и для полных образов может без всяких изменений использоваться метод пересечений [1].

Итак, пусть появившийся на входе образ p не содержит нулевых координат и является полным.

Если $\eta(p) = \emptyset$ или если $\eta(p) \neq \emptyset$ и $|p| \neq m(i)$ для $\forall i \in \eta(p)$, то образ p – неизвестный полный образ и его необходимо запомнить под некоторым именем. Для этого система выбирает любое чистое имя i из множества $U'' \setminus U_p$, где U'' – область имен для наименования образов, U_p – множество имен всех известных образов. Затем выполняется покоординатное сложение:

$$A + (p | \{i\}) = \{A_1 + (i_1 | \{i\}), A_2 + (i_2 | \{i\}), \dots, A_m + (i_m | \{i\})\}.$$

где i_k – имя, являющееся k -й координатой входного образа $p = (i_1, i_2, \dots, i_m)$. Кроме того, с индексом B складывается колонка $(i | p)$, а в определение функции $m(i)$ добавляется пара $(i, |p|)$. Имя i является решением прямой задачи.

Таким образом, запоминание системой l неизвестных образов можно представить в виде цепочки сложений:

$$A = \sum_{k=1}^l (p_k | \{i_{p_k}\}), \quad B = \sum_{k=1}^l (i_{p_k} | p_k), \quad m(i) = \bigcup_{k=1}^l (i_{p_k}, |p_k|),$$

где i_{p_k} – имя образа p_k .

Если $\eta(p) \neq \emptyset$ и существует имя $i \in \eta(p)$, такое, что $|p| = m(i)$, то такое имя является единственным, представляет собой имя образа p и является решением прямой задачи [1].

Рассмотрим теперь случай с неполной информацией, когда у образа p имеются координаты, содержащие имя 0.

Прежде всего необходимо заметить, что для любого непустого подмножества координат любого известного системе образа пересечение $\eta(p) \neq \emptyset$. Поэтому если для *неполного* образа p пересечение $\eta(p) = \emptyset$, то неполный образ p является частью неизвестного образа.

Если $\eta(p) \neq \emptyset$ и для $\forall i \in \eta(p)$ имеет место $|p| \neq m(i)$, то неполный образ p также представляет собой часть неизвестного образа.

Наконец, пусть $\eta(p) \neq \emptyset$ и существует по крайней мере одно имя $i \in \eta(p)$ такое, что $m(i) = |p|$. Обозначим через S_0 подмножество $S_0 = \{i \in \eta(p) | m(i) = |p|\}$. Очевидно, множество имен S_0 является решением прямой задачи, так как для $\forall i \in S_0$ образ, известный под этим именем, имеет ту же размерность, что и образ p , и у них совпадают ненулевые координаты.

Обратная задача решается обычным образом [1]. Если имя $i \in U_p$, то соответствующий образ равен образу b_i колонки $(i | b_i) \in B$. В противном случае имя i – это чистое имя.

ПРИМЕР. Пусть для $n = 3$ имеются показанные на рис. 8 индексы A, B и функция $m(i)$:

A_1	A_2	A_3	B
5	5		3 2 2
4 2	2	4	3 1 1 2 1
1 3	3 4 1	3 2	1 3 3 1 3
1 2 3	1 2 3	1 2 3	1 2 3 4 5

$m(i)$					
i	1	2	3	4	5
m	2	3	3	3	2

Рис. 8

Если на вход пришел полный образ $p = (3, 1)$, то пересечение $\eta(p)$ будет равно пересечению образов колонки 3 индекса A_1

и колонки 1 индекса A_2 , т.е. $\eta(p) = \{2, 3, 5\}$, причем $m(5) = 2$. Следовательно, на входе образ, известный под именем 5.

Пусть теперь на входе неполный образ $p = (3, 1, 0)$. Пересечение $\eta(p)$ образов колонки 3 индекса A_1 и колонки 1 индекса A_2 опять будет равно $\{2, 3, 5\}$, причем $m(2) = m(3) = |p|$. Следовательно, $S_0 = \{2, 3\}$, т.е. неполный образ p ненулевыми координатами совпадает с имеющими ту же размерность образами, известными системе под именем 2 и 3. Так как, очевидно, имена $2, 3 \in U_p$, то решая обратную задачу, получим, что указанные образы равны образам колонок 2 и 3 индекса B , т.е. это образы $(3, 1, 3)$ и $(3, 1, 2)$.

3. Заключение

Приведенные в работе методы решения базовых задач представляют собой более общий вариант методов [1], который включает в себя возможность системы работать при неполной информации. Важнейшим следствием из этого является то, что способность системы работать при неполной информации одновременно означает способность системы к прогнозу, так как по имеющейся к настоящему моменту части временной последовательности система может восстановить варианты развития событий в будущем. Причем и имеющаяся к настоящему моменту часть последовательности может быть известна лишь частично, т.е. речь идет о прогнозе при неполной информации. Таким образом, элементарный базовый прогноз является внутренне присущим свойством системы, способной решать базовые задачи в условиях неполной информации. Это демонстрирует одну из основных особенностей модели на основе колонок – универсальность внутренних механизмов, когда один и тот же механизм служит различным целям.

Литература

1. ЧЕШОКОВ А.М. *Интеллектуальные системы на основе колонок // Управление большими системами.* – 2013. – № 46. – С. 118–146.
2. ЧЕШОКОВ А.М. *Введение в общую теорию колонок.* – М.: ИПУ РАН, 2012. – 141 с.

COLUMNS-BASED INTELLIGENT SYSTEMS UNDER INCOMPLETE INFORMATION

Alexander Chesnokov, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Cand. Sc. (alex-ches@yandex.ru).

Abstract: The paper considers columns-based intelligent systems working under incomplete information, when only a part of the whole input image is received. We provide solutions to both direct and inverse problems. We also reveal the relation between system's ability to work under incomplete information and predicting ability of the system.

Keywords: artificial intelligence, columns-based intelligent systems, column, incomplete information, prediction.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии Н.Н. Непейводой

*Поступила в редакцию 24.02.2014.
Опубликована 31.07.2014.*

УДК 332.1
ББК 65в6

ПАНЕЛЬНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБЪЕМА ВЫПУСКА ПРОДУКЦИИ ДЛЯ РЕГИОНОВ РОССИИ

Бахитова Р. Х.¹, Ахметшина Г. А.²

(Башкирский государственный университет, Уфа)

Лакман И. А.³

(Уфимский государственный авиационный технический университет, Уфа)

Проводится построение производственной функции для 79 регионов России с использованием инструментов панельного моделирования. Выбрана модель с фиксированными эффектами, при упорядочивании которых все регионы разделяются на 4 группы. Анализируются сходные особенности регионов, которые попали в одну группу.

Ключевые слова: производственная функция, панельные данные, фиксированные эффекты.

1. Введение

В экономических исследованиях часто применяется производственная функция, описывающая зависимость объема валового продукта от факторов производства – труда и капитала. Впервые производственная функция вида

$$Y = AK^{\alpha}L^{\beta}$$

¹ Бахитова Раиля Хурматовна, доктор экономических наук, профессор (bakhitovarah@mail.ru).

² Ахметшина Гузель Азатовна, ассистент (g_akhmetshina@mail.ru).

³ Лакман Ирина Александровна, кандидат технических наук, доцент (lackmania@mail.ru).

была рассчитана в 1920-е годы для обрабатывающей промышленности США американскими экономистами Ч. Коббом и П. Дугласом.

Метод производственных функций получил широкое применение в экономической науке XX века. Он использовался в СССР исследованиях [3] и при планировании, также остается актуальным на сегодняшний день.

В работах, посвященных исследованию российской экономики с использованием производственной функции, проводится анализ различных аспектов, влияющих на рост ВРП. Например, в [1] исследуется добавочное влияние на ВРП расходов на оплату труда работников занятых в экономике; в [4] рассматривается производственная функция с учетом динамики неоднородности капитала. В этих работах рассматривается экономика страны в целом, без учета особенностей каждого региона.

В [5] проводилось построение модели уровня социально-экономического развития регионов РФ на панельных данных. Однако в модели, рассмотренной в этой работе, отсутствует спецификация между моделью с фиксированными и случайными эффектами, поэтому четко не обоснован выбор типа и даже наличия панели. Был сделан ошибочный вывод о влиянии эффектов на результат.

Использование панельных данных позволяет проследить эффекты, характерные индивидуально для каждого региона, которые мы не можем проследить при построении в рамках обычных регрессионных моделей.

В данной работе мы строим производственную функцию на панельных данных для 79 регионов России. Проводится анализ кросс-секционных эффектов регионов.

2. Построение производственной функции

В исследовании в качестве аппарата моделирования используем модель производственной функции, построенной для 79 регионов России в период с 2002 по 2010 годы по ежегодным статистическим данным, представляющим собой

панель, где в качестве объема производства выступает ВРП, в качестве капитала – стоимость основных фондов, в качестве труда – численность экономически активного населения. Из рассмотрения исключены регионы, для которых указанные показатели входят в состав других регионов, для того чтобы не учитывать их дважды.

В качестве вида производственной функции используем функцию Кобба–Дугласа, подлежащую оценке:

$$(1) \quad VRP_{it} = A_i \cdot OSN_F_{it}^{\alpha} \cdot CHISL_{it}^{\beta},$$

где VRP - ВРП регионов РФ, млн. руб. (производство); OSN_F - стоимость основных фондов, млн. руб. (капитал); $CHISL$ - численность экономически активного населения, тыс. чел. (труд). Константы A , α , β подлежат оценке. Их смысл состоит в следующем: A - константа, которую принято связывать с уровнем развития технологий, хотя она может зависеть от других факторов, не относящихся непосредственно к капиталу и труду; α - константа, являющаяся эластичностью производства по капиталу; β - коэффициент эластичности производства по труду; i - кросс-секционное измерение, $i=1, 2, \dots, 79$; t - временное измерение $t = 2002, 2003, \dots, 2010$.

Для возможности оценки модели панельным методом наименьших квадратов (МНК) линеаризуем (1) посредством логарифмирования:

$$\ln VRP = \ln A + \alpha \ln OSN_F + \beta \ln CHISL.$$

Все дальнейшие вычисления будем проводить, используя пакет Econometric Views.

Основным этапом при оценке панельной модели является спецификация между фиксированными и случайными панельными эффектами.

Для того чтобы сделать выбор между моделями с фиксированными или случайными эффектами по кросс-секциям, применим тест Хаусмана.

При справедливости гипотезы H_0 оценки модели с фиксированными и случайными эффектами являются состоятельными и они не должны отличаться слишком сильно. При справедли-

ности гипотезы H_1 оценки модели с фиксированными эффектами по-прежнему состоятельны, в то время как оценки модели со случайными эффектами уже нет.

В нашем случае значение статистики χ^2 равно 37,68 с близким к нулю уровнем значимости. Это говорит о том, что следует отдать предпочтение гипотезе H_1 и строить модель с фиксированными эффектами по кросс-секциям.

Выбор между обобщенной моделью и моделью с фиксированными эффектами по кросс-секциям осуществим с помощью F -критерия Фишера. В качестве гипотезы H_0 сформулируем гипотезу о том, что эффекты для i -го и j -го наблюдений совпадают для любых i и j . Альтернативная гипотеза H_1 : хотя бы для одной пары i и j существуют различные эффекты по кросс-секциям.

Расчетное значение F -критерия равно 25,177, а табличное для вероятности 0,05 и для степеней свободы $n_1 = 78$ $n_2 = 630$ равно 1,3. То есть следует принять альтернативную гипотезу H_1 и считать, что эффекты различны для различных наблюдений.

Построим модель производственной функции с фиксированными эффектами по кросс-секциям.

Исследование показало, что наилучшие результаты дает модель, построенная с весами по кросс-секциям. В этой модели все коэффициенты значимы с вероятностью 0,05:

$$(2) \quad VRP = 0,00097 * OSN_{(144,23)} F_{(2,41)}^{1,28} CHISL_{(-8,136)}^{0,33} e^{REG_EF},$$

где REG_EF – региональный эффект, присущий для каждого региона индивидуально. Фиксированные эффекты отражают влияние на ВРП факторов, индивидуальных для каждого региона. В скобках указаны значения t -статистики. Все коэффициенты значимы по t -критерию Стьюдента.

График остатков, наблюдаемых и предсказанных значений, представлен на рис. 1. Из него видно, что построенная модель достаточно точно описывает реальные данные.

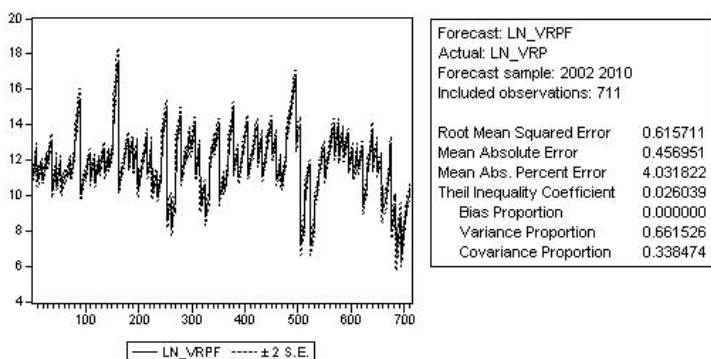


Рис. 1. График остатков, наблюдаемых и предсказанных значений

Коэффициент детерминации равен 0,99. Что говорит о хорошем качестве подгонки модели под реальные данные.

Рассмотрим параметры, характеризующие уровень точности статистической модели. Квадратный корень средней ошибки предсказания равен 0,14. Средняя ошибка по модулю равна 0,1. Средняя ошибка по модулю в процентах равна 0,89. Коэффициент неравенства Тейла равен 0,006. Доля систематической ошибки прогноза равна 0; долю вариации также можно считать равной нулю (она равна 0,0004). Долю ковариации можно считать равной единице (она равна 0,9996). Все это говорит о высоких прогностических свойствах модели.

Значение статистики Дарбина–Уотсона равно 1,143. Это свидетельствует о наличии автокорреляции, которую устранить не удастся.

Применение панельного анализа позволяет учесть индивидуальные особенности, ненаблюдаемую (нефиксированную) информацию, присущую каждому региону в отдельности.

С учетом полученных эффектов регионы можно разделить на четыре группы. В приведенных ниже таблицах даны значения коэффициентов e^{REG_EF} .

Таблица 1. Регионы с фиксированными эффектами, близкими к нулю

Регион	Региональный эффект (ϵ^{REG_EF})
Тюменская область	0,270491
г. Москва	0,315476
Московская область	0,372285
Свердловская область	0,432772

Как видно из таблицы 1, в первую группу попали наиболее «сильные» регионы РФ с устойчивой экономикой, Коэффициенты, отражающие фиксированный эффект и являющиеся мультипликаторами для построенной производственной функции (1), достаточно малы. Они меньше чем 0,5. Изгиб поверхности производственной функции мал, т.е. на каждую дополнительную единицу основных фондов и экономически активного населения приходится все меньший прирост ВРП.

Это соответствует экономике, для которой имеется эффект «насыщения». Следовательно, резкого роста ВРП в зависимости от роста основных фондов и экономически активного населения ждать не приходится. Это, как правило, характерно для достаточно развитых экономик региона.

Схожая картина была получена в исследованиях Независимого института социальной политики. Территории, о которых идет речь, неизменно попадают в число лидирующих регионов по различным социальным показателям. [8]

Во вторую группу попали те регионы, эффекты которых, лежат в промежутке от 0,5 до 1. Здесь картина будет сходной с регионами, попавшими в таблицу 1. Однако увеличение на единицу основных фондов и экономически активного населения приведет к большему росту ВРП, нежели это произойдет для регионов первой группы.

Сюда попали промышленные центры, такие как Пермский край, Челябинская область, Кемеровская область.

Таблица 2. Регионы с эффектами, близкими к единице

Регион	Региональный эффект (e^{REG_EF})	Регион	Региональный эффект (e^{REG_EF})
Краснодарский край	0,509535	Пензенская область	0,740973
Пермский край	0,539062	Республика Дагестан	0,772211
Республика Татарстан	0,544774	Кемеровская область	0,773862
Самарская область	0,548298	Ленинградская область	0,775144
Ростовская область	0,554545	Астраханская область	0,782914
Челябинская область	0,55611	Алтайский край	0,783185
Саратовская область	0,568279	Архангельская область	0,802912
Волгоградская область	0,626779	Приморский край	0,805244
Нижегородская область	0,628764	Смоленская область	0,814631
Иркутская область	0,644306	Курганская область	0,822563
г. Санкт-Петербург	0,655185	Чувашская Республика	0,830379
Ставропольский край	0,655611	Рязанская область	0,838441
Республика Башкортостан	0,659673	Красноярский край	0,845813
Ярославская область	0,680727	Оренбургская область	0,852178
Республика Коми	0,682772	Хабаровский край	0,875269
Амурская область	0,708058	Тамбовская область	0,891321
Новосибирская область	0,714534	Вологодская область	0,911761
Тверская область	0,715956	Мурманская область	0,924491
Забайкальский край	0,723219	Удмуртская Республика	0,944704
Воронежская область	0,723451	Республика Мордовия	0,955876
Кировская область	0,739859	Брянская область	0,977539

Согласно тем же исследованиям [8], данные регионы также входят в число лидирующих. Однако за счет того, что мультипликатор e^{REG_EF} функции (1) для данных территорий немного выше, ожидается больший рост ВРП за счет роста капитала и труда.

Таблица 3. Регины с эффектами, лежащими в промежутке от 1 до 2

Регион	Региональный эффект (e^{REG_EF})	Регион	Региональный эффект (e^{REG_EF})
Ивановская область	1,002945	Белгородская область	1,231679
Тульская область	1,02915	Омская область	1,266158
Костромская область	1,039263	Республика Марий Эл	1,278572
Курская область	1,05131	Псковская область	1,299903
Ульяновская область	1,051741	Республика Калмыкия	1,488436
Республика Саха (Якутия)	1,163977	Республика Хакасия	1,568958
Калужская область	1,179938	Орловская область	1,575928
Республика Бурятия	1,200194	Новгородская область	1,595311
Владимирская область	1,204979	Сахалинская область	1,629785
Республика Карелия	1,206041	Калининградская область	1,6326
Липецкая область	1,211465	Карачаево-Черкесская Республика	1,94284
Томская область	1,222559	Республика Северная Осетия – Алания	1,990052

В третью группу попали регионы, которые являются наиболее эффективными с точки зрения роста ВРП за счет увеличения основных фондов и экономически активного населения. Инвестиционный рейтинг в целом для данной группы регионов невысокий [9], поэтому можно рекомендовать принять определенные меры, способствующие росту ВРП именно за счет увеличения стоимости основных фондов и экономически активного населения.

В четвертую группу попали наименее экономически развитые регионы с неустоявшейся экономикой. То есть если в этих регионах произойдет резкий рост одного из независимых факторов, то тут ожидается резкий рост ВРП. Эти регионы не исчерпали возможностей для своего экономического роста именно за счет этих показателей. Например, в Чукотском автономном округе при увеличении на единицу основ-

ных фондов или экономически активного населения возможно увеличение ВРП в 8 раз.

Таблица 4 Регины с самыми большими эффектами

Регион	Региональный эффект (e^{REG_EF})	Регион	Региональный эффект (e^{REG_EF})
Еврейская автономная область	2,119877	Республика Ингушетия	4,208995
Кабардино-Балкарская Республика	2,165896	Республика Алтай	4,329725
Республика Адыгея	2,24957	Республика Тыва	6,667487
Камчатский край	2,416591	Чукотский автономный округ	8,028422
Магаданская область	2,532103		

На основании этих таблиц можно сделать вывод о том, что чем меньше индивидуальный фиксированный эффект региона тем более стабильная в нем экономика (такие регионы попали в первую группу), и наоборот, большие значения индивидуальных эффектов говорят о неустоявшейся экономике в регионе (такие регионы попали в четвертую группу).

В [2] проводился сходный анализ для экономики Украины. Однако, на наш взгляд, авторы делают ошибочный вывод о том, что большие эффекты соответствуют экономически развитым регионам, так как для более развитых регионов характерен меньший рост ВРП в зависимости от увеличения объемов капитала и труда на единицу их измерений.

Коэффициенты α и β выражают эластичность производства по капиталу и труду соответственно. Их сумма показывает, какой эффект от масштаба имеет производство. Мы получили, что

$$\alpha + \beta = 1,25 + 0,33 > 1.$$

В такой ситуации трудно говорить об экономическом смысле этих коэффициентов, так как доходы, приходящиеся соответственно на долю труда и капитала, в сумме превышают валовой национальный продукт. Это может указывать на то, что предприниматели действуют как монополисты по отношению к

факторам производства или как олигополисты, что более вероятно [6, с. 60].

По полученной модели был сделан прогноз на 2011 год. В качестве труда и капитала были взяты значения соответствующих официальных показателей 2011 года. Доля вариации между прогнозными и фактическими значениями равна 0,72. Это значение близко к нулю. Что говорит о высоких прогностических свойствах модели.

Применение метода панельных данных позволило сделать вывод о том, что на величину ВРП каждого региона оказывают влияние также его индивидуальные особенности. То есть для каждого региона был вычислен свой числовой эффект, оказывающий влияние на кривизну производственной функции. Также вычисленные эффекты позволили разделить регионы на группы по их уровню экономического развития. При построении модели была использована панель по всем регионам страны (были исключены лишь те регионы, показатели которых входят в состав других, для того чтобы не учитывать их дважды), это позволяет сделать вывод о том, что экономика страны однородна, все регионы подчинены общему закону, несмотря на то, что каждый имеет свои особенности. Полученные значения для констант α и β позволяют утверждать, что предприятия в основном действуют как олигополисты. Также был сделан прогноз на следующий период времени, который показал высокие прогностические свойства модели.

Литература

1. БУРАВЛЕВ А.И. *Трехфакторная производственная модель Кобба–Дугласа // Экономика и управление: проблемы, решения.* – 2012. – №3. – С. 13–19.
2. ГУРЬЯНОВА Л.С. *Применение производственных функций панельных данных в анализе регионального развития // Проблемы экономики.* – 2012. – №3. – С. 187–191.
3. КЛЕЙНЕР Г.Б. *Производственные функции: теория, методы, применение.* – М.: Финансы и статистика, 1986. – 239 с.

4. КОЗЛОВА Г.Г. *Производственная функция с учетом динамики неоднородности капитала* // Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук. – 2010. – №11. – С. 65–68.
5. ЛАТЫШЕВА М.А. *Эконометрическое моделирование уровня социально-экономического развития* // Управление большими системами. – 2006. – №27. – С. 282–292.
6. ТИМБЕРХЕН Я., БОС Х. *Математические модели экономического роста*. – М.: Издательство «Прогресс», 1967. – 176 с.
7. *Регионы России. Социально-экономические показатели*. 2012: Р32 Стат. сб. – М.: Росстат, 2012. – 990 с.
8. *Социальный атлас российских регионов* – [Электронный ресурс]. – URL: <http://www.socpol.ru/atlas>, http://www.raexpert.ru/rankingtable/?table_folder=/region_climat/2010/tab1 (дата обращения: 20.05.2014).

PANEL MODELING OF PRODUCTION OUTPUT IN RUSSIAN REGIONS

Railya Bakhitova, Bashkir State University, Ufa Doctor of Science, professor (bakhitovarrh@mail.ru).

Irina Lakman, Ufa State Aviation Technical University, Ufa assistant professor (lackmania@mail.ru).

Guzel Akhmetshina, Bashkir State University, Ufa, assistant (g_akhmetshina@mail.ru).

Abstract. We use panel modeling to build a production function for 79 Russian regions. Under a fixed effect model we split regions into four groups and perform similarity analysis of regions sharing the same group.

Keywords: production function, panel data, fixed effect model.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии М.В. Губко

Поступила в редакцию 24.03.2014.

Опубликована 31.07.2014.

ЭФФЕКТИВНОСТЬ РЕЗЕРВНОЙ ЦЕНЫ И ДАВЛЕНИЕ КОНКУРЕНЦИИ В АУКЦИОНАХ¹

Топинский В. А.²,

(ООО Яндекс, Москва; ЛИСОМО РЭШ, Москва)

В работе представлен анализ эффективности резервной цены в аукционах, определенной как относительное значение процента ожидаемого дохода от аукциона с оптимальным значением резервной цены относительно ожидаемого дохода от того же аукциона, но без резервной цены. Дается формальное определение конкуренции (или давлению конкуренции) в аукционах и доказывается обратная зависимость эффективности резервной цены от уровня конкуренции в аукционе. Приведены примеры свойств аукционов, монотонно влияющих на конкуренцию.

Ключевые слова: резервная цена, оптимизация дохода, конкуренция, давление конкуренции, симметричные аукционы, позиционный аукцион.

Введение

На практике продавец или аукционист часто устраивает аукцион (или в некоторых случаях тендер – обратный аукцион) с целью извлечь из процесса максимальную выгоду для себя. Под максимальной выгодой в случае аукционов обычно понимают максимально возможный ожидаемый доход аукциониста. Вид оптимального с этой точки зрения аукциона для продажи одного товара описал Роджер Майерсон в работе [17]. Этот оптималь-

¹ Автор признателен проф. С.Б. Измалкову за ценное обсуждение содержания статьи. Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, грант Правительства РФ, договор 14.U04.31.0002.

² Валерий Александрович Топинский, (topinsky@gmail.com).

ный механизм в своем общем виде является трудно реализуемым на практике, но, когда все покупатели по представлениям аукциониста обладают одинаковыми свойствами (симметричный случай), согласно Теореме об эквивалентности по доходу («Revenue Equivalence Theorem», [14]) любой классический аукцион с правильно установленной *резервной ценой*³ будет оптимальным.

Разработка правил или формата аукциона с целью максимизации ожидаемого дохода аукциониста называется задачей *оптимизации дохода*. Де-факто на практике используются как правило классические форматы аукционов: английский аукцион, аукцион первой цены, аукцион второй цены или их естественные обобщения. Одной из причин распространенности этих аукционов является их *универсальность*, то есть их правила универсальны для продажи любого вида объектов. Кроме того данные форматы не позволяют устраивать дискриминацию среди покупателей, что часто является типичным ограничением на правила аукциона. Оптимизацию ожидаемого дохода при этом аукционист проводит как правило с помощью инструмента резервной цены.

Задача определения оптимального значения резервной цены является сама по себе не простой, так как требует знания свойств покупателей и выполнения ряда предположений. Например, даже в случае, когда аукционист обладает данными о ставках в предыдущих (за прошлые годы или кварталы) аналогичных аукционах, то для определения оптимального значения резервной цены необходимо знать, каким образом покупатели оценивают ценность обладания объектом продажи, и согласно каким стратегиям покупатели делают ставки в ходе аукциона (подробнее о методах структурной эконометрики аукционов см. [19]).

На практике покупатели часто не удовлетворяют всем теоретическим предположениям, поэтому применяемые методы вычисления резервной цены позволяют найти оптимальное значение с некоторой погрешностью. Естественно размер этой по-

³ Под *резервной ценой* понимается минимально возможная цена продажи. Как правило резервная цена устанавливается аукционистом и объявляется в правилах аукциона.

грешности зависит от того, насколько сильно сделанные предположения не соответствуют действительности. Результатом таких неточностей в оценке оптимальной резервной цены может быть два случая:

- 1) значение резервной цены переоценено, и, как следствие, аукционист может получить уменьшение ожидаемого дохода;⁴
- 2) значение резервной цены недооценено.

Второй случай с недооцененной резервной ценой приводит к суб-оптимальному аукциону, когда ожидаемых доход увеличивается, но не на максимально возможное значение. При этом большинство современных аукционов проводятся на базе современных информационных технологий (в электронном формате). И подобного рода оптимизация аукционов (сбор данных по предыдущим аукционам, решение задачи определения оптимального значения резервной цены, дальнейшее их внедрение в систему, оценка результатов, поддержка и возможная корректировка этих значений) порождает естественные издержки на развитие программного обеспечения, инфраструктуры в целом. Поэтому даже недооценка резервной цены в случае больших отклонений от оптимального значения может приводить в итоге к уменьшению прибыли (доход за вычетом издержек), что также нежелательно.

Поэтому очень важно понимать, когда применение инструмента резервной цены практично, а когда слишком рискованно. Очевидно, что если возможный прирост ожидаемого дохода от оптимальной резервной цены очень маленький, то существующий риск получить потери в прибыли весьма велик. С другой стороны, если резервная цена сильно влияет на ожидаемый доход, то есть даже в окрестности оптимального значения можно получить существенный прирост ожидаемого дохода, то риск

⁴ Известно, что значение ожидаемого дохода в зависимости от значения резервной цены начинает резко уменьшаться в области справа от оптимального значения резервной цены.

оказаться в проигрыше существенно сокращается. Всё это приводит к необходимости анализировать свойства конкретных аукционов с целью оценить возможный прирост дохода от резервной цены.

Общеизвестным правилом считается факт, что резервная цена имеет значимый эффект на ожидаемый доход в тех случаях, когда уровень конкуренции в аукционе недостаточно велик, и что с ростом этой конкуренции этот эффект монотонно уменьшается. При этом данный факт понимается в большей степени на интуитивном уровне — термин *конкуренция* или ее уровень формально не определяется и лишь порой отождествляется с числом участников в аукционе (см. [12, 19]).

В данной работе, определяя эффективность резервной цены как отношение ожидаемого дохода от аукциона с оптимальной резервной ценой к ожидаемому доходу без резервной цены, проводится анализ эффективности резервных цен в многотоварных аукционах с единичным спросом среди покупателей в симметричном случае. Сравнение аукционов по эффективности резервных цен удается построить, основываясь лишь на сравнении их *приведенных форм*.⁵ На основе этих же приведенных форм строится формальное определение *давления конкуренции*, с помощью которого удастся сравнивать аукционы по уровню конкуренции в них. Далее показывается, что определенные таким образом эффективность резервной цены и уровень конкуренции в аукционе имеют обратную зависимость. То есть с ростом уровня конкуренции эффективность резервных цен действительно уменьшается.

Важным практическим результатом является проводимый здесь анализ свойств аукциона, которые определяют уровень конкуренции в данном аукционе. Так как на практике вычисление приведенной формы и ее дальнейший анализ сильно затруднен в силу того, что приведенная форма определяется через ненаблюдаемые величины, то знание того, какие простые (наблюдаемые или вычисляемые) свойства аукциона определяют конкуренцию,

⁵ *Подробнее о приведенных формах аукционов и ограничениях на их реализуемость см. [4].*

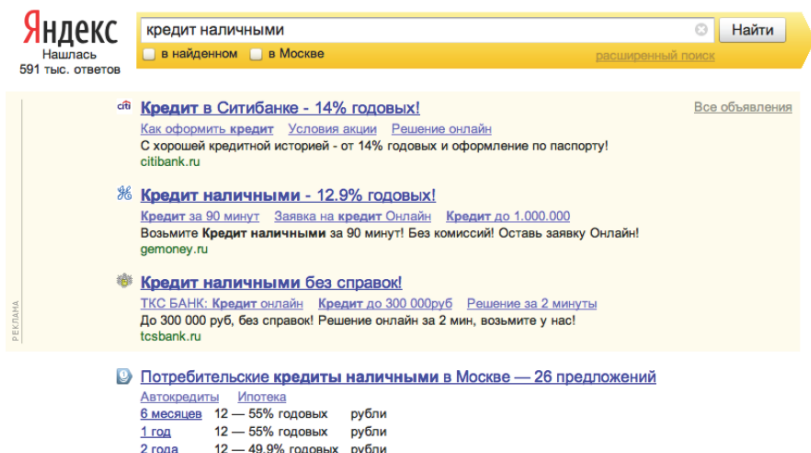


Рис. 1. Пример вертикального размещения рекламы на трех позициях рекламного блока на странице результатов поисковой системы Яндекс.

позволяет строить практичные критерии сравнения аукционов.

Важным примером прикладной области для данной работы являются *рекламные интернет-аукционы*. Данный вид аукционов формирует один из крупнейших и быстро растущих рынков в электронной коммерции. При этом он позволяет продемонстрировать на себе сразу несколько формирующих уровень конкуренции свойств и их влияние на эффективность резервной цены.

Рекламный интернет-аукцион часто называют *позиционным*, так как на нем продаются позиции на странице поисковых результатов (см. рис. 1). Аукцион является *динамичным*, так как он разыгрывается каждый раз, когда пользователь поисковой системы задает запрос, на который рекламодатель желает разместить свое объявление, и, соответственно, может повториться в будущем. Кроме того здесь возникают *многотоварность* и *неоднородность* объектов продажи, так как одновременно продается несколько рекламных позиций, которые естественным образом упорядочены сверху вниз по средней частоте генерируемых переходов пользователей на сайт рекламодателя [13]. Последним

характерным свойством данного вида аукционов является *единичный спрос*, так как поисковая система позволяет любому рекламодателю одновременно разместить не более одного рекламного объявления на странице результатов.

Динамичность аукционов, многообразие запросов с одной и той же тематикой, механизмы сопоставления запросов и рекламных объявлений делают объект исследования сложным. Эксперимент по оптимизации позиционного аукциона с помощью резервных цен описали в своей работе Островский и Шварц на примере рекламных аукционов на портале «Yahoo!», [18]. Любая работа по промышленному внедрению резервных цен имеет себестоимость: цена разработки программного комплекса, цена увеличения необходимых объемов памяти. Кроме того, на примере данной экспериментальной работы ясно, что применяемые методы являются неточными и получаемые оценки имеют погрешность. Результат Островского и Шварца в среднем по системе был положительным: был получен прирост в прибыли. При этом авторы указали на наличие проблем: существовали подмножества поисковых запросов, на которых наблюдались потери в прибыли.

Одним из возможных путей уменьшения подобных негативных результатов, является исключение тех аукционов, для которых ожидаемый эффект от внедрения оптимальных резервных цен незначим, то есть возможные погрешности в получаемых оценках могут привести к отрицательным результатам. Поэтому важно понимать, какие свойства таких аукционов уменьшают эффективность резервных цен.

Из полученных в данной работе результатов применительно к данному виду аукционов можно выделить три простых и основных свойства, определяющих уровень конкуренции, а значит и эффективность резервных цен.

- 1) *Число участников в аукционе*. Наиболее интуитивное свойство аукциона, которое обычно отождествляется с уровнем конкуренции, — чем больше участников, тем выше уровень конкуренции.

- 2) *Число доступных рекламных позиций.* Данное свойство обладает своего рода обратным эффектом относительно числа участников — чем больше объектов продажи, тем меньше уровень конкуренции. Напомню, что здесь рассматривается случай единичного спроса, то есть покупатели не могут получить более одной рекламной позиции на странице.
- 3) *Степень дискриминации по позиционному эффекту.* Если рекламные позиции на странице организованы достаточно «плотно» друг к другу, то дискриминация по позициям в таком случае будет минимальна. Если же рекламные позиции сильно удалены друг от друга или размер одной позиции по вертикали достаточно велик, то позиционный эффект для второй и последующих позиций будет существенно бóльшим: вероятность того, что пользователь просмотрит их позиции будет существенно уменьшена. Поэтому, если степень дискриминации мала, то позиции имеют практически одинаковую ценность для покупателей, то есть уровень конкуренции здесь небольшой. В противном случае рекламодатели будут стремиться получить первую позицию, тем самым увеличивая уровень конкуренции в аукционе.

Все только что перечисленные свойства являются простыми в том смысле, что их значения можно либо наблюдать явно, либо являются в достаточной мере просто вычисляемыми (про вычисление значений позиционных эффектов см. [2]), что делает сравнительный анализ аукционов реализуемым на практике.

Работа организована следующим образом. В первой главе определены основные компоненты математической модели аукциона и понятие приведенной формы аукциона, которое является основным для анализа в данной работе. Здесь же дается определение эффективности резервной цены. Во второй главе определено формально понятие давление конкуренции и на базе него определен частичный порядок над аукционами. После чего собраны основные результаты об обратной зависимости эффективности резервной цены от роста уровня конкуренции.

1. Приведенная форма аукциона

Для того чтобы изучать аукцион необходимо описать модель его участников и задать правила (формат). Базовые понятия теории аукционов с более подробным описанием их свойств можно найти в [14]. Здесь кратко перечислены основные предположения, составляющие так называемую *модель независимых частных ценностей* или IPV-модель («independent private values») в симметричном случае.

1.1. УЧАСТНИКИ АУКЦИОНА

Аукционист и покупатели составляют множество участников аукциона. Множество покупателей обозначим как $\mathcal{N} = \{1, 2, \dots, N\}$. Для аукциониста при необходимости будем использовать индекс 0.

Предположим, что каждый участник может определить для любого товара максимальную цену, которую он согласен заплатить — *ценность*, v . Здесь без потери общности предположим, что ценность аукциониста от непроданного товара нулевая, т.е. $v_0 = 0$. Покупатели в ходе аукциона делают свои ставки b_i , а аукционист согласно заявленному формату аукциона по собранному вектору ставок \vec{b} распределяет товары среди покупателей и определяет платежи.

Наиболее общим рассматриваемым здесь случаем будет многовариантный аукцион с $K \geq 1$ неоднородными объектами продажи, множество которых обозначим через \mathcal{K} . При этом будем рассматривать только случай единичного спроса среди покупателей (любой покупатель хочет или может приобрести только один объект), а для множества неоднородных объектов продажи \mathcal{K} определим вектор качества товаров α , который отображает относительное качество продаваемых единиц товара друг относительно друга и определяет ценность покупателя для каждого товара.

Определение 1. Для аукциона с K товарами и N покупателями определим вектор качества товаров $\alpha \in \mathbb{R}^N$ следующим образом.

- 1) $\alpha_1 = 1$;
нормирование относительно наиболее качественного.
- 2) $\alpha_i \geq \alpha_{i+1}$;
товары упорядочены по убыванию качества.
- 3) $\alpha_{K+1} = \dots = \alpha_N = 0$;
отсутствие товара эквивалентно товару с нулевым качеством.

Таким образом вектор качества α порождает естественный порядок на множестве товаров \mathcal{K} . При этом, ценность покупателя $i \in \mathcal{N}$ для товара с номером k определяется как произведение:

$$v_{i,k} = \alpha_k \cdot v_i,$$

где значение v_i , ценности за единицу товара, определяет тип покупателя.

Таким образом, с помощью вектора качества товаров покрываются случаи:

- $K = 1$, однитоварного аукциона;
- $\alpha_1 = \dots = \alpha_K$, аукциона с единичным спросом и одинаковыми товарами;
- $\exists i < K : \alpha_i > \alpha_{i+1} > 0$, аукциона с единичным спросом и неоднородными товарами или позиционный аукцион.

Так как для моделирования и анализа аукционов используется теоретико-игровой подход, то важно определить, какая информация о свойствах участников (свойствах их моделей) считается общеизвестной, а какая нет.

В рамках IPV-модели информацию о правилах аукциона, о свойствах аукциониста (в нашем случае, это просто v_0), о свойствах предлагаемых товаров (вектор α) и о свойствах рынка постулируют общеизвестной. Под общеизвестными свойствами

рынка здесь понимаются множество возможных типов покупателей $V = (0, \omega)$ и функция распределение типов $F(v)$ (в симметричном случае все участники описываются одинаково с помощью одной общей функции распределения), т.е.

$$\forall i \in \mathcal{N} \quad v_i \in V \text{ и } v_i \sim F(v).$$

При этом свойство каждого покупателя в отдельности, его конкретный тип v_i ⁶, известно только ему самому и никому более. В дополнение будем предполагать, что рассматриваемая функция распределения $F(v)$ имеет строго положительную плотность $f(v)$ внутри V , и что типы покупателей являются реализациями независимых друг от друга случайных величин.

1.2. ФОРМАТ АУКЦИОНА

Как уже отмечалось выше, речь пойдет лишь о симметричных аукционах, причем тех, что могут быть описаны с помощью вектора качества товаров. Вообще говоря, под такое описание подпадает достаточно обширный класс аукционов. Некоторые примеры уже были озвучены (аукцион первой и второй цены, английский аукцион) для случая одного товара. В случае многих товаров примерами аукционов, к которым применимы результаты данной работы, являются аукцион единой цены, аукцион Викри-Кларка-Гровса⁷ (или VCG-аукцион) или эквивалентный ему в некотором смысле обобщенный аукцион второй цены⁸ (или GSP-аукцион).

⁶ Курсивом будет всегда обозначаться конкретная реализация значения типа, то есть v_i – это конкретное значение, а v_i – случайная величина, с помощью которой моделируется представление аукциониста и прочих участников о типе участника i .

⁷ Назван после работ [7, 9, 21], где последовательно для различных задач было дано описание эффективного механизма в квазилинейных моделях. В [15] показан более общий результат.

⁸ Подробнее о свойствах равновесия в обобщенном аукционе второй цены, в котором все платежи эквивалентны соответствующему VCG-аукциону, см. [8].

Таким образом, в данной работе речь пойдет про симметричные *стандартные*⁹ аукционы, в которых существует симметричное и возрастающее равновесие: то есть для всех участников существует возрастающая стратегия (отображение из ценности в ставку), отклоняться от которой для любого участника не выгодно при условии, что все остальные придерживаются данной стратегии. То есть здесь и далее под словом аукцион будет всегда пониматься именно симметричный стандартный аукцион с симметричным и возрастающим равновесием. Кроме того, из дальнейшего анализа неявно будут исключены ставки покупателей, и все вычисления будут проводиться в терминах их типов. Такой прием возможен за счет известного в теории *Принципа откровенности*¹⁰, согласно которому для любого аукциона с указанным равновесием в нем можно построить эквивалентный ему аукцион, где равновесной стратегией является правдивое раскрытие своего типа.

Определение 2. Для аукциона по продаже K товаров с вектором качества α среди N покупателей функцией ожидаемого количества товара $q(v)$ для покупателя с типом v будем называть математическое ожидание качества товара, которое он может выиграть в ходе данного аукциона. То есть

$$q(v) = \sum_{i=1}^K \alpha_i \cdot \pi_i(v),$$

где $\pi_i(v)$ есть вероятность события, заключающегося в том, что тип v оказался i -ым по величине типом среди всех N типов

⁹ Стандартным принято называть аукцион, в котором согласно его правилам участник с наибольшей ставкой получает самый ценный товар, участник со второй по величине ставкой — следующий по качеству товар, и т.д.

¹⁰ Название данного принципа в русской литературе обычно переводят как «Принцип выявления» ([14, The Revelation Principle]), но понятие **откровенности** в контексте аукционов лучше отображает суть происходящего: утверждается, что можно создать условия в аукционе, согласно которым откровенно (правдиво) сообщать свой тип аукционисту будет равновесием.

участников, то есть

$$\pi_i(v) = C_{N-1}^{i-1} (1 - F(v))^{i-1} F(v)^{N-i}.$$

Название «количество товара» в определении оправдано тем фактом, что товар № i с качеством α_i можно воспринимать как часть или долю α_i товара №1 с наибольшим качеством $\alpha_1 = 1$. То есть для каждого покупателя с типом v значение $q(v)$ есть его ожидание того, какое количество товара (качества 1) он может получить в ходе аукциона. При этом каждый такой покупатель выигрывает товары, платя за это. Известным в теории аукционов результатом является Теорема об эквивалентности доходов аукционов, которая связывает функцию ожидаемого платежа $m(v)$ участника с типом v с его функцией ожидаемого количества товара следующим образом.¹¹

$$(1) \quad m(v) = v \cdot q(v) - \int_0^v q(s) ds = \int_0^v s dq(s).$$

Таким образом, пара функций $q(v)$ и $m(v)$ описывают ожидания каждого покупателя от участия в аукционе. Именно такое, сжатое по сути до одной функции $q(v)$, описание аукциона называют *приведенной формой* аукциона. Более развернутое описание всех правил аукциона здесь скрыто, и, вообще говоря, существуют различные форматы (или правила) аукционов, которые в своей приведенной форме эквивалентны друг другу.

Ожидаемый доход аукциониста также просто выражается через приведенную форму аукциона. Действительно, ожидаемый доход есть ожидание суммы платежей всех участников аукциона, то есть

$$(2) \quad \begin{aligned} \mathbb{E} = \mathbb{E} \sum_{i \in \mathcal{N}} m(v_i) &= N \int_0^\omega \int_0^v s dq(s) dF(v) \\ &= N \int_0^\omega \int_v^\omega dF(s) v dq(v) = N \int_0^\omega v(1 - F(v)) dq(v). \end{aligned}$$

¹¹ Вообще говоря, данная теорема применима к более широкому классу экономических инструментов, а не только к стандартным аукционам. Подробнее см. [14, Revenue Equivalence Theorem].

Полученные выражения становятся интуитивно понятными и естественными, если воспользоваться интерпретацией из [5]. А именно, можно мыслить про значение типа v как про цену на товар, а про вероятность того, что покупатель будет согласен на такую стоимость, $1 - F(v)$, как про количество или объем товара, на который покупатель согласен при данной стоимости (т.е. $\text{price} = v$, $\text{volume} = 1 - F(v)$). Тогда в (2) подынтегральное выражение $v(1 - F(v)) = \text{price} \cdot \text{volume}(\text{price})$ есть аналог функции общего дохода из курса микроэкономики. Только в аукционе значение ожидаемого дохода есть усредненное значение этой функции общего дохода, где усреднение проходит с весами пропорциональными вкладу текущей цены v в увеличение ожидаемого количества товара $q(v)$, которое доступно по данной цене.

1.3. ЭФФЕКТИВНОСТЬ РЕЗЕРВНЫХ ЦЕН

Резервной ценой R называется цена, ниже которой продажа товара невозможна. То есть, если некоторый покупатель i имеет тип $v_i < R$, то согласно правилам аукциона он достоверно не сможет выиграть товар. Следовательно, в терминах приведенной формы для любого покупателя, чей тип меньше установленной резервной цены, ожидаемое количество товара равно нулю:

$$\forall v < R, \quad q(v; R) = 0.$$

Причем,

$$\forall v \geq R, \quad q(v; R) = q(v; 0) \equiv q(v).$$

Таким образом, согласно (2), величина ожидаемой прибыли аукциониста также явно зависит от величины резервной цены посредством функции ожидаемого количества товара:

$$(2') \quad \mathbb{E}(R) = N \int_V v \cdot (1 - F(v)) dq(v; R).$$

Поэтому естественно положить за определение *оптимальной* резервной цены значение R^* , доставляющее наибольшее значение

ожидаемой прибыли:

$$(3) \quad R^* = \arg \max_R \mathbb{E}(R).$$

Задачу оптимизации дохода будем называть *регулярной*, если функция ожидаемого дохода $\mathbb{E}(R)$ имеет только одну точку максимума, и, соответственно, $\frac{d}{dR} \mathbb{E}(R) \Big|_{R=R^*} = 0$ есть необходимое и достаточное условие для оптимальности резервной цены. Далее будем везде предполагать, что рассматриваемая функция распределения $F(v)$ порождает регулярную задачу.

Определение 3. *Эффективностью резервной цены в аукционе будем называть величину относительного прироста ожидаемой прибыли аукциониста с установленной оптимальной резервной ценой от ожидаемой прибыли аукциона без резервной цены,*

$$(4) \quad \rho = \frac{\mathbb{E}(R^*)}{\mathbb{E}(0)} - 1.$$

Данное определение вводит меру эффективности резервной цены для некоторого аукциона. Поэтому важно определить формально, что подразумевается под аукционом здесь.

Очевидно, что резервная цена это часть правил или формата аукциона \mathcal{A} , согласно которым проводятся торги, определяются победители и размеры необходимых платежей. При этом детальным правилам \mathcal{A} не достаточно при вычислении (2'), значения ожидаемого дохода аукциониста: необходимо учесть свойства всех участников аукциона и предлагаемых товаров. Совокупность этих свойств будем называть *контекстом* аукциона \mathcal{C} . В случае симметричного аукциона контекстом будет тройка: вектор качества товаров, множество покупателей и функция распределения их типов, $\mathcal{C} = \langle \alpha, \mathcal{N}, F(v) \rangle$. В итоге полное описание конкретного аукциона представляет из себя пару $\langle \mathcal{A}, \mathcal{C} \rangle$.

Из определения (4) ясно, что при вычислении эффективности ρ , строго говоря, используются описания сразу двух аукционов $\langle \mathcal{A}, \mathcal{C} \rangle$ и $\langle \mathcal{A}', \mathcal{C} \rangle$, где отличие заключается лишь в правилах

аукционов наличием или отсутствием резервной цены. В определении используется оптимальное значение резервной цены (3), которое может быть вычислено из свойств базового аукциона $\langle \mathcal{A}, \mathcal{C} \rangle$. Поэтому величина эффективности резервной цены определяется на основе свойств лишь базового аукциона без резервной цены, $\rho = \rho[\mathcal{A}, \mathcal{C}]$.

В данной работе при анализе различных симметричных аукционов функцию распределения типов покупателей $F(v)$ будем считать фиксированной и одинаковой для всех аукционов. Поэтому зависимость основных характеристик (например, ожидаемый платеж покупателя, значение оптимальной резервной цены или эффективность резервной цены в аукционе) от свойств модели аукционов $\langle \mathcal{A}, \mathcal{C} \rangle$ вырождается в зависимость лишь от приведенной формы $q(v) \equiv q(v; 0)$ этого аукциона (см. (2')).

Утверждение 1. *Для симметричных аукционов с заданным распределением типов покупателей $F(v)$ эффективность резервной цены в этих аукционах есть функционал от их приведенной формы, $\rho[\mathcal{A}, \mathcal{C}] \equiv \rho[q(v; 0)]$.*

2. Резервная цена и уровень конкуренции

Неформально, хорошо известно, что эффект от резервной цены небольшой там, где конкуренция велика. Поэтому важно дать определение понятию *конкуренции в аукционе*. Во многих работах с конкуренцией отождествляется просто число конкурентов.

В данной главе дается определение понятия давления конкуренции и показаны некоторые естественные его свойства. После чего на базе этого анализа определяется частичный порядок над аукционами, где согласно этому порядку факт доминирования $\langle \mathcal{A}_1, \mathcal{C}_1 \rangle$ над $\langle \mathcal{A}_2, \mathcal{C}_2 \rangle$ интерпретируется, как увеличение уровня конкуренции.

В заключении показано, что увеличение уровня конкуренции в аукционе приводит к снижению эффективности резервной цены, и приведены примеры возможных способов увеличения уровня конкуренции. В случае интернет-аукционов рекламы данные примеры позволяют выделять аукционы с потенциально малой

эффективностью резервных цен без явного вычисления приведенной формы $q(v; 0)$.

2.1. ПОНЯТИЕ КОНКУРЕНЦИИ В АУКЦИОНЕ

Как отмечалось выше понятие конкуренции в литературе по теории аукционов использовалось неформально. При этом под увеличением конкуренции на интуитивном уровне понималось правило: *чем выше конкуренция, тем больше цены*. Поэтому здесь формальное определение понятию конкуренции будет дано таким образом, чтобы соблюсти это правило.

В работе [6] приводится сравнительный анализ генерируемой прибыли для аукционов первой цены в случаях симметричных и асимметричных покупателей. Автор анализирует, каким образом асимметрия влияет на свойства аукциона и приходит к выводу, что асимметрия сокращает так называемое давление конкуренции: более сильные участники все еще более вероятно выигрывают аукцион, но ставят ставки более сдержанно (в аукционе первой цены ставка равна платежу в случае выигрыша). Но формального определения давлению конкуренции автор не приводит.

В работах по теории отраслевых рынков существуют примеры определения давления конкуренции через ожидаемую полезность фирм. Например, в [10], [11] и [16] моделируется эффект увеличения конкуренции через сокращение ожидаемой полезности. В работе [3] дается более общее определение давления конкуренции как некоторого абстрактного параметра, который влияет как на уровень ожидаемой полезности, так и на величину ее наклона в точке (производной).

Перейдем к определению конкуренции в случае аукционов. Каждый покупатель обладает некоторым типом v — его ценность от обладания единицей товара. Назовем *средней стоимостью единицы товара* для покупателя с типом v отношение ожидаемого платежа к ожидаемому количеству товара:

$$(5) \quad pp(v) = \frac{m(v)}{q(v)}.$$

Тогда полезность покупателя с типом v от обладания единицей товара можно положить разницу его ценности этой единицы товара и среднюю стоимость за единицу товара:

$$(6) \quad u(v) = v - pp(v).$$

Таким образом факт увеличения конкуренции можно связать с уменьшением полезности покупателя или с увеличением средней стоимости единицы товара.

Определение 4. Давлением конкуренции $cp(v)$ назовем производную функции среднего платежа за единицу товара, то есть

$$cp(v) = \frac{d}{dv}pp(v) \quad \text{или} \quad pp(v) = \int_0^v cp(t) dt.$$

В качестве мотивации именно такого определения давления конкуренции рассмотрим следующий пример.

Пример 1. Рассмотрим случай аукциона первой цены с N покупателями, чьи ценности распределены равномерно на $[0, 1]$. Тогда равновесной стратегией для покупателя с типом v будет ставить ставку равную $\frac{N-1}{N}v$, см. [14]. В силу того, что это аукцион первой цены, величина равновесной ставки является и средней стоимостью за единицу товара.

Одним из известных примеров того, как увеличивается конкуренция, является рост числа покупателей N . Легко заметить, что величина средней стоимости $\frac{N-1}{N}v$ не только увеличивается с ростом N , но увеличивается и ее угол наклона (в общем случае — производная). •

Теперь дадим определение факту «увеличения конкуренции». Наиболее интуитивно понятным и естественным способом является определение через функцию давления конкуренции, которое очевидным образом согласовывалось бы с простыми примерами аналогичными выше описанному. Но как будет показано далее, это определение можно ослабить так, что основной результат касательно эффективности резервной цены будет сохранен. Несмотря на то, что второе определение менее интуитивно понятно, оно будет использоваться в дальнейшем как основной способ описания факта «увеличения конкуренции» в аукционе.

Определение 5. Будем говорить, что аукцион $\langle \mathcal{A}_1, \mathcal{C}_1 \rangle$ доминирует аукцион $\langle \mathcal{A}_2, \mathcal{C}_2 \rangle$ в смысле давления конкуренции и обозначать $\langle \mathcal{A}_1, \mathcal{C}_1 \rangle \succ_{cp} \langle \mathcal{A}_2, \mathcal{C}_2 \rangle$, если

$$\forall v, \quad cp_1(v) \geq cp_2(v).$$

Определение 6. Будем говорить, что аукцион $\langle \mathcal{A}_1, \mathcal{C}_1 \rangle$ доминирует аукцион $\langle \mathcal{A}_2, \mathcal{C}_2 \rangle$ в смысле уровня конкуренции и обозначать $\langle \mathcal{A}_1, \mathcal{C}_1 \rangle \succ_{cl} \langle \mathcal{A}_2, \mathcal{C}_2 \rangle$, если отношение их функций ожидаемого количества товара не убывает¹², то есть

$$\frac{d q_1(v)}{dv q_2(v)} \geq 0.$$

В дальнейшем под выражением «увеличение уровня конкуренции» будет пониматься некоторое изменение в свойствах конкретного аукциона, приведшее к тому, что новый аукцион стал доминировать исходный аукцион в смысле уровня конкуренции. Примеры того, какие изменения в свойствах аукциона может привести к «увеличению уровня конкуренции», будут показаны ниже.

Следующий результат показывает, что оба определения доминирования приводят к тому, что средняя стоимость в первом аукционе больше, чем в аукционе с «меньшей конкуренцией».

Лемма 1.

$$1) \langle \mathcal{A}_1, \mathcal{C}_1 \rangle \succ_{cp} \langle \mathcal{A}_2, \mathcal{C}_2 \rangle \Rightarrow \langle \mathcal{A}_1, \mathcal{C}_1 \rangle \succ_{cl} \langle \mathcal{A}_2, \mathcal{C}_2 \rangle.$$

$$2) \langle \mathcal{A}_1, \mathcal{C}_1 \rangle \succ_{cl} \langle \mathcal{A}_2, \mathcal{C}_2 \rangle \Rightarrow \forall v, pp_1(v) \geq pp_2(v).$$

Доказательство. Докажем сначала второе утверждение. Для этого распишем среднюю стоимость $pp_1(v)$ следующим образом.

$$pp_1(v) = \frac{m_1(v)}{q_1(v)} = v - \frac{\int_0^v q_1(t) dt}{q_1(v)}.$$

¹² Или иными словами распределение $q_1(v)$ стохастически доминирует распределение $q_2(v)$ в смысле обратной функции отказов, см. [14].

Условие доминирования в смысле уровня конкуренции означает, что отношение $q_1(v)/q_2(v)$ не убывает по v . Это значит, что $\forall t < v$ верно неравенство: $q_1(t)/q_1(v) \leq q_2(t)/q_2(v)$. А значит такое же неравенство верно и для их интегралов по $t < v$, то есть $\int_0^v q_1(t)/q_1(v) dt \leq \int_0^v q_2(t)/q_2(v) dt$. Следовательно

$$pp_1(v) \geq pp_2(v).$$

Теперь докажем первую часть леммы. Согласно определению условие $\langle \mathcal{A}_1, \mathcal{C}_1 \rangle \succ_{cp} \langle \mathcal{A}_2, \mathcal{C}_2 \rangle$ можно переписать следующим образом.

$$\forall v, \quad \frac{d m_1(v)}{dv q_1(v)} \geq \frac{d m_2(v)}{dv q_2(v)}.$$

Распишем производную средней стоимости с учетом (1).

$$\frac{d m_1(v)}{dv q_1(v)} = \frac{d \int_0^v t dq_1(t)}{dv q_1(v)} = \frac{q'_1(v)}{q_1(v)} v - \frac{q'_1(v) m_1(v)}{q_1(v) q_1(v)}$$

. То есть мы получили, что

$$cp_1(v) = \frac{q'_1(v)}{q_1(v)}(v - pp_1(v)) = \frac{q'_1(v)}{q_1(v)}u_1(v).$$

Но, если $cp_1(v) \geq cp_2(v)$, то их интегралы будут также упорядочены, то есть $pp_1(v) \geq pp_2(v)$ или $u_2(v)/u_1(v) \geq 1$. А значит верно следующее.

$$cp_1(v) \geq cp_2(v) \Rightarrow \frac{q'_1(v)}{q_1(v)} \geq \frac{q'_2(v) u_2(v)}{q_2(v) u_1(v)} \geq \frac{q'_2(v)}{q_2(v)}.$$

Что и требовалось доказать.

Данные определения доминирования порождают лишь частичный порядок над множеством аукционов. При этом более слабым доминированием является доминирование в смысле уровня конкуренции. Причем, только что показали, что в случае этого доминирования верно, что $q_2(v) > q_1(v)$, $pp_1(v) > pp_2(v)$ и что $q_2(v) - q_1(v)$ монотонно убывает по v . Иными словами, там где уровень конкуренции больше, цены больше, вероятность получить единицу товара меньше, и с ростом вашего типа v разница в вероятностях получить товар монотонно убывает.

2.2. ЗАВИСИМОСТЬ $\rho[A, C]$ ОТ УРОВНЯ КОНКУРЕНЦИИ

Определив отношение частичного порядка для аукционов в смысле уровня конкуренции, можно показать следующий результат об эффективности резервных цен в различных аукционах.¹³

Теорема 1.

$$\langle \mathcal{A}_1, \mathcal{C}_1 \rangle \succ_{cl} \langle \mathcal{A}_2, \mathcal{C}_2 \rangle \Rightarrow \rho[\mathcal{A}_1, \mathcal{C}_1] < \rho[\mathcal{A}_2, \mathcal{C}_2].$$

Доказательство.

Напомним, что $\mathbb{E}(R) = N \int_V(v) dq(v; R)$, где $(v) = v \cdot (1 - F(v))$. А оптимальная резервная цена есть оптимум ожидаемого дохода аукциониста, $R^* = \arg \max \mathbb{E}(R)$. В силу предполагаемой регулярности задачи имеем, что $\mathbb{E}(R)$ имеет лишь один оптимум, который является решением уравнения $\frac{d}{dR}(\mathbb{E}(R)) = 0$. Действительно,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dR} \mathbb{E}(R) &= N \left(\frac{d}{dR} ((R) \cdot q(R; 0)) + \frac{d}{dR} \int_R^\omega (v) dq(v; 0) \right) \\ &= N ('(R)q(R; 0) + (R)q'(R; 0) - (R)q'(R; 0)) \\ &= N \cdot '(R) \cdot q(R; 0) = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, регулярность задачи – это выпуклость вверх функции общего дохода (v) . То есть на интервале $(0, R^*)$ функция (v) растет, а на оставшейся части (R^*, ω) – убывает.

¹³ Здесь важно заметить, что в рассматриваемых аукционах функция распределения типов участников зафиксировано, то есть $F_1 = F_2$. Поэтому в силу определения (3) оптимальные значения резервных цен в обоих аукционах будут одинаковыми, $R_1^* = R_2^*$.

Теперь рассмотрим эффективность резервной цены в аукционе $\langle \mathcal{A}, \mathcal{C} \rangle$ согласно определению:

$$\begin{aligned} \rho[\mathcal{A}, \mathcal{C}] &= \frac{N \int_V(v) dq(v; R^*) - N \int_V(v) dq(v; 0)}{N \int_V(v) dq(v; 0)} \\ &= \frac{(R^*)q(R^*; 0) + \int_{R^*}^{\omega}(v) dq(v; 0) - \int_0^{\omega}(v) dq(v; 0)}{\int_V(v) dq(v; 0)} \\ &= \frac{(R^*)q(R^*; 0) - \int_0^{R^*}(v) dq(v; 0)}{\int_V(v) dq(v; 0)} = \frac{\int_0^{R^*} q(v; 0) d(v)}{-\int_0^{\omega} q(v; 0) d(v)} \\ &= \frac{\int_0^{R^*} q(v; 0) d(v)}{\int_{R^*}^{\omega} q(v; 0) d(-v) - \int_0^{R^*} q(v; 0) d(v)}. \end{aligned}$$

Далее будем везде использовать обозначения: $q(v) = q(v; 0)$, $\rho_1 = \rho[\mathcal{A}_1, \mathcal{C}_1]$ и $\rho_2 = \rho[\mathcal{A}_2, \mathcal{C}_2]$, $q_1 = q[\mathcal{A}_1, \mathcal{C}_1]$ и $q_2 = q[\mathcal{A}_2, \mathcal{C}_2]$. Причем в силу того, что для обоих случаев распределение $F(v)$ фиксировано и регулярно, то соответствующая функция общего дохода также фиксирована и регулярна. А значит значения оптимальных резервных цен совпадают, то есть $R_1^* = R_2^* = R^*$, что в нерегулярном случае не всегда истинно.

Для краткости введем следующие обозначения для соответствующих интегралов: $\forall i \in \{1, 2\}$, $l_i = \int_0^{R^*} q_i(v) d(v)$ и $r_i = \int_{R^*}^{\omega} q_i(v) d(-v)$. Причем легко увидеть, что $\forall i \in \{1, 2\}$, $l_i \geq 0$, $r_i \geq 0$ и $r_i \geq l_i$. Тогда,

$$\rho_1 = \frac{l_1}{r_1 - l_1} \quad \text{и} \quad \rho_2 = \frac{l_2}{r_2 - l_2}.$$

В этом случае задачу сравнения значений ρ_1 и ρ_2 можно свести к задаче сравнения l_1/l_2 и r_1/r_2 следующим образом.

$$\rho_1 < \rho_2 \Leftrightarrow \frac{l_1}{r_1 - l_1} < \frac{l_2}{r_2 - l_2} \Leftrightarrow \frac{l_1}{l_2} < \frac{r_1 - l_1}{r_2 - l_2} \Leftrightarrow \frac{l_1}{l_2} < \frac{r_1}{r_2}.$$

По предположению теоремы $\langle \mathcal{A}_1, \mathcal{C}_1 \rangle \succ_d \langle \mathcal{A}_2, \mathcal{C}_2 \rangle$, то есть внутри интервала $V = [0, \omega]$ выполнено $q_1(v) < q_2(v)$ и

$q_1(v) = \gamma(v) \cdot q_2(v)$, где функция $\gamma(v)$ монотонно возрастает (как и каждая из $q_1(v)$ и $q_2(v)$). Тогда

$$\begin{aligned} \frac{l_1}{l_2} &= \frac{\int_0^{R^*} q_1(v) d(v)}{\int_0^{R^*} q_2(v) d(v)} = \frac{\int_0^{R^*} \gamma(v) q_2(v) d(v)}{\int_0^{R^*} q_2(v) d(v)} < \\ & \frac{\int_0^{R^*} \gamma(R^*) q_2(v) d(v)}{\int_0^{R^*} q_2(v) d(v)} = \gamma(R^*); \\ \frac{r_1}{r_2} &= \frac{\int_{R^*}^{\omega} q_1(v) d(v)}{\int_{R^*}^{\omega} q_2(v) d(v)} = \frac{\int_{R^*}^{\omega} \gamma(v) q_2(v) d(v)}{\int_{R^*}^{\omega} q_2(v) d(v)} > \\ & \frac{\int_{R^*}^{\omega} \gamma(R^*) q_2(v) d(v)}{\int_{R^*}^{\omega} q_2(v) d(v)} = \gamma(R^*). \end{aligned}$$

Таким образом имеем, что

$$\langle \mathcal{A}_1, \mathcal{C}_1 \rangle \succ_{cl} \langle \mathcal{A}_2, \mathcal{C}_2 \rangle \Rightarrow \frac{l_1}{l_2} < \gamma(R^*) < \frac{r_1}{r_2} \Leftrightarrow \rho_1 < \rho_2,$$

что и требовалось доказать.

Итак, с ростом уровня конкуренции эффективность резервной цены как инструмента в увеличении ожидаемой прибыли падает. Таким образом, если знать, от чего уровень конкуренции может увеличиться в том или ином аукционе, то становится ясно, в каких ситуациях резервная цена может быть практически полезна, а в каких нет.

Утверждение 2.

В аукционах с меньшим уровнем конкуренции резервная цена более эффективна, чем в аукционах с большим уровнем конкуренции.

2.3. ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ КОНКУРЕНЦИЮ СВОЙСТВА АУКЦИОНА

Важной характеристикой контекста аукциона является вектор качества товаров α . Для того, чтобы продемонстрировать пример, какие свойства в аукционе влияют на уровень конкуренции, рассмотрим случай, когда вектор качества товаров можно

описать тройкой параметров, $\langle N, K, q \rangle$, следующим образом.

$$\begin{aligned} \alpha &= (\alpha_1, \dots, \alpha_N), \\ \forall i > K, \quad \alpha_i &= 0, \\ \forall i \leq K, \quad \alpha_{i+1} &= q\alpha_i \quad (0 < q \leq 1). \end{aligned}$$

Таким образом, вектор α , определенный через тройку $\langle N, K, q \rangle$, описывает случай аукциона по продаже K товаров с N покупателями, где качество товаров дисконтируется на постоянный знаменатель q .

Для таких векторов качества товаров рассмотрим два контекста аукциона \mathcal{C}_1 и \mathcal{C}_2 , отличающихся лишь своими векторами качества товаров α_1 и α_2 соответственно (на самом деле в общем случае будут отличаться и множества покупателей \mathcal{N}_1 и \mathcal{N}_2 , но для симметричных аукционов значима лишь разница в числе покупателей, что входит в описание свойств α). Определим следующим образом частичный порядок над такими контекстами с помощью их векторов качества товаров.

Определение 7.

Пусть даны два контекста аукциона, $\mathcal{C}_1 = \langle \alpha_1, \mathcal{N}_1, F(v) \rangle$ и $\mathcal{C}_2 = \langle \alpha_2, \mathcal{N}_2, F(v) \rangle$, где $\alpha_1 = \langle N_1, K_1, q_1 \rangle$ и $\alpha_2 = \langle N_2, K_2, q_2 \rangle$.

Тогда будем говорить, что \mathcal{C}_1 доминирует \mathcal{C}_2 по вектору качества товаров ($\mathcal{C}_1 \succ_{\alpha} \mathcal{C}_2$), если выполнено одно из следующих условий:

- (i) $N_1 > N_2, K_1 = K_2, q_1 = q_2$;
- (ii) $N_1 = N_2, K_1 < K_2, q_1 = q_2$;
- (iii) $N_1 = N_2, K_1 = K_2, q_1 < q_2$;

Тогда для двух аукционов $\langle \mathcal{A}, \mathcal{C}_1 \rangle$ и $\langle \mathcal{A}, \mathcal{C}_2 \rangle$ можно показать, что порядок по уровню конкуренции согласуется с порядком над их контекстами.

Лемма 2.

$$\mathcal{C}_1 \succ_{\alpha} \mathcal{C}_2 \Rightarrow \langle \mathcal{A}, \mathcal{C}_1 \rangle \succ_{cl} \langle \mathcal{A}, \mathcal{C}_2 \rangle.$$

Доказательство. Доказательство будет происходить в три этапа, соответствующих трем различным случаям из определения доминирования по вектору качества товаров. Начнем со второго пункта — увеличение числа объектов продажи.

Введем явное обозначение зависимости от числа объектов K для функции ожидаемого количества товаров через $q^K(v)$ (ниже, такое явное обозначение зависимости от изменяемого параметра будет использоваться повсеместно). Тогда, необходимо показать, что отношение $q^{K-1}(v)/q^K(v)$ не убывает по v . Распишем детально это отношение.

$$\begin{aligned} \frac{q^{K-1}(v)}{q^K(v)} &= \frac{\sum_{i=1}^{K-1} \alpha_i C_{N-1}^{i-1} (1 - F(v))^{i-1} F(v)^{N-i}}{\sum_{i=1}^K \alpha_i C_{N-1}^{i-1} (1 - F(v))^{i-1} F(v)^{N-i}} \\ &= \left(1 + \frac{\alpha_K C_{N-1}^{K-1} (1 - F(v))^{K-1} F(v)^{N-K}}{\sum_{i=1}^{K-1} \alpha_i C_{N-1}^{i-1} (1 - F(v))^{i-1} F(v)^{N-i}} \right)^{-1} \\ &= \left(1 + \alpha_K C_{N-1}^{K-1} \left(\sum_{i=1}^{K-1} \alpha_i C_{N-1}^{i-1} \left[\frac{F(v)}{1 - F(v)} \right]^{K-i} \right)^{-1} \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Заметим, что отношение $F(v)/(1 - F(v))$ есть функция неубывающая, поэтому в силу только что полученного представления отношение $q^{K-1}(v)/q^K(v)$ — не убывающее по v функция.

Теперь рассмотрим случай двух разных векторов качества товаров: α и β . Напомним следующее правило, которое будет активно использоваться.

$$\forall b > 0, \forall d > 0, \quad \frac{a}{b} \geq \frac{a+c}{b+d} \Leftrightarrow \frac{a}{b} \geq \frac{c}{d}.$$

Доказательство неубывания отношения $q^\beta(v)/q^\alpha(v)$ будем показывать методом индукции по числу объектов. Для удобства слагаемые вида $C_{N-1}^{i-1} (1 - F(v))^{i-1} F(v)^{N-i}$ будем обозначать как π_i .

Напомним, что для обоих векторов α и β верно, что $\alpha_1 = \beta_1 = 1$. В качестве базы индукции рассмотрим случай с двумя

товарами. Покажем, что

$$(7) \quad \frac{(\pi_1(v) + \beta_2\pi_2(v))'}{\pi_1(v) + \beta_2\pi_2(v)} \geq \frac{(\pi_1(v) + \alpha_2\pi_2(v))'}{\pi_1(v) + \alpha_2\pi_2(v)}.$$

Для этого, заметим, что в силу доказанного свойства относительно изменения числа объектов продажи, мы знаем, что $\forall \alpha$ справедливо следующее утверждение.

$$\frac{\pi_1'(v)}{\pi_1(v)} \geq \frac{(\pi_1(v) + \alpha_2\pi_2(v))'}{\pi_1(v) + \alpha_2\pi_2(v)}.$$

А значит, верно, что $\pi_1'(v)/\pi_1(v) \geq \pi_2'(v)/\pi_2(v)$ или эквивалентно $\pi_1'(v)\pi_2(v) \geq \pi_2'(v)\pi_1(v)$.

Тогда, преобразовав следующим образом выражение в (7),

$$(\alpha_2 - \beta_2)\pi_1'(v)\pi_2(v) \geq (\alpha_2 - \beta_2)\pi_2'(v)\pi_1(v)$$

получаем, что достаточным условием на коэффициенты будет: $\beta_2 < \alpha_2$.

Теперь предположим, что для некоторого числа $K - 1$ объектов выполнено предположение индукции:

$$\frac{(\sum_{i=1}^{K-1} \beta_i \pi_i(v))'}{\sum_{i=1}^{K-1} \beta_i \pi_i(v)} \geq \frac{(\sum_{i=1}^{K-1} \alpha_i \pi_i(v))'}{\sum_{i=1}^{K-1} \alpha_i \pi_i(v)}.$$

Если для краткости использовать вместо $\sum_{i=1}^{K-1} \beta_i \pi_i(v)$ и $\sum_{i=1}^{K-1} \alpha_i \pi_i(v)$ обозначения A и B соответственно, то для завершения доказательства достаточно показать, что верно следующее утверждение:

$$(8) \quad \frac{B' + \beta_K \pi_K'}{B + \beta_K \pi_K} \geq \frac{A' + \alpha_K \pi_K'}{A + \alpha_K \pi_K}.$$

Для этого предположим, что оно верно и найдем достаточное условие на коэффициенты, из следующих эквивалентных преобразований.

$$B' A + \beta_K \pi_K' A + \alpha_K B' \pi_K \geq A' B + \alpha_K \pi_K' B + \beta_K A' \pi_K$$

$$\frac{B'}{B} + \frac{\alpha_K \beta_K}{AB} \pi_K \left[\frac{B'}{\beta_K} - \frac{A'}{\alpha_K} \right] \geq \frac{A'}{A} + \frac{\alpha_K \beta_K}{AB} \pi'_K \left[\frac{B}{\beta_K} - \frac{A}{\alpha_K} \right]$$

По предположению индукции первые слагаемые из последнего неравенства упорядочены нужным образом. Осталось показать, что выполнено следующее неравенство.

$$\pi_K \left[\frac{B'}{\beta_K} - \frac{A'}{\alpha_K} \right] \geq \pi'_K \left[\frac{B}{\beta_K} - \frac{A}{\alpha_K} \right]$$

или, что тоже самое,

$$\frac{\left[\frac{B'}{\beta_K} - \frac{A'}{\alpha_K} \right]}{\left[\frac{B}{\beta_K} - \frac{A}{\alpha_K} \right]} \geq \frac{\pi'_K}{\pi_K}.$$

Заметим, что выражение слева представляет из себя выражение типа C'/C для $K - 1$ объектов, где $C = \sum_i c_i \pi_i$, но с другими коэффициентами: $c_i = \beta_i / \beta_K - \alpha_i / \alpha_K$. Это неравенство будет истинным в силу доказанного свойства об изменении числа объектов продажи, если коэффициенты c_i будут упорядочены по убыванию и неотрицательны по значению. Достаточным условием для этого является следующая система неравенств:

$$(9) \quad \forall i : 1 \leq i \leq K - 1, \quad \frac{\beta_{i+1}}{\beta_i} \leq \frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i}.$$

Данное свойство заведомо выполнено, если знаменатель последовательности β меньше знаменателя α .

Последним пунктом докажем требуемое свойство неубывания отношения функций ожидаемого количества товара при увеличении числа покупателей. Для этого удобно ввести обозначение $q_N^{\alpha_{\{i\}}}(v)$ для функции ожидаемого количества товара в аукционе с N покупателями, где на продажу выставлено некоторое фиксированное число товаров с соответствующим вектором качества α (обозначение $\alpha_{\{i\}}$ используется для удобства, чтобы в дальнейшем через обозначение $\alpha_{\{i+1\}}$ ссылаться на вектор качества товаров \mathcal{K}_{-1} без первого, наиболее качественного товара

(α_1) : то есть новый вектор образован из оригинального α соответствующим сдвигом в начало последовательности элементов, начиная со второго).

Тогда для того, чтобы доказать доминирование аукциона с большим числом покупателей в смысле уровня конкуренции, необходимо и достаточно показать, что выполнено следующее неравенство:

$$q_N^{\alpha_{\{i\}}} \cdot \frac{d}{dv} q_{N+1}^{\alpha_{\{i\}}} - q_{N+1}^{\alpha_{\{i\}}} \cdot \frac{d}{dv} q_N^{\alpha_{\{i\}}} \geq 0.$$

Для доказательства этого неравенства заметим, что для функции $q_N^{\alpha_{\{i\}}}(v)$ справедливо следующее рекуррентное выражение.

$$(10) \quad q_N^{\alpha_{\{i\}}}(v) = q_{N-1}^{\alpha_{\{i\}}}(v)F(v) + q_{N-1}^{\alpha_{\{i+1\}}}(v)(1 - F(v)).$$

Используя указанное рекуррентное правило для $q_{N+1}^{\alpha_{\{i\}}}(v)$ левая часть проверяемого неравенства преобразуется следующим образом.

$$\begin{aligned} & F(v)q_N^{\alpha_{\{i\}}} \cdot \frac{d}{dv} q_N^{\alpha_{\{i\}}} + (1 - F(v))q_N^{\alpha_{\{i\}}} \cdot \frac{d}{dv} q_N^{\alpha_{\{i+1\}}} \\ & \quad + f(v)q_N^{\alpha_{\{i\}}} \left[q_N^{\alpha_{\{i\}}} - q_N^{\alpha_{\{i+1\}}} \right] \\ & - F(v)q_N^{\alpha_{\{i\}}} \cdot \frac{d}{dv} q_N^{\alpha_{\{i\}}} - (1 - F(v))q_N^{\alpha_{\{i+1\}}} \cdot \frac{d}{dv} q_N^{\alpha_{\{i\}}} \end{aligned}$$

Легко увидеть, что первое и четвертое слагаемые взаимно уничтожаются, что выражение в квадратных скобках неотрицательно (функция ожидаемого количества товара для случая множества товаров \mathcal{K} не меньше, чем ее аналог для случая множества \mathcal{K}_{-1}), и что разность $q_N^{\alpha_{\{i\}}} \cdot \frac{d}{dv} q_N^{\alpha_{\{i+1\}}} - q_N^{\alpha_{\{i+1\}}} \cdot \frac{d}{dv} q_N^{\alpha_{\{i\}}}$ неотрицательна в силу доказанного свойства при уменьшении числа объектов.

Таким образом, неубывание отношения функций ожидаемого количества товара в трех различных случаях условия леммы было показано. Что и требовалось доказать.

Для наглядности рассмотрим численные эксперименты с последовательностью различных аукционов, в которых уровень

136

конкуренции монотонно рос, затем уменьшался и вновь увеличивался за счет поочередного изменения разных свойств аукциона: числа конкурентов N , числа объектов продажи K и величины знаменателя дисконтирования этих объектов q . Как мы уже знаем, эффективность резервной цены в такой последовательности должна меняться в противоположных направлениях.

Пример 2. Зафиксируем вид функции распределения типов возможных покупателей как равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$. Для каждого значения вектора α_i из C_i будем устраивать VCG-аукцион (то есть правила \mathcal{A} фиксированы) и следить за значением эффективности резервной цены $\rho_i = \rho[\mathcal{A}, C_i]$ в зависимости от меняющегося контекста.

Последовательность значений векторов α_i организуем следующим образом:

- (i) Начиная с 1 товара и 2 покупателей будем увеличивать число покупателей до 10, то есть

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= (1, 0), \\ \alpha_2 &= (1, 0, 0), \\ &\dots \\ \alpha_9 &= (1, 0, 0, \dots, 0);\end{aligned}$$

- (ii) Зафиксировав число покупателей, будем увеличивать по одному число торгуемых товаров, то есть

$$\begin{aligned}\alpha_{10} &= (1, 1, 0, \dots, 0, 0, 0), \\ \alpha_{11} &= (1, 1, 1, \dots, 0, 0, 0), \\ &\dots \\ \alpha_{15} &= (1, 1, 1, \dots, 1, 0, 0);\end{aligned}$$

- (iii) Введем дискриминирующий фактор качества $q \in (0, 1)$, и будем последовательно ужесточать этот фактор (устремлять

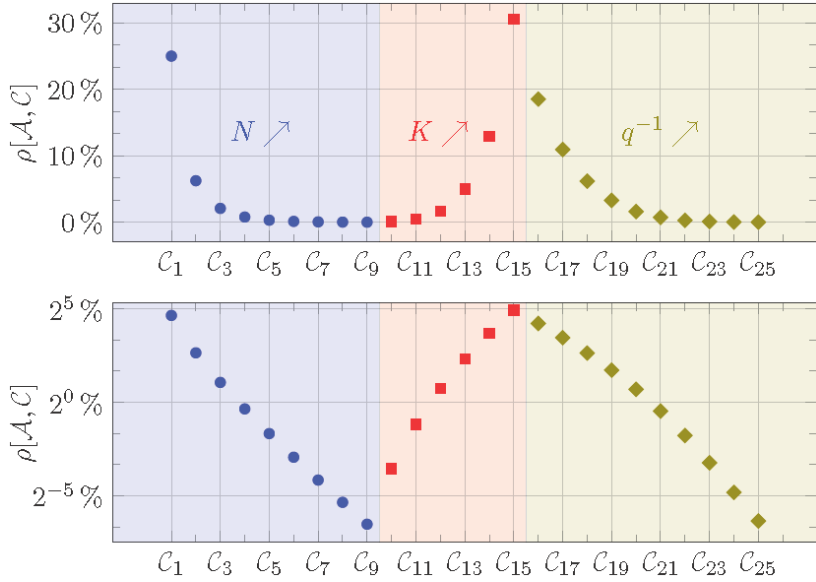


Рис. 2. Численные результаты расчетов эффективности резервных цен в последовательности аукционов.

к нулю), то есть

$$\begin{aligned} \alpha_{16} &= (1, q_1, \dots, q_1^7, 0, 0), \\ \alpha_{17} &= (1, q_2, \dots, q_2^7, 0, 0), \\ &\dots \\ \alpha_{25} &= (1, q_{10}, \dots, q_{10}^7, 0, 0), \end{aligned}$$

где $q_1 = 0,9, q_2 = 0,8, \dots, q_9 = 0,1, q_{10} = 0,01$.

Таким образом определенная последовательность будет обладать следующим свойством:

$$\begin{aligned} \forall i : 1 \leq i < 10, \quad C_{i+1} \succ_{\alpha} C_i, \\ \forall i : 10 \leq i < 16, \quad C_i \succ_{\alpha} C_{i+1}, \\ \forall i : 16 \leq i < 25, \quad C_{i+1} \succ_{\alpha} C_i. \end{aligned}$$

На рис. 2 в десятичной и логарифмической шкалах показаны результаты численных расчетов для эффективности резервных цен в аукционах $\langle \mathcal{A}, \mathcal{C}_i \rangle$, где на оси абсцисс отмечены соответствующие контексты. Полученные результаты согласуются с теоретическими результатами. Кроме того на графиках явно заметна разница в скорости изменения эффективности резервной цены при различных способах варьирования контекста. ●

Заключение

В данной работе получен ответ на практический вопрос: когда оптимизация дохода аукциониста с помощью резервной цены эффективна? Чтобы получить ответ, достаточно изучить свойства приведенной формы аукциона. На основе проделанного анализа определен частичный порядок над аукционами по их уровню конкуренции, что обобщает существующую в литературе концепцию конкуренции. Удалось установить факт обратной зависимости эффективности резервной цены от уровня конкуренции. Данный результат показывает универсальный способ сравнения широкого класса аукционов по эффективности резервной цены в них.

При рассмотрении частного примера интернет-аукционов рекламы показано, что не только количество покупателей определяет уровень конкуренции, но и количество доступных рекламных позиций, и их относительное качество также монотонно влияют на итоговый уровень конкуренции. Интернет реклама на тематических интернет-страницах размещается с самыми разными значениями этих свойств. Поэтому полученные здесь результаты для позиционного аукциона представляют из себя простые (а значит практичные!) критерии по отбору тех интернет-аукционов, где резервные цены могут быть полезны.

Литература

1. ИЗМАЛКОВ С.Б., ЛЕВИН М.В., ТОПИНСКИЙ В.А., ХАКИМОВА Д.А. *Эксперимент по внедрению резервной це-*

- ны в аукционах контекстной рекламы. — ООО «Яндекс», мимеограмма, 2014. — 21 с.
2. ARKHANGELSKY D., IZMALKOV S., KHAКIMOVA D. *On evaluation of CTRs of different positions in sponsored search auctions*. Poster / 14th ACM Conference on Electronic Commerce. — 2013. — [Электронный ресурс] — URL: http://www.newmediacenter.ru/wp-content/uploads/2013/05/DDS_v6.pdf (дата обращения 25.07.2014)
 3. BOONE J. *Competitive pressure: the effects on investments in product and process innovation* // The RAND Journal of Economics. — 2000. — Vol. 31, № 3. — P. 549–569.
 4. BORDER K.C. *Implementation of reduced form auctions: A geometric approach* // Econometrica: Journal of the Econometric Society. — 1991. — Vol. 59, № 4. — P. 1175–1187.
 5. BULOW J., ROBERTS J. *The Simple Economics of Optimal Auctions* // Journal of Political Economy. — 1989. — Vol. 97, № 5. — P. 1060–90.
 6. CANTILLON E. *The effect of bidders' asymmetries on expected revenue in auctions* // Games and Economic Behavior. — 2008. — Vol. 62, № 1. — P. 1–25.
 7. CLARKE E.H. *Multipart pricing of public goods* // Public choice. — 1971. — Vol. 11, № 1. — P. 17–33.
 8. EDELMAN B., OSTROVSKY M., SCHWARZ M. *Internet advertising and the generalized second price auction: Selling billions of dollars worth of keywords* // American Economic Review. — 2007. — Vol. 97, № 1. — P. 242–259.
 9. GROVES T. *Incentives in teams* // Econometrica. — 1973. — Vol. 41, № 4. — P. 617–631.
 10. HART O.D. *The market mechanism as an incentive scheme* // The Bell Journal of Economics. — 1983. — Vol. 14, № 2. — P. 366–382.
 11. HERMALIN B.E. *Heterogeneity in organizational form: Why otherwise identical firms choose different incentives for their managers* // The RAND Journal of Economics. — 1994. — Vol. 25, № 4. — P. 518–537.

12. HONG H., SHUM M. *Increasing competition and the winner's curse: Evidence from procurement* // The Review of Economic Studies. — 2002. — Vol. 69, № 4. — P. 871–898.
13. HOTCHKISS G., ALSTON S., EDWARDS G. *Eye tracking study* – Research white paper, Enquiro Search Solutions Inc, 2005. — 106 p.
14. KRISHNA V. *Auction theory*. — Academic press, 2009. — 336 p.
15. KRISHNA V., PERRY M. *Efficient Mechanism Design*. — Pennsylvania State University, mimeo. — 2000. — 23 p.
16. MARTIN S. *Endogenous firm efficiency in a Cournot principal-agent model* // Journal of Economic Theory. — 1993. — Vol. 59, № 2. — P. 445–450.
17. MYERSON R. *Optimal auction design* // Mathematics of Operations Research. — 1981. — Vol. 6, № 1. — P. 58–73.
18. OSTROVSKY M., SCHWARZ M. *Reserve prices in internet advertising auctions: A field experiment*. — Stanford GSB, working paper, 2009. — 19 p.
19. PAARSCH H.J., HONG H. *An introduction to the structural econometrics of auction data*. — The MIT Press, 2006. — 448 p.
20. RILEY J.G., SAMUELSON W.F. *Optimal auctions* // The American Economic Review. — 1981. — Vol. 73, № 1. — P. 381–392.
21. VICKREY W. *Counterspeculation, auctions, and competitive sealed tenders* // The Journal of finance. — 1961. — Vol. 16, № 1. — P. 8–37.

RESERVE PRICE EFFICIENCY AND COMPETITIVE PRESSURE IN AUCTIONS

Valery Topinsky, Yandex LLC, Moscow; CSDSI NES, Moscow
(topinsky@gmail.com).

Abstract: In this paper I analyze the reserve price efficacy of an auction, that is the relative value of the expected revenue increase induced by the optimal reserve price. I define the competitive pressure in an auction and the notion of one auction dominance over another auction in terms of competition level. After that I prove that the reserve price efficacy decays with respect to the increase of competition level. Finally I provide some examples of auction attributes, which monotonically affect the competition level.

Keywords: reserve price, revenue optimization, competition, competitive pressure, symmetric auctions, position auction.

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии Д. А. Новиковым*

Поступила в редакцию 03.04.2014.

Опубликована 31.07.2014.

www.mtas.ru

ИНТЕРНЕТ-сайт теории управления организационными системами

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ ОРГАНИЗАЦИОННЫМИ СИСТЕМАМИ

ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ УПРАВЛЕНИЯ ИМ. В.А. ТРАПЕЗНИКОВА РАН



Целью сайта является предоставление специалистам по теории и практике управления организационными системами (ученым, преподавателям, аспирантам, студентам, а также реальным управленцам) доступа к ресурсам, отражающим современное состояние теории и возможности обмена идеями и результатами.

На сайте имеются разделы:

Теория – с обзором теории управления организационными системами, глоссарием, информацией для аспирантов;

Практика – с обзором результатов внедрения механизмов управления в реальных организациях;

Библиография – около 2500 публикаций по теории управления, снабжена классификатором и аннотациями;

Электронная библиотека – около 700 полнотекстовых монографий, статей и учебных пособий;

а также многое другое.

На сайте работает **форум**, на котором можно обсудить вопросы, относящиеся к математике, экономике, управлению организациями, узнать новости теории управления и ознакомиться с планируемыми конференциями и семинарами.

ubs.mtas.ru

Интернет-сайт электронного периодического
научного издания «Управление большими
системами: сборник трудов»

УПРАВЛЕНИЕ БОЛЬШИМИ СИСТЕМАМИ

ЭЛЕКТРОННЫЙ СБОРНИК НАУЧНЫХ ТРУДОВ
ИНСТИТУТА ПРОБЛЕМ УПРАВЛЕНИЯ ИМ. В.А. ТРАПЕЗНИКОВА РАН

С 1998 года Институт проблем управления РАН выпускает периодический сборник трудов ученых, занимающихся разработкой и исследованием математических моделей управления большими (социально-экономическими, организационными, организационно-техническими и др.) системами. Все статьи, публикуемые в сборнике, проходят рецензирование ведущими специалистами по теории управления.

С 2006 года сборник "Управление большими системами" вместе с ведущим журналом ИПУ РАН "Проблемы управления" – включены в Российский индекс научного цитирования (РИНЦ).

С июля 2007 года Сборник входит в список ВАК (перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертации на соискание ученой степени доктора и кандидата наук):

- * по управлению, вычислительной технике и информатике (для докторов наук);

- * по электронике, измерительной технике, радиотехнике и связи; по энергетике (для кандидатов наук).

**Уважаемые коллеги! Приглашаем Вас опубликовать
Вашу статью в очередном выпуске сборника
"Управление большими системами"!**

Периодичность сборника - 4 раза в год. Время выхода прошедшей рецензирование статьи - 3-4 месяца. Плата с авторов за публикацию рукописей не взимается.