

**Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН**

УПРАВЛЕНИЕ БОЛЬШИМИ СИСТЕМАМИ

Выпуск 57
Сентябрь 2015

**СБОРНИК
ТРУДОВ**

ISSN 1819-2467

Регистрационный номер Эл. №ФС77-44158 от 09 марта 2011 г.

Москва – 2015

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова

**УПРАВЛЕНИЕ
БОЛЬШИМИ
СИСТЕМАМИ**

СБОРНИК ТРУДОВ

Выпуск 57

Москва – 2015

КООРДИНАЦИОННЫЙ СОВЕТ

Академики РАН: Васильев С.Н., Емельянов С.В., Куржанский А.Б., Федосов Е.А., Черноусько Ф.Л.; члены-корреспонденты РАН: Желтов С.Ю., Каляев И.А., Пархоменко П.П., Попков Ю.С.; д-ра техн. наук: Дорофеев А.А., Кузнецов О.П., Кульба В.В., Лотоцкий В.А., Павлов Б.В., Поляк Б.Т., Рутковский В.Ю.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор: член-корр. РАН Новиков Д.А. **Зам. главного редактора:** д-р физ.-мат. наук Губко М.В.; **Отв. секретарь:** канд. техн. наук Базенков Н.И.; **Редактор:** канд. техн. наук Квинто Я.И. **Техн. редактор:** канд. техн. наук Куливец С.Г.

Д-ра техн. наук: проф. Алескеров Ф.Т. (ГУ ВШЭ), проф. Алчинов А.И. (ИПУ РАН), проф. Андриевский Б.Р. (ИПМ РАН), проф. Афанасьев В.Н. (МИЭМ), проф. Бахтадзе Н.Н. (ИПУ РАН), проф. Бурков В.Н. (ИПУ РАН), проф. Вишневский В.М. (ИПУ РАН), Галаев А.А. (ИПУ РАН), д-р физ.-мат. наук проф. Ерешко Ф.И. (ВЦ РАН), д-ра техн. наук Зоркальцев В.И. (ИСЭМ СО РАН), проф. Калашников А.О. (ИПУ РАН), проф. Калянов Г.Н. (ГУ ВШЭ), проф. Каравай М.Ф. (ИПУ РАН), д-р экон. наук, проф. Ключков В.В. (ИПУ РАН), д-ра техн. наук, Коргин Н.А. (ИПУ РАН), проф. Курдюков А.П. (ИПУ РАН), д-ра физ.-мат. наук, проф. Кушнер А.Г., проф. Лазарев А.А. (МФТИ), д-ра техн. наук: проф. Лебедев В.Г. (ИПУ РАН), проф. Мандель А.С. (ИПУ РАН), д-р биол. наук проф. Михальский А.И., д-р физ.-мат. наук, проф. Непейвода Н.Н. (ИПС РАН), д-р экон. наук, проф. Нижегородцев Р.М. (ИПУ РАН), д-ра техн. наук: проф. Орлов А.И. (МГТУ), д-ра физ.-мат. наук: проф. Рапопорт Л.Б. (ИПУ РАН), проф. Райгородский А.М. (МГУ), проф. Савватеев А.В. (РЭШ), д-ра техн. наук: проф. Самуйлов К.Е. (РУДН), проф. Сидельников Ю.В. (МАИ), Совлуков А.С. (ИПУ РАН) д-ра физ.-мат. наук: проф. Соловьев С.Ю. (МГУ), проф. Угольницкий Г.А. (ЮФУ), проф. Уткин В.А. (ИПУ РАН), проф. Хоботов Е.Н. (МГТУ), д-ра физ.-мат. наук: доцент Чеботарев П.Ю. (ИПУ РАН), проф. Чхартишвили А.Г. (ИПУ РАН), проф. Щербаков П.С. (ИПУ РАН).

РЕГИОНАЛЬНЫЕ РЕДАКЦИОННЫЕ СОВЕТЫ

Арзамас – д-р физ.-мат. наук проф. Пакшин П.В. **Волгоград** – д-ра физ.-мат. наук: проф. Воронин А.А., проф. Лосев А.Г. (ВолГУ); **Воронеж** – д-р техн. наук, проф. Баркалов С.А., д-р физ.-мат. наук, проф. Головинский П.А. (ВГАСУ), д-р техн. наук, проф. Подвальный С.Л. (ВГТУ); **Иркутск** – академик РАН Бычков И.В., д-р физ.-мат. наук, проф. Лакеев А.В. (ИДСТУ СО РАН); **Казань** – д-р физ.-мат. наук, проф. Маликов А.И., д-р техн. наук, проф. Сиразетдинов Р.Т. (КГТУ-КАИ); **Липецк** – д-ра техн. наук: проф. Погодаев А.К., Сараев П.В. (ЛГТУ); **Самара** – д-ра экон. наук: проф. Богатырев В.Д., проф. Гераськин М.И., д-р техн. наук, проф. Засканов В.Г. (СГАУ); **Петрозаводск** – д-р физ.-мат. наук, проф. Мазалов В.В., д-р техн. наук, доц. Печников А.А. (ИПМИ КарНЦ РАН); **Санкт-Петербург** – д-р физ.-мат. наук: проф. Петросян Л.А. (СПбГУ), д-р техн. наук проф. Фуртат И.Б. (ИПМ РАН); **Старый Оскол** – д-р техн. наук, проф. Еременко Ю.И. (СТИ).

Адрес редакции: 117997, г. Москва, ул. Профсоюзная, д. 65.

Адрес в Интернет: ubs.mtas.ru.

СОДЕРЖАНИЕ

Системный анализ

Каштанов В. А., Кондрашова Е. В.

Исследование полумарковских систем массового обслуживания при управляемом входящем потоке BSMAP-поток 6

Математическая теория управления

Усик Е. В.

Оптимизация нелинейных каскадных систем в форме Лурье при ограниченных внешних возмущениях 37

Информационные технологии в управлении

Стецюра Г. Г.

Быстрые способы выполнения параллельных алгоритмов в цифровых системах с динамически формируемой сетевой структурой связей..... 53

Управление в социально-экономических системах

Беленький А. С., Болкунов Д. С.

Теоретико-игровой подход к анализу перспектив развития системы электроснабжения региона 76

Лазарев А. А., Коренев П. С., Сологуб А. А.

Метрика для задачи минимизации суммарного запаздывания..... 123

Управление в медико-биологических и экологических системах

Иванов Р. В., Михальский А. И., Иванов В. К.,

Чекин С. Ю., Максютов М. А., Кашеев В. В.

Об идентификации параметров заболеваемости в модели с гетерогенностью: случай полной и неполной информации..... 138

Кушникова Е. В., Резчиков А. Ф., Иващенко В. А., Филimonюк Л. Ю.

Модели и алгоритмы минимизации ущерба от атмосферных выбросов промышленных предприятий 158

УДК 51-7, 519.2, 519.8
ББК 22.171

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОЛУМАРКОВСКИХ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ ПРИ УПРАВЛЯЕМОМ ВХОДЯЩЕМ ПОТОКЕ. BSMAP-ПОТОК

Каштанов В. А.¹, Кондрашова Е. В.²

*(Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»,
МИЭМ НИУ ВШЭ, Москва)*

Проводится исследование системы массового обслуживания с управляемым полумарковским групповым входным потоком. CBSMAP-поток является обобщением VMAP-потока. Приводятся различные варианты построения пространства управлений. На траекториях управляемого полумарковского процесса проводится построение функционала доходов. Доказываются теоремы о структуре функционала удельного накопленного дохода для нововведенной исследуемой системы массового обслуживания.

Ключевые слова: теория массового обслуживания, управляемый полумарковский процесс, управляемый входящий поток, функционал доходов, задача оптимизации.

1. Введение

При исследовании систем массового обслуживания, описывающих процессы функционирования реальных технических, информационных, экономических систем и телекоммуникаци-

¹ Виктор Алексеевич Каштанов, доктор физико-математических наук, профессор.

² Елизавета Владимировна Кондрашова, кандидат физико-математических наук, ассистент (elizavetakondr@gmail.com).

онных сетей, характерными являются постановки оптимизационных задач.

Каждая система массового обслуживания включает в свою структуру некоторое число обслуживаемых устройств, которые называют каналами обслуживания. Роль каналов могут играть различные приборы, лица, выполняющие те или иные операции, ремонтные бригады, линии связи и т.д. Также каждая система характеризуется следующими особенностями: потоком требований, дисциплиной и функцией распределения длительности обслуживания, очередью. Вышеуказанные элементы будем называть характеристиками системы.

Отметим, что под оптимизацией понимается обеспечение высокой эффективности функционирования системы. Часто повышение эффективности необходимо провести при ограниченных ресурсах системы. Для достижения этой цели ставятся задачи теории массового обслуживания, состоящие в установлении зависимостей эффективности функционирования системы от её структуры и исходных характеристик.

В классической теории массового обслуживания не предполагается вмешательства в процесс работы системы. То есть можно сказать, что система рассматривается без управляющих воздействий извне.

Однако в реальной жизни часто возникает необходимость управления системой в процессе работы. Системы, в которых какие-либо из элементов допускают управление, будем относить к управляемым системам массового обслуживания. Методы теории управляемых систем массового обслуживания применяются для оптимального управления очередью, обслуживающими приборами, длительностью обслуживания, входным потоком требований, т.е. управления характеристиками системы.

Большой вклад в развитие теории, методов анализа и оптимального управления систем внесли Р. Ховард, Х. Майн, С. Осаки, В. Джевелл, Г.И. Ивченко, В.А. Каштанов, И.Н. Коваленко и др.

Управление характеристиками системы является рациональным методом увеличения эффективности её функционирования, а также получения максимального дохода. Несмотря на

то, что в последнее время появляются работы, связанные с применением управления в различных видах систем массового обслуживания, до сих пор не уделяется должного внимания управлению одновременно несколькими характеристиками системы. Однако задачи по управлению одновременно несколькими характеристиками системы являются особенно интересными [6, 7, 11, 12]. Также представляет интерес разработка новых моделей теории массового обслуживания.

2. Вводные замечания, обозначения и постановка задачи

2.1. CBSMAP-ПОТОК

Поток CBSMAP, управляемый цепью Маркова, является обобщением ранее введённого Д. Лукантони ВМАР-потока [16, 17]. Данный поток – Batch Markov Arrival Process – марковский групповой входной поток, который характеризуется следующим образом.

Поступление заявок может происходить только в моменты изменения состояний некоторого марковского процесса с непрерывным временем и множеством состояний $\{0, 1, \dots, W\}$. Заявки могут поступать группами различного размера. Время пребывания процесса в состоянии i имеет экспоненциальное распределение с параметром λ_i , где $i = 0, 1, \dots, W$. Процесс переходит из состояния i в состояние j с вероятностью $p_k(i, j)$, и генерируется группа из k требований ВМАР-потока. Предполагается, что переход из состояния i в то же самое состояние при генерации требований невозможен. Также предполагается, что вероятности удовлетворяют условию нормировки:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^W p_k(i, j) = 1 \quad \text{для } i = 0, 1, \dots, W.$$

Поступление заявок в систему может происходить только в моменты изменения состояний некоторого марковского процесса с непрерывным временем и конечным множеством состояний. Заявки могут поступать группами различного размера.

ВМАР-потоки хорошо описывают входящие потоки данных в телекоммуникационных сетях, когда требования в систему поступают группами различного размера [10, 14, 18].

Остановимся подробнее на новом, введенном нами входном потоке BSMAP. Введенное обозначение расшифровывается следующим образом: Batch Semi-Markov Arrival Process, что означает «полумарковский групповой входной поток». Данный процесс является обобщением процесса ВМАР – Batch Markov Arrival Process, марковского группового входного потока. Поступление заявок может происходить только в моменты изменения состояний некоторого полумарковского процесса с непрерывным временем и конечным множеством состояний. Данный поток также называем потоком, управляемым цепью Маркова [4, 11].

Отметим, что исследуются системы массового обслуживания с вышеизложенным входным потоком, в которых проводится управление потоком заявок.

2.2. ВВОДНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Управляемый входящий поток определяется управляемым полумарковским процессом $X(t) = \{\xi(t), u(t)\}$ (УПМП), у которого первая компонента принимает значения из конечного множества, $\xi(t) \in E = \{1, 2, \dots, N\}$. Для данного входящего потока было также введено обозначение CBSMAP-поток. В дальнейшем будем придерживаться стандартных обозначений, используемых в настоящей работе и введенных ранее в отечественной литературе [3, 8]:

- $Q_{ij}(t, u) = p_{ij}(u) F_{ij}(t, u)$ – полумарковское ядро однородного УПМП, определяемое как вероятность того, что следующим состоянием УПМП будет состояние j и переход этот совершится до момента t при условии, что в нулевой момент времени процесс принимал значение i и было принято решение $u \in U_i$;

- $\vec{G} = (G_1(u), G_2(u), \dots, G_N(u))$ – рандомизированная стратегия управления, т.е. набор вероятностных мер $G_i(u)$, определенных на σ -алгебре подмножеств множества U_i ;

• $R_{ij}(t, u)$ – математическое ожидание накопленного эффекта при условии, что УППП пребывал в состоянии i , за время t он перешел в состояние j и было принято решение $u \in U_i$.

Далее будем считать, что в момент перехода УППП $\xi(t)$ в состояние k в систему массового обслуживания поступает конечная группа требований k -го типа, число требований в группе v_k определяется производящей функцией

$$(1) \quad \Phi_k(z) = \sum_{m=0}^{M_k} z^m p^{(k)}(m)$$

или вероятностями $p^{(k)}(m)$ того, что в группе поступит m заявок k -го типа, M_k – максимальное число заявок в группе k -го типа.

Далее сформулируем важные предположения, при которых будут проводиться дальнейшие исследования.

1. Требования одного типа поступают в свою систему (подсистему) массового обслуживания, каждая из которых работает независимо от других подсистем. Подсистему массового обслуживания, осуществляющую обслуживание требований k -го типа будем обозначать СМО(k), $k \in E = (1, 2, \dots, N)$, (индекс k будет присвоен всем характеристикам этой подсистемы).

Здесь следует заметить, что процесс обслуживания в каждой системе реализуется независимо от состояний других систем, однако функционирование систем увязано в единое целое общим входным потоком.

2. Во временном интервале между соседними моментами изменения состояний УППП в систему массового обслуживания заявки не поступают (ни в одну из подсистем), поэтому осуществляется только процесс обслуживания заявок, если таковые в подсистемах есть. Процесс обслуживания в k -й подсистеме характеризуется числом $v^{(k)}(t)$ заявок, находящихся в подсистеме в момент t . Предполагается, что $v^{(k)}(t)$ есть однородный марковский процесс гибели с поглощающим экраном в нуле и интенсивностями перехода, зависящими от состояния, $v^{(k)}(t) \in E = (0, 1, 2, \dots)$.

Обозначим через $p_{ms}^{(k)}(t)$

$$(2) \quad P\{v^{(k)}(t) = s / v^{(k)}(0) = m\} = \begin{cases} p_{ms}^{(k)}(t) \geq 0, & m \geq s \geq 0; \\ p_{ms}^{(k)}(t) = 0, & m < s. \end{cases}$$

– вероятность того, что в k -й подсистеме за время t (между марковскими моментами) будет обслужено $(m - s)$ заявок при условии, что в начальный момент в СМО было m требований.

Приведем здесь явные выражения вероятностей (2) некоторых систем массового обслуживания (СМО).

Если СМО(k) – система без ожидания, т.е. число мест для ожидания $N_k = 0$, то

$$(3) \quad p_{ms}^{(k)}(t) = C_m^s (1 - e^{-\mu_k t})^{(m-s)} e^{-s\mu_k t}, \quad n_k \geq m \geq s \geq 0,$$

где n_k – число каналов, μ_k – параметр экспоненциального распределения длительности обслуживания. Для остальных сочетаний параметров n_k, m, s искомые вероятности равны нулю.

Если СМО(k) – система одноканальная с ожиданием, $n_k = 1, N_k > 0$, то

$$(4) \quad p_{ms}^{(k)}(t) = \frac{(\mu_k t)^{m-s}}{(m-s)!} e^{-\mu_k t}, \quad N_k + 1 \geq m \geq s > 0,$$

$$p_{m0}^{(k)}(t) = 1 - \sum_{l=1}^m p_{ml}^{(k)}(t) = 1 - e^{-\mu_k t} \sum_{l=0}^{m-1} \frac{(\mu_k t)^l}{l!}, \quad N_k + 1 \geq m \geq s = 0.$$

Для остальных сочетаний параметров N_k, m, s искомые вероятности равны нулю.

Общий случай, если СМО(k) – система многоканальная с ожиданием, $n_k \geq 1, N_k \geq 0$, то

$$(5) \quad p_{ms}^{(k)}(t) = \begin{cases} C_m^s (1 - e^{-\mu_k t})^{(m-s)} e^{-s\mu_k t}, & n_k \geq m \geq s \geq 0, \\ \frac{(n_k \mu_k t)^{m-s}}{(m-s)!} e^{-n_k \mu_k t}, & m \geq s \geq n_k, \\ \int_0^t C_{n_k}^s (1 - e^{-\mu_k(t-x)})^{(n_k-s)} e^{-s\mu_k x} n_k \mu_k \frac{(n_k \mu_k x)^{m-n_k-1}}{(m-n_k-1)!} e^{-n_k \mu_k x} dx, & \\ m > n_k > s \geq 0. \end{cases}$$

Для остальных сочетаний параметров n_k, N_k, m, s искомые вероятности равны нулю.

3. Необходимо четко сформулировать правила приема группы заявок в систему. Естественно считать, что если есть

свободные места для приема всей группы, то вся группа заявок поступает в СМО. В ситуации, когда свободных мест на все поступившие требования не хватает, не все заявки принимаются на обслуживание.

В рассматриваемом случае возможны следующие варианты:

- принимается столько заявок, сколько есть свободных мест;
- если есть хотя бы одно свободное место, то принимается вся группа заявок (на дополнительные места);
- если не хватает хотя бы одного места для всех требований в группе, то вся группа теряется.

Рассмотрение этих вариантов приводит к необходимости вводить распределения числа заявок, принятых в СМО. Эти вероятности зависят от числа свободных мест и распределения числа пришедших заявок (1). Обозначим через $\tilde{p}_m^{(k)}(s)$ вероятность того, что в СМО будет принято на обслуживание s требований при условии, что в системе m свободных мест.

Если принимаются заявки только на свободные места, то при $m \geq 0$

$$(6) \quad \tilde{p}_m^{(k)}(s) = P\{\min(m, v_k) = s\} = \begin{cases} p^{(k)}(s), & s = 1, 2, \dots, m-1, \quad m > 0; \\ \sum_{l=m}^{\infty} p^{(k)}(l), & s = m > 0; \\ 1, & s = m = 0. \end{cases}$$

Если принимается вся группа заявок при наличии хотя бы одного свободного места, то

$$(7) \quad \tilde{p}_m^{(k)}(s) = \begin{cases} p^{(k)}(s), & s > 0, \quad m > 0; \\ 1, & s = m = 0. \end{cases}$$

Если не хватает хотя бы одного места для всех требований в группе, то вся группа теряется. В этом случае

$$(8) \quad \tilde{p}_m^{(k)}(s) = \begin{cases} p^{(k)}(s), & 0 < s \leq m; \\ \sum_{l=m+1}^{\infty} p^{(k)}(l), & s = 0, \quad m > 0; \\ 1, & s = m = 0. \end{cases}$$

Далее вычислим $q_{mn}^{(k)}(s)$ – условное распределение числа принятых заявок (вероятность принять s заявок) при условии, что поступило n заявок и было m свободных мест.

Если принимаются заявки только на свободные места, то при $m \geq 0$

$$(9) \quad q_{mn}^{(k)}(s) = \begin{cases} 1, & s = n, \quad m \geq n; \\ 0, & s \neq n, \quad m \geq n; \\ 1, & s = m, \quad 1 \leq m < n; \\ 0, & s \neq m, \quad 1 \leq m < n; \\ 1, & s = m = 0; \\ 0, & s > m = 0. \end{cases}$$

Если принимается вся группа заявок при наличии хотя бы одного свободного места, то

$$(10) \quad q_{mn}^{(k)}(s) = \begin{cases} 1, & s = n, \quad m \geq 1; \\ 0, & s \neq n, \quad m \geq 1; \\ 1, & s = m = 0; \\ 0, & s > m = 0. \end{cases}$$

Если не хватает хотя бы одного места для всех требований в группе, то вся группа теряется. В этом случае

$$(11) \quad q_{mn}^{(k)}(s) = \begin{cases} 1, & s = 0, \quad 0 \leq m < n; \\ 0, & s \neq 0, \quad 0 \leq m < n; \\ 1, & s = n, \quad m \geq n; \\ 0, & s \neq n, \quad m \geq n. \end{cases}$$

При определенных выше предположениях необходимо:

- исследовать структуру функционала накопления (удельного дохода) в зависимости от стратегии управления входящим потоком;
- построить оптимальную стратегию управления, обеспечивающую максимальный удельный доход;
- исследовать распределение числа заявок в подсистемах, распределение числа обслуживаемых заявок, распределение

длины очереди, математическое ожидание числа обслуженных и потерянных требований за единицу времени.

3. Алгоритм исследования системы с CBSMAP-входным потоком

Рассмотрим систему в целом. Данная система состоит из N подсистем.

Подсистема k -го типа, $k = 1, 2, \dots, N$, в обозначениях символики Кендалла [13] может быть описана следующим образом: $CBSMAP/M_k/n_k/N_k$, где

- символ $CBSMAP$ означает, что входной поток определяется как управляемый входной поток, описанный ранее;
- символ M_k означает, что длительности обслуживания требования в подсистеме имеют экспоненциальное распределение с параметром μ_k ;
- символы n_k и N_k определяют количество каналов обслуживания и число мест для ожидания n_k и N_k соответственно.

В классификации систем массового обслуживания эта система может рассматриваться как управляемая полумарковская система массового обслуживания, так как её эволюция определяется управляемым полумарковским процессом [5, 8, 9].

При исследовании полумарковских управляемых систем массового обслуживания и построении управляемого полумарковского процесса, описывающего эволюцию этой системы, необходимо реализовать следующий алгоритм:

- определить марковские моменты,
- определить состояния полумарковского процесса;
- определить пространство управлений и стратегии управления;
- определить полумарковское ядро и матрицу переходных вероятностей вложенной цепи Маркова;
- на траекториях управляемого полумарковского процесса построить функционал доходов;
- определить оптимальную стратегию управления.

Реализуем формулированный выше алгоритм.

3.1. МАРКОВСКИЕ МОМЕНТЫ

В рассматриваемом случае марковскими моментами являются моменты поступления требований любого типа в систему. В случае поступления заявок k -го типа данные заявки отправляются на обслуживание в подсистему k -го типа, а в остальные подсистемы «поступает» группа из нулевого количества заявок.

3.2. СОСТОЯНИЯ ПРОЦЕССА

Состояния системы массового обслуживания (состояния управляемого полумарковского процесса $\xi(t)$) определяются вектором $(i, l_1, l_2, \dots, l_N)$, где i – состояние входного потока (в марковский момент поступает группа требований i -го типа), l_k – количество требований в подсистеме k -го типа,

$$M_k + N_k + n_k > l_k \geq 0, \quad k \neq i, \quad M_i + N_i + n_i > l_i > 0,$$

n_k и N_k – соответственно количество каналов обслуживания и количество мест для ожидания в СМО(k), $i \in E = \{1, 2, \dots, N\}$. Количество требований в подсистеме конечно и зависит от дисциплины принятий требований в систему и структуры системы массового обслуживания. Поэтому $l_k \in E_k = \{1, 2, \dots, M_k + N_k + n_k - 1\}$. Таким образом $(i, l_1, l_2, \dots, l_N) \in E \times E_1 \times \dots \times E_N$.

В дальнейшем примем следующие обозначения:

- для вектора, определяющего число требований в подсистемах, введем обозначение $(l_1, l_2, \dots, l_N) = \vec{l}$;
- для пространства состояний дискретной компоненты введем обозначение $E \times E_1 \times \dots \times E_N = \vec{E}$.

В принятых обозначениях состояния полумарковского процесса можно обозначить через (i, \vec{l}) и записать $\xi(t) = (i, \vec{l}) \in \vec{E}$.

Переход из состояния $(i, l_1, l_2, \dots, l_N)$ в состояние с положительной вероятностью $(j, l'_1, l'_2, \dots, l'_j, \dots, l'_N)$, если $l'_k \leq l_k$, $k \neq j$, т.е. во всех подсистемах, кроме подсистемы j -го типа, происходит только обслуживание заявок, которое можно представить как процесс чистой гибели, соответственно количество заявок в этих подсистемах не превосходит количество заявок в подси-

стемах в предшествующий марковский момент поступления группы требований.

Отметим, что управление системы осуществляется за счёт управления входящим потоком в моменты изменения состояний полумарковского случайного процесса $\zeta(t)$, т.е. в марковские моменты.

3.3. ПОСТРОЕНИЕ ПРОСТРАНСТВА УПРАВЛЕНИЙ И СТРАТЕГИИ УПРАВЛЕНИЯ

Напомним, что марковская стратегия управления $\vec{G} = (G_{(i,\vec{l})}(u), (i,\vec{l}) \in \tilde{E})$, зависящая только от текущего состояния управляемого процесса, есть набор вероятностных мер, определенных для каждого состояния $(i,\vec{l}) \in \tilde{E}$ на σ -алгебре подмножеств множества решений $U_{(i,\vec{l})}$.

Как отмечалось выше, исследуется проблема управления входящим потоком, который задается как полумарковский процесс. Такой входящий поток определяется тремя факторами: какого типа поступит следующая группа, через какое время поступит эта группа и количество заявок в группе.

Следовательно, возможны следующие варианты построения пространства управлений:

1. В зависимости от состояния полумарковского процесса $(i,\vec{l}) \in \tilde{E}$ выбираем только тип требований. Тогда справедливо равенство $U_{(i,\vec{l})} = E = \{1,2,\dots,N\}$, а вероятностная мера на дискретном пространстве $E = \{1,2,\dots,N\}$ определяется набором вероятностей

$$(12) \quad \begin{aligned} G_{(i,\vec{l})}(j) &= P\{u(t) = j / \zeta(t) = (i,\vec{l})\} = p_{(i,\vec{l}),j}, \\ p_{(i,\vec{l}),j} &\geq 0, \quad \sum_{j \in E} p_{(i,\vec{l}),j} = 1, \quad E = \{1,2,\dots,N\}, \end{aligned}$$

где $u(t)$ – решение, принимаемое в марковский момент t ;

2. В зависимости от состояния полумарковского процесса $(i,\vec{l}) \in \tilde{E}$ выбираем тип требований и момент поступления заявок этого типа. Тогда справедливо равенство

$$U_{(i,\vec{l})} = E \times [0, \infty) = \{(j, u), j \in E = \{1, 2, \dots, N\}, u \in R^+ = [0, \infty)\},$$

т.е. пространство управлений состоит из конечного числа полупрямых. Вероятностную меру на этом пространстве можно задать набором вероятностей (12) и условными распределениями непрерывной компоненты. Если обозначить через θ случайный интервал времени, через которое в систему массового обслуживания поступает следующая группа требований, то можно условное распределение непрерывной компоненты определить равенством

$$F_{(i,\vec{l})}(j, u) = P\{\theta < u / \zeta(t) = (i, \vec{l}), u(t) = j\},$$

$$j \in E = \{1, 2, \dots, N\}, u \in R^+,$$

а стратегию определить равенствами

$$(13) \quad G_{(i,\vec{l})}(j, u) = P\{u(t) = j, \theta < u / \zeta(t) = (i, \vec{l})\} = p_{(i,\vec{l}),j} F_{(i,\vec{l}),j}(u),$$

$$j \in E = \{1, 2, \dots, N\}, u \in R^+.$$

3. В зависимости от состояния полумарковского процесса $(i, \vec{l}) \in \tilde{E}$ выбираем тип требований, момент поступления заявок этого типа и число заявок в группе. Тогда для пространства управлений справедливо равенство

$$U_{(i,\vec{l})} = E \times [0, \infty) \times \tilde{M}_k =$$

$$= \{(j, u, s), j \in E = \{1, 2, \dots, N\}, u \in R^+ = [0, \infty),$$

$$s \in \tilde{M}_k = \{1, \dots, M_k\},$$

т.е. пространство управлений состоит из конечного числа полупрямых. Вероятностную меру на этом пространстве можно задать набором вероятностей

$$(14) \quad P\{u(t) = (j, s) / \zeta(t) = (i, \vec{l})\} = p_{(i,\vec{l}), (j,s)} = p_{(i,\vec{l}),j} P^{(j)}(s),$$

$$P_{(i,\vec{l}), (j,s)} \geq 0, \quad \sum_{(j,s) \in E \times E_k} P_{(i,\vec{l}), (j,s)} = 1, \quad j \in E = \{1, 2, \dots, N\}, s \in \tilde{M}_k$$

и условными распределениями непрерывной компоненты. В принятых обозначениях можно условное распределение непрерывной компоненты определить равенством

$$F_{(i,\vec{l})}(j,u,n) = P\{\theta < u / \zeta(t) = (i,\vec{l}), u(t) = (j,n)\},$$

$$j \in E = \{1,2,\dots,N\}, u \in R^+, n \in \tilde{M}_k,$$

а стратегию определить равенствами

$$G_{(i,\vec{l})}(j,u,n) = P\{u(t) = (j,n), \theta < u / \zeta(t) = (i,\vec{l})\} =$$

$$(15) = p_{(i,\vec{l}),j} p^{(j)}(n) F_{(i,\vec{l})}(j,u,n),$$

$$j \in E = \{1,2,\dots,N\}, u \in R^+, n \in (1,\dots,M_j).$$

3.4. ПОСТРОЕНИЕ ПОЛУМАРКОВСКОГО ЯДРА И МАТРИЦЫ ПЕРЕХОДНЫХ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ВЛОЖЕННОЙ ЦЕПИ МАРКОВА

По определению полумарковское ядро есть вероятность того, что полумарковский процесс перейдет в состояние (j,\vec{l}) (в марковский момент поступила группа требований j -го типа и в подсистемах будет \vec{l} требований) и время этого перехода не превзойдет t , при условии, что процесс пребывает в состоянии (i,\vec{m}) и в этом состоянии принято решение $u \in U_{(i,\vec{m})}$ из множества управлений $U_{(i,\vec{m})}$.

Эту вероятность будем обозначать через $Q_{(i,\vec{m}), (j,\vec{l})}^{(k)}(t,u)$.

При $U_{(i,\vec{m})} = E = \{1,2,\dots,N\}$ выбираем только тип требований, которые поступят в СМО. Тогда получаем при

$$u \in U_{(i,\vec{m})} = E = \{1,2,\dots,N\}, k \in E = \{1,2,\dots,N\}, (i,\vec{m}), (j,\vec{l}) \in \tilde{E}, t \geq 0,$$

$$Q_{(i,\vec{m}), (j,\vec{l})}^{(k)}(t,u) =$$

$$(16) = \begin{cases} \int_0^t \sum_{s=0}^{m_j} p_{m_j,s}^{(j)}(x) \tilde{p}_{N_j+n_j-s}^{(j)}(l_j-s) \prod_{v \neq j} p_{m_v,l_v}^{(v)}(x) dF_{i,j}(x), & u = j; \\ 0, & u \neq j. \end{cases}$$

В равенстве (16) использованы обозначения:

- вероятность $p_{m_j,s}^{(j)}(x)$ определяется равенствами (3)–(5) в зависимости от структуры подсистем исследуемой СМО;

• вероятности $\tilde{p}_m^{(j)}(l)$ определяются равенствами (6)–(8) – вероятность принять m требований из группы j -го типа при наличии свободных мест в зависимости от правила приема заявок в систему;

• $F_{i,j}(x)$ – вероятность того, что следующая группа требований поступит в систему до момента x при условии, что это группа j -го типа, предыдущая группа i -го типа (заданная характеристика входного потока).

Интегрированием функции (16) по дискретной мере (12) получаем полумарковское ядро

$$(17) \quad \begin{aligned} Q_{(i,\bar{m}),(j,\bar{l})}^{(k)}(t) &= \int_{U_{(i,\bar{m})}} Q_{(i,\bar{m}),(j,\bar{l})}^{(k)}(t,u) G_{(i,\bar{m})}(du) = \\ &= P_{(i,\bar{m}),j} \int_0^t \sum_{s=0}^{m_j} p_{m_j,s}^{(j)}(x) \tilde{p}_{N_j+n_j-s}^{(j)}(l_j-s) \prod_{v \neq j} p_{m_v,l_v}^{(v)}(x) dF_{i,j}(x). \end{aligned}$$

Переходя к пределу при $t \rightarrow \infty$, получаем матрицу переходных вероятностей вложенной цепи Маркова:

(18)

$$\begin{aligned} P_{(i,\bar{m}),(j,\bar{l})}^{(k)} &= \lim_{t \rightarrow \infty} Q_{(i,\bar{m}),(j,\bar{l})}^{(k)}(t) = \\ &= \int_{U_{(i,\bar{m})}} Q_{(i,\bar{m}),(j,\bar{l})}^{(k)}(\infty,u) G_{(i,\bar{m})}(du) = \\ &= P_{(i,\bar{m}),j} \int_0^{\infty} \sum_{s=0}^{m_j} p_{m_j,s}^{(j)}(x) \tilde{p}_{N_j+n_j-s}^{(j)}(l_j-s) \prod_{v \neq j} p_{m_v,l_v}^{(v)}(x) dF_{i,j}(x). \end{aligned}$$

Полученные выражения для матриц переходных вероятностей (18) позволяют сделать два вывода:

- элементы этих матриц не зависят от номера подсистемы;
- элементы строки этих матриц, соответствующей состоянию (i, \bar{m}) , являются линейными функционалами только относительно вероятностной меры $G_{(i,\bar{m})}(u)$.

Следовательно [2], стационарные вероятности

$$\pi_{(i,\bar{m})}^{(k)} = \pi_{(i,\bar{m})}, \quad (i, \bar{m}) \in \tilde{E}$$

вложенной цепи Маркова не зависят от номера подсистемы k и, как решение нормированной системы алгебраических уравнений с матрицей переходных вероятностей, у которой элементы являются линейными функционалами, относительно вероятностных мер, определяющих марковскую однородную рандомизированную стратегию, представляются отношением двух определителей

$$(19) \pi_{(i,\vec{m})} = \frac{\Delta_{(i,\vec{m})}}{\Delta}, \quad (i, \vec{m}) \in \tilde{E},$$

причем определитель Δ есть линейный функционал относительно всех мер

$$G_{(j,\vec{l})}(u), \quad (j, \vec{l}) \in \tilde{E},$$

а определитель $\Delta_{(i,\vec{m})}$ есть линейный функционал относительно мер

$$G_{(j,\vec{l})}(u), \quad (j, \vec{l}) \in \tilde{E} \setminus \{(i, \vec{m})\},$$

т.е. от всех мер кроме меры $G_{(j,\vec{m})}(u)$.

3.5. ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛА ДОХОДОВ НА ТРАЕКТОРИЯХ УПРАВЛЯЕМОГО ПОЛУМАРКОВСКОГО ПРОЦЕССА

Для решения этого вопроса необходимо определить функции $R_{(i,\vec{m})(j,\vec{l})}^{(k)}(x, u)$ – условное математическое ожидание накопленного дохода в $СМО(k)$ при условии, что процесс пребывает в состоянии (i, \vec{m}) , через время t перейдет в состояние (j, \vec{l}) и принято решение u .

Условное математическое ожидание накопленного дохода $R_{(i,\vec{m})(j,\vec{l})}^{(k)}(x, u)$ зависит от доходов и расходов, получаемых при работе системы. Введём константы, характеризующие эти доходы и расходы:

- $c_1^{(k)}$ – доход, получаемый за обслуживание одного требования;

- $c_2^{(k)}$ – плата за единицу времени работы одного прибора во время обслуживания;
- $c_3^{(k)}$ – плата за единицу времени простоя одного прибора;
- $c_4^{(k)}$ – плата за единицу времени пребывания одного требования в очереди;
- $c_5^{(k)}$ – плата за одно потерянное требование k -го типа.

Тогда для искомых условных математических ожиданий

$R_{(i,\bar{m})(j,\bar{l})}^{(k)}(x,u)$ можно записать

$$R_{(i,\bar{m})(j,\bar{l})}^{(k)}(x,u) = c_1^{(k)} C_1(x, m_k, l_k, u) + \sum_{s=2}^4 C_s(x, n_k, m_k, l_k, u) + c_5^{(k)} C_5(x, m_k, l_k, u),$$

где

$$C_1(x, m_k, l_k, u) = M(\zeta_k / \nu^{(k)}(0) = m_k, \xi^{(k)}(x) = l_k, u(0) = u)$$

– условное математическое ожидание числа обслуженных требований за время x при условии, что в марковский момент в $СМО(k)$ было m_k требований, а в следующем марковский момент x стало l_k требований и принято решение u ,

$$\xi^{(k)}(0) = \nu^{(k)}(0) = m_k, \xi^{(k)}(x) = l_k, u(0) = u;$$

$$C_5(x, m_k, l_k, u) = M(\eta / \xi^{(k)}(0) = \nu^{(k)}(0) = m_k, \xi^{(k)}(x) = l_k, u(0) = u)$$

– условное математическое ожидание числа потерянных требований за время x при условии, что в марковский момент в $СМО(k)$ было m_k требований, а в следующий марковский момент x стало l_k требований и принято решение u ,

$$\xi^{(k)}(0) = \nu^{(k)}(0) = m_k, \xi^{(k)}(x) = l_k, u(0) = u;$$

$$C_2(x, n_k, m_k, l_k, u) =$$

$$= c_2^{(k)} M[\int_0^x \min(n_k, \nu^{(k)}(t)) dt / \nu^{(k)}(0) = m_k, \xi^{(k)}(x) = l_k, u(0) = u],$$

$$C_3(x, n_k, m_k, l_k, u) =$$

$$= c_3^{(k)} M[\int_0^x (n_k - \min(n_k, \nu^{(k)}(t))) dt / \nu^{(k)}(0) = m_k, \xi^{(k)}(x) = l_k, u(0) = u],$$

$$C_4(x, n_k, m_k, l_k, u) = \\ = c_4^{(k)} M \left[\int_0^x \max(0, v^{(k)}(t) - n_k) dt / v^{(k)}(0) = m_k, \zeta^{(k)}(x) = l_k, u(0) = u \right]$$

– соответственно затраты (плата) за работу приборов, за простой приборов и за пребывание заявок в очереди на конечном периоде времени $(0, t)$. Заметим, что в последних соотношениях обозначено: $\zeta^{(k)}(x)$ – число требований в марковский момент x , $v^{(k)}(t)$ – марковский процесс гибели на периоде $t \in (0, x)$.

Математическое ожидание накопленного дохода в подсистеме k за время $t > 0$ при условии, что процесс стартует из состояния (j, \vec{l}) , обозначим $S_{(j, \vec{l})}^{(k)}(t)$.

Для функционала

$$S^{(k)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{S_{(j, \vec{l})}^{(k)}(t)}{t}$$

справедливо равенство [1]

$$(20) \quad S^{(k)} = \frac{\sum_{(i, \vec{l}) \in \tilde{E}} S_{(i, \vec{l})}^{(k)} \pi_{(i, \vec{l})}^{(k)}}{\sum_{(i, \vec{l}) \in \tilde{E}} m_{(i, \vec{l})}^{(k)} \pi_{(i, \vec{l})}^{(k)}},$$

где

$$(21) \quad m_{(i, \vec{m})}^{(k)} = \int_0^{\infty} \left[1 - \sum_{(j, \vec{l}) \in \tilde{E}} Q_{(i, \vec{m})(j, \vec{l})}^{(k)}(t) \right] dt$$

– математическое ожидание времени непрерывного пребывания процесса $\xi(t)$ в состоянии (i, \vec{m}) ;

$$(22) \quad s_{(i, \vec{m})}^{(k)} = \int_{u \in U_{(i, \vec{m})}} \sum_{(j, \vec{l}) \in \tilde{E}} \left[\int_0^{\infty} R_{(i, \vec{m})(j, \vec{l})}^{(k)}(x, u) dQ_{(i, \vec{m})(j, \vec{l})}^{(k)}(x, u) \right] G_{(i, \vec{m})}(du)$$

– математическое ожидание накопленного дохода при работе СМО(k) за время непрерывного пребывания процесса $\xi(t)$ в состоянии (i, \vec{m}) .

ТЕОРЕМА 2.1. Функционал удельного накопленного дохода (20) для СМО(k) является дробно-линейным функционалом относительно распределений $\vec{G} = \{G_{(i, \vec{m})}(u), (i, \vec{m}) \in \tilde{E}\}$, опреде-

ляющих марковскую однородную рандомизированную стратегию.

Доказательство. Выше отмечалось, что полумарковское ядро $Q_{(i,\vec{m})(j,\vec{l})}^{(k)}(t)$ есть линейный функционал относительно меры $G_{(i,\vec{m})}(u)$, $(i,\vec{m}) \in \tilde{E}$, равенства (17). Следовательно, линейным функционалом относительно этой меры является математическое ожидание $m_{(i,\vec{m})}^{(k)}$, определяемое равенством (21).

Равенство (22) определяет математическое ожидание дохода $s_{(i,\vec{m})}^{(k)}$ как линейный функционал относительно меры $G_{(i,\vec{m})}(u)$, $(i,\vec{m}) \in \tilde{E}$. Наконец, ранее было доказано, что определитель $\Delta_{(i,\vec{m})}$ есть линейный функционал относительно мер $G_{(j,\vec{l})}(u)$, $(i,\vec{l}) \in \tilde{E} \setminus \{(i,\vec{m})\}$, т.е. от всех мер, кроме меры $G_{(j,\vec{m})}(u)$. Кроме этого, этот определитель не зависит от номера подсистемы k . Объединяя эти утверждения, получаем, что функционал

$$(23) \quad S^{(k)} = \frac{\sum_{(i,\vec{l}) \in \tilde{E}} s_{(i,\vec{l})}^{(k)} \pi_{(i,\vec{l})}^{(k)}}{\sum_{(i,\vec{l}) \in \tilde{E}} m_{(i,\vec{l})}^{(k)} \pi_{(i,\vec{l})}^{(k)}} = \frac{\sum_{(i,\vec{l}) \in \tilde{E}} s_{(i,\vec{l})}^{(k)} \Delta_{(i,\vec{l})}}{\sum_{(i,\vec{l}) \in \tilde{E}} m_{(i,\vec{l})}^{(k)} \Delta_{(i,\vec{l})}}$$

есть дробно-линейный функционал относительно вероятностных мер $\vec{G} = \{G_{(i,\vec{m})}(u), (i,\vec{m}) \in \tilde{E}\}$. Тем самым утверждение теоремы доказано.

Далее исследуем функционал дохода для СМО в целом. Если обозначить его через S , то $S = \sum_{k=1}^N S^{(k)}$. Тогда справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2.2. Функционал удельного накопленного дохода $S = \sum_{k=1}^N S^{(k)}$ для СМО в целом является дробно-линейным функционалом относительно распределений $\vec{G} = \{G_{(i,\vec{m})}(u), (i,\vec{m}) \in \tilde{E}\}$, определяющих марковскую однородную рандомизированную стратегию.

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно показать, что знаменатели выражений (23) для каждой подсистемы не зависят от номера подсистемы k . Полумарковское ядро определяется равенствами (17) в зависимости от пространства управлений, причем правые части этих равенств не зависят от k . Следовательно, от номера k не зависит математическое ожидание, определяемое равенством (21), что и доказывает теорему.

3.6. ПРОБЛЕМА ОПТИМИЗАЦИИ ЦЕЛЕВОГО ФУНКЦИОНАЛА И ПОИСКА ОПТИМАЛЬНОЙ СТРАТЕГИИ УПРАВЛЕНИЯ

Завершающим этапом исследования является построение оптимальной стратегии управления. Для решения этого вопроса воспользуемся известным фактом [1, 5]: если дробно-линейный функционал имеет экстремум (максимум или минимум), то этот экстремум достигается в классе вырожденных детерминированных стратегий. Поэтому в условиях существования существенно сокращается пространство, по которому определяется экстремальное значение функционала.

Опишем пространство вырожденных стратегий для управления выбором типа требований.

Управление выбором типа требований. Стратегия определяется равенством (2.12). Фиксированная вырожденная мера в состоянии (i, \vec{l}) определяется равенством

$$(24) \quad \begin{aligned} G_{(i, \vec{l})}(j) &= P\{u(t) = j / \zeta(t) = (i, \vec{l})\} = p_{(i, \vec{l}), j} = 1, \\ G_{(i, \vec{l})}(n) &= P\{u(t) = n / \zeta(t) = (i, \vec{l})\} = p_{(i, \vec{l}), n} = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, число вырожденных мер в состоянии (i, \vec{l}) равно N . Если число состояний $(i, \vec{l}) \in \tilde{E}$ равно

$$K = \sum_{s=1}^N (M_s + N_s + n_s - 1) \prod_{l=1, l \neq s}^N (M_l + N_l + n_l),$$

то число вырожденных стратегий равно $L = N^K$. Таким образом, получаем алгоритм определения оптимальной стратегии:

- для фиксированной вырожденной стратегии (24) вычисляется матрица переходных вероятностей (18);

- для этой матрицы решается система алгебраических уравнений и определяется нормированное решение – стационарное распределение вложенной цепи Маркова при выбранной фиксированной вырожденной стратегии;
- при выбранной фиксированной вырожденной стратегии вычисляются характеристики (21) и (22);
- вычисляется удельный доход (23), соответствующий выбранной вырожденной стратегии;
- перебирая все вырожденные стратегии и соответствующие им величины дохода, определяем максимальный доход и оптимальную стратегию.

4. Пример исследования системы с CBSMAP-поток

Рассматривается случай, когда входной поток может принимать два состояния, подсистемы одноканальные, мест для очереди в подсистемах нет, т.е. $E = \{1, 2\}$, $n_1 = n_2 = 1$, $N_1 = N_2 = 0$. Будем считать, что заявки поступают группой, состоящей из одной заявки определённого типа, $M_1 = M_2 = 1$.

Марковскими моментами, как было указано выше, являются моменты изменения состояний процесса (поступления требований в систему).

Состояния системы определяются вектором (i, l_1, l_2) , где i – состояние входного потока (в марковский момент поступает группа требований i -го типа), l_k – количество требований в подсистеме k -го типа, $k \in \{1, 2\}$

Переход из состояния (i, l_1, l_2) в состояние осуществляется с положительной вероятностью (j, l'_1, l'_2) , если $l'_k \leq l_k$, $k \neq j$, т.е. во всех подсистемах, кроме j -го типа, происходит чистое обслуживание заявок, которое можно представить как процесс чистой гибели, соответственно количество заявок в этих подсистемах не превосходит количество заявок в подсистемах в предшествующий момент поступления группы.

Опишем все возможные состояния системы:

Состояние $(1, 1, 0)$ – в марковский момент поступает заявка первого типа, в подсистеме первого типа одна заявка на обслуживании, в подсистеме второго типа заявок нет;

состояние $(1, 1, 1)$ – в марковский момент поступает заявка первого типа, подсистеме первого типа одна заявка на обслуживании, в подсистеме второго типа одна заявка на обслуживании;

состояние $(2, 0, 1)$ – в марковский момент поступает заявка второго типа, в подсистеме первого типа заявок нет, в подсистеме второго типа одна заявка на обслуживании;

состояние $(2, 1, 1)$ – в марковский момент поступает заявка второго типа, в подсистеме первого типа одна заявка на обслуживании, в подсистеме второго типа одна заявка на обслуживании.

Предлагается управление типом требований, поступающих в систему, т.е. «заказываем» тип следующей заявки (группы). Учитывая определённую выше вероятностную меру (12), имеем:

$$G_{(i,l_1,l_2)}(j) = P\{u(t) = j / \zeta(t) = (i, l_1, l_2)\} = p_{(i,l_1,l_2),j},$$

$$p_{(i,l_1,l_2),j} \geq 0, \quad \sum_{j \in E} p_{(i,l_1,l_2),j} = 1, \quad E = \{1,2\}.$$

Таким образом, необходимо найти значения характеристик, изложенных в алгоритме, и построить на траекториях управляемого полумарковского процесса функционал доходов. Как было показано, функционал доходов для системы заданного типа является дробно-линейным функционалом. Если дробно-линейный функционал имеет экстремум (максимум или минимум), то этот экстремум достигается в классе вырожденных детерминированных стратегий.

Определим количество вырожденных стратегий в условиях данной задачи. Учитывая, что множество состояний состоит из четырёх состояний и в каждом состоянии может быть принято одно из двух решений (выбрать первый или второй тип следующей группы), количество стратегий равняется 16.

Для поиска максимума дробно-линейного функционала на множестве вырожденных распределений необходимо выбрать максимальное значение из шестнадцати и соответствующую

этому значению стратегию, которая и будет являться оптимальной.

Дальнейшие вычисления будут проводиться при подстановке вырожденных распределений.

Построим таблицу со всеми возможными вырожденными вероятностными мерами, определяющими правило выбора решений.

Таблица 1. Стратегии управления

Состояние		(1, 1, 0)	(1, 1, 1)	(2, 0, 1)	(2, 1, 1)
	№ стратегии				
Стратегия/управление (тип заявки)	1	$P_{(1,1,0),1} = 1$ $P_{(1,1,0),2} = 0$	$P_{(1,1,1),1} = 1$ $P_{(1,1,1),2} = 0$	$P_{(2,0,1),1} = 1$ $P_{(2,0,1),2} = 0$	$P_{(2,1,1),1} = 1$ $P_{(2,1,1),2} = 0$
	2	$P_{(1,1,0),1} = 1$ $P_{(1,1,0),2} = 0$	$P_{(1,1,1),1} = 1$ $P_{(1,1,1),2} = 0$	$P_{(2,0,1),1} = 1$ $P_{(2,0,1),2} = 0$	$P_{(2,1,1),2} = 1$ $P_{(2,1,1),1} = 0$
	3	$P_{(1,1,0),1} = 1$ $P_{(1,1,0),2} = 0$	$P_{(1,1,1),1} = 1$ $P_{(1,1,1),2} = 0$	$P_{(2,0,1),2} = 1$ $P_{(2,0,1),1} = 0$	$P_{(2,1,1),1} = 1$ $P_{(2,1,1),2} = 0$
	4	$P_{(1,1,0),1} = 1$ $P_{(1,1,0),2} = 0$	$P_{(1,1,1),2} = 1$ $P_{(1,1,1),1} = 0$	$P_{(2,0,1),1} = 1$ $P_{(2,0,1),2} = 0$	$P_{(2,1,1),1} = 1$ $P_{(2,1,1),2} = 0$
	5	$P_{(1,1,0),2} = 1$ $P_{(1,1,0),1} = 0$	$P_{(1,1,1),1} = 1$ $P_{(1,1,1),2} = 0$	$P_{(2,0,1),1} = 1$ $P_{(2,0,1),2} = 0$	$P_{(2,1,1),1} = 1$ $P_{(2,1,1),2} = 0$
	6	$P_{(1,1,0),1} = 1$ $P_{(1,1,0),2} = 0$	$P_{(1,1,1),1} = 1$ $P_{(1,1,1),2} = 0$	$P_{(2,0,1),2} = 1$ $P_{(2,0,1),1} = 0$	$P_{(2,1,1),2} = 1$ $P_{(2,1,1),1} = 0$
	7	$P_{(1,1,0),1} = 1$ $P_{(1,1,0),2} = 0$	$P_{(1,1,1),2} = 1$ $P_{(1,1,1),1} = 0$	$P_{(2,0,1),2} = 1$ $P_{(2,0,1),1} = 0$	$P_{(2,1,1),1} = 1$ $P_{(2,1,1),2} = 0$

Состояние		(1, 1, 0)	(1, 1, 1)	(2, 0, 1)	(2, 1, 1)
	№ стратегии				
	8	$p_{(1,1,0),2} = 1$ $p_{(1,1,0),1} = 0$	$p_{(1,1,1),2} = 1$ $p_{(1,1,1),1} = 0$	$p_{(2,0,1),1} = 1$ $p_{(2,0,1),2} = 0$	$p_{(2,1,1),1} = 1$ $p_{(2,1,1),2} = 0$
	9	$p_{(1,1,0),1} = 1$ $p_{(1,1,0),2} = 0$	$p_{(1,1,1),2} = 1$ $p_{(1,1,1),1} = 0$	$p_{(2,0,1),1} = 1$ $p_{(2,0,1),2} = 0$	$p_{(2,1,1),2} = 1$ $p_{(2,1,1),1} = 0$
	10	$p_{(1,1,0),2} = 1$ $p_{(1,1,0),1} = 0$	$p_{(1,1,1),1} = 1$ $p_{(1,1,1),2} = 0$	$p_{(2,0,1),2} = 1$ $p_{(2,0,1),1} = 0$	$p_{(2,1,1),1} = 1$ $p_{(2,1,1),2} = 0$
	11	$p_{(1,1,0),2} = 1$ $p_{(1,1,0),1} = 0$	$p_{(1,1,1),1} = 1$ $p_{(1,1,1),2} = 0$	$p_{(2,0,1),1} = 1$ $p_{(2,0,1),2} = 0$	$p_{(2,1,1),2} = 1$ $p_{(2,1,1),1} = 0$
	12	$p_{(1,1,0),2} = 1$ $p_{(1,1,0),1} = 0$	$p_{(1,1,1),2} = 1$ $p_{(1,1,1),1} = 0$	$p_{(2,0,1),2} = 1$ $p_{(2,0,1),1} = 0$	$p_{(2,1,1),1} = 1$ $p_{(2,1,1),2} = 0$
	13	$p_{(1,1,0),2} = 1$ $p_{(1,1,0),1} = 0$	$p_{(1,1,1),2} = 1$ $p_{(1,1,1),1} = 0$	$p_{(2,0,1),1} = 1$ $p_{(2,0,1),2} = 1$	$p_{(2,1,1),2} = 1$ $p_{(2,1,1),1} = 0$
	14	$p_{(1,1,0),2} = 1$ $p_{(1,1,0),1} = 0$	$p_{(1,1,1),1} = 1$ $p_{(1,1,1),2} = 0$	$p_{(2,0,1),2} = 1$ $p_{(2,0,1),1} = 0$	$p_{(2,1,1),2} = 1$ $p_{(2,1,1),1} = 0$
	15	$p_{(1,1,0),1} = 1$ $p_{(1,1,0),2} = 0$	$p_{(1,1,1),2} = 1$ $p_{(1,1,1),1} = 0$	$p_{(2,0,1),2} = 1$ $p_{(2,0,1),1} = 0$	$p_{(2,1,1),2} = 1$ $p_{(2,1,1),1} = 0$
	16	$p_{(1,1,0),2} = 1$ $p_{(1,1,0),1} = 0$	$p_{(1,1,1),2} = 1$ $p_{(1,1,1),1} = 0$	$p_{(2,0,1),2} = 1$ $p_{(2,0,1),1} = 0$	$p_{(2,1,1),2} = 1$ $p_{(2,1,1),1} = 0$

Приведём построение управляемого полумарковского ядра.

Учитывая большое количество вычислений, для экономии места приведем матрицы полумарковского ядра для стратегии управления №1 в таблице 2.

Таблица 2. Вид полумарковского ядра для стратегии №1
 (1,1,0) (1,1,1) (2,0,1) (2,1,1)

№1	(1,1,0)	(1,1,1)	(2,0,1)	(2,1,1)
1,1,0	1	0	0	0
1,1,1	$\int_0^t (1 - e^{-\mu_2 x}) dF_{11}(x)$	$\int_0^t e^{-\mu_2 x} dF_{11}(x)$	0	0
2,0,1	$\int_0^t (1 - e^{-\mu_2 x}) dF_{21}(x)$	$\int_0^t e^{-\mu_2 x} dF_{21}(x)$	0	0
2,1,1	$\int_0^t (1 - e^{-\mu_2 x}) dF_{21}(x)$	$\int_0^t e^{-\mu_2 x} dF_{21}(x)$	0	0

Следуя вышеизложенному алгоритму, далее необходимо построить функционал доходов на траекториях управляемого полумарковского процесса, для чего необходимо определить стационарные распределения вложенной цепи Маркова, математическое ожидание времени непрерывного пребывания процесса $\xi(t)$ в состоянии (i, \vec{m}) , математическое ожидание накопленного дохода за время непрерывного пребывания процесса $\xi(t)$ в состоянии (i, \vec{m}) .

Для вычисления стационарных распределений вложенной цепи Маркова необходимо решить шестнадцать систем линейных уравнений (для каждой из шестнадцати стратегий):

$$\left\{ \begin{array}{l} \pi_{(1,1,0)} = \pi_{(1,1,0)}P_{(1,1,0)(1,1,0)} + \pi_{(1,1,1)}P_{(1,1,1)(1,1,0)} + \\ + \pi_{(2,0,1)}P_{(2,0,1)(1,1,0)} + \pi_{(2,1,1)}P_{(2,1,1)(1,1,0)} \\ \pi_{(1,1,1)} = \pi_{(1,1,0)}P_{(1,1,0)(1,1,1)} + \pi_{(1,1,1)}P_{(1,1,1)(1,1,1)} + \\ + \pi_{(2,0,1)}P_{(2,0,1)(1,1,1)} + \pi_{(2,1,1)}P_{(2,1,1)(1,1,1)} \\ \pi_{(2,0,1)} = \pi_{(1,1,0)}P_{(1,1,0)(2,0,1)} + \pi_{(1,1,1)}P_{(1,1,1)(2,0,1)} + \\ + \pi_{(2,0,1)}P_{(2,0,1)(2,0,1)} + \pi_{(2,1,1)}P_{(2,1,1)(2,0,1)} \\ \pi_{(2,1,1)} = \pi_{(1,1,0)}P_{(1,1,0)(2,1,1)} + \pi_{(1,1,1)}P_{(1,1,1)(2,1,1)} + \\ + \pi_{(2,0,1)}P_{(2,0,1)(2,1,1)} + \pi_{(2,1,1)}P_{(2,1,1)(2,1,1)} \\ \pi_{(1,1,0)} + \pi_{(1,1,1)} + \pi_{(2,0,1)} + \pi_{(2,1,1)} = 1, \end{array} \right.$$

где $P_{(i_1, i_2)(j_1, i_2)}$ определяется соотношением (18).

Заметим, что стационарные распределения, полученные при решении системы, совпадают при стратегиях №1, №2, №4, №7, №9 из таблицы 1. Этот факт легко объяснить: при соответствующем принятии решений во всех выше перечисленных случаях состояние (1, 1, 0) будет являться поглощающим состоянием. Также стационарные распределения, полученные при решении системы, совпадают при стратегиях №3, №10, №12, №14, №16. При соответствующем принятии решений во всех выше перечисленных случаях состояние (2, 0, 1) будет являться поглощающим состоянием.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Стратегия является *допустимой*, если при этой стратегии существует стационарное распределение вложенной цепи Маркова.

Заметим, что для стратегий №6 и №15 пределы будут зависеть от того, из какого состояния стартует процесс (начальное распределение), и стационарного распределения не существует. Поэтому их исключаем из рассмотрения. В дальнейшем для поиска оптимальной стратегии будем рассматривать только допустимые стратегии.

Обозначим S^i – функционал накопления, получаемый при старте с прихода заявки i -го типа.

Для стратегий №5, №8, №11, №13 все состояния образуют один класс, поглощающих состояний нет.

Таким образом, необходимо посчитать функционал доходов для шести стратегий.

Опустим вычисления и приведём вид функционала доходов для некоторых из стратегий.

Заметим, что математическое ожидание времени непрерывного пребывания процесса $\xi(t)$ в состоянии (i, \bar{m}) принимает вид

$$m_{(i, \bar{m})}(j) = \int_0^{\infty} \bar{F}_{ij}(t) dt .$$

При выборе стратегий №1, №2, №4, №7, №9 функционал доходов примет вид

$$S = \frac{\int_0^{\infty} [c_1^{(1)} z_1 + c_2^{(1)} \frac{z_1}{\mu_1} + c_3^{(1)} [t - \frac{z_1 - \mu_1 t e^{-\mu_1 t}}{\mu_1 z}] z_1 + c_3^{(2)} t + c_5^{(1)} e^{-\mu_1 t}] dF_{11}(t)}{\int_0^{\infty} \bar{F}_{11}(x) dx} ,$$

$$z_1 = 1 - e^{-\mu_1 t} .$$

При выборе стратегий №3, №10, №12, №14, №16 функционал доходов примет вид

$$S = \frac{\int_0^{\infty} (c_1^{(2)} z_2 + c_2^{(2)} \frac{z_2}{\mu_2} + c_3^{(1)} t + c_3^{(2)} [t - \frac{z_2 - \mu_2 t e^{-\mu_2 t}}{\mu_2 z_2}] z_2 + c_5^{(2)} e^{-\mu_2 t}) dF_{22}(t)}{\int_0^{\infty} \bar{F}_{22}(x) dx} ,$$

$$z_2 = 1 - e^{-\mu_2 t} .$$

Выпишем необходимые характеристики, если управление проводится согласно стратегии №5.

Стационарные распределения, полученные при решении системы, имеют вид

$$\pi_{(1,1,0)} = \frac{1 - \int_0^{\infty} e^{-\mu_2 x} dF_{11}(x)}{\int_0^{\infty} e^{-\mu_2 x} dF_{21}(x) + 2 - 2 \int_0^{\infty} e^{-\mu_2 x} dF_{11}(x)},$$

$$\pi_{(1,1,1)} = 1 - 2 \frac{1 - \int_0^{\infty} e^{-\mu_2 x} dF_{11}(x)}{\int_0^{\infty} e^{-\mu_2 x} dF_{21}(x) + 2 - 2 \int_0^{\infty} e^{-\mu_2 x} dF_{11}(x)},$$

$$\pi_{(2,0,1)} = \frac{1 - \int_0^{\infty} e^{-\mu_2 x} dF_{11}(x)}{\int_0^{\infty} e^{-\mu_2 x} dF_{21}(x) + 2 - 2 \int_0^{\infty} e^{-\mu_2 x} dF_{11}(x)} \int_0^{\infty} (1 - e^{-\mu_4 x}) dF_{12}(x),$$

$$\pi_{(2,1,1)} = \frac{1 - \int_0^{\infty} e^{-\mu_2 x} dF_{11}(x)}{\int_0^{\infty} e^{-\mu_2 x} dF_{21}(x) + 2 - 2 \int_0^{\infty} e^{-\mu_2 x} dF_{11}(x)} \int_0^{\infty} e^{-\mu_4 x} dF_{12}(x).$$

Условное математическое ожидание накопленного дохода при условии, что процесс пребывает в состоянии (i, \vec{m}) , через время t перейдет в состояние (j, \vec{l}) и принято решение u , соответствующее стратегии №5:

$$R_{(1,1,0)(2,0,1)}(t, 2) = c_1^{(1)} + c_2^{(1)} \frac{1 - e^{-\mu_1 t} - \mu_1 t e^{-\mu_1 t}}{\mu_1 (1 - e^{-\mu_1 t})} +$$

$$+ c_3^{(1)} \left[t - \frac{1 - e^{-\mu_1 t} - \mu_1 t e^{-\mu_1 t}}{\mu_1 (1 - e^{-\mu_1 t})} \right] (1 - e^{-\mu_1 t}) + c_3^{(2)} t$$

$$R_{(1,1,0)(2,1,1)}(t, 2) = c_2^{(1)} t + c_3^{(2)} t,$$

$$R_{(1,1,1)(1,1,0)}(t, 1) = c_1^{(1)} (1 - e^{-\mu_1 t}) + c_1^{(2)} + c_2^{(1)} \frac{1 - e^{-\mu_1 t}}{\mu_1} +$$

$$+ c_2^{(2)} \frac{1 - e^{-\mu_2 t} - \mu_2 t e^{-\mu_2 t}}{\mu_2 (1 - e^{-\mu_2 t})} + c_3^{(1)} \left[t - \frac{1 - e^{-\mu_1 t} - \mu_1 t e^{-\mu_1 t}}{\mu_1 (1 - e^{-\mu_1 t})} \right] (1 - e^{-\mu_1 t}) +,$$

$$+ c_3^{(2)} \left[t - \frac{1 - e^{-\mu_2 t} - \mu_2 t e^{-\mu_2 t}}{\mu_2 (1 - e^{-\mu_2 t})} \right] + c_5^{(1)} e^{-\mu_1 t},$$

$$R_{(1,1,1)(1,1,1)}(t,1) = c_1^{(1)}(1 - e^{-\mu_1 t}) + c_2^{(1)} \frac{1 - e^{-\mu_1 t} - \mu_1 t e^{-\mu_1 t}}{\mu_1} + c_2^{(1)} t e^{-\mu_1 t} + c_2^{(2)} t + c_3^{(1)} \left[t - \frac{1 - e^{-\mu_1 t} - \mu_1 t e^{-\mu_1 t}}{\mu_1 (1 - e^{-\mu_1 t})} \right] (1 - e^{-\mu_1 t}) + c_5^{(1)} e^{-\mu_1 t},$$

$$R_{(2,0,1)(1,1,0)}(t,1) = c_1^{(2)} + c_2^{(2)} \frac{1 - e^{-\mu_2 t} - \mu_2 t e^{-\mu_2 t}}{\mu_2 (1 - e^{-\mu_2 t})} + c_3^{(1)} t + c_3^{(2)} \left[t - \frac{1 - e^{-\mu_2 t} - \mu_2 t e^{-\mu_2 t}}{\mu_2 (1 - e^{-\mu_2 t})} \right],$$

$$R_{(2,0,1)(1,1,1)}(t,1) = c_2^{(2)} t + c_3^{(1)} t + c_5 e^{-\mu_1 t},$$

$$R_{(2,1,1)(1,1,1)}(t,1) = c_1^{(1)}(1 - e^{-\mu_1 t}) + c_2^{(1)} \frac{1 - e^{-\mu_1 t}}{\mu_1} + c_2^{(2)} t + c_3^{(1)} \left[t - \frac{1 - e^{-\mu_1 t} - \mu_1 t e^{-\mu_1 t}}{\mu_1 (1 - e^{-\mu_1 t})} \right] (1 - e^{-\mu_1 t}) + c_5^{(1)} e^{-\mu_1 t},$$

$$R_{(2,1,1)(1,1,0)}(t,1) = c_1^{(1)}(1 - e^{-\mu_1 t}) + c_1^{(2)} + c_2^{(1)} \frac{1 - e^{-\mu_1 t}}{\mu_1} + c_2^{(2)} \frac{1 - e^{-\mu_2 t} - \mu_2 t e^{-\mu_2 t}}{\mu_2 (1 - e^{-\mu_2 t})} + c_3^{(1)} \left[t - \frac{1 - e^{-\mu_1 t} - \mu_1 t e^{-\mu_1 t}}{\mu_1 (1 - e^{-\mu_1 t})} \right] (1 - e^{-\mu_1 t}) + c_3^{(2)} \left[t - \frac{1 - e^{-\mu_2 t} - \mu_2 t e^{-\mu_2 t}}{\mu_2 (1 - e^{-\mu_2 t})} \right] + c_5^{(1)} e^{-\mu_1 t}.$$

Условные математические ожидания накопленного дохода за полный период пребывания процесса $\zeta(t)$ в состоянии в состоянии (i, \bar{m}) :

$$s_{(1,1,0)} = \left[\sum_{(j, l_1, l_2)}^{\infty} \left[\int_0^{\infty} R_{(1,1,0)(j, l_1, l_2)}(x, 2) d_x Q_{(1,1,0)(j, l_1, l_2)}(x, 2) \right] \right],$$

$$s_{(1,1,1)} = \left[\sum_{(j, l_1, l_2)}^{\infty} \left[\int_0^{\infty} R_{(1,1,1)(j, l_1, l_2)}(x, 1) d_x Q_{(1,1,1)(j, l_1, l_2)}(x, 1) \right] \right],$$

$$s_{(2,0,1)} = \left[\sum_{(j, l_1, l_2)}^{\infty} \left[\int_0^{\infty} R_{(2,0,1)(j, l_1, l_2)}(x, 1) d_x Q_{(2,0,1)(j, l_1, l_2)}(x, 1) \right] \right],$$

$$s_{(2,1,1)} = \left[\sum_{(j,l_1,l_2)} \left[\int_0^{\infty} R_{(2,1,1)(j,l_1,l_2)}(x,1) d_x Q_{(2,1,1)(j,l_1,l_2)}(x,1) \right] \right].$$

Значение функционала доходов можно получить, подставив соответствующие значения

Для каждой из стратегий могут быть получены необходимые характеристики, аналогично тому, как было показано для выбранных стратегий.

Далее необходимо выбрать максимальное значение функционала доходов из шестнадцати при заданных доходах и расходах системы и соответствующую этому значению стратегию, которая и будет являться оптимальной.

Основной трудностью при получении зависимостей в замкнутом виде является большая размерность пространства состояний и пространства управлений, что является отдельной технической задачей для исследования введенной СМО и применения алгоритмов.

5. Заключение

Представлено описание и применение нового типа входного потока, управляемого цепью Маркова, BSMAP-потока. Проведено исследование системы массового обслуживания с BSMAP-потоком, рассмотрены элементы управления входным потоком. Вышеизложенный входной поток позволяет применять управление в системах массового обслуживания, используя теорию управляемых полумарковских процессов.

Литература

1. БАРЗИЛОВИЧ Е.Ю., БЕЛЯЕВ Ю.К., КАШТАНОВ В.А. И ДР. *Вопросы математической теории надёжности*. – М. Радио и связь, 1983. – 376 с.
2. ИВЧЕНКО Г.И., КАШТАНОВ В.А., КОВАЛЕНКО И.Н. *Теория массового обслуживания*. – М.: Высшая школа, 1982. – 256 с.
3. КАШТАНОВ В.А. *Элементы теории случайных процессов*. – М.: МИЭМ, 2010. – 113 с.

4. КАШТАНОВ В.А., КОНДРАШОВА Е.В. *Анализ входного потока, управляемого цепью Маркова // Надёжность.* – 2012. – №1(40). – С. 52–58.
5. КАШТАНОВ В.А., МЕДВЕДЕВ А.И. *Теория надёжности сложных систем (теория и практика).* – М.: «Европейский центр по качеству», 2002. – 609 с.
6. КОНДРАШОВА Е.В. *Оптимизация функционала доходов в управляемой системе массового обслуживания // Управление большими системами.* – 2011. – №36. – С. 93–105.
7. КОНДРАШОВА Е.В. *Алгоритмизация исследования качества работы системы массового обслуживания // Качество. Инновации. Образование.* – 2011. – №8(75). – С. 40–46.
8. КОРОЛЮК В.С., ТУРБИН А.Ф. *Полумарковские процессы и их приложения.* – Киев: Наукова думка, 1976. – 184 с.
9. РЫКОВ В.В. *Управляемые марковские процессы с конечными пространствами состояний и управлений // ТВП.* – 1966. – Том 11, выпуск 2. – С. 343–351.
10. HEYMAN D., LUCANTONI D. *Modelling multiple IP traffic streams with rate limits // IEEE ACM Transactions on Networking.* – 2003. – Vol. 11. – P. 948–958.
11. KASHTANOV V.A., KONDRASHOVA E.V. *Optimization of the CBSMAP-queueing model // Lecture Notes in Engineering and Computer Science. Proceedings of the World Congress on Engineering 2013. London Newswood Limited International Association of Engineers, 2013.* – P. 69–73.
12. KASHTANOV V.A. KONDRASHOVA E.V. *Analysis of Controlled Semi-Markov Queueing Models // The 5th International Conference on Integrated Modeling and Analysis in Applied Control and Automation, September 12–14, 2011, Rome, Italy. Rende: DIPTEM, University of Genoa, 2011. Ch.1.* – P. 1–7.
13. KENDALL D.J. *Stochastic processes occurring in the theory of queues and their analysis by the method of the embedded markov chains // Ann. Math. Stat.* – 1953. – No. 24. – P. 338–354.
14. KLEMM A., LINDERMANN C., LOHMANN M. *Modelling IP traffic using the batch Markovian arrival process // Performance Evaluation.* – 2008. – Vol. 54. – P. 149–173.

15. KONDRASHOVA E.V. *Optimization of the controlled queueing models. CBSMAP-flow // 3rd International Eurasian conference on Mathematical Sciences and Applications. Book of abstracts. Wien. 2013. – P. 176–177.*
16. LUCANTONI D.M., HELLSTEM K.S., NEUTS M.F. *A single-server queue with server vacations and a class of non-Renewal arrival processes // Advantage of Applied Probability. – 1990. – Vol. 22. – P. 676–705.*
17. LUCANTONI D.M. *New results on the single server queue with a batch Markovian arrival process // Communications in Statistics, Stochastic Models. – 1991. – Vol. 7(1). – P. 1–46.*
18. VISHNEVSKY V., DUDIN A., KLIMENOK V., SEMENOVA O. *Performance analysis BMAP/G/1 queue with gated service and adaptive vacation // Performance Evaluation. – 2011. – Vol. 68. – P. 446–462.*

RESEARCH OF SEMI-MARKOV QUEUEING MODELS USING CONTROLLED INPUT FLOW. BSMAP-FLOW

Kashtanov Victor, Higher School of Economics (HSE), Moscow, Doctor of physical and mathematical Science, professor.

Kondrashova Elizaveta, Higher School of Economics (HSE), Moscow, PhD, assistant, elizavetakondr@gmail.com.

Abstract: The research of queueing model with controlled semi-Markov batch flow is carried out. CBSMAO-flow is a generalization of BMAP-flow. Several alternative designs of a control set are considered. The income functional is constructed on trajectories of a controlled semi-Markov process. Two theorems are proven about the structure of the cumulative income functional for the novel queueing model under consideration.

Keywords: theory of queueing models, controlled semi-Markov process, controlled semi-Markov arrival flow, income functional, optimization.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии В.М. Вишневским

Поступила в редакцию 29.04.2015.

Опубликована 30.09.2015.

УДК 62-50
ББК 78.34

ОПТИМИЗАЦИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ КАСКАДНЫХ СИСТЕМ В ФОРМЕ ЛУРЬЕ ПРИ ОГРАНИЧЕННЫХ ВНЕШНИХ ВОЗМУЩЕНИЯХ¹

Усик Е. В.²

(Санкт-Петербургский государственный университет,
Санкт-Петербург)

Рассматривается оптимизация нелинейных каскадных систем в форме Лурье при ограниченных возмущениях. Для решения поставленной задачи используется метод инвариантных эллипсоидов. Приведенный результат сравнивается с ранее полученным, классическим, на основе функции Ляпунова.

Ключевые слова: пассивация, бэкстеппинг, метод инвариантных эллипсоидов, LMI.

Введение

В практических задачах автоматического управления часто возникает задача синтеза алгоритма управления динамическими каскадными системами, которые представляют собой совокупность подсистем и связей между ними [17] с возмущением. В настоящей работе рассматриваются системы, состоящие из двух блоков: стабилизируемой системы и системы, представляющей собой цепь нелинейных интеграторов. К такому типу относится, например, система, описывающая движение мобильных роботов [16, 19]. Роль управления в данном случае играет скорость изменения угла.

В рассматриваемой работе задача решается на основе процедуры пошагового (попятного) синтеза [5, 18] или, как ее еще

¹ Работа выполнена в ИПМаш РАН при поддержке РФФ, грант №14-29-00142.

² Егор Владимирович Усик, аспирант (egor.usik@yandex.ru).

называют, бэкстеппинга (англ. backstepping [18]). Суть этого метода сводится к нахождению управления для системы с интегратором в предположении, что для системы без интегратора заранее определен стабилизирующий алгоритм – виртуальное управление. Управление выбирается таким образом, чтобы производная функции Ляпунова для системы с интегратором была строго отрицательна для ненулевых значений вектора состояния системы, и тогда по теореме Ляпунова [1] следует асимптотическая устойчивость всей модели.

При синтезе регулятора будем опираться на подход, основанный на пассивности объекта. Понятие пассивности означает, что система удовлетворяет интегральной связи с функцией линейной по входу и выходу системы [6]. Можно показать, что в этом случае на пространстве состояний системы можно определить функцию, которая при определенных условиях может играть роль функции Ляпунова для замкнутой системы [3, 15]. Кроме того, существуют результаты [14] о стабилизации нелинейных аффинных систем с помощью обратной связи, включающие условия пассивности объекта. Таким образом, задача стабилизации объекта проводится в два этапа. Первый этап – это задача пассивфикации системы, т.е. задача нахождения закона обратной связи, делающей систему пассивной [23, 24]. На втором этапе при выполнении дополнительных условий типа наблюдаемости решается задача стабилизации пассивной системы.

Решается задача оптимизации оценки ошибки вектора состояния в нелинейной системе, сводящаяся к оптимизации объема инвариантного эллипсоида. В нашем случае рассматриваем просто ограниченные возмущения, и поэтому подходы, которые используются при решении таких задач как H_∞ -оптимизация или LQR (задачи со случайными гауссовскими помехами), не могут быть тут применены.

Такого рода задача может быть решена на основе метода инвариантных множеств. Он часто используется в различных задачах теории гарантированного оценивания, фильтрации и минимаксного управления в динамических системах при наличии

неопределенностей. Если к тому же выберем в качестве инвариантных множеств эллипсоиды, то, благодаря их простой структуре и прямой связи с квадратичными функциями Ляпунова, сможем использовать серьезный аппарат линейных матричных неравенств (LMI) и полуопределенного программирования (SDP) [11].

В статье [8] представлен результат оценки вектора состояния на основе функции Ляпунова. В данной работе расширяется полученный в статье [7] результат по подавлению произвольных ограниченных внешних возмущений на рассматриваемый класс систем.

Статья состоит из введения, 3 разделов и заключения. Раздел 1 посвящен краткому изложению некоторых материалов из теории автоматического управления, помогающих наиболее полно понять последующий материал. В разделе 2 формулируется исходная задача и основная теорема. В разделе 3 предложенная теорема применена к задаче управления мобильных роботов. Приведены результаты вычислительного эксперимента, иллюстрирующие теоретические результаты.

1. Предварительные сведения

Инвариантным эллипсоидом для динамической системы называется эллипсоид

$$(1) \quad \Upsilon_x = \{x \in \mathbb{R}^n : x^\top Q^{-1}x \leq \Delta_f\}, Q \succ 0,$$

обладающий следующим свойством: любая траектория системы, исходящая из точки, лежащей в Υ_x , в любой момент времени принадлежит этому эллипсоиду [11].

Инвариантные эллипсоиды характеризуют влияние внешних возмущений $f(t)$ на траектории системы. В этой связи будем интересоваться минимальными (в некотором смысле) инвариантными эллипсоидами, содержащими выход $\varepsilon(t)$ рассматриваемой системы.

2. Постановка задачи

Задача 1. Даны две динамические системы в форме Лурье с интегратором

$$(2) \dot{x}(t) = Ax(t) + B\varphi(y_1) + f_1(t), \quad y_1(t) = Cx(t),$$

$$(3) \dot{z}(t) = Az(t) + B\varphi(y_2) + Bu(t) + f_2(t), \quad y_2(t) = Cz(t),$$

$$(4) \dot{u}(t) = \psi(u, t) + w(t),$$

где $x(t), z(t)$ – n -мерные векторы состояния объекта; $y_1(t), y_2(t)$ – скалярные выходы; A – $(n \times n)$ матрица; B – $(n \times 1)$ матрица; C – $(1 \times n)$ матрица; $\varphi(y)$, $\psi(u, t)$ – непрерывные нелинейности, лежащие в секторе; $f_i(t)$ – ограниченные возмущения, $\|f_i(t)\| \leq \Delta_{f_i}$. Систему (2) будем называть ведущей (*master*), систему (3) – ведомой (*slave*).

Согласно процедуре поэтапного синтеза, предположим, что для объекта (3) существует некое управление $u(t)$, делающее систему (3) асимптотически устойчивой.

Цель работы состоит в оптимизации оценки ошибки вектора состояния в системе с ограниченными внешними возмущениями на основе техники LMI и методе инвариантных эллипсоидов, а также в сравнении результатов с оценками, полученными из классического результата на основе функции Ляпунова [8].

2.1. ПОСТРОЕНИЕ ПАССИФИЦИРУЮЩЕГО РЕГУЛЯТОРА

Вводим ошибку синхронизации $e(t) = x(t) - z(t)$, а также ошибку синхронизации по выходу $\varepsilon(t) = y_1(t) - y_2(t) = Ce(t)$. С учетом этих обозначений можно ввести новую систему:

$$(5) \dot{e}(t) = Ae(t) + B\xi(\varepsilon, t) - Bu(t) + f(t), \quad \varepsilon(t) = Ce(t),$$

$$(6) \dot{u}(t) = \psi(u, t) + w(t),$$

где $\xi(\varepsilon, t) = \varphi(y_1) - \varphi(y_2)$ – новая нелинейность. Цель управления будет выглядеть следующим образом: $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$.

Для синтеза управления $w(t)$ воспользуемся методом бэк-теппинга:

$$(7) \quad \dot{\varepsilon}(t) = Ae(t) + B\xi(\varepsilon, t) - Bu(t) + f(t), \quad \varepsilon(t) = Ce(t),$$

$$(8) \quad \dot{u}(t) = KCAe(t) + KCB\xi(\varepsilon, t) + \psi(u, t) + v(t),$$

где $v(t)$ – новое управление.

2.2. УСЛОВИЯ ПАССИФИКАЦИИ И АСИМПТОТИЧЕСКОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ

Для получения условий достижения цели сделаем следующие предположения.

- 1) пусть линейная система $\dot{e}(t) = Ae(t) - Bu(t)$, $\varepsilon(t) = Ce(t)$ – гиперминимально-фазовая, т.е. матричная функция $\Gamma(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda W(\lambda)$ невырождена и положительно определена, где $W(\lambda) = C(\lambda I - A)^{-1}B = \beta(\lambda)/\alpha(\lambda)$ – передаточная функция системы. Для случая со скалярным выходом это означает, что степень знаменателя $\alpha(\lambda)$ равна n . Числитель $\beta(\lambda)$ гурвицев степени $n - 1$ с положительными коэффициентами. В соответствии с теоремой о пассивации [15] существует управление $u(t) = K\varepsilon$, такое что система стабилизируема;
- 2) $\xi(\varepsilon, t)$ лежит в секторе, т.е. $a \leq \xi(\varepsilon, t)/\varepsilon \leq b$, где a, b – параметры сектора, зависящие от нелинейности;
- 3) $\psi(u, t)$ также лежит в секторе, т.е. $c \leq \psi(u, t)/u \leq d$, где c, d – параметры сектора, зависящие от нелинейности;
- 4) из гиперминимально-фазовости и теоремы о пассивации следует, что минимальное расстояние η_0 между корнями числителя передаточной функции и мнимой осью будет положительным. Выберем параметры η и K таким образом, чтобы $0 < \eta < \eta_0$, $2\|\tilde{D}\|\|P\|\|C\| \max(|a|, |b|) + 2\|P\| \max(|c|, |d|) < \eta\lambda_{\min}$, где $\tilde{D} = \begin{pmatrix} B \\ KCB \end{pmatrix}$, P – положительно определенная матрица в квадратичной функции

Ляпунова $V(x) = x^T P x$, λ_{\min} – наименьшее собственное число данной матрицы.

Для полноты изложения приведем две теоремы, полученные в работе [8]:

Теорема 1. Пусть выполнены предположения (1)–(4). Тогда существуют числа K, γ , такие что система (7), (8) будет пассивна с квадратичной функцией запаса, а замкнутая система с управлением $v(t) = (-\gamma - KCB)u + \gamma K\varepsilon$ асимптотически устойчива.

Теорема 2. Дана система (7),(8) с ограниченным возмущением $\|f(t)\|^2 \leq \Delta_f$. Пусть выполнены предположения (1)–(4). Тогда $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e(t)\| \leq C_e \Delta_f$, где $C_e = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)} \frac{1}{\eta}}$, где P – положительно определенная матрица в квадратичной функции Ляпунова $V(x) = x^T P x$.

2.3. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Представим систему (7), (8) в виде

$$(9) \quad \begin{pmatrix} \dot{e} \\ \dot{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -B \\ KCA & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B \\ KCB \end{pmatrix} \xi(\varepsilon, t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \psi(u, t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$v(t) = (K_1 \quad K_2) \begin{pmatrix} \varepsilon \\ u \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \varepsilon \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ u \end{pmatrix}$$

Или, в других обозначениях,

$$(10) \quad \dot{x}(t) = \tilde{A}x(t) + \tilde{B}\psi(u, t) + \tilde{B}v(t) + \tilde{D}\xi(\varepsilon, t) + E\tilde{f}(t),$$

$$(11) \quad \tilde{\varepsilon}(t) = \tilde{C}x(t), \quad v(t) = \tilde{K}\tilde{\varepsilon}.$$

Теорема 3. Эллипсоид (1) является инвариантным для системы (7), (8), если его матрица $Q \succ 0$ удовлетворяет LMI

(12)

$$\begin{pmatrix} W & Q & Q & E^\top \\ Q & -\frac{\gamma}{\max(c,d)}(C^\top C)^{-1} & 0 & 0 \\ Q & 0 & -\frac{\delta}{\max(a,b)}(C^\top C)^{-1} & 0 \\ E & 0 & 0 & -\alpha I \end{pmatrix} \leq 0.$$

при некоторых $\alpha, \gamma, \delta > 0$, где $W = \hat{A}^\top Q + Q\hat{A} + \alpha Q + \gamma\tilde{B}\tilde{B}^\top + \delta\tilde{D}\tilde{D}^\top$, $\hat{A} = \tilde{A} + \tilde{B}\tilde{C}\tilde{K}$.

Следствие 1. Решение \hat{Q} задачи

(13)

$$\text{tr}CQC^\top \rightarrow \min$$

при ограничении

(14)

$$\begin{pmatrix} W & Q & Q & E^\top \\ Q & -\frac{\gamma}{\max(c,d)}(C^\top C)^{-1} & 0 & 0 \\ Q & 0 & -\frac{\delta}{\max(a,b)}(C^\top C)^{-1} & 0 \\ E & 0 & 0 & -\alpha I \end{pmatrix} \leq 0,$$

$\hat{A} = \tilde{A} + \tilde{B}\tilde{C}\tilde{K}$, $W = \hat{A}^\top Q + Q\hat{A} + \alpha Q + \gamma\tilde{B}\tilde{B}^\top + \delta\tilde{D}\tilde{D}^\top$, определяет матрицу $C\hat{Q}C^\top$ ограничивающего эллипсоида для выхода $\varepsilon = Ce(t)$ системы (7), (8). Минимизация проводится по матричной переменной $Q = Q^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$, параметрам $\alpha, \gamma, \delta > 0$.

Следствие 2. Если положить, что нелинейности в интеграторе нет, $\psi(u, t) \equiv 0$, то приходим к результату, полученному в работе [7].

Минимальность эллипсоида можно понимать в разных смыслах. В качестве критерия можно рассматривать функцию $\det CPC^\top$, пропорциональную объему эллипсоида Υ_x , или функцию $\|CPC^\top\|$, соответствующую значению наибольшей полуоси эллипсоида Υ_x . Однако в силу линейности наиболее прост критерий следа $f(P) = \text{tr}CPC^\top$, который соответствует сумме квадратов полуосей эллипсоида Υ_x . Выбор этого критерия в дальнейшем позволит свести проблему к стандартной задаче SDP. Поскольку по теореме (1) система предполагается устойчивой, то существует конечный и единственный ограничивающий

эллипсоид, минимизирующий любую из указанных выше функций.

Доказательство теоремы 3. Введем в рассмотрение функцию $V(x) = x^\top P x, P \succ 0$, построенную на решениях системы (10). Для того чтобы ее траектории $x(t)$ не покидали эллипсоид $\Upsilon_x = \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) \leq \Delta_f\}$, достаточно потребовать, чтобы при $V(x) \leq \Delta_f$, при всех допустимых внешних возмущениях $\|\tilde{f}\|^2 \leq \Delta_f$ и при предположениях (2), (3) выполнялось $V(x, \tilde{f}, \psi, \xi) \leq 0$.

Обозначим $\hat{A} = \tilde{A} + \tilde{B}\tilde{K}\tilde{C}$.

Производная функции $V(x)$ в силу системы (10) имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, \tilde{f}, \psi, \xi) &= \dot{x}^\top P x + x^\top P \dot{x} = \\ &= x^\top (\hat{A}^\top P + P \hat{A})x + 2\tilde{f}^\top E^\top P x + 2\psi \tilde{B}^\top P x + 2\xi \tilde{D}^\top P x. \end{aligned}$$

Введем вектор $s = (x^\top \quad \tilde{f}^\top \quad \psi^\top \quad \xi^\top)^\top$, а также матрицы

$$M_0 = \begin{pmatrix} \hat{A}^\top P + P \hat{A} & P E & P \tilde{B} & P \tilde{D} \\ E^\top P & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{B}^\top P & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{D}^\top P & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$M_1 = \text{diag}\{-P, 0, 0, 0\},$$

$$M_2 = \text{diag}\{0, I, 0, 0\},$$

$$M_3 = \text{diag}\{-\max(c, d)C^\top C, 0, I, 0\},$$

$$M_4 = \text{diag}\{-\max(a, b)C^\top C, 0, 0, I\}.$$

Можем записать рассматриваемые условия в виде:

(15)

$$f_0(s) \leq 0 \text{ при } f_1(s) \leq \Delta_f, f_2(s) \leq \Delta_f, f_3(s) \leq 0, f_4(s) \leq 0,$$

где $f_i(s) = s^\top M_i s, i = \overline{0, 4}$.

Воспользовавшись S -теоремой [21], получаем неравенство:

$$(16) \quad M_0 - \alpha M_1 - \beta M_2 - \gamma M_3 - \delta M_4 \leq 0$$

при параметрах $\alpha, \beta, \gamma, \delta \geq 0$ и $0 \geq -\alpha\Delta_f + \beta\Delta_f \geq 0, \Rightarrow \alpha = \beta$ (см. подробнее [12]).

Распишем неравенство (16) подробнее:

$$(17) \quad \begin{pmatrix} W & PE & P\tilde{B} & P\tilde{D} \\ E^\top P & -\beta I & 0 & 0 \\ \tilde{B}^\top P & 0 & -\gamma I & 0 \\ \tilde{D}^\top P & 0 & 0 & -\delta I \end{pmatrix} \leq 0,$$

где $W = \hat{A}^\top P + P\hat{A} + \alpha P + C^\top C(\delta \max(a, b) + \gamma \max(c, d))$.

Применяем лемму Шура [13]:

$$\begin{aligned} \hat{A}^\top P + P\hat{A} + \alpha P &+ (\delta \max(a, b) + \gamma \max(c, d))C^\top C + \\ &+ \frac{1}{\beta}PEE^\top P + \frac{1}{\gamma}P\tilde{B}\tilde{B}^\top P + \frac{1}{\delta}P\tilde{D}\tilde{D}^\top P \leq 0. \end{aligned}$$

Теперь умножим справа и слева на матрицу $Q = P^{-1}$.

$$\begin{aligned} \hat{A}^\top Q + Q\hat{A} + \alpha Q &+ (\delta \max(a, b) + \gamma \max(c, d))QC^\top CQ + \\ &+ \frac{1}{\beta}EE^\top + \frac{1}{\gamma}\tilde{B}\tilde{B}^\top + \frac{1}{\delta}\tilde{D}\tilde{D}^\top \leq 0. \end{aligned}$$

Возпользуемся опять леммой Шура [13] и представим рассматриваемое выражение в виде матрицы:

$$(18) \quad \begin{pmatrix} W & Q & Q & E^\top \\ Q & -\frac{1}{\gamma \max(c, d)}(C^\top C)^{-1} & 0 & 0 \\ Q & 0 & -\frac{1}{\delta \max(a, b)}(C^\top C)^{-1} & 0 \\ E & 0 & 0 & -\beta I \end{pmatrix} \leq 0,$$

где $W = \hat{A}^\top Q + Q\hat{A} + \alpha Q + \frac{1}{\gamma}\tilde{B}\tilde{B}^\top + \frac{1}{\delta}\tilde{D}\tilde{D}^\top$, что с учетом переобозначений $\gamma = \frac{1}{\gamma}, \delta = \frac{1}{\delta}, \beta = \alpha$ совпадает с условием в формулировке теоремы.

3. Примеры

Проиллюстрируем применение теоремы на примере модели трехколесного мобильного робота.

Считая, что робот движется при малых скоростях, можно ограничиться кинематической моделью тележек (ведущей и ведомой). Она будет выглядеть следующим образом [19]:

$$(19) \quad \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= v \cos(\varphi_1(t)), & \dot{y}_1(t) &= v \cos(\varphi_2(t)), \\ \dot{x}_2(t) &= v \sin(\varphi_1(t)) + f_1(t), & \dot{y}_2(t) &= v \sin(\varphi_2(t)) + f_2(t), \\ \dot{\varphi}_1(t) &= \omega, & \dot{\varphi}_2(t) &= u(t), \end{aligned}$$

где $u(t), r(t)$ – управление; ω – фиксированная угловая скорость; v – фиксированная линейная скорость; $f_1(t), f_2(t)$ – ограниченные возмущения.

Выделив соответствующим образом нелинейность, систему (19) можно представить в виде

$$(20) \quad \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= v + v (\cos(\varphi_1(t)) - 1), \\ \dot{x}_2(t) &= v \varphi_1(t) + v (\sin(\varphi_1(t)) - \varphi_1(t)) + f_1(t), \\ \dot{y}_1(t) &= v + v (\cos(\varphi_2(t)) - 1), \\ \dot{y}_2(t) &= v \varphi_2(t) + v (\sin(\varphi_2(t)) - \varphi_2(t)) + f_2(t), \\ \dot{\varphi}_2(t) &= u(t), \end{aligned}$$

Таким образом, при малых значениях угла $\varphi_i(t), i = 1, 2$, движением вдоль осей $x_1(t), y_1(t)$ можно пренебречь.

Введем следующие обозначения:

$$(21) \quad e_1(t) = x_2(t) - y_2(t),$$

$$(22) \quad \varepsilon_1(t) = \varphi_1(t) - \varphi_2(t),$$

$$(23) \quad f(t) = f_1(t) - f_2(t),$$

$$(24) \quad \xi_1(t) = \sin(\varphi_1(t)) - \sin(\varphi_2(t)) + \varphi_2(t) - \varphi_1(t).$$

В этих обозначениях можно записать новую систему:

$$(25) \quad \begin{aligned} \dot{e}(t) &= v\varepsilon(t) + v\xi_1(\varepsilon, t) + f(t), \\ \dot{\varepsilon}(t) &= w(t), \end{aligned}$$

где

$$(26) \quad \xi(\varepsilon(t), t) = 2 \cos \frac{\varphi_1(t) + \varphi_2(t)}{2} \sin \frac{\varepsilon(t)}{2} - \varepsilon(t).$$

Обозначим $\alpha(t) = \cos \frac{\varphi_1(t) + \varphi_2(t)}{2}$ и перепишем выражение (26) следующим образом:

$$(27) \quad \xi_1(\varepsilon(t), t) = 2\alpha(t) \sin \frac{\varepsilon(t)}{2} - \varepsilon(t).$$

Нелинейность (27) удовлетворяет следующему неравенству:

$$(28) \quad -2\varepsilon^2 \leq \varepsilon \xi \leq 0,$$

для всех $t \geq 0$ (смотри рис.1).

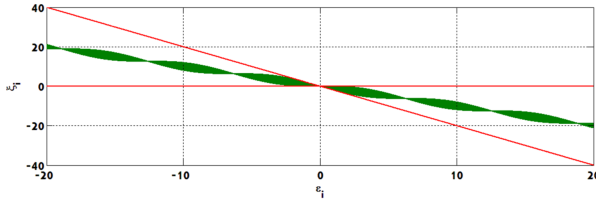


Рис. 1. Нелинейность в секторе, $i=1,2$

Проверим, что предположения (1)–(4) выполнены.

Передаточная функция системы равна v/λ . Степень знаменателя равна 1, степень числителя – 0, $v > 0$. Покажем, что существует обратная связь в виде $\varepsilon = Ke$, $K < 0$, которая стабилизирует систему. Нелинейность ξ лежит в секторе 1. Рассмотрим квадратичную функцию Ляпунова $V(e) = e^T H e$ и сравним условие (4) со следующим неравенством:

$$\dot{V} = 2eHv(\varepsilon + \xi) \leq 2(e)^2 H v K (1 + \max(|a|, |b|)).$$

Неравенство выполняется с $K < 0$. Применяя метод бэкстеппинга, синтезируем управление:

$$(29) \quad w(t) = -\gamma(\varepsilon(t) - Ke(t)) + Kv\varepsilon(t).$$

Представим систему (25), (29) в следующем виде:

$$(30) \quad \begin{aligned} \dot{X}(t) &= AX(t) + Bu(t) + D\xi(t, \sigma(t)) + Ef(t), \\ u(t) &= \tilde{K}X(t), \end{aligned}$$

где $X = \begin{bmatrix} e \\ \varepsilon \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 0 & v \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} v \\ 0 \end{bmatrix}$, $\tilde{K} = \begin{bmatrix} \gamma K & Kv - \gamma \end{bmatrix}$.

Рассмотрим квадратичную функцию Ляпунова $V(X) = X^T P X$. Для применения теоремы 2 вычислим параметр $\eta < 0$:

$$\begin{aligned}
 \dot{V} &= ((A + B\tilde{K})X + D\xi(\varepsilon, t))^T P X + \\
 &+ X^T P ((A + B\tilde{K})X + D\xi(\varepsilon, t)) \leq \\
 (31) \quad &\leq 2(\|(A + B\tilde{K})\| + \max(|0|, |-2|)v)V \\
 &= -\eta V.
 \end{aligned}$$

Положим скорость движения тележки $v = 0,1$ см/с. Далее

$$(32) \quad \eta = -2(\max(-\gamma, vK) + 2v) > 0.$$

Выберем γ, K , чтобы неравенство (32) выполнялось: $\gamma = 1$, $K = -0,3125$; следовательно $\eta = 0,6$.

Используя неравенство (31), находим матрицу функции Ляпунова P , а вместе с ней и собственные числа. $\lambda_{min}(P) = 0,47$, $\lambda_{max}(P) = 7,554$.

Положим $\Delta_f = 0,1$, по теореме 2 получаем оценку на состояние системы $X(t)$: $\lim_{t \rightarrow \infty} \|X(t)\| \leq 0,1 C_X \leq 0,623$, где $C_X = 6,2301$.

LMI в Теореме 3 выглядит следующим образом:

$$(33) \quad \begin{pmatrix} \hat{A}^T Q + Q \hat{A} + \alpha Q + \delta \tilde{D} \tilde{D}^T & Q & E^T \\ Q & -\frac{\delta}{\max(\|a\|, \|b\|)} (C^T C)^{-1} & 0 \\ E & 0 & -\alpha I \end{pmatrix} \leq 0,$$

$\hat{A} = \tilde{A} + \tilde{B} \tilde{C} \tilde{K}$, при $\alpha, \delta > 0$.

С помощью теоремы 3 была найдена матрица \hat{Q}

$$(34) \quad \begin{pmatrix} 0,1518 & -0,0337 \\ -0,0337 & 0,3801 \end{pmatrix},$$

при $\alpha = 0,01, \delta = 0,02$.

В этом случае оценка $\|C \hat{Q} C^T\| = 0,3849$.

Таким образом, основываясь на классическом результате, оценка вектора состояния равна 0,623, а применяя метод на основе инвариантных эллипсоидах и LMI получаем оценку равную 0,3849. Это означает, что с помощью теоремы 3 может быть получен более точный результат оценки вектора состояния системы при ограниченных возмущениях.

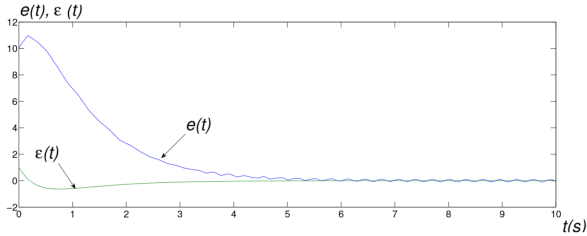


Рис. 2. Ошибки e_i и ε_i , $i = 1, 2$, для системы (25), (29) с нормой возмущения $\Delta_f = 0,1$

4. Заключение

Получены оценки вектора состояния в системе с ограниченными внешними возмущениями на основе техники ЛМІ и метода инвариантных эллипсоидов, а также проведено сравнение результатов с оценками, полученными из классического результата на основе функции Ляпунова [8].

Литература

1. АНДРИЕВСКИЙ Б.Р., ФРАДКОВ А.Л. *Избранные главы теории автоматического управления с примерами на языке MATLAB*. – СПб.: Наука, 1999. – 467 с.
2. АНДРИЕВСКИЙ Б.Р., ФРАДКОВ А.Л. *Элементы математического моделирования в программных средах MATLAB 5 и Scilab (учебное пособие)*. – СПб.: Наука, 2001. – 286 с.
3. АНДРИЕВСКИЙ Б.Р., ФРАДКОВ А.Л. *Метод пассивации в задачах адаптивного управления, оценивания и синхронизации* // Автоматика и телемеханика. – 2006. – №11. – С. 33–37.
4. БОБЦОВ А.А., НИКОЛАЕВ Н.А. *Синтез управления нелинейными системами с функциональными и параметрическими неопределенностями на основе теоремы Фрадкова* // Автоматика и телемеханика. – 2005. – №1. – С. 118–129.

5. МИРОШНИК И.В., НИКИФОРОВ В.О., ФРАДКОВ А.Л. *Нелинейное и адаптивное управление сложными системами*. – СПб.: Наука, 2000. – 549 с.
6. ПОЛУШИН И.Г., ФРАДКОВ А.Л., ХИЛЛ Д.Д. *Пассивность и пассивфикация нелинейных систем (обзор)* // Автоматика и телемеханика. – 2000. – №3. – С. 3–37.
7. ПОЛЯК Б.Т., ХЛЕБНИКОВ М.В., ЩЕРБАКОВ П.С. *Нелинейные системы с ограниченными или мультипликативными возмущениями*. – [Электронный ресурс] – URL: <http://premolab.ru/publication/14/> (дата обращения: 25.09.2015).
8. УСИК Е.В. *Синхронизация нелинейных систем Лурье на основе пассивфикации и бэкстеппинга* // Автоматика и телемеханика. – 2012. – №8. – С. 35–38.
9. ФРАДКОВ А.Л. *Синтез адаптивной системы стабилизации линейного динамического объекта* // Автоматика и телемеханика. – 1974. – №12. – С. 96–103.
10. ФРАДКОВ А.Л. *Квадратичные функции Ляпунова в задаче адаптивной стабилизации линейного динамического объекта* // Сиб. мат. журн. – 1976. – №2. – С. 436–446.
11. ХЛЕБНИКОВ М.В., ПОЛЯК Б.Т., КУНЦЕВИЧ В.М. *Оптимизация линейных систем при ограниченных внешних возмущениях (техника инвариантных эллипсоидов)* // Автоматика и телемеханика. – 2011. – №11 – С. 9–59.
12. ХЛЕБНИКОВ М.В. *Время установления в линейной динамической системе с ограниченными внешними возмущениями* // Автоматика и телемеханика. – 2012. – №6. – С. 3–17.
13. ЯКУБОВИЧ В.А. *Метод матричных неравенств в теории устойчивости нелинейных регулируемых систем. I. Абсолютная устойчивость вынужденных колебаний* // Автоматика и телемеханика. – 1964. – №7. – С. 1017–1029.
14. BYRNES C.I., ISIDORI A., WILLEMS J.C. *Passivity, feedback equivalence, and the global stabilization of minimum phase nonlinear systems* // IEEE Trans. Automat. Control. – 1991. – Vol. AC–36. – №11. – P. 1228–1240.

15. FRADKOV A.L. *Passification of Non-square Linear Systems and Feedback Yakubovich-Kalman-Popov Lemma* // Eur. J. Control. – 2003. – Vol. 9, №11. – P. 573–582.
16. GUSEV S.V., PAROMTCHIK I.E., MAKAROV I.A. ET AL. *Adaptive motion control of nonholonomic vehicle* // Proc. IEEE Int. Conf. Robot. Automat. – Vol. 4. – Belgium, 1998. – P. 3285–3290.
17. KOKOTOVIC P., ARCAK M. *Constructive nonlinear control: a historical perspective* // Automatica. – 2001. – Vol. 37, №5. – P. 637–662.
18. KRSTIC M., KANELLAKOPOULAS I., KOKOTOVIC P. *Nonlinear and adaptive control design*. – New York, Wiley, 1995. – 576 p.
19. LATOMBE J.C. *Robot Motion Planning*. – Kluwer Academic Publishers, Boston, 1991. – 651 p.
20. NIKIFOROV V.O., VORONOV K.V. *Nonlinear Adaptive Controller with Integral Action* // IEEE Trans. Automat. Control. – 2001. – Vol. 46, №12. – P. 2035–2037.
21. POLYAK B.T. *Convexity of quadratic transformations and its use in control and optimization* // J. Optim. Theory and Appl. – 1998. – Vol. 99. – P. 553–583.
22. PYRKIN A., BOBTSOV A., KOLYUBIN S. ET AL. *Output Control Approach "Consecutive Compensator" Providing Exponential and L-infinity-stability for Nonlinear Systems with Delay and Disturbance* // IEEE Multi-Conf. Syst. Control. – 2011. – Denver, USA. – P. 1499–1504.
23. SERON M.M., HILL D.J., FRADKOV A.L. *Adaptive passification of nonlinear systems* // Proc. 33rd IEEE Conf. Decision Control, Orlando, FL, December 1994. – P. 190–195.
24. SERON M.M., HILL D.J., FRADKOV A.L. *Nonlinear adaptive control of feedback passive systems* // Automatica. – Vol. 31, №7. – P. 1053–1060.

OPTIMIZATION OF NONLINEAR CASCADE SYSTEMS IN LURIE FORM WITH BOUNDED EXTERNAL DISTURBANCES

Egor Usik, Saint-Petersburg State University, Saint-Petersburg, student (egor.usik@yandex.ru).

Abstract: We consider nonlinear cascade systems in Lurie form with bounded disturbances and solve the optimal control problem using the method of invariant ellipsoids. The obtained result is compared with the previously obtained classic result based on Lyapunov function.

Keywords: passification, backstepping, LMI, method of invariant ellipsoids.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии П.В. Пакиным

Поступила в редакцию 13.06.2015.

Дата опубликования 30.09.2015.

УДК 004.75
ББК 32.81 max

БЫСТРЫЕ СПОСОБЫ ВЫПОЛНЕНИЯ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ АЛГОРИТМОВ В ЦИФРОВЫХ СИСТЕМАХ С ДИНАМИЧЕСКИ ФОРМИРУЕМОЙ СЕТЕВОЙ СТРУКТУРОЙ СВЯЗЕЙ

Стецюра Г. Г.¹

(ФГБУН Институт проблем управления РАН, Москва)

Предложены способы ускорения выполнения параллельных алгоритмов с использованием средств быстрого непрерывного формирования структур связей в цифровой системе и быстрых распределенных вычислений. Используются беспроводные оптические соединения.

Ключевые слова: параллельные алгоритмы, распределенные вычисления, сетевые структуры, беспроводные оптические связи.

1. Введение

В статьях [3, 4] предложены технические средства, расширяющие функциональные возможности цифровых систем и повышающие скорость выполнения параллельных алгоритмов. Также было предложено изменение структуры алгоритмов и организации их выполнения по сравнению с обычной практикой. Хотя в [3, 4] даны примеры таких изменений, технические подробности отодвигали этот вопрос на задний план. В настоящей статье отсутствуют технические детали системы, но подробно изложены сообщения-команды, которыми обмениваются устройства системы для выполнения ими операций

¹ Геннадий Георгиевич Стецюра, г.н.с., доктор технических наук, профессор (gstetsura@mail.ru).

формирования структуры связей системы и выполнения распределенных вычислений.

Рассматриваемая система имеет сетевую организацию взаимодействия активных цифровых объектов системы, связывающихся по собственной инициативе с другими устройствами для разрешения собственных или общесистемных потребностей (если контекст позволяет, будем активные объекты называть просто объектами). Активный объект – это любое программируемое цифровое устройство или комплекс таких устройств. Большинство рассматриваемых в статье видов связей – множественные, одновременно объединяющие группы объектов.

Использованные в статье оптические средства не выполняют вычисления, это делают объекты системы – обычные электронные устройства. Оптоэлектроника используется только для получения новых видов взаимодействия между объектами. Однако взаимодействия построены так, чтобы существенно влиять на структуру и скорость выполнения распределенных параллельных вычислений, что отличает подход статьи от чисто коммуникационных решений и от оптических вычислений, выполняемых оптическими вычислительными средствами.

В разделе 2 статьи кратко представлена структура системы; в разделе 3 рассмотрены посылаемые объектам сообщения-команды; в разделах 2 и 3 рассмотрены выполняемые по команде операции, включены новые результаты по выполнению распределенных вычислений. В разделе 4 даны примеры областей применения решений статьи; в разделе 5 приведены сведения из литературы о разработках оптоэлектронных устройств, которые могут быть взяты за основу при создании наиболее сложных компонентов системы – ретранслятора и демультимплексора, и показывают техническую осуществимость предлагаемой системы.

2. Структура системы

Структура предлагаемой системы показана на рис. 1.

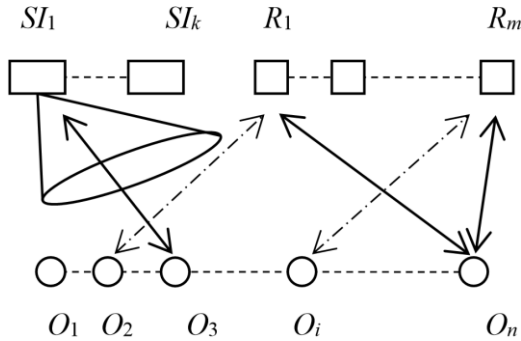


Рис. 1. Структура системы

Здесь O – активные объекты, R – ретрансляторы сигналов, SI – системные информаторы. Для упрощения текста, где возможно, будем называть R и SI просто модулями связи (MS). Перечисленные устройства обмениваются оптическими сигналами, посылая их в свободном пространстве. Объекты располагаются так, чтобы между каждым объектом и всеми MS была прямая видимость. Только объекты O_j имеют специальные устройства – демультиплексоры, которые выбирают конкретный MS для отправки ему сигналов.

Ретранслятор новой системы существенно отличается от обычно применяемых ретрансляторов. Он содержит оптический ретрорефлектор – типа «катафот» или «кошачий глаз» (раздел 5 статьи) и модуляторы оптических сигналов, но в нем нет источника оптических сигналов. Сигналы, приходящие в ретрорефлектор, отражаются им в направлении источника этих сигналов. Сигналы, поступающие одновременно от многих источников не создают взаимных искажений возвращаемых сигналов. В целом система обладает новизной [9].

Организация связей. Чтобы получать от ретранслятора сигналы источника, приемники должны посылать в R непрерывный сигнал, который возвращается в приемник, модулированный сигналами источника. От ретранслятора таким же способом одновременно, не конфликтуя между собой, может получать сигналы любая группа объектов. Если несколько O_i одновременно пытаются воспользоваться для передачи сообще-

ний одним и тем же MS , то действует алгоритм обнаружения и быстрого устранения возникающего конфликта доступа [5, 6]. Информатор SI действует подобно R , но, в отличие от R , получив сигналы, генерирует и передает такие же сигналы *одновременно* всем объектам системы, но на другой частоте, характерной для данного SI . При обращении к SI объект действует, как с R , но объекты также могут посылать в SI ненаправленные сигналы, подобно тому, как действует SI . Получив такой сигнал, SI в ответ посылает всем объектам подобный сигнал, но на другой частоте. Такие действия полезны для связи с периферийными устройствами, так как не требуют ориентации на SI и не нужен демультиплексор (раздел 3, группа команд 10).

На рис. 1, например, объект O_n посылает в свободном пространстве оптические сигналы ретрансляторам R_1 и R_m (сплошные линии), и эти сигналы получают объекты O_2 и O_i . Объект O_3 посылает сигналы в SI_1 и последний посылает такие же сигналы на другой частоте одновременно всем объектам.

Ретрансляторы и системные информаторы располагаются регулярно, например, в виде решетчатых структур. Каждому объекту, имеющемуся в системе или подключаемому вновь, выделяется фиксированное место размещения в системе. При размещении объекта для попадания лучей его демультиплексора на заданные ретрансляторы требуется дополнительная ориентация, соответствующая месту расположения объекта.

Устройства MS имеют дополнительную возможность. По крайней мере для части поступающих в MS сигналов возврат их источнику управляем: в MS посылается управляющий оптический сигнал, который включает элемент памяти, запрещающий возврат сигнала источнику. Запрет сохраняется до перевода памяти также оптическим сигналом в исходное состояние. Для SI запрет действует и на посылку из SI широковещательного оптического сигнала.

Эти действия позволяют, например, одновременно проверять состояние объектов, которым предоставлен данный MS , не обращаясь непосредственно к самим объектам.

В разделе 5 статьи даются сведения о способах реализации демультиплексоров и ретрансляторов системы.

Отметим наиболее важные возможности, вытекающие из рассмотренной организации системы.

1. Сигнал, посылаемый объектом в *MS*, возвращается ему и всем следящим за *MS* объектам. При этом возвращаемый объектам сигнал *MS* модулируется входящими в него от объектов импульсными сигналами. Возвращается сигнал источнику или нет, зависит от состояния элемента памяти в *MS*, удаленно управляемого объектами. Для *SI* запрет действует на передачу им широковещательного сигнала.

2. Объект может послать сигналы одного и того же сообщения как одному, так одновременно и группе ретрансляторов, указав для этого своему демультиплектору группу адресов ретрансляторов. Демультиплексор направит копии сообщения по указанным адресам.

3. Хотя для взаимодействия объектов в системе задаются адреса *MS*, допустимы и ассоциативные связи между объектами. Так, если передает широковещательное сообщение *SI*, то в сообщении можно указать набор признаков, которыми должен обладать объект. Таким объектам достаточно приписать новый, обобщающий результаты поиска признак, и далее этот признак используется широковещательно. Такая обработка проведена ассоциативно, без использования адресов объектов и *MS*.

Ассоциативный поиск выполняется и при обращении к *R*, подробности в разделе 4 (ассоциативные операции).

4. Объекты могут одновременно следить за состоянием группы модулей *MS* и, тем самым, за состоянием объектов, связанных с этими модулями. Слежение за состоянием *MS* сводится к проверке наличия возвращаемого модулем сигнала.

5. Посылка сигналов объектами, произвольно расположенными относительно любого ретранслятора, синхронизируется так, чтобы они поступили в ретранслятор в заданные моменты времени.

Синхронизация требует пояснения. Между демультиплексором объекта и ретранслятором или системным информатором отсутствуют задерживающие или преобразующие сигнал устройства. Это позволяет известными способами определить время прохождения сигнала T_{ij} между каждым объектом O_i и

любым MS . Для синхронизации в ответ на входящий от MS_j сигнал объекты должны послать свои сигналы так, чтобы они поступили в MS_j одновременно. Так как расстояния объектов от MS_j в общем случае различны, то сигнал от MS_j поступит к объектам в разное время и немедленно отправленные объектами сообщения поступят в MS_j в различные моменты времени. Для устранения разброса во времени произвольный объект O_i посылает свой сигнал в MS_j с задержкой $T_i = T_{max} - T_{ij}$, где $T_{max} \geq \max T_{ij}$. Тогда сигналы всех объектов, действующих так же, поступят в MS_j одновременно, с единой задержкой T_{max} . Если передаются сообщения, то одноименные разряды сообщений объектов совместятся и представят собой единое сообщение.

Чтобы сообщения поступали в MS одно за другим без временных пробелов, как одно сообщение, каждый объект O_i должен передать свое сообщение с задержкой $T_{max} - T_{ij} + Q$, где Q – суммарная длительность сообщений, переданных объектами ранее объекта O_i .

3. Команды управления взаимодействием объектов

Посылаемые объектам команды запускают операции, в том числе выполняющие взаимодействие частей распределенных алгоритмов. Команды направляются объектам в виде сообщения, которое состоит из одной команды или последовательности команд (команды группы 6). Некоторые группы команд представлены единственной командой, но их можно добавлять. Причем группа 6 позволяет разработчику алгоритма пополнять группы, создавая сложные сообщения – последовательности команд, с привлечением для этого команды из разных групп.

После рассмотрения команд перечислены операции, выполняющие все требуемые командами взаимодействия объектов. Детальное описание организации операций, в отличие от описания команд, требует обращения к деталям технической реализации. Поэтому в разделе 2 и этом разделе статьи описан только принцип действия операций, а более подробное описание требует обращения к цитируемым статьям.

Все команды разделим на следующие группы.

1. Команды анализа и изменения состояния модулей связи.
2. Команды передачи сообщений.
3. Команды синхронизации взаимодействия объектов.
4. Команды устранения конфликтов доступа.
5. Команды формирования системы.
6. Команды формирования цепочек связей.
7. Команды выполнения распределенных вычислений.
8. Групповые команды.
9. Команды поддержки работоспособности системы.
10. Команды связи с простыми объектами (интеллектуальными датчиками)

Рассмотрим каждую группу команд.

Группа 1 «Команды анализа и изменения состояния модулей связи». Используются описанные выше операции запрета и разрешения возврата модулем MS сигнала, поступившего в модуль от объекта. Если MS имеет несколько так управляемых каналов, то каждому соответствует характерная только для него частота управляемого сигнала.

Команды позволяют группе объектов следить за состоянием других групп объектов, бесконфликтно считывая состояние их MS . Проверяется отсутствие всех возвращаемых группой сигналов или присутствие хотя бы одного такого сигнала.

Группы 2 и 3 «Команды передачи сообщений» и «Команды синхронизации взаимодействия объектов». Пока предположим, что нет конфликта доступа объектов-источников к ретранслятору. Для передачи сообщения в MS источник использует оптические непрерывные сигналы двух частот f_1 и f_2 . Источник модулирует сигнал f_1 битами передаваемого сообщения, MS возвращает сигнал f_2 источнику, модулированным сигналами его сообщения, принимаемого ретранслятором на частоте f_1 . Любое количество объектов может одновременно посылать сигнал f_2 в ретранслятор, что не мешает передаче сообщения на частоте f_1 . Каждый объект, пославший f_2 в ретранслятор, получает его модулированным сигналами принятого ретранслятором сообщения. Таким способом осуществляется информирование группы объектов о текущем состоянии ре-

транслятора, и все эти объекты, включая приемники сообщения, получают передаваемое сообщение. Ссылки на подробности технической реализации этой схемы действий даны в разделе 5.

Синхронизация. Покажем примеры, использующие возможность демультиплексора одновременно посылать сигналы группе *MS* (раздел 5 и [4]). Первый пример: передача сообщения одного источника группе ретрансляторов. Для этого демультиплексор объекта просто *одновременно* посылает сообщение группе ретрансляторов, используемых приемниками [4].

Второй пример: передача сообщений группой источников одному ретранслятору в виде единого сообщения без временных пробелов между составляющими его сообщениями отдельных источников. Один объект из группы объектов, взаимодействующих через указанный ретранслятор, посылает всей группе одновременно синхронизирующую команду с указанием упорядоченного списка имен объектов, которые должны передать сообщения известной длины. Указанные объекты, получив команду, используют, как показано выше, свои $*T_i$ и формируют единое сообщение без временных пауз между сообщениями объектов.

Третий пример: группа источников также должна передать свои сообщения приемникам, ожидающим эти сообщения, но только после того, как эти источники сформируют свои сообщения, на что им требуется разное время. В группе источников выделяется один представитель всей группы. Его ретранслятор известен всем источникам и приемникам.

Подготовив сообщение для передачи, каждый источник группы в своем *MS* запрещает возврат сигнала модулем *MS*. Все участвующие в этих действиях объекты одновременно следят за состоянием всех модулей *MS* источников группы [4]. Если все модули *MS* источников не возвращают сигнал, то все источники сформировали свои сообщения, что является моментом синхронизации источников, которые передадут сообщения синхронно с задержками $*T_i$ в ретранслятор представителя группы и все приемники его получат.

Группа 4 «Команды устранения конфликтов доступа». Выше предполагалось, что источник передает сообщение при-

емнику без конфликта с другими источниками. Но конфликты доступа в сложных системах, особенно в системах управления, избежать нельзя. Сущность быстрого способа устранения конфликта в системе (рис. 1) заключается в следующем [5, 6].

Объект обнаружит конфликт доступа, если посланное им и возвращенное из *MS* сообщение будет искажено. После этого требуется выяснить, какие источники участвуют в конфликте, и упорядочить их передачи сообщений так, чтобы они были переданы как единое сообщение без временных пауз между частными сообщениями источников.

Для этого источники используют момент обнаружения ошибки как приход синхронизирующей команды от *MS* и передают в *MS* сообщение – логическую шкалу. В шкале каждому источнику, имеющему право посылать сообщение в данный *MS*, поставлен в соответствие один из разрядов шкалы. Конфликтующий источник ставит в свой разряд единицу. Логическая шкала поступает в *MS* и возвращается всем конфликтующим источникам. Источники определяют порядковый номер своей передачи и передают последовательно сообщения как единое сообщение. Конфликт устранен.

Группа 5 «Команды формирования системы». Если объектам присвоены порядковые номера (адреса), то, как показано выше, они позволяют формировать и изменять связи в системе с высокой скоростью. Покажем, как присваивать порядковые номера.

Присвоение новым объектам порядковых номеров. Пусть в произвольные моменты времени к системе подключаются новые объекты и им надо присвоить новые адреса. Присваивается объекту номер того свободного места в системе, в которое будет установлен объект. Эти места заранее выделены, и помещение в них объекта должно гарантировать поступление сигналов с демультимплексора объекта на *MS* модули системы.

Присвоение порядковых номеров в очереди к модулю *MS*. Потребность в этой операции возникает при работе со шкалами в операциях синхронизации передач сообщений и устранения конфликтов доступа. При обращении к конкретному модулю *MS*, как правило, участвует незначительная часть объ-

ектов системы, и достаточно применять шкалы с количеством разрядов значительно меньшим количества объектов в системе. Поэтому надо вводить отдельную нумерацию объектов, которым разрешено в текущей ситуации обращаться к модулю *MS*.

Приведем нумерацию с использованием способа децентрализованного приоритетного управления (ДПУ) [2, 7]. Суть простейшей формы ДПУ – «децентрализованного кодового управления» (ДКУ) – в рассматриваемом случае такая. Объектам уже приписаны номера занимаемых ими мест в системе. Начиная со старшего разряда номера, объекты последовательно посылают в *MS* сигналы на частоте f_1 , если значение очередного разряда их номера равно единице. От модуля *MS* объекты получают на частоте f_2 сигнал в ответ на каждый указанный сигнал, поступивший на частоте f_1 . Если текущий разряд порядкового номера конкретного объекта равен нулю, а сигнал f_2 сообщает объекту, что есть другие претенденты со значением единица этого разряда, то объект прекращает передачу остальных разрядов. При передаче всех разрядов объекту-победителю предоставляется первый разряд в шкале. Затем проводится аналогичный процесс для оставшихся объектов. Победитель получает второй разряд шкалы и т.д.

Группа 6 «Команды создания цепочек связей». Пусть имеется группа объектов, например, показанная на рис. 2 группа из четырех объектов *A*, *B*, *C*, *D*. Требуется так организовать связи между ними, чтобы сообщение, полученное объектом *A*, было им послано в *B*, от него в *C* и затем в *D*.

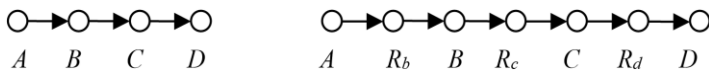


Рис. 2. Цепочка связей

Решение показано на этом же рисунке: объект *A* посылает сообщение в *R_b* – ретранслятор объекта *B* и т.д. Передача сообщения совмещается с его обработкой, часто выполняемой без задержки сообщения (группа команд 7 и 8).

В системе может быть создано несколько цепочек. Если объекты хранят имена цепочек и инструкции по их созданию, то

посылка единственной команды через SI запустит процесс одновременного формирования множества цепочек связей.

Группа 7 «Команды выполнения распределенных вычислений». Первый вид распределенных вычислений: по цепочке объектов передается сообщение, содержащее число, над которым объекты без задержки сообщения поочередно выполняют вычисления, используя свои локальные данные.

Ранее [2] для электронных проводных связей было показано, как выполнять над сообщением без его задержки двухместные логические операции, нахождение max и min , арифметические сложение, вычитание и умножение, и при этом не создавать сигнал заново в каждом объекте. Позднее такое решение было получено для волоконно-оптических связей [7].

Ниже дано решение, применимое для беспроводных оптических связей и канала с единственной волоконно-оптической линией. При вычислениях придется в объекте создавать новые оптические сигналы за счет энергии объекта, но задержка сигналов отсутствует, так как не требуется предварительный анализ значения приходящего в объект оптического сигнала.

Заметим, что в модулях MS сигналы не преобразуются и достаточно рассмотреть только действия в объектах.

Ограничимся примером выполнения вычислений с привлечением фотоприемников и лазерных источников. Пусть двоичные разряды чисел, над которыми выполняются вычисления, передаются в свободном пространстве по общему каналу оптическими сигналами (или по линии) на двух частотах: f_a для значения 1 и f_b для значения 0. Сигналы поступают в устройство, показанное на рис. 3. Пассивными оптическими средствами сигнал направляется в группу фотоприемников P_{1-4} (нумерация на рис. 3 – сверху вниз), причем сигнал f_a поступает на $P_{1,2}$, сигнал f_b поступает на $P_{3,4}$. Электрические сигналы с выходов $P_{1,3}$ поступают на лазерный источник T_a , генерирующий при этом оптический сигнал f_a . Сигналы от $P_{2,4}$ поступают на лазерный источник T_b , генерирующий сигнал f_b . Сигналы с выходов T_a и T_b объединяются и передаются в свободном пространстве в требуемый модуль MS .

Объект до прихода f_a или f_b в устройство подает управляющие сигналы C_1, \dots, C_4 из группы сигналов C_{1-4} на P_1, \dots, P_4 соответственно. Если поступают управляющие сигналы на $P_{2,3}$, то значение пришедшего оптического сигнала без анализа его значения и без задержки будет инвертировано; $P_{1,3}$ формирует из любого входного оптического сигнала оптический сигнал f_a ; $P_{2,4}$ формирует сигнал f_b ; $P_{1,4}$ не изменяет значение входного сигнала. Этих сигналов достаточно для выполнения указанных операций над числом в сообщении и числом в объекте [7]. Примеры выполнения распределенных вычислений приведены в [8].

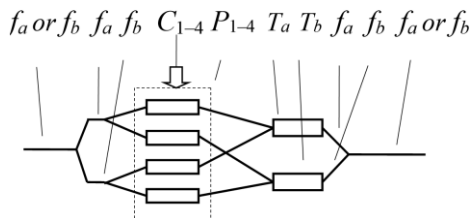


Рис. 3. Вычислитель

Второй вид распределенных вычислений не требует построения цепочек объектов. Он применим только для логических операций и нахождения max и min . Объект, используя SI , посылает объектам системы команду выполнить одну из таких операций. В ответ объекты синхронизируют в SI посылку каждого своего сигнала (команды группы 3) и далее действуют с учетом специфики конкретной команды. Так, для нахождения max объекты синхронно посылают старший разряд своего числа. Модуль SI ретранслирует эти сигналы всем их источникам. Если объекты послали в SI сигнал f_b и получают от SI сигналы f_a и f_b , то их числа не являются наибольшими и эти объекты прекращают участие в нахождении max . Оставшиеся объекты поступают аналогично с остальными разрядами чисел, что приводит к нахождению max . Легко построить аналогичные действия для остальных операций. Ретрансляторы используются подобно SI .

Группа 8. «Групповые команды». Эффективное средство воздействия на процессы, выполняемые в системе с оптически связями в свободном пространстве – групповые команды [7]. Групповая команда (ГК) – это сообщение, которое перемещается через цепочку объектов и содержит данные и инструкции объектам по выполнению указанных в ГК действий: обработке находящихся в ГК данных, изменению содержащихся в ГК инструкций, локальным действиям в объекте. Выполнение действий ГК не должно задерживать ее передачу. Изменение инструкций в ГК означает следующее. Объект, проанализировав часть проходящей через него ГК, заменяет оставшуюся часть ГК своей информацией *без задержки* на это преобразование. В результате ГК, перемещаясь через цепочку объектов, собирает по пути информацию об объектах и изменяется сама – ее влияние на объекты зависит от действий предшественников объекта в цепочке.

При посылке ГК группе объектов они могут распространять ее древовидно по многим цепочкам объектов.

Системные информаторы *SI* используются для посылки ГК объектам, имеющим указанные в команде отличительные признаки.

Хотя выше говорится о групповой команде, сообщение может быть групповой программой, состоящей из последовательности групповых команд, сформированной несколькими объектами. Такую последовательность желательно начинать с маркера начала (МН), в котором указана длина сообщения – место, где располагается маркер конца сообщения (МК). Если объекту требуется добавить в конец сообщения свою информацию, то он, не задерживая сообщение, будет пытаться заменить код МК кодом маркера продолжения сообщения (МП). Если при этом объект обнаруживает на этом месте код МК, то этот код заменяется кодом МП с указанием места расположения нового МК. Если же обнаружен код МП, то новая запись кода МП не портит предшествующий МП, но объект должен продолжать поиск МК. В МН следует указывать также максимально допустимую длину сообщения.

Группа 9. «Команды наблюдения за состоянием системы и поддержки ее работоспособности». Во многих ответственных задачах автору алгоритмов полезно иметь простой доступ к средствам проверки состояния системы, выполняющей его задачу. Это облегчают описанные выше команды.

– Достаточно послать только одну команду через *MS*, чтобы одновременно запустить тесты во многих объектах системы. В команде задаются детальные требования к тестам. Объекты могут проверять также работоспособность модулей *MS*.

– Если сформированы цепочки связей (группа 6) и в перемещающейся по цепочке групповой команде (группа 8) задано условие проверки, то за время перемещения сообщения по цепочке будет определено количество объектов, удовлетворяющих заданному условию, и указаны их адреса (группа 7) [7].

– Смена объектом модуля *MS* позволяет просто повышать отказоустойчивость средств связи: достаточно иметь количество дополнительных модулей *MS* для замены, равное только ожидаемому количеству отказавших модулей.

Один из возможных вариантов замены отказавшего модуля: объект, обнаружив отказ используемого им модуля, занимает запасной модуль, проводя борьбу за модуль с другими объектами подобно способу устранения конфликта доступа (группа 4). Если отказов больше, чем имеется запасных модулей *MS*, то объект будет подключен к модулю, уже занятому объектами, и будет использовать модуль совместно с ними.

Группа 10. Команды связи с простыми объектами (интеллектуальными датчиками). Для таких объектов желательно упрощать средства сетевого взаимодействия. Исключим в них демультимплексоры. Простые объекты посылают в *SI* ненаправленный сигнал или сигнал лазерного источника, постоянно направленный на *SI*.

Приведем три примера. Пусть простые объекты разделены на группы, которым присвоены имена. Произвольный объект системы через *SI* посылает группе команду передать свои данные (например, показания прибора). Объекты группы упорядочены, и, следуя порядку, они последовательно передают через *SI*

свои данные, которые ретранслируются всем объектам, включая «заказчика».

Пусть теперь группе посылается команда: передать данные только от тех объектов, у которых произошло изменение их состояния: простые объекты также обращаются к *SI*, применяют команды групп 3 и 4, определяют моменты начала передачи своих данных и передают их как одно общее сообщение.

Наконец, пусть простым объектам разрешено передавать данные по собственной инициативе. Тогда они действуют как обычные активные объекты, но обращаться могут только к *SI*.

Все такие упрощенные действия с применением *SI* подобны взаимодействиям через общую шину.

О базовых операциях. Как следует из описания групп команд, они требуют исполнения следующих базовых операций: запрета и разрешения модулю *MS* возвращать сигнал; бесконфликтного считывания состояния *MS*; передачи сообщения одного источника одному приемнику без конфликта; такой же передачи, но группе приемников; синхронизации передач сообщений группы источников; устранения конфликтов доступа; присвоения порядковых номеров объектам системы; то же для объектов в очереди к *MS*; создания цепочек объектов; распределенных вычислений.

Замечание к разделу 3. В разделе не приведены форматы команд, так как цель статьи – только дать способы формирования групп команд, однако для каждой из приведенных команд указан способ ее реализации. Группы команд могут пополняться новыми командами, которые потребуют решаемые задачи. Это особенно относится к командам групп 7 и 8.

4. Примеры областей применения предложенных команд и операций

Этот раздел носит иллюстративный характер, приложения операций рассмотрены кратко, основная цель – продемонстрировать новизну и полезность решений статьи для ряда областей применения.

Ассоциативные операции. Под ассоциативными операциями понимаются операции по поиску и преобразованию информации, которые обращаются к множеству ее носителей не по их адресам, а по набору признаков, характеризующих сам носитель или его информацию. Обычно речь идет об обращении к специально организованному ассоциативному запоминающему устройству (АЗУ) или к ассоциативному процессору (АП), в котором в процессе поиска допускается изменять содержимое его АЗУ и использовать полученный результат в последующих ассоциативных операциях. Часть предложенных в настоящей статье операций являются ассоциативными. Типично ассоциативными являются операции, использующие обращение к системному информатору *SI*, позволяющие обращаться к объектам по набору характерных для объекта признаков. К ассоциативным операциям относятся групповые операции, обращающиеся по набору признаков к цепочке объектов. Перемещаясь от объекта к объекту, они передают объектам новые признаки и получают от них признаки для следующих объектов. Такие команды или программы имеют переменную длину и без задержки постепенно пополняются новым содержимым, а также разделяются на части, перемещающиеся по разным путям.

Можно рассмотреть и другие варианты ассоциативности, но важно выделить, что принципиально нового дает описываемое решение. В настоящей статье и ее двух предшественниках [3, 4], где рассмотрены технические детали оптоэлектронной организации связей, ассоциативные операции действуют не на отдельном устройстве, а на множестве распределенных программируемых устройств с сетевой организацией связи между ними. При этом ассоциативные операции *вливают на всю структуру взаимодействия системы устройств.*

Активные объекты, участвующие в ассоциативных взаимодействиях, не обязательно должны иметь АЗУ или АП, но их наличие ускоряет действия объектов.

Ассоциативные операции полезны также в приведенных ниже трех областях.

Управление потоком данных (Dataflow architecture). В таких архитектурах продвижение процесса обработки данных

управляется готовностью промежуточных результатов, что требует быстрых действий по информированию о готовности. Типичные действия: рассылка результатов потребителям по их адресам или потребителям, имеющим заданный набор свойств (признаков); проверка потребителем готовности всех результатов групп источников.

Команды и операции из раздела 3 позволяют быстро выполнять приведенные выше и другие близкие по структуре действия. Рассылка источниками результатов потребителям, имеющим заданный набор признаков или адресов, выполняется с помощью модулей *MS*.

Более детально. Источники записывают сведения о готовности результатов в элементы памяти *MS*, используя операции группы 1. Группы приемников, не конфликтуя между собой и также используя операции группы 1, одновременно обращаются к группе модулей *MS* и проверяют готовность всех результатов в источниках, подключенных к этим модулям.

Команды статьи ускоряют еще одно полезное действие – формируют группы потребителей результата (приемников). Группа источников, используя *MS*, в общем сообщении посылает приказ приемникам, имеющим требуемые признаки или требуемые адреса, подключиться к общему для них *MS* (создать группу).

Системы с переменной структурой. Работы в этой области направлены на быстрое изменение связей в компьютере под решаемую задачу. Способы статьи направлены на это же: переключение отдельных связей, групп связей или всех связей – практически одинаково быстрые операции, сравнимые по скорости с обращением к ячейке оперативной памяти; перестройка связей в системе проводится не в специально выделенные интервалы времени, а непрерывно по мере потребности. Структура системы формируется непрерывно и быстро.

Приведем примеры. Пусть объект, используя *SI*, посылает всем объектам системы команду выполнить настройку своих связей в системе. Объекты хранят инструкции по настройке связей с *MS*. В ответ на единственную команду выполнится требуемая перестройка связей одновременно всеми объектами.

Пусть теперь объект, используя команды групп 2 и 3, адресно, через ретрансляторы, обращается к группе объектов с аналогичной командой. Скорость перестройки такая же.

Пусть, наконец, объекты используют для перестройки групповые команды, они дают дополнительные средства для перестройки связей, учитывающие сведения о состоянии других объектов, помещаемые объектами в групповую команду.

Эволюционные алгоритмы. Во многих эволюционных алгоритмах группы объектов, действуя параллельно, многократно находят частные варианты решения, которые затем также многократно сравниваются между собой для выявления имеющих максимальное или минимальное значение. Команды группы 7, вычисляют *max* или *min* без задержки, существенно быстрее обычно применяемых способов.

Общее замечание. Применение команд из раздела 3 в рассмотренных областях приводит к очень близким действиям, хотя в обычной практике они существенно различаются.

5. О технической реализуемости устройств системы

Так как статья не рассматривает технические вопросы, приведем только известные примеры, показывающие реализуемость двух центральных компонентов системы – ретранслятора и демультиплексора.

Ретранслятор. Основные составляющие ретранслятора – ретрорефлектор, модуляторы света, фотоприемники. В качестве примера работы, где рассмотрены все эти компоненты, приведем упрощенно (с показом только необходимых для данной статьи деталей) результат U.S. Naval Research Laboratory (NRL) [13], рис. 4.

На рис. 4 введены: 1 – световой сигнал, идущий от удаленного лазерного источника; 2 – линза; 3 – плоскость с модуляторами/фотоприемниками, созданными с использованием вертикальных множественных квантовых ям (MQW Vertical Modulator/Photoreceiver); 4 – фокальная плоскость линзы, в которой расположено зеркало. Элементы 2 и 4 составляют ретрорефлектор типа «кошачий глаз».

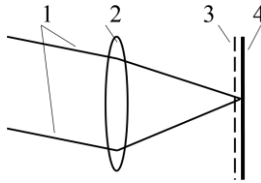


Рис. 4. Устройство с ретрорефлектором

Сигнал 1 фокусируется на зеркале 4 и возвращается к источнику. Сигналы 1 от других таких же источников попадут на другие участки зеркала и также возвратятся к источникам. На прямом и обратном пути каждый сигнал 1 проходит через соответствующий ему элемент 3, используемый как фотодетектор при приеме сигнала и модулятор света при возврате сигнала источнику. На прямом пути сигнал 1 несет сообщение источника, которое принимает фотодетектор 3. После передачи сообщения источник, используя 1, передает непрерывный сигнал. Этот сигнал приемник модулирует электрическими сигналами, действующими на элемент 3 – модулятор, и такое сообщение возвращается источнику. Каждому источнику выделен отдельный элемент 3, и устройство, показанное на рис. 4, имеет независимо работающие каналы для связи с каждым источником сигналов 1. Передача сообщений выполнялась на 7 км в обычных атмосферных условиях со скоростью 45 Мбит/сек.

В нашей статье ретранслятор имеет общие для всех объектов ретрорефлектор, модуляторы и фотоприемники.

Демультимплексор. В статье [1] приведена решетка из тридцати пяти лазерных источников, выполненных на вертикально излучающих лазерах (ВИЛ, VCSEL). Лазер выбирается адресно и генерирует сигналы в диапазоне 958–962 нм со скоростью ~ 10 Гбит/сек (позднее получено ~ 40 Гбит/сек).

В Sandia National Laboratories был проделан цикл работ по созданию большого размера решеток адресуемых VCSEL – до 16К лазеров [11, 12].

Рассмотрим один из возможных путей создания демультимплексоров для объектов рассматриваемой системы. Демультимплексор объекта содержит решетку лазеров;

дешифратор, позволяющий обратиться к любому лазеру решетки; регистр, хранящий историю обращения дешифратора к лазерам. При обращении дешифратора или регистра к лазеру последний генерирует непрерывный сигнал, который пассивными отклоняющими средствами направляется в требуемом направлении. Дополнительные средства задают частоту сигнала лазера и модулируют его сигналами сообщения. Наличие регистра не обязательно, но ускоряет обращение к группам объектов.

Известны другие способы управления направлением светового луча, которые также потенциально могут быть использованы в демультимплексоре, некоторые из них приведены в [3].

Демультимплексоры и ретрансляторы не участвуют в преобразовании данных, и, как указано во введении, система не выполняет оптические вычисления [10].

6. Заключение

Суммируем основные результаты статьи.

– Все предложенные в статье команды и операции ориентированы на цифровую систему, в которой активные объекты и модули связи объединены оптическими каналами связи, формируемые в свободном пространстве.

– Времена формирования отдельной связи, одновременного формирования группы связей или всех связей в системе близки к времени обращения к ячейке оперативного запоминающего устройства. Интервал времени между началом передачи сообщения источником и началом приема его приемником равен времени прохождения в свободном пространстве оптического сигнала между указанными объектами.

– Объекты системы объединяются в цепочки, на которых выполняются распределенные вычисления над данными, находящимися в передаваемом по цепочке сообщении и в объектах. Такие вычисления выполняются без задержки сообщения.

– В цепочках объектов распределенными вычислениями управляют специальные сообщения – групповые команды, объекты могут вносить в них изменения, влияя на действия

остальных объектов цепочки. Все эти действия выполняются без задержки сообщения.

– Объекты быстро устраняют конфликты при доступе к общим ресурсам.

– Объекты синхронизуют передачу своих сообщений, и они поступают к приемнику одно за другим без временных пробелов, как одно сообщение.

– Объектом системы может быть отдельное программируемое устройство или комплекс таких устройств. Во всех таких объектах естественно использовать как оптические связи, так и электронные. Поэтому количество оптических связей в системе может быть существенно меньше количества коммутируемых устройств.

– Приведенные в разделе 5 статьи ссылки показывают, что технические устройства, необходимые для предлагаемых способов коммутации и обработки данных, являются предметом многих успешных исследований.

– Рассмотренная система имеет высокую однородность, в нее легко вносить изменения, влияющие на производительность алгоритмов. Так, незначительное усложнение модуля связи – включение в него элемента памяти, управляющего возвратом светового луча объекту, – существенно расширило возможности системы.

– Сетевые структуры вычислительных и управляющих систем представляют также интерес как объекты управления с очень жесткими требованиями к гибкости и скорости управления формированием сетевых связей и к скорости протекающих в системе процессов. Приведенные в статье способы позволяют дополнительно улучшить эти параметры систем.

Литература

1. МАЛЕЕВ Н.А., КУЗЬМЕНКОВ А.Г., ШУЛЕНКОВ А.С. И ДР. *Матрицы вертикально излучающих лазеров спектрального диапазона 960 нм* // Физика и техника полупроводников. – 2011. – Том 45, вып. 6. – С. 836–839. – [Электронный ресурс]. – URL: <http://journals.ioffe.ru/ftp/2011/06/p836-839.pdf> (дата обращения: 03.05.2015).

2. ПРАНГИШВИЛИ И.В., ПОДЛАЗОВ В.С., СТЕЦЮРА Г.Г. *Локальные микропроцессорные вычислительные сети.* – М.: НАУКА, 1984. – 176 с.
3. СТЕЦЮРА Г.Г. *Организация коммутируемых непосредственных соединений активных объектов сложных цифровых систем* // Управление большими системами. – 2014. – Вып. 49. – С. 148–165. – URL: http://ubs.mtas.ru/archive/search_results_new.php?publication_id=19284 (дата обращения: 03.02.2015). (Перевод на английский: STETSYURA G.G. *Organization of Switched Direct Connections of Active Objects in Complex Digital Systems* // Automation and Remote Control. – 2015. – Vol. 72, No. 9. – P. 345–354).
4. СТЕЦЮРА Г.Г. *Средства для расширения функций коммутируемых непосредственных оптических связей в цифровых системах* // Управление большими системами. – 2015. – Вып. 56. – С. 211–223. – URL: <http://ubs.mtas.ru/upload/library/UBS5610.pdf> (дата обращения: 03.08.15).
5. СТЕЦЮРА Г.Г. *Способ устранения конфликтов доступа* // Журнал радиоэлектроники. – 2012. – №5. – [Электронный ресурс]. – URL: <http://jre.cplire.ru/jre/may12/7/text.pdf> (дата обращения: 03.05.15).
6. СТЕЦЮРА Г.Г. *Исключение задержки в передаче сообщений при устранении конфликтов доступа* // Журнал радиоэлектроники. – 2012. – №8. – [Электронный ресурс]. – URL: <http://jre.cplire.ru/jre/aug12/9/text.pdf> (дата обращения: 03.05.15).
7. СТЕЦЮРА Г.Г. *Базовые механизмы взаимодействия активных объектов цифровых систем и возможные способы их технической реализации* // Проблемы управления. – 2013. – №5. – С. 39–53. – [Электронный ресурс]. – URL: http://pu.mtas.ru/archive/Stetsyura_13.pdf (дата обращения: 03.05.2015). ('Online First' on SpringerLink – URL: <http://link.springer.com/article/10.1134/S000511791504013X>).
8. СТЕЦЮРА Г.Г. *Совмещение вычислений и передачи данных в системах с коммутаторами* // Автоматика и телемеханика. – 2008. – №5. – С. 170–179. – URL: <http://www.mathnet.ru/links/88b780543febe14c50f605248e58d92f/at664.pdf> (дата обращения: 03.05.15).

9. СТЕЦЮРА Г.Г. *Патент РФ* № 2538314. – 2015.
10. AMBS P. *Optical Computing: A 60-Year Adventure* // *Advances in Optical Technologies*. – 2010. – Vol. 2010. Article ID 372652. – 15 p. – [Электронный ресурс]. – URL: <http://www.hindawi.com/journals/aot/2010/372652/> (дата обращения: 23.05.15).
11. *Final Report on LDRD Project: Heterogeneous Integration of Optoelectronic Arrays and Microelectronics* // Sandia National Laboratories. – 2003. – 97 p. – [Электронный ресурс]. – URL: <http://prod.sandia.gov/techlib/access-control.cgi/2003/030411.pdf> (дата обращения: 03.05.15).
12. GEIB K.M., CHOQUETTE K.D., SERKLAND D.K., ALLERMAN A.A. *Fabrication and performance of two-dimensional matrix addressable arrays of integrated vertical-cavity lasers and resonant cavity photodetectors* // *IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics*. – 2002. – Vol. 8. – No. 4. – P. 943 – 947.
13. RABINOVICH W.S., GOETZ P.G., MAHON R. et al. *45-Mbit/s cat's-eye modulating retroreflectors* // *Optical Engineering*. – 2007. – Vol. 46. – No. 10. – P. 104001-1–104001-8.

FAST EXECUTION OF PARALLEL ALGORITHMS ON DIGITAL SYSTEMS WITH DYNAMICALLY FORMED NETWORK STRUCTURES

Gennady Stetsyura, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Doctor of Science, professor (65, Profsoyuznaya str., Moscow, Russia, phone (495)334-78-31).

Abstract: Wireless optical connections are suggested to accelerate execution of parallel algorithms by supporting fast formation of connection structures and fast distributed computations in a digital system.

Keywords: parallel algorithms, distributed computing, network structures, wireless optical communications.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии М.В. Губко

Поступила в редакцию 13.05.2015.

Опубликована 30.09.2015.

ТЕОРЕТИКО-ИГРОВОЙ ПОДХОД К АНАЛИЗУ ПЕРСПЕКТИВ РАЗВИТИЯ СИСТЕМЫ ЭЛЕКТРОСНАБЖЕНИЯ РЕГИОНА

Беленький А. С.¹, Болкунов Д. С.²

(НИУ «Высшая школа экономики», Москва, Россия)

Рассматривается проблема построения элементов инструментария для количественного анализа перспектив развития системы электроснабжения региона, исходя из оценки администрацией региона существующего уровня обеспеченности электроэнергией населения и предприятий региона и тенденций развития этого региона. Предлагается математическая модель, с использованием которой перспективы инвестирования в строительство новых электростанций и хранилищ электроэнергии в регионе оцениваются в рамках бескоалиционной игры двух лиц на выпуклых многогранниках. В этой игре платежная функция одного из игроков является суммой билинейной функции и линейной функции векторных аргументов, а платежная функция другого игрока является билинейной функцией тех же векторных аргументов. Доказывается возможность отыскания точек равновесия в рассматриваемой игре из решения задач линейного программирования, образующих двойственную пару. Эти точки определяют в частности, приемлемые для обеих сторон объемы инвестирования в систему электроснабжения региона и договорные цены на электроэнергию для потребителей.

Ключевые слова: выпуклые многогранники, игры двух лиц, линейное программирование, равновесие Нэша, седловые точки, управление большими системами.

¹ Александр Соломонович Беленький, доктор технических наук, профессор (abelenky@hse.ru).

² Дмитрий Сергеевич Болкунов, магистр прикладной математики и информатики (d.bolkunov@yandex.ru).

Введение

Электроэнергетика является одной из основных отраслей экономики любого государства, и успешность функционирования и развития этой отрасли определяется прежде всего тем, какие меры предусматривает государство для обеспечения стабильности поставок электроэнергии всем категориям пользователей по приемлемым для них ценам и для создания условий, стимулирующих инвестиции в эту отрасль, в частности, в строительство новых мощностей по производству электроэнергии. В последние два десятилетия существенное внимание стало также уделяться инвестированию в строительство хранилищ электроэнергии, особенно вследствие появления новых идей в использовании физических и химических процессов в этих системах, а также в связи с бурным развитием систем производства электроэнергии из энергии солнца и ветра. Кроме того, хранилища электроэнергии оказываются конкурентоспособными с пиковыми генераторами (т.е. с генераторами, используемыми для подачи электроэнергии потребителям в часы пик) как с экономической точки зрения, так и с точки зрения обеспечения бесперебойных поставок электроэнергии всем пользователям, подключенным к сетям электроснабжения.

Интерес инвесторов к системам производства, хранения и передачи электроэнергии в условиях рынка определяется прежде всего экономическими соображениями, т.е. тем, насколько инвестиции в эти сферы деятельности выгодны с точки зрения умножения вложенного в них капитала как в краткосрочной, так и в долгосрочной перспективе, что, в свою очередь, зависит от правил, по которым функционирует этот рынок. Поскольку правила игры на рынке электроэнергии, устанавливаемые регулятором рынка (чаще всего государством), существенно влияют не только на инвестиции в строительство новых электростанций и хранилищ электроэнергии (или новых блоков действующих электростанций и хранилищ), но и на оптовые цены на электроэнергию, формирующиеся на краткосрочных и долгосрочных рынках про-

даже электроэнергии, регулятору рынка необходим аппарат для количественного анализа рынка, который позволил бы оценить последствия введения регулятором тех или иных правил работы на рынке с точки зрения возможных действий участников рынка.

В настоящей работе рассматривается проблема оценки объемов электроэнергии, продаваемых по прямым двусторонним договорам между производителями и потребителями электроэнергии на оптовом рынке электроэнергии в регионе, оптовых цен на нее и ожидаемых объемов инвестиций производителей как в строительство новых мощностей, так и в строительство хранилищ электроэнергии (или их блоков) в условиях конкретного рынка электроэнергии. В ней предлагается теоретико-игровой подход к решению этой проблемы, в основе которого лежит идея моделирования взаимодействия индивидуальных производителей электроэнергии (или группы производителей электроэнергии) в регионе с индивидуальными потребителями (или с группой потребителей электроэнергии) в регионе на определенном временном промежутке (в несколько лет) в форме бескоалиционной игры двух лиц. В этой игре множества допустимых стратегий каждого (из двух) игроков являются выпуклыми многогранниками, а платежные функции игроков являются суммой билинейной и линейной функций векторных переменных (для одного из игроков) и билинейной функцией тех же векторных переменных для другого игрока. Компонентами векторов этих переменных являются объемы электроэнергии, производимые группой производителей (которая, в частности, может состоять из одного крупного производителя), рассматриваемой в качестве одного из игроков, и цены на поставляемую электроэнергию, приемлемые для группы потребителей (которая может состоять из одного крупного потребителя), рассматриваемой в качестве другого игрока в игре.

В модели учитываются технологические особенности производства предполагаемых (производителями электроэнергии в регионе) к строительству электростанций и хранилищ электроэнергии (или их блоков), а также существующие технические ограничения, связанные с производством, хранением и переда-

чей электроэнергии. Показано, что отыскание равновесных объемов производства и хранения электроэнергии и (оптовых) цен на нее для потребителей эквивалентно отысканию седловых точек в некоторой антагонистической игре на выпуклых многогранниках допустимых стратегий игроков, являющихся множествами допустимых стратегий игроков в исходной бескоалиционной игре двух лиц. Отыскание же седловых точек в указанной антагонистической игре осуществляется решением задач линейного программирования, образующих двойственную пару, что позволяет рассматривать взаимодействие любого конечного числа производителей и потребителей электроэнергии в регионе и реализовывать поиск равновесных стратегий в игре с использованием стандартного программного обеспечения (для решения задач линейного программирования), позволяющего за приемлемое время решать задачи с миллионами переменных и ограничений [13].

Следует отметить, что хотя, наряду с прямыми долгосрочными договорами, аукционы по продаже электроэнергии представляют возможный (альтернативный) механизм взаимодействия производителей и потребителей электроэнергии, на сегодняшний день во многих странах (в частности, в странах северной и западной Европы) только прямые договора являются действующим, общепринятым механизмом по продаже больших объемов электроэнергии на перспективу. Обзор различных типов аукционов по продаже электроэнергии на короткую перспективу, в частности, на сутки вперед, предлагается в [2], а обсуждение аукционов по продаже электроэнергии на долгосрочную перспективу, которые существуют на некоторых рынках (к примеру, в России и в некоторых штатах США), можно найти в [22]. Следует отметить, что хотя в России у участников рынка электроэнергии существует возможность заключать прямые долгосрочные договора на продажу электроэнергии, в настоящее время основным способом взаимодействия производителей и потребителей электроэнергии являются аукционы по продаже электроэнергии и мощности [3].

Статья состоит из введения, двух разделов и заключения. В первом разделе описывается содержательная постановка задачи

и предлагается краткий обзор подходов к моделированию проблем инвестирования в новые мощности электроэнергетики (электростанции и их блоки). Эти подходы тесно связаны с рассматриваемой в статье задачей и дают определенные представления о направлениях разработки математического аппарата для анализа и исследования крупномасштабных систем электроснабжения региона. Во втором разделе устанавливается эквивалентность отыскания точек равновесия в исходной бескоалиционной игре двух лиц отысканию седловых точек в некоторой вспомогательной антагонистической игре двух лиц на тех же множествах допустимых стратегий игроков, что и в исходной бескоалиционной игре двух лиц (описывающей взаимодействие производителей электроэнергии и ее потребителей на оптовом рынке электроэнергии в регионе). Отыскание же седловых точек в указанной антагонистической игре может осуществляться решением задач линейного программирования, образующих двойственную пару [1].

1. Содержательная постановка задачи и краткий обзор публикаций, близких по содержанию к проблематике статьи

1.1. СОДЕРЖАТЕЛЬНАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим взаимодействие производителя (или группы производителей) электроэнергии с потребителем (или с группой потребителей) электроэнергии в некотором регионе в какой-либо момент времени в условиях, когда производители могут заключать с потребителями только двусторонние договоры на поставку им электроэнергии на последующие T лет (период планирования).

На основании этих двусторонних договоров производители электроэнергии принимают решения об инвестировании в строительство новых мощностей и хранилищ электроэнергии и/или в строительство новых блоков действующих электростанций и хранилищ электроэнергии. Отыскание взаимоприемлемых условий поставки и покупки электроэнергии в рамках указанных двусторонних договоров можно осуществлять, рассматривая взаи-

модействие договаривающихся сторон в форме бескоалиционной игры двух лиц, в которой в качестве первого игрока выступает группа всех производителей электроэнергии в регионе (которая, в частности, может состоять из одного крупного производителя), а в качестве второго – группа всех потребителей электроэнергии (которая, в частности, может состоять из одного крупного потребителя). В этой игре множеством допустимых стратегий каждого (из двух) игроков является некоторый выпуклый многогранник, задаваемый совместной системой линейных неравенств балансового типа, а платежные функции игроков представляют собой сумму билинейной и линейной функций двух векторных переменных (для первого игрока) и билинейную функцию тех же векторных переменных (для второго игрока), причем каждая из векторных переменных принадлежит одному из этих двух выпуклых многогранников.

При моделировании взаимодействия производителей и потребителей электроэнергии региона в форме игры предполагается, что оптовый рынок электроэнергии имеет узловую структуру, т.е. разбит на несколько непересекающихся частей, называемых узлами. Если конкретный потребитель и конкретный производитель электроэнергии находятся в одном узле, то ограничения на пропускную способность по передаче электроэнергии между этим производителем и этим потребителем предполагаются несущественными и не учитываются в модели. Если же они находятся в разных узлах, то, напротив, ограничения на пропускную способность линий электропередач, соединяющих узлы, в одном из которых находится рассматриваемый производитель, а в другом рассматриваемый потребитель, являются частью модели. Предполагается, что линии электропередач принадлежат некоторой компании, которая устанавливает цены на передачу электроэнергии между узлами, и производители электроэнергии не могут влиять на эти цены.

В рамках рассматриваемого взаимодействия с потребителями электроэнергии предполагается, что группа производителей электроэнергии (первый игрок) в начале каждого года периода

планирования инвестирует в строительство а) новых или в модернизацию имеющихся электростанций различных типов (к примеру, газотурбинных или угольных) и в строительство различных типов новых хранилищ электроэнергии (к примеру, химических) с учетом ограничений на максимально возможные ежегодные инвестиционные расходы, а также с учетом стоимости строительства новых электростанций, и б) новых хранилищ электроэнергии и/или модернизацию имеющихся хранилищ.

Непостоянство спроса на электроэнергию и высокая стоимость её хранения принадлежат к числу основных рыночных проблем электроэнергии, которые вынуждают производителей электроэнергии использовать одновременно генераторы базовой и пиковой нагрузки, а также хранилища электроэнергии. Ясно, что рассмотрение взаимодействия производителей и потребителей электроэнергии в течение каждого часа каждого года периода планирования представляет значительный практический интерес, так как позволяет учесть как дневные, так и сезонные перепады спроса на электроэнергию, которые могут влиять на решения о строительстве новых электростанций и хранилищ электроэнергии различных типов. Однако использование часовой дискретности в течение всего периода планирования связано с существенным увеличением размера оптимизационных задач, в форме которых удастся математически описывать взаимодействие производителей электроэнергии и ее потребителей в регионе. Кроме того, достаточно достоверная оценка ожидаемого спроса потребителей в каждый час в течение каждого года периода планирования представляет принципиальные трудности.

Для того чтобы учесть дневные и сезонные перепады спроса и при этом избежать указанных трудностей, предлагается рассматривать некоторую «усреднённую» структуру спроса на электроэнергию. Идея этого усреднения состоит в разбиении каждого года из периода планирования на «типичные» (непересекающиеся) периоды взаимодействия производителей и потребителей электроэнергии, каждый из которых повторяется несколько раз в году, и отражающих, например, различия в объемах потребления

электроэнергии в регионе в разное время года. Каждый «типичный» период может длиться как несколько дней, так и несколько недель, что позволяет учесть суточные колебания уровня спроса на электроэнергию в рамках каждого «типичного» периода.

Для упрощения понимания дальнейших рассуждений можно, например, считать, что в каждом году периода планирования существуют четыре «типичные» недели, каждая из которых повторяется тринадцать раз подряд в году в пределах одного и того же квартала. Таким образом, в каждом году периода планирования, в каждом квартале года выбирается некоторая «типичная неделя» спроса на электроэнергию. Тем самым, охватываются 364 ($364 = 13 \cdot 7 \cdot 4$) дня в году из 365 или 366 дней, а 365-й день обычного и 366-й день високосного года считаются особыми днями или особыми «типичными» периодами, первый из которых повторяется один раз в году, а второй один раз в четыре года. При этом, например, в каждой из 13 недель квартала, которому принадлежит выбранная «типичная» неделя, уровень спроса на электроэнергию в каждый конкретный день недели (один и тот же для всех 13 недель), например, в среду, считается одним и тем же для всех 13 недель и полагается равным уровню спроса в среду «типичной» недели. (Ясно, что этот уровень спроса может быть разным для разных дней «типичной» недели, т.е. уровень спроса, например, во вторник «типичной» недели и уровень спроса в среду той же самой «типичной» недели могут быть различны.)

Производители выбирают объемы электроэнергии, поставляемые потребителям исходя из заявок потребителей с учетом ограничений на мощность электростанций и хранилищ электроэнергии, которые могут использоваться в каждом году периода планирования, а также с учетом возможности изменения за короткий промежуток времени уровня производства электроэнергии на различных типах электростанций. В свою очередь потребители выбирают цены, которые они готовы заплатить за единицу объема поставляемой им электроэнергии при условии поставки им определенного объема электроэнергии ее производителями.

Эти объемы и цены фиксируются в договорах между производителями и потребителями электроэнергии с взаимоприемлемым для договаривающихся сторон уровнем детализации их численных значений в каждом конкретном году периода планирования.

Возможность расчета равновесных объемов поставок электроэнергии и цен на нее в каждый «типичный» период каждого года, входящего в период планирования, позволяет каждой из сторон договора на стадии заключения договора выбрать желаемый для нее уровень детализации объемов поставок электроэнергии и цен на нее, вплоть до часового, в рамках каждого «типичного» периода (повторяющегося соответствующее число раз в каждом году периода планирования). Это может быть сделано решением задач распределения ресурсов в какой-либо постановке (в частности, например, в форме задач линейного программирования) с учетом важных для каждой из сторон особенностей (соответственно) производства и потребления электроэнергии в любом временном промежутке внутри каждого из повторяющихся «типичных» периодов. Кроме того, указанная возможность расчета равновесных объемов поставок электроэнергии и цен на нее позволяет договаривающимся сторонам предусмотреть возможность их пересчета по взаимному согласию при возникновении непредвиденных, в частности, форс-мажорных обстоятельств у какой-либо или у обеих сторон.

Необходимо заметить, что, в отличие от предлагаемой в настоящей работе модели, в известных авторам существующих математических моделях инвестирования в строительство новых мощностей электроэнергии, которые оценивают будущие инвестиции производителей по ценам, формирующимся в условиях конкуренции производителей при меняющихся спросе и ценах на энергоносители, не учитывается влияние крупных потребителей на цены на электроэнергию и, как следствие, на инвестиции производителей в строительство и/или модернизацию имеющихся мощностей по производству и хранению электроэнергии.

1.2. КРАТКИЙ ОБЗОР ПУБЛИКАЦИЙ, БЛИЗКИХ ПО СОДЕРЖАНИЮ К ПРОБЛЕМАТИКЕ СТАТЬИ

В [7] конкуренцию n производителей на рынке электроэнергии в течение некоторого периода времени T (более одного года) предлагается описывать в виде динамической игры n лиц, в которой каждый из игроков принимает как инвестиционные, так и производственные решения. В рамках этой игры в начале каждого года в течение периода T производители принимают решения об инвестировании в новые мощности, которые могут быть введены в эксплуатацию в течение некоторого времени (определяемого возможностями строительства), выбирая эти решения из некоторых конечных множеств допустимых решений. При этом выбор каждого из производителей осуществляется с целью максимизации ожидаемой полезности от своих решений в условиях неопределенности, порождаемой двумя основными факторами. Во-первых, предполагается, что всем производителям известен лишь ожидаемый спрос на электроэнергию, а, во-вторых, предполагается, что часть производителей более мелких, чем конкретный производитель, принимают решения об инвестициях после того как это решение принимается указанным конкретным производителем и становится известным этим более мелким производителям.

По окончании периода инвестиций все производители участвуют в аукционе Курно по продаже электроэнергии на спотовом рынке с известной для всех функцией рыночного спроса на электроэнергию и с учетом построенных к этому моменту новых мощностей. При этом предполагается, что аукцион проводится ежечасно с момента начала торговли электроэнергией и до начала следующего периода инвестирования. По окончании этапа торговли электроэнергией в последнем периоде T оценивается ожидаемая прибыль от ежегодной продажи электроэнергии в будущем (т.е. за пределами периода планирования). Предполагается, что ежегодный доход каждого производителя в будущем будет таким же, каким он ожидается в течение последнего периода T с учетом «стоимости» денег в будущем (отражаемой введением

некоторого коэффициента дисконтирования). При этом будущий период предполагается бесконечным, так что ожидаемая прибыль за пределами периода планирования (т.е. за пределами периода T) оценивается суммой некоторой убывающей геометрической прогрессии.

Авторы работы [7] обсуждают в ней результаты численных экспериментов на построенном ими модельном примере, предлагая собственные выводы о работе моделируемого ими рынка электроэнергии. В частности, они полагают, что а) с целью увеличения собственной прибыли за счет повышения цены на электроэнергию доминирующий на рынке производитель может поставить электроэнергию в объеме меньшем, чем ему позволяют его технологические и технические возможности, б) в то время как контрактные обязательства участников рынка влияют на объемы инвестиций, указанные выше неопределенности, учитываемые в модели, могут влиять на динамику инвестиций (например, приводить к их отсрочке).

Рассмотренная в [7] модель имеет ряд недостатков, которые ограничивают её применимость на практике. Во-первых, в ней не учитываются ни ограничения на передачу электроэнергии, ни технологические ограничения при производстве электроэнергии. Авторы [7] предполагают, что в каждый час года производство электроэнергии ограничено только существующей мощностью электростанций, в то время как такое ограничение не является единственным существенным ограничением, которое следует учитывать. Например, уровень производства электроэнергии на базовых электростанциях (угольных, ядерных, гидроэлектростанциях) не может быть быстро изменен, поскольку уровни производства электроэнергии в соседние часы оказываются зависимыми между собой, чего предложенная в [7] модель не учитывает. Во-вторых, предложенный авторами [7] алгоритм поиска равновесия в игре перебирает всевозможные реализации спроса и инвестиций производителей в новые мощности, что приводит к вычислительным сложностям уже в случае 4 производителей и 10 инвестиционных планов у каждого из них. Действительно, даже

в этом случае необходимо рассмотреть 10^4 возможных комбинаций инвестиционных планов, для каждой из которых необходимо решить задачу нелинейного математического программирования.

В [12] рассматривается взаимодействие n производителей электроэнергии, конкурирующих на рынке в течение двух временных промежутков (периодов). В первом периоде каждый производитель инвестирует в строительство новых мощностей, которые будут построены к началу второго периода, а также выбирает объемы производства электроэнергии, которые будут поставлены на рынок в первом периоде. Во втором периоде производители выбирают только объемы производства электроэнергии с учетом новых мощностей, построенных к началу второго периода.

Моделирование указанного взаимодействия предлагается осуществлять с использованием двух игровых моделей, каждая из которых отражает схему принятия решений производителями электроэнергии как по объемам инвестиций в строительство новых и модернизацию имеющихся электростанций, так и по уровню производства электроэнергии. В соответствии с первой моделью, все производители одновременно принимают решения как об инвестициях, так и об уровне производства электроэнергии в обоих периодах, стремясь максимизировать свою ожидаемую прибыль. В соответствии со второй моделью, все производители сначала выбирают объемы инвестиций в строительство новых электростанций, стремясь максимизировать ожидаемую полезность от продажи электроэнергии во втором периоде, и лишь затем одновременно выбирают уровни производства электроэнергии в обоих периодах, исходя из известных им объемов инвестиций их конкурентов.

В [12] доказано, что если все производители планируют свои действия в соответствии со второй моделью, одному из производителей оказывается выгодно принимать решения об инвестициях в соответствии с первой моделью, если остальные производители предполагают, что он принимает решение об инвестициях в соответствии с его оптимальной стратегией в игре, формулируемой на основе второй модели.

Для произвольного числа периодов T (т.е. при $T > 2$) авторами [12] рассматривается модификация только первой модели, и в рамках этой модификации все производители одновременно выбирают объемы инвестиций и выпусков во всех T периодах, что обусловлено меньшей вычислительной сложностью поиска равновесия в игре, формулируемой на основе этой модели. В этом случае неопределенность будущего спроса описывается деревом возможных уровней спроса, где в каждый момент времени t , $t \in \overline{1, T}$, множество возможных уровней спроса (представленных в виде t -го уровня этого дерева) зависит от реализации спроса в момент $t - 1$. В рамках рассмотренной авторами модификации первой модели все производители, стремясь максимизировать свою ожидаемую полезность, в начале первого периода планирования одновременно принимают решения об инвестициях во всех периодах, кроме последнего, а также выбирают объемы производства электроэнергии при всех возможных реализациях спроса в каждом периоде с учетом ограничений на максимальную мощность электростанций, построенных к этому периоду.

Поиск равновесия в предложенной в [12] модели для произвольного числа периодов сводится к решению линейной задачи о дополнителности (LCP), что позволяет рассматривать задачи большего размера, по сравнению с размерностями задач, которые позволяет рассматривать использование модели из [7]. Однако в общем случае решение задачи LCP (так же как и при использовании модели из [7]) может представлять вычислительные трудности из-за отсутствия эффективных (т.е. с полиномиальными оценками) методов решения этой задачи. Кроме того, в [12] не учтены, в частности, ограничения на изменение уровня производства электроэнергии, а также не рассмотрены ограничения на передачу электроэнергии.

В [18] исследуется влияние ряда экономических параметров (например, периода планирования и эластичности спроса на электроэнергию) на уровень инвестиций на оптовом рынке электроэнергии. С этой целью рассматривается модель кон-

курении n производителей электроэнергии, формулирующаяся в форме некооперативной статической игры, в которой, как и в [12], неопределенность описывается деревом возможных событий. Используемая в [18] модель близка к модели, рассматриваемой в [12], однако в ней учтены некоторые особенности рынка, неучтенные в [12]. В частности, авторы [18] различают два типа спроса на электроэнергию: пиковый и базовый, и учитывают устаревание существующих мощностей.

Для изучения влияния некоторых параметров рынка на инвестиции в электроэнергетику Финляндии авторы [18] провели серию численных экспериментов, в которых исследовали, как изменится общий уровень инвестиций в электроэнергетику при изменении первоначальных параметров модели, значения которых взяты из [17]. На основании полученных результатов авторы считают, что небольшая зависимость между пиковым и базовым спросом на электроэнергию не влияет на инвестиции, однако учет устаревания и более длинный период планирования увеличивают общий объем инвестиций.

Основные недостатки предложенной в [18] модели такие же, как и у модели, предложенной в [12]: а) не учтены важные технические ограничения производства и ограничения на передачу электроэнергии; б) равновесия Нэша не могут быть найдены эффективным методом (с полиномиальными оценками сложности и времени решения соответствующих игровых задач).

В [21] исследуется целесообразность инвестиций в тепловые электростанции с учетом существующей в Германии государственной поддержки развития возобновляемых источников электроэнергии. Одна из форм такой поддержки проявляется в том, что электроэнергия, генерируемая ветряными электростанциями, оплачивается потребителями по фиксированному тарифу вне зависимости от цены электроэнергии, сформировавшейся на рынке. Такая поддержка способствует вытеснению пиковых генераторов, производящих дорогую электроэнергию (в сравнении с базовыми электростанциями). Однако производительность ветряных электростанций существенно зависит от погодных условий,

и владельцы таких электростанций, как правило, не могут обеспечить стабильной подачи электроэнергии на рынок, что приводит к необходимости использования электроэнергии, производимой тепловыми электростанциями, которые могут полностью покрыть спрос при отсутствии поступления электроэнергии от ветряных электростанций (при соответствующих неблагоприятных погодных условиях). Для того чтобы оценить, насколько существующие правила рынка, поддерживающие развитие возобновляемых источников энергии, в то же время создают необходимые стимулы для инвестирования в тепловые электростанции, авторы рассмотрели модель конкуренции производителей на рынке электроэнергии в форме некооперативной статической игры n лиц.

Рассматриваемая ими модель описывает конкуренцию производителей на протяжении недели, в каждый час которой игроки (производители электроэнергии) участвуют в аукционе Курно по продаже электроэнергии. Все производители одновременно в начале периода планирования выбирают уровни производства электроэнергии в каждый час недели, при этом каждый производитель максимизирует свою полезность с учетом ограничений на мощность электростанций, а также возможности изменения объемов производства электроэнергии в течение часа. Поиск равновесия в рассматриваемой в [21] игре сводится к решению смешанной задаче о дополнителности (MCP) [8].

Авторы [21] количественно оценивают целесообразность инвестиций в тепловые электростанции на рынке электроэнергии Германии по значению разности между средним значением стоимости инвестиций на единицу объема произведенной электроэнергии по так называемым скрытым ценам (которым соответствуют множители Лагранжа к ограничениям на мощность электростанций в системе ограничений решаемой авторами оптимизационной задаче) и фактическим значением стоимости инвестиций в какой-то конкретный вид электростанций на единицу объема произведенной электроэнергии. Такой подход к оценке целесообразности инвестиций применим только к небольшим фирмам, потому что существенное изменение предложения элек-

троэнергии со стороны крупного производителя может заметно уменьшить рассматриваемое значение стоимости инвестиций (на единицу объема произведенной электроэнергии). В [21] сравниваются значения указанного показателя целесообразности инвестиций а) при отсутствии ветряных электростанций и б) при удвоении текущего количества ветряных электростанций (которое ожидается в будущем) с учетом существующей производительности таких электростанций в Германии. Проведенное авторами [21] исследование показало, что увеличение числа ветряных электростанций в два раза по сравнению с существующим числом электростанций снижает указанный выше показатель целесообразности инвестиций по сравнению с его значением при отсутствии таких электростанций, например, в газотурбинные генераторы практически на 50%, в парогазовые генераторы на 30% и в угольные электростанции на 25%. Такое снижение инвестиционной привлекательности тепловых электростанций и в особенности пиковых генераторов в перспективе может привести к нехватке электроэнергии во время безветрия. Для того чтобы избежать появления подобной ситуации, но при этом сохранить стимулирование инвестиций в развитие возобновляемых источников энергии, авторы предлагают, в частности, обязать производителей электроэнергии из возобновляемых источников компенсировать нехватку электроэнергии в периоды неблагоприятной погоды, что создаст для таких производителей стимулы к строительству пиковых генераторов. Для избежания нехватки электроэнергии предлагается также развивать хранилища электроэнергии и развивать линии электропередач, стимулируя таким образом торговлю с другими регионами.

Предложенный в [21] подход к инвестированию в новые мощности не лишен недостатков. Во-первых, в рамках рассматриваемого подхода оказывается, что стимулы к инвестированию в тепловые электростанции существенно уменьшатся при увеличении числа ветряных электростанций, однако невозможно оценить, будет ли этих стимулов всё же достаточно для инвестирования или нет. Во-вторых, в рамках такого подхода невозможно

утверждать, что инвестирование в строительство новых средних и крупных электростанций вообще может быть выгодным, потому что такое инвестирование может существенно уменьшить цены на электроэнергию, что сделает инвестиции убыточными. В-третьих, в данной модели не учитываются ограничения на передачу электроэнергии. В-четвертых, для того чтобы найти равновесие Нэша в рассматриваемой авторами игре, необходимо решать задачу математического программирования (МСП), для которой неизвестны эффективные вычислительные алгоритмы.

В [20] исследовалось влияние неопределенностей в ценах на топливо и в законах, регулирующих нормы выбросов в атмосферу, на инвестиции производителей в строительство новых электростанций, с использованием модификации игры из [21]. В этой модифицированной игре предполагается, что производители имеют возможность инвестировать в строительство новых мощностей на протяжении нескольких лет (в [20] приводятся результаты численных экспериментов авторов с периодом планирования в 25 лет). Как и в [21], оценка будущих прибылей производителей в течении одного года производится на участке в несколько часов (авторы рассматривают 120 часов), где часовой шаг по времени используется при моделировании технических ограничений на производство электроэнергии (на максимальную мощность и на максимально возможное изменение уровня производства электростанции).

Автор работы [20] рассматривает два подхода к моделированию неопределенности. В рамках первого подхода исследуются несколько возможных сценариев изменения цен на топливо и законов, ограничивающих выбросы в атмосферу, где для каждого сценария находится равновесие в детерминированной игре. В рамках второго подхода рассматривается стохастическая игра, в которой неопределенность задана деревом возможных событий (так же как и в [12, 18]), и для этой стохастической игры находится равновесие. Автор приводит результаты численных экспериментов с данными по рынку Германии и сравнивает равновесие в стохастической игре (используемой в рамках второго под-

хода) с вектором, каждая компонента которого является математическим ожиданием соответствующих компонент равновесий в детерминированных играх (решаемых в рамках первого подхода), а каждая игра соответствует одному возможному сценарию развития цен на топливо. На основании проведенных численных экспериментов автор делает вывод о том, что при использовании стохастической модели оценка ожидаемой прибыли оказывается ниже, чем при использовании детерминированных моделей из-за того, что производители откладывают инвестиции, однако общий уровень инвестиций оказывается выше, чем при оценке их объема по детерминированным моделям. Рассмотренные автором модели (как детерминированные, так и стохастическая) учитывают как технические ограничения на производство, так и влияние инвестиций производителей на будущие цены. Тем не менее, в рамках рассмотренных автором работы [20] моделей не учтены ограничения на передачу электроэнергии, а поиск равновесия в рассмотренных ими играх сводится к сложной с вычислительной точки зрения задаче о дополнителности (MCP), что делает предложенные модели трудно применимыми при решении задач большого размера.

В [15] исследуется целесообразность использования хранилищ электроэнергии в рамках анализа работы оптового рынка PJM (Пенсильвании, Нью-Джерси и Мэриленда). Авторы предполагают, что с 2010 года условия для инвестирования в хранилища электроэнергии не сильно изменились, поэтому они изучают то, как изменился бы рынок PJM в 2010 году, если бы туда были добавлены хранилища электроэнергии, по сравнению с тем, как функционировал рынок в действительности. Авторами рассматривается оптимизационная модель, описывающая торговлю электроэнергией в каждый час 2010 года, в которой минимизируются суммарные издержки всех производителей. В модели учитывается множество технологических ограничений, возникающих при производстве электроэнергии, а также ограничения на её передачу. Сформулированная на её основе задача оптимизации является задачей целочисленного линейного программирования.

Используя данные спроса за 2010 год, авторы верифицируют модель, показывая, к примеру, что средняя часовая ошибка в значениях между ценами (множителями Лагранжа к ограничениям на максимальную мощность электростанций в решаемой ими оптимизационной задаче), предсказанными по модели, и ценами, которые были в 2010 году на рынке, равняется нулю. Авторы исследуют, как изменились бы цены на рынке *PJM* в 2010 году, если бы тогда существовали большие хранилища электроэнергии. С этой целью они модифицируют предложенную ими модель с учетом существования хранилищ и проводят численные эксперименты с новой моделью при различных параметрах хранения электроэнергии, соответствующих нескольким типам хранилищ, а также при различной общей мощности воображаемых хранилищ. Результаты численных экспериментов авторов работы [15] показывают, что использование хранилищ может уменьшить цены на электроэнергию, при этом уменьшается и прибыль производителей. Однако с учетом стоимости строительства хранилищ электроэнергии общественное благосостояние тоже уменьшается, а прибыль компаний, оперирующих построенными хранилищами, становится отрицательной.

Использование оптимизационной модели позволяет авторам учесть множество ограничений на производство и передачу электроэнергии. Однако, в отличие от игрового подхода, предложенный ими подход не учитывает влияния производителей и потребителей на рыночные цены. Следует также иметь в виду, что результаты были получены авторами [15] на данных рынка за 2010 год, которые нельзя непосредственно, без соответствующих изменений перенести на настоящее и будущее время, так как они не учитывают, например, возможного строительства новых электростанций, устаревания существующих электростанций, будущих изменений спроса и цен на энергоносители, что существенно ограничивает применимость полученных результатов.

Для исследования влияния инвестиций в новые электростанции на цены на электроэнергию на оптовом рынке и на объемы выбросов вредных веществ в атмосферу при производстве элек-

троэнергии в [14] предлагается моделировать взаимодействие производителей электроэнергии в условиях конкуренции в виде некооперативной динамической игры, которая учитывает ограничения на максимальную мощность электростанции, ограничения на передачу электроэнергии и устаревание мощностей. Результаты проведенных в [14] численных экспериментов показывают, что в случае совершенной конкуренции рыночные цены оказываются ниже, а уровень выбросов в атмосферу меньше, чем при монополии или олигополии. Инвестиции на рынках электроэнергии в условиях совершенной конкуренции также изучаются в [9], где рассматриваются модели для риск-нейтрального и риск-предпочитающего инвестора, учитывающие, в частности, неопределенность будущего спроса и цен на энергоносители.

Проблемы, тесно связанные с отысканием оптимальных объемов инвестирования, но не относящихся к проблеме инвестирования непосредственно, рассмотрены в [10, 11, 16, 19]. Так, обсуждение различных методов поддержки возобновляемых источников энергии можно найти в [11, 16], влияние гидроаккумулирующих хранилищ электроэнергии на цены и благосостояние производителей и потребителей в условиях рынка (Германии) исследуется в [19], а обзор теоретико-игровых моделей, посвященный проблемам «умных» (smart grid) электрических сетей, представлен в [10].

В [3] предлагается математическая модель для планирования работы энергосистемы в условиях конкурентного оптового рынка электроэнергии и мощности. В рамках задачи планирования загрузки действующих генераторов электроэнергии и дополнительных генерирующих мощностей, в частности, осуществляется расчёт планов как так называемого «балансирующего рынка» (т.е. рынка электроэнергии, на котором покупка и продажа электроэнергии осуществляется в режимах приближенных к реальным режимам производства и потребления), так и плана работы генерирующего оборудования на сутки вперед, наряду с расчетом которых рассматривается задача выбора генерирующего оборудования на некотором временном промежутке существенно боль-

шем суток. Этот выбор осуществляется с учетом как технических возможностей генераторов, так и ценовых заявок, отражающих стоимость производства заявленного объема электроэнергии производителями электроэнергии по каждому из генераторов, работой которых они управляют. Приводятся математические формулировки задач оптимизации, которые решаются при составлении планов работы подключенных в сеть генераторов электроэнергии на следующие сутки вперед и на «оставшиеся» часы текущих суток, а также задач, которые решаются на неделю вперед и на конец рабочей недели с учетом подаваемых в течение недели ценовых заявок на производство электроэнергии. Эти заявки используются для определения значения верхней границы объемов производства электроэнергии, зафиксированных в этих заявках, которая (верхняя граница) является параметром в указанных двух задачах планирования (на неделю вперед и на конец рабочей недели), наряду с подаваемым каждым поставщиком электроэнергии значения стоимости пуска генерирующего оборудования, подключаемого к функционирующей сети. Задача планирования «балансирующего рынка» электроэнергии формулируется в сетевой постановке как задача минимизации суммарной стоимости электроэнергии, поступающей в сеть в течение некоторого периода времени, начинающегося в интересующий диспетчера момент времени текущих суток с учетом ценовых заявок производителей, балансовых ограничений по активной и реактивной мощности в узле, физических закономерностей, определяющих перетоки мощности по ветвям сети, а также ограничений по перетокам активной мощности по так называемым контролируемым сечениям, производственных возможностей генераторов, включенных в сеть, и по скорости набора и сброса нагрузки по каждому генератору.

Задача планирования рынка электроэнергии «на сутки вперед» формулируется как задача максимизации некоторой функции благосостояния, в которой помимо ценовых заявок производителей электроэнергии учитываются ценовые заявки её покупателей при ограничениях указанной выше задачи оптимизации

планирования «балансирующего рынка» и дополнительных ограничениях по ценовым заявкам покупателей электроэнергии.

В задаче планирования рынка электроэнергии «на неделю вперед» помимо генераторов, включенных в сеть, рассматриваются все генерирующие мощности, не находящиеся в ремонте. Эта задача формулируется как задача минимизации суммарной стоимости электроэнергии, большая часть ограничений в которой близка по структуре к системе ограничений задачи планирования «балансирующего рынка» электроэнергии, а остальные ограничения отражают требования а) по обязательному присутствию в сети резервов мощностей; б) по числу включенных генераторов в каждом узле сети; в) по распределению включений в сеть генераторов, относящихся к одному узлу сети, во времени, а также ограничения на общее число включений небольших генераторов электроэнергии, работающих в режиме теплофикации, за всю неделю. Эта задача является частично целочисленной (с булевыми переменными) задачей нелинейного программирования, для которой известны подходы к построению методов ее решения ([4, 5]).

Поскольку реальная стоимость электроэнергии для участников оптового рынка, как поставляющих, так и потребляющих эту электроэнергию, помимо цен на рынке на сутки вперед и на «балансирующем рынке» зависит также от стоимости мощности, необходимо учитывать особенности этого «товара» при расчете указанной реальной стоимости электроэнергии как в краткосрочной перспективе (на месяц вперед, в ходе биржевых торгов по свободным ценам, разрешенных в России с 2009 года), так и в долгосрочной (на год и на несколько лет). В частности, в [3] предлагается процедура отбора проектов по строительству новых мощностей, исходя из предполагаемых сценариев роста потребления электроэнергии (как во временном разрезе, так и по регионам) по критерию полной стоимости обеспечения потребления электроэнергии (определяемого указанными сценариями роста потребления) с учетом строительных и топливных затрат, который подлежит минимизации при ограничениях, аналогичных

по структуре ограничениям задачи планирования рынка на неделю вперед.

2. Математическая формулировка задачи

Пусть

K – число узлов (непересекающихся частей рынка электроэнергии региона, внутри которых практически отсутствуют ограничения на передачу электроэнергии);

I – число производителей электроэнергии, каждый из которых может иметь электростанции и хранилища электроэнергии в одном или нескольких узлах из множества $\overline{1, K}$;

J – число потребителей электроэнергии, каждый из которых может иметь энергопринимающие устройства в одном или нескольких узлах из множества $\overline{1, K}$;

T – продолжительность (в годах) периода планирования;

M_t – число «типичных» периодов взаимодействия производителей и потребителей электроэнергии в году t , где $t \in \overline{1, T}$;

γ_{tm} – число раз, которое повторяется «типичный» период m в году t , где $m \in \overline{1, M_t}$, $t \in \overline{1, T}$;

H_{tm} – длина «типичного» периода m года t (в часах), где $m \in \overline{1, M_t}$, $t \in \overline{1, T}$;

S – число различных типов электростанций, которые могут уже иметь или построить производители в течение периода T (при этом предполагается, что каждый из производителей электроэнергии $\overline{1, I}$ в каждом узле $\overline{1, K}$ может иметь или построить не более одной электростанции каждого из S типов, однако каждый производитель может увеличивать мощность существующих электростанций, достраивая новые блоки);

R – число различных типов хранилищ электроэнергии, которые могут уже иметь или построить производители в течение периода T (при этом предполагается, что каждый из производителей электроэнергии $\overline{1, I}$ в каждом узле $\overline{1, K}$ может иметь или построить не более одного хранилища электроэнергии каждого из R типов, однако каждый производитель может увеличивать

мощность существующих хранилищ электроэнергии, достраивая новые блоки);

$L_{k_1 k_2}^{thr}(t)$ – максимальный объем электроэнергии, который может быть передан в течение одного часа между узлами k_1 и k_2 ($k_1 \neq k_2$) в году t (индекс *thr* соответствует английскому термину throughput), где $k_1, k_2 \in \overline{1, K}$, $t \in \overline{1, T}$;

$L_{k_1 k_2}^{cost}(t)$ – стоимость передачи 1 МВт электроэнергии между узлами k_1 и k_2 в году t , где $k_1, k_2 \in \overline{1, K}$, $t \in \overline{1, T}$;

$L_{k_1 k_2}^{loss}$ – постоянная (в течение периода планирования $\overline{1, T}$) доля передаваемого объема электроэнергии, которая теряется в процессе её передачи между узлами k_1 и k_2 , где $k_1, k_2 \in \overline{1, K}$;

$g_{isk}(\cdot)$ – функция стоимости строительства генерирующей мощности (новой электростанции или нового блока существующей электростанции) типа s производителем i в узле k от её будущей мощности (в МВт), где $i \in \overline{1, I}$, $s \in \overline{1, S}$, $k \in \overline{1, K}$;

C_{isk}^p – приблизительная стоимость строительства в расчете (приходящаяся) на 1 МВт генерирующей мощности (новой электростанции или нового блока существующей электростанции) типа s производителем i в узле k (индекс p соответствует английскому термину power plant), где $i \in \overline{1, I}$, $s \in \overline{1, S}$, $k \in \overline{1, K}$;

Cl_{isk}^p – максимальная мощность новой электростанции (или нового блока существующей электростанции) типа s , которая (который) может быть построена (построен) производителем i в узле k в течение одного года, где $i \in \overline{1, I}$, $s \in \overline{1, S}$, $k \in \overline{1, K}$;

$f_{irk}(\cdot)$ – функция стоимости строительства емкости для хранения электроэнергии (нового хранилища или нового блока существующего хранилища) типа r производителем i в узле k от его будущей мощности (в МВт), где $r \in \overline{1, R}$, $i \in \overline{1, I}$, $k \in \overline{1, K}$;

C_{irk}^b – приблизительная стоимость строительства в расчете (приходящаяся) на 1 МВт емкости для хранения электроэнергии (нового хранилища или нового блока существующего хранилища) типа r производителем i в узле k (индекс b соответствует английскому термину battery), где $r \in \overline{1, R}$, $i \in \overline{1, I}$, $k \in \overline{1, K}$;

Cl_{irk}^b – максимальная мощность нового хранилища электроэнергии (или нового блока существующего хранилища электро-

энергии) типа r , которое (который) может быть построено (построен) производителем i в узле k в течение одного года, где $i \in \overline{1, I}$, $r \in \overline{1, R}$, $k \in \overline{1, K}$;

$z_{isk}^p(t)$ – мощность (в МВт) новой электростанции (или нового блока существующей электростанции) типа s в узле k , которая (который) будет построена (построен) производителем i в течение года и будет введена (введен) в эксплуатацию к началу года t , где $s \in \overline{1, S}$, $k \in \overline{1, K}$, $i \in \overline{1, I}$, $t \in \overline{1, T}$;

$z_{irk}^b(t)$ – мощность (в МВт) нового хранилища электроэнергии (или нового блока существующего хранилища электроэнергии) типа r в узле k , которое (который) будет построено (построен) производителем i в течение года и будет введено (введен) в эксплуатацию к началу года t , где $r \in \overline{1, R}$, $k \in \overline{1, K}$, $i \in \overline{1, I}$, $t \in \overline{1, T}$;

$B_i(t)$ – максимальный объем инвестиций в строительство новых электростанций и хранилищ электроэнергии, который может сделать производитель i в году t , где $i \in \overline{1, I}$, $t \in \overline{1, T}$;

$w_{isk}^p(\cdot)$ – функция оценочной стоимости электростанции типа s в узле k , принадлежащей производителю i , от её мощности (в МВт) на момент окончания периода T , где $s \in \overline{1, S}$, $i \in \overline{1, I}$, $k \in \overline{1, K}$;

$w_{irk}^b(\cdot)$ – функция оценочной стоимости хранилища электроэнергии типа r в узле k , принадлежащего производителю i , от его мощности (в МВт) на момент окончания периода T , где $r \in \overline{1, R}$, $i \in \overline{1, I}$, $k \in \overline{1, K}$;

$Q_{isk}^p(t)$ – мощность (в МВт) или существующей электростанции типа s в узле k , которую производитель i рассчитывает эксплуатировать в году t , или строящейся электростанции, которая будет введена в эксплуатацию к началу года t периода планирования $\overline{1, T}$, где $s \in \overline{1, S}$, $i \in \overline{1, I}$, $k \in \overline{1, K}$, $t \in \overline{1, T}$;

$cf_{isk}^p(\cdot)$ – функция издержек годового содержания электростанции типа s в узле k производителем i от установленной мощности этой электростанции, где $s \in \overline{1, S}$, $i \in \overline{1, I}$, $k \in \overline{1, K}$;

$cf_{irk}^b(\cdot)$ – функция издержек годового содержания хранилища электроэнергии типа r в узле k производителем i от установлен-

ной мощности этого хранилища, где $r \in \overline{1, R}$, $i \in \overline{1, I}$, $k \in \overline{1, K}$;

$cost_{isk}(\cdot)$ – функция издержек производства электроэнергии на электростанции типа s в узле k , принадлежащей производителю i , от объема часового производства электроэнергии, где $s \in \overline{1, S}$, $i \in \overline{1, I}$, $k \in \overline{1, K}$;

α_s – отношение максимально возможного размера изменения (увеличения/снижения) объема производства электроэнергии на электростанции типа s к объему выработки электроэнергии в момент τ «типичного» периода (в часах), вычисляемое за время Δ (не превосходящего одного часа), такое, что выполняется неравенство $\tau + \Delta \leq \tau + 1$;

$Q_{irk}^b(t)$ – мощность (в МВт) или существующего хранилища электроэнергии типа r в узле k , которое планирует эксплуатировать производитель i в году t , или строящегося хранилища, которое будет введено в эксплуатацию к началу года t периода планирования $\overline{1, T}$, где $s \in \overline{1, S}$, где $r \in \overline{1, R}$, $i \in \overline{1, I}$, $k \in \overline{1, K}$, $t \in \overline{1, T}$;

ρ_r – доля электроэнергии, которая в среднем теряется за один полный час хранения в хранилище типа r , где $r \in \overline{1, R}$;

$\underline{D}_{jk}(t, m, h)$ – минимальный объем электроэнергии (в МВт), который может понадобиться потребителю j в узле k в течение часа, начинающегося в момент времени h из «типичного» периода m года t , где $j \in \overline{1, J}$, $k \in \overline{1, K}$, $t \in \overline{1, T}$, $m \in \overline{1, M_t}$, $h \in \overline{1, H_{tm}}$;

$\overline{D}_{jk}(t, m, h)$ – максимальный объем электроэнергии (в МВт), который может понадобиться потребителю j в узле k в течение часа, начинающегося в момент времени h из «типичного» периода m года t , где $j \in \overline{1, J}$, $k \in \overline{1, K}$, $t \in \overline{1, T}$, $m \in \overline{1, M_t}$, $h \in \overline{1, H_{tm}}$;

$P_{jk}^{max}(t, m, h)$ – максимальная цена за 1 МВт электроэнергии, которую готов заплатить потребитель j в узле k в течение часа, начинающегося в момент времени h из «типичного» периода m года t , где $j \in \overline{1, J}$, $k \in \overline{1, K}$, $t \in \overline{1, T}$, $m \in \overline{1, M_t}$, $h \in \overline{1, H_{tm}}$;

$P_{isk}^{min,p}(t, m, h)$ – минимальная цена, по которой производитель i готов продать 1 МВт электроэнергии с электростанции типа s в узле k в течение часа, начинающегося в момент времени h из «типичного» периода m года t , где $i \in \overline{1, I}$, $s \in \overline{1, S}$, $k \in \overline{1, K}$,

$t \in \overline{1, T}, m \in \overline{1, M_t}, h \in \overline{1, H_{tm}};$

$F_{irk}^{min,b}(t, m, h)$ – минимальная цена, по которой производитель i готов продать 1 МВт электроэнергии из хранилища электроэнергии типа r в узле k в течение часа, начинающегося в момент времени h из «типичного» периода m года t , где $i \in \overline{1, I}, r \in \overline{1, R}, k \in \overline{1, K}, t \in \overline{1, T}, m \in \overline{1, M_t}, h \in \overline{1, H_{tm}};$

$x_{isk_1jk_2}^p(t, m, h)$ – объем электроэнергии (в МВт), который поставит производитель i с электростанции типа s в узле k_1 потребителю j в узле k_2 в течение часа, начинающегося в момент времени h из «типичного» периода m года t , где $i \in \overline{1, I}, k_1 \in \overline{1, K}, j \in \overline{1, J}, k_2 \in \overline{1, K}, s \in \overline{1, S}, t \in \overline{1, T}, m \in \overline{1, M_t}, h \in \overline{1, H_{tm}};$

$x_{irk_1jk_2}^b(t, m, h)$ – объем электроэнергии (в МВт), который поставит производитель i из хранилища электроэнергии типа r в узле k_1 потребителю j в узле k_2 в течение часа, начинающегося в момент времени h из «типичного» периода m года t , где $i \in \overline{1, I}, k_1 \in \overline{1, K}, j \in \overline{1, J}, k_2 \in \overline{1, K}, r \in \overline{1, R}, t \in \overline{1, T}, m \in \overline{1, M_t}, h \in \overline{1, H_{tm}};$

$x_{isrk_1k_2}^{bc}(t, m, h)$ – объем электроэнергии (в МВт), который производитель i поставит с электростанции типа s в узле k_1 в собственное хранилище типа r в узле k_2 в течение часа, начинающегося в момент времени h из «типичного» периода m года t (индекс bc соответствует английскому термину battery charge), где $i \in \overline{1, I}, k_1 \in \overline{1, K}, s \in \overline{1, S}, r \in \overline{1, R}, k_2 \in \overline{1, K}, t \in \overline{1, T}, m \in \overline{1, M_t}, h \in \overline{1, H_{tm}};$

$q_{irk}(t, m, h)$ – объем электроэнергии (в МВт), который находится в хранилище типа r , принадлежащем производителю i , в узле k в течение часа, начинающегося в момент времени h из «типичного» периода m года t (в рамках упрощения, связанного с использованием «типичных» периодов, предполагается, что в начале каждого «типичного» периода m все хранилища не заполнены, то есть могут вместить электроэнергию в объеме равном емкости хранилищ), где $i \in \overline{1, I}, k \in \overline{1, K}, r \in \overline{1, R}, t \in \overline{1, T}, m \in \overline{1, M_t}, h \in \overline{1, H_{tm}};$

$y_{isk_1jk_2}^p(t, m, h)$ – цена, которую готов платить потребитель

j в узле k_2 за 1 МВт электроэнергии, поставленный с электростанции типа s в узле k_1 производителем i в течение часа, начинающегося в момент времени h из «типичного» периода m года t , где $j \in \overline{1, J}$, $k_2 \in \overline{1, K}$, $s \in \overline{1, S}$, $k_1 \in \overline{1, K}$, $i \in \overline{1, I}$, $t \in \overline{1, T}$, $m \in \overline{1, M_t}$, $h \in \overline{1, H_{tm}}$;

$y_{irk_1jk_2}^b(t, m, h)$ – цена, которую готов платить потребитель j в узле k_2 за 1 МВт электроэнергии, поставленный из хранилища электроэнергии типа r в узле k_1 производителем i в течение часа, начинающегося в момент времени h из «типичного» периода m года t , где $j \in \overline{1, J}$, $k_2 \in \overline{1, K}$, $r \in \overline{1, R}$, $k_1 \in \overline{1, K}$, $i \in \overline{1, I}$, $t \in \overline{1, T}$, $m \in \overline{1, M_t}$, $h \in \overline{1, H_{tm}}$.

Предположение 1. Издержки производства электроэнергии, стоимость строительства электростанций и новых хранилищ электроэнергии, а также оценочная стоимость электростанций и хранилищ электроэнергии описываются выпуклыми (или вогнутыми) функциями соответствующих переменных (в рамках математической формулировки задачи, эти функции аппроксимируются кусочно-линейными функциями).

Предположение 2. Как указано выше, в разделе 1.1, в каждом году t периода планирования $\overline{1, T}$ предлагается рассматривать M_t «типичных» периодов взаимодействия потребителей и производителей, отражающих, например, различие в объемном потреблении электроэнергии в регионе в разное время года. Каждый «типичный» период m ($m \in \overline{1, M_t}$) состоит из H_{tm} часов, для каждого из которых имеются прогнозные значения спроса каждого потребителя на электроэнергию; при этом H_{tm} часов могут в сумме составлять как несколько дней, так и несколько недель, что позволяет учесть дневные колебания спроса на электроэнергию. Предполагается, что «типичный» период m ($m \in \overline{1, M_t}$) в году t повторяется γ_{tm} раз, так что год t разбивается на непересекающиеся «типичные» периоды m_1, \dots, m_{M_t} , и каждый «типичный» период m_j ($j \in \overline{1, M_t}$) имеет длину (в часах) H_{tm_j} , $j \in \overline{1, M_t}$ и повторяется в году t γ_{tm_j} раз, откуда следует, что

$$364 * 24 = \sum_{m,j=1}^{M_t} H_{tmj} \cdot \gamma_{tmj}.$$

Взаимодействие производителей и потребителей электроэнергии в регионе математически может быть описано в форме игры двух лиц, в которой множество допустимых стратегий каждого (из двух) игроков является выпуклым многогранником. В этой игре приведенные ниже неравенства (1)–(10) описывают множество допустимых стратегий первого игрока (группы всех производителей, снабжающих регион электроэнергией), а неравенства (11)–(14) – множество допустимых стратегий второго игрока (группы всех потребителей электроэнергии в регионе).

Неравенства (1) и (2) отражают ограничения, связанные с производством электроэнергии.

В частности, неравенства (1) показывают, что объем электроэнергии, продаваемый производителем электроэнергии i с электростанции типа s , находящейся в узле k , всем потребителям электроэнергии в регионе в течение часа, начинающегося в момент h «типичного» периода m в году t , и объем электроэнергии, направляемый производителем электроэнергии i с электростанции типа s , находящейся в узле k , во все используемые им хранилища в регионе в течение часа, начинающегося в момент h «типичного» периода m в году t в сумме не могут превышать мощности этой электростанции, доступной для использования в году t :

$$(1) \quad \sum_{j=1}^J \sum_{k'=1}^K x_{iskjk'}^p(t, m, h) + \sum_{r=1}^R \sum_{k'=1}^K x_{isrkk'}^{bc}(t, m, h) \leq \\ \leq Q_{isk}^p(t) + \sum_{t'=1}^t z_{isk}^p(t'),$$

$i \in \overline{1, I}$, $k \in \overline{1, K}$, $s \in \overline{1, S}$, $t \in \overline{1, T}$, $m \in \overline{1, M_t}$, $h \in \overline{1, H_{tm}}$, причем предполагается, что энергия вырабатываемая электростанциями, строительство которых было начато более чем за год до начала года $t = 1$ периода планирования $\overline{1, T}$ и будет закончено к началу года $t \leq T$, учитывается в слагаемом $Q_{isk}^p(t)$.

Неравенства (2) показывают, что отношение изменения (увеличения/снижения) объема производства электроэнергии на электростанции типа s производителя электроэнергии i в узле k в момент времени $h + 1$ «типичного» периода m года t к объему этого производства в предыдущий момент времени не может превышать α_s :

$$(2) \quad \left| \sum_{j=1}^J \sum_{k'=1}^K x_{iskjk'}^p(t, m, h + 1) + \sum_{r=1}^R \sum_{k'=1}^K x_{isrkk'}^{bc}(t, m, h + 1) - \left(\sum_{j=1}^J \sum_{k'=1}^K x_{iskjk'}^p(t, m, h) + \sum_{r=1}^R \sum_{k'=1}^K x_{isrkk'}^{bc}(t, m, h) \right) \right| \leq \leq \alpha_s \cdot \left(\sum_{j=1}^J \sum_{k'=1}^K x_{iskjk'}^p(t, m, h) + \sum_{r=1}^R \sum_{k'=1}^K x_{isrkk'}^{bc}(t, m, h) \right),$$

$i \in \overline{1, I}$, $k \in \overline{1, K}$, $s \in \overline{1, S}$, $t \in \overline{1, T}$, $m \in \overline{1, M_t}$, $h \in \overline{1, H_{tm} - 1}$, (каждое из этих нелинейных неравенств эквивалентно двум линейным неравенствам).

Равенства и неравенства (3)–(5) описывают функционирование хранилищ электроэнергии.

Равенства (3) показывают, что объем электроэнергии в хранилище электроэнергии типа r производителя электроэнергии i в узле k в начале любого часа $h + 1$ «типичного» периода m года t складывается из а) объема электроэнергии, имевшегося в этом хранилище в начале предыдущего часа h за минусом потерь от хранения в течение часа; б) объема электроэнергии, поступающего в хранилище между моментами h и $h + 1$, за вычетом объема электроэнергии, направленного производителем электроэнергии i из этого хранилища всем потребителям электроэнергии в регионе в течение часа, начинающегося в момент h и заканчивающегося

в момент $h + 1$:

$$(3) \quad q_{irk}(t, m, h + 1) = (1 - \rho_r) \cdot q_{irk}(t, m, h) + \\ + (1 - \frac{\rho_r}{2}) \cdot \sum_{s=1}^S \sum_{k'=1}^K x_{isrk'k}^{bc}(t, m, h) - \sum_{j=1}^J \sum_{k'=1}^K x_{irkjk'}^b(t, m, h),$$

$i \in \overline{1, I}$, $r \in \overline{1, R}$, $k \in \overline{1, K}$, $t \in \overline{1, T}$, $m \in \overline{1, M_t}$, $h \in \overline{1, H_{tm} - 1}$,
здесь предполагается, что $(1 - \frac{\rho_r}{2})$ отражает средние потери электроэнергетики, поступающей в хранилище типа r в течение часа, начинающегося в момент h (т.е. до момента $h + 1$).

Равенства (4) отражают предположение о незаполненности (пустоте) хранилища электроэнергии типа r производителя электроэнергии i в узле k в начальный час «типичного» периода m года планирования t :

$$(4) \quad q_{irk}(t, m, 1) = 0, \\ i \in \overline{1, I}, r \in \overline{1, R}, k \in \overline{1, K}, t \in \overline{1, T}, m \in \overline{1, M_t},$$

(где в указанных равенствах последний индекс равен 1 в силу включения $h \in \overline{1, H_{tm}}$, а также в силу предположения, сделанного при описании параметра $q_{irk}(t, m, h)$).

Неравенства (5) отражают ограничения на объем электроэнергии, хранимой в хранилище типа r производителя электроэнергии i в узле k в каждый час h «типичного» периода m года планирования t , который не может превосходить суммарной мощности этого хранилища в году t :

$$(5) \quad q_{irk}(t, m, h) \leq Q_{irk}^b(t) + \sum_{t'=1}^t z_{irk}^b(t'),$$

$i \in \overline{1, I}$, $r \in \overline{1, R}$, $k \in \overline{1, K}$, $t \in \overline{1, T}$, $m \in \overline{1, M_t}$, $h \in \overline{1, H_{tm}}$,
предполагается, что энергия доступная для использования из хранилищ, строительство которых было начато более чем за год до начала года $t = 1$ периода планирования $\overline{1, T}$ и будет закончено к началу года $t \leq T$, учитывается в слагаемом $Q_{irk}^b(t)$.

Значения уровней (объемов) максимального и минимального часового спроса потребителя j на электроэнергию в каждом

«типичном» периоде являются правыми и левыми частями двусторонних неравенств (6) соответственно. При этом учитывается, что потребители могут получать электроэнергию, как с электростанций, так и из хранилищ электроэнергии, с учетом её потерь при передаче по линиям электропередач:

(6)

$$\begin{aligned} \underline{D}_{jk_2}(t, m, h) \leq & \sum_{i=1}^I \sum_{k_1=1}^K \left(1 - L_{k_1 k_2}^{loss}\right) \cdot \left(\sum_{s=1}^S x_{isk_1 j k_2}^p(t, m, h) + \right. \\ & \left. + \sum_{r=1}^R x_{irk_1 j k_2}^b(t, m, h) \right) \leq \overline{D}_{jk_2}(t, m, h), \\ & j \in \overline{1, J}, k_2 \in \overline{1, K}, t \in \overline{1, T}, m \in \overline{1, M_t}, h \in \overline{1, H_{tm}}. \end{aligned}$$

Неравенства (7) отражают ограничения на пропускную способность линий электропередач как при передаче электроэнергии от производителей к потребителям, так и при передаче электроэнергии с электростанций в хранилища электроэнергии в регионе:

$$\begin{aligned} (7) \quad \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{s=1}^S x_{isk_1 j k_2}^p(t, m, h) + \sum_{i=1}^I \sum_{s=1}^S \sum_{r=1}^R x_{isrk_1 k_2}^{bc}(t, m, h) + \\ + \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{r=1}^R x_{irk_1 j k_2}^b(t, m, h) \leq L_{k_1 k_2}^{thr}(t), \end{aligned}$$

$$k_1, k_2 \in \overline{1, K} (k_1 \neq k_2), t \in \overline{1, T}, m \in \overline{1, M_t}, h \in \overline{1, H_{tm}}.$$

Неравенства (8) отражают бюджетные ограничения на инвестиции в строительство новых электростанций (или в строительство новых блоков существующих электростанций) и в строительство новых хранилищ электроэнергии (или в строительство новых блоков существующих хранилищ электроэнергии) в течение периода планирования $\overline{1, T}$ для каждого производителя электроэнергии, снабжающего электроэнергией пользователей с электростанций, а также из хранилищ, находящихся на территории

региона:

$$(8) \quad \sum_{k=1}^K \left(\sum_{s=1}^S C c_{isk}^p \cdot z_{isk}^p(t+1) + \sum_{r=1}^R C c_{irk}^b \cdot z_{irk}^b(t+1) \right) \leq B_i(t),$$

$$i \in \overline{1, I}, t \in \overline{1, T-1}.$$

Неравенства (9) и (10) отражают ограничения на максимальную мощность новых электростанций (или новых блоков существующих электростанций) и новых хранилищ электроэнергии (или новых блоков существующих хранилищ электроэнергии), которые могут быть построены за 1 год:

$$(9) \quad z_{isk}^p(t) \leq C l_{isk}^p, \quad i \in \overline{1, I}, k \in \overline{1, K}, s \in \overline{1, S}, t \in \overline{1, T},$$

$$(10) \quad z_{irk}^b(t) \leq C l_{irk}^b, \quad i \in \overline{1, I}, k \in \overline{1, K}, r \in \overline{1, R}, t \in \overline{1, T}.$$

Неравенства (11) и (12) отражают ограничения на максимально возможные цены на электроэнергию, которые готов заплатить потребитель за 1 МВт электроэнергии (получаемой как с электростанций, так и из хранилищ электроэнергии) в течение часа, начинающегося в момент h «типичного» периода m года t :

$$(11) \quad y_{isk_1jk_2}^p(t, m, h) \leq P_{jk_2}^{max}(t, m, h),$$

$$i \in \overline{1, I}, s \in \overline{1, S}, k_1, k_2 \in \overline{1, K}, j \in \overline{1, J},$$

$$t \in \overline{1, T}, m \in \overline{1, M_t}, h \in \overline{1, H_{tm}},$$

$$(12) \quad y_{irk_1jk_2}^b(t, m, h) \leq P_{jk_2}^{max}(t, m, h),$$

$$i \in \overline{1, I}, r \in \overline{1, R}, k_1, k_2 \in \overline{1, K}, j \in \overline{1, J},$$

$$t \in \overline{1, T}, m \in \overline{1, M_t}, h \in \overline{1, H_{tm}}.$$

Неравенства (13) и (14) отражают ограничения на минимально возможные цены, по которым производитель готов продать 1 МВт электроэнергии (как с электростанций, так и из хранилищ электроэнергии) в течение часа, начинающегося в момент h «типичного» периода m года t :

$$(13) \quad y_{isk_1jk_2}^p(t, m, h) \geq P_{isk_1}^{min,p}(t, m, h),$$

$$i \in \overline{1, I}, s \in \overline{1, S}, k_1, k_2 \in \overline{1, K}, j \in \overline{1, J},$$

$$t \in \overline{1, T}, m \in \overline{1, M_t}, h \in \overline{1, H_{tm}},$$

$$(14) \quad y_{irk_1jk_2}^p(t, m, h) \geq P_{irk_1}^{min,b}(t, m, h),$$

$$i \in \overline{1, I}, r \in \overline{1, R}, k_1, k_2 \in \overline{1, K}, j \in \overline{1, J},$$

$$t \in \overline{1, T}, m \in \overline{1, M_t}, h \in \overline{1, H_{tm}}.$$

Предполагается, что система неравенств (1)–(14) совместна, что легко проверяется, например, по методике, предложенной в [1]. Суть этой методики применительно к исследованию совместности общей системы линейных неравенств с действительными коэффициентами – в построении и решении вспомогательной задачи линейного программирования с заведомо совместной системой ограничений, являющейся некоторой модификацией исследуемой на совместность системы неравенств. Значение этой вспомогательной задачи дает ответ на вопрос о том является ли исследуемая система неравенств (в рассматриваемом случае система (1)–(14)) совместной. Если исследуемая система неравенств несовместна, то вектор решения вспомогательной задачи определяет, как следует изменить правые части (каких-либо или всех) неравенств из исследуемой системы с тем, чтобы так «скорректированная» система неравенств была совместной. При этом корректировка правых частей неравенств исследуемой системы производится таким образом, чтобы «скорректированная» (совместная) система неравенств и исследуемая (несовместная) система неравенств были в определенном смысле «наиболее близкими» друг к другу. В случае системы линейных неравенств (1)–(14) указанная «близость» понимается в смысле незначительности (или приемлемости) структурных изменений в действующей системе электроснабжения региона (соответствующих вектору правых частей «скорректированной» системы неравенств

(1)–(14)) по сравнению с предложенными (и определенными значениями правых частей неравенств из несовместной системы (1)–(14)) изменениями.

Предполагается, что (возможно несовместная) система неравенств (1)–(14) в реальных задачах — отражающая основные количественные соотношения, определяющие структуру как существующей системы электроснабжения региона, так и планируемых к постройке новых систем электроснабжения и/или новых блоков существующей системы — не содержит неравенств, противоречащих здравому смыслу. В этом случае применение методики, предложенной в [1], позволяет найти приемлемые для инвесторов или, по крайней мере, интересные для них варианты развития действующей системы электроснабжения региона, рассматривая в качестве таких вариантов решения «скорректированной» системы ограничений.

Следует отметить, что выяснение факта совместности или несовместности системы линейных неравенств (1)–(14) принципиально может осуществляться классическими методами линейной алгебры, приведенными, например, в [6]. Однако смысл применения предложенной в [1] методики не только в установлении самого факта совместности или несовместности системы (1)–(14), но и в отыскании приемлемой для инвесторов «корректировки» исходной системы балансовых ограничений (если она несовместна), которой является система неравенств (1)–(14). Более того, как установление факта совместности или несовместности системы неравенств (1)–(14), так и отыскание «оптимальной» корректировки несовместной системы в соответствии с методикой легко реализуется алгоритмически и программно в системах поддержки принятия решений с использованием стандартного программного обеспечения для решения задач линейного программирования. Возможность применения этого программного обеспечения при исследовании на совместность систем ограничений вида (1)–(14) и при «корректировке» несовместных систем указанного вида в соответствии с предложенной в [1] методикой является ее существенным достоинством. Именно, применение

этой методики позволяет находить «приемлемые» (в указанном выше смысле) решения, в частности, в прикладных задачах развития систем электроснабжения региона с практически любыми интересными для практики размерами линейных моделей с (разумно составленными, но возможно несовместными) ограничениями вида (1)–(14).

Пусть

$$x^p = (x_{111111}^p(1, 1, 1), \dots, x_{ISKJK}^p(T, M_T, H_{TM_T})),$$

$$x^b = (x_{111111}^b(1, 1, 1), \dots, x_{IRKJK}^b(T, M_T, H_{TM_T})),$$

$$x^{bc} = (x_{111111}^{bc}(1, 1, 1), \dots, x_{ISRKK}^{bc}(T, M_T, H_{TM_T})),$$

$$q = (q_{111}(1, 1, 1), \dots, q_{IRK}(T, M_T, H_{TM_T})),$$

$$z^p = (z_{111}^p(1), \dots, z_{ISK}^p(T)),$$

$$z^b = (z_{111}^b(1), \dots, z_{IRK}^b(T)),$$

$$z = (z^p, z^b),$$

$$x = (x^p, x^b, x^{bc}, q, z^p, z^b),$$

$$y^p = (y_{111111}^p(1, 1, 1), \dots, y_{ISKJK}^p(T, M_T, H_{TM_T})),$$

$$y^b = (y_{111111}^b(1, 1, 1), \dots, y_{IRKJK}^b(T, M_T, H_{TM_T})),$$

$$y = (y^p, y^b),$$

$$cost(\cdot) = (cost_{111}(\cdot), \dots, cost_{ISK}(\cdot); \dots$$

$\dots; cost_{111}(\cdot), \dots, cost_{ISK}(\cdot))$, где набор чисел $(cost_{111}(\cdot), \dots, cost_{ISK}(\cdot))$ повторяется $\sum_{t=1}^T \sum_{m=1}^{M_t} H_{tm}$ раз,

$$g(\cdot) = (g_{111}(\cdot), \dots, g_{ISK}(\cdot); \dots; g_{111}(\cdot), \dots, g_{ISK}(\cdot)),$$

где набор чисел $(g_{111}(\cdot), \dots, g_{ISK}(\cdot))$ повторяется T раз,

$$f(\cdot) = (f_{111}(\cdot), \dots, f_{IRK}(\cdot); \dots; f_{111}(\cdot), \dots, f_{IRK}(\cdot)),$$

где набор чисел $(f_{111}(\cdot), \dots, f_{IRK}(\cdot))$ повторяется T раз,

$$cf^p(\cdot) = (cf_{111}^p(\cdot), \dots, cf_{ISK}^p(\cdot); \dots; cf_{111}^p(\cdot), \dots, cf_{ISK}^p(\cdot)),$$

где набор чисел $(cf_{111}^p(\cdot), \dots, cf_{ISK}^p(\cdot))$ повторяется T раз,

$$cf^b(\cdot) = (cf_{111}^b(\cdot), \dots, cf_{IRK}^b(\cdot); \dots; cf_{111}^b(\cdot), \dots, cf_{IRK}^b(\cdot)),$$

где набор чисел $(cf_{111}^b(\cdot), \dots, cf_{IRK}^b(\cdot))$ повторяется T раз,

$$w^p(\cdot) = (w_{111}^p(\cdot), \dots, w_{ISK}^p(\cdot)),$$

$$w^b(\cdot) = (w_{111}^b(\cdot), \dots, w_{IRK}^b(\cdot)),$$

$$Q^p = (Q_{111}^p(T), \dots, Q_{ISK}^p(T)),$$

$$\Theta^p = (Q_{111}^p(1), \dots, Q_{ISK}^p(1); \dots; Q_{111}^p(T), \dots, Q_{ISK}^p(T)),$$

$$Q^b = (Q_{111}^b(T), \dots, Q_{IRK}^b(T)),$$

$$\Theta^b = (Q_{111}^b(1), \dots, Q_{IRK}^b(1); \dots; Q_{111}^b(T), \dots, Q_{IRK}^b(T)).$$

В векторно-матричной форме системы ограничений, описывающие множества допустимых значений векторов x и y , могут быть записаны в виде $M = \{x \geq 0 : Ax \geq b\}$ и $\Omega = \{y \geq 0 : By \geq d\}$, где A, B – матрицы и b, d – векторы соответствующих размеров, формируемые из параметров системы ограничений (1)–(14). Нетрудно убедиться в том, что при естественных предположениях, отражающих природу векторов x и y , множества M и Ω ограничены, т.е. являются выпуклыми многогранниками.

Пусть далее

A^L – матрица линейного оператора, отображающего вектор x в вектор издержек производителей на передачу электроэнергии между производителями и потребителями, а также между электростанциями и хранилищами электроэнергии в каждый момент времени (число компонент вектора $A^L x$ равно $KK \cdot \sum_{t=1}^T \sum_{m=1}^{M_t} H_{tm}$);

A^c – матрица линейного оператора, отображающего вектор x в вектор объемов электроэнергии, которые были произведены электростанциями в каждый момент времени (число компонент вектора $A^c x$ равно $ISK \cdot \sum_{t=1}^T \sum_{m=1}^{M_t} H_{tm}$);

\bar{A}^p – матрица линейного оператора, отображающего вектор z^p (объемов (в МВт) строящихся новых электростанций или новых блоков действующих электростанций в каждом году) в вектор суммарных мощностей электростанций, которые будут находиться в эксплуатации к началу каждого периода t (число компонент вектора $\bar{A}^p z^p$ равно $ISK T$), где $t \in \bar{1}, \bar{T}$;

A^p – матрица линейного оператора, отображающего вектор z^p (объемов (в МВт) строящихся новых электростанций или новых блоков действующих электростанций в каждом году) в вектор суммарных мощностей электростанций, которые будут находиться в эксплуатации к окончанию периода T (число компонент вектора $A^p z^p$ равно ISK);

\bar{A}^b – матрица линейного оператора, отображающего вектор z^b (объемов (в МВт) строящихся новых хранилищ электроэнер-

гии или новых блоков существующих хранилищ электроэнергии в каждом году) в вектор суммарных мощностей хранилищ электроэнергии, которые будут находиться в эксплуатации к началу каждого периода t (число компонент вектора $\bar{A}^b z^b$ равно $IRKT$), где $t \in \bar{1, T}$;

A^b – матрица линейного оператора, отображающего вектор z^b (объемов (в МВт) строящихся новых хранилищ электроэнергии или новых блоков существующих хранилищ электроэнергии в каждом году) в вектор суммарных мощностей хранилищ электроэнергии, которые будут находиться в эксплуатации к окончанию периода T (число компонент вектора $A^b z^b$ равно IRK);

$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ – матрицы соответствующего размера, ненулевыми элементами которых являются значения параметров γ_{tm} ;

$\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_8$ – единичные векторы, число компонент которых равно соответственно $ISK \cdot \sum_{t=1}^T \sum_{m=1}^{M_t} H_{tm}$, $KK \cdot \sum_{t=1}^T \sum_{m=1}^{M_t} H_{tm}$, $ISK T$, $IRKT$, ISK , IRK , $ISKT$, $IRKT$.

С учетом введенных обозначений рассматриваемая игра может быть сформулирована в векторно-матричной форме следующим образом:

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \langle x^p, \gamma_1 y^p \rangle + \langle x^b, \gamma_2 y^b \rangle - \langle \varepsilon_1, \gamma_3 \text{cost}(A^c x) \rangle - \\ - \langle \varepsilon_2, \gamma_4 A^L x \rangle - \langle \varepsilon_3, g(z^p) \rangle - \\ - \langle \varepsilon_4, f(z^b) \rangle - \langle \varepsilon_7, c f^p(\bar{A}^p z^p + \Theta^p) \rangle - \\ - \langle \varepsilon_8, c f^b(\bar{A}^b z^b + \Theta^b) \rangle + \langle \varepsilon_5, w^p(A^p z^p + Q^p) \rangle + \\ + \langle \varepsilon_6, w^b(A^b z^b + Q^b) \rangle \rightarrow \max_{x \in M} \\ \langle x^p, \gamma_1 y^p \rangle + \langle x^b, \gamma_2 y^b \rangle \rightarrow \min_{y \in \Omega} . \end{array} \right.$$

В этой игре двух лиц все производители электроэнергии в регионе (первый игрок) стремятся максимизировать свою прибыль, выбирая объемы поставляемой электроэнергии в приемлемых для потребителей количествах, в то время как все потребители электроэнергии в регионе (второй игрок) стремятся получить

приемлемые для них объемы электроэнергии с наименьшими затратами.

3. Математические свойства задачи

Нетрудно убедиться в том, что введение новых переменных и ограничений-неравенств с целью перехода от кусочно-линейных функций (аппроксимирующих функции $cost_{isk}(\cdot)$, $w_{isk}^p(\cdot)$, $w_{irk}^b(\cdot)$, $g_{isk}(\cdot)$, $f_{irk}(\cdot)$, $cf_{isk}^p(\cdot)$, $cf_{irk}^b(\cdot)$) к линейным в функции выигрыша первого игрока позволяет записать игру (15) в векторно-матричной форме следующим образом:

$$(16) \quad \begin{cases} \langle \tilde{x}, Dy \rangle + \langle v, \tilde{x} \rangle \rightarrow \max_{\tilde{x} \in \tilde{M}} \\ \langle \tilde{x}, Dy \rangle \rightarrow \min_{y \in \Omega}, \end{cases}$$

где $\tilde{x} = (x, x')$, $x \in M$, а x' отражает дополнительные переменные, вводимые при аппроксимации выпуклых (или вогнутых) функций $cost_{isk}(\cdot)$, $w_{isk}^p(\cdot)$, $w_{irk}^b(\cdot)$, $g_{isk}(\cdot)$, $f_{irk}(\cdot)$, $cf_{isk}^p(\cdot)$, $cf_{irk}^b(\cdot)$ кусочно-линейными; $\tilde{M} = \{ \tilde{x} \geq 0 : \tilde{A}\tilde{x} \geq \tilde{b} \}$ – выпуклый многогранник допустимых стратегий группы всех производителей электроэнергии в регионе (одного из игроков в рассматриваемой игре двух лиц); D – матрица коэффициентов линейного оператора, который отображает вектор y в вектор $(\gamma_1 y^p, \gamma_2 y^b, 0, \dots, 0)$ того же размера, что и вектор \tilde{x} ; v – вектор параметров, а $\Omega = \{ y \geq 0 : By \geq d \}$ – выпуклый многогранник допустимых стратегий группы всех потребителей электроэнергии в регионе (второго из двух игроков в рассматриваемой игре двух лиц).

Утверждение 1. *Пара векторов $(\tilde{x}^*, y^*) \in \tilde{M} \times \Omega$ является равновесием Нэша в игре (16) тогда и только тогда, когда существуют векторы $z^* \geq 0$ и $t^* \geq 0$ такие, что (z^*, \tilde{x}^*) и (t^*, y^*) являются решениями задач линейного программирования*

$$\langle d, z \rangle + \langle v, \tilde{x} \rangle \rightarrow \max_{(z, \tilde{x}) \in \{(z, \tilde{x}) \geq 0: zB \leq \tilde{x}D, \tilde{A}\tilde{x} \geq \tilde{b}\}},$$

$$\langle -b, t \rangle \rightarrow \min_{(t, y) \in \{(t, y) \geq 0: t\tilde{A} \leq -v - Dy, By \geq d\}},$$

образующих двойственную пару.

Доказательство. 1. Поскольку из неравенства $\langle \tilde{x}^*, Dy^* \rangle + \langle v, \tilde{x}^* \rangle \leq \langle \tilde{x}^*, Dy \rangle + \langle v, \tilde{x}^* \rangle \quad \forall y \in \Omega$ следует неравенство $\langle \tilde{x}^*, Dy^* \rangle \leq \langle \tilde{x}^*, Dy \rangle \quad \forall y \in \Omega$, пара векторов (\tilde{x}^*, y^*) является точкой равновесия Нэша в игре (16) тогда и только тогда, когда эта точка является седловой точкой в игре двух лиц на выпуклых многогранниках \tilde{M} и Ω с платежной функцией

$$(17) \quad \langle \tilde{x}, Dy \rangle + \langle v, \tilde{x} \rangle,$$

которая максимизируется по \tilde{x} и минимизируется по y .

2. Игра (17) является частным случаем игры с платежной функцией

$$(18) \quad \langle p', x' \rangle + \langle x', D'y' \rangle + \langle q', y' \rangle$$

на выпуклых многогранниках $M' = \{x' \geq 0 : A'x' \geq b'\}$ и $\Omega' = \{y' \geq 0 : B'y' \geq d'\}$, в которой платежная функция максимизируется по y' и минимизируется по x' . В [1] доказано, что векторные компоненты седловой точки игры (18) находятся из решения задач линейного программирования

$$\langle b', z \rangle + \langle q', y' \rangle \rightarrow \max_{(z, y') \in Q'},$$

$$\langle -d', t \rangle + \langle p', x' \rangle \rightarrow \min_{(t, x') \in P'},$$

где $Q' = \{(z, y') \geq 0 : zA' \leq p' + D'y', B'y' \geq d'\}$,
 $P' = \{(t, x') \geq 0 : tB' \leq -q' - x'D', A'x' \geq b'\}$,
 $x' \in M' = \{x' \geq 0 : A'x' \geq b'\}$,
 $y' \in \Omega' = \{y' \geq 0 : B'y' \geq d'\}$,

образующих двойственную пару, где M' и Ω' – выпуклые многогранники. Основываясь на этом результате и полагая, что $\tilde{x} = y'$, $y = x'$, $v = q'$, $0 = p'$, $b' = d$, $d' = \tilde{b}$, $B' = \tilde{A}$, $A' = B$ и $D = (D')^T$ нетрудно показать, что задача отыскания седловой точки в игре (17) сводится к решению пары двойственных задач линейного программирования

$$(19) \quad \begin{aligned} \langle d, z \rangle + \langle v, \tilde{x} \rangle &\rightarrow \max_{(z, \tilde{x}) \in \{(z, \tilde{x}) \geq 0 : zB \leq \tilde{x}D, \tilde{A}\tilde{x} \geq \tilde{b}\}} \\ \langle -\tilde{b}, t \rangle &\rightarrow \min_{(t, y) \in \{(t, y) \geq 0 : t\tilde{A} \leq -v - Dy, By \geq d\}} \end{aligned}$$

где, как и ранее, $\tilde{x} \in \tilde{M} = \{\tilde{x} \geq 0 : \tilde{A}\tilde{x} \geq \tilde{b}\}$ и $y \in \Omega = \{y \geq 0 : By \geq d\}$.

Доказанное утверждение позволяет исследовать рынки электроэнергии практически любого размера, поскольку задачи линейного программирования (19) можно решать при любых интересных для практики числах ограничений и переменных.

Рассмотрим рынок электроэнергии в Москве и в Московской области. На этом рынке на четырех основных производителях электроэнергии (Мосэнерго, Е-ОН, ОГК-1 и РусГидро) приходится 96% производства электроэнергии в регионе (по данным годового отчета Мосэнерго за 2011 год). Указанным четырем компаниям принадлежит 17 электростанций (Мосэнерго принадлежит 15 электростанций, а Е-ОН и ОГК-1 принадлежит по одной электростанции) и одно хранилище электроэнергии (которое принадлежит РусГидро). В рамках предложенной модели имеет смысл рассматривать каждую из 15 электростанций, принадлежащих Мосэнерго, как отдельного производителя, так как это позволяет учесть технологические ограничения на производство электроэнергии на каждой электростанции. Таким образом, для рассматриваемого региона параметр модели I принимает значение 18, а поскольку все электростанции региона являются конденсационными, параметр модели S принимает значение 1. Далее, на сегодня в рассматриваемом регионе имеется одно крупное хра-

нилище электроэнергии (Загорская гидроаккумулирующая электростанция), однако в будущем возможно использование хранилищ электроэнергии других типов (например, химических), поэтому на ближайшее будущее можно положить значение параметра R равным 2. На оптовом рынке электроэнергии Москвы и Московской области крупнейшим потребителем электроэнергии, который закупает более 85% электроэнергии в регионе, является Мосэнергосбыт (по данным годового отчета компании за 2013 год), что позволяет считать значение параметра J модели равным 1. В рассматриваемой в работе задаче горизонт планирования имеет смысл выбирать так, чтобы дать производителям достаточно времени для построения новых электростанций малой или средней мощности и хранилищ электроэнергии, функционирование которых окупило бы их строительство. Например, можно положить значение параметра T равным 15 и рассматривать взаимодействие производителей и потребителей электроэнергии в течение четырех «типичных» недель каждого года горизонта планирования.

Разделение сети электроснабжения на узлы (непересекающиеся части рынка электроэнергии региона, внутри которых ограничения на передачу электроэнергии незначительны) является сложной задачей. В настоящее время системный оператор рынка электроэнергии России использует так называемые зоны свободного перетока электроэнергии («...зоны оптового рынка электрической энергии (мощности), внутри которых в стандартных условиях функционирования сети отсутствуют существенные системные ограничения на объемы перетока электроэнергии в течение примерно 30% времени в каждом месяце...» см. Глоссарий системного оператора единой энергетической системы) при выборе им электростанций, которые будут эксплуатироваться в среднесрочной перспективе. Поскольку Москва и Московская область образуют единую зону свободного перетока, в рамках предложенной в работе модели можно положить значение параметра K равным 1. Нетрудно убедиться в том, что для указанных значений параметров модели поиск равновесия в игре, формулиру-

емой с использованием этой модели, сводится к решению пары двойственных задач линейного программирования с числом как прямых, так и двойственных переменных не превышающим трех миллионов.

4. Заключение

В статье рассмотрена проблема оценки будущих цен и объемов электроэнергии, продаваемых производителями электроэнергии её потребителям по прямым двусторонним договорам на оптовом рынке электроэнергии в регионе, и ожидаемых объемов инвестиций производителей как в строительство новых электростанций и новых блоков существующих электростанций, так и в строительство новых хранилищ электроэнергии и новые блоки существующих хранилищ электроэнергии в этом регионе.

Взаимодействие производителей и потребителей электроэнергии в регионе математически описывается бескоалиционной игрой двух лиц, в которой первым игроком является группа всех производителей электроэнергии, снабжающих электроэнергией потребителей региона или имеющих хранилища электроэнергии на территории региона, а вторым игроком является группа всех потребителей электроэнергии в регионе и учитываются технологические ограничения связанные с производством, хранением и передачей электроэнергии. Функции издержек производства, функции стоимости инвестирования в строительство новых электростанций или новых блоков существующих электростанций и в строительство новых хранилищ электроэнергии или новых блоков существующих хранилищ электроэнергии, а также функции оценочной стоимости электростанций и хранилищ электроэнергии, которые (вообще говоря) могут быть произвольными выпуклыми или вогнутыми функциями, с необходимой (для прикладных расчетов с использованием предложенной модели) точностью можно приблизить кусочно-линейными функциями. В построенной игре отыскание равновесия Нэша сводится к решению пары двойственных задач линейного программирования, что позволяет использовать предложенную модель для практических

расчетов при решении задач любых интересных для практики размеров.

Необходимо отметить, что в статье не приводится какого-либо численного примера отыскания равновесных стратегий в рассмотренной игре на модельных данных. По мнению авторов такой пример демонстрировал бы не более чем работу стандартных пакетов линейного программирования, что не представляет какого-либо научного и даже прикладного интереса, в то время как основным результатом статьи является продемонстрированная в ней возможность сведения задачи отыскания оптимальных объемов производства и потребления электроэнергии в регионе в рамках прямых двусторонних договоров к задачам линейного программирования, образующим двойственную пару. Ясно также, что решение задач с реальными данными, которые являются конфиденциальной коммерческой информацией энергетических компаний, не представляется возможным без согласия этих компаний предоставить такие данные (с учетом существующей конкуренции на рынке электроэнергии) и потому не являлось целью настоящей статьи.

Литература

1. БЕЛЕНЬКИЙ А.С. *Минимаксные задачи планирования с линейными ограничениями и методы их решения* // Автоматика и телемеханика. – 1981. – №10. – С. 157–170.
2. ВАСИН А.А., ДАЙЛОВА Е.А. *Анализ краткосрочной эффективности механизмов оптового рынка электроэнергии* // Журнал Новой экономической ассоциации. – 2013. – №2(18). – С. 35–60.
3. ДАВИДСОН М.Р., ДОГАДУШКИНА Ю.В., КРЕЙНЕС Е.М. И ДР. *Математическая модель управления энергосистемой в условиях конкурентного оптового рынка электроэнергии и мощности в России* // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2009. – №2. – С. 84–94.
4. ДАВИДСОН М.Р., НОВИКОВА Н.М. *Задача выбора состава генерирующего оборудования в рынке электроэнергии*

- гии // Тезисы докладов 5-й Московской междунар. конф. по исследованию операций. – М.: ВЦ РАН, 2007. – С. 34–36.
5. СТОФТ С. *Экономика энергосистем. Введение в проектирование рынков электроэнергетики* – М.: Мир, 2006. – 623 с.
 6. ЧЕРНИКОВ С.Н. *Линейные неравенства*. – Итоги науки. Сер. Мат. Алгебра. Топол. Геом. – М.: Наука, 1968. – С. 137–187.
 7. BUSHNELL J., ISHII J. *An Equilibrium Model of Investment in Restructured Electricity Markets: Working paper*, University of California Energy Institute, 2007. – 37 p.
 8. DIRKSE S.P., FERRIS M.C. *Mcplib: a collection of nonlinear mixed complementarity problems* // Optimization Methods and Software. – 1995. – №5(4). – P. 319–345.
 9. EHRENMANN A., SMEERS Y. *Generation Capacity Expansion in a Risky Environment: A Stochastic Equilibrium Analysis* // Operations Research. – 2011. – №59(6). – P. 1332–1346.
 10. FADLULLAH Z.M., NOZAKI Y., TAKEUCHI A., KATO N. *A survey of game theoretic approaches in smart grid* // Wireless Communications and Signal Processing (WCSP), 2011 International Conference. – 2011. – P. 1–4.
 11. GARCIA A., ALZATE J.M., BARRERA J. *Regulatory design and incentives for renewable energy* // Journal of Regulatory Economics. – 2012. – №41(3). – P. 315–336.
 12. GENC T.S., REYNOLDS S.S., SEN S. *Dynamic oligopolistic games under uncertainty: A stochastic programming* // Journal of Economic Dynamics and Control. – 2007. – №31(1). – P. 55–80.
 13. *Gurobi Optimizer*. – URL: <http://www.gurobi.com/products/gurobi-optimizer> (дата обращения: 10.04.2015).
 14. LISE W., KRUSEMAN G. *Long-term price and environmental effects in a liberalised electricity market* // Energy Economics. – 2008. – №30(2). – P. 230–248.
 15. LUEKEN R., APT J. *The effects of bulk electricity storage*

- on the PJM market // Energy Systems. – 2014. – №5(4). – P. 677–704.*
16. NAGL S. *Prices vs. Quantities: Incentives for Renewable Power Generation - Numerical Analysis for the European Power Market: Working paper*, Energiewirtschaftliches Institut an der Universitaet zu Koeln. – 2013. – 41 p.
 17. PINEAU P.-O., MURTO R. *An Oligopolistic Investment Model of the Finnish Electricity Market // Annals of Operations Research. – 2003. – №121(1–4). – P. 123–148.*
 18. PINEAU P.-O., RASATAB H., ZACCOUR G. *Impact of some parameters on investments in oligopolistic electricity markets // European Journal of Operational Research. – 2011. – №213(1). – P. 180–195.*
 19. SCHILL W.-P., KEMFERT C. *Modeling Strategic Electricity Storage: The Case of Pumped Hydro Storage in Germany // The Energy Journal. – 2011. – №3. – P. 59–88.*
 20. SCHRODER A. *An electricity market model with generation capacity expansion under uncertainty // Energy Systems. – 2014. – №5(2). – P. 253–267.*
 21. TRABER T., KEMFERT C. *Gone with the wind? - Electricity market prices and incentives to invest in thermal power plants under increasing wind energy supply // Energy Economics – 2011. – №33(2). – P. 249–256.*
 22. VASIN A., KARTUNOVA P., WEBER G.-W. *Models for capacity and electricity market design // Central European Journal of Operations Research. – 2013. – №21(3). – P. 651–661.*

GAME-THEORETIC APPROACH TO ANALYSIS OF FUTURE REGIONAL POWER SUPPLY SYSTEM

Alexander S. Belenky, National Research University Higher School of Economics, Moscow, Russia, Doctor of Science, professor (abelenky@hse.ru).

Dmitry Bolkunov, National Research University Higher School of Economics, Moscow, Russia, MSc in Applied Mathematics and Computational Science (d.bolkunov@yandex.ru).

Abstract: We design the elements of an automated tool for the quantitative analysis of the future regional power supply system based on the opinion of regional authorities on the current and future availability of power supply services in the industry and in the domestic sector. A mathematical model is suggested to estimate the return of investment into new power station and storage construction. The model includes a non-cooperative game on polyhedra, where the first player's payoff function adds up from the bilinear and the linear function of vector arguments, whereas the the payoff function of the second player is a bilinear function of the same arguments. We prove that equilibria in this game can be found by solving a dual pair of linear programming problems. These equilibria determine, in particular, the volume of investment for generators and the electricity price for consumers, which are mutually acceptable to both parties.

Keywords: convex polyhedra, control in large systems, linear programming, Nash equilibrium, saddle points, two-person game.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии В.Н. Бурковым

Поступила в редакцию 03.02.2015.

Дата опубликования 30.09.2015.

УДК 519.854.2

ББК 22.1

МЕТРИКА ДЛЯ ЗАДАЧИ МИНИМИЗАЦИИ СУММАРНОГО ЗАПАЗДЫВАНИЯ¹

Лазарев А. А.²

*(ФГБУН Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова
РАН, Москва,*

*ФГБОУ ВПО «Московский государственный университет имени
М.В.Ломоносова», Москва*

*ФГБОУ ВПО «Московский физико-технический институт
(государственный университет)», Москва,*

*ФГАОУ ВПО «Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики», Москва)*

Корнев П. С.³,

*(ФГБУН Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова
РАН, Москва,*

*ФГБОУ ВПО «Московский государственный университет имени
М.В.Ломоносова», Москва)*

Сологуб А. А.⁴

*(ФГБУН Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова
РАН, Москва,*

*ФГБОУ ВПО «Московский государственный университет имени
М.В.Ломоносова», Москва)*

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты №11-08-01321, 11-08-13121, 13-01-12108, 15-07-07489 и 15-07-03141), ФЭН НИУ ВШЭ, DAAD (A/14/00328).

² Александр Алексеевич Лазарев, д.ф.-м.н., заведующий лабораторией ИПУ РАН, профессор МГУ, професор НИУ ВШЭ, профессор МФТИ (jobmath@mail.ru).

³ Павел Сергеевич Корнев, техник ИПУ РАН, студент МГУ (pkorenev@rambler.ru).

⁴ Александр Александрович Сологуб, техник ИПУ РАН, студент МГУ (sologub10@gmail.com).

Рассматривается NP -трудная задача $1|r_j|\sum T_j$ теории расписаний. Предлагается подход, основанный на введении метрики для пространства параметров задачи, позволяющий за полиномиальное время находить решение задачи с гарантированной абсолютной погрешностью. Рассматриваются возможности применения аналогичного подхода для решения других задач теории расписаний.

Ключевые слова: теория расписаний, приближенные алгоритмы, NP -трудность, метрики.

1. Введение

Имеется множество $N = \{1, 2, \dots, n\}$, состоящее из n требований, которые необходимо обслужить на одном приборе. Прибор готов начать обслуживание в момент времени $t_0 = 0$ и не может обслуживать более одного требования одновременно. Прерывания при обслуживании запрещены. Для каждого требования $j \in N$ заданы: момент поступления r_j , продолжительность обслуживания p_j и директивный срок d_j . Расписание $\pi = \{j_1, j_2, \dots, j_n\}$ определяет порядок в котором обслуживаются требования. Естественно рассматривать ранние расписания, при которых

$$C_{j_1}(\pi) = r_{j_1} + p_{j_1},$$

$$C_{j_k}(\pi) = \max\{r_{j_k}, C_{j_{k-1}}(\pi)\} + p_{j_k}, \quad k = 2, 3, \dots, n,$$

где $C_j(\pi)$ – момент окончания обслуживания требования j при расписании π . Необходимо построить оптимальное расписание π^* , минимизирующее целевую функцию – суммарное запаздывание $\sum_{j \in N} T_j(\pi)$, где $T_j(\pi) = \max\{0, C_j(\pi) - d_j\}$ – запаздывание требования j при расписании π . В дальнейшем, если из контекста ясно о каком расписании идет речь, зависимость от π может опускаться. Данная задача является NP -трудной [5] и обозначается $1|r_j|\sum T_j$ [6].

Задача $1|r_j|\sum T_j$ полностью характеризуется $3n$ параметрами – директивными сроками, продолжительностями обслуживания

ния и моментами поступления каждого из n требований. Будем говорить, что задан пример A задачи, если задано $3n$ параметров $\{r_j^A, p_j^A, d_j^A, j = 1, 2, \dots, n\}$, характеризующих задачу.

Для частного случая $r_j = 0, j \in N$, задачи минимизации суммарного запаздывания ранее был предложен полиномиальный приближенный алгоритм сложности $O(\frac{n^7}{\varepsilon})$ операций [8], также для этого случая известен псевдополиномиальный алгоритм сложности $O(n^4 \sum p_j)$ [7]. В случае, если

$$\begin{aligned} p_1 &\geq p_2 \geq \dots \geq p_n, \\ d_1 &\leq d_2 \leq \dots \leq d_n, \end{aligned}$$

сложность псевдополиномиального алгоритма может быть уменьшена до $O(n^2 \sum p_j)$ операций [9]. Для случая $1|r_j, p_j = p | \sum T_j$ известен полиномиальный алгоритм сложности $O(n^7)$, предложенный Р. Вартисте [4].

Далее в статье предлагается подход нахождения приближенного решения задачи $1|r_j | \sum T_j$ с гарантированной погрешностью, основанный на введении метрики для пространства параметров задачи, и рассматриваются возможности применения данного подхода к другим задачам теории расписаний. В последнем разделе описываются численные эксперименты, проведенные для проверки предложенного метода.

2. Метрика для пространства параметров

Задача $1|r_j | \sum T_j$ полностью характеризуется $3n$ параметрами, что позволяет нам рассматривать примеры задачи, как точки в $3n$ -мерном пространстве параметров $\Omega = \{r_1, \dots, r_n, p_1, \dots, p_n, d_1, \dots, d_n\}$.

Лемма 1. Пусть примеры A и B имеют одинаковые продолжительности обслуживания и директивные сроки:

$$p_j^A = p_j^B, d_j^A = d_j^B, j \in N.$$

Тогда для любого расписания π

$$(1) \quad \left| \sum_{j \in N} T_j^A(\pi) - \sum_{j \in N} T_j^B(\pi) \right| \leq n \max_{j \in N} |r_j^A - r_j^B|.$$

Доказательство леммы 1.

Используя определение запаздывания и известное неравенство

$$(2) \quad |\max\{a, b\} - \max\{c, d\}| \leq \max\{|a - c|, |b - d|\}, \forall a, b, c, d \in \mathbb{R},$$

получим

$$(3) \quad \begin{aligned} \left| \sum_{j \in N} T_j^A - \sum_{j \in N} T_j^B \right| &\leq \sum_{j \in N} |C_j^A - C_j^B + d_j^B - d_j^A| \leq \\ &\leq \sum_{j \in N} |C_j^A - C_j^B| + \sum_{j \in N} |d_j^A - d_j^B|. \end{aligned}$$

Или, учитывая равенство директивных сроков,

$$(4) \quad \left| \sum_{j \in N} T_j^A - \sum_{j \in N} T_j^B \right| \leq \sum_{j \in N} |C_j^A - C_j^B|.$$

Учитывая свойства раннего расписания, заметим, что

$$\begin{aligned} |C_{j_1}^A - C_{j_1}^B| &= |r_{j_1}^A - r_{j_1}^B| \leq \max_{j \in N} |r_j^A - r_j^B|, \\ |C_{j_k}^A - C_{j_k}^B| &\leq \max\{|r_{j_k}^A - r_{j_k}^B|, |C_{j_{k-1}}^A - C_{j_{k-1}}^B|\} \leq \\ &\leq \max_{j \in N} |r_j^A - r_j^B|, k = 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Отсюда и из неравенства (4) получаем утверждение леммы.

Лемма 2. Пусть примеры A и B имеют одинаковые моменты поступления и директивные сроки:

$$r_j^A = r_j^B, d_j^A = d_j^B, j \in N.$$

Тогда для любого расписания π

$$(5) \quad \left| \sum_{j \in N} T_j^A(\pi) - \sum_{j \in N} T_j^B(\pi) \right| \leq n \sum_{j \in N} |p_j^A - p_j^B|.$$

Доказательство леммы 2.

При условиях леммы также выполняется неравенство (4):

$$\left| \sum_{j \in N} T_j^A - \sum_{j \in N} T_j^B \right| \leq \sum_{j \in N} |C_j^A - C_j^B|.$$

Учитывая свойства раннего расписания и равенство моментов поступления, получим

$$\begin{aligned} |C_{j_1}^A - C_{j_1}^B| &= |p_{j_1}^A - p_{j_1}^B| \leq \sum_{j \in N} |p_j^A - p_j^B|, \\ |C_{j_k}^A - C_{j_k}^B| &\leq |p_{j_k}^A - p_{j_k}^B| + |C_{j_{k-1}}^A - C_{j_{k-1}}^B| \leq \\ &\leq \sum_{j \in N} |p_j^A - p_j^B|, k = 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Отсюда и из неравенства (4) получаем утверждение леммы.

Лемма 3. Пусть примеры A и B имеют одинаковые моменты поступления и продолжительности обслуживания:

$$r_j^A = r_j^B, p_j^A = p_j^B, j \in N.$$

Тогда для любого расписания π

$$(6) \quad \left| \sum_{j \in N} T_j^A(\pi) - \sum_{j \in N} T_j^B(\pi) \right| \leq \sum_{j \in N} |d_j^A - d_j^B|.$$

Доказательство леммы 3.

При условиях леммы $C_{j_k}^A = C_{j_k}^B, k \in N$, и неравенство (3) имеет вид

$$\left| \sum_{j \in N} T_j^A - \sum_{j \in N} T_j^B \right| \leq \sum_{j \in N} |d_j^A - d_j^B|.$$

То есть утверждение леммы выполняется.

Теорема 1. Определенная на пространстве примеров $\Omega \times \Omega$ функция

$$(7) \quad \rho(A, B) = n \max_{j \in N} |r_j^A - r_j^B| + n \sum_{j \in N} |p_j^A - p_j^B| + \sum_{j \in N} |d_j^A - d_j^B|$$

удовлетворяет аксиомам метрики.

Доказательство теоремы 1. Очевидно, что функция $\rho(A, B)$ симметрична и неотрицательна, причем $\rho(A, B) = 0$ тогда и только тогда, когда $A = B$. Неравенство треугольника выполняется в силу свойств модуля суммы.

Лемма 4. Для любых примеров A и B и любого расписания π справедливо неравенство

$$(8) \quad \left| \sum_{j \in N} T_j^A - \sum_{j \in N} T_j^B \right| \leq \rho(A, B).$$

Доказательство леммы 4. Пусть пример C имеет такие же моменты поступления и продолжительности обслуживания, как и пример A , а директивные сроки – как у примера B . Пусть далее пример D имеет моменты поступления как у примера A , а директивные сроки и продолжительности обслуживания – как у примера B , тогда, используя леммы (1)–(3) получим

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j \in N} T_j^A - \sum_{j \in N} T_j^B \right| &\leq \left| \sum_{j \in N} T_j^B - \sum_{j \in N} T_j^D \right| + \left| \sum_{j \in N} T_j^D - \sum_{j \in N} T_j^C \right| + \\ &+ \left| \sum_{j \in N} T_j^A - \sum_{j \in N} T_j^C \right| \leq n \max_{j \in N} |r_j^A - r_j^B| + n \sum_{j \in N} |p_j^A - p_j^B| + \\ &+ \sum_{j \in N} |d_j^A - d_j^B| = \rho(A, B). \end{aligned}$$

3. Метод изменения параметров

Теорема 2. Пусть π^A и π^B – оптимальные расписания для примеров A и B , тогда

$$(9) \quad \sum_{j \in N} T_j^A(\pi^B) - \sum_{j \in N} T_j^A(\pi^A) \leq 2\rho(A, B).$$

Доказательство теоремы 2. Используя лемму 4, получим

$$\begin{aligned} &\sum_{j \in N} T_j^A(\pi^B) - \sum_{j \in N} T_j^A(\pi^A) = \\ &= \left(\sum_{j \in N} T_j^A(\pi^B) - \sum_{j \in N} T_j^B(\pi^B) \right) + \left(\sum_{j \in N} T_j^B(\pi^B) - \sum_{j \in N} T_j^B(\pi^A) \right) + \\ &+ \left(\sum_{j \in N} T_j^B(\pi^A) - \sum_{j \in N} T_j^A(\pi^A) \right) \leq 2\rho(A, B). \end{aligned}$$

Доказанная теорема позволяет использовать метод решения за-
128

дачи $1|r_j| \sum T_j$, названный методом изменения параметров. Метод состоит в том, чтобы использовать оптимальное расписание некоторого, (псевдо)полиномиального решаемого примера B в качестве расписания для примера A . Теорема 2 позволяет оценить сверху погрешность такого решения при помощи функции $\rho(A, B)$. Естественно конструировать пример B так, чтобы минимизировать функцию $\rho(A, B)$. Таким образом, задача $1|r_j| \sum T_j$ заменяется задачей на минимизацию функции метрики.

Рассмотрим случай, когда искомый пример B должен принадлежать некоторому полиномиально или псевдополиномиально разрешимому классу примеров, задаваемому системой неравенств

$$A \cdot R^B + B \cdot P^B + C \cdot D^B \leq H,$$

где $R^B = (r_1^B, \dots, r_n^B)^\top$; $P^B = (p_1^B, \dots, p_n^B)^\top$; $D^B = (d_1^B, \dots, d_n^B)^\top$; $p_j^B \geq 0, r_j^B \geq 0, j \in N$; $^\top$ – символ транспонирования; A, B, C – матрицы $m \times n$ и H – столбец из m элементов.

В этом случае задача минимизации функции метрики может быть поставлена как задача линейного программирования.

$$(10) \quad \min n \cdot (y^r - x^r) + n \cdot \sum_{j \in N} (y_j^p - x_j^p) + \sum_{j \in N} (y_j^d - x_j^d),$$

при условиях

$$\begin{aligned} x^r &\leq r_j^A - r_j^B \leq y^r, & j \in N, \\ x_j^p &\leq p_j^A - p_j^B \leq y_j^p, & j \in N, \\ x_j^d &\leq d_j^A - d_j^B \leq y_j^d, & j \in N, \\ 0 &\leq r_j^B, 0 \leq p_j^B, & j \in N, \\ A \cdot R^B + B \cdot P^B + C \cdot D^B &\leq H. \end{aligned}$$

Неизвестными в данной задаче являются $7n + 2$ переменных: $r_j^B, p_j^B, d_j^B, x_j^p, y_j^p, x_j^d, y_j^d, x^r, y^r, j \in N$.

Тем не менее, сепарабельность функции $\rho(A, B)$ во многих случаях позволяет находить её минимум гораздо проще, без использования методов линейного программирования.

3.1. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ИЗМЕНЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ДЛЯ ДРУГИХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ РАСПИСАНИЙ

Описанный метод не является жестко привязанным к виду целевой функции, что позволяет использовать его для решения других задач теории расписаний. Так, теорему 2 можно обобщить на случай общего вида целевой функции $F(\pi)$.

Теорема 3. Пусть $F(\pi)$ – произвольная целевая функция, а $\rho(A, B)$ – функция метрики, для любых A, B, π удовлетворяющая неравенству

$$(11) \quad |F^A(\pi) - F^B(\pi)| \leq \rho(A, B).$$

Пусть далее π^A и π^B – оптимальные расписания для примеров A и B , тогда

$$(12) \quad F^A(\pi^B) - F^A(\pi^A) \leq 2\rho(A, B).$$

Доказательство теоремы 3. Доказательство теоремы 3 повторяет доказательство теоремы 2 с заменой $\sum_{j \in N} T_j$ на F .

Таким образом, для применения метода изменения параметров достаточно построить функцию $\rho(A, B)$, удовлетворяющую неравенству (11). Такие функции были построены ранее для задач $1 || \sum T_j$ [1] и $1|r_j|L_{max}$ [3]. Здесь мы приведем вариант построения таких функций для общих случаев аддитивной и максимальной целевой функции.

Лемма 5. В случае аддитивной целевой функции вида

$$(13) \quad F(\pi) = \sum_{j \in N} \phi_j(\pi, r_1, \dots, r_n, p_1, \dots, p_n, d_j)$$

функция

$$(14) \quad \rho(A, B) = \sum_{j \in N} \sum_{i \in N} (R_{ji}|r_j^A - r_j^B| + P_{ji}|p_j^A - p_j^B|) + \sum_{j \in N} D_j |d_j^A - d_j^B|$$

удовлетворяет неравенству (11). Здесь R_{ji}, P_{ji} – константы Литшица для функции ϕ_i по переменным r_j и p_j , D_j – константа Литшица для функции ϕ_j по переменной $d_j, i, j \in N$.

Лемма 6. В случае максимальной целевой функции вида

$$(15) \quad F(\pi) = \max_{j \in N} \phi_j(\pi, r_1, \dots, r_n, p_1, \dots, p_n, d_j)$$

функция

$$(16) \rho(A, B) = \sum_{j \in N} (R_j |r_j^A - r_j^B| + P_j |p_j^A - p_j^B|) + D \max_{j \in N} |d_j^A - d_j^B|$$

удовлетворяет неравенству (11). Здесь R_j, P_j – наибольшие константы Липшица по переменным r_j и p_j из констант для функций ϕ_i , D – наибольшая из констант Липшица для функций ϕ_j по переменным $d_j, i, j \in N$.

Заметим, что функции (14) и (16) сепарабельны, что значительно облегчает нахождение их минимумов.

4. Численные эксперименты

Для определения эффективности предложенной схемы была проведена серия численных экспериментов. Классы, в которых проводился поиск полиномиально разрешимых примеров, представлены в таблице 1.

Таблица 1. Классы примеров, использованные в численных экспериментах

Класс примеров	Метрика между примером B класса и произвольным примером A
$\{\mathcal{PR} : p_j = p, r_j = r, j \in N\}$	$\rho(A, B) = n \cdot \sum_{j=1}^n p_j^A - p +$ $+ n \cdot \max_{j \in N} r_j^A - r $
$\{\mathcal{PD} : p_j = p, d_j = d, j \in N\}$	$\rho(A, B) = n \cdot \sum_{j \in N} p_j^A - p +$ $+ \sum_{j \in N} d_j^A - d $
$\{\mathcal{RD} : r_j = r, d_j = d, j \in N\}$	$\rho(A, B) = n \cdot \max_{j \in N} r_j^A - r +$ $+ \sum_{j \in N} d_j^A - d $
$\{\mathcal{P} : p_j = p, j \in N\}$	$\rho(A, B) = n \cdot \sum_{j \in N} p_j^A - p $
$\{\mathcal{R0} : r_j = 0, j \in N\}$	$\rho(A, B) = n \cdot \max_{j \in N} r_j^A - r $

В первых трех классах решением является расписание, упорядоченное по неубыванию свободного параметра. Алгоритмы решения задач последних двух классов представлены в [2] и [4] и имеют сложности $O(n^7)$ и $O(n^4 \sum p_j)$ операций соответственно.

Для нахождения в указанных классах полиномиально разрешимого примера B , ближайшего к заданному примеру, необходимо найти минимум функций

$$(17) \quad f(r) = n \cdot \max_{j \in N} |r_j^A - r|;$$

$$(18) \quad g(p) = n \cdot \sum_{j=1}^n |p_j^A - p|;$$

$$(19) \quad h(d) = \sum_{j \in N} |d_j^A - d|.$$

Лемма 7. 1) Минимум функции (17) достигается в точке $r = \frac{r_{max}^A + r_{min}^A}{2}$, где $r_{max}^A = \max_{j \in N} r_j^A$, $r_{min}^A = \min_{j \in N} r_j^A$.

2) Минимум функции (18) достигается в точке $p \in \{p_1^A, \dots, p_n^A\}$.

3) Минимум функции (19) достигается в точке $d \in \{d_1^A, \dots, d_n^A\}$.

Доказательство леммы 7.

Функция $f(r)$ представима в виде

$$\begin{aligned} n \cdot \max_{j \in N} |r_j^A - r| &= n \max\{r - r_{min}^A, r_{max}^A - r\} = \\ &= n \left(\frac{r_{max}^A - r_{min}^A}{2} + \left| r - \frac{r_{max}^A + r_{min}^A}{2} \right| \right) \end{aligned}$$

и, очевидно, имеет минимум в точке $\frac{r_{max}^A + r_{min}^A}{2}$.

Пусть функция $g(p)$ имеет минимум в точке p_0 , тогда либо $g'(p_0) = 0$, либо $p_0 \in \{p_1^A, \dots, p_n^A\}$. Поскольку $g(p)$ — кусочно-линейная функция, обращение её производной в нуль означает, что функция является константой на некотором интервале $[p_k^A, p_{k+1}^A]$, $k = 1, \dots, n - 1$, а значит, граничные точки p_k^A и p_{k+1}^A также являются точками минимума.

Последнее утверждение леммы о минимуме функции $h(d)$ доказывается аналогично.

Было проведено несколько серий экспериментов. Во всех сериях использовались примеры с параметрами, распределенными равномерно на интервалах $[1, 100]$ для p_j^A , $[p_j, \sum_{j \in N} p_j]$ для d_j^A и $[0, d_j - p_j]$ для r_j^A .

В первой серии экспериментов оценивалась величина различия между правой и левой частями неравенства леммы 4. Данная величина позволяет оценить погрешность метода. Для каждого $n = 10, 20, \dots, 100$ генерировалось 10000 пар примеров. Используемые в экспериментах расписания генерировались случайным образом. Для каждой пары вычислялась величина $\frac{|\sum_{j \in N} T_j^A - \sum_{j \in N} T_j^B|}{\rho(A, B)}$. Также для определения параметров, имеющих наибольшее влияние на значение функции метрики, вычислялись процентные величины вкладов частей метрики, зависящих от продолжительностей обслуживания, директивных сроков и моментов поступления.

Результаты представлены в таблице 2. Среднее значение $\frac{|\sum_{j \in N} T_j^A - \sum_{j \in N} T_j^B|}{\rho(A, B)}$ меняется от 5% до 10% при росте n , а части функции метрики, зависящие от продолжительностей обслуживания, директивных сроков и моментов поступления дают вклады приблизительно 35%, 20% и 45% в общую величину функции соответственно.

Вторая серия экспериментов служила непосредственно проверке метода изменения параметров. Эксперименты проводились по следующей схеме. Рассматривались значения $n = 4, 5, \dots, 10$, для каждого n генерировались по 10000 примеров. К каждому примеру применялась вышеописанная схема для нахождения приближенного решения со значением целевой функции F_e , затем при помощи алгоритма ветвей и границ ищлось точное решение с оптимальным значением целевой функции F^* . Далее вычислялось Δ — отношение абсолютной погрешности схемы

$\delta = F_e - F^*$ к её верхней оценке, определяемой неравенством (9):

$$(20) \quad \Delta = \frac{F_e - F^*}{2\rho(A, B)}.$$

Таблица 2. Средняя разница между целевыми функциями и доли составных частей метрики

n	$\frac{ \sum T_j^A - T_j^B }{\rho}$	$\frac{\rho_r}{\rho}$	$\frac{\rho_p}{\rho}$	$\frac{\rho_d}{\rho}$
10	11,7%	35,6%	42,3%	20,6%
20	10,4%	39,7%	39,4%	19,4%
40	8,9%	42,4%	37,4%	18,6%
60	7,8%	43,6%	36,6%	18,3%
80	7,3%	44,4%	34,4%	18%
100	6,7%	44,9%	35,7%	17,9%

Таблица 3. Средняя экспериментальная погрешность в процентах от теоретической

n	\mathcal{PR}	\mathcal{PD}	\mathcal{RD}	\mathcal{P}	$\mathcal{R0}$
4	2,5%	4,6%	20,8%	1,8%	2,9%
5	2,6%	4,8%	23,1%	1,9%	2,8%
6	2,6%	4,6%	24,6%	1,9%	2,7%
7	2,6%	4,7%	26%	1,9%	2,5%
8	2,5%	4,6%	27%	2%	2,3%
9	2,4%	4,7%	27,9%	2%	2,2%
10	2,4%	4,6%	28,6%	1,9%	2,1%

Было обнаружено, что если поиск полиномиально разрешимого примера ведется в классе RD , то средняя погрешность решения растет от 20% до 30% от верхней оценки (9) при увеличении n . Это показывает, что расписание по возрастанию продолжительностей обслуживания плохо применимо для примеров с выбранным распределением параметров. Для остальных классов средняя погрешность решения не зависит от n и составляет

несколько процентов от максимальной теоретической. Столь малая погрешность обусловлена тем, что примерно в 20% случаев метод изменения параметров давал точное решение задачи. Зависимость средней ошибки Δ от n представлена в таблице 3.

5. Заключение

В статье представлен новый метод приближенного решения задачи минимизации суммарного запаздывания. Идея метода заключается во введении метрики для пространства параметров задачи и использовании вспомогательного примера, ближайшего к решаемому примеру во введенной метрике.

Дальнейшие исследования по этой теме могут быть направлены на конструирование более эффективных метрик для задач теории расписаний и поиск новых полиномиально или псевдополиномиально разрешимых классов примеров, которые могут быть использованы в данном методе.

Литература

1. ЛАЗАРЕВ А.А., КВАРАЦХЕЛИЯ А.Г. *Метрики в задачах теории расписаний* // Доклады Академии наук. – 2010. – Т. 432, №6. – С. 746–749.
2. ЛАЗАРЕВ А.А., ГАФАРОВ Е.Р. *Теория расписаний. Минимизация суммарного запаздывания для одного прибора*. – М.: ВЦ РАН, 2006. – 134 с.
3. ЛАЗАРЕВ А.А, САДЫКОВ Р.Р., СЕВАСТЬЯНОВ С.В *Схема приближенного решения задачи $1|r_j|L_{max}$* // Дискретный анализ и исследование операций – 2006. – Сер. 2, т. 13, №1. – С. 57–76.
4. BAPTISTE P. *Scheduling equal-length jobs on identical parallel machines* // Discret. Appl. Math. – 2000. – No. 103. – P. 21–32 .
5. DU J., LEUNG J.Y.-T. *Minimizing total tardiness on one machine is NP-hard* // Math. Oper. Res. – 1990. – No. 15(3). – P. 483–495.

6. GRAHAM R.L., LAWLER E.L., LENSTRA J.K. AND OTHER. *Optimization and approximation in deterministic sequencing and scheduling: a survey* // Ann. Discret. Math. – 1979. – No. 5. – P. 287–326.
7. LAWLER E.L. *A Pseudopolynomial Algorithm for Sequencing Jobs to Minimize Total Tardiness* // Ann. Discret. Math. – 1977. – No. 1. – P. 331–342.
8. LAWLER E.L. *A fully polynomial approximation scheme for the total tardiness problem* // Oper. Res. Lett. – 1982. – No. 1. – P. 207–208.
9. LAZAREV A.A., WERNER F. *Algorithms for Special Single Machine Total Tardiness Problem and an Application to the Even-Odd Partition Problem* // Math. and Comp. Model. – 2009. – No. 49. – P. 2078–2089.

METRIC FOR MINIMUM TOTAL DELAY PROBLEM

Alexander Lazarev, Doctor of Science, Professor of MSU, Professor of HSE, Professor of MIPT, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow (jobmath@mail.ru).

Pavel Korenev, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, technician, Moscow (pkorenev@rambler.ru).

Alexander Sologub, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, technician, Moscow (sologub10@gmail.com).

Abstract: We consider the NP-hard $1|r_j|\sum T_j$ scheduling problem and suggest the polynomial time algorithm to find its approximate solution with the guaranteed absolute error. The algorithm employs the metric introduced in the parameter space. We also consider possible application of such an approach to the other scheduling problems.

Keywords: scheduling theory, approximation algorithms, NP-hardness, metrics.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии Е.Н. Хоботовым.

Поступила в редакцию 23.06.2015.

Дата опубликования 30.09.2015.

УДК 519.25
ББК в.22.172

**ОБ ИДЕНТИФИКАЦИИ ПАРАМЕТРОВ
ЗАБОЛЕВАЕМОСТИ В МОДЕЛИ
С ГЕТЕРОГЕННОСТЬЮ: СЛУЧАИ ПОЛНОЙ
И НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИИ**

Иванов Р. В.¹, Михальский А. И.²

*(ФГБУН Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва)*

**Иванов В. К.³, Чекин С. Ю.⁴, Максютов М. А.⁵,
Кащеев В. В.⁶**

*(МРНЦ им. А.Ф. Цыба – филиал ФГБУ «НМИРЦ»
Минздрава России, Калужская обл., г. Обнинск)*

Предложена методология оценки параметров заболеваемости в модели из трех состояний в условиях наличия гетерогенного фактора, моделируемого с помощью гамма-распределения. Рассмотрены случаи полной и неполной информации, различные способы моделирования риска. Приводятся результаты оценки радиационных рисков заболеваемости для четырёх классов болезней, рассчитанные по данным Российского Национального радиационно-эпидемиологического регистра. Мето-

¹ Роман Валерьевич Иванов, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник (roivanov@yahoo.com).

² Анатолий Иванович Михальский, доктор биологических наук, ведущий научный сотрудник (ipiran@yandex.ru).

³ Виктор Константинович Иванов, чл.-кор. РАН, доктор технических наук, профессор, зам. директора по научной работе (nrer@obninsk.com).

⁴ Сергей Юрьевич Чекин, зав. лаб. (nrer@obninsk.com).

⁵ Марат Адильевич Максютов, кандидат технических наук, зав. лаб. (nrer@obninsk.com).

⁶ Валерий Владимирович Кащеев, кандидат биологических наук, старший научный сотрудник (nrer@obninsk.com).

дология может применяться при разработке систем радиационной защиты.

Ключевые слова: Марковская цепь, случайная интенсивность, гетерогенность, гамма-распределение, радиационный риск.

1. Введение

Оценивание рисков заболевания, а также уровня медицинской помощи проводятся на основе данных статистики стационаров. При этом при подобном оценивании необходимо учитывать различные факторы, влияющие на заболеваемость в результате внешнего воздействия: генетическую предрасположенность, наличие сопутствующих заболеваний, историю предыдущей заболеваемости и т.п. Чтобы иметь возможность учитывать влияние таких ненаблюдаемых факторов, введено понятие ненаблюдаемой гетерогенности [7]. В рамках такой модели заболеваемость людей, здоровье которых изучается, считается зависящим от дополнительного параметра уязвимости, который в рамках этой группы имеет случайный характер и величина которого не наблюдается [5]. Учёт распределения параметра уязвимости позволяет уточнить роль влияния негативных внешних факторов в заболеваемости и смертности человека, дать более достоверную оценку величине радиационного риска.

Эффект влияния гетерогенности популяции при моделировании и оценивании смертности был впервые описан и смоделирован в [18], методология анализа гетерогенности развита в работах [5, 19]. Применение идей гетерогенности при анализе эпидемических процессов дано в [9, 20]. В [6] рассмотрен учёт гетерогенности при анализе радиационно-индуцированной онкологической смертности. Моделирование гетерогенности применительно к задачам страхования жизни рассмотрено в [17], в [12] описываются применения идей гетерогенности в оценивании надёжности технических систем. Модель финансового рынка, в которой действия инвесторов определяются в том числе и гетерогенным фактором, представлена в [15]. Немарковское мо-

делирование гетерогенности предложено в [16]. Общая модель с разделением больных на кластеры представлена в [11].

В настоящей работе рассматривается проблема учёта гетерогенности при оценивании риска развития заболевания. Рассматриваются модели пропорционального риска, с избыточным относительным риском, а также модель с избыточным относительным риском и пропорциональной уязвимостью. Для различных классов болезней оценивается риск развития заболевания с учётом случайного фактора уязвимости, влияющего на заболеваемость при радиационном облучении. Рассмотрены случаи полной и неполной информации.

2. Модель

Мы предполагаем, что при наличии трех состояний (1 – здоров, 2 – болен и 3 – умер) интенсивности смертности из состояний 1 и 2 – константы α_1 и α_2 , а интенсивность заболеваемости – случайная функция $\mu(t)$, зависящая от времени.

В данной работе рассматриваются три типа влияния гетерогенности на интенсивность заболеваемости:

$$\mu(t) = D\xi\mu_0(t), \quad \mu(t) = D(1 + \xi)\mu_0(t) \quad \text{и} \quad \mu(t) = (1 + D\xi)\mu_0(t),$$

где $\mu_0(t)$ – детерминированная функция, D – полученная доза, а ξ – гамма-распределенная случайная величина (далее – с.в.), т.е. имеющая плотность распределения

$$f_{\xi}(a, b; x) = \frac{b^a x^{a-1} e^{-bx}}{\Gamma(a)}, \quad x > 0,$$

с параметрами $a > 0$ и $b > 0$. С.в. ξ имеет смысл уязвимости.

Используя уравнения Колмогорова, нетрудно получить, что условные вероятности находиться в момент времени t от начала наблюдений в состояниях 1, 2 и 3 для произвольного наблюдаемого есть

$$P_1(t | \xi) = \exp(-\alpha_1 t - H(t | \xi)),$$

$$P_2(t | \xi) = \int_0^t P_1(s | \xi) \mu(s | \xi) \exp(-\alpha_2(t-s)) ds,$$

$$P_3(t | \xi) = 1 - P_1(t | \xi) - P_2(t | \xi),$$

где кумулятивный риск

$$H(t | \xi) = \int_0^t \mu(s | \xi) ds.$$

В случае когда мы обладаем полной статистикой обозначим через n_1 множество людей, оставшихся в состоянии 1 к концу наблюдений; n_{12} – число перешедших в состояние 2 и оставшихся в нем; n_{13} – число перешедших из состояния 1 в состояние 3 минуя состояние 2; n_{123} – число перешедших сначала из состояния 1 в 2, а потом в 3. Обозначим через s_i , t_i , v_i моменты обнаружения наблюдаемого с индексом i из одного из множеств в состоянии «здоров», «болен» и «умер» соответственно. Поскольку все элементы выборки из распределения с.в. ξ независимы и каждый из наблюдаемых принадлежит только одной из групп n_1 , n_{12} , n_{13} , n_{123} , то, используя формулу полной вероятности, получаем, что функция правдоподобия в данном случае имеет вид

$$(1) \quad L = \prod_{i \in n_1} P_1(s_i) \prod_{i \in n_{12}} p_2(t_i) e^{-\alpha_2(s_i - t_i)} \times \prod_{i \in n_{13}} \alpha_1 P_1(v_i) \prod_{i \in n_{123}} p_2(t_i) \alpha_2 e^{-\alpha_2(v_i - t_i)},$$

где $P_1(t) = E P_1(t | \xi)$ и $p_2(t) = E \mu(t | \xi) P_1(t | \xi)$ – плотность заболеваемости.

Предположим, что по данному заболеванию отсутствует полный набор данных. Пусть \tilde{n}_1 – множество людей, оставшихся в состоянии 1 к концу наблюдений; \tilde{n}_{12} – множество обнаруженных в состоянии 2 и оставшихся в нем; \tilde{n}_{13} – множество умерших, о которых неизвестно, болели ли они; \tilde{n}_{123} – множество умерших, о которых известно, что они заболели. По аналогии с (1) функция правдоподобия в этом случае имеет вид

$$\tilde{L} = \prod_{i \in \tilde{n}_1} P_1(s_i) \prod_{i \in \tilde{n}_{12}} p_2(t_i) \times \prod_{i \in \tilde{n}_{13}} (\alpha_1 P_1(v_i) + \alpha_2 P_2(v_i)) \prod_{i \in \tilde{n}_{123}} p_{2 \rightarrow 3}(v_i),$$

где $P_2(t) = E P_2(t | \xi)$ и

$$p_{2 \rightarrow 3}(t) = \alpha_2 \int_0^t \mathbb{E}(P_2(t - \tau | \zeta) \mu(\tau | \zeta) P_1(\tau | \zeta)) dt.$$

3. Случай полной информации

3.1. МОДЕЛЬ ПРОПОРЦИОНАЛЬНОЙ УЯЗВИМОСТИ

В случае когда $\mu(t) = \zeta \mu_0(t)$ нетрудно получить, что

$$P_1(t) = e^{-\alpha_1 t} \left(1 + \frac{H_0(t)}{b} \right)^{-a},$$

$$p_2(t) = \mu_0(t) e^{-\alpha_1 t} \left(1 + \frac{H_0(t)}{b} \right)^{-a-1},$$

$$P_2(t) = ab^a \int_0^t \frac{\mu_0(s) e^{-\alpha_1 s - \alpha_2(t-s)}}{(b + H_0(s))^{a+1}} ds,$$

где $H_0(t) = \int_0^t \mu_0(s) ds$.

В случае если $\mu_0(t) \equiv 1$ и смертность, связанная с состоянием болезни 2, меньше смертности по всем прочим причинам, т.е. $\alpha_2 < \alpha_1$, то формула для $P_2(t)$ принимает вид

$$P_2(t) = ab^a e^{b(\alpha_2 - \alpha_1) - \alpha_2 t} \left[\sum_{k=1}^n \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)^{k-1} \Gamma(-a)}{\Gamma(k-a)} \left[e^{(\alpha_2 - \alpha_1)(t+b)} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times (t+b)^{k-a-1} - e^{a_2 - a_1} b^{k-a-1} \right] + \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)^a \Gamma(-a)}{\Gamma(n-a)} \times \right. \\ \left. \left[\gamma(n-a, (\alpha_1 - \alpha_2)(t+b)) - \gamma(n-a, (\alpha_1 - \alpha_2)b) \right] \right],$$

где $n = \min\{k \text{ принадлежащих } N: k - a > 0\}$ и $\gamma(x, y)$ – усечённая гамма-функция.

Логарифм функции правдоподобия (1) вычисляется по формуле (12), приведённой в Приложении. Из (9) следует, что при заданной функции $\mu_0(t)$ параметры распределения уязвимости определяются путём максимизации функции

$$(2) \quad g(a, b) = \sum_{i \in \{n_{12} \cup n_{123}\}} \log \left(\frac{ab^a}{(b + H_0(t_i))^{a+1}} \right) - \sum_{i \in \{n_1 \cup n_{13}\}} \log \left(1 + \frac{H_0(q_i)}{b} \right)^a,$$

где в последней сумме через q_i обозначены либо моменты s_i для обнаруженных в состоянии «здоров», либо моменты смерти v_i . Чтобы найти точку максимума функции правдоподобия, необходимо решить систему уравнений

$$\begin{cases} g'_a(a,b) = 0, \\ g'_b(a,b) = 0. \end{cases}$$

Из этой системы следует, что координата b точки экстремума удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} & (|n_{12}| + |n_{123}|) \sum_{i \in \{n_1 \cup n_2 \cup n_{13} \cup n_{123}\}} \frac{H_0(u_i)}{b(b + H_0(u_i))} = \\ & = \sum_{i \in \{n_{12} \cup n_{123}\}} \frac{1}{b + H_0(t_i)} \sum_{i \in \{n_1 \cup n_2 \cup n_{13} \cup n_{123}\}} \log \left(1 + \frac{H_0(u_i)}{b} \right), \end{aligned}$$

где через u_i обозначены моменты обнаружения в состоянии «здоров» s_i , или «умер» v_i , или «болен» t_i для соответствующих групп наблюдаемых, $|n_{12}|$, $|n_{123}|$ – количества людей в соответствующих группах. Значение параметра a определяется из равенства

$$a = \frac{b \sum_{i \in \{n_{12} \cup n_{123}\}} \frac{1}{b + H_0(t_i)}}{\sum_{i \in \{n_1 \cup n_2 \cup n_{13} \cup n_{123}\}} \frac{H_0(u_i)}{b + H_0(u_i)}}.$$

3.2. МОДЕЛЬ С ИЗБЫТОЧНЫМ ОТНОСИТЕЛЬНОМ РИСКОМ

Используя традиционную модель избыточного относительного риска (Excess Relative Risk, или ERR) [11], зададим заболеваемость в виде $\mu(t) = (1 + D\xi)\mu_0(t)$, где D – наблюдаемая величина дозового фактора, влияние которого на заболеваемость изучается, произведение $D\xi$ – избыточный относительный (радиационный) риск. Вероятности для изначально здорового человека находиться в момент времени t в состояниях 1 или 2 и плотность распределения вероятности момента перехода из состояния 1 в состояние 2 равны

$$P_1(t) = e^{-a_1 t - H_0(t)} \left(1 + \frac{DH_0(t)}{b} \right)^{-a},$$

$$p_2(t) = \mu_0(t) e^{-a_1 t - H_0(t)} \left(1 + \frac{DH_0(t)}{b} \right)^{-a} \left(1 + \frac{Da}{b + dH_0(t)} \right),$$

$$P_2(t) = \int_0^t \mu_0(s) e^{-a_1 s - a_2(t-s) - H_0(s)} \times \left(1 + \frac{DH_0(s)}{b} \right)^{-a} \left(1 + \frac{Da}{b + dH_0(s)} \right) ds.$$

Выражение для логарифма функции правдоподобия задаётся формулой (10) Приложения, из которой следует, что координаты точки максимума функции правдоподобия находятся как точки максимума функции

$$(3) \quad g(a, b) = \sum_{i \in \{n_{12} \cup n_{13}\}} \log \left(\frac{1 + \frac{D_i a}{b + D_i H_0(t_i)}}{\left(1 + \frac{D_i H_0(t_i)}{b} \right)^a} \right) - \sum_{i \in \{n_1 \cup n_{13}\}} \log \left(1 + \frac{D_i H_0(t_i)}{b} \right)^a$$

и, соответственно, удовлетворяют уравнениям

$$(4) \quad \sum_{i \in n_1 \cup n_{13} \cup n_{12} \cup n_{123}} \ln \left(\frac{b}{b + D_i H_0(s_i)} \right) + \sum_{i \in n_{12} \cup n_{123}} \frac{D_i}{b + D_i H_0(t_i) + a D_i} = 0$$

и

$$(5) \quad \frac{a}{b} \sum_{i \in n_1 \cup n_{13} \cup n_{12} \cup n_{123}} \frac{D_i H_0(s_i)}{b + D_i H_0(s_i)} + \sum_{i \in n_{12} \cup n_{123}} \frac{1}{b + D_i H_0(t_i) + a D_i} - \sum_{i \in n_{12} \cup n_{123}} \frac{1}{b + D_i H_0(t_i)} = 0,$$

которые необходимо решать численно.

3.3. МОДЕЛЬ С ИЗБЫТОЧНЫМ ОТНОСИТЕЛЬНОМ РИСКОМ И ПРОПОРЦИОНАЛЬНОЙ УЯЗВИМОСТЬЮ

В рамках этой модели заболеваемость задаётся как $\mu(t) = D(1 + \zeta)\mu_0(t)$ и

$$P_1(t) = e^{-\alpha_1 t - DH_0(t)} \left(1 + \frac{DH_0(t)}{b} \right)^{-a},$$

$$p_2(t) = D\mu_0(t)e^{-\alpha_1 t - DH_0(t)} \left(1 + \frac{DH_0(t)}{b} \right)^{-a} \left(1 + \frac{a}{b + DH_0(t)} \right),$$

$$P_2(t) = D \int_0^t \mu_0(s) e^{-\alpha_1 s - \alpha_2(t-s) - DH_0(s)} \times \left(1 + \frac{DH_0(s)}{b} \right)^{-a} \left(1 + \frac{a}{b + DH_0(s)} \right) ds.$$

В случае когда $\mu_0(t) \equiv 1$, $\alpha_2 - 1 < \alpha_1$, a не принадлежит N , имеем, что

$$\begin{aligned} P_2(t) = & b^a e^{\frac{b(\alpha_1 + D - \alpha_2) - \alpha_2 t}{D}} \times \\ & \times \left[\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(\alpha_1 + D - \alpha_2)^{k-1} \Gamma(1-a)}{D^{k-1} \Gamma(k+1-a)} \left[e^{\frac{\alpha_2 - \alpha_1 - D}{D}(Dt+b)} (Dt+b)^{k-a} - e^{\frac{\alpha_2 - \alpha_1 - D}{D}b} b^{k-a} \right] + \right. \\ & + \frac{(\alpha_1 - \alpha_2 + D)^{a-1} \Gamma(1-a)}{D^{a-1} \Gamma(n-a)} \left[\gamma \left(n-a, \frac{\alpha_1 - \alpha_2 + D}{D} (Dt+b) \right) - \right. \\ & \left. \left. - \gamma \left(n-a, \frac{\alpha_1 - \alpha_2 + D}{D} b \right) \right] + \right. \\ & \left. \sum_{k=1}^n \frac{(\alpha_1 + D - \alpha_2)^{k-1} \Gamma(-a)}{D^{k-1} \Gamma(k+1-a)} \left[e^{\frac{\alpha_2 - \alpha_1 - D}{D}(Dt+b)} (Dt+b)^{k-a-1} - e^{\frac{\alpha_2 - \alpha_1 - D}{D}b} b^{k-a-1} \right] + \right. \\ & \left. + \frac{(\alpha_1 - \alpha_2 + D)^a \Gamma(-a)}{D^a \Gamma(n-a)} \left[\gamma \left(n-a, \frac{\alpha_1 - \alpha_2 + D}{D} (Dt+b) \right) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \gamma \left(n-a, \frac{\alpha_1 - \alpha_2 + D}{D} b \right) \right] \right]. \end{aligned}$$

В данном случае из формулы (11) Приложения следует, что координаты точки максимума логарифма функции правдоподобия (1) находятся как точки максимума функции

$$(6) \quad g(a, b) = \sum_{i \in \{n_2 \cup n_{123}\}} \log \left(\frac{1 + \frac{a}{b + D_i H_0(t_i)}}{\left(1 + \frac{D_i H_0(t_i)}{b} \right)^a} \right) - \sum_{i \in \{n_1 \cup n_{13}\}} \log \left(1 + \frac{D_i H_0(q_i)}{b} \right)^a$$

и, следовательно, удовлетворяют уравнениям для частных производных по a и b

$$(7) \quad \sum_{i \in \{n_{12} \cup n_{123}\}} \left(\frac{1}{D_i a + b + D_i H_0(t_i)} + \log \frac{b}{b + D_i H_0(t_i)} \right) + \\ + \sum_{i \in \{n_1 \cup n_{13}\}} \log \frac{b}{b + D_i H_0(s_i)} = 0$$

и

$$(8) \quad a = \frac{\sum_{i \in \{n_1 \cup n_{12} \cup n_{13} \cup n_{123}\}} \log \frac{b}{b + D_i H_0(u_i)}}{\sum_{i \in \{n_1 \cup n_{12} \cup n_{13} \cup n_{123}\}} \frac{D_i H_0(u_i)}{b(b + D_i H_0(u_i))}} + \frac{\sum_{i \in \{n_{12} \cup n_{123}\}} \frac{1}{b + D_i H_0(t_i)}}{\sum_{i \in \{n_1 \cup n_{12} \cup n_{13} \cup n_{123}\}} \frac{D_i H_0(u_i)}{b(b + D_i H_0(u_i))}}.$$

Координата b предполагаемой точки максимума находится путем подстановки a из равенства (8) в уравнение (7).

4. Случай неполной информации

В рамках модели с избыточным относительным риском, для которой заболеваемость $\mu(t) = (1 + D\xi) \mu_0(t)$, будем предполагать, что $\alpha_1 + \mu_0 > \alpha_2$.

Вероятности для изначально здорового человека находиться в момент времени t в состояниях 1 или 2 и плотность распределения вероятности момента перехода из состояния 1 в состояние 2 равны

$$P_1(t) = e^{-\alpha_1 t - H_0(t)} \left(1 + \frac{DH_0(t)}{b} \right)^{-a}, \\ P_2(t) = \int_0^t \mu_0(s) e^{-\alpha_1 s - \alpha_2(t-s) - H_0(s)} \left(1 + \frac{DH_0(s)}{b} \right)^{-a} \left(1 + \frac{Da}{b + dH_0(s)} \right) ds.$$

В рамках данной модели

$$P_1(t) = e^{-\alpha_1 t - \mu_0 t} \left(1 + \frac{D\mu_0 t}{b} \right)^{-a}.$$

Из формулы (12) Приложения следует, что

$$P_2(t) = e^{\frac{(\alpha_1 + \mu_0 - \alpha_2)b}{D\mu_0} - \alpha_2 t} b^a \left\{ b^{-a} e^{-(\alpha_1 + \mu_0 - \alpha_2)b} - (b + D\mu_0 t)^{-a} e^{-(\alpha_1 + \mu_0 - \alpha_2)(b + D\mu_0 t)} + \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{D} + \alpha_2 - \alpha_1 - \mu_0 \right) \left[\sum_{k=1}^n \frac{(\alpha_1 + \mu_0 - \alpha_2)^{k-1} \Gamma(1-a)}{\Gamma(k+1-a)} \left(e^{(\alpha_2 - \alpha_1 - \mu_0)(b + D\mu_0 t)} (b + D\mu_0 t)^{k-a} - \right. \right. \right. \\ \left. \left. - e^{(\alpha_2 - \alpha_1 - \mu_0)b} b^{k-a} \right) + \frac{(\alpha_1 + \mu_0 - \alpha_2)^{n-1} \Gamma(1-a)}{\Gamma(n+1-a)} \left(\gamma(n+1-a, (\alpha_1 + \mu_0 - \alpha_2)(b + D\mu_0 t)) - \right. \right. \\ \left. \left. - \gamma(n+1-a, (\alpha_1 + \mu_0 - \alpha_2)b) \right) \right] \right\},$$

где $n = \min\{k: k - a > 0\}$ и $\gamma(x, y)$ – усеченная гамма-функция.

Кроме того, в Приложении показано, что

$$P_{2 \rightarrow 3}(t) = \frac{\alpha_2 \mu_0^2}{e^{\alpha_2 t}} \left(e^{\alpha_2 - \alpha_1 - \mu_0 t} (tI_1 - I_2) + I_3 \right),$$

где I_1, I_2, I_3 определяются (13), (14), (15).

5. Пример

Описанная модель с избыточным относительным риском с гетерогенностью использовалась для оценки радиационного риска возникновения заболевания среди лиц, принимавших участие в ликвидации последствий аварии на Чернобыльской АЭС (ликвидаторов аварии на ЧАЭС) в 1986 году, 43161 человек со средней поглощённой дозой гамма-облучения всего тела 0,16 Гр⁷ и максимальной дозой 0,5 Гр. При расчётах использовались данные Национального радиационно-эпидемиологического регистра (НРЭР) [14] о дозах, диагнозах ликвидаторов и причинах их смерти – по 2005 г. включительно. Рассматривались четыре класса болезней, в соответствии с рубриками Международной статистической классификации болезней (МКБ-10) [3]: солидные злокачественные «Новообразования» (класс II, только рубрики C00–C80); «Болезни системы кровообращения», класс IX, рубрики I00–I99; «Болезни органов дыхания», класс X,

⁷ За единицу измерения поглощенной дозы в системе СИ принят грей (Гр). 1 Гр — это такая доза, при которой массе 1 кг передается энергия ионизирующего излучения в 1 джоуль. внесистемной единицей поглощенной дозы является рад. 1 Гр = 100 рад.

рубрики J00–J99; «Болезни органов пищеварения», класс XI, рубрики K00–K93.

При расчётах принималось, что заболеваемость может быть представлена в виде $\mu(t) = (1 + d\zeta r)\mu_0$, где μ_0 – спонтанная заболеваемость, не связанная с радиационным воздействием; d – доза радиации, полученная ликвидатором за время работы в Чернобыльской зоне; ζ – индивидуальная уязвимость; r – величина стандартизованного радиационного риска возникновения заболевания (избыточного относительного риска на единицу поглощённой дозы 1 Гр, или ERR/Гр). Относительно индивидуальной уязвимости ζ предполагалось, что это случайная величина, имеющая гамма-распределение с единичным средним значением. При оценивании стандартизованного радиационного риска (ERR/Гр) учитывался возраст человека на начало облучения (возраст на начало работ в Чернобыльской зоне). Для этого оценки проводились отдельно для лиц, въехавших в возрасте младше 40 лет (35369 человек) и для лиц, въехавших в более старших возрастах (7792 человека). В таблице 1 представлены результаты оценивания риска в виде значений ERR/Гр с 95%-ми доверительными интервалами (95% ДИ), которые вычислялись через профиль логарифма правдоподобия.

Среди рассмотренных классов болезней наибольшая положительная оценка радиационного риска заболеваемости была получена для солидных злокачественных новообразований (Класс II в таблице 1) у ликвидаторов младше 40 лет на начало облучения: ERR/Гр = 0,23 с 95% ДИ (–0,80; 1,70). Эта оценка хорошо совпадает с оценкой из [2], полученной ранее на аналогичной когорте ликвидаторов за период наблюдения 1991–2001 гг., в рамках традиционной модели ERR [10] без явного учёта гетерогенности и с усреднением по возрастам: ERR/Гр = 0,33 с 95% ДИ (–0,39; 1,22). Следует также подчеркнуть, что величина ERR/Гр = 0,35 для заболеваемости солидными злокачественными новообразованиями среди мужчин при облучении в возрасте 30 лет использовалась Международной комиссией по радиационной защите (МКРЗ) [8] для обоснования современных норм радиационной безопасности. При этом использовались радиационно-эпидемиологические данные по

японской когорте лиц, переживших атомные бомбардировки. Для ликвидаторов младше 40 лет на начало облучения 95%-е доверительные интервалы оценок радиационного риска заболеваемости в классах IX и XI («Болезни системы кровообращения» и «Болезни органов пищеварения») полностью лежат в отрицательной области.

Таблица 1. Оценки избыточного относительного радиационного риска на 1 Гр (ERR/Гр) для заболеваемости в различных классах болезней и группах по возрасту на начало облучения (начало работ в Чернобыльской зоне), с для 95% доверительных интервалов⁸

	ERR/Гр, возраст на начало облучения младше 40 лет	ERR/Гр, возраст на начало облучения 40 лет и старше	ERR/Гр, все возрастные группы
Класс II	0,23 (-0,80; 1,70)	-0,50 (-1,70; 1,30)	0,10 (-0,75; 1,20)
Класс IX	-0,36 (-0,55; -0,20)	0,04 (-0,45; 0,70)	-0,27 (-0,45; -0,05)
Класс X	-0,10 (-0,31; 0,06)	-0,17 (-0,53; 0,40)	-0,10 (-0,32; 0,05)
Класс XI	-0,63 (-0,80; -0,40)	-0,04 (-0,70; 0,80)	-0,56 (-0,80; -0,35)

Это означает, что для возрастов младше 40 лет риск развития болезней системы кровообращения и органов пищеварения снижается относительно спонтанного уровня с увеличением дозы облучения (ERR/Гр < 0).

Для ликвидаторов в возрастах 40 лет и старше на начало облучения 95% ДИ оценок ERR/Гр включают нулевое значение по всем рассмотренным классам болезней. Это может свидетельствовать в пользу увеличения степени гетерогенности ко-

⁸ В соответствии с МКБ-10 [3]: Класс II – «Новообразования», только рубрики C00–C80 (солидные злокачественные); Класс IX – «Болезни системы кровообращения»; Класс X – «Болезни органов дыхания»; Класс XI – «Болезни органов пищеварения».

горты ликвидаторов с возрастом: среди ликвидаторов 40 лет и старше при облучении присутствуют лица как с повышенной чувствительностью, так и с высокой резистентностью к радиационному воздействию.

Необходимо отметить, что в данном исследовании гетерогенность радиационных рисков определялась на широких классах болезней, которые содержат множество рубрик [3], соответствующих заболеваниям различной этиологии, с различной возрастной зависимостью, и, вероятно, с существенно различной величиной радиационных рисков. Например, в отношении болезни системы кровообращения (Класс IX) аналогичная когорта ликвидаторов изучалась ранее традиционными методами радиационной эпидемиологии [10] за период наблюдения 1986–2000 гг. [13]. Для всего класса IX статистически значимого радиационного риска обнаружено не было. В то же время для некоторых его рубрик наблюдались статистически значимые, но разнонаправленные эффекты: в частности, для cerebro-vasкулярных болезней (в основном инсульты) $ERR/Gr = 0,39$ с 95% ДИ (0,004; 0,77), а для болезней вен, лимфатических сосудов и узлов (флебиты, тромбозы, варикозы и т.п.) $ERR/Gr = -0,57$ с 95% ДИ (-1,03; -0,12).

Очевидно, что для обоснования систем и норм радиационной защиты, насколько это практически достижимо, должен быть учтён радиационный риск каждого конкретного заболевания, даже если он «компенсируется» в среднем значении по классу уменьшением риска другого заболевания.

По результатам проведённого исследования когорты ликвидаторов 40 лет и старше при облучении представляет наибольший интерес при планировании дальнейших радиационно-эпидемиологических исследований по более мелким рубрикам заболеваний. В общем случае разработанная в данном исследовании методология идентификации параметров гетерогенности радиационных рисков должна применяться итеративно, по мере накопления данных: на эпидемиологическом уровне – от широких классов болезней к более мелким рубрикам, и далее – на молекулярно-эпидемиологическом уровне наблюдений многофакторных заболеваний.

6. Приложение

В модели пропорционального риска логарифм функции правдоподобия имеет вид

$$\begin{aligned}
 \log L = & -\alpha_1 \sum_{i \in n_1} s_i - \sum_{i \in n_1} \log \left(1 + \frac{H_0(s_i)}{b} \right)^a - \alpha_2 \sum_{i \in n_2} (s_i - t_i) - \alpha_1 \sum_{i \in n_2} t_i + \\
 (9) \quad & + \sum_{i \in n_2} \log \left(\frac{a\mu_0(t_i)b^a}{(b + H_0(t_i))^{a+1}} \right) + \sum_{i \in n_{13}} \log \alpha_1 - \alpha_1 \sum_{i \in n_{13}} v_i - \sum_{i \in n_{13}} \log \left(1 + \frac{H_0(v_i)}{b} \right)^a + \\
 & + \sum_{i \in n_{13}} \log \alpha_2 - \alpha_2 \sum_{i \in n_{23}} (v_i - t_i) - \alpha_1 \sum_{i \in n_{23}} t_i + \sum_{i \in n_{23}} \log \left(\frac{a\mu_0(t_i)b^a}{(b + H_0(t_i))^{a+1}} \right),
 \end{aligned}$$

откуда и следует формула (2).

В модели с избыточным риском

$$\begin{aligned}
 \log L = & -\alpha_1 \sum_{i \in n_1} (s_i + H_0(s_i)) - a \sum_{i \in n_1} \log \left(1 + \frac{D_i}{b} H_0(s_i) \right) - \alpha_2 \sum_{i \in n_2} (s_i - t_i) - \\
 (10) \quad & -\alpha_1 \sum_{i \in n_2} (t_i + H_0(t_i)) + \sum_{i \in n_{13}} \log \alpha_1 \sum_{i \in n_{12}} \log \left(\frac{\mu_0(t_i) \left(1 + \frac{D_i a}{b + D_i H_0(t_i)} \right)}{\left(1 + \frac{D_i}{b} H_0(t_i) \right)^a} \right) - \\
 & -\alpha_1 \sum_{i \in n_{13}} (v_i + H_0(v_i)) - a \sum_{i \in n_{13}} \log \left(1 + \frac{D_i}{b} H_0(v_i) \right) + \sum_{i \in n_{23}} \log \alpha_2 - \\
 & -\alpha_2 \sum_{i \in n_{23}} (v_i - t_i) - \alpha_1 \sum_{i \in n_{23}} (t_i + H_0(t_i)) + \sum_{i \in n_{23}} \log \left(\frac{\mu_0(t_i) \left(1 + \frac{D_i a}{b + D_i H_0(t_i)} \right)}{\left(1 + \frac{D_i}{b} H_0(t_i) \right)^a} \right).
 \end{aligned}$$

Отсюда следует формула (3).

В модели с избыточным относительным риском и пропорциональной уязвимостью

$$\begin{aligned}
 \log L = & -\alpha_1 \sum_{i \in \eta_1} (s_i + D_i H_0(s_i)) - \sum_{i \in \eta_1} \log \left(1 + \frac{D_i H_0(s_i)}{b} \right)^a - \alpha_2 \sum_{i \in \eta_2} (s_i - t_i) - \\
 & -\alpha_1 \sum_{i \in \eta_2} (t_i + D_i H_0(t_i)) + \sum_{i \in \eta_3} \log \alpha_1 \sum_{i \in \eta_2} \log \left(\frac{D_i \mu_0(t_i) \left(1 + \frac{a}{b + D_i H_0(t_i)} \right)}{\left(1 + \frac{D H_0(t_i)}{b} \right)^a} \right) - \\
 (11) \quad & -\alpha_1 \sum_{i \in \eta_3} (v_i + D_i H_0(v_i)) - \sum_{i \in \eta_3} \log \left(1 + \frac{D_i H_0(v_i)}{b} \right)^a + \sum_{i \in \eta_3} \log \alpha_2 - \\
 & -\alpha_2 \sum_{i \in \eta_{23}} (v_i - t_i) - \alpha_1 \sum_{i \in \eta_{23}} (t_i + D_i H_0(t_i)) + \\
 & + \sum_{i \in \eta_{23}} \log \left(\frac{D_i \mu_0(t_i) \left(1 + \frac{a}{b + D_i H_0(t_i)} \right)}{\left(1 + \frac{D_i H_0(t_i)}{b} \right)^a} \right).
 \end{aligned}$$

Отсюда следует формула (6).

В случае неполной информации

$$\begin{aligned}
 P_2(t) = & \mu_0 e^{-\alpha_2 t} \int_0^t e^{-(\alpha_1 + \mu_0 - \alpha_2)s} \left(1 + \frac{D \mu_0 s}{b} \right)^{-a} \left(1 + \frac{D a}{b + D \mu_0 s} \right) ds = \\
 = & \mu_0 e^{-\alpha_2 t} b^a \left(\int_0^t e^{-(\alpha_1 + \mu_0 - \alpha_2)s} (b + D \mu_0 s)^{-a} ds + \right. \\
 (12) \quad & \left. + D a \int_0^t e^{-(\alpha_1 + \mu_0 - \alpha_2)s} (b + D \mu_0 s)^{-(a+1)} ds \right) = \\
 = & e^{\frac{(\alpha_1 + \mu_0 - \alpha_2)b}{D \mu_0} - \alpha_2 t} b^a \left(\frac{1}{d} \int_b^{b+D \mu_0 t} e^{-(\alpha_1 + \mu_0 - \alpha_2)u} u^{-a} du - \int_b^{b+D \mu_0 t} e^{-(\alpha_1 + \mu_0 - \alpha_2)u} du^{-a} \right) = \\
 = & e^{\frac{(\alpha_1 + \mu_0 - \alpha_2)b}{D \mu_0} - \alpha_2 t} b^a \left(b^{-a} e^{-(\alpha_1 + \mu_0 - \alpha_2)b} - (b + D \mu_0 t)^{-a} e^{-(\alpha_1 + \mu_0 - \alpha_2)(b + D \mu_0 t)} \right) + \\
 & \left(\frac{1}{D} + \alpha_2 - \alpha_1 - \mu_0 \right) \int_b^{b+D \mu_0 t} e^{-(\alpha_1 + \mu_0 - \alpha_2)u} u^{-a} du.
 \end{aligned}$$

Для того чтобы найти $p_{2 \rightarrow 3}(t)$, заметим, что

$$P_1(t | \zeta) = \exp(-\alpha_1 t - (1 + D\zeta)\mu_0 t),$$

$$\begin{aligned} P_2(t | \zeta) &= \mu_0 (1 + D\zeta) \exp(-\alpha_2 t) \int_0^t \exp(s(\alpha_2 - \alpha_1 - (1 + D\zeta)\mu_0)) ds = \\ &= \frac{\mu_0 (1 + D\zeta) \exp(-\alpha_2 t)}{\alpha_2 - \alpha_1 - \mu_0 (1 + D\zeta)} \left(\exp((\alpha_2 - \alpha_1 - (1 + D\zeta)\mu_0)t) - 1 \right). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} P_{2 \rightarrow 3}(t | \zeta) &= \frac{\alpha_2 \mu_0^2 (1 + D\zeta)^2 e^{-\alpha_2 t}}{\alpha_2 - \alpha_1 - \mu_0 (1 + D\zeta)} \int_0^t e^{(\alpha_2 - \alpha_1 - \mu_0 (1 + D\zeta))s} \left(e^{(\alpha_2 - \alpha_1 - (1 + D\zeta)\mu_0)(t-s)} - 1 \right) ds = \\ &= \frac{\alpha_2 \mu_0^2 (1 + D\zeta)^2 e^{-\alpha_2 t}}{\alpha_2 - \alpha_1 - \mu_0 (1 + D\zeta)} \left(e^{(\alpha_2 - \alpha_1 - (1 + D\zeta)\mu_0)t} t - \int_0^t e^{(\alpha_2 - \alpha_1 - \mu_0 (1 + D\zeta))s} ds \right) = \\ &= \frac{\alpha_2 \mu_0^2 (1 + D\zeta)^2 e^{-\alpha_2 t}}{\alpha_2 - \alpha_1 - \mu_0 (1 + D\zeta)} \left(e^{(\alpha_2 - \alpha_1 - (1 + D\zeta)\mu_0)t} t - \frac{e^{(\alpha_2 - \alpha_1 - (1 + D\zeta)\mu_0)t} - 1}{\alpha_2 - \alpha_1 - \mu_0 (1 + D\zeta)} \right). \end{aligned}$$

Таким образом, для того чтобы вычислить $p_{2 \rightarrow 3}(t)$, необходимо найти

$$\begin{aligned} I_1 &= E \frac{(1 + D\zeta)^2 e^{-D\mu_0 t \zeta}}{\alpha_2 - \alpha_1 - \mu_0 (1 + D\zeta)}, \\ I_2 &= E \frac{(1 + D\zeta)^2 e^{-D\mu_0 t \zeta}}{(\alpha_2 - \alpha_1 - \mu_0 (1 + D\zeta))^2}, \\ I_3 &= E \frac{(1 + D\zeta)^2}{(\alpha_2 - \alpha_1 - \mu_0 (1 + D\zeta))^2}. \end{aligned}$$

Вычисляя математическое ожидание, получаем, что

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{b^a}{D^a \Gamma(a)} \int_0^\infty \frac{(1+u)^2 u^{a-1} e^{-\frac{(Duqf+b)u}{D}}}{\alpha_2 - \alpha_1 - \mu_0 - \mu_0 u} du = \frac{b^a}{D^a \Gamma(a) \mu_0} \left(\int_0^\infty \frac{u^{a-1} e^{-\frac{(Duqf+b)u}{D}}}{\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\mu_0} - 1 - u} du + \right. \\ &\quad \left. + 2 \int_0^\infty \frac{u^a e^{-\frac{(Duqf+b)u}{D}}}{\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\mu_0} - 1 - u} du + \int_0^\infty \frac{u^{a+1} e^{-\frac{(Duqf+b)u}{D}}}{\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\mu_0} - 1 - u} du \right). \end{aligned}$$

Используя формулу 3.383.10 в [1], находим, что
(13)

$$I_1 = -\frac{b^a}{D^a \Gamma(a) \mu_0} \left(\left(1 + \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\mu_0} \right)^{a-1} e^{\left(1 + \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\mu_0} \right) \left(\frac{D\mu_0 t + b}{D} \right)} \Gamma(a) \Gamma \left(1 - a, \left(1 + \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\mu_0} \right) \left(\frac{D\mu_0 t + b}{D} \right) \right) + \right. \\ \left. + 2 \left(1 + \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\mu_0} \right)^a e^{\left(1 + \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\mu_0} \right) \left(\frac{D\mu_0 t + b}{D} \right)} \Gamma(a+1) \Gamma \left(-a, \left(1 + \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\mu_0} \right) \left(\frac{D\mu_0 t + b}{D} \right) \right) + \left(1 + \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\mu_0} \right)^{a+1} \times \right. \\ \left. \times e^{\left(1 + \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\mu_0} \right) \left(\frac{D\mu_0 t + b}{D} \right)} \Gamma(a+2) \Gamma \left(-a-1, \left(1 + \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\mu_0} \right) \left(\frac{D\mu_0 t + b}{D} \right) \right) \right),$$

где $\Gamma(x, y)$ – дополнительная усеченная гамма-функция.

Аналогично, из формулы 3.383.8 в [1] следует, что

$$I_2 = \frac{b^a}{D^a \Gamma(a) \mu_0^2} \left(\left(1 + \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\mu_0} \right)^{\frac{a-3}{2}} \left(\frac{D\mu_0 t + b}{D} \right)^{\frac{1-a}{2}} e^{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\mu_0} \right) \left(\frac{D\mu_0 t + b}{D} \right)} \times \right. \\ \times \Gamma(a) \Psi_{-\frac{1-a}{2}, \frac{a-2}{2}} \left(\left(1 + \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\mu_0} \right) \left(\frac{D\mu_0 t + b}{D} \right) \right) + \\ (14) \quad + 2 \left(1 + \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\mu_0} \right)^{\frac{a-2}{2}} \left(\frac{D\mu_0 t + b}{D} \right)^{\frac{-a}{2}} e^{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\mu_0} \right) \left(\frac{D\mu_0 t + b}{D} \right)} \times \\ \times \Gamma(a+1) \Psi_{-\frac{2-a}{2}, \frac{a-1}{2}} \left(\left(1 + \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\mu_0} \right) \left(\frac{D\mu_0 t + b}{D} \right) \right) + \\ + \left(1 + \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\mu_0} \right)^{\frac{a-1}{2}} \left(\frac{D\mu_0 t + b}{D} \right)^{\frac{-a-1}{2}} e^{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\mu_0} \right) \left(\frac{D\mu_0 t + b}{D} \right)} \times \\ \times \Gamma(a+2) \Psi_{-\frac{3-a}{2}, \frac{a}{2}} \left(\left(1 + \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\mu_0} \right) \left(\frac{D\mu_0 t + b}{D} \right) \right) \Bigg)$$

и

$$I_3 = \frac{b^a}{D^a \Gamma(a) \mu_0^2} \left(\left(1 + \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\mu_0} \right)^{\frac{a-3}{2}} \left(\frac{b}{D} \right)^{\frac{1-a}{2}} e^{\frac{b}{2D} \left(1 + \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\mu_0} \right)} \Gamma(a) \Psi_{-\frac{1-a}{2}, \frac{a-2}{2}} \left(\frac{b}{D} \left(1 + \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\mu_0} \right) \right) + \right. \\ (15) \quad + 2 \left(1 + \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\mu_0} \right)^{\frac{a-2}{2}} \left(\frac{b}{D} \right)^{\frac{-a}{2}} e^{\frac{b}{2D} \left(1 + \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\mu_0} \right)} \Gamma(a+1) \Psi_{-\frac{2-a}{2}, \frac{a-1}{2}} \left(\frac{b}{D} \left(1 + \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\mu_0} \right) \right) + \\ \left. + \left(1 + \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\mu_0} \right)^{\frac{a-1}{2}} \left(\frac{b}{D} \right)^{\frac{-a-1}{2}} e^{\frac{b}{2D} \left(1 + \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\mu_0} \right)} \Gamma(a+2) \Psi_{-\frac{3-a}{2}, \frac{a}{2}} \left(\frac{b}{D} \left(1 + \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\mu_0} \right) \right) \right),$$

где $\Psi_{\lambda, \mu}(z)$ – функция Уиттакера.

Литература

1. ГРАДШТЕЙН И.С., РЫЖИК И.М. *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.* – М.: ФизМатЛит, 1963. – 1108 с.

2. ИВАНОВ В.К., ЦЫБ А.Ф., ГОРСКИЙ А.И. И ДР. *Онкозаболеваемость и онкосмертность среди участников ликвидации последствий аварии на ЧАЭС: оценка радиационных рисков* // Радиационная биология. Радиоэкология. – 2006. – Т. 46, №2. – С. 159–166.
3. *Международная статистическая классификация болезней и проблем, связанных со здоровьем* // МКБ–10, том 1. Женева: ВОЗ, 1995. – 698 с.
4. МИЛЛЕР Б.М., ПАНКОВ А.Р. *Теория случайных процессов в примерах и задачах*. – М.: ФизМатЛит, 2002. – 320 с.
5. МИХАЛЬСКИЙ А.И. *Методы анализа гетерогенных структур и популяций*. – М.: ИПУ, 2002. – 64 с.
6. МИХАЛЬСКИЙ А.И., ИВАНОВ В.К., ЧЕКИН С.Ю., МАКСЮТОВ М.А., КАЩЕЕВ В.В. *Учёт гетерогенности в оценке радиационных рисков* // Автоматика и телемеханика. – 2008. – Т. 6. – С. 153–159.
7. МИХАЛЬСКИЙ А.И., ПЕТРОВСКИЙ А.М., ЯШИН А.И. *Теория оценивания неоднородных популяций*. – М.: Наука, 1989. – 128 с.
8. *Публикация 103 Международной комиссии по радиационной защите (МКРЗ)* / Пер. с англ. под общей ред. М.Ф. Киселёва и Н.К. Шандалы. – М.: ООО ПКФ «Алана», 2009. – 312 с.
9. BRAUER F. *Epidemic Models with Heterogeneous Mixing and Treatment* // Bull. Mathem. Biol. – 2008. – Vol. 70. – P. 1869–1885.
10. BRESLOW N.E., DAY N.E. *Statistical methods in cancer research* // IARC Scientific Publication. – 1987. – Vol. 2, №82. – The design and analysis of cohort studies. Lyon: IARC, 1987. – 406 p.
11. COOK R.J., LAWLESS J.F. *Statistical Issues in Modeling Chronic Disease in Cohort Studies* // Stat. Biosci. – 2014. – №6. – P. 127–221.
12. FINKELSTEIN M., CHA J.H. *Stochastic Modeling for Reliability*. – Springer Series in Reliability Engineering. – London: Springer-Verlag, 2013. – 396 p.
13. IVANOV V.K., MAKSIOUTOV M.A., CHEKIN S.Y., ET AL. *The risk of radiation-induced cerebrovascular disease in Chernobyl emergency workers* // Health Phys. – 2006. – Vol. 90, №3. – P. 199–207.
14. IVANOV V.K., TSYB A.F., IVANOV S.I., AND OTHER. *Medical radiological consequences of the Chernobyl catastrophe in Russia: estimation of radiation risks*. – SPb.: Nauka, 2004. – 388 p.
15. MADAN D., BAKSHI G., PANAYOTOV G. *Heterogeneity in Beliefs and Volatility Tail Behavior* // J. Finan. Quantit. Analysis. – 2015. – To appear.

16. MEIRA-MACHADO L., DE UNA-ALVAREZ J., DATTA S. *Non-parametric estimation of conditional transition probabilities in a non-Markov illness-death model* // Comput. Stat. – 2015. – To appear.
17. NORBERG R. *Life Insurance Mathematics* – Encyclopedia of Actuarial Science. – Wiley. 2004. – 650 p.
18. VAUPEL J.W., MANTON K.G., STALLARD E. *The impact of heterogeneity in individual frailty on the dynamics of mortality* // Demography. – 1979. – Vol. 16. – P. 439–454.
19. VAUPEL J.W., YASHIN A.I. *Heterogeneity's ruses: some surprising effects of selection on population dynamics* // Am. Stat. – 1985. – Vol. 39. – P. 176–182.
20. YASHIN A.I., AKUSHEVICH I., ARBEEV K., et al. *Studying Health Histories of Cancer: A New Model Connecting Cancer Incidence and Survival* // Math Biosci. – 2009. – Vol. 218, №2. – P. 88–97.

ON IDENTIFICATION OF MORBIDITY PARAMETERS IN HETEROGENEOUS MODEL: CASES OF COMPLETE AND INCOMPLETE INFORMATION

Roman Ivanov, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Ph.D., Senior Researcher (roivanov@yahoo.com).

Anatoly Mikhalskii, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Doctor of Science, Chief Researcher (ipuran@yandex.ru).

Victor Ivanov, A. Tsyb Medical Radiological Research Centre – branch of the National Medical Research Radiological Centre of the Ministry of Health of the Russian Federation, Obninsk, Doctor of Science, professor (nrer@obninsk.com).

Sergey Chekin, A. Tsyb Medical Radiological Research Centre – branch of the National Medical Research Radiological Centre of the Ministry of Health of the Russian Federation, Obninsk, Head of lab. (nrer@obninsk.com).

Marat Maksyutov, A. Tsyb Medical Radiological Research Centre – branch of the National Medical Research Radiological Centre of the Ministry of Health of the Russian Federation, Obninsk, Ph.D., Head of lab. (nrer@obninsk.com).

Valeriy Kashcheev, A. Tsyb Medical Radiological Research Centre – branch of the National Medical Research Radiological Centre

of the Ministry of Health of the Russian Federation, Obninsk, Ph.D., Senior Researcher (nrer@obninsk.com).

Abstract: We suggest a methodology to estimate morbidity parameters in a three-state model, which includes the heterogeneity factor modeled with a gamma-distributed random variable. Models with complete and incomplete information are considered and various methods of risk estimation are discussed. We give estimates of morbidity radiation risks in four classes of diseases based on data from the Russian National Radiation Epidemiological Registry. The methodology can be used during the development of radiation protection systems.

Keywords: Markov chain, random intensity, heterogeneity, gamma distribution, radiation risk.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии А.А. Дорофеевом

*Поступила в редакцию 11.04.2015.
Опубликована 30.05.2015.*

УДК 528.94 (004.6)
ББК 78.34

МОДЕЛИ И АЛГОРИТМЫ МИНИМИЗАЦИИ УЩЕРБА ОТ АТМОСФЕРНЫХ ВЫБРОСОВ ПРОМЫШЛЕННЫХ ПРЕДПРИЯТИЙ

Кушникова Е. В.¹, Резчиков А. Ф.², Иващенко В. А.³,
Филимонюк Л. Ю.⁴

*(ФГБУН Институт проблем точной механики
и управления РАН, Саратов)*

Предложена постановка задачи минимизации ущерба от атмосферных выбросов промышленных предприятий. Разработан алгоритм решения этой задачи, позволяющий повысить эффективность функционирования промышленных предприятий за счет снижения штрафов, предотвращения экологических правонарушений, а также уменьшить ущерб от загрязнения атмосферы.

Ключевые слова: промышленное предприятие, загрязнение, алгоритм минимизации ущерба, информационно-логическая схема, критерий оптимальности.

1. Введение

Во многих странах мира рост промышленного производства зачастую сопровождается интенсивным загрязнением приземного слоя атмосферы, в том числе воздушных бассейнов

¹ Елена Вадимовна Кушникова, аспирантка (elenak3366@ya.ru).

² Александр Федорович Резчиков, член-корреспондент РАН, научный руководитель ИПТМУ РАН (iptmuran@san.ru).

³ Владимир Андреевич Иващенко, доктор технических наук, ученый секретарь (iptmuran@san.ru).

⁴ Леонид Юрьевич Филимонюк, кандидат технических наук, научный сотрудник (iptmuran@san.ru).

над городами, селами, местами отдыха, объектами сельскохозяйственного назначения, лесами, природными заповедниками, океанами, морями, озерами, реками и т.д.

Это приводит к изменению климата на планете, росту заболеваемости населения, вызывает нарушения генетического аппарата у человека, животных и растений, снижает продолжительность и качество жизни, уменьшает производительность труда, снижает урожайность сельхозугодий, усиливает коррозию металлоконструкций зданий и сооружений, увеличивает издержки на средства их защиты, разрушает исторические памятники, повышает затраты на ведение домашнего хозяйства, служит причиной социальных волнений, а также приводит к массовой миграции жителей из районов и городов с экологически грязным производством.

Величина только прямого ущерба от загрязнения атмосферы выбросами промышленных предприятий, тепловых электростанций и выхлопными газами автомобилей по оценкам ряда авторов ежегодно составляет сотни миллиардов долларов. Согласно данным Всемирной организации здравоохранения за 2014 год от последствий загрязнения атмосферы ежегодно умирает примерно 7 млн человек. При этом особенно большие материальные и людские потери приходится на страны с развивающейся экономикой, такие как государства Южной и Восточной Азии, Бразилия, а также Россия.

Исследования в области защиты атмосферы и биосферы от выбросов вредных веществ в настоящее время интенсивно ведутся на стыке таких наук как физика, математика, химия, медицина, биология, кибернетика, машиностроение, приборостроение, метеорология и др.

Один из перспективных путей частичного решения указанных проблем непосредственно связан с применением аппарата системного анализа, теории управления и современных средств обработки информации, используемых для мониторинга процессов формирования и распространения атмосферных поллютантов, прогнозирования степени загрязненности контролируемых объектов и территорий, а также для управления технологическим оборудованием промышленных предприятий с

целью снижения ущерба, причиняемого их атмосферными выбросами.

Теоретическое обоснование принципов функционирования систем экологического мониторинга и управления осуществлено в работах таких отечественных и зарубежных ученых как Г.И. Марчук, Ю.А. Израэль, М.Е. Берлянд, Г. Бригс, Ф. Гиффорд, Ф. Паскуилл, Ж. Заккур и др. [2, 4, 9, 13, 15, 16, 17]. В результате практического применения результатов этих исследований созданы и положительно зарекомендовали себя на практике многие современные математические, аппаратные и программные средства экологического мониторинга и управления, например, такие как единая государственная система мониторинга окружающей среды Российской Федерации, системы экологического мониторинга США, Европейского Союза и т.д.

Тем не менее, в настоящее время в специальной литературе практически отсутствуют сообщения о системах управления, осуществляющих регулирование состава и производительности технологического оборудования предприятий с целью минимизации различных видов ущерба, причиняемого их атмосферными выбросами населению, промышленности, сельскому хозяйству, природной среде, а также самим предприятиям в результате выплаты экологических штрафов.

Причиной этого, на наш взгляд, является отсутствие специализированного математического обеспечения, включающего постановки задач, формальные модели и алгоритмы, описывающие сложные причинно-следственные взаимосвязи между техническими, экологическими и экономическими параметрами, характеризующими процесс формирования, подъема и переноса атмосферных поллютантов, а также возникновение различных видов экономического ущерба от их воздействия.

Приведенные выше соображения обуславливают актуальность, экономическую целесообразность и практическую значимость данного исследования, предусматривающего разработку математических моделей и алгоритмов для минимизации ущерба от атмосферных выбросов промышленного предприятия.

2. Формирование и распространение выбросов вредных веществ как объект мониторинга и управления

К управляющим воздействиям, используемым при управлении атмосферными выбросами промышленных предприятий, относятся: состав и производительность технологического оборудования промышленного предприятия; состав и производительность оборудования, используемого для очистки атмосферных выбросов; специальные мероприятия, направленные на уменьшение величины атмосферных выбросов предприятия; температура газов, выбрасываемых в атмосферу; диаметр и высота дымовой трубы.

Специальные мероприятия, направленные на уменьшение величины атмосферных выбросов, зависят от вида промышленного предприятия. В частности, на предприятиях черной металлургии к ним относятся: уменьшение уровня загрузки шихты, укрупнение помола, обеспечение полного сгорания избытков доменного газа и др. [2, 4].

К управляемым воздействиям принадлежат ущерб, связанный с ростом заболеваемости населения из-за воздействия атмосферных поллютантов; потери сельского хозяйства от воздействия атмосферных выбросов; потери, связанные с изменением окружающей природной среды; потери из-за ухудшения качества жизни населения; потери промышленного предприятия, возникающие из-за отключения технологического оборудования, уменьшения его производительности при регулировании величины атмосферных выбросов, а также из-за выплат штрафов за нарушение предельно допустимых концентраций вредных веществ.

Возмущениями являются состояния окружающей среды: давление, температура и относительная влажность атмосферного воздуха, направление ветра, интенсивность выпадения осадков, продолжительность работы технологического оборудования, изменение характеристик производственной программы, неисправности систем местной и общеобменной вентиляции, климатические условия и др.

Структурная схема процесса формирования и распространения атмосферных выбросов промышленного предприятия как объекта мониторинга и управления приведена на рис. 1.

Проведенная формализация процесса формирования и распространения атмосферных выбросов промышленного предприятия позволяет разработать формальную постановку задачи минимизации ущерба от атмосферных выбросов промышленных предприятий.

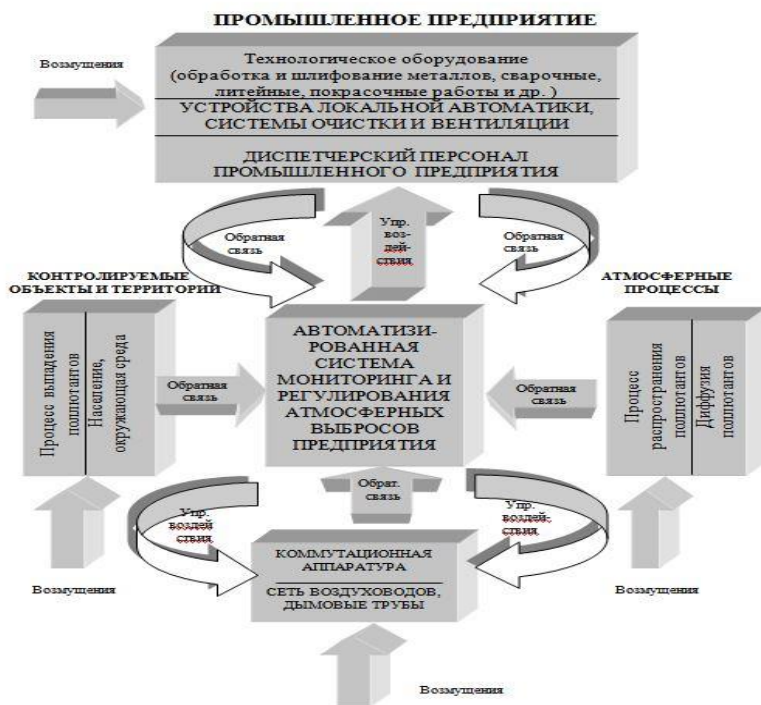


Рис. 1. Процесс формирования и распространения атмосферных выбросов промышленного предприятия как объект мониторинга и управления

3. Общая постановка задачи

Требуется выполнить синтез управляющих воздействий

$$\mathbf{u}^*(t) \in \{U(t)\}, t \in [t_1; t_2]$$

по изменению состава и производительности технологического оборудования при возмущениях

$$\mathbf{x}(t) \in \{X(t)\},$$

минимизирующих векторный критерий, характеризующий ущерб от атмосферных выбросов промышленных предприятий

$$Cf = ((Cf_1(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{x}'(t), \mathbf{u}'(t))), \dots, Cf_5(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{x}'(t), \mathbf{u}'(t)))$$

при ограничениях и граничных условиях:

$$R_i(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{x}'(t), \mathbf{u}'(t)) > 0, \quad i \in \{1, 2, \dots, k_1\},$$

$$R_i(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{x}'(t), \mathbf{u}'(t)) \leq 0, \quad i \in \{n_1 + 1, \dots, k_2\},$$

$$F_j^{(1)}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{x}'(t), \mathbf{u}'(t)) = 0, \quad j \in \{n_2 + 1, \dots, k_3\},$$

$$F_j^{(2)}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{x}'(t), \mathbf{u}'(t)) = 0, \quad j \in \{n_3 + 1, \dots, k_4\},$$

где Cf_1 – ущерб, связанный с ростом заболеваемости населения из-за воздействия атмосферных загрязнителей; Cf_2 – потери сельского хозяйства в результате воздействия атмосферных выбросов; Cf_3 – потери, связанные с изменением природной среды; Cf_4 – потери из-за ухудшения качества жизни населения; Cf_5 – потери промышленного предприятия, возникающие из-за отключения технологического оборудования, уменьшения его производительности при регулировании величины атмосферных выбросов, а также из-за штрафов за нарушение предельно допустимых концентраций вредных веществ; $\{X(t), U(t)\}$ – множества допустимых значений векторов $\mathbf{x}(t)$ и $\mathbf{u}(t)$ соответственно; $\mathbf{x}'(t)$, $\mathbf{u}'(t)$ – первые производные векторов состояния окружающей среды и управляющих воздействий соответственно; t – текущее время; k_i , $i = 1, \dots, 4$, – известные константы.

Производные векторов состояния окружающей среды и управляющих воздействий отражают изменение концентрации загрязняющих веществ по контролируемым объектам и территориям. Они присутствуют в моделях описания процесса подъема и распространения загрязнителей в атмосфере.

Методика решения задачи.

Решение задачи классическими методами связано со значительными трудностями. Данное обстоятельство делает целесообразным применение метода кусочно-линейной аппроксимации, традиционно используемого при решении данного класса задач.

Реализация указанного метода решения на выделенных линейных участках требует предварительной разработки математических моделей и алгоритмов для определения:

- состава и количества загрязняющих веществ, содержащихся в атмосферном выбросе промышленного предприятия;
- высоты подъема поллютантов;
- закономерностей распространения загрязняющих веществ в атмосферном воздухе при различных метеоусловиях;
- скалярных составляющих векторного критерия Cf , характеризующего различные виды ущерба, связанного с выбросом атмосферных поллютантов.

При решении задачи используются квазинестационарные модели, описывающие поведение объекта управления после затухания переходных процессов.

Поставленная задача принадлежит к классу задач векторной оптимизации. Ее решению должно предшествовать установление отношений порядка между отдельными составляющими векторного критерия и определение области конфликта составляющих векторного критерия (области Парето).

Общий алгоритм решения многокритериальной задачи приведен на рис. 2.

Составляющие векторного критерия выбраны, исходя из степени их влияния на результаты решения поставленной задачи. При этом имеет место корреляция между отдельными критериями, однако ее несущественность не позволяет исключить из рассмотрения ни один из них.



Рис. 2. Общий алгоритм решения задачи минимизации атмосферных выбросов промышленных предприятий

Предлагаемый подход применим, когда установка дополнительных фильтров или очистных сооружений требует затрат, превышающих затраты на реализацию варианта снижения атмосферных выбросов за счет изменения режима работы технологического оборудования, а также в том случае, когда еще не установлены дополнительные фильтры и очистные сооружения, если их установка экономически целесообразна.

Анализ особенностей процедуры принятия решений, используемой в настоящее время на отечественных промышленных предприятиях при регулировании атмосферных выбросов, позволяет сделать вывод о том, что свертку критериев целесообразно осуществить с использованием весовых множителей, не присваивая абсолютного приоритета ни одному из них. Это позволит свести задачу векторной оптимизации к решению

однокритериальной задачи за счет проецирования вектора Cf на пять выбранных направлений, совпадающих с вектором весовых коэффициентов

$$\mu = (\mu_1, \dots, \mu_1, \dots, \mu_5), \mu_i \geq 0, \sum_{i=1}^5 \mu_i = 1.$$

С учетом вышеизложенного целевая функция примет следующий вид:

$$Cf_S = \sum_{i=1}^5 \mu_i Cf_i,$$

где Cf_S – целевая функция после свертки критериев.

4. Метод решения задачи

Структурная схема комплекса математических моделей, используемых для решения задачи, приведена на рис. 3.

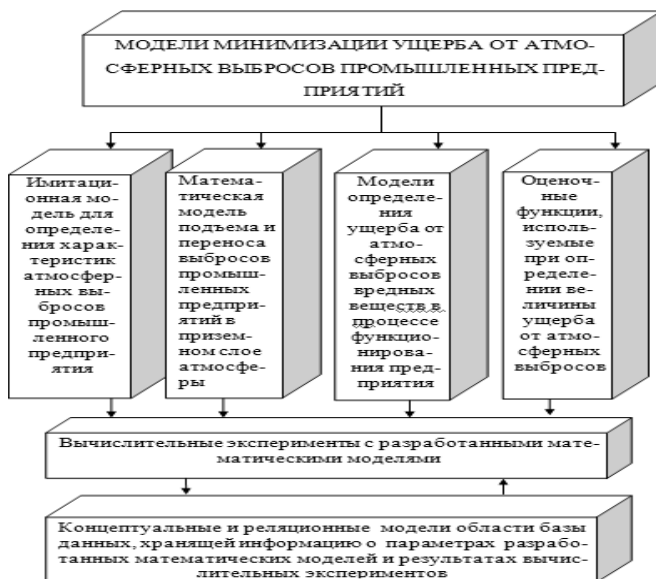


Рис. 3. Математические модели задачи минимизации ущерба от атмосферных выбросов промышленных предприятий

Математическая модель для определения массового и суммарного выброса загрязнителей.

Все производственное оборудование, в процессе функционирования которого образуются атмосферные поллютанты, подразделяется на 10 групп.

При расчете массового M_i , $i = 1, \dots, n$, и суммарного W_i , $i = 1, \dots, n$, выбросов загрязнителей делается допущение, что поллютанты от источников загрязнений попадают в помещения, оснащенные газопылеуловителями, работающими без утечек воздуха (n – количество поллютантов). Удаление поллютантов производится с помощью местной и общеобменной вентиляции.

Структурная схема процесса удаления атмосферных выбросов технологического оборудования системами местной и общеобменной вентиляции, положенная в основу разрабатываемой имитационной модели, приведена на рис. 4.

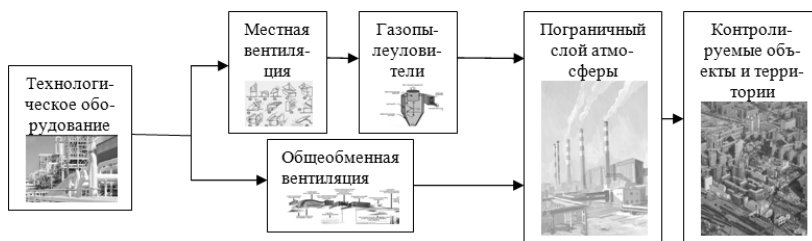


Рис. 4. Этапы удаления поллютантов системами вентиляции и их распространение в атмосфере

В качестве примера приведена модель, используемая при определении массового и суммарного выброса для первой группы оборудования. При расчете M_i^1 , $i = 1, \dots, n$, и W_i^1 , $i = 1, \dots, n$, при этом используются следующие зависимости:

$$M_i^1 = M_i^{\text{обмен},1} + M_i^{\text{мест},1}, \quad i = \overline{1, n}; \quad M_i^{0,1} = \left(\sum_{j=1}^{m^1} \eta_j^1 P a s_j^1 \right)_i, \quad i = \overline{1, n};$$

$$W_i^1 = \sum_{j=1}^l M_j^1 \Delta t_j, \quad i = \overline{1, n}; \quad M_i^{\text{обмен},1} = M_i^{0,1} (1 - k_{\text{мест}}^1), \quad i = \overline{1, n};$$

$$M_i^{\text{мест},1} = (M_i^{0,1} - M_i^{\text{обмен},1})(1 - E_i^1), \quad i = \overline{1, n};$$

$$E_i^1 = (1 - c_i^1 / c_i^{0,1}), \quad i = \overline{1, n},$$

где $M_i^{\text{мест},1}$ – массовое количество i -го поллютанта, попадающего в газопылеуловители местной вентиляционной системы от m^1 работающих источников загрязнений первой группы оборудования; $M_i^{0,1}$ – массовое количество i -го поллютанта, поступившего от работающего оборудования; $k^1_{\text{мест}}$ – коэффициент эффективности местных вытяжных устройств; n – количество поллютантов; η_j^1 – коэффициент производительности j -й единицы работающего оборудования первой группы; E_i^1 – степень очистки воздуха газопылеуловителями; c_i^1 – концентрация i -го поллютанта входе газопылеуловителей; $c_i^{0,1}$ – концентрация i -го поллютанта на выходе газопылеуловителей; $M_i^{\text{обмен},1}$ – массовое количество i -го поллютанта, не уловленное местными вытяжными устройствами и удаляемое общеобменной вытяжной вентиляцией; l – количество интервалов времени Δt_j , в течение которых работало оборудование первой группы за расчетный период; $Pa_{s_j}^1$ – количество загрязнителей, выбрасываемых в атмосферу j -й единицей оборудования первой группы; символ «1» в верхнем индексе означает принадлежность к оборудованию первой группы.

В момент решения задачи $t = t_p$ работа j -й единицы оборудования первой группы определяется по функции распределения непрерывной случайной величины $P_j^1(t)$, характеризующей вероятность работы каждой единицы оборудования данной группы на временном интервале решения задачи. Эта зависимость определяется путем обработки экспериментальных данных на стадии адаптации разрабатываемой имитационной системы к конкретному производству. Суммируя каждую единицу работающего оборудования, определяется m^1 . В качестве примера на рис. 5 приведены результаты вычислительного эксперимента по определению веса поллютантов, которые на различных временных интервалах поступают в атмосферу при работе оборудования первой группы.

На рис. 5 приняты следующие обозначения: ИВ₁, ИВ₂, ..., ИВ₆ – источники выбросов загрязняющих веществ, представляющие собой шесть металлообрабатывающих станков с абразивными кругами диаметром 100, 250 и 400 мм (по два каждого вида соответственно).

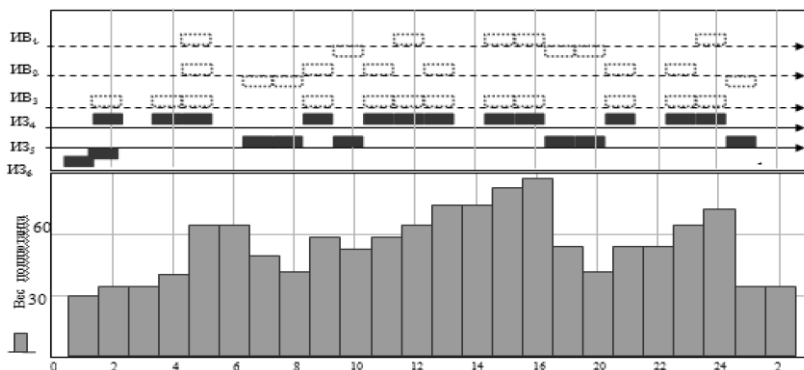


Рис. 5. Результаты моделирования процесса выделения абразивной и металлической пыли станками заточного участка при механической обработке металлов

В верхней части рисунка пунктиром показаны станки, отключаемые на данном временном интервале; закрашенные прямоугольники обозначают включаемые станки. На момент начала моделирования (1 час) работало два станка с полной нагрузкой. В качестве поллютантов рассматривались марганец и его соединения, диоксид азота, оксиды железа и др. вещества, перечень и весовой расход которых для различного оборудования первой группы определялся по справочной литературе.

Модели подъема и переноса выбросов в приземном слое атмосферы.

Основные атмосферные процессы, влияющие на подъем и распространение атмосферных загрязнителей, изображены на рис. 6 [12].

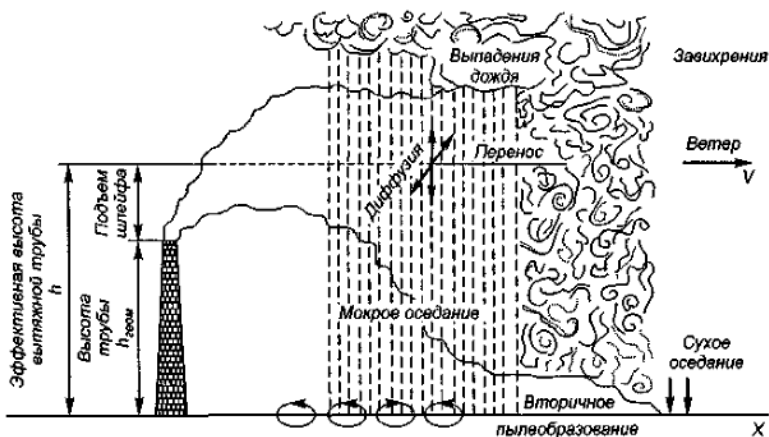


Рис. 6. Атмосферные процессы, влияющие на подъем и распространение загрязнителей

Математическая модель описания процесса подъема и распространения загрязнителей в атмосфере состоит из 17 продукций, каждая из которых характеризует тот или иной практически значимый частный случай процесса распространения загрязнителей в атмосфере. Если левая часть ни одной из продукций не выполняется, то концентрация загрязнителей определяется из решения уравнения переноса и турбулентной диффузии атмосферных загрязнителей. Модель имеет блочную структуру, допускающую увеличение количества продукций, а также их изменение на этапе адаптации к условиям функционирования конкретного промышленного предприятия.

В общем виде логико-математическая модель может быть представлена в виде совокупности продукций:

ПРОДУКЦИЯ j .

ЕСЛИ ВЫПОЛНЯЕТСЯ СОВОКУПНОСТЬ УСЛОВИЙ:

$$\langle (B_1(x, y, z, \mathbf{a}) R_1 B_2(x, y, z, \mathbf{a}) R_2 \dots R_{k-1} B_k(x, y, z, \mathbf{a})) \rangle_j > ,$$

ТО ИСКАОМАЯ ЗАВИСИМОСТЬ ИМЕЕТ ВИД

$$C = f_j(x, y, z, \mathbf{a}) , \quad j = \overline{1, m} ,$$

$$R_i \in \{AND, OR, NOT, AND-NOT, OR-NOT\} , \quad i = \overline{1, k} .$$

ЕСЛИ НЕ ВЫПОЛНЯЕТСЯ НИ ОДНО ИЗ УСЛОВИЙ

$$(B_1(x, y, z, \mathbf{a}) R_1 B_2(x, y, z, \mathbf{a}) R_2 \dots R_{k-1} B_k(x, y, z, \mathbf{a}))_j, \quad j = \overline{1, m},$$

ТО

$$C = f_j(x, y, z, \mathbf{a}), \quad j = \overline{1, m}, \text{ ОПРЕДЕЛЯЕТСЯ ИЗ}$$

РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА И ТУРБУЛЕНТНОЙ ДИФФУЗИИ АТМОСФЕРНЫХ ПОЛЛЮТАНТОВ.

В качестве примера приведена одна из продукций, характеризующих процесс распространения поллютантов в атмосфере при наличии ветра.

ПРОДУКЦИЯ.

ЕСЛИ ВЫПОЛНЯЕТСЯ СОВОКУПНОСТЬ УСЛОВИЙ:

<ИСТОЧНИК ВЫБРОСА ТОЧЕЧНЫЙ> AND

<ВЫБРОС КРАТКОВРЕМЕННЫЙ> AND

<ВЕТЕР ДУЕТ В ОДНОМ НАПРАВЛЕНИИ> AND

<ИСТОЧНИК ВЫБРОСА ПОДНЯТ НАД ЗЕМЛЕЙ> AND

<ПРИМЕСЬ ЛЕГКАЯ> AND

<РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПОЛЛЮТАНТОВ ОГРАНИЧЕНО

ПОВЕРХНОСТЬЮ ЗЕМЛИ ИЛИ ВОДЫ> AND

<ОСАДКИ ОТСУТСТВУЮТ> AND

<ВТОРИЧНОЕ ПЫЛЕОБРАЗОВАНИЕ НЕЗНАЧИТЕЛЬНО>.

ТО ИСКОМАЯ ЗАВИСИМОСТЬ ИМЕЕТ ВИД

$$C(x, y, z) = \frac{M}{2\pi W \sigma_y \sigma_z} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma_y^2(x)^2}\right) \left(\exp\left(-\frac{(z-H)^2}{2\sigma_z^2(x)^2}\right) + \exp\left(-\frac{(z+H)^2}{2\sigma_z^2(x)^2}\right) \right)$$

$$M = \tau \sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^{n_j} M_j^i,$$

где x, y, z – координаты точки расчета, отсчитываемые от основания трубы или от центра объемного источника выбросов; \mathbf{a} – вектор состояния окружающей среды, характеризуемый давлением, температурой и относительной влажностью атмосферного воздуха, направлением ветра, интенсивностью выпадения осадков, продолжительностью работы технологического оборудования, климатическими условиями; W – скорость ветра на высоте источника выброса; H – эффективная высота источника; y – расстояние в направлении, поперечном направлению

ветра; z – высота до земли; σ_y и σ_z – среднеквадратические отклонения для y и z .

На рис. 7 приведены результаты численного моделирования распределения концентрации загрязнителей $C = f(x, y, z, \mathbf{a})$, определенного по продукции 4 при различных значениях входных параметров математической модели. При проведении вычислительного эксперимента делалось допущение, что весовой расход атмосферного поллютанта изменяется по гармоническому закону. Изменение концентрации загрязнителя имеет волнообразный характер, что является одним из подтверждений адекватности разработанной модели.

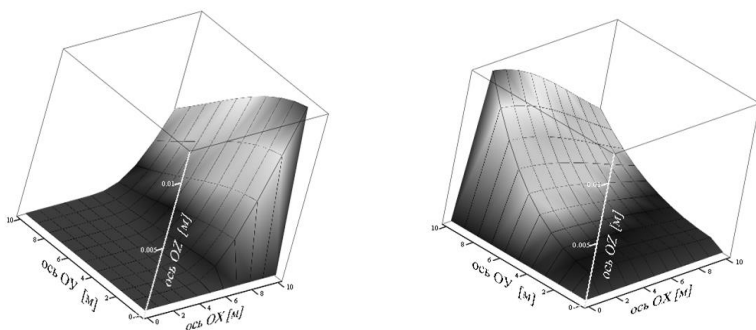


Рис. 7. Волнообразные изменения концентрации загрязнителей при гармоническом законе изменения весового расхода поллютанта

Модели и алгоритмы определения скалярных составляющих векторного критерия оптимальности, характеризующих различные виды ущерба.

При определении данных составляющих, характеризующих различные виды ущерба от воздействия атмосферных поллютантов и регулирования производительности технологического оборудования промышленного предприятия, используется формальный аппарат теории полезности, в частности, матрица решений. Поясним особенности его применения к решению

поставленной задачи на примере определения величины первой скалярной оставляющей Cf_1 векторной целевой функции.

Данный вид ущерба состоит из накопленного в течение временного интервала Δt ущерба от воздействия атмосферных поллютантов Y_1 и ущерба Y_2 , вызванного неблагоприятным стечением обстоятельств, усилившим негативное воздействие атмосферных выбросов на здоровье населения – $Cf_1 = Y_1 + Y_2$. При определении Cf_1 используется матрица решений $\|e_{ij}\|$, которая строится для каждой составляющей ущерба.

В частности, для определения составляющей Y_2 используется матрица решений $\|e_{ij}\|^{Y_2}$, задаваемая таблице 1.

Таблица 1. Матрица решений $\|e_{ij}\|^{Y_2}$ для определения составляющей ущерба Y_2

F_j E_i	F_1	...	F_j	...	F_m
E_1	e_{11}	...	e_{1j}	...	e_{1m}
...
E_i	e_{i1}	...	e_{ij}	...	e_{im}
...
E_n	e_{n1}	...	e_{nj}	...	e_{nm}

При составлении этой матрицы использованы следующие обозначения: E_i , $i = 1, \dots, n$, – варианты принимаемых решений, связанных с уменьшением производительности оборудования промышленного предприятия для регулирования концентрации выбросов поллютантов C в контролируемых точках; F_j , $j = 1, \dots, m$, – различные внешние условия, существенно влияющие на величину ущерба в зоне воздействия атмосферных поллютантов промышленного предприятия (безветренная погода, смог, туман, лесные или степные пожары, аномальная жара или холод, высокая загазованность атмосферы, повышенная заболеваемость населения и др.), а также различные комбинации данных внешних условий. На стадии адаптации разработанного математического обеспечения к условиям конкретного

предприятия необходимо учесть внешние условия с возможной полнотой, что повысит качество принимаемых решений.

Основную сложность при формировании матрицы $\|e_{ij}\|$ представляет определение ущерба e_{ij} , $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$. В проводимом исследовании для определения ущерба предлагается использовать экспертные оценки; метрические функции пространства условий; кусочно-заданные функции; S -образные кривые; рецепиентные методики; комбинированные методы [3, 7, 8, 14].

Ниже в качестве примера рассмотрена процедура определения ущерба с помощью аппарата кусочно-заданных функций. В ее основу положена следующая гипотеза.

Допустим, что в момент времени t_0 в точке с координатами x_0, y_0, z_0 известны концентрация поллютантов $C(t_0)$, а также величина ущерба от заболеваемости населения в зоне воздействия атмосферных поллютантов промышленного предприятия $e(x_0, y_0, z_0, C(t_0))$.

Тогда в момент времени t_k в точках с координатами x_k, y_k, z_k , удовлетворяющих условиям

$$|x_k - x_0| \leq \varepsilon_x, |y_k - y_0| \leq \varepsilon_y, |z_k - z_0| \leq \varepsilon_z,$$

а также условию $|C(t_k) - C(t_0)| \leq \varepsilon_c$, выполняется

$$(1) \quad \begin{aligned} e(x(t_k), y(t_k), z(t_k), t) &= \eta \rho_S; \\ \rho_S &= ((x(t_0) - x(t_k))^2 \mu_1 + (y(t_0) - y(t_k))^2 \mu_2 + (z(t_0) - z(t_k))^2 \mu_3 + \\ &+ (C(t_0) - C(t_k))^2 \mu_4)^{0.5}; \quad \sum_{i=1}^4 \mu_i = 1, \end{aligned}$$

где μ_i , $i = 1, 2, 3, 4$, – весовые коэффициенты, характеризующие степень влияния отклонения по i -й координате на величину функции расстояния ρ_S ; η – известный масштабирующий коэффициент, используемый для расчета ущерба в денежном выражении; ρ_S – функция расстояния, определяемого в метрическом пространстве состояний между точками $S_0, S_k \in \{S\}$ с координатами $(x_0, y_0, z_0, C(t_0))$ и $(x_k, y_k, z_k, C(t_k))$, соответственно; $\{S\}$ – множество допустимых состояний объекта управления; $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \varepsilon_c$ – окрестности точки S_0 , в которых выполняется зависимость (1).

Алгоритм определения величин e_{ij} , $i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$, с использованием метрической функции пространства состояний (1) включает следующие основные этапы: выбор вариантов принимаемых решений E_i , $i = 1, \dots, n$, связанных с уменьшением производительности оборудования промышленного предприятия; составление списка наиболее значимых внешних условий F_j , $j = 1, \dots, n$, влияющих на величину e_{ij} , $i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$; выбор координат базовых точек таким образом, чтобы их окрестности $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ перекрывали всю контролируемую территорию; определение ущерба от атмосферных загрязнений в этих точках, например, с помощью метода экспертных оценок или других известных методик; выбор координат точек контроля, в которых необходимо определить величину ущерба от заболеваемости населения в зоне воздействия атмосферных поллютантов промышленного предприятия; определение в точках контроля по формуле (1) ущерба e_{ij} , $i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$, и формирование матрицы решений $\|e_{ij}\|$.

Аналогично строятся и матрицы решений, характеризующие величину остальных скалярных критериев Cf_2, \dots, Cf_5 . Основным отличием данных матриц являются различные внешние условия F_j , $j = 1, \dots, m$, влияющие на величину ущерба e_{ij} , $i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$. Для минимизации суммарного ущерба

$$Cf_S = \sum_{i=1}^5 \mu_i Cf_i,$$

причиняемого атмосферными поллютантами, используется минимаксный критерий и критерий Сэвиджа.

Применение минимаксного критерия полностью исключает возможность возникновения ситуации, когда ущерб от воздействия атмосферных поллютантов превысит заданную величину, определяемую из выражения

$$(2) \quad Z_{MM} = \max e_{ir}, i = \overline{1, n}; e_{ir} = \min e_{ij}, j = \overline{1, m},$$

где Z_{MM} – величина наибольшего ущерба, причиняемого атмосферными загрязнителями.

Задача может иметь неединственное решение. Множество оптимальных вариантов решения (величины снижения производительности технологического оборудования) имеет вид

$$E_0 = \{E_{i_0} | E_{i_0} \in E : e_{i_0} = \max_i \min_j e_{ij}\}, e^* = e_{i_0}.$$

Рассмотренные выше алгоритмы определения величины минимального ущерба позволяют разработать алгоритм решения поставленной задачи.

5. Алгоритм решения задачи

1. Начало алгоритма.
2. Определение входной информации, используемой для расчета веса загрязнителей, выбрасываемых в атмосферу промышленным предприятием: списка вредных веществ, поступающих в атмосферу при работе технологического оборудования; наименований производственного оборудование, при работе которого образуются вредные вещества; смены, дни и продолжительность работы указанного оборудования и др.
3. Выбор интервала моделирования Δt .
4. Расчет на интервале Δt величины массового и суммарного выброса M_i , $i = 1, \dots, 10$, и W_i , $i = 1, \dots, 10$, для различных групп оборудования (с первой по десятую).
5. Определение на интервале моделирования Δt величин массового и суммарного выброса M_i , $i = 1, \dots, m$, и W_i , $i = 1, \dots, m$, по каждому вредному веществу.
6. Расчет общего массового и суммарного выброса M_i^* , $i = 1, \dots, k$ и W_i^* , $i = 1, \dots, k$ вредных веществ технологическим оборудованием предприятия.
7. Формирование входных параметров математических моделей подъема и переноса загрязняющих веществ.
8. Расчет высоты подъема поллютантов.
9. Расчет концентрации вредных веществ в точках контроля с помощью известных математических модели подъема и переноса поллютантов.
10. Определение скалярных составляющих оптимизируемого критерия.
11. Выделение области Парето.

12. Определение вариантов принимаемых решений E_i , $i = 1, \dots, m$, связанных с уменьшением производительности оборудования промышленного предприятия.

13. Определение внешних условий F_j , $j = 1, \dots, n$, влияющих на временном интервале Δt на величину ущерба в зоне воздействия атмосферных поллютантов промышленного предприятия.

14. Выбор способов расчета ущерба от воздействия поллютантов e_{ij} , $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$.

15. Расчет величины ущерба от воздействия поллютантов e_{ij} , $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$.

16. Построение матрицы решений $\|e_{ij}\|$.

17. Формирование оценочной функции, применяемой при минимизации скалярного критерия $Cf_s = \sum_{i=1}^s \mu_i Cf_i$.

18. Минимизация целевой функции с использованием минимаксного критерия или критерия Сэвиджа.

19. Выбор оптимального варианта решения E_m об уменьшении на интервале Δt производительности оборудования промышленного предприятия с целью регулирования концентрации выбросов поллютантов в контролируемых точках.

20. Выдача сообщения лицу, принимающему решения (ЛПР), об оптимальном варианте решения E_m с указанием достигаемой концентрации поллютантов в контролируемых точках, величины временного интервала Δt и оптимального состава и производительности оборудования промышленного предприятия.

21. Конец алгоритма

6. Модельный пример

Источником атмосферного загрязнения в данном примере, иллюстрирующем процедуру решения задачи, является промышленное предприятие среднего бизнеса, занимающееся производством железобетонных изделий. Предприятие расположено в загородной зоне крупного промышленного города, при неблагоприятном направлении ветра атмосферные загрязнители могут попасть на его территорию (рис. 8) [13].

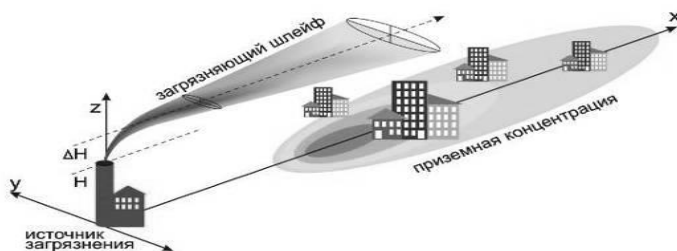


Рис. 8. Схема загрязнения городской территории постоянно действующим точечным источником атмосферных выбросов

Входные данные математической модели, используемой для расчета весового расхода атмосферных поллютантов, взяты из документа ВРД 66-125-90 [5], регламентирующего методику определения валовых выбросов загрязняющих веществ заводами по производству железобетона ОАО «Завод ЖБИ». В качестве интервала моделирования выбраны сутки с разбивкой по часам. На данном временном интервале работает оборудование, перечень которого приведен в таблице 2 [5].

Таблица 2. Источники атмосферного загрязнения предприятия по производству железобетонных изделий ОАО «Завод ЖБИ»

Источник выделения загрязняющих веществ	Выделяющееся загрязняющее вещество	Массовые выбросы г/с	Удельные выбросы г/кг(кг/т)	Примечание
1	2	3	4	5
Посты выгрузки вагонов и самосвалов грейферными механизмами в приемные ямы	Цемент	2,306	0,08	Неорганизованный выброс при скорости ветра 2,5 м/с, влажности материала 5%
	Щебень	2,69	0,11	
	Песок	0,5	0,03	
	Известняк	0,556	0,24	

Источник выделения загрязняющих веществ	Выделяющееся загрязняющее вещество	Массовые выбросы г/с	Удельные выбросы г/кг(кг/т)	Примечание
1	2	3	4	5
Посты выгрузки вагонов в склады хранилищ пневмотранспортом	Цемент	2,61	0,8	Средняя концентрация 8,2 г/м ³
	Песок	1,306	-	
Загрузка цементовозом: самотеком пневмотранспортом	Цемент	-	0,02	Средняя концентрация, г/м ³ 3,5 19,5
	Цемент	-	0,2	
Загрузка сыпучих материалов в желоба, питатели и бункеры: порошковых материалов	Пыль материалов	1,97	2,3	Средний размер менее 8 мм
	кусковых материалов	0,833	1,0	
Пересыпка на транспортеры: порошковых материалов	Пыль материалов	1,19	0,539	Средний размер менее 8 мм

Источник выделения загрязняющих веществ	Выделяющееся загрязняющее вещество	Массовые выбросы г/с	Удельные выбросы г/кг(кг/т)	Примечание
1	2	3	4	5
кусовых материалов	Пыль материалов	1,43	0,65	Средний размер 8 мм и более
Кабинные укрытия ленточных конвейеров-порошковых материалов	Пыль материалов	0,794	0,95	
Кабинные укрытия ленточных конвейеров кусковых материалов	Пыль материалов	0,3	0,35	Средний размер 8 мм и более
Комбинированные укрытия в галереях ленточных конвейеров: порошковых материалов	Пыль материалов	0,925	1,1	Средний размер менее 8 мм
	кусовых материалов	0,411	0,5	Средний размер 8 мм и более

Источник выделения загрязняющих веществ	Выделяющееся загрязняющее вещество	Массовые выбросы г/с	Удельные выбросы г/кг(кг/т)	Примечание
1	2	3	4	5
Дробилки шековые: изверженные породы	Пыль материалов	14,4	3,0	Влажность материала 5%
	карбонатные породы	23,6	6,0	
Дробилки конусные: изверженные породы	Пыль материалов	20,3	2,0	Влажность материала 5%
	карбонатные породы	38,6	5,0	
Грохоты: изверженные породы	Пыль материалов	8,33	-	Влажность материала 5%
	карбонатные породы	9,72	-	
Установка сушки песка в потоке горячих газов: изверженные породы	Пыль материалов	1,89	1,8	Без учета выделений от сжигаемого топлива

Источник выделения загрязняющих веществ	Выделяющееся загрязняющее вещество	Массовые выбросы г/с	Удельные выбросы г/кг(кг/т)	Примечание
1	2	3	4	5
карбонатные породы	Пыль материалов	2,42	2,4	
Весовые дозаторы и бетоносмесительные установки	Пыль цемента и песка	0,972	1,33	3,2 г/м ³
Пневмотранспорт цемента	Пыль цемента	2,64	0,8	8,2 г/м ³
Цементные силосы	Пыль цемента	-	-	8,7-10,1 г/м ³

Для данного объекта управления на временном интервале [0; 365] суток необходимо решить задачу минимизации ущерба от атмосферных выбросов ОАО «Завод ЖБИ».

Результатом решения указанной задачи является изменение производственного процесса, которое, исходя из интересов акционеров завода, трудового коллектива, из особенностей производственной программы и используемого технологического оборудования, невозможно осуществить чаще 1 раза в год.

На данном временном интервале на величину ущерба могут значительно повлиять ряд внешних воздействий, например, таких как повышенный уровень смога, высокая задымленность города из-за лесных пожаров и др.

Эти внешние воздействия носят во многом случайный характер, достоверно предсказать их возникновение на рассматриваемом временном интервале не представляется возможным. Это означает, что решение об изменении технологического

процесса ОАО «Завод ЖБИ» необходимо принимать в условиях неопределенности внешних возмущений таким образом, чтобы возможный ущерб не превысил максимально допустимой величины.

В рассматриваемом примере ущерб от воздействия атмосферных загрязнителей при самом неблагоприятном развитии событий не должен более чем в 2 раза превысить ущерба при наиболее благоприятных внешних условиях.

С учетом вышеизложенного при минимизации ущерба использован минимаксный критерий, применение которого полностью исключает возможность возникновения ситуации, когда ущерб от воздействия атмосферных загрязнителей превысит заданную величину, определяемую из выражения (2).

Процедура решения. Результаты расчета веса загрязнителей (пыль цемента, песка, материалов, а также цемент, песок, щебень, известняк), выбрасываемых в течение 1 суток с разбивкой по часам в атмосферу предприятием по производству железобетонных изделий, приведены в виде гистограммы на рис. 9.

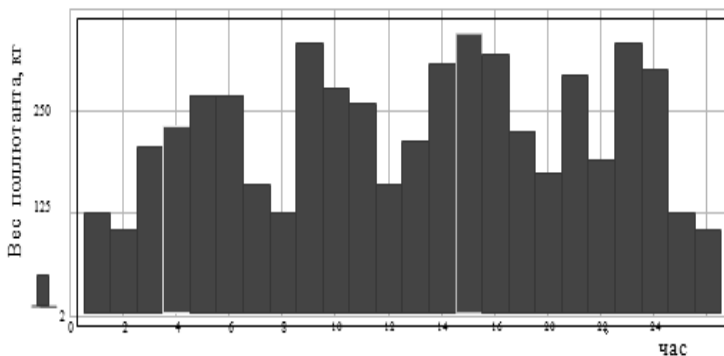


Рис. 9. Результаты расчета величины выброса атмосферных загрязнителей ОАО «Завод ЖБИ»

Для упрощения расчета принято допущение, что все оборудование, указанное в столбце «Источник выделения загрязняющих веществ» таблицы 2, имеется на предприятии только в единственном экземпляре.

При проведении моделирования для упрощения расчетов сделано допущение, что вероятность работы каждой единицы оборудования промышленного предприятия (таблица 2) в любой момент времени представляет собой случайную величину, равномерно распределенную на интервале от 0 до 1.

В дальнейшем будем считать, что приведенные на рис. 8 результаты моделирования характеризуют наиболее неблагоприятную ситуацию с точки зрения интенсивности загрязнения окружающей среды.

Расчет распределения концентрации загрязнителей по контролируемой территории осуществлен с использованием гауссовой модели факела, его результаты приведены на рис. 10.

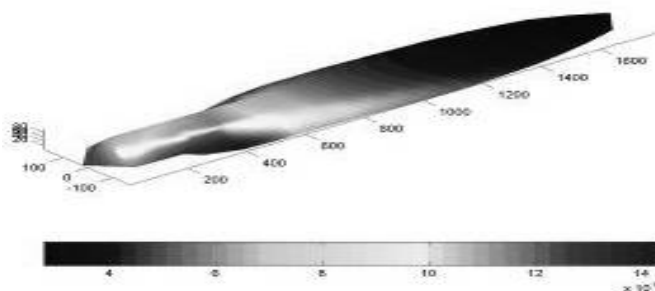


Рис. 10. Распределение концентрации загрязнителей по территории, прилегающей к ОАО «Завод ЖБИ»

При проведении расчета средняя скорость ветра по направлению от источника загрязнений к городу принята равной 5 м/с.

В результате проведенного вычислительного эксперимента установлено, что в точках контроля концентрация загрязнителей предприятия по производству железобетонных изделий ОАО «Завод ЖБИ» при неблагоприятном направлении ветра составляет от 0,124 мг/м³ до 0,135 мг/м³.

Процентное соотношение различных видов загрязнителей в точках контроля показано на диаграмме (рис. 11). Предельно допустимая концентрация ни по одному из загрязнителей оказалась не превышенной.

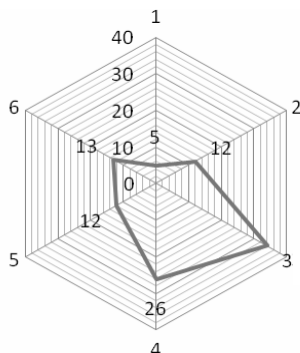


Рис. 11. Соотношение различных видов загрязнителей (табл. 2) в точках контроля (в процентах): 1 – пыль карбонатных пород; 2 – пыль порошковых материалов; 3 – пыль цемента и песка; 4 – пыль известняка; 5 – пыль известкового доломита; 6 – прочие поллютанты

Для решения задачи оптимизации суммарного ущерба от атмосферных выбросов построена матрица $\|e_{ij}\|$, приведенная в таблице 3. Элементами матрицы решений e_{ij} , $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, t$, является нормированная величина ущерба, соответствующая различным вариантам принимаемых решений и внешним условиям, влияющим на величину ущерба. Нормировка осуществлена делением значения каждого e_{ij} , $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, t$, на значение элемента с наименьшей величиной ущерба (e_{77}).

Для уменьшения размерности и сохранения обзорности рассматриваемого модельного примера ущерб e_{ij} , $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, t$, определен методом экспертных оценок.

В таблице 3 приняты следующие обозначения: F_1 – повышенный уровень смога; F_2 – высокая задымленность города из-за лесных пожаров; F_3 – продолжительный летний антициклон; F_4 – продолжительный зимний антициклон; F_5 – повышенный уровень смога и задымленности города; F_6 – высокая загруженность городских автомобильных магистралей; F_7 – нет внешних воздействий, значительно влияющих на ущерб.

Таблица 3. Матрица решений, используемая для определения ущерба от атмосферных выбросов предприятия по производству железобетонных изделий ОАО «Завод ЖБИ»

Внешние воздействия Варианты решений	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7
	E_1 — сохранение текущей концентрации поллютантов	1,4	2,1	1,3	1,4	3,7	1,7
E_2 — уменьшение концентрации поллютантов на 10%	1,4	1,9	1,3	1,4	2,9	1,6	1,5
E_3 — уменьшение на 20%	1,3	1,8	1,3	1,4	2,4	1,6	1,5
E_4 — уменьшение на 30%	1,3	1,7	1,2	1,3	2,1	1,5	1,4
E_5 — уменьшение на 40%	1,3	1,6	1,2	1,3	1,7	1,5	1,3
E_6 — уменьшение на 50%	1,2	1,6	1,2	1,3	1,6	1,5	1,3
E_7 — уменьшение на 60%	1,2	1,5	1,1	1,2	1,6	1,4	1

Выбор минимальной величины ущерба осуществлен в соответствии с таблицей 3 с помощью минимаксного критерия

$$Z_{MM} = \max e_{ir}, i = \overline{1,7}; e_{ir} = \min e_{ij}, j = \overline{1,7};$$

$$Z_{MM} = e_{75} = 1,6; Z_{MM} = e_{75} = 1,6.$$

Установлено, что задача имеет два решения E_6 и E_7 . Вариант решения E_6 для предприятия реализовать проще, чем вариант E_7 . Поэтому в качестве решения задачи принято решение, связанное с 50% сокращением концентрации атмосферных поллютантов ОАО «Завод ЖБИ» в точках контроля.

Реализация варианта решения E_6 означает, что концентрацию атмосферных поллютантов необходимо снизить с величин $0,124 \text{ мг/м}^3 - 0,135 \text{ мг/м}^3$ в два раза.

Для рассматриваемого предприятия для этого необходимо в среднем уменьшить производительность: шековых дробилок на 10% и конусных дробилок на 10%.

Кроме того, следует уменьшить количество выделяемой пыли при выгрузке вагонов и самосвалов грейферными механизмами в приемные ямы на 30–40% и сократить время работы грохотов изверженной породы на 20%.

Временные интервалы решения задачи. Поставленная задача решается на временных интервалах сутки, месяц и год.

На первом из этих интервалов осуществляется определение ущерба от атмосферных выбросов предприятия, приведших к превышению предельно допустимой концентрации поллютантов в точках контроля.

На интервале 1 месяц определяется величина ущерба за месяц, производится сравнение данной величины с запланированным показателем, по результатам сравнения ЛПП выдаются рекомендации по регулированию состава и производительности работающего технологического оборудования.

На годовом интервале на основе анализа накопленной информации об управляющих воздействиях, реализованных в течение года, осуществляется экспертная оценка величины экономического эффекта от решения задачи. Формируются годовые показатели, характеризующие эффективность использования математического обеспечения, а также выполняется коррекция коэффициентов математической модели.

Адаптация разработанного математического обеспечения к работе в составе информационных систем данного предприятия выполнена в соответствии с рекомендациями [1, 6, 10, 11].

7. Заключение

Разработаны модели и алгоритмы для решение задачи автоматизированного управления технологическим оборудованием промышленного предприятия по векторному критерию, характеризующему различные виды ущерба от воздействия атмосферных поллютантов.

Решение этой задачи имеет существенное народно-хозяйственное значение, связанное с уменьшением ущерба от загрязнителей атмосферы, причиняемого населению, сельскому хозяйству, природной среде, а также с повышением эффективности функционирования промышленных предприятий за счет снижения экологических штрафов и предотвращения экологических преступлений и правонарушений.

В настоящее время, разработанное математическое обеспечение проходит апробацию в структурных подразделениях ОАО «СЭПО-ЗЭМ».

Литература

1. АВЕТИСЯН Ю.А., КУШНИКОВ В.А., РЕЗЧИКОВ А.Ф. И ДР. *Математические модели и алгоритмы оперативного управления процессами ликвидации чрезвычайных ситуаций* // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2009. – №11. – С. 43–47.
2. БЕРЛЯНД М.Е. *Прогноз и регулирование загрязнений атмосферы*. – Л.: Гидрометеиздат, 1985. – 272 с.
3. БЫСТРОВ А.С., ВАРАНКИН В.В., ВИЛЕНСКИЙ М.А. И ДР. *Временная типовая методика определения экономической эффективности осуществления природоохранных мероприятий и оценки экономического ущерба, причиняемого народному хозяйству загрязнением окружающей среды*. – М.: Экономика, 1986. – 123 с.
4. ИЗРАЭЛЬ Ю.А. *Экология и контроль состояния природной среды*. – Л.: Гидрометеиздат, 1979. – 369 с.

5. КВАШНИН И.М. *Промышленные выбросы в атмосферу. Инженерные расчеты и инвентаризация.* – М.: АВОК-PRESS, 2005. – 390 с.
6. КУШНИКОВ В.А., РЕЗЧИКОВ А.Ф., ЦВИРКУН А.Д. *Управление в человеко-машинных системах с автоматизированной процедурой коррекции целей* // Автоматика и телемеханика. – 1998. – №7. – С. 168–175.
7. КУШНИКОВА Е.В. *Модели и методы прогнозирования аварийных ситуаций, возникающих при выбросе поллютантов промышленных предприятий* // Материалы Всероссийской научной конференции с Международным участием «Проблемы критических ситуаций в точной механике и управлении». – Саратов, 2013. – С. 81–85.
8. КУШНИКОВА Е.В., РЕЗЧИКОВ А.Ф. *Задача минимизации ущерба от атмосферных выбросов промышленных предприятий* // Сборник научных статей по материалам Международной научной конференции ICIT 2014 «Информационно – коммуникационные технологии в науке, производстве и образовании». – Саратов, 2014. – С. 124–127.
9. МАРЧУК Г.И. *Математическое моделирование в проблеме окружающей среды.* – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1982. – 320 с.
10. РЕЗЧИКОВ А.Ф., ТВЕРДОХЛЕБОВ В.А., ИВАЩЕНКО В.А. И ДР. *Человек. Машина. Среда.* – Саратов: Издательский Центр «Наука», 2013. – 196 с.
11. РЕЗЧИКОВ А.Ф., ТВЕРДОХЛЕБОВ В.А., ИВАЩЕНКО В.А. И ДР. *Критические ситуации в человеко-машинных системах.* – Саратов: Издательский Центр «Наука», 2015. – 244 с.
12. САХАРОВ В.К. *Радиоэкология: Учебное пособие.* – СПб.: Изд-во «Лань», 2006. – 320 с.
13. СОЛЯНИК Н.А., КУШНИКОВ В.А. *Математическое моделирование процесса загрязнения атмосферного воздуха в зоне влияния промышленных предприятий* // Вестник Саратовского государственного технического университета. – 2009. – №1, Т. 1. – С. 104–109.

14. ТРАХТЕНБЕРГ И.М., ТИМОФИЕВСКАЯ А.А., КВЯТКОВСКАЯ И.Я. *Методы изучения хронического действия химических и биологических загрязнителей.* – Рига: Зинатне, 1987. – 172 с.
15. GIFFORD F. *Turbulent diffusion – typing schemes: a review* // Nuclear Safety. – 1976. – Vol. 17, №1. – P. 25–43.
16. PASQUILL F. *Atmospheric diffusion.* – London: Van Nostr. Co. Ltd., 1962. – 298 p.
17. PETROSIAN L., ZACCOUR G. *Time-consistent Shapley value allocation of pollution cost reduction* // Journal of Economic Dynamics and Control. – 2003. – Vol. 27 (3). – P. 381–398.

MODELS AND ALGORITHMS OF DAMAGE MINIMIZATION FROM INDUSTRIAL POLLUTION

Elena Kushnikova, *Institute of Precision Mechanics and Control of RAS, Saratov, postgraduate (elenak3366@ya.ru).*

Alexander Rezchikov, *Institute of Precision Mechanics and Control of RAS, Saratov, Doctor of Science, Scientific director (iptmuran@san.ru).*

Vladimir Ivaschenko, *Institute of Precision Mechanics and Control of RAS, Saratov, Dr Sc., academic secretary (iptmuran@san.ru).*

Leonid Filimonyuk, *Institute of Precision Mechanics and Control of RAS, Saratov, Candidate of Science, Scientist (iptmuran@san.ru).*
Abstract: We suggest the formal setting for the problem of damage minimization from industrial pollution. The algorithm is developed, which allows increasing enterprise efficiency due to the decrease of ecological penalties and damage from atmospheric pollution.

Keywords: manufacturing enterprise, pollution, algorithm of damage minimization, info-logical diagram, optimality criterion.

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии Г.А. Угольницким*

Поступила в редакцию 22.06.2015.

Дата опубликования 30.09.2015.