УДК 519.6
ББК 22.18

КОРРЕКЦИЯ КООПЕРАТИВНЫХ ИГР КАК МЕХАНИЗМ СТАБИЛИЗАЦИИ ЭКОЛОГО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Горелик В. А.[1]
(*Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН, Москва*)

Предлагается подход к задачам принятия решений, для которых заданные отношения предпочтения приводят к пустым ядрам, состоящий в минимальной коррекции исходной модели. Идея реализована на примере кооперативной игры в форме характеристической функции с пустым C-ядром как модели неустойчивой эколого-экономической системы, для которой коррекция интерпретируется как механизм стабилизации. Определено понятие C_p*-ядра и предложены методы его нахождения.*

Ключевые слова: кооперативная игра, характеристическая функция, дележ, *C*-ядро, минимальная коррекция, C_p-ядро, эксцесс, сбалансированное покрытие.

1. Введение

При анализе любой математической задачи один из основных вопросов – это существование решения. Задачи, которые не имеют решения в принятом смысле, принято называть несобственными. Для таких задач обычно вводится понятие обобщенного решения. Как правило, такое решение превращается в классическое решение для некоторой аппроксимации исходной задачи. Например, если для несовместной системы уравнений или неравенств в качестве решения принимается элемент, кото-

[1] *Виктор Александрович Горелик, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник,* (*119333, Москва, ул. Вавилова, 40, vgor16@mail.ru*)

рый минимизирует некоторую норму невязки, то это эквивалентно решению совместной системы, получающейся из исходной системы минимальным изменением некоторых параметров (исходных данных) в смысле данной нормы.

Такой подход, состоящий в минимальной коррекции исходной модели, получил в последнее время широкое распространение (см., например, [1–8, 10]). Естественным является его применение в задачах принятия решений, для которых заданные отношения предпочтения приводят к пустым ядрам. В данной работе эта идея реализована на примере кооперативной игры, *C*-ядро которой является пустым множеством. Если такая игра является моделью некоторой эколого-экономической системы, то это можно трактовать как отсутствие свойства устойчивости компромиссных решений (дележей), а коррекцию модели – как механизм стабилизации системы (например, налоговые платежи или льготы, плата за природные ресурсы, штрафы за загрязнение окружающей среды и т.д.).

2. О подходах к решению проблема пустоты ядра

В данной работе рассматриваются кооперативные игры с побочными платежами (трасферабельной полезностью) в форме характеристической функции (супераддитивной). Напомним некоторые определения.

Определение 2.1. *Кооперативной игрой в форме характеристической функции называется пара* $\Gamma = (N, v)$, *состоящая из конечного множества* $N = \{1, 2, \ldots, n\}$, *элементы которого называются игроками, и вещественной функции* v: $2^N \to R$, *определенной на множестве всех подмножеств* $S \subseteq N$, *называемых коалициями*.

Функция $v(S)$ называется характеристической (или коалиционной функцией), на нее обычно накладываются условия

(1) $v(\varnothing) = 0$,

(2) $v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$, если $S \cap T = \varnothing$.

Свойство (1) формальное, а свойство (2), которое называется супераддитивностью, означает, что при объединении не содержащих общих членов коалиций они могут обеспечить себе общий выигрыш не меньше суммы выигрышей объединившихся коалиций. При таком условии, вообще говоря, для игроков выгодно объединение в «большую коалицию» N. Вопрос состоит в том, как они могут разделить общий выигрыш.

Определение 2.2. *Дележом в кооперативной игре называется вектор* $x = (x_1, \ldots, x_n)$, *удовлетворяющий условиям индивидуальной рациональности* $x_i \geq v(\{i\})$ $\forall i \in N$ *и коллективной рациональности*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = v(N)\,.$$

Таким образом, множество дележей есть

$$X(v) = \left\{ x \in E^n \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} x_i = v(N), x_i \geq v\left(\{i\}\right), i \in N \right\}. \tag{3}$$

Определение 2.3. *Говорят, что дележ x доминирует дележ y по коалиции S* $(x \underset{S}{\succ} y)$, *если* $x_i > y_i$, $\forall i \in S$ *и* $\sum_{i \in S} x_i \leq v(S)$. *Говорят, что дележ x просто доминирует дележ y* $(x \succ y)$, *если найдется такая коалиция S, что x доминирует дележ y по коалиции S* .

Определение 2.4. *C-ядром кооперативной игры называется подмножество таких дележей, для которых не существует доминирующих их дележей.*

Далее *C*-ядро игры будем обозначать просто *C*. Структура *C* описывается следующей известной теоремой.

Теорема 1.1. *C есть множество всех таких векторов x, что*

$$\sum_{i \in S} x_i \geq v(S) \quad \forall S \subset N, \qquad (4)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = v(N).$$

Иногда систему неравенств и одного равенства (4) принимают в качестве определения *C*-ядра. К сожалению, эта система может быть несовместной, тогда $C=\varnothing$. В терминах метода покрытий такие кооперативные игры называются несбалансированными, а в рамках предлагаемого подхода их можно назвать несобственными (конечно, только относительно *C*-ядра) и применить к ним методы коррекции.

В качестве решения проблемы пустоты C-ядра Шепли и Шубик [11] предложили следующее понятие C_ε-ядра:

$$C_\varepsilon(v) = \left\{ x \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} x_i = v(N),\ \sum_{i\in S} x_i \geq v(S) - \varepsilon,\ S \neq \varnothing,\ S \subset N \right\}.$$

Очевидно, что $C_\varepsilon(v) \neq \varnothing$ для достаточно больших ε. C_ε-ядро есть подмножество множества распределений (распределение – это вектор, удовлетворяющий только условию коллективной рациональности). Оно обладает свойством устойчивости в предположении, что на создание любой коалиции необходимо произвести затраты, равные ε. Если же исходно $C \neq \varnothing$, но слишком широкое, то его можно сузить путем выбора $\varepsilon < 0$, которое тогда интерпретируется как вознаграждение за создание коалиции. Наименьшее C-ядро есть пересечение всех непустых C_ε-ядер. Обозначим его $LC(v)$. Очевидно, что $LC(v) = C_{\varepsilon_0(v)}(v)$, где $\varepsilon_0(v)$ – наименьшее ε такое, что $C_\varepsilon(v) \neq \varnothing$. Величина $\varepsilon_0(v)$, которая может быть и отрицательной, определяется формулой

$$\varepsilon_0(v) = \min_{x\in X(v)} \max_{S\neq\varnothing,N} e(S,x),$$

где $e(S,x) = v(S) - \sum_{i\in S} x_i$ – эксцесс коалиции S для дележа x.

Введение понятия C_ε-ядра является, по существу, частным случаем коррекции исходной игры. Однако при этом возникает вопрос, почему ε – фиксированная для всех коалиций величина, а не зависит от размера или состава коалиций. И почему в него надо вкладывать смысл именно затрат на создание коалиции, ведь эти затраты могли быть уже учтены в исходном значении $v(S)$. Использование общих методов коррекции позволяет взглянуть на проблему пустоты C-ядра более широко.

3. Постановка задачи коррекции игры

Сформулируем задачу минимальной коррекции кооперативной игры с отсутствием требуемого свойства (например, пустым C-ядром):

$$\|\Delta\| \to \min$$

(5) $\sum_{i\in S} x_i \geq \tilde{v}(S)$,

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \tilde{v}(N),$$

где $\tilde{v}(S) = v(S) - \Delta_{v(S)}$ $\forall S \subseteq N$, $\Delta_{v(S)}$ – координаты вектора Δ, $\Delta \in R^{2^N}$, $\| \ \|$ – некоторая векторная норма (далее используется норма Гельдера с $p = 2$ и $p = \infty$), причем игра с характеристической функцией $\tilde{v}(S)$ обладает требуемым свойством.

На параметры коррекции $\Delta_{v(S)}$ могут накладываться дополнительные ограничения, в частности, далее в основном рассматривается коррекция, не предполагающая изменения $v(N)$). Кроме того, при некоторых видах коррекции может нарушаться свойство супераддитивности (2), поэтому возможно введение соответствующих ограничений на коррекцию, сохраняющих данное свойства, а также и любое другое (например, симметрию) или их комбинацию.

Определение 3.1. *C_p-ядром назовем множество*

(6) $C_p = \left\{ x \in X'(v) : \ \|\Delta\|_p \to \min, \sum_{i\in S} x_i \geq v(S) - \Delta_{v(S)} \ \forall S \subset N \right\}$,

где $X'(v)$ – множество распределений, получаемое из (3) исключением условий $x_i \geq v(\{i\})$ $\forall i \in N$, $\| \ \|_p$ – норма Гельдера, $C_p \neq \varnothing$.

Если C-ядро игры существует, то, очевидно, $C_p = C$.

Несовместность системы (4) означает, что либо исходная модель плохо отражает действительность и нуждается в доработке, либо плох описываемый ею реальный механизм взаимодействия, либо в рамках концепции C-ядра неустойчивость неустранима. Коррекция модели (в данном случае характеристической функции, если это допустимо) является, соответственно, либо уточнением исходных параметров, либо введением дополнительных механизмов, обеспечивающих устойчивость возможных компромиссных решений.

Рассмотрим возможные дополнительные условия (ограничения) на коррекцию.

1. $\Delta_{v(S)} = \varepsilon$ $\forall S \neq \varnothing, N$.

Данное условие похоже на определение C_ε-ядра, однако здесь, в соответствии с общей постановкой задачи коррекции (5), предполагается минимизация параметров коррекции, поэтому для любой нормы получаем следующую задачу:

$$|\varepsilon| \to \min$$
$$\sum_{i\in S} x_i \geq v(S) - \varepsilon \quad \forall S \subset N,$$
$$\sum_{i=1}^{n} x_i = v(N),$$

которая, очевидно, сводится к задаче линейного программирования (ЗЛП):

$$u \to \min$$
$$\begin{cases} u \geq \varepsilon, \\ u \geq -\varepsilon, \\ \sum_{i\in S} x_i \geq v(S) - \varepsilon \quad \forall S \subset N, \\ \sum_{i=1}^{n} x_i = v(N). \end{cases}$$

Свойство супераддитивности автоматически сохраняется. Решение этой задачи, вообще говоря, не совпадает с наименьшим ядром, так как если $C \neq \varnothing$, то здесь $\varepsilon = 0$ и ядро не меняется, а $LC(v)$ является его максимальным сужением. Такая коррекция в эколого-экономических терминах может интерпретироваться как единая для всех минимальная плата за использование общих природных (например, водных) ресурсов или наоборот, как компенсация за природоохранные мероприятия.

2. $\Delta_{v(S)} \geq 0 \ \forall S \neq \varnothing, N$.

Это ограничение на коррекцию (параметры ее не отрицательны) при исходном предположении о пустоте C-ядра естественно, так как речь о сужении ядра не идет.

Для нормы Гельдера с параметром $p = 2$ получаем, очевидно, задачу квадратичного программирования:

$$\sum_{S\subset N} \Delta_{v(S)}^2 \to \min$$

$$\sum_{i\in S} x_i \geq v(S) - \Delta_{v(S)} \quad \forall S \subset N,$$

(7) $$\sum_{i=1}^{n} x_i = v(N),$$

$$\Delta_{v(S)} \geq 0.$$

Для нормы Гельдера с параметром $p = \infty$ получаем ЗЛП:

$$u \to \min$$

$$u \geq \Delta_{v(S)},$$

$$\sum_{i\in S} x_i \geq v(S) - \Delta_{v(S)} \quad \forall S \subset N,$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = v(N),$$

$$\Delta_{v(S)} \geq 0.$$

Свойство супераддитивности характеристической функции здесь после коррекции может нарушаться, поэтому ограничения (7) возможно следует дополнить условиями

(8) $\Delta_{v(S\cup T)} \geq \Delta_{v(S)} + \Delta_{v(T)}$, $S\cap T=\varnothing$,

которые в силу их линейности не выводят из класса задач, соответственно, квадратичного или линейного программирования. Такая коррекция в эколого-экономических терминах может интерпретироваться как дифференцированная плата за использование природных ресурсов.

3. $\Delta_{v(S)} = kv(S)$ $\forall S \neq \varnothing, N$, $0 \leq k \leq 1$.

Будем называть такой вид коррекции пропорциональным. Он может реализовываться как механизм налоговых отчислений или рентных платежей. Супераддитивность характеристической функции здесь, очевидно, сохраняется. Далее этот вариант коррекции будет рассмотрен более подробно.

4. $\Delta_{v(S)} = k_S v(S)$, $\forall S \neq \varnothing, N$, $0 \leq k_s \leq 1$.

Данный вариант коррекции может реализовываться как механизм налоговых льгот (или субсидий при $k_s < 0$), предоставляемых отдельным группам. Супераддитивность скорректированной характеристической функции здесь может нарушаться, поэтому, возможно, требуются дополнительные ограничения (8).

5. $\sum_{\substack{S \neq \varnothing \\ S \subset N}} \Delta_{v(S)} = -\Delta_{v(N)}$.

Этот вариант коррекции предполагает изменение характеристической функции для всех коалиций, включая большую коалицию. Данное условие можно интерпретировать как отчисления в общий фонд на охрану окружающей среды или дотации из этого общего фонда. Выполнение условия супераддитивности характеристической функции здесь обеспечивается введением дополнительного условия (8).

Для нормы Гельдера с параметром $p = 2$ получаем задачу квадратичного программирования:

$$\sum_{S \subseteq N} \Delta^2_{v(S)} \to min$$

$$\sum_{i \in S} x_i \geq v(S) - \Delta_{v(S)} \quad \forall S \subset N,$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = v(N) - \Delta_{v(N)},$$

$$\sum_{S \subseteq N} \Delta_{v(S)} = -v(N).$$

Для нормы Гельдера с параметром $p = \infty$ получаем ЗЛП:

$$u \to \min$$

$$u \geq \Delta_{v(S)},$$

$$u \geq -\Delta_{v(S)},$$

$$\sum_{i \in S} x_i \geq v(S) - \Delta_{v(S)} \quad \forall S \subset N,$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = v(N) - \Delta_{v(N)},$$

$$\sum_{S \subseteq N} \Delta_{v(S)} = -v(N).$$

Если для большой коалиции изменение характеристической функции запрещено, то получаем частный случай этого варианта

$$\sum_{\substack{S \neq \varnothing \\ S \subset N}} \Delta_{v(S)} = 0,$$

который означает сохранение баланса при изменении начальных данных.

Варианты 1–5 позволяют усовершенствовать базовую модель коррекции кооперативной игры с целью более адекватного описания реальных эколого-экономических механизмов управления.

4. Использование сбалансированных покрытий в задаче коррекции

Как известно, необходимые и достаточные условия непустоты *C*-ядра, полученные О.Н. Бондаревой (и независимо Л. Шепли), основаны на теории двойственности линейного программирования. Рассмотрение двойственных переменных к ограничениям (4) привело к понятию сбалансированного покрытия.

Определение 4.1. *Сбалансированным покрытием множества всех игроков N называется отображение λ, ставящее в соответствие каждой собственной* (*отличной от N*) *коалиции S действительное число* λ_S *из отрезка* [0, 1] *так, что для всех игроков* $i \in N$ *выполняются равенства* $\sum_{\substack{S \subset N \\ S \ni i}} \lambda_S = 1$.

Теорема 4.1 (Бондарева). Необходимым и достаточным условием непустоты *C*-ядра является выполнение неравенства

(9) $\sum_{S \subset N} \lambda_S \cdot v(S) \le v(N)$

для любого

$$\lambda_S \in \Lambda = \left\{ \lambda_S : \sum_{S \ni i} \lambda_S = 1 \ \ \forall i \in N, \lambda_S \ge 0 \ \ \forall S \ne N \right\}.$$

Для проверки условий теоремы 4.1 надо решить ЗЛП

$$\sum_{S \subset N} \lambda_S v(S) \to \max_{\lambda_S \in \Lambda}.$$

Удобство использования сбалансированных покрытий состоит в том, что их множество не зависит от конкретной игры (определяется только числом игроков), а главное, как многогранник, оно определяется конечным числом его вершин (называемых приведенными покрытиями). Сбалансированные покрытия можно использовать для нахождения C_p-ядра.

В соответствии с (9) получаем задачу

(10) $\min\|\Delta\|_p$ при условии $\max\limits_{\lambda_S\in\Lambda}(\sum\limits_{S\subset N}\lambda_S\left(v(S)-\Delta_{v(S)}\right)\le v(N)$.

Введем множество приведенных сбалансированных покрытий, для которых нарушается условие (9):

$$\Lambda^- = \left\{\lambda_S : \sum_{S\subset N}\lambda_S v(S) > v(N)\right\},\ \Lambda^-\subset\Lambda.$$

Теорема 4.2. *Если С-ядро исходной игры пусто, то задача коррекции* (10) *для нормы Гельдера с параметром* $p = \infty$ *сводится к ЗЛП*

$u\to\min$

$u\ge\Delta_{v(S)}$,

$\sum\limits_{S\subset N}\lambda_S\Delta_{v(S)}\ge\sum\limits_{S\subset N}\lambda_S v(S)-v(N)\quad\forall\lambda_S\in\Lambda^-$,

$\Delta_{v(S)}\ge 0$.

Доказательство. Если *С*-ядро исходной игры пусто, то существует такое подмножество множества сбалансированных покрытий Λ, для которого не выполняются условия (9). Среди этих сбалансированных покрытий выберем только приведенные сбалансированные покрытия, – это есть множество Λ^-. Для элементов этого множества λ_S введем параметры коррекции, удовлетворяющие неравенствам

$$\sum_{S\subset N}\lambda_S(v(S)-\Delta_{v(S)})\le v(N)$$

или эквивалентным им

$$\sum_{S\subset N}\lambda_S\Delta_{v(S)}\ge\sum_{S\subset N}\lambda_S v(S)-v(N).$$

В силу положительности λ_S, очевидно, можно ограничиться $\Delta_{v(S)}\ge 0$. При $p=\infty$ имеем целевую функцию $\max\Delta_{v(S)}\to\min$; вводя $u\ge\Delta_{v(S)}$, получаем задачу на $u\to\min$, что и завершает доказательство.

Для нормы Гельдера с $p = 2$ задача (10) аналогично сводится к задаче квадратичного программирования:

$$\sum_{S\subset N}\Delta^2_{v(S)}\to\min$$

$$\sum_{S \subset N} \lambda_S \Delta_{v(S)} \geq \sum_{S \subset N} \lambda_S v(S) - v(N) \quad \forall \lambda_S \in \Lambda^-,$$

$\Delta_{v(S)} \geq 0.$

Таким образом, если при проверке на пустоту C-ядра исходной игры найдены сбалансированные покрытия (достаточно рассматривать приведенные покрытия), для которых не выполняются условия (9), то только они учитываются в ограничениях задачи нахождения C_p-ядра. Например, для игры трех лиц (с супераддитивной характеристической функцией) достаточно рассматривать одно сбалансированное покрытие, которое дает следующее необходимое и достаточное условие не пустоты C-ядра:
(11) $v(1, 2) + v(1, 3) + v(2, 3) \leq 2 \cdot v(1, 2, 3)$.

Соответственно, если условие (11) не выполняется, то в задаче поиска C_p-ядра оно выступает как ограничение на коррекцию.

Пример 1. Рассмотрим игру трех лиц с пустым C-ядром в (0-1) редуцированной форме: $v(1) = v(2) = v(3) = 0$, $v(1, 2, 3) = 1$. Для нее $A = v(1, 2) + v(1, 3) + v(2, 3) - 2 > 0$. В силу супераддитивности $v(1, 2)$, $v(1, 3)$, $v(2, 3)$ не больше 1, поэтому $v(1, 2)$, $v(1, 3)$, $v(2, 3)$ не меньше A. Уменьшение этих величин на $\Delta = A / 3$ при неизменных $v(1)$, $v(2)$, $v(3)$, $v(1, 2, 3)$ является, очевидно, единственной минимальной коррекцией при любом p (за исключением $p = \infty$, и в этом случае единственность можно достичь дополнительной лексикографической минимизацией). Она сохраняет (0-1) редуцированную форму и супераддитивность. Пусть $v(1, 2) = 0{,}5$, $v(1, 3) = 0{,}8$, $v(2, 3) = 1{,}0$, тогда $\Delta = 0{,}1$, $C_p = \{(0{,}1; 0{,}3; 0{,}6)\}$.

5. Пропорциональная коррекция.

Рассмотрим подробнее наиболее интересную, на наш взгляд, пропорциональную коррекцию $\Delta_{v(S)} = kv(S) \quad \forall S \subset N$, $0 \leq k \leq 1$. Задача минимальной коррекции имеет вид

$k \to \min$

(12) $$\sum_{i\in S} x_i \ge v(S)(1-k) \quad \forall S \subset N,$$
$$\sum_{i=1}^{n} x_i = v(N), k \ge 0.$$

Обозначим решение задачи линейного программирования (12) через k_0, а ядро скорректированной игры, т.е. совокупность x, удовлетворяющих ограничениям (12) при данном k_0, – через C_k.

Без ограничения общности будем далее считать, что $v(S) \ge 0$ $\forall S$ (например, игра в (0-1) редуцированной форме, но не обязательно). Введем величину

$$\delta(x,S) = v^{-1}(S)\sum_{i\in S} x_i .$$

Назовем ее относительным эксцессом коалиции S. Так как $\forall x \in X'(v)$ имеет место $\delta(x,N)=1$, то

$$\delta_0 = \max_{x\in X'(v)} \min_{S\subseteq N} \delta(x,S) \le 1.$$

Очевидно, что $C \ne \varnothing$ тогда и только тогда, когда $\delta_0 = 1$.

Теорема 5.1. *Если $C=\varnothing$, то*

$$k_0 = 1 - v(N)\left[\max_{\lambda_S\in\Lambda} \sum_{S\subset N} \lambda_S v(S) \right]^{-1}.$$

Доказательство. Введем замену переменные $r = (1-k)^{-1}$, $z_i = rx_i$, тогда задача (12) примет вид

$$r \to \min$$

(13) $$\sum_{i\in S} z_i \ge v(S) \quad \forall S \subset N,$$
$$\sum_{i=1}^{n} z_i = rv(N),\ r \ge 0.$$

Обозначим решение задачи (13) через r_0, z^0. Очевидно, задача (13) эквивалентна задаче

(14) $$\sum_{i=1}^{n} z_i \to \min$$

при ограничениях

$$\sum_{i\in S} z_i \ge v(S) \quad \forall S \subset N$$

т.е. для них решения z^0 совпадают, а

$$r_0 = v(N)^{-1}\sum_{i=1}^{n} z_i^0 .$$

Рассматривая двойственную задачу к задаче (14) с переменными λ_S, имеем

$$\sum_{i=1}^{n} z_i^0 = \max_{\lambda_S \in \Lambda} \sum_{S \subset N} \lambda_S v(S) .$$

Так как $k_0 = 1 - r_0^{-1}$, получаем утверждение теоремы.

Пример 2. Рассмотрим игру трех лиц с пустым C-ядром в нередуцированной форме. Для нее $v(1, 2) + v(1, 3) + v(2, 3) > 2v(1, 2, 3)$. Минимальная пропорциональная коррекция, приводящая к непустому ядру, дает значение $k_0 = 1 - 2v(1, 2, 3)\cdot[v(1, 2) + v(1, 3) + v(2, 3)]^{-1}$. Пусть $v(1) = 200$, $v(2) = 300$, $v(3) = 0$, $v(1, 2) = 800$, $v(1, 3) = 550$, $v(2, 3) = 650$, $v(1, 2, 3) = 900$. Тогда $k_0 = 0{,}1$ (отчисления с каждой коалиции 10%), $\tilde{v}(1) = 180$, $\tilde{v}(2) = 270$, $\tilde{v}(3) = 0$, $\tilde{v}(1,2) = 720$, $\tilde{v}(1,3) = 495$, $\tilde{v}(2,3) = 585$, а $C_k = \{(315, 405, 180)\}$. Заметим, что максимальное уменьшение значения характеристической функции здесь равно 80, а при независимой коррекции минимальное $\Delta \approx 66{,}7$ (оно, естественно, меньше, так как при пропорциональной коррекции на нее накладываются дополнительные ограничения).

Пример 3 (распределение затрат на экологические мероприятия). Пусть в одном районе на берегу реки расположены 3 предприятия, отходы производства которых загрязняют водные ресурсы. Районное руководство обязывает их построить по отдельности или совместно очистные сооружения. Себестоимости отдельных или совместных (в любом объединении) сооружений, исключающих все виды загрязнений, заданы: $c(1) = 200$, $c(2) = 300$, $c(3) = 400$, $c(1, 2) = 350$, $c(1, 3) = 450$, $c(2, 3) = 550$, $c(1, 2, 3) = 700$. Свяжем с проблемой распределения затрат игру сбережений [9] по формулам

$$v(S) = \sum_{i \in S} v(i) - v(S) \quad \forall S \subseteq N.$$

Получим $v(1) = v(2) = v(3) = 0$, $v(1, 2) = v(1, 3) = v(2, 3) = 150$, $v(1, 2, 3) = 200$. В этой игре $C = \varnothing$. Пусть в интересах районного управления создание общего очистного сооружения и оно может ввести пропорциональные отчисления от экономии в фонд охраны окружающей среды. Тогда $k_0 = 1 / 9$ (отчисления с каждой двухэлементной коалиции $\approx 11\%$), а $C_k = \{(200/3, 200/3, 200/3)\}$. Заметим, что и произвольная минимальная коррекция дает такой же результат и сохраняет симметричность игры.

6. Заключение

Предлагаемый подход естественным образом может применяться к различным игровым (и не только) задачам, не имеющим решения в принятом смысле. Однако он может быть использован и для решения другой типичной проблемы теории игр и исследования операций. В задачах принятия решений в условиях неполной информации (наличие случайных или неопределенных неконтролируемых факторов, многокритериальная оптимизация, конфликтная ситуация) по существу не может быть единого принципа оптимальности. Поэтому для них возникают различные понятия решения. Если соответствующие множества решений для данной задачи непусты и пересекаются, то модель обладает хорошими свойствами. Но такая ситуация не типична. Если же эти множества не пересекаются, вопрос выбора решения остается открытым. Тогда, считая исходную модель, а возможно и описываемую ее практическую ситуацию, неустойчивой (некорректной), можно применить метод ее коррекции с целью получения требуемых свойств. В данном случае этим свойством может быть совпадение разных видов решений для скорректированной модели. Например, для кооперативной игры таким свойством может быть принадлежность вектора (значения) Шепли C-ядру, если последнее непусто, или одновременное требование непустоты и принадлежности. Соответствующие результаты получены и планируются к публикации.

Литература

1. ВАТОЛИН А.А. *Коррекция расширенной матрицы несовместной системы линейных неравенств и уравнений* / Математические методы оптимизации в экономико-математическом моделировании. – М.: Наука, 1991. – С. 240–249.
2. ГОРЕЛИК В.А. *Матричная коррекция задачи линейного программирования с несовместной системой ограничений* // ЖВМ и МФ. – 2001. – Т. 41, №11. – С. 1697–1705.
3. ГОРЕЛИК В.А., ЕРОХИН В.И. *Оптимальная матричная коррекция несовместных систем линейных алгебраических уравнений по минимуму евклидовой нормы*. – М.: ВЦ РАН, 2004. – 193 с.
4. ГОРЕЛИК В.А., ЕРОХИН В.И., ПЕЧЕНКИН Р.В. *Численные методы коррекции несобственных задач линейного программирования и структурных систем уравнений*. – М.: ВЦ РАН, 2006. – 152 с.
5. ГОРЕЛИК В.А., МУРАВЬЕВА О.В. *Методы коррекции несобственных задач и их применение к проблемам оптимизации и классификации*. – М.: ВЦ РАН, 2012. – 148 с.
6. ЕРЕМИН И.И., МАЗУРОВ В.Д., АСТАФЬЕВ Н.Н. *Несобственные задачи линейного и выпуклого программирования*. – М.: Наука, 1983. – 336 с.
7. MARKOVSKY I. *Bibliography on total least squares and related methods* // Statistics and its interface. – 2010. – Vol. 2. – P. 1–6.
8. MARKOVSKY I, VAN HUFFEL S. *Overview on total least squares methods* // Signal Processing. – 2007. – Vol. 87. – P. 2283–2302.
9. PELEG B., SUDHOLTER P. *Introduction to the theory of cooperative games.* – Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2007. – 336 p.
10. ROSEN J.B., PARK H., GLICK J. *Total least norm formulation and solution for structured problems* // SIAM Journal on Matrix Anal. Appl. – 1996. – Vol. 17, №1. – P. 110–128.

11. SHAPLEY L.S., SHUBIK M. *Quasi-cores in a monetary economy with nonconvex preferences* // Econometrica. – 1966. Vol. 34. – P. 805–827.

CORRECTION OF COOPERATIVE GAMES AS STABILIZATION MECHANISM OF ECOLOGICAL-ECONOMIC SYSTEMS

Viktor Gorelik, Computing Center of RAS, Doctor of Sciences, Professor (vgor@mail.ru)

Abstract: An approach is suggested for decision-making problems where players' preferences result in the empty core of the cooperative game. The approach is based on a minimal correction of the initial model. We illustrate the idea on the cooperative game in the form of characteristic function with the empty core originated from the model of an unsustainable ecological-economic system, for which a correction is interpreted as a stabilization mechanism. We introduce the concept of C_p-core and explain its calculation.

Keywords: cooperative game, characteristic (coalition) function, imputation, core, minimal correction, balanced collection

Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии Г.А. Угольницким

Поступила в редакцию 08.01.2015.
Опубликована 31.05.2015.