УДК 656.02 + 51-74
ББК 22.18

МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНКУРЕНТНОЙ МАРШРУТИЗАЦИИ ЭКОЛОГИЧЕСКИ БЕЗОПАСНЫХ ТРАНСПОРТНЫХ ПОТОКОВ НА ГОРОДСКОЙ ТРАНСПОРТНОЙ СЕТИ

Захаров В. В.[1], **Крылатов А. Ю.**[2]
(*Санкт-Петербургский государственный университет*)

На сегодняшний день наблюдается серьезная нехватка методологических инструментов поддержки принимаемых решений по выделению на городской транспортной сети «зеленых» подсетей и стимулированию водителей использовать более экологически безопасные автомобили. Настоящая статья посвящена проблеме распределения двух видов транспортных потоков на сети, включающей «зеленые» и «не-зеленые» маршруты. Проведен анализ конкурентного сценария взаимодействия этих двух групп транспортных средств на сети. Разработан метод выделения «зеленых» маршрутов («зеленой» подсети), которые обеспечивают «зеленым» автомобилям меньшее время перемещения из районов отправления в районы прибытия при равновесном по Вардропу и Нэшу распределениях потоков. Условия сбалансированности «зеленой» подсети с параллельными маршрутами получены в явном виде.

Ключевые слова: маршрутизация зеленых потоков, транспортная сеть, равновесие по Нэшу, равновесие по Вардропу.

---

[1] *Виктор Васильевич Захаров, доктор физико-математических наук, профессор, (mcvictor@mail.ru).*

[2] *Александр Юрьевич Крылатов, кандидат физико-математических наук, (aykrylatov@yandex.ru).*

Введение

В современных крупных городах мира существует проблема загрязнения воздуха. Большое количество промышленных объектов вкупе с огромным количеством плотно движущихся автомобилей ежедневно производят колоссальные выбросы загрязняющих веществ в атмосферу городов, что естественно влияет на качество жизни людей. Согласно данным Федеральной службы государственной статистики в России за последние 14 лет передвижные источники выбросили 41,9% от общего числа загрязняющих атмосферу веществ, из которых 15% составляет вклад автомобильного транспорта (данные Всемирного банка). Европейское агентство окружающей среды [21] сообщает, что в 2010 году 17,5% всех парниковых газов, выброшенных в атмосферу, поступило от автомобильного транспорта. При этом вклад легкового транспорта в выбросах всего CO_2 составляет 12% [23].

Динамика увеличения выбросов за счет автомобильного транспорта неутешительна. В то время как выбросы CO_2 стационарными источниками в Европе постоянно понижается с 1990 года [18], выбросы от автомобильного транспорта увеличились на 23% между 1990 и 2009 годами [21]. В свою очередь, в США 27% всего объема парниковых газов выбрасывается личным автомобильным транспортом, а если учитывать общественный транспорт, то их совокупный вклад составит 43% [28]. В одной из крупнейших стран Южной Америки, Бразилии, на 2010 год вклад в загрязнение воздуха со стороны промышленного сектора составил 29%, в то время как вклад автомобильного транспорта – 43% [12].

Многочисленные исследования, например [3–5, 10, 15], свидетельствуют о том, что выбор маршрута движения может оказывать серьезное влияние на объем выбросов загрязняющих веществ и расход топлива во время ежедневных поездок. Более того, вид транспорта (личный, общественный и т.п.) и время отправления также оказывают значительный эффект на объемы загрязняющих выбросов [16, 25]. Таким образом, эти исследования говорят об актуальности изучения проблем маршрутизации потоков с множеством различных групп участников движения в контексте снижения объемов выбросов загрязняющих веществ в атмосферу со стороны городского транспорта.

Развитие информационных и телекоммуникационных технологий предоставляет пользователям транспортной сети возможность получать информацию о дорожных условиях и использовать ее при выборе маршрута движения, времени отправления, вида транспорта и т.п. [8, 14, 20]. Исследования показывают, что маршруты движения, характеризующиеся минимальным объемом выбросов загрязняющих веществ, не совпадают с маршрутами с минимальным временем движения [4, 19, 22, 32]. Немонотонная зависимость между скоростью движения и объемами загрязняющих выбросов порождают конфликт интересов водителя при выборе режима вождения: стремиться к минимальному времени движения или минимальным выбросам [4–6, 30]. Поведенческие модели принятия решения по выбору маршрутов движения качественно описаны в [5].

Согласно результатам, полученным в целом ряде исследований, в процессе маршрутизации транспортных потоков также следует учитывать уровень наклона дорожного полотна, который оказывает серьезное влияние на объемы выбрасываемых транспортом загрязняющих веществ [9, 11, 29, 31]. Эксперимент с использованием трех легковых автомобилей с бензиновыми двигателями, описанный в [31], показал, что объем выбросов CO_2 значительно зависит от рельефа. Так, на дороге с положительным уклоном $\geqslant$ 5% выбросы на 40–60 % выше, чем на дороге с отрицательным уклоном. В статье [9] показано, что объемы выбросов загрязняющих веществ на плоской и на холмистой местностях могут отличаться на 15–20%. Поэтому выбирая оптимальный маршрут движения, следует принимать во внимание, в том числе, уровень наклона проезжей части альтернативных маршрутов. В [29] предложена методика оценки объемов выброса загрязняющих веществ с учетом уровня наклона автомобильной дороги. Информацию предлагается собирать с помощью специальных

LiDAR-GIS-систем и формировать на ее основе Цифровые карты местности (DTM).

В настоящей работе нас интересуют вопросы, связанные с разработкой мер по стимулированию водителей к переходу на экологически дружелюбные автомобили посредством выделения для их движения специальных маршрутов на транспортной сети. Основным исследовательским вопросом является вопрос о том, какое количество маршрутов необходимо выделить под движение исключительно экологически дружелюбных автомобилей, чтобы

- водители были заинтересованы в использовании таких автомобилей,
- такие маршруты не оказались не востребованными.

В литературе встречаются разные определения термина «зеленый автомобиль», однако, в целом, экологически дружелюбные автомобили можно разделить на два вида: «абсолютно зеленые автомобили» и «автомобили с низким уровнем загрязнения» [17]. Абсолютно зеленые автомобили – это автомобили с нулевыми выбросами парниковых газов, например, использующие в качестве топлива воду или энергию солнца. Электрические автомобили можно называть абсолютно зелеными только в том случае, если электричество получается из возобновляемых источников энергии. Автомобили, использующие био-дизель, природный газ и т.п., являются автомобилями с низким уровнем загрязнения [26]. Следуя такой классификации, можно выделять четыре типа автомобилей: 1) автомобили с высоким уровнем загрязнения; 2) автомобили со средним уровнем загрязнения; 3) автомобили с низким уровнем загрязнения; 4) автомобили с нулевым уровнем загрязнения. В настоящей главе под *зелеными автомобилями* мы будем понимать автомобили с низким и нулевым уровнями загрязнения, в то время как под *не-зелеными автомобилями* – все остальные.

При исследовании проблемы распределения потоков автомобилей разных типов мы будем рассматривать ряд теоретико-игровых моделей так называемой «зеленой» маршрутизации. В первом параграфе будет рассмотрена задача выделения транспортной подсети для движения исключительно зеленых автомобилей. Во втором параграфе будут выписаны правила распределения транспортных потоков в условиях выделенных маршрутов для движения зеленых автомобилей. В третьем параграфе будет рассмотрена задача поиска оптимального множества зеленых маршрутов в условиях конкурентной маршрутизации транспортных потоков с множеством групп участников движения. Четвертый параграф будет посвящен правилам распределения транспортных потоков в условиях конкурентной маршрутизации при появлении выделенных маршрутов для движения зеленых автомобилей. Заключению будет отведен последний параграф.

1. Выделение маршрутов для движения экологически безопасных транспортных потоков

Администрации крупных городов заинтересованы в появлении экологически безопасных автомобилей на улично-дорожной сети, так как это способно снизить уровень выделяемых транспортными потоками парниковых газов. В связи с этим, необходимо разработать меры для мотивации водителей пересаживаться на зеленые автомобили. Одной из мотивационных мер такого характера может быть выделение специальных маршрутов, доступных только для движения экологически безопасных автомобилей. Вопрос заключается в том, каким образом обеспечить зеленые автомобили достаточно привлекательными условиями для движения. В силу того, что администрация обладает информацией о текущем количестве экологически безопасных автомобилей, поставленный вопрос может быть сформулирован количественно. Какое количество маршрутов следует выделить для движения только зеленых автомобилей (будем называть такие маршруты *зелеными маршрутами* в противоположность *не-зеленым маршрутам*). В самом деле, с одной стороны, если зеленые маршруты загружены только частично, а не-зеленые – перегружены, то транспортная сеть является несбалансированной [7]. С другой стороны, если зеленые маршруты могут быть перегружены потоком имеющихся на сети экологически дружелюбных автомобилей, то использование таких автомобилей не будет представляться привлекательной альтернативой для водителей. Таким образом, необходимо найти условия, гарантирующие хорошо сбалансированное использование зеленых и не-зеленых маршрутов транспортной сети. Настоящий параграф посвящен поиску этих условий.

1.1. ТРАНСПОРТНАЯ СЕТЬ ИЗ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ КАНАЛОВ

В настоящем пункте мы собираемся рассмотреть сеть, состоящую из одного района отправления и одного района прибытия. Будем предполагать, что имеются только параллельные маршруты (непересекающиеся) между районами отправления-прибытия. При этом некоторые из этих параллельных маршрутов объявляются зелеными, другие – не-зелеными. Считаем, что по зеленым маршрутам могут двигаться только зеленые автомобили, а по не-зеленым – как зеленые, так и не-зеленые.

Рассмотрим транспортную сеть, представленную ориентированным графом с одной парой районов отправления-прибытия и n параллельными дугами. Каждая дуга ассоциируется с маршрутом из района отправления в район прибытия. Будем использовать следующие обозначения: $N = \{1, \ldots, n\}$ – множество номеров всех маршрутов; $N_1 = \{1, \ldots, n_1\}$ – множество номеров зеленых маршрутов; $N_2 = \{n_1 + 1, \ldots, n_2 = n\}$ – множество номеров не-зеленых маршрутов; G – количество зеленых автомобилей на транспортной сети; F – количество не-зеленых автомобилей на транспортной сети; g_i – транспортный поток зеленых автомобилей по маршруту i, $i = \overline{1, n}$, $g = (g_1, \ldots, g_n)$; f_i – транспортный поток не-зеленых автомобилей по маршруту i, $i = \overline{n_1 + 1, n_2}$, $f = (f_{n_1+1}, \ldots, f_n)$; t_i^0 – время свободного движения по маршруту i, $i = \overline{1, n}$; c_i – пропускная способность маршрута i, $i = \overline{1, n}$; $t_i(f_i) = t_i^0 \left(1 + \frac{f_i}{c_i}\right)$ – время движения потока f_i по загруженному маршруту i, $i = \overline{1, n}$. Мы моделируем время движения с помощью линейной BPR-функции задержки [27].

Проблема состоит в том, чтобы определить условия, гарантирующие: 1) ситуацию конкурентного равновесия Вардропа на всей транспортной сети; 2) использование зеленых маршрутов только экологически дружелюбными автомобилями; 3) эффективное использование инфраструктурных мощностей транспортной сети: все выделенные зеленые маршруты востребованы. Действительно, наличие ситуации конкурентного равновесия Вардропа на транспортной сети соответствует тому, что время движения всех автомобилей между фиксированной парой районов отправления-прибытия одинаково [24]. Это значит, что использование экологически безопасных автомобилей привлекательно до тех пор, пока движение по выделенным зеленым маршрутам меньше или равно времени движения всех остальных автомобилей. Математически такая задача выражается следующей оптимизационной программой:

(1)
$$\min_{g,f} z(g,f) = \min_{g,f}\left[\sum_{i=1}^{n_1}\int_0^{g_i} t_i(u)du + \sum_{i=n_1+1}^{n_2}\int_0^{g_i+f_i} t_i(u)du\right]$$
при ограничениях

(2) $$\sum_{i=1}^{n} g_i = G,$$

(3) $$\sum_{i=n_1+1}^{n} f_i = F,$$

(4) $$g_i \geqslant 0 \quad \forall i = \overline{1,n},$$

(5) $$f_i \geqslant 0 \quad \forall i = \overline{n_1+1, n_2}.$$

Неизвестными переменными задачи (1)–(5) являются транспортные потоки через все доступные маршруты (как зеленые, так и не-зеленые) для каждого фиксированного значения n_1. В общем случае решение такой задачи требует сложных вычислительных процедур. Однако можно упростить эту задачу, найдя граничное значение n_1, которое может быть оценено напрямую. В самом деле, граничное значение n_1 соответствует ситуации, когда все экологически безопасные автомобили используют только зеленые маршруты и их время движения меньше или равно времени движения остальных автомобилей, использующих не-зеленые маршруты.

Прежде всего необходимо отметить, что решение задачи (1)–(5) может содержать маршруты с нулевыми потоками в ситуации конкурентного равновесия Вардропа (если $\exists i = \overline{1,n} : g_i = 0$ и $f_i = 0$). Подобная проблема может возникнуть, когда начальное множество возможных маршрутов плохо определено. Мы будем рассматривать случай хорошо сбалансированного начального множества маршрутов или множества, состоящего из *полностью востребованных* маршрутов. Таким образом, необходимо определить условия, при которых начальное множество маршрутов является полностью востребованным. В то же время зеленые маршруты должны обеспечить зеленые автомобили меньшим временем движения между районами отправления-прибытия. В связи с этим введем следующее

Определение 1. *Значение n_1 называется оптимальным тогда и только тогда, когда:*

- *время движения зеленых автомобилей по зеленым маршрутам меньше или равно времени движения транспортного потока по не-зеленым маршрутам;*
- *все зеленые маршруты востребованы* (*когда все зеленые автомобили двигаются только по зеленым маршрутам*).

Без умаления общности, будем считать, что когда n_1 определено, маршруты пронумерованы следующим образом:

$$t_1^0 \leqslant \ldots \leqslant t_{n_1}^0 \text{ и } t_{n_1+1}^0 \leqslant \ldots \leqslant t_{n_2}^0. \tag{6}$$

Лемма 1. *Предположим, что все зеленые автомобили G используют только имеющиеся зеленые маршруты. Каждый зеленый маршрут из множества n_1 маршрутов востребован для движения тогда и только тогда, когда*

$$G > \sum_{i=1}^{n_1} c_i \left(\frac{t_{n_1}^0}{t_i^0} - 1 \right), \tag{7}$$

и каждый не-зеленый маршрут из множества $|n_2 - n_1|$ *маршрутов востребован для движения тогда и только тогда, когда*

$$F > \sum_{i=n_1+1}^{n_2} c_i \left(\frac{t_{n_2}^0}{t_i^0} - 1 \right). \tag{8}$$

Доказательство. Если все зеленые автомобили используют только зеленые маршруты для движения, оптимизационная проблема (1)–(5) может быть рассмотрена в виде двух независимых задач:
1) для зеленых автомобилей:

$$\min_g z_1(g) = \min_g \sum_{i=1}^{n_1} \int_0^{g_i} t_i(u)du \tag{9}$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{n_1} g_i = G, \tag{10}$$

$$g_i \geqslant 0 \quad \forall i = \overline{1, n_1}, \tag{11}$$

$$g_i = 0 \quad \forall i = \overline{n_1 + 1, n_2}. \tag{12}$$

2) для не-зеленых автомобилей:

$$\min_f z_2(f) = \min_f \sum_{i=n_1+1}^{n_2} \int_0^{f_i} t_i(u)du \tag{13}$$

при ограничениях

$$\sum_{i=n_1+1}^{n_2} f_i = F, \tag{14}$$

$$f_i \geqslant 0 \quad \forall i = \overline{n_1 + 1, n_2}. \tag{15}$$

Рассмотрим Лагранжиан задачи (9)–(12)

$$L^1 = \sum_{i=1}^{n_1} \int_0^{g_i} t_i(u)du + \omega^1 \left(G - \sum_{i=1}^{n_1} g_i \right) + \sum_{i=1}^{n_1} \eta_i g_i$$

и продифференцируем его:

$$\frac{\partial L^1}{\partial g_i} = t_i(g_i) - \omega^1 + \eta_i = 0,$$

где $\omega^1 \geqslant 0$ и $\eta_i \geqslant 0$ для $i = \overline{1, n_1}$ – множители Лагранжа. Благодаря условиям Куна–Таккера, имеем

$$t_i(g_i) \begin{cases} = \omega^1 & \text{при } g_i > 0, \\ \leqslant \omega^1 & \text{при } g_i = 0, \end{cases} \tag{16}$$

для $i = \overline{1, n_1}$.

Выполнение неравенства $g_i > 0$ для $i = \overline{1, n_1}$ означает, что каждый зеленый маршрут из множества n_1 маршрутов востребован. Согласно (16), если $g_i > 0$, то $t_i^0\left(1 + \frac{g_i}{c_i}\right) = \omega^1$ и $g_i = \left(\frac{\omega^1}{t_i^0} - 1\right) c_i > 0$ для $i = \overline{1, n_1}$. Следовательно, $\omega^1 > t_i^0$ для $i = \overline{1, n_1}$ и, согласно (6), $\omega^1 > t_{n_1}^0$. Таким образом, получаем

$$G = \sum_{i=1}^{n_1} g_i = \sum_{i=1}^{n_1} \left(\frac{\omega^1}{t_i^0} - 1\right) c_i > \sum_{i=1}^{n_1} \left(\frac{t_{n_1}^0}{t_i^0} - 1\right) c_i.$$

Задача (13)–(15) может быть исследована аналогичным образом, что приведет к получению (8).

Лемма 1 дает первое правило определения оптимального n_1. Если неравенство (7) выполняется, то все зеленые маршруты будут востребованы, когда все имеющиеся на сети экологически дружелюбные автомобили используют только зеленые маршруты для движения. Одновременное выполнение условий (7), (8) означает, что транспортная сеть является полностью загруженной – все маршруты востребованы. В то же время условие (7) не гарантирует, что все экологически дружелюбные автомобили будут использовать только зеленые маршруты для движения. Чтобы побудить зеленые автомобили использовать только зеленые маршруты, лицо, принимающее решение, должно создать такие условия, что для водителей будет предпочтительней двигаться по зеленой подсети.

Теорема 1. *Предположим, что начальное множество маршрутов полностью востребовано имеющимися транспортными потоками G и F. Поток зеленых автомобилей G использует только зеленые маршруты тогда и только тогда, когда*

$$\frac{G+\sum_{i=1}^{n_1} c_i}{\sum_{i=1}^{n_1} \frac{c_i}{t_i^0}} \leqslant \frac{F+\sum_{i=n_1+1}^{n_2} c_i}{\sum_{i=n_1+1}^{n_2} \frac{c_i}{t_i^0}}. \tag{17}$$

Доказательство. Если все зеленые автомобили используют только зеленые маршруты, оптимизационная задача (1)–(5) может быть рассмотрена в виде двух независимых задач (9)–(12) и (13)–(15). Благодаря (16), получаем $\sum_{i=1}^{n_1}\left(\frac{\omega^1}{t_i^0}-1\right)c_i = G$ и, следовательно,

$$\omega^1 = \frac{G+\sum_{i=1}^{n_1} c_i}{\sum_{i=1}^{n_1} \frac{c_i}{t_i^0}}.$$

Согласно (16):

$$t_i(g_i) = \frac{G+\sum_{i=1}^{n_1} c_i}{\sum_{i=1}^{n_1} \frac{c_i}{t_i^0}} \text{ при } g_i > 0, \tag{18}$$

а так как n_1 определено таким образом, что все зеленые маршруты востребованы, уравнение (18) справедливо для $i = \overline{1, n_1}$. Таким образом, (18) определяет время движения любого автомобиля из потока зеленых автомобилей.

Аналогично можно доказать для (13)–(15), что

$$t_i(f_i) = \frac{F+\sum_{i=n_1+1}^{n_2} c_i}{\sum_{i=n_1+1}^{n_2} \frac{c_i}{t_i^0}} \text{ при } f_i > 0, \tag{19}$$

для $i = \overline{n_1+1, n_2}$. Выражение (19) определяет время движения любого автомобиля из потока не-зеленых автомобилей. Следовательно, неравенство (17) утверждает, что для любого зеленого автомобиля выгодней ехать (в смысле времени движения) по зеленым маршрутам.

Теорема 1 дает второе правило определения оптимального n_1. Действительно, если администрация предоставит экологически безопасным автомобилям такое количество маршрутов, что условие (17) будет выполнено, то водители смогут почувствовать главное из возможных преимуществ от использования особого типа автомобилей – меньшее время движения.

1.2. ТРАНСПОРТНАЯ СЕТЬ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ТОПОЛОГИИ

Рассмотрим сеть, представленную ориентированным графом $\mathfrak{G}$, включающим множество последовательно пронумерованных узлов N и множество последовательно пронумерованных дуг A. Пусть R задает множество районов отправления, а S – районов прибытия ($R \cap S = \emptyset$). Введем следующие обозначения: K^{rs} – множество возможных маршрутов между районами отправления r и прибытия s; K_1^{rs} – множество зеленых маршрутов, $K_1^{rs} \subset K^{rs}$; K_2^{rs} – множество не-зеленых маршрутов, $K_2^{rs} \subset K^{rs}$; $K_1^{rs} \cap K_2^{rs} = \emptyset$ и $K_1^{rs} \cup K_2^{rs} = K^{rs}$; G^{rs} и F^{rs} – транспортный спрос зеленых и не-зеленых автомобилей между районами отправления r и прибытия s соответственно; g_k^{rs} при $k \in K^{rs}$ – поток зеленых автомобилей по маршруту k, $g = \{g_k^{rs}\}_{k\in K^{rs}}^{r,s}$; f_k^{rs} при $k \in K_2^{rs}$ – поток не-зеленых автомобилей по маршруту k, $f = \{f_k^{rs}\}_{k\in K_2^{rs}}^{r,s}$; x_a – транспортный поток по дуге $a \in A$, $x = (\ldots, x_a, \ldots)$; c_a – пропускная способность дуги $a \in A$; $t_a(x_a)$ – время движения по загруженной дуге $a \in A$; $\delta_{a,k}^{rs}$ – индикатор: $\delta_{a,k}^{rs} = 1$ если дуга a «входит» в маршрут k между районами r и s, и $\delta_{a,k}^{rs} = 0$ в противном случае.

В веденных обозначениях, проблема (1)–(5) может быть переформулирована для сети произвольной топологии:

$$\min_x Z(x) = \min_x \sum_{a\in A} \int_0^{x_a} t_a(u)du \tag{20}$$

при ограничениях

$$\sum_{k\in K^{rs}} g_k^{rs} = G^{rs} \quad \forall r, s, \tag{21}$$

$$\sum_{k\in K_2^{rs}} f_k^{rs} = F^{rs} \quad \forall r, s, \tag{22}$$

$$g_k^{rs} \geqslant 0 \quad \forall k \in K^{rs}, r, s, \tag{23}$$

$$f_k^{rs} \geqslant 0 \quad \forall k \in K_2^{rs}, r, s, \tag{24}$$

при условии

$$x_a = \sum_r \sum_s \sum_{k \in K_1^{rs}} g_k^{rs} \delta_{a,k}^{rs} + \sum_r \sum_s \sum_{k \in K_2^{rs}} \left(g_k^{rs} + f_k^{rs}\right) \delta_{a,k}^{rs}. \tag{25}$$

Неизвестными переменными в оптимизационной программе (20)–(25) являются значения транспортных потоков по доступным маршрутам (как по зеленым, так и по не-зеленым). Наиболее важным моментом в сформулированной задаче является то, что ее решение зависит от множества зеленых маршрутов – зеленой подсети. Для того чтобы найти оптимальное решение поставленной проблемы, мы можем рассматривать множество зеленых маршрутов как параметр, которым управляет администрация. Таким образом, в действительности мы имеем двухуровневую систему управления. Распределение зеленых автомобилей должно учитывать оптимальную реакцию водителей зеленых и не-зеленых автомобилей, основанную на концепции конкурентного равновесия Вардропа.

В предыдущем подпункте мы задали процедуру, которая позволит поддерживать процесс принятия решений в сфере задания зеленых маршрутов. В самом деле, главным критерием для лица, принимающего решение, когда оно собирается предоставить часть общих маршрутов для пользования только одному виду транспорта (например, зеленым автомобилям), является эффективность использования пропускной способности транспортной сети. Разработанный метод позволяет нам находить такое множество зеленых маршрутов, что:

- время движения любого количества зеленых автомобилей (от нулевого потока до всех имеющихся на сети зеленых автомобилей), использующих для движения зеленые маршруты, меньше или равно времени движения остального транспортного потока из района отправления в район прибытия;

- если все зеленые автомобили будут использовать только зеленые маршруты для движения, то ни один зеленый маршрут не будет не востребован (отсутствует переизбыток зеленых маршрутов).

Первое условие гарантирует такое абсолютное преимущество как меньшее время движения для зеленых автомобилей, которые используют зеленые маршруты. Второе условие утверждает, что транспортная сеть используется эффективно. Одновременное выполнение этих двух условий, с одной стороны, мотивирует водителей использовать зеленые автомобили, с другой стороны, гарантирует эффективное (нерасточительное) использование пропускной способности транспортной сети.

В связи с этим, по аналогии с Теоремой 1, можно сформулировать следующее

Утверждение 1. *Предположим, что все зеленые автомобили используют только зеленые маршруты, которые являются полностью востребованными. Поток зеленых автомобилей* G^{rs} $\forall r, s$ *использует только зеленые маршруты тогда и только тогда, когда*

$$\sum_{a \in A_{k_1}} t_a(x_a) \leqslant \sum_{a \in A_{k_2}} t_a(x_a) \quad \forall k_1 \in K_1^{rs}, k_2 \in K_2^{rs}, r, s,$$

где A_k *– множество дуг, входящих в состав маршрута* $k \in K^{rs}$ $\forall r, s$.

Таким образом, исследование простой транспортной сети из параллельных маршрутов позволяет нам разработать метод, состоящий из следующей процедуры:

1) Задаем начальное множество возможных маршрутов как полностью востребованное.

2) Задаем множество зеленых маршрутов таким образом, чтобы предоставить зеленым автомобилям меньшее время движения по сравнению со всем остальным транспортным потоком.

Применим такой подход к сети произвольной топологии. Прежде всего, мы можем оценить граничное состояние множества K_1^{rs}. Граничное состояние множества K_1^{rs} соответствует ситуации, когда все зеленые автомобили используют только зеленые маршруты и их время движения меньше или равно времени движения не-зеленых автомобилей, использующих не-зеленые маршруты. В таком случае можем рассмотреть задачу (20)–(25) в виду двух независимых задач:

1) для зеленых автомобилей:

$$\min_x Z_1(x) = \min_x \sum_{a \in A} \int_0^{x_a} t_a(u)du \tag{26}$$

при ограничениях

$$\sum_{k \in K_1^{rs}} g_k^{rs} = G^{rs} \quad \forall r, s, \tag{27}$$

$$g_k^{rs} \geqslant 0 \quad \forall k \in K_1^{rs}, r, s, \tag{28}$$

$$g_k^{rs} = 0 \quad \forall k \in K_2^{rs}, r, s, \tag{29}$$

при условии

$$x_a = \sum_r \sum_s \sum_{k \in K_1^{rs}} g_k^{rs} \delta_{a,k}^{rs}, \tag{30}$$

2) для не-зеленых автомобилей:

$$\min_x Z_2(x) = \min_x \sum_{a \in A} \int_0^{x_a} t_a(u)du \tag{31}$$

при ограничениях

$$\sum_{k \in K_2^{rs}} f_k^{rs} = F^{rs} \quad \forall r, s, \tag{32}$$

$$f_k^{rs} \geqslant 0 \quad \forall k \in K_2^{rs}, r, s, \tag{33}$$

при условии

$$x_a = \sum_r \sum_s \sum_{k \in K_2^{rs}} f_k^{rs} \delta_{a,k}^{rs}. \tag{34}$$

Оптимизационные задачи (26)–(30) и (31)–(34) являются обычными задачами нахождения конкурентного равновесия на сети [24]. К сожалению, для сети произвольной топологии невозможно получить аналитические условия, подобные условиям, полученным для сети из параллельных каналов. Однако сегодня существует множество методов решения такой задачи. Впервые для этих целей был использован алгоритм Франка–Вульфа [13].Таким образом, лицо, принимающее решение, можем найти оптимальную зеленую подсеть, выполняя следующие действия:

1) Задать начальное множество зеленых маршрутов K_1^{rs} для каждой пары районов отправления-прибытия.
2) Решить задачи (26)–(30) и (31)–(34), используя существующие инструменты и методы.
3) Определить, является ли время движения зеленых автомобилей, двигающихся по зеленой подсети, меньшим или равным времени движения остального транспортного потока.
4) Определить, являются ли все зеленые маршруты востребованными в случае, когда все зеленые автомобили двигаются по зеленой подсети.
5) Если п. 3 и 4 не выполняются, то возвращаемся к п. 1. В противном случае оптимальная зеленая подсеть найдена.

Следует отметить, что определение зеленой подсети на сети произвольной топологии является довольно сложной вычислительной задачей. Для того чтобы решить задачи (26)–(30) и (31)–(34), необходимо использовать специальные информационные технологии со специфическим программным обеспечением. В то же время, иногда лицу, принимающему решение, требуются только оценки, а не абсолютно точные значения. В таком случае полученные в предыдущем подпункте условия могут быть удобным инструментом поддержки процесса принятия решений, в том числе и на сети общей топологии.

2. Конкурентное равновесие Вардропа на сети с выделенными маршрутами для движения экологически безопасных транспортных потоков

В предыдущем параграфе мы получили условия определения числа зеленых маршрутов, которые необходимо выделить на сети для стимулирования водителей использовать экологически безопасные автомобили. Теперь мы можем выписать условия конкурентного равновесия Вардропа на сети с выделенными маршрутами для движения зеленых автомобилей.

2.1. ТРАНСПОРТНАЯ СЕТЬ ИЗ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ КАНАЛОВ

Теорема 2. *Предположим, что все маршруты являются полностью востребованными:*

$$G > \sum_{i=1}^{n_1} c_i \left(\frac{t^0_{n_1}}{t^0_i} - 1 \right) \text{ и } F > \sum_{i=n_1+1}^{n_2} c_i \left(\frac{t^0_{n_2}}{t^0_i} - 1 \right).$$

В таком случае распределение транспортных потоков зеленых и не-зеленых автомобилей на сети из параллельных каналов является ситуацией конкурентного равновесия Вардропа (g^*, f^*) тогда и только тогда, когда

1) *если n_1 таково, что*

$$\frac{G + \sum_{i=1}^{n_1} c_i}{\sum_{i=1}^{n_1} \frac{c_i}{t^0_i}} \leqslant \frac{F + \sum_{i=n_1+1}^{n_2} c_i}{\sum_{i=n_1+1}^{n_2} \frac{c_i}{t^0_i}},$$

то

$$g^*_i = \frac{c_i}{t^0_i} \frac{G + \sum_{s=1}^{n_1} c_s}{\sum_{s=1}^{n_1} \frac{c_s}{t^0_s}} - c_i \text{ для } i = \overline{1, n_1},$$

$$f^*_i = \frac{c_i}{t^0_i} \frac{F + \sum_{s=n_1+1}^{n_2} c_s}{\sum_{s=n_1+1}^{n_2} \frac{c_s}{t^0_s}} - c_i \text{ для } i = \overline{n_1 + 1, n_2};$$

2) *если n_1 таково, что*

$$\frac{G + \sum_{i=1}^{n_1} c_i}{\sum_{i=1}^{n_1} \frac{c_i}{t^0_i}} > \frac{F + \sum_{i=n_1+1}^{n_2} c_i}{\sum_{i=n_1+1}^{n_2} \frac{c_i}{t^0_i}},$$

то

$$g_i^* = \frac{c_i}{t_i^0} \frac{G_1 + \sum_{s=1}^{n_1} c_s}{\sum_{s=1}^{n_1} \frac{c_s}{t_s^0}} - c_i \text{ для } i = \overline{1, n_1},$$

$$g_i^* + f_i^* = \frac{c_i}{t_i^0} \frac{G_2 + F + \sum_{s=n_1+1}^{n_2} c_s}{\sum_{s=n_1+1}^{n_2} \frac{c_s}{t_s^0}} - c_i \text{ для } i = \overline{n_1 + 1, n_2},$$

где $G_1 + G_2 = G$ *и*

$$\frac{G_1 + \sum_{i=1}^{n_1} c_i}{\sum_{i=1}^{n_1} \frac{c_i}{t_i^0}} = \frac{F + G_2 + \sum_{i=n_1+1}^{n_2} c_i}{\sum_{i=n_1+1}^{n_2} \frac{c_i}{t_i^0}}.$$

Доказательство. Вынесенные утверждения напрямую следуют из теоремы 1 и теоремы из [2].

2.2. ТРАНСПОРТНАЯ СЕТЬ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ТОПОЛОГИИ

По аналогии с теоремой 2 можно сформулировать следующее

Утверждение 2. *Предположим, что все маршруты являются полностью востребованными:*

$$g_k^{rs} > 0 \ \forall k \in K_1^{rs} \text{ и } (g_k^{rs} + f_k^{rs}) > 0 \ \forall k \in K_2^{rs} \quad \forall r, s.$$

В таком случае распределение транспортных потоков на сети произвольной топологии является ситуацией конкурентного равновесия Вардропа (g^*, f^*) *тогда и только тогда, когда*
1) *если* K_1^{rs} *таково, что*

$$\sum_{a \in A_{k_1}} t_a(x_a) \leqslant \sum_{a \in A_{k_2}} t_a(x_a) \quad \forall k_1 \in K_1^{rs}, k_2 \in K_2^{rs}, r, s,$$

то

- g_k^{rs*} *определяется как решение задачи* (26)–(30)*,*
- f_k^{rs*} *определяется как решение задачи* (31)–(34)*;*

2) *если* K_1^{rs} *таково, что*

$$\sum_{a \in A_{k_1}} t_a(x_a) > \sum_{a \in A_{k_2}} t_a(x_a) \quad \forall k_1 \in K_1^{rs}, k_2 \in K_2^{rs}, r, s,$$

то

- g_k^{rs*} *при* $k \in K_1^{rs}$ *определяется как решение задачи*

  $$\min_x \mathfrak{Z}_1(x) = \min_x \sum_{a \in A} \int_0^{x_a} t_a(u) du$$

  при ограничениях

  $$\sum_{k \in K^{rs}} g_k^{rs} = G_1^{rs} \quad \forall r, s,$$

  $$g_k^{rs} \geqslant 0 \quad \forall k \in K_1^{rs}, r, s,$$

  при условии

  $$x_a = \sum_r \sum_s \sum_{k \in K_1^{rs}} g_k^{rs} \delta_{a,k}^{rs},$$

- $(g_k^{rs*} + f_k^{rs*})$ *определяется как решение задачи*

  $$\min_x \mathfrak{Z}_2(x) = \min_x \sum_{a \in A} \int_0^{x_a} t_a(u) du$$

  при ограничениях

  $$\sum_{k \in K_2^{rs}} (g_k^{rs} + f_k^{rs}) = G_2^{rs} + F^{rs} \quad \forall r, s,$$

  $$(g_k^{rs} + f_k^{rs}) \geqslant 0 \quad \forall k \in K^{rs}, r, s,$$

при условии

$$x_a = \sum_r \sum_s \sum_{k \in K_2^{rs}} \left(g_k^{rs} + f_k^{rs}\right) \delta_{a,k}^{rs},$$

где $G_1^{rs} + G_2^{rs} = G^{rs}$*, а* G_1^{rs} *и* $G_2^{rs} + F$ *– такие потоки автомобилей по зеленым и не-зеленым маршрутам соответственно, что*

$$\sum_{a \in A_{k_1}} t_a(x_a) = \sum_{a \in A_{k_2}} t_a(x_a) \quad \forall k_1 \in K_1^{rs}, k_2 \in K_2^{rs}, r, s.$$

3. Выделение маршрутов для движения экологически безопасных транспортных потоков в условиях конкурентной маршрутизации

Как отмечалось в параграфе 2, администрация крупного города заинтересована в появлении экологически безопасных автомобилей на улично-дорожной сети, так как это позволит снизить уровень выделяемых транспортными потоками парниковых газов. В связи с чем необходимо разработать меры по мотивированию водителей пересаживаться на экологически безопасные автомобили. Одной из мотивационных мер такого характера может быть выделение специальных маршрутов, доступных только для движения экологически безопасных автомобилей. Вопрос заключается в том, какое количество маршрутов следует выделить для движения только экологически безопасных автомобилей. В то же время, на сегодняшний момент на транспортной сети современных крупных городов появляется все больше конкурирующих между собой групп пользователей. Учитывая взаимное влияние этих групп, необходимо найти условия, гарантирующие сбалансированное использование транспортной сети с выделенными на ней зелеными маршрутами. Настоящий параграф посвящен поиску этих условий.

3.1. ТРАНСПОРТНАЯ СЕТЬ ИЗ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ КАНАЛОВ

Рассмотрим транспортную сеть, представленную ориентированным графом, состоящим из одной пары исток-сток (районы отправления-прибытия) и n параллельных маршрутов. Мы считаем, что на данной сети имеются выделенные зеленые маршруты (для движения только зеленых автомобилей) и не-зеленые маршруты (для движения как зеленых, так и не-зеленых автомобилей). Введем следующие обозначения: $N = \{1, \ldots, n\}$ – множество номеров всех маршрутов; $N_1 = \{1, \ldots, n_1\}$ – множество номеров зеленых маршрутов; $N_2 = \{n_1 + 1, \ldots, n_2 = n\}$ – множество номеров не-зеленых маршрутов; $M = \{1, \ldots, m\}$ – множество групп пользователей (ГП) транспортной сети, $j \in M$; G^j – количество зеленых автомобилей в ГП j, $G = \sum_{j=1}^m G^j$; F^j – количество не-зеленых автомобилей в ГП j, $F = \sum_{j=1}^m F^j$; g_i^j при $i = \overline{1, n}$ – транспортный поток зеленых автомобилей j-й ГП по маршруту i; f_i^j при $i = \overline{n_1 + 1, n_2}$ – транспортный поток не-зеленых автомобилей j-й ГП по маршруту i; $g^j = (g_1^j, \ldots, g_n^j)$ и $f^j = (f_{n_1+1}^j, \ldots, f_{n_2}^j)$, а $g = (g^1, \ldots, g^m)$, $f = (f^1, \ldots, f^m)$ и $g^{-j} = (g^1, \ldots, g^{j-1}, g^{j+1}, \ldots, g^m)$, $f^{-j} = (f^1, \ldots, f^{j-1}, f^{j+1}, \ldots, f^m)$; t_i^0 и c_i – время свободного движения и пропускная способность маршрута i; $\mathfrak{F}_i$ – транспортный поток по маршруту i; $t_i(\mathfrak{F}_i) = t_i^0 \left(1 + \frac{\mathfrak{F}_i}{c_i}\right)$ – время движения по загруженному маршруту i. Мы моделируем время движения с помощью линейной BPR-функции задержки [27].

Каждая ГП стремится минимизировать время движения своих пользователей:

(35)
$$\min_{g^j, f^j} z^j(g, f) = \min_{g^j, f^j} \left[\sum_{i=1}^{n_1} t_i \left(\mathfrak{F}_i\right) g_i^j + \sum_{i=n_1+1}^{n_2} t_i \left(\mathfrak{F}_i\right) \left(g_i^j + f_i^j\right) \right]$$
$\forall j \in M$, при ограничениях

(36) $$\sum_{i=1}^{n} g_i^j = G^j \quad \forall j \in M,$$

$$\sum_{i=n_1+1}^{n} f_i^j = F^j \quad \forall j \in M, \tag{37}$$

$$g_i^j \geqslant 0 \quad \forall j \in M, i = \overline{1, n}, \tag{38}$$

$$f_i^j \geqslant 0 \quad \forall j \in M, i = \overline{n_1 + 1, n_2}. \tag{39}$$

Таким образом, можно рассмотреть бескоалиционную игру $\Gamma_m \left(M, \{\mathrm{G}^j, \mathrm{F}^j\}_{j\in M}, \{H_j\}_{j\in M}\right)$, где $\{\mathrm{G}^j, \mathrm{F}^j\}_{j\in M}$ – множество стратегий (g^j, f^j), удовлетворяющих ограничениям (36)–(39), а $H_j(g, f) = -z^j(g, f)$ $\forall j \in M$. Равновесие по Нэшу в игре Γ_m достигается реализацией таких стратегий (g^*, f^*), что

$$H_j\left(g^*, f^*\right) \geqslant H_j\left(g^j, f^j, g^{-j^*}, f^{-j^*}\right) \quad \forall j \in M.$$

Конкурентные отношения между различными группами пользователей приводят к их взаимному влиянию на время передвижения, и этот факт адресует нас к проблеме поиска равновесия по Нэшу. Здесь следует отметить, что процесс нахождения равновесия по Нэшу, когда поведение каждой ГП моделируется оптимизационной программой (35)–(39), представляется довольно сложной проблемой. В то же время, граничное значение n_1 может быть оценено напрямую. В самом деле, граничное значение n_1 соответствует ситуации, когда все зеленые автомобили распределяются только по зеленым маршрутам и время их движения меньше или равно времени движения не-зеленых автомобилей, распределяемых по не-зеленым маршрутам. Далее под оптимальным n_1 будем понимать значение, заданное в определении 1.

Без умаления общности будем считать, что когда n_1 определено, маршруты пронумерованы следующим образом:

$$t_1^0 \leqslant \ldots \leqslant t_{n_1}^0 \text{ и } t_{n_1+1}^0 \leqslant \ldots \leqslant t_{n_2}^0. \tag{40}$$

Лемма 2. *Предположим, что все экологически дружелюбные автомобили G^j $\forall j \in M$ используют только имеющиеся зеленые маршруты. Каждый зеленый маршрут из множества n_1*

маршрутов востребован для движения тогда и только тогда, когда

$$G^j > \frac{1}{m+1}\sum_{i=1}^{n_1} c_i\left(\frac{t^0_{n_1}}{t^0_i}-1\right) \quad \forall j \in M, \tag{41}$$

и каждый не-зеленый маршрут из множества $|n_2 - n_1|$ маршрутов востребован для движения тогда и только тогда, когда

$$F^j > \frac{1}{m+1}\sum_{i=n_1+1}^{n_2} c_i\left(\frac{t^0_{n_2}}{t^0_i}-1\right) \quad \forall j \in M. \tag{42}$$

Доказательство. Если все экологически дружелюбные автомобили используют только зеленые маршруты для движения, оптимизационная проблема (35)–(39) может быть рассмотрена в виде двух независимых задач:
1) для зеленых автомобилей:

$$\min_{g^j} z_1^j(g) = \min_{g^j}\sum_{i=1}^{n_1} t_i(\mathfrak{F}_i) g_i^j \quad \forall j \in M \tag{43}$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{n_1} g_i^j = G^j \quad \forall j \in M, \tag{44}$$

$$g_i^j \geqslant 0 \quad \forall j \in M, i = \overline{1, n_1}, \tag{45}$$

$$g_i^j = 0 \quad \forall j \in M, i = \overline{n_1+1, n_2}; \tag{46}$$

2) для не-зеленых автомобилей:

$$\min_{f^j} z_2^j(f) = \min_{f^j}\sum_{i=n_1+1}^{n_2} t_i(\mathfrak{F}_i) f_i^j \quad \forall j \in M \tag{47}$$

при ограничениях

$$\sum_{i=n_1+1}^{n_2} f_i^j = F^j \quad \forall j \in M, \tag{48}$$

(49) $$f_i^j \geqslant 0 \quad \forall j \in M, i = \overline{n_1 + 1, n_2}.$$

Согласно теореме 1 из [1], для задач (43)–(46) и (47)–(49) все маршруты – ненулевые тогда и только тогда, когда выполняются условия (41) и (42) соответственно.

Лемма 2 дает первое правило нахождения оптимального числа зеленых маршрутов в случае множества групп участников движения. Если неравенство (41) выполняется, то все зеленые маршруты будут востребованы, когда все имеющиеся на сети экологически дружелюбные автомобили используют только зеленые маршруты для движения. Одновременное выполнение условий (41), (42) означает, что транспортная сеть является полностью загруженной – все маршруты востребованы. В то же время, условие (41) не гарантирует, что все экологически дружелюбные автомобили будут использовать только зеленые маршруты для движения. Чтобы побудить зеленые автомобили использовать только зеленые маршруты, лицо, принимающее решение, должно создать такие условия, что для водителей будет предпочтительней двигаться по зеленой подсети.

Теорема 3. *Предположим, что начальное множество маршрутов полностью востребовано имеющимися транспортными потоками G и F. Поток зеленых автомобилей G использует только зеленые маршруты тогда и только тогда, когда*

$$\sum_{i=1}^{n_1} \left[\frac{t_i^0}{m+1} + \Psi(G,m)\right] \left[\frac{c_i}{t_i^0}\Psi(G^j,1) - \frac{c_i}{m+1}\right] \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=n_1+1}^{n_2} \left[\frac{t_i^0}{m+1} + \Phi(F,m)\right] \left[\frac{c_i}{t_i^0}\Phi(F^j,1) - \frac{c_i}{m+1}\right]$$

(50) $$\forall j \in M,$$

где

(51) $$\Psi(x,y) = \frac{x + \frac{y}{m+1}\sum_{r=1}^{n_1} c_r}{\sum_{r=1}^{n_1} \frac{c_r}{t_r^0}},$$

$$(52) \qquad \Phi(x,y) = \frac{x + \frac{y}{m+1}\sum_{r=n_1+1}^{n_2} c_r}{\sum_{r=n_1+1}^{n_2} \frac{c_r}{t_r^0}}.$$

Доказательство. Согласно [1], при выполнении условий (41), (42) оптимальное распределение транспортных потоков (g^*, f^*) можно выразить в явном виде. Если подставить полученные в явном виде g^* и f^* в функционалы (43) и (47) соответственно, то получим левую и правую части формулы (50). Причем левая часть будет характеризовать время движения потока зеленых автомобилей j-й ГП по зеленым маршрутам, а правая часть – время движения потока не-зеленых автомобилей j-й ГП по не-зеленым маршрутам.

Теорема 3 дает второе правило нахождения оптимального числа зеленых маршрутов в случае множества групп участников движения. В самом деле, если администрация выделит такое количество зеленых маршрутов, что условие (50) выполняется, то для любой группы пользователей будет предпочтительней направить зеленые автомобили по зеленым маршрутам. В этом случае не-зеленые автомобили увидят, что зеленые автомобили имеют меньшее время движения из района отправления в район прибытия. Данное обстоятельство послужит лучшей мотивацией для водителей к использованию экологически безопасных транспортных средств. В свою очередь условия (41), (42) гарантируют полную востребованность всех выделенных зеленых и не-зеленых маршрутов.

3.2. ТРАНСПОРТНАЯ СЕТЬ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ТОПОЛОГИИ

Рассмотрим сеть, представленную ориентированным графом $\mathfrak{G}$, включающим множество последовательно пронумерованных узлов N и множество последовательно пронумерованных дуг A. Пусть R задает множество районов отправления, а S – районов прибытия ($R \cap S = \emptyset$). Введем следующие обозначения: $M = \{1, \ldots, m\}$ – множество групп пользователей (ГП) транспортной сети $j \in M$; K^{rs} – множество возможных маршрутов между районами отправления r и прибытия s; K_1^{rs} – множество зеленых маршрутов, $K_1^{rs} \subset K^{rs}$; K_2^{rs} – множество не-зеленых маршрутов, $K_2^{rs} \subset K^{rs}$; $K_1^{rs} \cap K_2^{rs} = \emptyset$ и $K_1^{rs} \cup K_2^{rs} = K^{rs}$; $G^{j,rs}$ и $F^{j,rs}$ – транспортный спрос j-й ГП зеленых и не-зеленых автомобилей между районами отправления r и прибытия s соответственно, $G^{rs} = \sum_{j=1}^{m} G^{j,rs}$ и $F^{rs} = \sum_{j=1}^{m} F^{j,rs}$; $g_k^{j,rs}$ при $k \in K^{rs}$ – поток зеленых автомобилей j-й ГП по маршруту k; $g^{j,rs} = (\ldots, g_k^{j,rs}, \ldots)$, $g^j = (\ldots, g^{j,rs}, \ldots)$ и $g = (g^1, \ldots, g^m)$, $g^{-j} = (g^1, \ldots, g^{j-1}, g^{j+1}, \ldots, g^m)$; $f_k^{j,rs}$ при $k \in K_2^{rs}$ – поток не-зеленых автомобилей j-й ГП по маршруту k; $f^{j,rs} = (\ldots, f_k^{j,rs}, \ldots)$, $f^j = (\ldots, f^{j,rs}, \ldots)$ и $f = (f^1, \ldots, f^m)$, $f^{-j} = (f^1, \ldots, f^{j-1}, f^{j+1}, \ldots, f^m)$; x_a – транспортный поток по дуге $a \in A$, $x = (\ldots, x_a, \ldots)$; x_a^j – транспортный поток j-й ГП по дуге $a \in A$, $x^j = (\ldots, x_a^j, \ldots)$; c_a – пропускная способность дуги $a \in A$; $t_a(x_a)$ – время движения по загруженной дуге $a \in A$; $\delta_{a,k}^{rs}$ – индикатор: $\delta_{a,k}^{rs} = 1$ если дуга a «входит» в маршрут k между районами r и s, $\delta_{a,k}^{rs} = 0$ в противном случае.

Проблема (35)–(39) может быть переформулирована для сети общей топологии:

$$\min_{x^j} Z^j(x) = \min_{x^j} \sum_{a \in A} t_a(x_a) x_a^j \quad \forall j \in M \tag{53}$$

при ограничениях

$$\sum_{k \in K^{rs}} g_k^{j,rs} = G^{j,rs} \quad \forall j \in M, \tag{54}$$

$$\sum_{k \in K_2^{rs}} f_k^{j,rs} = F^{j,rs} \quad \forall j \in M, \tag{55}$$

$$g_k^{j,rs} \geqslant 0 \quad \forall k \in K^{rs}, j \in M, \tag{56}$$

$$f_k^{j,rs} \geqslant 0 \quad \forall k \in K_2^{rs}, j \in M, \tag{57}$$

при условии

(58)
$$x_a^j = \sum_r \sum_s \sum_{k \in K_1^{rs}} g_k^{j,rs} \delta_{a,k}^{rs} + \sum_r \sum_s \sum_{k \in K_2^{rs}} \left(g_k^{j,rs} + f_k^{j,rs} \right) \delta_{a,k}^{rs},$$

$$x_a = \sum_{j=1}^{m} x_a^j. \tag{59}$$

Таким образом, можно рассмотреть бескоалиционную игру $\Gamma\left(M, \{\mathbf{G}^j, \mathbf{F}^j\}_{j\in M}, \{\mathbf{H}_j\}_{j\in M}\right)$, где $\{\mathbf{G}^j, \mathbf{F}^j\}_{j\in M}$ – множество стратегий (g, f), удовлетворяющих ограничениям (54)–(57), а $\mathbf{H}_j\left(x\left(g,f\right)\right) = -Z^j\left(x\left(g,f\right)\right)\ \forall j \in M$. Равновесие по Нэшу в игре Γ достигается реализацией таких стратегий (g^*, f^*), что

$$\mathbf{H}_j\left(x\left(g^*, f^*\right)\right) \geqslant \mathbf{H}_j\left(x\left(g^j, f^j, g^{-j^*}, f^{-j^*}\right)\right) \quad \forall j \in M.$$

Как и в предыдущих пунктах, неизвестными переменными в поставленной задаче является распределение транспортных потоков по доступным маршрутам (по зеленым и не-зеленым). При разной конфигурации зеленой подсети (множества зеленых маршрутов) мы будем получать разное равновесное распределение. Таким образом, мы можем рассматривать множество зеленых маршрутов как параметр, которым управляет администрация. Мы приходим к двухуровневой системе управления на сети произвольной топологии при наличии множества групп участников движения.

Воспользовавшись процедурой, заданной в предыдущем пункте, мы можем найти такую зеленую подсеть, что

- время движения любого количества зеленых автомобилей (от нулевого потока до всех имеющихся на сети зеленых автомобилей), использующих для движения зеленые маршруты, меньше или равно времени движения остального транспортного потока между заданными районами отправления-прибытия;

- если все зеленые автомобили будут использовать только зеленые маршруты для движения между заданной парой районов отправления-прибытия, то ни один зеленый маршрут не будет не востребован (отсутствует переизбыток зеленых маршрутов между каждой парой районов отправления-прибытия).

В связи с этим по аналогии с теоремой 3 можно сформулировать следующее

Утверждение 3. *Предположим, что все зеленые автомобили используют только зеленые маршруты, которые являются полностью востребованными. Поток зеленых автомобилей* G^{rs} $\forall r, s$ *использует только зеленые маршруты тогда и только тогда, когда*

$$\sum_{a \in A_{k_1}} t_a(x_a) x_a^j \leqslant \sum_{a \in A_{k_2}} t_a(x_a) x_a^j \quad \forall k_1 \in K_1^{rs}, k_2 \in K_2^{rs}, r, s,$$

где A_k *– множество дуг, входящих в состав маршрута* $k \in K^{rs}$ $\forall r, s$.

Воспользовавшись утверждением 3, мы можем оценить граничное состояние множества K_1^{rs}. Граничное состояние множества K_1^{rs} соответствует ситуации, когда все зеленые автомобили используют только зеленые маршруты и их время движения меньше или равно времени движения не-зеленых автомобилей, использующих не-зеленые маршруты. В таком случае можем рассмотреть задачу (53)–(59) в виде двух независимых задач:
1) для зеленых автомобилей:

$$\min_{x^j} Z_1^j(x) = \min_{x^j} \sum_{a \in A} t_a(x_a) x_a^j \quad \forall j \in M \tag{60}$$

при ограничениях

$$\sum_{k \in K_1^{rs}} g_k^{j,rs} = G^{j,rs} \quad \forall j, r, s, \tag{61}$$

$$g_k^{j,rs} \geqslant 0 \quad \forall k \in K_1^{rs}, j, r, s, \tag{62}$$

$$g_k^{j,rs} = 0 \quad \forall k \in K_2^{rs}, j, r, s, \tag{63}$$

при условии

$$x_a^j = \sum_r \sum_s \sum_{k \in K_1^{rs}} g_k^{j,rs} \delta_{a,k}^{rs} \quad \forall j \in M, \tag{64}$$

(65) $$x_a = \sum_{j=1}^{m} x_a^j,$$

2) для не-зеленых автомобилей:

(66) $$\min_{x^j} Z_2^j(x) = \min_{x^j} \sum_{a \in A} t_a(x_a) x_a^j \quad \forall j \in M$$

при ограничениях

(67) $$\sum_{k \in K_2^{rs}} f_k^{j,rs} = F^{j,rs} \quad \forall j, r, s,$$

(68) $$f_k^{j,rs} \geqslant 0 \quad \forall k \in K_2^{rs}, j, r, s,$$

при условии

(69) $$x_a^j = \sum_r \sum_s \sum_{k \in K_2^{rs}} f_k^{j,rs} \delta_{a,k}^{rs} \quad \forall j \in M,$$

(70) $$x_a = \sum_{j=1}^{m} x_a^j.$$

Оптимизационные задачи (60)–(65) и (66)–(70) являются сложными вычислительными задачами нахождения равновесия по Нэшу на сети [1]. К сожалению, для сети произвольной топологии невозможно получить аналитические условия, подобные условиям, полученным для сети из параллельных каналов.

4. Равновесие по Нэшу на сети с выделенными маршрутами для движения экологически безопасных транспортных потоков в условиях конкурентной маршрутизации

В предыдущем параграфе мы получили правила определения числа зеленых маршрутов в условиях наличия конкурирующих групп пользователей. Теперь мы можем выписать правило равновесного по Нэшу распределения транспортных потоков на сети с выделенными маршрутами для движения зеленых автомобилей.

4.1. ТРАНСПОРТНАЯ СЕТЬ ИЗ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ КАНАЛОВ

Теорема 4. *Предположим, что все маршруты являются полностью востребованными:*

$$G^j > \frac{1}{m+1}\sum_{i=1}^{n_1} c_i\left(\frac{t^0_{n_1}}{t^0_i}-1\right) \quad \forall j \in M$$

и

$$F^j > \frac{1}{m+1}\sum_{i=n_1+1}^{n_2} c_i\left(\frac{t^0_{n_2}}{t^0_i}-1\right) \quad \forall j \in M.$$

В таком случае распределение транспортных потоков на сети из параллельных каналов является ситуацией равновесия по Нэшу (g^*, f^*) тогда и только тогда, когда
1) *если n_1 таково, что*

$$\sum_{i=1}^{n_1}\left[\frac{t^0_i}{m+1}+\Psi(G,m)\right]\left[\frac{c_i}{t^0_i}\Psi(G^j,1)-\frac{c_i}{m+1}\right] \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i=n_1+1}^{n_2}\left[\frac{t^0_i}{m+1}+\Phi(F,m)\right]\left[\frac{c_i}{t^0_i}\Phi(F^j,1)-\frac{c_i}{m+1}\right] \quad \forall j \in M,$$

при $\Psi(x,y)$ и $\Phi(x,y)$ заданых в (51) *и* (52)*, то*

$$g_i^{j*} = b_i^j - \frac{1}{m+1}\sum_{q=1}^{m} b_i^q,$$

где

$$b_i^j = \begin{cases} \frac{c_i}{t^0_i}\frac{G^j+\sum_{s=1}^m G^s+\sum_{r=1}^{n_1} c_r}{\sum_{r=1}^{n_1}\frac{c_r}{t^0_r}} - c_i & \text{для } i = \overline{1, n_1}, \\ 0 & \text{для } i = \overline{n_1+1, n_2}, \end{cases} \quad \forall j \in M,$$

$$f_i^{j*} = y_i^j - \frac{1}{m+1}\sum_{q=1}^{m} y_i^q,$$

где

$$y_i^j = \frac{c_i}{t_i^0} \frac{F^j + \sum_{s=1}^m F^s + \sum_{r=n_1+1}^{n_2} c_r}{\sum_{r=n_1+1}^{n_2} \frac{c_r}{t_r^0}} - c_i \text{ для } i = \overline{n_1+1, n_2},$$

$\forall j \in M$,
2) *если* n_1 *таково, что*

$$\sum_{i=1}^{n_1} \left[\frac{t_i^0}{m+1} + \Psi(G,m)\right] \left[\frac{c_i}{t_i^0}\Psi(G^j,1) - \frac{c_i}{m+1}\right] >$$
$$> \sum_{i=n_1+1}^{n_2} \left[\frac{t_i^0}{m+1} + \Phi(F,m)\right] \left[\frac{c_i}{t_i^0}\Phi(F^j,1) - \frac{c_i}{m+1}\right] \quad \forall j \in M,$$

при $\Psi(x,y)$ *и* $\Phi(x,y)$, *заданых в* (51) *и* (52), *то*

$$g_i^{j*} = b_i^j - \frac{1}{m+1}\sum_{q=1}^m b_i^q,$$

где

$$b_i^j = \frac{c_i}{t_i^0} \frac{G_1^j + \sum_{s=1}^m G_1^s + \sum_{r=1}^{n_1} c_r}{\sum_{r=1}^{n_1} \frac{c_r}{t_r^0}} - c_i \text{ для } i = \overline{1, n_1}, \quad \forall j \in M,$$

$$\left(g_i^{j*} + f_i^{j*}\right) = y_i^j - \frac{1}{m+1}\sum_{q=1}^m y_i^q,$$

где

$$y_i^j = \frac{c_i}{t_i^0} \frac{F^j + G_2^j + \sum_{s=1}^m (F^s + G_2^s) + \sum_{r=n_1+1}^{n_2} c_r}{\sum_{r=n_1+1}^{n_2} \frac{c_r}{t_r^0}} - c_i$$

для $i = \overline{n_1 + 1, n_2}$, $\forall j \in M$, *при* $G^j = G_1^j + G_2^j$ $\forall j \in M$ *и* $G_1 = \sum_{j=1}^m G_1^j$, $G_2 = \sum_{j=1}^m G_2^j$ *такими, что*

$$\sum_{i=1}^{n_1} \left[\frac{t_i^0}{m+1} + \Psi(G_1, m)\right] \left[\frac{c_i}{t_i^0}\Psi(G_1^j, 1) - \frac{c_i}{m+1}\right] \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i=n_1+1}^{n_2} \left[\frac{t_i^0}{m+1} + \Phi(F + G_2, m)\right] \left[\frac{c_i}{t_i^0}\Phi(F^j + G_2^j, 1) - \frac{c_i}{m+1}\right]$$
$$\forall j \in M,$$

при $\Psi(x, y)$ *и* $\Phi(x, y)$, *заданых в* (51) *и* (52).

Доказательство. Вынесенные утверждения напрямую следуют из теоремы 3 и теоремы 1 из [1].

4.2. ТРАНСПОРТНАЯ СЕТЬ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ТОПОЛОГИИ

По аналогии с теоремой 4 можно сформулировать следующее

Утверждение 4. *Предположим, что все маршруты являются полностью востребованными:*

$$g_k^{j,rs} > 0 \ \forall k \in K_1^{rs} \text{ и } \left(g_k^{j,rs} + f_k^{j,rs}\right) > 0 \ \forall k \in K_2^{rs},$$

$\forall j \in M, r, s.$

В таком случае распределение транспортных потоков на сети из параллельных каналов является ситуацией равновесия по Нэшу (g^*, f^*) *тогда и только тогда, когда*
1) *если* K_1^{rs} *таково, что*

$$\sum_{a \in A_{k_1}} t_a(x_a) x_a^j \leqslant \sum_{a \in A_{k_2}} t_a(x_a) x_a^j \ \ k_1 \in K_1^{rs}, k_2 \in K_2^{rs}$$

$\forall j \in M, r, s$, *то*

- g^{j^*} $\forall j \in M$ *определяется как решение задачи* (60)–(65),

- f^{j*} $\forall j \in M$ *определяется как решение задачи* (66)–(70),

2) *если* K_1^{rs} *таково, что*

$$\sum_{a \in A_{k_1}} t_a(x_a) x_a^j > \sum_{a \in A_{k_2}} t_a(x_a) x_a^j \;\; \forall k_1 \in K_1^{rs}, k_2 \in K_2^{rs},$$

$\forall j \in M, r, s,$ *то*

- $\{g_k^{j,rs*}\}_{k \in K_1^{rs}}^{r,s}$ $\forall j \in M$ *определяется как решение задачи*

$$\min_{x^j} \mathfrak{Z}_1^j(x) = \min_{x^j} \sum_{a \in A} t_a(x_a) x_a^j \quad \forall j \in M \tag{71}$$

при ограничениях

$$\sum_{k \in K_1^{rs}} g_k^{j,rs} = G_1^{j,rs} \quad \forall j, r, s, \tag{72}$$

$$g_k^{j,rs} \geqslant 0 \quad \forall k \in K_1^{rs}, j, r, s, \tag{73}$$

при условии

$$x_a^j = \sum_r \sum_s \sum_{k \in K_1^{rs}} g_k^{j,rs} \delta_{a,k}^{rs} \quad \forall j \in M, \tag{74}$$

$$x_a = \sum_{j=1}^{m} x_a^j, \tag{75}$$

- $\{g_k^{j,rs*}, f_k^{j,rs*}\}_{k \in K_2^{rs}}^{r,s}$ $\forall j \in M$ *определяется как решение задачи*

$$\min_{x^j} \mathfrak{Z}_2^j(x) = \min_{x^j} \sum_{a \in A} t_a(x_a) x_a^j \quad \forall j \in M \tag{76}$$

при ограничениях

$$\sum_{k \in K_2^{rs}} \left(g_k^{j,rs} + f_k^{j,rs} \right) = G_2^{j,rs} + F^{j,rs} \quad \forall j, r, s, \tag{77}$$

$$g_k^{j,rs} \geqslant 0 \quad \forall k \in K_2^{rs}, j, r, s, \tag{78}$$

$$f_k^{j,rs} \geqslant 0 \quad \forall k \in K_2^{rs}, j, r, s, \tag{79}$$

при условии

$$x_a^j = \sum_r \sum_s \sum_{k \in K_2^{rs}} \left(g_k^{j,rs} + f_k^{j,rs} \right) \delta_{a,k}^{rs} \quad \forall j \in M, \tag{80}$$

$$x_a = \sum_{j=1}^{m} x_a^j, \tag{81}$$

где $G_1^{j,rs} + G_2^{j,rs} = G^{j,rs}$, *а* $G_1^{j,rs}$ *и* $G_2^{j,rs} + F^{j,rs}$ $\forall j \in M$ – *такие потоки автомобилей по зеленым и не-зеленым маршрутам соответственно, что*

$$\sum_{a \in A_{k_1}} t_a(x_a) x_a^j \leqslant \sum_{a \in A_{k_2}} t_a(x_a) x_a^j \ \ \forall k_1 \in K_1^{rs}, k_2 \in K_2^{rs},$$

$\forall j \in M, r, s.$

5. Заключение

В силу того, что наблюдается серьезная нехватка методологических инструментов поддержки принимаемых решений по выделению на городской транспортной сети «зеленых» подсетей и по мотивации водителей использовать более экологически безопасные автомобили, настоящая статья посвящена проблеме распределения двух видов транспортных потоков на сети, включающей «зеленые» и «не-зеленые» маршруты. Проведен анализ конкурентного сценария взаимодействия этих двух групп транспортных средств на сети. Разработан метод выделения зеленых маршрутов (зеленой подсети), которые обеспечивают «зеленым» автомобилям меньшее время перемещения из районов отправления в районы прибытия при равновесном по Нэшу распределении потоков. Условия сбалансированности «зеленой» подсети с параллельными маршрутами получены в явном виде.

В дальнейших исследованиях предполагается рассмотреть двухуровневые модели минимизации выбросов загрязняющих веществ транспортными потоками мегаполиса, нижний уровень которых реагирует согласно условиям, полученным в настоящей работе. Данная тема представляется крайне актуальной для продолжения исследований, так как практически половина всех выбросов загрязняющих веществ в атмосферу современных городов мира приходится на долю автомобильного транспорта. В связи с этим городские администрации вынуждены создавать условия, стимулирующие появление технологических инноваций в области регулирования транспортных потоков в городах.

Литература

1. ЗАХАРОВ В.В., КРЫЛАТОВ А.Ю. *Конкурентная маршрутизация транспортных потоков поставщиками услуг навигации* // Управление большими системами: сборник трудов. – 2014. – №49. – С. 129–147.
2. КРЫЛАТОВ А.Ю. *Оптимальные стратегии управления транспортными потоками на сети из параллельных каналов* // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: прикладная математика, информатика, процессы управления. – 2014. – №2. – С. 121–130.
3. AHN K., RAKHA H.A. *Network-wide impacts of eco-routing strategies: a large-scale case study* // Transp. Res. Part D: Transp. Environ. – 2013. – Vol. 25. – P. 119–130.
4. AHN K., RAKHA H.A. *The effects of route choice decisions on vehicle energy consumption and emissions* // Transp. Res. Part D: Transp. Environ. – 2008. – Vol. 13, №3. – P. 151–167.
5. AZIZ H.M.A., UKKUSURI S.V. *Exploring the trade-off between greenhouse gas emissions and travel time in daily*

travel decisions: Route and departure time choices // Transp. Res. Part D. – 2014. – Vol. 32. – P. 334–353.

6. AZIZ H.M.A., UKKUSURI S.V. *Integration of environmental objectives in a system optimal dynamic traffic assignment model* // Computer-Aided Civil Infrastructure Eng. – 2012. – Vol. 27, №7. – P. 494–511.
7. BELTRAN B., CARRESE S., CIPRIANI E., PETRELLI M. *Transit network design with allocation of green vehicles: A genetic algorithm approach* // Transp. Res. Part C. – 2009. – Vol. 17. – P. 475-483.
8. BEN-AKIVA M., DE PALMA A., ISAM K. *Dynamic network models and driver information systems* // Transp. Res. Part A: General. – 1991. – Vol. 25, №5. – P. 251–266.
9. BORIBOONSOMSIN K., BARTH M. *Impacts of road grade on fuel consumption and carbon dioxide emissions evidenced by use of advanced navigation systems* // Transp. Res. Rec. – 2009. – Vol. 2139. – P. 21–30.
10. BORIBOONSOMSIN K., BARTH M.J., WEIHUA Z., VU A. *Eco-routing navigation system based on multisource historical and real-time traffic information* // IEEE Transact. Intell. Transp. Syst. – 2012. – Vol. 13, №4. – P. 1694–1704.
11. BOROUJENI B.Y., FREY H.C. *Road grade quantification based on global positioning system data obtained from real-world vehicle fuel use and emissions measurements* // Atmos. Environ. – 2014. – Vol. 85. – P. 179–186.
12. *CO2 emissions from fuel combustions* // International Energy Agency, 2012. – 138 p.
13. FRANK M., WOLFE P. *An algorithm for quadratic programming* // Naval Res. Logistics Quarterly. – 1956. – Vol. 3. – P. 95–110.
14. GAKER D., VAUTIN D., VIJ A., WALKER J.L. *The power and value of green in promoting sustainable transport behavior* // Environ. Res. Lett. – 2011. – Vol. 6, №3. – P. 1–10.
15. GUO L., HUANG S., SADEK A.W. *An evaluation of environmental benefits of time-dependent green routing in*

the greater Buffalo Niagara region // J. Intell.Transp. Syst. – 2012. – Vol. 17, №1. – P. 18–30.

16. HENSHER D.A. *Climate change, enhanced greenhouse gas emissions and passenger transport what can we do to make a difference?* // Transp. Res. Part D:Transport Environ. – 2008. – Vol. 13, №2. – P. 95–111.
17. JOVANOVIC A.D., PAMUCAR D.S., PEJCIC-TARLE S. *Green vehicle routing in urban zones – A neuro-fuzzy approach* // Expert Systems with Applications. – 2014. – Vol. 41. – P. 3189–3203.
18. KRAUTZBERGER L., WETZEL H. *Transport and CO2: productivity growth and carbon dioxide emissions in the european commercial transport industry* // Environ. Resour. Econ. – 2012. – Vol. 53. – P. 435–454.
19. LIN J., GE Y.E. *Impacts of traffic heterogeneity on roadside air pollution concentration* // Transport. Res. Part D: Transp. Environ. – 2006. – Vol. 11, №2. – P. 166–170.
20. MAHMASSANI H.S. *Dynamic models of commuter behavior: experimental investigation and application to the analysis of planned traffic disruptions* // Transp. Res. Part A: General. – 1990. – Vol. 24, №6. – P. 465–484.
21. *Most Carmakers must Further Improve Carbon Efficiency by 2015 (Retrieved September 28, 2012)* // European Environment Agency, 2011. – [Электронный ресурс] – URL: http://www.eea.europa.eu/highlights/most-carmakers-must-further-improve/ (дата обращения: 01.05.2015).
22. NAGURNEY A. *Congested urban transportation networks and emission paradoxes* // Transp. Res. Part D: Transp. Environ. – 2000. – Vol. 5, №2. – P. 145–151.
23. *Proposal for a Regulation of the European Parliament and of the Council - Setting Emission Performance Standards for New Passenger Cars as Part of the Community's Integrated Approach to Reduce CO2 Emissions from Light-Duty Vehicles* // Commission of the European Communities, 2007. Dossier COD/2007/0297.

24. SHEFFI Y. *Urban transportation networks: equilibrium analysis withmathematical programming methods.* – Prentice-Hall, Inc, Englewood Cliffs,N.J. – 1985. – 416 p.
25. STANLEY J.K., HENSHER D.A., LOADER C. *Road transport and climate change: stepping off the greenhouse gas* // Transp. Res. Part A: Policy Pract. – 2011. – Vol. 45, №10. – P. 1020–1030.
26. *The Alternative Fuels and Advanced Vehicles Data Center* / Serbian Department of Energy (SDE), 2013. – [Электронный ресурс] – URL: http://www.afdc.energy.gov.rs/afdc/locator/stations/state (дата обращения: 24.02.13).
27. *Traffic Assignment Manual* // U.S. Bureau of Public Roads (eds.) U.S. Department of Commerce. Washington, D.C., 1964. – 264 p.
28. *U.S. Transportation Sector Greenhouse Gas Emissions: 1990–2011* // EPA, U., 2013. – Office of Transportation and Air Quality. – EPA-420-F-13-033a.
29. WYATT D.W., LI H., TATE J.E. *The impact of road grade on carbon dioxide* (*CO2*) *emission of a passenger vehicle in real-world driving* // Transp. Res. Part D. – 2014. – Vol. 32. – P. 160–170.
30. YIN Y., LAWPHONGPANICH S. *Internalizing emission externality on road networks* // Transp. Res. Part D: Transp. Environ. – 2006. – Vol. 11, №4. – P. 292–301.
31. ZHANG K.S., FREY H.C. *Road grade estimation for on-road vehicle emissions modeling using light detection and ranging data* // J. AirWaste Manag. Assoc. – 2006. – Vol. 56, №6. – P. 777–788.
32. ZHANG Y., LV J., YING Q. *Traffic assignment considering air quality* // Transp. Res. Part D: Transp. Environ. – 2010. – Vol. 15, №8. – P. 497–502.

COMPETITIVE GREEN VEHICLES ASSIGNMENT IN TRANSPORTATION NETWORK

Victor Zakharov, Saint-Petersburg state university,
Saint-Petersburg, Doctor of Science, professor (mcvictor@mail.ru).
Alexander Krylatov, Saint-Petersburg state university,
Saint-Petersburg, Cand.Sc., (aykrylatov@yandex.ru).

Abstract: Nowadays there is a lack of methodological tools for supporting decision makers in the sphere of motivation to use green vehicles by drivers and of available green capacity allocation. We study the problem of green and non-green traffic flow assignment in the network consisting of green and non-green routes. The analysis of competitive and cooperative frameworks is performed. We suggest an approach to green routes' selection (*defining the, so called, green subnetwork, which is fully loaded and provides smaller travel time for green vehicles under Wardrop and Nash traffic flow assignments*). *We also elicit explicit balancing conditions for the green subnetwork in case of parallel routes.*

Keywords: green flows assignment, transportation network, Nash equilibrium, Wardrop equilibrium.

Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии Г.А. Угольницким

Поступила в редакцию 06.03.2015.
Дата опубликования 31.05.2015.