

Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН

УПРАВЛЕНИЕ БОЛЬШИМИ СИСТЕМАМИ

*Специальный
выпуск 55*
Май 2015

**СБОРНИК
ТРУДОВ**

*Математическая экология:
теоретико-игровые модели*

ISSN 1819-2467

Регистрационный номер Эл №ФС77-44158 от 09 марта 2011 г.

Москва – 2015

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова

**УПРАВЛЕНИЕ
БОЛЬШИМИ
СИСТЕМАМИ**

СБОРНИК ТРУДОВ

Специальный выпуск 55

Математическая экология
теоретико-игровые модели

Общая редакция:
Г.А. Угольницкий, Д.А. Новиков

Москва – 2015

КООРДИНАЦИОННЫЙ СОВЕТ

Академики РАН: Васильев С.Н., Емельянов С.В., Куржанский А.Б., Федосов Е.А., Черноусько Ф.Л.; члены-корреспонденты РАН: Желтов С.Ю., Каляев И.А., Пархоменко П.П., Попков Ю.С.; д-ра техн. наук: Дорофеев А.А., Кузнецов О.П., Кульба В.В., Лотоцкий В.А., Павлов Б.В., Поляк Б.Т., Рутковский В.Ю.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор: член-корр. РАН Новиков Д.А. **Зам. главного редактора:** д-р физ.-мат. наук Губко М.В.; **Отв. секретарь:** канд. техн. наук Базенков Н.И.; **Редактор:** канд. техн. наук Квинто Я.И. **Техн. редактор:** канд. техн. наук Куливец С.Г.

Д-ра техн. наук: проф. Алескеров Ф.Т. (ГУ ВШЭ), проф. Алчинов А.И. (ИПУ РАН), проф. Андриевский Б.Р. (ИПМ РАН), проф. Афанасьев В.Н. (МИЭМ), проф. Бахтадзе Н.Н. (ИПУ РАН), проф. Бурков В.Н. (ИПУ РАН), проф. Вишневский В.М. (ИПУ РАН), Галаев А.А. (ИПУ РАН), д-р физ.-мат. наук проф. Ерешко Ф.И. (ВЦ РАН), д-ра техн. наук Зоркальцев В.И. (ИСЭМ СО РАН), проф. Калашников А.О. (ИПУ РАН), проф. Калянов Г.Н. (ГУ ВШЭ), проф. Каравай М.Ф. (ИПУ РАН), д-р экон. наук, проф. Ключков В.В. (ИПУ РАН), д-ра техн. наук, Коргин Н.А. (ИПУ РАН), проф. Курдюков А.П. (ИПУ РАН), д-ра физ.-мат. наук, проф. Кушнер А.Г., проф. Лазарев А.А. (МФТИ), д-ра техн. наук: проф. Лебедев В.Г. (ИПУ РАН), проф. Мандель А.С. (ИПУ РАН), д-р биол. наук проф. Михальский А.И., д-р физ.-мат. наук, проф. Непейвода Н.Н. (ИПС РАН), д-р экон. наук, проф. Нижегородцев Р.М. (ИПУ РАН), д-ра техн. наук: проф. Орлов А.И. (МГТУ), д-ра физ.-мат. наук: проф. Рапопорт Л.Б. (ИПУ РАН), проф. Райгородский А.М. (МГУ), проф. Савватеев А.В. (РЭШ), д-ра техн. наук: проф. Самуйлов К.Е. (РУДН), проф. Сидельников Ю.В. (МАИ), Совлуков А.С. (ИПУ РАН) д-ра физ.-мат. наук: проф. Соловьев С.Ю. (МГУ), проф. Угольницкий Г.А. (ЮФУ), проф. Уткин В.А. (ИПУ РАН), проф. Хоботов Е.Н. (МГТУ), д-ра физ.-мат. наук: доцент Чеботарев П.Ю. (ИПУ РАН), проф. Чхартишвили А.Г. (ИПУ РАН), проф. Щербаков П.С. (ИПУ РАН).

РЕГИОНАЛЬНЫЕ РЕДАКЦИОННЫЕ СОВЕТЫ

Арзамас – д-р физ.-мат. наук проф. Пакшин П.В. **Волгоград** – д-ра физ.-мат. наук: проф. Воронин А.А., проф. Лосев А.Г. (ВолГУ); **Воронеж** – д-р техн. наук, проф. Баркалов С.А., д-р физ.-мат. наук, проф. Головинский П.А. (ВГАСУ), д-р техн. наук, проф. Подвальный С.Л. (ВГТУ); **Иркутск** – академик РАН Бычков И.В., д-р физ.-мат. наук, проф. Лакеев А.В. (ИДСТУ СО РАН); **Казань** – д-р физ.-мат. наук, проф. Маликов А.И., д-р техн. наук, проф. Сиразетдинов Р.Т. (КГТУ-КАИ); **Липецк** – д-ра техн. наук: проф. Погодаев А.К., Сараев П.В. (ЛГТУ); **Самара** – д-ра экон. наук: проф. Богатырев В.Д., проф. Гераськин М.И., д-р техн. наук, проф. Засканов В.Г. (СГАУ); **Петрозаводск** – д-р физ.-мат. наук, проф. Мазалов В.В., д-р техн. наук, доц. Печников А.А. (ИПМИ КарНЦ РАН); **Санкт-Петербург** – д-р физ.-мат. наук: проф. Петросян Л.А. (СПбГУ), д-р техн. наук проф. Фуртат И.Б. (ИПМ РАН); **Старый Оскол** – д-р техн. наук, проф. Еременко Ю.И. (СТИ).

Адрес редакции: 117997, г. Москва, ул. Профсоюзная, д. 65.

Адрес в Интернет: ubs.mtas.ru.

XV - международная конференция

Системы проектирования, технологической подготовки производства и управления этапами жизненного цикла промышленного продукта (CAD/CAM/PDM-2015)



Уважаемые коллеги, приглашаем Вас принять участие в международной конференции "Системы проектирования, технологической подготовки производства и управления этапами жизненного цикла промышленного продукта (CAD/CAM/PDM-2014)", которая

состоится с 26 по 28 октября 2015 года в Москве, в Институте проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН.

ТЕМАТИКА КОНФЕРЕНЦИИ:

- Организация структур технических и программных средств проектирования и управления. Средства взаимодействия, структуры данных, международные стандарты.
- Компьютерная графика и CAD/CAM/PDM-системы в учебных процессах (программы обучения по дисциплинам, методические материалы, тестирование). Средства виртуальной реальности в промышленных системах.
- Интегрированные производственные системы и управление технологическими процессами. PDM-системы.
- Проектирование в машиностроении и строительстве.
- Проектирование в радиоэлектронике.

ОРГАНИЗАТОРЫ:

- Российский фонд фундаментальных исследований (РФФИ)
- Российская Академия Наук (РАН)
- Министерство образования и науки РФ
- Научный совет РАН по теории управляемых процессов и автоматизации
- ИПУ РАН

- Государственный космический научно-производственный центр им. М.В. Хруничева (ФГУП ГКНПЦ)
- Ракетно-космическая корпорация “Энергия” им. С.П. Королёва
- МГТУ “Станкин”

КЛЮЧЕВЫЕ ДАТЫ:

до **25 сентября 2015 года** - тезисы докладов (*объём не более 1-ой страницы формата А-5*), заявка на участие в конференции

до **5 октября 2015 года** - полный текст доклада, перевод оргвзноса

Просьба **представить тезисы доклада в указанный срок**, в противном случае мы не сможем его опубликовать!!!

Заявки, тезисы и доклады высылаются по e-mail: conf18@spm.ipu.ru

Новые информационные сообщения будут представлены на сайте:

<http://lab18.ipu.ru>

ТЕКУЩАЯ ИНФОРМАЦИЯ:

[форма заявки](#), [правила оформления тезисов и докладов](#)

ЯЗЫКИ КОНФЕРЕНЦИИ: русский, английский.

АДРЕС ОРГКОМИТЕТА:

117997, Россия, г. Москва, ул. Профсоюзная 65, ИПУ РАН,

Оргкомитет конференции CAD/CAM/PDM-2015.

Телефон для справок: (495) 334 – 93-50; факс (495) 334 – 91-29.

Председатель: Толоч Алексей Вячеславович - д.т.н., проф.

Помощник председателя: Смирнов Сергей Владимирович - к.т.н.

ФИНАНСОВЫЕ УСЛОВИЯ:

Организационный взнос (печатные материалы и прочие расходы, НДС 18% включено в оргвзнос):

для организаций (за 1 участника с докл. или без докл.) - **3500 руб.**

для граждан России - **2500 руб.**

для заочных участников - **1500 руб.**

для иностранных граждан - **4000 руб.**

СОДЕРЖАНИЕ

Угольницкий Г. А. <i>Предисловие редактора</i>	6
Астраханцев Г. П., Меншуткин В. В., Минина Т. Р. <i>Использование моделей экосистем больших озер для получения оценок ассимиляционного потенциала</i>	17
Бреер В. В., Новиков Д. А., Рогаткин А. Д. <i>Модели порогового коллективного поведения в задачах управления эколого–экономическими системами</i>	35
Бурков В. Н., Буркова И. В., Пузырев С. А. <i>Принцип согласованного планирования в управлении социально-эколого–экономическими системами</i>	55
Воронин А. А., Васильченко А. А., Писарева М. В., Писарев А. В., Хоперсков А. В., Храпов С. С., Подщипкова Ю. Е. <i>Проектирование системы эколого–экономического управления территорией Волго–Ахтубинской поймы на основе гидродинамического и геоинформационного моделирования</i>	79
Горелик В. А. <i>Коррекция кооперативных игр как механизм стабилизации эколого–экономических систем</i>	103
Горелик В. А., Золотова Т. В. <i>Механизмы управления платежами, лимитами и штрафами в иерархических региональных моделях охраны окружающей среды</i>	119
Громова Е. В., Петросян Л. А. <i>Сильно динамически устойчивое кооперативное решение в одной дифференциальной игре управления вредными выбросами</i>	140

Гурман В. И., Дамешек Л. Ю., Константинов Г. Н., Насатуева С. Н., Расина И. В., Чемезова Т. В. <i>Нормирование антропогенных воздействий на природную среду на основе эколого–экономических моделей</i>	160
Захаров В. В., Крылатов А. Ю. <i>Моделирование конкурентной маршрутизации экологически безопасных транспортных потоков на городской транспортной сети</i>	185
Иванко Н. С., Абакумов А. И. <i>Задачи управления рыбным промыслом в условиях квотирования</i>	224
Иванова А. С., Кириллов А. Н. <i>Равновесие и управление в задаче сохранения видового состава биосообщества</i>	239
Ильичев В. Г., Дашкевич Л. В., Кулыгин В. В. <i>Краткое описание наукометрических показателей основанных на цитируемости</i>	259
Мазалов В. В., Ретгиева А. Н. <i>Асиметрия в кооперативной задаче управления биоресурсами</i>	280
Назиров А. Э., Угольницкий Г. А., Усов А. Б. <i>Теоретико-игровая модель трехуровневой маркетинговой системы с учетом экологических требований</i>	326
Никитина А. В., Пучкин М. В., Семенов И. С., Сухинов А. И., Угольницкий Г. А., Усов А. Б., Чистяков А. Е. <i>Дифференциально-игровая модель предотвращения заморов в мелководных водоемах</i>	343
Новиков Д. А., Чхартишвили А. Г. <i>Модели рефлексивных игр в задачах управления эколого-экономическими системами</i>	362

Щепкин А. В.

Анализ механизма продажи квот..... 373

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА

Угольницкий Г. А.¹

*(Институт математики, механики и компьютерных наук
Южного федерального университета, Ростов-на-Дону)*

Замысел настоящего сборника состоит в демонстрации современного состояния российских исследований в области математической экологии с особым вниманием к методам оптимального управления и теории игр. По-видимому, представленные в сборнике статьи позволяют говорить о наличии двух встречных «потоков»: от сложившихся еще в Советском Союзе научных школ математической экологии к использованию теоретико-игровых моделей, с одной стороны, и от теоретико-игровых и организационно-управленческих исследований к экологическим приложениям, с другой. Рассмотрим сначала работы первой группы.

Статья Г.П. Астраханцева, В.В. Меншуткина, Т.Р. Мининой «Использование моделей экосистем больших озер для получения оценок ассимиляционного потенциала» продолжает многочисленную серию работ по математическому моделированию озерных экосистем и управлению ими, выполненных под руководством В.В. Меншуткина [3, 16, 19, 27, 31]. В статье рассматривается понятие ассимиляционного потенциала природных систем. В случае больших пресноводных озер анализ этого понятия связан с изучением процесса антропогенного эвтрофирования посредством проведения вычислительных экспериментов с моделью озерной экосистемы. В качестве одного из подходов к экономической оценке ассимиляционного потенциала озерных экосистем авторы предлагают использовать механизм торговли квотами на аукционе. Приводится обсуждение полученных результатов применительно к фосфорному загрязнению Ладожского озера.

¹ Геннадий Анатольевич Угольницкий, заведующий кафедрой прикладной математики и программирования ЮФУ, доктор физико-математических наук, профессор (ougoln@mail.ru).

Статья «Нормирование антропогенных воздействий на природную среду на основе эколого-экономических моделей» написана большим коллективом авторов (В.И. Гурман, Л.Ю. Дамешек, Г.Н. Константинов, С.Н. Насатуева, И.В. Расина, Т.В. Чемезова), принадлежащих к научной школе моделирования эколого-экономических систем В.И. Гурмана [13, 18, 20–22]. Математической основой здесь выступает принцип расширения в задачах оптимального управления, предложенный В.И. Гурманом и В.Ф. Кротовым. Нормирование воздействий на природную среду формализуется как обратная задача оптимального управления. Конкретный вклад статьи заключается в обобщении задачи нормирования на случай динамических размерностей переменных модели. Решение задачи нормирования авторы обоснованно связывают с проблематикой устойчивого развития. В работе приведен содержательный обзор исследований по этой тематике. В первом пункте статьи дается общая постановка обобщенной задачи нормирования и приводится основной результат с доказательством. Второй пункт содержит теоретический пример для линейных систем, а третий – практический пример задачи определения предельно допустимых выбросов с численными расчетами на реальных данных.

В статье А.И. Абакумова, Н.П. Иванко в соответствии с названием изучаются «Задачи управления рыбным промыслом в условиях квотирования». Эта работа также продолжает давние исследования по моделям оптимальной эксплуатации биологических ресурсов под руководством А.И. Абакумова [1, 2]. В статье исследуются возможности минимизации последствий от коллизий в морском рыбном промысле, возникающих между пообъектным способом формирования квот и многовидовым характером промысла. Показаны варианты линеаризации начальных нелинейных задач или линеаризованные способы их исследования и решения. Для задач оптимизации распределения квот и задач максимизации дохода от промысла приведены иллюстративные примеры. Намечены постановки игровых задач рыбного промысла.

В 1970-х годах в Ростовском государственном (ныне Южный федеральный) университете И.И. Ворович и А.Б. Горстко основали научную школу моделирования эколого-

экономических объектов на базе системного анализа и компьютерной имитации [10–12, 15, 18, 26, 28–29]. Это направление продолжают три представленные в сборнике статьи.

В работе В.Г. Ильичева, Л.В. Дашкевич, В.В. Кулыгина изучаются «Эволюционно-устойчивые характеристики Азовского моря при вариации донского стока». Предложена компьютерная эколого-эволюционная модель «биогенные элементы – водоросли». Обнаружено, что в асимптотическом режиме отношение органических форм азота и фосфора в экосистеме слабо изменяется, несмотря на сильную деформацию химического состава стока реки Дон. На основе вычислительных модельных экспериментов установлена причина этого явления. Определены эволюционно-устойчивые параметры благоприятных температур развития основных групп водорослей. Показано, что у теплолюбивых водорослей такие параметры единственны, а у холодолюбивых водорослей допускаются две реализации. Тематика работы тесно связана с идеями эволюционных игр.

В исследованиях под руководством Г.А. Угольницкого развивается концепция управления устойчивым развитием (в частности, эколого-экономических систем) на основе иерархических теоретико-игровых моделей [28–29]. В статье А.Э. Назирова, Г.А. Угольницкого, А.Б. Усова в рамках этой концепции рассматривается «Теоретико-игровая модель трехуровневой маркетинговой системы с учетом экологических требований». Система управления имеет вид «принципал – супервайзер – агент». Роли субъектов управления выступают производитель, посредник, с которым у производителя заключен договор комиссии, и торговое предприятие, реализующее в розничной сети продукцию производителя. С определенной долей условности предполагается, что основная цель производителя – выполнение экологических требований. Предложен алгоритм построения равновесия Штакельберга в игре трех лиц с учетом требования гомеостаза экологической подсистемы. В качестве метода иерархического управления в каждой паре «принципал – супервайзер» и «супервайзер – агент» используется побуждение, то есть воздействие ведущего игрока на функцию выигрыша ведомого. Приведен ряд характерных примеров с последующей интерпретацией полученных результатов.

В статье «Дифференциально-игровая модель предотвращения заморов в мелководных водоемах» концепция управления устойчивым развитием (Г.А. Угольницкий, А.Б. Усов, М.В. Пучкин) применяется к модели биологической кинетики мелководного водоема (А.И. Сухинов, А.В. Никитина, А.Е. Чистяков, И.С. Семенов). Предложены алгоритмы исследования модели в случае информационных регламентов динамических игр Гермейера Γ_{1x} и Γ_{2x} . Задача решается численно с помощью разработанного параллельного алгоритма, учитывающего архитектуру суперЭВМ с распределенной памятью. Предлагаемый алгоритм численного решения поставленной задачи на суперЭВМ с использованием метода k -средних позволяет существенно сократить время работы программного комплекса, численно реализующего модельную задачу динамики взаимодействующих популяций в Азовском море. Модель используется для прогнозирования изменения биомассы популяций в мелководных водоемах с учетом требований устойчивого развития.

К моделированию эколого-экономических систем можно отнести и статью А.А. Воронина, А.А. Васильченко, М.В. Писаревой, А.В. Писарева, С.С. Храпова «Проектирование системы эколого-экономического управления территорией Волго-Ахтубинской поймы на основе гидродинамического и геоинформационного моделирования». В статье описывается программный комплекс поддержки решений по управлению эколого-экономической системой водосбора, включающий гидродинамические модели, модели обычной и многокритериальной оптимизации с учетом пространственной определенности, сценарное моделирование, геоинформационные технологии, экспертные и когнитивные процедуры, а также механизмы синтеза эколого-экономических воздействий. Работа насыщена фактическими данными и представляет интерес для практического использования.

Теперь охарактеризуем работы из «обратного потока». В 1970-х годах Ю.Б. Гермейер и Н.Н. Моисеев заложили основы информационной теории иерархических систем [7], которая использует обобщенный принцип гарантированного результата для анализа различных регламентов информационного взаимодействия игроков. Эта теория развита в монографиях [8–9], в

том числе применительно к управлению эколого-экономическими системами. В рамках указанной теории в статье В.А. Горелика и Т.В. Золотовой анализируются «Механизмы управления платежами, лимитами и штрафами в иерархических региональных моделях охраны окружающей среды». При этом особое внимание уделяется проблеме согласованности интересов элементов эколого-экономической системы, обеспечивающих ее устойчивое функционирование, и идеальной согласованности, при которой ведущий элемент дополнительно достигает глобального максимума своей целевой функции. Интересно, что при таком подходе динамическое по своей природе понятие устойчивого развития допускает исследование в статической постановке. В статье получен ряд новых результатов, касающихся возможностей согласования и идеального согласования интересов при назначении экологических платежей и штрафов. В частности, полученные результаты свидетельствуют о том, что обеспечить идеальное согласование интересов эколого-экономических агентов удастся далеко не всегда, и приходится ограничиваться менее амбициозными постановками задачи управления. Установлено также, что лучших результатов можно добиться при назначении дифференцированных экологических платежей.

Статья В.А. Горелика «Коррекция кооперативных игр как механизм стабилизации эколого-экономических систем» посвящена развитию методов решения несобственных задач посредством минимальной в некотором смысле коррекции исходной модели. Этот подход реализуется применительно к кооперативным играм с пустым S -ядром с приложениями к управлению эколого-экономическими системами. С математической точки зрения авторский подход представляется очень интересным, перспективным и заслуживают развития также предложенные эколого-экономические интерпретации результатов. В работе дана постановка задачи коррекции исходной кооперативно-игровой модели и выделены различные случаи параметров коррекции, приводящие к решению задач линейного и квадратичного программирования. Подробно рассмотрен наиболее интересный случай пропорциональной коррекции. Отдельно описано

использование сбалансированных покрытий в задаче коррекции, приведены теоретические и эколого-экономические примеры.

В 1970-х годах А.Я. Лернер и В.Н. Бурков основали математическую теорию активных систем [4], посвященную построению и исследованию механизмов согласования частных и общесистемных интересов. Это направление продолжает активно развиваться, в том числе в рамках предложенной Д.А. Новиковым теории управления организационными системами [5, 23]. В монографии [6] авторы продемонстрировали возможности применения идей теории активных систем к построению механизмов управления эколого-экономическими объектами. Четыре статьи сборника развивают указанное направление.

В статье В.Н. Буркова, И.В. Бурковой и С.А. Пузырева рассматривается «Принцип согласованного планирования в управлении социальными и эколого-экономическими системами». Эта работа относится к магистральному направлению теории активных систем – проблеме согласования интересов активных агентов. В статье исследуется управление сложными программами, состоящими из подпрограмм, распределенных функционально, административно или территориально. Во всех случаях успешная максимизация глобальной целевой функции Центра возможна лишь при условии учета интересов отвечающих за отдельные подпрограммы агентов. Идея принципа согласованного планирования состоит в оптимизации целевой функции Центра на множестве согласованных планов, при которых значения целевых функций агентов не меньше определенных величин. Основным методом решения задачи согласованной оптимизации служит сетевое программирование. Рассматриваются также механизмы совместного финансирования программ. Изложение иллюстрируется большим количеством примеров.

В статье В.В. Бреера, Д.А. Новикова, А.Д. Рогаткина исследуются «Модели порогового коллективного поведения в задачах управления эколого-экономическими системами». В рамках таких моделей исследуется поведение активных агентов, принимающих бинарные решения типа «действовать – не действовать». При этом принятие решения зависит от того, превышает ли характеристика окружающей обстановки некий порог, и та-

ких порогов у агента может быть несколько. Наилучшие ответы агентов приводят к дискретным динамическим системам, описывающим изменение во времени числа действующих агентов. Возникающие модели многопорогового коллективного поведения авторы применяют к трем эколого-экономическим примерам: моделям индивидуальных штрафов, индивидуальных и коллективных штрафов, стимулирования природоохранных инвестиций, выявляя при этом ряд интересных эффектов.

Статья Д.А. Новикова и А.Г. Чхартишвили описывает еще одно оригинальное направление развития теории активных систем – «Модели рефлексивных игр в задачах управления эколого-экономическими системами». Как известно, в предложенной авторами теории рефлексивных игр описывается поведение активных агентов при различных предположениях об их взаимной информированности, что приводит к возникновению наряду с реальными также «фантомных» агентов. С помощью указанного аппарата авторы анализируют несколько ситуаций, допускающих эколого-экономическую трактовку: число агентов на рынке, совместное производство, пороговые штрафы, согласование интересов управляющих органов. Приведенные простые модели убедительно доказывают актуальность эколого-экономических приложений рефлексивных игр с получением важных качественных выводов.

Наконец, А.В. Щепкин проводит «Анализ механизма продажи квот». В этой публикации теория активных систем сочетается с теорией управления рисками. Именно, исследована модель, в которой предприятие приобретает квоты (например, на выброс загрязняющих веществ), а Центр проверяет соответствие допускаемого квотой уровня риска с фактическим уровнем риска на предприятии. Предлагается формализованная процедура выделения квот, обеспечивающих желаемый уровень риска.

В научной школе Л.А. Петросяна (В.В. Захаров, Н.А. Зенкевич, В.В. Мазалов и др.) [14, 17, 24, 25] исследуются бескоалиционные и кооперативные дифференциальные игры с особым вниманием к проблеме динамической устойчивости решений. При наличии этого свойства никому из игроков не выгодно отступать от согласованных в начале игры стратегий на всем ее периоде вдоль оптимальной (слабая динамическая

устойчивость) или любой допустимой (сильная динамическая устойчивость) траектории конфликтно управляемой динамической системы. Указанная проблема имеет большое значение при анализе долгосрочных природоохранных и иных соглашений, заключаемых независимыми субъектами (фирмами, регионами, странами). Слабой (time consistency) и сильной (subgame perfectness) динамической устойчивости, в том числе применительно к эколого-экономическим системам, посвящено большое число работ не только российских, но и зарубежных авторов [30, 32]. К этому направлению можно отнести четыре публикации в настоящем сборнике.

В статье Е.В. Громовой и Л.А. Петросяна анализируется «Сильно динамически устойчивое кооперативное решение в одной дифференциальной игре управления вредными выбросами». В дифференциальной игре двух лиц найдено сильно динамически устойчивое кооперативное решение, удовлетворяющее также условию Д.В.К. Янга защиты от иррационального поведения.

Предметом статьи В.В. Захарова и А.Ю. Крылатова служит «Моделирование конкурентной маршрутизации экологически безопасных транспортных потоков на городской транспортной сети». Эта работа относится к одному из самых интенсивно развивающихся разделов современной теории игр – сетевым играм, использующим теоретико-графовое представление пространственных отношений между элементами моделируемой системы. Рассматривается задача выделения на городской транспортной сети «зеленых» подсетей и побуждения водителей к использованию экологически безопасных автомобилей. Проведен анализ конкурентного и кооперативного взаимодействия двух видов транспортных потоков («зеленых» и обычных) в сети. Для различных топологий сети находятся равновесия по Вардропу и Нэшу. Условия сбалансированности «зеленой» подсети с параллельными маршрутами получены в явном виде.

В статье В.В. Мазалова и А.Н. Ретгиевой изучается «Асимметрия в кооперативной задаче управления биоресурсами». Рассматриваются два вида асимметрии игроков: различные коэффициенты дисконтирования и разные горизонты планирования. Эти предположения имеют ясную эколого-экономическую интерпретацию. Определены кооперативные выигрыши и их рас-

пределения между асимметричными участниками. Для построения кооперативных выигрышей и стратегий игроков используется арбитражное решение Нэша. Показано, что применение арбитражного решения не только выгодно обоим игрокам, но и способствует улучшению экологической обстановки.

Наконец, внимание А.С. Ивановой и А.Н. Кириллова привлекли «Равновесие и управление в задаче сохранения видового состава биосообщества». Построено равновесие для динамической модели присутствия популяции в определенном местообитании. В случае переменной пищевой привлекательности ареала найдены значения интенсивностей изъятия особей, позволяющие сохранить видовой состав.

Конечно, в сборнике представлены далеко не все работы современных российских авторов в области математической экологии. Тем не менее, основная тема сборника – использование теоретико-игровых моделей в управлении эколого-экономическими системами – отражена достаточно полно и разнообразно. Хочется верить, что публикация сборника будет способствовать сплочению российских специалистов по математической экологии и дальнейшему развитию теоретико-игрового аппарата моделирования и управления эколого-экономическими системами.

Литература

1. АБАКУМОВ А.И. *Управление и эксплуатация в моделях эксплуатируемых популяций*. – Владивосток: Дальнаука, 1993.
2. АБАКУМОВ А.И. *Математическая экология*. – Владивосток: изд-во ДГУ, 1994.
3. АСТРАХАНЦЕВ Г.П., МЕНШУТКИН В.В., ПЕТРОВА Н.А. И ДР. *Моделирование экосистем больших стратифицированных озер*. – СПб.: Наука, 2003.
4. БУРКОВ В.Н. *Основы математической теории активных систем*. – М.: Наука, 1977.
5. БУРКОВ В.Н., НОВИКОВ Д.А. *Теория активных систем: состояние и перспективы*. – М.: СИНТЕГ, 1999.

6. БУРКОВ В.Н., НОВИКОВ Д.А., ЩЕПКИН А.В. *Механизмы управления эколого-экономическими системами*. – М.: Физматлит, 2008.
7. ГЕРМЕЙЕР Ю.Б. *Игры с противоположными интересами*. – М.: Наука, 1976.
8. ГОРЕЛИК В.А., КОНОНЕНКО А.Ф. *Теоретико-игровые модели принятия решений в эколого-экономических системах*. – М.: Радио и связь, 1982.
9. ГОРЕЛИК В.А., ГОРЕЛОВ М.А., КОНОНЕНКО А.Ф. *Анализ конфликтных ситуаций в системах управления*. – М.: Радио и связь, 1991.
10. ГОРСТКО А.Б. *Математическое моделирование и проблемы использования водных ресурсов*. – Ростов-на-Дону: изд-во РГУ, 1976.
11. ГОРСТКО А.Б., ДОМБРОВСКИЙ Ю.А., СУРКОВ Ф.А. *Модели управления эколого-экономическими системами*. – М.: Наука, 1984.
12. ГОРСТКО А.Б., УГОЛЬНИЦКИЙ Г.А. *Введение в моделирование эколого-экономических систем*. – Ростов-на-Дону: изд-во РГУ, 1990.
13. ГУРМАН В.И. *Принцип расширения в задачах управления*. – М.: Наука, 1985.
14. ЗЕНКЕВИЧ Н.А., ПЕТРОСЯН Л.А., ЯНГ Д.В.К. *Динамические игры и их приложения в менеджменте*. – СПб.: Высшая школа менеджмента, 2009.
15. ИЛЬИЧЕВ В.Г. *Устойчивость, адаптация и управление в экологических системах*. – М.: Физматлит, 2009.
16. *Интегрированное управление водными ресурсами Санкт-Петербурга и Ленинградской области. Опыт создания системы поддержки принятия решений* / [под ред. А.Ф. Алимова, Л.А. Руховца и М.М. Степанова]. – СПб.: СПб НЦ РАН, 2001.
17. МАЗАЛОВ В.В. *Математическая теория игр и ее приложения*. – СПб.: Лань, 2010.
18. *Математические модели и методы управления крупномасштабным водным объектом* / Ю.А. Анохин, А.Б. Горстко, Л.Ю. Дамешек [и др.]; [под ред. Г.Н. Константинова]. – Новосибирск: Наука, 1990.

19. МЕНШУТКИН В.В. *Математическое моделирование популяций и сообществ водных животных*. – Л.: Наука, 1971.
20. *Модели природных систем* [под ред. В.И. Гурмана, И.П. Дружинина]. – Новосибирск: Наука, 1978.
21. *Модели управления природными ресурсами* [под ред. В.И. Гурмана]. – М.: Наука, 1981.
22. *Моделирование социо-эколого-экономической системы региона* [под ред. В.И. Гурмана, Е.В. Рюминой]. – М.: Наука, 2003.
23. НОВИКОВ Д.А. *Теория управления организационными системами*. – М.: Физматлит, 2007.
24. ПЕТРОСЯН Л.А., ЗАХАРОВ В.В. *Введение в математическую экологию*. – Л.: изд-во ЛГУ, 1986.
25. ПЕТРОСЯН Л.А., ЗЕНКЕВИЧ Н.А., ШЕВКОПЛЯС Е.В. *Теория игр*. – СПб.: БХВ-Петербург, 2012.
26. *Рациональное использование водных ресурсов бассейна Азовского моря* / [под ред. И.И. Воровича]. – М.: Наука, 1981.
27. *Современное состояние экосистемы Ладожского озера* / Под ред. В.В. Меншуткина. – Л.: Наука, 1987.
28. УГОЛЬНИЦКИЙ Г.А. *Управление эколого-экономическими системами*. – М.: Вузовская книга, 1999.
29. УГОЛЬНИЦКИЙ Г.А. *Иерархическое управление устойчивым развитием*. – М.: Физматлит, 2010.
30. DOCKNER E., JORGENSEN S., LONG N.V. AND ETC. *Differential Games in Economics and Management Science*. – Cambridge University Press, 2000.
31. *Ladoga and Onego – Great European Lakes. Observation and Modelling* / [Rukhovets L., Filatov N. (Eds.)]. – Springer-Praxis, 2010.
32. LONG N.V. *A Survey of Dynamic Games in Economics*. – World Scientific Publishing Company, 2010.

УДК 330.15

ББК 65.28

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МОДЕЛЕЙ ЭКОСИСТЕМ БОЛЬШИХ ОЗЕР ДЛЯ ПОЛУЧЕНИЯ ОЦЕНОК АССИМИЛЯЦИОННОГО ПОТЕНЦИАЛА

Астраханцев Г. П.¹, Меншуткин В. В.², Минина Т. Р.³
(ФГБУН Санкт-Петербургский экономико-
математический институт РАН, Санкт-Петербург)

Комплекс математического моделирования озерных экосистем (на примере Ладожского и Онежского озер) под руководством д.ф.-м.н., профессора Л.А. Руховца создавался более 25 лет. Результаты опубликованы в отечественных и зарубежных журналах и монографиях. Разработка экономических механизмов управления водопользованием для больших стратифицированных озер – продолжение этих исследований. В статье рассмотрены возможности использования комплекса моделей для количественных и экономических оценок ассимиляционного потенциала экосистем крупнейших пресноводных водоемов.

Ключевые слова: экономическая оценка; экосистемы озер; ассимиляционный потенциал; водные ресурсы; рациональное природопользование.

¹ Геннадий Петрович Астраханцев, доктор физико-математических наук, профессор (astr@emi.nw.ru; astrg@mail.ru).

² Владимир Васильевич Меншуткин, доктор биологических наук, профессор (vvt@emi.nw.ru).

³ Татьяна Ростиславовна Минина, кандидат технических наук (minina@emi.nw.ru; trminina@yandex.ru).

1. Использование моделей для решения задач сохранения водных ресурсов

Одним из важнейших факторов сохранения самой биосферы и обеспечения её устойчивости является ассимиляционный потенциал (АП) природной среды. АП природной среды – это ее самовосстановительная способность по отношению к поступлению в природную среду вещества и энергии в результате хозяйственной деятельности. Фактически АП является свойством экологических систем «сопротивляться» внешним воздействиям. Термин АП как природный ресурс в отечественной литературе эколого-экономической тематики появился в работах сотрудников Института проблем рынка [4, 6].

АП природной среды является едва ли не важнейшей частью национального богатства каждой страны [17]. Следует подчеркнуть, что АП природной среды России является одним из весьма значимых факторов поддержания устойчивости всей биосферы [14], так как огромная территория, значительная часть которой покрыта лесом и другой растительностью, играет важную роль в депонировании парниковых газов на планете.

АП представляет собой особый вид природного ресурса и как ограниченный природный ресурс нуждается в экономической оценке. Экономическая оценка АП важна как сама по себе, так и в рамках общей оценки национального богатства России [6].

Задача экономической оценки АП многоаспектна. Использование АП, как и других природных ресурсов, обуславливает возникновение ренты. В этой связи важными являются права собственности на данный природный ресурс, т.е. на АП. Поскольку АП – национальное достояние, то собственником логично должна быть РФ, а распоряжение может быть передано в регионы [6].

Для получения экономической оценки АП необходимо измерить его количественно. Таким образом, возникает задача количественного измерения АП. Сложность измерения АП способствует широкомасштабному нерациональному использованию этого природного ресурса. Отсутствие количественной оценки АП фактически не позволяло ввести институт собствен-

ности на этот природный ресурс. В такой ситуации «пользователи» АП (например, те, кто сбрасывает загрязняющие вещества в водоём) фактически присваивают АП. Это приводит к неконтролируемому поступлению загрязнений в окружающую среду, что может создать угрозу превращения АП из возобновляемого ресурса в невозобновляемый [6, 17].

В рамках задачи экономической оценки АП природной среды мы рассмотрим важную задачу экономической оценки АП экосистем крупнейших пресноводных озёр. Хорошо известно, что состояние озера и качество воды в нем в самой большой степени определяется состоянием его экосистемы. По этой причине задача сохранения водных ресурсов водоема равнозначна задаче сохранения «здоровья» экосистемы водоема. Рассмотрим проблемы сохранения водных ресурсов великих озёр на основе объединения экологического и экономического подхода к решению проблемы.

Применительно к водным ресурсам АП локализован по водным объектам. В качестве количественной оценки представляется естественным принять систему лимитов (по ингредиентам) на объемы сброса загрязняющих веществ и биогенов (ЗВ и Б), соблюдение которых сохраняет устойчивость водных экосистем озёр. Задача определения этих лимитов достаточно сложна. Для её решения требуется разнообразная информация о водных объектах и необходимы модели гидротермодинамики и модели экосистем. Здесь ещё уместно отметить, что желательно для получения количественной оценки АП использовать модель сукцессии фитопланктона. Дело в том, что получение количественной оценки состоит в проведении вычислительных экспериментов при различных уровнях нагрузки по ингредиентам. Фактически для каждого из ингредиентов в вычислительных экспериментах воспроизводится круглогодичное функционирование экосистемы и в качестве количественной оценки выбираются такие величины максимальные значения ингредиентов, при которых состояние экосистемы озера оценивается как олиготрофное. Иначе говоря, количественные оценки АП представляют собой границы допустимой антропогенной нагрузки, позволяющей сохранять озеро в олиготрофном состоянии. На

практике задача снижения антропогенной нагрузки может оказаться экономически неразрешимой из-за огромных затрат на соответствующие мероприятия, поэтому в качестве допустимых значений антропогенной нагрузки могут быть взяты величины, при которых озеро находится в слабо мезотрофном состоянии. Подчеркнем ещё раз, что для получения допустимых значений антропогенной нагрузки необходимо использовать модели гидротермодинамики и модели экосистем озер.

Следует отметить, что большие озера обладают способностью ассимилировать весьма значительные количества загрязняющих веществ и биогенов без ущерба для устойчивого состояния своих экосистем. Рассмотрим проблему получения оценок АП на примере Ладожского и Онежского озер.

2. Количественная оценка АП¹

Как уже отмечалось, не избежало развития процесса антропогенного эвтрофирования одно из самых северных среди великих озер мира – Ладожское озеро. Ладожское озеро – одно из самых изученных озер мира. Для него имеются многолетние ряды наблюдений за состоянием экосистемы озера и за антропогенной нагрузкой [12–13]. Это позволило лимнологам выделить в составе антропогенной нагрузки основные ингредиенты, определяющие в значительной степени возможные изменения в состоянии экосистемы озера. Выбор в первую очередь биогенов для оценки АП по их сбросу в озера объясняется ролью биогенов в функционировании экосистем. Избыток биогенов, особен-

¹ Неэкономическая оценка АП Ладожского озера проводилась следующим образом. Рассматривается нагрузка, распределенная по озеру как по пространству, так и по времени в течение года, более или менее близкая к реальности. Далее с помощью комплекса моделей строится периодическое решение описания состояния экосистемы. Счет ведется как минимум на 15 лет, в течение которых, как следует из вычислительных экспериментов, складывается периодический круглогодичный режим. Для сокращения времени счета в моделях предусмотрено агрегирование сетки для первых лет и согласованный переход далее на более подробную сетку.

но избыток фосфора, привел Ладожское озеро к началу 60-х годов на грань перехода из мезотрофного состояния в эвтрофное [13]. По этой причине снижение фосфорной нагрузки – это одна из важнейших задач для сохранения его водных ресурсов, в том числе и для Онежского озера. Следует отметить, что процесс антропогенного эвтрофирования Онежского озера находится в начальной стадии.

В ходе исследования процесса антропогенного эвтрофирования Ладожского озера сотрудниками Института озероведения РАН была поставлена задача об определении уровня допустимой биогенной, прежде всего фосфорной, нагрузки. Было определено, что нагрузка на уровне $4000 \text{ т P}_{\text{total}}/\text{год}$ может быть принята за допустимую [19]. С помощью модели В.В. Меншуткин и О.Н. Воробьева [15] показали, что при нагрузке, равной $4000 \text{ т P}_{\text{total}}/\text{год}$, Ладожское озеро сохраняется в слабо мезотрофном состоянии. В этой связи нагрузка на уровне $4000 \text{ т P}/\text{год}$ была определена как приемлемая. В последующих работах [2, 22] эти результаты были подтверждены. Здесь уместно отметить, что фосфорная нагрузка на Ладожское озеро до начала процесса антропогенного эвтрофирования в 1962 году составляла $2430 \text{ т P}_{\text{total}}/\text{год}$. При этой нагрузке озеро находилось в олиготрофном состоянии.

В вычислительных экспериментах с помощью модели сукцессии фитопланктона была получена оценка АП по сбросу фосфора для Ладожского озера, равная $2500 \text{ т P}_{\text{total}}/\text{год}$ [23]. Для Онежского озера с помощью модели, в которой присутствуют два биогена – азот и фосфор, получены оценки АП по сбросу фосфора – $800 \text{ т P}_{\text{total}}/\text{год}$ и по сбросу азота – $15000 \text{ т N}_{\text{total}}/\text{год}$ [28].

3. Об экономической оценке АП

Поскольку вопрос о получении экономических оценок для АП выходит, в принципе, за пределы рассмотрений данной работы, наши рассуждения по этой тематике будут сформулированы с возможными разъяснениями. Здесь также уместно отметить, что существуют подходы к получению экономических оценок АП, в которых наряду с экономико-математическими моделями используются модели экосистем озер [2, 7, 23].

Чтобы получить экономические оценки АП, определим, что будем понимать под экономической оценкой. Для каждого ЗВ и/или Б экономическую оценку определим как минимальный размер платежа за сброс 1 т ЗВ и/или Б при условии, что суммарное поступление в водоем данного ингредиента не превышает количественной оценки АП экосистемы озера по этому ингредиенту и при этом каждое предприятие, сбрасывающее ЗВ и/или Б в озеро, оптимизировало свою прибыль при заданных экономических и экологических ограничениях.

Для получения экономической оценки предложен новый итерационный алгоритм, основанный на использовании созданной авторами ранее экономико-математической модели функционирования предприятия-водопользователя. Алгоритм позволяет «методом проб и ошибок» получить экономическую оценку АП по каждому ЗВ и Б.

Этот алгоритм состоит в следующем [24]:

- 1) эксперт (или орган, принимающий решение) устанавливает лимиты на сброс ЗВ и Б отдельно для каждого предприятия на водосборе озера и единые ставки платежей за сброс 1 т ЗВ и Б;
- 2) с помощью экономико-математической модели для каждого предприятия при заданных лимитах и ставках платежей путем решения оптимизационной задачи определяются объёмы сброса ЗВ и Б и, следовательно, в итоге определяется общая антропогенная нагрузка на водоем по выделенному набору ингредиентов;
- 3) если нагрузка на водоем по некоторым ингредиентам превосходит количественные оценки АП, ставки платежей увеличиваются и процесс продолжается;
- 4) если по всем ингредиентам нагрузка не превосходит количественной оценки АП, то ставки платежей уменьшаются и процесс продолжается;
- 5) правило окончания процесса представляется очевидным.

Основой этого алгоритма служит экономико-математическая модель предприятия водопользователя. В подобных моделях функционирование предприятий описывается с помощью так называемых производственных функций [10]. Такие модели позволяют решить задачу оптимизации прибыли

предприятия при заданных регламентах водопользования (лимитах на сброс, ставках платежей за сброс, нормативах на концентрации ЗВ и Б) и известных технологических ограничениях (объемы и концентрации ЗВ и Б на единицу выпускаемой продукции). Результатом решения задачи оптимизации, в частности, будут объемы сброса ЗВ и Б. Предложенный алгоритм позволяет определить такие минимальные ставки платежей, при которых объемы сброса всей совокупности предприятий-водопользователей данного водоема или не превышают установленные количественные оценки АП по всей совокупности ЗВ и Б, или не превышают величин, которые экономически и социально приемлемы в качестве оценок АП на момент получения оценок.

Фосфорная нагрузка на Ладожское озеро в период 1996–2005 гг. составляла в среднем 3580 т Р/год. В период 2006–2011 гг. поступление фосфора в Ладожское озеро с речным притоком составляет 3000–5000 т Р/год в зависимости от водности года [21]. В этой работе приводятся данные, согласно которым озеро продолжает находиться в слабо мезотрофном состоянии.

Проведенные нами вычислительные эксперименты показали, что для ограничения сброса фосфора в Ладожское озеро до уровня, не превышающего АП, необходимо увеличить ставки платежей по сравнению с данными из [11] не менее чем на порядок [24]. Возможен, вероятно, другой подход к получению экономической оценки АП, основанный на моделировании экономической деятельности на всей территории водосбора озера. К сожалению, этот подход трудно реализуем, так как для его реализации необходима информация о функционировании всей совокупности предприятий водосбора, хотя бы при агрегировании в отраслевом разрезе [23].

Наконец, возможен подход к оценке АП, основанный на таком рыночном механизме, как продажа на аукционах разрешений (квот) на сброс ЗВ и Б, подобно тому, как это делается с квотами на выбросы парниковых газов. Все эти подходы позволяют согласовывать экономические интересы предприятий-водопользователей с интересами уполномоченного государ-

ством органа по охране природной среды в тех случаях, когда использование полученных количественных оценок АП не представляется возможным по соображениям экономического или социального характера.

Вкратце опишем механизм торговли квотами на выброс загрязняющих веществ (ЗВ) для решения природоохранных проблем сохранения экологии глубоководных озер (Ладожского озера) в сочетании с экономикой региона. Рассматриваемый рынок является по сути дела монополистическим (один продавец, много покупателей). Объединение администраций региона на основе полученной оценки ассимиляционного потенциала (АП) предлагает на один год предприятиям водопользователям подать функции предложений на аукцион. Одновременно и независимо они сообщают аукционеру свою заявку: квоты на количество разных загрязняющих веществ и цены за единицу загрязняющего вещества. По некоторым правилам (модель аукциона) происходит аукцион, в результате которого вырабатывается равновесная цена для данного ЗВ, одинаковая для всех предприятий. При некоторых принципах рационирования тем самым осуществляется баланс между спросом (величиной ассимиляционного потенциала) и предложениями. Задача аукциона – получение максимальной прибыли.

Это основная часть моделирования. Предполагаем, что предприятия подавали заявки, решая свою проблему получения максимальной чистой прибыли. Привлекая ранее созданные нами модели поведения предприятий в зависимости от многих параметров (в частности от расходов на очистку), можно усложнять моделирование в следующем направлении: учитывая произведенный за год ущерб экономики региона. Для этого вводится понятие дохода региона. Под доходом региона имеется в виду сумма дохода аукционера и всех выигрышей предприятий-водопользователей. При этом под выигрышем предприятия понимается разность между доходом предприятия, полученным при назначенных аукционером ценах и квотах, и доходом, ожидавшимся предприятием при подаче заявки, т.е. в некотором смысле нереализованный доход года. Такое расширение моделирования позволяет формировать состояние региона с учетом

равновесной цены по Нэшу (цена, при которой доход региона максимизируется при всевозможных результатах аукциона).

Это равновесное состояние можно найти при эволюционном моделировании. Для этого, считая, что известны производственные функции предприятий, можно вводить на следующий год некоторые изменения (рационарирование правил аукциона) в проведении аукционов, для того чтобы достичь равновесное состояние Нэша. При этом заметим, что допускается усложнение рынка: разрешается торговля нереализованными частями полученных квот прошлого года – рынок перестает быть монополистическим.

Таким образом, модель рыночных отношений позволяет получить экономическую оценку ассимиляционного потенциала, оценить отклонения заявочных предложений от результатов аукциона, исследовать изменение равновесных состояний Нэша в зависимости от формы проведения аукциона.

4. О возможности «оздоровления» состояния экосистемы Ладожского озера

Как уже отмечалось, с начала 60-х годов Ладожское озеро подверглось антропогенному эвтрофированию из-за роста фосфорной нагрузки [1], которая к началу 80-х годов выросла почти в 3,5 раза от 2430 т Р/год до 8100 т Р/год. Принятые меры привели к снижению фосфорной нагрузки, составившей в период 1984–1995 гг. в среднем 6040 т Р/год, а в следующий период 1996–2005 гг. она составила 3580 т Р/год. Здесь приведены данные из работ [12, 16, 19, 20].

Снижение фосфорной нагрузки привело к 1995 году к некоторому улучшению состояния экосистемы озера. При этом в соответствии со снижением фосфорной нагрузки несколько снизилась и продукция фитопланктона. Однако в работе Н.А. Петровой с соавторами [16] было отмечено, что дальнейшее существенное снижение фосфорной нагрузки после 1995 года не привело, вопреки ожиданиям, к снижению продукции фитопланктона. При этом фактически оказалось, что изменение среднелетних значений биомассы в период 1996–2005 гг.

практически находится в тех же пределах, что и ее изменения в предыдущий период 1984–1995 гг. [20], когда фосфорная нагрузка была существенно выше.

Объяснению этого явления, основанному на анализе данных наблюдений, как раз и посвящена работа [16]. Одной из основных причин указанного явления Н.А. Петрова и ее соавторы считали увеличение скорости внутриводоемного оборота фосфора, которое авторы работы связывали с увеличением численности бактериопланктона и водных грибов (организмов-деструкторов). Соглашаясь в целом с их аргументацией, нельзя не отметить, что доказательство справедливости предложенных интерпретаций и выводов не во всех частях подтверждено результатами прямых измерений. Дело в том, что основанные на данных наблюдений количественные оценки для огромного озера по многим причинам весьма приблизительные.

В этой связи с помощью методов математического моделирования в уже упомянутой работах [25–27] воспроизведен механизм ускорения внутриводоемного оборота фосфора и получены результаты, объясняющие фактический ход трансформации экосистемы Ладожского озера. Для воспроизведения круглогодичного функционирования экосистемы Ладожского озера использовалась модель сукцессии фитопланктона [2, 29].

Для того чтобы ускорить круговорот фосфора в рамках модели, авторы изменили блок, описывающий процесс деструкции детрита и растворенного в воде органического вещества. Как известно, основными деструкторами в экосистеме озера являются бактериопланктон и водные грибы. В модели они не представлены. Деструкция в блоке описывается уравнениями для детрита DP , для растворенного в воде органического вещества DOP и для минерального фосфора. В модели, как и в природе, детрит разлагается на две субстанции: растворенный в воде минеральный фосфор и растворенное в воде органическое вещество. Эта трансформация регулируется двумя разными функциями от температуры воды. Регенерация минерального фосфора из растворенного органического вещества представлена в модели предельно простой линейной зависимостью. Изме-

нения коэффициентов в конструкции блока были выбраны в ходе вычислительных экспериментов [27].

Вычислительные эксперименты состояли в воспроизведении круглогодичного функционирования экосистемы Ладожского озера с помощью модели сукцессии как со «старым» блоком деструкции, так и с «новым» при двух вариантах фосфорной нагрузки: 2430 т Р/год и 4000 т Р/год.

Основной результат этих расчетов: при «новых» коэффициентах деструкции биомасса суммарного фитопланктона выше, чем при «старых» коэффициентах для обеих нагрузок. Объяснение этого явления основано на том, что при «новых» коэффициентах деструкции концентрация *DOP* в эпилимнионе (приповерхностной части водного тела озера) уменьшилась при обеих нагрузках. Это же имеет место для детрита. Таким образом, происходит перераспределение потоков фосфора внутри экосистемы: для развития фитопланктона дополнительное количество растворенного в воде минерального фосфора высвобождается за счет ускорения деструкции растворенного в воде органического вещества *DOP* и детрита *DP*. При этом *DOP* – это наиболее консервативная фракция в воде озера, включающая фосфор глинистых комплексов.

Здесь уместно подчеркнуть, что результаты моделирования подтверждают заключение работы [16] о вовлечении во внутриозерный круговорот значительной части растворенного в воде органического вещества *DOP*.

Достоверность проведенных вычислительных экспериментов можно было бы поставить под сомнение, если бы в дискретной модели не выполнялся точно закон сохранения (изменения) для общего фосфора. Наличие у дискретной модели такого фундаментального свойства гарантирует то, что общее количество используемого фосфора определяется только обменом через границы водоема и тем, что внутри водного тела нет ложных источников и стоков вещества.

Результаты моделирования позволяют сделать вывод, что изменился АП экосистемы озера по сбросу фосфора. Для получения ответа на вопрос, насколько изменился АП по сбросу фосфора, были проведены вычислительные эксперименты по

модели сукцессии как со «старым» блоком деструкции, так и с «новым» [27]. Рассматривалась годовая динамика сырой биомассы суммарного фитопланктона при четырех нагрузках 4000 т Р/год, 2430 т Р/год, 1800 т Р/год и 1500 т Р/год по модели с «новым» блоком деструкции и по её прежней версии. Максимальное значение сырой биомассы при нагрузке 2430 т Р/год приблизительно равно 1,2 мг/л. Примерно такую же величину составляет максимальное значение биомассы при нагрузке 1800 т Р/год. При этом следует ещё отметить, что среднегодовое значение биомассы при нагрузке 1800 т Р/год превышает среднегодовое значение биомассы при нагрузке 2430 т Р/год. Это означает, что АП по сбросу фосфора в Ладожское озеро снизился не менее чем на четверть (на 630 т Р/год). Отметим ещё, что при нагрузке 4000 т Р/год до изменения роли организмов-деструкторов в экосистеме максимальные значения биомассы не превышали 2 мг/л, тогда как при нагрузке 4000 т Р/год максимальное значение больше примерно на 15%, и ещё больше среднегодовое значение. Как показывают эксперименты в работе [27], при нагрузке 4000 т Р/год уже не представляется возможным считать, что озеро находится в слабо мезотрофном состоянии.

Таким образом, нами получена новая оценка АП по сбросу фосфора в Ладожское озеро, равная 1800 т Р/год. Это означает, что только снижение нагрузки до этого уровня возвратит озеро в олиготрофное состояние. Однако, несмотря на определенную условность проведенных расчетов, реально вернуть озеро в олиготрофное состояние представляется невозможным. Дело в том, что по литературным данным в настоящее время естественная фосфорная нагрузка на Ладожское озеро находится в пределах 2000–2200 т Р/год. Это означает, что снижение нагрузки до уровня АП, т.е. ниже уровня естественной нагрузки, экономически нереализуемо.

Подводя итог разделу о возможности «оздоровления» больших стратифицированных озер, подвергшихся антропогенному эвтрофированию, приходится признать такую возможность маловероятной.

Проблема «оздоровления» озер непосредственно связана с проблемой устойчивого развития. Во многих работах, посвященных проблемам сохранения природной среды (ландшафтов, лесов, водных объектов суши, мирового океана, тундры и т.д.), распространены представления о том, что снижение антропогенной нагрузки является универсальным средством сохранения и восстановления состояния природной среды, имевшего место в период естественного развития. Анализ многих предложений по переходу к устойчивому развитию показывает, что они исходят из таких же предположений, что снижение антропогенной нагрузки обеспечит улучшение или стабилизацию состояния природной среды. Проведенные нами исследования показывают, что этого может не быть для великих озер мира умеренных широт северного полушария, к числу которых принадлежит Ладожское озеро.

В заключение отметим, что снижение АП по сбросу фосфора, если учесть, что в принципе АП является возобновляемым природным ресурсом, приводит к ежегодным экономическим потерям. Следует также отметить, что:

- измерение АП необходимо для определения регламентов водопользования (определения лимитов на сброс ЗВ и Б);
- предложенные алгоритмы определения размеров платежей за сброс загрязнений могут быть использованы для установления регламентов водопользования, обеспечивающих сохранение водных ресурсов;
- снижение антропогенной нагрузки остается важной задачей водопользования, однако для снижения существует естественная нижняя граница. Попытки же повышения степени очистки ведут к росту затрат;
- одной из важнейших задач сохранения водных ресурсов является создание интегрированных систем управления водопользованием, обеспечивающих информационную поддержку органов природоохраны (структур Министерства природных ресурсов РФ, соответствующих структур органов власти субъектов РФ и т.п.) при принятии решений, влияющих на состояние водных объектов, созданных систем, могущих оказать содействие в решении научных и практических задач по согласованию интересов развития

экономики региона с интересами природоохраны и населения, по обеспечению качества среды обитания, систем, обеспечивающих возможность моделирования и прогнозирования последствий принимаемых решений [8–9].

Литература

1. *Антропогенное эвтрофирование Ладожского озера* / Под ред. Н.А. Петровой. – Л.: Наука, Ленинградское отделение. 1982. – 304 с.
2. АСТРАХАНЦЕВ Г.П., МЕНШУТКИН В.В., ПЕТРОВА Н.А. И ДР. *Моделирование экосистем больших стратифицированных озер*. – СПб.: Наука. 2003. – 363 с.
3. ВОЛОСАСТОВ С.Э., ГУСЕВА В.Н., СЕМЕНЦОВ В.И. И ДР. *Моделирование эколого-экономических взаимодействий в задачах интегрированного управления водными ресурсами региона* // Интегрированное управление водными ресурсами: математические модели и информационные технологии. Часть 1. Препринт [под ред. Л.А. Руховца]. – СПб.: Нестор-История, СПб ЭМИ РАН, 2007. – С. 28–48.
4. ГОФМАН К.Г., РЮМИНА Е.В. *«Кредитные отношения» общества и природы* // Экономика и математические методы. – 1994. – Т. 30. – Вып. 2. – С. 17–32.
5. ГУСЕВ А.А. *Ассимиляционный потенциал окружающей среды в системе прав собственности на природные ресурсы* // Экономика и математические методы. – 1997. – Т. 33 – №3. – С. 5–15.
6. ГУСЕВ А.А. *Современные экономические проблемы природопользования*. – М.: Международные отношения, 2004. – 208 с.
7. ГУСЕВ А.А., МОТКИН Г.А., РЮМИНА Е.В. *Экологические императивы экономической стратегии* // В «Россия в глобализирующемся мире: Политико-экономические очерки» [под ред. Д.С.Львова]. – М.: Наука. 2004. – 740 с.
8. *Интегрированное управление водными ресурсами Санкт-Петербурга и Ленинградской области. Опыт создания системы поддержки принятия решений* / Под ред.

- А.Ф. Алимова, Л.А. Руховца и М.М. Степанова. – СПб.: СПб Научный центр РАН, 2001. – 420 с.
9. *Интегрированное управление водными ресурсами: математические модели и информационные технологии.* – Часть 1. Препринт / Под ред. Л.А. Руховца. – СПб.: Нестор-История, СПб ЭМИ РАН, 2007. – 63 с.
 10. КЛЕЙНЕР Г.Б. *Производственные функции.* – М.: Финансы и статистика, 1986. – 239 с.
 11. КОЧАРЯН А.Г., САФРОНОВ К.И. И ДР. *Охрана водных ресурсов в России от загрязнений: современное состояние и перспективы* // Инженерная экология. – 2006. – №4. – С. 3–16.
 12. *Ладожское озеро – критерии состояния экосистемы* / Под ред. Н.А. Петровой, А.Ю. Тержевика. – СПб.: Наука, 1992. – 326 с.
 13. *Ладожское озеро – прошлое, настоящее и будущее* / Под ред. В.А. Румянцева. В.Г. Дробковой. – СПб.: Наука, 2002. – 327 с.
 14. ЛЬВОВ Д.С. *Экономика и жизненный мир человека* // Российская газета. – 2006. – №105 от 19 мая 2006. – С. 21.
 15. МЕНШУТКИН В.В., ВОРОБЬЕВА О.Н. *Модель экосистемы Ладожского озера* // Современное состояние экосистемы Ладожского озера. – Л.: Наука, Ленинградское отделение, 1987. – С. 187–200.
 16. ПЕТРОВА Н.А., ИОФИНА И.В., КАПУСТИНА Л.Л. И ДР. *Антропогенное эвтрофирование Ладожского озера (этапы трансформации экосистемы, 1975–2004 гг.)* // Экологическая химия. – 2005. – Т. 14. – Вып. 4. – С. 209–234.
 17. *Путь России в XXI век* / Под ред. Д.С. Львова. – М.: Экономика, 1999. – 794 с.
 18. РАСПЛЕТИНА Г.Ф., ГУСАКОВ Б.Л. *Применение прямого и косвенного метода расчета биогенной нагрузки и концентрации веществ в воде Ладожского озера* // Антропогенное эвтрофирование Ладожского озера. – Л.: Наука, 1982. – С. 222–242.
 19. РАСПЛЕТИНА Г.Ф., СУСАРЕВА О.М. *Физико-географическая и экономико-географическая характери-*

- стика водосборного бассейна Ладожского озера // Оценка экологического состояния рек бассейна Ладожского озера по гидрохимическим показателям и структуре гидробиоценозов. – СПб.: ИНОЗ РАН, 2006. – С. 6–11.*
20. РУМЯНЦЕВ В.А., ДРАБКОВА В.Г. *Экологическая диагностика состояния Ладожского озера // Водные ресурсы Европейского Севера России. – Петрозаводск: КарНЦ РАН, 2006. – С. 110–126.*
 21. РУМЯНЦЕВ В.А., КОНДРАТЬЕВ С.А., ПОЗДНЯКОВ Ш.Р. И ДР. *Основные факторы, определяющие функционирование водной системы Ладожское озеро – река Нева – Невская губа – восточная часть Финского залива в современных условиях // Известия РГО. – СПб.: Наука, 2012. – Т. 144. – Вып. 2. – С. 55–69.*
 22. РУХОВЕЦ Л.А., АСТРАХАНЦЕВ Г.П., АНДРЕЕВ В.А. *Водные ресурсы и устойчивое развитие (региональный аспект) // Экономико-математические исследования: математические модели и информационные технологии. V. Анализ процессов глобализации [под ред. А.А. Корбуца, С.Л. Печерского и Л.А. Руховца]. – 2006. – С. 134–176.*
 23. РУХОВЕЦ Л.А., АСТРАХАНЦЕВ Г.П., МИНИНА Т.Р. И ДР. *Оценка возможных изменений в экосистеме Ладожского озера в 21 веке под влиянием антропогенных и климатических факторов // Водные ресурсы. – 2006. – Т. 33. – №3. – С. 367–382.*
 24. РУХОВЕЦ Л.А., ГУСЕВА В.Н., АСТРАХАНЦЕВ Г.П. И ДР. *Использование рыночных механизмов сохранения водных ресурсов Великих озер Европы // Экономико-математические исследования: математические модели и информационные технологии. VI. – 2007. – СПб.: Нестор-история. – С. 295–310.*
 25. РУХОВЕЦ Л.А., ПЕТРОВА Н.А., МЕНШУТКИН В.В. И ДР. *Моделирование трансформации экосистемы Ладожского озера при снижении фосфорной нагрузки // Доклады Академии наук. – 2010. – Т. 434. – №5. – С. 684–687.*
 26. РУХОВЕЦ Л.А., АСТРАХАНЦЕВ Г.П., МИНИНА Т.Р. *Экономические механизмы сохранения водных ресурсов*

- больших стратифицированных озер и их использование // Проблемы безопасности в водохозяйственном комплексе России. – Краснодар: ООО «Авангард плюс». 2010. – С. 393–403.*
27. РУХОВЕЦ Л.А., ПЕТРОВА Н.А., МЕНШУТКИН В.В. И ДР. *Исследование реакции экосистемы Ладожского озера на снижение фосфорной нагрузки // Водные ресурсы. – 2011. – Т. 38. – №6. – С. 740–752.*
28. *Ladoga and Onego – Great European Lakes. Observation and Modelling / Rukhovets L., Filatov N. (Eds.). – Springer Praxis, 2010. – 302 p.*
29. RUKHOVETS L.A., ASTRAKHANTSEV G.P., MENSHUTKIN V.V. ETC. *Development of Lake Ladoga Ecosystem Models: Modelling of the Phytoplankton Succession in the Eutrophication Process. I. // Ecol. Modelling. – 2003. – V. 165. – No.1. – P. 49-77.*

ASSIMILATIVE CAPACITY ESTIMATE GENERATION USING MODELS OF GREAT LAKES' ECOSYSTEMS

Guennadiy Astrakhantsev, Institute for Economics and Mathematics at St.-Petersburg, Russian Academy of Sciences, St.-Petersburg, Doctor of Science, professor (astr@emi.nw.ru; astrg@mail.ru).

Vladimir Menshutkin, Institute for Economics and Mathematics at St.-Petersburg, Russian Academy of Sciences; St.-Petersburg, Doctor of Science, professor (vvm@emi.nw.ru).

Tatiana Minina, Institute for Economics and Mathematics at St.-Petersburg, Russian Academy of Sciences; St.-Petersburg, Cand. Sc. (minina@emi.nw.ru; trminina@yandex.ru).

Abstract: The mathematical modeling framework of lakes' ecosystems (with Ladoga and Onega lakes serving as examples) was developed for more than 25 years by Professor L.A. Rukhovets and his team with main results published in the leading Russian and worldwide scientific journals and monographs. Development of economic mechanisms of water use management for large stratified lakes is a natural extension of these studies. We consider the abilities of existing mathematical models for numeric estimates of assimilation capacity of the greatest freshwater lakes.

Keywords: economic evaluation; ecosystems of lakes; assimilative capacity; water resources; rational nature management.

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии Д.А. Новиковым*

*Поступила в редакцию 31.01.2015.
Опубликована 31.05.2015.*

УДК 32.81
ББК 519

МОДЕЛИ ПОРОГОВОГО КОЛЛЕКТИВНОГО ПОВЕДЕНИЯ В ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ ЭКОЛОГО-ЭКОНОМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

Бреер В. В.¹, Новиков Д. А.², Рогаткин А. Д.³
(ФГБУН Институт проблем управления РАН, Москва)

Рассматриваются модели «многопорогового» коллективного поведения агентов, принимающих бинарные решения. Общая схема анализа этих моделей применяется для трех задач управления эколого-экономическими системами: индивидуальных штрафов, индивидуальных и коллективных штрафов, а также стимулирования выделения экономическими агентами средств на природоохранную и/или природовосстановительную деятельность.

Ключевые слова: пороговое поведение, дискретная динамическая система, управление эколого-экономическими системами.

1. Введение

Начиная с классических работ М. Грановеттера [15] и Т. Шеллинга [22] значительное внимание исследователей моделей коллективного поведения концентрируется на ситуациях, в которых агенты, принимающие бинарные решения о своем «действии» или «бездействии», ориентируются на обстановку - число действующих или бездействующих оппонентов/«соседей» (см. обзор [2]). При этом ключевой характеристи-

¹ Владимир Валентинович Бреер, кандидат технических наук, с.н.с. ИПУ РАН (cogelet@gmail.com).

² Дмитрий Александрович Новиков, член-корреспондент РАН, заместитель директора ИПУ РАН (novikov@ipu.ru).

³ Андрей Дмитриевич Рогаткин, м.н.с. ИПУ РАН (andreyrogatkin@gmail.com).

кой агента является его порог, при превышении которого обстановкой агент изменяет свое поведение. Подобные модели успешно описывают эффекты конформного или антиконформного поведения как в терминах теории коллективного поведения, так и в терминах теории игр [11], и имеют множество областей приложений (социальные сети [1], управление толпой [12] и др. [2]).

Общая схема построения модели при этом такова. Сначала, исходя из содержательных интерпретаций моделируемых социально-экономических явлений или процессов, строятся целевые функции агентов. Затем ищутся наилучшие ответы агентов (зависимость их действий, максимизирующих соответствующую целевую функцию, от действий оппонентов), и, наконец, осуществляется переход к дискретной динамической системе, описывающей изменение во времени числа или доли действующих агентов (правая часть этой динамической системы определяется функцией распределения порогов агентов) – см. многочисленные примеры в [2].

Однако далеко не все реальные ситуации описываются простой моделью с одним порогом, определяющим, будет или нет агент действовать при заданной обстановке. То есть возникает необходимость расширения класса моделей порогового поведения за счет допущения наличия у каждого агента нескольких «порогов». Примерами являются ситуации, когда при малом числе действующих оппонентов агент ведет себя конформно, а при большом – антиконформно. Желательно также охватить и более широкий класс ситуаций – когда агент принимает решение «действовать» при условии, что доля его действующих оппонентов принадлежит заданному множеству значений.

Общая схема построения такого рода «многopороговых» моделей описана во втором разделе настоящей работы. Далее эти результаты применяются для разработки и исследования задач управления эколого-экономическими системами (разделы 3–5), в которых агенты принимают решения в условиях действия системы штрафов или поощрений за осуществление природоохранной и/или природовосстановительной деятельности.

В целом, настоящая работа обобщает модели порогового поведения на случай нескольких порогов, учитываемых при

принятии решений одним и тем же агентом. С другой стороны, приведенные ниже результаты можно рассматривать как расширение класса оптимизационных [7–9, 16, 23] и теоретико-игровых [5, 6, 9, 10, 13, 21] моделей управления эколого-экономическими системам, в том числе – механизмов управления последними [14].

2. Модели «многопорогового» коллективного поведения

Рассмотрим множество $N = \{1, \dots, n\}$ экономических агентов, принимающих бинарные решения $y_i \in \{0; 1\}$. Если агент выбирает единичное действие, то будем условно говорить, что он «действует», в противном случае (т.е. при выборе им нулевого действия) – «бездействует». Обозначим

$$Y = \sum_{j \in N} y_j, Y_{-i} = \sum_{j \neq i} y_j,$$

$y = (y_1, \dots, y_n)$, $y_{-i} = (y_1, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_n)$ – обстановка для i -го агента, $x = Y / n$ – доля действующих агентов, $x_{-i} = Y_{-i} / n$.

Целевая функция i -го агента $f_i(y_i, y_{-i})$ в общем случае зависит как от его собственных действий, так и от действий других агентов. Сравнение величин $f_i(0, y_{-i})$ и $f_i(1, y_{-i})$ позволяет найти наилучший ответ (BR – Best Response) агента на заданную обстановку (будем считать, что при прочих равных агент предпочтет действовать):

$$(1) \quad y_i = BR_i(y_{-i}) = \begin{cases} 1, & \text{если } f_i(1, y_{-i}) \geq f_i(0, y_{-i}), \\ 0, & \text{если } f_i(1, y_{-i}) < f_i(0, y_{-i}). \end{cases}$$

Ограничимся классом моделей коллективного поведения, в которых неравенства в правой части данного выражения определяются только числом действующих оппонентов рассматриваемого агента. Тогда наилучший ответ можно записать в терминах доли действующих агентов:

$$(2) \quad y_i = \begin{cases} 1, & \text{если } x_{-i} \in A_i, \\ 0, & \text{если } x_{-i} \notin A_i; \end{cases}$$

где $A_i \subseteq [0; 1]$ – конструктивно определяемое из (1) подмножество единичного отрезка.

Например, в пороговых моделях конформного поведения [3]

$$(3) \quad y_i = \begin{cases} 1, & \text{если } x_{-i} \geq \theta_i, \\ 0, & \text{если } x_{-i} < \theta_i; \end{cases}$$

где $\theta_i \in [0; 1]$ - так называемый порог конформности агента [2, 3, 11, 15]. Из выражения (3) следует, что, с помощью эмпирической функции распределения порогов конформности агентов

$$F_n(x) = \frac{1}{n} |\{i \in N : \theta_i < x\}|$$

можно выразить долю действующих агентов в равновесии Нэша x^* : $F_n(x^*) = x^*$ (см. [3]). Если известны теоретическая функция распределения порогов $F: [0; 1] \rightarrow [0; 1]$ и начальное значение $x^0 \in [0; 1]$ доли действующих агентов, то динамика их доли для достаточно большого количества агентов будет описываться следующей дискретной динамической системой:

$$(4) \quad x^k = F(x^{k-1}),$$

где $k = 1, 2, \dots$ - моменты времени.

В случае так называемого антиконформного поведения [11]

$$(5) \quad y_i = \begin{cases} 1, & \text{если } x_{-i} \leq \varphi_i, \\ 0, & \text{если } x_{-i} > \varphi_i; \end{cases}$$

где $\varphi_i \in [0; 1]$ - так называемый порог антиконформности агента. Из выражения (5) следует, аналогично случаю конформного поведения, что если известна эмпирическая функция распределения порогов антиконформности агентов

$$G_n(x) = \frac{1}{n} |\{i \in N : \varphi_i < x\}|,$$

то через нее можно выразить долю действующих агентов в равновесии Нэша. Если известны теоретическая функция распределения $G: [0; 1] \rightarrow [0; 1]$ и начальное значение $x^0 \in [0; 1]$ доли действующих агентов, то для достаточно большого количества агентов:

$$(6) \quad x^k = 1 - G(x^{k-1}),$$

Если $A_i = [\theta_i; \varphi_i]$, т.е. агенты демонстрируют поведение, которое условно назовем многопороговым (в данном случае – двухпороговым), то

$$(7) \quad y_i = \begin{cases} 1, & \text{если } x_{-i} \in [\theta_i; \varphi_i], \\ 0, & \text{если } x_{-i} \notin [\theta_i; \varphi_i]; \end{cases}$$

и легко убедиться, что динамика числа действующих агентов будет описываться следующей дискретной динамической системой:

$$(8) \quad x^k = F(x^{k-1}) - G(x^{k-1}).$$

Если множества $\{A_i\}$ имеют более сложную структуру (например, несвязны – см. (14) в разделе 4), то соответствующая динамическая система выписывается по аналогии.

Имея дискретную динамическую систему (4) или (6), или (8) и т.п., можно исследовать ее устойчивость, зависимость равновесных состояний от параметров модели и начальных условий и т.д. Проведя подобное исследование, можно ставить и решать, например, задачи параметрического управления – выбора допустимых значений управляемых параметров, обеспечивающих требуемую (или максимально близкую к требуемой) динамику системы.

Описанная общая схема построение моделей многопорогового коллективного поведения ниже применяется для трех задач управления эколого-экономическими системами (см. разделы 3–5).

3. Модель индивидуальных штрафов

Действия агентов в рамках рассматриваемых ниже задач управления эколого-экономическими системами содержательно будем интерпретировать как выделение или невыделение экономическими агентами фиксированных средств $\{c_i\}$ на природоохранную и/или природовосстановительную деятельность.

Предположим, что целевые функции агентов имеют вид

$$(9) \quad f_i(y) = H_i - c_i y_i - \gamma H_i \frac{1 - y_i}{N - Y} I(Y < \hat{Y}),$$

где H_i – доход i -го агента от его экономической деятельности; $I(\cdot)$ – функция-индикатор; γH_i – размер штрафа, который нала-

гается на агента в случае, когда он не выделяет средства на природоохранные мероприятия, и при этом общее число таких же агентов меньше порога $\hat{Y} \leq N$. Этот порог может быть либо достоверно известен агентам, либо они могут иметь о нем некоторые «вероятностные» представления (см. ниже). Величина $\gamma \geq 1$ может условно интерпретироваться как «сила штрафов», а величина $1 / (N - Y)$ - как «вероятность проверки» конкретного агента.

Вычислив наилучший ответ i -го агента, получим в терминах долей x_i действующих агентов:

$$(10) y_i = \begin{cases} 1, & \text{если } x_{-i} \in [1 - \gamma \rho_i; \hat{x}], \\ 0, & \text{иначе;} \end{cases}$$

где $\hat{x} = \hat{Y} / N \in [0; 1]$, $\rho_i = H_i / c_i$ (данную величину будем условно называть «рентабельностью» агента).

Величина $1 - \gamma \rho_i$ может интерпретироваться как порог конформности агента, а величина \hat{x} - как его порог антиконформности.

Пусть $F(\cdot)$ - функция распределения рентабельностей агентов, $G(\cdot)$ - функция распределения представлений агентов о значении величины \hat{x} , причем обе эти величины являются общим знанием среди агентов. Тогда из выражения (8) следует, что динамика доли агентов, выделяющих средства на природоохранную деятельность, при заданной начальной их доле x^0 , удовлетворяет соотношению

$$(11) x^k = H(x^{k-1}) = \max \left\{ 0; 1 - F\left(\frac{1 - x^{k-1}}{\gamma}\right) - G(x^{k-1}) \right\},$$

где $k = 1, 2, \dots$ - моменты времени.

Управляющими параметрами в данной модели могут быть значение «силы штрафов» γ и информированность агентов о значении порога \hat{x} .

Пример 1. Пусть $F(z) = \sqrt{z}$, $G(z) = z$, $x^0 = 0,1$. Тогда положением равновесия системы (11) является точка 0,25 (см. точку А на Рис. 1 и Рис. 2).

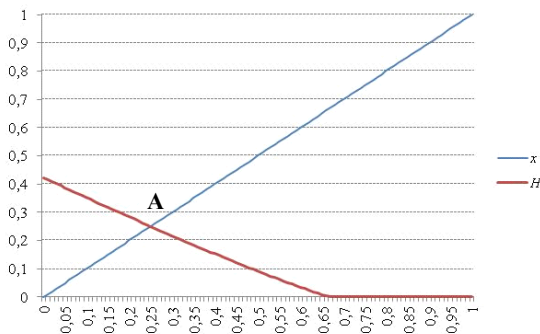


Рис. 1. Правая часть выражения (11) в примере 1 при $\gamma = 3$ и $G(z) = z$

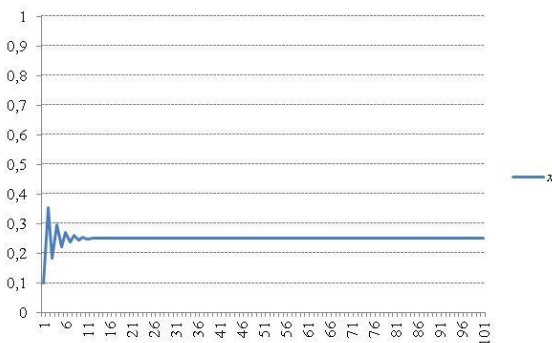


Рис. 2. Траектория системы (11) в примере 1 при $\gamma = 3$ и $G(z) = z$

Пусть теперь агенты достоверно знают значение $\hat{x} = 0,8$. Тогда при $\gamma = 1$ положением равновесия системы (11) является ноль. С ростом силы штрафов равновесное значение возрастает. Так, например, при $\gamma = 3$ оно равно примерно 0,67 (положением равновесия является точка А - см. Рис. 3 и Рис. 4). Отметим, что снижение для агентов неопределенности (раньше считалось, что они предполагают параметр \hat{x} равномерно распределенным на единичном отрезке, теперь же они точно знают его значение)

приводит к росту доли агентов, выбирающих единичные действия.

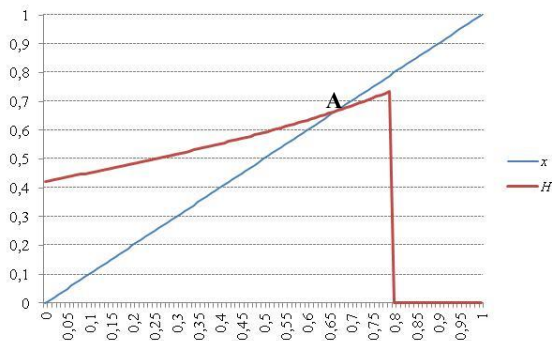


Рис. 3. Правая часть выражения (11) в примере 1 при $\gamma = 3$ и $\hat{x} = 0,8$

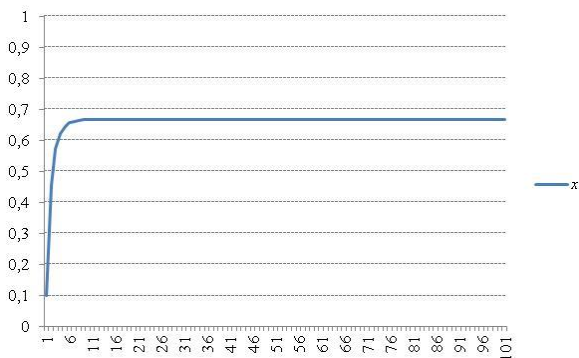


Рис. 4. Траектория системы (11) в примере 1 при $\gamma = 3$ и $\hat{x} = 0,8$

Существенное увеличение силы штрафов в рассматриваемой модели нецелесообразно – в системе возникает периодический режим (на Рис. 5 приведена траектория системы (11) при $\gamma = 6$). •

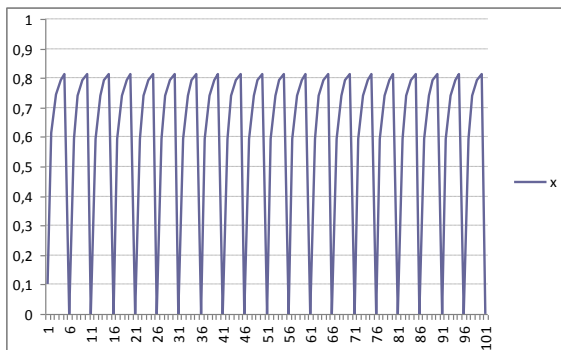


Рис. 5. Траектория системы (11)
в примере 1 при $\gamma = 6$ и $\hat{x} = 0,8$

Пример 2. Предположим, что рентабельности агентов распределены в соответствии с распределением Парето (выбор этого распределение объясняется его распространенностью в экономико-математических моделях и простотой идентификации – см. [17, 19]) с показателем α и минимальным значением ρ_0 , и агентам точно известно значение \hat{x} . Тогда выражение (11) примет вид

$$(12) \quad x^k = \begin{cases} \left(\frac{\gamma \rho_0}{1 - x^{k-1}} \right)^\alpha, & \text{если } x^{k-1} \leq \min \{1 - \gamma \rho_0; \hat{x}\}, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Пусть $\alpha = 2$, $\hat{x} = 0,8$, $\gamma = 1$, $\rho_0 = 0,3$. График правой части выражения (12) приведен на Рис. 8.

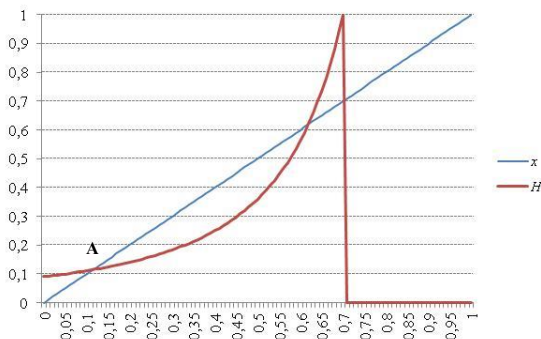


Рис. 6. Правая часть выражения (12) в примере 2

Положением равновесия динамической системы (12) при любых начальных значениях $x^0 \in [0; 1]$ является точка А на Рис. 6. •

4. Модель индивидуальных и коллективных штрафов

Модифицируем целевую функцию (9), записав ее в виде

$$(13) f_i(y) = H_i - c_i y_i - \gamma H_i \frac{1 - y_i}{N - Y} - (1 - y_i) \delta H_i I(Y < \hat{Y}),$$

где $\delta \geq 0$, а последнее слагаемое отражает потери агента от плохой экологической обстановки (которую для себя он может «улучшить» либо своими действиями, либо за счет действий других агентов).

Вычислив наилучший ответ i -го агента, получим

$$(14) y_i = \begin{cases} 1, & \text{если } x_{-i} \in [1 - \frac{\gamma \rho_i}{1 - \delta \rho_i}; \hat{x}] \text{ или } x_{-i} \geq \max\{\hat{x}; 1 - \gamma \rho_i\}, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Из выражения (14) следует, что динамика доли агентов, выделяющих средства на природоохранную деятельность, удовлетворяет соотношению

$$(15) x^k = \max \left\{ 0; 1 - F\left(\frac{1 - x^{k-1}}{\gamma}\right) - G(x^{k-1}) + F\left(\frac{1 - x^{k-1}}{\gamma + \delta(1 - x^{k-1})}\right) \right\}.$$

Задача управления в рамках рассматриваемой модели может заключаться в выборе «силы штрафов» γ и δ (мотивационное управление) и информированности агентов, например, о значении порога \hat{x} (информационное управление), обеспечивающих требуемую динамику системы.

Пример 3. Пусть $F(z) = \sqrt{z}$, $G(z) = z^4$, $\gamma = 2$, $\delta = 3$, $x^0 = 0,7$. График правой части выражения (15) и соответствующая траектория приведены на Рис. 7 и Рис. 8.

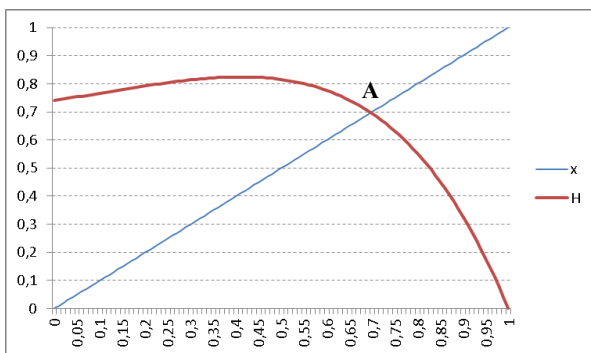


Рис. 7. Правая часть выражения (15) в примере 3 при $\gamma = 2$, $\delta = 3$

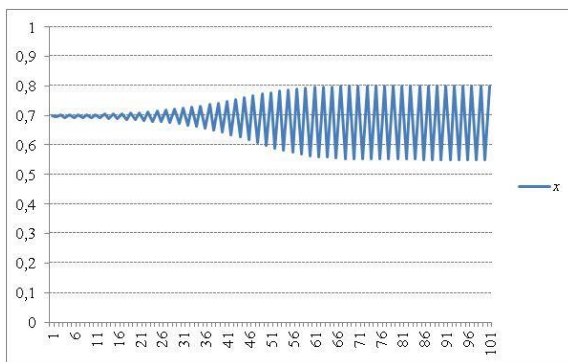


Рис. 8. Траектория системы (15) в примере 3 при $\gamma = 2$, $\delta = 3$

Выбор в условиях примера 3 минимально допустимого значения $\gamma = 1$ приводит к следующей траектории (видно, что система стабилизируется, но в ее равновесном состоянии доля агентов, выбирающих единичные действия, меньше, чем в начальном состоянии – см. Рис. 9).

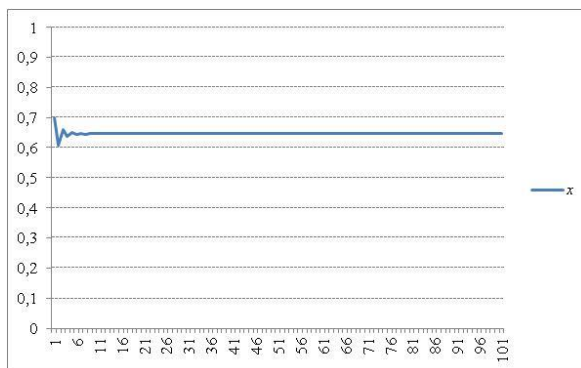


Рис. 9. Траектория системы (15) в примере 3 при $\gamma = 1$, $\delta = 3$

Выбор в рамках рассматриваемой модели $\gamma = 1$, $\delta = 11$, $\hat{x} = 0,9$ (см. Рис. 10) приводит к динамике, приведенной на Рис. 11 (равновесная доля агентов, выбирающих единичные действия, увеличивается по сравнению с предыдущим случаем).

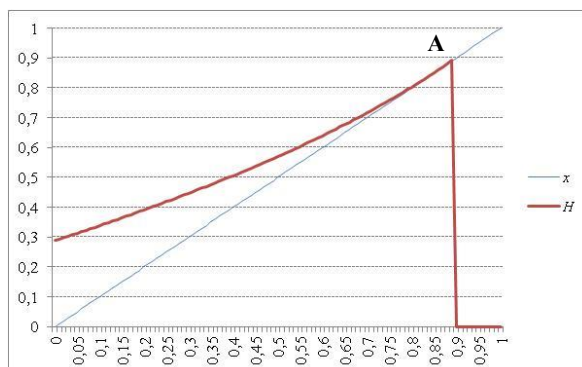


Рис. 10. Правая часть выражения (15)
в примере 3 при $\gamma = 1$, $\delta = 11$, $\hat{x} = 0,9$

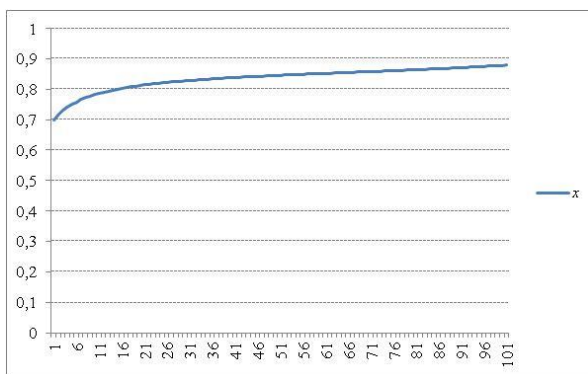


Рис. 11. Траектория системы (15)
в примере 3 при $\gamma = 1$, $\delta = 11$, $\hat{x} = 0,9$

5. Модель стимулирования природоохранной деятельности

Пусть целевая функция i -го агента имеет вид

$$(16) \quad f_i(y) = H_i - c_i y_i + y_i Q_0 I(Y \geq \hat{Y}) / Y,$$

где величина $Q_0 \geq 0$ может интерпретироваться как размер фонда поощрения за природоохранную деятельность, распределяемого поровну между теми агентами, которые выделили на нее и свои средства (см. также модели механизмов смешанного финансирования в [18, 20]).

Вычислив наилучший ответ i -го агента, получим:

$$(17) \quad y_i = \begin{cases} 1, & \text{если } x_{-i} \in [\hat{x}; c_i / Q], \\ 0, & \text{иначе;} \end{cases}$$

где $Q = Q_0 / n$ – «удельное поощрение».

Из выражения (17) следует, что динамика доли агентов, выделяющих средства на природоохранную деятельность, удовлетворяет соотношению

$$(18) \quad x^k = \max \{0; G(x^{k-1}) - P(Q x^{k-1})\},$$

где $P(\cdot)$ - функция распределения затрат агентов.

Задача управления в рамках рассматриваемой модели может заключаться в выборе «удельного поощрения» Q и, как и в двух предыдущих моделях, в выборе информированности агентов о значении порога \hat{x} , а также самого значения этого порога.

Пример 4. Пусть $P(z) = z^2$. График правой части выражения (18) и соответствующая траектория приведены на Рис. 12 и Рис. 13.

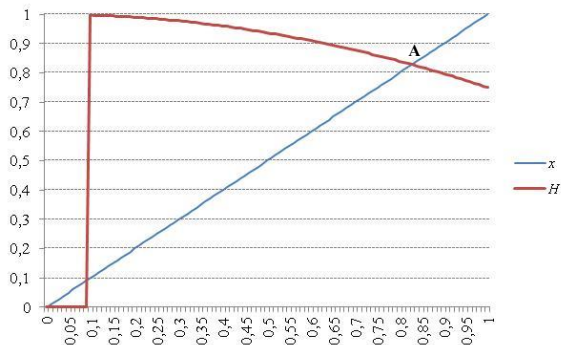


Рис. 12. Правая часть выражения (18) в примере 4 при $\hat{x} = 0,1$, $Q = 0,5$

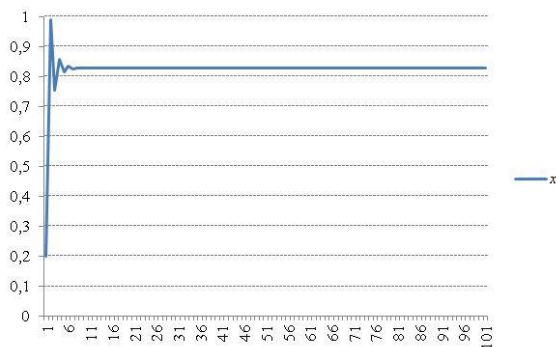


Рис. 13. Траектория системы (18) в примере 4 при $\hat{x} = 0,1$, $Q = 0,5$

Ужесточение условий предоставления агентам средств фонда (т.е. увеличение порога \hat{x}) приводит к тому, что этот механизм перестает играть мотивирующую роль – см. Рис. 14.

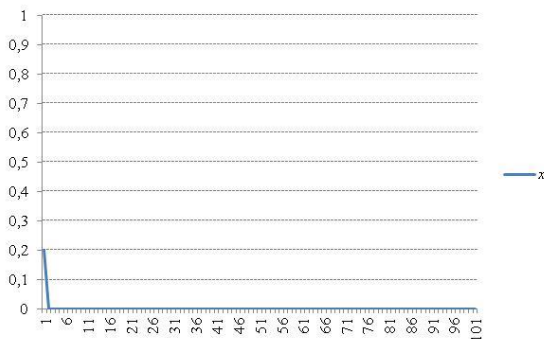


Рис. 14. Траектория системы (18)
в примере 4 при $\hat{x} = 0,25$, $Q = 0,5$

Увеличение размеров выплат агентам (за их природоохранную деятельность) может приводить, как это ни покажется странным с точки зрения здравого смысла, к нестабильному поведению агентов (см. Рис. 15) и даже играть демотивирующую роль (см. Рис. 16). •

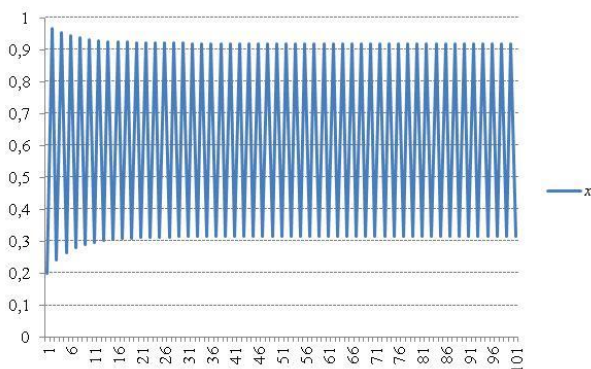


Рис. 15. Траектория системы (18)
в примере 4 при $\hat{x} = 0,1$, $Q = 0,9$

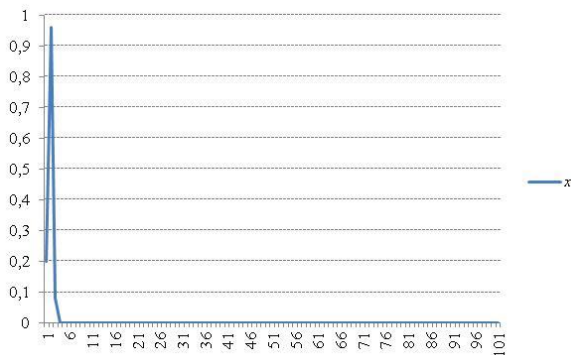


Рис. 16. Траектория системы (18)
в примере 4 при $\hat{x} = 0,1$, $Q = 1$

Оценкой эффективности механизма стимулирования природоохранной деятельности может служить отношение «привлеченных средств» (т.е. затрат агентов в равновесии) к величине фонда поощрения.

В завершение настоящего раздела отметим, что перспективной задачей является анализ моделей, в которых размер фонда зависит от числа или доли действующих агентов.

6. Заключение

В настоящей работе осуществлено приложение общего описания многопорогового коллективного поведения к задачам управления в эколого-экономических системах.

В рамках трех рассмотренных моделей стимулирования и штрафов за природоохранную и природовосстановительную деятельность удастся учесть и исследовать следующие эффекты:

- увеличение доли агентов, выделяющих средства на природоохранную деятельность, с ростом «силы штрафов»;
- увеличение доли агентов, выделяющих средства на природоохранную деятельность, при снижении неопределенности относительно институциональных условий их функционирования;

- целесообразность тщательного выбора ограничений на штрафы, так как в противном случае управляемая система может демонстрировать нестабильное поведение;

- ужесточение условий предоставления агентам средств фонда поощрения природоохранной деятельности может приводить к тому, что этот механизм перестает играть мотивирующую роль;

- увеличение размеров выплат агентам (за их природоохранную деятельность) может приводить к их нестабильному поведению и даже играть демотивирующую роль.

В целом следует признать, что рассматриваемые модели обладают как всеми преимуществами моделей дискретных нелинейных динамических систем (возможность отражения многих качественных эффектов, простота реализации вычислительного эксперимента и т.д.), так и всеми их недостатками – трудность аналитического исследования наличия равновесий и их единственности, устойчивости системы и областей притяжения равновесий, сильная зависимость равновесий от параметров модели и начальных условий и др.

С точки зрения задач управления это означает необходимость максимально точной идентификации объекта управления и неизбежность моделирования (предваряющего использование управляющих воздействий на практике) реакций управляемой системы в зависимости от ее параметров и начального состояния.

В качестве перспективных направлений теоретических исследований следует отметить целесообразность построения и анализа общих моделей многопорогового коллективного поведения.

Литература

1. БАТОВ А.В., БРЕЕР В.В., НОВИКОВ Д.А., РОГАТКИН А.Д. *Микро- и макромоделли социальных сетей. Ч.2. Идентификация и имитационные эксперименты* // Проблемы управления. – 2014. – №5. – С. 28–33.
2. БРЕЕР В.В. *Моделли конформного поведения (обзор)* // Проблемы управления. - 2014. - №1. - С. 2–13. - №2. - С. 2–17.

3. БРЕЕР В.В. *Теоретико-игровые модели конформного поведения* // Автоматика и телемеханика. – 2012. - №10. - С. 111-126.
4. БРЕЕР В.В., РОГАТКИН А.Д. *Вероятностная модель порогового поведения в многоагентных системах* // Автоматика и телемеханика - 2015. - № 8. (в печати).
5. ВАСИН А.А. *Некооперативные игры в природе и обществе*. – М.: МАКС Пресс, 2005. – 412 с.
6. ГОРЕЛИК В.А., КОНОНЕНКО А.Ф. *Теоретико-игровые модели принятия решений в эколого-экономических системах*. – М.: Радио и связь, 1982. – 144 с.
7. ГОРСТКО А.Б., ДОМБРОВСКИЙ Ю.А., СУРКОВ Ф.А. *Модели управления эколого-экономическими системами*. – М.: Наука, 1984. – 120 с.
8. *Моделирование и управление процессами регионального развития* / Под ред. С.Н. Васильева. – М.: Физматлит, 2001. – 432 с.
9. ПЕТРОСЯН Л.А., ЗАХАРОВ В.В. *Введение в математическую экологию*. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1986. – 224 с.
10. УГОЛЬНИЦКИЙ Г.А. *Управление эколого-экономическими системами*. – М.: Вузовская книга, 2004. – 132 с.
11. BREER V.V. *A Game-theoretic Model of Non-anonymous Threshold Conformity Behavior* // Automation and Remote Control. - 2012. - Vol. 73. - No. 7. - P. 1256–1264.
12. BREER V.V., NOVIKOV D.A. *Models of Mob Control* // Automation and Remote Control. - 2013. - Vol. 74. - No. 12. - P. 2143–2154.
13. BROOM M., RYCHTAR J. *Game-theoretical Models in Biology*. - Leiden: CRC, 2013. – 520 p.
14. BURKOV V., NOVIKOV D., SHCHERPKIN A. *Control Mechanisms for Ecological-economic Systems*. – Berlin: Springer, 2015. – 174 p.
15. GRANOVETTER M. *Threshold Models of Collective Behavior* // The American Journal of Sociology. – 1978. – Vol. 83. No. 6. – P. 1420–1443.
16. JANSSEN M., OSTROM E. *Governing Social-Ecological Systems* / Handbook of Computational Economics. Vol. 2. Edit-

- ed by Leigh Tesfatsion L. and Judd K. – Oxford: Elsevier, 2006. – P. 1466–1509.
17. LEVY M. *Market Efficiency, the Pareto Wealth Distribution and the Levy Distribution of Stock Returns*. - Jerusalem: Hebrew University, 2001. – 52 p.
 18. *Mechanism Design and Management: Mathematical Methods for Smart Organizations* / Ed. by Prof. D. Novikov. – New York: Nova Science Publishers, 2013. – 204 p.
 19. NOVIKOV D.A. *Problems of Stimulating Pareto-agent // Automation and Remote Control*. - 2007. - Vol. 68. – No. 1. – P. 124–132.
 20. NOVIKOV D.A. *Theory of Control in Organizations*. – N.Y.: Nova Scientific Publishing, 2013. – 341 p.
 21. OUGOLNITSKY G. *Sustainable Management*. –N.Y.: Nova Scientific Publishing, 2012. – 287 p.
 22. SCHELLING T. *Micromotives and Macrobehavior*. – N.Y.: WW Norton & Co, 1978. – 272 p.
 23. *Theory and Implementation of Economic Models for Sustainable Development* / Ed. by Van Den Bergh J. and Howkes M. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2010. – 328 p.
 24. WHITE LAW K. *Environmental Systems Handbook*. – Oxford: Elsevier, 2004. – 237 p.

MODELS OF COLLECTIVE THRESHOLD BEHAVIOR IN CONTROL PROBLEMS OF ECOLOGICAL-ECONOMIC SYSTEMS

Vladimir Breer, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Cand.Sc., (cogelet@gmail.com).

Dmitry Novikov, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Doctor of Science, professor (Moscow, Profsoyuznaya st., 65, (495)334-75-69, novikov@ipu.ru).

Andrew Rogatkin, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, researcher (andreyrogatkin@gmail.com).

Abstract: We study models of collective “multi-threshold” behavior of agents making binary decisions. The general analysis scheme of these models is applied to three control problems of ecological-economic systems, namely, the problem of individual penalties, the problem of individual and collective penalties, as well as to the incentive problem of agents’ investments in environmental protection and/or restoration.

Keywords: threshold behavior, discrete dynamical system, control of ecological-economic systems.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии М.В. Губко

Поступила в редакцию 09.12.2014.

Опубликована 31.05.2015.

УДК 021.8 + 025.1

ББК 78.34

ПРИНЦИП СОГЛАСОВАННОГО ПЛАНИРОВАНИЯ В УПРАВЛЕНИИ СОЦИАЛЬНЫМИ И ЭКОЛОГО-ЭКОНОМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

Бурков В. Н.¹, Буркова И. В.²

(ФГБУН Институт проблем управления РАН, Москва)

Пузырев С. А.³

(НИИ МВД России, Москва)

Рассматриваются задачи управления распределенными проектами и программами. Это программы, состоящие из подпрограмм, распределенных либо функционально, либо административно, либо территориально. Например, программа развития области включает подпрограмму экологической безопасности. В связи с этим главной проблемой управления распределенными программами является проблема согласования интересов всех заинтересованных лиц. Предлагается принцип согласованного планирования для формирования планов реализации распределенных программ.

Ключевые слова: распределенные программы, экологическая безопасность, принцип согласованного планирования.

1. Введение

Распределенными проектами (программами) называются проекты (программы), состоящие из подпроектов (подпрограмм), распределенных либо функционально, либо админи-

¹ Владимир Николаевич Бурков, доктор технических наук, профессор (vlab17@bk.ru).

² Ирина Владимировна Буркова, доктор технических наук, доцент (irbur27@mail.ru).

³ Сергей Александрович Пузырев, кандидат технических наук, доцент (vlab17@bk.ru).

стративно, либо территориально. Функциональное распределение означает, что существуют различные функциональные направления проекта (программы), по каждому из которых разрабатывается отдельный подпроект (подпрограмма) со своим руководителем и командой управления. Примером может служить программа развития региона, включающая такие функциональные направления, как социальное развитие, экономическое развитие, экологическая безопасность и др. Административное распределение означает, что существуют подпроекты (подпрограммы) в интересах различных административных или экономических образований. Например, программа развития области включает подпрограммы развития городов, муниципальных образований и др. со своим руководством и командой управления. Главной особенностью функционально и административно распределенных проектов (программ) является наличие несовпадающих интересов у руководителей подпроектов (подпрограмм). В связи с этим главной проблемой управления функционально и административно распределенными проектами (программами) является проблема согласования интересов всех заинтересованных лиц (в основном, руководителей подпроектов и подпрограмм). Помимо того что территориально распределенные проекты (программы) могут быть функционально и административно распределенными, они имеют еще одну существенную особенность. При формировании планов реализации таких проектов (программ) необходимо учитывать время перемещения ресурсов (людей, оборудования, материалов), поскольку время перемещения ресурсов сравнимо (а иногда и превышает) с временем выполнения работ. Примером могут быть проекты ремонта (строительства) автомобильных дорог, железнодорожных путей, мостов.

2. Принцип согласованного планирования распределенных проектов (программ)¹

Проблему согласования интересов подпроектов (подпрограмм) функционально или административно распределенного проекта (программы) рассмотрим на примере функционально распределенной программы, поскольку результаты легко переносятся на территориально-распределенные и административно-распределенные проекты и программы.

Итак, рассмотрим функционально распределенную программу, состоящую из m подпрограмм по различным направлениям. Руководство программы далее будем называть центром (Ц), а руководство подпрограмм по направлениям – агентами (А).

Примем, что имеется оценка состояния каждого направления (в количественной или качественной шкале). Обозначим через F_i оценку состояния i -го направления (целевая функция i -го агента), F – целевую функцию Центра. Целевая функция Центра зависит от целевых функций агентов:

$$(1) \quad F = \Phi(F_1; F_1; \dots; F_m).$$

Это может быть линейная, аддитивная или матричная свертка.

Задача Центра заключается в разработке программы (множества проектов), при которой целевая функция F достигает максимума при ограниченных средствах R , выделенных на программу. Каждый агент i , естественно, заинтересован в разработке подпрограммы, максимизирующей его целевую функцию F_i .

Если Центр при разработке программы не будет учитывать интересы агентов, то это приведет к таким отрицательным последствиям как сокрытие или искажение информации, предоставляемой агентами центру, невыполнение мероприятий программы и т.д. Для согласования интересов Центра и агентов в теории активных систем разработан принцип согласованного планирования [1]. Идея принципа состоит в оптимизации целевой функции Центра на множестве согласованных планов, т.е. планов, при

¹ Раздел написан с участием аспиранта ВГАСУ Чу Донг Ксюаня.

которых целевые функции агентов не меньше определенной величины. Для формальной записи задачи оптимального согласованного планирования обозначим через F_i^0 существующую оценку состояния i -го направления. Условием согласования может быть обеспечение увеличения критерия F_i на величину $\Delta F_i = \gamma_i F_i^0$ (т.е. увеличение на $100\gamma_i$ процентов). В этом случае задача согласованного планирования принимает вид

$$(2) \quad F = \Phi(F_1; F_1; \dots; F_m) \rightarrow \max$$

при ограничениях

$$(3) \quad F_i \geq (1 + \gamma_i) F_i^0, \quad i = \overline{1, n}.$$

3. Постановка задачи

Имеется n проектов, претендентов на включение в программу. Для каждого проекта i заданы затраты c_i на его реализацию и эффекты a_{ij} , которые обеспечивает проект для направления j (под эффектом понимается приращение критерия F_j). Обозначим $x_i = 1$, если проект i включен в программу, и $x_i = 0$ в противном случае.

Задача. Определить $x = \{x_i, i = \overline{1, n}\}$, максимизирующие

$$(4) \quad \Phi(y_1, y_2, \dots, y_m), \quad \text{где } y_j = \sum_i a_{ij} x_i, \quad j = \overline{1, m},$$

при ограничениях

$$(5) \quad \sum_i c_i x_i \leq R,$$

$$(6) \quad \sum_i x_i a_{ij} \geq \gamma_j F_j^0, \quad j = \overline{1, m}.$$

3.1. ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ: ОДНОЦЕЛЕВЫЕ ПРОЕКТЫ

Рассмотрим частный случай задачи, когда для каждого направления j существует множество проектов Q_j , дающих вклад в это направление, причем множества Q_j не пересекаются. В этом случае задача решается в два этапа.

Первый этап. Решаем m задач о ранце: максимизировать

$$(7) \quad y_j = \sum_{i \in Q_j} a_i x_i$$

при ограничениях

$$(8) \quad \sum_{i \in Q_j} x_i c_i \leq R_j,$$

$$(9) \quad \sum_{i \in Q_j} x_i a_i \geq \gamma_j F_j^0 = b_j, \text{ где } 0 \leq R_j \leq R.$$

Для этого решаем обычную задачу о ранце (7), (8) при $R_j = R$.

Как известно, решение задачи о ранце при $R_j = R$ дает оптимальные решения при всех $R_j < R$. Обозначим оптимальную величину y_j (7) через $Y_j(R_j)$, как функцию R_j . Определим минимальное $R_j = d_j$, при котором $Y_j(d_j) \geq b_j$. В итоге получаем зависимость $Y_j(R_j)$, где $d_j \leq R_j \leq R$.

Второй этап. Решаем задачу максимизации

$$(10) \quad Y(R) = \sum_j Y_j(R_j)$$

при ограничениях $R_j \geq b_j, j = 1, \dots, m$,

$$(11) \quad \sum_{j=1}^m R_j \leq R.$$

Задачу решаем методом дихотомического программирования. Решение каждой задачи о ранце определяем методом обратного хода.

Пример 1. Имеются три направления программы, данные о которых приведены в таблице 1.

Таблица 1.

j	Направление 1				Направление 2				Направление 3			
i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
a_i	12	30	50	16	16	15	8	18	24	18	10	7
c_i	6	5	10	4	4	3	4	3	12	6	5	7

Примем $b_1 = 20, b_2 = 34, b_3 = 20, R = 30$.

Первый этап. Решаем задачу о ранце для первого направления. Задачу решаем методом дихотомического программирования [2]. Дерево дихотомического представления задачи приведено на рис. 1.

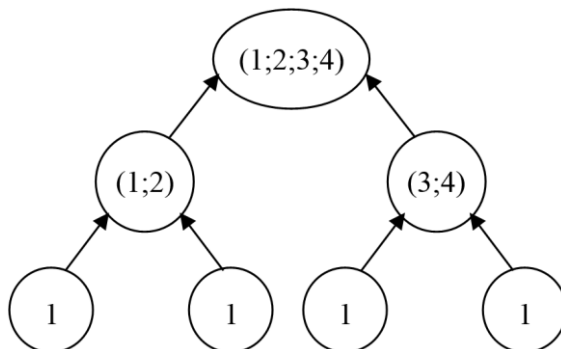


Рис. 1.

1 шаг. Решаем задачу для проектов 1 и 2. Решение приведено в таблице 2. Первое число в клетке равно затратам, а второе – эффекту.

Таблица 2.

1	5;30	11;42
0	0;0	6;12
2 1	0	1

Результаты сведены в таблице 3. В таблице оставлены только Парето-оптимальные варианты. Так, вариант (6; 12) исключаем, поскольку он доминируется вариантом (5; 30) (при меньших затратах получаем больший эффект).

Таблица 3.

Вариант	0	1	2
Затраты	0	5	11
Эффект	0	30	42

2 шаг. Решаем задачу для проектов 3 и 4. Решение приведено в таблице 4. Результаты сведены в таблице 5.

Таблица 4.

1	4;16	14;66
0	0;0	10;50
4 3	0	1

Таблица 5.

Вариант	0	1	2	3
Затраты	0	4	10	14
Эффект	0	16	50	66

3 шаг. Рассматриваем объединенные проекты (1; 2) и (3; 4). Решение приведено в таблице 6. Результаты сведены в таблице 7. Поскольку $b_1 = 20$, то варианты (0; 0) и (4; 16) исключаем.

Таблица 6.

2	11;42	15;58	21;92	25;108
1	5;30	9;46	15;80	19;96
0	0;0	4;16	10;50	14;66
(1;2) (3;4)	0	1	2	3

Таблица 7.

Вариант	1	2	3	4	5	6	7
R_1	5	9	10	14	15	19	25
Y_1	30	46	50	66	80	96	108

Решаем задачу о ранце для второго направления. Решение приведено в таблице 8.

Таблица 8.

Вариант	1	2	3
R_2	7	10	14
Y_2	34	49	57

Решаем задачу о ранце для третьего направления. Решение приведено в таблице 9

Таблица 9.

Вариант	1	2	3	4	5
R_3	11	17	18	23	30
Y_3	28	34	42	52	59

Второй этап. Решаем задачу максимизации

$$(12) Y_1(R_1) + Y_2(R_2) + Y_3(R_3) \rightarrow \max$$

при ограничении

$$(13) R_1 + R_2 + R_3 \leq 30$$

1 шаг. Рассматриваем направления 1 и 2. Решение приведено в таблице 10. Результаты сведены в табл. 11

Таблица 10.

14;57	19;87	23;103	24;107	28;123	29;137	-	-
10;49	15;79	19;95	20;99	24;115	25;129	29;142	-
7;34	12;64	16;80	17;84	21;100	22;114	26;130	-
2 1	5;30	9;46	10;50	14;66	15;80	19;96	25;108

Таблица 11.

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$R_1 + R_2$	12	15	16	17	19	20	21	22	24	25	26	29
$Y_1 + Y_2$	64	79	80	84	95	99	100	114	115	129	130	142

2 шаг. Рассматриваем объединенное направление (1; 2) и направление 3. Решение приведено в таблице 12.

Таблица 12.

19;95	0;123	-	-
17;84	28;112	-	-
16;80	27;108	-	-
15;79	26;107	-	-
12;64	23;92	29;98	30;106
(1;2) (3)	11;28	17;34	18;42

В таблице 12 определяем клетку с максимальным вторым числом. Это клетка (30; 123) с эффектом 123. Клетке (30; 123) соответствует вариант 5 таблицы 11 и вариант 1 таблицы 9. Этому варианту соответствует решение задачи о ранце

$$x_9 = 0; x_{10} = 1; x_{11} = 1; x_{12} = 0$$

с затратами 11 и эффектом 28.

Варианту 5 таблицы 11 соответствует клетка (19; 95) таблицы 10, т.е. вариант 2 таблицы 8 и вариант 2 таблицы 7.

Варианту 2 таблицы 8 соответствует следующее решение задачи о ранце для второго направления:

$$x_5 = 1; x_6 = 1; x_7 = 0; x_8 = 1$$

с затратами 10 и эффектом 49.

Наконец, варианту 2 таблицы 7 соответствует следующее решение задачи о ранце для первого направления:

$$x_1 = 0; x_2 = 1; x_3 = 0; x_4 = 1$$

с затратами 9 и эффектом 46.

3.2. ОБЩИЙ СЛУЧАЙ. МНОГОЦЕЛЕВЫЕ ПРОЕКТЫ

В общем случае существуют проекты, реализация которых дает вклад в несколько направлений. Такие проекты будем называть многоцелевыми. Если число q многоцелевых проектов не велико, то можно рассмотреть все 2^q вариантов вхождения в программу многоцелевых проектов и из них выбрать лучший.

Пример 2. Имеются два направления и 8 проектов. Данные о проектах приведены в таблице 13.

Таблица 13.

i	1	2	3	4	5	6	7	8
a_{i_1}	12	18	15	24	15			
a_{i_2}				16	10	16	21	24
c_i	4	9	3	8	10	4	7	12

Из таблицы видно, что проекты 4 и 5 являются многоцелевыми. Примем $b_1 = 20$, $b_2 = 25$, $R = 30$.

1 вариант. Ни один многоцелевой проект не включен в программу, т.е. $x_4 = x_5 = 0$.

1 этап. Решаем задачу для первого направления: максимизировать

$$12x_1 + 18x_2 + 15x_3$$

при ограничении

$$4x_1 + 9x_2 + 3x_3 \leq R_1,$$

где $R_1 \leq 30$. Ее решение приведено в таблице 14.

Таблица 14.

Вариант	0	1	2	3	4
R_1	0	3	7	12	16
Y_1	0	15	37	33	45

Решаем задачу для второго направления: максимизировать

$$16x_6 + 21x_7 + 24x_8$$

при ограничении

$$4x_6 + 7x_7 + 12x_8 \leq R_2,$$

где $R_2 \leq 30$. Ее решение приведено в таблице 15.

Таблица 15.

Вариант	0	1	2	3	4	5	6
---------	---	---	---	---	---	---	---

R_2	0	4	7	11	16	19	23
Y_2	0	16	21	37	40	45	61

2 этап. Решаем задачу максимизации

$$Y_1(R_1) + Y_2(R_2)$$

при ограничении

$$R_1 + R_2 \leq 30.$$

Решение приведено в таблице 16.

Таблица 16.

4	16;45	20;61	23;66	27;82	-	-	-
3	12;33	16;49	19;54	23;70	28;73	-	-
2	7;27	11;43	14;48	18;64	23;67	26;72	30;88
1	3;15	7;31	10;36	14;52	19;55	22;60	26;76
0	0;0	4;16	7;21	11;37	16;40	19;45	23;61
1 2	0	1	2	3	4	5	6

Поскольку $b_1 = 20$, то строки 0 и 1 в таблице следует исключить. Аналогично, поскольку $b_2 = 25$, то следует исключить столбцы 0, 1 и 2. В оставшейся таблице определяем клетку с максимальным вторым числом. Это клетка (30; 88) с эффектом 88.

2 вариант. В программу включен проект 4 ($x_4 = 1; x_5 = 0$). В этом случае остаток ресурса равен $R' = 30 - 8 = 22$. Так как $a_{41} = 24$, $a_{42} = 16$, то $b_1' = 0$, $b_2' = 25 - 16 = 9$ и из таблицы 16 следует исключить только столбец 0 и строку 0.

Определяем клетку с максимальным вторым числом среди клеток, у которых первое число не больше 22. Это клетка (18; 64) с эффектом 64. Добавляя эффект от проекта 4 $a_{41} + a_{42} = 40$, получаем 104.

3 вариант. В программу входит проект 5. Имеем

$$R' = 30 - 10 = 20, b_1' = 20 - 15 = 5, b_2' = 25 - 10 = 15.$$

В таблице 16 исключаем, как и в предыдущем случае, столбец 0 и строку 0. Находим клетку с максимальным вторым числом среди клеток, у которых первое число не больше 20. Это клетка (18; 64) с эффектом 64. Добавляя эффекты от проекта 5, получаем эффект $64 + 25 = 89$.

4 вариант. В программу включены оба проекта 4 и 5 ($x_4 = x_5 = 1$). Имеем $R' = 30 - 18 = 12$, $b'_1 = 0$, $b'_2 = 0$. Находим клетку с максимальным вторым числом среди клеток, у которых первое число не более 12. Это клетка (11; 43) с эффектом 43. Добавляя эффекты от проектов 4 и 5, получаем эффект $43 + 40 + 25 = 108$. Максимальный эффект имеет четвертый вариант. Заметим, что клетке (11; 43) соответствует вариант 1 таблицы 15 и вариант 2 таблицы 14. Варианту 1 таблицы 15 соответствует решение для второго направления

$$x_6 = 1, x_7 = 0, x_8 = 0.$$

Варианту 2 таблицы 14 соответствует решение для первого направления

$$x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 0.$$

Окончательно получаем, что в программу включаются проекты первый, третий, четвертый, пятый и шестой с суммарным эффектом 108 и затратами 29.

3.3. МЕТОД СЕТЕВОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

При большом числе многоцелевых проектов метод перебора всех вариантов их включения в программу становится неэффективным. Рассмотрим алгоритм ветвей и границ с получением оценок на основе метода сетевого программирования [3]. Применение метода удобнее рассматривать для обратной задачи минимизации затрат, необходимых для получения требуемого суммарного эффекта, т.е. минимизации

$$C(x) = \sum_i c_i x_i$$

при ограничениях

$$\sum_j y_j \geq B,$$

$$y_j \geq b_j, \quad j = \overline{1, m}.$$

Иллюстрацию метода рассмотрим на простом примере.

Пример 3. Имеются 4 проекта, данные о которых приведены в таблице 17. Число направлений равно 2.

Таблица 17.

i	1	2	3	4
a_{i_1}	12	6	9	
a_{i_2}		4	6	8
c_i	3	2	4	3

Примем $b_1 = 10$, $b_2 = 8$, $B = 30$. Из таблицы 17 видно, что проекты 2 и 3 являются многоцелевыми. Сетевое представление ограничений задачи приведено на рис. 2.

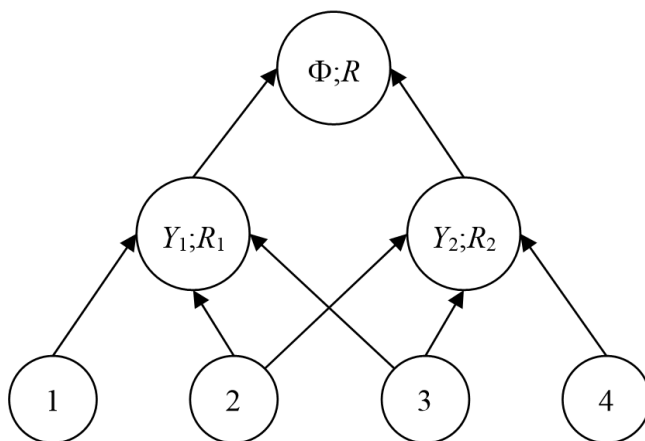


Рис. 2.

В соответствии с теорией сетевого программирования следует разделить затраты c_2 и c_3 многоцелевых проектов на две части s_{21} , s_{22} и s_{31} , s_{32} произвольным образом, поскольку число исходящих дуг из вершин 2 и 3 (рис. 2) равно 2. Возьмем, например, $s_{21} = s_{22} = 1$, $s_{31} = 1$, $s_{32} = 3$. Получаем две оценочные задачи для каждого направления. Оценочные задачи для первого направления: минимизировать

$$C_1(x) = 3 \times x_1 + 1 \times x_2 + 1 \times x_3$$

при ограничении

$$12x_1 + 6x_2 + 9x_3 \geq B_1,$$

где $d_1 \leq B_1 \leq B$.

Обозначим $Z_1(B_1)$ значение $C_1(x)$ в оптимальном решении задачи. Решение приведено в таблице 18.

Таблица 18.

Вариант	0	1	2	3	4
Z_1	0	1	2	4	5
B_1	0	6	15	21	27

Варианты 0, 1 исключаем, поскольку для этих вариантов $B_1 < b_1 = 10$.

Оценочная задача для второго направления:

$$C_2(x) = 1 \times x_2 + 3 \times x_3 + 3 \times x_4 \rightarrow \min$$

при ограничении

$$4x_2 + 6x_3 + 8x_4 \geq B_2,$$

где $d_2 \leq B_2 \leq B$.

Обозначим $Z_2(B_2)$ значение $C_2(x)$ в оптимальном решении задачи. Решение приведено в таблице 19.

Таблица 19.

Вариант	0	1	2	3	4	5
Z_2	0	1	3	4	6	7
B_2	0	4	8	12	14	18

Варианты 0, 1 исключаем, так как для них $B_2 < b_2 = 8$.

Решаем оценочную задачу верхнего уровня:

$$Z_1(B_1) + Z_2(B_2) \rightarrow \min$$

при ограничении

$$B_1 + B_2 \geq 30.$$

Решение приведено в таблице 20.

Таблица 20.

5;18	9;32			
4;14	7;29			
4;12	6;27	8;33		
2	5;25	7;29	8;35	9;37
2 1	22;15	34;21	45;27	66;27

В таблице 20 находим клетку с минимальным первым числом среди клеток, у которых второе число не менее $B = 30$. Это клетки (8; 35) и (8; 33) с затратами 8. Основная теорема теории сетевого программирования утверждает, что величина затрат 8 дает оценку снизу затрат для исходной задачи. Определим соответствующие оптимальные решения методом обратного хода. Клетке (8; 35) соответствует вариант 2 таблицы 19 и вариант 4 таблицы 18. Варианту 2 таблицы 19 соответствует решение оценочной задачи для второго направления

$$x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 1.$$

Варианту 5 таблицы 18 соответствует решение первой оценочной задачи

$$x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1.$$

Полученная пара решений не определяет допустимого решения.

Клетке (8; 33) соответствует вариант 3 таблицы 19 и вариант 3 таблицы 18. Варианту 3 таблицы 19 соответствует решение

$$x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = 1$$

второй оценочной задачи, а варианту 3 таблицы 18 соответствует решение

$$x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 1$$

первой оценочной задачи. Эта пара решений также не определяет допустимого решения исходной задачи, а определяет только оценку снизу.

Далее можно либо попытаться улучшить оценку, изменяя деление затрат многоцелевых проектов, либо применить алгоритм ветвей и границ на основе полученных оценок. Рассмотрим применение алгоритма метода ветвей и границ. Для ветвле-

ния возьмем второе направление. Делим множество всех решений на два подмножества. В первом подмножестве $x_2 = 1$, а во втором $x_2 = 0$.

Оценка первого подмножества ($x_2 = 1$).

Поскольку $x_2 = 1$, то

$$B' = 30 - 10 = 20, b_1' = 10 - 6 = 4, b_2' = 8 - 4 = 4.$$

Решаем оценочную задачу для первого направления:

$$3x_1 + x_3 \rightarrow \min$$

при ограничении

$$12x_1 + 9x_3 \geq B_1',$$

где $4 \leq B_1' \leq 20$. Ее решение приведено в таблице 21.

Таблица 21.

Вариант	0	1	2	3
Z_1	0	1	3	4
B_1	0	9	12	21

Решаем оценочную задачу для второго направления:

$$3x_3 + 3x_4 \rightarrow \min$$

при ограничении

$$6x_3 + 8x_4 \geq B_2,$$

где $4 \leq B_2 \leq 20$. Ее решение приведено в таблице 22.

Таблица 22.

Вариант	0	1	2
Z_1	0	3	6
B_1	0	8	14

Решаем оценочную задачу верхнего уровня:

$$Z_1(B_1) + Z_2(B_2) \rightarrow \min$$

при ограничении

$$B_1 + B_2 \geq 20.$$

Решение приведено в таблице 23.

Таблица 23.

26; 14	7; 23	-	-
13; 8	4; 17	6; 20	-
$Z_2; B_2$ $Z_1; B_1$	11; 9	23; 12	34; 21

Ее решение определяется клеткой (6; 20).

Для первой оценочной задачи получаем решение $x_1 = 1$, $x_3 = 0$, а для второй – $x_3 = 0$, $x_4 = 1$.

Заметим, что пара решений определяет допустимое, а значит оптимальное решение в подмножестве $x_2 = 1$ с затратами 8.

Оценка второго подмножества ($x_2 = 0$).

Решаем оценочную задачу для первого направления:

$$3x_1 + x_3 \rightarrow \min$$

при ограничении

$$12x_1 + 9x_3 \geq B_1',$$

где $10 \leq B_1 \leq 30$. Ее решение приведено в таблице 24.

Таблица 24.

Вариант	2	3
Z_1	3	4
B_1	12	21

Решаем оценочную задачу для второго направления:

$$3x_3 + 3x_4 \rightarrow \min$$

при ограничении

$$6x_3 + 8x_4 \geq B_2,$$

где $8 \leq B_2 \leq 30$. Ее решение приведено в таблице 25.

Таблица 25.

Вариант	2	3
Z_2	3	6
B_2	8	14

Решаем оценочную задачу верхнего уровня. Решение приведено в таблице 26.

Таблица 26.

36; 14	5; 18	9; 26	10; 35
2 3; 8	4; 14	6; 20	7; 29
$Z_2; B_2$ $Z_1; B_1$	1 1; 6	23; 12	34; 21

Решение определяется клеткой (10; 35) с затратами 10.

Выбираем первое подмножество ($x_2 = 1$). Соответствующее оптимальное решение $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = 1$ с затратами 8. Дерево ветвлений приведено на рис. 3.

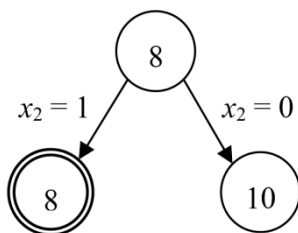


Рис. 3.

Второй способ решения задачи заключается в максимальном увеличении оценки снизу путем выбора оптимального разделения затрат c_2 и c_3 при ограничениях

$$s_{21} + s_{22} = c_2,$$

$$s_{31} + s_{32} = c_3.$$

Эта задача называется обобщенной двойственной задачей (ОДЗ).

В работе [3] доказано, что ОДЗ является задачей выпуклого программирования. Однако здесь следует учесть два обстоятельства. Во-первых, вычислительные эксперименты показали, что затраты вычислительного времени на улучшение оценки, как правило, не компенсируются уменьшением ветвлений в алгоритме ветвей и границ. Во-вторых, решение ОДЗ во многих случаях получается нецелочисленным, а как известно, при

нецелочисленных значениях параметров задача о ранце становится NP-трудной. Поэтому рекомендуется получать оценки при заданном начальном делении затрат многоцелевых проектов.

Попробуем улучшить полученную оценку. При $s_{21} = s_{22} = 1$, $s_{31} = 3$ мы имеем две пары решений оценочных задач. Первая пара решений

$$\begin{aligned}x_1 &= 1, x_2 = 1, x_3 = 1, \\x_2 &= 0, x_3 = 0, x_4 = 1.\end{aligned}$$

Вторая пара решений

$$\begin{aligned}x_1 &= 1, x_2 = 0, x_3 = 1, \\x_2 &= 1, x_3 = 0, x_4 = 1.\end{aligned}$$

Означим δ_2 – изменение оценки s_{22} . Аналогично, обозначим δ_3 – изменение оценки s_{32} . Заметим, что при малых δ_2 и δ_3 оптимальные решения оценочных задач не меняются. Для того чтобы увеличить оценку снизу, необходимо, чтобы оценка снизу увеличилась для каждой пары решений.

Имеем для первой пары $\delta_2 + \delta_3 > 0$, а для второй – $\delta_2 - \delta_3 > 0$. Выбираем $\delta_2 = 0$, $\delta_3 > 0$. Заметим теперь, что при $\delta_3 > 0$ появляется новая пара оптимальных решений оценочных задач:

- 1) $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 0$,
- 2) $x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = 1$

с оценкой затрат 8.

Эта пара решений определяет допустимое, а значит оптимальное решение исходной задачи.

4. Механизмы совместного финансирования

Важнейшей задачей при управлении распределенными проектами и программами является задача распределения ресурсов (как правило, финансовых) между отдельными направлениями (подпрограммами) функционально распределенной программы или между отдельными подразделениями (подпрограммами) административно распределенной программы.

Рассмотрим класс механизмов, позволяющих согласовывать интересы Центра и агентов. Речь идет о механизмах совместного финансирования подпрограмм, когда часть ресурсов выделяет Центр, а остальные ресурсы выделяют агенты. Инструментом

согласования выступает норматив λ , определяющий величину ресурсов Центра, выделяемых на каждую единицу ресурсов агента [4].

Сначала рассмотрим простую аналитическую модель. Примем, что целевые функции агентов имеют вид

$$(14) f_i(x_i, \lambda) = 2\sqrt{r_i(1+\lambda)x_i} - x_i, \quad i = \overline{1, m},$$

где x_i – количество ресурса, выделяемое на подпрограмму i -м агентом. Каждый агент при заданном нормативе λ решает задачу максимизации (14) по x_i . Ее решение

$$(15) x_i = r_i(1+\lambda), \quad i = \overline{1, m}.$$

Норматив λ определяется из условия ограниченности ресурса Центра:

$$\lambda(1+\lambda) = \frac{R}{H}, \quad \text{где } H = \sum_i r_i.$$

Решая это квадратное уравнение, получаем:

$$\lambda = \frac{1}{2}(\sqrt{1+4q} - 1), \quad \text{где } q = \frac{R}{H}.$$

Для распределения ресурса Центр получает от агентов оценки s_i коэффициентов эффективности r_i . На основе этой информации Центр определяет

$$x_i = s_i(1+\lambda), \quad \text{где } \lambda = \frac{R}{S}, \quad S = \sum_i s_i.$$

Подставляя x и λ в (15) получаем

$$(16) f_i = (1+\lambda)[2\sqrt{r_i s_i} - s_i].$$

При большом числе агентов оценка i -го агента слабо влияет на норматив λ . Принимая, что агенты не учитывают этого влияния (гипотеза слабого влияния), определим максимум (16) по s_i . Имеем $s_i = r_i$, $i = 1, \dots, m$. Таким образом, механизм совместного финансирования является неманипулируемым (при гипотезе слабого влияния).

Перейдем к описанию дискретной модели. Примем, что для каждой подпрограммы имеется n_j проектов. Каждый проект описывается эффектом a_{ij} и затратами c_{ij} , $i = 1, \dots, n_j$, $j = 1, \dots, m$.

При нормативе λ j -й агент расходует на i -й проект

$$\frac{c_{ji}}{1 + \lambda}$$

и его прибыль составит

$$\pi_{ji} = a_{ji} - \frac{c_{ji}}{1 + \lambda}.$$

Очевидно, что если $\pi_{ji} > 0$, то проект i войдет в программу.

Примем, что проект i войдет в программу и в случае, если $\pi_{ji} = 0$ в силу благожелательного отношения агентов к Центру. Обозначим $Q_j(\lambda)$ – множество проектов, для которых $\pi_{ji} \geq 0$ при нормативе λ . Определим максимальное λ , такое что

$$(17) \sum_{j=1}^m \sum_{i \in Q_j(\lambda)} c_{ji} \leq \left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)R.$$

При такой величине норматива λ Центр может участвовать в совместном финансировании всех проектов с неотрицательной прибылью. Заметим, что Центр может взять величину норматива $\lambda > \lambda_0$. При этом возникает задача формирования программы с максимальным суммарным эффектом при обеспечении гарантированного эффекта для каждого агента. Эта задача была рассмотрена выше.

Для решения неравенства (17) определим для каждого проекта норматив

$$\lambda_{ji} = \frac{c_{ji}}{a_{ji}} - 1$$

(полагаем, что $c_{ji} \geq a_{ji}$, поскольку в противном случае проект выгоден агенту без дополнительного финансирования). Пронумеруем все проекты в очередности возрастания λ_{ji} , т.е. $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_q$, где q – число всех проектов.

Определяем максимальный номер k , такой что

$$(18) \sum_{i=1}^k c_i \leq \left(1 + \frac{1}{\lambda_k}\right)R.$$

Полученное значение λ_k дает решение неравенства (17).

Замечание. Предполагается, что для каждого агента множество $Q_j(\lambda_k) \neq \emptyset$, причем найдутся проекты, обеспечивающие

агенту гарантированный уровень эффекта. Если это не так, то агенту предлагается разработать проекты с достаточно высоким эффектом.

Пример 1. Имеются две подпрограммы и соответственно два агента, у каждого по 4 проекта. Данные о проектах приведены в таблице 27.

Таблица 27.

i	1	2	3	4	5	6	7	8
a_i	100	50	80	60	40	30	70	20
c_i	110	60	104	84	60	48	119	36
λ_i	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8

Примем, что проекты с первого по четвертый являются претендентами на включение в первую подпрограмму, а проекты с пятого по восьмой являются претендентами на включение во вторую подпрограмму. Пусть $R = 140$. Вычисляем

$$\lambda = \lambda_1 = 0,1; c_1 < (1 + 10)R;$$

$$\lambda = \lambda_2 = 0,2; c_1 + c_2 < (91 + 5)R;$$

$$\lambda = \lambda_3 = 0,3; c_1 + c_2 + c_3 < (1 + 10/3)R;$$

$$\lambda = \lambda_4 = 0,4; c_1 + c_2 + c_3 + c_4 < (1 + 5/2)R;$$

$$\lambda = \lambda_5 = 0,5; 110 + 60 + 104 + 84 + 60 < 3R = 420;$$

$$\lambda = \lambda_6 = 0,6; 418 + 48 = 466 > 2,67 \times 140.$$

Имеем $k = 5$, т.е. норматив $\lambda_5 = 0,5$.

В этом случае в первую подпрограмму входят все четыре проекта, а во вторую только один пятый. Однако, если гарантированные эффекты для каждой подпрограммы $d_1 = d_2 = 50$, то для второй программы условие согласования планов не выполнено. Поэтому возьмем $\lambda_k = \lambda_6 = 0,6$. В этом случае во вторую программу входят и пятый, и шестой проект с суммарным эффектом $a_5 + a_6 = 70 > 50$ и затратами второго агента 80.

Для формирования первой подпрограммы решаем задачу

$$100x_1 + 50x_2 + 80x_3 + 60x_4 \rightarrow \max$$

при ограничении

$$100x_1 + 60x_2 + 104x_3 + 84x_4 \leq 245^{1/3}.$$

Оптимальное решение

$x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 0$
с эффектом 180.

Заметим, что если снизить гарантированный уровень эффекта у второй подпрограммы до 40, то норматив λ уменьшается до 0,5, что позволяет существенно увеличить суммарный эффект (до 330 вместо 250).

Литература

1. БУРКОВ В.Н. *Основы математической теории активных систем.* – М. Наука, 1977. – 383 с.
2. БУРКОВ В.Н., БУРКОВА И.В. *Метод дихотомического программирования в задачах дискретной оптимизации.* – М.: Научное издание ЦЭМИ РАН, 2003. – 43 с.
3. БУРКОВА И.В. *Метод сетевого программирования в задачах нелинейной оптимизации // Автоматика и телемеханика.* – 2009. – №10. – С. 15–21.
4. *Механизмы управления. Управление организацией: планирование, организация, стимулирование и контроль:* Учебное пособие / Под ред. чл.-к. РАН Д.А. Новикова. Изд.2-е, перераб. и доп. – М.: ЛЕНАНД, 2013. – 216 с.

PRINCIPLE OF COORDINATED PLANNING IN MANAGEMENT OF SOCIAL AND ECOLOGICAL- ECONOMIC SYSTEMS

Vladimir Burkov, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Doctor of Science, professor (vlab17@bk.ru).

Irina Burkova, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Doctor of Science, assistant professor (Moscow, Profsoyuznaya st., 65, irbur27@mail.ru).

Sergey Puzyrev, Scientific Research Institute of the Ministry of Internal Affairs RF, Moscow, Cand.Sc., assistant professor (vlab17@bk.ru).

Abstract: We consider a problem of managing distributed projects and programs. Such a program consists of routines distributed either functionally and administratively, or geographically. For example, a program of region development includes a subprogram of environmental safety. The main challenge in managing distributed programs is the problem of interests' reconciliation of all stakeholders. We propose the principle of coordinated planning for plan development of a distributed program.

Keywords: distributed programs; environmental security; the principle of coordinated planning.

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии Г.А. Угольницким*

*Поступила в редакцию 10.03.2015.
Опубликована 31.05.2015.*

УДК 519.6 + 519.8

ББК 22.19+20.1

ПРОЕКТИРОВАНИЕ СИСТЕМЫ ЭКОЛОГО- ЭКОНОМИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ ТЕРРИТОРИЕЙ ВОЛГО-АХТУБИНСКОЙ ПОЙМЫ НА ОСНОВЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО И ГЕОИНФОРМАЦИОННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

**Воронин А. А.¹, Васильченко А. А.², Писарева М. В.³,
Писарев А. В.⁴, Хоперсков А. В.⁵, Храпов С. С.⁶,
Подщипкова Ю. Е.⁷**

(Волгоградский государственный университет, Волгоград)

Описана система эколого-экономического управления территорией Волго-Ахтубинской поймы, построенная на основе гидродинамического и геоинформационного моделирования. Приведены результаты оптимизации паводкового гидрографа Волжской ГЭС, пространственного распределения работ по проекту восстановления русел Волго-Ахтубинской поймы, механизмов управления хозяйствующими субъектами территории.

Ключевые слова: компьютерное моделирование, гидрологический режим, гидрограф, цифровая модель рельефа, Волго-Ахтубинская пойма, эколого-экономическое управление.

¹ Александр Александрович Воронин, доктор физико-математических наук, профессор (voronin.prof@gmail.com).

² Анна Анатольевна Васильченко, старший преподаватель (aa-vasilchenko@mail.ru).

³ Мария Владимировна Писарева, аспирант (m.eliseeva.vlg@gmail.com).

⁴ Андрей Владимирович Писарев, кандидат физико-математических наук, доцент (andrew.pisarev@gmail.com).

⁵ Александр Валентинович Хоперсков, доктор физико-математических наук, профессор (ahoperskov@gmail.com).

⁶ Сергей Сергеевич Храпов, кандидат физико-математических наук, доцент (xss-ip@mail.ru).

⁷ Юлия Евгеньевна Подщипкова, студент (podschipkova1993@mail.ru).

1. Введение

Волго-Ахтубинская пойма (ВАП) – уникальное природное образование (протяженность около 450 км, территория – свыше 20 тыс. кв. км), жизнь которого полностью определяется весенним паводком р. Волги. Волжская ГЭС (ВГЭС) регулирует подчиненный интересам гидроэнергетики гидрологический режим р. Волги, характеризуемый увеличенным объемом ее меженного стока и значительно сокращенным объемом паводкового, что служит причиной прогрессирующей деградации русел и обезвоживания ВАП [5]. Факторами обезвоживания являются также дополнительное ограничение переменных паводков требованиями гидрологической безопасности выходящих из зоны затопления осваиваемых территорий, а также расширение и углубление русла р. Волги. Результатом предпринимаемых в последние годы усилий по улучшению гидрологического режима северной части ВАП (далее – ВАП), находящейся на грани экологической катастрофы, является лишь замедление деградационных процессов [6]. Для коренного изменения ситуации необходима разработка и реализация научно обоснованной комплексной системы эколого-экономического управления, создание которой на территории ВАП – пространственно распределенной высокодинамичной многоагентной слабоустойчивой социоприродохозяйственной системы с высоким уровнем техногенной опасности, социальной и экологической значимости – возможно только на основе междисциплинарного подхода, интегрирующего методы и результаты геоинформационного, гидродинамического, оптимизационного, теоретико-игрового и сценарно-имитационного моделирования.

Главной целью проектируемой комплексной системы эколого-экономического управления ВАП является создание математической модели ее устойчивого развития на основе достижения и поддержки устойчивости ее экосистемы в условиях оптимального гидрологического режима. Она включает в себя несколько постоянно актуализируемых модулей – математических моделей и отвечающих им программных комплексов, реализующих основной функционал: когнитивный анализ проблемной ситуации; многокритериальную оптимизацию паводкового гид-

рографа ВГЭС и природовосстановительных проектов; проектирование механизмов эколого-экономического управления; сценарно-имитационное моделирование социоприрохозяйственной динамики и развития.

Функционирование главной части комплекса обеспечивается вспомогательным функционалом, реализуемым программным комплексом «ЭКОГИС», включающим в себя построение и актуализацию цифровой модели рельефа (ЦМР) на основе ГИС-технологий, численное гидродинамическое моделирование динамики поверхностных вод. Первые версии основных моделей и результатов моделирования описаны в [4, 5, 7–9, 11].

2. Геоинформационное моделирование рельефа

Разработка цифровой модели рельефа (ЦМР) ВАП $b(x, y)$ была начата в 2007 г. Ее основой служат спутниковые данные ASTER [14] и SRTM [12] с разрешением до 20 м в плоскости Земли и до 0,5 м по вертикали. Программа Landsat [13] позволяет получить актуальные данные высокого разрешения (15–30 метров/пиксель). Для добавления объектам атрибутивной информации использовалась топографическая карта 1:50000 открытого пользования. Цифровая карта пойменных русел и речного дна строилась совместной векторизацией топографических и лоцманских карт русел ВАП, Волги и Ахтубы [1] с использованием результатов экспедиционных исследований [2]. Актуализация ЦМР производится ежегодно с использованием регулярно обновляемых космических снимков, размещенных на сайте геологической службы США [15] в открытом режиме (спутник ДЗЗ Landsat 8), а также с помощью GPS-измерений границ паводковых затоплений. Векторная карта ВАП 2014 года включает в себя слой гидросистемы, состоящий из 1542 русловых объектов общей протяженностью 887 км, слой инфраструктуры, включающий в себя 118 населенных пунктов, и слой рельефа местности, включающий более 15 тыс. рельефных объектов.

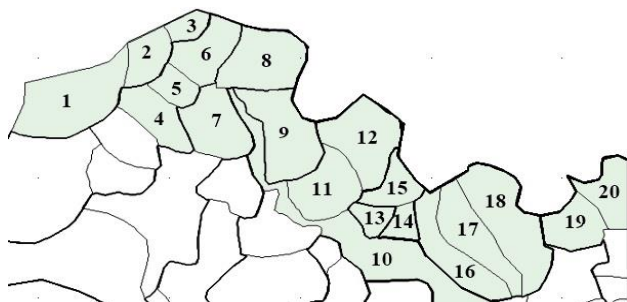


Рис. 1. Карта русловых зон северной части ВАП

Естественной основой структуризации пойменной территории, необходимой для проектирования системы управления, служит ее гидрологическая сеть. Магистральную гидросистему ВАП образуют три водотока: р. Волга, р. Ахтуба и ерик «Гнилой» («Пахотный»), из которых берут начало соответственно 14, 15 и 57 русел – входов на ее территорию. Эти русла, практически равномерно (с интервалом в 1,5–2 км) распределенные вдоль магистральных водотоков, разветвляются на территории поймы, образуя (в версии 2014 г.) 86 гидросистем второго уровня и соответствующих им территориальных зон (рис. 1) с функциями рельефа $b(x_j, y_j)$ ($j = 1, \dots, 86$).

3. Гидродинамическое моделирование паводков

Численная модель динамики поверхностных вод в версии 2014 г. учитывает все основные факторы затопления территории: поверхностные и подземные источники воды – плотины, осадки, ключи, выход грунтовых вод на поверхность суши; рельеф местности с учетом антропогенной застройки территорий и рельефа дна водоемов; свойства подстилающей поверхности – придонное трение, инфильтрация (новая многослойная нелинейная модель); внутреннее вязкое трение; ветровое воздействие – нагонные волны; вращение Земли – сила Кориолиса; испарение. Адекватность модели подтверждается результатами сравнения с данными наблюдений уровня воды на четырех гидропостах в северной части ВАП и площади водной поверхности в различные годы с использованием данных спутника Landsat-7.

Реализованы параллельные OpenMP, CUDA-, OpenMP-CUDA-версии расчетного модуля метода CSPH-TVD, снизившие в 700 раз вычислительную сложность задачи и позволившие довести время расчета 100-суточного паводка до 2 часов.

Вид функций расхода (гидрографа) $Q(t)$ паводкового попуска ВГЭС разных лет (рис. 2) демонстрирует его относительную хаотичность в 1962–1996 гг., обусловленную следованием требованиям безопасности ВГЭС и переменному спросу на электроэнергию. В 2003–2015 гг. в нем выделяются две ступени с почти постоянными значениями Q_1 и Q_2 , а меженный гидрограф характеризуется меньшей суточной изменчивостью. Анализ космических снимков и результатов гидродинамических расчетов показал, что перед весенним попуском воды относительная площадь занятой водой территории не превышает 1%, площадь затопления территории двухступенчатым гидрографом определяется величиной Q_1 и длительностью t_1 его первой ступени, при $Q_1 \leq 20\,000 \text{ м}^3/\text{с}$ затопления территории не происходит, а при $Q_1 \geq 30\,000 \text{ м}^3/\text{с}$ и $t_1 \geq 5$ суток соответствуют катастрофическому затоплению.

На рис. 3 показана расчетная динамика площади территории паводкового затопления $S_0(t)$ с плановыми гидрографами 2006–2011 гг.

На рис. 4, 5 показана расчетная динамика затопления всей территории ВАП и указанных на рис. 1 ее зон модельными ($Q_1 = \text{const}$) паводковыми гидрографами. Различия в динамике зон связаны с характеристиками их рельефа и гидросистемы.

Используемая в настоящее время гидродинамическая модель не учитывает прогрессирующей деградации русел ВАП и рек Волги и Ахтубы, снижающей эффективность паводков. По данным гидропоста в г. Волгограде снижение высоты паводка вследствие изменений в русле р. Волги составляет 1 м (рис. 6). Деградация русла р. Ахтубы и русел территории ВАП добавляет к этой величине значительную долю, для учета которой необходимы широкомасштабные полевые исследования.

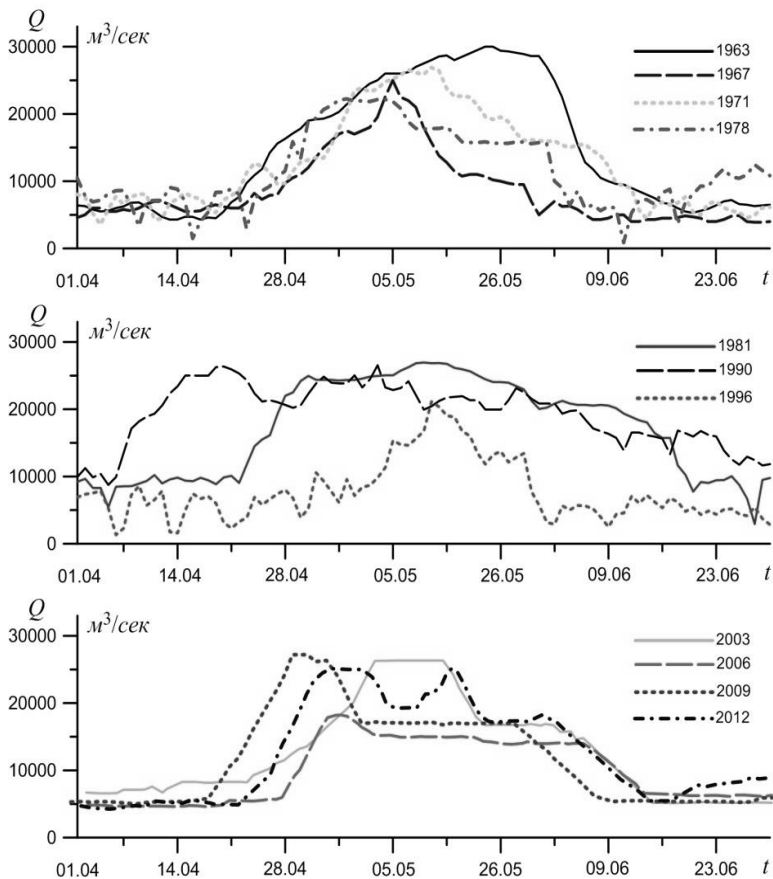


Рис. 2. Паводковые гидрографы ВГЭС разных лет

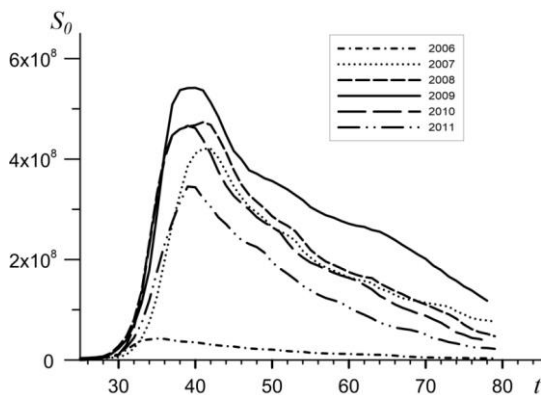


Рис. 3. Динамика площади затопления S_0 (m^2) для гидрографов за 2006–2011 гг. ($[t]$ = сутки)

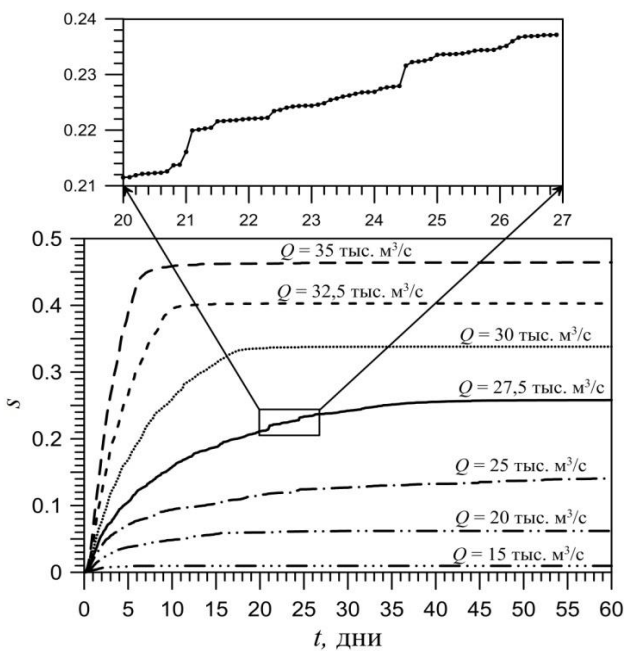


Рис. 4. Динамика относительной площади затопления S (m^2) для постоянных модельных гидрографов ($[t]$ = сутки)

4. Моделирование системы управления

4.1. ОБЩАЯ МОДЕЛЬ УПРАВЛЕНИЯ

Постановка задачи управления, с одной стороны, является результатом когнитивного анализа ситуации и экспертного поиска баланса между экологическим, социальным и экономическим краткосрочным и долгосрочным приоритетами различных групп акторов в условиях требований безопасности, деградиционной природной динамики, изменчивой гидрологии волжского бассейна, гидротехнических ограничений, с другой – определяется возможностью построения соответствующей математической модели.

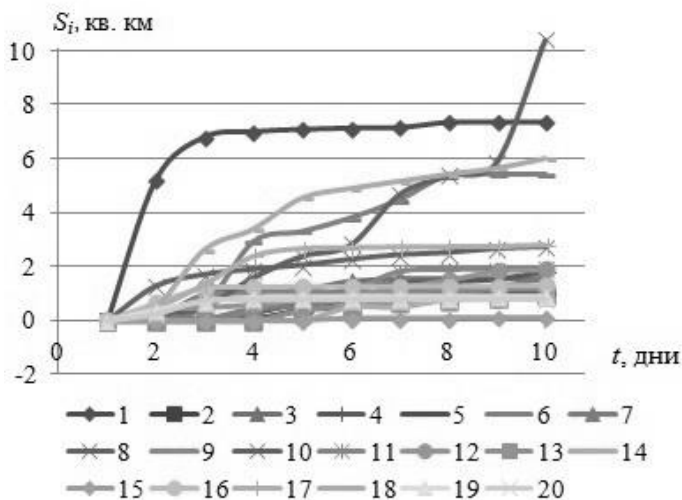


Рис. 5. Динамика затопления зон ВАП для $Q_1 = 23000 \text{ м}^3/\text{с}$

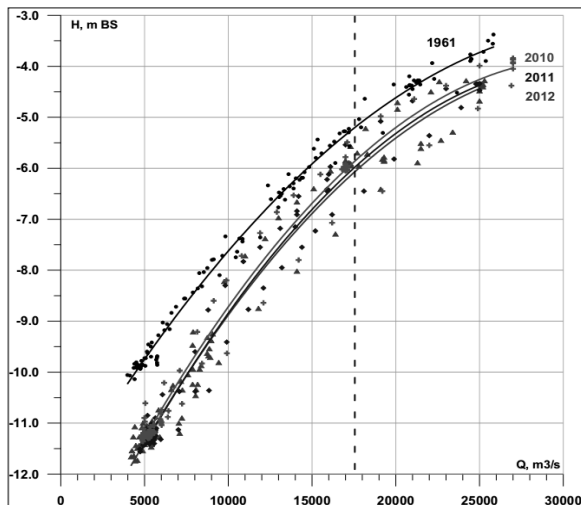


Рис. 6. Зависимость уровня воды от паводкового гидрографа ВГЭС в разные годы (по гидропосту г. Волгограда)

В проектируемой модели управления состояние системы описывается кортежем $S(x, y, l, t) = [A(l, t), B(x, y, l, t), C(A, B, Ext), U(A, B, Ext), F(A, B, U), (Ext(l, t))] \in S_{don}$, где $l = 1, 2, \dots$ – «медленное» время (шаг по l равен одному году); $A(l, t) = (A_0(l, t), A_{ij}(l))$ ($i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, k_i$), $A_0 = \{f_0, w_0\}$ – модель агента ВГЭС: f_0 – целевая функция, $w_0(l) = (G_\phi, r_0(l))$ – действие, $G_\phi = Q_\phi(l, t)$ – фактический паводковый гидрограф, t – «быстрое» время паводка, r_0 – объем финансирования проектов Центра; $A_{ij} = \{f_{ij}, w_{ij}(l)\}$ – модели агентов (хозяйствующих субъектов) зон ВАП: f_{ij} – целевые функции, w_{ij} – действия, $w_{ij}(l) = (d_{ij}(l), r_{ij}(l))$, d_{ij} – изменение рельефа (число созданных агентами дамб, удерживающих после окончания паводка необходимую для орошения воду в руслах зон), r_{ij} – объем финансирования проектов Центра, n – число зон ($1 \leq n \leq 86$), k_i – число агентов зоны i ; $B(x, y, l) = (b_1, \dots, b_6)$ – пространственная сеточная вектор-функция с координатами: $b_1(x, y, l)$ – ЦМР; $b_2 = \varphi(G_\phi, b_1(x, y, l))$ – максимальная (по t) высота паводкового затопления, определяемая гидродинамическими расчетами, $b_3(x, y, l) = \text{sgn}(b_2(x, y, l))$ – индикатор затопления территории;

$b_4(x, y, l)$, $b_5(x, y, l)$, $b_6(x, y, l)$ – векторные коэффициенты соответственно экологической (гидрологической, ихтиологической, орнитологической и др.), социальной (урбанистической, рекреационной и др.) и экономической (сельское, лесное хозяйство, рекреационный бизнес и пр.) значимости, рассчитываемые на основе данных мониторинга и экспертных оценок (число координат каждого вектора определяется наличием данных и целями моделирования); $C(A, B, Ext) = \{U(A, B, Ext), F(A, B, U)\}$ – модель Центра (органа федеральной власти), F – целевая функция Центра, $U = (G_{nl}, W, P, M)$ – действие Центра (управление): $G_{nl}(l) = \{Q_{1nl}, t_{1nl}, Q_{2nl}, t_{2nl}\}$, – плановый двухступенчатый паводковый гидрограф; $W = (W_1, \dots, W_n)$ – проекты русловосстановления в зонах ВАП, P – штрафы за сверхнормативные действия, M – стимулирование участия в проектах; $S_{доп}$ – множество допустимых состояний системы S , определяемое природными, техническими, социально–экономическими и финансовыми ограничениями.

В рамках построенной модели S различные задачи эколого-экономического управления описываются следующими соотношениями:

- (1) $B_i(l+1) = f_i(B_i, Q_\phi, w_i, W_i, Ext)$,
- (2) $F \rightarrow \max_U, F = \sum_{(l,k,i) \in \Omega} (\mu_k(l) B_{ik}(l) - (r, U(l)))$,
- (3) $f_0 = a_0(V_{nl} - V_\phi) - P(G_{nl} - Q_\phi) \rightarrow \max_{(Q_\phi, r_0)}$,
- (4) $f_{ij} = a_{ij} S_{i3} - P(w_{ij}) - r_{ij}(M) \rightarrow \max_{w_{ij}}$,
- (5) $S(x, y, T) \in S_s(g_2, g_3, g_4)$,
- (6) $S(x, y, l) \in S_s(g_2, g_3)$ при всех l ,
- (7) $V(l) \leq V_0(l)$, $V(l) = \sum_{\Omega} \mu_i(l) B_{ij}$ при всех l ,

($i = 1, \dots, n$; $j = 1, \dots, k_i$), $\Omega = \{l = 1, \dots, T$; $i = 1, \dots, n$; $k = 1, \dots, 6\}$, $1 \leq n \leq 86$, где $B_i = (B_{i1}, \dots, B_{i6})$, $f_i = (f_{i1}, \dots, f_{i6})$, $V_\phi = \int Q_\phi(l, t) dt$, $S_{i3}(l) = \max_x B_{i3}(l)$, $B_{ik}(l) = \int b_k(x, y, l) dx dy_i$ – интегральные функции зоны i ; a_0 , a_{ij} – коэффициенты экономической эффективности агентов, $w_i = \{w_{ij}\}$ – вектор действий агентов зоны i , Ext – вектор-функция сценариев состояния внешней среды (уровень наполненности Волгоградского водохранилища, социохозяйственные воздействия и ограничения), $V_{nl} = Q_{1nl} t_{1nl} + Q_{2nl} t_{2nl}$;

V – экологический ущерб (V_0 – его нормативное значение); S_S – состояние стабильности системы S (в котором действия Центра компенсируют природную и антропогенную деградацию, и средние значения показателей паводкового затопления и пойменных популяций определяются средним значением паводкового гидрографа, т.е. существуют однозначные функции g_k ($k = 2, 3, 4$), определяемые соотношениями $b_k(x, y, l) = g_k(G_{пл}(l), x, y)$); $r = (r_1, \dots, r_4)$, r_1 – стоимость упущенной гидроэнергетической полезности от реализации $G_{пл}$, r_2 – цена работ по проектам; r_3, r_4 – затраты на мониторинг, необходимый для синтеза механизмов, T – горизонт планирования, μ_k ($k = 1, \dots, 6$) – весовые коэффициенты.

В зависимости от степени адекватности каждого из соотношений (1)–(7) и целей управления Центр может решать следующие задачи:

- (1)–(4) – задача оптимального управления и ее частные случаи (см. далее);
- (1)–(5) – оптимальная стабилизация экосистемы;
- (1), (3), (4), (5) – поддержание стабильности экосистемы;
- (1), (3), (4), (7) – управление гидрологическим риском;
- (1)–(6) ((1)–(7)) – устойчивое развитие (с экологическим нормативом).

На каждом шаге l динамической оптимизации поиск решения производится на множестве решений соответствующих иерархических игр и условной параметрической оптимизации, что требует численного построения функций $B_{ik}(l, A, U)$ в широком диапазоне параметров. Функции g_k определяются в ходе решения соответствующих задач. Ниже приведены результаты исследования некоторых частных случаев задачи (1)–(4) – параметрической оптимизации паводкового гидрографа и проекта расчистки русел с пассивными (уравнения (2)) и активными (система (2),(3)) агентами.

4.2. МОДЕЛЬ ОПТИМИЗАЦИИ ПАВОДКОВОГО ГИДРОГРАФА ВГЭС

Оптимизация паводкового гидрографа ВГЭС может исследоваться и реализовываться как в составе комплексной задачи управления, так и в виде самостоятельной задачи. Она состоит в

поиске функции G_{nl} как решения задачи оптимизации с несколькими критериями: площадь нерестилищ ($S_{px} \geq S_{onn}$), длительность их затопления ($T_{px} \geq T_{onn}$), максимальная площадь затопления

$$(S_3 = \sum_{i=1}^n S_{i3}) \rightarrow S_{onn} ,$$

объем гидрографа ($V_{nl} \rightarrow \min$) в условиях гидрологической безопасности ($Q_1 \leq Q_m$).

Когнитивный анализ ситуации показывает, что фактическая иерархия критериев

$$S_3 \prec V \prec S_{px} \prec T_{px}$$

сводит многокритериальную задачу к параметрической однокритериальной с параметром S_1 и заданными величинами Q_m , T_{px} :

$$(8) \quad V_{план} \rightarrow \min_{G_{nl}}, S_{px} = S_1,$$

решение которой существует при $S_1 \leq S_{max}$, $S_{max} = \lim(t) S_3(Q_m, t)$. Ее решением на множестве одно- и двухступенчатых гидрографов является двухступенчатый гидрограф $G^* = \{Q^*_1(=Q_m), t^*_1(S_1), Q^*_2(S_1), t^*_2(S_1)\}$ [5]. График функции $S_{min}(S_1) = S_3(S_1, G_{onn})$ проведен жирной линией на рис. 7.

Эколого-экономическая иерархия критериев

$$V \prec S_3 \prec S_{px} \prec T_{px}$$

переводит (8) в задачу:

$$(9) \quad V_{план} \rightarrow \min_{G_{nl}}, S_{px} = S_1, S_3 = S_2,$$

решение которой существует при выполнении неравенств $S_1 \leq S_2 \leq S_{max}$. На рис. 7 штриховкой и цифрами выделены области решения задачи (9) в виде одноступенчатого (1) и двухступенчатого (2) гидрографов. (Вопрос о свойствах гидрографа с большим числом ступеней остается открытым.) Сравнение рис. 2 и рис. 7 показывает, что фактический переход от одноступенчатого к двухступенчатому гидрографу можно объяснить целевым уменьшением отношения S_2 / S_1 .

4.3. МОДЕЛЬ ОПТИМИЗАЦИИ ПРОЕКТА ВОССТАНОВЛЕНИЯ РУСЕЛ

Задача параметрической оптимизации проекта восстановления русел имеет вид

$$\Delta S(Q_1, t_1, R_{Ц}, \Delta z, b(x, y)) \rightarrow \max_{b(x, y)},$$

$$\Delta S = \sum_{i=1}^n \Delta S_i(Q_1, t_1, R_{Ц}, \Delta z, b(x_i, y_i)),$$

где ΔS_i – проектное приращение площади паводкового затопления зоны i ; $R_{Ц}$ – затраты Центра на реализацию проекта, $L = \sum_{i=1}^n L_i$, где L_i – общая длина восстановленных русел в зоне i ; Δz – проектное приращение глубины z русел.

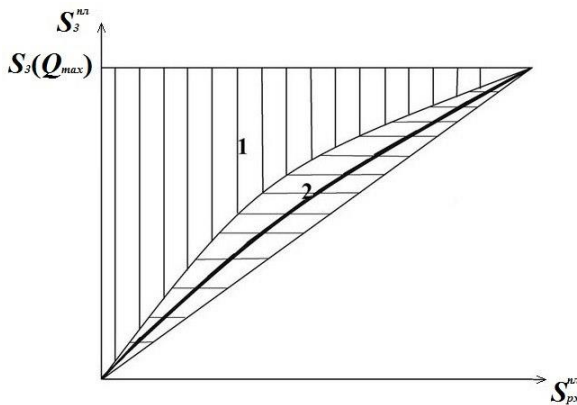


Рис. 7. График $S_{min}(S_{px})$ и области решений задачи (9), отвечающие одноступенчатому (1) и двухступенчатому (2) гидрографам

В созданной ЦМР ширина всех русел ВАП равна 20 м, глубина – $z = 2$ м. Расчеты [3] показали, что для $i = 1, \dots, 20$ при различных $Q_1, R_{Ц}, t_1$ решением задачи $\Delta S_i \rightarrow \max_{\Delta z}$, ($\Delta z = 0; 0,5; 1; \dots$), $\Delta z L = const$, является значение $\Delta z^* = 1$ м, которое использовалось в дальнейшем. (Далее считаем, что $R_{Ц} = r_2 \cdot L$). Предположение о независимом затоплении гидрологических зон ВАП позволяет свести оптимизацию по простран-

ственно распределенной переменной $b(x, y)$ к двухуровневой векторной оптимизации с параметрами Q_1, t_1, L :

$$(10) \Delta S(Q_1, t_1, L) \rightarrow \max_L, \mathbf{L} = (L_1, \dots, L_n),$$

$$\Delta S = \sum_{i=1}^n \Delta S_i(Q_1, t_1, r_2, L_i).$$

Функции ΔS_i в (10) являются решением задач оптимизации работ внутри каждой зоны с параметром L_i (общей длиной восстановленных русел в зоне i) и числом альтернатив $j(L_i)$ в соответствии с числом русловых разветвлений. В связи с большой трудоемкостью построения виртуальных ЦМР с различными глубинами русел ($L_{ВАП} = 887$ км) ниже приведены результаты решения частной задачи (10): $n = 20$, $L_i = 1$ км и $L_i = 2$ км ($i = 1, \dots, 20$). Зависимости $\Delta S_i(Q_1, t_1, L_i)$ ($i = 1, \dots, 20$) строились численно для серии параметров Q_1, t_1 и различных цифровых рельефов ВАП, отличающихся высотами дна русел выбранных зон. На рис. 9–12 представлены результаты расчета динамики $\Delta S_i(L_i)$ и $\Delta S_i(t)$ ($i = 1, \dots, 20$) для нескольких значений параметров Q_1 и t_1 . Представленные рисунки демонстрируют общую тенденцию начального роста с последующей стабилизацией или падением значений функций $\Delta S_i(t)$ с различиями в амплитудах и временной локализации. При $Q_1 = 17$ тыс. м³/с в отдельных зонах наблюдаются отрицательные значения ΔS_i , растущие по абсолютной величине с ростом L , что показывает доминирование эффекта накопления вод в углубленных руслах над их разливом по территории. С ростом Q_1 это доминирование исчезает. Нерегулярный характер зависимости $\Delta S_i(t_1)$ для некоторых зон связан с нерегулярностью рельефа. Путем упорядочения зон ВАП по ΔS_i были построены приведенные на рис. 13–16 решения частной задачи (10) $\Delta S(L)$ для $L_i = 1$ км; 2 км ($i = 1, \dots, 20$) и различных Q_1, t_1 .

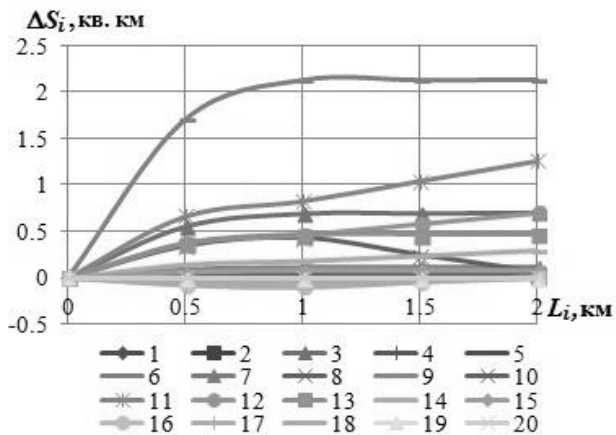


Рис. 8. Зависимость $\Delta S_i(L_i)$ ($i = 1, \dots, 20$) при $Q_1 = 20\,000$ м³/с, $t_1 = 6$ дней

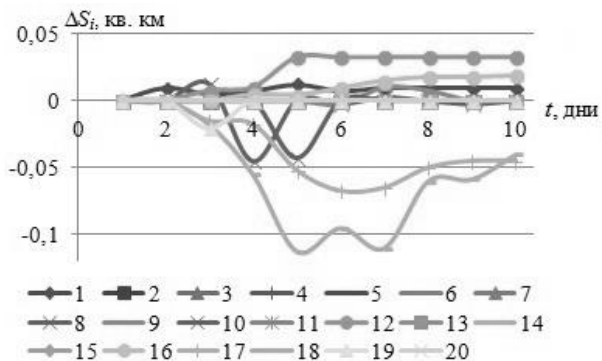


Рис. 9. Зависимость $\Delta S_i(t)$ ($i = 1, \dots, 20$) при $Q_1 = 17\,000$ м³/с, $L_i = 1$ км

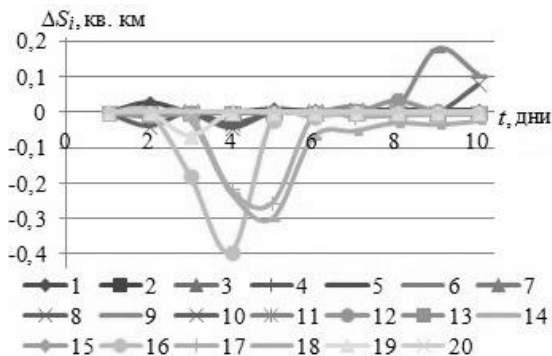


Рис. 10. Зависимость $\Delta S_i(t)$ при $L_i = 2$ км ($i = 1, \dots, 20$)
 $Q_1 = 17\,000$ м³/с

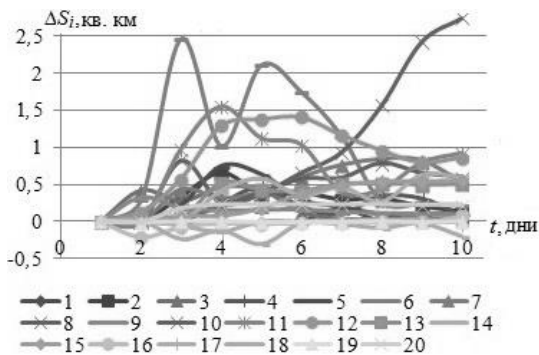


Рис. 11. Зависимость $\Delta S_i(t)$ при $L_i = 1$ км, $Q_1 = 23\,000$ м³/с
 ($i = 1, \dots, 20$)

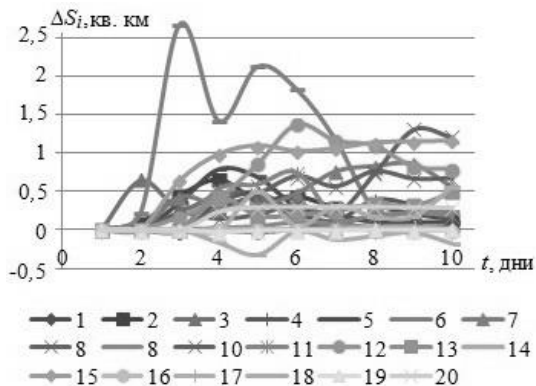


Рис. 12. Зависимость $\Delta S_i(t)$ при $L_i = 2$ км, $Q_1 = 23\,000$ м³/с ($i = 1, \dots, 20$)

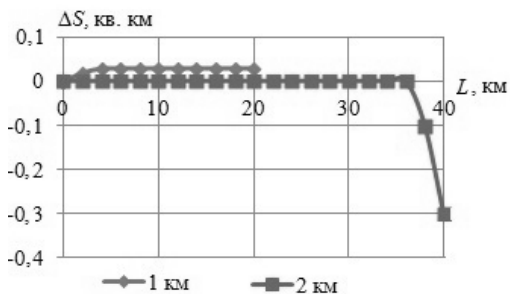


Рис. 13. Зависимость $\Delta S(L)$ при $L_i = 1$ км; 2 км, $Q_1 = 17\,000$ м³/с, $t_1 = 3$ дня ($i = 1, \dots, 20$)

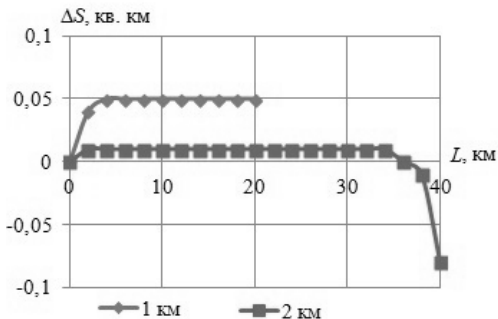


Рис. 14. Зависимость $\Delta S(L)$ при $L_i = 1\text{ км}; 2\text{ км}$, $Q_1 = 17\,000\text{ м}^3/\text{с}$, $t_1 = 6\text{ дней}$ ($i = 1, \dots, 20$)

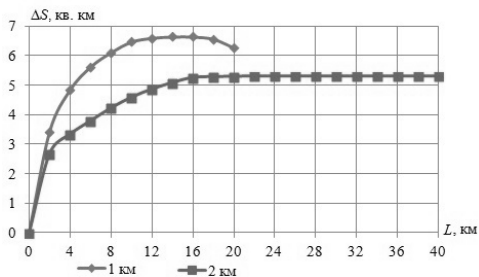


Рис. 15. Зависимость $\Delta S(L)$ при $L_i = 1\text{ км}; 2\text{ км}$, $Q_1 = 23\,000\text{ м}^3/\text{с}$, $t_1 = 3\text{ дня}$ ($i = 1, \dots, 20$)

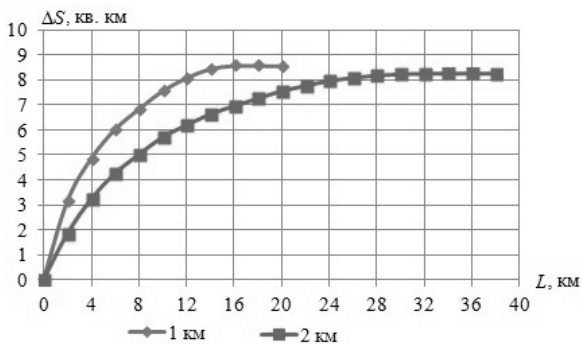


Рис. 16. Зависимость $\Delta S(L)$ при $L_i = 1\text{ км}; 2\text{ км}$, $Q_1 = 23\,000\text{ м}^3/\text{с}$, $t_1 = 6\text{ дней}$ ($i = 1, \dots, 20$)

4.4. МОДЕЛИ СИНТЕЗА ОПТИМАЛЬНЫХ МЕХАНИЗМОВ УПРАВЛЕНИЯ

Целями механизмов управления агентами ВАП в проектируемой системе управления являются поддержание планового состояния системы $(S_s, \mathbf{B}_{nl}, S_3(S_{px}, G_{nl}), G_{nl})$, плановой траектории ее управляемой динамики, снижение затрат r на действия Центра. В [5] представлен механизм управления агентом ВГЭС P_0 , поддерживающий равенство $S_3(S_{px}, G_{факт}, P_0) = S_3(S_{px}, G_{nl})$.

Опишем процедуру синтеза механизма софинансирования Агентами ВАП проекта русловосстановления, включение которого в задачу (10) увеличивает общее финансирование $R = R_{Ц} + R_A = r_2 L$, эквивалентное уменьшению для Центра стоимости работ в каждой из зон, потенциально изменяет ее решение. (Горизонт планирования предполагается единым для всех участников проекта.)

Стратегией Центра является выбор величин q_{ij} – долей агентов A_{ij} в финансировании работ по восстановлению русла каждой из зон длиной L_i . Агент A_{ij} , информированный о величине q_{ij} и функции $\Delta S_i(G_{nl}, L_i)$, находит оптимальную для него величину L_{ij}^* восстановленного русла как решение задачи

$$f_{ij} = a_{ij} \Delta S_i(G_{nl}, L_i) - q_{ij} r_2 L_{ij} \rightarrow \max_{L_{ij}} .$$

Оптимальная стратегия агента A_{ij} :

$$L_{ij}^*(q_i) = (\Delta S_i')^{-1}(q_{ij} r_2 / a_{ij}) ,$$

где $L_i^*(q_i) = (\Delta S_i')^{-1}(q_i r_2 / A_i)$ – оптимальная стратегия коллективного агента зоны i – решение задачи

$$F_i = \sum_j f_{ij} = A_i \Delta S_i(L_i) - q_i r_2 L_i \rightarrow \max_{L_i} ,$$

$$A_i = \sum_j a_{ij} ,$$

$q_i > 0$ – определяемая Центром доля участия коллективного Агента зоны i в финансировании работ по расчистке русла длиной L_i . Согласование интересов агентов A_{ij} ($L_{ij}^* = L_i^*$, $j = 1, \dots, k_i$) достигается при выполнении равенств

$$q_{ij}^* = a_{ij} q_i^* / A_i \quad (i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, k_i),$$

где $q_i^*(L_i)$ – оптимальная стратегия Центра, определяемая из уравнения $L_i^*(q_i) = L_i$.

Обозначим

$$q_i^* = \arg \max_{q_i} (q_i r_2 L_i^*(q_i)),$$

тогда $L_i^{**} = (\Delta S_i')^{-1} (q_i^* r_2^* / A_i)$ – максимальное значение желательной для Агентов зоны i величины L_i . Таким образом, оптимальные для Центра цены работ в зонах имеют вид

$$r_{2i}^* = \begin{cases} r_2(1 - q_i^*), L_i \leq L_i^{**}, \\ r_2, L_i > L_i^{**}; \end{cases} \quad (i = 1, \dots, n).$$

Далее Центр решает задачу (10) с условием

$$R_{Ц}(L) = \sum_{i=1}^n r_{2i}^* L_i.$$

5. Анализ результатов

Как показали расчеты, действия Центра образуют единую систему и эффективность каждого из них обусловлена всей системой действий, что доказывает актуальность комплексной задачи эколога-экономического управления. Проектирование адекватной системы управления ограничивается алгоритмической сложностью и неопределенностью задачи. Вычислительная сложность гидродинамических расчетов и оптимизационных задач в значительной мере преодолевается распараллеливанием алгоритмов. Объективную неопределенность комплексной модели управления придает ее зависимость от внешних сценариев *Ext*. Субъективная неопределенность обусловлена недостаточной разработанностью теоретических основ динамики и рисков в слабоустойчивых распределенных социоприродохозяйственных системах, отсутствием данных пространственного мониторинга и социально-экономической статистики в ВАП [6, 10].

В настоящее время обоснована адекватность нескольких (описанных здесь) частных моделей – составных частей проектируемой комплексной системы: моделей рельефа и паводкового затопления, оптимизации гидрографа и восстановления русел. Однако обоснование практической значимости их результатов требует обширных исследований по определению и повышению их точности. Сравнение с данными спутниковых изменений показывает, что относительная погрешность вычисления

величины S_2 для всей территории ВАП равна 4%–6%, тогда как для небольших по размеру равнинных зон и больших гидрографов она может достигать 30%.

6. Заключение

В силу ограниченного объема настоящей статьи в ней не описаны модели когнитивного анализа (SWOT-, PEST-анализ, когнитивные карты) и риска, сценарно-имитационная модель социоприродохозяйственной динамики ВАП. Недостаточная практическая адекватность уравнений (1) является сдерживающим фактором проектирования комплексной модели управления социально-экономической системой, концентрирующей в себе большое число видов методологической и алгоритмической сложности и неопределенности, что актуализирует новые теоретические и практические задачи моделирования динамики и механизмов управления, параллельных вычислений, мониторинга и социально-экономической статистики территорий.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта РГНФ 14-12-34019 (комплексная модель эколого-экономического управления, оптимизация гидрографа, проекта русловосстановления, механизмов управления), гранта РФФИ 13-01-97062 (модель динамики поверхностных вод), гранта РФФИ 14-17-97030 (использование ГИС для актуализации цифровой модели рельефа), гранта РФФИ 13-07-97056 (программный комплекс моделирования динамики поверхностных вод). Авторы благодарят суперкомпьютерный комплекс МГУ «Ломоносов» за предоставленные вычислительные ресурсы.

Литература

1. *Атлас единой глубоководной системы Европейской части РФ. Т. 7: Река Волга. От Волгоградского гидроузла до Астрахани.* – СПб.: Б.и., 2009. – 34 л.
2. БАРИН А.Н., ГОЛУБ В.Б., ИОЛИН М.М. и др. *Индикация изменений условий среды в северной части ВАП при использовании шкал Л.Г.Раменского и DCA-*

- ординации // Геодезия и аэросъемка. – 2010. – №5. – С. 21–24.
3. ВОРОНИН А.А., ВАСИЛЬЧЕНКО А.А., ХРАПОВ С.С. и др. *Анализ эффективности природовосстановительных проектов в эколого-экономической системе «Волжская ГЭС – Волго-Ахтубинская пойма»* // Управление большими системами. – 2014. – №52. – С. 133–147.
 4. ВОРОНИН А.А., ЕЛИСЕЕВА М.В., ПИСАРЕВ А.В. и др. *Имитационные модели динамики поверхностных вод с использованием данных дистанционного зондирования: влияние рельефа местности* // Прикаспийский журнал: управление и высокие технологии. – 2012. – №3(19). – С. 54–62.
 5. ВОРОНИН А.А., ЕЛИСЕЕВА М.В., ХРАПОВ С.С. и др. *Задача управления гидрологическим режимом в эколого-экономической системе «Волжская ГЭС – Волго-Ахтубинская пойма». Ч 2. Синтез системы управления* // Проблемы управления. – 2012. – №6. – С. 19–25.
 6. ЗЕМЛЯНОВ И.В., ГОРЕЛИЦ О.В., ПАВЛОВСКИЙ А.Е. и др. *Анализ экологических последствий эксплуатации Волгоградского водохранилища для сохранения биоразнообразия основных водно-болотных территорий Нижней Волги* // Отчет о НИР ФГУ «ГОИИ», 2010. – 675 с.
 7. ХОПЕРСКОВ А.В., ХРАПОВ С.С., ПИСАРЕВ А.В. и др. *Задача управления гидрологическим режимом в эколого-экономической системе «Волжская ГЭС – Волго-Ахтубинская пойма». Ч. 1. Моделирование динамики поверхностных вод в период весеннего паводка* // Проблемы управления. – 2012. – №5. – С. 18–25.
 8. ХОПЕРСКОВ А.В., ХРАПОВ С.С., ПИСАРЕВ А.В. *Прямое моделирование динамики поверхностных вод на территории Волго-Ахтубинской поймы* // Суперкомпьютерные технологии в науке, образовании и промышленности. – 2012. – С. 177–181.
 9. ХРАПОВ С.С., ПИСАРЕВ А.В., ВОРОНИН А.А. *Особенности динамики затопления Волго-Ахтубинской поймы в зависимости от режимов испарения и инфильтрации*

- трации // Вестник ВолГУ. Серия 1: Математика. Физика. – 2012. – Т. 15, №1.5. – С. 36–42.
10. ШЕВАНДРИН А.В., ПЕТРОВА Е.А., ВОРОНИН А.А. *Методика мониторинга и оценки уровня социально-экономического развития социохозяйственных слабоустойчивых природных систем (на примере территории Волго-Ахтубинской поймы)* // *Фундаментальные исследования*. – 2014. – № 11–10. – С. 2233–2237.
 11. KHRAPOV S., PISAREV A., KOBELEV I. ETC. *The Numerical Simulation of Shallow Water: Estimation of the Roughness Coefficient on the Flood Stage* // *Advances in Mechanical Engineering*. – 2013. – Vol. 2013. – Article ID 787016. – 11 p.
 12. RABUS B., EINEDER M., ROTH A., ET AL. *The shuttle radar topography mission – a new class of digital elevation models acquired by spaceborne radar* // *ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing*. – 2003. – Vol. 57(4). – P. 241–262.
 13. ROY D.P., WULDER M.A., LOVELAND T.R. ETC. *Landsat-8: Science and product vision for terrestrial global change research* // *Remote Sens. Environ.* – 2014. – No. 145. – P. 154–172.
 14. SUWANDANA E., KAWAMURA K., SAKUNO Y. ETC. *Thematic information content assessment of the ASTER GDEM: A case study of watershed delineation in West Java, Indonesia* // *Remote Sensing Letters*. – 2012. – Vol. 3(5). – P. 423–432.
 15. [Электронный ресурс] – URL: <http://earthexplorer.usgs.gov> (дата обращения: 20.02.2012).

**DESIGNING A SYSTEM FOR ECOLOGICAL–
ECONOMICAL MANAGEMENT OF THE VOLGA–
AKHTUBA FLOODPLAIN ON BASIS OF HYDRODYNAMIC
AND GEOINFORMATIONAL SIMULATION**

Alexander Voronin, Volgograd State University, Volgograd, Doctor of Science, professor (voronin.prof@gmail.com).

Anna Vasilchenko, Volgograd State University, Volgograd, Senior Lecture (aa-vasilchenko@mail.ru).

Maria Pisareva, Volgograd State University, Volgograd, postgraduate (m.eliseeva.vlg@gmail.com).

Andrei Pisarev, Volgograd State University, Volgograd, cand. of Science, associate professor (andrew.pisarev@gmail.com).

Alexander Khoperskov, Volgograd State University, Volgograd, Doctor of Science, professor (ahoperskov@gmail.com).

Sergey Khrapov, Volgograd State University, Volgograd, cand. of Science, associate professor (xss-ip@mail.ru).

Julia Podschipkova, Volgograd State University, Volgograd, student (podschipkova1993@mail.ru).

Abstract: A system is introduced for ecological-economical management of the territory of the Volga-Akhtuba floodplain. The system is built on the basis of hydrodynamic computer simulations and geoinformational technologies. We optimize the flood hydrograph for the Volga hydroelectric station, suggest the optimal plan of the system of channels for Volga-Akhtuba floodplain recovery, and develop control mechanisms for local economic entities.

Keywords: computer simulation, hydrological mode, hydrograph, digital terrain model, the Volga-Akhtuba floodplain, ecological-economical management.

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии Д.А. Новиковым*

*Поступила в редакцию 17.11.2014.
Опубликована 31.05.2015.*

УДК 519.6
ББК 22.18

КОРРЕКЦИЯ КООПЕРАТИВНЫХ ИГР КАК МЕХАНИЗМ СТАБИЛИЗАЦИИ ЭКОЛОГО- ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Горелик В. А.¹

(Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН,
Москва)

Предлагается подход к задачам принятия решений, для которых заданные отношения предпочтения приводят к пустым ядрам, состоящий в минимальной коррекции исходной модели. Идея реализована на примере кооперативной игры в форме характеристической функции с пустым S -ядром как модели неустойчивой эколого-экономической системы, для которой коррекция интерпретируется как механизм стабилизации. Определено понятие S_r -ядра и предложены методы его нахождения.

Ключевые слова: кооперативная игра, характеристическая функция, дележ, S -ядро, минимальная коррекция, S_r -ядро, эксцесс, сбалансированное покрытие.

1. Введение

При анализе любой математической задачи один из основных вопросов – это существование решения. Задачи, которые не имеют решения в принятом смысле, принято называть несобственными. Для таких задач обычно вводится понятие обобщенного решения. Как правило, такое решение превращается в классическое решение для некоторой аппроксимации исходной задачи. Например, если для несовместной системы уравнений или неравенств в качестве решения принимается элемент, кото-

¹ Виктор Александрович Горелик, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, (119333, Москва, ул. Вавилова, 40, vgor16@mail.ru)

рый минимизирует некоторую норму невязки, то это эквивалентно решению совместной системы, получающейся из исходной системы минимальным изменением некоторых параметров (исходных данных) в смысле данной нормы.

Такой подход, состоящий в минимальной коррекции исходной модели, получил в последнее время широкое распространение (см., например, [1–8, 10]). Естественным является его применение в задачах принятия решений, для которых заданные отношения предпочтения приводят к пустым ядрам. В данной работе эта идея реализована на примере кооперативной игры, С-ядро которой является пустым множеством. Если такая игра является моделью некоторой эколого-экономической системы, то это можно трактовать как отсутствие свойства устойчивости компромиссных решений (дележей), а коррекцию модели – как механизм стабилизации системы (например, налоговые платежи или льготы, плата за природные ресурсы, штрафы за загрязнение окружающей среды и т.д.).

2. О подходах к решению проблема пустоты ядра

В данной работе рассматриваются кооперативные игры с побочными платежами (трансферабельной полезностью) в форме характеристической функции (супераддитивной). Напомним некоторые определения.

Определение 2.1. Кооперативной игрой в форме характеристической функции называется пара $\Gamma = (N, v)$, состоящая из конечного множества $N = \{1, 2, \dots, n\}$, элементы которого называются игроками, и вещественной функции $v: 2^N \rightarrow R$, определенной на множестве всех подмножеств $S \subseteq N$, называемых коалициями.

Функция $v(S)$ называется характеристической (или коалиционной функцией), на нее обычно накладываются условия

- (1) $v(\emptyset) = 0$,
- (2) $v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$, если $S \cap T = \emptyset$.

Свойство (1) формальное, а свойство (2), которое называется супераддитивностью, означает, что при объединении не содержащих общих членов коалиций они могут обеспечить себе

общий выигрыш не меньше суммы выигрышей объединившихся коалиций. При таком условии, вообще говоря, для игроков выгодно объединение в «большую коалицию» N . Вопрос состоит в том, как они могут разделить общий выигрыш.

Определение 2.2. Дележом в кооперативной игре называется вектор $x = (x_1, \dots, x_n)$, удовлетворяющий условиям индивидуальной рациональности $x_i \geq v(\{i\}) \quad \forall i \in N$ и коллективной рациональности

$$\sum_{i=1}^n x_i = v(N).$$

Таким образом, множество дележей есть

$$(3) \quad X(v) = \left\{ x \in E^n \mid \sum_{i=1}^n x_i = v(N), x_i \geq v(\{i\}), i \in N \right\}.$$

Определение 2.3. Говорят, что дележ x доминирует дележ y по коалиции S ($x \succ_S y$), если $x_i > y_i, \forall i \in S$ и $\sum_{i \in S} x_i \leq v(S)$.

Говорят, что дележ x просто доминирует дележ y ($x \succ y$), если найдется такая коалиция S , что x доминирует дележ y по коалиции S .

Определение 2.4. C -ядром кооперативной игры называется подмножество таких дележей, для которых не существует доминирующих их дележей.

Далее C -ядро игры будем обозначать просто C . Структура C описывается следующей известной теоремой.

Теорема 1.1. C есть множество всех таких векторов x , что

$$(4) \quad \sum_{i \in S} x_i \geq v(S) \quad \forall S \subset N,$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = v(N).$$

Иногда систему неравенств и одного равенства (4) принимают в качестве определения C -ядра. К сожалению, эта система может быть несовместной, тогда $C = \emptyset$. В терминах метода покрытий такие кооперативные игры называются несбалансированными, а в рамках предлагаемого подхода их можно назвать несобственными (конечно, только относительно C -ядра) и применить к ним методы коррекции.

В качестве решения проблемы пустоты C -ядра Шепли и Шубик [11] предложили следующее понятие C_ε -ядра:

$$C_\varepsilon(v) = \left\{ x \mid \sum_{i=1}^n x_i = v(N), \sum_{i \in S} x_i \geq v(S) - \varepsilon, S \neq \emptyset, S \subset N \right\}.$$

Очевидно, что $C_\varepsilon(v) \neq \emptyset$ для достаточно больших ε . C_ε -ядро есть подмножество множества распределений (распределение – это вектор, удовлетворяющий только условию коллективной рациональности). Оно обладает свойством устойчивости в предположении, что на создание любой коалиции необходимо произвести затраты, равные ε . Если же исходно $C \neq \emptyset$, но слишком широкое, то его можно сузить путем выбора $\varepsilon < 0$, которое тогда интерпретируется как вознаграждение за создание коалиции. Наименьшее C -ядро есть пересечение всех непустых C_ε -ядер. Обозначим его $LC(v)$. Очевидно, что $LC(v) = C_{\varepsilon_0(v)}(v)$, где $\varepsilon_0(v)$ – наименьшее ε такое, что $C_\varepsilon(v) \neq \emptyset$. Величина $\varepsilon_0(v)$, которая может быть и отрицательной, определяется формулой

$$\varepsilon_0(v) = \min_{x \in X(v)} \max_{S \neq \emptyset, N} e(S, x),$$

где $e(S, x) = v(S) - \sum_{i \in S} x_i$ – эксцесс коалиции S для дележа x .

Введение понятия C_ε -ядра является, по существу, частным случаем коррекции исходной игры. Однако при этом возникает вопрос, почему ε – фиксированная для всех коалиций величина, а не зависит от размера или состава коалиций. И почему в него надо вкладывать смысл именно затрат на создание коалиции, ведь эти затраты могли быть уже учтены в исходном значении $v(S)$. Использование общих методов коррекции позволяет взглянуть на проблему пустоты C -ядра более широко.

3. Постановка задачи коррекции игры

Сформулируем задачу минимальной коррекции кооперативной игры с отсутствием требуемого свойства (например, пустым C -ядром):

$$\|\Delta\| \rightarrow \min$$

$$(5) \quad \sum_{i \in S} x_i \geq \tilde{v}(S),$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = \tilde{v}(N),$$

где $\tilde{v}(S) = v(S) - \Delta_{v(S)} \forall S \subseteq N$, $\Delta_{v(S)}$ – координаты вектора Δ , $\Delta \in R^{2^N}$, $\|\cdot\|$ – некоторая векторная норма (далее используется норма Гельдера с $p = 2$ и $p = \infty$), причем игра с характеристической функцией $\tilde{v}(S)$ обладает требуемым свойством.

На параметры коррекции $\Delta_{v(S)}$ могут накладываться дополнительные ограничения, в частности, далее в основном рассматривается коррекция, не предполагающая изменения $v(N)$). Кроме того, при некоторых видах коррекции может нарушаться свойство супераддитивности (2), поэтому возможно введение соответствующих ограничений на коррекцию, сохраняющих данное свойство, а также и любое другое (например, симметрию) или их комбинацию.

Определение 3.1. C_p -ядром назовем множество

$$(6) \quad C_p = \left\{ x \in X'(v) : \|\Delta\|_p \rightarrow \min, \sum_{i \in S} x_i \geq v(S) - \Delta_{v(S)} \forall S \subset N \right\},$$

где $X(v)$ – множество распределений, получаемое из (3) исключением условий $x_i \geq v(\{i\}) \forall i \in N$, $\|\cdot\|_p$ – норма Гельдера, $C_p \neq \emptyset$.

Если C -ядро игры существует, то, очевидно, $C_p = C$.

Несовместность системы (4) означает, что либо исходная модель плохо отражает действительность и нуждается в доработке, либо плох описываемый ею реальный механизм взаимодействия, либо в рамках концепции C -ядра неустойчивость неустраима. Коррекция модели (в данном случае характеристической функции, если это допустимо) является, соответственно, либо уточнением исходных параметров, либо введением дополнительных механизмов, обеспечивающих устойчивость возможных компромиссных решений.

Рассмотрим возможные дополнительные условия (ограничения) на коррекцию.

1. $\Delta_{v(S)} = \varepsilon \forall S \neq \emptyset, N$.

Данное условие похоже на определение C_ε -ядра, однако здесь, в соответствии с общей постановкой задачи коррекции (5), предполагается минимизация параметров коррекции, поэтому для любой нормы получаем следующую задачу:

$$\begin{aligned} |\varepsilon| &\rightarrow \min \\ \sum_{i \in S} x_i &\geq v(S) - \varepsilon \quad \forall S \subset N, \\ \sum_{i=1}^n x_i &= v(N), \end{aligned}$$

которая, очевидно, сводится к задаче линейного программирования (ЗЛП):

$$\begin{aligned} u &\rightarrow \min \\ \left\{ \begin{array}{l} u \geq \varepsilon, \\ u \geq -\varepsilon, \\ \sum_{i \in S} x_i \geq v(S) - \varepsilon \quad \forall S \subset N, \\ \sum_{i=1}^n x_i = v(N). \end{array} \right. \end{aligned}$$

Свойство супераддитивности автоматически сохраняется. Решение этой задачи, вообще говоря, не совпадает с наименьшим ядром, так как если $C \neq \emptyset$, то здесь $\varepsilon = 0$ и ядро не меняется, а $LC(v)$ является его максимальным сужением. Такая коррекция в эколого-экономических терминах может интерпретироваться как единая для всех минимальная плата за использование общих природных (например, водных) ресурсов или наоборот, как компенсация за природоохранные мероприятия.

$$2. \Delta_{v(S)} \geq 0 \quad \forall S \neq \emptyset, N.$$

Это ограничение на коррекцию (параметры ее не отрицательны) при исходном предположении о пустоте C -ядра естественно, так как речь о сужении ядра не идет.

Для нормы Гельдера с параметром $p = 2$ получаем, очевидно, задачу квадратичного программирования:

$$\sum_{S \subset N} \Delta_{v(S)}^2 \rightarrow \min$$

$$\sum_{i \in S} x_i \geq v(S) - \Delta_{v(S)} \quad \forall S \subset N,$$

$$(7) \quad \sum_{i=1}^n x_i = v(N),$$

$$\Delta_{v(S)} \geq 0.$$

Для нормы Гельдера с параметром $p = \infty$ получаем ЗЛП:

$$u \rightarrow \min$$

$$u \geq \Delta_{v(S)},$$

$$\sum_{i \in S} x_i \geq v(S) - \Delta_{v(S)} \quad \forall S \subset N,$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = v(N),$$

$$\Delta_{v(S)} \geq 0.$$

Свойство супераддитивности характеристической функции здесь после коррекции может нарушаться, поэтому ограничения (7) возможно следует дополнить условиями

$$(8) \quad \Delta_{v(S \cup T)} \geq \Delta_{v(S)} + \Delta_{v(T)}, \quad S \cap T = \emptyset,$$

которые в силу их линейности не выводят из класса задач, соответственно, квадратичного или линейного программирования. Такая коррекция в эколого-экономических терминах может интерпретироваться как дифференцированная плата за использование природных ресурсов.

$$3. \quad \Delta_{v(S)} = kv(S) \quad \forall S \neq \emptyset, N, \quad 0 \leq k \leq 1.$$

Будем называть такой вид коррекции пропорциональным. Он может реализовываться как механизм налоговых отчислений или рентных платежей. Супераддитивность характеристической функции здесь, очевидно, сохраняется. Далее этот вариант коррекции будет рассмотрен более подробно.

$$4. \quad \Delta_{v(S)} = k_s v(S), \quad \forall S \neq \emptyset, N, \quad 0 \leq k_s \leq 1.$$

Данный вариант коррекции может реализовываться как механизм налоговых льгот (или субсидий при $k_s < 0$), предоставляемых отдельным группам. Супераддитивность скорректированной характеристической функции здесь может нарушаться, поэтому, возможно, требуются дополнительные ограничения (8).

$$5. \sum_{\substack{S \neq \emptyset \\ S \subset N}} \Delta_{v(S)} = -\Delta_{v(N)}.$$

Этот вариант коррекции предполагает изменение характеристической функции для всех коалиций, включая большую коалицию. Данное условие можно интерпретировать как отчисления в общий фонд на охрану окружающей среды или дотации из этого общего фонда. Выполнение условия супераддитивности характеристической функции здесь обеспечивается введением дополнительного условия (8).

Для нормы Гельдера с параметром $p = 2$ получаем задачу квадратичного программирования:

$$\begin{aligned} \sum_{S \subset N} \Delta_{v(S)}^2 &\rightarrow \min \\ \sum_{i \in S} x_i &\geq v(S) - \Delta_{v(S)} \quad \forall S \subset N, \\ \sum_{i=1}^n x_i &= v(N) - \Delta_{v(N)}, \\ \sum_{S \subset N} \Delta_{v(S)} &= -v(N). \end{aligned}$$

Для нормы Гельдера с параметром $p = \infty$ получаем ЗЛП:

$$\begin{aligned} u &\rightarrow \min \\ u &\geq \Delta_{v(S)}, \\ u &\geq -\Delta_{v(S)}, \\ \sum_{i \in S} x_i &\geq v(S) - \Delta_{v(S)} \quad \forall S \subset N, \\ \sum_{i=1}^n x_i &= v(N) - \Delta_{v(N)}, \\ \sum_{S \subset N} \Delta_{v(S)} &= -v(N). \end{aligned}$$

Если для большой коалиции изменение характеристической функции запрещено, то получаем частный случай этого варианта

$$\sum_{\substack{S \neq \emptyset \\ S \subset N}} \Delta_{v(S)} = 0,$$

который означает сохранение баланса при изменении начальных данных.

Варианты 1–5 позволяют усовершенствовать базовую модель коррекции кооперативной игры с целью более адекватного описания реальных эколого-экономических механизмов управления.

4. Использование сбалансированных покрытий в задаче коррекции

Как известно, необходимые и достаточные условия непустоты S -ядра, полученные О.Н. Бондаревой (и независимо Л. Шепли), основаны на теории двойственности линейного программирования. Рассмотрение двойственных переменных к ограничениям (4) привело к понятию сбалансированного покрытия.

Определение 4.1. Сбалансированным покрытием множества всех игроков N называется отображение λ , ставящее в соответствие каждой собственной (отличной от N) коалиции S действительное число λ_S из отрезка $[0, 1]$ так, что для всех игроков $i \in N$ выполняются равенства $\sum_{\substack{S \subset N \\ S \ni i}} \lambda_S = 1$.

Теорема 4.1 (Бондарева). Необходимым и достаточным условием непустоты S -ядра является выполнение неравенства

$$(9) \quad \sum_{S \subset N} \lambda_S \cdot v(S) \leq v(N)$$

для любого

$$\lambda_S \in \Lambda = \left\{ \lambda_S : \sum_{S \ni i} \lambda_S = 1 \quad \forall i \in N, \lambda_S \geq 0 \quad \forall S \neq N \right\}.$$

Для проверки условий теоремы 4.1 надо решить ЗЛП

$$\sum_{S \subset N} \lambda_S v(S) \rightarrow \max_{\lambda_S \in \Lambda}.$$

Удобство использования сбалансированных покрытий состоит в том, что их множество не зависит от конкретной игры (определяется только числом игроков), а главное, как многогранник, оно определяется конечным числом его вершин (назы-

ваемых приведенными покрытиями). Сбалансированные покрытия можно использовать для нахождения C_p -ядра.

В соответствии с (9) получаем задачу

$$(10) \min \|\Delta\|_p \text{ при условии } \max_{\lambda_S \in \Lambda} \left(\sum_{S \subset N} \lambda_S (v(S) - \Delta_{v(S)}) \right) \leq v(N).$$

Введем множество приведенных сбалансированных покрытий, для которых нарушается условие (9):

$$\Lambda^- = \left\{ \lambda_S : \sum_{S \subset N} \lambda_S v(S) > v(N) \right\}, \Lambda^- \subset \Lambda.$$

Теорема 4.2. Если C -ядро исходной игры пусто, то задача коррекции (10) для нормы Гельдера с параметром $p = \infty$ сводится к ЗЛП

$$u \rightarrow \min$$

$$u \geq \Delta_{v(S)},$$

$$\sum_{S \subset N} \lambda_S \Delta_{v(S)} \geq \sum_{S \subset N} \lambda_S v(S) - v(N) \quad \forall \lambda_S \in \Lambda^-,$$

$$\Delta_{v(S)} \geq 0.$$

Доказательство. Если C -ядро исходной игры пусто, то существует такое подмножество множества сбалансированных покрытий Λ , для которого не выполняются условия (9). Среди этих сбалансированных покрытий выберем только приведенные сбалансированные покрытия, – это есть множество Λ^- . Для элементов этого множества λ_S введем параметры коррекции, удовлетворяющие неравенствам

$$\sum_{S \subset N} \lambda_S (v(S) - \Delta_{v(S)}) \leq v(N)$$

или эквивалентным им

$$\sum_{S \subset N} \lambda_S \Delta_{v(S)} \geq \sum_{S \subset N} \lambda_S v(S) - v(N).$$

В силу положительности λ_S , очевидно, можно ограничиться $\Delta_{v(S)} \geq 0$. При $p = \infty$ имеем целевую функцию $\max \Delta_{v(S)} \rightarrow \min$; вводя $u \geq \Delta_{v(S)}$, получаем задачу на $u \rightarrow \min$, что и завершает доказательство.

Для нормы Гельдера с $p = 2$ задача (10) аналогично сводится к задаче квадратичного программирования:

$$\sum_{S \subset N} \Delta_{v(S)}^2 \rightarrow \min$$

$$\sum_{S \subset N} \lambda_S \Delta_{v(S)} \geq \sum_{S \subset N} \lambda_S v(S) - v(N) \quad \forall \lambda_S \in \Lambda^-,$$

$$\Delta_{v(S)} \geq 0.$$

Таким образом, если при проверке на пустоту C -ядра исходной игры найдены сбалансированные покрытия (достаточно рассматривать приведенные покрытия), для которых не выполняются условия (9), то только они учитываются в ограничениях задачи нахождения C_p -ядра. Например, для игры трех лиц (с супераддитивной характеристической функцией) достаточно рассматривать одно сбалансированное покрытие, которое дает следующее необходимое и достаточное условие не пустоты C -ядра: (11) $v(1, 2) + v(1, 3) + v(2, 3) \leq 2 \cdot v(1, 2, 3)$.

Соответственно, если условие (11) не выполняется, то в задаче поиска C_p -ядра оно выступает как ограничение на коррекцию.

Пример 1. Рассмотрим игру трех лиц с пустым C -ядром в (0-1) редуцированной форме: $v(1) = v(2) = v(3) = 0$, $v(1, 2, 3) = 1$. Для нее $A = v(1, 2) + v(1, 3) + v(2, 3) - 2 > 0$. В силу супераддитивности $v(1, 2)$, $v(1, 3)$, $v(2, 3)$ не больше 1, поэтому $v(1, 2)$, $v(1, 3)$, $v(2, 3)$ не меньше A . Уменьшение этих величин на $\Delta = A/3$ при неизменных $v(1)$, $v(2)$, $v(3)$, $v(1, 2, 3)$ является, очевидно, единственной минимальной коррекцией при любом p (за исключением $p = \infty$, и в этом случае единственность можно достичь дополнительной лексикографической минимизацией). Она сохраняет (0-1) редуцированную форму и супераддитивность. Пусть $v(1, 2) = 0,5$, $v(1, 3) = 0,8$, $v(2, 3) = 1,0$, тогда $\Delta = 0,1$, $C_p = \{(0,1; 0,3; 0,6)\}$.

5. Пропорциональная коррекция.

Рассмотрим подробнее наиболее интересную, на наш взгляд, пропорциональную коррекцию $\Delta_{v(S)} = kv(S) \quad \forall S \subset N$, $0 \leq k \leq 1$. Задача минимальной коррекции имеет вид

$$k \rightarrow \min$$

$$(12) \quad \begin{aligned} \sum_{i \in S} x_i &\geq v(S)(1-k) \quad \forall S \subset N, \\ \sum_{i=1}^n x_i &= v(N), k \geq 0. \end{aligned}$$

Обозначим решение задачи линейного программирования (12) через k_0 , а ядро скорректированной игры, т.е. совокупность x , удовлетворяющих ограничениям (12) при данном k_0 , — через C_k .

Без ограничения общности будем далее считать, что $v(S) \geq 0 \forall S$ (например, игра в (0-1) редуцированной форме, но не обязательно). Введем величину

$$\delta(x, S) = v^{-1}(S) \sum_{i \in S} x_i.$$

Назовем ее относительным эксцессом коалиции S . Так как $\forall x \in X'(v)$ имеет место $\delta(x, N) = 1$, то

$$\delta_0 = \max_{x \in X'(v)} \min_{S \subset N} \delta(x, S) \leq 1.$$

Очевидно, что $C \neq \emptyset$ тогда и только тогда, когда $\delta_0 = 1$.

Теорема 5.1. *Если $C = \emptyset$, то*

$$k_0 = 1 - v(N) \left[\max_{\lambda_S \in \Lambda} \sum_{S \subset N} \lambda_S v(S) \right]^{-1}.$$

Доказательство. Введем замену переменные $r = (1 - k)^{-1}$, $z_i = rx_i$, тогда задача (12) примет вид

$$(13) \quad \begin{aligned} r &\rightarrow \min \\ \sum_{i \in S} z_i &\geq v(S) \quad \forall S \subset N, \\ \sum_{i=1}^n z_i &= rv(N), r \geq 0. \end{aligned}$$

Обозначим решение задачи (13) через r_0 , z^0 . Очевидно, задача (13) эквивалентна задаче

$$(14) \quad \sum_{i=1}^n z_i \rightarrow \min$$

при ограничениях

$$\sum_{i \in S} z_i \geq v(S) \quad \forall S \subset N$$

т.е. для них решения z^0 совпадают, а

$$r_0 = v(N)^{-1} \sum_{i=1}^n z_i^0.$$

Рассматривая двойственную задачу к задаче (14) с переменными λ_S , имеем

$$\sum_{i=1}^n z_i^0 = \max_{\lambda_S \in \Lambda} \sum_{S \subset N} \lambda_S v(S).$$

Так как $k_0 = 1 - r_0^{-1}$, получаем утверждение теоремы.

Пример 2. Рассмотрим игру трех лиц с пустым S -ядром в нeredуцированной форме. Для нее $v(1, 2) + v(1, 3) + v(2, 3) > 2v(1, 2, 3)$. Минимальная пропорциональная коррекция, приводящая к непустому ядру, дает значение $k_0 = 1 - 2v(1, 2, 3) \cdot [v(1, 2) + v(1, 3) + v(2, 3)]^{-1}$. Пусть $v(1) = 200$, $v(2) = 300$, $v(3) = 0$, $v(1, 2) = 800$, $v(1, 3) = 550$, $v(2, 3) = 650$, $v(1, 2, 3) = 900$. Тогда $k_0 = 0,1$ (отчисления с каждой коалиции 10%), $\tilde{v}(1) = 180$, $\tilde{v}(2) = 270$, $\tilde{v}(3) = 0$, $\tilde{v}(1, 2) = 720$, $\tilde{v}(1, 3) = 495$, $\tilde{v}(2, 3) = 585$, а $C_k = \{(315, 405, 180)\}$. Заметим, что максимальное уменьшение значения характеристической функции здесь равно 80, а при независимой коррекции минимальное $\Delta \approx 66,7$ (оно, естественно, меньше, так как при пропорциональной коррекции на нее накладываются дополнительные ограничения).

Пример 3 (распределение затрат на экологические мероприятия). Пусть в одном районе на берегу реки расположены 3 предприятия, отходы производства которых загрязняют водные ресурсы. Районное руководство обязывает их построить по отдельности или совместно очистные сооружения. Себестоимости отдельных или совместных (в любом объединении) сооружений, исключающих все виды загрязнений, заданы: $c(1) = 200$, $c(2) = 300$, $c(3) = 400$, $c(1, 2) = 350$, $c(1, 3) = 450$, $c(2, 3) = 550$, $c(1, 2, 3) = 700$. Свяжем с проблемой распределения затрат игру сбережений [9] по формулам

$$v(S) = \sum_{i \in S} v(i) - v(S) \quad \forall S \subseteq N.$$

Получим $v(1) = v(2) = v(3) = 0$, $v(1, 2) = v(1, 3) = v(2, 3) = 150$, $v(1, 2, 3) = 200$. В этой игре $C = \emptyset$. Пусть в интересах районного управления создание общего очистного сооружения и оно может ввести пропорциональные отчисления от экономии в фонд охраны окружающей среды. Тогда $k_0 = 1/9$ (отчисления с каждой двухэлементной коалиции $\approx 11\%$), а $C_k = \{(200/3, 200/3, 200/3)\}$. Заметим, что и произвольная минимальная коррекция дает такой же результат и сохраняет симметричность игры.

6. Заключение

Предлагаемый подход естественным образом может применяться к различным игровым (и не только) задачам, не имеющим решения в принятом смысле. Однако он может быть использован и для решения другой типичной проблемы теории игр и исследования операций. В задачах принятия решений в условиях неполной информации (наличие случайных или неопределенных неконтролируемых факторов, многокритериальная оптимизация, конфликтная ситуация) по существу не может быть единого принципа оптимальности. Поэтому для них возникают различные понятия решения. Если соответствующие множества решений для данной задачи непусты и пересекаются, то модель обладает хорошими свойствами. Но такая ситуация не типична. Если же эти множества не пересекаются, вопрос выбора решения остается открытым. Тогда, считая исходную модель, а возможно и описываемую ее практическую ситуацию, неустойчивой (некорректной), можно применить метод ее коррекции с целью получения требуемых свойств. В данном случае этим свойством может быть совпадение разных видов решений для скорректированной модели. Например, для кооперативной игры таким свойством может быть принадлежность вектора (значения) Шепли S -ядру, если последнее непусто, или одновременное требование непустоты и принадлежности. Соответствующие результаты получены и планируются к публикации.

Литература

1. ВАТОЛИН А.А. *Коррекция расширенной матрицы несовместной системы линейных неравенств и уравнений* / Математические методы оптимизации в экономико-математическом моделировании. – М.: Наука, 1991. – С. 240–249.
2. ГОРЕЛИК В.А. *Матричная коррекция задачи линейного программирования с несовместной системой ограничений* // ЖВМ и МФ. – 2001. – Т. 41, №11. – С. 1697–1705.
3. ГОРЕЛИК В.А., ЕРОХИН В.И. *Оптимальная матричная коррекция несовместных систем линейных алгебраических уравнений по минимуму евклидовой нормы*. – М.: ВЦ РАН, 2004. – 193 с.
4. ГОРЕЛИК В.А., ЕРОХИН В.И., ПЕЧЕНКИН Р.В. *Численные методы коррекции несобственных задач линейного программирования и структурных систем уравнений*. – М.: ВЦ РАН, 2006. – 152 с.
5. ГОРЕЛИК В.А., МУРАВЬЕВА О.В. *Методы коррекции несобственных задач и их применение к проблемам оптимизации и классификации*. – М.: ВЦ РАН, 2012. – 148 с.
6. ЕРЕМИН И.И., МАЗУРОВ В.Д., АСТАФЬЕВ Н.Н. *Несобственные задачи линейного и выпуклого программирования*. – М.: Наука, 1983. – 336 с.
7. MARKOVSKY I. *Bibliography on total least squares and related methods* // Statistics and its interface. – 2010. – Vol. 2. – P. 1–6.
8. MARKOVSKY I, VAN HUFFEL S. *Overview on total least squares methods* // Signal Processing. – 2007. – Vol. 87. – P. 2283–2302.
9. PELEG B., SUDHOLTER P. *Introduction to the theory of cooperative games*. – Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2007. – 336 p.
10. ROSEN J.B., PARK H., GLICK J. *Total least norm formulation and solution for structured problems* // SIAM Journal on Matrix Anal. Appl. – 1996. – Vol. 17, №1. – P. 110–128.

11. SHAPLEY L.S., SHUBIK M. *Quasi-cores in a monetary economy with nonconvex preferences* // *Econometrica*. – 1966. Vol. 34. – P. 805–827.

CORRECTION OF COOPERATIVE GAMES AS STABILIZATION MECHANISM OF ECOLOGICAL-ECONOMIC SYSTEMS

Viktor Gorelik, Computing Center of RAS, Doctor of Sciences, Professor (vgor@mail.ru)

Abstract: An approach is suggested for decision-making problems where players' preferences result in the empty core of the cooperative game. The approach is based on a minimal correction of the initial model. We illustrate the idea on the cooperative game in the form of characteristic function with the empty core originated from the model of an unsustainable ecological-economic system, for which a correction is interpreted as a stabilization mechanism. We introduce the concept of C_p -core and explain its calculation.

Keywords: cooperative game, characteristic (coalition) function, imputation, core, minimal correction, balanced collection

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии Г.А. Угольницким

Поступила в редакцию 08.01.2015.

Опубликована 31.05.2015.

УДК 517.977.5

ББК 22.18

**МЕХАНИЗМЫ УПРАВЛЕНИЯ ПЛАТЕЖАМИ,
ЛИМИТАМИ И ШТРАФАМИ В ИЕРАРХИЧЕСКИХ
РЕГИОНАЛЬНЫХ МОДЕЛЯХ ОХРАНЫ
ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДЫ**

Горелик В. А.¹

*(Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН,
Москва)*

Золотова Т. В.²

*(Финансовый университет при Правительстве РФ,
Москва)*

Рассмотрена двухуровневая иерархическая система с одним элементом верхнего уровня и n элементами нижнего уровня. Приведены необходимые и достаточные условия оптимальности управления верхнего уровня, которые применяются для исследования предлагаемой иерархической региональной модели охраны окружающей среды. Представлены различные механизмы управления экологическими платежами, лимитами и штрафами, с помощью которых можно достичь идеальной согласованности интересов верхнего и нижнего уровней в иерархической системе.

Ключевые слова: иерархическая система, идеальная согласованность интересов, экологический платеж, лимиты, штрафы.

¹ Виктор Александрович Горелик, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник (Москва, ул. Вавилова, д.40, тел. (499) 135-62-04).

² Татьяна Валерьяновна Золотова, доктор физико-математических наук, профессор (Москва, ул. Щербаковская, д.38, тел. (499) 277-21-02).

1. Введение

Государственный контроль над загрязнением окружающей среды осуществляется территориальными органами Ростехнадзора. В рамках такого контроля производится нормирование загрязнений в зависимости от видов и масштабов хозяйственной и иной деятельности организаций. Выбросы химических веществ и размещение отходов организациями допускаются только на основании специально выданных уполномоченными органами разрешений и в пределах установленных лимитов. Эти принципы закреплены в Федеральном законе «Об охране окружающей среды». При этом определенные виды вредного воздействия облагаются платой. В частности облагаются платой выбросы в атмосферный воздух загрязняющих веществ, сбросы загрязняющих веществ в поверхностные и подземные водные объекты, размещение отходов производства и потребления. Поэтому организация обязана обеспечить измерение и учет объемов загрязнений, возникающих в производственном процессе. Порядок определения платы за вредное воздействие на окружающую природную среду и нормативы платы по каждому из неблагоприятных факторов утверждены постановлением Правительства РФ. Экологические платежи поступают в Федеральный бюджет Российской Федерации.

Уменьшение платежа может осуществляться в результате зачета средств на выполнение природоохранных мероприятий, а также за счет льгот организациям, финансируемым из федерального бюджета и бюджетов субъектов Российской Федерации. Зачет расходов предусмотрен по следующим природоохранным мероприятиям: создание и внедрение автоматической системы контроля за составом и объемом сброса сточных вод или за загрязнением атмосферного воздуха; оснащение двигателей внутреннего сгорания нейтрализаторами для обезвреживания отработавших газов; строительство производств для получения сырья или готовой продукции из отходов производства; работы по экологическому образованию кадров; научно-исследовательские работы соответствующей тематики.

Существует два вида базовых нормативов платы: за вредное воздействие в пределах допустимых нормативов (ПДН), за

вредное воздействие в пределах установленных лимитов (УЛ) или временно согласованных нормативов. По этим видам нормативов дифференцированы ставки платы, а показатели ПДН и УЛ по каждому разрешенному загрязнителю зафиксированы в экологической документации организации.

Для выбора ставки платежа нужно сравнить фактический объем загрязнения с показателями ПДН и УЛ. Если фактический объем допущенного загрязнения меньше предельно допустимого норматива, то плата рассчитывается путем умножения этого объема на соответствующую ставку. Если же фактический объем превысил предельно допустимый норматив, но не достиг установленного лимита, то превышение оплачивается по ставке, действующей в пределах лимита. Ну а если фактический объем больше установленного лимита, то весь объем загрязнения оплачивается по ставке, действующей в пределах лимита, увеличенной в пять раз. Таким же способом определяется размер платежа при отсутствии разрешения на загрязнение. Полученный результат дополнительно корректируется при помощи ряда коэффициентов, учитывающих территориальные факторы.

В настоящей статье рассмотрен вопрос охраны окружающей среды на региональном уровне. При этом экологические проблемы решаются совместно с задачей согласования интересов регионального управления и организаций, осуществляющей хозяйственную деятельность. Предлагаются механизмы управления едиными и дифференцированными экологическими платежами при наличии или отсутствии управления лимитами и штрафами. В [5] рассмотрены вопросы согласования интересов для региональных экологических моделей сохранения природных ресурсов. В данной работе рассматриваются модификации этих моделей, связанных с ограничениями по загрязнению окружающей среды.

В пункте 2 дано описание иерархической системы и приведены необходимые и достаточные условия оптимальности для центра в общем виде. В пункте 3 на примере региональной иерархической модели доказана возможность согласования интересов в системе при назначении региональным центром дифференцированных экологических платежей. В пункте 4 доказана согласованность интересов при назначении центром

единых экологических платежей для всех предприятий и дифференцированных лимитов и штрафов, а в пункте 5 – при фиксированных экологических платежах только путем назначения лимитов и штрафов.

2. Согласование интересов в иерархической системе и условия оптимальности управления центра

В сложных организационных системах механизмы управления основаны на иерархической декомпозиции. Адекватным математическим аппаратом для анализа иерархических систем управления служит теория игр. Развитие теоретико-игрового подхода к моделированию иерархических систем привело к созданию информационной теории иерархических систем [3, 4] и теории активных систем [1, 7]. В рамках информационной теории иерархических систем рассматривались и экологические проблемы [4, 6].

Описание функционирования иерархической системы управления подразумевает задание порядка принятия решений (выбора управляющих параметров) и информированности всех элементов в моменты принятия решений, а также принципов выбора при всех возможных видах информированности (с точки зрения центра). Выбирая управляющие параметры и передавая информацию подсистемам, центр стремится к тому, чтобы в процессе функционирования системы обеспечить выполнение необходимых глобальных ограничений на параметры системы (в широком смысле устойчивости или гомеостазиса системы) и при этом оптимизировать значение своего критерия эффективности. Рассматриваемые в статье математические модели иерархической системы представляют собой игру типа Γ_1 [2, 4], в которой управление центра не зависит от управления нижнего уровня. Отметим, что управление типа Γ_1 может иметь место и для иерархических моделей, в которых механизмы управления включают штрафы, если функция штрафа задается в модели с точностью до параметров. Тогда управление центра состоит в выборе этих параметров, а так называемая «стратегия наказания» игры Γ_2 неприменима.

Основным условием устойчивости и эффективности функционирования в иерархической системе является согласованность интересов всех ее элементов. Интересы элементов согласуемы, если центр может обеспечить устойчивое функционирование системы. Если при этом центр может достичь абсолютного максимума своего критерия эффективности, то интересы элементов системы идеально согласуемы.

Рассмотрим двухуровневую иерархическую систему с одним элементом верхнего уровня (центром) и n элементами нижнего уровня (подсистемами).

Обозначим управление центра через u , считая его точкой некоторого пространства U . Управление подсистем обозначим через v_i , $i = 1, \dots, n$, а управление нижнего уровня в целом – через $v = (v_1, \dots, v_n)$, также считая его точкой некоторого пространства V . При выборе центром управления u и передаче информации об этом выборе множество возможных управлений нижнего уровня есть $R(u) \subseteq V$.

Если фазовое состояние системы x однозначно определяется управлениями u и v , то условие устойчивости системы может быть записано в виде

$$(1) \quad (u, v) \in \Omega,$$

где множество $\Omega \subseteq U \times V$ представляет собой совокупность управлений, приводящих к устойчивым состояниям.

Множество допустимых управлений центра, обеспечивающих выполнение условия устойчивости (1), есть

$$(2) \quad D = \{u \in U \mid (u, v) \in \Omega \quad \forall v \in R(u)\}.$$

Критерии эффективности элементов нижнего уровня являются функциями от управлений верхнего и нижнего уровней, т.е. $G_i(u, v_i)$, $i = 1, \dots, n$. Пространства управлений подсистем $V_i(u)$ зависят от управления центра, т.е. центр имеет возможность в определенных пределах регламентировать свободу их действий. Будем считать, что подсистема при выборе управления стремится максимизировать $G_i(u, v_i)$. Тогда оптимальная стратегия i -й подсистемы $v_i^0(u)$ определяется из условия

$$(3) \quad G_i(u, v_i^0(u)) = \max_{v_i \in V_i(u)} G_i(u, v_i).$$

При этом реакция i -й подсистемы есть

$$R_i(u) = \text{Arg} \max_{v_i \in V_i(u)} G_i(u, v_i).$$

Множество возможных управлений нижнего уровня имеет вид

$$R(u) = \prod_{i=1}^n R_i(u).$$

Пусть критерий эффективности центра представляет собой функцию $F(u, v)$. Задача центра заключается в нахождении оптимального гарантирующего управления u^0 и результата F^0 , определяемых соотношением

$$(4) \quad F^0 = \max_{u \in D} \inf_{v \in R(u)} F(u, v).$$

Если максимум в задаче (3) определяется однозначно, т.е. имеется соотношение $R_i(u) = \text{arg} \max_{v_i \in V_i(u)} G_i(u, v_i)$, то

$$(5) \quad F^0 = \max_{u \in D} F(u, v^0(u)).$$

Пусть пространство управлений нижнего уровня задается системой неравенств:

$$(6) \quad V_i(u) = \{v_i \mid g_i(u, v_i) \geq 0\},$$

где u, v_i – точки конечномерных евклидовых пространств, $g_i(u, v_i)$ – вектор-функция размерности m_i .

Множество Ω будем считать заданным в виде

$$(7) \quad \Omega = \{(u, v) \mid \varphi(u, v) \geq 0\},$$

где $\varphi(u, v)$ вектор-функция размерности l .

В [3] получены необходимые условия, а в [5] – необходимые и достаточные условия оптимальности управления центра в общем виде (здесь они сформулированы в виде теоремы 1).

Приведем две леммы, используемые при дальнейшем изложении. Будем считать векторную функцию $y(x) = (y_1(x), \dots, y_i(x), \dots, y_n(x))$ вогнутой по переменной x , если каждая ее компонента $y_i(x)$, $i = 1, \dots, n$, есть вогнутая функция по x .

Лемма 1. Пусть X и Y – выпуклые множества, и для некоторой непрерывно дифференцируемой функции $h(x, y) \forall x \in X, y \in Y$ выполнены условия

- (а) $\partial h(x, y) / \partial y_i > 0, i = 1, \dots, n$;
- (б) функция $h(x, y)$ вогнута по совокупности переменных;
- (в) $y(x)$ является вогнутой функцией переменной x .

Тогда сложная функция $h(x, y(x))$ вогнута по x .

Лемма 2. Пусть X и Y – выпуклые множества, и для некоторой непрерывно дифференцируемой функции $h(x, y) \forall x \in X, y \in Y$ выполнены условия

(а) $\partial h(x, y)/\partial y_i > 0, i = 1, \dots, n;$

(б) $y(x) = \arg \max_{y \in Y} h(x, y).$

Тогда $y(x)$ является вогнутой функцией переменной x .

Введем функцию Лагранжа для задачи (3), (6):

$$L_i(u, v_i, \lambda_i) = G_i(u, v_i) + \lambda_i g_i(u, v_i),$$

где λ_i – векторный множитель Лагранжа, $\lambda_i \geq 0$. Здесь и далее мы не делаем различия в обозначении вектора-строки и вектора-столбца, считая их соответствующими требованиям операций умножения матриц и векторов.

Теорема 1. Пусть в задачах (3), (5), (6), (7) выполнены следующие условия:

1⁰. Функция $F(u, v)$ и компоненты вектор-функции $\varphi(u, v)$ непрерывно дифференцируемы по всем переменным и вогнуты по совокупности переменных; функции $G_i(u, v_i)$ и компоненты вектор-функций $g_i(u, v_i), i = 1, \dots, n$, – дважды непрерывно дифференцируемы и вогнуты по совокупности переменных.

2⁰. $\partial \varphi_k(u, v)/\partial v_i > 0, i = 1, \dots, n, k = 1, \dots, l.$

3⁰. $\partial F(u, v)/\partial v_i > 0, i = 1, \dots, n.$

4⁰. Градиенты $\partial g_i(u^0, v^0)/\partial v, i \in I = \{i \mid i=1, \dots, n, g_i(u^0, v^0) = 0\}$ в точке (u^0, v^0) линейно независимы; v^0 – решение задачи (3), (6) при $u = u^0$.

5⁰. $\lambda_i^0 > 0, \lambda_i^0$ – векторный множитель Лагранжа, соответствующий (u^0, v^0) ;

6⁰. $\eta(\partial^2 L_i(u^0, v_i^0, \lambda_i^0)/\partial v_i^2)\eta < 0 \forall \eta \neq 0$ такого, что $(\partial g_i(u^0, v^0)/\partial v)\eta = 0, i \in I.$

7⁰. для функции $G_i(u, v_i), i = 1, \dots, n$ выполняются условия

$$\partial G_i(u, v_i)/\partial v_{ij} > 0, j=1, \dots, m; v_i^0(u) = \arg \max_{v_i \in V_i(u)} G_i(u, v_i).$$

Тогда для того чтобы u^0 являлась оптимальной стратегией центра для задачи (5), (7), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$(8) \quad \frac{\partial F(u^0, v^0(u^0))}{\partial u} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F(u^0, v^0(u^0))}{\partial v_i} \cdot \left[\frac{\partial v_i^0(u^0)}{\partial u} \right]^T \right) + \\ + \mu \left(\left[\frac{\partial \varphi(u^0, v^0(u^0))}{\partial u} \right] + \sum_{i=1}^n \left(\left[\frac{\partial \varphi(u^0, v^0(u^0))}{\partial v_i} \right] \cdot \left[\frac{\partial v_i^0(u^0)}{\partial u} \right]^T \right) \right) = 0, \\ \varphi(u^0, v^0(u^0)) = 0,$$

где матрица частных производных функций $v_i^0(u)$ определяется из матричного соотношения

$$\begin{pmatrix} \left[\frac{\partial v_i^0(u)}{\partial u} \right]^T \\ \left[\frac{\partial \lambda_i(u)}{\partial u} \right]^T \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} \left[\frac{\partial^2 G_i(u, v_i^0(u))}{\partial v_i^2} \right] + [\lambda_i(u)] \left[\frac{\partial^2 g_i(u, v_i^0(u))}{\partial v_i^2} \right]^T & \left[\frac{\partial g_i(u, v_i^0(u))}{\partial v_i} \right] \\ [\lambda_i(u)] \left[\frac{\partial g_i(u, v_i^0(u))}{\partial v_i} \right]^T & [g_i(u, v_i^0(u))] \end{pmatrix}^{-1} \times \\ \times \begin{pmatrix} - \left[\frac{\partial^2 G_i(u, v_i^0(u))}{\partial v_i \partial u} \right] - [\lambda_i(u)] \left[\frac{\partial^2 g_i(u, v_i^0(u))}{\partial v_i \partial u} \right]^T \\ - [\lambda_i(u)] \left[\frac{\partial g_i(u, v_i^0(u))}{\partial u} \right]^T \end{pmatrix}.$$

$[\cdot]$ – значок матрицы, T – знак транспонирования матрицы.

Доказательство леммы 1, леммы 2 и теоремы 1 приведено в [5]. При этом лемма 1 и лемма 2 используются при доказательстве теоремы 1.

Оптимальный результат центра может, вообще говоря, отличаться от глобального максимума его критерия.

3. Региональная модель с дифференцированными экологическими платежами

Предположим, что региональный центр регулирует экологический платеж $p = (p_1, \dots, p_m)$ за счет льгот организациям, финансируемым из бюджета субъекта Российской Федерации, где p_j – плата за негативное воздействие на единицу объема y_j j -го загрязняющего вещества, $j = 1, \dots, m$. Предположим, что объемы вредных воздействий пропорциональны объемам соответствующих факторов производства:

$$y_{ij} = \gamma_{ij} x_i = \sum_{s=1}^S \gamma_{ijs} x_{is},$$

где $\gamma_{ij} = (\gamma_{ij1}, \dots, \gamma_{ijs}, \dots, \gamma_{ijS})$ – вектор коэффициентов пропорциональности по j -му загрязняющему веществу; $\gamma_{is} = (\gamma_{i1s}, \dots, \gamma_{ijs}, \dots, \gamma_{ims})$ – вектор коэффициентов пропорциональности по всем загрязняющим веществам для i -го предприятия, использующего s -й фактор производства; $x_i = (x_{i1}, \dots, x_{is}, \dots, x_{iS})$ – вектор факторов производства i -й производственной единицы. Пусть K_i , $i = 1, \dots, n$, – финансовые средства предприятий, $q = (q_1, \dots, q_s)$ – вектор стоимостей факторов производства. Тогда пространство управлений i -й производственной единицы имеет вид

$$\tilde{X}_i(p) = \{(x_i, y_i) \mid qx_i + py_i \leq K_i, x_i \geq 0, y_i \geq 0\}.$$

После подстановки $y_i = (y_{i1}, \dots, y_{ij}, \dots, y_{im}) = (\gamma_{i1}x_i, \dots, \gamma_{ij}x_i, \dots, \gamma_{im}x_i) = (\sum_{s=1}^S \gamma_{i1s}x_{is}, \dots, \sum_{s=1}^S \gamma_{ijs}x_{is}, \dots, \sum_{s=1}^S \gamma_{ims}x_{is})$ имеем

$$py_i = p_1 \sum_{s=1}^S \gamma_{i1s} x_{is} + \dots + p_j \sum_{s=1}^S \gamma_{ijs} x_{is} + \dots + p_m \sum_{s=1}^S \gamma_{ims} x_{is} = \sum_{j=1}^m p_j \sum_{s=1}^S \gamma_{ijs} x_{is}.$$

Это эквивалентно

$$py_i = \sum_{j=1}^m p_j \sum_{s=1}^S \gamma_{ijs} x_{is} = \sum_{j=1}^m \sum_{s=1}^S p_j \gamma_{ijs} x_{is} = \sum_{s=1}^S \sum_{j=1}^m p_j \gamma_{ijs} x_{is} = \tilde{p} x_i,$$

где $\tilde{p} = (\sum_{j=1}^m p_j \gamma_{ij1}, \dots, \sum_{j=1}^m p_j \gamma_{ijs}, \dots, \sum_{j=1}^m p_j \gamma_{ijS})$.

Пространство управлений i -й производственной единицы примет вид

$$X_i(p) = \{x_i \mid Px_i \leq K_i, x_i \geq 0\}, i=1, \dots, n,$$

где

$$\begin{aligned} P &= (q_1 + \tilde{p}_1, \dots, q_s + \tilde{p}_s, \dots, q_s + \tilde{p}_s) = \\ &= (q_1 + \sum_{j=1}^m p_j \gamma_{ij1}, \dots, q_s + \sum_{j=1}^m p_j \gamma_{ijs}, \dots, q_s + \sum_{j=1}^m p_j \gamma_{ijs}). \end{aligned}$$

Выпуск каждого предприятия определяется векторной производственной функцией $f_i(x_i)$, для которой выполняются условия

$$f_i(0) = 0, \frac{\partial f_i(x_i)}{\partial x_{is}} > 0, \xi \frac{\partial^2 f_{ik}(x_i)}{\partial x_i^2} \xi < 0 \quad \forall \xi \neq 0,$$

где $f_{ik}(x_i)$ – k -я компонента векторной функции $f_i(x_i)$.

Если c_i – вектор цен на соответствующие виды продукции i -го предприятия, то задачу максимизации валового выпуска $G_i(x_i)$ каждого предприятия можно записать в виде

$$(9) \quad G_i(x_i) = c_i f_i(x_i) \rightarrow \max_{x_i \in X_i(p)}.$$

Решение задачи i -го предприятия есть вектор $x_i^0(p)$. Выбор в качестве целевой функции предприятия валового дохода обоснован тем, что его затраты K_i фиксированы, т.е. максимизация валового дохода эквивалентна максимизации прибыли. Заметим, что эта целевая функция не зависит от p , т.е. управление центра p влияет на оптимальный выбор нижнего уровня только через ограничения.

Пусть центр стремится к увеличению суммарного валового выпуска предприятий, т.е. целевая функция центра есть

$$F(x_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i G_i(x_i),$$

где α_i – положительные весовые коэффициенты, означающие, например, налоговые отчисления в региональный бюджет. Также предполагается, что центр заинтересован в рациональном использовании ресурсов региона (энергетических, природных, трудовых). Тогда задача центра имеет вид

$$(10) \quad F(x^0(p)) = \sum_{i=1}^n \alpha_i G_i(x_i^0(p)) \rightarrow \max_{p \mid \sum_{i=1}^n x_i^0(p_i) \leq X},$$

где X – ограничение по объемам ресурсов. Решением задачи (10) является вектор p^0 .

В [4] рассмотрена близкая по математической постановке задача потребления и доказано, что, управляя вектором цен на ресурсы и финансовыми средствами K_i , $i = 1, \dots, n$, можно достичь идеальной согласованности интересов уровней иерархии. В [4] также показано, что управляя только едиными ценами на ресурсы при неизменных финансовых средствах, центр, вообще говоря, не может достичь идеальной согласованности. В рассматриваемых далее задачах не предполагается управление финансовыми средствами. Поэтому центр, управляя едиными экологическими платежами при фиксированных финансовых средствах предприятий, не может достичь идеальной согласованности.

Как будет показано ниже, устанавливая для предприятий дифференцированные платежи, можно добиться идеальной согласованности.

Рассмотрим задачу централизованного управления

$$(11) F(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i G_i(x_i) \rightarrow \max_{x | \sum_{i=1}^n x_i \leq X},$$

решение которой есть вектор $x^* = (x_1^*, \dots, x_i^*, \dots, x_n^*)$.

Введем функцию Лагранжа для задачи (11):

$$(12) L(x, \mu) = \sum_{i=1}^n \alpha_i G_i(x_i) + \mu (X - \sum_{i=1}^n x_i),$$

где $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_S)$ – вектор множителей Лагранжа, и рассмотрим для i -го элемента нижнего уровня систему $S + 1$ линейных уравнений относительно $m + 1$ неизвестных $k_i, p_i = (p_{i1}, \dots, p_{im})$:

$$k_i \mu_s = q_s + \tilde{p}_{is}, \quad s = 1, \dots, S, \quad K_i = k_i \mu x_i^*$$

или более подробно

$$(13) k_i \mu_s = q_s + \sum_{j=1}^m p_{ij} \gamma_{ijs}, \quad s = 1, \dots, S, \quad K_i = k_i \mu x_i^*.$$

Обозначим p_{0i} вектор экологических платежей для i -го предприятия, определяемый законодательством РФ.

Теорема 2. Пусть функции $G_i(x_i)$, $i = 1, \dots, n$, непрерывны и строго вогнуты по совокупности переменных и имеют непре-

ривные положительные производные по x_{is} , система линейных уравнений (13) имеет положительное решение такое, что $p_i \leq p_{0i}$, $i = 1, \dots, n$. Тогда выбором дифференцированных экологических платежей p_i для элементов нижнего уровня в задаче (10) центр достигает глобального максимума, т.е. интересы в такой системе идеально согласуемы.

Доказательство. При любом i функция $G_i(x_i)$ имеет на компактном выпуклом множестве $X_i(p)$ при фиксированном p единственный глобальный максимум. Составим для задачи на условный экстремум (9) функцию Лагранжа:

$$(14) \quad L_i(x_i, \lambda_i) = G_i(x_i) + \lambda_i(K_i - Px_i),$$

где $\lambda_i \geq 0$ – множитель Лагранжа. Для того чтобы точка $x_i^0 = (x_{i1}^0, \dots, x_{is}^0, \dots, x_{is}^0)$ была точкой максимума, необходимо и достаточно, чтобы для каждой переменной x_{is}^0 выполнялись условия

$$(15) \quad \frac{\partial L_i(x_i^0, \lambda_i)}{\partial x_{is}} \leq 0, \quad \frac{\partial L_i(x_i^0, \lambda_i)}{\partial x_{is}} x_{ij}^0 = 0, \quad \lambda_i \frac{\partial L_i(x_i^0, \lambda_i)}{\partial \lambda_i} = 0,$$

$$\frac{\partial L_i(x_i^0, \lambda_i)}{\partial \lambda_i} \geq 0, \quad x_{is}^0 \geq 0, \lambda_i \geq 0, s = 1, \dots, S.$$

Возьмем производные функции Лагранжа (14) и запишем условия (15) в виде

$$(16) \quad \frac{\partial(c_i f_i(x_i^0))}{\partial x_{is}} - \lambda_i P_s \leq 0, \quad \left(\frac{\partial(c_i f_i(x_i^0))}{\partial x_{is}} - \lambda_i P_s\right) x_{is}^0 = 0,$$

$$\lambda_i(K_i - Px_i^0) = 0, \quad K_i - Px_i^0 \geq 0, x_{is}^0 \geq 0, \lambda_i \geq 0, s = 1, \dots, S.$$

Функция

$$F(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i G_i(x_i)$$

как линейная комбинация непрерывных строго вогнутых и монотонных функций также является непрерывной строго вогнутой и монотонной, поэтому она имеет единственный глобальный максимум на множестве, определяемом ограничением

$$\sum_{i=1}^n x_i \leq X.$$

Причем это ограничение в точке максимума выполняется как равенство.

Пусть $x^* = (x_1^*, \dots, x_i^*, \dots, x_n^*)$ доставляют глобальный максимум функции

$$F(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i G_i(x_i).$$

Тогда, дифференцируя функцию Лагранжа (12), получаем необходимые и достаточные условия экстремума:

$$(17) \quad \alpha_i \frac{\partial(c_i f_i(x_i^*))}{\partial x_{is}} - \mu_s \leq 0, \quad (\alpha_i \frac{\partial(c_i f_i(x_i^*))}{\partial x_{is}} - \mu_s) x_{is}^* = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n x_i^* = X, \quad x_{is}^* \geq 0, \mu_s \geq 0, i = 1, \dots, n, s = 1, \dots, S.$$

Для того чтобы доказать утверждение теоремы, достаточно показать, что центр может выбрать такие p , что для нижнего уровня $x_i^0 = x_i^*, i = 1, \dots, n$.

Так как $X > 0$ и $\sum_{i=1}^n x_i^* = X$, то $\sum_{i=1}^n x_{is}^* > 0 \quad \forall j$, т.е. $\forall s \exists i$ такое, что $x_{is}^* > 0$ и из (17) $\alpha_i (\partial(c_i f_i(x_i^*)) / \partial x_{is}) = \mu_s$. По условию теоремы $\alpha_i > 0, \partial(c_i f_i(x_i^*)) / \partial x_{is} > 0, \forall x_i$, то $\mu_s > 0, s = 1, \dots, S$.

Определим компоненты экологического платежа так: $P_{is} = k_i \mu_s$, где k_i такие, что имеет место равенство $K_i = P_i x_i^*$. Тогда из (16) и (17) имеем равенство $\lambda_i k_i \mu_s = \mu_s / \alpha_i$, из которого получаем $\lambda_i = 1 / (k_i \alpha_i)$.

Значит, x_i^* удовлетворяет условиям (16), т.е. x_i^* является оптимумом для нижнего уровня при данных дифференцированных платежах $p_i = (p_{i1}, \dots, p_{im})$, определяемых из (13), что и требовалось доказать.

Для нахождения управления центра, обеспечивающего идеальное согласование интересов, нужно решить системы (17) и (13). Однако если система (13) не имеет решения, то идеальная согласованность недостижима. В этом случае центр должен решать задачу оптимального управления в иерархической системе (4) или (5). Для этого можно использовать условия (8). Применительно к модели с дифференцированными экологическими платежами они принимают вид

$$\sum_{i=1}^n (\alpha_i c_i \frac{\partial (f_i(x_i^0(p^0)))}{\partial x_i} - \mu) \cdot \left[\frac{\partial x_i^0(p^0)}{\partial p} \right]^T = 0, \quad \sum_{i=1}^n x_i^0(p^0) = X, \text{ где}$$

$$\begin{pmatrix} \left[\frac{\partial x_i^0(p)}{\partial p} \right]^T \\ \left[\frac{\partial \lambda_i(p)}{\partial p} \right]^T \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \left[\alpha_i c_i \frac{\partial^2 f_i(x_i^0(p))}{\partial x_i^2} \right] & [-P] \\ [\lambda_i(p)] [-P]^T & [K_i - P x_i^0(p)] \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} - \left[\frac{\partial^2 f_i(x_i^0(p))}{\partial x_i \partial p} \right] \\ [\lambda_i(p)] [\gamma_{is}]^T \end{pmatrix}.$$

4. Региональная модель с едиными экологическими платежами и с назначением лимитов и штрафов

Предположим, что центр имеет возможность назначать только единые экологические платежи p , но при этом штрафовать предприятия за превышение допустимых уровней загрязнений, установленных для каждого предприятия. Размеры штрафов z_{ij} за единицу превышения по j -му виду загрязнения и лимиты $\beta_i = (\beta_{i1}, \dots, \beta_{ij}, \dots, \beta_{im})$ для каждого предприятия определяются центром и удовлетворяют условиям $z_{ij} \geq 0, \beta_i \geq 0, i = 1, \dots, n,$

$$\sum_{i=1}^n \beta_{ij} = B_j,$$

где B_j – фиксированная величина, означающая максимально допустимый уровень загрязнений по j -му показателю для всего региона. Обозначим $z_i = (z_{i1}, \dots, z_{im}), z = (z_1, \dots, z_n), \beta = (\beta_1, \dots, \beta_i, \dots, \beta_n)$. Целевая функция центра, как и ранее, имеет вид

$$F(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i G_i(x_i).$$

В качестве функции штрафа возьмем суммарное превышение по всем видам загрязнения. Тогда каждое предприятие решает задачу

$$(18) c_i f_i(x_i) \rightarrow \max_{x_i \in X'_i(p, z_i, \beta_i)},$$

$$X'_i(p, z_i, \beta_i) = \{x_i \mid Px_i + \sum_{j=1}^m z_{ij} \max(0, \gamma_{ij} x_i - \beta_{ij}) \leq K_i, x_i \geq 0\}.$$

Введем вектор превышений допустимых уровней $w_i = (w_{i1}, \dots, w_{im})$. Задача (18) эквивалентна следующей задаче

$$(19) G_i(x_i) = c_i f_i(x_i) \rightarrow \max_{(x_i, w_i) \in X_i(p, z_i, \beta_i)},$$

$$X_i(p, z_i, \beta_i) = \{(x_i, w_i) \mid \gamma_{ij} x_i - \beta_{ij} \leq w_{ij}, \quad Px_i + \sum_{j=1}^m z_{ij} w_{ij} \leq K_i,$$

$$x_i \geq 0, w_{ij} \geq 0, j = 1, \dots, m\}.$$

Решение этой задачи есть вектор $x_i^0(p, z_i, \beta_i)$.

Задача центра принимает вид

$$(20) \sum_{i=1}^n \alpha_i G_i(x_i^0(p, z_i, \beta_i)) \rightarrow \max_{(p, z, \beta) \in Q},$$

$$Q = \{(p, z, \beta) \mid \beta \geq 0, \sum_{i=1}^n \beta_{ij} = B_j, j = 1, \dots, m,$$

$$p \geq 0, z \geq 0, \sum_{i=1}^n x_i^0(p, z_i, \beta_i) \leq X\}.$$

Обозначим оптимальное управление центра (p^0, z^0, β^0) .

Исследуем вопрос, при каких условиях в региональной модели с назначением штрафа возможна идеальная согласованность интересов уровней иерархии.

Составим для задачи на условный экстремум (19) функцию Лагранжа

$$(21) \tilde{L}_i(x_i, w_i, \lambda_{i1}, \lambda_{i2}) = G_i(x_i, w_i, p, z_i, \beta_i) + \lambda_{i1}(K_i - Px_i - \sum_{j=1}^m z_{ij} w_{ij}) + \sum_{j=1}^m \lambda_{ij2}(w_{ij} + \beta_{ij} - \gamma_{ij} x_i),$$

где $\lambda_{i1} \geq 0, \lambda_{i2} \geq 0$ – множители Лагранжа, λ_{i2} – m -мерный вектор.

Задача централизованного управления имеет вид

$$(22) \sum_{i=1}^n \alpha_i G_i(x_i) \rightarrow \max_{x \in Q_1},$$

$$Q_1 = \{x / \sum_{i=1}^n \gamma_{ij} x_i \leq B_j, j=1, \dots, m, \sum_{i=1}^n x_i \leq X\}.$$

Обозначим через $x_i^* = (x_{i1}^*, \dots, x_{is}^*, \dots, x_{iS}^*)$ решение задачи (22). Рассмотрим систему $ns + n$ уравнений относительно $2mn + m + n$ неизвестных $p = (p_1, \dots, p_m)$, $\lambda_1 = (\lambda_{11}, \dots, \lambda_{n1})$, $\lambda_{i2} = (\lambda_{i12}, \dots, \lambda_{im2})$, $\beta_i = (\beta_{i1}, \dots, \beta_{im})$, $i = 1, \dots, n$:

$$(23) \lambda_{i1} P x_i^* + \sum_{j=1}^m \lambda_{ij2} (\beta_{ij} - \gamma_{ij} x_i^*) = \lambda_{i1} K_i, \quad \lambda_{i1} P_s = \mu_{1s} / \alpha_i,$$

$$\sum_{j=1}^m \lambda_{ij2} \gamma_{ijs} = (\sum_{j=1}^m \mu_{2j} \sum_{i=1}^n \gamma_{ijs}) / \alpha_i = 0, \quad i = 1, \dots, n, s = 1, \dots, S.$$

Обозначим через p_0 вектор экологических платежей для предприятий, определяемый законодательством РФ.

Теорема 3. Пусть функции $G_i(x_i)$, $i = 1, \dots, n$, непрерывны и строго вогнуты по совокупности переменных и имеют непрерывные положительные производные по x_{is} ; система уравнений (23) имеет положительное решение $\lambda_1, \lambda_{i2}, p, \beta$ такое, что $p \leq p_0$. Тогда выбором единых экологических платежей p , штрафов z и лимитов β для элементов нижнего уровня в задаче (20) центр достигает глобального максимума, т.е. интересы в такой системе идеально согласуемы.

Доказательство. При любом i функция $G_i(x_i)$ имеет на компактном выпуклом множестве $X_i(p, z_i, \beta_i)$ при фиксированных p, z_i, β_i единственный глобальный максимум.

Для того чтобы точка $x_i^0 = (x_{i1}^0, \dots, x_{is}^0, \dots, x_{iS}^0)$ была точкой максимума, необходимо и достаточно, чтобы для каждой переменной x_{is}^0 и w_i^0 выполнялись условия

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial \tilde{L}_i(x_i^0, w_i^0, \lambda_{i1}, \lambda_{i2})}{\partial x_{is}} \leq 0, & \frac{\partial \tilde{L}_i(x_i^0, w_i^0, \lambda_{i1}, \lambda_{i2})}{\partial w_{ij}} \leq 0, \\
 & \frac{\partial \tilde{L}_i(x_i^0, w_i^0, \lambda_{i1}, \lambda_{i2})}{\partial x_{is}} x_{is}^0 = 0, & \frac{\partial \tilde{L}_i(x_i^0, w_i^0, \lambda_{i1}, \lambda_{i2})}{\partial w_{ij}} w_{ij}^0 = 0, \\
 (24) \quad & \lambda_{i1} \frac{\partial \tilde{L}_i(x_i^0, w_i^0, \lambda_{i1}, \lambda_{i2})}{\partial \lambda_{i1}} = 0, & \lambda_{i2j} \frac{\partial \tilde{L}_i(x_i^0, w_i^0, \lambda_{i1}, \lambda_{i2})}{\partial \lambda_{ij2}} = 0, \\
 & \frac{\partial \tilde{L}_i(x_i^0, w_i^0, \lambda_{i1}, \lambda_{i2})}{\partial \lambda_{i1}} \geq 0, & \frac{\partial \tilde{L}_i(x_i^0, w_i^0, \lambda_{i1}, \lambda_{i2})}{\partial \lambda_{ij2}} \geq 0, \\
 & x_{is}^0 \geq 0, w_i^0 \geq 0, \lambda_{i1} \geq 0, \lambda_{i2} \geq 0, j = 1, \dots, m, s = 1, \dots, S.
 \end{aligned}$$

Возьмем производные функции Лагранжа (21) и запишем условия (24) в виде

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial (c_i f_i(x_i^0))}{\partial x_{is}} - \lambda_{i1} P_s - \sum_{j=1}^m \lambda_{ij2} \gamma_{ijs} \leq 0, \quad -\lambda_{i1} z_{ij} + \lambda_{ij2} \leq 0, \\
 & \left(\frac{\partial (c_i f_i(x_i^0))}{\partial x_{is}} - \lambda_{i1} P_s - \sum_{j=1}^m \lambda_{ij2} \gamma_{ijs} \right) x_{is}^0 = 0, \\
 & (-\lambda_{i1} z_{ij} + \lambda_{ij2}) w_{ij}^0 = 0, \\
 (25) \quad & \lambda_{i1} (K_i - P x_i^0 - \sum_{j=1}^m z_{ij} w_{ij}^0) = 0, \quad \lambda_{ij2} (w_{ij}^0 + \beta_{ij} - \gamma_{ij} x_i^0) = 0, \\
 & K_i - P x_i^0 - \sum_{j=1}^m z_{ij} w_{ij}^0 \geq 0, \quad w_{ij}^0 + \beta_{ij} - \gamma_{ij} x_i^0 \geq 0,
 \end{aligned}$$

$$x_{is}^0 \geq 0, w_i^0 \geq 0, \lambda_{i1} \geq 0, \lambda_{i2} \geq 0, j = 1, \dots, m, s = 1, \dots, S.$$

Функция

$$F(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i G_i(x_i)$$

как линейная комбинация непрерывных строго вогнутых и монотонных функций также является непрерывной, строго вогнутой и монотонной, поэтому она имеет единственный глобальный максимум на множестве Q_1 .

Пусть $x^* = (x_1^*, \dots, x_i^*, \dots, x_n^*)$ доставляют глобальный максимум функции

$$F(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i G_i(x_i)$$

на множестве Q_1 . Тогда, дифференцируя функцию Лагранжа

$$L_0(x, \mu) = \sum_{i=1}^n \alpha_i G_i(x_i) + \mu_1 (X - \sum_{i=1}^n x_i) + \sum_{j=1}^m \mu_{2j} (B_j - \sum_{i=1}^n \gamma_{ij} x_i),$$

получаем необходимые и достаточные условия экстремума:

$$\begin{aligned} & \alpha_i \frac{\partial (c_i f_i(x_i^*))}{\partial x_{is}} - \mu_{1s} - \sum_{j=1}^m \mu_{2j} \sum_{i=1}^n \gamma_{ijs} \leq 0, \\ & (\alpha_i \frac{\partial (c_i f_i(x_i^*))}{\partial x_{is}} - \mu_{1s} - \sum_{j=1}^m \mu_{2j} \sum_{i=1}^n \gamma_{ijs}) x_{is}^* = 0, \\ (26) \quad & \sum_{i=1}^n x_i^* \leq X, \quad \sum_{i=1}^n \gamma_{ij} x_i^* \leq B_j, \\ & \mu_1 (X - \sum_{i=1}^n x_i^*) = 0, \quad \sum_{j=1}^m \mu_{2j} (B_j - \sum_{i=1}^n \gamma_{ij} x_i^*) = 0, \\ & x_{is}^* \geq 0, \quad \mu_1 \geq 0, \quad \mu_{2j} \geq 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad s = 1, \dots, S. \end{aligned}$$

Для того чтобы доказать утверждение теоремы, достаточно показать, что центр может выбрать такие p, z_i, β_i , что для нижнего уровня $x_i^0 = x_i^*, i = 1, \dots, n$.

Так как $X > 0$ и $\sum_{i=1}^n x_i^* = X$, то $\sum_{i=1}^n x_{is}^* > 0 \quad \forall j$, т.е. $\forall s \exists i$ такое, что $x_{is}^* > 0$ и из (26)

$$\alpha_i \frac{\partial (c_i f_i(x_i^*))}{\partial x_{is}} = \mu_{1s} + \sum_{j=1}^m \mu_{2j} \sum_{i=1}^n \gamma_{ijs}.$$

Определим $\lambda_{i1}, \lambda_{i2}, p, \beta$ согласно системе (23), из которой следует, что $\lambda_{i1} > 0$, а $\lambda_{i2} > 0$ по предположению теоремы. Положим $z_{ij} = \lambda_{i2j} / \lambda_{i1}$, $w_{ij} = -\beta_{ij} + \gamma_{ij} x_i^*$, тогда из первого уравнения системы (23) имеем

$$K_i - P x_i^* - \sum_{j=1}^m z_{ij} w_{ij} = 0.$$

Из второго и третьего уравнений системы (23)

$$\frac{\partial(c_i f_i(x_i^*))}{\partial x_{is}} - \lambda_{i1} P_s - \sum_{j=1}^m \lambda_{ij2} \gamma_{ijs} = 0.$$

Значит, в точке x_i^* выполнены все условия (25) и x_i^* является решением задачи нижнего уровня, т.е. $x_i^* = x_i^0$. Теорема доказана.

Для нахождения управления центра, обеспечивающего идеальное согласование интересов, нужно решить системы (26) и (23). Однако если система (23) не имеет решения, то идеальная согласованность недостижима. В этом случае центр должен решать задачу оптимального управления в иерархической системе (4) или (5). Для этого предлагается использовать условия (8), конкретный вид которых может быть получен аналогично тому, как это сделано в предыдущем разделе.

Возможен также случай, когда центр управляет величинами штрафов z_i и лимитов β_i , $i = 1, \dots, n$, но не может управлять платежами p . Такая ситуация возникает, когда экологические платежи установлены на государственном уровне и у регионального центра нет возможности менять их. Из доказательства теоремы 3 вытекает, что идеальная согласованность в этом случае может быть достигнута при условии, что система (23) имеет решение при фиксированных единых платежах \bar{p} . Это весьма жесткое условие, поэтому в общем случае идеальной согласованности нет, а оптимальное управление центра определяется на основании условий (8).

5. Заключение

Предложенные математические методы исследования позволяют определять оптимальное управление в иерархических моделях региональных систем охраны окружающей природной среды и в некоторых случаях согласовывать интересы регионального центра и предприятий, сочетая эффективности промышленного производства и экологические ограничения.

Литература

1. БУРКОВ В.Н., НОВИКОВ Д.А. *Как управлять организациями*. – М.: Синтег, 2004. – 400 с.
2. ГЕРМЕЙЕР Ю.Б. *Игры с противоположными интересами*. – М.: Наука, 1976. – 338 с.
3. ГОРЕЛИК В.А., ГОРЕЛОВ М.А., КОНОНЕНКО А.Ф. *Анализ конфликтных ситуаций в системах управления*. – М.: Радио и связь, 1991. – 286 с.
4. ГОРЕЛИК В.А., КОНОНЕНКО А.Ф. *Теоретико-игровые модели принятия решений в эколого-экономических системах*. – М.: Радио и связь, 1982. – 144 с.
5. ЗОЛотова Т.В. *Вопросы согласования интересов в региональной иерархической модели сохранения природных ресурсов* // Управление большими системами. – 2009. – №26. – С. 81–101.
6. МОИСЕЕВ Н.Н., АЛЕКСАНДРОВ В.В., ТАРКО А.М. *Человек и биосфера*. – М.: Наука, 1985. – 271 с.
7. НОВИКОВ Д.А. *Теория управления организационными системами*. – М.: Физматлит, 2007. – 583 с.

HIERARCHICAL REGIONAL MODELS OF ENVIRONMENT PROTECTION

Viktor Gorelik, Computer Center of the name A.A.Dorodnitsyn of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Doctor of Science, professor (gorelik@ccas.ru)

Tatiana Zolotova, Financial University under the Government of the Russian Federation, Moscow, Doctor of Science, assistant professor (tgold11@mail.ru)

Abstract: We study a fan-shaped hierarchical system with one top-level element and n elements at the lower level. Necessary and sufficient conditions for the optimal strategy of the upper level are formulated, which are used to study a hierarchical model of regional environmental protection. Several control mechanisms for environmental payments, limits, and penalties are suggested, which allow perfect coordination of interests of the upper and lower hierarchical levels.

Keywords: hierarchical system, perfect coordination of interests, environmental payments, limits, penalties.

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии М.В. Губко*

*Поступила в редакцию 08.01.2015.
Опубликована 31.05.2015.*

УДК 519.83

СИЛЬНО ДИНАМИЧЕСКИ УСТОЙЧИВОЕ КООПЕРАТИВНОЕ РЕШЕНИЕ В ОДНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЕ УПРАВЛЕНИЯ ВРЕДНЫМИ ВЫБРОСАМИ¹

Громова Е. В.², Петросян Л. А.³

(Санкт-Петербургский государственный университет)

Рассматривается проблема построения сильно динамически устойчивого (СДУ) кооперативного решения для дифференциальных игр двух лиц. Формулируется подход, позволяющий при достаточно общих предположениях построить кооперативное решение, удовлетворяющее СДУ. Показывается, что полученное решение, кроме того, будет удовлетворять условию защиты от иррационального поведения. Теоретические результаты демонстрируются на примере дифференциальной игры управления вредными выбросами в атмосферу.

Ключевые слова: дифференциальные игры, динамическая устойчивость, сильно динамическая устойчивость, условие Янга, модель управления вредными выбросами.

1. Постановка задачи

Рассматривается кооперативная дифференциальная игра n лиц $\Gamma(x_0, T - t_0)$ с предписанной продолжительностью $T - t_0$, на отрезке времени $t \in [t_0, T]$ из начального состояния $x_0 \in R^n$,

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке гранта СПбГУ 9.38.245.2014.

² Екатерина Викторовна Громова, кандидат физико-математических наук, доцент (ekaterina.shevkoplyas@gmail.com).

³ Леон Аганесович Петросян, доктор физико-математических наук, профессор (Санкт-Петербург, Петродворец, Университетский пр., д.35, тел. (812) 428-71-59).

уравнениями движения

$$(1) \quad \dot{x} = f(x, u_1, \dots, u_n), \quad x(t_0) = x_0, \\ x \in R^n, u_i \in U \subset \text{comp} R^k, \text{ и функциями выигрыша}$$

$$K_i(x_0, T - t_0; u_1, \dots, u_n) = \int_{t_0}^T h_i(x, u_1, \dots, u_n) dt,$$

где $x(t)$ — решение системы (1) при управлениях (u_1, \dots, u_n) и $i \in N$, где N — множество игроков, $|N| = n$.

Пусть $S \subset N$ — коалиция в игре $\Gamma(x_0, T - t_0)$. Определим для $S \subset N$ характеристическую функцию $v(x_0, T - t_0; S)$ как нижнее значение антагонистической игры между коалицией S , действующей как игрок I (максимизирующий) и коалицией $N \setminus S$, действующей как игрок II (минимизирующий), где под выигрышем игрока S понимается сумма выигрышей игроков, входящих в S , а под стратегией игрока S — элемент декартова произведения множеств стратегий игроков, входящих в S . В данной формализации мы из соображений простоты под стратегией игрока будем понимать функцию $u_i(x, t)$ со значением в множестве мгновенных допустимых управлений U_i . Нижнее значение игры (supinf) всегда существует и является супераддитивной функцией от коалиции $S \subset N$.

Определение 1. Траекторию $\bar{x}(t)$, $t \in [t_0, T]$, назовем кооперативной траекторией, если имеет место

$$\begin{aligned} & \max_{u_1, \dots, u_n} \sum_{i=1}^n K_i(x_0, T - t_0; u_1, \dots, u_n) = \\ & = \max_{u_1, \dots, u_n} \sum_{i=1}^n \int_{t_0}^T h_i(x, u_1, \dots, u_n) dt = \\ & = \sum_{i=1}^n \int_{t_0}^T h_i(\bar{x}(t), \bar{u}_1(t), \dots, \bar{u}_n(t)) dt. \end{aligned}$$

Мы предполагаем, что такая траектория $\bar{x}(t)$, $t \in [t_0, T]$, существует и единственна. В противном случае дальнейшие выкладки и определения необходимо незначительно изменить.

Рассмотрим подыгры игры $\Gamma(x_0, T - t_0)$, $\Gamma(\bar{x}(t), T - t)$ с начальным условием на кооперативной траектории. В каждой подыгре $\Gamma(\bar{x}(t), T - t)$ можно таким же образом, как и в основной игре $\Gamma(x_0, T - t_0)$, определить характеристическую функцию (см. [1]) $v(\bar{x}(t), T - t; S)$, где $S \subset N$, которая также будет супераддитивной. Определим множество дележей $M(\bar{x}(t), T - t)$ в игре $\Gamma(\bar{x}(t), T - t)$ как

$$M(\bar{x}(t), T - t) = \{ \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) : \sum_{i=1}^n \alpha_i = v(\bar{x}(t), T - t; N), \\ \alpha_i \geq v(\bar{x}(t), T - t; \{i\}), i \in N \}.$$

Из супераддитивности характеристической функции следует, что множество $M(\bar{x}(t), T - t) \neq \emptyset$, $t \in [t_0, T]$. Определим также ядро $C(\bar{x}(t), T - t) \subset M(\bar{x}(t), T - t)$ в игре $\Gamma(\bar{x}(t), T - t)$ и предположим, что для всех $t \in [t_0, T]$, $C(\bar{x}(t), T - t) \neq \emptyset$.

Напомним, что ядро в игре $\Gamma(\bar{x}(t), T - t)$ — это множество дележей $\alpha^t = (\alpha_1^t, \dots, \alpha_n^t)$, удовлетворяющих неравенствам

$$\sum_{i \in S} \alpha_i^t \geq v(\bar{x}(t), T - t; S)$$

для всех $S \subset N$.

Определение 2. [6]. Функция $\beta_i(\tau)$, $\tau \in [t_0, T]$, $i \in N$, называется процедурой распределения дележа $\alpha \in M(x_0, T - t_0)$, если

$$\alpha_i = \int_{t_0}^T \beta_i(\tau) d\tau, \quad i \in N.$$

Определение 3. [6]. Ядро $C(x_0, T - t_0)$ в игре $\Gamma(x_0, T - t_0)$ называется динамически устойчивым, если для каждого дележа $\alpha \in C(x_0, T - t_0)$ найдется процедура распределения дележа (ПРД) такая, что

$$\int_t^T \beta_i(\tau) d\tau \in C(\bar{x}(t), T - t), \quad t \in [t_0, T], i \in N.$$

Нами было ранее показано (см. [4, 6]), что если $C(\bar{x}(t), T - t) \neq \emptyset$ при $t \in [t_0, T]$ и существует дифференцируемый селектор $\alpha(t) \in C(\bar{x}(t), T - t)$ ($\alpha(t_0) = \alpha$), то ядро является динамически устойчивым и ПРД $\{\beta_i(t)\}$ определяется по формуле

$$\beta_i(\tau) = -\frac{d}{d\tau}\alpha_i(\tau), \quad i = 1, \dots, n.$$

$$\alpha(t_0) = \alpha.$$

Приведем определение сильного динамически устойчивого ядра $C(x_0, T - t_0)$ в игре $\Gamma(x_0, T - t_0)$.

Определение 4. Ядро $C(x_0, T - t_0)$ сильно динамически устойчиво в игре $\Gamma(x_0, T - t_0)$, если

- 1) $C(\bar{x}(t), T - t) \neq \emptyset, t \in [t_0, T]$;
- 2) существует такой дележ $\alpha \in C(x_0, T - t_0)$ и такая ПРД $\beta(\tau) = (\beta_1(\tau), \dots, \beta_n(\tau)), \tau \in [t_0, T]$, что

$$\alpha_i = \int_{t_0}^T \beta_i(\tau) d\tau, \quad \forall i = 1, \dots, n,$$

и

$$C(x_0, T - t_0) \supset \int_{t_0}^t \beta(\tau) d\tau \oplus C(\bar{x}(t), T - t), \quad t \in [t_0, T].$$

Здесь символ \oplus определяется следующим образом. Пусть $a \in R^n, B \subset R^n$, тогда $a \oplus B = \{a + b : b \in B\}$.

Заметим, что определение 4 незначительно отличается от определения сильной динамической устойчивости в работах [3, 14]. Сильная динамическая устойчивость ядра означает, что при развитии игры вдоль кооперативной траектории $\bar{x}(t)$ в ядре существует дележ $\bar{\alpha}$ такой, что однократное отклонение в момент t от этого дележа в пользу другого оптимального дележа (т.е. другого дележа из ядра в подыгре, начинающейся в момент времени t из состояния $\bar{x}(t)$), приведет к суммарным выплатам игрокам во всей игре, которые также содержатся в изначально выбранном принципе оптимальности (ядре).

2. Сильно динамически устойчивое ядро в кооперативной дифференциальной игре с предписанной продолжительностью и с двумя участниками

2.1. СУЩЕСТВОВАНИЕ СИЛЬНО ДИНАМИЧЕСКИ УСТОЙЧИВОГО ЯДРА

Как мы уже отметили и как это следует непосредственно из определения множества дележей и ядра для игры двух лиц, эти множества совпадают, т.е. $M(x_0, T - t_0) = C(x_0, T - t_0)$, и также множества $M(\bar{x}(t), T - t) = C(\bar{x}(t), T - t)$, $t \in [t_0, T]$.

Для игры $\Gamma(x_0, T - t_0)$ с двумя участниками ядро имеет вид

$$\begin{aligned} C(x_0, T - t_0) = \{ \alpha = (\alpha_1, \alpha_2) : \alpha_1 + \alpha_2 = v(x_0, T - t_0; N), \\ \alpha_1 \geq v(x_0, T - t_0; \{1\}), \\ \alpha_2 \geq v(x_0, T - t_0; \{2\}) \} = M(x_0, T - t_0). \end{aligned}$$

Аналогичным образом для подыгр $\Gamma(x(t), T - t)$ мы имеем

$$\begin{aligned} C(\bar{x}(t), T - t) = \{ \alpha^t = (\alpha_1^t, \alpha_2^t) : \alpha_1^t + \alpha_2^t = v(\bar{x}(t), T - t; N), \\ \alpha_1^t \geq v(\bar{x}(t), T - t; \{1\}), \\ \alpha_2^t \geq v(\bar{x}(t), T - t; \{2\}) \} = M(\bar{x}(t), T - t). \end{aligned}$$

Введем величины $A_1(t) \geq 0$ и $A_2(t) \geq 0$ следующим образом:

$$(2) \quad A_1(t) + A_2(t) = v(\bar{x}(t), T - t; N) - \sum_{i=1}^2 v(\bar{x}(t), T - t; \{i\}) \geq 0.$$

Вычислим $\gamma_i(t) = -\frac{d}{dt} A_i(t)$, $i = 1, 2$. Будем также использовать обозначение A_i для $A_i(T)$, $i = 1, 2$. Очевидно, что

$$A_i = \int_{t_0}^T \gamma_i(t) dt.$$

Введем функции (в предположении дифференцируемости функций $v(\bar{x}(t), T - t; \{i\})$)

$$(3) \quad \bar{\beta}_i(\tau) = \gamma_i(\tau) - \frac{d}{d\tau} v(\bar{x}(\tau), T - \tau; \{i\})$$

и потребуем, чтобы при всех $\tau \in [t_0, T]$ имело место

$$(4) \quad \bar{\beta}_1(\tau) + \bar{\beta}_2(\tau) = -\frac{d}{d\tau}v(\bar{x}(\tau), T - \tau; N).$$

Тогда получаем

$$(5) \quad \sum_{i=1}^2 \gamma_i(\tau) = -\frac{d}{d\tau}v(\bar{x}(\tau), T - \tau; N) + \sum_{i=1}^2 \frac{d}{d\tau}v(\bar{x}(\tau), T - \tau; \{i\})$$

и, интегрируя, получаем (2)

$$A_1 + A_2 = -\int_{t_0}^T \frac{d}{d\tau}v(\bar{x}(\tau), T - \tau; N)d\tau + \sum_{i=1}^2 \int_{t_0}^T \frac{d}{d\tau}v(\bar{x}(\tau), T - \tau; \{i\})d\tau.$$

$$A_1 + A_2 = v(\bar{x}(t_0), T - t_0; N) - \sum_{i=1}^2 v(\bar{x}(t_0), T - t_0; \{i\}) \geq 0.$$

То есть если $\gamma_i(\tau)$, $i = 1, 2$ удовлетворяет (5), то условие (2) всегда выполнено.

Рассмотрим теперь вектор $\bar{\alpha} = (\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2)$, где

$$(6) \quad \bar{\alpha}_i = \int_{t_0}^T \bar{\beta}_i(\tau)d\tau.$$

Легко видеть, что $\bar{\alpha} \in C(x_0, T - t_0)$. Действительно,

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_i &= \int_{t_0}^T \bar{\beta}_i(\tau)d\tau = \int_{t_0}^T \gamma_i(\tau)d\tau + \int_{t_0}^T \left(-\frac{d}{d\tau}v(\bar{x}(\tau), T - \tau; \{i\})\right)d\tau = \\ &= A_i + v(x_0, T - t_0; \{i\}), \end{aligned}$$

и согласно (2)

$$\bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2 = \sum_{i=1}^2 A_i + v(x_0, T - t_0; \{i\}) = v(x_0, T - t_0; N).$$

А поскольку $A_i > 0$, имеем

$$\bar{\alpha}_i = A_i + v(x_0, T - t_0; \{i\}) \geq v(x_0, T - t_0; \{i\}),$$

т.е. $\bar{\alpha} = (\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2) \in C(x_0, T - t_0)$.

Условие 2.1. Существуют такие A_1 и A_2 , удовлетворяющие (2), и такие $\gamma_1(\tau)$, $\gamma_2(\tau)$, $\tau \in [t_0, T]$, удовлетворяющие (4), что $\int_{t_0}^t \gamma_i(\tau) d\tau \geq 0$ при $t \in [t_0, T]$.

Теорема 1. При выполнении условия 2.1 ядро игры $\Gamma(x_0, T - t_0)$ сильно динамически устойчиво.

Доказательство. Во-первых, из-за супераддитивности характеристической функции $C(\bar{x}(\tau), T - \tau) \neq 0$, $\tau \in [t_0, T]$. Возьмем теперь дележ $\bar{\alpha} = (\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2)$, который определяется формулой (6), $\bar{\alpha} \in C(x_0, T - t_0)$.

Покажем, что имеет место сильная динамическая устойчивость, при этом в качестве дележа $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, фигурирующего в определении сильной динамической устойчивости, можно взять дележ $\bar{\alpha} = (\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2)$. Надо показать включение

$$\int_{t_0}^t \bar{\beta}(\tau) d\tau \oplus C(\bar{x}(t), T - t) \subset C(x_0, T - t_0)$$

при всех $t \in [t_0, T]$, где $\bar{\beta}(\tau)$ является ПРД для дележа $\bar{\alpha}$.

Действительно, возьмем произвольный дележ $\alpha^t \in C(\bar{x}(t), T - t)$. Обозначим

$$\hat{\alpha}_i = \int_{t_0}^t \bar{\beta}_i(\tau) d\tau + \alpha_i^t,$$

тогда

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2 &= \int_{t_0}^t (\bar{\beta}_1(\tau) + \bar{\beta}_2(\tau)) d\tau + \alpha_1^t + \alpha_2^t = \\ &= \int_{t_0}^t \left[-\frac{d}{d\tau} v(\bar{x}(\tau), T - \tau; N) \right] d\tau + v(\bar{x}(t), T - t; N) = \\ &= -v(\bar{x}(t), T - t; N) + v(\bar{x}(t_0), T - t_0; N) + v(\bar{x}(t), T - t; N) = \\ &= v(\bar{x}(t_0), T - t_0; N). \end{aligned}$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_i &= \int_{t_0}^t \bar{\beta}_i(\tau) d\tau + \alpha_i^t \geq \\ &\geq \int_{t_0}^t [\gamma_i(\tau) - \frac{d}{d\tau} v(\bar{x}(\tau), T - \tau; \{i\})] d\tau + v(\bar{x}(t), T - t; \{i\}) = \\ &= \int_{t_0}^t \gamma_i(\tau) d\tau - v(\bar{x}(t), T - t; \{i\}) + v(\bar{x}(t_0), T - t_0; \{i\}) + \\ &\quad + v(\bar{x}(t), T - t; \{i\}) \geq v(\bar{x}(t_0), T - t_0; \{i\}). \end{aligned}$$

Последнее неравенство выполнено из-за условия 2.1 на A_1 , A_2 и $\gamma_1(\tau)$, $\gamma_2(\tau)$ ($\tau \in [t_0, T]$), т.е. ядро $C(x_0, T - t_0)$ сильно динамически устойчиво, так как дележ $\alpha^t \in C(\bar{x}(t), T - t)$ произвольный.

Заметим, что в каждый момент времени $t \in [t_0, T]$ имеет место

$$\sum_{i=1}^2 \beta_i(t) = -\frac{d}{dt} v(\bar{x}(t), T - t; N) = \sum_{i=1}^2 h_i(\bar{x}(t)),$$

таким образом, используя ПРД $\bar{\beta} = (\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2)$ игроки фактически в каждый момент времени перераспределяют мгновенный суммарный доход, т.е. обеспечивается мгновенная трансферабельность выигрышей, что вполне соответствует идеологии теории кооперативных игр с трансферабельными выигрышами.

2.2. УСЛОВИЕ ЯНГА

Проблема динамической и сильно динамической устойчивости кооперативных решений изучается при предположении о рациональном поведении игроков. В то же время является актуальным вопрос динамической устойчивости кооперативного решения при предположении о возможности нерационального поведения для отдельных игроков. Как известно [15], в данном случае условие для защиты игроков от иррационального поведения

других участников игры выглядит следующим образом:

$$(7) \quad \int_{t_0}^{\vartheta} \beta_i(t) dt + V(\{i\}, \bar{x}(\vartheta), T - \vartheta) \geq V(\{i\}, x_0, T - t_0), \quad i = 1, \dots, n.$$

Это означает, что в случае иррационального разрушения кооперации в момент ϑ выигрыш, который получит игрок i все равно будет не меньше, чем выигрыш в некооперативном варианте игры, т.е. если он с самого начала будет действовать самостоятельно.

Для случая игры двух лиц условие (7) может быть переписано в следующем виде (при помощи первой производной по ϑ):

$$(8) \quad \beta_i(t) \geq -\frac{d}{dt} V(\{i\}, \bar{x}(t), T - t), \quad i = 1, 2.$$

Рассмотрим некоторый селектор $\bar{\alpha}_i(t) = \int_t^T \bar{\beta}_i(\tau) d\tau$ из сильно динамически устойчивого решения (6). Тогда условие (8) может быть представлено в следующем виде:

$$(9) \quad \frac{d}{dt} \bar{\alpha}_i(t) \leq \frac{d}{dt} V(\{i\}, \bar{x}(t), T - t), \quad i = 1, 2.$$

Фактически условие (9) является «уточнением» условия индивидуальной рациональности ($\bar{\alpha}_i(t) \geq V(\{i\}, \bar{x}(t), T - t)$) для производной первого порядка.

Поскольку для игры двух лиц по построению $\alpha_i(t) = A_i(t) + V(\{i\}, \bar{x}(t), T - t)$ где $\frac{d}{dt} A_i(t) = -\gamma_i(t) \leq 0$, $i = 1, 2$, имеем:

$$(10) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt} \bar{\alpha}_i(t) &= -\gamma_i(t) + \frac{d}{dt} V(\{i\}, \bar{x}(t), T - t) \leq \\ &\leq \frac{d}{dt} V(\{i\}, \bar{x}(t), T - t), \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Таким образом, неравенство (10) выполняется для любого дележа, построенного по описанной выше процедуре при помощи ПРД (3).

Это означает, что предложенная процедура распределения дележа (3) в случае игры двух лиц будет обеспечивать не только выполнение свойства сильно динамической устойчивости ядра, но и гарантировать выполнение условие Янга защиты от иррационального поведения участников.

3. Дифференциальная игра управления вредными выбросами в атмосферу

3.1. МОДЕЛЬ ИГРЫ

В качестве примера рассмотрим теоретико-игровую модель управления вредными выбросами в атмосферу [10, 13]. В игре принимают участие 2 игрока (фирмы, страны), каждый из которых имеет промышленное производство на своей территории. Предполагается, что объём производства прямо пропорционален вредным выбросам u_i . Таким образом, стратегией игрока является выбор объёма вредных выбросов $u_i \in [0; u_i^{max}]$. В данном примере будем искать решение в классе позиционных стратегий $u_i(t, x)$.

Динамика изменения общего уровня загрязнения $x(t)$ задаётся уравнением

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^2 u_i(t) - \delta x(t), \quad x(t_0) = x_0,$$

где δ – коэффициент абсорбции, соответствующий естественному очищению атмосферы.

Доход игрока i в момент времени t определяется по формуле

$$R(u_i(t)) = c_i u_i(t) - \frac{1}{2} u_i^2(t).$$

Каждый игрок несет расходы, связанные с устранением загрязнений. Мгновенный выигрыш (полезность) игрока i равен $R(u_i(t)) - k_i x(t)$, $k_i > 0$.

Без ограничения общности будем предполагать, что момент начала игры $t_0 = 0$.

Тогда выигрыш i -го игрока имеет вид

$$(11) \quad K_i(0, x_0, u_1, u_2) = \int_0^T (R_i(u_i(\tau)) - k_i x(\tau)) d\tau.$$

Предположим, что выполняется следующее условие регулярности:

$$(12) \quad \frac{\sum_{j=1}^2 k_j}{\delta} \leq c_i \leq u_i^{max}, \quad i = 1, 2.$$

3.2. КООПЕРАТИВНАЯ ИГРА

Рассмотрим кооперативный вариант игры, в котором игроки максимизируют суммарный выигрыш

$$(13) \quad \sum_{i=1}^2 K_i(0, x_0, u_1, u_2).$$

Для определения управлений $\bar{u} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2)$, доставляющих максимум выражению (13), запишем уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана:

$$(14) \quad -V_t^{12} = \max_{u_i} \left\{ -k_{12}x + \sum_{i=1}^2 c_i u_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 u_i^2 + V_x^{12} \sum_{i=1}^2 u_i - \delta x V_x^{12} \right\},$$

где V_t^{12} и V_x^{12} – частные производные функции Беллмана $V^{12}(x, t)$, $k_{12} = \sum_{i=1}^2 k_i$.

Максимизирующее управление найдем из выражения $c_i - u_i + V_x = 0$, откуда следует $\bar{u}_i = c_i + V_x$. После подстановки \bar{u}_i в (14) получаем

$$(15) \quad -V_t^{12} = -k_{12}x + \frac{1}{2} \hat{c}_{12} + c_{12} V_x^{12} + \frac{3}{2} (V_x^{12})^2 - \delta x V_x^{12},$$

где $c_{12} = \sum_{i=1}^2 c_i$ и $\hat{c}_{12} = \sum_{i=1}^2 c_i^2$.

Предположим, что функция Беллмана [9, 11] имеет вид

$$(16) \quad V^{12}(x, t) = A(t)x + B(t),$$

тогда соответствующие частные производные будут записываться следующим образом: $V_t^{12} = \dot{A}(t)x + \dot{B}(t)$ и $V_x^{12} = A(t)$. Подставляя эти выражения в (15) и группируя подобные слагаемые, получаем систему двух дифференциальных уравнений:

$$(17) \quad \begin{cases} \dot{A}(t) = \delta A(t) + k_{12}, \\ \dot{B}(t) = -\frac{1}{2} \hat{c}_{12} - c_{12} A(t) - \frac{3}{2} A^2(t), \end{cases}$$

с краевыми условиями $A(T) = B(T) = 0$. Решение системы (17) имеет следующий вид:

$$\begin{cases} A(t) = -\frac{k_{12}}{\delta}[1 + e^{-\delta T} e^{\delta t}], \\ B(t) = \frac{\alpha_0(T-t) - \alpha_1(e^{-2\delta(T-t)} - 1) + \alpha_2(e^{-\delta(T-t)} - 1)}{4\delta^3}, \end{cases}$$

где $\alpha_0 = 2\delta(\hat{c}_{12}\delta^2 - 2c_{12}\delta k_{12} + 3k_{12}^2)$, $\alpha_1 = -3k_{12}^2$, $\alpha_2 = 4k_{12}(3k_{12} - c_{12}\delta)$.

Таким образом, оптимальные управления \bar{u}_i имеют вид $\bar{u}_i = c_i - \frac{k_{12}}{\delta}[1 - e^{-\delta T} e^{\delta t}]$, $i = 1, 2$. Отметим, что выполнение условия (12) гарантирует принадлежность оптимального управления \bar{u}_i интервалу $[0, u_i^{max}]$.

Оптимальная траектория $\bar{x}(t)$, соответствующая оптимальным управлениям (\bar{u}_1, \bar{u}_2) , имеет вид

$$(18) \quad \bar{x}(t) = \frac{c_{12}}{\delta} + e^{-\delta t} \left(x_0 - \frac{c_{12}}{\delta} + \frac{3e^{-T\delta}(2e^{T\delta} - 1)k_{12}}{2\delta^2} \right) - \frac{3e^{-\delta t}e^{-\delta(T-2t)}(2e^{\delta(T-t)} - 1)k_{12}}{2\delta^2}.$$

Далее, найдем выражение для значений характеристической функции $V(\{1\}, x_0, T - t_0)$ и $V(\{2\}, x_0, T - t_0)$. Найдем значение характеристической функции для игрока 2, действующего самостоятельно, т.е.

$$V(\{2\}, x_0, T - t_0) = \max_{u_2} \min_{u_1} K_2(x_0, u_1, u_2).$$

Для удобства будем использовать следующее сокращенное обозначение: $V(\{2\}, x(t), T - t) = V(\{2\})$. Запишем соответствующее уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана:

$$(19) \quad \begin{aligned} V(\{2\})_t &= \max_{u_2} \min_{u_1} \left\{ -k_2x + c_2u_2 - \frac{1}{2}u_2^2 + \right. \\ &\quad \left. + V(\{2\})_x \sum_{i=1}^2 u_i - \delta x V(\{2\})_x \right\}, \end{aligned}$$

где $V(\{2\})_t$ и $V(\{2\})_x$ – частные производные функции Беллмана $V(\{2\}, x, T - t)$.

Максимизирующие управления имеют вид $u_i^o = c_i + V_x$, $i = 2$, а минимизирующее управление определяется как

$$u_1^o = \begin{cases} 0, & V(\{2\})_x \geq 0, \\ u_1^{max}, & V(\{2\})_x < 0. \end{cases}$$

После подстановки найденных управлений в (19) получаем

$$(20) \quad V(\{2\})_t = -k_2x + \frac{1}{2}\hat{c}_2 + c_2V(\{2\})_x + V(\{2\})_x^2 - \delta xV(\{2\})_x + V(\{2\})_x u_1^o,$$

где $\hat{c}_2 = c_2^2$.

Выберем функцию Беллмана в следующем виде [9]:

$$(21) \quad V(\{2\}, x, T-t) = A\{2\}(t)x + B\{2\}(t).$$

Тогда $V(\{2\})_t = \dot{A}\{2\}(t)x + \dot{B}\{2\}(t)$ и $V(\{2\})_x = A\{2\}(t)$. После подстановки частных производных в (20) и приведения подобных слагаемых получается система двух дифференциальных уравнений:

$$(22) \quad \begin{cases} \dot{A}\{2\}(t) = \delta A\{2\}(t) + k_2, \\ \dot{B}\{2\}(t) = -\frac{1}{2}\hat{c}_2 - c_2A\{2\}(t) - (A\{2\}(t))^2 - A\{2\}(t)u_1^o, \end{cases}$$

с краевыми условиями $A\{2\}(T) = B\{2\}(T) = 0$. Анализируя решение первого дифференциального уравнения заключаем, что $A(t) \leq 0$ для всех $t \in [t_0, T]$ и, следовательно, $u_1^o = u_1^{max}$. Можно легко показать, что выполнение условия (12) гарантирует выполнение требования $\bar{u}_i \in [0, u_i^{max}]$, $i = 2$.

Таким образом, характеристическая функция $V(\{2\})$ имеет вид $V(\{2\}, x, T-t) = A\{2\}(t)x + B\{2\}(t)$, где $A\{2\}(t)$, $B\{2\}(t)$ вычисляются следующим образом:

$$A\{2\}(t) = -\frac{k_2(1 - e^{-\delta(T-t)})}{\delta},$$

$$B\{2\}(t) = \frac{Tc_2^2\delta^3 - 2Tc_2\delta^2k_2 + 2c_2\delta k_2 - 2T u_{max}\delta^2k_2 + 2T\delta k_2^2 + 2u_{max}\delta k_2 - 3k_2^2}{2\delta^3} - \frac{t(c_2^2\delta^2 - 2c_2\delta k_2 - 2u_{max}\delta k_2 + 2k_2^2)}{2\delta^2} - \frac{k_2^2 e^{-2\delta(T-t)}}{2\delta^3} - \frac{k_2 e^{-\delta(T-t)}(c_2\delta - 2k_2 + \delta u_{max})}{\delta^3}.$$

Аналогично находится характеристическая функция для коалиции $S_1 = \{1\}$.

Очевидно, что характеристическая функция (16, 21) является супераддитивной по построению. Следовательно, вдоль оптимальной траектории $\bar{x}(t)$ (18) в любой момент времени $t \in [0, T]$ выполняется следующее неравенство:

$$(23) \quad V(\{1, 2\}, \bar{x}(t), T - t) \geq V(\{1\}, \bar{x}(t), T - t) + V(\{2\}, \bar{x}(t), T - t).$$

3.3. ПОСТРОЕНИЕ СИЛЬНО ДИНАМИЧЕСКИ УСТОЙЧИВОГО ПРИНЦИПА ОПТИМАЛЬНОСТИ

Построим сильно динамический принцип оптимальности. Для этого найдем разность значений характеристической функции $V(\{1, 2\}, \bar{x}(t), T - t)$ и $V(\{1\}, \bar{x}(t), T - t) + V(\{2\}, \bar{x}(t), T - t)$. По определению, эта разность соответствует $A_1(t) + A_2(t)$ (2), а по построению $(A_1(t) + A_2(t))$ является неотрицательной величиной:

$$(24) \quad A_1(t) + A_2(t) = V(\{1, 2\}, \bar{x}(t), T - t) - V(\{1\}, \bar{x}(t), T - t) - V(\{2\}, \bar{x}(t), T - t) \geq 0.$$

Получаем:

$$(25) \quad A_1(t) + A_2(t) = \frac{-k_1 k_2 (e^{-\delta(T-t)} - 1)^2 + (2k_1 k_2 - \delta\xi)(e^{-\delta(T-t)} - 1)}{\delta^3} + \frac{(2\delta k_1 k_2 - \delta^2 \xi)(T - t)}{\delta^3} + \frac{k_{12}(e^{-\delta(T-t)} - 1) + \delta k_{12}(T - t)}{\delta^2} u_{max},$$

где

$$(26) \quad \xi = c_1 k_2 + c_2 k_1.$$

Найдем выражение для $\gamma_1(t) + \gamma_2(t)$. Из определения (5) следует, что

$$(27) \quad \sum_{i=1}^2 \gamma_i(t) = -\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^2 A_i(t) = -\frac{d}{dt} V(\{1, 2\}, \bar{x}(t), T - t) + \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^2 V(\{i\}, \bar{x}(t), T - t).$$

Заметим, что функция $V(\{1, 2\}, \bar{x}(t), T - t) - V(\{1\}, \bar{x}(t), T - t) - V(\{2\}, \bar{x}(t), T - t)$ представляет собой разность неотрицательных убывающих функций, однако в общем случае мы не можем

гарантировать неотрицательность ее первой производной (так как разность убывающих функций не является убывающей функцией в общем случае).

Однако в нашем примере данное условие неотрицательности суммы $\gamma_1(t) + \gamma_2(t)$ (или, что эквивалентно, неположительность производной $\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^2 A_i(t)$) легко гарантировать при помощи дополнительных ограничений на параметры модели.

Имеем:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 \gamma_i(t) &= -\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^2 A_i(t) = \\ &= \frac{2k_1k_2}{\delta^2} (e^{-\delta(T-t)} - 1)^2 + \delta \left(1 - e^{-\delta(T-t)}\right) (k_{12}u_{max} - \xi). \end{aligned}$$

Очевидно, что при $k_{12}u_{max} - \xi \geq 0$ мы гарантируем неотрицательность $\gamma_1(t) + \gamma_2(t)$. Поскольку ξ имеет вид (26), имеем

$$(28) \quad (k_1 + k_2)u_{max} \geq k_1c_2 + k_2c_1.$$

Теперь определим величины $A_1(t)$, $A_2(t)$ следующим образом:

$$(29) \quad \begin{aligned} A_i(t) &= \frac{-k_1k_2(e^{-\delta(T-t)} - 1)^2 + (2k_1k_2 - \delta\xi)(e^{-\delta(T-t)} - 1)}{2\delta^3} + \\ &+ \frac{(2\delta k_1k_2 - \delta^2\xi)(T-t)}{2\delta^3} + \frac{k_{12}(e^{-\delta(T-t)} - 1) + \delta k_{12}(T-t)}{2\delta^2} u_{max}, \\ & \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Очевидно, что $A_i(t) \geq 0$, $i = 1, 2$, в силу (24). Тогда $\gamma_i(t) = -\frac{d}{dt} A_i(t) = \frac{k_1k_2}{\delta^2} (e^{-\delta(T-t)} - 1)^2 + \delta \left(1 - e^{-\delta(T-t)}\right) \frac{(k_{12}u_{max} - \xi)}{2}$, причем $\gamma_i(t) \geq 0$, $i = 1, 2$, в силу (28).

Введем функции ПРД $\bar{\beta}_i(t)$, $i = 1, 2$, по формуле (3). Тогда имеем

$$(30) \quad \begin{aligned} \beta_2(t) &= \gamma_2(t) - \frac{d}{dt} V(\{2\}, \bar{x}(t), T-t) = \\ &= -\frac{1}{4\delta^3} \left(\alpha_0(t) + \alpha_1(t)e^{-\delta(T-t)} + \alpha_2e^{-2\delta(T-t)} - \alpha_3(t)e^{-2T\delta} \right), \end{aligned}$$

где

$$\alpha_0(t) = -(5k_{12}^2 - k_1^2)\delta + 2(k_{12}u_1^{max} - k_1u_2^{max} + (T-t)k_1k_{12} + c_1k_2 + c_2k_{12})\delta^2 - 2((T-t)^2k_1^2 + (T-t)c_2k_1 + (T-t)k_1u_1^{max} + c_2^2)\delta^3,$$

$$\alpha_1(t) = (10k_{12}^2 - 2k_1^2)\delta - 2c_1\delta^2k_2 - 4c_2\delta^2k_{12} - 2\delta^2(k_{12}u_1^{max} - k_1u_2^{max}) - 4(T-t)\delta^2k_1k_{12},$$

$$\alpha_2 = -(5k_{12}^2 - k_1^2)\delta,$$

$$\alpha_3(t) = ((2k_{12} - k_1)(1 - e^{T\delta - \delta t}) + (T-t)\delta k_1 e^{T\delta - \delta t})(3k_{12}(1 + e^{2\delta t}) - 2(3k_{12} - c_{12}\delta)e^{T\delta} - 2\delta^2x_0e^{T\delta}).$$

Компонента ПРД $\beta_1(t)$ вычисляется аналогичным образом. Очевидно, что условие 2.1 выполнено.

Теперь рассмотрим вектор $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2)$, построенный по формуле (6), а именно $\bar{\alpha}_i(t) = \int_0^T \bar{\beta}_i(t)dt$, $i = 1, 2$. Как было доказано, он является дележом из c -ядра, кроме того, построенный таким образом дележ обеспечивает сильную динамическую устойчивость c -ядра.

Окончательно имеем следующий вид для дележа $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2)$:

$$(31) \quad \alpha_1 = A_1 + V(\{1\}, x_0, T - t_0);$$

$$(32) \quad \alpha_2 = A_2 + V(\{2\}, x_0, T - t_0) = \frac{1}{24\delta^3}(\eta_0(t)x_0 + \eta_1 + \eta_2(t)e^{-\delta(T-t)} + \eta_3(e^{-\delta(T-t)} - 1) + \eta_4e^{-2\delta(T-t)} + \eta_5(t)),$$

где

$$\eta_0(t) = -24\delta^2k_2 - 12\delta^3k_1t + 12\delta^2(k_1 + 2k_2)e^{-\delta(T-t)} + 12T\delta^2(\delta - 1)k_1,$$

$$\eta_1 = -66k_1k_2 - 45k_2^2 - 12k_1^2,$$

$$\eta_2(t) = 12(5k_{12}^2 - 3k_1^2 - 2k_1k_2) - 24(T-t)\delta k_1k_{12},$$

$$\eta_3 = -12\delta(c_1k_2 + 2c_2k_{12}) - 12\delta(k_{12}u_1^{max} - k_1u_2^{max}),$$

$$\eta_4 = 3k_1^2 - 15k_{12}^2,$$

$$\eta_5(t) = 30(T-t)\delta k_{12}^2 - 12T\hat{c}_2\delta^3(t-1) - 12(T-t)^2\delta^2k_1k_{12} + 4(T-t)^3\delta^3k_1^2 - 6(T-t)\delta k_1^2 -$$

$$-12(T-t)\delta^2(c_1k_2 + 2c_2k_{12}) + 6(T-t)^2c_2\delta^3 - 12(T-t)\delta^2(k_{12}u_1^{max} - k_1u_2^{max}) + 6(T-t)^2\delta^3k_1u_1^{max}.$$

Заметим, что в данном случае при выборе функций $A_1(t)$, $A_2(t)$ мы разделили между игроками сумму $A_1(t) + A_2(t)$ попо-

лам. Таким образом, для нового дележа имеем:

$$\begin{aligned}
 \bar{\alpha}_1 &= A_1 + V(\{1\}, x_0, T - t_0) = \\
 &= \frac{1}{2}(A_1 + A_2) + V(\{1\}, x_0, T - t_0) = \\
 &= \frac{1}{2}V(\{1, 2\}, x_0, T - t_0) - V(\{1\}, x_0, T - t_0) - \\
 &\quad - V(\{2\}, x_0, T - t_0) + V(\{1\}, x_0, T - t_0) = \\
 &= \frac{1}{2}(V(\{1, 2\}, x_0, T - t_0) - V(\{2\}, x_0, T - t_0)) + \\
 &\quad + \frac{1}{2}(V(\{1\}, x_0, T - t_0)), \\
 \bar{\alpha}_2 &= A_2 + V(\{2\}, x_0, T - t_0) = \\
 &= \frac{1}{2}(A_1 + A_2) + V(\{2\}, x_0, T - t_0) = \\
 &= \frac{1}{2}V(\{1, 2\}, x_0, T - t_0) - V(\{1\}, x_0, T - t_0) - \\
 &\quad - V(\{2\}, x_0, T - t_0) + V(\{2\}, x_0, T - t_0) = \\
 &= \frac{1}{2}(V(\{1, 2\}, x_0, T - t_0) - V(\{1\}, x_0, T - t_0)) + \\
 &\quad + \frac{1}{2}(V(\{2\}, x_0, T - t_0)),
 \end{aligned}$$

т.е. вектор $\bar{\alpha}$ является вектором Шепли в игре с характеристической функцией $V(\{2\}, x_0, T - t_0)$.

Очевидно, что при выполнении условия $A_1(t) + A_2(t) \geq 0$ предложенный выбор функций $A_1(t) \geq 0$, $A_2(t) \geq 0$ не является единственно возможным. Величина $A_1(t) + A_2(t)$ могла быть разделена между игроками в любых пропорциях, однако в таком случае дележ $\bar{\alpha}$ не являлся бы вектором Шепли.

Используя ПРД (30) при выполнении дополнительного ограничения на параметры модели (28), мы обеспечиваем динамическую и сильную динамическую устойчивость ядра на основе вектора Шепли (31). Сильная динамическая устойчивость ядра как кооперативного решения в данном примере соответствует тому, что однократное отклонение от соглашения о совместном контроле объемов вредных выбросов не приводит к нереализуемости соглашения действовать совместно оптимально на протяжении всей игры, поскольку при выборе другого дележа из ядра в подыгре, начинающейся в момент нарушения соглашения, суммарные выплаты игрокам все равно принадлежат изначально выбранному принципу оптимальности (ядру). Таким образом, кооперативное соглашение по контролю объемов вредных выбросов не нарушается.

Кроме того, обеспечивается защита от иррационального по-

ведения участников, поскольку ранее было доказано, что в случае игры двух лиц выбор ПРД $\beta_i(t)$ по формуле (30) гарантирует выполнение условия Янга (9).

4. Заключение

В работе предложен конструктивный метод построения сильно динамически устойчивого кооперативного решения для дифференциальной игры двух лиц, а именно, сформулированы достаточно общие условия, при которых в C -ядре можно выделить дележ, однократное отклонение от которого в пользу другого дележа из C -ядра в подыгре, начинающейся в момент отклонения от первоначально выбранного дележа, не приводит к нереализуемости первоначально выбранного соглашения о разделе суммарного выигрыша согласно C -ядру. Кроме того, доказано, что в играх двух лиц данное кооперативное решение будет также защищено от иррационально поведения участников, т.е. от однократного отклонения от кооперативного соглашения по некоторым иррациональным причинам.

Полученные теоретические результаты проиллюстрированы на примере дифференциальной игры управления вредными выбросами с двумя участниками, а именно, в данной задаче получено аналитическое решение, гарантирующее сохранение кооперации в сильно динамическом смысле.

Литература

1. ВОРОБЬЕВ Н.Н. *Теория игр для экономистов-кибернетиков*. – М.: Наука, 1985. – 272 с.
2. КРАСОВСКИЙ Н.Н., КОТЕЛЬНИКОВА А.Н. *О дифференциальной игре на перехват* // Труды математического института им. В.А. Стеклова. – 2010. – Т. 268. – С. 168–214.
3. ПЕТРОСЯН Л.А. *О новых сильно динамически устойчивых принципах оптимальности в кооперативных дифференциальных играх* // Труды математического института

- им. Стеклова «Оптимальное управление и дифференциальные уравнения». – 1995. – Т. 211. – С. 370–376.
4. ПЕТРОСЯН Л.А. *Характеристические функции в кооперативных дифференциальных играх* // Вестник СПбГУ, сер. 1: Математика, механика, астрономия. – 1995. – №1. – С. 48–52.
 5. ПЕТРОСЯН Л.А. *Устойчивость решений в дифференциальных играх со многими участниками* // Вестник ЛГУ. – 1977. – №4. – С. 46–52.
 6. ПЕТРОСЯН Л.А., ДАНИЛОВ Н.Н. *Устойчивые решения неантагонистических дифференциальных игр с транзитивными выигрышами* // Вестник ЛГУ. – 1979. – №1. – С. 46–54.
 7. ПЕТРОСЯН Л.А., ДАНИЛОВ Н.Н. *Кооперативные дифференциальные игры и их приложения*. – Томск: Изд-во Томского университета, 1985. – 273 с.
 8. ПЕТРОСЯН Л.А., ГРОМОВА Е.В. *Двухуровневая кооперация в коалиционных дифференциальных играх*. // Тр. ИММ УрО РАН. – 2014. – №3. – С. 193–203.
 9. BASAR T., OLSDER G.J. *Dynamic Noncooperative Game Theory*. – 2nd Edition, SIAM, 1999. – 511 p.
 10. BRETON M., ZACCOUR G., ZAHAF M. *A differential game of joint implementation of environmental projects* // Automatica. – 2005. – Vol.41(10). – P. 1737–1749.
 11. ENGWERDA J. *LQ Dynamic Optimization and Differential Games* – Wiley, 2005. – 510 p.
 12. NEUMANN J., MORGENSTERN O. *Theory of Games and Economic Behavior*. – Princeton, 1947. – 610 p.
 13. PETROSYAN L., ZACCOUR G. *Time-consistent Shapley value allocation of pollution cost reduction* // Journal of Economic Dynamics and Control. – 2003. – Vol. 27. – P. 381–398.
 14. YEUNG D.W.K., PETROSJAN L.A. *Cooperative Stochastic Differential Games*. – New-York, Heidelberg, London: Springer, 2006. – 242 p.

15. YEUNG D.W.K. *An irrational-behavior-proof condition in cooperative differential games* // International Game Theory Review (IGTR). – 2006. – Vol. 08, Is. 04. – P. 739–744.

STRONGLY TIME-CONSISTENT COOPERATIVE SOLUTION FOR A DIFFERENTIAL GAME OF POLLUTION CONTROL

Ekaterina Gromova, St. Petersburg State University, Cand.Sc., assistant professor (ekaterina.shevkoplyas@gmail.com).

Leon Petrosyan, St. Petersburg State University, Doctor of Science, professor (Universitetskii prospekt 35, Petergof, Saint-Petersburg, Russia 198504, tel. +7 (812) 428-71-59).

Abstract: We find a strongly time-consistent cooperative solution for two-payer differential games. The cooperative solution found satisfies strong time-consistency property under rather general conditions. It is shown that the obtained solution also satisfies the condition of irrational-behavior proofness. The obtained game-theoretical results are illustrated by a differential game of pollution control.

Keywords: differential games, time-consistency, strongly time-consistency, Yeung's condition, model of pollution control.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии Д.А. Новиковым

Поступила в редакцию 07.03.2015.

Дата опубликования 31.05.2015.

УДК 021.8 + 025.1
ББК 78.34

НОРМИРОВАНИЕ АНТРОПОГЕННЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ НА ПРИРОДНУЮ СРЕДУ НА ОСНОВЕ ЭКОЛОГО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ¹

Гурман В. И.²,

*(Институт программных систем им. А.К. Айламазяна РАН,
Переславль-Залесский)*

Дамешек Л. Ю.³,

*(ФГБОУ ВПО Иркутский государственный университет,
Иркутск)*

Константинов Г. Н.⁴

(НИУ Высшая школа экономики, Москва)

Насагуева С. Н.⁵

*(ФГБОУ ВПО Бурятский государственный университет,
Улан-Удэ)*

Расина И. В.⁶,

*(Институт программных систем им. А.К. Айламазяна РАН,
Переславль-Залесский)*

Чемезова Т. В.⁷,

*(ФГБОУ ВПО Иркутский государственный университет,
Иркутск)*

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант №15-01-0192315 и РГНФ, грант №15-02-00314А.

² Владимир Иосифович Гурман, доктор технических наук, профессор (vig70@mail.ru).

³ Лариса Юрьевна Дамешек, кандидат физико-математических наук, доцент (larisa.dameshek@yandex.ru).

⁴ Геннадий Николаевич Константинов, доктор физико-математических наук, профессор (gkonstantinov@hse.ru).

⁵ Соелма Номтоевна Насагуева, аспирант (soelmann@mail.ru).

⁶ Ирина Викторовна Расина, доктор физико-математических наук (irinarasina@gmail.com).

⁷ Татьяна Витальевна Чемезова, кандидат физико-математических наук, доцент (chetv2007@mail.ru).

Дается краткий обзор эколого-экономических и социо-эколого-экономических математических моделей и рассматривается один из возможных подходов к проблеме реализации стратегий устойчивого развития регионов, родственный теоретико-игровым подходам — нормирование антропогенных воздействий на природную среду. Предлагается соответствующий математический аппарат применительно к моделям указанного типа как системам неоднородной структуры.

Ключевые слова: устойчивое развитие, математическая модель, динамические системы, антропогенные воздействия.

Введение

Социально-экономическое развитие регионов должно отвечать принципам устойчивого развития с учетом экологического фактора (sustainable development). Это особенно актуально для такой страны как Россия с ее огромным природно-ресурсным потенциалом, составляющим крупный экологический резерв планеты, за сохранение и рациональное использование которого эта исторически сложившаяся великая держава несет особую ответственность перед будущими поколениями.

Даже при самом талантливом государственном руководстве на всех уровнях (что весьма далеко от реальности) эффективность принимаемых управленческих решений, особенно в сложных современных геополитических условиях, невозможно обеспечить без сравнения многочисленных возможных вариантов, возникающих на практике, с оценкой их долгосрочных последствий (экономических, социальных, политических, экологических), что требует решения сложных междисциплинарных задач системного анализа. Однако соответствующей общепринятой практической методологии их решения и необходимых данных для комплексных оценок по критериям устойчивого развития на сегодня не существует, что приводит к односторонней направленности важных программ и проектов — преимущественно социально-экономической (таких, например, как Концепция дол-

госрочного социально-экономического развития Российской Федерации на период до 2020 года) либо природоохранной (таких как ФЦП «Охрана озера Байкал и социально-экономическое развитие природной территории на период до 2020 года»).

Для решения указанных проблем устойчивого развития наиболее подходящими представляются реализованные на современных компьютерах динамические модели, которые отражают эволюцию экономических, социальных и экологических компонент во взаимодействии при различных управленческих и внешних воздействиях, и методы их анализа, характерные для математической теории систем и управления. Это показали уже первые известные модели мировой динамики, содержащиеся в работах Дж. Форрестера и Д. Медоуза и др. [40, 44], выполненные в начале 1970-х годов под эгидой Римского клуба⁸, где была количественно обоснована возможность наступления в сравнительно недалеком будущем глобального экологического кризиса при современных тенденциях мирового развития.

Они оказали большое влияние на «пробуждение экологического сознания» во всех слоях мирового сообщества вплоть до правительств, и тем самым на становление современной парадигмы устойчивого развития, сформулированной официально Конференцией ООН по окружающей среде и развитию (Рио-де-Жанейро, 3-14 июня 1992 года) в известном документе «Повестка дня на XXI век» (Agenda XXI), принятой ООН как программа действий для предотвращения экологического кризиса. Однако задолго до этого события необходимость разработки подоб-

⁸ Римский клуб — международная общественная организация, созданная итальянским промышленником Аурелио Печчеи и генеральным директором по вопросам науки Организации экономического сотрудничества и развития Александром Кингом в 1968 году, объединяющая представителей мировой политической, финансовой, культурной и научной элиты. Одной из главных своих задач Римский клуб считал привлечение внимания мировой общественности к глобальным проблемам посредством заказных докладов, отражающих перспективы развития биосферы и идеи гармонизации отношений человека и природы (Википедия).

ных программ на различных уровнях была ясно осознана среди ученых самых разных специальностей, что привело к быстро нарастающему потоку междисциплинарных исследований в традиционных научных организациях и в новых, таких, например, как Международный институт прикладного системного анализа в Вене или Институт системного анализа Академии наук в Москве, и многих других в разных странах.

В этих исследованиях важную роль играют построение математических моделей регионов как социо-эколого-экономических систем и применение разнообразных математических методов, о чем свидетельствуют многочисленные публикации с середины 1970-х. Отметим лишь наиболее значимые, на наш взгляд, монографии и некоторые статьи последних лет [1, 2, 6, 7, 13, 16, 17, 24–29, 31, 33–38, 46] среди огромного вала работ, инициированного по существу работами [40, 44] и другими, выполненными по заказу Римского клуба.

Важным стимулом здесь послужило то обстоятельство, что модели, представленные в [40, 44], сами по себе уникальны и не могут быть непосредственно тиражированы и применены к многочисленным объектам, таким как отдельные страны, регионы, природные и производственные комплексы, изучение которых требуется для практического применения новых принципов взаимоотношений человека и природы. Будучи примерами эффективных междисциплинарных исследований, они в то же время не содержат методических материалов для организации таких исследований. С самого начала стало очевидным, что усилия должны быть направлены на развитие соответствующего информационно-компьютерного инструментария, включающего не только модели объектов различной сложности, но и эффективные методы их многовариантного анализа, соответствующее информационное и программное обеспечение. Иначе та или иная конкретная модель, в создание которой вложен большой труд, как правило, междисциплинарного коллектива, будет использоваться крайне неэффективно.

На этом пути возникают многие методологические пробле-

мы, такие как:

- противоречие между растущей специализацией научных дисциплин и требованиями их интеграции при междисциплинарных исследованиях;
- идентификация моделей в условиях острого дефицита данных междисциплинарного характера и невозможности проведения натуральных экспериментов над объектом;
- «антиинтуитивное» поведение сложных систем, препятствующее простому сценарному анализу, с одной стороны, а с другой — сложность и неоднородность математических моделей, препятствующая применению классических методов теории управления;
- отставание процессов создания алгоритмов и программ от прогресса вычислительной техники.

Эти проблемы и возможные подходы к их решению, апробированные в практических приложениях, в полной мере отражены в представленном списке публикаций.

В частности, в [24, 25] обосновывается целесообразность эволюционного развития необходимого класса моделей, начиная от известных классических моделей экономики, допускающих глубокий теоретический анализ путем их модификации и дополнения новыми блоками и описывающих поведение природных систем, что перекликается с работой группы известного экономиста В. Леонтьева [43], выполненной под эгидой ООН на основе обобщения соотношений экономического баланса. Однако для более глубокого анализа этого недостаточно; в [25] были сформулированы аналоги классических вариационных задач экономического роста как некоторых замыкающих вариационных принципов. Эти задачи были решены в общем виде, почти аналитически, с учетом их вырожденности эффективными методами теории вырожденных задач [9].

В [13] рассматриваются информационные проблемы и предлагаются подходы к идентификации в условиях дефицита информации, в частности, схема формирования новой статистики, содержащей данные о взаимодействии экономических, природных и социальных компонент. В [6, 28] содержатся результаты практического приложения предложенных моделей и методов к формированию стратегий устойчивого развития конкретных регионов. Заметим, что [13, 16] — коллективные монографии участников проведенных работ, и подобный «жанр», по-видимому, должен быть типичным для представления результатов междисциплинарных исследований.

Большое значение приобретают исследования, связанные с разработкой действенных механизмов реализации стратегий устойчивого развития в различных условиях взаимодействия агентов с различными интересами [1, 2, 5, 14, 16–18, 20, 21, 29, 31, 33–37, 42, 46], в том числе — с эффективным применением математических методов.

В [5, 26, 34–37] представлены результаты и исследования теоретико-игровых механизмов управления эколого-экономическими системами: комплексного оценивания интегрального риска и ущерба, штрафов, платы за риск, финансирования снижения уровня риска, компенсации затрат на снижение уровня риска, продажи квот на уровень риска, аудита, снижения ожидаемого ущерба, экономической мотивации, оптимизации региональных программ, согласования интересов органов управления.

Цель данной статьи — рассмотреть один из подходов к данной проблеме, близкий к теоретико-игровым, — нормирование антропогенных воздействий и предложить соответствующий математический аппарат применительно к эколого-экономическим моделям как системам неоднородной структуры.

1. Постановка и решение задачи нормирования

Рассматривается дискретно-непрерывная модель системы переменной структуры [15, 32]

$$(1) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= f(k, t, x, w), \quad k \in \mathbf{K} = \{k_I, k_I + 1, \dots, k_F\}, \quad t \in [t_I(k), t_F(k)], \\ x &\in \mathbb{R}^{n(k)}, \quad w \in \mathbb{R}^{q(k)}, \quad x(k_I) = x_I. \end{aligned}$$

Здесь x_I — заданное начальное состояние. Функции $x(k, t)$ при каждом k описывают динамику состояния системы на отрезках $[t_I(k), t_F(k)]$, где $t_F(k) = t_I(k + 1)$, и связаны между собой соотношениями

$$(2) \quad x(t_I(k + 1)) = F(u(k + 1))x(t_F(k)),$$

где $F(u(k + 1))$ — матрица размера $n(k + 1) \times n(k)$. Вектор $u(k) \in \mathbb{R}^{m(k)}$ и функция $w(k, t)$, $t \in [t_I(k), t_F(k)]$, характеризуют внешние воздействия на систему. При этом первое определяет начальное состояние $x(t_I)$ очередного отрезка, а второе изменяет эволюцию системы на этом отрезке.

Заданы параметрические семейства множеств $\mathbf{U}(k, \omega(k)) \subset \mathbb{R}^{m(k)}$, $\mathbf{W}(k, \nu(k)) \subset \mathbb{R}^{q(k)}$, $(\omega(k), \nu(k))$: $\omega(k) \in \mathbf{\Omega}(k) \subset \mathbb{R}^{m(k)}$, $\nu(k) \in \mathbf{N}(k) \subset \mathbb{R}^{q(k)}$. При каждом k набор параметров $\omega(k)$, $\nu(k)$ порождает множество в фазовом пространстве в момент $t_F(k)$, соответствующее всевозможным воздействиям $u(k) \in \mathbf{U}(k, \omega(k))$, $w(k, t) \in \mathbf{W}(k, \nu(k))$, $t \in [t_I(k), t_F(k)]$ на систему (1)–(2), которое обозначим $\mathbf{\Xi}(k, \omega, \nu)$. Пусть заданы множества $\mathbf{X}(k) = \{x \in \mathbb{R}^{n(k)} : Q(k, x) \geq 0\}$ и скалярная функция $\xi(\omega(k_I) \dots \omega(k_F), \nu(k_I) \dots \nu(k_F))$ и требуется максимизировать эту функцию при ограничениях

$$(3) \quad \mathbf{\Xi}(k, \omega, \nu) \subset \mathbf{X}(k), \quad (\omega(k), \nu(k)) \in \mathbf{\Omega}(k) \times \mathbf{N}(k), \quad k \in \mathbf{K}.$$

Содержательный смысл задачи нормирования состоит в определении управлений w , обеспечивающих попадание состояния социо-эколого-экономической системы в нужную область X , отвечающую требованиям устойчивого развития, путем оптимального (по экономическим критериям) ограничения множества антропогенных воздействий U . Это некоторый вариант теоретико-игровой постановки, где с одной стороны выступают

субъекты — источники антропогенных воздействий и в то же время экономических и иных благ (предприятия, население), а с другой — административный орган, определяющий нормы (квоты) отрицательных воздействий.

Эта постановка является обобщением задачи нормирования, исследованной в [3], где размерности всех величин на протяжении всего дискретно-непрерывного процесса принимались неизменными.

Для решения задачи исключим связи между состояниями на границах отрезков (2) и введем в соотношение вместо $x(t_F(k))$ дополнительное воздействие $y(k+1)$, удовлетворяющее условиям

$$y(k) \in \mathbf{Y}(\alpha(k), \beta(k)),$$

$$\mathbf{Y}(\alpha(k), \beta(k)) = \{y(k) \in \mathbb{R}^{n(k)} : \alpha(k) \leq y(k) \leq \beta(k)\}, k \in \mathbf{K}.$$

Дальнейшее исследование будем вести поэтапно. На первом этапе, считая k фиксированным, опишем всевозможные значения параметров $\alpha(k)$, $\beta(k)$, $\alpha(k) \leq \beta(k)$ и $(\omega(k), \nu(k)) \in \mathbf{\Omega}(k) \times \mathbf{N}(k)$, $k \in \mathbf{K}$, при которых выполняется условие: всякое решение системы (1), соответствующее всевозможным $u(k) \in \mathbf{U}(k, \omega(k))$, $u(k+1) \in \mathbf{U}(k+1, \omega(k+1))$, $t \in [t_I(k), t_F(k)]$, $y(k) \in \mathbf{Y}(\alpha(k), \beta(k))$ с начальным условием $x(k, t_I(k)) = F(u(k))y(k)$ удовлетворяет неравенствам

$$(4) \quad \alpha(k+1) \leq x(k, t_F(k)) \leq \beta(k+1),$$

$$(5) \quad Q(k+1, F(u(k+1))x(k, t_F(k))) \geq 0.$$

Неравенство (5) получено из (3) с учетом условия (2).

На втором этапе, объединяя эти задачи и исключая дополнительные переменные $\alpha(k)$, $\beta(k)$, $k \in \mathbf{K}$, перейдем к задаче дискретной оптимизации с ограничениями, в которой роль управлений будут играть параметры $\omega(k)$, $\nu(k)$, $k \in \mathbf{K}$. При этом будем опираться на принцип расширения [11, 22].

Введем в рассмотрение вспомогательные непрерывно дифференцируемые при каждом k функции $\varphi(k, t, x)$ и определим с их помощью следующие конструкции (аналоги конструкций

В.Ф. Кротова в соответствующих достаточных условиях оптимальности):

$$R^j(k, t, x, w) = \varphi_x^{jT}(k, t, x)f(k, t, x, w) + \varphi(k, t, x)_t^j, \\ t \in [t_I(k), t_F(k)], \quad j = 1, 2, 3,$$

$$G^1(t_I(k), t_F(k), x(k), u(k), y(k)) = x(k) - \alpha(k - 1) + \\ + \varphi^1(k, t_F(k), x) - \varphi^1(k, t_I(k), F(k, u(k))y(k)),$$

$$G^2(t_I(k), t_F(k), x(k), u(k), y(k)) = -x(k) + \beta(k + 1) + \\ + \varphi^2(k, t_F(k), x) - \varphi^2(k, t_I(k), F(k, u(k))y(k)),$$

$$G^3(t_I(k), t_F(k), x(k), u(k), u(k + 1), y(k)) = \\ = Q(k + 1, F(u(k + 1))x(k, t_F(k))) + \\ + \varphi^3(k + 1, t_F(k), x(k)) - \varphi^3(k, t_I(k), F(k, u(k))y(k)),$$

$$\mu^j(k) = \int_{t_I(k)}^{t_F(k)} \sup[\varphi_x^{jT}(k, t, x)f(k, t, x, w) + \varphi(k, t, x)_t^j] dt,$$

$$x(k) \in \mathbb{R}^{n(k)}, \quad w(k) \in \mathbf{W}(k, \nu(k)),$$

$$m^1(k, \alpha(k), \beta(k), \omega(k)) = \inf\{x(k) + \varphi^1(k, t_F(k), x) - \\ - \varphi^1(k, t_I(k), F(k, u(k))y(k)): x(k) \in \mathbb{R}^{n(k)}, \\ u(k) \in \mathbf{U}(k, \omega(k)), \alpha(k) \leq y(k) \leq \beta(k), Q(k, y(k), u(k)) \geq 0\},$$

$$m^2(k, \alpha(k), \beta(k), \omega(k)) = \inf\{-x(k) + \varphi^2(k, t_F(k), x) - \\ - \varphi^2(k, t_I(k), F(k, u(k))y(k)), x(k) \in \mathbb{R}^{n(k)}, \\ u(k) \in \mathbf{U}(k, \omega(k)), \alpha(k) \leq y(k) \leq \beta(k), Q(k, y(k), u(k)) \geq 0\},$$

$$\begin{aligned}
 m^3(k, \alpha(k), \beta(k), \omega(k), \omega(k+1)) &= \inf Q(k+1, F(u(k+1))x(k, t_F(k))) \\
 &+ \varphi^3(k+1, t_I(k+1), x(k)) - \varphi^3(k, t_I(k), F(k, u(k))y(k)), \\
 x(k) \in \mathbb{R}^{n(k)}, u(k) \in \mathbf{U}(k, \omega(k)), u(k+1) &\in \mathbf{U}(k+1, \omega(k+1)), \\
 \alpha(k) \leq y(k) \leq \beta(k), Q(k, y(k), u(k)) &\geq 0.
 \end{aligned}$$

Теорема 1. Пусть существуют функции $\varphi^j(k, t, x)$ и векторы $\alpha(k)$, $\beta(k)$, такие, что при всех $k \in \mathbf{K}$ функции $\mu^j(k)$ интегрируемы на отрезке $[t_I(k), t_F(k)]$ и справедливы неравенства

$$(6) \quad m^1(k, \alpha(k), \beta(k), \omega(k)) - \alpha(k+1) - \mu^1(k, \nu(k)) \geq 0,$$

$$(7) \quad m^2(k, \alpha(k), \beta(k), \omega(k)) + \beta(k+1) - \mu^2(k, \nu(k)) \geq 0,$$

$$(8) \quad m^3(k, \alpha(k), \beta(k), \omega(k)) - \mu^3(k, \nu(k)) \geq 0,$$

$$(9) \quad \sup Q_1(F_1(u_1))x_I \geq 0 : u^1 \in \mathbf{U}_1(\omega_1), x_I = \alpha_1 = \beta_1.$$

Тогда $\Xi(k, \omega(k), \nu(k)) \subset \mathbf{X}(k)$ при всех $k \in \mathbf{K}$.

Доказательство. Покажем сначала, что из неравенств (6), (7), (9) для любого процесса $\bar{x}(k, t)$ системы (1)–(2), порожденного допустимыми воздействиями $u(k)$, $w(k, t)$, следует выполнение неравенств

$$(10) \quad \alpha(k+1) \leq x(k, t_F(k)) \leq \beta(k+1).$$

Вдоль данного процесса из определения $m^j(k)$ и $\mu^j(k)$ вытекают неравенства

$$\begin{aligned}
 m^1(k, \alpha(k), \beta(k), \omega(k)) - \mu^1(k, \nu(k)) &\leq \bar{x}(k, t_F(k)) + \\
 &+ \varphi^1(k, t_F(k), x) - \varphi^1(k, t_I(k), F(k, u(k))y(k)) - \\
 &\int_{t_I(k)}^{t_F(k)} \sup[\varphi_x^{1\Gamma}(k, t, \bar{x}(t))f(k, t, \bar{x}(k), w(k)) + \varphi^1(k, t, \bar{x}(t))]_t dt,
 \end{aligned}$$

$$x(k) \in \mathbb{R}^{n(k)}, w(k) \in \mathbf{W}(k, \nu(k)).$$

Если $x(k-1, t_I(k))$ удовлетворяет неравенствам

$$(11) \quad \alpha(k) \leq x(k-1) \leq \beta(k),$$

то, положив $y(k) = \bar{x}(k-1, t_I(k))$, с учетом соотношения (2), получаем

$$\begin{aligned}
 & m^1(k, \alpha(k), \beta(k), \omega(k)) - \mu^1(k, \nu(k)) \leq \bar{x}(k, t_F(k)) + \\
 & + \varphi^1(k+1, t_F(k), \bar{x}(k, t_F(k))) - \varphi^1(k, t_I(k), \bar{x}(k, t_I(k))) - \\
 & \int_{t_I(k)}^{t_F(k)} \sup[\varphi_x^{1T}(k, t, \bar{x})f(k, t, \bar{x}, w) + \varphi^1(k, t, \bar{x})_t] dt, \\
 & w(k) \in \mathbf{W}(k, \nu(k)),
 \end{aligned}$$

где подынтегральное выражение есть полная производная функции $\varphi^1(k)$ в силу системы (1) при данном k . Поэтому из последнего неравенства получаем

$$m^1(k, \alpha(k), \beta(k), \omega(k)) - \mu^1(k, \nu(k)) \leq \bar{x}(k, t_F(k)).$$

Отсюда и из (6) имеем

$$\bar{x}(k, t_F(k)) \geq \alpha(k+1).$$

Аналогично из (7) будем иметь $\bar{x}(k, t_F(k)) \leq \beta(k+1)$. Если же $\bar{x}(k-1, t_I(k))$ не удовлетворяет условию (11), а выполняется, например, условие $\bar{x}(k-1) \geq \beta(k)$, тогда можно показать, что не будут выполнены аналогичные условия и для $\bar{x}(k-l, t_I(k-l)+1)$, $l = 1, 2, \dots, k$, что в итоге приведет к неравенству $x_I \geq \beta_1$, которое противоречит условию $x_I = \alpha_1 = \beta_1$. Следовательно, неравенства (10) имеют место. Из (8) аналогичным образом получим $Q(k+1, F(u(k+1)) \bar{x}(k, t_F(k))) \geq 0$. Так как параметры $u(k) \in \mathbf{U}(k, \omega(k))$, $w(k, t) \in \mathbf{W}(k, \nu(k))$ и $y(k) \in \mathbf{Y}(k)$ выбраны из соответствующих множеств произвольно, то имеет место включение $\Xi(k, \omega(k), \nu(k)) \subset \mathbf{X}(k)$ при всех k . Теорема доказана.

Выберем параметры $\alpha(k+1)$, $\beta(k+1)$ таким образом, чтобы неравенства (6) – (7) выполнялись как равенства. Тогда

$$(12) \quad \alpha(k+1) = m^1(k, \alpha(k), \beta(k), \omega(k)) - \mu^1(k, \nu(k)),$$

$$(13) \quad \beta(k+1) = -m^2(k, \alpha(k), \beta(k), \omega(k)) + \mu^2(k, \nu(k)),$$

$$(14) \quad \alpha_1 = \beta_1 = x_I.$$

Равенства (12)–(14) можно рассматривать как дискретную управляемую систему, где фазовыми переменными являются $\alpha(k)$, $\beta(k)$, а управлениями — $\omega(k)$, $\nu(k)$, $k \in \mathbf{K}$. Если подходящий набор функций $\varphi^j(k)$ найден, то исходная задача нормирования может быть заменена дискретной задачей оптимального управления: на траекториях системы (12)–(14) максимизировать функцию $\xi(\omega(k_I) \dots \omega(k_F), \nu(k_I) \dots \nu(k_F))$ при наличии фазовых ограничений (8), (9) и ограничений на управление $\omega(k) \in \Omega(k)$, $\nu(k) \in \mathbf{N}(k)$, $k \in \mathbf{K}$. В результате решение задачи нормирования распадается на два этапа: поиск подходящих функций $\varphi^j(k)$ и решение исходной задачи оптимального управления.

Несколько замечаний о первой задаче. Произвольный набор функций $\varphi^j(k)$ и совместность неравенств (6)–(9) гарантирует непустоту множества управлений, обеспечивающих выполнение всех ограничений задачи дискретного оптимального управления. Однако при неудачном выборе функций $\varphi^j(k)$ в это множество могут не попасть параметры $\omega(k)$, $\nu(k)$, $k \in \mathbf{K}$, являющиеся решением задачи нормирования. Используя результаты, полученные в [11, 19], можно найти условие для определения функций $\varphi^j(k)$, при которых решение задачи нормирования всегда будет попадать в множество допустимых решений дискретной задачи оптимального управления. При этом для поиска таких функций потребуется решать уравнения в частных производных первого порядка типа уравнения Беллмана [11, 22].

Второй путь решения задачи связан с построением алгоритмов последовательного улучшения, когда на каждом шаге решаются две задачи — улучшение функций $\varphi^j(k)$, приводящее к расширению множества допустимых значений в дискретной задаче, и собственно решение дискретной задачи оптимального управления при заданных $\varphi^j(k)$. Для решения первой из них могут применяться алгоритмы, разработанные в [10, 23] для непрерывных задач оптимального управления.

2. Задача нормирования для линейных систем

В этом разделе для избежания громоздкости изложения будем считать размерности всех объектов не зависящими от k . В случае, когда системы (1)–(2) линейны

$$(15) \quad \dot{x}(k) = A(k, t)x(k) + B(k, t)w(k), \quad t \in [t_I(k), t_F(k)],$$

$$(16) \quad x(t_I(k)) = D(k)x(k-1, t_F(k-1)) + P(k)u(k),$$

$$x(t(k_I)) = x_I, \quad Q(k, x) = C(k)x(k) + d(k),$$

возможно построение замкнутых алгоритмов решения задачи нормирования. При этом условие (5) примет вид

$$(17) \quad C(k+1)D(k+1)x(k, t_F(k)) + C(k+1)P(k+1)u(k+1) \geq 0.$$

Рассмотрим неравенства (6)–(8) из теоремы, полагая $\varphi^j(k, x(k)) = S^j(k, t)x(k)$, $j = 1, 2, 3$, $k \in \mathbf{K}$. Пусть матричные функции $S^1(k)$, $S^2(k)$, $S^3(k)$ удовлетворяют на отрезках $[t_I(k), t_F(k)]$ матричному дифференциальному уравнению

$$(18) \quad \frac{dS^j(k, t)}{dt} = -S^j(k, t)A(k, t), \quad j = 1, 2, 3,$$

с условиями

$$(19) \quad S^1(k, t_F(k)) = -E,$$

$$(20) \quad S^2(k, t_F(k)) = E,$$

$$(21) \quad S^3(k, t_F(k)) = -C(t_F(k))D(t_F(k)).$$

Тогда неравенства (6)–(8) будут иметь вид:

$$(22)$$

$$-\alpha(k+1) - |S^1(k, t_I(k))D(k)|^+ \beta(k) - |S^1(k, t_I(k))D(k)|^- \alpha(k) - \\ - |S^1(k, t_I(k))P(k)|^+ \omega(k) - n^+(k) \geq 0,$$

$$(23)$$

$$\beta(k+1) + |S^1(k, t_I(k))D(k)|^- \beta(k) - |S^1(k, t_I(k))D(k)|^+ \alpha(k) - \\ - |S^1(k, t_I(k))P(k)|^- \omega(k) - n^-(k) \geq 0$$

$$(24)$$

$$|C(k+1)P(k+1)|^+ \omega(k+1) + d(k+1) - \\ - |S^3(k, t_I(k))P(k)|^- \alpha(k) - n^+(k) \geq 0,$$

$$(25)$$

$$D_1 \alpha_1 + P_1 \omega_1 \geq 0.$$

Здесь через $|M|^+$ обозначена матрица, полученная из матрицы M заменой отрицательных элементов нулями, через $|M|^-$ — заменой

положительных элементов нулями, через $n^+(k)$, $n^-(k)$ обозначены соответственно интегралы

$$\int_{t_I(k)}^{t_F(k)} |S^j(k, t)B(k)|^+ \nu(k) dt, \quad \int_{t_I(k)}^{t_F(k)} |S^j(k, t)B(k)|^- \nu(k) dt,$$

$j = 1, 2, 3$. При этом учтено равенство $S^1(k) = -S^2(k)$, следующее из условий (18)–(20). Дискретная управляемая система (12)–(14) преобразуется к виду:

(26)

$$\alpha(k+1) = |S^1(k, t_I(k))D(k)|^+ \beta(k) - |S^1(k, t_I(k))D(k)|^- \alpha(k) - |S^1(k, t_I(k))P(k)|^+ \omega(k) - n^+(k),$$

(27)

$$\beta(k+1) = -|S^1(k, t_I(k))D(k)|^- \beta(k) - |S^1(k, t_I(k))D(k)|^+ \alpha(k) - |S^1(k, t_I(k))P(k)|^- \omega(k) - n^-(k).$$

Таким образом, исходная задача нормирования сведена к дискретной линейной задаче оптимального управления (24)–(27), целевая функция которой имеет вид

$$\xi(\omega, \nu) \rightarrow \max, \quad (\omega, \nu) \in \Omega \times \mathbf{N}.$$

При этом матрицы $S^1(k, t_I(k))$, $S^3(k, t_I(k))$ определяются из соотношений (19) и (21). Заметим, что для линейного процесса условия (6)–(9) являются достаточными и необходимыми условиями выполнения включения $\Xi(k, \omega(k), \nu(k)) \subset \mathbf{X}(k)$ при всех $k \in \mathbf{K}$.

3. Задача нормирования выбросов загрязняющих веществ вдоль русла реки

Пусть имеется K источников выбросов загрязняющих веществ с интенсивностью $u(k)$, расположенных вдоль русла реки в точках (k) , $k = 1, 2, \dots, K$. Требуется определить предельно допустимые выбросы (ПДВ) (интенсивность $\omega(k)$) каждого источника при соблюдении предельно допустимых концентраций

(ПДК) загрязняющих веществ в контрольных створах $x(k)^{\bar{k}}$, которые расположены в зоне неполного перемешивания. Интенсивность $\omega(k)$, $k = 1, 2, \dots, K$, должна быть такой, чтобы выполнялось условие

$$\sum_{k=1}^K \xi(k, \omega(k)) \longrightarrow \max,$$

где $\xi(k, \omega(k))$ — максимальная возможная прибыль, получаемая предприятием в п. k , если предельные выбросы загрязняющих веществ равны $\omega(k)$.

Распространение неконсервативного вещества вдоль русла будем описывать системой дифференциальных уравнений на этапе k , $k = 1, 2, \dots, K$:

$$(28) \quad S(k, x) = -\frac{1}{Q(x)} \frac{dQ(x)}{dx} S(k, x) - \frac{\bar{k}S_t(k, x)}{v(k)},$$

$$x \in [x(k) + l(k), x(k + 1)],$$

связанных между собой отношениями

$$(29) \quad S(k, x(k)) = S(k - 1, x(k - 1)) + \frac{1}{M(k)} \cdot$$

$$\cdot \iint_{M(k)} u(k) \exp(f(k, y, z)) / l(k) \mathbf{D}_y \mathbf{D}_z \times$$

$$\times \operatorname{erf}(z_{1k}) \times \operatorname{erf}(z_{2k}) dy dz,$$

$$S_I(x_1) = S_\Phi,$$

где

$$(30) \quad f(k, y, z) = -y^2 v^2 / 4 \mathbf{D}_y l(k) - z^2 v(k) / 4 \mathbf{D}_z l(k) - \bar{k} l(k) / v(k),$$

$$z_{1k} = B(k) \sqrt{v(k)} / 4 \sqrt{\mathbf{D}_y l(k)}, \quad z_{2k} = H(k) \sqrt{v(k)} / 4 \sqrt{\mathbf{D}_z l(k)},$$

$$\operatorname{erf}(z) = \int_0^z e^{-\xi^2} d\xi$$

$u(k)$ — интенсивность k -го источника; S_Φ — фоновая концентрация вещества для первого источника; $Q(x(k))$ — расход воды в точке $x(k)$; $S(k, x(k))$ — концентрация загрязняющего вещества в точке $x(k)$; $v(k)$, $B(k)$, $H(k)$ — скорость, ширина и глубина реки в створе полного перемешивания k -го источника, т. е. в точке

$x(k) + l(k)$ ($l(k)$ — длина зоны достаточно полного перемешивания k -го источника); $\mathbf{D}_y, \mathbf{D}_z$ — коэффициенты турбулентной дисперсии; $M(k)$ — площадь живого сечения реки в створе полного перемешивания k -го источника; \bar{k} — коэффициент, характеризующий деструкцию загрязняющего вещества. Второе слагаемое в (29) получено из точного решения уравнений турбулентной диффузии [30]. Условие (5) задачи нормирования в данном случае будет иметь вид

$$(31) \quad \text{ПДК} - \bar{S}(k+1, x^{\bar{k}}(k+1)) \geq 0,$$

(32)

$$\bar{S}(k+1, x^{\bar{k}}(k+1)) = S(x(k+1)) + \max_{y, z \in M(k, x^{\bar{k}}(k+1))} u(k+1) \times,$$

$$\times \exp f^{\bar{k}}(k+1, y, z) / \operatorname{erf}(z^{\bar{k}}(k+1)) \times \operatorname{erf}(\bar{z}^{\bar{k}}(k+1)),$$

$$f^{\bar{k}}(k+1)(y, z) = -y^2 \sqrt{v(k+1)} / 4 \mathbf{D}_y (x^{\bar{k}}(k+1) - x(k+1)) -$$

$$-z^2 \sqrt{v(k+1)} / 4 \mathbf{D}_z (x^{\bar{k}}(k+1) - x(k+1)) -$$

$$-\bar{k}(x^{\bar{k}}(k+1) - x(k+1)) / v(k),$$

$$z^{\bar{k}}(k+1) = B(k+1) \sqrt{v(k+1)} / 4 \sqrt{\mathbf{D}_y (x^{\bar{k}}(k+1) - x(k+1))},$$

$$\bar{z}^{\bar{k}}(k+1) = H(k+1) \sqrt{v(k+1)} / 4 \sqrt{\mathbf{D}_z (x^{\bar{k}}(k+1) - x(k+1))}.$$

Дополнительные ограничения (4) перепишем так: $\alpha(k+1) \leq S(k, t_F(k)) \leq \beta(k+1)$.

Задача нормирования выбросов загрязняющих веществ сводится к задаче линейного программирования.

В (28) обозначим

$$-\frac{1}{Q(k, x)} \frac{dQ(k, x)}{dx} - \frac{\bar{k}}{v(k)} = A(k, x).$$

В выражении (29) во втором слагаемом $u(k)$ не зависит от y, z поэтому $u(k)$ вынесем за знак двойного интеграла и введем обозначение

$$P(k) = \frac{1}{M(k)} \cdot \iint_{M(k)} u(k) \exp(f(k, y, z)) / l(k) \mathbf{D}_y \mathbf{D}_z \times \\ \times \operatorname{erf}(z_{1k}) \times \operatorname{erf}(z_{2k}) dy dz.$$

Тогда выражения (28)–(30) можно записать следующим образом:

$$(33) \quad \frac{dS(k, x)}{dx} = A(k, x)S(k, x), \quad x \in [x(k), x(k+1)],$$

$$(34) \quad S(k, x(k)) = S(k-1, x(k)) + P(k)u(k),$$

$$(35) \quad S_I(x_1) = S_\Phi.$$

Учитывая, что второе слагаемое в (32) линейно относительно $u(k)$, обозначим

$$\mathbf{D}(k+1) = \max_{y, z \in M(k, x^{\bar{k}}(k+1))} \left[\frac{1}{(x^{\bar{k}}(k+1) - x(k+1))\sqrt{\mathbf{D}_y \mathbf{D}_z}} \times \right. \\ \left. \times \exp(f^{\bar{k}}(k+1)(y, z)) / \operatorname{erf}(z^{\bar{k}}(k+1)) \times \operatorname{erf}(\bar{z}^{\bar{k}}(k+1)) \right]$$

и представим его в виде $\mathbf{D}(k+1)u(k+1)$. Тогда из (32) получим

$$\bar{S}(k+1, x^{\bar{k}}(k+1)) = S(k, x(k+1)) + \mathbf{D}(k+1)u(k+1),$$

а из (31) –

$$(36) \quad Q(k+1, S(k)) = \text{ПДК} - S(k, x(k+1)) - \\ - \mathbf{D}(k+1)u(k+1) \geq 0.$$

Если задача нормирования выбросов загрязняющих веществ решается с условием соблюдения ПДК в створе достаточно полного перемешивания, то условие (31) можно переписать:

$$Q(k+1, S(k)) = \text{ПДК} - S(k, x(k+1)) - P(k+1)u(k+1) \geq 0,$$

где

$$P(k+1) = \frac{1}{M(k+1, x(k+1) + l(k+1))} \times \\ \iint_{M(k+1, x(k+1) + l(k+1))} \exp(f(k+1, y, z)) / l(k+1) \sqrt{\mathbf{D}_y \mathbf{D}_z} \times \\ \times \operatorname{erf}(z(k+1)) \times \operatorname{erf}(\bar{z}(k+1)) dy dz.$$

На описанной модели проведены расчеты ПДС для источников загрязнения на р. Селенге; исходная информация приведена в

таблице 2 и 3. Результаты расчетов приведены в таблице 4. Расчеты проводились с условием соблюдения ПДК в контрольном створе $\bar{x}^k(k) = x(k) + l(k)$ где $l(k)$ – длина зоны достаточного перемешивания – принята равной 5 км.

Таблица 1. Гидрологическая информация

Гидрологический пункт	Расстояние до источника, км	Расход года 95%-й обеспеченности, м ³ /с
Наушки	0	18,2
Ново-Селенгинск	116	29,2
Мостовой	252	43,4
Кабанск	396	44,9

Таблица 2. Гидрохимическая информация

Загрязняющее вещество	ПДК, мг/м ³	Коэффициент деструкции, 1/сут	Начальная концентрация, мг/м ³
Фенол	0,001	0,5	0,0
СПАВ	0,1	0,6	0,0

Таблица 3. Значения предельно допустимых веществ (лето)

Пункт сброса	Расстояние от п. Наушки, км	ПДВ, кг/ч	
		Фенол	СПАВ
Наушки	0	0,021	2,148
Селендума	100	0,038	3,853
Иволгинск	220	0,0768	7,724
Улан-Удэ	244	0,057	5,84
Татаурово	290	0,073	7,414
Селенгинск	344	0,0702	7,131
Кабанск	396	0,049	5,03

Заключение

Созданные на сегодня многочисленные модели взаимодействия человеческой деятельности и природной среды позволяют разрабатывать на их основе математическими методами разнообразные административные и экономические механизмы реализации стратегий устойчивого развития с учетом отношений различных агентов, принимающих решения. Среди них важное практическое значение имеет нормирование антропогенных воздействий на природные объекты, которое может быть использовано как самостоятельно, так и в комбинации с другими механизмами — экономическими (например, торговля квотами) и процедурами согласования интересов.

Рассмотренный выше метод нормирования для дискретно-непрерывных динамических систем может быть обобщен на более сложные иерархические модели сетевой структуры. Об этом говорит исследованная в [2] задача нормирования применительно к модели бассейна реки как дерева операторов.

Литература

1. АКОПОВ А.С., БЕКЛАРЯН Л.А., БЕКЛАРЯН А.Л. И ДР. *Укрупненная модель эколого-экономической системы на*

- примере Республики Армения // Компьютерные исследования и моделирование. – 2014. – Т. 6, №4. – С. 621–631.*
2. АНОХИН Ю.А., ГОРСТКО А.Б., ДАМЕШЕК Л.Ю. И ДР. *Математические модели и методы управления крупномасштабным водным объектом. – Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ние, 1987. – 198 с.*
 3. БАТУРИН В.А., ДЫХТА В.А., МОСКАЛЕНКО А.И. И ДР. *Методы решения задач теории управления на основе принципа расширения. – Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ние, 1990. – 190 с.*
 4. БУДАЕВА Д.Ц., ГУСЕВА И.С., НАСАТУЕВА С.Н. *Влияние инвестиций и прямых инновационных затрат на оптимальные стратегии развития региона // Программные системы: теория и приложения: электрон. научн. журн. – 2012. – Т. 3, №5(14). – С. 23–32. – URL: http://psta.psiras.ru/read/psta2012_5_23-32.pdf (дата обращения: 27.01.2015).*
 5. БУРКОВ В.Н., НОВИКОВ Д.А., ЩЕПКИН А.В. *Механизмы управления эколого-экономическими системами / Под ред. академика С.Н. Васильева. – М.: Издательство физико-математической литературы, 2008. – 244 с.*
 6. ВИКУЛОВ В.Е., ГУРМАН В.И., ДАНИЛИНА Е.В. И ДР. *Эколого-экономическая стратегия развития региона: Математическое моделирование и системный анализ на примере Байкальского региона. – Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ние, 1990. – 184 с.*
 7. ГИМЕЛЬФАРБ А.А., ГИНЗБУРГ Л.Р., ПОЛУЭКТОВ Р.А. И ДР. *Динамическая теория биологических популяций. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит-ры, 1974. – 456 с.*
 8. ГОРСТКО А.Б., УГОЛЬНИЦКИЙ Г.А. *Введение в моделирование эколого-экономических систем. – Изд-во РГУ, 1990. – 112 с.*
 9. ГУРМАН В.И. *Вырожденные задачи оптимального управления. – М.: Наука, 1977. – 304 с.*
 10. ГУРМАН В.И. *Принцип расширения в задачах управле-*

- ния. – М.: Наука, 1985. – 288 с.
11. ГУРМАН В.И. *Принцип расширения в задачах управления*. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука. Физматлит, 1997. – 288 с.
 12. ГУРМАН В.И., БУДАЕВА Д.Ц., НАСАТУЕВА С.Н. *Оптимальное управление биопопуляцией с учетом инноваций на модели с возрастной структурой* // Вестник Бурятского государственного университета. Математика и информатика. – 2012. – №2. – С. 15–25.
 13. ГУРМАН В.И., ДЫХТА В.А., КАШИНА П.Ф. И ДР. *Эколого-экономические системы: модели, информация, эксперимент*. – Новосибирск: Наука, 1987. – 216 с.
 14. ГУРМАН В.И., РАСИНА И.В., ЛИБЕНСОН И.Р. И ДР. *Приложение социо-эколого-экономической модели к оценке эффективности инвестиционных проектов* // Известия Института экономических исследований Бурятского государственного университета. (электронный научный журнал ISSN 2305-3453). – 2013. – №2. – URL: [http://www.inser.pro/upload/iblock/68e/Gurman\[1\].pdf](http://www.inser.pro/upload/iblock/68e/Gurman[1].pdf) (дата обращения: 27.01.2015).
 15. ГУРМАН В.И., РАСИНА И.В., ТРУШКОВА Е.А. И ДР. *Иерархическая модель неоднородной дискретной системы и ее приложения* // Управление большими системами. – 2013. – №41. – С. 249–269.
 16. ГУСЕВ А.А., МАРТЫНОВ А.С., МОТКИН Г.А. И ДР. *Новые финансовые механизмы сохранения биоразнообразия*. – М.: ИПР РАН, 2002. – 204 с.
 17. ДАНИЛОВ-ДАНИЛЬЯН В.И., ХРАНОВИЧ И.Л. *Управление водными ресурсами. Согласование стратегий водопользования*. – М.: Научный мир, 2010. – 232 с.
 18. ДЕНИСОВ В.И. *Народнохозяйственные модели оптимального развития природных комплексов*. – М.: Наука, 1978. – 191 с.
 19. ДЕНХЭМ В., БРАЙСОН А. *Задачи оптимального программирования при наличии ограничений типа неравен-*

- ства // Ракетная техника и космонавтика. – 1964. – Т. 2, №1. – С. 34–47.
20. ДУМОВА И.И. *Социально-экономические основы управления природопользованием в регионе*. – Новосибирск: Наука, 1996. – 163 с.
 21. КОНСТАНТИНОВ Г.Н. *Нормирование воздействий на динамические системы*. – Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1983. – 188 с.
 22. КРОТОВ В.Ф., ГУРМАН В.И. *Методы и задачи оптимального управления*. – М.: Наука, 1973. – 446 с.
 23. КРОТОВ В.Ф., ФЕЛЬДМАН И.Н. *Итерационный метод решения задач оптимального управления // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика*. – 1983. – №2. – С. 160–168.
 24. *Модели природных систем / Под ред. В.И. Гурмана, И.П. Дружинина*. – Новосибирск: Наука, 1978. – 224 с.
 25. *Модели управления природными ресурсами / Под ред. В.И. Гурмана*. – М.: Наука, 1981. – 264 с.
 26. *Моделирование и управление процессами регионального развития / Под ред. С.Н. Васильева*. – М.: Физматлит, 2001. – 432 с.
 27. *Моделирование процессов в природно-экономических системах / Отв. ред. В.И. Гурман, А.И. Москаленко*. – Новосибирск: Наука, 1982. – 176 с.
 28. *Моделирование социо-эколого-экономической системы региона / Под ред. В.И. Гурмана, Е.В. Рюминой*. – М.: Наука, 2003. – 175 с.
 29. МОТКИН Г.А. *Основы экологического страхования*. – М.: Наука, 1996. – 192 с.
 30. *Основы прогнозирования качества поверхностных вод*. – М.: Наука, 1985. – 179 с.
 31. *Охрана окружающей среды (модели управления чистой природной среды) / Под ред. К.Г. Гоффмана, А.А. Гусева*. – М.: Экономика, 1977. – 231 с.
 32. РАСИНА И.В. *Иерархические модели управления системами неоднородной структуры*. – М.: Физматлит, 2014. –

- 160 с.
33. РЮМИНА Е.В. *Экологический фактор в экономико-математических моделях*. – М.: Наука, 1980. – 165 с.
 34. УГОЛЬНИЦКИЙ Г.А. *Управление эколого-экономическими системами*. – М.: Вузовская книга, 1999. – 132 с.
 35. УГОЛЬНИЦКИЙ Г.А. *Теоретико-игровые принципы оптимальности иерархического управления устойчивым развитием // Известия РАН. Теория и системы управления*. – 2005. – №4. – С. 72–78.
 36. УГОЛЬНИЦКИЙ Г.А., УСОВ А.Б. *Равновесия в моделях иерархически организованных динамических систем управления с учетом требований устойчивого развития // Автоматика и телемеханика*. – 2014. – №6. – С. 86–102.
 37. УГОЛЬНИЦКИЙ Г.А., УСОВ А.Б. *Управление сложными эколого-экономическими системами // Автоматика и телемеханика*. – 2009. – №5. – С. 169–179.
 38. *Agenda XXI. An Action Plan for the Next Century, endorsed by United Nations Committee on Environment and Development*. – Rio de Janeiro: United Nations Association, 1992. – 300 p.
 39. DALY H.E., COBB J.B. *For the Common Good: Redirecting the Economy toward the Community, the Environment and a Sustainable Future*. – Boston: Beacon Press, 1994. – 534 p.
 40. FORRESTER J.W. *World dynamics*. – 1st edition. – Cambridge, Mass.: Wright-Allen Press Inc., 1971. – 142 p.
 41. GURMAN V.I. *The extension principle in the problems of sustainable development*. – Moscow: Fizmatlit, 2005. – 128 p.
 42. HUETING R. *Correcting National Income for Environmental Losses: a Practical Solution for a Theoretical Dilemma // Ecological economics: The science and management of sustainability*. – New York: Columbia University Press, 1991. – P. 194–213.
 43. LEONTIEF W.W. *The future of the world economy // A UN study by Wassily Leontief et al.* – New York: Oxford

- University Press, 1977. – 118 p.
44. MEADOWS D.H. *The Limits to growth: A report for the Club of Rome's Project on the Predicament of Mankind.* – 1st edition. – New York: Universe Books, 1972. – 205 p.
 45. *Operations research and environmental management* / Eds. C. Carraro, A. Haurie. – Dordrecht: Kluwer academic publishers, 1996. – 259 p.
 46. OTT W.R. *Environmental Indices: Theory and Practice.* – Michigan: Ann Arbor Science Publishers Inc., 1978. – 371 p.

QUOTING ANTHROPOGENIC ENVIRONMENTAL IMPACTS ON THE BASIS OF ECOLOGICAL AND ECONOMIC MODELS

Vladimir Gurman, Program Systems Institute of RAS, Pereslavl-Zalessky, Doctor of Science, professor (vig70@mail.ru).

Larisa Dameshek, Irkutsk State University, Irkutsk, Candidate of Sciences, associate professor (larisa.dameshek@yandex.ru).

Gennady Konstantinov, National Research University – Higher School of Economics, Moscow, Doctor of Science, professor (gkonstantinov@hse.ru).

Soelma Nasatueva, Buryat State University, Ulan-Ude, postgraduate (soelmann@mail.ru).

Irina Rasina, Program Systems Institute of RAS, Pereslavl-Zalessky, Doctor of Science (irinarasina@gmail.com).

Tatyana Chemesova, Irkutsk State University, Irkutsk, Candidate of Sciences, associate professor (chetv2007@mail.ru).

Abstract: We briefly survey the mathematical models of ecological-economical and social-ecological-economical systems and introduce an approach to the problem of implementation of regional sustainable development, which is related to the game-theoretic philosophy, and consists in assigning quotas on anthropogenic impact. We consider a system as heterogenous one and suggest appropriate mathematical tools.

Keywords: sustainable development, mathematical model, dynamic systems, anthropogenic impacts.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии Г.А. Угольницким

Поступила в редакцию 01.02.2015.

Дата опубликования 31.05.2015.

УДК 656.02 + 51-74

ББК 22.18

МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНКУРЕНТНОЙ МАРШРУТИЗАЦИИ ЭКОЛОГИЧЕСКИ БЕЗОПАСНЫХ ТРАНСПОРТНЫХ ПОТОКОВ НА ГОРОДСКОЙ ТРАНСПОРТНОЙ СЕТИ

Захаров В. В.¹, Крылатов А. Ю.²

(Санкт-Петербургский государственный университет)

На сегодняшний день наблюдается серьезная нехватка методологических инструментов поддержки принимаемых решений по выделению на городской транспортной сети «зеленых» подсетей и стимулированию водителей использовать более экологически безопасные автомобили. Настоящая статья посвящена проблеме распределения двух видов транспортных потоков на сети, включающей «зеленые» и «не-зеленые» маршруты. Проведен анализ конкурентного сценария взаимодействия этих двух групп транспортных средств на сети. Разработан метод выделения «зеленых» маршрутов («зеленой» подсети), которые обеспечивают «зеленым» автомобилям меньшее время перемещения из районов отправления в районы прибытия при равновесном по Вардропу и Нэшу распределениях потоков. Условия сбалансированности «зеленой» подсети с параллельными маршрутами получены в явном виде.

Ключевые слова: маршрутизация зеленых потоков, транспортная сеть, равновесие по Нэшу, равновесие по Вардропу.

¹ *Виктор Васильевич Захаров, доктор физико-математических наук, профессор, (mcvictor@mail.ru).*

² *Александр Юрьевич Крылатов, кандидат физико-математических наук, (aykrylatov@yandex.ru).*

Введение

В современных крупных городах мира существует проблема загрязнения воздуха. Большое количество промышленных объектов вкупе с огромным количеством плотно движущихся автомобилей ежедневно производят колоссальные выбросы загрязняющих веществ в атмосферу городов, что естественно влияет на качество жизни людей. Согласно данным Федеральной службы государственной статистики в России за последние 14 лет передвижные источники выбросили 41,9% от общего числа загрязняющих атмосферу веществ, из которых 15% составляет вклад автомобильного транспорта (данные Всемирного банка). Европейское агентство окружающей среды [21] сообщает, что в 2010 году 17,5% всех парниковых газов, выброшенных в атмосферу, поступило от автомобильного транспорта. При этом вклад легкового транспорта в выбросах всего CO_2 составляет 12% [23].

Динамика увеличения выбросов за счет автомобильного транспорта неутешительна. В то время как выбросы CO_2 стационарными источниками в Европе постоянно понижается с 1990 года [18], выбросы от автомобильного транспорта увеличились на 23% между 1990 и 2009 годами [21]. В свою очередь, в США 27% всего объема парниковых газов выбрасывается личным автомобильным транспортом, а если учитывать общественный транспорт, то их совокупный вклад составит 43% [28]. В одной из крупнейших стран Южной Америки, Бразилии, на 2010 год вклад в загрязнение воздуха со стороны промышленного сектора составил 29%, в то время как вклад автомобильного транспорта – 43% [12].

Многочисленные исследования, например [3–5, 10, 15], свидетельствуют о том, что выбор маршрута движения может оказывать серьезное влияние на объем выбросов загрязняющих веществ и расход топлива во время ежедневных поездок. Более того, вид транспорта (личный, общественный и т.п.) и время отправления также оказывают значительный эффект на объемы загрязняющих выбросов [16, 25]. Таким образом, эти исследова-

ния говорят об актуальности изучения проблем маршрутизации потоков с множеством различных групп участников движения в контексте снижения объемов выбросов загрязняющих веществ в атмосферу со стороны городского транспорта.

Развитие информационных и телекоммуникационных технологий предоставляет пользователям транспортной сети возможность получать информацию о дорожных условиях и использовать ее при выборе маршрута движения, времени отправления, вида транспорта и т.п. [8, 14, 20]. Исследования показывают, что маршруты движения, характеризующиеся минимальным объемом выбросов загрязняющих веществ, не совпадают с маршрутами с минимальным временем движения [4, 19, 22, 32]. Немонотонная зависимость между скоростью движения и объемами загрязняющих выбросов порождают конфликт интересов водителя при выборе режима вождения: стремиться к минимальному времени движения или минимальным выбросам [4–6, 30]. Поведенческие модели принятия решения по выбору маршрутов движения качественно описаны в [5].

Согласно результатам, полученным в целом ряде исследований, в процессе маршрутизации транспортных потоков также следует учитывать уровень наклона дорожного полотна, который оказывает серьезное влияние на объемы выбрасываемых транспортом загрязняющих веществ [9, 11, 29, 31]. Эксперимент с использованием трех легковых автомобилей с бензиновыми двигателями, описанный в [31], показал, что объем выбросов CO_2 значительно зависит от рельефа. Так, на дороге с положительным уклоном $\geq 5\%$ выбросы на 40–60 % выше, чем на дороге с отрицательным уклоном. В статье [9] показано, что объемы выбросов загрязняющих веществ на плоской и на холмистой местностях могут отличаться на 15–20%. Поэтому выбирая оптимальный маршрут движения, следует принимать во внимание, в том числе, уровень наклона проезжей части альтернативных маршрутов. В [29] предложена методика оценки объемов выброса загрязняющих веществ с учетом уровня наклона автомобильной дороги. Информацию предлагается собирать с помощью специальных

LiDAR-GIS-систем и формировать на ее основе Цифровые карты местности (DTM).

В настоящей работе нас интересуют вопросы, связанные с разработкой мер по стимулированию водителей к переходу на экологически дружелюбные автомобили посредством выделения для их движения специальных маршрутов на транспортной сети. Основным исследовательским вопросом является вопрос о том, какое количество маршрутов необходимо выделить под движение исключительно экологически дружелюбных автомобилей, чтобы

- водители были заинтересованы в использовании таких автомобилей,
- такие маршруты не оказались не востребованными.

В литературе встречаются разные определения термина «зеленый автомобиль», однако, в целом, экологически дружелюбные автомобили можно разделить на два вида: «абсолютно зеленые автомобили» и «автомобили с низким уровнем загрязнения» [17]. Абсолютно зеленые автомобили – это автомобили с нулевыми выбросами парниковых газов, например, использующие в качестве топлива воду или энергию солнца. Электрические автомобили можно называть абсолютно зелеными только в том случае, если электричество получается из возобновляемых источников энергии. Автомобили, использующие био-дизель, природный газ и т.п., являются автомобилями с низким уровнем загрязнения [26]. Следуя такой классификации, можно выделять четыре типа автомобилей: 1) автомобили с высоким уровнем загрязнения; 2) автомобили со средним уровнем загрязнения; 3) автомобили с низким уровнем загрязнения; 4) автомобили с нулевым уровнем загрязнения. В настоящей главе под *зелеными автомобилями* мы будем понимать автомобили с низким и нулевым уровнями загрязнения, в то время как под *не-зелеными автомобилями* – все остальные.

При исследовании проблемы распределения потоков автомобилей разных типов мы будем рассматривать ряд теоретико-игровых моделей так называемой «зеленой» маршрутизации. В

первом параграфе будет рассмотрена задача выделения транспортной подсети для движения исключительно зеленых автомобилей. Во втором параграфе будут выписаны правила распределения транспортных потоков в условиях выделенных маршрутов для движения зеленых автомобилей. В третьем параграфе будет рассмотрена задача поиска оптимального множества зеленых маршрутов в условиях конкурентной маршрутизации транспортных потоков с множеством групп участников движения. Четвертый параграф будет посвящен правилам распределения транспортных потоков в условиях конкурентной маршрутизации при появлении выделенных маршрутов для движения зеленых автомобилей. Заключение будет отведен последний параграф.

1. Выделение маршрутов для движения экологически безопасных транспортных потоков

Администрации крупных городов заинтересованы в появлении экологически безопасных автомобилей на улично-дорожной сети, так как это способно снизить уровень выделяемых транспортными потоками парниковых газов. В связи с этим, необходимо разработать меры для мотивации водителей пересаживаться на зеленые автомобили. Одной из мотивационных мер такого характера может быть выделение специальных маршрутов, доступных только для движения экологически безопасных автомобилей. Вопрос заключается в том, каким образом обеспечить зеленые автомобили достаточно привлекательными условиями для движения. В силу того, что администрация обладает информацией о текущем количестве экологически безопасных автомобилей, поставленный вопрос может быть сформулирован количественно. Какое количество маршрутов следует выделить для движения только зеленых автомобилей (будем называть такие маршруты *зелеными маршрутами* в противоположность *не-зеленым маршрутам*). В самом деле, с одной стороны, если зеленые маршруты загружены только частично, а не-зеленые – перегружены, то транспортная сеть является несбалансированной [7]. С другой стороны, если зеленые маршруты могут быть перегружены

потоком имеющих на сети экологически дружелюбных автомобилей, то использование таких автомобилей не будет представляться привлекательной альтернативой для водителей. Таким образом, необходимо найти условия, гарантирующие хорошо сбалансированное использование зеленых и не-зеленых маршрутов транспортной сети. Настоящий параграф посвящен поиску этих условий.

1.1. ТРАНСПОРТНАЯ СЕТЬ ИЗ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ КАНАЛОВ

В настоящем пункте мы собираемся рассмотреть сеть, состоящую из одного района отправления и одного района прибытия. Будем предполагать, что имеются только параллельные маршруты (непересекающиеся) между районами отправления-прибытия. При этом некоторые из этих параллельных маршрутов объявляются зелеными, другие – не-зелеными. Считаем, что по зеленым маршрутам могут двигаться только зеленые автомобили, а по не-зеленым – как зеленые, так и не-зеленые.

Рассмотрим транспортную сеть, представленную ориентированным графом с одной парой районов отправления-прибытия и n параллельными дугами. Каждая дуга ассоциируется с маршрутом из района отправления в район прибытия. Будем использовать следующие обозначения: $N = \{1, \dots, n\}$ – множество номеров всех маршрутов; $N_1 = \{1, \dots, n_1\}$ – множество номеров зеленых маршрутов; $N_2 = \{n_1 + 1, \dots, n_2 = n\}$ – множество номеров не-зеленых маршрутов; G – количество зеленых автомобилей на транспортной сети; F – количество не-зеленых автомобилей на транспортной сети; g_i – транспортный поток зеленых автомобилей по маршруту i , $i = \overline{1, n}$, $g = (g_1, \dots, g_n)$; f_i – транспортный поток не-зеленых автомобилей по маршруту i , $i = \overline{n_1 + 1, n_2}$, $f = (f_{n_1+1}, \dots, f_n)$; t_i^0 – время свободного движения по маршруту i , $i = \overline{1, n}$; c_i – пропускная способность маршрута i , $i = \overline{1, n}$; $t_i(f_i) = t_i^0 \left(1 + \frac{f_i}{c_i}\right)$ – время движения потока f_i по загруженному маршруту i , $i = \overline{1, n}$. Мы моделируем время движения с помощью линейной BPR-функции задержки [27].

Проблема состоит в том, чтобы определить условия, гаран-

тирующие: 1) ситуацию конкурентного равновесия Вардропа на всей транспортной сети; 2) использование зеленых маршрутов только экологически дружелюбными автомобилями; 3) эффективное использование инфраструктурных мощностей транспортной сети: все выделенные зеленые маршруты востребованы. Действительно, наличие ситуации конкурентного равновесия Вардропа на транспортной сети соответствует тому, что время движения всех автомобилей между фиксированной парой районов отправления-прибытия одинаково [24]. Это значит, что использование экологически безопасных автомобилей привлекательно до тех пор, пока движение по выделенным зеленым маршрутам меньше или равно времени движения всех остальных автомобилей. Математически такая задача выражается следующей оптимизационной программой:

$$(1) \quad \min_{g,f} z(g, f) = \min_{g,f} \left[\sum_{i=1}^{n_1} \int_0^{g_i} t_i(u) du + \sum_{i=n_1+1}^{n_2} \int_0^{g_i+f_i} t_i(u) du \right]$$

при ограничениях

$$(2) \quad \sum_{i=1}^n g_i = G,$$

$$(3) \quad \sum_{i=n_1+1}^n f_i = F,$$

$$(4) \quad g_i \geq 0 \quad \forall i = \overline{1, n},$$

$$(5) \quad f_i \geq 0 \quad \forall i = \overline{n_1 + 1, n_2}.$$

Неизвестными переменными задачи (1)–(5) являются транспортные потоки через все доступные маршруты (как зеленые, так и не-зеленые) для каждого фиксированного значения n_1 . В общем случае решение такой задачи требует сложных вычислительных процедур. Однако можно упростить эту задачу, найдя граничное значение n_1 , которое может быть оценено напрямую. В самом деле, граничное значение n_1 соответствует ситуации, когда все

экологически безопасные автомобили используют только зеленые маршруты и их время движения меньше или равно времени движения остальных автомобилей, использующих не-зеленые маршруты.

Прежде всего необходимо отметить, что решение задачи (1)–(5) может содержать маршруты с нулевыми потоками в ситуации конкурентного равновесия Вардропа (если $\exists i = \overline{1, n} : g_i = 0$ и $f_i = 0$). Подобная проблема может возникнуть, когда начальное множество возможных маршрутов плохо определено. Мы будем рассматривать случай хорошо сбалансированного начального множества маршрутов или множества, состоящего из *полностью востребованных* маршрутов. Таким образом, необходимо определить условия, при которых начальное множество маршрутов является полностью востребованным. В то же время зеленые маршруты должны обеспечить зеленые автомобили меньшим временем движения между районами отправления-прибытия. В связи с этим введем следующее

Определение 1. Значение n_1 называется *оптимальным* тогда и только тогда, когда:

- время движения зеленых автомобилей по зеленым маршрутам меньше или равно времени движения транспортного потока по не-зеленым маршрутам;
- все зеленые маршруты востребованы (когда все зеленые автомобили двигаются только по зеленым маршрутам).

Без умаления общности, будем считать, что когда n_1 определено, маршруты пронумерованы следующим образом:

$$(6) \quad t_1^0 \leq \dots \leq t_{n_1}^0 \text{ и } t_{n_1+1}^0 \leq \dots \leq t_{n_2}^0.$$

Лемма 1. Предположим, что все зеленые автомобили G используют только имеющиеся зеленые маршруты. Каждый зеленый маршрут из множества n_1 маршрутов востребован для движения тогда и только тогда, когда

$$(7) \quad G > \sum_{i=1}^{n_1} c_i \left(\frac{t_{n_1}^0}{t_i^0} - 1 \right),$$

и каждый не-зеленый маршрут из множества $|n_2 - n_1|$ маршрутов востребован для движения тогда и только тогда, когда

$$(8) \quad F > \sum_{i=n_1+1}^{n_2} c_i \left(\frac{t_{n_2}^0}{t_i^0} - 1 \right).$$

Доказательство. Если все зеленые автомобили используют только зеленые маршруты для движения, оптимизационная проблема (1)–(5) может быть рассмотрена в виде двух независимых задач:

1) для зеленых автомобилей:

$$(9) \quad \min_g z_1(g) = \min_g \sum_{i=1}^{n_1} \int_0^{g_i} t_i(u) du$$

при ограничениях

$$(10) \quad \sum_{i=1}^{n_1} g_i = G,$$

$$(11) \quad g_i \geq 0 \quad \forall i = \overline{1, n_1},$$

$$(12) \quad g_i = 0 \quad \forall i = \overline{n_1 + 1, n_2}.$$

2) для не-зеленых автомобилей:

$$(13) \quad \min_f z_2(f) = \min_f \sum_{i=n_1+1}^{n_2} \int_0^{f_i} t_i(u) du$$

при ограничениях

$$(14) \quad \sum_{i=n_1+1}^{n_2} f_i = F,$$

$$(15) \quad f_i \geq 0 \quad \forall i = \overline{n_1 + 1, n_2}.$$

Рассмотрим Лагранжиан задачи (9)–(12)

$$L^1 = \sum_{i=1}^{n_1} \int_0^{g_i} t_i(u) du + \omega^1 \left(G - \sum_{i=1}^{n_1} g_i \right) + \sum_{i=1}^{n_1} \eta_i g_i$$

и продифференцируем его:

$$\frac{\partial L^1}{\partial g_i} = t_i(g_i) - \omega^1 + \eta_i = 0,$$

где $\omega^1 \geq 0$ и $\eta_i \geq 0$ для $i = \overline{1, n_1}$ – множители Лагранжа. Благодаря условиям Куна–Таккера, имеем

$$(16) \quad t_i(g_i) \begin{cases} = \omega^1 & \text{при } g_i > 0, \\ \leq \omega^1 & \text{при } g_i = 0, \end{cases}$$

для $i = \overline{1, n_1}$.

Выполнение неравенства $g_i > 0$ для $i = \overline{1, n_1}$ означает, что каждый зеленый маршрут из множества n_1 маршрутов востребован. Согласно (16), если $g_i > 0$, то $t_i^0 \left(1 + \frac{g_i}{c_i}\right) = \omega^1$ и $g_i = \left(\frac{\omega^1}{t_i^0} - 1\right) c_i > 0$ для $i = \overline{1, n_1}$. Следовательно, $\omega^1 > t_i^0$ для $i = \overline{1, n_1}$ и, согласно (6), $\omega^1 > t_{n_1}^0$. Таким образом, получаем

$$G = \sum_{i=1}^{n_1} g_i = \sum_{i=1}^{n_1} \left(\frac{\omega^1}{t_i^0} - 1\right) c_i > \sum_{i=1}^{n_1} \left(\frac{t_{n_1}^0}{t_i^0} - 1\right) c_i.$$

Задача (13)–(15) может быть исследована аналогичным образом, что приведет к получению (8).

Лемма 1 дает первое правило определения оптимального n_1 . Если неравенство (7) выполняется, то все зеленые маршруты будут востребованы, когда все имеющиеся на сети экологически дружелюбные автомобили используют только зеленые маршруты для движения. Одновременное выполнение условий (7), (8) означает, что транспортная сеть является полностью загруженной – все маршруты востребованы. В то же время условие (7) не гарантирует, что все экологически дружелюбные автомобили будут использовать только зеленые маршруты для движения. Чтобы побудить зеленые автомобили использовать только зеленые маршруты, лицо, принимающее решение, должно создать такие условия, что для водителей будет предпочтительней двигаться по зеленой подсети.

Теорема 1. *Предположим, что начальное множество маршрутов полностью востребовано имеющимися транспортными потоками G и F . Поток зеленых автомобилей G использует только зеленые маршруты тогда и только тогда, когда*

$$(17) \quad \frac{G + \sum_{i=1}^{n_1} c_i}{\sum_{i=1}^{n_1} \frac{c_i}{t_i^0}} \leq \frac{F + \sum_{i=n_1+1}^{n_2} c_i}{\sum_{i=n_1+1}^{n_2} \frac{c_i}{t_i^0}}.$$

Доказательство. Если все зеленые автомобили используют только зеленые маршруты, оптимизационная задача (1)–(5) может быть рассмотрена в виде двух независимых задач (9)–(12) и (13)–(15). Благодаря (16), получаем $\sum_{i=1}^{n_1} \left(\frac{\omega^1}{t_i^0} - 1 \right) c_i = G$ и, следовательно,

$$\omega^1 = \frac{G + \sum_{i=1}^{n_1} c_i}{\sum_{i=1}^{n_1} \frac{c_i}{t_i^0}}.$$

Согласно (16):

$$(18) \quad t_i(g_i) = \frac{G + \sum_{i=1}^{n_1} c_i}{\sum_{i=1}^{n_1} \frac{c_i}{t_i^0}} \text{ при } g_i > 0,$$

а так как n_1 определено таким образом, что все зеленые маршруты востребованы, уравнение (18) справедливо для $i = \overline{1, n_1}$. Таким образом, (18) определяет время движения любого автомобиля из потока зеленых автомобилей.

Аналогично можно доказать для (13)–(15), что

$$(19) \quad t_i(f_i) = \frac{F + \sum_{i=n_1+1}^{n_2} c_i}{\sum_{i=n_1+1}^{n_2} \frac{c_i}{t_i^0}} \text{ при } f_i > 0,$$

для $i = \overline{n_1 + 1, n_2}$. Выражение (19) определяет время движения любого автомобиля из потока не-зеленых автомобилей. Следовательно, неравенство (17) утверждает, что для любого зеленого автомобиля выгодней ехать (в смысле времени движения) по зеленым маршрутам.

Теорема 1 дает второе правило определения оптимального n_1 . Действительно, если администрация предоставит экологически безопасным автомобилям такое количество маршрутов, что

условие (17) будет выполнено, то водители смогут почувствовать главное из возможных преимуществ от использования особого типа автомобилей – меньшее время движения.

1.2. ТРАНСПОРТНАЯ СЕТЬ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ТОПОЛОГИИ

Рассмотрим сеть, представленную ориентированным графом \mathfrak{G} , включающим множество последовательно пронумерованных узлов N и множество последовательно пронумерованных дуг A . Пусть R задает множество районов отправления, а S – районов прибытия ($R \cap S = \emptyset$). Введем следующие обозначения: K^{rs} – множество возможных маршрутов между районами отправления r и прибытия s ; K_1^{rs} – множество зеленых маршрутов, $K_1^{rs} \subset K^{rs}$; K_2^{rs} – множество не-зеленых маршрутов, $K_2^{rs} \subset K^{rs}$; $K_1^{rs} \cap K_2^{rs} = \emptyset$ и $K_1^{rs} \cup K_2^{rs} = K^{rs}$; G^{rs} и F^{rs} – транспортный спрос зеленых и не-зеленых автомобилей между районами отправления r и прибытия s соответственно; g_k^{rs} при $k \in K^{rs}$ – поток зеленых автомобилей по маршруту k , $g = \{g_k^{rs}\}_{k \in K^{rs}}$; f_k^{rs} при $k \in K_2^{rs}$ – поток не-зеленых автомобилей по маршруту k , $f = \{f_k^{rs}\}_{k \in K_2^{rs}}$; x_a – транспортный поток по дуге $a \in A$, $x = (\dots, x_a, \dots)$; c_a – пропускная способность дуги $a \in A$; $t_a(x_a)$ – время движения по загруженной дуге $a \in A$; $\delta_{a,k}^{rs}$ – индикатор: $\delta_{a,k}^{rs} = 1$ если дуга a «входит» в маршрут k между районами r и s , и $\delta_{a,k}^{rs} = 0$ в противном случае.

В введенных обозначениях, проблема (1)–(5) может быть переформулирована для сети произвольной топологии:

$$(20) \quad \min_x Z(x) = \min_x \sum_{a \in A} \int_0^{x_a} t_a(u) du$$

при ограничениях

$$(21) \quad \sum_{k \in K^{rs}} g_k^{rs} = G^{rs} \quad \forall r, s,$$

$$(22) \quad \sum_{k \in K_2^{rs}} f_k^{rs} = F^{rs} \quad \forall r, s,$$

$$(23) \quad g_k^{rs} \geq 0 \quad \forall k \in K^{rs}, r, s,$$

$$(24) \quad f_k^{rs} \geq 0 \quad \forall k \in K_2^{rs}, r, s,$$

при условии

$$(25) \quad x_a = \sum_r \sum_s \sum_{k \in K_1^{rs}} g_k^{rs} \delta_{a,k}^{rs} + \sum_r \sum_s \sum_{k \in K_2^{rs}} (g_k^{rs} + f_k^{rs}) \delta_{a,k}^{rs}.$$

Неизвестными переменными в оптимизационной программе (20)–(25) являются значения транспортных потоков по доступным маршрутам (как по зеленым, так и по не-зеленым). Наиболее важным моментом в сформулированной задаче является то, что ее решение зависит от множества зеленых маршрутов – зеленой подсети. Для того чтобы найти оптимальное решение поставленной проблемы, мы можем рассматривать множество зеленых маршрутов как параметр, которым управляет администрация. Таким образом, в действительности мы имеем двухуровневую систему управления. Распределение зеленых автомобилей должно учитывать оптимальную реакцию водителей зеленых и не-зеленых автомобилей, основанную на концепции конкурентного равновесия Вардропы.

В предыдущем подпункте мы задали процедуру, которая позволит поддерживать процесс принятия решений в сфере задания зеленых маршрутов. В самом деле, главным критерием для лица, принимающего решение, когда оно собирается предоставить часть общих маршрутов для пользования только одному виду транспорта (например, зеленым автомобилям), является эффективность использования пропускной способности транспортной сети. Разработанный метод позволяет нам находить такое множество зеленых маршрутов, что:

- время движения любого количества зеленых автомобилей (от нулевого потока до всех имеющихся на сети зеленых автомобилей), использующих для движения зеленые маршруты, меньше или равно времени движения остального транспортного потока из района отправления в район прибытия;
- если все зеленые автомобили будут использовать только зеленые маршруты для движения, то ни один зеленый маршрут

рут не будет не востребован (отсутствует переизбыток зеленых маршрутов).

Первое условие гарантирует такое абсолютное преимущество как меньшее время движения для зеленых автомобилей, которые используют зеленые маршруты. Второе условие утверждает, что транспортная сеть используется эффективно. Одновременное выполнение этих двух условий, с одной стороны, мотивирует водителей использовать зеленые автомобили, с другой стороны, гарантирует эффективное (нерасточительное) использование пропускной способности транспортной сети.

В связи с этим, по аналогии с Теоремой 1, можно сформулировать следующее

Утверждение 1. *Предположим, что все зеленые автомобили используют только зеленые маршруты, которые являются полностью востребованными. Поток зеленых автомобилей $G^{rs} \forall r, s$ использует только зеленые маршруты тогда и только тогда, когда*

$$\sum_{a \in A_{k_1}} t_a(x_a) \leq \sum_{a \in A_{k_2}} t_a(x_a) \quad \forall k_1 \in K_1^{rs}, k_2 \in K_2^{rs}, r, s,$$

где A_k – множество дуг, входящих в состав маршрута $k \in K^{rs} \forall r, s$.

Таким образом, исследование простой транспортной сети из параллельных маршрутов позволяет нам разработать метод, состоящий из следующей процедуры:

- 1) Задаем начальное множество возможных маршрутов как полностью востребованное.
- 2) Задаем множество зеленых маршрутов таким образом, чтобы предоставить зеленым автомобилям меньшее время движения по сравнению со всем остальным транспортным потоком.

Применим такой подход к сети произвольной топологии. Прежде всего, мы можем оценить граничное состояние множества K_1^{rs} . Граничное состояние множества K_1^{rs} соответствует ситуации, когда все зеленые автомобили используют только зеленые маршруты и их время движения меньше или равно времени движения не-зеленых автомобилей, использующих не-зеленые маршруты. В таком случае можем рассмотреть задачу (20)–(25) в виду двух независимых задач:

1) для зеленых автомобилей:

$$(26) \quad \min_x Z_1(x) = \min_x \sum_{a \in A} \int_0^{x_a} t_a(u) du$$

при ограничениях

$$(27) \quad \sum_{k \in K_1^{rs}} g_k^{rs} = G^{rs} \quad \forall r, s,$$

$$(28) \quad g_k^{rs} \geq 0 \quad \forall k \in K_1^{rs}, r, s,$$

$$(29) \quad g_k^{rs} = 0 \quad \forall k \in K_2^{rs}, r, s,$$

при условии

$$(30) \quad x_a = \sum_r \sum_s \sum_{k \in K_1^{rs}} g_k^{rs} \delta_{a,k}^{rs},$$

2) для не-зеленых автомобилей:

$$(31) \quad \min_x Z_2(x) = \min_x \sum_{a \in A} \int_0^{x_a} t_a(u) du$$

при ограничениях

$$(32) \quad \sum_{k \in K_2^{rs}} f_k^{rs} = F^{rs} \quad \forall r, s,$$

$$(33) \quad f_k^{rs} \geq 0 \quad \forall k \in K_2^{rs}, r, s,$$

при условии

$$(34) \quad x_a = \sum_r \sum_s \sum_{k \in K_2^{rs}} f_k^{rs} \delta_{a,k}^{rs}.$$

Оптимизационные задачи (26)–(30) и (31)–(34) являются обычными задачами нахождения конкурентного равновесия на сети [24]. К сожалению, для сети произвольной топологии невозможно получить аналитические условия, подобные условиям, полученным для сети из параллельных каналов. Однако сегодня существует множество методов решения такой задачи. Впервые для этих целей был использован алгоритм Франка–Вульфа [13]. Таким образом, лицо, принимающее решение, можем найти оптимальную зеленую подсеть, выполняя следующие действия:

- 1) Задать начальное множество зеленых маршрутов K_1^{rs} для каждой пары районов отправления-прибытия.
- 2) Решить задачи (26)–(30) и (31)–(34), используя существующие инструменты и методы.
- 3) Определить, является ли время движения зеленых автомобилей,двигающихся по зеленой подсети, меньшим или равным времени движения остального транспортного потока.
- 4) Определить, являются ли все зеленые маршруты востребованными в случае, когда все зеленые автомобили двигаются по зеленой подсети.
- 5) Если п. 3 и 4 не выполняются, то возвращаемся к п. 1. В противном случае оптимальная зеленая подсеть найдена.

Следует отметить, что определение зеленой подсети на сети произвольной топологии является довольно сложной вычислительной задачей. Для того чтобы решить задачи (26)–(30) и (31)–(34), необходимо использовать специальные информационные технологии со специфическим программным обеспечением. В то же время, иногда лицу, принимающему решение, требуются только оценки, а не абсолютно точные значения. В таком случае полученные в предыдущем подпункте условия могут быть удобным инструментом поддержки процесса принятия решений, в том числе и на сети общей топологии.

2. Конкуреннтное равновесие Вардропа на сети с выделенными маршрутами для движения экологически безопасных транспортных потоков

В предыдущем параграфе мы получили условия определения числа зеленых маршрутов, которые необходимо выделить на сети для стимулирования водителей использовать экологически безопасные автомобили. Теперь мы можем выписать условия конкурентного равновесия Вардропа на сети с выделенными маршрутами для движения зеленых автомобилей.

2.1. ТРАНСПОРТНАЯ СЕТЬ ИЗ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ КАНАЛОВ

Теорема 2. *Предположим, что все маршруты являются полностью востребованными:*

$$G > \sum_{i=1}^{n_1} c_i \left(\frac{t_{n_1}^0}{t_i^0} - 1 \right) \text{ и } F > \sum_{i=n_1+1}^{n_2} c_i \left(\frac{t_{n_2}^0}{t_i^0} - 1 \right).$$

В таком случае распределение транспортных потоков зеленых и не-зеленых автомобилей на сети из параллельных каналов является ситуацией конкурентного равновесия Вардропа (g^*, f^*) тогда и только тогда, когда

1) если n_1 таково, что

$$\frac{G + \sum_{i=1}^{n_1} c_i}{\sum_{i=1}^{n_1} \frac{c_i}{t_i^0}} \leq \frac{F + \sum_{i=n_1+1}^{n_2} c_i}{\sum_{i=n_1+1}^{n_2} \frac{c_i}{t_i^0}},$$

то

$$g_i^* = \frac{c_i}{t_i^0} \frac{G + \sum_{s=1}^{n_1} c_s}{\sum_{s=1}^{n_1} \frac{c_s}{t_s^0}} - c_i \text{ для } i = \overline{1, n_1},$$

$$f_i^* = \frac{c_i}{t_i^0} \frac{F + \sum_{s=n_1+1}^{n_2} c_s}{\sum_{s=n_1+1}^{n_2} \frac{c_s}{t_s^0}} - c_i \text{ для } i = \overline{n_1 + 1, n_2};$$

2) если n_1 таково, что

$$\frac{G + \sum_{i=1}^{n_1} c_i}{\sum_{i=1}^{n_1} \frac{c_i}{t_i^0}} > \frac{F + \sum_{i=n_1+1}^{n_2} c_i}{\sum_{i=n_1+1}^{n_2} \frac{c_i}{t_i^0}},$$

то

$$g_i^* = \frac{c_i G_1 + \sum_{s=1}^{n_1} c_s}{t_i^0 \sum_{s=1}^{n_1} \frac{c_s}{t_s^0}} - c_i \text{ для } i = \overline{1, n_1},$$

$$g_i^* + f_i^* = \frac{c_i G_2 + F + \sum_{s=n_1+1}^{n_2} c_s}{t_i^0 \sum_{s=n_1+1}^{n_2} \frac{c_s}{t_s^0}} - c_i \text{ для } i = \overline{n_1 + 1, n_2},$$

где $G_1 + G_2 = G$ и

$$\frac{G_1 + \sum_{i=1}^{n_1} c_i}{\sum_{i=1}^{n_1} \frac{c_i}{t_i^0}} = \frac{F + G_2 + \sum_{i=n_1+1}^{n_2} c_i}{\sum_{i=n_1+1}^{n_2} \frac{c_i}{t_i^0}}.$$

Доказательство. Вынесенные утверждения напрямую следуют из теоремы 1 и теоремы из [2].

2.2. ТРАНСПОРТНАЯ СЕТЬ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ТОПОЛОГИИ

По аналогии с теоремой 2 можно сформулировать следующее

Утверждение 2. *Предположим, что все маршруты являются полностью востребованными:*

$$g_k^{rs} > 0 \quad \forall k \in K_1^{rs} \text{ и } (g_k^{rs} + f_k^{rs}) > 0 \quad \forall k \in K_2^{rs} \quad \forall r, s.$$

В таком случае распределение транспортных потоков на сети произвольной топологии является ситуацией конкурентного равновесия Вардропы (g^*, f^*) тогда и только тогда, когда

1) если K_1^{rs} таково, что

$$\sum_{a \in A_{k_1}} t_a(x_a) \leq \sum_{a \in A_{k_2}} t_a(x_a) \quad \forall k_1 \in K_1^{rs}, k_2 \in K_2^{rs}, r, s,$$

то

- g_k^{rs*} определяется как решение задачи (26)–(30),
- f_k^{rs*} определяется как решение задачи (31)–(34);

2) если K_1^{rs} таково, что

$$\sum_{a \in A_{k_1}} t_a(x_a) > \sum_{a \in A_{k_2}} t_a(x_a) \quad \forall k_1 \in K_1^{rs}, k_2 \in K_2^{rs}, r, s,$$

то

- g_k^{rs*} при $k \in K_1^{rs}$ определяется как решение задачи

$$\min_x \mathfrak{Z}_1(x) = \min_x \sum_{a \in A} \int_0^{x_a} t_a(u) du$$

при ограничениях

$$\sum_{k \in K^{rs}} g_k^{rs} = G_1^{rs} \quad \forall r, s,$$

$$g_k^{rs} \geq 0 \quad \forall k \in K_1^{rs}, r, s,$$

при условии

$$x_a = \sum_r \sum_s \sum_{k \in K_1^{rs}} g_k^{rs} \delta_{a,k}^{rs},$$

- $(g_k^{rs*} + f_k^{rs*})$ определяется как решение задачи

$$\min_x \mathfrak{Z}_2(x) = \min_x \sum_{a \in A} \int_0^{x_a} t_a(u) du$$

при ограничениях

$$\sum_{k \in K_2^{rs}} (g_k^{rs} + f_k^{rs}) = G_2^{rs} + F^{rs} \quad \forall r, s,$$

$$(g_k^{rs} + f_k^{rs}) \geq 0 \quad \forall k \in K^{rs}, r, s,$$

при условии

$$x_a = \sum_r \sum_s \sum_{k \in K_2^{rs}} (g_k^{rs} + f_k^{rs}) \delta_{a,k}^{rs},$$

где $G_1^{rs} + G_2^{rs} = G^{rs}$, а G_1^{rs} и $G_2^{rs} + F$ – такие потоки автомобилей по зеленым и не-зеленым маршрутам соответственно, что

$$\sum_{a \in A_{k_1}} t_a(x_a) = \sum_{a \in A_{k_2}} t_a(x_a) \quad \forall k_1 \in K_1^{rs}, k_2 \in K_2^{rs}, r, s.$$

3. Выделение маршрутов для движения экологически безопасных транспортных потоков в условиях конкурентной маршрутизации

Как отмечалось в параграфе 2, администрация крупного города заинтересована в появлении экологически безопасных автомобилей на улично-дорожной сети, так как это позволит снизить уровень выделяемых транспортными потоками парниковых газов. В связи с чем необходимо разработать меры по мотивированию водителей пересаживаться на экологически безопасные автомобили. Одной из мотивационных мер такого характера может быть выделение специальных маршрутов, доступных только для движения экологически безопасных автомобилей. Вопрос заключается в том, какое количество маршрутов следует выделить для движения только экологически безопасных автомобилей. В то же время, на сегодняшний момент на транспортной сети современных крупных городов появляется все больше конкурирующих между собой групп пользователей. Учитывая взаимное влияние этих групп, необходимо найти условия, гарантирующие сбалансированное использование транспортной сети с выделенными на ней зелеными маршрутами. Настоящий параграф посвящен поиску этих условий.

3.1. ТРАНСПОРТНАЯ СЕТЬ ИЗ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ КАНАЛОВ

Рассмотрим транспортную сеть, представленную ориентированным графом, состоящим из одной пары исток-сток (районы отправления-прибытия) и n параллельных маршрутов. Мы считаем, что на данной сети имеются выделенные зеленые маршруты (для движения только зеленых автомобилей) и не-зеленые маршруты (для движения как зеленых, так и не-зеленых автомобилей). Введем следующие обозначения: $N = \{1, \dots, n\}$ – множество номеров всех маршрутов; $N_1 = \{1, \dots, n_1\}$ – множество номеров зеленых маршрутов; $N_2 = \{n_1 + 1, \dots, n_2 = n\}$ – множество номеров не-зеленых маршрутов; $M = \{1, \dots, m\}$ – множество групп пользователей (ГП) транспортной сети, $j \in M$; G^j – количество зеленых автомобилей в ГП j , $G = \sum_{j=1}^m G^j$; F^j – количество не-зеленых автомобилей в ГП j , $F = \sum_{j=1}^m F^j$; g_i^j при $i = \overline{1, n}$ – транспортный поток зеленых автомобилей j -й ГП по маршруту i ; f_i^j при $i = \overline{n_1 + 1, n_2}$ – транспортный поток не-зеленых автомобилей j -й ГП по маршруту i ; $g^j = (g_1^j, \dots, g_n^j)$ и $f^j = (f_{n_1+1}^j, \dots, f_{n_2}^j)$, а $g = (g^1, \dots, g^m)$, $f = (f^1, \dots, f^m)$ и $g^{-j} = (g^1, \dots, g^{j-1}, g^{j+1}, \dots, g^m)$, $f^{-j} = (f^1, \dots, f^{j-1}, f^{j+1}, \dots, f^m)$; t_i^0 и c_i – время свободного движения и пропускная способность маршрута i ; \mathfrak{F}_i – транспортный поток по маршруту i ; $t_i(\mathfrak{F}_i) = t_i^0 \left(1 + \frac{\mathfrak{F}_i}{c_i}\right)$ – время движения по загруженному маршруту i . Мы моделируем время движения с помощью линейной BPR-функции задержки [27].

Каждая ГП стремится минимизировать время движения своих пользователей:

(35)

$$\min_{g^j, f^j} z^j(g, f) = \min_{g^j, f^j} \left[\sum_{i=1}^{n_1} t_i(\mathfrak{F}_i) g_i^j + \sum_{i=n_1+1}^{n_2} t_i(\mathfrak{F}_i) (g_i^j + f_i^j) \right]$$

$\forall j \in M$, при ограничениях

$$(36) \quad \sum_{i=1}^n g_i^j = G^j \quad \forall j \in M,$$

$$(37) \quad \sum_{i=n_1+1}^n f_i^j = F^j \quad \forall j \in M,$$

$$(38) \quad g_i^j \geq 0 \quad \forall j \in M, i = \overline{1, n},$$

$$(39) \quad f_i^j \geq 0 \quad \forall j \in M, i = \overline{n_1 + 1, n_2}.$$

Таким образом, можно рассмотреть бескоалиционную игру $\Gamma_m(M, \{G^j, F^j\}_{j \in M}, \{H_j\}_{j \in M})$, где $\{G^j, F^j\}_{j \in M}$ – множество стратегий (g^j, f^j) , удовлетворяющих ограничениям (36)–(39), а $H_j(g, f) = -z^j(g, f) \quad \forall j \in M$. Равновесие по Нэшу в игре Γ_m достигается реализацией таких стратегий (g^*, f^*) , что

$$H_j(g^*, f^*) \geq H_j(g^j, f^j, g^{-j*}, f^{-j*}) \quad \forall j \in M.$$

Конкурентные отношения между различными группами пользователей приводят к их взаимному влиянию на время передвижения, и этот факт адресует нас к проблеме поиска равновесия по Нэшу. Здесь следует отметить, что процесс нахождения равновесия по Нэшу, когда поведение каждой ГП моделируется оптимизационной программой (35)–(39), представляется довольно сложной проблемой. В то же время, граничное значение n_1 может быть оценено напрямую. В самом деле, граничное значение n_1 соответствует ситуации, когда все зеленые автомобили распределяются только по зеленым маршрутам и время их движения меньше или равно времени движения не-зеленых автомобилей, распределяемых по не-зеленым маршрутам. Далее под оптимальным n_1 будем понимать значение, заданное в определении 1.

Без умаления общности будем считать, что когда n_1 определено, маршруты пронумерованы следующим образом:

$$(40) \quad t_1^0 \leq \dots \leq t_{n_1}^0 \text{ и } t_{n_1+1}^0 \leq \dots \leq t_{n_2}^0.$$

Лемма 2. *Предположим, что все экологически дружелюбные автомобили $G^j \quad \forall j \in M$ используют только имеющиеся зеленые маршруты. Каждый зеленый маршрут из множества n_1*

маршрутов востребован для движения тогда и только тогда, когда

$$(41) \quad G^j > \frac{1}{m+1} \sum_{i=1}^{n_1} c_i \left(\frac{t_{n_1}^0}{t_i^0} - 1 \right) \quad \forall j \in M,$$

и каждый не-зеленый маршрут из множества $|n_2 - n_1|$ маршрутов востребован для движения тогда и только тогда, когда

$$(42) \quad F^j > \frac{1}{m+1} \sum_{i=n_1+1}^{n_2} c_i \left(\frac{t_{n_2}^0}{t_i^0} - 1 \right) \quad \forall j \in M.$$

Доказательство. Если все экологически дружелюбные автомобили используют только зеленые маршруты для движения, оптимизационная проблема (35)–(39) может быть рассмотрена в виде двух независимых задач:

1) для зеленых автомобилей:

$$(43) \quad \min_{g^j} z_1^j(g) = \min_{g^j} \sum_{i=1}^{n_1} t_i(\mathfrak{F}_i) g_i^j \quad \forall j \in M$$

при ограничениях

$$(44) \quad \sum_{i=1}^{n_1} g_i^j = G^j \quad \forall j \in M,$$

$$(45) \quad g_i^j \geq 0 \quad \forall j \in M, i = \overline{1, n_1},$$

$$(46) \quad g_i^j = 0 \quad \forall j \in M, i = \overline{n_1 + 1, n_2};$$

2) для не-зеленых автомобилей:

$$(47) \quad \min_{f^j} z_2^j(f) = \min_{f^j} \sum_{i=n_1+1}^{n_2} t_i(\mathfrak{F}_i) f_i^j \quad \forall j \in M$$

при ограничениях

$$(48) \quad \sum_{i=n_1+1}^{n_2} f_i^j = F^j \quad \forall j \in M,$$

$$(49) \quad f_i^j \geq 0 \quad \forall j \in M, i = \overline{n_1 + 1, n_2}.$$

Согласно теореме 1 из [1], для задач (43)–(46) и (47)–(49) все маршруты – ненулевые тогда и только тогда, когда выполняются условия (41) и (42) соответственно.

Лемма 2 дает первое правило нахождения оптимального числа зеленых маршрутов в случае множества групп участников движения. Если неравенство (41) выполняется, то все зеленые маршруты будут востребованы, когда все имеющиеся на сети экологически дружелюбные автомобили используют только зеленые маршруты для движения. Одновременное выполнение условий (41), (42) означает, что транспортная сеть является полностью загруженной – все маршруты востребованы. В то же время, условие (41) не гарантирует, что все экологически дружелюбные автомобили будут использовать только зеленые маршруты для движения. Чтобы побудить зеленые автомобили использовать только зеленые маршруты, лицо, принимающее решение, должно создать такие условия, что для водителей будет предпочтительней двигаться по зеленой подсети.

Теорема 3. *Предположим, что начальное множество маршрутов полностью востребовано имеющимися транспортными потоками G и F . Поток зеленых автомобилей G использует только зеленые маршруты тогда и только тогда, когда*

$$(50) \quad \sum_{i=1}^{n_1} \left[\frac{t_i^0}{m+1} + \Psi(G, m) \right] \left[\frac{c_i}{t_i^0} \Psi(G^j, 1) - \frac{c_i}{m+1} \right] \leq \sum_{i=n_1+1}^{n_2} \left[\frac{t_i^0}{m+1} + \Phi(F, m) \right] \left[\frac{c_i}{t_i^0} \Phi(F^j, 1) - \frac{c_i}{m+1} \right] \quad \forall j \in M,$$

где

$$(51) \quad \Psi(x, y) = \frac{x + \frac{y}{m+1} \sum_{r=1}^{n_1} c_r}{\sum_{r=1}^{n_1} \frac{c_r}{t_r^0}},$$

$$(52) \quad \Phi(x, y) = \frac{x + \frac{y}{m+1} \sum_{r=n_1+1}^{n_2} c_r}{\sum_{r=n_1+1}^{n_2} \frac{c_r}{t_r^0}}.$$

Доказательство. Согласно [1], при выполнении условий (41), (42) оптимальное распределение транспортных потоков (g^*, f^*) можно выразить в явном виде. Если подставить полученные в явном виде g^* и f^* в функционалы (43) и (47) соответственно, то получим левую и правую части формулы (50). При этом левая часть будет характеризовать время движения потока зеленых автомобилей j -й ГП по зеленым маршрутам, а правая часть – время движения потока не-зеленых автомобилей j -й ГП по не-зеленым маршрутам.

Теорема 3 дает второе правило нахождения оптимального числа зеленых маршрутов в случае множества групп участников движения. В самом деле, если администрация выделит такое количество зеленых маршрутов, что условие (50) выполняется, то для любой группы пользователей будет предпочтительней направить зеленые автомобили по зеленым маршрутам. В этом случае не-зеленые автомобили увидят, что зеленые автомобили имеют меньшее время движения из района отправления в район прибытия. Данное обстоятельство послужит лучшей мотивацией для водителей к использованию экологически безопасных транспортных средств. В свою очередь условия (41), (42) гарантируют полную востребованность всех выделенных зеленых и не-зеленых маршрутов.

3.2. ТРАНСПОРТНАЯ СЕТЬ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ТОПОЛОГИИ

Рассмотрим сеть, представленную ориентированным графом \mathfrak{G} , включающим множество последовательно пронумерованных узлов N и множество последовательно пронумерованных дуг A . Пусть R задает множество районов отправления, а S – районов прибытия ($R \cap S = \emptyset$). Введем следующие обозначения: $M = \{1, \dots, m\}$ – множество групп пользователей (ГП) транспортной сети $j \in M$; K^{rs} – множество возможных маршрутов между районами отправления r и прибытия s ; K_1^{rs} – множество зеленых маршрутов, $K_1^{rs} \subset K^{rs}$; K_2^{rs} – множество не-зеленых

маршрутов, $K_2^{rs} \subset K^{rs}$; $K_1^{rs} \cap K_2^{rs} = \emptyset$ и $K_1^{rs} \cup K_2^{rs} = K^{rs}$; $G^{j,rs}$ и $F^{j,rs}$ – транспортный спрос j -й ГП зеленых и не-зеленых автомобилей между районами отправления r и прибытия s соответственно, $G^{rs} = \sum_{j=1}^m G^{j,rs}$ и $F^{rs} = \sum_{j=1}^m F^{j,rs}$; $g_k^{j,rs}$ при $k \in K^{rs}$ – поток зеленых автомобилей j -й ГП по маршруту k ; $g^{j,rs} = (\dots, g_k^{j,rs}, \dots)$, $g^j = (\dots, g^{j,rs}, \dots)$ и $g = (g^1, \dots, g^m)$, $g^{-j} = (g^1, \dots, g^{j-1}, g^{j+1}, \dots, g^m)$; $f_k^{j,rs}$ при $k \in K_2^{rs}$ – поток не-зеленых автомобилей j -й ГП по маршруту k ; $f^{j,rs} = (\dots, f_k^{j,rs}, \dots)$, $f^j = (\dots, f^{j,rs}, \dots)$ и $f = (f^1, \dots, f^m)$, $f^{-j} = (f^1, \dots, f^{j-1}, f^{j+1}, \dots, f^m)$; x_a – транспортный поток по дуге $a \in A$, $x = (\dots, x_a, \dots)$; x_a^j – транспортный поток j -й ГП по дуге $a \in A$, $x^j = (\dots, x_a^j, \dots)$; c_a – пропускная способность дуги $a \in A$; $t_a(x_a)$ – время движения по загруженной дуге $a \in A$; $\delta_{a,k}^{rs}$ – индикатор: $\delta_{a,k}^{rs} = 1$ если дуга a «входит» в маршрут k между районами r и s , $\delta_{a,k}^{rs} = 0$ в противном случае.

Проблема (35)–(39) может быть переформулирована для сети общей топологии:

$$(53) \quad \min_{x^j} Z^j(x) = \min_{x^j} \sum_{a \in A} t_a(x_a) x_a^j \quad \forall j \in M$$

при ограничениях

$$(54) \quad \sum_{k \in K^{rs}} g_k^{j,rs} = G^{j,rs} \quad \forall j \in M,$$

$$(55) \quad \sum_{k \in K_2^{rs}} f_k^{j,rs} = F^{j,rs} \quad \forall j \in M,$$

$$(56) \quad g_k^{j,rs} \geq 0 \quad \forall k \in K^{rs}, j \in M,$$

$$(57) \quad f_k^{j,rs} \geq 0 \quad \forall k \in K_2^{rs}, j \in M,$$

при условии

$$(58) \quad x_a^j = \sum_r \sum_s \sum_{k \in K_1^{rs}} g_k^{j,rs} \delta_{a,k}^{rs} + \sum_r \sum_s \sum_{k \in K_2^{rs}} (g_k^{j,rs} + f_k^{j,rs}) \delta_{a,k}^{rs},$$

$$(59) \quad x_a = \sum_{j=1}^m x_a^j.$$

Таким образом, можно рассмотреть бескоалиционную игру $\Gamma (M, \{\mathbf{G}^j, \mathbf{F}^j\}_{j \in M}, \{\mathbf{H}_j\}_{j \in M})$, где $\{\mathbf{G}^j, \mathbf{F}^j\}_{j \in M}$ – множество стратегий (g, f) , удовлетворяющих ограничениям (54)–(57), а $\mathbf{H}_j(x(g, f)) = -Z^j(x(g, f)) \forall j \in M$. Равновесие по Нэшу в игре Γ достигается реализацией таких стратегий (g^*, f^*) , что

$$\mathbf{H}_j(x(g^*, f^*)) \geq \mathbf{H}_j(x(g^j, f^j, g^{-j*}, f^{-j*})) \quad \forall j \in M.$$

Как и в предыдущих пунктах, неизвестными переменными в поставленной задаче является распределение транспортных потоков по доступным маршрутам (по зеленым и не-зеленым). При разной конфигурации зеленой подсети (множества зеленых маршрутов) мы будем получать разное равновесное распределение. Таким образом, мы можем рассматривать множество зеленых маршрутов как параметр, которым управляет администрация. Мы приходим к двухуровневой системе управления на сети произвольной топологии при наличии множества групп участников движения.

Воспользовавшись процедурой, заданной в предыдущем пункте, мы можем найти такую зеленую подсеть, что

- время движения любого количества зеленых автомобилей (от нулевого потока до всех имеющихся на сети зеленых автомобилей), использующих для движения зеленые маршруты, меньше или равно времени движения остального транспортного потока между заданными районами отправления-прибытия;
- если все зеленые автомобили будут использовать только зеленые маршруты для движения между заданной парой районов отправления-прибытия, то ни один зеленый маршрут не будет не востребован (отсутствует переизбыток зеленых маршрутов между каждой парой районов отправления-прибытия).

В связи с этим по аналогии с теоремой 3 можно сформулировать следующее

Утверждение 3. *Предположим, что все зеленые автомобили используют только зеленые маршруты, которые являются полностью востребованными. Поток зеленых автомобилей $G^{rs} \forall r, s$ использует только зеленые маршруты тогда и только тогда, когда*

$$\sum_{a \in A_{k_1}} t_a(x_a)x_a^j \leq \sum_{a \in A_{k_2}} t_a(x_a)x_a^j \quad \forall k_1 \in K_1^{rs}, k_2 \in K_2^{rs}, r, s,$$

где A_k – множество дуг, входящих в состав маршрута $k \in K^{rs} \forall r, s$.

Воспользовавшись утверждением 3, мы можем оценить граничное состояние множества K_1^{rs} . Граничное состояние множества K_1^{rs} соответствует ситуации, когда все зеленые автомобили используют только зеленые маршруты и их время движения меньше или равно времени движения не-зеленых автомобилей, использующих не-зеленые маршруты. В таком случае можем рассмотреть задачу (53)–(59) в виде двух независимых задач:

1) для зеленых автомобилей:

$$(60) \quad \min_{x^j} Z_1^j(x) = \min_{x^j} \sum_{a \in A} t_a(x_a)x_a^j \quad \forall j \in M$$

при ограничениях

$$(61) \quad \sum_{k \in K_1^{rs}} g_k^{j,rs} = G^{j,rs} \quad \forall j, r, s,$$

$$(62) \quad g_k^{j,rs} \geq 0 \quad \forall k \in K_1^{rs}, j, r, s,$$

$$(63) \quad g_k^{j,rs} = 0 \quad \forall k \in K_2^{rs}, j, r, s,$$

при условии

$$(64) \quad x_a^j = \sum_r \sum_s \sum_{k \in K_1^{rs}} g_k^{j,rs} \delta_{a,k}^{rs} \quad \forall j \in M,$$

$$(65) \quad x_a = \sum_{j=1}^m x_a^j,$$

2) для не-зеленых автомобилей:

$$(66) \quad \min_{x^j} Z_2^j(x) = \min_{x^j} \sum_{a \in A} t_a(x_a) x_a^j \quad \forall j \in M$$

при ограничениях

$$(67) \quad \sum_{k \in K_2^{rs}} f_k^{j,rs} = F^{j,rs} \quad \forall j, r, s,$$

$$(68) \quad f_k^{j,rs} \geq 0 \quad \forall k \in K_2^{rs}, j, r, s,$$

при условии

$$(69) \quad x_a^j = \sum_r \sum_s \sum_{k \in K_2^{rs}} f_k^{j,rs} \delta_{a,k}^{rs} \quad \forall j \in M,$$

$$(70) \quad x_a = \sum_{j=1}^m x_a^j.$$

Оптимизационные задачи (60)–(65) и (66)–(70) являются сложными вычислительными задачами нахождения равновесия по Нэшу на сети [1]. К сожалению, для сети произвольной топологии невозможно получить аналитические условия, подобные условиям, полученным для сети из параллельных каналов.

4. Равновесие по Нэшу на сети с выделенными маршрутами для движения экологически безопасных транспортных потоков в условиях конкурентной маршрутизации

В предыдущем параграфе мы получили правила определения числа зеленых маршрутов в условиях наличия конкурирующих групп пользователей. Теперь мы можем выписать правило равновесного по Нэшу распределения транспортных потоков на сети с выделенными маршрутами для движения зеленых автомобилей.

где

$$y_i^j = \frac{c_i F^j + \sum_{s=1}^m F^s + \sum_{r=n_1+1}^{n_2} c_r}{t_i^0 \sum_{r=n_1+1}^{n_2} \frac{c_r}{t_r^0}} - c_i \text{ для } i = \overline{n_1+1, n_2},$$

$\forall j \in M,$

2) если n_1 таково, что

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{n_1} \left[\frac{t_i^0}{m+1} + \Psi(G, m) \right] \left[\frac{c_i}{t_i^0} \Psi(G^j, 1) - \frac{c_i}{m+1} \right] > \\ & > \sum_{i=n_1+1}^{n_2} \left[\frac{t_i^0}{m+1} + \Phi(F, m) \right] \left[\frac{c_i}{t_i^0} \Phi(F^j, 1) - \frac{c_i}{m+1} \right] \\ & \qquad \qquad \qquad \forall j \in M, \end{aligned}$$

при $\Psi(x, y)$ и $\Phi(x, y)$, заданных в (51) и (52), то

$$g_i^{j*} = b_i^j - \frac{1}{m+1} \sum_{q=1}^m b_i^q,$$

где

$$b_i^j = \frac{c_i G_1^j + \sum_{s=1}^m G_1^s + \sum_{r=1}^{n_1} c_r}{t_i^0 \sum_{r=1}^{n_1} \frac{c_r}{t_r^0}} - c_i \text{ для } i = \overline{1, n_1}, \quad \forall j \in M,$$

$$\left(g_i^{j*} + f_i^{j*} \right) = y_i^j - \frac{1}{m+1} \sum_{q=1}^m y_i^q,$$

где

$$y_i^j = \frac{c_i F^j + G_2^j + \sum_{s=1}^m (F^s + G_2^s) + \sum_{r=n_1+1}^{n_2} c_r}{t_i^0 \sum_{r=n_1+1}^{n_2} \frac{c_r}{t_r^0}} - c_i$$

для $i = \overline{n_1 + 1, n_2}$, $\forall j \in M$, при $G^j = G_1^j + G_2^j \forall j \in M$ и $G_1 = \sum_{j=1}^m G_1^j$, $G_2 = \sum_{j=1}^m G_2^j$ такими, что

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{n_1} \left[\frac{t_i^0}{m+1} + \Psi(G_1, m) \right] \left[\frac{c_i}{t_i^0} \Psi(G_1^j, 1) - \frac{c_i}{m+1} \right] \leq \\ & \leq \sum_{i=n_1+1}^{n_2} \left[\frac{t_i^0}{m+1} + \Phi(F + G_2, m) \right] \left[\frac{c_i}{t_i^0} \Phi(F^j + G_2^j, 1) - \frac{c_i}{m+1} \right] \\ & \qquad \qquad \qquad \forall j \in M, \end{aligned}$$

при $\Psi(x, y)$ и $\Phi(x, y)$, заданных в (51) и (52).

Доказательство. Вынесенные утверждения напрямую следуют из теоремы 3 и теоремы 1 из [1].

4.2. ТРАНСПОРТНАЯ СЕТЬ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ТОПОЛОГИИ

По аналогии с теоремой 4 можно сформулировать следующее

Утверждение 4. *Предположим, что все маршруты являются полностью востребованными:*

$$g_k^{j,rs} > 0 \quad \forall k \in K_1^{rs} \quad \text{и} \quad \left(g_k^{j,rs} + f_k^{j,rs} \right) > 0 \quad \forall k \in K_2^{rs},$$

$\forall j \in M, r, s$.

В таком случае распределение транспортных потоков на сети из параллельных каналов является ситуацией равновесия по Нэшу (g^* , f^*) тогда и только тогда, когда

1) если K_1^{rs} таково, что

$$\sum_{a \in A_{k_1}} t_a(x_a) x_a^j \leq \sum_{a \in A_{k_2}} t_a(x_a) x_a^j \quad k_1 \in K_1^{rs}, k_2 \in K_2^{rs}$$

$\forall j \in M, r, s$, то

- $g^{j*} \forall j \in M$ определяется как решение задачи (60)–(65),

- $f^{j*} \forall j \in M$ определяется как решение задачи (66)–(70),

2) если K_1^{rs} таково, что

$$\sum_{a \in A_{k_1}} t_a(x_a) x_a^j > \sum_{a \in A_{k_2}} t_a(x_a) x_a^j \quad \forall k_1 \in K_1^{rs}, k_2 \in K_2^{rs},$$

$\forall j \in M, r, s$, то

- $\{g_k^{j,rs*}\}_{k \in K_1^{rs}} \forall j \in M$ определяется как решение задачи

$$(71) \quad \min_{x^j} \mathfrak{Z}_1^j(x) = \min_{x^j} \sum_{a \in A} t_a(x_a) x_a^j \quad \forall j \in M$$

при ограничениях

$$(72) \quad \sum_{k \in K_1^{rs}} g_k^{j,rs} = G_1^{j,rs} \quad \forall j, r, s,$$

$$(73) \quad g_k^{j,rs} \geq 0 \quad \forall k \in K_1^{rs}, j, r, s,$$

при условии

$$(74) \quad x_a^j = \sum_r \sum_s \sum_{k \in K_1^{rs}} g_k^{j,rs} \delta_{a,k}^{rs} \quad \forall j \in M,$$

$$(75) \quad x_a = \sum_{j=1}^m x_a^j,$$

- $\{g_k^{j,rs*}, f_k^{j,rs*}\}_{k \in K_2^{rs}} \forall j \in M$ определяется как решение задачи

$$(76) \quad \min_{x^j} \mathfrak{Z}_2^j(x) = \min_{x^j} \sum_{a \in A} t_a(x_a) x_a^j \quad \forall j \in M$$

при ограничениях

$$(77) \quad \sum_{k \in K_2^{rs}} (g_k^{j,rs} + f_k^{j,rs}) = G_2^{j,rs} + F^{j,rs} \quad \forall j, r, s,$$

$$(78) \quad g_k^{j,rs} \geq 0 \quad \forall k \in K_2^{rs}, j, r, s,$$

$$(79) \quad f_k^{j,rs} \geq 0 \quad \forall k \in K_2^{rs}, j, r, s,$$

при условии

$$(80) \quad x_a^j = \sum_r \sum_s \sum_{k \in K_2^{rs}} (g_k^{j,rs} + f_k^{j,rs}) \delta_{a,k}^{rs} \quad \forall j \in M,$$

$$(81) \quad x_a = \sum_{j=1}^m x_a^j,$$

где $G_1^{j,rs} + G_2^{j,rs} = G^{j,rs}$, а $G_1^{j,rs}$ и $G_2^{j,rs} + F^{j,rs} \forall j \in M$ – такие потоки автомобилей по зеленым и не-зеленым маршрутам соответственно, что

$$\sum_{a \in A_{k_1}} t_a(x_a) x_a^j \leq \sum_{a \in A_{k_2}} t_a(x_a) x_a^j \quad \forall k_1 \in K_1^{rs}, k_2 \in K_2^{rs},$$

$\forall j \in M, r, s.$

5. Заключение

В силу того, что наблюдается серьезная нехватка методологических инструментов поддержки принимаемых решений по выделению на городской транспортной сети «зеленых» подсетей и по мотивации водителей использовать более экологически безопасные автомобили, настоящая статья посвящена проблеме распределения двух видов транспортных потоков на сети, включающей «зеленые» и «не-зеленые» маршруты. Проведен анализ конкурентного сценария взаимодействия этих двух групп транспортных средств на сети. Разработан метод выделения зеленых маршрутов (зеленой подсети), которые обеспечивают «зеленым»

автомобилям меньшее время перемещения из районов отправления в районы прибытия при равновесном по Нэшу распределении потоков. Условия сбалансированности «зеленой» подсети с параллельными маршрутами получены в явном виде.

В дальнейших исследованиях предполагается рассмотреть двухуровневые модели минимизации выбросов загрязняющих веществ транспортными потоками мегаполиса, нижний уровень которых реагирует согласно условиям, полученным в настоящей работе. Данная тема представляется крайне актуальной для продолжения исследований, так как практически половина всех выбросов загрязняющих веществ в атмосферу современных городов мира приходится на долю автомобильного транспорта. В связи с этим городские администрации вынуждены создавать условия, стимулирующие появление технологических инноваций в области регулирования транспортных потоков в городах.

Литература

1. ЗАХАРОВ В.В., КРЫЛАТОВ А.Ю. *Конкуренстная маршрутизация транспортных потоков поставщиками услуг навигации* // Управление большими системами: сборник трудов. – 2014. – №49. – С. 129–147.
2. КРЫЛАТОВ А.Ю. *Оптимальные стратегии управления транспортными потоками на сети из параллельных каналов* // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: прикладная математика, информатика, процессы управления. – 2014. – №2. – С. 121–130.
3. AHN K., RAKHA H.A. *Network-wide impacts of eco-routing strategies: a large-scale case study* // Transp. Res. Part D: Transp. Environ. – 2013. – Vol. 25. – P. 119–130.
4. AHN K., RAKHA H.A. *The effects of route choice decisions on vehicle energy consumption and emissions* // Transp. Res. Part D: Transp. Environ. – 2008. – Vol. 13, №3. – P. 151–167.
5. AZIZ H.M.A., UKKUSURI S.V. *Exploring the trade-off between greenhouse gas emissions and travel time in daily*

- travel decisions: Route and departure time choices // Transp. Res. Part D. – 2014. – Vol. 32. – P. 334–353.*
6. AZIZ H.M.A., UKKUSURI S.V. *Integration of environmental objectives in a system optimal dynamic traffic assignment model // Computer-Aided Civil Infrastructure Eng. – 2012. – Vol. 27, №7. – P. 494–511.*
 7. BELTRAN B., CARRESE S., CIPRIANI E., PETRELLI M. *Transit network design with allocation of green vehicles: A genetic algorithm approach // Transp. Res. Part C. – 2009. – Vol. 17. – P. 475–483.*
 8. BEN-AKIVA M., DE PALMA A., ISAM K. *Dynamic network models and driver information systems // Transp. Res. Part A: General. – 1991. – Vol. 25, №5. – P. 251–266.*
 9. BORIBOONSOMSIN K., BARTH M. *Impacts of road grade on fuel consumption and carbon dioxide emissions evidenced by use of advanced navigation systems // Transp. Res. Rec. – 2009. – Vol. 2139. – P. 21–30.*
 10. BORIBOONSOMSIN K., BARTH M.J., WEIHUA Z., VU A. *Eco-routing navigation system based on multisource historical and real-time traffic information // IEEE Transact. Intell. Transp. Syst. – 2012. – Vol. 13, №4. – P. 1694–1704.*
 11. BOROUJENI B.Y., FREY H.C. *Road grade quantification based on global positioning system data obtained from real-world vehicle fuel use and emissions measurements // Atmos. Environ. – 2014. – Vol. 85. – P. 179–186.*
 12. *CO2 emissions from fuel combustions // International Energy Agency, 2012. – 138 p.*
 13. FRANK M., WOLFE P. *An algorithm for quadratic programming // Naval Res. Logistics Quarterly. – 1956. – Vol. 3. – P. 95–110.*
 14. GAKER D., VAUTIN D., VIJ A., WALKER J.L. *The power and value of green in promoting sustainable transport behavior // Environ. Res. Lett. – 2011. – Vol. 6, №3. – P. 1–10.*
 15. GUO L., HUANG S., SADEK A.W. *An evaluation of environmental benefits of time-dependent green routing in*

- the greater Buffalo Niagara region* // J. Intell. Transp. Syst. – 2012. – Vol. 17, №1. – P. 18–30.
16. HENSHER D.A. *Climate change, enhanced greenhouse gas emissions and passenger transport what can we do to make a difference?* // Transp. Res. Part D: Transport Environ. – 2008. – Vol. 13, №2. – P. 95–111.
 17. JOVANOVIC A.D., PAMUCAR D.S., PEJCIC-TARLE S. *Green vehicle routing in urban zones – A neuro-fuzzy approach* // Expert Systems with Applications. – 2014. – Vol. 41. – P. 3189–3203.
 18. KRAUTZBERGER L., WETZEL H. *Transport and CO₂: productivity growth and carbon dioxide emissions in the european commercial transport industry* // Environ. Resour. Econ. – 2012. – Vol. 53. – P. 435–454.
 19. LIN J., GE Y.E. *Impacts of traffic heterogeneity on roadside air pollution concentration* // Transport. Res. Part D: Transp. Environ. – 2006. – Vol. 11, №2. – P. 166–170.
 20. MAHMASSANI H.S. *Dynamic models of commuter behavior: experimental investigation and application to the analysis of planned traffic disruptions* // Transp. Res. Part A: General. – 1990. – Vol. 24, №6. – P. 465–484.
 21. *Most Carmakers must Further Improve Carbon Efficiency by 2015 (Retrieved September 28, 2012)* // European Environment Agency, 2011. – [Электронный ресурс] – URL: <http://www.eea.europa.eu/highlights/most-carmakers-must-further-improve/> (дата обращения: 01.05.2015).
 22. NAGURNEY A. *Congested urban transportation networks and emission paradoxes* // Transp. Res. Part D: Transp. Environ. – 2000. – Vol. 5, №2. – P. 145–151.
 23. *Proposal for a Regulation of the European Parliament and of the Council - Setting Emission Performance Standards for New Passenger Cars as Part of the Community's Integrated Approach to Reduce CO₂ Emissions from Light-Duty Vehicles* // Commission of the European Communities, 2007. Dossier COD/2007/0297.

24. SHEFFI Y. *Urban transportation networks: equilibrium analysis with mathematical programming methods*. – Prentice-Hall, Inc, Englewood Cliffs, N.J. – 1985. – 416 p.
25. STANLEY J.K., HENSHER D.A., LOADER C. *Road transport and climate change: stepping off the greenhouse gas* // *Transp. Res. Part A: Policy Pract.* – 2011. – Vol. 45, №10. – P. 1020–1030.
26. *The Alternative Fuels and Advanced Vehicles Data Center / Serbian Department of Energy (SDE)*, 2013. – [Электронный ресурс] – URL: <http://www.afdc.energy.gov.rs/afdc/locator/stations/state> (дата обращения: 24.02.13).
27. *Traffic Assignment Manual* // U.S. Bureau of Public Roads (eds.) U.S. Department of Commerce. Washington, D.C., 1964. – 264 p.
28. *U.S. Transportation Sector Greenhouse Gas Emissions: 1990–2011* // EPA, U., 2013. – Office of Transportation and Air Quality. – EPA-420-F-13-033a.
29. WYATT D.W., LI H., TATE J.E. *The impact of road grade on carbon dioxide (CO₂) emission of a passenger vehicle in real-world driving* // *Transp. Res. Part D.* – 2014. – Vol. 32. – P. 160–170.
30. YIN Y., LAWPHONGPANICH S. *Internalizing emission externality on road networks* // *Transp. Res. Part D: Transp. Environ.* – 2006. – Vol. 11, №4. – P. 292–301.
31. ZHANG K.S., FREY H.C. *Road grade estimation for on-road vehicle emissions modeling using light detection and ranging data* // *J. AirWaste Manag. Assoc.* – 2006. – Vol. 56, №6. – P. 777–788.
32. ZHANG Y., LV J., YING Q. *Traffic assignment considering air quality* // *Transp. Res. Part D: Transp. Environ.* – 2010. – Vol. 15, №8. – P. 497–502.

COMPETITIVE GREEN VEHICLES ASSIGNMENT IN TRANSPORTATION NETWORK

Victor Zakharov, Saint-Petersburg state university,
Saint-Petersburg, Doctor of Science, professor (mcvictor@mail.ru).

Alexander Krylatov, Saint-Petersburg state university,
Saint-Petersburg, Cand.Sc., (aykrylatov@yandex.ru).

Abstract: Nowadays there is a lack of methodological tools for supporting decision makers in the sphere of motivation to use green vehicles by drivers and of available green capacity allocation. We study the problem of green and non-green traffic flow assignment in the network consisting of green and non-green routes. The analysis of competitive and cooperative frameworks is performed. We suggest an approach to green routes' selection (defining the, so called, green subnetwork, which is fully loaded and provides smaller travel time for green vehicles under Wardrop and Nash traffic flow assignments). We also elicit explicit balancing conditions for the green subnetwork in case of parallel routes.

Keywords: green flows assignment, transportation network, Nash equilibrium, Wardrop equilibrium.

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии Г.А. Угольницким*

Поступила в редакцию 06.03.2015.

Дата опубликования 31.05.2015.

УДК 519.8
ББК 22.18

ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ РЫБНЫМ ПРОМЫСЛОМ В УСЛОВИЯХ КВОТИРОВАНИЯ

Иванко Н. С.¹

*(Дальневосточный государственный технический
рыбохозяйственный университет, Владивосток),*

Абакумов А. И.²

*(Институт автоматизации и
процессов управления ДВО РАН, Владивосток)*

Предложены модельные варианты управления рыбным промыслом с помощью квот (разрешений на вылов объектов промысла). Показаны варианты линеаризации начальных нелинейных задач или линеаризованные способы их исследования и решения. Сформулированы игровые задачи о рыбном промысле. Для задач оптимизации распределения квот и задач максимизации дохода от промысла приведены иллюстративные примеры.

Ключевые слова: оптимальный сбор урожая, математическое моделирование, оптимизация.

1. Введение

Управление морскими рыбными промыслами содержит много аспектов. В статье рассматривается только процедура распределения разрешений (квот) на вылов рыб и других морских организмов. Рыбные промыслы отличаются от многих других процессов сбора урожая многовидовыми технологиями. Орудия промысла (тралы, сети, ловушки и т.п.) являются многовидовыми в смысле изымаемых ими особей многих биологиче-

¹ Нина Сергеевна Иванко, преподаватель (ivns@mail.ru).

² Александр Иванович Абакумов, доктор физико-математических наук, профессор (abakumov@iacp.dvo.ru).

ских видов. Субъекты промысла (будем далее для краткости называть их «рыбаками») обладают определенным набором орудий промысла, который далее будет именоваться способом промысла. Таким образом, каждый рыбак отождествлен с одним и только одним способом промысла.

Одним из способов управления промыслами является выдача рыбакам уполномоченными органами разрешений (квот) на определенные объемы вылова определенных биологических видов или групп близких видов в определенное время и в определенных промысловых районах. Эти виды или объединенные группы видов называются объектами промысла. Разрешения на промысел выдаются по объектам, а сам промысел из-за орудий лова является многовидовым, с выловом других, не предусмотренных разрешениями, объектов. Выловы непредусмотренных объектов будем называть приловами. Проблема учета приловов в математическом смысле приводит к задачам линейной и нелинейной (квадратичной) оптимизации. Задачи описывают способы распределения квот, при которых ожидаемый объем вылова по каждому виду будет близок к заранее определенному допустимому объему вылова. Каждый рыбак обладает определенными возможностями промысла, его доход индивидуален. Это приводит к игровой постановке задач о промысле, подобный подход тоже рассматривается в статье.

2. Постановка задачи

Задача оптимизации распределения квот сформулирована в статье [1]. Проблема формирования квот и соответствия результатов промысла заранее выданным квотам обсуждается нами в работе [2] на примере рыбных промыслов в прикамчатских водах. Здесь мы рассмотрим серию взаимосвязанных задач распределения квот для определенного морского промыслового района. Пусть имеется m объектов промысла и n способов промысла (предприятий-судовладельцев с определенными типами судов и орудий лова). Рассматривается выделенный промысловый период (например, 1 год). Индексы $i, j = 1, \dots, m$ соответствуют объектам промысла, индекс $k = 1, \dots, n$ – способам про-

мысла. Адекватная рыбному промыслу задача имеет $m, n > 1$, что мы и предполагаем в дальнейшем.

Через α_{ijk} обозначены доли объекта i в вылове способом k при квоте на объект j (коэффициенты прилова). Эти коэффициенты вычисляются на основе ретроспективных данных о промыслах в этом районе.

Пусть $v = (v_1, \dots, v_m)$ – заданный неотрицательный вектор допустимых уловов для каждого объекта промысла. Требуется найти расчётные оценки квот u_{jk} на вылов объекта j способом промысла k .

Приведем эту задачу к стандартным обозначениям. Для каждого способа промысла k введем матрицу приловов $A_k = (\alpha_{ijk})_{i,j=1}^m$ и вектор квот $x_k = (u_{1k}, \dots, u_{mk})^*$ (здесь и далее символ « $*$ » означает действие транспонирования). Переобозначим вектор допустимых уловов: $v = b$. Через $A = (A_1 | A_2 | \dots | A_n)$ обозначим общую неотрицательную матрицу приловов, состоящую из матриц приловов для каждого способа промысла. Ее размерность равна $m \times s$, где $s = m \cdot n$. Общий вектор квот обозначаем $x = (x_1^*, \dots, x_n^*)^*$.

Тогда задача принимает стандартный вид:

$$(1) \quad \begin{cases} \Phi(x) = \|Ax - b\|^2 \rightarrow \inf, \\ x \geq 0. \end{cases}$$

Здесь под нормой понимается евклидова норма в конечномерном линейном пространстве R^m . Задачу (1) назовем задачей *мягкой* оптимизации.

Наряду с задачей (1) будем рассматривать такую же задачу с условием непревышения разрешенных объемов вылова для каждого объекта промысла:

$$(2) \quad \begin{cases} \|Ax - b\|^2 \rightarrow \inf, \\ Ax \leq b, \\ x \geq 0. \end{cases}$$

Задачу (2) назовем задачей *жесткой* оптимизации. В задаче (2) в дальнейшем будет удобнее использовать не евклидову, а ромбическую норму:

$$\|x\|_d = \sum_{j=1}^q |x_j| \text{ для } x = (x_1, x_2, \dots, x_q)^* \in R^q [3].$$

Эта норма на множестве неотрицательных векторов является линейной, чем мы и воспользуемся в дальнейшем.

С задачами (1) и (2) связаны два множества. Через G обозначим множество всех решений задачи (1). Ниже будет введено множество D «условных» решений задачи мягкой оптимизации (1), являющееся подмножеством множества G .

На множестве D «условных» решений задачи (1) можно рассматривать игровую задачу максимизации дохода от промысла для каждого рыбака. Обозначим для рыбака номер k через p_{jk} доход от реализации единицы объема квоты номер j без учета затрат, а c_{jk} – коэффициент затрат на организацию промысла по реализации этой квоты. Если через $p_k = (p_{1k}, \dots, p_{mk})$ обозначить вектор коэффициентов удельного дохода от реализации продукции, а через $c_k = (c_{1k}, \dots, c_{mk})$ – вектор коэффициентов затрат, то задача максимизации общего дохода для рыбака номер k примет вид

$$(3) \quad \begin{cases} \Psi_k(x_k) = p_k x_k - x_k^* C_k x_k \rightarrow \sup, \\ x \in D. \end{cases}$$

Будем предполагать, что вектор p_k и диагональная матрица $C_k = \text{diag } c_k$ с вектором c_k по главной диагонали строго положительны.

Задача (3) формулируется для каждого рыбака. На ее основе можно рассматривать различные игровые постановки задач: искать арбитражные решения, рассматривать варианты коопераций и иерархий между игроками [8]. Для динамических систем такие задачи рассматривались, в частности, в работах [3, 9].

Здесь же мы рассмотрим ситуацию коалиции всех рыбаков с общим критерием оптимизации дохода (все рыбаки признаны равноправными):

$$(4) \quad \begin{cases} \Psi(x) = \sum_{k=1}^n \Psi_k(x_k) \rightarrow \sup, \\ x \in D. \end{cases}$$

Задачу (4) будем называть задачей максимизации дохода. Эта задача также решается на множестве D «условных» решений задачи мягкой оптимизации (см. ниже).

3. Исследование задач

3.1. ЗАДАЧА МЯГКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

В задаче (1) используем евклидову норму. Тогда

$$\Phi(x + \Delta x) = \Phi(x) + 2\Delta x^* (A^* Ax - A^* b) + \|A\Delta x\|^2.$$

Из указанного равенства следует, что множество решений задачи (1) равно

$$(5) \quad G = \left\{ x \in R^s \mid A^* Ax - A^* b \geq 0, x^* (A^* Ax - A^* b) = 0, x \geq 0 \right\}.$$

Множество G имеет нелинейное описание. Решение задачи (1) будем искать одним из численных методов поиска оптимального решения – методом градиентного спуска с переменным шагом [5]. Этот метод характеризуется невысокой гарантией сходимости даже для квадратичного функционала. Поэтому можно рассмотреть иные способы решения задачи (1).

Задача минимизации квадратичного функционала

$$(6) \quad \Phi(x) = \|Ax - b\|^2$$

с евклидовой нормой без ограничения знака x имеет множество решений

$$D_0 = \{x \in R^s \mid A^* Ax = A^* b\}.$$

В нашем случае матрица A имеет размерность $m \times s$, где $s = m \cdot n > m$. Ранг матрицы A $r = r(A) \leq m$, матрицы A^* и A^*A имеют такой же ранг [4]. Система уравнений

$$(7) \quad A^* Ax = A^* b$$

совместна, так как ранг расширенной матрицы $(A^*A \mid A^*b)$ также равен r . Обозначим через x_0 одно из решений системы (7). Тогда $D_0 = x_0 + L$, где L – подпространство решений однородной системы $A^*Ax = 0$. Размерность этого подпространства равна $s - r \geq 1$. Это означает, что множество D_0 континуально. Обозначим $D = D_0 \cap R_+^s$. Очевидно, что $D \subset G$. Множество D назовем множеством «условных» решений задачи (1), так как оно появляется из множества D_0 решений задачи безусловной мини-

мизации функционала (6) добавлением условия неотрицательности. Множество D описывается линейно, хотя бы один из элементов этого множества можно искать решением следующей задачи линейного программирования:

$$(8) \quad \begin{cases} \|y\|_d \rightarrow \inf, \\ A^*Ax - y = A^*b, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

(здесь $\|y\|_d$ – упомянутая выше ромбическая норма для соответствующего линейного пространства).

Если оптимальное решение (\bar{x}, \bar{y}) имеет $\bar{y} = 0$, то $\bar{x} \in D \subset G$ является решением задачи (1). Если же $\bar{y} \neq 0$, то множество $D = \emptyset$ и \bar{x} можно рассматривать в качестве приближения к решению задачи (1). Таким образом, мы предлагаем решать задачу (1) двумя приближенными методами:

- методом градиентного спуска;
- решением вспомогательной задачи линейного программирования (8).

Решение задачи (8) будем называть линейным методом решения задачи мягкой оптимизации.

3.2. ЗАДАЧА ЖЕСТКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

В задаче (2) будем использовать ромбическую норму. Эта норма на множестве неотрицательных векторов является линейной.

Вместо квадрата нормы будем минимизировать саму норму (оптимальные решения \bar{x} при этом не меняются). Тогда задача (2) сводится к задаче линейного программирования следующего вида:

$$(9) \quad \begin{cases} \|Ax\|_d \rightarrow \sup, \\ Ax \leq b, \\ x \geq 0. \end{cases}$$

Переход от (2) к (9) справедлив из-за неотрицательности матрицы A .

3.3. ЗАДАЧА МАКСИМИЗАЦИИ ДОХОДА

Задача (4) является типичной задачей квадратичного программирования, широко известны ее свойства и численные методы решения [6, 7].

Все же попробуем провести свой анализ задачи, пользуясь ее специфичностью. Задача (4) может быть записана в виде

$$\begin{cases} x^* Cx - px \rightarrow \inf, \\ A^* Ax = A^* b, \\ x \geq 0. \end{cases}$$

Для решения этой задачи можно использовать метод градиентного спуска. Составляем функцию Лагранжа

$$L(x, \lambda_0, \lambda, \mu) = \lambda_0 (x^* Cx - px) + \lambda [A^* Ax - A^* b] - \mu \cdot x$$

при $\lambda_0 = 1$ и $\mu \geq 0$ с условиями дополняющей нежесткости $\mu \cdot x = 0$ [7]. Затем переходим к дифференциальному условию минимизации функции Лагранжа по x , собираем все полученные условия и решаем эту систему относительно x, λ, μ .

4. Примеры применения моделей и методов

Расчеты проведены на примерах, построенных по аналогии с данными о морских рыбных промыслах. Первый и второй примеры условно названы малым и большим соответственно размерам таблиц исходных данных. Большой пример по объему данных соответствует реальным промыслам. Третий пример придуман специально для случая непустого множества D с ненулевым значением функционала Φ на нем. Во всех примерах по сравнению с начальной постановкой задачи квоты выдаются рыбакам (способам промысла) без детализации основного объекта промысла (индекс j опущен). В таблицах ниже центральную часть занимает матрица A , остальные части таблиц названы в соответствии с общей постановкой задачи. Все исходные данные и результаты приведены в условных единицах.

4.1. МАЛЫЙ ПРИМЕР

Таблица 1. Данные о промыслах малого примера

Объекты промыс-	Способы промысла								Допустимый вылов
	1	2	3	4	5	6	7	8	
1	0,2	0,1	1,0	0,3	0,4	0,1	0,0	0,1	34,6
2	1,0	0,2	0,1	0,1	1,0	0,2	0,1	0,2	108,4
3	0,3	1,0	0,2	1,0	0,1	1,0	0,2	0,1	59,2
4	0,1	0,3	0,0	0,1	0,1	0,3	0,1	0,0	17,1
5	0,2	0,4	0,3	0,2	0,2	0,4	1,0	1,0	37,8
Коэффициенты затрат на вылов	0,001	0,005	0,003	0,009	0,002	0,004	0,006	0,008	
Коэффициенты удельного дохода	2	4	6	8	3	1,4	1	0,4	

Для задачи мягкой оптимизации представлено решение методом градиентного спуска. Причем оптимальный вектор \bar{y} в задаче (8) ненулевой, т.е. множество D пусто, и поэтому задача максимизации дохода не имеет решения. Задача мягкой оптимизации дает решение (рис. 1), отклоняющееся по ряду объектов в большую сторону от допустимого улова. В задаче жесткой оптимизации таких отклонений не может быть, но разрешенный охват объектов промысла гораздо меньше. Этот пример демон-

стрирует такой набор исходных данных, при котором решения задач мягкой и жесткой оптимизации сильно различаются.

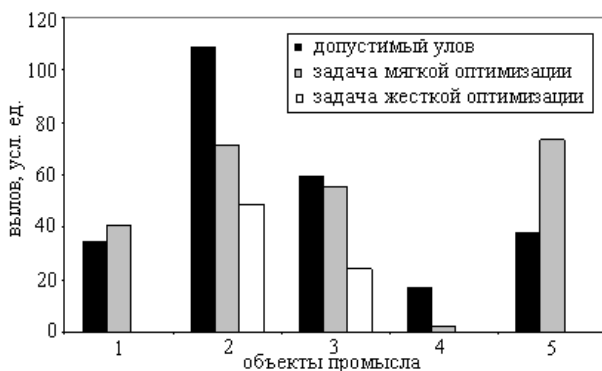


Рис. 1. Объемы выловов в задачах мягкой и жесткой оптимизации (малый пример)

4.2. БОЛЬШОЙ ПРИМЕР

Исходные данные приведены в таблице 2. Для задачи мягкой оптимизации решение получено методом градиентного спуска. Судя по решениям задач мягкой и жесткой оптимизации (рис. 2), большой пример лучше сбалансирован по исходной информации, чем малый.

Решения задач здесь гораздо ближе к допустимым уловам по сравнению с малым примером.

Таблица 2. Данные о промыслах в большом примере

Объекты промысла	Способы промысла							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	1	0,02	0,3	0,001	0,003	0
2	0,08	0,01	0,03	0,005	0,01	0	0,001	0
3	0,03	0,15	0,2	1	1	0,03	0,03	0,1
4	0	0	0	0,25	0,05	1	1	1
5	0,04	0	0	0,001	0,002	0	0	0
6	0	0	0	0,02	0,04	0,005	0,002	0
7	0,02	0,1	0,6	0,01	0,1	0,001	0,005	0
8	0,03	0,09	0,2	0,01	0,08	0,002	0,005	0

Объекты промысла	Способы промысла							
	1	2	3	4	5	6	7	8
9	0	0,05	0,3	0,005	0,04	0	0	0
10	0,01	0,002	0	0,003	0,001	0,001	0	0,01
11	0,02	0	0	0,001	0,002	0	0	0
12	0	0,03	0	0	0	0,002	0	0
13	0	0	0	0	0,003	0	0	0
14	0,002	0	0	0,01	0,001	0	0	0
15	0,001	0	0	0	0,001	0	0	0
Коэффициенты затрат на вылов	2	4	6	8	3	1,4	1	0,4
Коэффициенты удельного дохода	0,001	0,005	0,003	0,009	0,002	0,004	0,006	0,008

Таблица 2. Данные о промыслах в большом примере (продолжение)

Объекты промысла	Способы промысла							
	9	10	11	12	13	14	15	16
1	0,2	0,05	0,02	0,05	0	0	0,05	0,01
2	0,05	0,01	1	1	1	1	0,02	0,03
3	0,25	0,05	0,01	0,05	0,15	0,02	0	0,17
4	0,04	0,005	0	0	0	0	0	0,05
5	0,1	0,001	0,2	0,04	0,07	0,06	0,03	0,02
6	0,08	0,02	0	0	0	0,08	1	1
7	1	1	0	0	0	0	0,05	0,04
8	0,15	0,07	0	0	0	0	0,08	0,2
9	0,2	0,05	0	0	0	0,04	0	0,02
10	0	0,004	0,05	0	0	0	0	0
11	0	0,005	0	0	0	0	0,06	0,1
12	0	0	0	0	0	0	0	0
13	0	0	0	0	0	0	0	0

Объекты промысла	Способы промысла							
	9	10	11	12	13	14	15	16
14	0	0	0	0	0	0	0,1	0,02
15	0	0	0	0	0	0	0	0,005
Коэффициенты затрат на вылов	4	6	3	1,4	1	2	4	6
Коэффициенты удельного дохода	0,001	0,005	0,003	0,009	0,002	0,005	0,003	0,009

Таблица 2. Данные о промыслах в большом примере (продолжение)

Объекты промысла	Способы промысла				Допустимый вылов
	17	18	19	20	
1	0,02	0,01	0,08	0,002	10
2	0,03	0,04	0,04	0,005	1,5
3	0,04	0	0	0,02	120
4	0	0	0	0	75
5	0,01	0,001	0,001	0	0,08
6	0,06	0	0,002	0	2
7	0,05	0	0,15	0,1	15
8	0	0	1	1	5
9	0	0	0,1	0	3
10	0	0	0	0	1
11	1	1	0	0	2
12	0	0	0	0	4
13	0	0	0	0	0,5
14	0,004	0	0	0	12
15	0	0,05	0	0	0,3
Коэффициенты затрат	8	3	1	0,4	

Объекты промысла	Способы промысла				Допустимый вылов
	17	18	19	20	
на вылов					
Коэффициенты удельного дохода	0,002	0,004	0,006	0,008	

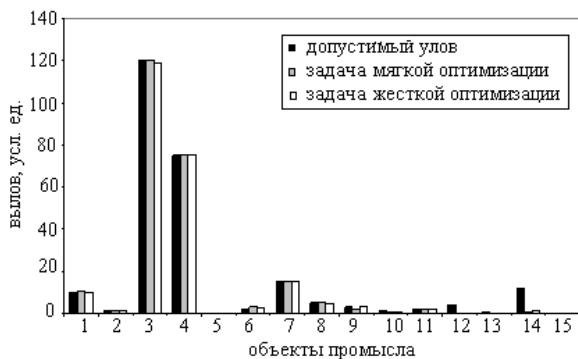


Рис. 2. Объемы выловов в задачах мягкой и жесткой оптимизации (большой пример)

4.3. УСЛОВНЫЙ ПРИМЕР

Данные подобраны так, что множество D непусто. В этом случае мы можем решать задачу (4) максимизации дохода.

Таблица 3. Данные о промыслах в условном примере

Объекты промысла	Способы промысла				Допустимый вылов
	1	2	3	4	
1	1/11	2/11	2/11	1/11	1,0
2	2/11	1/11	1/11	2/11	2,0
3	1/11	1/11	1/11	1/11	3,0
Коэффициенты затрат на вылов	0,2	0,1	0,1	0,2	

Объекты про- мысла	Способы промысла				Допус- тимый вылов
	1	2	3	4	
Коэффициенты удельного до- хода	0,8	0,2	0,2	4,4	

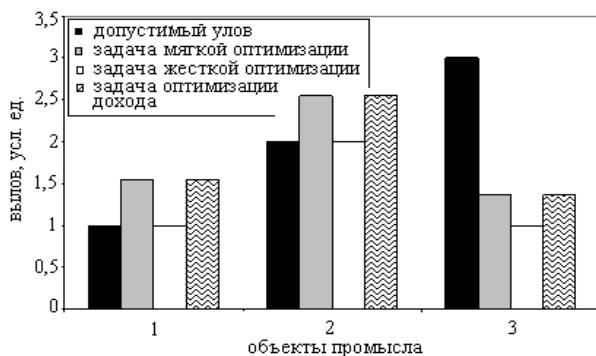


Рис. 3. Объемы выловов в задачах мягкой и жесткой оптимизации (условный пример)

Для сравнения всех примеров можно предложить некоторый критерий качества решений приведенных задач. В качестве такого критерия рассмотрим

$$q = \sqrt{\Phi/t},$$

где Φ – значение функционала (6). Этот критерий учитывает размерность задачи и квадратичность функционала Φ . Решение тем лучше, чем меньше значение q .

Из таблицы 4 видно, что в задаче мягкой оптимизации линейный метод может оказаться лучше градиентного. Задача жесткой оптимизации проигрывает по этому критерию задаче мягкой оптимизации по причине более жестких условий на решение.

Таблица 4. Сравнение качества результатов

	Задача мягкой оптимизации		Задача жесткой оптимизации	Задача максимизации дохода	
	метод градиентного спуска	линейный метод		q	Ψ
Малый пример	24,17	24,45	38,15	–	–
Большой пример	3,06	3,02	10,14	–	–
Условный пример	1,04	1,04	1,15	1,04	25,2

5. Заключение

В статье приведен анализ задач оптимального распределения квот при морском рыбном промысле. Несмотря на нелинейность ряда задач, удается их сводить к линейным или решать линейными методами. Представлена игровая задача об оптимизации доходов субъектов промысла. Для задач оптимизации распределения квот и максимизации общего дохода приведены примеры расчетов, иллюстрирующих модельные представления.

Литература

1. АБАКУМОВ А.И., БОЧАРОВ Л.Н., КАРЕДИН Е.П. *Модельный анализ многовидовых рыбных промыслов* // Известия ТИНРО. – 2004. – Т. 138. – С. 220–224.
2. АБАКУМОВ А.И., БОЧАРОВ Л.Н., КАРЕДИН Е.П. И ДР. *Модельный анализ и ожидаемые результаты оптимизации многовидовых промыслов прикамчатских вод* // Вопросы рыболовства. – 2007. – Т. 8, №1(29). – С. 93–109.
3. АБАКУМОВ А.И., ИЛЬИН О.И., ИВАНКО Н.С. *Игровые задачи сбора урожая в биологическом сообществе* // Математическая теория игр и ее приложения. – 2011. – Т. 3, вып. 2. – С. 3–17.

4. ГАНТМАХЕР Ф.Р. *Теория матриц*. – М.: Наука, 2010. – 559 с.
5. ИЗМАЙЛОВ А.Ф. *Численные методы в оптимизации*. – М.: Физматлит, 2008. – 320 с.
6. ИОФФЕ А.Д., ТИХОМИРОВ В.М. *Теория экстремальных задач*. – М.: Наука, 1974. – 480 с.
7. КАРМАНОВ В.Г. *Математическое программирование*. – М.: Физматлит, 2004. – 264 с.
8. МАЗАЛОВ В.В. *Математическая теория игр и приложения*. – Санкт-Петербург – Москва – Краснодар: Лань, 2010. – 446 с.
9. МАЗАЛОВ В.В., РЕТТИЕВА А.Н. *Об одной задаче управления биоресурсами // Обзорение прикладной и промышленной математики*. – 2002. – Т. 9, вып. 2. – С. 293–306.

FISHERY CONTROL PROBLEM WITH QUOTAS

Nina Ivanko, Far Eastern State Technical Fisheries University, Lecturer (Vladivostok, ivns@mail.ru).

Aleksandr Abakumov, Institute of Automation and Control Processes, FEB RAS, Doctor of Sciences (Physics and Mathematics), Professor (Vladivostok, abakumov@iacp.dvo.ru).

Abstract. We study several models of fishery control with catch quotas. Alternative linear approximations of initial non-linear problems are suggested along with linearized routines for their study. We also suggest game-theoretic models of fishery and consider illustrative examples for optimal quota assignment problem and for the maximal profit problem.

Keywords: optimal harvesting, mathematical modeling, optimization.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии Г.А. Угольницким

Поступила в редакцию 28.01.2015.

Опубликована 31.05.2015.

УДК 519.977

ББК 22.1

РАВНОВЕСИЕ И УПРАВЛЕНИЕ В ЗАДАЧЕ СОХРАНЕНИЯ ВИДОВОГО СОСТАВА БИОСООБЩЕСТВА

Иванова А. С.¹, Кириллов А. Н.²

*(Институт прикладных математических исследований
Карельского научного центра РАН, Петрозаводск)*

Предлагаются математические модели для задачи сохранения видового состава биосообщества. Построено равновесие для динамической модели саморегуляции присутствия популяций в ареале (местообитании). В модели с изменяющейся пищевой привлекательностью ареала найдено управление интенсивностями изъятия особей, позволяющее сохранить видовой состав.

Ключевые слова: управление, динамика популяций, миграция, равновесие.

Введение

В теории фуражирования предполагается, что пищевой ресурс, потребляемый популяцией, распределен по ареалам. Популяция, условно говоря, решает две задачи: выбора ареала и определения момента времени ухода из него (при недостатке пищи). Многочисленные работы посвящены этому направлению математической экологии [3, 5, 6, 9, 10]. В классической работе Э. Чарнова (E. Charnov) [5] была предложена статическая модель, дающая условия ухода популяции из ареала (теорема Чарнова) – так называемая теорема о маргинальных значениях. В настоящей работе предлагаются и исследуются динамические модели ухода

¹ Александра Сергеевна Иванова, аспирантка (a_s_ivanova@bk.ru).

² Александр Николаевич Кириллов, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник (kirillov@krc.karelia.ru).

популяции из ареала в случае его недостаточной пищевой привлекательности.

В статье предлагаются две динамические модели ухода популяции некоторого вида из ареала. Исследуется возможность сохранения видового состава ареала. Взаимодействие в пределах ареала описывается системой Лотки–Вольтерры. При этом в первой модели миграция учтена в уравнениях динамики хищник–жертва, а во второй, представляющей собой систему с переменной структурой, миграция задается отдельной системой. Для первой модели находится равновесие по Нэшу, отражающее саморегуляцию присутствия популяций в ареале. Во второй модели предполагается, что мигрировать может только хищник, и строится управление (в смысле интенсивности изъятия особей), позволяющее сохранить видовой состав ареала. Пищевая привлекательность ареала для хищника зависит от количества особей жертвы, приходящихся на одного хищника, и изменяется во времени. При этом модель позволяет описывать возврат хищника в ареал, т.е. может быть использована для решения задачи о выборе им ареала.

1. Равновесие в двухвидовой модели с миграцией

Рассмотрим систему Лотки–Вольтерры с учетом миграции:

$$(1) \quad \dot{x}_1 = p_1 x_1 (a - b q_1 x_2) - \mu_1 p_2 x_1,$$

$$(2) \quad \dot{x}_2 = q_1 x_2 (k b p_1 x_1 - m) - \mu_2 q_2 x_2,$$

где x_1, x_2 – количественные характеристики популяций жертвы и хищника соответственно; a – коэффициент роста популяции жертв; b – коэффициент, характеризующий интенсивность потребления жертв хищником за единицу времени; k – доля полученной с потребляемой хищником биомассой энергии, которая расходуется им на воспроизводство, $0 < k < 1$; m – коэффициент смертности хищников; μ_1, μ_2 – положительные коэффициенты миграции жертвы и хищника; $p_1 x_1, q_1 x_2$ – доли популяций жертвы и хищника соответственно, участвующие во взаимодействии в пределах ареала; $p_2 x_1, q_2 x_2$ – доли популяций жертвы и хищника соответственно, участвующие в процессе миграции из

ареала, $p_1 + p_2 = 1, p_i \in [0, 1], q_1 + q_2 = 1, q_i \in [0, 1], i = 1, 2$. Таким образом, каждая популяция разделяется на две части – участвующие во взаимодействии и мигрирующие.

Введем обозначения

$$H_1(p_1, q_1) = p_1(a - bq_1x_2) - \mu_1(1 - p_1) = Ap_1 - \mu_1,$$

$$H_2(p_1, q_1) = q_1(kbp_1x_1 - m) - \mu_2(1 - q_1) = Bq_1 - \mu_2,$$

где $A = A(q_1, x_2) = a - bq_1x_2 + \mu_1, B = B(p_1, x_1) = kbp_1x_1 - m + \mu_2$. Следуя [7, 8], будем полагать, что популяции, находящиеся в ареале, стремятся увеличить H_1, H_2 . Тогда возникает игра с двумя участниками – популяциями хищника и жертвы – со стратегиями p_1, q_1 и функциями выигрыша $H_i, i = 1, 2$. Для краткости назовем эту игру игрой ареал-миграция. Найдем равновесие по Нэшу в данной игре. Из условий

$$\frac{\partial H_1}{\partial p_1} = a - bq_1x_2 + \mu_1 = 0,$$

$$\frac{\partial H_2}{\partial q_1} = kbp_1x_1 - m + \mu_2 = 0,$$

получаем

$$p_1 = \frac{m - \mu_2}{kbx_1} = \tilde{p}_1, \quad q_1 = \frac{a + \mu_1}{bx_2} = \tilde{q}_1.$$

При этом если p_1, q_1 принимают максимальные граничные значения, т.е. $\tilde{p}_1 = 1, \tilde{q}_1 = 1$, то

$$x_1 = \frac{m - \mu_2}{kb} = \tilde{x}_1, \quad x_2 = \frac{a + \mu_1}{b} = \tilde{x}_2.$$

Справедлив следующий результат.

Теорема 1. Равновесие по Нэшу (p_1^*, q_1^*) в игре ареал-миграция имеет вид:

если $t > \mu_2$, то

$$(p_1^*, q_1^*) = \begin{cases} (\tilde{p}_1, \tilde{q}_1), & \text{если } x_1 > \tilde{x}_1, x_2 > \tilde{x}_2; \\ (1, 1), & \text{если } x_1 > \tilde{x}_1, x_2 < \tilde{x}_2; \\ (1, 0), & \text{если } x_1 < \tilde{x}_1; \\ (1, q_1), \forall q_1 \in [0, \tilde{q}_1], & \text{если } x_1 = \tilde{x}_1, x_2 > \tilde{x}_2; \\ (1, q_1), \forall q_1 \in [0, 1], & \text{если } x_1 = \tilde{x}_1, x_2 \leq \tilde{x}_2; \\ (\tilde{p}_1, 1), & \text{если } x_1 > \tilde{x}_1, x_2 = \tilde{x}_2; \end{cases}$$

если $t \leq \mu_2$, то

$$(p_1^*, q_1^*) = \begin{cases} (1, 1), & \text{если } x_2 < \tilde{x}_2; \\ (0, 1), & \text{если } x_2 > \tilde{x}_2; \\ (p_1, 1), \forall p_1 \in [0, 1], & \text{если } x_2 = \tilde{x}_2, t < \mu_2; \\ (1, 1), & \text{если } x_2 = \tilde{x}_2, t = \mu_2. \end{cases}$$

Доказательство. Рассмотрим случай $t > \mu_2$, $x_1 > \tilde{x}_1$, $x_2 > \tilde{x}_2$. Поскольку $(\tilde{p}_1, \tilde{q}_1) \in (0, 1) \times (0, 1)$ и $A(\tilde{q}_1, x_2) = 0$, $B(\tilde{p}_1, x_1) = 0$, то получаем

$$H_1(\tilde{p}_1, \tilde{q}_1) = -\mu_1, \quad H_2(\tilde{p}_1, \tilde{q}_1) = -\mu_2.$$

При этом

$$H_1(p_1, \tilde{q}_1) = A(\tilde{q}_1, x_2)p_1 - \mu_1 = H_1(\tilde{p}_1, \tilde{q}_1),$$

$$H_2(\tilde{p}_1, q_1) = B(\tilde{p}_1, x_1)q_1 - \mu_2 = H_2(\tilde{p}_1, \tilde{q}_1),$$

т.е. \tilde{p}_1, \tilde{q}_1 – равновесие по Нэшу в рассматриваемом случае.

В остальных случаях положения точки (x_1, x_2) при $t > \mu_2$ стратегия $(\tilde{p}_1, \tilde{q}_1)$ не принадлежит внутренности квадрата $[0, 1]^2$. В силу линейности $A(q_1, x_2)$, $B(p_1, x_1)$ относительно q_1, p_1 , хотя бы одна из компонент $(q_1$ или $p_1)$ равновесия по Нэшу принадлежит границе квадрата $[0, 1]^2$. Пусть, например, $t > \mu_2$, $x_1 > \tilde{x}_1$, $x_2 < \tilde{x}_2$. Тогда $A(q_1, x_2) = a - bq_1x_2 + \mu_1 > a - bq_1\tilde{x}_2 + \mu_1 = (1 - q_1)(a + \mu_1) \geq 0$, т.е. $A(q_1, x_2) > 0$. Отсюда получаем

$p_1^* = 1$. Далее, в силу линейности $H_2(1, q_1)$ по q_1 , учитывая, что $B(1, x_1) > 0$ при $x_1 > \tilde{x}_1$, получаем $q_1^* = 1$. Итак $(1, 1)$ – равновесие по Нэшу в данном случае. Остальные случаи при $m > \mu_2$ и $m \leq \mu_2$ рассматриваются аналогично. ■

Отметим, что теоретико-игровые методы в теории фуражирования используются довольно активно (например, см. обзор [8]).

Рассмотрим динамику системы, порожденную найденным равновесием, и дадим ее экологическую интерпретацию.

Пусть $m > \mu_2$. При $x_1 > \tilde{x}_1, x_2 > \tilde{x}_2$

$$\dot{x}_1 = -\mu_1 x_1, \quad \dot{x}_2 = -\mu_2 x_2.$$

Данная система описывает миграцию (уход из ареала) как хищника, так и жертвы. При этом \tilde{x}_1, \tilde{x}_2 являются пороговыми значениями для начала миграции. Причем популяция жертвы мигрирует даже при малых значениях \tilde{x}_1 , которые соответствуют достаточно близким значениям коэффициентов смертности (m) и миграции (μ_2) хищника. Это, возможно, связано с тем, что рассматриваемая область характеризуется достаточно большим количеством x_2 хищников, что вызывает миграцию популяции жертв. При $x_1 > \tilde{x}_1, x_2 < \tilde{x}_2$

$$\dot{x}_1 = x_1(a - bx_2), \quad \dot{x}_2 = x_2(kbx_1 - m).$$

Появление системы Лотки–Вольтерры объясняется наличием в данной области достаточного количества особей жертвы при малом количестве хищников, что не вызывает миграцию ни тех, ни других. При $x_1 < \tilde{x}_1$

$$\dot{x}_1 = ax_1, \quad \dot{x}_2 = -\mu_2 x_2,$$

т.е. при малом количестве жертвы происходит интенсивная миграция хищника, что вызывает рост популяции жертв в течение ограниченного времени.

Прямые $x_1 = \tilde{x}_1, x_2 = \tilde{x}_2$ являются границами областей с различной динамикой, и поэтому участки этих прямых либо про-

шиваются траекториями, либо на них возникает скользящий режим. Это зависит от взаимного положения векторов фазовых скоростей, соответствующих динамическим системам, определенным в областях с общей границей. Для того чтобы не загромождать статью техническими деталями, не будем находить участки скользяния и прошивания.

Пусть $m \leq \mu_2$. При $x_2 < \tilde{x}_2$

$$\dot{x}_1 = x_1(a - bx_2), \quad \dot{x}_2 = x_2(kbx_1 - m),$$

т.е. при достаточно малом количестве хищников в ареале популяция жертв не покидает его, и взаимодействие популяций задается системой Лотки–Вольтерры. При $x_2 > \tilde{x}_2$

$$\dot{x}_1 = -\mu_1 x_1, \quad \dot{x}_2 = -m x_2.$$

В этом случае, наоборот, большое количество хищников в ареале приводит к уходу из него популяции жертв, что вызывает и уход хищников. Для случаев $x_1 = \tilde{x}_1$ или $x_2 = \tilde{x}_2$ появление скользящих режимов объяснено выше.

2. Модель с изменяющейся пищевой привлекательностью ареала

2.1. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ

В работе [1] предложено для описания пищевой привлекательности ареала в модели «хищник–жертва» с миграцией использовать функцию $\tilde{n} = \tilde{n}(t)$ вида

$$(3) \quad \tilde{n}(t) = \tilde{n}(t_0) + \int_{t_0}^t x_2(\tau) \left(\frac{x_1(\tau)}{x_2(\tau)} - \lambda \right) d\tau,$$

где t_0 – момент времени появления популяции хищника в ареале; $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$ – численности популяций жертвы и хищника соответственно; $0 < \lambda$ – заданная пороговая постоянная. Величина \tilde{n} характеризует накопление избытка (если $\frac{x_1(\tau)}{x_2(\tau)} > \lambda$) или недостатка (если $\frac{x_1(\tau)}{x_2(\tau)} < \lambda$) пищевого ресурса x_1 для популяции

хищника x_2 . Подробнее мотивация вида функции \tilde{n} представлена в [1].

Следует отметить, что на важность рассмотрения отношения жертва/хищник для описания динамики популяций обратил внимание Р. Ардити (R. Arditi) [4].

Из (3) получаем уравнение

$$(4) \quad \dot{\tilde{n}} = x_1 - \lambda x_2.$$

При этом \tilde{n} может как возрастать, так и убывать, в зависимости от избытка или недостатка пищевого ресурса x_1 соответственно.

Пусть $0 < \Lambda$ – пороговое значение пищевой привлекательности ареала. Тогда если $\tilde{n} < \Lambda$, то ареал непривлекательный и популяция хищника мигрирует, покидая ареал, а если $\tilde{n} > \Lambda$, то ареал привлекательный и популяция хищника остается в ареале и взаимодействует с жертвой, взаимодействие описывается системой Лотки–Вольтерры.

Для сохранения видового состава биосообщества предлагается производить изъятие особей жертвы и (или) хищника с интенсивностями $u_1 \geq 0, u_2 \geq 0$ соответственно. В дальнейшем u_1, u_2 считаем управляющими параметрами.

Рассмотрим модель «хищник-жертва» с миграцией, представляющую собой систему с переменной структурой, описывающую пять режимов:

если $\tilde{n} > \Lambda$, то

$$(5) \quad \dot{x}_1 = x_1(a - bx_2 - u_1), \quad \dot{x}_2 = x_2(kbx_1 - m - u_2), \quad \dot{\tilde{n}} = x_1 - \lambda x_2,$$

если $\tilde{n} < \Lambda, x_2 > \varepsilon^*(x_1)$, то

$$(6) \quad \dot{x}_1 = ax_1, \quad \dot{x}_2 = x_2(-m - m_1), \quad \dot{\tilde{n}} = x_1 - \lambda x_2,$$

если $\tilde{n} < \Lambda, 0 < x_2 \leq \varepsilon^*(x_1)$, то

$$(7) \quad \dot{x}_1 = 0, \quad \dot{x}_2 = -h, \quad \dot{\tilde{n}} = 0,$$

если $\tilde{n} < \Lambda, x_2 = 0$, то

$$(8) \quad \dot{x}_1 = ax_1, \quad \dot{x}_2 = 0, \quad \dot{\tilde{n}} = x_1 - \lambda x_2,$$

если $\tilde{n} = \Lambda, x_2 < \varepsilon^*(x_1)$, то

$$(9) \quad \dot{x}_1 = 0, \quad \dot{x}_2 = h, \quad \dot{\tilde{n}} = 0,$$

где a – коэффициент прироста жертв в отсутствие хищников; bx_1 – количество жертв, потребляемых одним хищником за единицу времени; k – доля полученной с потребляемой хищником биомассой энергии, которая расходуется им на воспроизводство; m – коэффициент смертности хищников в отсутствие жертв; m_1 – коэффициент интенсивности миграции, причем, a, b, k, m, m_1, h считаются положительными постоянными ($k < 1$); $\varepsilon^*(x_1)$ имеет вид [1]

$$\varepsilon^*(x_1) = \begin{cases} \frac{x_1}{\lambda}, & 0 \leq x_1 < \varepsilon\lambda, \\ \varepsilon, & x_1 \geq \varepsilon\lambda; \end{cases}$$

где ε – положительная постоянная.

Система (5) описывает взаимодействие между хищником и жертвой (полный режим P_2), (6) – миграцию хищника (переходный режим P_{21}), (7) – исчезновение хищника из сообщества (минус-скачок P_-), (8) – динамику жертвы в отсутствие хищника (нулевой режим P_1), (9) – появление хищника в сообществе (плюс-скачок P_+).

Таким образом, динамика популяций в ареале описывается разрывной динамической системой (5)–(9), функционирующей в пяти режимах. Переход от одного режима к другому происходит при попадании траектории на границы областей, соответствующих режимам.

Отметим, что уравнение (4) учитывает инерционность в принятии хищником решения о миграции. Действительно, «важное решение» о начале миграции не должно быть подвержено влиянию мгновенных значений фазовых переменных.

Далее рассмотрим модель «хищник-жертва» Лотки–Вольтерры, учитывающую изъятие особей:

$$(10) \quad \dot{x}_1 = x_1(a - bx_2 - u_1), \quad \dot{x}_2 = x_2(kbx_1 - m - u_2).$$

Уравнение фазовой траектории системы (10), проходящей через точку $M_0(x_{10}, x_{20})$, имеет вид (при $u_1 = u_2 = 0$ см., например, [2])

$$(11) \quad (a - u_1) \ln x_2 - bx_2 + (m + u_2) \ln x_1 - kbx_1 - c = 0,$$

где

$$c = c(x_{10}, x_{20}, u_1, u_2) = (a - u_1) \ln x_{20} - bx_{20} + (m + u_2) \ln x_{10} - kbx_{10}.$$

Через $f = f(x_1, x_2, x_{10}, x_{20}, u_1, u_2)$ обозначим левую часть уравнения (11). Нетрудно показать, что $f = 0$ – выпуклая замкнутая кривая. Положение равновесия R системы (10) при постоянных u_1, u_2 имеет координаты

$$x_1 = \frac{m + u_2}{bk}, \quad x_2 = \frac{a - u_1}{b}.$$

В силу того, что в правые части первых двух уравнений системы (5) не входит \tilde{n} , то в пространстве (x_1, x_2, \tilde{n}) траектории этой системы будут располагаться на цилиндрах. При этом образующие цилиндров параллельны оси $O\tilde{n}$, направляющие – траектории системы (10). Из условий, при которых определена система (5), следует, что цилиндры располагаются в полупространстве $\tilde{n} > \Lambda$.

Для системы (5)–(9) множество

$$\{(x_1, x_2, \tilde{n}) : x_1 > 0, x_2 \geq 0\}$$

инвариантно, поэтому далее $x_1 > 0, x_2 \geq 0$.

2.2. ДИСКРИМИНАНТНАЯ ПЛОСКОСТЬ

В работе [1] плоскость

$$\pi = \{(x_1, x_2, \tilde{n}) : \tilde{n} = \Lambda\}$$

названа *дискриминантной* плоскостью. Дальнейшее поведение траекторий системы (5)–(9) зависит от того, в какой участок плоскости π они попадают. Для сокращения записи для точек (x_1, x_2, Λ) дискриминантной плоскости π будем использовать обозначение (x_1, x_2) .

Прямая $l = \{(x_1, x_2) : x_1 - \lambda x_2 = 0\}$ делит плоскость π на две полуплоскости

$$\pi^+ = \{(x_1, x_2) : x_1 - \lambda x_2 > 0\}, \pi^- = \{(x_1, x_2) : x_1 - \lambda x_2 < 0\}.$$

Отметим, что при $\lambda = \frac{m}{ak}$ прямая l проходит через положение равновесия $R(\frac{m}{bk}, \frac{a}{b})$ системы (10) при $u_1 = u_2 = 0$, при $\lambda > \frac{m}{ak}$ прямая l лежит ниже точки R , а при $\lambda < \frac{m}{ak}$ — выше точки R .

Ранее (см. (9)) было указано, что в точках множества

$$E = \{(x_1, x_2) : x_2 < \varepsilon^*(x_1)\}$$

система (5)–(9) функционирует в режиме плюс-скачка P_+ .

Если $M(x_1, x_2) \in \pi^+ \setminus E$, то M — начальная точка режима P_2 . Действительно, при этом $\dot{\tilde{n}} = x_1 - \lambda x_2 > 0$, т.е. вектор фазовой скорости в точке M направлен в сторону возрастания \tilde{n} , и система (5)–(9) функционирует в режиме P_2 , для которого M — начальная точка.

Если $M(x_1, x_2) \in \pi^-$, то аналогично предыдущему можно показать, что M — начальная точка режима P_{21} .

2.3. УПРАВЛЕНИЕ, СОХРАНЯЮЩЕЕ СОСТАВ БИОСООБЩЕСТВА

Введем следующие два определения.

Определение 1. *Постоянные управляющие параметры u_1, u_2 называются допустимыми, если выполнены неравенства*

$$\begin{aligned} 0 &\leq u_1 < a, \\ u_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Определение 2. *Если траектория системы (5)–(9), начавшаяся в $M(x_1, x_2)$, содержится в полупространстве $\tilde{n} \geq \Lambda$, то точка M называется точкой сохранения состава биосообщества.*

Постановка задачи: найти допустимые u_1, u_2 , сохраняющие состав биосообщества.

Введем следующие множества:

$$\Pi = \begin{cases} \{(x_1, x_2) : x_1 - \lambda x_2 > 0, x_1 \geq \frac{m}{bk}, \varepsilon \leq x_2 \leq \frac{a}{b}\}, \\ \text{если } 0 < \varepsilon \leq \frac{a}{b}; \\ \emptyset, \\ \text{если } \varepsilon > \frac{a}{b}; \end{cases}$$

$$K_1 = \begin{cases} \{(x_1, x_2) : x_1 - \lambda x_2 > 0, x_1 \geq \frac{m}{bk}, x_2 > \frac{a}{b}\}, \\ \text{если } 0 < \varepsilon \leq \frac{a}{b}; \\ \{(x_1, x_2) : x_1 - \lambda x_2 > 0, x_1 \geq \frac{m}{bk}, x_2 \geq \varepsilon\}, \\ \text{если } \varepsilon > \frac{a}{b}; \end{cases}$$

$$K_2 = \begin{cases} \{(x_1, x_2) : x_1 - \lambda x_2 > 0, x_1 < \frac{m}{bk}, \varepsilon \leq x_2 \leq \frac{a}{b}\}, \\ \text{если или } 0 < \varepsilon \leq \frac{a}{b} \text{ при } \lambda < \frac{m}{ak}, \text{ или } 0 < \varepsilon < \frac{a}{b} \text{ при } \lambda = \frac{m}{ak}, \\ \text{или } 0 < \varepsilon < \frac{m}{bk\lambda} \text{ при } \lambda > \frac{m}{ak}; \\ \emptyset, \\ \text{если или } \varepsilon > \frac{a}{b} \text{ при } \lambda < \frac{m}{ak}, \text{ или } \varepsilon \geq \frac{a}{b} \text{ при } \lambda = \frac{m}{ak}, \\ \text{или } \varepsilon \geq \frac{m}{bk\lambda} \text{ при } \lambda > \frac{m}{ak}; \end{cases}$$

$$K_3 = \begin{cases} \{(x_1, x_2) : x_1 - \lambda x_2 > 0, x_1 < \frac{m}{bk}, x_2 > \frac{a}{b}\}, \\ \text{если } 0 < \varepsilon \leq \frac{a}{b} \text{ при } \lambda < \frac{m}{ak}; \\ \{(x_1, x_2) : x_1 - \lambda x_2 > 0, x_1 < \frac{m}{bk}, x_2 \geq \varepsilon\}, \\ \text{если } \frac{a}{b} < \varepsilon < \frac{m}{bk\lambda} \text{ при } \lambda < \frac{m}{ak}; \\ \emptyset, \\ \text{если } \lambda \geq \frac{m}{ak} \text{ или } \varepsilon \geq \frac{m}{bk\lambda} \text{ при } \lambda < \frac{m}{ak}. \end{cases}$$

Введенным множествам соответствуют различные способы управления, позволяющие сохранить состав биосообщества. Так, введение множеств K_1, K_2, K_3 обусловлено тем, что положение равновесия системы (10) при допустимых u_1, u_2 может принадлежать только Π , что позволяет построить простое управление для начальных точек из Π (теорема 2). Если же начальная точка принадлежит K_1 или K_2 , то способ управления усложняется (теоремы 3–6). Построение управления для множества K_3 составит предмет дальнейшего исследования.

Таким образом, получаем дизъюнктивное разбиение дискриминантной плоскости

$$\pi = \pi^- \cup l \cup E \cup \Pi \cup K_1 \cup K_2 \cup K_3$$

(см. рис. 1, 2, 3).

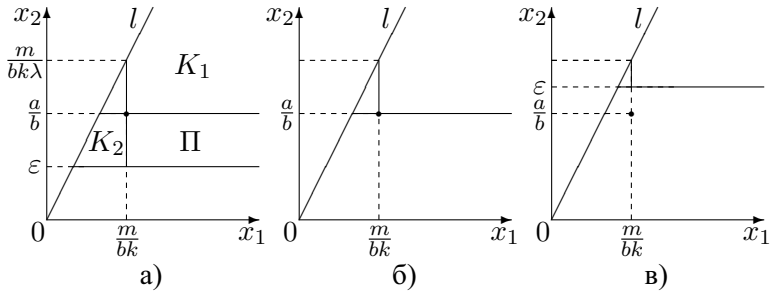


Рис. 1. Разбиение плоскости π в случае $\lambda < \frac{m}{ak}$:

$$а) \varepsilon < \frac{a}{b} \quad б) \varepsilon = \frac{a}{b} \quad в) \varepsilon > \frac{a}{b}$$

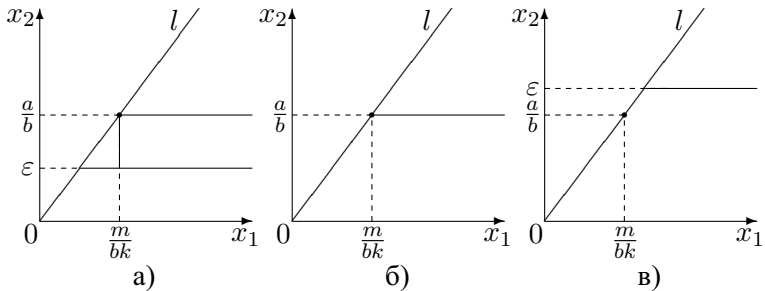


Рис. 2. Разбиение плоскости π в случае $\lambda = \frac{m}{ak}$:

$$а) \varepsilon < \frac{a}{b} \quad б) \varepsilon = \frac{a}{b} \quad в) \varepsilon > \frac{a}{b}$$

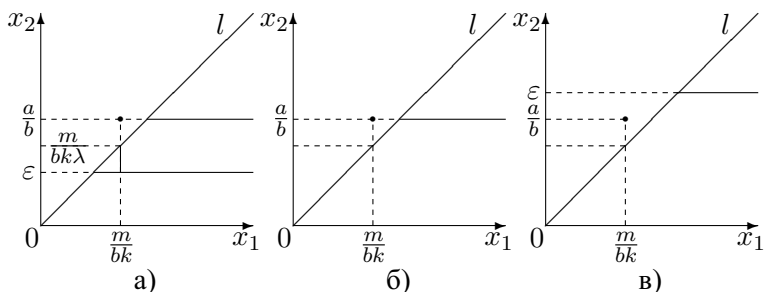


Рис. 3. Разбиение плоскости π в случае $\lambda > \frac{m}{ak}$:

а) $\varepsilon < \frac{a}{b}$ б) $\varepsilon = \frac{a}{b}$ в) $\varepsilon > \frac{a}{b}$

Теорема 2. Пусть $M_0(x_{10}, x_{20}) \in \Pi$. Тогда если

$$(12) \quad \begin{aligned} u_1 &= a - bx_{20}, \\ u_2 &= b k x_{10} - m, \end{aligned}$$

то M_0 является точкой сохранения состава биосообщества.

Доказательство. Так как $M_0 \in \Pi$, то u_1, u_2 (см. (12)) допустимы. Из (12) выразим координаты точки M_0 :

$$x_{10} = \frac{m + u_2}{bk}, \quad x_{20} = \frac{a - u_1}{b}.$$

Они совпадают с координатами положения равновесия системы (10). Это значит, что в точке M_0 при всех t

$$\dot{x}_1 = 0, \quad \dot{x}_2 = 0.$$

Поскольку $M_0 \in \Pi$, то

$$\dot{\tilde{n}}|_{M_0} = x_{10} - \lambda x_{20} > 0$$

(см. (4)). Таким образом, после попадания траектории системы (5)–(9) в точку M_0

$$x_1(t) = x_{10}, \quad x_2(t) = x_{20},$$

а $\tilde{n}(t)$ растет с постоянной скоростью. Следовательно, траектория системы (5)–(9) после попадания в точку M_0 – это луч

$$M_0q = \{(x_1, x_2, \tilde{n}) : x_1 = x_{10}, x_2 = x_{20}, \tilde{n} \geq \Lambda\}.$$

Это значит, что M_0 – точка сохранения состава биосообщества.



Теорема 3. Пусть $M_0(x_{10}, x_{20}) \in K_1$. Тогда если u_1, u_2 такие, что

$$(13) \quad \begin{aligned} u_1 &= a - bx_{20} - \lambda \frac{x_{20}}{x_{10}} (kbx_{10} - m - u_2), \\ kbx_{10} - m + \frac{1}{\lambda} \frac{x_{10}}{x_{20}} (bx_{20} - a) &\leq u_2 < kbx_{10} - m + \frac{bx_{10}}{\lambda}, \end{aligned}$$

то M_0 является точкой сохранения состава биосообщества.

Доказательство. Так как $M_0 \in K_1$, то u_1, u_2 (см. (13)) допустимы. Из (5) получим

$$(14) \quad \frac{dx_2}{dx_1} = \frac{x_2(kbx_1 - m - u_2)}{x_1(a - bx_2 - u_1)}.$$

Тогда

$$\left. \frac{dx_2}{dx_1} \right|_{M_0} = \frac{x_{20}(kbx_{10} - m - u_2)}{x_{10}(a - bx_{20} - a + bx_{20} + \lambda \frac{x_{20}}{x_{10}}(kbx_{10} - m - u_2))} = \frac{1}{\lambda}.$$

Если через l' обозначим касательную в точке M_0 к траектории системы (10), проходящей через точку M_0 , то из последнего равенства следует, что l' параллельна l . Уравнение l' имеет вид

$$x_1 - \lambda x_2 - x_{10} + \lambda x_{20} = 0.$$

Прямая l' образует две полуплоскости

$$\begin{aligned} \pi_{l'}^+ &= \{(x_1, x_2) : x_1 - \lambda x_2 - x_{10} + \lambda x_{20} > 0\}, \\ \pi_{l'}^- &= \{(x_1, x_2) : x_1 - \lambda x_2 - x_{10} + \lambda x_{20} < 0\}. \end{aligned}$$

Из (13) следует, что координаты положения равновесия R системы (10) удовлетворяют условиям

$$\frac{m + u_2}{bk} > x_{10}, \quad \frac{a - u_1}{b} \leq \frac{a}{b} < x_{20}.$$

Тогда $R \in \pi_{l'}^+$. Следовательно, в силу выпуклости траекторий системы (10), траектория, проходящая через точку M_0 , содержится в $Cl(\pi_{l'}^+)$ ($Cl A$ – замыкание A), т.е. во всех точках траектории

$$x_1 - \lambda x_2 \geq x_{10} - \lambda x_{20} > 0.$$

Значит, во всех точках траектории системы (10) \tilde{n} растет (см. (4)). Таким образом, траектория системы (5)–(9), начавшаяся

в точке M_0 , по цилиндрической поверхности уходит в бесконечность, т.е. M_0 – точка сохранения состава биосообщества. ■

Из теоремы 3 следует, что наименьшее u_2 , при котором M_0 является точкой сохранения состава биосообщества, достигается при $u_1 = 0$ и имеет вид

$$u_2 = kbx_{10} - m + \frac{1}{\lambda} \frac{x_{10}}{x_{20}} (bx_{20} - a).$$

Далее естественно поставить задачу минимизации изъятия хищника в случае $u_1 = 0$, т.е. когда нет изъятия жертвы. Решение такой задачи позволит сохранить состав биосообщества с наименьшим антропогенным воздействием на окружающую среду.

Справедлива теорема.

Теорема 4. Пусть $\lambda \geq \frac{m}{ak}$, $M_0(x_{10}, x_{20}) \in K_1$. Тогда в случае $u_1 = 0$ существует минимальное допустимое значение $u_2 = u_2^*$, при котором M_0 является точкой сохранения состава биосообщества.

Доказательство. Так как $\lambda \geq \frac{m}{ak}$, $M_0(x_{10}, x_{20}) \in K_1$, то допустим параметр $u_2 \in [u_{20}, u_{21}]$, где

$$\begin{aligned} u_{20} &= ak\lambda - m, \\ u_{21} &= kbx_{10} - m + \frac{1}{\lambda} \frac{x_{10}}{x_{20}} (bx_{20} - a). \end{aligned}$$

Условие коллинеарности вектора скорости системы (10) и прямой l имеет вид

$$\frac{x_2(kbx_1 - m - u_2)}{x_1(a - bx_2)} = \frac{1}{\lambda}.$$

Точки (x_1, x_2) траектории системы (10), проходящей через M_0 , в которых вектор скорости коллинеарен прямой l , удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} \frac{x_2(kbx_1 - m - u_2)}{x_1(a - bx_2)} = \frac{1}{\lambda}, \\ a \ln x_2 - bx_2 + (m + u_2) \ln x_1 - kbx_1 - c = 0; \end{cases}$$

или равносильной ей:

$$(15) \quad \begin{cases} kb\lambda x_1 x_2 - (m + u_2)\lambda x_2 - ax_1 + bx_1 x_2 = 0, \\ a \ln x_2 - bx_2 + (m + u_2) \ln x_1 - kbx_1 - c = 0; \end{cases}$$

где $c = c(x_{10}, x_{20}, u_2) = a \ln x_{20} - bx_{20} + (m + u_2) \ln x_{10} - kbx_{10}$.

Пусть $F_1(x_1, x_2, u_2), F_2(x_1, x_2, u_2)$ – соответственно левые части первого и второго уравнений системы (15). В силу свойств траекторий системы (10), система (15) при любом $u_2 \in [u_{20}, u_{21}]$ имеет решение $(\tilde{x}_1(u_2), \tilde{x}_2(u_2))$, где $\tilde{x}_2(u_2) > \frac{a}{b}$.

Далее рассмотрим прямую \tilde{l} , перпендикулярную l . Точку O' пересечения \tilde{l} с l примем за начало отсчета, а луч, находящийся в π^- – за положительную полуось. Таким образом, получим ось координат \tilde{l} . Определим функцию

$$(16) \quad d(u_2) = \begin{cases} \frac{|\tilde{x}_1(u_2) - \lambda \tilde{x}_2(u_2)|}{\sqrt{1 + \lambda^2}}, & \text{если } (\tilde{x}_1(u_2), \tilde{x}_2(u_2)) \in \pi^-, \\ -\frac{|\tilde{x}_1(u_2) - \lambda \tilde{x}_2(u_2)|}{\sqrt{1 + \lambda^2}}, & \text{если } (\tilde{x}_1(u_2), \tilde{x}_2(u_2)) \in \pi^+. \end{cases}$$

Из (16) и из непрерывности функций F_1, F_2 по u_2 (см. (15)) следует, что $d(u_2)$ – непрерывная функция. При $u_2 = u_{20}$, в силу свойств траекторий системы (10), решение системы (15) находится в π^- , следовательно, $d(u_{20}) > 0$. А при $u_2 = u_{21}$, т.е. при $u_1 = 0, u_2 = u_{21}$, решением системы (15) является точка $M_0 \in \pi^+$ (см. доказательство теоремы 3), следовательно, $d(u_{21}) < 0$. Из непрерывности $d(u_2)$, в силу теоремы о промежуточных значениях функции непрерывной на отрезке, следует, что существует такое $u_2 \in (u_{20}, u_{21})$, что $d(u_2) = 0$. Пусть u_2^* наименьшее из решений последнего уравнения. Это значит, что траектория системы (10), проходящая через M_0 , при $u_1 = 0, u_2 = u_2^*$ касается прямой l . Тогда так как положение равновесия системы (10) $R\left(\frac{m+u_2^*}{bk}, \frac{a}{b}\right) \in \pi^+$, то в любой точке траектории:

$$\dot{\tilde{n}} = x_1 - \lambda x_2 \geq 0,$$

т.е. траектория системы (5)–(9), начавшаяся в точке M_0 , по цилиндрической поверхности уходит в бесконечность, т.е.

M_0 – точка сохранения состава биосообщества. ■

Аналогичным образом доказываются следующие результаты.

Теорема 5. Пусть $M_0(x_{10}, x_{20}) \in K_2$. Тогда если

$$\varepsilon > \frac{m}{b(1+k\lambda)}$$

и u_1, u_2 такие, что

$$(17) \quad \begin{aligned} u_1 &= a - bx_{20} - \lambda \frac{x_{20}}{x_{10}} (kbx_{10} - m - u_2), \\ 0 &\leq u_2 < kbx_{10} - m + \frac{bx_{10}}{\lambda}, \end{aligned}$$

то M_0 является точкой сохранения состава биосообщества.

Из теоремы 5 следует, что наименьшее u_1 , при котором M_0 – точка сохранения состава биосообщества, достигается при $u_2 = 0$ и имеет вид

$$u_1 = a - bx_{20} - \lambda \frac{x_{20}}{x_{10}} (kbx_{10} - m).$$

Решение задачи минимизации изъятия жертвы в случае $u_2 = 0$ дается теоремой.

Теорема 6. Пусть $\lambda \geq \frac{m}{ak}$, $M_0(x_{10}, x_{20}) \in K_2$. Тогда в случае $u_2 = 0$ существует минимальное допустимое значение $u_1 = u_1^*$, при котором M_0 является точкой сохранения состава биосообщества.

Замечание 1. В теоремах 4, 6 рассмотрен случай $\lambda \geq \frac{m}{ak}$, что означает, что хищнику для удовлетворения его биологических потребностей требуется достаточно большое количество жертвы. Случай $\lambda < \frac{m}{ak}$ требует отдельного рассмотрения, что будет сделано в дальнейших исследованиях.

3. Заключение

В статье предложены и исследованы две динамические системы, описывающие взаимодействие популяций и условия их ухода из ареала. На основе теоретико-игрового подхода решается задача саморегулирования видового состава в модели, комбинирующей взаимодействие хищник-жертва и миграцию в одной системе уравнений (первая модель). Для модели с переменной структурой и с изменяющейся пищевой привлекательностью

(вторая модель) найдено управление, имеющее смысл интенсивности изъятия особей, обеспечивающее сохранение видового состава ареала. Таким образом, рассмотрены системы с внутренним и внешним регулированием биосостава.

Следует отметить, что в первой модели, в отличие от второй, не заложен полный уход хотя бы одной из популяций из местообитания. Это можно сделать, введя достаточно малые окрестности координатных осей $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, после попадания в которые динамика задавалась бы системой типа (7). Тогда саморегулирование обеспечит сохранение биосостава не для всех начальных значений x_1 , x_2 , хотя в первой модели достаточно малые значения x_1 , x_2 можно интерпретировать как признак отсутствия соответствующей популяции в ареале. В дальнейших исследованиях будет дано развитие второй модели, в которой заложена возможность возвращения в ареал (система (9)), для решения задачи выбора популяциями местообитания. Также представляет интерес сочетание обеих моделей таким образом, чтобы в комбинированной модели учитывались возможности как саморегулирования на основе равновесия по Нэшу, так и внешнего регулирования за счет изъятия особей.

Литература

1. КИРИЛЛОВ А.Н. *Экологические системы с переменной размерностью* // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 1999. – Т. 6. – Вып. 2. – С. 318–336.
2. ЛЕОНОВ Г.А. *Введение в теорию управления*. – СПб.: Изд-во СПбГУ, 2004. – 218 с.
3. АТЕНОРТУА А.М., ЛАДИНО Л.М., ВАЛВЕРДЕ Ж.С. *Population dynamics of a two-stage migratory species with predation and capture* // *Nonlinear Analysis: Real World Applications*. – 2014. – Vol. 16. – P. 27–39.
4. АРДИТИ Р., ГИНЗБУРГ Л.Р. *Coupling in predator-prey dynamics: ratio-dependence* // *Journal of Theoretical Biology*. – 1989. – Vol. 139. – P. 311–326.

5. CHARNOV E.L. *Optimal foraging, the marginal value theorem* // Theoretical population biology. — 1976. — Vol. 9, №2. — P. 129–136.
6. CHARNOV E.L. *Life history invariants*. — Oxford University Press, 1993. — 167 p.
7. KRIVAN V. *The Lotka-Volterra predator-prey model with foraging-predation risk trade-offs* // The American Naturalist. — 2007. — Vol. 170, №5. — P. 771–782.
8. KRIVAN V., CRESSMAN R., SCHNEIDER C. *The ideal free distribution: a review and synthesis of the game theoretic perspective* // Theoretical Population Biology. — 2008. — Vol. 73. — P. 403–427.
9. NONACS P. *State dependent behavior and the marginal value theorem* // Behavioral Ecology. — 2001. — Vol. 12, №1. — P. 71–83.
10. STEPHENS D.W., KREBS J.R. *Foraging theory*. — Princeton University Press. Princeton, 1986. — 247 p.

EQUILIBRIUM AND CONTROL IN THE PROBLEM OF SPECIES COMPOSITION PROTECTION IN BIOCOMMUNITY

Alexandra Ivanova, Institute of applied mathematical research of the Karelian research centre RAS, Petrozavodsk, post-graduate student (a_s_ivanova@bk.ru).

Alexander Kirillov, Institute of applied mathematical research of the Karelian research centre RAS, Petrozavodsk, Doctor of Science, Leading Research Associate (kirillov@krc.karelia.ru).

Abstract: The mathematical models are proposed for the problem of a biological community species composition protection. The equilibrium is constructed for the dynamical model, describing the self regulation of the populations presence in a patch. For the model with varying food attractiveness we find species removal limits, which allow preserving the species composition.

Keywords: control, population dynamics, migration, equilibrium.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии Д.А. Новиковым

Поступила в редакцию 06.02.2015.

Дата опубликования 31.05.2015.

УДК 51-7:517.97(262.54)

ББК 26.221

ЭВОЛЮЦИОННО-УСТОЙЧИВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ АЗОВСКОГО МОРЯ ПРИ ВАРИАЦИИ ДОНСКОГО СТОКА

Ильичев В. Г.¹, Дашкевич Л. В.², Кулыгин В. В.³

(ФГБУН Институт аридных зон

Южного научного центра РАН, Ростов-на-Дону)

Предложена компьютерная эколого-эволюционная модель «биогенные элементы – водоросли». Обнаружено, что в асимптотическом режиме отношение органических форм азота и фосфора в экосистеме слабо изменяется, несмотря на сильную деформацию химического состава стока р. Дон. На основе «парадоксальных» модельных экспериментов установлена причина этого явления. Определены эволюционно-устойчивые параметры благоприятных температур развития основных групп водорослей. Показано, что у теплолюбивых водорослей такие параметры единственны, а у холодолюбивых водорослей допускаются две реализации.

Ключевые слова: модель, механизмы адаптации, эволюционно-устойчивые параметры.

В недалеком прошлом Азовское море являлось одним из наиболее высокопродуктивных водоемов Мирового океана. До зарегулирования стока рек Дона (1953 г.) и Кубани (1975 г.) при благоприятной солености азовских вод ежегодный вылов рыбы достигал 8 т/км² [3]. После сооружения Цимлянского водохранилища произошло сокращение объема речного стока, и в ре-

¹ Виталий Григорьевич Ильичев, доктор технических наук, главный научный сотрудник (vitaly369@yandex.ru).

² Людмила Владимировна Дашкевич, кандидат географических наук, научный сотрудник (ldashkev@ssc-ras.ru).

³ Валерий Валерьевич Кулыгин, кандидат технических наук, научный сотрудник (kulygin@ssc-ras.ru).

зультате структура и динамика экологической системы Азовского моря существенно изменились. В частности, здесь возросла доля низкопродуктивных черноморских видов. В целях восстановления былой продуктивности в 80-х годах прошлого века разрабатывались крупные водные проекты – дотация речного стока, регулирование водообмена с помощью Керченского гидроузла, сужение гирла Таганрогского залива [4, 7]. С экономической точки зрения наиболее дорогостоящим был первый проект, связанный с предполагаемой переброской части стока северных рек. А наименее дорогим являлся проект сужения гирла Таганрогского залива. Хотя в свое время эти проекты так и не были реализованы, их целесообразность в новой геополитической обстановке по-прежнему обсуждается.

Одним из аспектов экологической экспертизы перечисленных (и других) проектов является исследование отклика различных трофических уровней экосистемы Азовского моря на изменение гидрологического и гидрохимического режима стока р. Дон. Здесь важно определить устойчивые тенденции, не зависящие от выбора начальных условий в переменных модели. Как правило, это достигается путем построения асимптотического состояния на основе проведения расчетов на многолетнюю перспективу.

Другой вариант устойчивости связан с тем, что параметры популяций могут несколько изменяться в процессе микроэволюции до некоторых финальных (так называемых *эволюционно-устойчивых*) параметров. Поэтому модельные расчеты должны ориентироваться на выбор таких параметров. Первоначально соответствующая концепция была развита в работе Мэйнарда Смита [18] для грубых качественных моделей с использованием методов теории игр.

Однако если природный объект допускает достаточно полное количественное описание, то более естественным представляется построение эколого-эволюционных моделей.

В настоящей статье на примере эколого-эволюционной модели фитоценозов двух районов Азовского моря: Таганрогского залива (ТЗ) и собственно моря (СМ) будет проведен соответствующий анализ динамики биогенных веществ (азота и фосфора) с учетом влияний водорослей.

1. Модельные механизмы адаптации водорослей

Основой моделей динамики и микроэволюции экологических систем являются различные процессы адаптации. На примере водорослей рассмотрим важнейшие из них.

1.1. АДАПТАЦИЯ К СОДЕРЖАНИЮ БИОГЕННЫХ ВЕЩЕСТВ

В модели круговорота азота (N) и фосфора (P), которые предназначены для анализа поведения экосистем, необходимо включать механизмы адаптации водорослей к содержанию биогенных веществ в среде. В противном случае при модельных расчетах на длительную перспективу может «возникать» неограниченный рост N или P [8]. Поэтому учет механизмов адаптации водорослей представляется обязательным.

В обзоре [15] рассмотрены модельные схемы адаптации водорослей к содержанию азота и фосфора, основанные на концепции клеточной квоты. Более удобным при модельной реализации является следующий механизм адаптации, опирающийся на концепцию Ф. Добжанского [16] о жестком полиморфизме природных популяций. Следуя этой идее, всякая («исходная») популяция водорослей состоит из набора близких субпопуляций, каждая из которых имеет «свои» параметры k_N – доля N и k_P – доля P в клетках водорослей. Дополнительно будем считать, что потребление азота и фосфора i -й субпопуляцией пропорционально их внутриклеточному содержанию (т.е. величинам k_N^i , k_P^i). Субпопуляцию с наибольшим k_N^i будем называть «азотолубивой», а с наибольшим k_P^i – «фосфоролубивой». Исход конкуренции данных субпопуляций зависит от содержания азота и фосфора в среде. Это взаимодействие должно быть согласовано с принципом компенсации Ле-Шателье – Брауна, а именно: при больших N доминирует азотолубивая субпопуляция, поскольку в этом случае происходит наиболее сильное потребление N . Аналогично, при больших P доминирует фосфоролубивая субпопуляция.

В качестве базовой модели динамики биомассы популяции водорослей (x) используем однородную схему Пирса [19]:

$$(1) \quad \dot{x} = xf(xk_P / P, xk_N / N).$$

Здесь P и N – концентрации минеральных форм фосфора и азота в воде; $f(u, v)$ – гладкая трофическая функция, убывающая по каждой переменной.

Ниже будем использовать частный случай схемы Пирса, а именно модель Контуа, в которой $f(u, v) = -1 + r / (1 + u + v)$. В развернутой форме получаем

$$(2) \quad f(xk_P / P, xk_N / N) = -1 + \frac{rPN}{PN + x(Nk_P + Pk_N)}.$$

Здесь r – скорость роста водорослей, зависящая от температуры и солености среды; скорость смертности равна -1 . Пусть условия среды постоянные, тогда при $r > 1$ в модели (1) с правой частью (2) имеется единственное, положительное равновесие $\bar{X}(k_N, k_P)$, где

$$(3) \quad \bar{X}(k_N, k_P) = \frac{r - 1}{N / k_N + P / k_P}.$$

Данное равновесие глобально устойчиво в R_+ .

Теперь построим расширение модели (2), включающее в себя три субпопуляции (x_1, x_2, x_3) . Определим внутриклеточное содержание азота и фосфора в данных субпопуляциях следующим образом:

- 1) $k_N^1 = k_N$ и $k_P^1 = k_P$ (исходная популяция);
- 2) $k_N^2 = k_N \gamma$ и $k_P^2 = k_P / \gamma$ (азотолюбивый мутант);
- 3) $k_N^3 = k_N / \gamma$ и $k_P^3 = k_P \gamma$ (фосфоролюбивый мутант).

Здесь γ – некоторое число, большее 1. Взаимодействие всех субпопуляций описывается системой («Триадой»):

$$(4) \quad \dot{x}_i = x_i f(Sk_P^i / P, Sk_N^i / N),$$

где $i = 1, 2, 3$ и $S = x_1 + x_2 + x_3$.

На рис. 1 проведены две прямые:

Ф) $P / k_P = \gamma N / k_N$ и

А) $N / k_N = \gamma P / k_P$,

которые разбивают первый квадрант на три области (1, 2 и 3). Пусть в системе (4) в качестве функции f выбрана схема Контуа, тогда для «Триады» справедливо следующее основное свойство адаптации [8]: *если точка (N, P) принадлежит области с номером i , то i -я субпопуляция вытесняет остальные.*

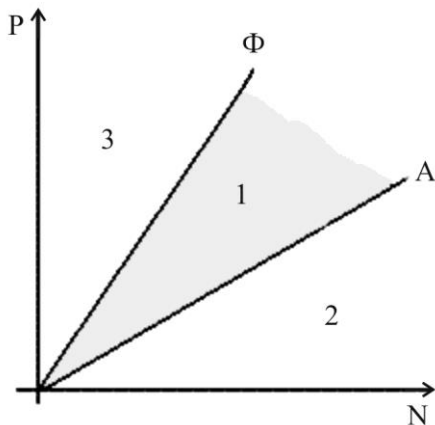


Рис. 1. При разных соотношениях N и P доминируют субпопуляции 1, 2 или 3

Правую часть «Триады» целесообразно дополнить следующим слагаемым:

$$(5) \quad \dot{x}_i = x_i f(Sk_P^i / P, Sk_N^i / N) + \mu,$$

где $i = 1, 2, 3$; μ – положительно и мало. Присутствие малого числа μ позволяет навечно закрепить трехвидовую структуру в машинной модели «Триады», и в то же время в (5) сохраняются прежние закономерности доминирования субпопуляций.

Отметим, что функционирование «Триад» не устраняет возможности возникновения дисбаланса N и P в среде, а лишь смягчает его.

В предлагаемой ниже модели «водоросли – азот и фосфор» Азовского моря представлены три основные группы водорослей (диатомовые, пиррофитовые и синезеленые). Динамика каждой группы водорослей описывается модельной конструкцией «Триада» с $\gamma = 1, 1$. Известно, что в Таганрогском заливе обитают в основном диатомовые и синезеленые водоросли, а в собственно море – диатомовые и пиррофитовые водоросли. В соответствующих моделях фитоценозов учитывается конкурентное взаимодействие указанных «Триад».

1.2. АДАПТАЦИЯ К ТЕМПЕРАТУРЕ

Суть построения традиционных эколого-эволюционных моделей заключается в следующем [1]. Вместо одной популяции (x) с фиксированным параметром α рассматривается многочисленное сообщество близких субпопуляций (x_1, \dots, x_n). Каждая переменная (x_i) является носителем своего параметра (α_i). Далее в процессе конкурентного отбора выживает одна субпопуляция, обладающая «наилучшим», точнее эволюционно-устойчивым значением параметра. Данное «прямолинейное копирование» эволюционных процессов требует задания большого числа субпопуляций. Поэтому такая компьютерная модель экосистемы вызывает, по сути, неограниченные затраты машинного времени при расчетах на долгосрочную перспективу.

Ниже предлагается иная модельная конструкция [9] механизма адаптации, в которой параметр играет активную роль, и наряду с переменными сам изменяется в процессе работы модели. Итак, пусть динамика популяции в постоянной среде задается базовой моделью

$$(6) \quad \dot{x} = xf(x, \alpha).$$

Гладкая функция $f(x, \alpha)$ отражает негативное действие внутренней конкуренции, поэтому она строго убывает. Чтобы в (6) реализовалось положительное равновесие, достаточно считать: $f(0, \alpha) > 0$ и $f(\infty, \alpha) < 0$ при всех α .

Напомним формальное определение: значение α_0 называется эволюционно-устойчивым (ЭУ-параметр), если соответствующая популяция не вытесняется в сообществе конкурентов с близкими к α_0 значениями параметров [18]. Оказывается, поиск ЭУ-параметров можно осуществить в модели с помощью всего лишь трех субпопуляций: «исходная популяция» и два ее мутанта. Здесь исходная популяция (x_1) является носителем базового параметра α , а мутанты (x_2 и x_3) – носители параметров $\alpha + \delta$ и $\alpha - \delta$ соответственно (константа δ положительна и мала). Разумеется, чтобы сохранялись адаптивные возможности такой модели, необходимо постоянно поддерживать в ней трехвидовую структуру. Поэтому динамику субпопуляций дополним «подкачкой» численности (в размере μ):

$$(7) \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 f(x_1 + x_2 + x_3, \alpha) + \mu, \\ \dot{x}_2 &= x_2 f(x_1 + x_2 + x_3, \alpha + \delta) + \mu, \\ \dot{x}_3 &= x_3 f(x_1 + x_2 + x_3, \alpha - \delta) + \mu, \end{aligned}$$

где μ – положительно и мало.

В зависимости от значения α в (7) будет доминировать та или иная субпопуляция. Далее, выберем Dom достаточно большой константой, например, положим $Dom = 10$. Пусть (x_1, x_2, x_3) – численности субпопуляций в текущий момент времени. Зададим изменение параметра α следующим образом:

1) α растёт при доминировании («с запасом») мутанта x_2 , т.е. при $x_2 > x_1 Dom$ и $x_2 > x_3$;

2) α убывает при доминировании («с запасом») мутанта x_3 , т.е. при $x_3 > x_1 Dom$ и $x_3 > x_2$.

В этой связи, естественно определить следующую функцию отбора $Sel(x_1, x_2, x_3)$:

$Sel = 1$ при доминировании x_2 ;

$Sel = -1$ при доминировании x_3 ;

$Sel = 0$ в остальных случаях.

Наконец, дополним систему (7) уравнением для базового параметра:

$$(8) \quad \dot{\alpha} = \varepsilon Sel(x_1, x_2, x_3),$$

где скорость микроэволюции ε положительна и мала.

Для «правильной» работы системы (7)–(8) следует указать относительный порядок малости коэффициентов δ, μ, ε . Так, в работе [5] предлагается брать δ малым, μ очень малым, а ε совсем малым. Показано, что в этом случае финальное значение параметра α оказывается эволюционно-устойчивым.

Неожиданно данная конструкция является эффективной при периодически изменяющихся условиях среды, например, температуры (θ). Здесь в рамках простейшей версии схемы Контуа базовая модель имеет вид

$$(9) \quad \dot{x} = x \left[-1 + r(\theta - \alpha) \frac{1}{1+x} \right],$$

где $r = r_0[1 - (\theta - \alpha)^2]$ при $\theta \in I = (\alpha - 1, \alpha + 1)$ и $r_0 > 1$; иначе $r = 0$. Обычно I называют *интервалом температурной толерантности*, у каждого вида водорослей он свой.

Здесь актуальна следующая проблема: *где в процессе микроэволюции будет располагаться интервал I ?* В результате расчетов по модели (7)–(8) обнаружены два возможных финальных состояния [10]. Разумеется, тот или иной исход эволюционного процесса зависит от выбора начального положения I . Сформулируем основной результат:

пусть θ – синусоидальная кривая, тогда I оказывается вблизи минимума или максимума θ .

Это так называемая «гипотеза критических значений». Вероятно, первый исход соответствует реализации холодолюбивых (диатомовых) водорослей, а второй – характерен для теплолюбивых (пирофитовых или синезеленых) водорослей.

Одновременный учет в модели указанных двух адаптаций можно осуществить с помощью конструкции «*Пентада*», содержащей пять субпопуляций. Здесь 1-я субпопуляция имеет стандартный набор параметров, 2 и 3-я субпопуляции отвечают за биогенную адаптацию, а 4 и 5-я субпопуляции реализуют температурную адаптацию.

Последнее. Довольно непросто бывает добиться в модели устойчивого сосуществования различных видов водорослей. Здесь стабилизирующую роль может играть модельный механизм перехода активных клеток водорослей в пассивное состояние: когда температура среды оказывается «плохой» (θ лежит вне I), то происходит переход клеток из активного состояния в пассивное (споры), в котором они не размножаются, не питаются и практически не умирают [14]. Напротив, когда температура среды становится «хорошей» (θ лежит внутри I), то клетки водорослей возвращаются в активное состояние. Наличие этого механизма существенно «смягчает» процессы межвидовой конкуренции.

2. Парадоксальные модельные эксперименты в анализе дисбаланса минеральных форм азота и фосфора

С точки зрения теории автоматического регулирования, процессы питания водорослей осуществляют прямые связи, а процессы распада отмерших клеток образуют обратные связи в общем круговороте веществ в экосистеме [11]. Когда отношение общих запасов азота ($N_{общ}$) к общим запасам фосфора ($P_{общ}$) близко к значению азот/фосфор в клетках водорослей ($N_{кл} / P_{кл}$), то в биологическом круговороте веществ активно «работают» две обратные связи (как по азоту, так и по фосфору). Напротив, при избыточном накоплении в среде, например N , ослабляется действие обратной связи по азоту. Сокращение же числа активных обратных связей опасно, поскольку может привести к дестабилизации водной экосистемы.

Из таблицы 1 следует, что потребление P всеми группами водорослей примерно одинаково, а потребление N существенно различно. При этом наибольшее потребление азота осуществляется синезелеными водорослями. Кроме того, полезно иметь в виду значения отношений k_N / k_P : 5 (диатомовые); 6,69 (пирофитовые); 8,75 (синезеленые).

Таблица 1. Экологические характеристики водорослей Азовского моря [2, 12]

Группа водорослей \ Параметр	Оптимальная соленость, ‰	Оптимальная температура, °С	Содержание в клетках N и P	
			k_N	k_P
Диатомовые	9	12-14	0,00525	0,00105
Пирофитовые	14	19-22	0,00750	0,00112
Синезеленые	6	22-24	0,01050	0,00120

Далее, согласно наблюдениям [3] в Азовском море средне-многолетняя величина $nr = N_{общ} / P_{общ}$ составляла ≈ 10 . Указанное значение nr близко к величине $N_{кл} / P_{кл}$ для основных видов азовских водорослей. После сооружения Цимлянского водохранилища (1953 г.) сократился объем (v) и деформировался хими-

ческий состав (c_N, c_P) донского стока. В результате в Азовском море стало наблюдаться постепенное нарастание отношения nr . За промежуток времени 1970–1980 гг. величина nr достигла значения ≈ 20 . Представляет интерес поиск причин, вызывающих рост nr .

Ниже будет представлена идея компьютерного исследования эффектов воздействия вариантов химического состава вод (c_N, c_P) и годового объема стока (v) на фитоценозы ТЗ и СМ. Задавались следующие параметры речного стока:

- 1) v изменялся в пределах 50–10 км³/год, естественно, такое сокращение v вызывает увеличение солености как ТЗ, так и СМ;
- 2) для (c_N, c_P) были выбраны следующие варианты (в мг/м³):
1 – (2000, 200); 2 – (2000, 300); 3 – (3000, 200); 4 – (3000, 300).

Здесь при расчетах использовалась модель «водоросли – азот и фосфор», в которой каждой группе фитопланктона соответствовала своя «Триада». Пусть заданы конкретные параметры донского стока, тогда при расчетах на многолетнюю перспективу в данной модели устанавливается периодическое (период = год) состояние. Этот асимптотический режим является единственным и устойчивым.

Обнаружено [6], что при уменьшении v (среднегодовое) содержание минерального P падает, а содержание минерального N убывает лишь при $v \in [50, 25]$ и, напротив, резко возрастает при дальнейшем уменьшении v от 25 до 10. Этот неожиданный результат – возникновение дисбаланса N и P в Азовском море при снижении объема донского стока меньше критического значения (25 км³/год) – имел место при всех четырех вариантах химического состава р. Дон.

Очевидно, убыль v порождает одновременную трансформацию двух процессов, как гидрологического (изменение массообмена $TZ \leftrightarrow CM \leftrightarrow \text{Черное море}$), так и биологического (перестройка видового состава водорослей при росте солености). Чтобы разобраться в хитросплетении указанных факторов, необходимо выделить их в «чистом виде».

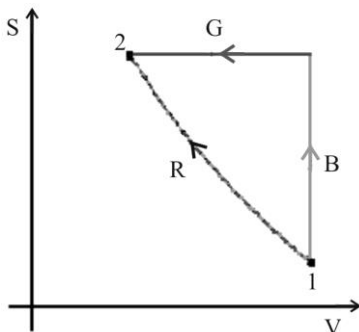


Рис. 2. Разные пути в пространстве (v, S) , соединяющие два состояния экосистемы

Воспользуемся здесь следующими «парадоксальными» соображениями. Пусть объем донского стока непрерывно уменьшается от 50 до 10 км³/год. Это вызывает увеличение солености каждого района Азовского моря. Геометрически в пространстве факторов (см. рис. 2) происходит движение по диагонали (R) от точки 1 к точке 2. Теперь заменим «прямой» путь (R) на «окольный» ($B+G$), состоящий из вертикального (B) и горизонтального (G) отрезков. Движение факторов по отрезку B связано только с увеличением солености («гидрология заморожена»). Поэтому путь B вызывает деформацию чисто биологических процессов. Аналогично, движение факторов по отрезку G порождает лишь изменение массообмена («соленость заморожена»). Значит, путь G вызывает деформацию чисто гидрологических процессов. Разумеется, такие односторонние изменения данных факторов в природе не наблюдаются. Однако в экспериментах с математической моделью это вполне допустимо и реализуемо.

На основе предложенных модельных экспериментов был выявлен следующий механизм возникновения дисбаланса N и P в Азовском море:

– при сокращении объема стока р. Дон от 50 до 25 км³/год решающее значение имеют биологические факторы (перестройка видового состава водорослей), вызывающие одновременное уменьшение N и P . Оказывается, сопутствующее увеличение солености до 11‰ вызывает рост общей биомассы водорослей, и попутно увеличивается потребление биогенных веществ;

– при дальнейшем сокращении стока доминируют гидрологические процессы, приводящие к увеличению N и уменьшению P . Действительно, здесь происходит рост доли атмосферных осадков и притока черноморских вод с аномально высоким содержанием N/P . Так, имеем соответственно $1400 / 45 \approx 31$ и $350 / 27 \approx 13$ [8].

3. Парадоксальные модельные эксперименты в анализе баланса органических форм азота и фосфора

Ниже считаем, что фитоценоз характеризуется видовым составом водорослей, а также набором минеральных и органических форм биогенных элементов (для простоты ограничимся лишь N и P). Разумеется, замкнутый по веществу фитоценоз включает в себя потребление минеральных элементов N и P водорослями, которые размножаются и частично отмирают. В результате (линейного) распада органических соединений вещества N и P возвращаются в водную толщу.

Здесь в модели представлены два фитоценоза: ТЗ и СМ. В первом присутствуют только диатомовые и синезеленые водоросли, а во втором обитают только диатомовые и пиррифитовые водоросли (+ их споры). Каждая группа фитопланктона представлена своей “Пентадой”. Поэтому здесь происходит одновременная адаптация водорослей к биогенному и температурному режимам. Среднеголетние значения стока р. Дон и температуры (по районам) приведены в таблице 2.

Таблица 2. Среднеголетние [17] ежемесячные значения температуры воды ТЗ и СМ ($^{\circ}\text{C}$) и объемы стока р. Дон (км^3)

Фактор Месяц	Сток р.Дон	Температура ТЗ	Температура СМ
I	1,00	1,08	1,93
II	1,17	0,14	1,49
III	2,09	2,18	2,67
IV	3,78	10,8	9,31
V	4,55	18,2	16,3

Фактор Месяц	Сток р.Дон	Температура ТЗ	Температура СМ
VI	2,21	22,6	22,1
VII	1,45	24,6	24,3
VIII	1,32	23,5	24,1
IX	1,27	18,4	19,4
X	1,31	12,1	14,8
XI	1,32	5,75	7,8
XII	1,08	3,42	4,6

Напомним, объемы районов ТЗ – 25,9 км³ и СМ – 295,34 км³. В системе одностороннего обмена р. Дон → ТЗ → СМ → Черное море реализована простейшая балансовая гидрологическая схема: сколько воды втекает, столько же ее и вытекает. Разумеется, вода является основным «переносчиком» биогенных веществ и водорослей.

При модельных расчетах считаем, что в донской воде содержание минеральных форм N и P равно нулю, а концентрация органических форм N и P задается парой (c_N, c_P) . Пусть $F_t(c_N, c_P)$ – вектор состояния модели фитоценозов, соответствующий (c_N, c_P) , в момент времени t . Отметим, что правая часть модели динамики водорослей является однородной функцией первой степени (при $\mu = 0$), а процессы распада и массопереноса линейны. Поэтому имеет место равенство $F_t(\lambda c_N, \lambda c_P) = \lambda F_t(c_N, c_P)$ для произвольной константы $\lambda > 0$.

По сути, ключевое значение для анализа качественных изменений имеет лишь отношение $R = c_N / c_P$. В таблице 3 приведены результаты компьютерного исследования влияния химического состава стока р. Дон на фитоценозы ТЗ и СМ. Здесь R изменяется от 2400 / 80 до 2400 / 440.

Здесь обозначено: N_m, N_0 и P_m, P_0 – минеральные и органические формы N и P .

Отметим, что попутно в модели происходил поиск эволюционно-устойчивых значений благоприятных температур развития водорослей. Разумеется, это влияет и на динамику всего фитоценоза. Здесь начальные значения данных параметров выби-

рались следующими: 22 – синезеленые (a_c), пиррофитовые (a_{II}) и 3 – диатомовые (a_D).

Таблица 3. Асимптотики среднегодовых характеристик (в $мг/м^3$) фитоценозов в природной системе р. Дон → ТЗ → СМ

R Характеристика	2400/ /80	2400/ 140	2400/ 200	2400/ 260	2400/ 320	2400/ 380	2400/ 440
Таганрогский залив							
Синезел.	2670	4659	6269	6167	5959	5962	5965
Диатом.	910	1585	2444	3666	4448	4457	4462
N_m	1207	767	401	305	251	251	251
P_m	12	21	34	63	102	153	203
N_0	983	1266	1510	1572	1600	1601	1601
P_0	41	71	101	123	138	148	157
Собственно море							
Пиррофит.	3049	5333	7611	9556	9388	9237	9243
Диатом.	960	1683	2411	3332	4647	4815	4821
N_m	1739	1257	777	351	235	224	224
P_m	10	18	26	37	65	122	182
N_0	449	771	1094	1303	1443	1448	1449
P_0	35	62	88	114	131	132	132

Дополнительно было проведено специальное компьютерное исследование того, как влияет выбор начальных параметров на их финальные значения. Так, при $c_N = 2400$ и $c_P = 200$ рассмотрено 11 вариантов, а именно: начальные значения температур развития теплолюбивых водорослей фиксированы $a_c = a_{II} = 26$, а у холоднолюбивых изменяются $a_D = k$, где $k = 1, \dots, 11$. В таблицу 4 сведены полученные в модели эволюционно-устойчивые значения данных параметров.

Финал процессов микроэволюции для теплолюбивых (синезеленых и пиррофитовых) водорослей практически однозначен, и соответствующие параметры располагаются вблизи максимума температурной кривой (это согласуется с гипотезой критических значений).

Таблица 4. Финальные значения параметров благоприятных температур развития водорослей

k Парам.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Таганрогский залив											
a_c	22,1	22,1	22,1	22,0	22,1	22,1	22,1	22,1	22,1	22,2	22,2
a_d	1,6	2,3	2,3	2,3	2,3	2,3	2,3	2,3	2,3	12,2	12,2
Собственно море											
a_{II}	21,8	21,8	21,8	21,8	21,8	21,8	21,8	21,8	21,8	21,8	21,8
a_d	3,2	3,2	3,2	3,3	3,3	3,2	7,2	7,4	7,4	7,4	7,4

А для холоднолюбивых диатомовых водорослей могут возникать два варианта финала. Так, самое низкое значение ЭУ-параметра соответствует минимуму температурной кривой. Далее, имеются веские основания полагать, что более высокое значение ЭУ-параметра соответствует точке перегиба температурной кривой. В этой связи сообщество диатомовых водорослей в Азовском море включает в себя несколько групп с существенно разными оптимальными температурами развития.

Далее, из таблицы 3 можно извлечь динамику азот/фосфор для различных форм биогенных веществ в зависимости от величины R . Неожиданно находим, что в СМ величина N_0 / P_0 совсем мало изменяется (см. таблицу 5).

Таблица 5. Отношение азот/фосфор в природной системе $p.Дон \rightarrow ТЗ \rightarrow СМ$ при разных R

R Отношение	2400/ 80	2400/ 140	2400/ 200	2400/ 260	2400/ 320	2400/ 380	2400/ 440
Таганрогский залив							
N_m / P_m	100,6	36,5	11,8	4,8	2,5	1,6	1,2
N_0 / P_0	23,0	17,6	14,9	12,8	11,5	10,8	10,2
Собственно море							
N_m / P_m	174,0	69,8	29,9	9,5	3,6	1,8	1,2
N_0 / P_0	12,7	12,5	12,4	12,1	11,0	10,9	10,9

В чем причина высокой устойчивости отношения N_0 / P_0 в собственно море? Может быть, в уникальности видового состава фитоценоза СМ или в уникальности каскада фитоценозов ТЗ и СМ? В этой связи в рамках гидрологической схемы *р. Дон*→*район 1*→*район 2* были проведены «парадоксальные» компьютерные эксперименты, в которых рассмотрены любые расстановки фитоценозов по районам. Так, например, сценарий *р. Дон*→СМ→ТЗ означает: 1) *р. Дон* впадает в большой район, в котором обитают пиррофитовые и диатомовые водоросли; 2) из данного района вода поступает в малый район, в котором находятся синезеленые водоросли.

Согласно проведенным расчетам отношение N_m / P_m сильно изменяется во всех районах при вариации R . Напротив, во всех сценариях отношение N_0 / P_0 слабо изменяется, особенно во втором районе (см. таблицу 6). Поэтому биологические характеристики районов не имеют принципиального значения.

Скорее всего, «вина» лежит на гидрологических особенностях районов. Так, когда первый район является большим, то стабилизация N_0 / P_0 возникает уже в нем. Вероятно, низкая проточность большого района всегда способствует стабилизации N_0 / P_0 . В приложении подтвержден этот тезис с помощью анализа упрощенной автономной модели.

Сформулируем основные выводы.

1. Органическое вещество водоемов имеет как аллохтонное (заносимое извне), так и автохтонное (продуцируемое внутри) происхождение. Автохтонная органика (это, в основном, отмершие клетки водорослей) в определенном смысле упорядочена, поскольку в ней концентрации азота и фосфора близки к их содержанию внутри клеток водорослей. Напротив, аллохтонная органика не «отфильтрована» водорослями, и в ней соотношение азот/фосфор может допускать значительные вариации. В слабопроточных и высокопродуктивных водоемах превалирует автохтонная органика, поэтому величина (азот органический)/(фосфор органический) слабо изменяется даже при сильной деформации химического состава речного стока.

2. Благоприятные температуры развития теплолюбивых водорослей располагаются вблизи максимума температурной кривой водоема. А у холодолюбивых водорослей они находятся

около минимума или точки перегиба температурной кривой. Следует ожидать, что при деформации термического режима среды произойдет изменение указанных параметров. Это может вызвать трансформацию продуктивности не только фитопланктона, но и всей экологической системы в целом.

Таблица 6. Сценарии «перестановок фитоценозов» и отношение азот/ фосфор при разных R

R Отношение	2400/ 80	2400/ 140	2400/ 200	2400/ 260	2400/ 320	2400/ 380	2400/ 440
р. Дон→ТЗ→ТЗ							
Первый район							
N_m / P_m	100,6	36,5	11,8	4,8	2,5	1,6	1,2
N_0 / P_0	23	17,6	14,9	12,8	11,5	10,8	10,2
Второй район							
N_m / P_m	124	45,2	13,1	4,9	2,3	1,5	1,1
N_0 / P_0	17,8	16	15,1	13,3	12,7	12,5	12,3
р. Дон→СМ→ТЗ							
Первый район							
N_m / P_m	148	62	27,7	9,4	3,5	1,9	1,3
N_0 / P_0	13,1	12,3	11,9	11,6	10,8	10,7	10,6
Второй район							
N_m / P_m	139	51	16,2	5,4	2,4	1,5	1,1
N_0 / P_0	14,4	14,2	14	12,8	12,2	12,2	12,2
р. Дон→СМ→СМ							
Первый район							
N_m / P_m	148	62	27,7	9,4	3,5	1,9	1,3
N_0 / P_0	13,1	12,3	11,9	11,6	10,8	10,7	10,6
Второй район							
N_m / P_m	150	62	26,5	8,3	3,3	1,8	1,2
N_0 / P_0	12,2	12,2	12,1	11,8	11	10,9	10,9

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 14-05-31322).

4. Приложение

Обозначим через d – величину потока донской воды, а через V – объем района фитоценоза. Отношение $\rho = d / V$ характеризует проточность района. Разумеется, чем меньше ρ , тем ниже проточность. Напомним, c_N и c_P – концентрации органических форм N и P в речном стоке. Пусть параметры r_N и r_P – скорости распада органических форм азота и фосфора; F и G – биомассы двух видов водорослей (например, пиррофитовые и диатомовые); χ – коэффициент смертности водорослей; ϕ_N, ϕ_P – содержание N, P в клетках F ; γ_N, γ_P – содержание N, P в клетках G .

Теперь без учета переменных факторов среды получаем уравнения:

$$\dot{N}_0 = \rho(c_N - N_0) - r_N N_0 + \chi(F\phi_N + G\gamma_N),$$

$$\dot{P}_0 = \rho(c_P - P_0) - r_P P_0 + \chi(F\phi_P + G\gamma_P).$$

Отсюда находим следующие равновесные значения:

$$\tilde{N}_0 = \frac{\rho c_N + \chi(F\phi_N + G\gamma_N)}{\rho + r_N} \quad \text{и} \quad \tilde{P}_0 = \frac{\rho c_P + \chi(F\phi_P + G\gamma_P)}{\rho + r_P}.$$

Очевидно, при малых ρ получаем соотношение:

$$\frac{\tilde{N}_0}{\tilde{P}_0} \approx \frac{r_P}{r_N} \frac{F\phi_N + G\gamma_N}{F\phi_P + G\gamma_P}.$$

Согласно наблюдениям имеет место [13].

$$(П.1) \quad \frac{r_P}{r_N} = 2,5,$$

а при $F > 0$ и $G > 0$ справедливо неравенство:

$$(П.2) \quad \min\left\{\frac{\phi_N}{\phi_P}, \frac{\gamma_N}{\gamma_P}\right\} \leq \frac{F\phi_N + G\gamma_N}{F\phi_P + G\gamma_P} \leq \max\left\{\frac{\phi_N}{\phi_P}, \frac{\gamma_N}{\gamma_P}\right\}.$$

Проведем конкретный расчет для СМ. Для пиррофитовых и диатомовых водорослей известно $\phi_N / \phi_P = 6,69$ и $\gamma_N / \gamma_P = 5$, соответственно (см. раздел 2). Поэтому на основе (П.1) и (П.2) находим довольно узкий диапазон отношения органических форм азот и фосфора:

$$12,5 \leq \frac{\tilde{N}_0}{\tilde{P}_0} \leq 16,7.$$

Литература

1. АБРОСОВ Н.С., РОЗЕНГАУЗ М.М. *Динамика гетерогенной популяции в условиях трофической конкуренции (к теории коэволюции)* // Пробл. эколог. мониторинга и моделир. экосистем. – Л.: Гидрометеиздат, 1986. – Т. 9. – С. 166–183.
2. АЛДАКИМОВА А.Я. *О некоторых закономерностях внутривековой динамики фитопланктона Азовского моря* // Биологические ресурсы Азовского моря. – Ростов н/Д.: РГУ, 1976. – С. 71–75.
3. БРОНФМАН А.М., ДУБИНИНА В.Г., МАКАРОВА Г.Д. *Гидробиологические и гидрохимические основы продуктивности Азовского моря.* – М.: Пищ. пром., 1979. – 288 с.
4. ВОРОВИЧ И.И., ГОРЕЛОВ А.С., ГОРСТКО А.Б. И ДР. *Рациональное использование водных ресурсов бассейна Азовского моря. Математические модели.* – М.: Наука, 1981. – 360 с.
5. ИЛЬИЧЕВ В.Г. *Адаптация параметров в моделях популяций* // Журнал общей биологии. – 2005. – Т. 66, №2. – С. 171–179.
6. ИЛЬИЧЕВ В.Г. *Вычислительные эксперименты в поиске причин возникновения дисбаланса азота и фосфора в Азовском море* // Математическое моделирование. – 2006. – №2. – С. 89–100.
7. ИЛЬИЧЕВ В.Г. *Математическое моделирование экологического состояния бассейна Азовского моря* // Метеорология и гидрология. – 1995. – №1. – С. 56–64. 3.
8. ИЛЬИЧЕВ В.Г. *Устойчивость, адаптация и управление в экологических системах.* – М.: Физматлит, 2009. – 192 с.
9. ИЛЬИЧЕВ В.Г. *Эволюционная устойчивость биологических сообществ* // Журнал общей биологии. – 2010. – Т. 71, №1. – С. 63–74.
10. МАТИШОВ Г.Г., ИЛЬИЧЕВ В.Г., СЕМИН В.Л. И ДР. *Об адаптации популяций к температурному режиму среды.*

- Результаты компьютерных экспериментов // Доклады Академии наук.* – 2008. – Т. 420, №2. – Май. – С. 282–285.
11. НОВОСЕЛЬЦЕВ В.Н. *Организм в мире техники: кибернетический аспект.* – М.: Наука, 1989. – 239 с.
 12. СЕРГЕЕВ Ю.Н., КОЛОДОЧКА Х.Д., КРУММЕЛЬ Х.Д. И ДР. *Моделирование процессов переноса и трансформации вещества в море.* – Л.: ЛГУ, 1979. – 291 с.
 13. СКОПИНЦЕВ Б.А. *Закономерности разложения (минерализации) органического вещества отмершего планктона // Водные ресурсы.* – 1976. – №2. – С. 150–160.
 14. УШАТИНСКАЯ Р.С. *Скрытая жизнь и анабиоз.* – М.: Наука, 1990. – 182 с.
 15. ФУРЦОВА П.В., ЛЕВИЧ А.П. *Математическое моделирование в экологии сообществ // Проблемы окружающей среды, ВИНТИ (обзорная информация).* – М., 2002. – №9. – 50 с.
 16. DOBZHANSKY TH. *Genetics of the Evolutionary Process.* – N.Y.: Columbia Univ. Press, 1970. – 505 p.
 17. MATISHOV G., MATISHOV D., GARGOPA YU., ETC. *Climatic Atlas of the Sea of Azov 2008.* – NOAA Atlas NESDIS 65, U.S. Government Printing Office, Washington, D.C., 2008. – 148 p.
 18. MAYNARD S.J. *Evolution and the theory of games.* – N.J.: Cambridge Univ. Press, 1982. – 224 p.
 19. PEARCE C. *A new deterministic model for the interaction between predator and prey // Biometrics.* – 1970. – Vol. 26, No. 3. – P. 387–392.

EVOLUTIONARY STABLE CHARACTERISTICS OF SEA OF AZOV WITH VARIATIONS OF DON RIVER RUNOFF

Vitaly Il'ichev, Institute of Arid Zones of SSC RAS, Rostov-on-Don, Doctor of Science, chief research scientist (vitaly369@yandex.ru).

Liudmila Dashkevich, Institute of Arid Zones of SSC RAS, Rostov-on-Don, Cand.Sc., research scientist (ldashkev@ssc-ras.ru).

Valerii Kulygin, Institute of Arid Zones of SSC RAS, Rostov-on-Don, Cand.Sc., research scientist (kulygin@ssc-ras.ru).

Abstract: An ecological evolutionary simulation for the system “biogenic elements – algae” is introduced. It is found that in the asymptotic mode the relation of organic forms of nitrogen and phosphorus in the ecosystem varies slightly, despite the strong deformation of the chemical composition of the runoff of the Don river. We perform a series of “paradoxical” model experiments to uncover the reason of this phenomenon. We also determine the evolutionary stable values of the temperature, which is favorable for the growth of main algae groups. It is shown that for the thermophilic algae such a temperature is unique, while for cold-loving algae two favorable values of the temperature are possible.

Keywords: model, adaptation mechanisms, evolutionary-stable parameters

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии М.В. Губко

*Поступила в редакцию 22.01.2015.
Опубликована 31.05.2015.*

УДК 519.833.2

ББК 22.18

АСИММЕТРИЯ В КООПЕРАТИВНОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ БИОРЕСУРСАМИ¹

Мазалов В. В.², Реттиева А. Н.³

(ФГБУН Институт прикладных математических исследований
Карельского научного центра РАН, Петрозаводск)

В работе представлены результаты исследования теоретико-игровых задач управления биоресурсами, учитывающих асимметрию участников процесса эксплуатации. Рассмотрены следующие варианты несимметричности игроков: использование различных коэффициентов дисконтирования и различные (случайные) горизонты планирования. Целью работы является определение кооперативного выигрыша и его распределение между участниками в несимметричных случаях. Для построения кооперативных выигрышей и стратегий игроков предложено использование арбитражной схемы Нэша. Показано, что применение арбитражного решения для определения кооперативного поведения не только выгодно обоим игрокам, но и благотворно влияет на экологическую обстановку.

Ключевые слова: задача управления биоресурсами, асимметричные игроки, арбитражное решение Нэша.

Введение

Статья посвящена исследованию рационального поведения в динамической задаче управления биоресурсами с двумя участ-

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант №13-01-00033_a.

² Владимир Викторович Мазалов, доктор физико-математических наук, профессор (vmazalov@krc.karelia.ru).

³ Анна Николаевна Реттиева, кандидат физико-математических наук, доцент (annaret@krc.karelia.ru).

никами. Главной целью рационального природопользования является поддержание стабильного развития популяции. Поэтому изучение разницы между кооперативным и эгоистическим (индивидуальным) поведением в задачах оптимального управления биоресурсами является важной задачей (см., например, [7, 9]).

Известно, что при кооперации устанавливается более щадящий режим эксплуатации. Для поддержания кооперативного поведения участников используется принцип динамической устойчивости [2, 6, 17]. А для стабильности соглашения и невыгодности его нарушения необходимо выполнение условия «защиты от иррационального поведения» [1, 23]. Идея этого подхода также состоит в сравнении выигрышей игроков при некооперативном поведении и при разрушении кооперативного соглашения с последующим эгоистическим поведением.

Удобной для исследования процессов эксплуатации ресурсов в дискретном времени является модель «рыбных войн» [8]. Предполагается степенная функция развития популяции и логарифмические функции «мгновенных» выигрышей игроков. Тогда общий выигрыш участника определяется как конечная или бесконечная сумма дисконтированных «мгновенных» выигрышей. В такой модели равновесные по Нэшу и кооперативные стратегии определяются в аналитическом виде. Исследованию кооперативного поведения и динамической устойчивости кооперативных решений в модели «рыбных войн» посвящено множество работ [4, 5, 11, 15, 19]. Еще одним преимуществом данной модели является то, что динамически устойчивые решения и условия, стимулирующие кооперативное поведение, также строятся в аналитическом виде.

Исследование кооперативного и некооперативного поведения в задачах управления биоресурсами со случайным горизонтом планирования является важной теоретической и практической задачей. В работах [20] и [10] построены кооперативные стратегии и динамически устойчивые решения в случае, когда горизонт планирования является случайной величиной с заданным распределением.

Традиционно при исследовании кооперативного поведения в задачах природопользования предполагается использование игроками одинаковых коэффициентов дисконтирования. Если же они различаются (в этом случае игроки являются несимметричными), то нет возможности определить выигрыши игроков при кооперативном поведении стандартными способами. Проблема построения кооперативного поведения в данном случае мало изучена, несмотря на то, что асимметрия распространена в реальных экологических задачах. Например, страны, заключающие кооперативное соглашение, могут иметь различный уровень инфляции, экологические условия и т.д. В работах [13] и [22] было показано, что конфликты при эксплуатации ресурсов могут возникать из-за разницы в уровнях дисконтирования (предпочтениях во времени). Поэтому важной задачей в исследовании кооперативного поведения в задачах управления биоресурсами является поиск оптимального компромисса в случае, когда цели игроков различаются (различные коэффициенты дисконтирования и затраты на вылов).

В работе [4] было предложено построение кооперативного выигрыша как взвешенной суммы индивидуальных выигрышей (в непрерывном случае см. [18]). Данный подход вызывает критику, так как игрок с большим коэффициентом дисконтирования покидает процесс эксплуатации достаточно быстро, но должен получить свою долю от общего выигрыша коалиции. Авторы показали, что при определении весовых коэффициентов с помощью арбитражного решения Нэша вся выгода от кооперативного соглашения достается первому участнику. Заметим, что это ущемляет интересы второго игрока, что не должно быть при подписании кооперативного соглашения. Другой подход был предложен в [21], где решение определяется с помощью арбитражной схемы.

Арбитражная схема Нэша была применена в [3] для определения общего коэффициента дисконтирования, после чего задача сводится к определению динамически устойчивого распределения общего кооперативного выигрыша. В [14] кооперативные стратегии получены из максимизации взвешенной суммы инди-

видуальных выигрышей, и замечено, что данное решение должно удовлетворять решению задачи максимизации произведения Нэша. Получен хорошо известный результат, что при применении побочных платежей кооперативный выигрыш делится поровну.

В данной работе для построения и стимулирования кооперативного поведения предложено использование арбитражной схемы Нэша. Таким образом, при использовании предложенного подхода нет необходимости в суммировании выигрышей несимметричных игроков. Арбитражная схема дает абсолютно другое решение (см. классический пример в [16]). При построении кооперативного поведения с помощью максимизации взвешенной суммы выигрышей игроков существуют области параметров задачи, при которых кооперативные выигрыши игроков меньше, чем некооперативные [4]. Это невозможно в представленной схеме: при кооперативном поведении, определенном с помощью арбитражного решения, выигрыши игроков больше или равны (при некоторых параметрах) выигрышам в равновесии по Нэшу (в разделе 5 представлены результаты моделирования, показывающие этот факт).

Еще одной важной прикладной задачей является определение кооперативных выигрышей в случае различных горизонтов планирования. Когда время участия одного из игроков меньше, чем у другого, то игрок включается в процесс эксплуатации (в данном случае – вылов) на фиксированное время и готов вступить в кооперацию зная, что это более прибыльно для него. Но так как у игрока меньший, чем у партнера, горизонт планирования, то он должен получить выгоду от кооперации больше, чем игрок, который продолжает процесс эксплуатации ресурса дальше.

Модель со случайными временами участия в процессе эксплуатации является наиболее приближенной к реальности, так как внешние случайные процессы могут вызвать расторжение кооперативного договора и участники не могут знать этого заранее. Например, рыболовецкие артели могут обанкротиться, флот может быть поврежден и т.д. В случае участников-стран может

разразиться кризис, резко измениться уровень инфляции, международные или внутреннее экономические и политические ситуации могут измениться и т.д. Все эти процессы могут разрушить кооперативное соглашение, и определение кооперативного поведения участников процесса природопользования в данном случае не было исследовано ранее.

В работе исследуется дискретная теоретико-игровая задача управления биоресурсами. Игроки (страны или рыболовецкие артели) эксплуатируют ресурс, развитие которого описывается степенной функцией. «Мгновенные» выигрыши игроков имеют логарифмический вид.

Игроки используют различные коэффициенты дисконтирования, что можно интерпретировать как их различные предпочтения во времени. Развитием этой модели является ситуация, когда горизонты планирования игроков различаются как следствие расторжения кооперативного договора или по другим причинам. Хотя при заключении контрактов предполагается фиксированное время участия, внешние процессы могут заставить участника выйти из игры, поэтому естественно рассматривать его горизонт планирования как случайную величину.

Из всего выше сказанного следует, что для определения кооперативного поведения в моделях с различными коэффициентами дисконтирования и временами участия в процессе эксплуатации необходима разработка новых методов. Поэтому в данной работе для построения кооперативных стратегий и выигрышей игроков в этих случаях предлагается использовать арбитражную схему Нэша.

Результаты получены в аналитическом виде, что позволит использовать их для конкретных рыбных популяций с соответствующими параметрами.

Статья организована следующим образом. В разделе 1 представлена модель и определено равновесное по Нэшу решение. Модель с различными коэффициентами дисконтирования рассмотрена в разделе 2, где кооперативное поведение строится с использованием арбитражной схемы Нэша. В разделе 3 иссле-

дована модель, в которой игроки различаются не только коэффициентами дисконтирования, но и горизонтами планирования. Результаты численного моделирования представлены в разделе 4. А в разделе 5 приведены основные результаты и их обсуждение.

1. Модель и равновесие по Нэшу

Рассматривается дискретная теоретико-игровая модель управления биоресурсами с одинаковым горизонтом планирования у обоих игроков, но с различными коэффициентами дисконтирования.

Пусть два игрока (страны или рыболовецкие артели) эксплуатируют ресурс на протяжении конечного горизонта планирования $[0, n]$. Динамика развития популяции имеет вид

$$(1) \quad x_{t+1} = (\varepsilon x_t - u_{1t} - u_{2t})^\alpha, \quad x_0 = x,$$

где $x_t \geq 0$ – размер популяции в момент времени t ; $\varepsilon \in (0, 1)$ – коэффициент естественной выживаемости; $\alpha \in (0, 1)$ – коэффициент естественного роста; $u_{it} \geq 0$ – вылов игрока i , $i = 1, 2$.

Предполагается логарифмический вид функции выигрышей игроков и наличие различных коэффициентов дисконтирования. Тогда выигрыши игроков имеют следующий вид:

$$(2) \quad J_i = \sum_{t=0}^n \delta_i^t \ln(u_{it}),$$

где $\delta_i \in (0, 1)$ – коэффициент дисконтирования игрока i , $i = 1, 2$.

Теорема 1. *Равновесные по Нэшу стратегии в задаче (1), (2) имеют вид*

$$u_{1t}^N = \frac{\varepsilon a_2 \sum_{j=0}^{t-1} a_1^j}{\sum_{j=0}^t a_1^j \sum_{j=0}^t a_2^j - 1} x, \quad u_{2t}^N = \frac{\varepsilon a_1 \sum_{j=0}^{t-1} a_2^j}{\sum_{j=0}^t a_1^j \sum_{j=0}^t a_2^j - 1} x,$$

где $a_i = \alpha \delta_i$, $i = 1, 2$, $t = 1, \dots, n$.

Индивидуальные выигрыши игроков –

$$(3) \quad V_i^N(x, \delta_i) = \sum_{j=0}^n (a_i)^j \ln x + \sum_{j=1}^n (\delta_i)^{n-j} A_{ij} - (\delta_i)^n \ln k,$$

$$(4) \quad A_{lj} = \ln \left[\left(\frac{\varepsilon \sum_{k=1}^j a_p^k}{\sum_{k=0}^j a_1^k \sum_{k=0}^j a_2^k - 1} \right)^{\sum_{k=0}^j a_l^k} \left(\sum_{k=1}^j a_l^k \right)^{\sum_{k=1}^j a_l^k} \right], \quad l, p=1, 2, l \neq p.$$

Основной проблемой в данной ситуации является то, что нет возможности определить выигрыши игроков при кооперативном поведении стандартными способами. В работе [4] было предложено построение кооперативного выигрыша как взвешенной суммы индивидуальных, но данный подход не является традиционным для кооперативной теории игр. Поэтому для построения и стимулирования кооперативного поведения в работе предложено использование арбитражной схемы Нэша.

2. Многошаговая игра и рекурсивная арбитражная схема Нэша

Определим кооперативное поведение в данной модели с помощью рекурсивной арбитражной процедуры. В каждый момент времени кооперативные стратегии находятся из арбитражного решения, где в качестве точки статус-кво выступают некооперативные выигрыши.

Начинаем рассмотрение с одношаговой игры и предполагаем, что в конце игры игроки делят оставшийся ресурс в пропорции $k : (1 - k)$. Этот подход отличается от традиционно используемого в исследовании моделей «рыбных войн» равного деления. Параметр k предполагается здесь заранее заданным, а в дальнейших исследованиях может быть использован для регулирования кооперативного поведения. Заметим, что деление оставшегося ресурса не означает, что ресурс весь исчерпывается. В данном предположении игроки получают компенсацию (выраженную в денежных единицах, если домножить на некоторую константу) за неиспользованный ими ресурс.

Пусть начальный размер популяции равен x . Предположим, что игроки играют индивидуально, тогда выигрыш первого игро-

ка имеет вид

$$\begin{aligned} H_{11}^N &= \ln(u_{11}) + \delta_1 \ln(k(\varepsilon x - u_{11} - u_{21})^\alpha) = \\ &= \ln(u_{11}) + a_1 \ln(\varepsilon x - u_{11} - u_{21}) - \delta_1 \ln(k) \end{aligned}$$

и, аналогично, выигрыш второго –

$$H_{21}^N = \ln(u_{21}) + a_2 \ln(\varepsilon x - u_{11} - u_{21}) - \delta_2 \ln(1 - k).$$

Максимизируя вогнутые функции выигрышей, получим некооперативные стратегии обоих игроков:

$$u_{11}^N = \frac{\varepsilon a_2}{(1 + a_1)(1 + a_2) - 1} x, \quad u_{21}^N = \frac{\varepsilon a_1}{(1 + a_1)(1 + a_2) - 1} x,$$

и выигрыши в равновесии по Нэшу:

$$(5) \quad H_{11}^N = (1 + a_1) \ln(x) + A_{11} - \delta_1 \ln(k),$$

$$(6) \quad H_{21}^N = (1 + a_2) \ln(x) + A_{21} - \delta_2 \ln(1 - k),$$

где A_{11} и A_{21} не зависят от x и имеют вид

$$A_{i1} = \ln \left[\frac{(\varepsilon a_j)^{1+a_i} a_i^{a_i}}{((1 + a_1)(1 + a_2) - 1)^{1+a_i}} \right], \quad i, j = 1, 2, \quad i \neq j.$$

Для определения кооперативных стратегий решается задача максимизации произведения Нэша

$$\begin{aligned} (7) \quad H_1^c &= (\ln(u_1) + a_1 \ln(\varepsilon x - u_1 - u_2) - \delta_1 \ln(k) - H_{11}^N) \cdot \\ &\cdot (\ln(u_2) + a_2 \ln(\varepsilon x - u_1 - u_2) - \delta_2 \ln(1 - k) - H_{21}^N) = \\ &= (H_{11}^c - H_{11}^N)(H_{21}^c - H_{21}^N) \rightarrow \max, \end{aligned}$$

где H_{i1}^N заданы в (5)–(6).

В Приложении 1 приведено доказательство того, что решение задачи (7) достигается во внутренней точке допустимого множества и единственно. Этот результат верен и для всех задач максимизации, решаемых далее.

Из условий первого порядка получим следующую связь кооперативных стратегий игроков в одношаговой игре:

$$(8) \quad u_2 = \frac{\varepsilon x - u_1(1 + a_1)}{1 + a_2}.$$

Как обычно, в моделях «рыбных войн», ищем кооперативные стратегии игроков в линейном виде $u_1 = \gamma_{11}^c x$, $u_2 = \gamma_{21}^c x$, и из условий первого порядка они могут быть найдены из решения следующего уравнения:

$$\begin{aligned} \gamma_{21}^c \left(\ln(\gamma_{21}^c) + a_2 \ln(\varepsilon - \gamma_{11}^c - \gamma_{21}^c) - A_{21} \right) = \\ = \gamma_{11}^c \left(\ln(\gamma_{11}^c) + a_1 \ln(\varepsilon - \gamma_{11}^c - \gamma_{21}^c) - A_{11} \right) \end{aligned}$$

со связью

$$\gamma_{21}^c = \frac{\varepsilon - \gamma_{11}^c(1 + a_1)}{1 + a_2}.$$

К сожалению, аналитическое решение не может быть найдено. Ниже будут представлены результаты численного моделирования.

Тогда кооперативные выигрыши в одношаговой игре имеют вид

$$(9) \quad \begin{aligned} H_{11}^c(\gamma_{11}^c, \gamma_{21}^c; x) &= (1 + a_1) \ln(x) + \\ &+ \ln(\gamma_{11}^c) + a_1 \ln(\varepsilon - \gamma_{11}^c - \gamma_{21}^c) - \delta_1 \ln(k), \end{aligned}$$

$$(10) \quad \begin{aligned} H_{21}^c(\gamma_{11}^c, \gamma_{21}^c; x) &= (1 + a_2) \ln(x) + \\ &+ \ln(\gamma_{21}^c) + a_2 \ln(\varepsilon - \gamma_{11}^c - \gamma_{21}^c) - \delta_2 \ln(1 - k). \end{aligned}$$

Теперь перейдем к двухшаговой игре. Сначала предположим, что участники играют индивидуально до конца игры, тогда игроки максимизируют свои выигрыши вида

$$\begin{aligned} H_{12}^N &= \ln(u_{12}) + \delta_1 H_{11}^N = \\ &= \ln(u_{12}) + a_1(1 + a_1) \ln(\varepsilon x - u_{12} - u_{22}) + \delta_1 A_{11} - (\delta_1)^2 \ln(k), \\ H_{22}^N &= \ln(u_{22}) + a_2(1 + a_2) \ln(\varepsilon x - u_{12} - u_{22}) + \delta_2 A_{21} - (\delta_2)^2 \ln(1 - k). \end{aligned}$$

Максимизируя, получим некооперативные стратегии:

$$u_{12}^N = \frac{\varepsilon(a_2 + a_2^2)}{\sum_{j=0}^2 a_1^j \sum_{j=0}^2 a_2^j - 1} x, \quad u_{22}^N = \frac{\varepsilon(a_1 + a_1^2)}{\sum_{j=0}^2 a_1^j \sum_{j=0}^2 a_2^j - 1} x,$$

и выигрыши в равновесии по Нэшу:

$$(11) H_{12}^N = (1 + a_1 + a_1^2) \ln(x) + A_{12} + \delta_1 A_{11} - \delta_1^2 \ln(k),$$

$$(12) H_{22}^N = (1 + a_2 + a_2^2) \ln(x) + A_{22} + \delta_2 A_{21} - \delta_2^2 \ln(1 - k),$$

где A_{12} и A_{22} не зависят от x .

Кооперативные стратегии определяются из решения задачи максимизации произведения Нэша в двухшаговой игре:

$$\begin{aligned} H_2^c &= (\ln(u_1) + \delta_1 H_{11}^c(\gamma_{11}^c, \gamma_{21}^c; x) - H_{12}^N) \cdot \\ &\quad \cdot (\ln(u_2) + \delta_2 H_{21}^c(\gamma_{11}^c, \gamma_{21}^c; x) - H_{22}^N) = \\ &= \left(\ln(u_1) + (a_1 + a_1^2) \ln(\varepsilon x - u_1 - u_2) + \right. \\ &\quad \left. + \delta_1 (\ln(\gamma_{11}^c) + a_1 \ln(\varepsilon - \gamma_{11}^c - \gamma_{21}^c)) - \delta_1^2 \ln(k) - H_{12}^N \right) \cdot \\ &\quad \cdot \left(\ln(u_2) + (a_2 + a_2^2) \ln(\varepsilon x - u_1 - u_2) + \right. \\ &\quad \left. + \delta_2 (\ln(\gamma_{21}^c) + a_2 \ln(\varepsilon - \gamma_{11}^c - \gamma_{21}^c)) - \delta_2^2 \ln(k) - H_{22}^N \right) = \\ &= (H_{12}^c - H_{12}^N)(H_{22}^c - H_{22}^N) \rightarrow \max, \end{aligned}$$

где $H_{i1}^c(\gamma_{11}^c, \gamma_{21}^c; x)$ заданы в (9)–(10) и H_{i2}^N определены в (11)–(12).

Аналогично, из уравнений первого порядка получим уравнение для нахождения γ_{12}^c и γ_{22}^c со связью

$$\gamma_{22}^c = \frac{\varepsilon - \gamma_{12}^c(1 + a_1 + a_1^2)}{1 + a_2 + a_2^2}.$$

Тогда, кооперативные выигрыши в двухшаговой игре имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} &H_1^{2c}(\gamma_{11}^c, \gamma_{12}^c, \gamma_{21}^c, \gamma_{22}^c; x) = \\ &= (1 + a_1 + a_1^2) \ln(x) + \ln(\gamma_{12}^c) + (a_1 + a_1^2) \ln(\varepsilon - \gamma_{12}^c - \gamma_{22}^c) + \\ &\quad + \delta_1 (\ln(\gamma_{11}^c) + a_1 \ln(\varepsilon - \gamma_{11}^c - \gamma_{21}^c)) - \delta_1 \ln(k), \\ &H_2^{2c}(\gamma_{11}^c, \gamma_{12}^c, \gamma_{21}^c, \gamma_{22}^c; x) = \\ &= (1 + a_2 + a_2^2) \ln(x) + \ln(\gamma_{22}^c) + (a_2 + a_2^2) \ln(\varepsilon - \gamma_{12}^c - \gamma_{22}^c) + \\ &\quad + \delta_2 (\ln(\gamma_{21}^c) + a_2 \ln(\varepsilon - \gamma_{11}^c - \gamma_{21}^c)) - \delta_2 \ln(1 - k). \end{aligned}$$

Повторяя процесс для n -шаговой игры, получим следующий результат.

Теорема 2. Кооперативные выигрыши в задаче (1), (2) имеют вид

$$\begin{aligned}
 H_{1n}^c(\gamma_{11}^c, \dots, \gamma_{1n}^c, \gamma_{21}^c, \dots, \gamma_{2n}^c; x) &= \sum_{j=0}^n a_1^j \ln(x) - \delta_1^n \ln(k) + \\
 (13) \quad &+ \sum_{j=0}^{n-1} \delta_1^{n-j} \left[\ln(\gamma_{1n-j}^c) + \sum_{i=1}^{n-j} a_1^i \ln(\varepsilon - \gamma_{1n-j}^c - \gamma_{2n-j}^c) \right],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H_{2n}^c(\gamma_{11}^c, \dots, \gamma_{1n}^c, \gamma_{21}^c, \dots, \gamma_{2n}^c; x) &= \sum_{j=0}^n a_2^j \ln(x) - \delta_2^n \ln(1 - k) + \\
 (14) \quad &+ \sum_{j=0}^{n-1} \delta_2^{n-j} \left[\ln(\gamma_{2n-j}^c) + \sum_{i=1}^{n-j} a_2^i \ln(\varepsilon - \gamma_{1n-j}^c - \gamma_{2n-j}^c) \right].
 \end{aligned}$$

Кооперативные стратегии могут быть найдено рекурсивно из уравнений

$$\begin{aligned}
 &\gamma_{2n}^c \sum_{j=0}^{n-1} \left(\delta_2^{n-j} \left[\ln(\gamma_{2n-j}^c) + \sum_{i=1}^{n-j} a_2^i \ln(\varepsilon - \gamma_{1n-j}^c - \gamma_{2n-j}^c) \right] - \delta_2^j A_{2n-j} \right) = \\
 &= \gamma_{1n}^c \sum_{j=0}^{n-1} \left(\delta_1^{n-j} \left[\ln(\gamma_{1n-j}^c) + \sum_{i=1}^{n-j} a_1^i \ln(\varepsilon - \gamma_{1n-j}^c - \gamma_{2n-j}^c) \right] - \delta_1^j A_{1n-j} \right)
 \end{aligned}$$

со связью

$$\gamma_{2n}^c = \frac{\varepsilon - \gamma_{1n}^c \sum_{i=0}^n a_1^i}{\sum_{i=0}^n a_2^i},$$

где A_{ij} имеют вид (4).

3. Случайные времена участия в процессе эксплуатации

Теперь исследуем модель, в которой игроки различаются не только коэффициентами дисконтирования, но и горизонтами планирования. Причем предполагается случайная природа моментов выхода игроков из кооперации, что обусловлено тем, что внешние стохастические процессы могут вызвать расторжение кооперативного договора.

Пусть первый игрок эксплуатирует ресурс на протяжении n_1 моментов времени, а второй – на протяжении n_2 моментов времени. При этом n_1 является дискретной случайной величиной с диапазоном значений $\{1, \dots, n\}$ и соответствующими вероятностями $\{\theta_1, \dots, \theta_n\}$; n_2 – дискретная случайная величина с тем же диапазоном и вероятностями $\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$. Предполагается, что горизонты планирования независимы. Таким образом, на промежутке времени $[0, n_1]$ или $[0, n_2]$ игроки вступают в кооперацию, и необходимо определить их стратегии.

Выигрыши игроков определяются как математические ожидания:

$$\begin{aligned}
 H_1 &= E \left\{ \sum_{t=1}^{n_1} \delta_1^t \ln(u_{1t}) I_{\{n_1 \leq n_2\}} + \right. \\
 &+ \left. \left(\sum_{t=1}^{n_2} \delta_1^t \ln(u_{1t}) + \sum_{t=n_2+1}^{n_1} \delta_1^t \ln(u_{1t}^a) \right) I_{\{n_1 > n_2\}} \right\} = \\
 &= \sum_{n_1=1}^n \theta_{n_1} \left[\sum_{n_2=n_1}^n \omega_{n_2} \sum_{t=1}^{n_1} \delta_1^t \ln(u_{1t}) + \right. \\
 (15) \quad &+ \left. \sum_{n_2=1}^{n_1-1} \omega_{n_2} \left(\sum_{t=1}^{n_2} \delta_1^t \ln(u_{1t}) + \sum_{t=n_2+1}^{n_1} \delta_1^t \ln(u_{1t}^a) \right) \right],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H_2 &= E \left\{ \sum_{t=1}^{n_2} \delta_2^t \ln(u_{2t}) I_{\{n_2 \leq n_1\}} + \right. \\
 &+ \left. \left(\sum_{t=1}^{n_1} \delta_2^t \ln(u_{2t}) + \sum_{t=n_1+1}^{n_2} \delta_2^t \ln(u_{2t}^a) \right) I_{\{n_2 > n_1\}} \right\} = \\
 &= \sum_{n_2=1}^n \omega_{n_2} \left[\sum_{n_1=n_2}^n \theta_{n_1} \sum_{t=1}^{n_2} \delta_2^t \ln(u_{2t}) + \right. \\
 (16) \quad &+ \left. \sum_{n_1=1}^{n_2-1} \theta_{n_1} \left(\sum_{t=1}^{n_1} \delta_2^t \ln(u_{2t}) + \sum_{t=n_1+1}^{n_2} \delta_2^t \ln(u_{2t}^a) \right) \right],
 \end{aligned}$$

где u_{it}^a – стратегия игрока i , когда его партнер покидает игру, $i = 1, 2$.

3.1. РАВНОВЕСИЕ ПО НЭШУ

Для определения кооперативного поведения используется арбитражная схема Нэша, где в качестве точки статус-кво выступают выигрыши при некооперативном поведении. Поэтому начнем с определения равновесных по Нэшу стратегий. Выигрыши игроков (функции Беллмана) за весь период продолжения игры имеют вид

$$\begin{aligned}
 V_1^N(1, x) &= \max_{u_{11}^N, \dots, u_{1n}^N} \left\{ \sum_{n_1=1}^n \theta_{n_1} \left[\sum_{n_2=n_1}^n \omega_{n_2} \sum_{t=1}^{n_1} \delta_1^t \ln(u_{1t}^N) + \right. \right. \\
 &+ \left. \left. \sum_{n_2=1}^{n_1-1} \omega_{n_2} \left(\sum_{t=1}^{n_2} \delta_1^t \ln(u_{1t}^N) + \sum_{t=n_2+1}^{n_1} \delta_1^t \ln(u_{1t}^a) \right) \right] \right\}, \\
 V_2^N(1, x) &= \max_{u_{21}^N, \dots, u_{2n}^N} \left\{ \sum_{n_2=1}^n \omega_{n_2} \left[\sum_{n_1=n_2}^n \theta_{n_1} \sum_{t=1}^{n_2} \delta_2^t \ln(u_{2t}^N) + \right. \right. \\
 &+ \left. \left. \sum_{n_1=1}^{n_2-1} \theta_{n_1} \left(\sum_{t=1}^{n_1} \delta_2^t \ln(u_{2t}^N) + \sum_{t=n_1+1}^{n_2} \delta_2^t \ln(u_{2t}^a) \right) \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

В дальнейшем исследовании необходимы выигрыши игроков при наступлении момента времени τ , $\tau = 1, 2, \dots$. Заметим, что 292

вероятности того, что первый игрок, например, продолжит участвовать в процессе эксплуатации $\tau, \tau + 1, \dots, n$ моментов времени имеют вид

$$\frac{\theta_\tau}{\sum_{l=\tau}^n \theta_l}, \frac{\theta_{\tau+1}}{\sum_{l=\tau}^n \theta_l}, \dots, \frac{\theta_n}{\sum_{l=\tau}^n \theta_l}.$$

Следовательно, при наступлении момента времени τ функции Беллмана игроков $V_i^N(\tau, x)$, $i = 1, 2$, примут вид

$$(17) \quad V_1^N(\tau, x) = \max_{u_{1\tau}^N, \dots, u_{1n}^N} \left\{ \sum_{n_1=\tau}^n \frac{\theta_{n_1}}{\sum_{l=\tau}^n \theta_l} \left[\sum_{n_2=n_1}^n \frac{\omega_{n_2}}{n} \sum_{l=\tau}^{n_1} \delta_1^t \ln(u_{1t}^N) + \sum_{n_2=\tau}^{n_1-1} \frac{\omega_{n_2}}{\sum_{l=\tau}^{n_1} \omega_l} \sum_{t=\tau}^{n_2} \delta_1^t \ln(u_{1t}^N) + V_1^a(\tau, n_1) \right] \right\},$$

$$(18) \quad V_2^N(\tau, x) = \max_{u_{2\tau}^N, \dots, u_{2n}^N} \left\{ \sum_{n_2=\tau}^n \frac{\omega_{n_2}}{\sum_{l=\tau}^n \omega_l} \left[\sum_{n_1=n_2}^n \frac{\theta_{n_1}}{n} \sum_{l=\tau}^{n_2} \delta_2^t \ln(u_{2t}^N) + \sum_{n_1=\tau}^{n_2-1} \frac{\theta_{n_1}}{\sum_{l=\tau}^{n_2} \omega_l} \sum_{t=\tau}^{n_1} \delta_2^t \ln(u_{2t}^N) + V_2^a(\tau, n_2) \right] \right\},$$

где

$$V_1^a(\tau, n_1) = \sum_{n_2=\tau}^{n_1-1} \frac{\omega_{n_2}}{n} \sum_{l=\tau}^{n_1} \delta_1^t \ln(u_{1t}^a),$$

$$V_2^a(\tau, n_2) = \sum_{n_1=\tau}^{n_2-1} \frac{\theta_{n_1}}{\sum_{l=\tau}^{n_2} \omega_l} \sum_{t=n_1+1}^{n_2} \delta_2^t \ln(u_{2t}^a)$$

– выигрыши игроков, когда игрок i , $i = 1, 2$, эксплуатирует ресурс индивидуально, и они будут определены позже.

В приложении 2 показано, как получить связь между $V_i^N(\tau, x)$ и $V_i^N(\tau + 1, x)$ вида

$$(19) \quad \begin{aligned} V_1^N(\tau, x) = & \delta_1^\tau \ln(u_{1\tau}^N) + P_\tau^{\tau+1} V_1^N(\tau + 1, x) + \\ & + C_{1\tau} \sum_{n_1=\tau+1}^n \theta_{n_1} \sum_{t=\tau}^{n_1} \delta_1^t \ln(u_{1t}^a), \end{aligned}$$

$$(20) \quad \begin{aligned} V_2^N(\tau, x) = & \delta_2^\tau \ln(u_{2\tau}^N) + P_\tau^{\tau+1} V_2^N(\tau + 1, x) + \\ & + C_{2\tau} \sum_{n_2=\tau+1}^n \omega_{n_2} \sum_{t=\tau}^{n_2} \delta_2^t \ln(u_{2t}^a), \end{aligned}$$

где

$$P_\tau^{\tau+1} = \frac{\sum_{l=\tau+1}^n \omega_l \sum_{l=\tau+1}^n \theta_l}{\sum_{l=\tau}^n \omega_l \sum_{l=\tau}^n \theta_l}, C_{1\tau} = \frac{\omega_\tau}{\sum_{l=\tau}^n \omega_l} \frac{1}{\sum_{l=\tau}^n \theta_l}, C_{2\tau} = \frac{\theta_\tau}{\sum_{l=\tau}^n \theta_l} \frac{1}{\sum_{l=\tau}^n \omega_l}.$$

Теперь необходимо определить стратегию игрока, когда его оппонент покидает игру. Предположим, что горизонт планирования первого игрока меньше, чем второго, и рассмотрим временной промежуток $[n_1, n_2]$, где второй игрок эксплуатирует ресурс индивидуально. Начнем с одношаговой игры и предположим, что в конечный момент игрок получает весь оставшийся ресурс. Аналогично, заметим, что это означает получение некоторой компенсации за неиспользованный им ресурс, а не полное исчерпывание ресурса.

Пусть начальный размер популяции x . Как и ранее, ищем стратегию второго игрока в линейном виде: $u_{21}^g = \gamma_{21}x$. Тогда выигрыш второго игрока в одношаговой игре имеет вид

$$\begin{aligned} H_{21}(\gamma_{21}) &= \ln(\gamma_{21}x) + \delta_2 \ln(\varepsilon x - \gamma_{21}x)^\alpha = \\ &= (1 + a_2) \ln(x) + \ln(\gamma_{21}) + a_2 \ln(\varepsilon - \gamma_{21}). \end{aligned}$$

Так как данная функция является вогнутой, то для нахождения максимума используем условия первого порядка и получим

стратегию $\gamma_{21} = \frac{\varepsilon}{1+a_2}$ и выигрыш в виде

$$H_{21}(\gamma_{21}) = (1+a_2) \ln x + (1+a_2) \ln\left(\frac{\varepsilon}{1+a_2}\right) + a_2 \ln a_2.$$

Следовательно, выигрыш второго игрока в двухшаговой игре примет вид

$$\begin{aligned} H_{22}(\gamma_{21}, \gamma_{22}) &= \ln(\gamma_{22}x) + \delta_2 H_{21}(\gamma_{21}) = \\ &= (1+a_2+a_2^2) \ln(x) + \ln(\gamma_{22}) + \\ &+ a_2(1+a_2) \ln(\varepsilon - \gamma_{22}) + \delta_2 \left((1+a_2) \ln\left(\frac{\varepsilon}{1+a_2}\right) + a_2 \ln a_2 \right). \end{aligned}$$

Аналогично, из условий первого порядка получим $\gamma_{22} = \frac{\varepsilon}{1+a_2+a_2^2}$ и выигрыш второго игрока в виде

$$\begin{aligned} H_{22}(\gamma_{21}, \gamma_{22}) &= (1+a_2+a_2^2) \ln x + (1+a_2+a_2^2) \ln\left(\frac{\varepsilon}{1+a_2+a_2^2}\right) + \\ &+ (a_2+a_2^2) \ln(a_2+a_2^2) + \delta_2 \left((1+a_2) \ln\left(\frac{\varepsilon}{1+a_2}\right) + a_2 \ln a_2 \right). \end{aligned}$$

Продолжая процесс $n_2 - \tau$ шагов, получим, что стратегия второго игрока, оставшегося в процессе эксплуатации, имеет вид

$$\gamma_{2n_2-\tau} = \frac{\varepsilon}{\sum_{j=0}^{n_2-\tau} a_2^j}, \text{ а выигрыш -}$$

$$\begin{aligned} V_2^a(\tau, n_2) &= H_{2n_2-\tau}(\gamma_{21}, \dots, \gamma_{2n_2-\tau}) = \\ &= \sum_{j=0}^{n_2-\tau} a_2^j \ln x + \sum_{j=1}^{n_2-\tau} \delta_2^{n_2-\tau-j} D_1^j, \end{aligned}$$

где

$$D_1^j = \sum_{l=0}^j a_2^l \ln\left(\frac{\varepsilon}{\sum_{p=0}^j a_2^p}\right) + \sum_{l=1}^j a_2^l \ln\left(\sum_{p=1}^j a_2^p\right).$$

Аналогично действуя для первого игрока, получим оптимальные стратегии игроков, индивидуально эксплуатирующих ресурс, в виде

$$u_{it}^a = \frac{\varepsilon(1-a_i)}{1-a_i^t} x,$$

а индивидуальные выигрыши –

$$(21) \quad V_i^a(\tau, n_i) = \sum_{t=\tau}^{n_i} \delta_i^t \ln(u_{it}^a) = \sum_{j=0}^{n_i-\tau} a_i^j \ln x + \sum_{j=1}^{n_i-\tau} \delta_i^{n_i-\tau-j} D_i^j, \quad i=1, 2,$$

где

$$D_i^j = \sum_{l=0}^j a_i^l \ln\left(\frac{\varepsilon}{\sum_{p=0}^j a_i^p}\right) + \sum_{l=1}^j a_i^l \ln\left(\sum_{p=1}^j a_i^p\right), \quad i = 1, 2.$$

Вернемся к построению равновесия по Нэшу. Как обычно, в моделях «рыбных войн» функции выигрыша ищем в виде $V_i^N(\tau, x) = A_i^\tau \ln x + B_i^\tau$ и предполагаем линейный вид стратегий игроков $u_{i\tau}^N = \gamma_{i\tau}^N x$, $i = 1, 2$.

Тогда, используя связи между функциями выигрыша (19) и (20), запишем уравнения Беллмана в виде

$$(22) \quad \begin{aligned} & A_1^\tau \ln x + B_1^\tau = \\ & = \delta_1^\tau \ln(\gamma_{1\tau}^N x) + P_\tau^{\tau+1} (\alpha A_1^\tau \ln(\varepsilon x - \gamma_{1\tau}^N x - \gamma_{2\tau}^N x) + B_1^\tau) + \\ & + C_{1\tau} \sum_{n_1=\tau+1}^n \theta_{n_1} \left(\sum_{j=0}^{n_1-\tau} a_1^j \ln x + \sum_{j=1}^{n_1-\tau} \delta_1^{n_1-\tau-j} D_1^j \right), \end{aligned}$$

$$(23) \quad \begin{aligned} & A_2^\tau \ln x + B_2^\tau = \\ & = \delta_2^\tau \ln(\gamma_{2\tau}^N x) + P_\tau^{\tau+1} (\alpha A_2^\tau \ln(\varepsilon x - \gamma_{1\tau}^N x - \gamma_{2\tau}^N x) + B_2^\tau) + \\ & + C_{2\tau} \sum_{n_2=\tau+1}^n \omega_{n_2} \left(\sum_{j=0}^{n_2-\tau} a_2^j \ln x + \sum_{j=1}^{n_2-\tau} \delta_2^{n_2-\tau-j} D_2^j \right). \end{aligned}$$

Максимизируя, получим равновесные по Нэшу стратегии:

$$\gamma_{1\tau}^N = \frac{\varepsilon \delta_1^\tau A_2^\tau}{\delta_1^\tau A_2^\tau + \delta_2^\tau A_1^\tau + \alpha A_1^\tau A_2^\tau P_\tau^{\tau+1}}, \quad \gamma_{2\tau}^N = \frac{\varepsilon \delta_2^\tau A_1^\tau}{\delta_1^\tau A_2^\tau + \delta_2^\tau A_1^\tau + \alpha A_1^\tau A_2^\tau P_\tau^{\tau+1}}.$$

Коэффициенты A_i^τ и B_i^τ получим из (22) и (23):

$$(24) \quad A_1^\tau = \frac{\delta_1^\tau + C_{1\tau} \sum_{n_1=\tau+1}^n \theta_{n_1} \sum_{j=0}^{n_1-\tau} a_1^j}{1 - \alpha P_\tau^{\tau+1}}, \quad A_2^\tau = \frac{\delta_2^\tau + C_{2\tau} \sum_{n_2=\tau+1}^n \omega_{n_2} \sum_{j=0}^{n_2-\tau} a_2^j}{1 - \alpha P_\tau^{\tau+1}},$$

$$\begin{aligned}
 B_1^\tau &= \frac{1}{1 - P_\tau^{\tau+1}} \left[\delta_1^\tau \ln(\gamma_{1\tau}^N) + \alpha A_1^\tau P_\tau^{\tau+1} \ln(\varepsilon - \gamma_{1\tau}^N - \gamma_{2\tau}^N) + \right. \\
 &\quad \left. + C_{1\tau} \sum_{n_1=\tau+1}^n \theta_{n_1} \sum_{j=1}^{n_1-\tau} \delta_1^{n_1-\tau-j} D_1^j \right], \\
 B_2^\tau &= \frac{1}{1 - P_\tau^{\tau+1}} \left[\delta_2^\tau \ln(\gamma_{2\tau}^N) + \alpha A_2^\tau P_\tau^{\tau+1} \ln(\varepsilon - \gamma_{1\tau}^N - \gamma_{2\tau}^N) + \right. \\
 (25) \quad &\quad \left. + C_{2\tau} \sum_{n_2=\tau+1}^n \omega_{n_2} \sum_{j=1}^{n_2-\tau} \delta_2^{n_2-\tau-j} D_2^j \right].
 \end{aligned}$$

Следовательно, равновесные по Нэшу стратегии и выигрыши определены в виде $V_i^N(\tau, x) = A_i^\tau \ln x + B_i^\tau$, $i = 1, 2$. Приступим к определению кооперативного поведения игроков.

3.2. КООПЕРАТИВНОЕ РАВНОВЕСИЕ

Для построения кооперативных стратегий и выигрышей игроков применяется арбитражная схема Нэша для всего периода продолжения игры. Таким образом, необходимо решить следующую задачу:

$$\begin{aligned}
 (V_1^c(1, x) - V_1^N(1, x))(V_2^c(1, x) - V_2^N(1, x)) &= \\
 &= \left(\sum_{n_1=1}^n \theta_{n_1} \left[\sum_{n_2=n_1}^n \omega_{n_2} \sum_{t=1}^{n_1} \delta_1^t \ln(u_{1t}^c) + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \sum_{n_2=1}^{n_1-1} \omega_{n_2} \left(\sum_{t=1}^{n_2} \delta_1^t \ln(u_{1t}^c) + \sum_{t=n_2+1}^{n_1} \delta_1^t \ln(u_{1t}^a) \right) \right] - V_1^N(1, x) \right) \cdot \\
 (26) \quad &\quad \cdot \left(\sum_{n_2=1}^n \omega_{n_2} \left[\sum_{n_1=n_2}^n \theta_{n_1} \sum_{t=1}^{n_2} \delta_2^t \ln(u_{2t}^c) + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \sum_{n_1=1}^{n_2-1} \theta_{n_1} \left(\sum_{t=1}^{n_1} \delta_2^t \ln(u_{2t}^c) + \sum_{t=n_1+1}^{n_2} \delta_2^t \ln(u_{2t}^a) \right) \right] - V_2^N(1, x) \right) \rightarrow \max,
 \end{aligned}$$

где $V_i^N(1, x) = A_i^N \ln x + B_i^N$, $i = 1, 2$, – выигрыши в равновесии по Нэшу, определенные в (22)–(25).

Аналогично предыдущему подразделу получим связь между функциями Беллмана (кооперативными выигрышами) при наступлении моментов времени τ и $\tau + 1$:

$$\begin{aligned}
 V_1^c(\tau, x) &= \delta_1^\tau \ln(u_{1\tau}^c) + P_\tau^{\tau+1} V_1^c(\tau + 1, x) + \\
 &+ C_{1\tau} \sum_{n_1=\tau+1}^n \theta_{n_1} \sum_{t=\tau}^{n_1} \delta_1^t \ln(u_{1t}^a), \\
 V_2^c(\tau, x) &= \delta_2^\tau \ln(u_{2\tau}^c) + P_\tau^{\tau+1} V_2^c(\tau + 1, x) + \\
 &+ C_{2\tau} \sum_{n_2=\tau+1}^n \omega_{n_2} \sum_{t=\tau}^{n_2} \delta_2^t \ln(u_{2t}^a).
 \end{aligned}$$

Теорема 3. Кооперативные выигрыши в задаче (1), (15), (16) со случайными горизонтами планирования имеют вид

$$\begin{aligned}
 &V_i^c(n - k, x) = \\
 &= \delta_i^{n-k} \ln(u_{in-k}^c) + \alpha P_{n-k}^{n-k+1} G_{n-k+1}^i \ln(\varepsilon x - u_{1n-k}^c - u_{2n-k}^c) + \\
 &+ \sum_{l=2}^{k-1} P_{n-k}^{n-l} [\delta_i^{n-l} \ln(\gamma_{in-l}^c) + \alpha P_{n-l}^{n-l+1} \ln(\varepsilon - \gamma_{1n-l}^c - \gamma_{2n-l}^c)] + \\
 &+ P_{n-k}^{n-1} [\delta_i^{n-1} \ln(\gamma_{in-1}^c) + P_{n-1}^n \alpha A_i \ln(\varepsilon - \gamma_{1n-1}^c - \gamma_{2n-1}^c) + P_{n-1}^n B_i] + \\
 &(27) \qquad \qquad \qquad + \sum_{l=1}^k P_{n-k}^{n-l} C_{in-l} V_i^l(n_i),
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 V_1^l(n_1) &= \sum_{n_1=n-l+1}^n \theta_{n_1} \sum_{t=n-l}^{n_1} \delta_1^t \ln(u_{1t}^a), \\
 V_2^l(n_2) &= \sum_{n_2=n-l+1}^n \omega_{n_2} \sum_{t=n-l}^{n_2} \delta_2^t \ln(u_{2t}^a), \\
 G_k^i &= \sum_{l=1}^k \delta_i^{n-l} \alpha^{k-l} P_{n-k}^{n-l} + \alpha^k A_i P_{n-k}^n, \quad i = 1, 2.
 \end{aligned}$$

Кооперативные стратегии связаны как

$$(28) \quad \gamma_{2n-k}^c = \frac{\delta_1^{n-k} \delta_2^{n-k} \varepsilon - \delta_2^{n-k} \gamma_{1n-k}^c G_k^1}{\delta_1^{n-k} G_k^2},$$

$$(29) \quad \gamma_{1n-k}^c = \frac{\delta_1^{n-k} \varepsilon \gamma_{1n-1}^c G_1^2}{\delta_1^{n-1} \varepsilon G_k^2 + \gamma_{1n-1}^c (G_k^1 G_1^2 - G_1^1 G_k^2)}.$$

Стратегия первого игрока на последнем шаге – γ_{1n-1}^c определяется из решения одного из условий первого порядка.

Доказательство. Доказательство приведено в приложении 3.

Заметим, что все параметры выражены через одну неизвестную стратегию первого игрока на последнем шаге – γ_{1n-1}^c , для определения которой необходимо решить одно из уравнений условий первого порядка, например последнего

$$\begin{aligned} & - \frac{\alpha A_1 P_{n-1}^n}{\varepsilon - \gamma_{1n-1}^c - \gamma_{2n-1}^c} (V_2^c(1, x) - V_2^N(1, x)) + \\ & + \left(\frac{\delta_2^{n-1}}{\gamma_{2n-1}^c} - \frac{\alpha A_2 P_{n-1}^n}{\varepsilon - \gamma_{1n-1}^c - \gamma_{2n-1}^c} \right) (V_1^c(1, x) - V_1^N(1, x)) = 0. \end{aligned}$$

К сожалению, аналитического решения не существует, поэтому ниже будут представлены результаты численного моделирования.

4. Результаты моделирования

4.1. N-ШАГОВАЯ ИГРА

Моделирование было проведено для 20-шаговой игры со следующими параметрами:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= 0,6, & \alpha &= 0,3, & x_0 &= 0,8, \\ \delta_1 &= 0,85, & \delta_2 &= 0,9. \end{aligned}$$

Сравним кооперативные и некооперативные выигрыши

$$V_1^{nc}(x, \delta_1) = -14,1039 > V_1^N(x, \delta_1) = -14,6439,$$

$$V_2^{nc}(x, \delta_2) = -20,5108 > V_2^N(x, \delta_2) = -23,2596.$$

Заметим, что кооперация выгодна обоим игрокам, и данная схема построения кооперативного поведения дает преимущество игроку с большим коэффициентом дисконтирования.

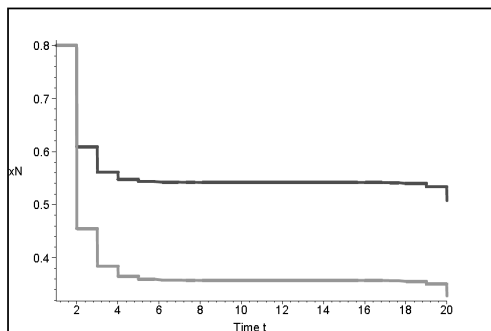


Рис. 1. Размер популяции: темная линия – кооперативное поведение, светлая – равновесие по Нэшу

На рис. 1 представлен размер популяции, а на рис. 2, 3 – выловы игроков. Заметим, как и ранее, что кооперативное поведение не только выгоднее игрокам, но и лучше для экологической ситуации, так как допускает более щадящий режим эксплуатации.

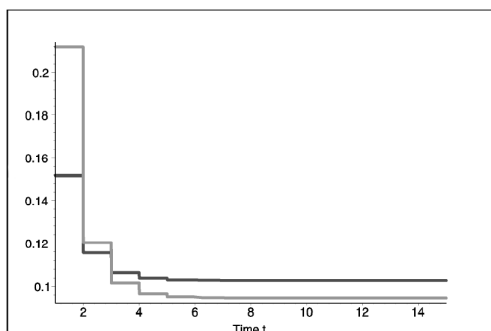


Рис. 2. Вылов первого игрока: темная линия – кооперативное поведение, светлая – равновесие по Нэшу

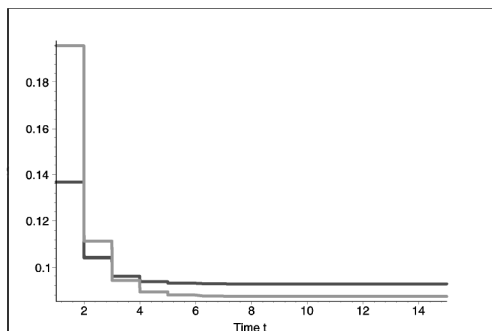


Рис. 3. Вылов второго игрока: темная линия – кооперативное поведение, светлая – равновесие по Нэшу

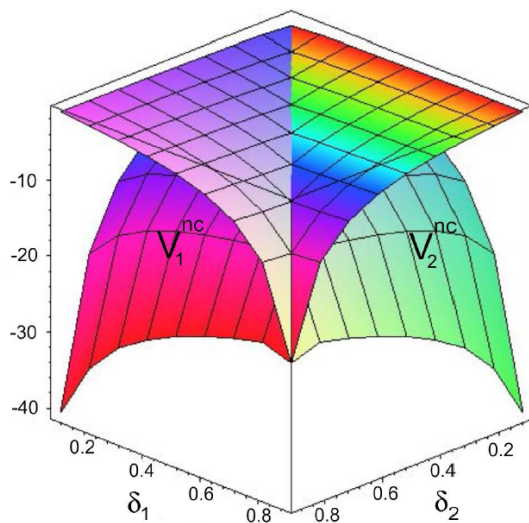


Рис. 4. Кооперативные выигрыши игроков

Сравним выигрыши игроков при изменении коэффициентов дисконтирования. На рис. 4 представлены выигрыши $V_1^{nc}(x, \delta_1)$ и $V_2^{nc}(x, \delta_2)$ для $\delta_1 = 0,1, \dots, 0,9$ и $\delta_2 = 0,1, \dots, 0,9$. Заметим, что игрок с более высоким коэффициентом дисконтирования получает больше выгоды от кооперации. И игроки получают одинаковые выигрыши при совпадении коэффициентов дисконтирования.

При использовании предложенного в работе метода определения кооперативного поведения кооперативный выигрыш игрока всегда больше или равен (при некоторых параметрах) выигрышу в равновесии по Нэшу. На рис. 5 представлены выигрыши второго игрока при кооперативном и эгоистическом поведении. Следовательно, предложенный подход стимулирует кооперативное поведение, что не всегда выполняется при применении других подходов определения кооперативных стратегий и выигрышей игроков [2].

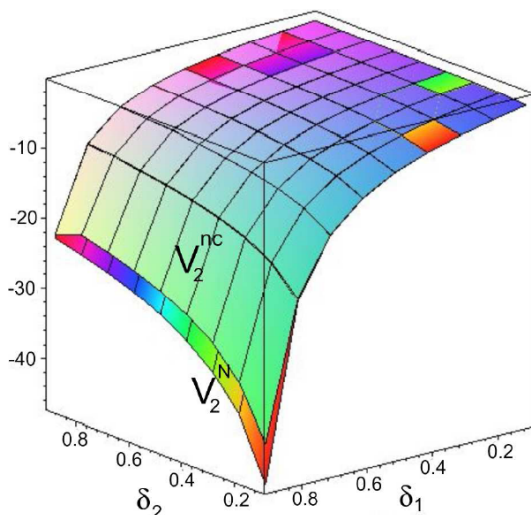


Рис. 5. Выигрыши второго игрока: в равновесии по Нэшу и кооперативный

4.2. СЛУЧАЙНЫЕ ГОРИЗОНТЫ ПЛАНИРОВАНИЯ

Для моделирования был использован метод Монте-Карло и $n = 10$. Использовались те же параметры задачи и следующие вероятности

$$\theta_i = 0,1, \quad \omega_i = 0,005i + 0,0725.$$

Получены ожидаемые выигрыши при кооперации и в равновесии по Нэшу

$$V_1^c(1, x) = -6,2151 > V_1^N(1, x) = -10,1958,$$

$$V_2^c(1, x) = -7,3256 > V_2^N(1, x) = -12,8829.$$

На рис. 6 представлены результаты моделирования при 50 симуляциях при эгоистическом поведении, а на рис. 7 – при кооперации. Точками обозначены результаты моделирования, а кругом – ожидаемые выигрыши, полученные в (22)–(25) и (27).

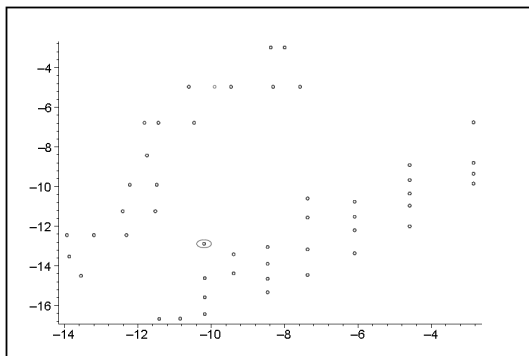


Рис. 6. Равновесие по Нэшу

Также приведем результаты моделирования для конкретных значений горизонтов планирования, а именно $n_1 = 10$, $n_2 = 20$ и $k = \frac{1}{3}$.

Сравним кооперативный и некооперативный выигрыши первого игрока на временном промежутке $[0, n_1]$:

$$V_1^c(n_1, x) = -10,3870 > V_1^N(n_1, x) = -11,9010.$$

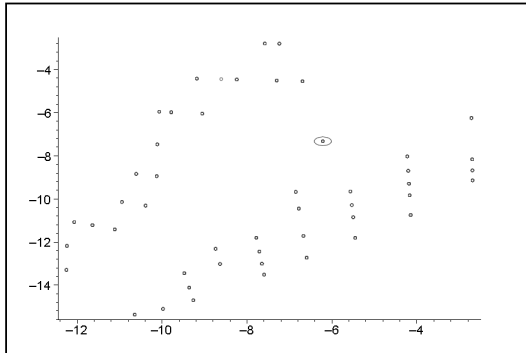


Рис. 7. Кооперативное равновесие

Для второго игрока сравним его кооперативный выигрыш на промежутке $[0, n_1]$ плюс выигрыш от индивидуального поведения на промежутке времени $[n_1, n_2]$ после кооперации с некооперативным выигрышем на промежутке $[0, n_1]$ плюс выигрыш от индивидуального поведения на промежутке времени $[n_1, n_2]$ после эгоистического поведения:

$$V_2^c(n_2, x) = -19,6375 > V_2^N(n_2, x) = -23,2596.$$

Заметим, что кооперативные выигрыши обоих игроков больше, чем выигрыши в равновесии по Нэшу.

На рис. 8 показан размер популяции на всем промежутке планирования $[0, n_2]$, откуда еще раз видно, что кооперативное поведение благотворно влияет на экологическую обстановку.

Вылов первого игрока на промежутке $[0, n_1]$ показан на рис. 9, а вылов второго игрока на промежутках $[0, n_1]$ и $[n_1, n_2]$ – на рис. 10. Заметим, что при кооперации вылов второго игрока меньше, чем в равновесии по Нэшу, но это компенсируется его дальнейшей индивидуальной эксплуатацией ресурса.

Теперь сравним выигрыши игроков для различных горизонтов планирования в случае, когда первый игрок покидает игру раньше. На рис. 11 представлены функции выигрыша $V_1^c(n_1, x)$

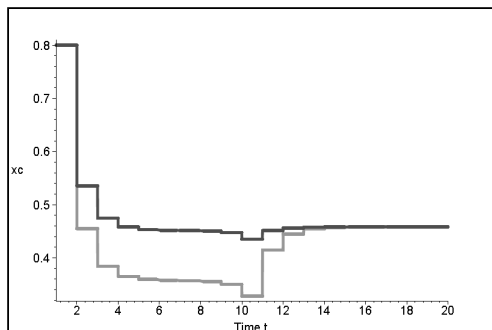


Рис. 8. Размер популяции: темная линия – кооперативное поведение, светлая – равновесие по Нэшу

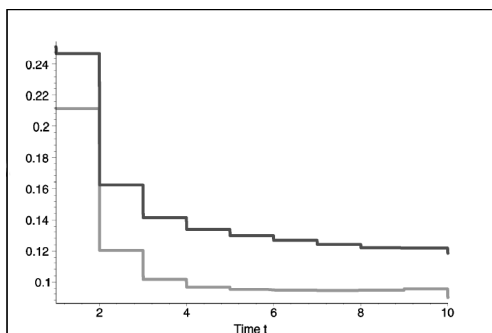


Рис. 9. Выигрыш первого игрока: темная линия – кооперативное поведение, светлая – равновесие по Нэшу

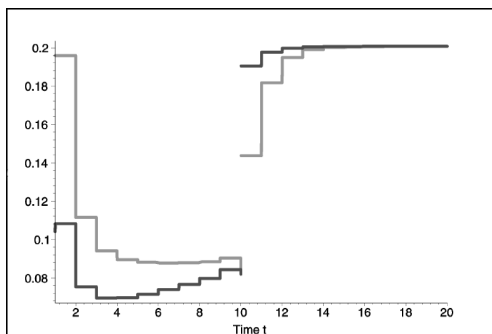


Рис. 10. Выигрыш второго игрока: темная линия – кооперативное поведение, светлая – равновесие по Нэшу

и $V_2^c(n_2, x)$ для $n_2 = 2, \dots, 10$ и $n_1 = 1, \dots, n_2 - 1$. Видно, что чем n_1 ближе к n_2 , тем меньше разница между выигрышами игроков.

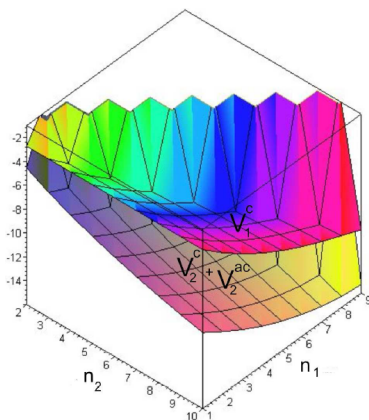


Рис. 11. Кооперативные выигрыши игроков

Заметим, что при использовании предложенного метода определения кооперативного поведения кооперативный выигрыш игрока всегда больше или равен (при некоторых параметрах) выигрышу в равновесии по Нэшу. На рис. 12 представлены выигрыши второго игрока при кооперативном и эгоистическом поведении для различных горизонтов планирования. Следовательно, это еще раз показывает, что предложенный подход стимулирует кооперативное поведение.

5. Заключение

Традиционно в задачах оптимального управления биоресурсами предполагается, что игроки используют одинаковые коэффициенты дисконтирования и горизонты планирования. В реальных эколого-экономических системах эти параметры различаются и, более того, могут иметь случайную природу. В таком случае стандартные схемы определения кооперативного поведения

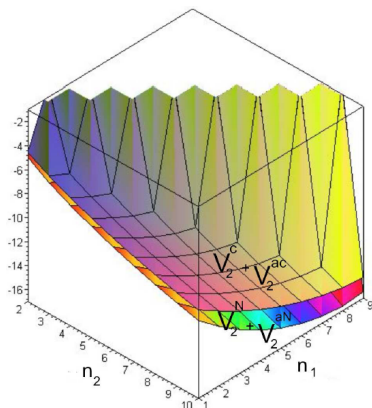


Рис. 12. Выигрыш второго игрока: в равновесии по Нэшу и кооперативный

не могут быть применены и необходима разработка новых методов построения кооперативных выигрышей и стратегий игроков.

В работе исследуется теоретико-игровая задача управления биоресурсами в дискретном времени с несимметричными игроками, использующими различные коэффициенты дисконтирования (предпочтения во времени). Для определения кооперативных стратегий и выигрышей участников используется рекурсивная арбитражная схема Нэша. Предложенная схема отличается от стандартного способа определения общего кооперативного выигрыша как взвешенной суммы индивидуальных выигрышей игроков. Арбитражное решение Нэша стимулирует кооперативное поведение в случае, когда коэффициент дисконтирования одного из игроков больше, чем другого. Показано, что кооперативные выигрыши участников при использовании предложенной схемы больше или равны (при некоторых параметрах) выигрышам при эгоистическом поведении.

В работе также исследована дискретная задача управления биоресурсами, в которой игроки различаются не только коэффициентами дисконтирования, но и горизонтами планирования. Причем предполагается, что времена участия в процессе эксплу-

атации ресурса являются случайными величинами с различными распределениями. Таким образом, один из участников покидает игру в случайный момент времени и получает некоторую компенсацию за неиспользованный им ресурс. Оставшийся игрок продолжает процесс эксплуатации индивидуально до окончания его горизонта планирования. Для построения кооперативного поведения в данном случае используется арбитражная схема Нэша для всего периода продолжения игры. Сначала определены равновесные по Нэшу стратегии и выигрыши игроков, используемые как точка статус-кво. Затем кооперативные стратегии и выигрыши игроков построены с помощью арбитражной схемы.

Преимущество использования арбитражной схемы Нэша заключается в возможности рассмотрения игроков как независимых. В традиционном подходе функция общего кооперативного выигрыша представляется суммой индивидуальных выигрышей игроков, что далеко от реальной ситуации. Например, если игроки – это граничащие страны, то это даже невозможно, особенно в случае различных горизонтов планирования. Другие недостатки традиционной схемы описаны во введении. Арбитражное решение Нэша в некотором смысле похоже на равновесие по Нэшу (см. [12]). Игроки действуют индивидуально, как и ранее, но в рамках кооперативного соглашения.

Литература

1. МАЗАЛОВ В.В., РЕТТИЕВА А.Н. *Условия, стимулирующие рациональное поведение, в дискретных задачах управления биоресурсами* // Доклады РАН. – 2010. – Т. 432, №3. – С. 308–311.
2. ПЕТРОСЯН Л.А. *Устойчивость решений дифференциальных игр со многими участниками* // Вестник Ленинградского университета. Серия 1: Математика, механика, астрономия. – 1977. – №19. – С. 46–52.
3. РЕТТИЕВА А.Н. *Задача управления биоресурсами с асимметричными игроками* // Математическая теория игр и ее приложения. – 2013. – Т. 5, вып. 3. – С. 72–87.

4. BRETON M., KEOULA M.Y. *A great fish war model with asymmetric players* // Ecological Economics. – 2014. – Vol. 97. – P. 209–223.
5. DENISOVA E., GARNAEV A. *Fish wars: cooperative and non-cooperative approaches* // Czech Economic Review. – 2008. – Vol. 2, №1. – P. 28–40.
6. HAURIE A. *A note on nonzero-sum differential games with bargaining solution* // J. Optim. Theory Appl. – 1976. – Vol. 18. – P. 31–39.
7. KAITALA V.T., LINDROOS M. *Game-theoretic applications to fisheries* // Handbook of operations research in natural resources. – Springer, 2007. – P. 201–215.
8. LEVHARI D., MIRMAN L.J. *The great fish war: an example using a dynamic Cournot-Nash solution* // The Bell J. of Economics. – 1980. – Vol.11, №1. – P. 322–334.
9. LINDROOS M., KAITALA V.T., KRONBAK L.G. *Coalition games in fishery economics* // Advances in Fishery Economics. Blackwell Publishing, 2007. – P. 184–195.
10. MARIN-SOLANO J., SHEVKOPLYAS E.V. *Non-constant discounting and differential games with random time horizon* // Automatica. – 2011. – Vol. 47. – P. 2626–2638.
11. MAZALOV V.V., RETTIEVA A.N. *Fish wars and cooperation maintenance* // Ecological Modelling. – 2010. – Vol. 221. – P. 1545–1553.
12. MO J., WALRAND J. *Fair end-to-end window-based congestion control* // IEEE/ACM Transactions on Networking. – 2000. – Vol. 8, №5. – P. 556–567.
13. MUNRO G.R. *The optimal management of transboundary renewable resources* // Canadian Journal of Economics. – 1979. – Vol. 12, №8. – P. 355–376.
14. MUNRO G.R. *On the Economics of 'Shared Fishery Resources* // International Relations and the Common Fisheries Policy. – Portsmouth, 2000. – P. 149–167.
15. NOWAK A. *A note on an equilibrium in the great fish war game* // Economics Bulletin. – 2006. – Vol. 17, №2. – P. 1–10.

16. OWEN G. *Game theory*. – Academic Press, 1968. – 320 p.
17. PETROSJAN L., ZACCOUR G. *Time-consistent Shapley value allocation of pollution cost reduction* // Journal of Economic Dynamic and Control. – 2003. – Vol. 7. – P. 381–398.
18. PLOURDE C.G., YEUNG D. *Harvesting of a Transboundary Replenishable Fish Stock: A Noncooperative Game Solution* // Marine Resource Economics. – 1989. – Vol. 6. – P. 57–70.
19. RETTIEVA A.N. *Stable coalition structure in bioresource management problem* // Ecological Modelling. – 2012. – Vol. 235–236. – P. 102–118.
20. SHEVKOPLYAS E.V. *The Shapley value in cooperative differential games with random duration* // Annals of the Int. Soc. of Dynamic Games. – 2011. – Vol. 11. – P. 359–373.
21. SORGER G. *Recursive Nash bargaining over a productive asset* // J. of Economic Dynamics & Control. – 2006. – Vol. 30. – P. 2637–2659.
22. VISLIE J. *On the optimal management of transboundary renewable resources: a comment on Munro's paper* // Canadian Journal of Economics. – 1987. – Vol. 20. – P. 870–875.
23. YEUNG D.W.K. *An irrational-behavior-proof condition in cooperative differential games* // International Game Theory Review. – 2006. – Vol. 8, №4. – P. 739–744.

Приложение 1.

Покажем, что решение задачи (7) существует, единственно и достигается во внутренней точке допустимого множества. Запишем (7) в виде задачи минимизации произведения Нэша

$$H_1^c = (-H_{11}^c + H_{11}^N)(H_{21}^c - H_{21}^N) \rightarrow \min$$

на множестве

$$(30) \quad H_{11}^N - H_{11}^c \leq 0,$$

$$(31) \quad H_{21}^N - H_{21}^c \leq 0,$$

$$-(\varepsilon x - u_1 - u_2) \leq 0,$$

$$u_1 \geq 0, \quad u_2 \geq 0.$$

Используя теорему Куна–Таккера, запишем функцию Лагранжа в виде

$$\begin{aligned} L = & (-H_{11}^c + H_{11}^N)(H_{21}^c - H_{21}^N) + \\ & + \lambda_1(H_{11}^N - H_{11}^c) + \lambda_2(H_{21}^N - H_{21}^c) - \lambda_3(\varepsilon x - u_1 - u_2). \end{aligned}$$

Заметим сразу, что множитель Лагранжа λ_3 может быть исключен из условий минимума, так как условия для него имеют вид

$$\begin{aligned} \varepsilon x - u_1 - u_2 & \geq 0, \\ \lambda_3(\varepsilon x - u_1 - u_2) & = 0, \end{aligned}$$

и, если предположить, что $\lambda_3 > 0$, то $\varepsilon x - u_1 - u_2 = 0$ и $H_{11}^c = H_{21}^c = -\infty$, что противоречит условиям (30), (31).

Следовательно, запишем условия Куна–Таккера только для двух множителей Лагранжа (здесь введено обозначение $\bar{x} = \varepsilon x -$

$u_1 - u_2$):

$$\left(-\frac{1}{u_1} + \frac{a_1}{\bar{x}}\right)(H_{21}^c - H_{21}^N + \lambda_1) + \frac{a_2}{\bar{x}}(H_{11}^c - H_{11}^N - \lambda_2) \geq 0,$$

$$u_1 \left[\left(-\frac{1}{u_1} + \frac{a_1}{\bar{x}}\right)(H_{21}^c - H_{21}^N + \lambda_1) + \frac{a_2}{\bar{x}}(H_{11}^c - H_{11}^N + \lambda_2) \right] = 0,$$

$$\left(-\frac{1}{u_2} + \frac{a_2}{\bar{x}}\right)(H_{11}^c - H_{11}^N + \lambda_2) + \frac{a_1}{\bar{x}}(H_{21}^c - H_{21}^N + \lambda_1) \geq 0,$$

$$u_2 \left[\left(-\frac{1}{u_2} + \frac{a_2}{\bar{x}}\right)(H_{11}^c - H_{11}^N + \lambda_2) + \frac{a_1}{\bar{x}}(H_{21}^c - H_{21}^N + \lambda_1) \right] = 0,$$

$$(32) \quad H_{11}^c - H_{11}^N \geq 0,$$

$$(33) \quad \lambda_1(H_{11}^c - H_{11}^N) = 0,$$

$$(34) \quad H_{21}^c - H_{21}^N \geq 0,$$

$$(35) \quad \lambda_2(H_{21}^c - H_{21}^N) = 0,$$

$$u_1 \geq 0, \quad u_2 \geq 0, \quad \lambda_1 \geq 0, \quad \lambda_2 \geq 0.$$

1) Рассмотрим случай $\lambda_1 = 0, \lambda_2 > 0$, тогда из (35) получим

$$H_{21}^c - H_{21}^N = 0.$$

Если хотя бы одна из стратегий $u_i, i = 1, 2$, равняется нулю, то условия (32) или (34) не выполняются. Следовательно, $u_i > 0, i = 1, 2$, и тогда

$$H_{11}^c - H_{11}^N = -\lambda_2,$$

что противоречит условию (32).

2) Аналогично, в случае $\lambda_1 > 0, \lambda_2 = 0$ получим $H_{21}^c - H_{21}^N = -\lambda_1$, что противоречит условию (34).

3) Рассмотрим случай $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$, тогда из (33) и (35) получим

$$H_{11}^c - H_{11}^N = 0, \quad H_{21}^c - H_{21}^N = 0.$$

Аналогично первому случаю, легко проверить, что $u_i > 0, i = 1, 2$, а целевая функция H_1^c равна нулю. Из системы

условий Куна–Таккера получим

$$(36) \quad \begin{aligned} &\left(-\frac{1}{u_1} + \frac{a_1}{\bar{x}}\right)\lambda_1 + \frac{a_2}{\bar{x}}\lambda_2 = 0, \\ &\left(-\frac{1}{u_2} + \frac{a_2}{\bar{x}}\right)\lambda_2 + \frac{a_1}{\bar{x}}\lambda_1 = 0. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\lambda_2 = \frac{u_2}{u_1}\lambda_1.$$

Из первого уравнения (36) получим

$$(37) \quad \left(-\frac{1}{u_1} + \frac{a_1}{\bar{x}} + \frac{a_2 u_2}{\bar{x} u_1}\right)\lambda_1 = 0.$$

Так как в данном случае кооперативное поведение совпадает с некооперативным, то $u_1 = u_1^N$, $u_2 = u_2^N$. Подставляя некооперативные стратегии, запишем (37) в следующем виде:

$$\frac{a_1 a_2}{u_1 \bar{x}}\lambda_1 = 0.$$

Получили, что $\lambda_1 = 0$, что противоречит предположению.

- 4) Окончательно, рассмотрим случай $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Аналогично, легко проверить, что $u_i > 0$, $i = 1, 2$. Следовательно, минимум достигается во внутренней точке допустимого множества и может быть найден из условий первого порядка.

Для того чтобы показать, что условия Куна–Таккера являются достаточными условиями в задаче (7), рассмотрим вторую производную H_1^c по u_1 :

$$f_1 = \left(\frac{1}{u_1^2} + \frac{a_1}{\bar{x}^2}\right)(H_{21}^c - H_{21}^N) + \frac{a_2}{\bar{x}^2}(H_{11}^c - H_{11}^N) + \frac{2a_2}{\bar{x}}\left[\frac{1}{u_1} - \frac{a_1}{\bar{x}}\right],$$

и по u_2 :

$$f_2 = \left(\frac{1}{u_2^2} + \frac{a_2}{\bar{x}^2}\right)(H_{11}^c - H_{11}^N) + \frac{a_1}{\bar{x}^2}(H_{21}^c - H_{21}^N) + \frac{2a_1}{\bar{x}}\left[\frac{1}{u_2} - \frac{a_2}{\bar{x}}\right].$$

Следовательно, H_1^c вогнута, если $f_1 \geq 0$ и $f_2 \geq 0$. Заметим, что для этого выражения в квадратных скобках должны быть положительны. Таким образом, условия принимают вид

$$\varepsilon x - u_1(1 + a_1) - u_2 \geq 0, \quad \varepsilon x - u_1 - u_2(1 + a_2) \geq 0.$$

Из условий первого порядка получим решение в виде (8), поэтому в точке максимума выполняется

$$\varepsilon x - u_1(1 + a_1) - u_2(1 + a_2) = 0.$$

Следовательно, полученное решение удовлетворяет условиям. Более того, условия выполняются и в некоторой окрестности точки решения, так как

$$a_2 u_2 > 0, \quad a_1 u_1 > 0.$$

Таким образом, показано, что условия Куна–Таккера являются достаточными условиями существования максимума.

Покажем, что полученное решение единственно. Предположим, что существуют два решения: u_1, u_2 и \hat{u}_1, \hat{u}_2 . Из условий Куна–Таккера получим следующие соотношения:

$$\begin{aligned} & \frac{\ln(u_2) + a_2 \ln(\varepsilon x - u_1 - u_2)}{u_1} - \frac{\ln(\hat{u}_2) + a_2 \ln(\varepsilon x - \hat{u}_1 - \hat{u}_2)}{\hat{u}_1} = \\ & = \frac{\ln(u_1) + a_1 \ln(\varepsilon x - u_1 - u_2)}{u_2} - \frac{\ln(\hat{u}_1) + a_1 \ln(\varepsilon x - \hat{u}_1 - \hat{u}_2)}{\hat{u}_2}. \end{aligned}$$

Подставляя выражения (8) для u_2 и \hat{u}_2 , запишем

$$\begin{aligned} f &= \frac{1}{u_1} \left(\ln \left(\frac{\varepsilon x - u_1(1 + a_1)}{1 + a_2} \right) + a_2 \ln \left(\frac{\varepsilon x a_2 - u_1(a_2 - a_1)}{1 + a_2} \right) \right) - \\ & - \frac{1}{\hat{u}_1} \left(\ln \left(\frac{\varepsilon x - \hat{u}_1(1 + a_1)}{1 + a_2} \right) + a_2 \ln \left(\frac{\varepsilon x a_2 - \hat{u}_1(a_2 - a_1)}{1 + a_2} \right) \right) - \\ & - \frac{1 + a_2}{\varepsilon x - u_1(1 + a_1)} \left(\ln(u_1) + a_1 \ln \left(\frac{\varepsilon x a_2 - u_1(a_2 - a_1)}{1 + a_2} \right) \right) + \\ & + \frac{1 + a_2}{\varepsilon x - \hat{u}_1(1 + a_1)} \left(\ln(\hat{u}_1) + a_1 \ln \left(\frac{\varepsilon x a_2 - \hat{u}_1(a_2 - a_1)}{1 + a_2} \right) \right) = 0. \end{aligned}$$

Исследуем функцию f и покажем, что она равна нулю только при $u_1 = \hat{u}_1$.

Легко видеть, что f возрастает по u_1 и убывает по \hat{u}_1 . Рассмотрим пределы $u_1 \rightarrow 0$ и $u_1 \rightarrow \frac{\varepsilon x}{1+a_1}$. Выражение для второго предела получено из условий неотрицательности $\varepsilon x - u_1(1+a_1)$ и $\varepsilon x a_2 - u_1(a_2 - a_1)$.

Сначала рассмотрим $f_1 = u_1 \hat{u}_1 f$.

Так как

$$\lim_{u_1 \rightarrow 0} f_1 = \hat{u}_1 \left(\ln \left(\frac{\varepsilon x}{1+a_2} \right) + a_2 \ln \left(\frac{\varepsilon x a_2}{1+a_2} \right) \right)$$

и

$$\lim_{\hat{u}_1 \rightarrow 0} f_1 = -u_1 \left(\ln \left(\frac{\varepsilon x}{1+a_2} \right) + a_2 \ln \left(\frac{\varepsilon x a_2}{1+a_2} \right) \right),$$

то

$$\lim_{u_1 \rightarrow 0} f = \lim_{u_1 \rightarrow 0} \frac{f_1}{u_1 \hat{u}_1} = -\infty$$

и

$$\lim_{\hat{u}_1 \rightarrow 0} f = \lim_{\hat{u}_1 \rightarrow 0} \frac{f_1}{u_1 \hat{u}_1} = \infty.$$

Теперь рассмотрим $f_2 = (\varepsilon x - u_1(1+a_1))(\varepsilon x - \hat{u}_1(1+a_1))f$.

Так как

$$\lim_{u_1 \rightarrow \frac{\varepsilon x}{1+a_1}} f_2 = - \left(\ln \left(\frac{\varepsilon x}{1+a_1} \right) + a_1 \ln \left(\frac{\varepsilon x a_2}{1+a_2} \right) \right)$$

и

$$\lim_{\hat{u}_1 \rightarrow \frac{\varepsilon x}{1+a_1}} f_2 = \ln \left(\frac{\varepsilon x}{1+a_1} \right) + a_1 \ln \left(\frac{\varepsilon x a_2}{1+a_2} \right),$$

то

$$\lim_{u_1 \rightarrow \frac{\varepsilon x}{1+a_1}} f = \lim_{u_1 \rightarrow \frac{\varepsilon x}{1+a_1}} \frac{f_2}{(\varepsilon x - u_1(1+a_1))(\varepsilon x - \hat{u}_1(1+a_1))} = \infty$$

и

$$\lim_{\hat{u}_1 \rightarrow \frac{\varepsilon x}{1+a_1}} f = \lim_{\hat{u}_1 \rightarrow \frac{\varepsilon x}{1+a_1}} \frac{f_2}{(\varepsilon x - u_1(1+a_1))(\varepsilon x - \hat{u}_1(1+a_1))} = -\infty.$$

Следовательно, f равно нулю только при $u_1 = \hat{u}_1$, а так как такая точка единственна, то и полученное решение единственно.

Аналогичным образом показывается, что решения всех задач максимизации в данной работе достигаются во внутренних точках, единственны и могут быть получены из условий первого порядка.

Приложение 2. Равновесие по Нэшу

Проведем доказательство для первого игрока (найдем связь между $V_1^N(\tau, x)$ и $V_1^N(\tau + 1, x)$), а для второго процедура аналогична. Из (17) запишем функцию Беллмана первого игрока при наступлении в игре момента времени τ :

$$\begin{aligned}
 V_1^N(\tau, x) = & \max_{u_{1\tau}^N, \dots, u_{1n}^N} \left\{ \frac{\theta_\tau}{\sum_{l=\tau} \theta_l} \sum_{n_2=\tau}^n \frac{\omega_{n_2}}{\sum_{l=\tau} \omega_l} \delta_1^\tau \ln(u_{1\tau}^N) + \right. \\
 & + \sum_{n_1=\tau+1}^n \frac{\theta_{n_1}}{\sum_{l=\tau} \theta_l} \left[\sum_{n_2=n_1}^n \frac{\omega_{n_2}}{\sum_{l=\tau} \omega_l} \sum_{t=\tau}^{n_1} \delta_1^t \ln(u_{1t}^N) + \right. \\
 & + \left. \left. \sum_{n_2=\tau}^{n_1-1} \frac{\omega_{n_2}}{\sum_{l=\tau} \omega_l} \sum_{t=\tau}^{n_2} \delta_1^t \ln(u_{1t}^N) + V_1^a(\tau, n_1) \right] \right\} = \frac{\theta_\tau}{\sum_{l=\tau} \theta_l} \delta_1^\tau \ln(u_{1\tau}^N) + \\
 & + \sum_{n_1=\tau+1}^n \frac{\theta_{n_1}}{\sum_{l=\tau} \theta_l} \left[\sum_{n_2=n_1}^n \frac{\omega_{n_2}}{\sum_{l=\tau} \omega_l} \left(\sum_{t=\tau+1}^{n_1} \delta_1^t \ln(u_{1t}^N) + \delta_1^\tau \ln(u_{1\tau}^N) \right) + \right. \\
 & + \left. \sum_{n_2=\tau}^{n_1-1} \frac{\omega_{n_2}}{\sum_{l=\tau} \omega_l} \left(\sum_{t=\tau+1}^{n_2} \delta_1^t \ln(u_{1t}^N) + \delta_1^\tau \ln(u_{1\tau}^N) \right) + V_1^a(\tau, n_1) \right] =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \delta_1^\tau \ln(u_{1\tau}^N) + \sum_{n_1=\tau+1}^n \frac{\theta_{n_1}}{\sum_{l=\tau}^n \theta_l} \left[\sum_{n_2=n_1}^n \frac{\omega_{n_2}}{\sum_{l=\tau}^n \omega_l} \sum_{t=\tau+1}^{n_1} \delta_1^t \ln(u_{1t}^N) + \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{n_2=\tau+1}^{n_1-1} \frac{\omega_{n_2}}{\sum_{l=\tau}^n \omega_l} \sum_{t=\tau+1}^{n_2} \delta_1^t \ln(u_{1t}^N) + V_1^a(\tau, n_1) \right] = \\
 &= \delta_1^\tau \ln(u_{1\tau}^N) + \sum_{n_1=\tau+1}^n \frac{\theta_{n_1}}{\sum_{l=\tau+1}^n \theta_l} \frac{\sum_{l=\tau+1}^n \theta_l}{\sum_{l=\tau}^n \theta_l} \cdot \\
 &\quad \cdot \left[\sum_{n_2=n_1}^n \frac{\omega_{n_2}}{\sum_{l=\tau+1}^n \omega_l} \frac{\sum_{l=\tau+1}^n \omega_l}{\sum_{l=\tau}^n \omega_l} \sum_{t=\tau+1}^{n_1} \delta_1^t \ln(u_{1t}^N) + \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{n_2=\tau+1}^{n_1-1} \frac{\omega_{n_2}}{\sum_{l=\tau+1}^n \omega_l} \frac{\sum_{l=\tau+1}^n \omega_l}{\sum_{l=\tau}^n \omega_l} \sum_{t=\tau+1}^{n_2} \delta_1^t \ln(u_{1t}^N) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\omega_\tau}{\sum_{l=\tau}^n \omega_l} \sum_{t=\tau}^{n_1} \delta_1^t \ln(u_{1t}^a) + \frac{\sum_{l=\tau+1}^n \omega_l}{\sum_{l=\tau}^n \omega_l} V_1^a(\tau+1, n_1) \right] = \\
 (38) \quad &= \delta_1^\tau \ln(u_{1\tau}^N) + P_\tau^{\tau+1} V_1^N(\tau+1, x) + \\
 &\quad + C_{1\tau} \sum_{n_1=\tau+1}^n \theta_{n_1} \sum_{t=\tau}^{n_1} \delta_1^t \ln(u_{1t}^a),
 \end{aligned}$$

где

$$P_\tau^{\tau+1} = \frac{\sum_{l=\tau+1}^n \omega_l}{\sum_{l=\tau}^n \omega_l} \frac{\sum_{l=\tau+1}^n \theta_l}{\sum_{l=\tau}^n \theta_l}, \quad C_{1\tau} = \frac{\omega_\tau}{\sum_{l=\tau}^n \omega_l} \frac{1}{\sum_{l=\tau}^n \theta_l}.$$

Аналогично, получим связь между $V_2^N(\tau, x)$ и $V_2^N(\tau + 1, x)$ в виде

$$V_2^N(\tau, x) = \delta_2^\tau \ln(u_{2\tau}^N) + P_\tau^{\tau+1} V_2^N(\tau + 1, x) + C_{2\tau} \sum_{n_2=\tau+1}^n \omega_{n_2} \sum_{t=\tau}^{n_2} \delta_2^t \ln(u_{2t}^a),$$

где

$$C_{2\tau} = \frac{\theta_\tau}{\sum_{l=\tau}^n \theta_l} \frac{1}{\sum_{l=\tau}^n \omega_l}.$$

Приложение 3. Кооперативное равновесие

Определим кооперативные выигрыши игроков $V_i^c(\tau, x)$ при наступлении момента времени τ как

$$(39) \quad V_1^c(\tau, x) = \max_{u_{1\tau}^c, \dots, u_{1n}^c} \left\{ \sum_{n_1=\tau}^n \frac{\theta_{n_1}}{\sum_{l=\tau}^n \theta_l} \left[\sum_{n_2=n_1}^n \frac{\omega_{n_2}}{\sum_{l=\tau}^n \omega_l} \sum_{t=\tau}^{n_1} \delta_1^t \ln(u_{1t}^c) + \sum_{n_2=\tau}^{n_1-1} \frac{\omega_{n_2}}{\sum_{l=\tau}^n \omega_l} \sum_{t=\tau}^{n_2} \delta_1^t \ln(u_{1t}^c) + V_1^a(\tau, n_1) \right] \right\},$$

$$(40) \quad V_2^c(\tau, x) = \max_{u_{2\tau}^c, \dots, u_{2n}^c} \left\{ \sum_{n_2=\tau}^n \frac{\omega_{n_2}}{\sum_{l=\tau}^n \omega_l} \left[\sum_{n_1=n_2}^n \frac{\theta_{n_1}}{\sum_{l=\tau}^n \theta_l} \sum_{t=\tau}^{n_2} \delta_2^t \ln(u_{2t}^c) + \sum_{n_1=\tau}^{n_2-1} \frac{\theta_{n_1}}{\sum_{l=\tau}^n \omega_l} \sum_{t=\tau}^{n_1} \delta_2^t \ln(u_{2t}^c) + V_2^a(\tau, n_2) \right] \right\}.$$

Начнем с ситуации наступления момента времени n . Так как на следующем шаге $n + 1$ выигрыши обоих игроков нулевые, то

оптимальные кооперативные стратегии совпадают с равновесными по Нэшу, а выигрыши имеют вид

$$\begin{aligned} V_i^c(n, x) &= \delta_i^n \ln(u_{in}^c) = V_i^N(n, x) = \\ &= \delta_i^n \ln(\gamma_{in}^N x) = A_i \ln x + B_i, \quad i = 1, 2, \end{aligned}$$

где

$$A_i = \delta_i^n, \quad B_i = \delta_i^n \ln(\gamma_{in}^N) = \delta_i^n \ln\left(\frac{\varepsilon}{2}\right), \quad i = 1, 2.$$

Теперь, предположим, что в игре наступил момент времени $n - 1$. Следовательно, задача (26) принимает вид

$$(41) \quad (V_1^c(n-1, x) - V_1^N(n-1, x))(V_2^c(n-1, x) - V_2^N(n-1, x)) \rightarrow \max,$$

где

$$\begin{aligned} V_1^c(n-1, x) &= \delta_1^{n-1} \ln(u_{1n-1}^c) + \\ &+ P_{n-1}^n V_1^c(n, (\varepsilon x - u_{1n-1}^c - u_{2n-1}^c)^\alpha) + C_{1n-1} \theta_n \sum_{t=n-1}^n \delta_1^t \ln(u_{1t}^a), \\ V_2^c(n-1, x) &= \delta_2^{n-1} \ln(u_{2n-1}^c) + \\ &+ P_{n-1}^n V_2^c(n, (\varepsilon x - u_{1n-1}^c - u_{2n-1}^c)^\alpha) + C_{2n-1} \omega_n \sum_{t=n-1}^n \delta_2^t \ln(u_{2t}^a). \end{aligned}$$

Запишем задачу (41) в виде

$$\begin{aligned} & \left(\delta_1^{n-1} \ln(u_{1n-1}^c) + P_{n-1}^n (\alpha A_1 \ln(\varepsilon x - u_{1n-1}^c - u_{2n-1}^c) + B_1) + \right. \\ & \quad \left. + C_{1n-1} \theta_n \sum_{t=n-1}^n \delta_1^t \ln(u_{1t}^a) - V_1^N(n-1, x) \right) \cdot \\ & \cdot \left(\delta_2^{n-1} \ln(u_{2n-1}^c) + P_{n-1}^n (\alpha A_2 \ln(\varepsilon x - u_{1n-1}^c - u_{2n-1}^c) + B_2) + \right. \\ & \quad \left. + C_{2n-1} \omega_n \sum_{t=n-1}^n \delta_2^t \ln(u_{2t}^a) - V_2^N(n-1, x) \right). \end{aligned}$$

Как обычно, ищем стратегии игроков в линейном виде $u_{in-1}^c = \gamma_{in-1}^c x$, $i = 1, 2$. Тогда условия первого порядка примут

ВИД

$$(42) \quad \left(\frac{\delta_1^{n-1}}{\gamma_{1n-1}^c} - \frac{P_{n-1}^n \alpha A_1}{\varepsilon - \gamma_{1n-1}^c - \gamma_{2n-1}^c} \right) (V_2^c(n-1, x) - V_2^N(n-1, x)) - \frac{P_{n-1}^n \alpha A_2}{\varepsilon - \gamma_{1n-1}^c - \gamma_{2n-1}^c} (V_1^c(n-1, x) - V_1^N(n-1, x)) = 0,$$

$$(43) \quad - \frac{P_{n-1}^n \alpha A_1}{\varepsilon - \gamma_{1n-1}^c - \gamma_{2n-1}^c} (V_2^c(n-1, x) - V_2^N(n-1, x)) + \frac{\delta_2^{n-1}}{\gamma_{2n-1}^c} - \frac{P_{n-1}^n \alpha A_2}{\varepsilon - \gamma_{1n-1}^c - \gamma_{2n-1}^c} \cdot (V_1^c(n-1, x) - V_1^N(n-1, x)) = 0.$$

Вычитая (43) из (42), получим следующее соотношение:

$$V_1^c(n-1, x) - V_1^N(n-1, x) = \frac{\delta_1^{n-1}}{\delta_2^{n-1}} \frac{\gamma_{2n-1}^c}{\gamma_{1n-1}^c} (V_1^c(n-1, x) - V_2^N(n-1, x))$$

подставляя которое в (42) получим связь между кооперативными стратегиями игроков:

$$(44) \quad \gamma_{2n-1}^c = \frac{\delta_1^{n-1} \delta_2^{n-1} \varepsilon - \delta_2^{n-1} \gamma_{1n-1}^c (\delta_1^{n-1} + P_{n-1}^n \alpha A_1)}{\delta_1^{n-1} (\delta_2^{n-1} + P_{n-1}^n \alpha A_2)}.$$

Перейдем к ситуации, когда в игре наступил момент времени $n - 2$. Тогда, задача (26) примет вид

$$(45) \quad (V_1^c(n-2, x) - V_1^N(n-2, x))(V_2^c(n-2, x) - V_2^N(n-2, x)) \rightarrow \max,$$

где

$$V_1^c(n-2, x) = \delta_1^{n-2} \ln(u_{1n-2}^c) + C_{1n-2} \sum_{n_1=n-1}^n \theta_{n_1} \sum_{t=n-2}^{n_1} \delta_1^t \ln(u_{1t}^a) + P_{n-2}^{n-1} V_1^c(n-1, (\varepsilon x - u_{1n-2}^c - u_{2n-2}^c)^\alpha),$$

$$V_2^c(n-2, x) = \delta_2^{n-2} \ln(u_{2n-2}^c) + C_{2n-2} \sum_{n_2=n-1}^n \omega_{n_2} \sum_{t=n-2}^{n_2} \delta_2^t \ln(u_{2t}^a) + P_{n-2}^{n-1} V_2^c(n-1, (\varepsilon x - u_{1n-2}^c - u_{2n-2}^c)^\alpha).$$

Перепишем задачу (45) в виде

$$\begin{aligned} & \left(\delta_1^{n-2} \ln(u_{1n-2}^c) + P_{n-2}^{n-1} (\delta_1^{n-1} + P_{n-1}^n \alpha A_1) \cdot \right. \\ & \quad \cdot \alpha \ln(\varepsilon x - u_{1n-2}^c - u_{2n-2}^c) + P_{n-2}^{n-1} (\delta_1^{n-1} \ln(\gamma_{1n-1}^c) + \\ & + P_{n-1}^n \alpha A_1 \ln(\varepsilon - \gamma_{1n-1}^c - \gamma_{2n-1}^c) + P_{n-1}^n B_1) + P_{n-2}^{n-1} C_{1n-1} \theta_n \cdot \\ & \quad \cdot \sum_{t=n-1}^n \delta_1^t \ln(u_{1t}^a) + C_{1n-2} \sum_{n_1=n-1}^n \theta_{n_1} \sum_{t=n-2}^{n_1} \delta_1^t \ln(u_{1t}^a) - V_1^N(n-2, x) \Big) \cdot \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \cdot \left(\delta_2^{n-2} \ln(u_{2n-2}^c) + P_{n-2}^{n-1} (\delta_2^{n-1} + P_{n-1}^n \alpha A_2) \cdot \right. \\ & \quad \cdot \alpha \ln(\varepsilon x - u_{1n-2}^c - u_{2n-2}^c) + P_{n-2}^{n-1} (\delta_2^{n-1} \ln(\gamma_{2n-1}^c) + \\ & + P_{n-1}^n \alpha A_2 \ln(\varepsilon - \gamma_{1n-1}^c - \gamma_{2n-1}^c) + P_{n-1}^n B_2) + P_{n-2}^{n-1} C_{2n-1} \omega_n \cdot \\ & \quad \cdot \sum_{t=n-1}^n \delta_2^t \ln(u_{2t}^a) + C_{2n-2} \sum_{n_2=n-1}^n \omega_{n_2} \sum_{t=n-2}^{n_2} \delta_2^t \ln(u_{2t}^a) - \\ & \quad \left. - V_2^N(n-2, x) \right) \rightarrow \max. \end{aligned}$$

Находя стратегии в линейном виде $u_{in-2}^c = \gamma_{in-2}^c x$, $i = 1, 2$, запишем условия первого порядка для задачи (45):

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\delta_1^{n-2}}{\gamma_{1n-2}^c} - \frac{\alpha P_{n-2}^{n-1} (\delta_1^{n-1} + \alpha A_1 P_{n-1}^n)}{\varepsilon - \gamma_{1n-2}^c - \gamma_{2n-2}^c} \right) \cdot \\ (46) \quad & \cdot (V_2^c(n-2, x) - V_2^N(n-2, x)) - \\ & \frac{P_{n-2}^{n-1} \alpha (\delta_2^{n-1} + \alpha A_2 P_{n-1}^n)}{\varepsilon - \gamma_{1n-2}^c - \gamma_{2n-2}^c} (V_1^c(n-2, x) - V_1^N(n-2, x)) = 0, \end{aligned}$$

$$(47) \quad \begin{aligned} & -\frac{\alpha P_{n-2}^{n-1}(\delta_1^{n-1} + \alpha A_1 P_{n-1}^n)}{\varepsilon - \gamma_{1n-2}^c - \gamma_{2n-2}^c} (V_2^c(n-2, x) - V_2^N(n-2, x)) + \\ & + \left(\frac{\delta_2^{n-2}}{\gamma_{2n-2}^c} - \frac{\alpha P_{n-2}^{n-1}(\delta_2^{n-1} + \alpha A_2 P_{n-1}^n)}{\varepsilon - \gamma_{1n-2}^c - \gamma_{2n-2}^c} \right) \cdot \\ & \cdot (V_1^c(n-2, x) - V_1^N(n-2, x)) = 0, \end{aligned}$$

$$(48) \quad \begin{aligned} & \left(\frac{P_{n-2}^{n-1} \delta_1^{n-1}}{\gamma_{1n-1}^c} - \frac{\alpha A_1 P_{n-2}^{n-1} P_{n-1}^n}{\varepsilon - \gamma_{1n-1}^c - \gamma_{2n-1}^c} \right) (V_2^c(n-2, x) - V_2^N(n-2, x)) - \\ & - \frac{P_{n-2}^{n-1} \alpha A_2 P_{n-1}^n}{\varepsilon - \gamma_{1n-1}^c - \gamma_{2n-1}^c} (V_1^c(n-2, x) - V_1^N(n-2, x)) = 0, \end{aligned}$$

$$(49) \quad \begin{aligned} & -\frac{\alpha A_1 P_{n-2}^{n-1} P_{n-1}^n}{\varepsilon - \gamma_{1n-1}^c - \gamma_{2n-1}^c} (V_2^c(n-2, x) - V_2^N(n-2, x)) + \\ & + \left(\frac{P_{n-2}^{n-1} \delta_2^{n-1}}{\gamma_{2n-1}^c} - \frac{\alpha A_2 P_{n-2}^{n-1} P_{n-1}^n}{\varepsilon - \gamma_{1n-1}^c - \gamma_{2n-1}^c} \right) \cdot \\ & \cdot (V_1^c(n-2, x) - V_1^N(n-2, x)) = 0. \end{aligned}$$

Вычитая (49) из (48) и (47) из (46), получим следующие равенства:

$$V_1^c(n-2, x) - V_1^N(n-2, x) = \frac{\delta_1^{n-2}}{\delta_2^{n-2}} \frac{\gamma_{2n-2}^c}{\gamma_{1n-2}^c} (V_2^c(n-2, x) - V_2^N(n-2, x)),$$

$$V_1^c(n-2, x) - V_1^N(n-2, x) = \frac{\delta_1^{n-1}}{\delta_2^{n-1}} \frac{\gamma_{2n-1}^c}{\gamma_{1n-1}^c} (V_2^c(n-2, x) - V_2^N(n-2, x))$$

и

$$(50) \quad \frac{\gamma_{2n-2}^c}{\gamma_{1n-2}^c} = \frac{\delta_1}{\delta_2} \frac{\gamma_{2n-1}^c}{\gamma_{1n-1}^c}.$$

Подставляя первое соотношение в (46), получим связь между кооперативными стратегиями игроков:

$$(51) \quad \begin{aligned} & \gamma_{2n-2}^c = \\ & = \frac{\delta_1^{n-2} \delta_2^{n-2} \varepsilon - \delta_2^{n-2} \gamma_{1n-2}^c (\delta_1^{n-2} + \alpha \delta_1^{n-1} P_{n-2}^{n-1} + \alpha^2 A_1 P_{n-2}^{n-1} P_{n-1}^n)}{\delta_1^{n-2} (\delta_2^{n-2} + \alpha \delta_2^{n-1} P_{n-2}^{n-1} + \alpha^2 A_2 P_{n-2}^{n-1} P_{n-1}^n)}. \end{aligned}$$

Обозначим

$$\begin{aligned} G_1^1 &= \delta_1^{n-1} + P_{n-1}^n \alpha A_1, & G_1^2 &= \delta_2^{n-1} + P_{n-1}^n \alpha A_1, \\ G_2^1 &= \delta_1^{n-2} + \alpha \delta_1^{n-1} P_{n-2}^{n-1} + \alpha^2 A_1 P_{n-2}^{n-1} P_{n-1}^n, \\ G_2^2 &= \delta_2^{n-2} + \alpha \delta_2^{n-1} P_{n-2}^{n-1} + \alpha^2 A_2 P_{n-2}^{n-1} P_{n-1}^n. \end{aligned}$$

Тогда стратегии (44) и (51) запишем в виде

$$\begin{aligned} \gamma_{2n-1}^c &= \frac{\delta_1^{n-1} \delta_2^{n-1} \varepsilon - \delta_2^{n-1} \gamma_{1n-1}^c G_1^1}{\delta_1^{n-1} G_1^2}, \\ \gamma_{2n-2}^c &= \frac{\delta_1^{n-2} \delta_2^{n-2} \varepsilon - \delta_2^{n-2} \gamma_{1n-2}^c G_2^1}{\delta_1^{n-2} G_2^2}. \end{aligned}$$

Используя (50), можно выразить стратегию второго игрока γ_{1n-2}^c на шаге $n - 2$ через стратегию первого игрока γ_{1n-1}^c на шаге $n - 1$:

$$\gamma_{1n-2}^c = \delta_1^{n-2} \varepsilon \frac{\gamma_{1n-1}^c G_1^2}{\delta_1^{n-1} \varepsilon G_2^2 + \gamma_{1n-1}^c (G_2^1 G_1^2 - G_1^1 G_2^2)}.$$

Тогда функции выигрыша примут вид

$$\begin{aligned} V_1^c(n-2, x) &= \delta_1^{n-2} \ln(u_{1n-2}^c) + \\ &+ \alpha P_{n-2}^{n-1} G_1^1 \ln(\varepsilon x - u_{1n-2}^c - u_{2n-2}^c) + P_{n-2}^{n-1} [\delta_1^{n-1} \ln(\gamma_{1n-1}^c) + \\ &+ P_{n-1}^n \alpha A_1 \ln(\varepsilon - \gamma_{1n-1}^c - \gamma_{2n-1}^c) + P_{n-1}^n B_1] + P_{n-2}^{n-1} C_{1n-1} \theta_n \cdot \\ &\cdot \sum_{t=n-1}^n \delta_1^t \ln(u_{1t}^a) + C_{1n-2} \sum_{n_1=n-1}^n \theta_{n_1} \sum_{t=n-2}^{n_1} \delta_1^t \ln(u_{1t}^a), \\ V_2^c(n-2, x) &= \delta_2^{n-2} \ln(u_{2n-2}^c) + \\ &+ \alpha P_{n-2}^{n-1} G_1^2 \ln(\varepsilon x - u_{1n-2}^c - u_{2n-2}^c) + P_{n-2}^{n-1} [\delta_2^{n-1} \ln(\gamma_{2n-1}^c) + \\ &+ P_{n-1}^n \alpha A_2 \ln(\varepsilon - \gamma_{1n-1}^c - \gamma_{2n-1}^c) + P_{n-1}^n B_2] + P_{n-2}^{n-1} C_{2n-1} \omega_n \cdot \\ &\cdot \sum_{t=n-1}^n \delta_2^t \ln(u_{2t}^a) + C_{2n-2} \sum_{n_2=n-1}^n \omega_{n_2} \sum_{t=n-2}^{n_2} \delta_2^t \ln(u_{2t}^a). \end{aligned}$$

Аналогичная процедура для случая, когда в игре наступает момент времени $n - 3$, дает кооперативные стратегии в виде

$$\gamma_{2n-3}^c = \frac{\delta_1^{n-3} \delta_2^{n-3} \varepsilon - \delta_2^{n-3} \gamma_{1n-3}^c G_3^1}{\delta_1^{n-3} G_3^2},$$

где

$$G_3^1 = \delta_1^{n-3} + \alpha \delta_1^{n-2} P_{n-3}^{n-2} + \alpha^2 \delta_1^{n-1} P_{n-3}^{n-2} P_{n-2}^{n-1} + \alpha^3 A_1 P_{n-3}^{n-2} P_{n-2}^{n-1} P_{n-1}^n,$$

$$G_3^2 = \delta_2^{n-3} + \alpha \delta_2^{n-2} P_{n-3}^{n-2} + \alpha^2 \delta_2^{n-1} P_{n-3}^{n-2} P_{n-2}^{n-1} + \alpha^3 A_2 P_{n-3}^{n-2} P_{n-2}^{n-1} P_{n-1}^n,$$

и

$$\gamma_{1n-3}^c = \frac{\delta_1^{n-3} \varepsilon \gamma_{1n-1}^c G_1^2}{\delta_1^{n-1} \varepsilon G_3^2 + \gamma_{1n-1}^c (G_3^1 G_1^2 - G_1^1 G_3^2)}.$$

Функции выигрыша примут вид

$$\begin{aligned} V_i^c(n-3, x) = & \delta_i^{n-3} \ln(u_{in-3}^c) + \alpha P_{n-3}^{n-2} G_2^i \ln(\varepsilon x - u_{1n-3}^c - u_{2n-3}^c) + \\ & + P_{n-3}^{n-2} [\delta_i^{n-2} \ln(\gamma_{1n-2}^c) + \alpha P_{n-2}^{n-1} \ln(\varepsilon - \gamma_{1n-2}^c - \gamma_{2n-2}^c)] + P_{n-3}^{n-2} P_{n-2}^{n-1} \cdot \\ & \cdot [\delta_i^{n-1} \ln(\gamma_{1n-1}^c) + P_{n-1}^n (\alpha A_i \ln(\varepsilon - \gamma_{1n-1}^c - \gamma_{2n-1}^c) + B_i)] + V_i^3(n_i), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} V_1^3(n_1) = & P_{n-3}^{n-2} P_{n-2}^{n-1} C_{1n-1} \theta_n \sum_{t=n-1}^n \delta_1^t \ln(u_{1t}^a) + \\ & + P_{n-3}^{n-2} C_{1n-2} \sum_{n_1=n-1}^n \theta_{n_1} \sum_{t=n-2}^{n_1} \delta_1^t \ln(u_{1t}^a) + \\ & + C_{1n-3} \sum_{n_1=n-2}^n \theta_{n_1} \sum_{t=n-3}^{n_1} \delta_1^t \ln(u_{1t}^a), \\ V_2^3(n_2) = & P_{n-3}^{n-2} P_{n-2}^{n-1} C_{2n-1} \omega_n \sum_{t=n-1}^n \delta_2^t \ln(u_{2t}^a) + \\ & + P_{n-3}^{n-2} C_{2n-2} \sum_{n_2=n-1}^n \omega_{n_2} \sum_{t=n-2}^{n_2} \delta_2^t \ln(u_{2t}^a) + \\ & + C_{2n-3} \sum_{n_2=n-2}^n \omega_{n_2} \sum_{t=n-3}^{n_2} \delta_2^t \ln(u_{2t}^a). \end{aligned}$$

Продолжая процесс до наступления в игре момента времени k , получим кооперативные выигрыши в виде (27) и кооперативные стратегии в виде (28), (29).

ASYMMETRY IN A COOPERATIVE BIORESOURCE MANAGEMENT PROBLEM

Vladimir Mazalov, Institute of Applied Mathematical Research Karelian Research Centre of RAS, Petrozavodsk, Doctor of Science, professor (vmazalov@krc.karelia.ru).

Anna Rettieva, Institute of Applied Mathematical Research Karelian Research Centre of RAS, Petrozavodsk, Cand.Sc., assistant professor (annaret@krc.karelia.ru).

Abstract: Discrete-time game-theoretic models related to a bioresource management problem (fishery) with asymmetric players are investigated. Players use different discount factors and have different random planning horizons. The main goal here is to construct the value function for the cooperative solution and to distribute the joint payoff among the players in asymmetric cases. We propose using the Nash bargaining solution to obtain cooperative profits and strategies. It is shown that cooperative behavior determined by bargaining schemas is not the only profitable one for players but is better for ecology.

Keywords: bioresource management problem, asymmetric players, Nash bargaining solution.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии М.В. Губко

Поступила в редакцию 30.01.2015.

Дата опубликования 31.05.2015.

УДК 519.83+519.86

ТЕОРЕТИКО-ИГРОВАЯ МОДЕЛЬ ТРЕХУРОВНЕВОЙ МАРКЕТИНГОВОЙ СИСТЕМЫ С УЧЕТОМ ЭКОЛОГИЧЕСКИХ ТРЕБОВАНИЙ¹

Назиров А. Э.², Угольницкий Г. А.³, Усов А. Б.⁴
(Южный федеральный университет, г. Ростов-на-Дону)

Представлена математическая модель, описывающая деятельность различных субъектов вертикальной маркетинговой системы с учетом экологических требований. В роли субъектов управления выступают: производитель, посредник, с которым у производителя заключен договор комиссии, и торговое предприятие, реализующее в розничной сети продукцию производителя. Предполагается, что основной целью производителя является выполнение экологических требований. Предложен алгоритм построения равновесия Штакельберга в игре трех лиц с учетом требования гомеостаза экологической подсистемы. В качестве метода иерархического управления используется метод побуждения. Приведен ряд характерных примеров с последующей интерпретацией полученных результатов.

Ключевые слова: иерархия, трехуровневая система управления, метод побуждения, гомеостаз, равновесие Штакельберга.

¹ Работа поддержана Южным федеральным университетом, проект №213.01-07-2014/07ПЧВГ.

² Адалят Эльшанович Назиров, аспирант (aenazirov@gmail.com).

³ Геннадий Анатольевич Угольницкий, доктор физико-математических наук, профессор (ougoln@mail.ru).

⁴ Анатолий Борисович Усов, доктор технических наук, профессор (usov@math.rsu.ru).

1. Введение

В последние десятилетия наблюдается усиление воздействия техногенных процессов на экологическую систему. Это создает опасность истощения как невозобновляемых, так и возобновляемых ресурсов и может привести к экологической катастрофе. Поэтому разработка механизмов управления сложными эколого-экономическими системами является одной из актуальных задач, которой посвящено значительное количество работ [1, 7, 9, 10, 14].

Моделирование эколого-экономических систем начиналось с использования одноуровневых моделей. Системы такого рода содержат только один субъект управления. Экологическая подсистема выступает в роли объекта управления. В таких моделях не учитывается многообразие связей экономической и экологической подсистем, всевозможные виды воздействий на окружающую среду со стороны субъектов управления. Поэтому в последние десятилетия при анализе эколого-экономических систем используется теория иерархических систем управления [11, 14], в концепции которых учитывается специфика механизмов управления реальными эколого-экономическими объектами. Простейшей иерархически организованной системой управления является двухуровневая система, включающая в себя управляющую подсистему, состоящую из двух иерархически соподчиненных субъектов управления (Ведущий, Ведомый), а также экологическую систему в роли объекта управления [10, 14]. Но существует множество экономических объектов, эффективное функционирование которых невозможно при использовании системы управления двухуровневой структуры. В этих случаях необходимо учитывать потребности в дополнительных субъектах управления, относящихся к разным, иерархически соподчиненным уровням. Поэтому наряду с двухуровневыми системами управления эколого-экономическими объектами распространены трехуровневые системы, в состав которых входят субъекты управления верхнего, среднего и нижнего уровней. Такие системы управления более точно отражают структуру взаимоотношений между хозяйствующими субъектами [11].

Хозяйствующие субъекты могут формировать маркетинговые системы (каналы) с целью обеспечения конкурентоспособности, оптимизации производства и уменьшения издержек [2]. Моделирование маркетинговых каналов началось с использования систем, в состав которых входило только два субъекта управления: производитель и торговое предприятие [16]. Исследование таких систем базировалось на использовании двух основных информационных регламентов: согласованного (кооперативного) и несогласованного (некооперативного). Существуют различные способы взаимодействия субъектов управления, входящих в маркетинговые каналы. Одним из таких способов является иерархическая соподчинённость.

Исследование маркетинговых систем, как правило, не учитывает характер деятельности субъектов управления. Однако нередко активность производственных компаний базируется на использовании природных ресурсов, чрезмерное употребление которых может привести к экологической катастрофе. Отсюда возникает необходимость перехода к рассмотрению эколого-экономической системы в рамках концепции управления устойчивым развитием [9].

В соответствии с действующим законодательством выброс вредных (загрязняющих) веществ в атмосферный воздух стационарным источником допускается на основании разрешения, выданного территориальным органом федерального органа исполнительной власти в области охраны окружающей среды [1]. Под стационарными источниками выброса вредных (загрязняющих) веществ в атмосферный воздух понимаются все источники, относящиеся к конкретной территории предприятия. Разрешением на выброс вредных (загрязняющих) веществ в атмосферный воздух устанавливаются предельно допустимые выбросы и другие условия, которые обеспечивают охрану атмосферного воздуха.

Выброс вредных веществ в атмосферный воздух или вредное физическое воздействие на него без специального разрешения, а также нарушение его условий влечет наложение административного штрафа или приостановление деятельности предприятия. Поэтому с определенной степенью условности предположим, что основной целью производственной компании,

в процессе производства загрязняющей окружающую среду, является выполнение экологических нормативов и, тем самым, поддержание системы в гомеостазе. Компания стремится к максимизации собственной прибыли при условии обязательного выполнения экологических требований.

Успешное исследование любых экономических объектов невозможно без комплексного подхода к проблеме управления. Изучение различного рода систем управления проходит в рамках теории активных систем [6], теории иерархических игр [3], а также теории контрактов [8]. Большое количество результатов при исследовании иерархических систем получено для статической постановки задачи. Полученные результаты основаны на понятии равновесия по Штакельбергу [5] и принципе гарантированного результата Гермейера [3].

В данной работе строится и исследуется трехуровневая модель, описывающая взаимодействие субъектов вертикальной маркетинговой системы: производителя (ПР), посредника (ПС) и торгового предприятия (ТП) [2]. Взаимоотношения ПР и ПС происходят в соответствии с договором комиссии или агентским договором.

Наличие иерархии в отношениях между субъектами управления обусловлено порядком принятия ими решений. Этот факт определяет инструментарий исследования построенной модели [13]. Предполагается, что основной целью ПР является поддержание системы в заданном состоянии [1, 9]. Строится равновесие Штакельберга с учетом требования поддержания системы в заданном состоянии. В качестве метода иерархического управления в предложенной модели используется побуждение [9].

2. Математическая постановка задачи

Основная цель любого экономического субъекта состоит в увеличении собственной прибыли. Важную роль в достижении этой цели играет способ движения товара от производителя к конечному потребителю. Система, включающая в себя ряд организаций, которые принимают на себя или помогают передать другому право собственности на конкретный товар на пути от производителя к потребителю, называется каналом распре-

ления продукции [2]. Выделяют традиционные каналы распределения, вертикальные маркетинговые системы и горизонтальные маркетинговые системы.

Ниже рассматривается трехуровневая модель управления вертикальной маркетинговой системой с учетом экологических требований, включающая:

- производителя (ПР);
- посредника (ПС);
- торговое предприятие (ТП).

В качестве объекта управления выделяются потребители. Взаимоотношения между субъектами управления данной системы носят следующий характер: ПР воздействует на ПС, ПС – на ТП [9].

Исследование основано на концепции равновесия по Штакельбергу с учетом требования устойчивого развития системы [10–11], а именно, предполагается, что принята следующая совокупность правил относительно поведения и информированности различных субъектов управления:

1. ПР выбирает свою стратегию поведения первым и сообщает ее субъекту управления среднего уровня, т.е. ПС; при этом он максимизирует свою прибыль с учетом оптимального ответа ПС на множестве тех стратегий, которые позволяют поддержать всю систему в заданном состоянии. Предполагается, что ПР известны целевые функции ПС и ТП.

2. ПС выбирает свою стратегию, когда выбор ПР известен; он стремится к достижению своих целей. После того как выбор сделан, он сообщает свое решение ТП. ПС действует от имени ПР.

3. ТП выбирает свою стратегию, когда выбор ПР и ПС известен; он стремится к достижению экономических целей, не обращая внимания на состояние окружающей среды.

Деятельность ПР связана с производством строительных материалов из древесины. Данное производство сопровождается выбросом загрязняющих веществ в атмосферный воздух. В соответствии с действующим законодательством для осуществления деятельности, сопровождающейся выбросом ЗВ в атмосферу, производственная компания нуждается в получении

специального разрешения и обязуется выполнять его условия. В противном случае деятельность компании может быть приостановлена или повлечь за собой административное наказание в виде штрафа. Поэтому предположим, что основной целью ПР является поддержание системы в заданном состоянии (состоянии гомеостаза). Будем считать, что система находится в гомеостазе, если количество загрязняющих веществ (ЗВ), поступающих в атмосферу при производстве строительных материалов, соответствует требованиям, описанным в специальном разрешении. ТП действует от собственного имени, но используя товары и товарные знаки ПР. ТП занимается продажей строительных материалов, приобретаемых у ПР через ПС. ТП стремится к максимизации своей прибыли, управляя размером своей наценки на стоимость продукции, по которой оно приобретает товар у ПР.

Подобная организация взаимоотношений обуславливает иерархию в отношениях между субъектами управления системы, в соответствии с которой ПР выступает в качестве субъекта управления верхнего уровня, ПС – среднего, а ТП – нижнего уровня.

Основной целью ПР является выполнение экологических требований. Данное условие может быть выполнено не единственным образом, поэтому, кроме того, ПР стремится к максимизации прибыли, полученной в результате реализации произведенной продукции. Он реализует продукцию через ПС, с которым у него заключен договор комиссии. В соответствии с данным договором ПР выступает в роли комитента, а ПС – комиссионера.

ПР предоставляет ПС товар по базовой цене, которой ПР может управлять. ПС может менять (увеличивать или уменьшать) цену, установленную ПР, в пределах, оговоренных договором комиссии. ПС управляет величиной собственной наценки или скидки к цене ПР. Согласно договору комиссии ПС за оказанные им услуги получает комиссионное вознаграждение, величина которого зависит от объема проданной им продукции.

Пусть ПР производит и продает товары одного типа. Кроме того, имеется одно ТП, которому ПР через ПС продает свой товар.

ТП стремится к максимизации своей прибыли. При этом оно несет фиксированные и переменные затраты. Фиксированные затраты, в отличие от переменных, не зависят от объема продаваемой продукции.

Целостное отражение любой реальной системы управления возможно лишь в рамках динамической модели, описывающей процесс развития иерархически управляемой системы и позволяющей учесть требование устойчивого развития. Однако в рамках данной работы в качестве модельной рассматривается статическая поставка задачи, на примере которой удобно продемонстрировать методы иерархического управления и способы учета экологических требований.

Целевая функция ТП имеет вид

$$(1) \quad J_{ТП} = (c_{ТП} - s \cdot P_{ТП} - S_{RS}) \cdot V(P_{ТП}) \rightarrow \max_{c_{ТП}}$$

$$(2) \quad P_{ТП} = P_{ПС} + c_{ТП},$$

$$(3) \quad V(P_{ТП}) = \frac{A}{(P_{ТП})^\alpha},$$

где $P_{ПС}$, $P_{ТП}$ – цена единицы продукции у ПС и ТП соответственно; $c_{ТП}$ – наценка ТП; $V(P_{ТП})$ – объем продаваемой ТП продукции; он зависит от цены $P_{ТП}$ с постоянным коэффициентом эластичности α ; $c_{ТП} \cdot V(P_{ТП})$ – доход ТП от реализации продукции; $s = const$ – доля выручки ТП, выделяемая в фонд заработной платы ($s \in (0, 1)$); $S_{RS} = const$ – средства, которые ТП тратит на хранение единицы продукции ($S_{RS} > 0$).

Предполагается, что товар, который продает ТП, является эластичным, т.е. $|\alpha| > 1$; A , $\alpha = const$.

ПС получает от ТП заказ на товар в количестве $V(P_{ТП})$ и направляет его на исполнение ПР. ПР поставляет готовую продукцию ПС, а тот, в свою очередь, ТП. ПС тратит собственные средства на повышение своей квалификации, аренду офиса и использование средств связи. Целевая функция ПС имеет вид

$$(4) \quad J_{ПС} = (1 - \text{cost}_{ПС}) \cdot b \cdot P_{ПР} \cdot V(P_{ТП}) \rightarrow \max_{c_{ПС}}$$

$$(5) \quad P_{ПС} = P_{ПР} \cdot (1 + c_{ПС}).$$

Здесь $c_{ПС}$ – наценка ПС; $c_{ПСmin}$ – размер минимальной наценки ПС, указанный в договоре комиссии; b – величина комиссионных за единицу проданной продукции; $P_{ПС}$ – цена единицы продукции у ПС; $b \cdot P_{ПП} \cdot V(P_{ТП})$ – комиссионные, получаемые от ПР, за единицу проданного товара; они зависят от количества реализованной продукции; $cost_{ПС}$ – доля средств от общей выручки ПС, которую составляют переменные затраты.

Основной целью ПР, следуя [9], является поддержание системы в гомеостазе. Будем считать, что система находится в гомеостазе, если выполнено неравенство

$$(6) \quad M_{II}(V) < M_{II\max};$$

$$M_{II}(V) = \frac{K_0 \cdot Y \cdot T(V)}{10^3} \left(1 - \frac{\mu}{100}\right); \quad T(V) = t_0 \cdot V,$$

где $M_{II\max}$ – максимальный возможный объем сброса ЗВ в окружающую среду, установленный государством; $M_{II}(V)$ – количество попадающих в окружающую среду загрязнений, определяется количеством выбросов деревообрабатывающего производства при изготовлении V единиц продукции; K_0 – коэффициент эффективности местных отсосов, принимается равным 0,9 (при необходимости уточняется на основе инструментальных замеров); Y – удельный показатель пылеобразования на единицу оборудования (кг/ч); T – время работы технологического оборудования (ч); μ – степень очистки воздуха пылеулавливающим оборудованием; t_0 – время работы технологического оборудования для производства единицы продукции.

Выполнения условия (6) ПР может добиться не единственным образом, поэтому, кроме того, он стремится к увеличению собственного дохода. ПР управляет базовой стоимостью продукции $P_{ПП}$. ПР расходует средства на оплату услуг связи, рекламу и аренду склада. Эти затраты не зависят от объема продаж. Кроме того, ПР тратит средства на выплату комиссионных ПС, зарплату сотрудникам, а также закупку сырья. Эти затраты зависят от объема проданной продукции.

Целевая функция ПР имеет вид

$$(7) \quad J_{PP} = (P_{ПС} - (cost_{ПП} + b) \cdot P_{ПП} - z_s) \cdot V(P_{ТП}) \rightarrow \max_{P_{ПП}},$$

где $FC_{PP} = \text{const}$ – фиксированные затраты ПР; $cost_{PP}$ – размер переменных затрат; z_s – стоимость хранения одной единицы продукции у ПР.

Описанная выше задача решается при следующих ограничениях на управления:

ПР

$$(8) \quad P_{PP\min} \leq P_{PP} \leq P_{PP\max};$$

ПС

$$(9) \quad c_{PC\min} \leq c_{PC} \leq c_{PC\max};$$

ТП

$$(10) \quad c_{TP\min} \leq c_{TP} \leq c_{TP\max};$$

где $P_{PP\min}$, $P_{PP\max}$ – размер минимальной и максимальной цены единицы продукции у ПР; $c_{PC\min}$, $c_{PC\max}$ ($c_{TP\min}$, $c_{TP\max}$) – размер минимальной и максимальной наценки ПС (ТП) на единицу продукции.

3. Методы исследования модели

Исследуемая модель описывается системой уравнений и неравенств (1)–(10) и представляет собой иерархическую игру трех лиц [9]. Выделяют две основные группы методов управления в иерархических структурах [13]:

Принуждение, при котором субъект заставляет его способствовать достижению цели субъекта, не принимая во внимание цели и интересы объекта. Субъект воздействует на множество допустимых стратегий объекта.

Побуждение, при котором субъект создает объекту такие условия, что ему выгодно способствовать достижению цели субъекта и не выгодно обратное. Субъект воздействует на функцию выигрыша объекта с обратной связью

Таким образом, возникают четыре информационных регламента для иерархической игры трех лиц: 1) ПР и ПС используют принуждение; 2) ПР использует принуждение, ПС – побуждение; 3) ПР использует побуждение, ПС – принуждение; 4) ПР и ПС используют побуждение [13].

Исследование проводится для случая, когда субъекты управления верхнего и среднего уровней используют побуждение в качестве метода иерархического управления. Предлагается следующий алгоритм нахождения равновесия побуждения в описанной системе.

Решается задача (1)–(3), (10). Определяется оптимальная для ТП наценка, которая зависит от стоимости единицы продукции у ПС, т.е. от $P_{ПС}$ и $c_{ПР}$. Обозначим ее через $c_{ТП}^*(P_{ПР}, c_{ПС})$.

Решается задача (4)–(5), (9) при $c_{ТП} = c_{ТП}^*(P_{ПР}, c_{ПС})$. Определяется оптимальное управление ПС в зависимости от величины $P_{ПР}$. Обозначим его $c_{ПС}^*(P_{ПР})$.

Найденные на первом и втором шагах алгоритма величины $c_{ТП}^*(P_{ПР}, c_{ПС}^*(P_{ПР}))$ и $c_{ПС}^*(P_{ПР})$ подставляются в (6)–(8). Определяется оптимальная для ПР стоимость единицы продукции $P_{ПР}^*$.

Решение модели (1)–(10) $\{P_{ПР}^*, c_{ПС}^*(P_{ПР}^*), c_{ТП}^*(P_{ПР}^*, c_{ПС}^*(P_{ПР}^*))\}$ назовем равновесием Штакельберга в игре трех лиц.

Задачи, сформулированные на 1–3 шагах алгоритма, представляют собой нелинейные задачи условной оптимизации, решаемые с учетом иерархии в отношениях между субъектами управления.

Пусть наложены следующие ограничения на входные параметры субъектов управления:

ТП

$$0 \leq s < 1; 0 < S_{RS}; 0 < A; \alpha > 1;$$

ПС

$$0 < b < 1; 0 < \text{cost}_{ПС} < 1; -1 < c_{ПС\min};$$

ПР

$$(1 + c_{ПС\min}) > \text{cost}_{ПР} + b.$$

Тогда равновесие Штакельберга с учетом требования поддержания системы в заданном состоянии, а также при полной информированности игроков, строится аналитически методом множителей Лагранжа.

В соответствии с первым шагом алгоритма, ТП максимизирует свою целевую функцию (1) с учетом полученной от ПР и ПС информации, а именно, значений базовой цены ПР и наценки ПС. Используя метод множителей Лагранжа, получим, что оптимальное управление ТП выглядит следующим образом:

$$c_{ТП}^* = \begin{cases} c_{ТП\min}, & \text{если } c_{ПС} < c_{01}, \\ c_{ТП}^0, & \text{если } c_{ПС} \in [c_{01}, c_{02}), \\ c_{ТП\max}, & \text{если } c_{ПС} \geq c_{02}; \end{cases}$$

где

$$c_{01} = \frac{c_{ТП\min}(\alpha - 1)(1 - s) - \alpha S_{RS}}{(1 - s + \alpha s) \cdot P_{ПП}} - 1;$$

$$c_{02} = \frac{c_{ТП\max}(\alpha - 1)(1 - s) - \alpha S_{RS}}{(1 - s + \alpha s) \cdot P_{ПП}} - 1;$$

$$c_{ТП}^0 = \frac{(1 - s + \alpha s) \cdot P_{ПП}(1 + c_{ПС}) + \alpha S_{RS}}{(\alpha - 1)(1 - s)}.$$

На следующем шаге алгоритма ПС максимизирует свою целевую функцию (4), опираясь на значение базовой стоимости единицы продукции, полученной от ПР, а также на управление ТП, определенное на предыдущем шаге. При решении данной задачи область допустимых управлений ПС разбивается на несколько непересекающихся подмножеств, в зависимости от значений входных параметров.

Например, если выполняется следующая система неравенств

$$\begin{cases} c_{01} < c_{ПС\min}, \\ c_{ПС\min} < c_{02} \leq c_{ПС\max}; \end{cases}$$

то область допустимых управлений делится на два отрезка: $[c_{ПС\min}, c_{02})$ и $[c_{02}, c_{ПС\max}]$.

Если выполняются система неравенств

$$\begin{cases} c_{ПС\min} < c_{01}, \\ c_{ПС\max} \geq c_{02}; \end{cases}$$

то – на три отрезка: $[c_{ПС\min}, c_{01})$, $[c_{01}, c_{02})$ и $[c_{02}, c_{ПС\max}]$.

Однако оптимальное управление ПС, вне зависимости от значений входных параметров, имеет вид $c_{ПС}^* = c_{ПС\min}$.

Задача ПР исследуется аналитически методом множителей Лагранжа. На данном этапе определяется базовая стоимость единицы продукции с учетом значений параметров управления

ПС и ТП, а также требования поддержания системы в заданном состоянии. Ниже приведено несколько примеров.

Введем обозначения

$$P_{01} = \frac{c_{ТП\min}(\alpha-1)(1-s) - \alpha \cdot S_{RS}}{(1-s + \alpha s) \cdot (c_{ПС\min} + 1)},$$

$$P_{02} = \frac{c_{ТП\max}(\alpha-1)(1-s) - \alpha \cdot S_{RS}}{(1-s + \alpha s) \cdot (c_{ПС\min} + 1)},$$

$$P_0^0 = \frac{z_s \alpha (1 + c_{ПС\min}) + ((1 + c_{ПС\min}) - (\mathbf{cost}_{ПП} + b)) c_{ТП\min}}{(1 + c_{ПС\min})(\alpha - 1)((1 + c_{ПС\min}) - (\mathbf{cost}_{ПП} + b))},$$

$$P_1^0 = \frac{\alpha S_{RS}}{(\alpha - 1)(1 - s)} \frac{((1 + c_{ПС\min}) - (\mathbf{cost}_{ПП} + b)) + \alpha z_s L}{(\alpha - 1) \cdot L((1 + c_{ПС\min}) - (\mathbf{cost}_{ПП} + b))},$$

$$P_2^0 = \frac{c_{ТП\max}((1 + c_{ПС\min}) - (\mathbf{cost}_{ПП} + b)) + \alpha z_s (1 + c_{ПС\min})}{(\alpha - 1)(1 + c_{ПС\min})((1 + c_{ПС\min}) - (\mathbf{cost}_{ПП} + b))},$$

$$L = (1 + c_{ПС\min}) + \frac{(1 - s + \alpha s)(1 + c_{ПС\min})}{(\alpha - 1)(1 - s)}.$$

Если выполняется ограничение на область допустимых управлений ПР

$$P_{ПП\max} \leq \frac{c_{ТП\min}(\alpha-1)(1-s) - \alpha S_{RS}}{(1-s + \alpha s) \cdot (c_{ПС\min} + 1)},$$

то управление ПР принимает вид

$$P_{ПП}^* = \begin{cases} P_{ПП\max}, P_0^0 \geq P_{ПП\max} \text{ и } P_{ПП\max} < P_{01}, \\ P_0^0, P_{ПП\min} \leq P_0^0 < P_{ПП\max} \text{ и } P_{ПП\max} < P_{01}, \\ P_{ПП\min}, P_{ПП\min} > P_0^0 \text{ и } P_{ПП\max} < P_{01}. \end{cases}$$

Если

$$\begin{cases} \frac{c_{ТП\min}(\alpha-1)(1-s) - \alpha S_{RS}}{(1-s + \alpha s) \cdot (c_{ПС\min} + 1)} \leq P_{ПП\min}, \\ P_{ПП\max} < \frac{c_{ТП\max}(\alpha-1)(1-s) - \alpha S_{RS}}{(1-s + \alpha s) \cdot (c_{ПС\min} + 1)}; \end{cases}$$

ТО

$$P_{PP}^* = \begin{cases} P_{PP\max}, P_1^0 \geq P_{PP\max} \text{ и } P_{PP\max} < P_{02} \text{ и } P_{PP\min} > P_{01}, \\ P_1^0, P_{PP\min} \leq P_1^0 < P_{PP\max} \text{ и } P_{PP\max} < P_{02} \text{ и } P_{PP\min} > P_{01}, \\ P_{PP\min}, P_{PP\min} > P_1^0 \text{ и } P_{PP\max} < P_{02} \text{ и } P_{PP\min} > P_{01}. \end{cases}$$

При ограничениях вида

$$P_{PP\min} \geq \frac{c_{ТП\max}(\alpha - 1)(1 - s) - \alpha S_{RS}}{(1 - s + \alpha s) \cdot (c_{ПС\min} + 1)}$$

оптимальное управление ПР принимает вид

$$P_{PP}^* = \begin{cases} P_{PP\max}, P_2^0 \geq P_{PP\max} \text{ и } P_{PP\min} \geq P_{02}, \\ P_2^0, P_{PP\min} \leq P_2^0 < P_{PP\max} \text{ и } P_{PP\min} \geq P_{02}, \\ P_{PP\min}, P_{PP\min} > P_2^0 \text{ и } P_{PP\min} \geq P_{02}. \end{cases}$$

Таким образом, оптимальная стратегия ПР P_{PP}^* принимает одно из девяти значений в зависимости от значений входных параметров: $P_{PP\min}, P_{PP\max}, P_0^0, P_1^0, P_2^0, P_{01}, (P_{01} - \varepsilon), P_{02}, (P_{01} - \varepsilon)$.

Равновесие Штакельберга имеет вид: $\{P_{PP}^*, c_{ПС}^*, c_{ТП}^*\}$.

4. Результаты расчетов

Приведем несколько примеров численного исследования модели (1)–(10).

Пример 1. В системе для следующего набора входных параметров (у.е. – стоимость в условных единицах; т – тонна):

$A = 10000$; $\alpha = 1,35$; $c_{ТП\min} = 2$ у.е.; $c_{ТП\max} = 50$ у.е.;
 $FC_{ТП} = 50$ у.е.; $s = 0,1$; $S_{RS} = 0,3$ у.е.; $c_{ПС\min} = -0,2$; $c_{ПС\max} = 1,5$;
 $cost_{ПС} = 0,3$; $b = 0,3$; $P_{PP\min} = 10$ у.е.; $P_{PP\max} = 200$ у.е.;
 $M_{П\max} = 10$ т; $cost_{ПП} = 0,2$; $FC_{ПП} = 100$ у.е.; $z_s = 0,5$ у.е.

оптимальные стратегии субъектов управления имеют вид:

$c_{ТП}^* = c_{ТП\max} = 50$ у.е.; $c_{ПС}^* = c_{ПС\min} = -0,2$; $P_{PP}^* = P_2^0 = 185$ у.е.

Доходы субъектов управления в равновесии равны

$J_{PP} = 285,9$ у.е.; $J_{ПС} = 262,0$ у.е.; $J_{ТП} = 159,1$ у.е.

Здесь $J_{PP}, J_{ПС}, J_{ТП}$ – доходы ПР, ПС и ТП соответственно.

Пример 2. В случае входных данных примера 1 и $\alpha = 1,55$ получим, что

$c_{ТП}^* = c_{ТП}^0 = 18$ у.е.; $c_{ПС}^* = c_{ПС\min} = -0,2$; $P_{PP}^* = P_{PP\min} = 10$ у.е.;

$$J_{\text{ПР}} = 51,3 \text{ у.е.}; J_{\text{ПС}} = 114,4 \text{ у.е.}; J_{\text{ТП}} = 780,1 \text{ у.е.}$$

Следовательно, с ростом коэффициента эластичности прибыль ТП растет, а ПР и ПС – падает. Таким образом, увеличение спроса на продукцию побуждает ПР к увеличению объема производства, и как следствие, увеличение объемов выбросов ЗВ в атмосферу. Деятельность ПР может быть приостановлена за нарушение условий разрешения на выброс ЗВ.

Пример 3. В случае входных данных примера 1 и $P_{\text{ПРmax}} = 50$ у.е. имеем:

$$c_{\text{ТП}}^* = c_{\text{ТПmax}} = 50 \text{ у.е.}; c_{\text{ПС}}^* = c_{\text{ПСmin}} = -0,2;$$

$$P_{\text{ПР}}^* = P_{\text{ПРmax}} = 50 \text{ у.е.};$$

$$J_{\text{ПР}} = 198,5 \text{ у.е.}; J_{\text{ПС}} = 205,3 \text{ у.е.}; J_{\text{ТП}} = 753,3 \text{ у.е.}$$

С уменьшением максимально возможной стоимости единицы товара у ПР для него оптимальным становится именно это значение цены единицы продукции. Прибыль ТП в этом случае возрастает по сравнению с примером 1, прибыли ПС и ПР – падают.

Пример 4. В случае входных данных примера 1 и $A = 5000$:

$$c_{\text{ТП}}^* = c_{\text{ТПmax}} = 50 \text{ у.е.}; c_{\text{ПС}}^* = c_{\text{ПСmin}} = -0,2; P_{\text{ПР}}^* = P_2^0 = 185 \text{ у.е.};$$

$$J_{\text{ПР}} = 100,5 \text{ у.е.}; J_{\text{ПС}} = 131,0 \text{ у.е.}; J_{\text{ТП}} = 58,3 \text{ у.е.}$$

Снижение объема производства у ПР влечет за собой снижение прибыли всех субъектов управления системы.

Пример 5. В случае входных данных примера 1 и $c_{\text{ТПmax}} = 5$ у.е. получим:

$$c_{\text{ТП}}^* = c_{\text{ТПmax}} = 5 \text{ у.е.}; c_{\text{ПС}}^* = c_{\text{ПСmin}} = -0,2; P_{\text{ПР}}^* = P_2^0 = 50 \text{ у.е.};$$

$$J_{\text{ПР}} = 686,5 \text{ у.е.}; J_{\text{ПС}} = 579,9 \text{ у.е.}; J_{\text{ТП}} = 214,1 \text{ у.е.}$$

Снижение величины максимально допустимой наценки ТП влечет увеличение прибыли ПР и ПС и снижение прибыли ТП.

5. Заключение

В работе на основе теоретико-игрового и иерархического подходов:

– предложена математическая модель системы управления вертикальной маркетинговой системой;

– введено понятие равновесия Штакельберга в игре трех лиц с учетом требований поддержания системы в заданном состоянии, указан алгоритм его построения.

Исследование предложенной модели проводится аналитически методом множителей Лагранжа. Выявлены основные закономерности функционирования системы при учете экологических требований, а именно:

1. Увеличение объема продаж влечет за собой увеличение прибыли всех субъектов управления, однако при большом объеме производства происходит нарушение экологических требований. С ростом коэффициента эластичности (α) происходит снижение прибыли ПС и ПР.
2. Уменьшение максимально допустимой скидки, предоставляемой ПС, приводит к увеличению прибыли ПР. ПС выгодно предоставить ТП максимально возможную скидку. При увеличении размера комиссионных прибыль ПС увеличивается, а ТП и ПР – снижается.
3. Для ПР выгоднее платить комиссионные ПС, исходя не из собственной цены, а из цены ПС; ТП выгодно, чтобы комиссионные рассчитывались исходя из цены ПР. При низкой эластичности товара суммарная прибыль всех субъектов управления выше при расчете комиссионных исходя из цены ПС.

Отметим, что исследованный в работе механизм взаимодействия субъектов управления в той или иной мере находит отражение во взаимодействии ряда мебельных фабрик, их региональных представителей, дилеров и индивидуальных предпринимателей Ростовской области.

Литература

1. БУРКОВ В.Н., НОВИКОВ Д.А., ЩЕПКИН А.В. *Механизмы управления эколого-экономическими системами*. – М.: Физматлит, 2008. – 208 с.
2. ГОЛУБКОВ Е.П. *Основы маркетинга*. – М.: Издательство «Финпресс», 1999. – 656 с.
3. ГОРЕЛИК В.А., ГОРЕЛОВ М.А., КОНОНЕНКО А.Ф. *Анализ конфликтных ситуаций в системах управления*. – М.: Радио и связь, 1991. – 288 с.
4. ЗЕНКЕВИЧ Н.А., ПЕТРОСЯН Л.А., ЯНГ Д.В.К. *Динамические игры и их приложение в менеджменте*. – СПб.: Изд-во Высшая школа менеджмента, 2009. – 415 с.

5. МУЛЕН Э. *Теория игр с примерами из математической экономики*. – М.: Мир, 1985. – 200 с.
6. НОВИКОВ Д.А. *Теория управления организационными системами*. – М.: Физматлит, 2012. – 584 с.
7. МАСЛЕННИКОВА И.С., КУЗНЕЦОВ Л.М., ПШЕНИН В.Н. *Экологический менеджмент*. – СПб.: СПбГИЭУ, 2005. – 200 с.
8. ТАМБОВЦЕВ В.Л. *Введение в экономическую теорию контрактов: Учебное пособие*. – М.: Инфра-М, 2004. – 144 с.
9. УГОЛЬНИЦКИЙ Г.А. *Иерархическое управление устойчивым развитием*. – М.: Физматлит, 2010. – 336 с.
10. УГОЛЬНИЦКИЙ Г.А., УСОВ А.Б. *Математическая формализация методов иерархического управления эколого-экономическими системами // Проблемы управления*. – 2007. – №4. – С. 64–69.
11. УГОЛЬНИЦКИЙ Г.А., УСОВ А.Б. *Управление сложными эколого-экономическими системами // Автоматика и телемеханика*. – 2009. – №5. – С. 169–179.
12. УГОЛЬНИЦКИЙ Г.А., УСОВ А.Б. *Исследование дифференциальных моделей иерархических систем управления посредством их дискретизации // Автоматика и телемеханика*. – 2013. – №2. – С. 109–123.
13. УГОЛЬНИЦКИЙ Г.А., УСОВ А.Б. *Равновесия в моделях иерархически организованных динамических систем управления с учетом требований устойчивого развития // Автоматика и телемеханика*. – 2014. – №6. – С. 86–102.
14. УСОВ А.Б. *Модели иерархического управления качеством водных ресурсов*. – Ростов-на-Дону: ЦВВР, 2006. – 256 с.
15. BASAR T., OLSDER G.J. *Dynamic Noncooperative Game Theory, 2nd ed.* – Academic Press, London, 1999. – 428 p.
16. JORGENSEN S., ZACCOUR G. *Differential Games in Marketing*. – International Series in Quantitative Marketing, Kluwer Academic Publishers, 2004. – 176 p.
17. LEE E., STAELIN R. *Vertical Strategic Interaction: Implications for Channel Pricing Strategy // Marketing Science*. – 1997. – No.16. – P. 185–207.

GAME-THEORETICAL MODEL OF THREE-LEVEL MARKETING SYSTEM CONSIDERING ENVIRONMENTAL REQUIREMENTS

Adalyat Nazirov, Southern Federal University, Rostov-on-Don,
postgraduate student (aenazirov@gmail.com)

Gennady Ougolnitsky, Southern Federal University, Rostov-on-
Don, Doctor of Sciences, Professor (ougoln@mail.ru)

Anatoly Usov, Southern Federal University, Rostov-on-Don, Doctor
of Sciences, Professor (usov@math.rsu.ru)

Abstract. A novel mathematical model is introduced to express activities of parties in a vertical marketing system. The parties are represented with a manufacturer, a mediator, and a trading enterprise. The relationship between the manufacturer and the mediator is governed by a commission contract. The manufacturer produces goods while the mediator represents her interests to the trading enterprise, and the trading enterprise sells products. The model is based on the game-theoretic and hierarchical approaches. A Stackelberg equilibrium considering the requirements of sustainable development is found. The impulsion method is used as a tool of hierarchical control when solving this model. A number of typical examples followed by the interpretation are presented.

Keywords: hierarchy, three-level control system, Stackelberg equilibrium, impulsion equilibrium.

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии Д.А. Новиковым*

*Поступила в редакцию 13.02.2015.
Опубликована 31.05.2015.*

УДК 519.6:532.5

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ИГРОВАЯ МОДЕЛЬ ПРЕДОТВРАЩЕНИЯ ЗАМОРОВ В МЕЛКОВОДНЫХ ВОДОЕМАХ¹

Никитина А. В.², Пучкин М. В.³, Семенов И. С.⁴,
Сухинов А. И.⁵, Угольницкий Г. А.⁶, Усов А. Б.⁷,
Чистяков А. Е.⁸

(Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону)

Статья посвящена построению и исследованию дифференциально-игровой модели предотвращения заморозов в мелководных водоемах. Предложены алгоритмы исследования модели в случае информационных регламентов динамических игр Гермейера Γ_{1x} и Γ_{2x} . Задача решается численно с помощью разработанного параллельного алгоритма, учитывающего архитектуру суперЭВМ с распределенной памятью. Предлагаемый алгоритм численного решения поставленной задачи на суперЭВМ с использованием метода k -средних позволит существенно сократить время работы программного комплекса, численно реализующего модельную задачу динамики взаимодействующих популяций в Азовском море. Разработанные модели используются для прогнозирования изменения биомассы

¹ Работа выполнена при поддержке Южного федерального университета, проект №213.01-07.2014/07ПЧВГ.

² Алла Валерьевна Никитина, к.ф.-м.н., доцент (nikitina.vm@mail.ru).

³ Максим Валентинович Пучкин, ст. преп. (mpuchkin@mail.ru).

⁴ Илья Сергеевич Семенов, аспирант.

⁵ Александр Иванович Сухинов, д.ф.-м.н., профессор (sukhinov@gmail.com).

⁶ Геннадий Анатольевич Угольницкий, д.ф.-м.н., профессор (ougoln@mail.ru).

⁷ Анатолий Борисович Усов, д.т.н., доцент (tol151968@yandex.ru).

⁸ Александр Евгеньевич Чистяков, к.ф.-м.н., доцент (cheese_05@mail.ru).

биологических популяций в мелководных водоемах с учетом требований устойчивого развития.

Ключевые слова: дифференциально-игровая модель, динамические игры Гермейера, принуждение, замор, эффективность, k -средние, Азовское море.

1. Введение

Одна из составляющих экологического благополучия мелководных водоемов – предотвращение заморов в них. Замору в той или иной степени подвержены практически все мелководные водоёмы, в которых отсутствует течение. Массовая ежегодная гибель промысловой рыбы наносит значительный ущерб рыбному хозяйству. Поэтому актуальна разработка математических моделей предотвращения заморов в мелководных водоемах, выработка научно-обоснованных предложений по предотвращению заморных явлений. Из первых работ в этой области выделим, например, [1, 4], а из последних – цикл работ [5, 7, 11, 13, 15]

В настоящей статье, в отличие от этих работ, анализ проводится на основе теоретико-игрового подхода [3, 17–19, 21]. Предлагаются механизмы управления для системы контроля экосистем мелководных водоемов. С содержательной точки зрения такие механизмы могут представлять собой, например, процедуры штрафов и поощрений, налоговые льготы, торговлю квотами и т.п. Исследование предложенной динамической модели предотвращения заморов в мелководных водоемах проводится численно с использованием высокоэффективных параллельных алгоритмов. При переходе от непрерывных моделей к дискретным возникает необходимость в решении систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) большой размерности. В работе представлены методы решения СЛАУ вариационного типа, а также их параллельная реализация на многопроцессорной вычислительной системе с распределенной памятью.

2. Постановка задачи

Для моделирования системы контроля состояния мелко-водных водоемов и предотвращения заморов целесообразно трактовать данную систему как иерархически управляемую динамическую систему (УДС) [17–19, 21], схема которой представлена на рис. 1.

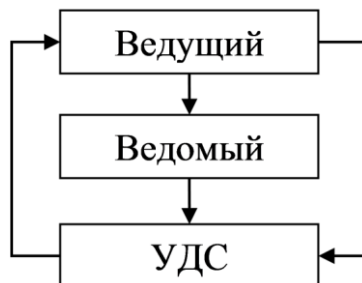


Рис. 1. Иерархически управляемая динамическая система

Основной смысл введения понятия иерархически управляемой динамической системы в связи с требованием поддержания экосистемы в заданном состоянии заключается в следующем. Воздействуя на эколого-экономическую систему, Ведомый (A (Agent) – природопользователь, промышленное предприятие) преследует собственные цели, в общем случае не отвечающие требованиям поддержания системы в заданном состоянии (как правило, он стремится максимизировать доход, полученный в результате производственной деятельности, или минимизировать издержки). Нужен Ведущий (S (Supervisor) – государственный регулирующий орган), способный воздействовать на Ведомого для достижения целей поддержания системы в заданном состоянии (требований устойчивого развития).

Поскольку цель поддержания системы в заданном состоянии может достигаться различными способами, то возникает дополнительный вопрос о выборе наилучшего из этих способов с точки зрения Ведущего. Иначе говоря, при обеспечении условий поддержания системы в заданном состоянии Ведущий

руководствуется одним или несколькими критериями оптимальности, отражающим(и) его предпочтения на множестве допустимых управлений.

Взаимоотношения внутри такой иерархической системы устроены следующим образом [19, 21]: Ведущий воздействует на Ведомого, Ведомый – только на УДС. Влияя на УДС, Ведомый преследует свои частные цели. УДС является пассивным объектом, поэтому нужен Ведущий, который, используя различные методы иерархического управления (принуждение, побуждение, убеждение), способен, воздействуя на Ведомого, обеспечить выполнение условий, гарантирующих устойчивое развитие УДС.

Разные методы иерархического управления отличаются по направлению воздействия одного субъекта управления на другого [19, 21]. Основной задачей любого метода управления считается создание условий, при которых субъекты стремятся к поддержанию динамической системы в заданном состоянии. При принуждении субъект управления верхнего уровня воздействует на области допустимых управлений остальных субъектов. Побуждение предполагает воздействие субъекта управления верхнего уровня на целевые функции остальных субъектов. При убеждении все субъекты управления объединяют свои усилия и сообща стремятся к поддержанию динамической системы в заданном состоянии.

В предлагаемой модели для описания динамики экологической системы используется нелинейная пространственно-неоднородная 3D-модель взаимодействия планктона и популяции промысловой рыбы пеленгас: «рыба – фитопланктон – зоопланктон – питательные вещества – детрит». Эта модель описывается системой дифференциальных уравнений в частных производных в области G , представляющей собой замкнутый бассейн, ограниченный невозмущенной поверхностью водоёма Σ_0 , дном $\Sigma_H = \Sigma_H(x, y)$ и цилиндрической поверхностью, для интервала $0 < t \leq T_0$, $\Sigma = \Sigma_0 \cup \Sigma_H \cup \sigma$ – кусочно-гладкая граница области G [8–10, 12].

Таким образом, предлагаемая модель представляет собой иерархическую дифференциальную игру двух лиц (S, A). Целевые функционалы субъектов и ограничения на управления возьмем в виде

– Ведущего (S):

$$(1) \quad J_S = \int_0^{\infty} \int_G e^{-rt} [M(P(x, y, z, t) - P^0(x, y, z, t)) + C(q(x, y, z, t))] dv dt \rightarrow \min$$

$$(2) \quad 0 \leq q(x, y, z, t) \leq P(x, y, z, t);$$

– Ведомого (A):

$$(3) \quad J_A = \int_0^{\infty} \int_G e^{-rt} [au(x, y, z, t) - \frac{bu^2(x, y, z, t)}{2}] P(x, y, z, t) dv dt \rightarrow \max$$

$$(4) \quad 0 \leq u(x, y, z, t) \leq q(x, y, z, t).$$

Здесь t – временная координата; (x, y, z) – пространственные координаты; $u(x, y, z, t)$ – доля вылова рыбы (управление ведомого игрока) в момент времени t в точке (x, y, z) ; $q(x, y, z, t)$ – квота вылова (в долях, управление ведущего игрока); $C(q)$ – выпуклая функция затрат на контроль выполнения квоты, для которой выполнены условия $C(P) = 0$; $C(0) = \infty$; a – цена единицы биомассы рыбы; b – коэффициент затрат на вылов; r – коэффициент дисконтирования; M – постоянная, влияющая на величину наказания при отклонении от оптимального значения концентрации пеленгаса; $P(x, y, z, t)$ – концентрация пеленгаса в момент времени t в точке (x, y, z) ; $P^0(x, y, z, t)$ – оптимальное значение концентрации пеленгаса с точки зрения предотвращения заморов (устанавливается экспертно).

Уравнения биологической кинетики имеют вид:

$$\frac{\partial X}{\partial t} + \text{div}(\mathbf{UX}) = \mu_X \Delta X + \frac{\partial}{\partial z} (v_X \frac{\partial X}{\partial z}) + \gamma_X \alpha_S X S - \delta_X X Z - \varepsilon_X X - \sigma_X X P,$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial Z}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{U}Z) = \mu_Z \Delta Z + \frac{\partial}{\partial z} \left(v_Z \frac{\partial Z}{\partial z} \right) + \gamma_Z \delta_X XZ - \\
 & - \varepsilon_Z Z - \delta_Z Z, \\
 (5) \quad & \frac{\partial S}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{U}S) = \mu_S \Delta S + \frac{\partial}{\partial z} \left(v_S \frac{\partial S}{\partial z} \right) + \gamma_S \varepsilon_D D - \alpha_S XS + \\
 & + B(S_p - S) + f, \\
 & \frac{\partial D}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{U}D) = \mu_D \Delta D + \frac{\partial}{\partial z} \left(v_D \frac{\partial D}{\partial z} \right) + \varepsilon_X X + \varepsilon_Z Z - \\
 & - \varepsilon_D D - \beta_D DP, \\
 & \frac{\partial P}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{U}_P P) = \mu_P \Delta P + \frac{\partial}{\partial z} \left(v_P \frac{\partial P}{\partial z} \right) + \gamma_P \beta_D DP - \varepsilon_P P + \\
 & + \xi_P \sigma_X XP - \delta_P P - uP, \\
 & \frac{\partial \mathbf{u}_P}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{U}_P \mathbf{u}_P) = \mu_u \Delta \mathbf{u}_P + \frac{\partial}{\partial z} \left(v_u \frac{\partial \mathbf{u}_P}{\partial z} \right) - \alpha_u \mathbf{u}_P + \\
 & + k_D \operatorname{grad} D + k_X \operatorname{grad} X,
 \end{aligned}$$

где X , Z , S , D – концентрации фитопланктона (*Coscinodiscus*), зоопланктона (*Copepoda*), биогенного вещества и детрита; α_S – коэффициент потребления биогенного вещества фитопланктоном; γ_X , γ_Z , γ_P – передаточные коэффициенты трофических функций; γ_S – доля питательного вещества, находящегося в биомассе фитопланктона; ε_Z , ε_P – коэффициенты элиминации (смертности) Z , P соответственно; ε_X – коэффициент, учитывающий смертность и метаболизм X ; δ_X – убыль фитопланктона за счет выедания зоопланктоном; δ_Z – убыль зоопланктона за счет выедания рыбами; δ_P – убыль пеленгаса за счет выедания рыбами; S_p – предельно возможная концентрация биогенного вещества; $f = f(t, x, y, z)$ – функция источника загрязнения; B – удельная скорость поступления загрязняющего вещества; ε_D – коэффициент разложения детрита; β_D – скорость потребления органических остатков пеленгасом; σ_X – коэффициент убыли фитопланктона в результате потребления его пеленгасом; ξ_P – передаточный коэффициент роста концентрации пеленгаса за счет фитопланктона; μ_i , v_i – диффузионные коэффициенты в горизонтальном и вертикальном направлениях субстанции i

соответственно; $i \in \{X, Z, S, D, P\}$; \mathbf{u} – поле скоростей водного потока; $\mathbf{U} = \mathbf{u} + \mathbf{u}_j$ – скорость конвективного переноса вещества; $\mathbf{U}_P = \mathbf{u} + \mathbf{u}_P$ – скорость конвективного переноса пеленгаса; \mathbf{u}_P – скорость движения рыбы относительно воды; k_D, k_X – коэффициенты таксиса; μ_u, ν_u – коэффициенты горизонтальной и вертикальной составляющей диффузии скорости таксиса; α_u – коэффициент инерционного движения рыбы; \mathbf{u}_j – скорость осаждения j -й субстанции под действием силы тяжести, $j \in \{X, Z, S, D\}$.

Зададим для этой модели начальные условия

$$(6) \quad \varphi(x, y, z, 0) = \varphi_0(x, y, z), \varphi \in \{X, Z, S, D, P\}, (x, y, z) \in \bar{G}, t = 0$$

и граничные условия

$$(7) \quad \varphi = 0 \text{ на } \sigma, \text{ если } u_n < 0; \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \text{ на } \sigma, \text{ если } u_n \geq 0;$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \text{ на } \Sigma_0; \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\varepsilon_i \varphi \text{ на } \Sigma_H, i = \overline{1, 5}.$$

Здесь $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5$ – неотрицательные постоянные; $\varepsilon_1, \varepsilon_3, \varepsilon_5$ – учитывают опускание планктона и пеленгаса на дно и их затопление; $\varepsilon_2, \varepsilon_4$ – учитывают поглощение биогенного вещества и детрита донными отложениями.

Модель (1)–(7) представляет собой иерархическую дифференциальную игру при наличии фазовых ограничений.

3. Алгоритмы построения равновесия

Возможны разные информационные регламенты для иерархической игры двух лиц [19, 21, 22]: S может использовать принуждение или побуждение и сообщать A либо программную стратегию, либо позиционную. При использовании позиционных стратегий возникают динамические игры Гермейера Γ_{1x} и Γ_{2x} [3]. Приведем алгоритмы построения решений в позиционных стратегиях при принуждении (в случае игр Гермейера Γ_{1x} и Γ_{2x}). Метод побуждения исследуется аналогично.

Рассмотрим вначале случай, когда в системе реализуется информационный регламент игры Гермейера Γ_{2x} .

Определение 1. Пара функций $(q^*(x, y, z, t), u^*(x, y, z, t))$ называется *равновесием принуждения в игре Гермейера* Γ_{2x} с обратной связью по управлению, если

$$J_S(q^*(t, P^*, u^*), u^*, P^*) = \sup_{0 \leq q(t) \leq P} \inf_{u \in R_u(q)} J_S(q, u, P),$$

где P^*, P – траектории УДС, построенные по функциям u^*, u ; $R_u(q) = \{0 \leq u(t) \leq q(t) : \forall c: 0 \leq c(t) \leq q(t) \ J_A(u, P) \geq J_A(c, P)\}$ – множество оптимальных ответов Ведомого по переменной u на стратегию принуждения Ведущего q .

Алгоритм нахождения решения в этом случае состоит в следующем.

1) Вводится стратегия наказания Ведомого Ведущим

$$\begin{aligned} q^P(x, y, z, t) : J_A(u(q^P(x, y, z, t), x, y, z, t), P(x, y, z, t)) = \\ = \inf_{0 \leq q(x, y, z, t) \leq P(x, y, z, t)} J_A(u(q, x, y, z, t), P(x, y, z, t)). \end{aligned}$$

Находится величина гарантированного выигрыша Ведомого, если он отказывается сотрудничать с Ведущим:

$$L_A = \sup_{u(x, y, z, t) \in R_u(q^P(x, y, z, t))} J_A(u(x, y, z, t), P(x, y, z, t)).$$

2) Решается задача оптимального управления (1), (2), (4) с дополнительным условием $L_A < J_A(u(x, y, z, t), P(x, y, z, t))$. Оптимизация проводится по двум функциям $q(x, y, z, t)$, $u(x, y, z, t)$. Решение указанной задачи оптимального управления обозначим $q^R(x, y, z, t)$, $u^R(x, y, z, t)$, где $q^R(x, y, z, t)$ – стратегия поощрения Ведомого Ведущим при принуждении.

3) Ведущий предъявляет Ведомому стратегию с обратной связью

$$\hat{q}(u, P, t) = \begin{cases} q^R(x, y, z, t), & \text{если } u(x, y, z, t) = u^R(x, y, z, t) \\ q^P(x, y, z, t), & \text{для } \forall t \in [0, \infty); (x, y, z) \in G, \\ & \text{иначе.} \end{cases}$$

4) При экономически разумном Ведомом решение в этом случае имеет вид $(q^R(x, y, z, t), u^R(x, y, z, t))$.

В случае игры Гермейера Γ_{1x} информационный регламент следующий.

Определение 2. Пара функций (q^*, u^*) называется *равновесием принуждения* в игре Гермейера Γ_{1x} , если

$$J_S(q^*, u^*, P^*) = \sup_{0 \leq q \leq P} \inf_{u \in R(q)} J_S(q, u, P),$$

где $R(q) = \{0 \leq u(x, y, z, t) \leq q(x, y, z, t): \forall w: 0 \leq w(x, y, z, t) \leq q(x, y, z, t) (t > 0; (x, y, z) \in G) J_S(u, P) \geq J_S(w, P)\}$ – множество оптимальных ответов Ведомого на стратегию принуждения Ведущего q .

Алгоритм построения равновесия модели (1)–(7) в этом случае имеет вид:

1) В результате оптимизации функционала (3) с ограничениями (4) определяются оптимальные стратегии Ведомого в зависимости от управлений Ведущего, т.е. функция $u^*(x, y, z, t) = u^*(q(x, y, z, t, P(x, y, z, t)), t)$.

2) Найденная на первом шаге алгоритма функция $u^*(x, y, z, t) = u^*(q(x, y, z, t, P(x, y, z, t)), t)$ подставляется в (1). Решается задача оптимального управления (1), (2). Оптимальной для Ведущего является функция $q^*(x, y, z, t, P(x, y, z, t))$, которая доставляет максимум функционалу (1) при выполненных условиях (2).

3) Решение имеет вид $(q^*(x, y, z, t, P(x, y, z, t)), u^*(q^*(x, y, z, t, P(x, y, z, t)), x, y, z, t))$.

При реализации указанных выше алгоритмов для определенных наборов входных данных используется принцип максимума Понтрягина. В общем случае проводится переход от непрерывной дифференциальной модели системы управления к эквивалентной ей дискретной модели [20]. При этом принимается во внимание тот факт, что субъекты управления могут изменять свои стратегии поведения только в определенные моменты времени. В этом случае исследование проводится на основе метода сценариев. Остановимся подробнее на предложенном методе решения уравнений биологической кинетики.

Уравнения биологической кинетики решаются путем дискретизации с использованием неявной схемы с центральными разностями. Возникающие в результате сеточные уравнения можно записать в матричном виде:

$$(8) \quad Ax = f,$$

где A – линейный положительно определенный оператор ($A > 0$). Для нахождения решения задачи (8) будем использовать неявный итерационный процесс [2]:

$$(9) \quad B \frac{x^{m+1} - x^m}{\tau_{m+1}} + Ax^m = f.$$

В уравнении (9) m – номер итерации, $\tau > 0$ – итерационный параметр, а B – некоторый обратимый оператор, который является предобуславливателем, или стабилизатором. Обращение оператора B должно быть существенно проще, чем непосредственное обращение исходного оператора A в (8).

Опишем использование метода минимальных поправок (ММП). Этот метод можно применять для решения уравнения с несамосопряженным, но положительно определенным оператором A . Требуется, чтобы оператор B был самосопряженным, положительно определенным и ограниченным. Метод минимальных поправок определяется следующим выбором оператора D : $D = A^* B^{-1} A$.

Формула для итерационного параметра τ_{k+1} в методе минимальных поправок имеет вид:

$$(10) \quad \tau_{k+1} = \frac{(A\omega_k, \omega_k)}{(B^{-1}A\omega_k, A\omega_k)}, \quad k = 0, 1, \dots$$

При минимизации нормы поправки в H_B для выбранного оператора D получим

$$\|z_k\|_D^2 = (Dz_k, z_k) = (A^* B^{-1} A z_k, z_k) = (\omega_k, r_k) = (B\omega_k, \omega_k) = \|\omega_k\|_B^2.$$

Норма поправки в H_B может вычисляться в итерационном процессе и использоваться для контроля его окончания.

4. Реализация ММП на многопроцессорной вычислительной системе с распределенной памятью

Для реализации ММП на суперЭВМ необходимо решить следующие задачи:

– равномерно распределить вычислительные ресурсы задачи по имеющимся вычислительным процессорам;

– организовать обмен данными между вычислителями и указать точки синхронизации [6].

Для равномерного распределения ресурсов задачи между вычислителями требуется передать каждому узлу подобласть расчетной области (провести декомпозицию расчетной области) [14, 16]. Стоит отметить, что декомпозиция области напрямую зависит от выбора метода решения СЛАУ. Представим алгоритм разбиения расчетной области для вариационных методов решения СЛАУ на примере ММП.

Расчет параметра τ_{m+1} осуществляется по формуле (10). Заметим, что вычисление числителя и знаменателя в формуле (10) может осуществляться параллельно в любой произвольной подобласти расчетной области. Это важное свойство позволяет использовать методы декомпозиции (кластеризации), в частности k -средних. Метод k -средних основан на минимизации функционала суммарной выборочной дисперсии разброса элементов (узлов расчетной сетки) относительно центра тяжести подобластей: $Q = Q^{(3)}$, где X_i – множество расчетных узлов сетки, входящих в i -ю подобласть, $i \in \{1, \dots, m\}$, m – заданное количество подобластей.

$$Q^{(3)} = \sum_i \frac{1}{|X_i|} \sum_{x \in X_i} d^2(x, c_i) \rightarrow \min ,$$

где $c_i = \frac{1}{|X_i|} \sum_{x \in X_i} x$ – центр подобласти X_i , $d(x, c_i)$ – расстояние

между расчетным узлом сетки x и центром подобласти c_i в евклидовой метрике. Метод k -средних сходится только тогда, когда все подобласти примерно равны.

Алгоритм k -средних состоит из следующих шагов:

1. Выбираются начальные центры подобластей при помощи максиминного алгоритма.
2. Все расчетные узлы разбиваются на m клеток Вороного по методу ближайшего соседа, т.е. текущий расчетный узел сетки $x \in X_c$, где подобласть X_c выбирается из условия $\|x - s_c\| = \min_{1 \leq i \leq m} \|x - s_i\|$, где s_c – центр области X_c .
3. Рассчитываются новые центры по формуле

$$S_c^{(k+1)} = \frac{1}{|X_i^{(k)}|} \sum_{x \in X_i^{(k)}} x.$$

4. Проверяется условие остановки $S_c^{(k+1)} = S_c^{(k)}$ для всех $k = 1, \dots, m$. Если условие остановки не выполняется, то осуществляется переход на пункт 2 алгоритма.

В качестве центров подобластей максиминный алгоритм выбирает расчетные узлы сетки следующим образом:

- первый центр – первый расчетный узел области;
- второй центр находится в расчетном узле сетки, расположенном на максимальном расстоянии от первого центра;
- если количество подобластей больше трех, то каждый следующий центр находится на максимальном удалении от ближайшего центра.

Для организации обмена данными требуется найти все точки, лежащие на границе каждой подобласти. Для этой цели используем алгоритм Джарвиса (задача построения выпуклой оболочки).

Необходимо сформировать список соседних подобластей для каждой подобласти и разработать алгоритм пересылки данных между подобластями.

При решении СЛАУ методом минимальных поправок для расчета итерационного параметра τ используем метод сдвигания. Синхронизация алгоритма решения задачи (5) требуется только в ММП при переходе на следующую итерацию.

5. Результаты счета

С использованием разработанного комплекса программ был изучен механизм образования заморных зон в мелководном водоеме. На рис. 2, 3 изображено распределение концентрации детрита и пеленгаса. Временной интервал T есть 56, 155 дней (после начала вегетационного периода фитопланктона). Управляющие воздействия указаны в примерах.

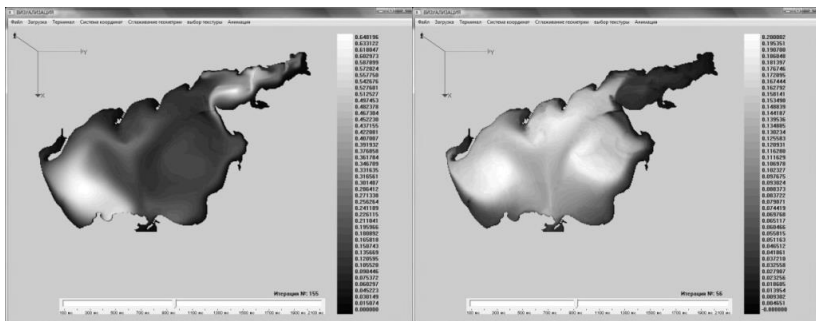


Рис. 2. Распределение концентрации детрита для модельного набора входных данных (указан ниже в тексте)

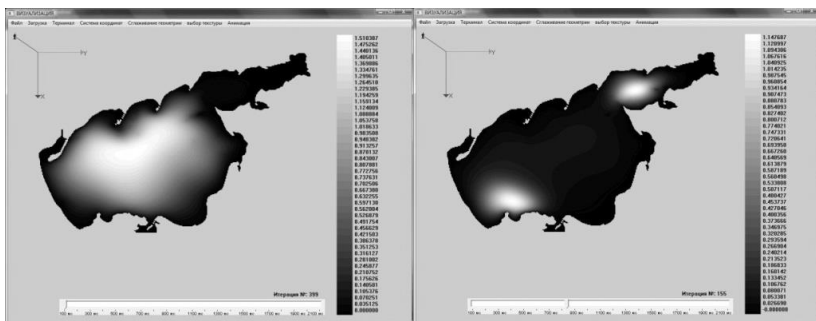


Рис. 3. Распределение концентрации пеленгаса для модельного набора входных данных (указан ниже в тексте)

В качестве входных данных использовалось начальное распределение полей течений в Азовском море при северном ветре. Расчеты проводились в случае $\mu_D = 5 \cdot 10^{-11}$; $v_D = 10^{-11}$; $\varepsilon_D = 1,9 \cdot 10^{-5}$; $\beta_D = 0,1$; $\varepsilon_4 = 0,4$; $\mu_P = 1,5 \cdot 10^{-3}$; $v_P = 1,6 \cdot 10^{-3}$; $\gamma_P = 0,125$; $\varepsilon_P = 1,16 \cdot 10^{-3}$; $\zeta_P = 0,8$; $\varepsilon_S = 0,47$; $\delta_P = 0,05$.

Проведено исследование задачи (1)–(5) с учетом управляющей настройки для указанного выше набора входных данных. Расчеты проводились в случае

$$C(q) = C \frac{P - q}{(p + \varepsilon)(q + \varepsilon)}; C, \varepsilon = const; \varepsilon \ll 1.$$

При построении равновесий в игре Гермейера Γ_{1x} получено, что в любой момент времени в любой точке пространственной области оптимальная стратегия Ведомого определяется формулой

$$u^*(x, y, z, t) = \begin{cases} a/b, & \text{если } a/b \leq q(x, y, z, t), \\ q(x, y, z, t) & \text{иначе;} \end{cases}$$

а равновесие образуют стратегии Ведущего и Ведомого (q^*, u^*) , определяемые формулой

$$(q^*, u^*) = \begin{cases} \{P(x, y, z, t), P(x, y, z, t)\}, & \text{если } P(x, y, z, t) \leq a/b, \\ \{P(x, y, z, t), a/b\} & \text{иначе.} \end{cases}$$

При рассмотрении игры Гермейера Γ_{2x} в любой момент времени в любой точке пространственной области стратегия наказания Ведомого Ведущим имеет вид $q^P(x, y, z, t) = 0$ для $\forall(x, y, z) \in \bar{G}$. Для нахождения стратегии поощрения Ведомого Ведущим решается задача оптимального управления, указанная в пункте 2 соответствующего алгоритма.

Примеры модельных расчетов в случае игр Гермейера Γ_{1x} и Γ_{2x} приведены ниже.

Пример 1. В случае указанного ранее набора входных данных $a = 0,2$; $b = 0,01$; $\gamma = 0,001$; $M = 0,2$; $P^0(x, y, z, t) = 0,09$; $P(x, y, z, 0) = 0,05$ и для $\forall(x, y, z) \in \bar{G}$ получим, что затраты Ведущего и доход Ведомого в точке экстремума для игры Гермейера Γ_{1x} – $J_S^* = 4285$; $J_A^* = 6555$, а для игры Γ_{2x} – $J_S^* = 3688$; $J_A^* = 1993$.

Пример 2. При уменьшении оптимальной концентрации пеленгаса в случае входных данных примера 1 и $P^0(x, y, z, t) = 0,05$ – доход Ведомого падает, а расходы Ведущего растут. Для игры Γ_{1x} – $J_S^* = 4294$; $J_A^* = 5764$, Γ_{2x} – $J_S^* = 8665$; $J_A^* = 1754$.

Пример 3. В случае входных данных примера 1 и дальнейшего уменьшения оптимальной концентрации пеленгаса ($P^0(x, y, z, t) = 0,01$) – $J_S^* = 4302$; $J_A^* = 4976$ в случае игры Γ_{1x} и $J_S^* = 13642$; $J_A^* = 1324$ для Γ_{2x} .

Пример 4. С ростом расходов Ведущего при отклонении от оптимальной концентрации пеленгаса в случае входных данных примера 2 и $M = 10$ – общие расходы Ведущего растут и для

игры $\Gamma_{1x} - J_S^* = 215020$; $J_A^* = 5764$, для $\Gamma_{2x} - J_S^* = 433276$; $J_A^* = 1476$.

В случае информационного регламента игры Гермейера Γ_{1x} оптимальная доля вылова рыбы больше, чем в игре Γ_{2x} , расходы Ведущего больше, а Ведомого – меньше.

6. Заключение

В работе предложена динамическая иерархическая теоретико-игровая модель управления борьбой с заморами в мелководных водоемах. В ней учитывается наличие двух иерархически связанных субъектов управления.

Рассмотрены различные информационные регламенты взаимоотношений между субъектами управления. В качестве метода иерархического управления используется метод принуждения. Дана конкретизация понятия решения в динамических играх Гермейера Γ_{1x} и Γ_{2x} [3] для модели борьбы с заморами в мелководных водоемах, указаны алгоритмы его построения.

При численной реализации предложенных алгоритмов используются многопроцессорные системы. Описан параллельный алгоритм численного решения модели взаимодействия планктона и рыб. Предлагаемый алгоритм численного решения поставленной задачи на суперЭВМ с использованием метода k -средних позволил существенно сократить время работы программного комплекса, численно реализующего описанную модельную задачу динамики взаимодействующих популяций в Азовском море. Приведены результаты численного решения задачи предотвращения заморов в мелководных водоемах.

Успешная борьба с заморами возможна или созданием условий, благоприятствующих росту оптимальной с точки зрения предотвращения заморов концентрации пеленгаса, или усилением наказания Ведущего при отклонении от оптимального с точки зрения предотвращения заморов значения концентрации пеленгаса. По сути дела, при этом посредством изменения интенсивности вылова решается задача компенсации неблагоприятных факторов, порождающих заморы.

Литература

1. АКИМОВ В.А., ГУЕНКО В.С., САВЧЕНКО Ю.Н. *Технические средства аэрации рыбоводных прудов*. – М.: Агропромиздат, 1990. – 79 с.
2. БАХВАЛОВ Н.С., ЖИДКОВ Н.П., КОБЕЛЬКОВ Г.М. *Численные методы*. – М.: Наука, 1987. – 600 с.
3. ГОРЕЛИК В.А., ГОРЕЛОВ М.А., КОНОНЕНКО А.Ф. *Анализ конфликтных ситуаций в системах управления*. – М.: Радио и связь, 1991. – 286 с.
4. ЛИННИК В.Я. И ДР. *Профилактика замора рыб*. – Мн.: Урожай, 1967. – 36 с.
5. НИКИТИНА А.В. *Модели биологической кинетики, стабилизирующие экологическую систему Таганрогского залива* // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2009. – №8(97). – С. 130–134.
6. НИКИТИНА А.В., СЕМЕНОВ И.С. *Параллельная реализация модели динамики токсичной водоросли в Азовском море с применением многопоточности в операционной системе Windows* // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2013. – №1. – С. 130–135.
7. СУХИНОВ А.И., НИКИТИНА А.В. *Математическое моделирование и экспедиционные исследования качества вод в Азовском море* // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2011. – №8(121). – С. 62–73.
8. СУХИНОВ А.И., ЧИСТЯКОВ А.Е., АЛЕКСЕЕНКО Е.В. *Численная реализация трехмерной модели гидродинамики для мелководных водоемов на супервычислительной системе* // Математическое моделирование. – 2011. – Т. 23, №3. – С. 3–21.
9. СУХИНОВ А.И., ЧИСТЯКОВ А.Е., ТИМОФЕЕВА Е.Ф. И ДР. *Математическая модель расчета прибрежных волновых процессов* // Математическое моделирование. – 2012. – Т. 24, №8. – С. 32–44.
10. СУХИНОВ А.И. *Прецизионные модели гидродинамики и опыт их применения в предсказании и реконструкции чрезвычайных ситуаций в Азовском море* // Известия Южного

- федерального университета. Технические науки. – 2006. – Т. 58, №3. – С. 228–235.
11. СУХИНОВ А.И., НИКИТИНА А.В., ЧИСТЯКОВ А.Е. И ДР. *Математическое моделирование условий формирования заморозов в мелководных водоемах на многопроцессорной вычислительной системе* // Вычислительные методы и программирование: новые вычислительные технологии. – 2013. – Т. 14, №1. – С. 103–112.
 12. СУХИНОВ А.И., ВАСИЛЬЕВ В.С. *Прецизионные двумерные модели мелких водоемов* // Математическое моделирование. – 2003. – Т. 15, №10. – С. 17.
 13. СУХИНОВ А.И., НИКИТИНА А.В., ЧИСТЯКОВ А.Е. *Моделирование сценария биологической реабилитации Азовского моря* // Математическое моделирование. – 2012. – Т. 24, №9. – С. 3–21.
 14. СУХИНОВ А.И., ЧИСТЯКОВ А.Е., ФОМЕНКО Н.А. *Методика построения разностных схем для задачи диффузии-конвекции-реакции, учитывающих степень заполненности контрольных ячеек* // Известия Южного федерального университета. Технические науки. – 2013. – №4(141). – С. 87–98.
 15. СУХИНОВ А.И., ЧИСТЯКОВ А.Е., ПРОЦЕНКО Е.А. *Математическое моделирование транспорта наносов в прибрежной зоне мелководных водоемов* // Математическое моделирование. – 2013. – Т. 25, №12. – С. 65–82.
 16. СУХИНОВ А.И., ЧИСТЯКОВ А.Е., ШИШЕНЯ А.В. *Оценка погрешности решения уравнения диффузии на основе схем с весами* // Математическое моделирование. – 2013. – Т. 25, №11. – С. 53–64.
 17. УГОЛЬНИЦКИЙ Г.А. *Теоретико-игровое исследование некоторых способов иерархического управления* // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2002. – №1. – С. 97–101.
 18. УГОЛЬНИЦКИЙ Г.А. *Теоретико-игровые принципы оптимальности иерархического управления устойчивым развитием* // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2005. – №4. – С. 72–78.

19. УГОЛЬНИЦКИЙ Г.А. *Иерархическое управление устойчивым развитием*. – М.: Физматлит, 2010. – 336 с.
20. УГОЛЬНИЦКИЙ Г.А., УСОВ А.Б. *Исследование дифференциальных моделей иерархических систем управления путем их дискретизации* // Автоматика и телемеханика. – 2013. – №2. – С. 109–122.
21. УГОЛЬНИЦКИЙ Г.А., УСОВ А.Б. *Трехуровневые системы управления эколого-экономическими объектами веерной структуры* // Проблемы управления. – 2010. – №1. – С. 26–32.
22. УГОЛЬНИЦКИЙ Г.А., УСОВ А.Б. *Динамические иерархические игры двух лиц в программных стратегиях и их приложения* // Математическая теория игр и ее приложения. – 2013. – Т. 5, вып.2. – С. 82–104.

DIFFERENTIAL GAME OF FISH KILL PREVENTION IN SHALLOW WATERBODIES

Alla Nikitina, Southern Federal University, Rostov-on-Don, Candidate of Science, Associate Professor (nikitina.vm@gmail.com)

Maxim Puchkin, Southern Federal University, Rostov-on-Don, Assistant Professor (mpuchkin@mail.ru)

Ilya Semenov, Southern Federal University, Rostov-on-Don, Post-Graduate Student

Alexander Sukhinov, Southern Federal University, Rostov-on-Don, Doctor of Science, Professor (sukhinov@gmail.com)

Guennady Ougolnitsky, Southern Federal University, Rostov-on-Don, Doctor of Science, Professor (ougoln@mail.ru)

Anatoly Usov, Southern Federal University, Rostov-on-Don, Doctor of Science, Associate Professor (tol151968@yandex.ru)

Alexander Chistyakov, Southern Federal University, Rostov-on-Don, Candidate of Science, Associate Professor (cheese_05@mail.ru).

Abstract: We build and investigate a differential game of fish kill prevention in shallow waterbodies. The algorithms are suggested for information structures Γ_{1x} and Γ_{2x} in dynamic Germeier games.

The problem is solved numerically by the developed parallel algorithm, which considers the structure of a supercomputer with distributed memory. The proposed algorithm uses the k-means method and essentially reduces calculation time. The above models and routines are used to forecast the change in biomass volume of biological populations in shallow waterbodies considering the requirements of sustainable development.

Keywords: differential game model, dynamic Germeier games, compulsion, fish kill, k-means, efficiency, Azov sea.

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии М.В. Губко*

Поступила в редакцию 13.02.2015.

Опубликована 31.05.2015.

УДК 519.8
ББК 22.18

МОДЕЛИ РЕФЛЕКСИВНЫХ ИГР В ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ ЭКОЛОГО- ЭКОНОМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

Новиков Д. А.¹, Чхартишвили А. Г.²
(Институт проблем управления РАН, Москва)

Обосновывается возможность и целесообразность использования аппарата теории рефлексивных игр для описания задач принятия решений и управления эколого-экономическими системами.

Ключевые слова: эколого-экономическая система, рефлексивная игра, структура информированности, информационное равновесие.

1. Введение

Задача управления эколого-экономической системой [14, 15], элементы которой способны к целенаправленному поведению [3], с теоретико-игровой точки зрения состоит в том, чтобы создать для управляемых субъектов (агентов) игру с такими правилами [5, 8], чтобы ее исход был как можно более благоприятным для управляющего органа (центра) [7, 13]. Поэтому необходимым этапом решения задачи управления является теоретико-игровой анализ, позволяющий центру спрогнозировать реакцию управляемой системы на те или иные управляющие воздействия.

¹ Дмитрий Александрович Новиков, доктор технических наук, профессор, член-корреспондент РАН, заместитель директора (novikov@ipu.ru).

² Александр Гедванович Чхартишвили, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник (sandro_ch@mail.ru).

Одним из методов теоретико-игрового моделирования являются рефлексивные игры (см. [12]), позволяющие учитывать сложную информированность (в том числе взаимную информированность [1, 2, 6]) агентов. На сегодняшний день рефлексивные игры нашли свое применение для описания информированности, совместного принятия агентами решений и решения соответствующих задач информационного управления (управления информированностью агентов) в самых разных областях: корпоративное управление, экономика, маркетинг, политика и пр. [4, 9, 10, 11, 12].

Информированность агентов в рефлексивной игре задается структурой, которую составляют представления о существенных параметрах ситуации, а также о представлениях оппонентов (других агентов). Решением рефлексивной игры является информационное равновесие – набор действий реальных и фантомных (существующих в сознании реальных) агентов, в рамках которого каждый агент максимизирует целевую функцию исходя из своей информированности.

В данной статье рассмотрено несколько моделей эколого-экономических систем, в которых исследуется зависимость исхода взаимодействия агентов от структуры их информированности (информационное равновесие). Если информированность агента является ложной (т.е. агент заблуждается относительно условий игры), то наблюдаемый им результат может как оказаться для него неожиданным, так и соответствовать ожиданиям. Если второе выполняется для всех агентов, то имеет место стабильное информационное равновесие [12], условия существования которого также исследуются в рассматриваемых далее моделях.

2. «Число агентов на рынке»

Пусть имеются n однородных (одинаковых) агентов (занумеруем их элементами множества $N = \{1, \dots, n\}$), выбирающих неотрицательные объемы производства $x_i \geq 0$ и имеющих целевые функции

$$(1) \quad f_i(x) = x_i - (x_i)^2 / 2 - \frac{\chi}{n} \sum_{j \in N} x_j,$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\chi \geq 0$ – коэффициент штрафов. Первое слагаемое в выражении (1) соответствует выручке агента от продажи произведенной им продукции по единичной цене, второе слагаемое – затратам, третье – штрафам за загрязнение окружающей среды (будем считать, что штраф за суммарное загрязнение, пропорциональное суммарному объему производства, распределяется поровну между агентами). Пусть выражение (1) является общим знанием среди агентов, а последовательность функционирования следующая: агенты одновременно и независимо выбирают объемы производства, после чего каждому из них сообщается размер наложенного на него штрафа.

Если число агентов является среди них общим знанием, то при такой информированности каждый агент выберет действие

$$(2) \quad x_i^* = 1 - \chi / n,$$

максимизирующее его целевую функцию (1).

Рассмотрим возможную информированность агентов относительно их количества n . Если каждый из агентов считает, что их общее число составляет \hat{n} и это является общим знанием, то каждый из агентов рассчитывает на следующий размер своего штрафа:

$$(3) \quad \frac{\chi}{\hat{n}} \left(1 - \frac{\chi}{\hat{n}}\right) \hat{n} = \chi \left(1 - \frac{\chi}{\hat{n}}\right).$$

Наблюдая фактическое значение своего штрафа

$$(4) \quad \frac{\chi}{n} \left(1 - \frac{\chi}{n}\right) n = \chi \left(1 - \frac{\chi}{n}\right),$$

ни один из агентов не имеет оснований усомниться в правильности своих представлений (так как правые части выражений (3) и (4) совпадают). Следовательно, информационное равновесие (2) является стабильным при любом (в том числе ложном) представлении агентов \hat{n} (являющимся среди них общим знанием) об их числе n . Это свойство является следствием того, что штраф пропорционален среднему действию агентов и, следовательно, влияние их количества «компенсируется» суммарным действием.

В заключение настоящего раздела отметим, что вывод о стабильности в том числе ложных равновесий не зависит от параметра χ системы штрафов, т.е. в рассмотренной модели переход к истинному информационному равновесию за счет варьирования системы штрафов невозможен – необходимы меры информационного воздействия на агентов, изменяющих их индивидуальную и/или взаимную информированность.

3. «Совместное производство»

Предположим, что в регионе функционируют n предприятий, выпускающих однородную продукцию и имеющих целевые функции

$$(5) f_i(x) = \lambda x_i - \frac{x_i^2}{2(r_i + \beta X_{-i})} - \chi x_i,$$

где $X_{-i} = \sum_{j \neq i} x_j$, $x_i \geq 0$ – возможные действия агентов; $r_i > 0$ –

типы (параметры) агентов; $\lambda > 0$ – цена единицы продукции; $\chi \geq 0$ – коэффициент штрафов; β – неотрицательный параметр. В соответствии с выражением (5) затраты каждого агента зависят от деятельности других агентов (например, имеет место трансфер технологий).

Предположим, что выражения (5) и все значения всех входящих в них параметров являются общим знанием среди агентов. Обозначим

$$X = \sum_{j=1}^n x_j, R = \sum_{j=1}^n r_j.$$

Напомним, что равновесие Нэша – это набор действий агентов, в котором действие каждого агента максимизирует его целевую функцию (при фиксированных действиях остальных агентов). В данном случае для нахождения равновесия Нэша приравняем к нулю производную целевой функции (5) агента по его действию x_i , что после несложных преобразований приводит к следующему выражению:

$$(6) \quad x_i = \frac{(r_i + \beta X)(\lambda - \chi)}{1 + \beta(\lambda - \chi)}.$$

Суммируя выражения (6) по всем агентам, получаем соотношение, из которого найдем суммарное действие:

$$(7) \quad X = \frac{R(\lambda - \chi)}{1 - \beta(\lambda - \chi)(n-1)}.$$

Подставляя (7) в (6), получаем окончательно:

$$(8) \quad x_i^* = \frac{\lambda - \chi}{1 + \beta(\lambda - \chi)} \left(r_i + \frac{\beta R(\lambda - \chi)}{1 - \beta(\lambda - \chi)(n-1)} \right).$$

Видно (см. выражение (7)), что с ростом цены и/или числа агентов увеличивается значение суммарного равновесного объема производства, а с ростом «силы штрафов» χ этот показатель уменьшается.

Исследуем теперь случай, когда представления агентов относительно величины n и значений $r = \{r_i\}$ могут быть ложными. Поскольку i -й агент знает свои тип и действие, он может рассчитать (см. (5)) значение выражения

$$\beta X_{-i} = \beta(X - x_i) = \frac{r_i \gamma}{1 + \gamma} + \frac{\gamma}{1 + \gamma} \cdot \frac{R}{1 - \gamma(n-1)}$$

(здесь использовано обозначение $\gamma = \beta(\lambda - \chi)$ для сокращения записи).

Из последнего соотношения видно, что если агент считает истинными значениями количества агентов и суммы их типов величины \hat{n} и \hat{R} соответственно, то равновесие является стабильным [12] при выполнении следующего условия:

$$(9) \quad \frac{\hat{R}}{1 - \gamma(\hat{n} - 1)} = \frac{R}{1 - \gamma(n - 1)}.$$

При выполнении условия (9) значение целевой функции совпадает с ожиданиями агента.

4. «Пороговые штрафы»

В настоящем разделе рассматривается модель, которая отражает следующую ситуацию: агенты штрафуются, если резуль-

тат их суммарных усилий $\sum_{i \in N} x_i$ по охране окружающей среды от загрязнения производственными отходами меньше заданного порога. Штраф является настолько крупным, что делает производство нерентабельным, поэтому агентам необходимо избежать его (или отказаться от производственной деятельности). При отсутствии штрафа i -й агент получает доход V_i , $i \in N$.

Результат является возрастающей функцией от суммы усилий, прилагаемых каждым агентом. Будем считать, что агенты могут иметь различные представления о параметрах этой функции и, следовательно, о такой величине порога θ , что штраф не платится при выполнении условия $\sum_{i \in N} x_i \geq \theta$.

Пусть реализация действия $x_i \geq 0$ требует от i -го агента затрат $c_i(x_i, r_i)$, где $r_i > 0$ – его тип (параметр, описывающий индивидуальные характеристики), $i \in N$.

Относительно функций затрат агентов предположим, что $c_i(x_i, r_i)$ – непрерывная возрастающая по x_i и убывающая по r_i функция, причем $c_i(0, r_i) = 0$, $i \in N$.

Обозначим через X' множество всевозможных наборов действий (x_1, \dots, x_n) и определим множество индивидуально рациональных действий агентов:

$$IR = \{x \in X' / \forall i \in N \ V_i \geq c_i(x_i, r_i)\}.$$

Нетрудно видеть, что $IR = \prod_{i \in N} [0; x_i^+]$, где

$$x_i^+ = \max \{x_i \geq 0 / c_i(x_i, r_i) \leq V_i\}, \ i \in N.$$

Обозначим

$$X(\theta) = \{x \in X' / \sum_{i \in N} x_i = \theta\}.$$

Рассмотрим последовательно различные варианты информированности агентов о значении параметра $\theta \in \Theta$.

Вариант I. Значение $\theta \in \Theta$ является общим знанием. Тогда равновесием игры агентов является параметрическое (т.е. зависящее от параметра θ) равновесие Нэша, принадлежащее множеству $E_N(\theta) = IR \cap X(\theta)$.

Вариант II. Представления агентов о величине порога попарно различны, но при этом набор $\{\theta_i\}$ является общим знанием. Иными словами, имеет место асимметричное общее знание.

Не ограничивая общности, занумеруем агентов таким образом, чтобы их представления возрастали: $\theta_1 < \dots < \theta_n$. Структура возможных равновесий в этой ситуации описывается следующим утверждением.

Утверждение 1. Если $\theta_i \neq \theta_j$ при $i \neq j$, то информационным равновесием могут быть (в зависимости от соотношения между параметрами) следующие $n + 1$ исходов: $\{x^* \mid x_i^* = 0, i \in N\}$; $\{x^* \mid x_k^* = \theta_k, x_i^* = 0, i \in N, i \neq k\}, k \in N$. Содержательно это означает следующее: либо никто из агентов не прикладывает усилий, либо усилия прикладывает один k -й агент, выбирая действие θ_k .

В более общем случае $\theta_1 \leq \dots \leq \theta_n$. (представления агентов могут совпадать) может появиться область равновесий аналогично варианту I. Содержательно это означает, что в равновесии усилия прикладывают те агенты, которые одинаково представляют себе величину порога.

Вариант III. Представления агентов о величине порога различны, но каждый агент считает, что играет в игру с асимметричным общим знанием (вообще говоря, будучи ложно информированным о представлениях оппонентов). В этом случае множество возможных равновесных ситуаций становится максимально возможным: $\prod_{i \in N} [0; x_i^+]$. Более того, справедливо следующее утверждение.

Утверждение 2. Для любого вектора действий $x^* \in \prod_{i \in N} [0; x_i^+]$ существует такая структура информированности

(при которой каждый агент субъективно играет в игру с асимметричным общим знанием), что вектор x^* является единственным равновесием.

Доказательства утверждений 1 и 2 аналогичны доказательствам утверждений в [11, раздел 4.10]

5. «Согласование интересов управляющих органов»

Рассмотрим эколого-экономическую систему, состоящую из одного предприятия (агента) и двух управляющих органов - центров. Стратегией агента является выбор объема производства $x \geq 0$ и уровня безопасности $y \geq 0$, что требует от него затрат $x^2 / 2r$ и $y^2 / 2w$ соответственно ($r > 0, w > 0$). Каждый центр получает от деятельности агента «доход», описываемый функцией $H_i(x, y)$, и выплачивает агенту «стимулирование» $\sigma_i(x, y)$, $i = 1, 2$. Таким образом, целевая функция i -го центра имеет вид

$$(10) \Phi_i(\sigma_i(\cdot), x, y) = H_i(x, y) - \sigma_i(x, y),$$

а целевая функция агента:

$$(11) f(\{\sigma_i(\cdot)\}, x, y) = \lambda x - x^2 / 2r - y^2 / 2w + \sigma_1(x, y) + \sigma_2(x, y).$$

Порядок функционирования следующий: центры одновременно и независимо выбирают функции стимулирования и сообщают их агенту, которое затем выбирает свое действие. Ограничимся рассмотрением множества Парето-эффективных равновесий Нэша игры центров, в которых, как показано в [13], их стратегии имеют вид

$$(12) \sigma_i(x', x, y', y) = \begin{cases} V_i, & x = x', y = y', \\ 0, & \text{иначе;} \end{cases} \quad i = 1, 2.$$

Содержательно центры договариваются о том, что будут побуждать агента выбирать объем производства x' и достигать уровня безопасности y' , и осуществлять совместное стимулирование. Такой режим взаимодействия центров называется режимом сотрудничества [13].

Из вида целевой функции (11) следует, что в отсутствие стимулирования агент будет выбирать нулевой уровень безопасности. Найдем оптимальный для агента объем производства $x^* = \arg \max_{x \geq 0} [\lambda x - x^2 / 2r] = \lambda r$. Из условий оптимальности по

Парето следует, что сумма вознаграждений, получаемых агентом от центров в случае выполнения их рекомендаций, равна

$$(13) V_1 + V_2 = \lambda(x^* - x') - [(x^*)^2 - (x')^2] / 2r + y'^2 / 2w.$$

Условие выгодности сотрудничества для каждого из центров можно сформулировать следующим образом: в режиме

сотрудничества каждый центр должен получить полезность не меньшую, чем он мог бы получить, осуществляя стимулирование агента в одиночку. Полезность i -го центра от «самостоятельного» взаимодействия с агентом равна

$$(14) \Phi_i^* = \max_{x, y \geq 0} [H_i(x, y) - \lambda(x^* - x) + [(x^*)^2 - (x)^2] / 2r - y^2 / 2w].$$

Обозначим через

$$(15) S = \{x \geq 0, y \geq 0 \mid \exists (V_1; V_2) \in \mathfrak{R}_+^2: H_i(x, y) - V_i \geq \Phi_i^*, i = 1, 2;$$

$$V_1 + V_2 = \lambda(x^* - x) - [(x^*)^2 - (x)^2] / 2r + y^2 / 2w\}$$

область компромисса – множество таких действий агента, для реализации которых сотрудничество выгодно для центров.

Обозначим

$$(16) \Phi_0^* = \max_{x, y \geq 0} \{H_1(x, y) + H_2(x, y) - \lambda(x^* - x) + [(x^*)^2 - (x)^2] / 2r - y^2 / 2w\}.$$

По аналогии с тем, как это делается в [3, 13], можно доказать, что область компромисса непуста тогда и только тогда, когда

$$(17) \Phi_0^* \geq \Phi_1^* + \Phi_2^*.$$

Приведем пример: пусть $H_1(x, y) = \alpha x + (1 - \alpha)y$, $H_2(x, y) = (1 - \alpha)x + \alpha y$, где $\alpha \in [0; 1]$ – константа, отражающая степень согласованности интересов центров, т.е. «пропорцию», в которой учет экономических и экологических показателей входит в их функции выигрыша (если $\alpha = 0$ или $\alpha = 1$, то один из центров заинтересован только в экономических показателях – объеме производства, а другой только в экологических – уровне безопасности).

Находим из (14) и (16):

$$\Phi_1^* = r\alpha [2\lambda + \alpha] / 2 + w(1 - \alpha)^2 / 2,$$

$$\Phi_2^* = r[\alpha^2 + 1 + 2\lambda - 2\alpha - 2\alpha\lambda] / 2 + w\alpha^2 / 2,$$

$$\Phi_0^* = r[2\lambda + 1] / 2 + w / 2,$$

при этом (17) выполняется как тождество при любых значениях параметров модели (α, r, w). Следовательно, в рассмотренном случае при любой информированности и/или взаимной информированности центров они могут быть уверены, что область компромисса не пуста!

6. Заключение

В настоящей работе рассмотрен ряд простых моделей, иллюстрирующих возможность и целесообразность использования аппарата рефлексивных игр для решения задач описания совместного принятия решений участниками эколого-экономических систем.

Проведенный анализ свидетельствует, что взаимная информированность участников эколого-экономических систем существенным образом влияет на совместно принимаемые ими решения, и, оказывая управленческие воздействия (т.е. изменяя эту информированность), можно изменять равновесные состояния подобных систем.

Литература

1. AUMANN R.J. *Agreeing to Disagree* // The Annals of Statistics. – 1976. – Vol. 4. – No. 6. – P. 1236–1239.
2. AUMANN R.J. *Interactive Epistemology I: Knowledge* // International Journal of Game Theory. – 1999. – No. 28. – P. 263–300.
3. BURKOV V., NOVIKOV D., SHCHEPKIN A. *Control Mechanisms for Ecological-economic Systems*. – Berlin: Springer, 2015. – 174 p.
4. CHKHARTISHVILI A.G. *Concordant Informational Control* // Automation and Remote Control. – 2012. – Vol. 73, No. 8. – P. 1401–1409.
5. GERMEIER YU. *Non-antagonistic Games*. - Dordrecht, Boston: D. Reidel Pub. Co., 1986. – 331 p.
6. LEFEBVRE V. *Lectures on the Reflexive Games Theory*. – N.Y.: Leaf & Oaks Publishers, 2010. – 220 p.
7. *Mechanism Design and Management: Mathematical Methods for Smart Organizations* / Ed. by Prof. D. Novikov. – N.Y.: Nova Science Publishers, 2013. – 204 p.
8. MYERSON R. *Game Theory: Analysis of Conflict*. – London: Harvard Univ. Press, 1991. – 568 p.
9. NOVIKOV D.A., CHKHARTISHVILI A.G. *Information Equilibrium: Punctual Structures of Information Distribution* // Au-

- tomation and Remote Control. – 2003. – Vol. 64, No. 10. – P. 1609–1619.
10. NOVIKOV D.A., CHKHARTISHVILI A.G. *Graph of a reflexive game and belles-lettres* // *Studia Humana*. – 2014. – Vol. 3:3 – P. 11–15.
 11. NOVIKOV D.A., CHKHARTISHVILI A.G. *Mathematical Models of Informational and Strategic Reflexion: a Survey* // *Advances in Systems Science and Applications*. – 2014. – No. 3. – P. 254–277.
 12. NOVIKOV D., CHKHARTISHVILI A. *Reflexion and Control: Mathematical Models*. – Leiden: CRC Press, 2014. – 298 p.
 13. NOVIKOV D.A. *Theory of Control in Organizations*. – N.Y.: Nova Scientific Publishing, 2013. – 341 p.
 14. OUGOLNITSKY G. *Sustainable Management*. – N.Y.: Nova Scientific Publishing, 2012. – 287 p.
 15. WHITELAW K. *Environmental Systems Handbook*. – Oxford: Elsevier, 2004. – 237 p.

MODELS OF REFLEXIVE GAMES IN CONTROL PROBLEMS OF ECOLOGICAL-ECONOMIC SYSTEMS

Dmitry Novikov, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Doctor of Science, Professor, corresponding member of RAS, deputy director (novikov@ipu.ru).

Alexander Chkhartishvili, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Doctor of Science, principal research scientist (sandro_ch@mail.ru).

Abstract: We substantiate the feasibility and reasonability of employing the framework of reflexive games for describing decision-making and control problems of ecological-economic systems.

Keywords: ecological-economic system, reflexive game, awareness structure, informational equilibrium.

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии М.В. Губко*

Поступила в редакцию 03.02.2015.

Опубликована 31.05.2015.

УДК 519
ББК 32.81

АНАЛИЗ МЕХАНИЗМА ПРОДАЖИ КВОТ

Щепкин А. В.¹

(ФГБУН Институт проблем управления
им. В. А. Трапезникова РАН, Москва)

Рассматривается ситуация, когда для обеспечения требуемого уровня безопасности в регионе Центр (руководитель региона) побуждает предприятия (источники риска возникновения чрезвычайных ситуаций) приобретать квоты – разрешения на создание определенного уровня риска. Общий размер квот ограничен. Исследована модель формирования размера продаваемых квот каждому предприятию в случае, когда суммарная заявка на квоты больше, чем общий размер квот. Исследована модель функционирования предприятия в случае, когда предприятие приобретает квоты, а Центр осуществляет проверку соответствия фактического уровня риска на предприятии и того уровня риска, который допускается при полученной квоте.

Ключевые слова: механизм формирования квоты, заявка на квоту, уровень безопасности региона, уровень риска предприятия.

1. Введение

Большая техногенная нагрузка на природную среду, перенос загрязнений на большие расстояния и вызванные этим экологические изменения привели к появлению нового типа комбинированных – природно-техногенных – рисков [5]. В федеральном законе «Об охране окружающей среды» под экологическим риском понимается вероятность наступления собы-

¹ Александр Васильевич Щепкин, доктор технических наук, профессор (sch@ipu.ru).

тия, имеющего неблагоприятные последствия для природной среды [6]. Поэтому в дальнейшем под риском или уровнем риска будем понимать вероятность наступления неблагоприятного события, соответственно, под уровнем безопасности будем понимать вероятность того, что неблагоприятное событие не произойдет.

В работах [1, 2] рассмотрены механизмы управления уровнем риска на предприятии и механизмы обеспечения безопасности в регионе. В частности рассмотрены механизм штрафов, механизм платы за риск, механизм финансирования снижения уровня риска, механизм компенсации затрат на снижение уровня риска. Достаточно фрагментарно рассмотрен механизм продажи квот. В [3] квота загрязнения определена как законодательная норма загрязнения, допускаемая для данного предприятия или для страны. В данной работе под квотой понимается максимально допустимый уровень риска для предприятия или региона и, соответственно, минимально допустимый уровень безопасности.

При анализе механизма квот в [1, 2] недостаточно внимания уделялось процедуре формирования заявок на квоты и оценке влияния на функционирование предприятий механизмов контроля за выполнение ими требований, связанных с обеспечением установленного уровня риска. Какой бы размер квот не приобрело предприятие, все равно возникает проблема проверки соответствия фактического уровня и того уровня риска, который допускается при полученной квоте. Проверка соответствия фактического уровня риска запланированному уровню осуществляется Центром – органом, отвечающим за безопасность региона, в котором функционируют предприятия. Кроме того, формирование соответствующих механизмов также возлагается на Центр.

2. Определение размера квоты предприятием

2.1. МОДЕЛЬ ПРЕДПРИЯТИЯ

Рассмотрим модель функционирования предприятия для случая, когда его потребность в квоте удовлетворяется полностью. При этом будем считать, что механизмом контроля за

выполнение предприятием требований, связанных с обеспечением установленного уровня риска, является механизм «сильных» штрафов.

Обозначим, как в [1]: $f(u) = cu - z(u)$ – прибыль предприятия; u – объем продукции, выпускаемой на предприятии; c – цена продукции; $z(u)$ – затраты предприятия на выпуск продукции в объеме u ; при этом считаем, что

$$\frac{dz(u)}{du} > 0 \text{ и } \frac{d^2z(u)}{du^2} > 0;$$

\hat{x} – допустимый уровень риска, установленный для предприятия. Как в [1], будем считать, что уровень риска, вызываемый деятельностью предприятия, или вероятность возникновения ЧС на этом предприятии, зависит от объема выпуска u и объема средств v , направляемых предприятием на совершенствование технологии, на предупреждение возникновения нештатных ситуаций, укрепление производственной и технологической дисциплины. То есть

$$x(u, v) = \frac{\omega(u)}{\omega(u) + \theta(v)},$$

причем

$$(1) \begin{cases} \omega(0) = \left. \frac{d\omega(u)}{du} \right|_{u=0} = 0, \theta(0) = T, \left. \frac{d\theta(v)}{dv} \right|_{v=0} \neq 0, \\ \frac{d\omega(u)}{du} > 0, \frac{d^2\omega(u)}{du^2} \geq 0, \frac{d\theta(v)}{dv} > 0, \frac{d^2\theta(v)}{dv^2} \leq 0. \end{cases}$$

2.2. АНАЛИЗ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ МОДЕЛИ

Если действует механизм «сильных» [7] штрафов, то это приводит к тому, что при максимизации своей прибыли предприятие решает задачу

$$(2) \begin{cases} f(u) - v \rightarrow \max_{(u,v)}, \\ \frac{\omega(u)}{\omega(u) + \theta(v)} = \hat{x}. \end{cases}$$

Предположим теперь, что предприятие, стремясь создать более комфортных условий функционирования, может приобрести для себя дополнительную квоту. В рамках рассматриваемой

модели под квотой будем понимать некоторый дополнительный уровень риска \tilde{x} . В этом случае уровень риска, который не может быть превышен предприятием, определяется величиной $\hat{x} + \tilde{x}$. Если предприятие приобретает квоту по цене λ , то размер квоты, который обеспечивает ему получение максимальной прибыли, может быть определен из решения задачи

$$(3) \quad \begin{cases} f(u) - v - \lambda \tilde{x} \rightarrow \max_{(u, v, \tilde{x})}, \\ \frac{\omega(u)}{\omega(u) + \theta(v)} = \hat{x} + \tilde{x}. \end{cases}$$

Задача (3) может быть представлена в виде

$$(4) \quad \Psi(u, v) = f(u) - v - \lambda \left(\frac{\omega(u)}{\omega(u) + \theta(v)} - \hat{x} \right) \rightarrow \max_{(u, v)}.$$

Пусть u' и v' – решение (4), тогда, в соответствии с [4], для второго дифференциала функции Ψ в точке (u', v') должны выполняться следующие условия:

$$(5) \quad \begin{aligned} & -\frac{d^2 z}{du^2} - \lambda \theta \frac{\omega''(\omega + \theta) - 2(\omega')^2}{(\omega + \theta)^3} < 0, \\ & -\lambda \omega \frac{\theta''(\omega + \theta) - 2(\theta')^2}{(\omega + \theta)^3} \left(\frac{d^2 z}{du^2} + \lambda \theta \frac{\omega''(\omega + \theta) - 2(\omega')^2}{(\omega + \theta)^3} \right) - \\ & - \left(\lambda \omega' \theta' \frac{\omega - \theta}{(\omega + \theta)^3} \right)^2 > 0. \end{aligned}$$

Фактически решение (4) находится из решения системы уравнений

$$(6) \quad \begin{cases} F(\lambda, u, v) = c - \frac{dz}{du} - \lambda \frac{\omega' \theta}{(\omega + \theta)^2} = 0, \\ \Phi(\lambda, u, v) = \lambda \omega \frac{\theta'}{(\omega + \theta)^2} - 1 = 0. \end{cases}$$

Утверждение 1. Если u' и v' – решение системы (6), то уменьшение цены квоты всегда приводит к увеличению объема выпуска на предприятии.

Доказательство. Для доказательства утверждения достаточно показать, что $\partial u' / \partial \lambda < 0$.

Система (6) задает две функции одной переменной $u'(\lambda)$ и $v'(\lambda)$.

Производная функции $u'(\lambda)$ записывается в виде

$$(7) \quad \frac{du}{d\lambda} = \frac{F'_v \Phi'_\lambda - F'_\lambda \Phi'_v}{F'_u \Phi'_v - F'_v \Phi'_u}.$$

Легко показать, что

$$F'_\lambda = -\frac{\omega' \theta}{(\omega + \theta)^2}, \quad \Phi'_u = \lambda \theta' \omega' \frac{\theta - \omega}{(\omega + \theta)^3},$$

$$\Phi'_v = \lambda \omega \frac{\theta''(\omega + \theta) - 2(\theta')^2}{(\omega + \theta)^3}, \quad F'_v = -\lambda \omega' \theta' \frac{\omega - \theta}{(\omega + \theta)^3},$$

$$F'_u = -\frac{d^2 z}{du^2} - \lambda \theta \frac{\omega''(\omega + \theta) - 2(\omega')^2}{(\omega + \theta)^3}, \quad \Phi'_\lambda = \frac{\omega \theta'}{(\omega + \theta)^2}.$$

И поэтому числитель дроби (7) можем записать.

$$F'_v \Phi'_\lambda - F'_\lambda \Phi'_v = \frac{\lambda \omega \omega'}{(\omega + \theta)^5} \left\{ \theta'' \theta (\omega + \theta) - \theta (\theta')^2 - (\theta')^2 \omega \right\}.$$

Из (1) следует, что числитель этой дроби отрицательный. Аналогично, знаменатель дроби (7) может быть представлен в виде

$$F'_u \Phi'_v - F'_v \Phi'_u = -\lambda \omega \frac{\theta''(\omega + \theta) - 2(\theta')^2}{(\omega + \theta)^3} \left(\frac{d^2 z}{du^2} + \lambda \theta \frac{\omega''(\omega + \theta) - 2(\omega')^2}{(\omega + \theta)^3} \right) +$$

$$+ \left[\lambda \omega' \theta' \frac{\omega - \theta}{(\omega + \theta)^3} \right]^2.$$

Сравнивая это выражение с (5) можем утверждать, что знаменатель дроби (7) больше нуля. Это и доказывает утверждение.

Таким образом, уменьшение цены квоты стимулирует увеличение выпуска на предприятии. Но здесь следует заметить, что уменьшение цены квоты приводит к росту выпуска продукции лишь до тех пор, пока квота не достигнет значения

$$\tilde{x} = \frac{\omega^*(u^*)}{\omega(u^*) + T} - \hat{x},$$

где u^* – решение задачи $f(u) \rightarrow \max_u$.

Естественным допущением является тот факт, что с ростом цены размер квоты, приобретаемой предприятием, падает, т.е. справедливо выражение

$$(8) \quad \frac{\partial \tilde{x}}{\partial \lambda} < 0.$$

Из утверждения 1 следует, что увеличение цены квоты всегда приводит к увеличению объема средств, направляемых на снижение риска. Действительно, учитывая (3), можем записать

$$(9) \quad \tilde{x} = \frac{\omega(u')}{\omega(u') + \theta(v')} - \hat{x}.$$

Так как u' и v' – решение системы (6), то справедливо выражение

$$\frac{\partial \tilde{x}}{\partial \lambda} = \frac{\theta \omega' \frac{\partial u'}{\partial \lambda} - \omega \theta' \frac{\partial v'}{\partial \lambda}}{(\omega + \theta)^2}.$$

А учитывая (8) можно утверждать, что $\partial v' / \partial \lambda > 0$, т.е. увеличение цены квоты приводит к увеличению объема средств, направляемых на снижение риска.

3. Определение Центром размера квоты

Выше была рассмотрена ситуация, когда размер квоты для предприятия был неограничен. Если же в регионе функционируют несколько предприятий и каждое предприятие претендует на получение определенной квоты, то может оказаться, что удовлетворить все предприятия не представляется возможным. Действительно, пусть Центр должен обеспечить уровень безопасности в регионе равный Y . Когда в регионе функционируют n предприятий, и уровень безопасности, связанный с деятельно-

стью i -го предприятия, равен $(1 - \hat{x} - \tilde{x}_i)$, а уровень безопасности всего региона определяется как

$$\prod_{i=1}^n (1 - \hat{x} - \tilde{x}_i),$$

то общий объем квот, который Центр может продать предприятиям, определяется из условия

$$Y = \prod_{i=1}^n (1 - \hat{x} - \tilde{x}_i).$$

Для продажи квот Центр назначает цену продаж λ , затем предприятия, решая задачу (3), рассчитывают размер квот, которые они хотели бы купить по этой цене. Обозначим через s_i размер заявки на квоту. Эта заявка сообщается в Центр. Если оказывается, что

$$\prod_{i=1}^n (1 - \hat{x} - s_i) \geq Y,$$

то Центр продает каждому предприятию квоту в размере $s_i = \tilde{x}_i$. Если же

$$\prod_{i=1}^n (1 - \hat{x} - s_i) < Y,$$

то для определения размера квот для каждого предприятия Центр определяет, во сколько раз продаваемая квота будет меньше запрашиваемой. Пусть $h = 1 - \hat{x}$, тогда задача, которую решает Центр, имеет вид

$$(10) \begin{cases} \sum_{i=1}^n \lambda a_i s_i \rightarrow \max_{\{a_i\}}, \\ \prod_{i=1}^n (h - a_i s_i) = Y, \\ 0 < a_i \leq 1. \end{cases}$$

Последнее неравенство означает, что при заданной цене предприятию не может продаваться больший размер квоты, чем само предприятие запросило для себя. Другими словами, должно всегда выполняться условие $\tilde{x}_i \leq s_i$.

Решим сначала задачу

$$(11) \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^n \lambda a_i s_i \rightarrow \max_{\{a_i\}}, \\ \prod_{i=1}^n (h - a_i s_i) = Y. \end{cases}$$

Решение (11) можно представить в виде $a_i^{(1)} = (h - Y^{1/n}) / s_i$. Отсюда следует, что все предприятия должны получить одинаковую квоту в размере $\tilde{x}_i = a_i^{(1)} s_i = h - Y^{1/n}$. Если $a_i^{(1)} \leq 1$, то решения задач (10) и (11) совпадают. Если же это не так, то для некоторых предприятий может оказаться, что $\tilde{x}_i > s_i$. Не ограничивая общности будем считать, что все заявки на квоты упорядочены по возрастанию, т.е. $s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_n$, и существует такое j , что справедливо следующее условие

$$(12) \quad \begin{cases} \tilde{x}_i = s_i, & \text{если } i \leq j, \\ \tilde{x}_i = a_i^{(1)} s_i = h - \left[Y / \prod_{i=1}^j (h - s_i) \right]^{1/(n-j)}, & \text{если } i > j. \end{cases}$$

Утверждение 2. Если все заявки на квоты упорядочены по возрастанию и справедливо (12), то решение (10) имеет вид

$$(13) \quad \begin{cases} a_i = 1, & \text{если } i \leq j, \\ a_i = \frac{1}{s_i} \left(h - \left[Y / \prod_{i=1}^j (h - s_i) \right]^{1/(n-j)} \right), & \text{если } i > j. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть \hat{a}_i – решение задачи (10) и это решение не совпадает с (13). Тогда, очевидно, должно выполняться неравенство

$$\sum_{i=1}^n \hat{a}_i s_i > \sum_{i=1}^j s_i + (n-j) \left[h - \left(Y / \prod_{i=1}^j (h - s_i) \right)^{1/(n-j)} \right].$$

Перепишем это неравенство в виде

$$(14) \sum_{i=1}^j (h - s_i) + (n - j) \left(\frac{Y}{\prod_{i=1}^j (h - s_i)} \right)^{\frac{1}{n-j}} > \sum_{i=1}^j (h - \hat{a}_i s_i) + \sum_{i=j+1}^n (h - \hat{a}_i s_i).$$

Так как выполняется условие

$$\prod_{i=1}^n (h - \hat{a}_i s_i) = Y,$$

то легко определить минимальное значение

$$\sum_{i=j+1}^n (h - \hat{a}_i s_i),$$

которое равно

$$(n - j) \left(Y / \prod_{i=1}^j (h - \hat{a}_i s_i) \right)^{1/(n-j)}.$$

Поэтому, если справедливо (14), тем более справедливо

$$(15) \frac{\sum_{i=1}^j (h - s_i)}{n - j} + \left(\frac{Y}{\prod_{i=1}^j (h - s_i)} \right)^{\frac{1}{n-j}} > \frac{\sum_{i=1}^j (h - \hat{a}_i s_i)}{n - j} + \left(\frac{Y}{\prod_{i=1}^j (h - \hat{a}_i s_i)} \right)^{\frac{1}{n-j}}.$$

Пусть $p_i = h - \hat{a}_i s_i$ и $q_i = h - s_i$, очевидно, что

$$(16) q_1 \geq q_2 \geq \dots \geq q_n.$$

В силу того, что $\hat{a}_i \leq 1$, имеем $p_i - q_i = s_i(1 - \hat{a}_i) \geq 0$, или $p_i \geq q_i$, $i = 1, \dots, j$. Поэтому (15) можно переписать в виде

$$(17) \sum_{i=1}^j q_i / (n - j) + \left(Y / \prod_{i=1}^j q_i \right)^{\frac{1}{n-j}} > \sum_{i=1}^j p_i / (n - j) + \left(Y / \prod_{i=1}^j p_i \right)^{\frac{1}{n-j}},$$

причем $\prod_{i=1}^n p_i = \prod_{i=1}^n q_i = Y$.

Покажем, что

$$q_j > \left(Y / \prod_{i=1}^j q_i \right)^{1/(n-j)}.$$

Действительно, из

$$(n-j) \left[1 - 1 / \left(\prod_{i=1}^j \varepsilon_i \right)^{1/(n-j)} \right] > \sum_{i=1}^j (\varepsilon_i - 1) \prod_{k=i}^j \delta_k.$$

Так как $\prod_{k=i}^j \delta_k > 1$, тем более должно быть справедливым выражение

$$(n-j) \left[1 - 1 / \left(\prod_{i=1}^j \varepsilon_i \right)^{1/(n-j)} \right] > \sum_{i=1}^j (\varepsilon_i - 1).$$

Перепишем это неравенство в виде

$$(n-j) \left[1 - 1 / \left(\prod_{i=1}^j \varepsilon_i \right)^{1/(n-j)} \right] > j \sum_{i=1}^j \varepsilon_i / j - j.$$

Известно, что среднее арифметическое больше или равно среднему геометрическому, поэтому должно выполняться неравенство

$$(n-j) \left[1 - 1 / \left(\prod_{i=1}^j \varepsilon_i \right)^{1/(n-j)} \right] > j \left(\prod_{i=1}^j \varepsilon_i \right)^{1/j} - j.$$

Обозначим $\left(\prod_{i=1}^j \varepsilon_i \right)^{1/(n-j)} = W$, тогда последнее неравенство

можно переписать в виде $(W-1)n/j > W^{nj} - 1$, но это неравенство противоречит неравенству Бернулли, и это противоречие доказывает утверждение.

Таким образом, доказано неравенство

$$\sum_{i=1}^j q_i / j + \frac{n-j}{j} \left(\prod_{i=j+1}^n q_i \right)^{1/(n-j)} \leq \sum_{i=1}^j p_i / j + \frac{n-j}{j} \left(\prod_{i=j+1}^n p_i \right)^{1/(n-j)}.$$

Следствие. Если для двух рядов $\{p_i\}$ и $\{q_i\}$, $i = 1, \dots, n$, выполняется (16), $\prod_{i=1}^n p_i = \prod_{i=1}^n q_i = Y$ и существует такое j , что $p_i \geq q_i$, $i = 1, \dots, j$, то сумма среднего арифметического значения первых j членов ряда и среднего геометрического значения остальных

$n - j$ членов ряда $\{p_i\}$, умноженная на коэффициент $(n - j) / j$, больше аналогичной суммы для ряда $\{q_i\}$.

4. Заключение

Таким образом, определение Центром размера продаваемой квоты предприятиям региона заключается в упорядочивании заявок на квоты по возрастанию, а затем в определении такого номера j , для которого выполняется условие

$$\prod_{i=1}^j (h - s_i) \times \left(h - \left[\prod_{i=j+1}^n (h - s_i) \right]^{1/(n-j)} \right)^{(n-j)} = Y.$$

Теперь, зная значение j , квоту для каждого предприятия можно рассчитать в соответствии с процедурой (12).

Литература

1. БУРКОВ В.Н., НОВИКОВ Д.А., ЩЕПКИН А.В. *Механизмы управления эколого-экономическими системами*. – М.: Физматлит, 2008. – 243 с.
2. БУРКОВ В.Н., НОВИКОВ Д.А., ЩЕПКИН А.В. *Модели и механизмы управления эколого-экономическими системами // Проблемы управления*. – 2009. – №1. – С. 2–7.
3. ДЕДЮ И.И. *Экологический энциклопедический словарь*. – Кишинев: Гл. ред. Молдавской советской энциклопедии, 1990. – 408 с.
4. ИЛЬИН В.А., САДОВНИЧИЙ В.А., СЕНДОВ Бл.Х. *Математический анализ*. – М.: Наука, 1979. – 720 с.
5. ПОРФИРЬЕВ Б.Н. *Экономическое развитие и чрезвычайные ситуации: мир и современная Россия // Российский экономический журнал*. – 2003. – №5–6. – С. 44–55.
6. *Федеральный закон от 10 января 2002 г. №7-ФЗ «Об охране окружающей среды»*.
7. ЩЕПКИН Д.А. *Штрафы при управлении уровнем риска на предприятии // Управление большими системами*. – 2004. – №9. – С. 220–231.

ANALYSIS OF A QUOTA TRADING MECHANISM

Alexander Shchepkin, Institute of Control Sciences of RAS,
Moscow, Doctor of Sciences (Eng.), Professor (sch@ipu.ru).

Abstract: We study the model of regional environmental safety, when a Principal (the local government) sales environmental risk quotas to enterprises being the source of potential ecological danger. The total volume of risk quotas is limited. We suggest a quota assignment mechanism for the case when the total volume of bids exceeds the predefined total quota volume. We study the model when enterprises by the quotas while a Principal performs monitoring of a real safety level in production and compares it with quotas sold.

Keywords: The formation mechanism of the quota, requisition for the quota, the level of security in the region, the level of risk of the enterprise.

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии Д.А. Новиковым*

*Поступила в редакцию 04.02.2015.
Опубликована 31.05.2015.*