УДК 519.833.2
ББК 22.18

ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИЕ ОЛИГОПОЛЬНЫЕ И ОЛИГОПСОННЫЕ РЫНКИ КУРНО[1]

Зоркальцев В. И.[2], **Киселева М. А.**[3]
(*Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН, Иркутск*)

Рассматривается модель функционирования нескольких рынков приобретения ресурсов и продажи продукции ограниченного числа предприятий. Эти предприятия одновременно являются олигопсонистами на рынках ресурсов и олигополистами на рынках продукции. Каждое предприятие в рамках его технологических ограничений выбирает объемы приобретаемых ресурсов и объемы поставляемой продукции с учетом влияния этих объемов на цены ресурсов и цены продукции. Доказано, что в случае линейных функций предложения ресурсов и линейных функций спроса рассматриваемая модель является «потенциальной игрой», то есть равносильна некоторой задаче математического программирования. Обсуждаются особенности и преимущества такого представления модели взаимодействующих олигопольных и олигопсонных рынков.

Ключевые слова: модель Курно, равновесие Нэша, потенциальная игра.

---

[1] *Работа поддержана грантом РФФИ № 13-06-00152а «Рынки несовершенной конкуренции в электроэнергетике: модели и механизмы функционирования».*

[2] *Валерий Иванович Зоркальцев, д.т.н. , профессор, зав. лаб. методов математического моделирования и оптимизации в энергетике ИСЭМ СО РАН, (zork@isem.sei.irk.ru).*

[3] *Марина Александровна Киселева, ст. инженер ИСЭМ СО РАН, (marinee@mail.ru).*

Введение

Многие сферы российской экономики функционируют в виде олигопольных рынков, т.е. с небольшим количеством продавцов, которые могут существенно влиять на ценовую ситуацию. Эти рынки характеризуются большим многообразием форм организации конкуренции, потенциальной неустойчивостью из-за возможных, непредсказуемых смен правил поведения отдельных участников, возможностями использования продавцами разных форм сговора. Причем олигопольными в нашей стране являются многие инфраструктурные отрасли экономики, в том числе электроэнергетика, железнодорожный транспорт, трубопроводные системы, авиаперевозки, связь. Поэтому исследование особенностей функционирования олигопольных рынков, в том числе на базе математического моделирования, является важной в теоретическом и практическом аспектах задачей.

Часто исследования олигополий ограничиваются примерами изучения свойств одного, единого рынка. Вместе с тем, нередки ситуации, когда один и тот же состав олигополистов конкурирует на нескольких рынках. Например, в электроэнергетике небольшое число предприятий-производителей продает свою продукцию не только на нескольких территориально разных рынках, но и на рынках разных видов продукции – на рынках мощности, электроэнергии в разные часы суток и с разной заблаговременностью. Эти же предприятия зачастую являются олигопсонистами на рынках закупаемых ими ресурсов, а именно разных видов топлива (угля, газа и т.д.).

Объектом исследования в данной статье является модель функционирования нескольких взаимосвязанных олигопольных и олигопсонных рынков с одним и тем же составом продавцов продукции, которые в то же время являются покупателями на рынках ресурсов. Рынки названы «взаимодействующими», поскольку отдельный продавец может перераспределять свои поставки товаров на разные рынки и осуществлять закупки ресурсов с разных рынков с учетом своих возможностей и затрат, особенностей ценообразования на этих рынках.

В данной статье рассматривается модель формирования равновесных состояний рынков Курно с линейными (линеаризованными) функциями спроса на готовую продукцию и предложения ресурсов. Равновесными здесь названы такие ситуации, в которых ни одному из продавцов не выгодно менять принятое им решение. Такое состояние принято называть равновесием Нэша. Рассматриваемая модель называется моделью взаимодействующих рынков Курно, поскольку каждый из продавцов на каждом из рынков в качестве инструментальных переменных использует только объемы поставляемых им товаров и объемы покупаемых ресурсов. Цены на рынках продаваемой продукции и закупаемых ресурсов формируются из обратных функций спроса и предложения на этих рынках, задающих связь цены с суммарным по всем поставщикам объемом поставок товара и закупок ресурсов.

Равновесие в модели Курно находится из совокупного решения задач максимизации прибыли каждым производителем при фиксированных объемах продаж остальных, т.е. равновесие – это решение задачи многосубъектной оптимизации. Если задача оптимизации каждого субъекта при заданных решениях других субъектов имеет вид задачи выпуклого программирования, то, как известно, ее можно представить в виде равносильной системы уравнений и неравенств, отражающей условия оптимальности (Куна–Таккера) этой задачи. Собрав воедино такие системы для всех субъектов, получим систему уравнений и неравенств, решения которой будут составлять равновесия Нэша. В отдельных случаях такая обобщенная система сама может интерпретироваться как система условий оптимальности некоторой единой задачи оптимизации. Возможность представления задачи согласования решений в модели Курно в виде одной задачи оптимизации представляет теоретический и практический интерес.

В теории игр такой феномен, когда задача поиска равновесия эквивалентна некоторой задаче оптимизации, называется потенциальной игрой. Потенциальность позволяет пользоваться хорошо разработанным аппаратом теории и методов оптимизации при теоретических исследованиях (в том числе для выяснения вопросов существования и единственности решений), для поиска равновесных решений.

Вопрос потенциальности модели рынка Курно поднимался и исследовался в работах Bergstrom and Varian [4], M. Slade [7], Monderer and Shapley [6], Кукушкин [5]. Так, впервые в [7] и позже в общем виде в [5, 6] показано, что игра, соответствующая модели рынка Курно, является потенциальной, если и только если спрос является линейной функцией.

Случай, когда фирмы конкурируют одновременно на нескольких рынках, называется сетевой конкуренцией Курно.

Так, в [3] для моделирования рыночной сети используется двудольный граф и рассматриваются вопросы вычисления равновесия в зависимости от вида сети и функций цен и издержек, предложены алгоритмы для нахождения равновесия Нэша сетевой игры в различных случаях. Для случая линейной зависимости цен на рынках от объема продаваемой продукции составляется потенциальная функция и используется техника методов оптимизации. Для нелинейных функций спроса, когда «трюк» с конструированием потенциала не проходит, авторы представляют модель в виде нелинейной задачи о дополнительности и предлагают алгоритм, который находит равновесие для строго выпуклых функций издержек и сторого монотонных функций дохода.

Ранее в [1] мы рассматривали модель нескольких взаимодействующих олигопсоннных рынков – ситуацию согласования решений в производственных системах при использовании некоторых общих ресурсов, когда затраты на использование каждого из этих ресурсов зависят от того, в какой мере они используется другими производителями – участниками рынка. В [1] доказана потенциальность такой модели при линейных функциях удельных затрат и указывается способ конструирования потенциала для нахождения равновесия. Одна из целей настоящей работы – перенести использованный ранее подход описании олигопсонных рынков [1] на ситуацию взаимодействующих олигопольных и олигопсонных рынков.

1. Исходные определения

Рассматривается модель взаимодействия ограниченного набора предприятий, являющихся одновременно олигополистами и олигопсонистами на нескольких рынках. Пусть $l = 1, ..., L$ – номера предприятий; $m = 1, ..., M$ – номера поставляемых ими товаров (номера рынков продукции); $k = 1, ..., K$ – номера покупаемых ими ресурсов (номера рынков ресурсов). Обозначим векторы объемов продукции, объемов приобретаемых ресурсов и интенсивностей технологических способов предприятия l через z^l, y^l, x^l из R^M, R^K, R^{n_l} соответственно. Здесь n_l – количество используемых предприятием l технологических способов.

Общие объемы поставляемой всеми предприятиями продукции и закупаемых ими ресурсов составляют векторы

$$z = \sum_{l=1}^{L} z^l,\ y = \sum_{l=1}^{L} y^l. \tag{1}$$

Далее нам потребуются также векторы суммарных объемов продукции и ресурсов всех предприятий за вычетом объемов одного из предприятий. Эти векторы обозначим

$$z^{-l} = z - z^l,\ y^{-l} = y - y^l,\ l = 1, \ldots, L. \tag{2}$$

Заданы функции затрат $F^l(x^l)$, зависящие от интенсивности использования технологических способов. Считаем, что это выпуклые дифференцируемые функции.

На каждом рынке продукции и на каждом рынке ресурсов имеются линейные обратные функции спроса и, соответственно, обратные функции предложения. Они выражают зависимость цены на производимую продукцию и цены на приобретаемые ресурсы от общего объема продукции и общего объема приобретаемых ресурсов:

$$P_m\left(z_m\right) = \beta_m - \alpha_m z_m,\ \ m = 1, ..., M, \tag{3}$$

$$C_k\left(y_k\right) = \delta_k + \gamma_k y_k,\ \ k = 1, ..., K. \tag{4}$$

Здесь $\alpha_m, \beta_m, \gamma_k, \delta_k$ – заданные коэффициенты, причем $\alpha_m > 0$, $\gamma_k > 0$.

Прибыль предприятия описывается в виде функции, выражающей разность между доходами и затратами предприятия:

$$\pi^l\left(z^{-l}, z^l, y^{-l}, y^l, x^l\right) = \sum_{m=1}^{M} P_m(z_m^{-l} + z_m^l)z_m^l -$$

$$(5) \qquad -\sum_{k=1}^{K} C_k(y_k^{-l} + y_k^l)y_k^l - F_l(x^l), l = 1, \ldots, L.$$

Здесь специально в выражениях цен продукции и ресурсов в аргументы выделены составляющие, не зависящие и зависящие от решений, принимаемых предприятием l.

У каждого предприятия $l = 1, ..., L$ имеется система линейных ограничений

$$(6) \qquad A^l x^l \leqslant b^l, \;\; x^l \geqslant 0,$$

$$(7) \qquad y^l - G^l x^l = 0, D^l x^l - z^l = 0.$$

Здесь заданными являются матрицы: A^l – размера $t_l \times n_l$ при некотором натуральном t_l; G^l – размера $K \times n_l$; D^l – размера $M \times n_l$. Задан также вектор b^l из R^{t_l}, причем $b^l \geqslant 0$. Это гарантирует, что векторы $x^l = 0, y^l = 0, z^l = 0$ будут удовлетворять всем ограничениям. Такой набор векторов будем называть нулевым решением. При нем прибыль предприятия l равна нулю.

Первое условие в (6) можно интерпретировать как балансовые ограничения на использование располагаемых предприятием ресурсов. Компоненты вектора b^l – объемы располагаемых ресурсов. Коэффициенты матрицы A^l – удельные расходы на рассматриваемые технологические способы этих ресурсов.

Первое условие в (7) интерпретируется как балансовое ограничение на приобретаемые ресурсы. Второе условие в (7) интерпретируется как балансовые ограничения на выпускаемую предприятием l продукцию. Коэффициенты матриц G^l и D^l можно интерпретировать как удельные расходы ресурсов и удельные выпуски продукции.

2. Модель олигополии-олигопсонии Курно

Допустимыми решениями для предприятия $l = 1, ..., L$ назовем такие векторы x^l, y^l, z^l, при которых выполняются условия (6), (7). Будем считать, что каждый поставщик стремится выбирать такие допустимые решения, при которых его прибыль будет как можно больше. То есть предприятие l решает задачу

$$\pi^l \left(z^{-l}, z^l, y^{-l}, y^l, x^l\right) \to \max_{z^l, y^l, x^l} \quad (8)$$

при ограничениях (6), (7). Подчеркнем, что в качестве инструментальных переменных для предприятия l рассматриваются только векторы z^l, y^l, x^l. Векторы z^{-l}, y^{-l} для l-го предприятия рассматриваются здесь как экзогенные. При этом прибыль предприятия l зависит от значений этих экзогенных параметров.

Поскольку объемы поставок товаров отдельных предприятий влияют на суммарный объем поставок и, следовательно, на цены продаваемых товаров, то проблему (8) можно назвать моделью олигопольных рынков. При этом отдельные предприятия влияют на суммарные объемы закупок ресурсов и, следовательно, на цены этих ресурсов. Поэтому проблема (8) названа также моделью олигопсонных рынков. Поскольку рассматривается несколько рынков сбыта продукции и несколько рынков ресурсов, связанных одними и теми же продавцами и покупателями, то рассматриваемая ситуация названа моделью нескольких взаимодействующих олигопольных и олигопсонных рынков. Наконец, поскольку управляемыми параметрами каждого предприятия на рынках являются только объемы поставляемых товаров и объемы закупаемых ресурсов, то рассматриваемая ситуация названа рынками Курно.

Прибыль каждого предприятия l зависит как от выбираемых им параметров, составляющих векторы z^l, y^l, x^l, так и от параметров, выбираемых другими предприятиями через значения векторов z^{-l}, y^{-l}. При изменениях решений других предприятий может меняться и решение данного предприятия.

Необходимо уточнить, что понимается под общим решением взаимосвязанных оптимизационных задач (8) для $l = 1, ..., L$.

В данной статье в качестве такого общего решения будем рассматривать равновесие Нэша – такой набор допустимых решений z^l, y^l, x^l каждого субъекта $l = 1, ..., L$, при котором ни одному из них не выгодно менять свое решение на другое, допустимое по его ограничениям.

Определение. *Векторы* $\left(z^1, \ldots, z^L, y^1, \ldots, y^L, x^1, \ldots, x^L\right)$ *составляют равновесное по Нэшу решение* (*равновесие Нэша*) *рассматриваемой модели взаимодействующих олигопольных и олигопсонных рынков Курно, если для любого предприятия* $l = 1, \ldots, L$ *тройка векторов* z^l, y^l, x^l *составляет оптимальное решение задачи* (8)*, когда векторы* z^{-l}, y^{-l} *связаны с оптимальными решениями других предприятий условиями* (1)*,* (2) .

Задача (8) относится к классу задач выпуклого программирования с дифференцируемой целевой функцией при линейных ограничениях. Для того чтобы векторы z^l, y^l, x^l составляли оптимальное решение данной задачи, необходимо и достаточно выполнения для этих векторов исходных ограничений (6), (7) и условий

$$\nabla F_l(x^l) + \left(A^l\right)^T \lambda^l + (G^l)^T v^l - (D^l)^T u^l \geqslant 0, \tag{9}$$

$$u^l_m = P_m(z^{-l}_m + z^l_m) - \alpha_m z^l_m,\ m = 1, \ldots, M, \tag{10}$$

$$v^l_k = C_k(y^{-l}_k + y^l_k) + \gamma_k y^l_k,\ k = 1, \ldots, K, \tag{11}$$

$$(x^l)^T \nabla F_l(x^l) + \left(b^l\right)^T \lambda^l + (y^l)^T v^l - (z^l)^T u^l = 0, \tag{12}$$

$$(b - Ax^l)^T \lambda^l = 0, \lambda^l \geqslant 0 \tag{13}$$

при некоторых $\lambda^l \in R^{n_l}$, $v^l \in R^K$, $u^l \in R^M$. Здесь λ^l, v^l, u^l – векторы множителей Лагранжа балансовых ограничений в (6), (7). Эти векторы экономически интерпретируются как вмененные (внутренние) цены располагаемых предприятием l ресурсов, приобретаемых ресурсов и, соответственно, реализуемой продукции.

Заметим, что, согласно (10), «внутренние» цены продукции могут оказаться ниже, чем цены на рынке. Это отражает учёт влияния объема поставок данного предприятия на снижение рыночных цен. Разность между ценой на рынке и внутренней ценой равна величине $\alpha_m z_m^l$. С увеличением объема продаж z_m^l эта разность увеличивается. Аналогично, согласно (11), вследствие учета влияния объема закупок данного предприятия на уровень цен ресурсов рыночные цены ресурсов могут оказаться ниже, чем «внутренние» цены предприятия на эти ресурсы.

Отметим, что в условиях (10), (11) векторы z^{-l}, y^{-l} при данном l считаются фиксированными.

Рассмотрим одновременно L систем (6), (7), (9)–(13) для всех $l = 1, \ldots, L$ как одну систему. Причем в эту систему включим условия (1), (2). Из сформулированных выше условий оптимальности задачи (8) следует, что решения такой расширенной системы будут составлять равновесное по Нэшу решение рассматриваемой модели олигополии-олигопсонии. И наоборот, любое равновесное по Нэшу решение модели олигополии-олигопсонии будет решением данной расширенной системы. Итак, доказано следующее утверждение.

Теорема 1. *Векторы* $\left(z^1, \ldots, z^L, y^1, \ldots, y^L, x^1, \ldots, x^L\right)$ *составляют равновесные по Нэшу решения набора задач оптимизации* (8) *при* $l = 1, \ldots, L$ *в том и только том случае, если эти векторы при некоторых векторах* $\lambda^l, u^l, v^l, l = 1, \ldots, L,$ *удовлетворяют условиям* (1), (2), (6), (7), (9)–(13).

3. Представление проблемы поиска равновесия Нэша в виде задачи выпуклого программирования

Рассмотрим задачу выпуклого программирования с линейными ограничениями:

(14) $$H\left(z^1, \ldots, z^L, y^1, \ldots, y^L, x^1, \ldots, x^L\right) \to max$$

при условиях (6), (7) для всех $l = 1, \ldots, L$. Здесь

$$H\left(z^1, \ldots, z^L, y^1, \ldots, y^L, x^1, \ldots, x^L\right) = \sum_{m=1}^{M} \beta_m z_m - \sum_{k=1}^{K} \delta_k y_k^l -$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{M}\alpha_m\left(z_m^2+\sum_{l=1}^{L}(z_m^l)^2\right)-$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{K}\gamma_k\left(y_k^2+\sum_{l=1}^{L}(y_k^l)^2\right)-\sum_{l=1}^{L}F_l(x^l).$$

Согласно (1) векторы z и y в этом выражении представляют сумму соответственно векторов z^l и y^l по $l = 1, \ldots, L$.

Согласно условиям оптимальности Куна–Таккера для задачи (14) набор векторов $z^l, y^l, x^l, l = 1, \ldots, L$, будет составлять оптимальное решение в том и только том случае, если это решение удовлетворяет условиям (1), (2), (6), (7), (9)–(13) при некоторых $u^l \in R^M, v^l \in R^K, \lambda^l \in R^{n_l}, l = 1, \ldots, L$. Из теоремы 1 вытекает следующее утверждение

Теорема 2. *Оптимальные решения задачи* (14) *являются равновесными по Нэшу решениями модели* (8) *и, наоборот, любое равновесное по Нэшу решение модели* (8) *будет оптимальным решением задачи* (14).

4. Обсуждения

1. Теорема 2 сводит проблему поиска равновесия Нэша к хорошо исследованной, удобной во многих отношениях задаче выпуклого программирования. Такое представление полезно для выяснения вопросов существования и единственности решения, для нахождения равновесия Нэша. В этих целях можно воспользоваться многими имеющимися алгоритмами решения задач максимизации вогнутых дифференцируемых функций при линейных ограничениях.

Из строгой вогнутости функции H по векторам z^l, y^l следует, что если равновесие Нэша существует, то оно единственное по данным векторам. Если функции издержек F^l строго выпуклые, то единственным будет и решение по переменным x^l. В общем случае (когда F^l только выпуклые) решения по переменным x^l будут образовывать некоторые выпуклые множества, на которых будут иметь место постоянные значения функций F^l.

Поскольку для каждого предприятия всегда имеется допустимое нулевое решение, то случай отсутствия решения из-за противоречивости ограничений задачи (14) не может иметь места.

Для существования оптимального решения задачи (14) достаточно ограниченности множества Лебега функции F_l на множестве допустимых решений. В частности, это выполняется, если множества решений систем (6), (7) ограничены при всех $l = 1, \ldots, L$.

2. В случае нелинейных функций спроса P_m и предложения C_k можно воспользоваться их итеративной линеаризацией. Это позволит свести проблему поиска равновесия Нэша к последовательности задач выпуклого программирования с линейными ограничениями. Такой путь поиска равновесия намечен и проиллюстрирован на примере в [2]. Он нуждается в теоретическом обосновании.

3. Потенциальную функцию можно представить в следующем равносильном виде:

$$H\left(z^1, \ldots, z^L, y^1, \ldots, y^L, x^1, \ldots, x^L\right) =$$

$$\sum_{l=1}^{L} \pi^l(z^{-1}, z^l, y^{-l}, y^l, x^l) + \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{M} \alpha_m (z_m)^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{K} \gamma_k (y_k)^2 -$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{M} \alpha_m \left(\sum_{l=1}^{L} (z_m^l)^2\right) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{K} \gamma_k \left(\sum_{l=1}^{L} (y_k^l)^2\right).$$

Такое представление полезно для экономической интерпретации равновесия Нэша на базе задачи оптимизации (14).

В этом представлении целевая функция наряду с суммой прибылей всех предприятий содержит еще четыре составляющие. Их наличие объясняет, почему в точке равновесия Нэша не достигается максимально возможная суммарная прибыль всех предприятий, если их число L больше либо равно 2.

При $L = 1$ последние четыре составляющие тождественно равны нулю. В этом случае целевая функция задачи (14) состоит в максимизации прибыли этого единственного предприятия монополиста на рынке продукции и монопсониста на всех рынках ресурсов.

Вторая и третья составляющие функции H интерпретируются как дополнительный доход (surplus) покупателей продукции и продавцов ресурсов. Наличие в потенциальной функции четвертой и пятой составляющей объясняет отклонение равновесия Курно–Нэша от точки Вальраса, в которой достигается максимальный суммарный дополнительный доход всех продавцов и покупателей рассматриваемой модели.

Литература

1. ЗОРКАЛЬЦЕВ В.И., КИСЕЛЕВА М.А. *Равновесие Нэша производственных планов* // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. – 2009. – No. 3. – С. 219–224.
2. ЗОРКАЛЬЦЕВ В.И., КИСЕЛЕВА М.А. *Олигопольные и олигопсонные взаимосвязанные рынки* (*препринт*). – Иркутск: ИСЭМ СО РАН, 2014. – 19 с.
3. ABOLHASSANI M., BATENI MH., HAJIAGHAYI MT. ET AL. *Network Cournot Competition* // Lecture Notes in Computer Science – 2014. – Vol. 8877. – P. 15–29.
4. BERGSTROM T.C. AND VARIAN H.R. *Two Remarks on Cournot Equilibria* // Economic Letters. – 1985. – No. 19 – P. 5–8.
5. KUKUSHKIN N. *Congestion games revisited* // Int.J Game Theory. – 2007. – Vol. 36. – P. 57–83.
6. MONDERER D. AND SHAPLEY L. *Potential games* // Games and Economic Behavior. – 1996. – No. 14. – P. 124–143.
7. MARGARET E. *Slade What does an Oligopoly Maximize?* // The Journal of Industrial Economics. – 1994. – Vol. 42, No. 1. – P. 45–61.

INTERACTING OLIGOPOLISTIC AND OLIGOPSONISTIC COURNOT MARKETS

Valeriy Zorkaltsev, Melentiev Energy Systems Institute SB of RAS, Doctor of Science (Irkutsk, Lermontov St., 130, aaivanov@mail.ru).
Marina Kiseleva, Melentiev Energy Systems Institute SB of RAS, (Irkutsk, Lermontov St., 130, marinee@mail.ru).

Abstract: The model of several interacting Cournot markets is considered. Some of them are finish good markets while the others are resource markets. The markets interact by sharing the same set of economic agents. Every producer strategically chooses his supply volumes on every finish good market and purchase volume of resources in accordance with technology and accounting for supply effects on prices. We prove that in the case of linear demand and supply functions the model of interacting Cournot markets reduces to a potential game, and, hence, the Nash equilibrium problem is equivalent to some problem of mathematical programming. We also discuss advantages and special features of such representation of interacting oligopolistic and oligopsonistic markets.

Keywords: Cournot model, Nash equilibrium, potential game.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии Н.А. Коргиным

*Поступила в редакцию 02.09.2014.
Дата опубликования 31.07.2015.*