УДК 51-7, 519.2, 519.8
ББК 22.171

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОЛУМАРКОВСКИХ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ ПРИ УПРАВЛЯЕМОМ ВХОДЯЩЕМ ПОТОКЕ. BSMAP-ПОТОК

Каштанов В. А.[1], Кондрашова Е. В.[2]
(*Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», МИЭМ НИУ ВШЭ, Москва*)

Проводится исследование системы массового обслуживания с управляемым полумарковским групповым входным потоком. CBSMAP-поток является обобщением BMAP-потока. Приводятся различные варианты построения пространства управлений. На траекториях управляемого полумарковского процесса проводится построение функционала доходов. Доказываются теоремы о структуре функционала удельного накопленного дохода для нововведенной исследуемой системы массового обслуживания.

Ключевые слова: теория массового обслуживания, управляемый полумарковский процесс, управляемый входящий поток, функционал доходов, задача оптимизации.

1. Введение

При исследовании систем массового обслуживания, описывающих процессы функционирования реальных технических, информационных, экономических систем и телекоммуникаци-

[1] *Виктор Алексеевич Каштанов, доктор физико-математических наук, профессор.*
[2] *Елизавета Владимировна Кондрашова, кандидат физико-математических наук, ассистент* (*elizavetakondr@gmail.com*).

онных сетей, характерными являются постановки оптимизационных задач.

Каждая система массового обслуживания включает в свою структуру некоторое число обслуживающих устройств, которые называют каналами обслуживания. Роль каналов могут играть различные приборы, лица, выполняющие те или иные операции, ремонтные бригады, линии связи и т.д. Также каждая система характеризуется следующими особенностями: потоком требований, дисциплиной и функцией распределения длительности обслуживания, очередью. Вышеуказанные элементы будем называть характеристиками системы.

Отметим, что под оптимизацией понимается обеспечение высокой эффективности функционирования системы. Часто повышение эффективности необходимо провести при ограниченных ресурсах системы. Для достижения этой цели ставятся задачи теории массового обслуживания, состоящие в установлении зависимостей эффективности функционирования системы от её структуры и исходных характеристик.

В классической теории массового обслуживания не предполагается вмешательства в процесс работы системы. То есть можно сказать, что система рассматривается без управляющих воздействий извне.

Однако в реальной жизни часто возникает необходимость управления системой в процессе работы. Системы, в которых какие-либо из элементов допускают управление, будем относить к управляемым системам массового обслуживания. Методы теории управляемых систем массового обслуживания применяются для оптимального управления очередью, обслуживающими приборами, длительностью обслуживания, входным потоком требований, т.е. управления характеристиками системы.

Большой вклад в развитие теории, методов анализа и оптимального управления систем внесли Р. Ховард, Х. Майн, С. Осаки, В. Джевелл, Г.И. Ивченко, В.А. Каштанов, И.Н. Коваленко и др.

Управление характеристиками системы является рациональным методом увеличения эффективности её функционирования, а также получения максимального дохода. Несмотря на то, что в последнее время появляются работы, связанные с применением управления в различных видах систем массового обслуживания, до сих пор не уделяется должного внимания управлению одновременно несколькими характеристиками системы. Однако задачи по управлению одновременно несколькими характеристиками системы являются особенно интересными [6, 7, 11, 12] Также представляет интерес разработка новых моделей теории массового обслуживания.

2. Вводные замечания, обозначения и постановка задачи

2.1. CBSMAP-ПОТОК

Поток CBSMAP, управляемый цепью Маркова, является обобщением ранее введённого Д. Лукантони BMAP-потока [16, 17]. Данный поток – Batch Markov Arrival Process – марковский групповой входной поток, который характеризуется следующим образом.

Поступление заявок может происходить только в моменты изменения состояний некоторого марковского процесса с непрерывным временем и множеством состояний $\{0, 1, \ldots, W\}$. Заявки могут поступать группами различного размера. Время пребывания процесса в состоянии i имеет экспоненциальное распределение с параметром λ_i, где $i = 0, 1, \ldots, W$. Процесс переходит из состояния i в состояние j с вероятностью $p_k(i, j)$, и генерируется группа из k требований BMAP-потока. Предполагается, что переход из состояния i в то же самое состояние при генерации требований невозможен. Также предполагается, что вероятности удовлетворяют условию нормировки:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{W} p_k(i, j) = 1 \quad \text{для } i = 0,1,\ldots,W.$$

Поступление заявок в систему может происходить только в моменты изменения состояний некоторого марковского процесса с непрерывным временем и конечным множеством состояний. Заявки могут поступать группами различного размера.

BMAP-потоки хорошо описывают входящие потоки данных в телекомунникационных сетях, когда требования в систему поступают группами различного размера [10, 14, 18].

Остановимся подробнее на новом, введённом нами входном потоке BSMAP. Введённое обозначение расшифровывается следующим образом: Batch Semi-Markov Arrival Process, что означает «полумарковский групповой входной поток». Данный процесс является обобщением процесса BMAP – Batch Markov Arrival Process, марковского группового входного потока. Поступление заявок может происходить только в моменты изменения состояний некоторого полумарковского процесса с непрерывным временем и конечным множеством состояний. Данный поток также называем потоком, управляемым цепью Маркова [4, 11].

Отметим, что исследуются системы массового обслуживания с вышеизложенным входным потоком, в которых проводится управление потоком заявок.

2.2. ВВОДНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Управляемый входящий поток определяется управляемым полумарковским процессом $X(t) = \{\xi(t), u(t)\}$ (УПМП), у которого первая компонента принимает значения из конечного множества, $\xi(t) \in E = \{1, 2, \ldots, N\}$. Для данного входящего потока было также введено обозначение CBSMAP-поток. В дальнейшем будем придерживаться стандартных обозначений, используемых в настоящей работе и введенных ранее в отечественной литературе [3, 8]:

- $Q_{ij}(t, u) = p_{ij}(u)\, F_{ij}(t, u)$ – полумарковское ядро однородного УПМП, определяемое как вероятность того, что следующим состоянием УПМП будет состояние j и переход этот совершится до момента t при условии, что в нулевой момент времени процесс принимал значение i и было принято решение $u \in U_i$;
- $\vec{G} = (G_1(u), G_2(u), \ldots, G_N(u))$ – рандомизированная стратегия управления, т.е. набор вероятностных мер $G_i(u)$, определенных на σ-алгебре подмножеств множества U_i;

- $R_{ij}(t, u)$ – математическое ожидание накопленного эффекта при условии, что УПМП пребывал в состоянии i, за время t он перешел в состояние j и было принято решение $u \in U_i$.

Далее будем считать, что в момент перехода УПМП $\xi(t)$ в состояние k в систему массового обслуживания поступает конечная группа требований k-го типа, число требований в группе v_k определяется производящей функцией

$$(1)\quad \Phi_k(z) = \sum_{m=0}^{M_k} z^m p^{(k)}(m)$$

или вероятностями $p^{(k)}(m)$ того, что в группе поступит m заявок k-го типа, M_k – максимальное число заявок в группе k-го типа.

Далее сформулируем важные предположения, при которых будут проводиться дальнейшие исследования.

1. Требования одного типа поступают в свою систему (подсистему) массового обслуживания, каждая из которых работает независимо от других подсистем. Подсистему массового обслуживания, осуществляющую обслуживание требований k-го типа будем обозначать СМО(k), $k \in E = (1, 2, \ldots, N)$, (индекс k будет присвоен всем характеристикам этой подсистемы).

Здесь следует заметить, что процесс обслуживания в каждой системе реализуется независимо от состояний других систем, однако функционирование систем увязано в единое целое общим входным потоком.

2. Во временном интервале между соседними моментами изменения состояний УПМП в систему массового обслуживания заявки не поступают (ни в одну из подсистем), поэтому осуществляется только процесс обслуживания заявок, если таковые в подсистемах есть. Процесс обслуживания в k-й подсистеме характеризуется числом $v^{(k)}(t)$ заявок, находящихся в подсистеме в момент t. Предполагается, что $v^{(k)}(t)$ есть однородный марковский процесс гибели с поглощающим экраном в нуле и интенсивностями перехода, зависящими от состояния, $v^{(k)}(t)\ E = (0, 1, 2, \ldots)$.

Обозначим через $p_{ms}^{(k)}(t)$

$$(2)\quad P\{v^{(k)}(t)=s\,/\,v^{(k)}(0)=m\}=\begin{cases} p_{ms}^{(k)}(t)\ge 0, & m\ge s\ge 0;\\ p_{ms}^{(k)}(t)=0, & m<s.\end{cases}$$

– вероятность того, что в k-й подсистеме за время t (между марковскими моментами) будет обслужено $(m-s)$ заявок при условии, что в начальный момент в СМО было m требований.

Приведем здесь явные выражения вероятностей (2) некоторых систем массового обслуживания (СМО).

Если СМО(k) – система без ожидания, т.е. число мест для ожидания $N_k = 0$, то

$$(3)\quad p_{ms}^{(k)}(t)=C_m^s(1-e^{-\mu_k t})^{(m-s)}e^{-s\mu_k t},\ \ n_k\ge m\ge s\ge 0,$$

где n_k – число каналов, μ_k – параметр экспоненциального распределения длительности обслуживания. Для остальных сочетаний параметров n_k, m, s искомые вероятности равны нулю.

Если СМО(k) – система одноканальная с ожиданием, $n_k = 1$, $N_k > 0$, то

$$(4)\quad \begin{aligned} &p_{ms}^{(k)}(t)=\frac{(\mu_k t)^{m-s}}{(m-s)!}e^{-\mu_k t},\ \ N_k+1\ge m\ge s>0,\\ &p_{m0}^{(k)}(t)=1-\sum_{l=1}^{m}p_{ml}^{(k)}(t)=1-e^{-\mu_k t}\sum_{l=0}^{m-1}\frac{(\mu_k t)^l}{l!},\ \ N_k+1\ge m\ge s=0.\end{aligned}$$

Для остальных сочетаний параметров N_k, m, s искомые вероятности равны нулю.

Общий случай, если СМО(k) – система многоканальная с ожиданием, $n_k \geq 1$, $N_k \geq 0$, то

$$(5)\quad p_{ms}^{(k)}(t)=\begin{cases} C_m^s(1-e^{-\mu_k t})^{(m-s)}e^{-s\mu_k t},\ \ n_k\ge m\ge s\ge 0,\\ \dfrac{(n_k\mu_k t)^{m-s}}{(m-s)!}e^{-n_k\mu_k t},\ \ m\ge s\ge n_k,\\ \int\limits_0^t C_{n_k}^s(1-e^{-\mu_k(t-x)})^{(n_k-s)}e^{-s\mu_k x}n_k\mu_k\dfrac{(n_k\mu_k x)^{m-n_k-1}}{(m-n_k-1)!}e^{-n_k\mu_k x}dx,\\ m>n_k>s\ge 0.\end{cases}$$

Для остальных сочетаний параметров n_k, N_k, m, s искомые вероятности равны нулю.

3. Необходимо четко сформулировать правила приема группы заявок в систему. Естественно считать, что если есть

свободные места для приема всей группы, то вся группа заявок поступает в СМО. В ситуации, когда свободных мест на все поступившие требования не хватает, не все заявки принимаются на обслуживание.

В рассматриваемом случае возможны следующие варианты:

- принимается столько заявок, сколько есть свободных мест;
- если есть хотя бы одно свободное место, то принимается вся группа заявок (на дополнительные места);
- если не хватает хотя бы одного места для всех требований в группе, то вся группа теряется.

Рассмотрение этих вариантов приводит к необходимости вводить распределения числа заявок, принятых в СМО. Эти вероятности зависят от числа свободных мест и распределения числа пришедших заявок (1). Обозначим через $\tilde{p}_m^{(k)}(s)$ вероятность того, что в СМО будет принято на обслуживание s требований при условии, что в системе m свободных мест.

Если принимаются заявки только на свободные места, то при $m \geq 0$

$$\text{(6)} \quad \tilde{p}_m^{(k)}(s) = P\{\min(m, v_k) = s\} = \begin{cases} p^{(k)}(s), \ s = 1,2,\ldots,m-1, \ m > 0; \\ \sum\limits_{l=m}^{\infty} p^{(k)}(l), \ s = m > 0; \\ 1, \ s = m = 0. \end{cases}$$

Если принимается вся группа заявок при наличии хотя бы одного свободного места, то

$$\text{(7)} \quad \tilde{p}_m^{(k)}(s) = \begin{cases} p^{(k)}(s), \ s > 0, \ m > 0; \\ 1, \ s = m = 0. \end{cases}$$

Если не хватает хотя бы одного места для всех требований в группе, то вся группа теряется. В этом случае

$$\text{(8)} \quad \tilde{p}_m^{(k)}(s) = \begin{cases} p^{(k)}(s), \ 0 < s \leq m; \\ \sum\limits_{l=m+1}^{\infty} p^{(k)}(l), \ s = 0, \ m > 0; \\ 1, \ s = m = 0. \end{cases}$$

Далее вычислим $q_{mn}^{(k)}(s)$ – условное распределение числа принятых заявок (вероятность принять s заявок) при условии, что поступило n заявок и было m свободных мест.

Если принимаются заявки только на свободные места, то при $m \geq 0$

$$(9) \quad q_{mn}^{(k)}(s) = \begin{cases} 1, & s = n, \; m \geq n; \\ 0, & s \neq n, \; m \geq n; \\ 1, & s = m, \; 1 \leq m < n; \\ 0, & s \neq m, \; 1 \leq m < n; \\ 1, & s = m = 0; \\ 0, & s > m = 0. \end{cases}$$

Если принимается вся группа заявок при наличии хотя бы одного свободного места, то

$$(10) \quad q_{mn}^{(k)}(s) = \begin{cases} 1, & s = n, \; m \geq 1; \\ 0, & s \neq n, \; m \geq 1; \\ 1, & s = m = 0; \\ 0, & s > m = 0. \end{cases}$$

Если не хватает хотя бы одного места для всех требований в группе, то вся группа теряется. В этом случае

$$(11) \quad q_{mn}^{(k)}(s) = \begin{cases} 1, & s = 0, \; 0 \leq m < n; \\ 0, & s \neq 0, \; 0 \leq m < n; \\ 1, & s = n, \; m \geq n; \\ 0, & s \neq n, \; m \geq n. \end{cases}$$

При определенных выше предположениях необходимо:

- исследовать структуру функционала накопления (удельного дохода) в зависимости от стратегии управления входящим потоком;
- построить оптимальную стратегию управления, обеспечивающую максимальный удельный доход;
- исследовать распределение числа заявок в подсистемах, распределение числа обслуживаемых заявок, распределение

длины очереди, математическое ожидание числа обслуженных и потерянных требований за единицу времени.

3. Алгоритм исследования системы с CBSMAP-входным потоком

Рассмотрим систему в целом. Данная система состоит из N подсистем.

Подсистема k-го типа, $k = 1, 2, \ldots, N$, в обозначениях символики Кендалла [13] может быть описана следующим образом: $CBSMAP/M_k/n_k/N_k$, где

- символ *CBSMAP* означает, что входной поток определяется как управляемый входной поток, описанный ранее;
- символ M_k означает, что длительности обслуживания требования в подсистеме имеют экспоненциальное распределение с параметром μ_k;
- символы n_k и N_k определяют количество каналов обслуживания и число мест для ожидания n_k и N_k соответственно.

В классификации систем массового обслуживания эта система может рассматриваться как управляемая полумарковская система массового обслуживания, так как её эволюция определяется управляемым полумарковским процессом [5, 8, 9].

При исследовании полумарковских управляемых систем массового обслуживания и построении управляемого полумарковского процесса, описывающего эволюцию этой системы, необходимо реализовать следующий алгоритм:

- определить марковские моменты,
- определить состояния полумарковского процесса;
- определить пространство управлений и стратегии управления;
- определить полумарковское ядро и матрицу переходных вероятностей вложенной цепи Маркова;
- на траекториях управляемого полумарковского процесса построить функционал доходов;
- определить оптимальную стратегию управления.

Реализуем формулированный выше алгоритм.

3.1. МАРКОВСКИЕ МОМЕНТЫ

В рассматриваемом случае марковскими моментами являются моменты поступления требований любого типа в систему. В случае поступления заявок k-го типа данные заявки отправляются на обслуживание в подсистему k-го типа, а в остальные подсистемы «поступает» группа из нулевого количества заявок.

3.2. СОСТОЯНИЯ ПРОЦЕССА

Состояния системы массового обслуживания (состояния управляемого полумарковского процесса $\xi(t)$) определяются вектором $(i, l_1, l_2, \ldots, l_N)$, где i – состояние входного потока (в марковский момент поступает группа требований i-го типа), l_k – количество требований в подсистеме k-го типа,

$$M_k + N_k + n_k > l_k \geq 0,\ k \neq i,\ M_i + N_i + n_i > l_i > 0\,,$$

n_k и N_k – соответственно количество каналов обслуживания и количество мест для ожидания в СМО(k), $i \in E = \{1, 2, \ldots, N\}$. Количество требований в подсистеме конечно и зависит от дисциплины принятий требований в систему и структуры системы массового обслуживания. Поэтому $l_k \in E_k = \{1, 2, \ldots, M_k + N_k + n_k - 1\}$. Таким образом $(i, l_1, l_2, \ldots, l_N) \in E \times E_1 \times \ldots \times E_N$.

В дальнейшем примем следующие обозначения:

- для вектора, определяющего число требований в подсистемах, введем обозначение $(l_1, l_2, \ldots, l_N) = \vec{l}$;
- для пространства состояний дискретной компоненты введем обозначение $E \times E_1 \times \ldots \times E_N = \tilde{E}$.

В принятых обозначениях состояния полумарковского процесса можно обозначить через $(i, \vec{l})$ и записать $\xi(t) = (i, \vec{l}) \in \tilde{E}$.

Переход из состояния $(i, l_1, l_2, \ldots, l_N)$ в состояние с положительной вероятностью $(j, l'_1, l'_2, \ldots, l'_j, \ldots, l'_N)$, если $l'_k \leq l_k$, $k \neq j$, т.е. во всех подсистемах, кроме подсистемы j-го типа, происходит только обслуживание заявок, которое можно представить как процесс чистой гибели, соответственно количество заявок в этих подсистемах не превосходит количество заявок в подсистемах в предшествующий марковский момент поступления группы требований.

Отметим, что управление системы осуществляется за счёт управления входящим потоком в моменты изменения состояний полумарковского случайного процесса $\xi(t)$, т.е. в марковские моменты.

3.3. ПОСТРОЕНИЕ ПРОСТРАНСТВА УПРАВЛЕНИЙ И СТРАТЕГИИ УПРАВЛЕНИЯ

Напомним, что марковская стратегия управления $\vec{G} = (G_{(i,\vec{l})}(u),\ (i,\vec{l}) \in \tilde{E})$, зависящая только от текущего состояния управляемого процесса, есть набор вероятностных мер, определенных для каждого состояния $(i,\vec{l}) \in \tilde{E}$ на σ-алгебре подмножеств множества решений $U_{(i,\vec{l})}$.

Как отмечалось выше, исследуется проблема управления входящим потоком, который задается как полумарковский процесс. Такой входящий поток определяется тремя факторами: какого типа поступит следующая группа, через какое время поступит эта группа и количество заявок в группе.

Следовательно, возможны следующие варианты построения пространства управлений:

1. В зависимости от состояния полумарковского процесса $(i,\vec{l}) \in \tilde{E}$ выбираем только тип требований. Тогда справедливо равенство $U_{(i,\vec{l})} = E = \{1,2,...,N\}$, а вероятностная мера на дискретном пространстве $E = \{1,2\ \ldots, N\}$ определяется набором вероятностей

$$(12)\quad \begin{aligned} &G_{(i,\vec{l})}(j) = P\{u(t) = j\ /\ \xi(t) = (i,\vec{l})\} = p_{(i,\vec{l}),j}, \\ &p_{(i,\vec{l}),j} \geq 0,\ \sum_{j\in E} p_{(i,\vec{l}),j} = 1,\ E = \{1,2,...,N\}, \end{aligned}$$

где $u(t)$ – решение, принимаемое в марковский момент t;

2. В зависимости от состояния полумарковского процесса $(i,\vec{l}) \in \tilde{E}$ выбираем тип требований и момент поступления заявок этого типа. Тогда справедливо равенство

$$U_{(i,\vec{l})} = E \times [0,\infty) = \{(j,u),\ \ j \in E = \{1,2,...,N\},\ u \in R^{+} = [0,\infty)\},$$

т.е. пространство управлений состоит из конечного числа полупрямых. Вероятностную меру на этом пространстве можно задать набором вероятностей (12) и условными распределениями непрерывной компоненты. Если обозначить через θ случайный интервал времени, через которое в систему массового обслуживания поступает следующая группа требований, то можно условное распределение непрерывной компоненты определить равенством

$$F_{(i,\vec{l})}(j,u) = P\{\theta < u / \xi(t) = (i,\vec{l}),\ u(t) = j\},$$

$$j \in E = \{1,2,...,N\},\ u \in R^{+},$$

а стратегию определить равенствами

$$G_{(i,\vec{l})}(j,u) = P\{u(t) = j, \theta < u / \xi(t) = (i,\vec{l})\} = p_{(i,\vec{l}),j} F_{(i,\vec{l}),j}(u), \quad (13)$$

$$j \in E = \{1,2,...,N\},\ u \in R^{+}.$$

3. В зависимости от состояния полумарковского процесса $(i,\vec{l}) \in \tilde{E}$ выбираем тип требований, момент поступления заявок этого типа и число заявок в группе. Тогда для пространства управлений справедливо равенство

$$U_{(i,\vec{l})} = E \times [0,\infty) \times \tilde{M}_k =$$

$$= \{(j,u,s),\ \ j \in E = \{1,2,...,N\},\ u \in R^{+} = [0,\infty),$$

$$s \in \tilde{M}_k = \{1,...,M_k\},$$

т.е. пространство управлений состоит из конечного числа полупрямых. Вероятностную меру на этом пространстве можно задать набором вероятностей

$$P\{u(t) = (j,s) / \xi(t) = (i,\vec{l})\} = p_{(i,\vec{l}),(j,s)} = p_{(i,\vec{l}),j}\, p^{(j)}(s), \quad (14)$$

$$p_{(i,\vec{l}),(j,s)} \geq 0,\ \ \sum_{(j,s)\in E\times E_k} p_{(i,\vec{l}),(j,s)}, = 1,\ j \in E = \{1,2,...,N\},\ s \in \tilde{M}_k$$

и условными распределениями непрерывной компоненты. В принятых обозначениях можно условное распределение непрерывной компоненты определить равенством

$$F_{(i,\vec{l})}(j,u,n) = P\{\theta < u / \xi(t) = (i,\vec{l}),\ u(t) = (j,n)\},$$
$$j \in E = \{1,2,...,N\},\ u \in R^+,\ n \in \tilde{M}_k,$$

а стратегию определить равенствами

$$G_{(i,\vec{l})}(j,u,n) = P\{u(t) = (j,n), \theta < u / \xi(t) = (i,\vec{l})\} =$$

$$= p_{(i,\vec{l}),j}\, p^{(j)}(n) F_{(i,\vec{l})}(j,u,n), \tag{15}$$
$$j \in E = \{1,2,...,N\},\ u \in R^+,\ n \in (1,...,M_i).$$

3.4. ПОСТРОЕНИЕ ПОЛУМАРКОВСКОГО ЯДРА И МАТРИЦЫ ПЕРЕХОДНЫХ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ВЛОЖЕННОЙ ЦЕПИ МАРКОВА

По определению полумарковское ядро есть вероятность того, что полумарковский процесс перейдёт в состояние $(j,\vec{l})$ (в марковский момент поступила группа требований *j*-го типа и в подсистемах будет $\vec{l}$ требований) и время этого перехода не превзойдёт *t*, при условии, что процесс пребывает в состоянии $(i,\vec{m})$ и в этом состоянии принято решение $u \in U_{(i,\vec{m})}$ из множества управлений $U_{(i,\vec{m})}$.

Эту вероятность будем обозначать через $Q^{(k)}_{(i,\vec{m}),(j,\vec{l})}(t,u)$.

При $U_{(i,\vec{m})} = E = \{1,2,...,N\}$ выбираем только тип требований, которые поступят в СМО. Тогда получаем при

$$u \in U_{(i,\vec{m})} = E = \{1,2,...,N\},\ k \in E = \{1,2,...,N\},\ (i,\vec{m}),(j,\vec{l}) \in \tilde{E},\ t \ge 0,$$

$$Q^{(k)}_{(i,\vec{m}),(j,\vec{l})}(t,u) =$$

$$= \begin{cases} \int\limits_0^t \sum\limits_{s=0}^{m_j} p^{(j)}_{m_j,s}(x) \tilde{p}^{(j)}_{N_j+n_j-s}(l_j - s) \prod\limits_{\nu \ne j} p^{(\nu)}_{m_\nu,l_\nu}(x) dF_{i,j}(x),\ u = j; \\ 0,\ u \ne j. \end{cases} \tag{16}$$

В равенстве (16) использованы обозначения:

- вероятность $p^{(j)}_{m_j,s}(x)$ определяется равенствами (3)–(5) в зависимости от структуры подсистем исследуемой СМО;

- вероятности $\tilde{p}_m^{(j)}(l)$ определяются равенствами (6)–(8) – вероятность принять m требований из группы j-го типа при наличии свободных мест в зависимости от правила приема заявок в систему;
- $F_{i,j}(x)$ – вероятность того, что следующая группа требований поступит в систему до момента x при условии, что это группа j-го типа, предыдущая группа i-го типа (заданная характеристика входного потока).

Интегрированием функции (16) по дискретной мере (12) получаем полумарковское ядро

$$Q_{(i,\vec{m}),(j,\vec{l})}^{(k)}(t)=\int_{U_{(i,\vec{m})}} Q_{(i,\vec{m}),(j,\vec{l})}^{(k)}(t,u)G_{(i,\vec{m})}(du)= \tag{17}$$
$$=p_{(i,\vec{m}),j}\int_0^t\sum_{s=0}^{m_j} p_{m_j,s}^{(j)}(x)\tilde{p}_{N_j+n_j-s}^{(j)}(l_j-s)\prod_{v\neq j} p_{m_v,l_v}^{(v)}(x)dF_{i,j}(x).$$

Переходя к пределу при $t\to\infty$, получаем матрицу переходных вероятностей вложенной цепи Маркова:

(18)

$$p_{(i,\vec{m}),(j,\vec{l})}^{(k)}=\lim_{t\to\infty} Q_{(i,\vec{m}),(j,\vec{l})}^{(k)}(t)=$$
$$=\int_{U_{(i,\vec{m})}} Q_{(i,\vec{m}),(j,\vec{l})}^{(k)}(\infty,u)G_{(i,\vec{m})}(du)=$$
$$=p_{(i,\vec{m}),j}\int_0^\infty\sum_{s=0}^{m_j} p_{m_j,s}^{(j)}(x)\tilde{p}_{N_j+n_j-s}^{(j)}(l_j-s)\prod_{v\neq j} p_{m_v,l_v}^{(v)}(x)dF_{i,j}(x).$$

Полученные выражения для матриц переходных вероятностей (18) позволяют сделать два вывода:

- элементы этих матриц не зависят от номера подсистемы;
- элементы строки этих матриц, соответствующей состоянию $(i,\vec{m})$, являются линейными функционалами только относительно вероятностной меры $G_{(i,\vec{m})}(u)$.

Следовательно [2], стационарные вероятности

$\pi_{(i,\vec{m})}^{(k)}=\pi_{(i,\vec{m})}$, $(i,\vec{m})\in\tilde{E}$

вложенной цепи Маркова не зависят от номера подсистемы k и, как решение нормированной системы алгебраических уравнений с матрицей переходных вероятностей, у которой элементы являются линейными функционалами, относительно вероятностных мер, определяющих марковскую однородную рандомизированную стратегию, представляются отношением двух определителей

(19) $\pi_{(i,\vec{m})} = \dfrac{\Delta_{(i,\vec{m})}}{\Delta}, \ (i,\vec{m}) \in \tilde{E},$

причем определитель Δ есть линейный функционал относительно всех мер

$$G_{(j,\vec{l})}(u), \ (i,\vec{l}) \in \tilde{E},$$

а определитель $\Delta_{(i,\vec{m})}$ есть линейный функционал относительно мер

$$G_{(j,\vec{l})}(u), \ (i,\vec{l}) \in \tilde{E} \setminus \{(i,\vec{m})\},$$

т.е. от всех мер кроме меры $G_{(j,\vec{m})}(u)$.

3.5. ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛА ДОХОДОВ НА ТРАЕКТОРИЯХ УПРАВЛЯЕМОГО ПОЛУМАРКОВСКОГО ПРОЦЕССА

Для решения этого вопроса необходимо определить функции $R^{(k)}_{(i,\vec{m})(j,\vec{l})}(x,u)$ – условное математическое ожидание накопленного дохода в $СМО(k)$ при условии, что процесс пребывает в состоянии $(i,\vec{m})$, через время t перейдёт в состояние $(j,\vec{l})$ и принято решение u.

Условное математическое ожидание накопленного дохода $R^{(k)}_{(i,\vec{m})(j,\vec{l})}(x,u)$ зависит от доходов и расходов, получаемых при работе системы. Введём константы, характеризующие эти доходы и расходы:

- $c_1^{(k)}$ – доход, получаемый за обслуживание одного требования;

- $c_2^{(k)}$ – плата за единицу времени работы одного прибора во время обслуживания;
- $c_3^{(k)}$ – плата за единицу времени простоя одного прибора;
- $c_4^{(k)}$ – плата за единицу времени пребывания одного требования в очереди;
- $c_5^{(k)}$ – плата за одно потерянное требование k-го типа.

Тогда для искомых условных математических ожиданий $R^{(k)}_{(i,\vec{m})(j,\vec{l})}(x,u)$ можно записать

$$R^{(k)}_{(i,\vec{m})(j,\vec{l})}(x,u) = c_1^{(k)} C_1(x, m_k, l_k, u) +$$

$$+\sum_{s=2}^{4} C_2(x, n_k, m_k, l_k, u) + c_5^{(k)} C_5(x, m_k, l_k, u),$$

где

$$C_1(x, m_k, l_k, u) = M(\zeta_k / \nu^{(k)}(0) = m_k, \xi^{(k)}(x) = l_k, u(0) = u)$$

– условное математическое ожидание числа обслуженных требований за время x при условии, что в марковский момент в $СМО(k)$ было m_k требований, а в следующий марковский момент x стало l_k требований и принято решение u,

$$\xi^{(k)}(0) = \nu^{(k)}(0) = m_k, \xi^{(k)}(x) = l_k, u(0) = u;$$

$$C_5(x, m_k, l_k, u) = M(\eta / \xi^{(k)}(0) = \nu^{(k)}(0) = m_k, \xi^{(k)}(x) = l_k, u(0) = u)$$

– условное математическое ожидание числа потерянных требований за время x при условии, что в марковский момент в $СМО(k)$ было m_k требований, а в следующий марковский момент x стало l_k требований и принято решение u,

$$\xi^{(k)}(0) = \nu^{(k)}(0) = m_k, \xi^{(k)}(x) = l_k, u(0) = u;$$

$$C_2(x, n_k, m_k, l_k, u) =$$

$$= c_2^{(k)} M[\int_0^x \min(n_k, \nu^{(k)}(t))dt / \nu^{(k)}(0) = m_k, \xi^{(k)}(x) = l_k, u(0) = u],$$

$$C_3(x, n_k, m_k, l_k, u) =$$

$$= c_3^{(k)} M[\int_0^x (n_k - \min(n_k, \nu^{(k)}(t))dt / \nu^{(k)}(0) = m_k, \xi^{(k)}(x) = l_k, u(0) = u],$$

$$C_4(x,n_k,m_k,l_k,u)=$$
$$=c_4^{(k)}M[\int_0^x \max(0,v^{(k)}(t)-n_k)dt\,/\,v^{(k)}(0)=m_k,\xi^{(k)}(x)=l_k,u(0)=u]$$

– соответственно затраты (плата) за работу приборов, за простой приборов и за пребывание заявок в очереди на конечном периоде времени (0, t). Заметим, что в последних соотношениях обозначено: $\xi^{(k)}(x)$ – число требований в марковский момент x, $v^{(k)}(t)$ – марковский процесс гибели на периоде $t \in (0, x)$.

Математическое ожидание накопленного дохода в подсистеме k за время $t > 0$ при условии, что процесс стартует из состояния $(j,\vec{l}\,)$, обозначим $S_{(j,\vec{l}\,)}^{(k)}(t)$.

Для функционала

$$S^{(k)}=\lim_{t\to\infty}\frac{S_{(j,\vec{l}\,)}^{(k)}(t)}{t}$$

справедливо равенство [1]

$$S^{(k)}=\frac{\sum\limits_{(i,\vec{l})\in\tilde{E}} s_{(i,\vec{l})}^{(k)}\pi_{(i,\vec{l}\,)}^{(k)}}{\sum\limits_{(i,\vec{l})\in\tilde{E}} m_{(i,\vec{l})}^{(k)}\pi_{(i,\vec{l}\,)}^{(k)}}, \tag{20}$$

где

$$m_{(i,\vec{m})}^{(k)}=\int_0^\infty[1-\sum_{(j,\vec{l}\,)\in\tilde{E}}Q_{(i,\vec{m})(j,\vec{l}\,)}^{(k)}(t)]dt \tag{21}$$

– математическое ожидание времени непрерывного пребывания процесса $\xi(t)$ в состоянии $(i,\vec{m})$;

$$s_{(i,\vec{m})}^{(k)}=\int\limits_{u\in U_{(i,\vec{m})}}\sum_{(j,\vec{l}\,)}[\int_o^\infty R_{(i,\vec{m})(j,\vec{l}\,)}^{(k)}(x,u)dQ_{(i,\vec{m})(j,\vec{l}\,)}^{(k)}(x,u)]G_{(i,\vec{m})}(du) \tag{22}$$

– математическое ожидание накопленного дохода при работе *СМО*(k) за время непрерывного пребывания процесса $\xi(t)$ в состоянии $(i,\vec{m})$.

ТЕОРЕМА 2.1. Функционал удельного накопленного дохода (20) для *СМО*(k) является дробно-линейным функционалом относительно распределений $\vec{G}=\{G_{(i,\vec{m})}(u),\ (i,\vec{m})\in\tilde{E}\}$, определяющих марковскую однородную рандомизированную стратегию.

Доказательство. Выше отмечалось, что полумарковское ядро $Q^{(k)}_{(i,\vec{m})(j,\vec{l})}(t)$ есть линейный функционал относительно меры $G_{(i,\vec{m})}(u)$, $(i,\vec{m}) \in \tilde{E}$, равенства (17). Следовательно, линейным функционалом относительно этой меры является математическое ожидание $m^{(k)}_{(i,\vec{m})}$, определяемое равенством (21).

Равенство (22) определяет математическое ожидание дохода $s^{(k)}_{(i,\vec{m})}$ как линейный функционал относительно меры $G_{(i,\vec{m})}(u)$, $(i,\vec{m}) \in \tilde{E}$. Наконец, ранее было доказано, что определитель $\Delta_{(i,\vec{m})}$ есть линейный функционал относительно мер $G_{(j,\vec{l})}(u)$, $(i,\vec{l}) \in \tilde{E} \setminus \{(i,\vec{m})\}$, т.е. от всех мер, кроме меры $G_{(j,\vec{m})}(u)$. Кроме этого, этот определитель не зависит от номера подсистемы *k*. Объединяя эти утверждения, получаем, что функционал

$$(23)\quad S^{(k)} = \frac{\sum\limits_{(i,\vec{l})\in\tilde{E}} s^{(k)}_{(i,\vec{l})} \pi^{(k)}_{(i,\vec{l})}}{\sum\limits_{(i,\vec{l})\in\tilde{E}} m^{(k)}_{(i,\vec{l})} \pi^{(k)}_{(i,\vec{l})}} = \frac{\sum\limits_{(i,\vec{l})\in\tilde{E}} s^{(k)}_{(i,\vec{l})} \Delta_{(i,\vec{l})}}{\sum\limits_{(i,\vec{l})\in\tilde{E}} m^{(k)}_{(i,\vec{l})} \Delta_{(i,\vec{l})}}$$

есть дробно-линейный функционал относительно вероятностных мер $\vec{G} = \{G_{(i,\vec{m})}(u),\ (i,\vec{m}) \in \tilde{E}\}$. Тем самым утверждение теоремы доказано.

Далее исследуем функционал дохода для СМО в целом. Если обозначить его через *S*, то $S = \sum\limits_{k=1}^{N} S^{(k)}$. Тогда справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2.2. Функционал удельного накопленного дохода $S = \sum\limits_{k=1}^{N} S^{(k)}$ для СМО в целом является дробно-линейным функционалом относительно распределений $\vec{G} = \{G_{(i,\vec{m})}(u),\ (i,\vec{m}) \in \tilde{E}\}$, определяющих марковскую однородную рандомизированную стратегию.

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно показать, что знаменатели выражений (23) для каждой подсистемы не зависят от номера подсистемы *k*. Полумарковское ядро определяется равенствами (17) в зависимости от пространства управлений, причем правые части этих равенств не зависят от *k*. Следовательно, от номера k не зависит математическое ожидание, определяемое равенством (21), что и доказывает теорему.

3.6. ПРОБЛЕМА ОПТИМИЗАЦИИ ЦЕЛЕВОГО ФУНКЦИОНАЛА И ПОИСКА ОПТИМАЛЬНОЙ СТРАТЕГИИ УПРАВЛЕНИЯ

Завершающим этапом исследования является построение оптимальной стратегии управления. Для решения этого вопроса воспользуемся известным фактом [1, 5]: если дробно-линейный функционал имеет экстремум (максимум или минимум), то этот экстремум достигается в классе вырожденных детерминированных стратегий. Поэтому в условиях существования существенно сокращается пространство, по которому определяется экстремальное значение функционала.

Опишем пространство вырожденных стратегий для управления выбором типа требований.

Управление выбором типа требований. Стратегия определяется равенством (2.12). Фиксированная вырожденная мера в состоянии $(i,\vec{l}\,)$ определяется равенством

$$
\begin{aligned}
&G_{(i,\vec{l}\,)}(j) = P\{u(t) = j \,/\, \xi(t) = (i,\vec{l}\,)\} = p_{(i,\vec{l}\,),\,j} = 1,\\
&G_{(i,\vec{l}\,)}(n) = P\{u(t) = n \,/\, \xi(t) = (i,\vec{l}\,)\} = p_{(i,\vec{l}\,),n} = 0.
\end{aligned} \tag{24}
$$

Следовательно, число вырожденных мер в состоянии $(i,\vec{l}\,)$ равно *N*. Если число состояний $(i,\vec{l}\,)\in\tilde{E}$ равно

$$
K = \sum_{s=1}^{N}(M_s + N_s + n_s - 1)\prod_{l=1,l\neq s}^{N}(M_l + N_l + n_l),
$$

то число вырожденных стратегий равно $L = N^K$. Таким образом, получаем алгоритм определения оптимальной стратегии:

- для фиксированной вырожденной стратегии (24) вычисляется матрица переходных вероятностей (18);

- для этой матрицы решается система алгебраических уравнений и определяется нормированное решение – стационарное распределение вложенной цепи Маркова при выбранной фиксированной вырожденной стратегии;
- при выбранной фиксированной вырожденной стратегии вычисляются характеристики (21) и (22);
- вычисляется удельный доход (23), соответствующий выбранной вырожденной стратегии;
- перебирая все вырожденные стратегии и соответствующие им величины дохода, определяем максимальный доход и оптимальную стратегию.

4. Пример исследования системы с CBSMAP-потоком

Рассматривается случай, когда входной поток может принимать два состояния, подсистемы одноканальные, мест для очереди в подсистемах нет, т.е. $E = \{1, 2\}$, $n_1 = n_2 = 1$, $N_1 = N_2 = 0$. Будем считать, что заявки поступают группой, состоящей из одной заявки определённого типа, $M_1 = M_2 = 1$.

Марковскими моментами, как было указано выше, являются моменты изменения состояний процесса (поступления требований в систему).

Состояния системы определяются вектором (i, l_1, l_2), где i – состояние входного потока (в марковский момент поступает группа требований i-го типа), l_k – количество требований в подсистеме k-го типа, $k \in \{1, 2\}$

Переход из состояния (i, l_1, l_2) в состояние осуществляется с положительной вероятностью (j, l'_1, l'_2), если $l'_k \leq l_k$, $k \neq j$, т.е. во всех подсистемах, кроме j-го типа, происходит чистое обслуживание заявок, которое можно представить как процесс чистой гибели, соответственно количество заявок в этих подсистемах не превосходит количество заявок в подсистемах в предшествующий момент поступления группы.

Опишем все возможные состояния системы:

Состояние (1, 1, 0) – в марковский момент поступает заявка первого типа, в подсистеме первого типа одна заявка на обслуживании, в подсистеме второго типа заявок нет;

состояние (1, 1, 1) – в марковский момент поступает заявка первого типа, подсистеме первого типа одна заявка на обслуживании, в подсистеме второго типа одна заявка на обслуживании;

состояние (2, 0, 1) – в марковский момент поступает заявка второго типа, в подсистеме первого типа заявок нет, в подсистеме второго типа одна заявка на обслуживании;

состояние (2, 1, 1) – в марковский момент поступает заявка второго типа, в подсистеме первого типа одна заявка на обслуживании, в подсистеме второго типа одна заявка на обслуживании.

Предлагается управление типом требований, поступающих в систему, т.е. «заказываем» тип следующей заявки (группы). Учитывая определённую выше вероятностную меру (12), имеем:

$$G_{(i,l_1,l_2)}(j) = P\{u(t) = j \,/\, \xi(t) = (i, l_1, l_2)\} = p_{(i,l_1,l_2),j},$$

$$p_{(i,l_1,l_2),j} \geq 0, \quad \sum_{j \in E} p_{(i,l_1,l_2),j} = 1, \; E = \{1,2\}.$$

Таким образом, необходимо найти значения характеристик, изложенных в алгоритме, и построить на траекториях управляемого полумарковского процесса функционал доходов. Как было показано, функционал доходов для системы заданного типа является дробно-линейным функционалом. Если дробно-линейный функционал имеет экстремум (максимум или минимум), то этот экстремум достигается в классе вырожденных детерминированных стратегий.

Определим количество вырожденных стратегий в условиях данной задачи. Учитывая, что множество состояний состоит из четырёх состояний и в каждом состоянии может быть принято одно из двух решений (выбрать первый или второй тип следующей группы), количество стратегий равняется 16.

Для поиска максимума дробно-линейного функционала на множестве вырожденных распределений необходимо выбрать максимальное значение из шестнадцати и соответствующую этому значению стратегию, которая и будет являться оптимальной.

Дальнейшие вычисления будут проводиться при подстановке вырожденных распределений.

Построим таблицу со всеми возможными вырожденными вероятностными мерами, определяющими правило выбора решений.

Таблица 1. Стратегии управления

Состояние		(1, 1, 0)	(1, 1, 1)	(2, 0, 1)	(2, 1, 1)
	№ стратегии				
Стратегия/управление (тип заявки)	1	$p_{(1,1,0),1}=1$ $p_{(1,1,0),2}=0$	$p_{(1,1,1),1}=1$ $p_{(1,1,1),2}=0$	$p_{(2,0,1),1}=1$ $p_{(2,0,1),2}=0$	$p_{(2,1,1),1}=1$ $p_{(2,1,1),2}=0$
	2	$p_{(1,1,0),1}=1$ $p_{(1,1,0),2}=0$	$p_{(1,1,1),1}=1$ $p_{(1,1,1),2}=0$	$p_{(2,0,1),1}=1$ $p_{(2,0,1),2}=0$	$p_{(2,1,1),2}=1$ $p_{(2,1,1),1}=0$
	3	$p_{(1,1,0),1}=1$ $p_{(1,1,0),2}=0$	$p_{(1,1,1),1}=1$ $p_{(1,1,1),2}=0$	$p_{(2,0,1),2}=1$ $p_{(2,0,1),1}=0$	$p_{(2,1,1),1}=1$ $p_{(2,1,1),2}=0$
	4	$p_{(1,1,0),1}=1$ $p_{(1,1,0),2}=0$	$p_{(1,1,1),2}=1$ $p_{(1,1,1),1}=0$	$p_{(2,0,1),1}=1$ $p_{(2,0,1),2}=0$	$p_{(2,1,1),1}=1$ $p_{(2,1,1),2}=0$
	5	$p_{(1,1,0),2}=1$ $p_{(1,1,0),1}=0$	$p_{(1,1,1),1}=1$ $p_{(1,1,1),2}=0$	$p_{(2,0,1),1}=1$ $p_{(2,0,1),2}=0$	$p_{(2,1,1),1}=1$ $p_{(2,1,1),2}=0$
	6	$p_{(1,1,0),1}=1$ $p_{(1,1,0),2}=0$	$p_{(1,1,1),1}=1$ $p_{(1,1,1),2}=0$	$p_{(2,0,1),2}=1$ $p_{(2,0,1),1}=0$	$p_{(2,1,1),2}=1$ $p_{(2,1,1),1}=0$
	7	$p_{(1,1,0),1}=1$ $p_{(1,1,0),2}=0$	$p_{(1,1,1),2}=1$ $p_{(1,1,1),1}=0$	$p_{(2,0,1),2}=1$ $p_{(2,0,1),1}=0$	$p_{(2,1,1),1}=1$ $p_{(2,1,1),2}=0$

Состояние / № стратегии	(1, 1, 0)	(1, 1, 1)	(2, 0, 1)	(2, 1, 1)
8	$p_{(1,1,0),2}=1$ $p_{(1,1,0),1}=0$	$p_{(1,1,1),2}=1$ $p_{(1,1,1),1}=0$	$p_{(2,0,1),1}=1$ $p_{(2,0,1),2}=0$	$p_{(2,1,1),1}=1$ $p_{(2,1,1),2}=0$
9	$p_{(1,1,0),1}=1$ $p_{(1,1,0),2}=0$	$p_{(1,1,1),2}=1$ $p_{(1,1,1),1}=0$	$p_{(2,0,1),1}=1$ $p_{(2,0,1),2}=0$	$p_{(2,1,1),2}=1$ $p_{(2,1,1),1}=0$
10	$p_{(1,1,0),2}=1$ $p_{(1,1,0),1}=0$	$p_{(1,1,1),1}=1$ $p_{(1,1,1),2}=0$	$p_{(2,0,1),2}=1$ $p_{(2,0,1),1}=0$	$p_{(2,1,1),1}=1$ $p_{(2,1,1),2}=0$
11	$p_{(1,1,0),2}=1$ $p_{(1,1,0),1}=0$	$p_{(1,1,1),1}=1$ $p_{(1,1,1),2}=0$	$p_{(2,0,1),1}=1$ $p_{(2,0,1),2}=0$	$p_{(2,1,1),2}=1$ $p_{(2,1,1),1}=0$
12	$p_{(1,1,0),2}=1$ $p_{(1,1,0),1}=0$	$p_{(1,1,1),2}=1$ $p_{(1,1,1),1}=0$	$p_{(2,0,1),2}=1$ $p_{(2,0,1),1}=0$	$p_{(2,1,1),1}=1$ $p_{(2,1,1),2}=0$
13	$p_{(1,1,0),2}=1$ $p_{(1,1,0),1}=0$	$p_{(1,1,1),2}=1$ $p_{(1,1,1),1}=0$	$p_{(2,0,1),1}=1$ $p_{(2,0,1),2}=1$	$p_{(2,1,1),2}=1$ $p_{(2,1,1),1}=0$
14	$p_{(1,1,0),2}=1$ $p_{(1,1,0),1}=0$	$p_{(1,1,1),1}=1$ $p_{(1,1,1),2}=0$	$p_{(2,0,1),2}=1$ $p_{(2,0,1),1}=0$	$p_{(2,1,1),2}=1$ $p_{(2,1,1),1}=0$
15	$p_{(1,1,0),1}=1$ $p_{(1,1,0),2}=0$	$p_{(1,1,1),2}=1$ $p_{(1,1,1),1}=0$	$p_{(2,0,1),2}=1$ $p_{(2,0,1),1}=0$	$p_{(2,1,1),2}=1$ $p_{(2,1,1),1}=0$
16	$p_{(1,1,0),2}=1$ $p_{(1,1,0),1}=0$	$p_{(1,1,1),2}=1$ $p_{(1,1,1),1}=0$	$p_{(2,0,1),2}=1$ $p_{(2,0,1),1}=0$	$p_{(2,1,1),2}=1$ $p_{(2,1,1),1}=0$

Приведём построение управляемого полумарковского ядра.

Учитывая большое количество вычислений, для экономии места приведем матрицы полумарковского ядра для стратегии управления №1 в таблице 2.

Таблица 2. Вид полумарковского ядра для стратегии №1

№1	(1,1,0)	(1,1,1)	(2,0,1)	(2,1,1)
1,1,0	1	0	0	0
1,1,1	$\int_0^t (1-e^{-\mu_2 x})dF_{11}(x)$	$\int_0^t e^{-\mu_2 x}dF_{11}(x)$	0	0
2,0,1	$\int_0^t (1-e^{-\mu_2 x})dF_{21}(x)$	$\int_0^t e^{-\mu_2 x}dF_{21}(x)$	0	0
2,1,1	$\int_0^t (1-e^{-\mu_2 x})dF_{21}(x)$	$\int_0^t e^{-\mu_2 x}dF_{21}(x)$	0	0

Следуя вышеизложенному алгоритму, далее необходимо построить функционал доходов на траекториях управляемого полумарковского процесса, для чего необходимо определить стационарные распределения вложенной цепи Маркова, математическое ожидание времени непрерывного пребывания процесса $\xi(t)$ в состоянии $(i,\vec{m})$, математическое ожидание накопленного дохода за время непрерывного пребывания процесса $\xi(t)$ в состоянии $(i,\vec{m})$.

Для вычисления стационарных распределений вложенной цепи Маркова необходимо решить шестнадцать систем линейных уравнений (для каждой из шестнадцати стратегий):

$$\begin{cases}\pi_{(1,1,0)} = \pi_{(1,1,0)} p_{(1,1,0)(1,1,0)} + \pi_{(1,1,1)} p_{(1,1,1)(1,1,0)} + \\ +\pi_{(2,0,1)} p_{(2,0,1)(1,1,0)} + \pi_{(2,1,1)} p_{(2,1,1)(1,1,0)} \\ \pi_{(1,1,1)} = \pi_{(1,1,0)} p_{(1,1,0)(1,1,1)} + \pi_{(1,1,1)} p_{(1,1,1)(1,1,1)} + \\ +\pi_{(2,0,1)} p_{(2,0,1)(1,1,1)} + \pi_{(2,1,1)} p_{(2,1,1)(1,1,1)} \\ \pi_{(2,0,1)} = \pi_{(1,1,0)} p_{(1,1,0)(2,0,1)} + \pi_{(1,1,1)} p_{(1,1,1)(2,0,1)} + \\ +\pi_{(2,0,1)} p_{(2,0,1)(2,0,1)} + \pi_{(2,1,1)} p_{(2,1,1)(2,0,1)} \\ \pi_{(2,1,1)} = \pi_{(1,1,0)} p_{(1,1,0)(2,1,1)} + \pi_{(1,1,1)} p_{(1,1,1)(2,1,1)} + \\ +\pi_{(2,0,1)} p_{(2,0,1)(2,1,1)} + \pi_{(2,1,1)} p_{(2,1,1)(2,1,1)} \\ \pi_{(1,1,0)} + \pi_{(1,1,1)} + \pi_{(2,0,1)} + \pi_{(2,1,1)} = 1, \end{cases},$$

где $p_{(i,l_1,l_2)(j,l_1^{'},l_2^{'})}$ определяется соотношением (18).

Заметим, что стационарные распределения, полученные при решении системы, совпадают при стратегиях №1, №2, №4, №7, №9 из таблицы 1. Этот факт легко объяснить: при соответствующем принятии решений во всех выше перечисленных случаях состояние (1, 1, 0) будет являться поглощающим состоянием. Также стационарные распределения, полученные при решении системы, совпадают при стратегиях №3, №10, №12, №14, №16. При соответствующем принятии решений во всех выше перечисленных случаях состояние (2, 0, 1) будет являться поглощающим состоянием.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Стратегия является *допустимой*, если при этой стратегии существует стационарное распределение вложенной цепи Маркова.

Заметим, что для стратегий №6 и №15 пределы будут зависеть от того, из какого состояния стартует процесс (начальное распределение), и стационарного распределения не существует. Поэтому их исключаем из рассмотрения. В дальнейшем для поиска оптимальной стратегии будем рассматривать только допустимые стратегии.

Обозначим S^i – функционал накопления, получаемый при старте с прихода заявки i-го типа.

Для стратегий №5, №8, №11, №13 все состояния образуют один класс, поглощающих состояний нет.

Таким образом, необходимо посчитать функционал доходов для шести стратегий.

Опустим вычисления и приведём вид функционала доходов для некоторых из стратегий.

Заметим, что математическое ожидание времени непрерывного пребывания процесса $\xi(t)$ в состоянии $(i,\vec{m})$ принимает вид

$$m_{(i,\vec{m})}(j)=\int_0^\infty \overline{F}_{ij}(t)dt\ .$$

При выборе стратегий №1, №2, №4, №7, №9 функционал доходов примет вид

$S =$

$$=\frac{\int_0^\infty \left[c_1^{(1)}z_1+c_2^{(1)}\frac{z_1}{\mu_1}+c_3^{(1)}\left[t-\frac{z_1-\mu_1 te^{-\mu_1 t}}{\mu_1 z}\right]z_1+c_3^{(2)}t+c_5^{(1)}e^{-\mu_1 t}\right]dF_{11}(t)}{\int_0^\infty \overline{F}_{11}(x)dx},$$

$z_1 = 1 - e^{-\mu_1 t}$.

При выборе стратегий №3, №10, №12, №14, №16 функционал доходов примет вид

$S =$

$$=\frac{\int_0^\infty \left(c_1^{(2)}z_2+c_2^{(2)}\frac{z_2}{\mu_2}+c_3^{(1)}t+c_3^{(2)}\left[t-\frac{z_2-\mu_2 te^{-\mu_2 t}}{\mu_2 z_2}\right]z_2+c_5^{(2)}e^{-\mu_2 t}\right)dF_{22}(t)}{\int_0^\infty \overline{F}_{22}(x)dx},$$

$z_2 = 1 - e^{-\mu_2 t}$.

Выпишем необходимые характеристики, если управление проводится согласно стратегии №5.

Стационарные распределения, полученные при решении системы, имеют вид

$$\pi_{(1,1,0)}=\frac{1-\int\limits_0^\infty e^{-\mu_2 x}dF_{11}(x)}{\int\limits_0^\infty e^{-\mu_2 x}dF_{21}(x)+2-2\int\limits_0^\infty e^{-\mu_2 x}dF_{11}(x)},$$

$$\pi_{(1,1,1)}=1-2\frac{1-\int\limits_0^\infty e^{-\mu_2 x}dF_{11}(x)}{\int\limits_0^\infty e^{-\mu_2 x}dF_{21}(x)+2-2\int\limits_0^\infty e^{-\mu_2 x}dF_{11}(x)},$$

$$\pi_{(2,0,1)}=\frac{1-\int\limits_0^\infty e^{-\mu_2 x}dF_{11}(x)}{\int\limits_0^\infty e^{-\mu_2 x}dF_{21}(x)+2-2\int\limits_0^\infty e^{-\mu_2 x}dF_{11}(x)}\int\limits_0^\infty(1-e^{-\mu_1 x})dF_{12}(x),$$

$$\pi_{(2,1,1)}=\frac{1-\int\limits_0^\infty e^{-\mu_2 x}dF_{11}(x)}{\int\limits_0^\infty e^{-\mu_2 x}dF_{21}(x)+2-2\int\limits_0^\infty e^{-\mu_2 x}dF_{11}(x)}\int\limits_0^\infty e^{-\mu_1 x}dF_{12}(x).$$

Условное математическое ожидание накопленного дохода при условии, что процесс пребывает в состоянии $(i,\vec{m})$, через время t перейдёт в состояние $(j,\vec{l})$ и принято решение u, соответствующее стратегии №5:

$$R_{(1,1,0)(2,0,1)}(t,2)=c_1^{(1)}+c_2^{(1)}\frac{1-e^{-\mu_1 t}-\mu_1 te^{-\mu_1 t}}{\mu_1(1-e^{-\mu_1 t})}+$$
$$+c_3^{(1)}[t-\frac{1-e^{-\mu_1 t}-\mu_1 te^{-\mu_1 t}}{\mu_1(1-e^{-\mu_1 t})}](1-e^{-\mu_1 t})+c_3^{(2)}t$$

$$R_{(1,1,0)(2,1,1)}(t,2)=c_2^{(1)}t+c_3^{(2)}t,$$

$$R_{(1,1,1)(1,1,0)}(t,1)=c_1^{(1)}(1-e^{-\mu_1 t})+c_1^{(2)}+c_2^{(1)}\frac{1-e^{-\mu_1 t}}{\mu_1}+$$
$$+c_2^{(2)}\frac{1-e^{-\mu_2 t}-\mu_2 te^{-\mu_2 t}}{\mu_2(1-e^{-\mu_2 t})}+c_3^{(1)}[t-\frac{1-e^{-\mu_1 t}-\mu_1 te^{-\mu_1 t}}{\mu_1(1-e^{-\mu_1 t})}](1-e^{-\mu_1 t})+,$$
$$+c_3^{(2)}[t-\frac{1-e^{-\mu_2 t}-\mu_2 te^{-\mu_2 t}}{\mu_2(1-e^{-\mu_2 t})}]+c_5^{(1)}e^{-\mu_1 t},$$

$$R_{(1,1,1)(1,1,1)}(t,1)=c_1^{(1)}(1-e^{-\mu_1 t})+c_2^{(1)}\frac{1-e^{-\mu_1 t}-\mu_1 te^{-\mu_1 t}}{\mu_1}+c_2^{(1)}te^{-\mu_1 t}+c_2^{(2)}t+$$

$$+c_3^{(1)}[t-\frac{1-e^{-\mu_1 t}-\mu_1 te^{-\mu_1 t}}{\mu_1(1-e^{-\mu_1 t})}](1-e^{-\mu_1 t})+c_5^{(1)}e^{-\mu_1 t},$$

$$R_{(2,0,1)(1,1,0)}(t,1)=c_1^{(2)}+c_2^{(2)}\frac{1-e^{-\mu_2 t}-\mu_2 te^{-\mu_2 t}}{\mu_2(1-e^{-\mu_2 t})}+c_3^{(1)}t+$$

$$+c_3^{(2)}[t-\frac{1-e^{-\mu_2 t}-\mu_2 te^{-\mu_2 t}}{\mu_2(1-e^{-\mu_2 t})}],$$

$$R_{(2,0,1)(1,1,1)}(t,1)=c_2^{(2)}t+c_3^{(1)}t+c_5e^{-\mu_1 t},$$

$$R_{(2,1,1)(1,1,1)}(t,1)=c_1^{(1)}(1-e^{-\mu_1 t})+c_2^{(1)}\frac{1-e^{-\mu_1 t}}{\mu_1}+c_2^{(2)}t+$$

$$+c_3^{(1)}[t-\frac{1-e^{-\mu_1 t}-\mu_1 te^{-\mu_1 t}}{\mu_1(1-e^{-\mu_1 t})}](1-e^{-\mu_1 t})+c_5^{(1)}e^{-\mu_1 t},$$

$$R_{(2,1,1)(1,1,0)}(t,1)=c_1^{(1)}(1-e^{-\mu_1 t})+c_1^{(2)}+c_2^{(1)}\frac{1-e^{-\mu_1 t}}{\mu_1}+$$

$$+c_2^{(2)}\frac{1-e^{-\mu_2 t}-\mu_2 te^{-\mu_2 t}}{\mu_2(1-e^{-\mu_2 t})}+$$

$$+c_3^{(1)}[t-\frac{1-e^{-\mu_1 t}-\mu_1 te^{-\mu_1 t}}{\mu_1(1-e^{-\mu_1 t})}](1-e^{-\mu_1 t})+c_3^{(2)}[t-\frac{1-e^{-\mu_2 t}-\mu_2 te^{-\mu_2 t}}{\mu_2(1-e^{-\mu_2 t})}]+$$

$$+c_5^{(1)}e^{-\mu_1 t}.$$

Условные математические ожидания накопленного дохода за полный период пребывания процесса $\xi(t)$ в состоянии в состоянии $(i,\vec{m})$:

$$s_{(1,1,0)}=[\sum_{(j,l_1',l_2')}[\int_o^\infty R_{(1,1,0)(j,l'_1,l'_2)}(x,2)d_xQ_{(1,1,0)(j,l'_1,l'_2)}(x,2)],$$

$$s_{(1,1,1)}=[\sum_{(j,l_1',l_2')}[\int_o^\infty R_{(1,1,1)(j,l'_1,l'_2)}(x,1)d_xQ_{(1,1,1)(j,l'_1,l'_2)}(x,1)],$$

$$s_{(2,0,1)}=[\sum_{(j,l_1',l_2')}[\int_O^\infty R_{(2,0,1)(j,l'_1,l'_2)}(x,1)d_xQ_{(2,0,1)(j,l'_1,l'_2)}(x,1)],$$

$$s_{(2,1,1)} = [\sum_{(j,l_1',l_2')} [\int_{0}^{\infty} R_{(2,1,1)(j,l'_1,l'_2)}(x,1) d_x Q_{(2,1,1)(j,l'_1,l'_2)}(x,1)] .$$

Значение функционала доходов можно получить, подставив соответствующие значения

Для каждой из стратегий могут быть получены необходимые характеристики, аналогично тому, как было показано для выбранных стратегий.

Далее необходимо выбрать максимальное значение функционала доходов из шестнадцати при заданных доходах и расходах системы и соответствующую этому значению стратегию, которая и будет являться оптимальной.

Основной трудностью при получении зависимостей в замкнутом виде является большая размерность пространства состояний и пространства управлений, что является отдельной технической задачей для исследования введенной СМО и применения алгоритмов.

5. Заключение

Представлено описание и применение нового типа входного потока, управляемого цепью Маркова, BSMAP-потока. Проведено исследование системы массового обслуживания с BSMAP-потоком, рассмотрены элементы управления входным потоком. Вышеизложенный входной поток позволяет применять управление в системах массового обслуживания, используя теорию управляемых полумарковских процессов.

Литература

1. БАРЗИЛОВИЧ Е.Ю., БЕЛЯЕВ Ю.К., КАШТАНОВ В.А. И ДР. *Вопросы математической теории надёжности*. – М. Радио и связь, 1983. – 376 с.
2. ИВЧЕНКО Г.И, КАШТАНОВ В.А., КОВАЛЕНКО И.Н. *Теория массового обслуживания*. – М.: Высшая школа, 1982. – 256 с.
3. КАШТАНОВ В.А. *Элементы теории случайных процессов*. – М.: МИЭМ, 2010. – 113 с.

4. КАШТАНОВ В.А., КОНДРАШОВА Е.В. *Анализ входного потока, управляемого цепью Маркова* // Надёжность. – 2012. – №1(40). – С. 52–58.
5. КАШТАНОВ В.А., МЕДВЕДЕВ А.И. *Теория надёжности сложных систем* (*теория и практика*). – М.: «Европейский центр по качеству», 2002. – 609 с.
6. КОНДРАШОВА Е.В. *Оптимизация функционала доходов в управляемой системе массового обслуживания* // Управление большими системами. – 2011. – №36. – С. 93–105.
7. КОНДРАШОВА Е.В. *Алгоритмизация исследования качества работы системы массового обслуживания* // Качество. Инновации. Образование. – 2011. – №8(75). – С. 40–46.
8. КОРОЛЮК В.С., ТУРБИН А.Ф. *Полумарковские процессы и их приложения*. – Киев: Наукова думка, 1976. – 184 с.
9. РЫКОВ В.В. *Управляемые марковские процессы с конечными пространствами состояний и управлений* // ТВП. – 1966. – Том 11, выпуск 2. – С. 343–351.
10. HEYMAN D., LUCANTONI D. *Modelling multiple IP traffic streams with rate limits* // IEEE ACM Transactions on Networking. – 2003. – Vol. 11. – P. 948–958.
11. KASHTANOV V.A., KONDRASHOVA E.V. *Optimization of the CBSMAP-queueing model* // Lecture Notes in Engineering and Computer Science. Proceedings of the World Congress on Engineering 2013. London Newswood Limited International Association of Engineers, 2013. – P. 69–73.
12. KASHTANOV V.A. KONDRASHOVA E.V. *Analysis of Controlled Semi-Markov Queueing Models* // The 5th International Conference on Integrated Modeling and Analysis in Applied Control and Automation, September 12–14, 2011, Rome, Italy. Rende: DIPTEM, University of Genoa, 2011. Ch.1. – P. 1–7.
13. KENDALL D.J. *Stochastic processes occurring in the theory of queues and their analysys by the method of the embedded markov chains* // Ann. Math. Stat. – 1953. – No. 24. – P. 338–354.
14. KLEMM A., LINDERMANN C., LOHMANN M. *Modelling IP traffic using the batch Markovian arrival process* // Performance Evaluation. – 2008. – Vol. 54. – P. 149–173.

15. KONDRASHOVA E.V. *Optimization of the controlled queueing models. CBSMAP-flow* // 3rd International Eurasian conference on Mathematical Sciences and Applications. Book of abstracts. Wien. 2013. – P. 176–177.
16. LUCANTONI D.M., HELLSTEM K.S., NEUTS M.F. *A single-server queue with server vacations and a class of non-Renewal arrival processes* // Advantage of Applied Probability. – 1990. – Vol. 22. – P. 676–705.
17. LUCANTONI D.M. *New results on the single server queue with a batch Markovian arrival process* // Communications in Statistics, Stochastic Models. – 1991. – Vol. 7(1). – P. 1–46.
18. VISHNEVSKY V., DUDIN A., KLIMENOK V., SEMENOVA O. *Performance analysis BMAP/G/1 queue with gated service and adaptive vacation* // Performance Evaluation. – 2011. – Vol. 68. – P. 446–462.

RESEARCH OF SEMI-MARKOV QUEUEING MODELS USING CONTROLLED INPUT FLOW. BSMAP-FLOW

Kashtanov Victor, Higher School of Economics (HSE), Moscow, Doctor of physical and mathematical Science, professor.

Kondrashova Elizaveta, Higher School of Economics (HSE), Moscow, PhD, assistant, elizavetakondr@gmail.com.

Abstract: *The research of queuing model with controlled semi-Markov batch flow is carried out. CBSMAO-flow is a generalization of BMAP-flow. Several alternative designs of a control set are considered. The income functional is constructed on trajectories of a controlled semi-Markov process. Two theorems are proven about the structure of the cumulative income functional for the novel queuing model under consideration.*

Keywords: theory of queuing models, controlled semi-Markov process, controlled semi-Markov arrival flow, income functional, optimization.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии В.М. Вишневским

Поступила в редакцию 29.04.2015.
Опубликована 30.09.2015.