УДК 62-50
ББК 78.34

ОПТИМИЗАЦИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ КАСКАДНЫХ СИСТЕМ В ФОРМЕ ЛУРЬЕ ПРИ ОГРАНИЧЕННЫХ ВНЕШНИХ ВОЗМУЩЕНИЯХ[1]

Усик Е. В.[2]
(*Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург*)

Рассматривается оптимизация нелинейных каскадных систем в форме Лурье при ограниченных возмущениях. Для решения поставленной задачи используется метод инвариантых эллипсоидов. Приведенный результат сравнивается с ранее полученным, классическим, на основе функции Ляпунова.

Ключевые слова: пассификация, бэкстеппинг, метод инвариантных эллипсоидов, LMI.

Введение

В практических задачах автоматического управления часто возникает задача синтеза алгоритма управления динамическими каскадными системами, которые представляют собой совокупность подсистем и связей между ними [17] с возмущением. В настоящей работе рассматриваются системы, состоящие из двух блоков: стабилизируемой системы и системы, представляющей собой цепь нелинейных интеграторов. К такому типу относится, например, система, описывающая движение мобильных роботов [16, 19]. Роль управления в данном случае играет скорость изменения угла.

В рассматриваемой работе задача решается на основе процедуры пошагового (попятного) синтеза [5, 18] или, как ее еще

[1] *Работа выполнена в ИПМаш РАН при поддержке РНФ, грант №14-29-00142.*

[2] *Егор Владимирович Усик, аспирант* (*egor.usik@yandex.ru*).

называют, бэкстеппинга (англ. backstepping [18]). Суть этого метода сводится к нахождению управления для системы с интегратором в предположении, что для системы без интегратора заранее определен стабилизирующий алгоритм – виртуальное управление. Управление выбирается таким образом, чтобы производная функции Ляпунова для системы с интегратором была строго отрицательна для ненулевых значений вектора состояния системы, и тогда по теореме Ляпунова [1] следует асимптотическая устойчивость всей модели.

При синтезе регулятора будем опираться на подход, основанный на пассивности объекта. Понятие пассивности означает, что система удовлетворяет интегральной связи с функцией линейной по входу и выходу системы [6]. Можно показать, что в этом случае на пространстве состояний системы можно определить функцию, которая при определенных условиях может играть роль функции Ляпунова для замкнутой системы [3, 15]. Кроме того, существуют результаты [14] о стабилизации нелинейных аффинных систем с помощью обратной связи, включающие условия пассивности объекта. Таким образом, задача стабилизации объекта проводится в два этапа. Первый этап – это задача пассификации системы, т.е. задача нахождения закона обратной связи, делающей систему пассивной [23, 24]. На втором этапе при выполнении дополнительных условий типа наблюдаемости решается задача стабилизации пассивной системы.

Решается задача оптимизации оценки ошибки вектора состояния в нелинейной системе, сводящаяся к оптимизации объема инвариантного эллипсоида. В нашем случае рассматриваем просто ограниченные возмущения, и поэтому подходы, которые используется при решении таких задач как H_∞-оптимизация или LQR (задачи со случайными гауссовскими помехами), не могут быть тут применены.

Такого рода задача может быть решена на основе метода инвариантных множеств. Он часто используется в различных задачах теории гарантированого оценивания, фильтрации и минимаксного управления в динамических системах при наличии неопределенностей. Если к тому же выберем в качестве инвариантных множеств эллипсоиды, то, благодаря их простой структуре и прямой связи с квадратичными функциями Ляпунова, сможем использовать серьезный аппарат линейных матричных неравенств (LMI) и полуопределенного программирования (SDP) [11].

В статье [8] представлен результат оценки вектора состояния на основе функции Ляпунова. В данной работе расширяется полученный в статье [7] результат по подавлению произвольных ограниченных внешних возмущений на рассматриваемый класс систем.

Статья состоит из введения, 3 разделов и заключения. Раздел 1 посвящен краткому изложению некоторых материалов из теории автоматического управления, помогающих наиболее полно понять последующий материал. В разделе 2 формулируется исходная задача и основная теорема. В разделе 3 предложенная теорема применена к задаче управления мобильных роботов. Приведены результаты вычислительного эксперимента, иллюстрирующие теоретические результаты.

1. Предварительные сведения

Инвариантным эллипсоидом для динамической системы называется эллипсоид

$$\Upsilon_x = \{x \in \mathbb{R}^n : x^\top Q^{-1} x \leqslant \Delta_f\}, Q \succ 0, \tag{1}$$

обладающий следующим свойством: любая траектория системы, исходящая из точки, лежащей в Υ_x, в любой момент времени принадлежит этому эллипсоиду [11].

Инвариантные эллипсоиды характеризуют влияние внешних возмущений $f(t)$ на траектории системы. В этой связи будем интересоваться минимальными (в некотором смысле) инвариантными эллипсоидами, содержащими выход $\varepsilon(t)$ рассматриваемой системы.

2. Постановка задачи

Задача 1. *Даны две динамические системы в форме Лурье с интегратором*

$$
\begin{aligned}
(2)\quad \dot{x}(t) &= Ax(t) + B\varphi(y_1) + f_1(t),\ y_1(t) = Cx(t),\\
(3)\quad \dot{z}(t) &= Az(t) + B\varphi(y_2) + Bu(t) + f_2(t),\ y_2(t) = Cz(t),\\
(4)\quad \dot{u}(t) &= \psi(u,t) + w(t),
\end{aligned}
$$

где $x(t), z(t)$ – n-мерные векторы состояния объекта; $y_1(t), y_2(t)$ – скалярные выходы; A – $(n\times n)$ матрица; B – $(n\times 1)$ матрица; C – $(1\times n)$ матрица; $\varphi(y)$, $\psi(u,t)$ – непрерывные нелинейности, лежащие в секторе; $f_i(t)$ – ограниченные возмущения, $\|f_i(t)\| \leqslant \Delta_{f_i}$. Систему (2) будем называть ведущей (master), систему (3) – ведомой (slave).

Согласно процедуре попятного синтеза, предположим, что для объекта (3) существует некое управление $u(t)$, делающее систему (3) асимптотически устойчивой.

Цель работы состоит в оптимизации оценки ошибки вектора состояния в системе с ограниченными внешними возмущениями на основе техники LMI и методе инвариантых эллипсоидов, а также в сравнении результатов с оценками, полученными из классического результата на основе функции Ляпунова [8].

2.1. ПОСТРОЕНИЕ ПАССИФИЦИРУЮЩЕГО РЕГУЛЯТОРА

Вводим ошибку синхронизации $e(t) = x(t) - z(t)$, а также ошибку синхронизации по выходу $\varepsilon(t) = y_1(t) - y_2(t) = Ce(t)$. С учетом этих обозначений можно ввести новую систему:

$$
\begin{aligned}
(5)\quad \dot{e}(t) &= Ae(t) + B\xi(\varepsilon,t) - Bu(t) + f(t),\ \varepsilon(t) = Ce(t),\\
(6)\quad \dot{u}(t) &= \psi(u,t) + w(t),
\end{aligned}
$$

где $\xi(\varepsilon,t) = \varphi(y_1) - \varphi(y_2)$ – новая нелинейность. Цель управления будет выглядеть следующим образом: $\lim_{t\to\infty} e(t) = 0$.

Для синтеза управления $w(t)$ воспользуемся методом бэкстеппинга:

$$\begin{aligned} &(7)\quad \dot{e}(t) &=& \quad Ae(t) + B\xi(\varepsilon, t) - Bu(t) + f(t),\ \varepsilon(t) = Ce(t), \\ &(8)\quad \dot{u}(t) &=& \quad KCAe(t) + KCB\xi(\varepsilon, t) + \psi(u, t) + v(t), \end{aligned}$$

где $v(t)$ – новое управление.

2.2. УСЛОВИЯ ПАССИФИКАЦИИ И АСИМПТОТИЧЕСКОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ

Для получения условий достижения цели сделаем следующие предположения.

1) пусть линейная система $\dot{e}(t) = Ae(t) - Bu(t)$, $\varepsilon(t) = Ce(t)$ – гиперминимально-фазовая, т.е. матричная функция $\Gamma(\lambda) = \lim_{\lambda\to\infty} \lambda W(\lambda)$ невырождена и положительно определена, где $W(\lambda) = C(\lambda I - A)^{-1}B = \beta(\lambda)/\alpha(\lambda)$ – передаточная функция системы. Для случая со скалярным выходом это означает, что степень знаменателя $\alpha(\lambda)$ равна n. Числитель $\beta(\lambda)$ гурвицев степени $n-1$ с положительными коэффициентами. В соответствии с теоремой о пассификации [15] существует управление $u(t) = K\varepsilon$, такое что система стабилизируема;

2) $\xi(\varepsilon, t)$ лежит в секторе, т.е. $a \leqslant \xi(\varepsilon, t)/\varepsilon \leqslant b$, где a, b – параметры сектора, зависящие от нелинейности;

3) $\psi(u, t)$ также лежит в секторе, т.е. $c \leqslant \psi(u, t)/u \leqslant d$, где c, d – параметры сектора, зависящие от нелинейности;

4) из гиперминимально-фазовости и теоремы о пассификации следует, что минимальное расстояние η_0 между корнями числителя передаточной функции и мнимой осью будет положительным. Выберем параметры η и K таким образом, чтобы $0 < \eta < \eta_0$, $2\|\tilde{D}\|\|P\|\|C\|\max(|a|, |b|) + 2\|P\|\max(|c|, |d|) < \eta\lambda_{\min}$, где $\tilde{D} = \begin{pmatrix} B \\ KCB \end{pmatrix}$, P – положительно определенная матрица в квадратичной функции

Ляпунова $V(x) = x^\top Px$, $\lambda_{\min}$ – наименьшее собственное число данной матрицы.

Для полноты изложения приведем две теоремы, полученные в работе [8]:

Теорема 1. *Пусть выполнены предположения* (*1*)–(*4*). *Тогда существуют числа* K, γ, *такие что система* (*7*), (*8*) *будет пассивна с квадратичной функцией запаса, а замкнутая система с управлением* $v(t) = (-\gamma - KCB)u + \gamma K\varepsilon$ *асимптотически устойчива.*

Теорема 2. *Дана система* (*7*),(*8*) *с ограниченным возмущением* $\|f(t)\|^2 \leqslant \Delta_f$. *Пусть выполнены предположения* (*1*)–(*4*). *Тогда* $\lim_{t\to\infty} \|e(t)\| \leqslant C_e\Delta_f$, *где* $C_e = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}\frac{1}{\eta}}$, *где* P *– положительно определенная матрица в квадратичной функции Ляпунова* $V(x) = x^\top Px$.

2.3. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Представим систему (7), (8) в виде

(9)
$$\begin{pmatrix} \dot e \\ \dot u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -B \\ KCA & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B \\ KCB \end{pmatrix} \xi(\varepsilon, t) + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{pmatrix} \psi(u,t) +$$
$$+ \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix},$$
$$v(t) = \begin{pmatrix} K_1 & K_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon \\ u \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \varepsilon \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ u \end{pmatrix}$$

Или, в других обозначениях,

$$\dot x(t) = \tilde A x(t) + \tilde B \psi(u,t) + \tilde B v(t) + \tilde D \xi(\varepsilon, t) + E\tilde f(t), \tag{10}$$
$$\tilde\varepsilon(t) = \tilde C x(t), \; v(t) = \tilde K \tilde\varepsilon. \tag{11}$$

Теорема 3. *Эллипсоид* (1) *является инвариантным для системы* (7), (8), *если его матрица* $Q \succ 0$ *удовлетворяет LMI*

(12)
$$\begin{pmatrix} W & Q & Q & E^\top \\ Q & -\frac{\gamma}{\max(c,d)}(C^\top C)^{-1} & 0 & 0 \\ Q & 0 & -\frac{\delta}{\max(a,b)}(C^\top C)^{-1} & 0 \\ E & 0 & 0 & -\alpha I \end{pmatrix} \leqslant 0.$$

при некоторых $\alpha, \gamma, \delta > 0$*, где* $W = \widehat{A}^\top Q + Q\widehat{A} + \alpha Q + \gamma \tilde{B}\tilde{B}^\top + \delta \tilde{D}\tilde{D}^\top$*,* $\widehat{A} = \tilde{A} + \tilde{B}\tilde{C}\tilde{K}$*.*

Следствие 1. *Решение* $\widehat{Q}$ *задачи*

(13)
$$trCQC^\top \to min$$

при ограничении

(14)
$$\begin{pmatrix} W & Q & Q & E^\top \\ Q & -\frac{\gamma}{\max(c,d)}(C^\top C)^{-1} & 0 & 0 \\ Q & 0 & -\frac{\delta}{\max(a,b)}(C^\top C)^{-1} & 0 \\ E & 0 & 0 & -\alpha I \end{pmatrix} \leqslant 0,$$

$\widehat{A} = \tilde{A} + \tilde{B}\tilde{C}\tilde{K}$*,* $W = \widehat{A}^\top Q + Q\widehat{A} + \alpha Q + \gamma \tilde{B}\tilde{B}^\top + \delta \tilde{D}\tilde{D}^\top$*, определяет матрицу* $C\widehat{Q}C^\top$ *ограничивающего эллипсоида для выхода* $\varepsilon = Ce(t)$ *системы* (7)*,* (8)*. Минимизация проводится по матричной переменной* $Q = Q^\top \in \mathbb{R}^{n\times n}$*, параметрам* $\alpha, \gamma, \delta > 0$*.*

Следствие 2. *Если положить, что нелинейности в интеграторе нет,* $\psi(u,t) \equiv 0$*, то приходим к результату, полученному в работе* [7].

Минимальность эллипсоида можно понимать в разных смыслах. В качестве критерия можно рассматривать функцию $\det CPC^\top$, пропорциональную объему эллипсоида Υ_x, или функцию $\|CPC^\top\|$, соответствующую значению наибольшей полуоси эллипсоида Υ_x. Однако в силу линейности наиболее прост критерий следа $f(P) = trCPC^\top$, который соответствует сумме квадратов полуосей эллипсоида Υ_x. Выбор этого критерия в дальнейшем позволит свести проблему к стандартной задаче SDP. Поскольку по теореме (1) система предполагается устойчивой, то существует конечный и единственный ограничивающий эллипсоид, минимизирующий любую из указанных выше функций.

Доказательство теоремы 3. Введем в рассмотрение функцию $V(x) = x^\top Px, P \succ 0$, построенную на решениях системы (10). Для того чтобы ее траектории $x(t)$ не покидали эллипсоид $\Upsilon_x = \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) \leqslant \Delta_f\}$, достаточно потребовать, чтобы при $V(x) \leqslant \Delta_f$, при всех допустимых внешних возмущениях $\|\tilde{f}\|^2 \leqslant \Delta_f$ и при предположениях (2), (3) выполнялось $V(x, \tilde{f}, \psi, \xi) \leqslant 0$.

Обозначим $\widehat{A} = \tilde{A} + \tilde{B}\tilde{K}\tilde{C}$.

Производная функции $V(x)$ в силу системы (10) имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{V} \quad & (x, \tilde{f}, \psi, \xi) = \dot{x}^\top Px + x^\top P\dot{x} = \\ = \quad & x^\top(\widehat{A}^\top P + P\widehat{A})x + 2\tilde{f}^\top E^\top Px + 2\psi\tilde{B}^\top Px + 2\xi\tilde{D}^\top Px.\end{aligned}$$

Введем вектор $s = \begin{pmatrix} x^\top & \tilde{f}^\top & \psi^\top & \xi^\top \end{pmatrix}^\top$, а также матрицы

$$\begin{aligned} M_0 &= \begin{pmatrix} \widehat{A}^\top P + P\widehat{A} & PE & P\tilde{B} & P\tilde{D} \\ E^\top P & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{B}^\top P & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{D}^\top P & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ M_1 &= diag\{-P, 0, 0, 0\}, \\ M_2 &= diag\{0, I, 0, 0\}, \\ M_3 &= diag\{-\max(c, d)C^\top C, 0, I, 0\}, \\ M_4 &= diag\{-\max(a, b)C^\top C, 0, 0, I\}. \end{aligned}$$

Можем записать рассматриваемые условия в виде:

(15)

$f_0(s) \leqslant 0$ при $f_1(s) \leqslant \Delta_f, f_2(s) \leqslant \Delta_f, f_3(s) \leqslant 0, f_4(s) \leqslant 0,$

где $f_i(s) = s^\top M_i s, i = \overline{0, 4}$.

Воспользовавшись S-теоремой [21], получаем неравенство:

(16) $$M_0 - \alpha M_1 - \beta M_2 - \gamma M_3 - \delta M_4 \leqslant 0$$

при параметрах $\alpha, \beta, \gamma, \delta \geqslant 0$ и $0 \geqslant -\alpha\Delta_f + \beta\Delta_f \geqslant 0, \Rightarrow \alpha = \beta$ (см. подробнее [12]).

Распишем неравенство (16) подробнее:

$$\begin{pmatrix} W & PE & P\tilde{B} & P\tilde{D} \\ E^\top P & -\beta I & 0 & 0 \\ \tilde{B}^\top P & 0 & -\gamma I & 0 \\ \tilde{D}^\top P & 0 & 0 & -\delta I \end{pmatrix} \leqslant 0, \tag{17}$$

где $W = \widehat{A}^\top P + P\widehat{A} + \alpha P + C^\top C(\delta \max(a, b) + \gamma \max(c, d))$.

Применяем лемму Шура [13]:

$$\begin{aligned} \widehat{A}^\top P + P\widehat{A} + \alpha P \quad &+ \quad (\delta \max(a, b) + \gamma \max(c, d))C^\top C + \\ &+ \quad \frac{1}{\beta} PEE^\top P + \frac{1}{\gamma} P\tilde{B}\tilde{B}^\top P + \frac{1}{\delta} P\tilde{D}\tilde{D}^\top P \leqslant 0. \end{aligned}$$

Теперь умножим справа и слева на матрицу $Q = P^{-1}$.

$$\begin{aligned} \widehat{A}^\top Q + Q\widehat{A} + \alpha Q \quad &+ \quad (\delta \max(a, b) + \gamma \max(c, d))QC^\top CQ + \\ &+ \quad \frac{1}{\beta} EE^\top + \frac{1}{\gamma} \tilde{B}\tilde{B}^\top + \frac{1}{\delta} \tilde{D}\tilde{D}^\top \leqslant 0. \end{aligned}$$

Возпользуемся опять леммой Шура [13] и представим рассматриваемое выражение в виде матрицы:

(18)

$$\begin{pmatrix} W & Q & Q & E^\top \\ Q & -\frac{1}{\gamma \max(c,d)}(C^\top C)^{-1} & 0 & 0 \\ Q & 0 & -\frac{1}{\delta \max(a,b)}(C^\top C)^{-1} & 0 \\ E & 0 & 0 & -\beta I \end{pmatrix} \leqslant 0,$$

где $W = \widehat{A}^\top Q + Q\widehat{A} + \alpha Q + \frac{1}{\gamma}\tilde{B}\tilde{B}^\top + \frac{1}{\delta}\tilde{D}\tilde{D}^\top$, что с учетом переобозначений $\gamma = \frac{1}{\gamma}, \delta = \frac{1}{\delta}, \beta = \alpha$ совпадает с условием в формулировке теоремы.

3. Примеры

Проиллюстрируем применение теоремы на примере модели трехколесного мобильного робота.

Считая, что робот движется при малых скоростях, можно ограничиться кинематической моделью тележек (ведущей и ведомой). Она будет выглядеть следующим образом [19]:

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1(t) = v\cos(\varphi_1(t)), && \dot{y}_1(t) = v\cos(\varphi_2(t)), \\ &\dot{x}_2(t) = v\sin(\varphi_1(t)) + f_1(t), && \dot{y}_2(t) = v\sin(\varphi_2(t)) + f_2(t), \\ &\dot{\varphi}_1(t) = \omega, && \dot{\varphi}_2(t) = u(t), \end{aligned} \tag{19}$$

где $u(t), r(t)$ – управление; ω – фиксированная угловая скорость; v – фиксированная линейная скорость; $f_1(t), f_2(t)$ – ограниченные возмущения.

Выделив соответствующим образом нелинейность, систему (19) можно представить в виде

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1(t) = v + v\,(\cos(\varphi_1(t)) - 1), \\ &\dot{x}_2(t) = v\,\varphi_1(t) + v\,(\sin(\varphi_1(t)) - \varphi_1(t)) + f_1(t), \\ &\dot{y}_1(t) = v + v\,(\cos(\varphi_2(t)) - 1), \\ &\dot{y}_2(t) = v\,\varphi_2(t) + v\,(\sin(\varphi_2(t)) - \varphi_2(t)) + f_2(t), \\ &\dot{\varphi}_2(t) = u(t), \end{aligned} \tag{20}$$

Таким образом, при малых значениях угла $\varphi_i(t), i = 1, 2$, движением вдоль осей $x_1(t), y_1(t)$ можно пренебречь.

Введем следующие обозначения:

$$e_1(t) = x_2(t) - y_2(t), \tag{21}$$

$$\varepsilon_1(t) = \varphi_1(t) - \varphi_2(t), \tag{22}$$

$$f(t) = f_1(t) - f_2(t), \tag{23}$$

$$\xi_1(t) = \sin(\varphi_1(t)) - \sin(\varphi_2(t)) + \varphi_2(t) - \varphi_1(t). \tag{24}$$

В этих обозначениях можно записать новую систему:

$$\begin{aligned} &\dot{e}(t) = v\varepsilon(t) + v\xi_1(\varepsilon, t) + f(t), \\ &\dot{\varepsilon}(t) = w(t), \end{aligned} \tag{25}$$

где

$$\xi(\varepsilon(t), t) = 2\cos\frac{\varphi_1(t) + \varphi_2(t)}{2}\sin\frac{\varepsilon(t)}{2} - \varepsilon(t). \tag{26}$$

Обозначим $\alpha(t) = \cos\frac{\varphi_1(t)+\varphi_2(t)}{2}$ и перепишем выражение (26) следующим образом:

$$\xi_1(\varepsilon(t),t) = 2\alpha(t)\sin\frac{\varepsilon(t)}{2} - \varepsilon(t). \tag{27}$$

Нелинейность (27) удовлетворяет следующему неравенству:

$$-2\,\varepsilon^2 \leqslant \varepsilon\,\xi \leqslant 0, \tag{28}$$

дял всех $t \geqslant 0$ (смотри рис.1).

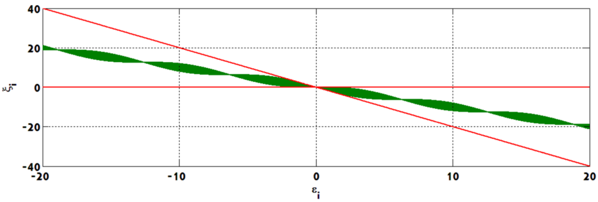

Рис. 1. Нелинейность в секторе, i=1,2

Проверим, что предположения (1)–(4) выполнены.

Передаточная функция системы равна v/λ. Степень знаменателя равна 1, степень числителя – 0, $v > 0$. Покажем, что существует обратная связь в виде $\varepsilon = Ke$, $K < 0$, которая стабилизирует систему. Нелинейность ξ лежит в секторе 1. Рассмотрим квадратичную функцию Ляпунова $V(e) = e^\top He$ и сравним условие (4) со следующим неравенством:

$$\dot{V} = 2eHv(\varepsilon + \xi) \leqslant 2(e)^2 HvK(1 + \max(|a|, |b|)).$$

Неравенство выполняется с $K < 0$. Применяя метод бэкстеппинга, синтезируем управление:

$$w(t) = -\gamma(\varepsilon(t) - Ke(t)) + Kv\varepsilon(t). \tag{29}$$

Представим систему (25), (29) в следующем ввиде:

$$\begin{aligned} &\dot{X}(t) = AX(t) + Bu(t) + D\xi(t,\sigma(t)) + E\tilde{f}(t), \\ &u(t) = \tilde{K}X(t), \end{aligned} \tag{30}$$

где $X = \begin{bmatrix} e \\ \varepsilon \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 0 & v \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} v \\ 0 \end{bmatrix}$, $\tilde{K} = \begin{bmatrix} \gamma K & Kv - \gamma \end{bmatrix}$.

Рассмотрим квардратичную функцию Ляпунова $V(X) = X^\top PX$. Для применения теоремы 2 вычислим параметр $\eta < 0$:

$$\begin{aligned}\dot V &= ((A + B\tilde K)X + D\xi(\varepsilon,t))^\top PX+\\ &+ X^\top P((A + B\tilde K)X + D\xi(\varepsilon,t)) \leqslant\\ &\leqslant 2(\|(A + B\tilde K)\| + \max(|0|, |-2|)v)V\\ &= -\eta V.\end{aligned} \tag{31}$$

Положим скорость движения тележки $v = 0{,}1$ см/с. Далее

$$\eta = -2(\max(-\gamma, vK) + 2v) > 0. \tag{32}$$

Выберем γ, K, чтобы неравенство (32) выполнялось: $\gamma = 1$, $K = -0{,}3125$; следовательно $\eta = 0{,}6$.

Используя неравенство (31), находим матрицу функции Ляпунова P, а вместе с ней и собственные числа. $\lambda_{min}(P) = 0{,}47, \lambda_{max}(P) = 7{,}554$.

Положим $\Delta_f = 0{,}1$, по теореме 2 получаем оценку на состояние системы $X(t)$: $\lim_{t\to\inf}\|X(t)\| \leqslant 0{,}1C_X \leqslant 0{,}623$, где $C_X = 6{,}2301$.

LMI в Теореме 3 выглядит следующим образом:

$$\begin{pmatrix}\widehat{A}^\top Q + Q\widehat{A} + \alpha Q + \delta\tilde D\tilde D^\top & Q & E^\top\\ Q & -\frac{\delta}{\max(\|a\|,\|b\|)}(C^\top C)^{-1} & 0\\ E & 0 & -\alpha I\end{pmatrix} \leqslant 0, \tag{33}$$

$\widehat{A} = \tilde A + \tilde B\tilde C\tilde K$, при $\alpha, \delta > 0$.

С помощью теоремы 3 была найдена матрица $\widehat{Q}$

$$\begin{pmatrix}0{,}1518 & -0{,}0337\\ -0{,}0337 & 0{,}3801\end{pmatrix}, \tag{34}$$

при $\alpha = 0{,}01, \delta = 0{,}02$.

В этом случае оценка $\|C\widehat{Q}C^\top\| = 0{,}3849$.

Таким образом, основываясь на классическом результате, оценка вектора состояния равна $0{,}623$, а применяя метод на основе инвариантных эллипсоидах и LMI получаем оценку равную $0{,}3849$. Это означает, что с помощью теоремы 3 может быть получен более точный результат оценки вектора состояния системы при ограниченных возмущениях.

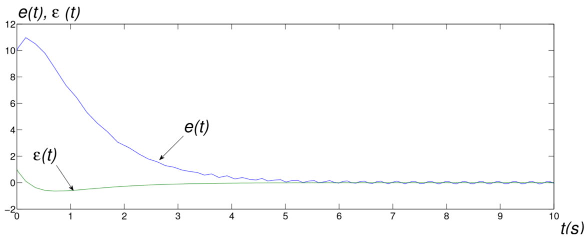

Рис. 2. Ошибки e_i *и* ε_i, $i = 1, 2$*, для системы* (25)*,* (29) *с нормой возмущения* $\Delta_f = 0{,}1$

4. Заключение

Получены оценки вектора состояния в системе с ограниченными внешними возмущениями на основе техники LMI и метода инвариантных эллипсоидов, а также проведено сравнение результатов с оценками, полученными из классического результата на основе функции Ляпунова [8].

Литература

1. АНДРИЕВСКИЙ Б.Р., ФРАДКОВ А.Л. *Избранные главы теории автоматического управления с примерами на языке MATLAB.* – СПб.: Наука, 1999. – 467 с.
2. АНДРИЕВСКИЙ Б.Р., ФРАДКОВ А.Л. *Элементы математического моделирования в программных средах MATLAB 5 и Scilab* (*учебное пособие*). – СПб.: Наука, 2001. – 286 с.
3. АНДРИЕВСКИЙ Б.Р., ФРАДКОВ А.Л. *Метод пассификации в задачах адаптивного управления, оценивания и синхронизации* // Автоматика и телемеханика. – 2006. – №11. – С. 33–37.
4. БОБЦОВ А.А., НИКОЛАЕВ Н.А. *Синтез управления нелинейными системами с функциональными и параметрическими неопределенностями на основе теоремы Фрадкова* // Автоматика и телемеханика. – 2005. – №1. – С. 118–129.

5. МИРОШНИК И.В., НИКИФОРОВ В.О., ФРАДКОВ А.Л. *Нелинейное и адаптивное управление сложными системами.* – СПб.: Наука, 2000. – 549 с.
6. ПОЛУШИН И.Г., ФРАДКОВ А.Л., ХИЛЛ Д.Д. *Пассивность и пассификация нелинейных систем (обзор)* // Автоматика и телемеханика. – 2000. – №3. – С. 3–37.
7. ПОЛЯК Б.Т., ХЛЕБНИКОВ М.В., ЩЕРБАКОВ П.С. *Нелинейные системы с ограниченными или мультипликативными возмущениями.* – [Электронный ресурс] – URL: http://premolab.ru/publication/14/ (дата обращения: 25.09.2015).
8. УСИК Е.В. *Синхронизация нелинейных систем Лурье на основе пассификации и бэкстеппинга* // Автоматика и телемеханика. – 2012. – №8. – С. 35–38.
9. ФРАДКОВ А.Л. *Синтез адаптивной системы стабилизации линейного динамического объекта* // Автоматика и телемеханика. – 1974. – №12. – С. 96—103.
10. ФРАДКОВ А.Л. *Квадратичные функции Ляпунова в задаче адаптивной стабилизации линейного динамического объекта* // Сиб. мат. журн. – 1976. – №2. – С. 436—446.
11. ХЛЕБНИКОВ М.В., ПОЛЯК Б.Т., КУНЦЕВИЧ В.М. *Оптимизация линейных систем при ограниченных внешних возмущениях* (*техника инвариантных эллипсоидов*) // Автоматика и телемеханика. – 2011. – №11 – С. 9–59.
12. ХЛЕБНИКОВ М.В. *Время установления в линейной динамической системе с ограниченными внешними возмущениями* // Автоматика и телемеханика. – 2012. –№6. – С. 3–17.
13. ЯКУБОВИЧ В.А. *Метод матричных неравенств в теории устойчивости нелинейных регулируемых систем. I. Абсолютная устойчивость вынужденных колебаний* // Автоматика и телемеханика. – 1964. – №7. – С. 1017–1029.
14. BYRNES C.I., ISIDORI A., WILLEMS J.C. *Passivity, feedback equivalence, and the global stabilization of minimum phase nonlinear systems* // IEEE Trans. Automat. Control. – 1991. – Vol. AC–36. – №11. – P. 1228—1240.

15. FRADKOV A.L. *Passification of Non-square Linear Systems and Feedback Yakubovich-Kalman-Popov Lemma* // Eur. J. Control. – 2003. – Vol. 9, №11. – P. 573–582.
16. GUSEV S.V., PAROMTCHIK I.E., MAKAROV I.A. ET AL. *Adaptive motion control of nonholonomic vehicle* // Proc. IEEE Int. Conf. Robot. Automat. – Vol. 4. – Belgium, 1998. – P. 3285–3290.
17. KOKOTOVIC P., ARCAK M. *Constructive nonlinear control: a historical perspective* // Automatica. – 2001. – Vol. 37, №5. – P. 637–662.
18. KRSTIC M., KANELLAKOPOULAS I., KOKOTOVIC P. *Nonlinear and adaptive control design.* – New York, Wiley, 1995. – 576 p.
19. LATOMBE J.C. *Robot Motion Planning.* – Kluwer Academic Publishers, Boston, 1991. – 651 p.
20. NIKIFOROV V.O., VORONOV K.V. *Nonlinear Adaptive Controller with Integral Action* // IEEE Trans. Automat. Control. – 2001. – Vol. 46, №12. – P. 2035–2037.
21. POLYAK B.T. *Convexity of quadratic transformations and its use in control and optimization* // J. Optim. Theory and Appl. – 1998. – Vol. 99. – P. 553–583.
22. PYRKIN A., BOBTSOV A., KOLYUBIN S. ET AL. *Output Control Approach "Consecutive Compensator"Providing Exponential and L-infinity-stability for Nonlinear Systems with Delay and Disturbance* // IEEE Multi-Conf. Syst. Control. – 2011. – Denver, USA. – P. 1499–1504.
23. SERON M.M., HILL D.J., FRADKOV A.L. *Adaptive passification of nonlinear systems* // Proc. 33rd IEEE Conf. Decision Control, Orlando, FL, December 1994. – P. 190—195.
24. SERON M.M., HILL D.J., FRADKOV A.L. *Nonlinear adaptive control of feedback passive systems* // Automatica. – Vol. 31, №7. – P. 1053—1060.

OPTIMIZATION OF NONLINEAR CASCADE SYSTEMS IN LURIE FORM WITH BOUNDED EXTERNAL DISTURBANCES

Egor Usik, Saint-Petersburg State University, Saint-Petersburg, student (egor.usik@yandex.ru).

Abstract: We consider nonlinear cascade systems in Lurie form with bounded disturbances and solve the optimal control problem using the method of invariant ellipsoids. The obtained result is compared with the previously obtained classic result based on Lyapunov function.

Keywords: passification, backstepping, LMI, method of invariant ellipsoids.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии П.В. Пакшиным

Поступила в редакцию 13.06.2015.
Дата опубликования 30.09.2015.