

УДК 51-77
ББК 22.171

МОДЕЛЬ ГРАНОВЕТТЕРА С НЕПРЕРЫВНЫМ ВРЕМЕНЕМ

Рогаткин А. Д.¹

(ФГБУН Институт проблем управления РАН, Москва)

Исследуется предложенная в [6] модель конформного коллективного поведения, мотивированная моделью М. Грановеттера [7]. Рассмотрено вероятностное обоснование модели на микроуровне. Изучено поведение системы при стремлении числа агентов к бесконечности и показано, что оно описывается уравнением переноса. Показано, что траектории системы совпадают с траекториями некоторой изолированной гамильтоновой системы.

Ключевые слова: модель Грановеттера, пороговое поведение, конформизм, уравнение переноса, гамильтоновы системы, уравнение Шредингера.

1. Введение

В работе [7] М. Грановеттером предложена модель *конформного коллективного поведения*, в которой агенты осуществляют бинарный выбор: действовать или бездействовать. Выбор они делают в *дискретные* моменты времени одновременно и независимо, каждый сравнивает «суммарное» действие других агентов со своим индивидуальным порогом. Опишем кратко соответствующую модель согласно [3].

Рассмотрим конечное множество агентов $N = \{1, 2, \dots, n\}$. Каждый из агентов имеет некоторый *порог сопротивления социальному давлению* $\theta_i \in [0, 1]$, $i \in N$ (далее – *порог*; под социальным давлением понимается, сколько других агентов действуют).

¹ Андрей Дмитриевич Рогаткин, аспирант
(andreyrogatkin@gmail.com).

На шаге k агент $i \in N$ выбирает одно из двух состояний $\omega_{ik} \in \{0, 1\}$ (если $\omega_{ik} = 1$, то говорят, что агент «действует», иначе говорят, что он «бездействует»), его состояние на шаге $k + 1$ определяется по правилу:

$$(1) \quad \omega_{i(k+1)} = \begin{cases} 1, & \frac{1}{n} \sum_j \omega_{jk} - \theta_i \geq 0, \\ 0, & \frac{1}{n} \sum_j \omega_{jk} - \theta_i < 0. \end{cases}$$

Согласно правилу (1), агент действует, если состояние системы $x_k = 1/n \sum_i \omega_{ik}$ не ниже, чем его порог. Такое поведение называется *конформным*.

Предположим, что пороги агентов $\theta_1, \dots, \theta_n$ – независимые одинаково распределённые на отрезке $[0, 1]$ случайные величины с гладкой функцией распределения $F: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$, $F(0) = 0$, $F(1) = 1$.

На макроуровне модель [7] имеет простое описание: если число агентов велико, то состояние системы подчиняется рекуррентному соотношению

$$(2) \quad x_{k+1} = F(x_k).$$

В работе [3] классифицированы положения равновесия в этой модели и показано, что система приходит в состояние равновесия не более чем за n шагов при любых начальных условиях.

Модель Грановеттера получила широкое распространение (см. обзор [1, 2]), однако имеет ограниченное применение, главным образом потому, что опирается на дискретность времени и одновременность принятия агентами решений, что не всегда имеет место. В работе [6] предложен способ изменить это требование и описано, каким образом агенты могут осуществлять свой выбор последовательно, сохранив при этом механизм индивидуального принятия решений. Эта модель имеет удобное асимптотическое описание (см. выражение (13)) при стремлении числа агентов к бесконечности, которое можно интерпретировать как переход к непрерывному времени.

В работе [4] модель Грановеттера также рассматривается в непрерывном времени с использованием предельного перехода при стремлении числа агентов к бесконечности, но одновременность принятия агентами решений сохраняется. Отличие настоящей работы от [6] состоит в следующем. Во-первых, в [6] исходные предположения модели на микроуровне описаны либо слишком кратко для однозначного понимания, либо не обоснованы, поэтому ниже приводится корректная вероятностная постановка. Во-вторых, в работе [6] соответствующая модель используется как основа для построения более сложных моделей с ограничением множества агентов, влияющих на принятие индивидуального решения, и не исследуется в достаточной мере сама по себе. В настоящей же работе анализируется динамика системы, приводится пример аналогичной системы из классической механики и обсуждаются способы обобщить модель на случай квантовой механики.

Структура изложения материала настоящей работы следующая. Во втором разделе приводится постановка модели и её асимптотическое описание при помощи уравнения непрерывности (13) и траекторий первого порядка (15). Приводятся оценки математического ожидания состояния и энтропии системы, их применение иллюстрируется примером. В третьем разделе исследуется устойчивость траекторий. В четвёртом разделе показывается связь модели с классической механикой и приводится пример гамильтоновой системы, траектории которой совпадают с траекториями системы (15) при соответствующих начальных условиях. В пятой части обсуждаются способы обобщить модель на квантовомеханический случай.

2. Модель принятия агентами решений и уравнение динамики состояний системы

Перейдем к описанию модели принятия агентами решений в непрерывном времени. Обозначим через $\omega_i(t) \in \{0, 1\}$ состояние агента i в момент времени $t \in [0, +\infty)$. Если агент в момент времени t действует, то $\omega_i(t) = 1$, в противном случае $\omega_i(t) = 0$.

Среднее арифметическое действий всех агентов $x(t) = 1/n \sum_i \omega_i(t)$, которое назовём *состоянием системы*, можно содержательно интерпретировать как *социальное давление* в следующем смысле. Пусть агент i имеет некоторый *порог сопротивления социальному давлению* $\theta_i \in [0, 1]$ (далее *порог*). Если социальное давление превышает порог агента на *момент принятия им решения*, то агент решает действовать. Иначе он решает бездействовать – см. также выражение (1).

Моменты принятия агентами решений определим следующим образом. В каждый из моментов времени $1/n, 2/n, \dots, k/n, \dots$ решение принимает только один агент из множества N , выбираемый случайно, причем выбор любого из агентов равновероятен. Номер выбранного на шаге k агента обозначим через i_k .

Связь времени с числом агентов имеет следующий смысл: агент принимает решение (менять или не менять действие) в среднем один раз за единичное характерное время. Чем больше в сети агентов, тем больше будет принято решений за единицу времени. Таким образом,

$$(3) \quad \omega_i \left(t + \frac{1}{n} \right) = \begin{cases} \chi(x(t) \geq \theta_i), i_k = i, \\ \omega_i(t), i_k \neq i. \end{cases}$$

Случайные величины $i_1, \dots, i_n, \theta_1, \dots, \theta_n$ предположим независимыми в совокупности. Согласно описанной модели, в моменты времени $1/n, 2/n, \dots, k/n, \dots$ действие произвольно выбранного агента может остаться неизменным или измениться. Соответственно, состояние системы либо остаётся неизменным, либо увеличивается на $1/n$, либо уменьшается на $1/n$.

В соответствии с выражением (3), условная вероятность $P(\uparrow | m/n)$ увеличения социального давления на $1/n$ для системы, находящейся в состоянии m/n , где $m = 1, \dots, n$, определяется как вероятность события, состоящего в одновременном выполнении следующих двух условий:

- 1) реализации порога случайно выбранного агента i_k меньшего или равного m/n ;
- 2) выбора агента с состоянием 0.

То есть

$$(4) \quad P\left(\uparrow \mid \frac{m}{n}\right) \triangleq \text{Prob}\left(x\left(t + \frac{1}{n}\right) = \frac{m+1}{n}, x(t) = \frac{m}{n}\right) = \\ = \text{Prob}\left(\omega_{i_k} = 0, \theta_{i_k} \leq \frac{m}{n}\right).$$

В силу независимости θ_i и i_k , из (4) получаем:

$$(5) \quad P\left(\uparrow \mid \frac{m}{n}\right) = \text{Prob}\left(\omega_{i_k} = 0\right) \cdot \text{Prob}\left(\theta_{i_k} \leq \frac{m}{n}\right) = \left(1 - \frac{m}{n}\right) F\left(\frac{m}{n}\right).$$

Аналогично, вероятность $P(\downarrow \mid m/n)$ уменьшения среднего действия агентов на $1/n$ для системы, находящейся в состоянии m/n , определяется как вероятность события, состоящего в одно-временном выполнении следующих двух условий:

- 1) реализации порога случайно выбранного агента i_k большего m/n ;
- 2) выбора агента с состоянием 1.

То есть

$$(6) \quad P\left(\downarrow \mid \frac{m}{n}\right) \triangleq \text{Prob}\left(x\left(t + \frac{1}{n}\right) = \frac{m-1}{n} \mid x(t) = \frac{m}{n}\right) = \\ = \text{Prob}\left(\omega_{i_k} = 1, \theta_{i_k} > \frac{m}{n}\right),$$

В силу независимости θ_i и i_k , из (6) получаем:

$$(7) \quad P\left(\downarrow \mid \frac{m}{n}\right) = \text{Prob}\left(\omega_{i_k} = 1\right) \cdot \text{Prob}\left(\theta_{i_k} > \frac{m}{n}\right) = \frac{m}{n} \left(1 - F\left(\frac{m}{n}\right)\right).$$

Так как за один «временной шаг» длины $1/n$ состояние системы может измениться не больше чем на $1/n$, то вероятность $P(\uparrow\downarrow \mid m/n)$ того, что система, находящаяся в состоянии m/n , не изменит своего состояния, равна

$$(8) \quad P\left(\uparrow\downarrow \mid \frac{m}{n}\right) = 1 - P\left(\downarrow \mid \frac{m}{n}\right) - P\left(\uparrow \mid \frac{m}{n}\right).$$

В рамках рассматриваемой модели вероятности изменения состояния системы зависят только от состояния системы, т.е. процесс $x(t)$ по определению является марковским.

Введём обозначение

$$q\left(\frac{m}{n}, t\right) \triangleq \text{Prob}\left(x(t) = \frac{m}{n}\right),$$

где $q(m/n, t)$ - распределение вероятностей состояний системы:

$$(9) \quad \sum_{m=0}^n q\left(\frac{m}{n}, t\right) = 1, \quad \forall t \in [0, +\infty).$$

В соответствии с описанным выше случайным законом, получаем, что справедливо следующее утверждение.

Утверждение 1. Динамика распределения вероятностей состояний системы описывается уравнением Колмогорова–Чепмена:

$$(10) \quad \begin{aligned} q\left(\frac{m}{n}, t + \frac{1}{n}\right) &= P\left(\uparrow \mid \frac{m-1}{n}\right) q\left(\frac{m-1}{n}, t\right) + \\ &+ P\left(\downarrow \mid \frac{m+1}{n}\right) q\left(\frac{m+1}{n}, t\right) + \\ &+ \left[1 - P\left(\uparrow \mid \frac{m}{n}\right) - P\left(\downarrow \mid \frac{m}{n}\right)\right] q\left(\frac{m}{n}, t\right). \end{aligned}$$

Для каждого n обозначим через $q^n(m/n, t)$ решение уравнения (10) с начальными условиями

$$(11) \quad q^n\left(\frac{m}{n}, 0\right) = \int_{\frac{m}{n} - \frac{1}{2n}}^{\frac{m}{n} + \frac{1}{2n}} q_0(x) dx,$$

где $q_0(x)$ – некоторая гладкая функция x . Предположим, что решения $q^n(m/n, t)$ уравнения (10) при $n \rightarrow \infty$ имеют гладкий предел $p(x, t)$, причем предел понимается в том смысле, что для любого интервала $(a, b) \subset [0, 1]$

$$(12) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{m=[na]}^{[nb]} q^n\left(\frac{m}{n}, t\right) \right) = \int_a^b p(x, t) dx.$$

Утверждение 2. Плотность распределения вероятностей состояний системы $p(x, t)$ удовлетворяет уравнению

$$(13) \quad \frac{\partial}{\partial t} p(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} ([F(x) - x] p(x, t)) = 0.$$

Доказательство утверждения 2 приведено в приложении.

Уравнение (13), известное в физике как *основное кинетическое уравнение (master equation)*, в рассматриваемом случае имеет вид *уравнения переноса*, которое в том числе отражает условие нормировки (аналогичное условию (9)) – сохранение во

времени интеграла $\int_0^1 p(x,t) dx$:

$$(14) \quad \frac{d}{dt} \int_0^1 p(x,t) dx = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} p(x,t) dx = - \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} [(F(x) - x) p(x,t)] dx = \\ = (F(1) - 1) p(1,t) - (F(0) - 0) p(0,t) = 0.$$

Уравнением характеристик уравнения (13) является

$$(15) \quad \dot{x} = F(x) - x,$$

которое представляет собой непрерывный аналог уравнения Грановеттера (2).

В частности, если начальное состояние системы x_0 известно точно:

$$(16) \quad p(x,0) = \delta(x - x_0),$$

то движение системы будет описываться дифференциальным уравнением (15), т.е. решением уравнения (13) будет являться

$$(17) \quad p(x,t) = \delta(x - x(t)),$$

где $x(t)$ – решение уравнения (15) с начальным условием $x(0) = x_0$.

Проведём анализ *математического ожидания состояния* $Ex(t)$ и *энтропии* $I(t) = - \int_0^1 p(x,t) \ln p(x,t) dx$ исследуемой системы.

Утверждение 3. Математическое ожидание состояния системы $Ex(t)$ удовлетворяет равенству

$$(18) \quad \frac{d}{dt} (Ex(t)) = EF(x(t)) - Ex(t).$$

Доказательство утверждения 3 приведено в приложении.

Утверждение 4. Динамика энтропии системы описывается выражением

$$(19) \frac{dI}{dt}(t) = \int_0^1 (F'(x) - 1) p(x, t) dx .$$

Доказательство утверждения 4 приведено в приложении.

Выражения (15), (18) и (19) позволяют качественно оценивать поведение системы с известными функцией распределения порогов и начальными условиями. Рассмотрим иллюстративный пример.

Пример 1. Пусть функция распределения порогов агентов $F(x) = x^2$. Тогда уравнение (13) с начальным условием $p(x, 0) = p_0(x)$, где $p_0(x)$ – некоторая гладкая функция, имеет решение

$$(20) p(x, t) = p_0 \left(\frac{1}{1 + \frac{1-x}{x} e^{-t}} \right) \cdot \frac{e^{-t}}{(x + (1-x)e^{-t})^2} .$$

На рис. 1, 2, 3 изображена функция $p(x, t)$, заданная выражением (20) с начальным условием

$$(21) p_0(x) = \alpha e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}}, \quad x_0 = 0,97, \quad \sigma = 2^{-4},$$

где α – нормирующий множитель, гарантирующий равенство единице интеграла от начального условия на отрезке $[0, 1]$.

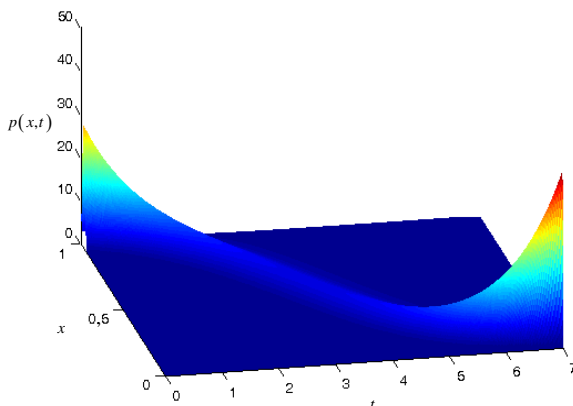


Рис. 1. График решения $p(x, t)$ уравнения (13) с начальным условием (21)

Как видно из рис. 1, положение максимума плотности распределения вероятностей (моды) состояния системы с функцией распределения порогов $F(x) = x^2$ со временем стремится к нулю. Как показывают рис. 2 и рис. 3, эта динамика носит несимметричный характер: вероятность того, что координата системы находится между модой (максимумом плотности распределения) и нулём, меньше, чем вероятность того, что система находится между модой и единицей.

Наблюдаемая динамика качественно соответствует выражениям (15) и (19). Так как правая часть (15) отрицательна, система движется в направлении уменьшения состояния системы. При этом максимальная скорость движения достигается в точке $x = 0,5$. Правая часть выражения (19) положительна, пока система с высокой вероятностью находится в области $x > 0,5$ и, следовательно, энтропия возрастает и плотность вероятности «размывается». С течением времени вероятность нахождения системы в области $x < 0,5$ возрастает, и правая часть (19) становится отрицательной. Это приводит к «фокусировке» плотности вероятности с течением времени при движении системы к нулю.

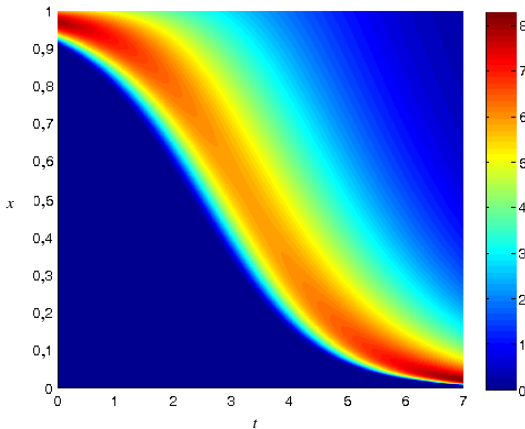


Рис. 2. График функции $\log(100p(x, t) + 1)$, где $p(x, t)$ - решение уравнения (13) с начальным условием (21)

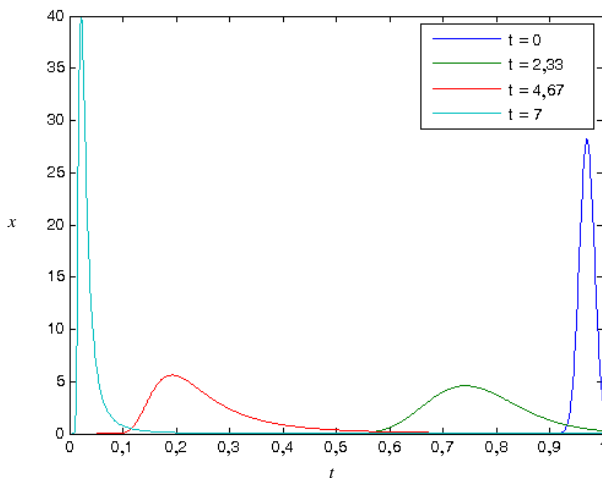


Рис. 3. Срезы решения $p(x, t)$ уравнения (13) с начальным условием (21) в различные моменты времени

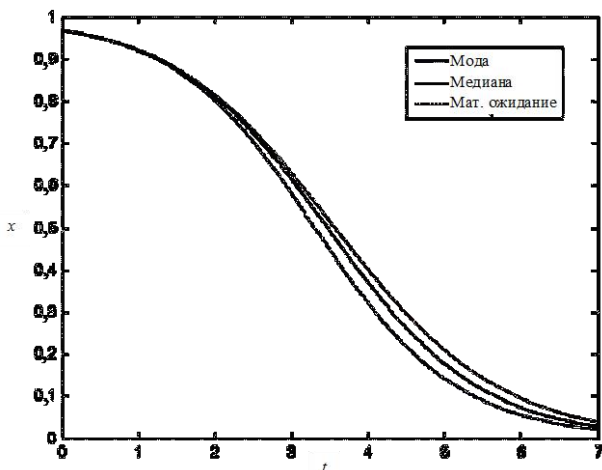


Рис. 4. График зависимости моды, медианы и математического ожидания решения $p(x, t)$ уравнения (13) с начальным условием (21)

Выражение (15) для системы с $F(x) = x^2$ принимает вид

$$(22) \frac{d}{dt}(Ex(t)) = Ex^2(t) - Ex(t) = Dx(t) + (Ex(t))^2 - Ex(t),$$

где $Dx(t)$ – дисперсия состояния системы. •

Таким образом, описанная выше модель принятия агентами решений в пределе при стремлении числа агентов к бесконечности описывается уравнением переноса (13), и для исследования системы применимы методы математической физики. Приведём некоторые примеры физических аналогов – механических систем, описываемых этим уравнением.

3. Анализ устойчивости и структура положений равновесия

Исследуем уравнение (15). Положением равновесия (15) являются все точки отрезка $[0, 1]$ удовлетворяющие

$$(23) F(x) - x = 0.$$

Согласно [5], положение равновесия x^* *асимптотически устойчиво* (по Ляпунову), если

1. Для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что из неравенства $|x(0) - x^*| < \delta$ следует неравенство $|x(t) - x^*| < \varepsilon$ при $0 \leq t \leq +\infty$.

2. Существует такая открытая окрестность U точки x^* , что все решения $x(t)$ с начальным условием $x(0) \in U$ обладают свойством $\lim x(t) = x^*$.

При этом U называют *областью притяжения* положения равновесия x^* .

Положение равновесия (15) x^* *неустойчиво* (по Ляпунову), если для некоторого $\varepsilon > 0$ и любого $\delta > 0$ существует $t_1 = t_1(\delta) > 0$ такое, что $|x(0) - x^*| < \delta$ и $|x(t_1) - x^*| \geq \varepsilon$.

В силу гладкости $F(\cdot)$, по теореме об устойчивости по квазилинейному приближению и теореме о неустойчивости [5, с. 261–262], выполнено

Утверждение 5. Пусть x^* – положение равновесия системы. Тогда при $F'(x^*) < 1$ положение равновесия x^* асимптотически устойчиво. При $F'(x^*) > 1$ положение равновесия x^* неустойчиво.

4. Аналогии с механическими системами

Покажем связь уравнения (15) с уравнениями движения частицы в потенциале

$$(24) V(x) = -\frac{m}{2}(F(x) - x)^2.$$

Запишем гамильтониан системы с потенциалом (24):

$$(25) H(x, p) = \frac{p^2}{2m} - \frac{m}{2}(F(x) - x)^2.$$

Уравнения Гамильтона имеют вид

$$(26) \begin{cases} \dot{x} = \frac{p}{m}, \\ \dot{p} = m(F(x) - x)(F'(x) - 1). \end{cases}$$

Дифференцируя первое уравнение системы (26) и подставляя в него второе, получаем

$$(27) \ddot{x} = (F(x) - x)(F'(x) - 1).$$

Траектории (27) удовлетворяют (15). Действительно, дифференцируя выражение $\dot{x} = F(x) - x$, получаем

$$(28) \ddot{x} = (F'(x) - 1)\dot{x},$$

что после подстановки $\dot{x} = F(x) - x$ совпадает с (27).

Важно отметить, что уравнения (15) и (27) не являются идентичными. Эти дифференциальные уравнения имеют разный порядок, и для их решения необходимо задание разного количества начальных условий. Между ними есть лишь некоторая связь, смысл которой состоит в следующем:

Утверждение 7. Если уравнение (27) решается с начальными условиями

$$(29) x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = F(x_0) - x_0,$$

то полученная кривая будет совпадать с кривой, являющейся решением уравнения (15) с начальным условием $x(0) = x_0$.

Действительно, связь (29) между начальными условиями задаёт некоторую кривую в фазовом пространстве. Эта кривая состоит из точек, в которых полная энергия системы равна нулю: согласно (29) и (25),

$$(30) H(x(0), m\dot{x}(0)) = \frac{m}{2}(F(x_0) - x_0)^2 - \frac{m}{2}(F(x_0) - x_0)^2 = 0.$$

Но полная энергия системы сохраняется на траекториях системы, а значит,

$$(31) H(x(t), p(t)) = \frac{p(t)^2}{2m} - \frac{m}{2}(F(x(t)) - x(t))^2 = 0.$$

Откуда следует

$$(32) m\dot{x} = \pm |F(x) - x|.$$

Сравнивая (32) с (27) и (28), получаем (15).

Пример 2. Пусть в некоторой окрестности точки $x = 1/2$ функция распределения имеет вид $F(x) = 1/4 + x/2$. Уравнение (15) принимает вид $\dot{x} = 1/4 - x/2$. Решая это $1/4$ уравнение при начальном условии $x(0) = x_0$, получаем траекторию

$$(33) x(t) = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - x_0\right) e^{-\frac{1}{2}t}.$$

Уравнение (27) принимает вид $\ddot{x} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}x\right)$. Решая это уравнение при начальном условии $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = v_0$, получаем траекторию

$$(34) x(t) = \frac{1}{2} + \left(v_0 + \frac{x_0}{2} - \frac{1}{4}\right) e^{\frac{1}{2}t} - \left(v_0 - \frac{x_0}{2} + \frac{1}{4}\right) e^{-\frac{1}{2}t}.$$

Сравнивая (33) с (34), можно заметить, что эти кривые совпадают при

$$v_0 = \frac{1}{4} - \frac{x_0}{2} = F(x_0) - x_0. \bullet$$

Таким образом, траектории (15) совпадают с траекториями движения свободной частицы в потенциале (24) с начальными условиями, подчиняющимися (29). Этот факт может быть использован при построении соответствующей квантовой модели.

Пример 3. Пусть функция распределения имеет вид $F(x) = x^2(3 - 2x)$. Система имеет одно неустойчивое положение равновесия (см. рис. б) в точке $x = 1/2$ и два неустойчивых положения равновесия: в точке $x = 0$ и в точке $x = 1$.

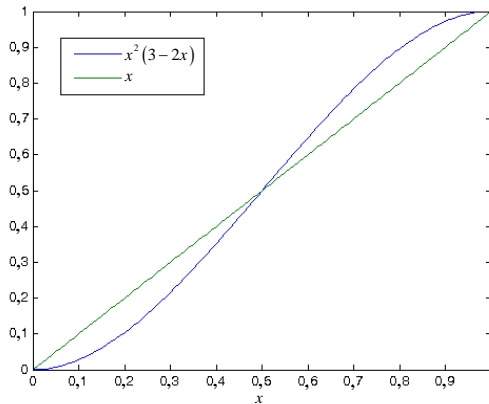


Рис. 5. График функции распределения $F(x) = x^2(3 - 2x)$

Потенциал системы, согласно (24), имеет вид

$$\begin{aligned}
 (35) \quad V(x) &= -\frac{m}{2}(x^2(3-2x) - x)^2 = -\frac{m}{2}x^2(-2x^2 + 3x - 1)^2 = \\
 &= -\frac{m}{2}x^2(x-1)^2(2x-1)^2.
 \end{aligned}$$

На рис. 6 изображён график потенциальной энергии (35) при $m = 2$.

Гамильтониан рассматриваемой системы имеет вид

$$(36) \quad H(x, p) = \frac{p^2}{2m} - \frac{m}{2}(F(x) - x)^2,$$

что в точности совпадает с гамильтонианом тела, движущегося без потерь энергии в поле тяготения по неровному ландшафту, форма которого имеет вид $-x^2(x-1)^2(2x-1)^2/2$ (считая ускорение свободного падения равным 1).

Рассмотрим движение из начальной точки $x_0 = 1/4$. Согласно (29), начальное условие на скорость имеет вид

$$(37) \quad v_0 = F(x_0) - x_0 = \frac{1}{16} \left(3 - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{4} = -\frac{3}{32}.$$

Начальная скорость отрицательна, и система движется в направлении точки $x = 0$. Согласно (27), скорость остаётся отрицательной, но стремится к нулю, а точка $x = 0$ никогда не достигается. Таким образом, движение системы идентично движению

тела по неровному ландшафту, а связь (29) между начальными условиями означает задание такой начальной скорости тела, что оно бесконечно движется в направлении положения равновесия 0 или 1, асимптотически приближаясь к нему.

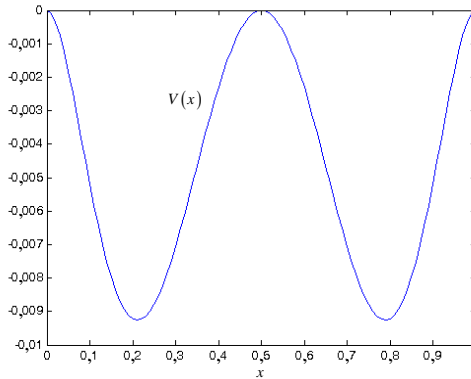


Рис. 6. График потенциала (35) системы с функцией распределения $F(x) = x^2(3 - 2x)$ при $t = 2$

На рис. 7 изображены траектории рассматриваемой системы на фазовой плоскости. Они, так же как и ограничения на начальные условия (29), задаются кривой $F(x) - x$.

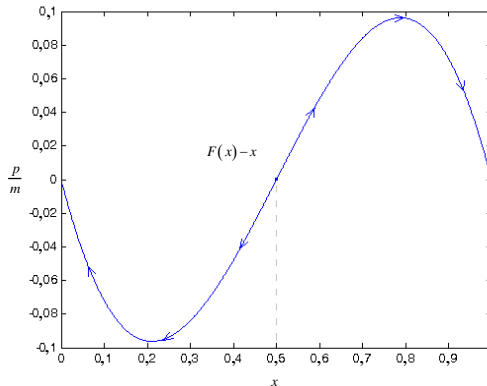


Рис. 7 Траектории системы на фазовой плоскости

5. Заключение

Исследована предложенная в [6] модель конформного коллективного поведения, мотивированная моделью М. Грановеттера [7]. Рассмотрено вероятностное обоснование модели на микроуровне. Изучено поведение системы при стремлении числа агентов к бесконечности, показано, что оно описывается уравнением переноса. Показано, что траектории системы совпадают с траекториями некоторой изолированной гамильтоновой системы.

Перспективным направлением дальнейших исследований является обобщение описанных моделей классической механики на случай квантовой неопределённости в поведении агентов. Вкратце предлагаемый подход может быть описан следующим образом. Уравнение Шрёдингера движения квантовой частицы в потенциале $V(x)$ имеет вид

$$(38) \quad i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = - \left(\frac{\hbar^2}{2m} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi + V\psi .$$

Приведём известный способ записи уравнения Шрёдингера через амплитуду и фазу. Он состоит в следующем. Если выразить волновую функцию через амплитуду $R(\cdot)$ и фазу $S(\cdot)$:

$$\psi(x, t) = R(x, t) \exp\left(\frac{i}{\hbar} S(x, t)\right)$$

(где $R(x, t) > 0$) и подставить в уравнение (38), получим уравнение

$$(39) \quad i\hbar \frac{\partial R}{\partial t} - R \frac{\partial S}{\partial t} = - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} R - i \frac{\hbar}{m} \frac{\partial}{\partial x} R \frac{\partial}{\partial x} S - \frac{i\hbar}{2m} R \frac{\partial^2}{\partial x^2} S + \\ + \frac{1}{2m} \left(R \frac{\partial}{\partial x} S \right)^2 + VR.$$

Переписывая его как два уравнения – для комплексной и действительной части, получаем систему

$$(40) \begin{cases} \frac{\partial R}{\partial t} + \frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial x} R \frac{\partial}{\partial x} S + \frac{1}{2m} R \frac{\partial^2}{\partial x^2} S = 0, \\ \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} R - R \frac{\partial S}{\partial t} - \frac{1}{2m} R \left(\frac{\partial}{\partial x} S \right)^2 - VR = 0. \end{cases}$$

Вводя замену переменных $P(x, t) = R^2(x, t)$, получаем систему

$$(41) \begin{cases} \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(P \frac{\partial S}{\partial x} \right) = 0, \\ \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\left(\frac{\partial}{\partial x} S \right)^2}{2m} + V(x) - \frac{\hbar^2}{4m} \left[\frac{\frac{\partial^2}{\partial x^2} P}{P} - \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{\partial}{\partial x} P \right)^2}{P^2} \right] = 0. \end{cases}$$

Система двух действительных уравнений (41) тождественна одному комплексному уравнению Шрёдингера (38). Первое уравнение (41) – уравнение переноса. Второе – уравнение Гамильтона–Якоби с потенциалом

$$(42) V(x) - \frac{\hbar^2}{4m} \left[\frac{\frac{\partial}{\partial x} P}{P} - \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{\partial}{\partial x} P \right)^2}{P^2} \right] \frac{1}{2},$$

в котором второе слагаемое носит название *квантового потенциала*. Если теперь подставить в выражение для потенциала, то в классическом приближении ($\hbar = 0$) второе уравнение запишется как

$$(43) \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\left(\frac{\partial}{\partial x} S \right)^2}{2m} - \frac{m}{2} (F(x) - x)^2 = 0.$$

Одним из решений этого уравнения является

$$(44) \frac{\partial}{\partial x} S = m(F(x) - x).$$

Утверждение 8. Пусть выполнено (44). Тогда первое уравнение системы (41) имеет вид уравнения переноса (13).

Классическая модель Грановеттера с непрерывным временем, описанная в этой работе при помощи уравнения переноса (13), имеет следующий физический смысл: плотность вероятности положения системы переносится потоком $m(F(x) - x)$. Этот поток не зависит от плотности вероятности положения системы. В терминах исходных параметров модели это означает, что пороги агентов не зависят от их действий. Эти пороги и определяют динамику состояния системы. В действительности же наблюдается ситуация, когда состояние системы (среднее действие агентов) влияет некоторым образом на пороги агентов. Таким образом, возникает сложная система: пороги агентов влияют на состояние системы, а состояние системы влияет на пороги агентов. При этом если зависимость порогов агентов от плотности распределения состояния системы имеет вид второго уравнения (41), то система будет описываться уравнением Шрёдингера (38).

Литература

1. БРЕЕР В.В. *Модели конформного поведения. Ч.1. От философии к математическим моделям* // Проблемы управления. – 2014. – №1. – С. 2–13.
2. БРЕЕР В.В. *Модели конформного поведения. Ч.2. Математические модели* // Проблемы управления. – 2014. – №2. – С. 2–17.
3. БРЕЕР В.В., РОГАТКИН А.Д. *Вероятностная модель порогового поведения в многоагентных системах* // Автоматика и телемеханика. – 2015. – №8. – С. 56–77.
4. БРЕЕР В.В. *Модели толерантного порогового поведения (от Т. Шеллинга – к М. Грановеттеру)*. // Проблемы управления (в печати)
5. ДЕМИДОВИЧ Б.П. *Лекции по математической теории устойчивости*. – М.: Наука, 1967. – 467 с.
6. АКХМЕТZHANOV A.R., WORDEN L., DUSHOFF J. *Effects of Mixing in Threshold Models of Social Behavior* // Phys. Rev. E. – 2013. – Т. 88. – №. 1. – P. 012816.

7. GRANOVETTER M. *Threshold Models of Collective Behavior* // *American Journal of Sociology*. – 1978. – Vol. 83. – P. 1420–1443.

6. Приложение

Доказательство утверждения 2. Пусть выполнено (10). Переноса $q(m/n, t)$ в левую часть, получаем

$$(45) \quad q\left(\frac{m}{n}, t + \frac{1}{n}\right) - q\left(\frac{m}{n}, t\right) = P\left(\uparrow \mid \frac{m-1}{n}\right) q\left(\frac{m-1}{n}, t\right) + \\ + P\left(\downarrow \mid \frac{m+1}{n}\right) q\left(\frac{m+1}{n}, t\right) - \left[P\left(\uparrow \mid \frac{m}{n}\right) + P\left(\downarrow \mid \frac{m}{n}\right) \right] q\left(\frac{m}{n}, t\right).$$

Подставляя в вероятности увеличения и уменьшения состояния системы (5) и (7), имеем:

$$(46) \quad p\left(\frac{m}{n}, t + \frac{1}{n}\right) - p\left(\frac{m}{n}, t\right) = \left(1 - \frac{m-1}{n}\right) F\left(\frac{m-1}{n}\right) p\left(\frac{m-1}{n}, t\right) + \\ + \left(\frac{m+1}{n}\right) \left(1 - F\left(\frac{m+1}{n}\right)\right) p\left(\frac{m+1}{n}, t\right) - \\ - \left[\left(1 - \frac{m}{n}\right) F\left(\frac{m}{n}\right) + \frac{m}{n} \left(1 - F\left(\frac{m}{n}\right)\right) \right] p\left(\frac{m}{n}, t\right).$$

Перегруппировав слагаемые в правой части последнего выражения, получим допредельные разности для производных по x и t :

$$(47) \quad p\left(\frac{m}{n}, t + \frac{1}{n}\right) - p\left(\frac{m}{n}, t\right) = \\ = \left(1 - \frac{m}{n}\right) \left(F\left(\frac{m-1}{n}\right) p\left(\frac{m-1}{n}, t\right) - F\left(\frac{m}{n}\right) p\left(\frac{m}{n}, t\right) \right) + \\ + \frac{m}{n} \left(\left(1 - F\left(\frac{m+1}{n}\right)\right) p\left(\frac{m+1}{n}, t\right) - \left(1 - F\left(\frac{m}{n}\right)\right) p\left(\frac{m}{n}, t\right) \right) + \\ + \frac{1}{n} F\left(\frac{m-1}{n}\right) p\left(\frac{m-1}{n}, t\right) + \frac{1}{n} \left(1 - F\left(\frac{m+1}{n}\right)\right) p\left(\frac{m+1}{n}, t\right).$$

Разделив обе части на $1/n$ и переходя к пределу при $m/n \rightarrow x$, $n \rightarrow \infty$, получаем

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} p(x, t) &= -(1-x) \frac{\partial}{\partial x} (F(x) p(x, t)) + \\
 &+ x \frac{\partial}{\partial x} ((1-F(x)) p(x, t)) + F(x) p(x, t) + (1-F(x)) p(x, t) = \\
 (48) \quad &= -\frac{\partial}{\partial x} (F(x) p(x, t)) + x \frac{\partial}{\partial x} p(x, t) + p(x, t) = \\
 &= -\frac{\partial}{\partial x} (F(x) p(x, t)) + \frac{\partial}{\partial x} (xp(x, t)) = \\
 &= -\frac{\partial}{\partial x} ([F(x) - x] p(x, t)),
 \end{aligned}$$

т.е. $\frac{\partial}{\partial t} p(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} ([F(x) - x] p(x, t)) = 0$. •

Доказательство утверждения 3. По определению математического ожидания

$$(49) \quad \frac{d}{dt} Ex(t) = \frac{d}{dt} \left(\int_0^1 xp(x, t) dx \right).$$

В силу гладкости $p(x, t)$, по правилу Лейбница

$$(50) \quad \frac{d}{dt} \left(\int_0^1 xp(x, t) dx \right) = \int_0^1 x \frac{\partial}{\partial t} p(x, t) dx.$$

Выражая $\partial p / \partial t$ из (13) и интегрируя по частям, получаем

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 x \frac{\partial}{\partial t} p(x, t) dx &= -\int_0^1 x \frac{\partial}{\partial x} [(F(x) - x) p(x, t)] dx = \\
 (51) \quad &= x(F(x) - x) p(x, t) \Big|_0^1 + \int_0^1 (F(x) - x) p(x, t) dx = \bullet \\
 &= EF(x(t)) - Ex(t).
 \end{aligned}$$

Доказательство утверждения 4. По определению энтропии,

$$(52) \quad \frac{d}{dt} I(t) = -\frac{d}{dt} \int_0^1 p(x, t) \ln p(x, t) dx.$$

В силу гладкости $p(x, t)$,

$$\begin{aligned}
 & -\frac{d}{dt} \int_0^1 p(x,t) \ln p(x,t) dx = \\
 (53) & = -\int_0^1 \left(\frac{\partial p}{\partial t}(x,t) \ln p(x,t) + \frac{\partial p}{\partial t}(x,t) \right) dx = \\
 & = -\int_0^1 \frac{\partial p}{\partial t}(x,t) (\ln p(x,t) + 1) dx
 \end{aligned}$$

Выражая $\partial p/\partial t$ из (13) и интегрируя по частям, учитывая $F(0) = 0$, $F(1) = 1$, получаем

$$\begin{aligned}
 & -\int_0^1 \frac{\partial p}{\partial t}(x,t) (\ln p(x,t) + 1) dx = \\
 & = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} [(F(x) - x) p(x,t)] (\ln p(x,t) + 1) dx = \\
 & = [(F(x) - x) p(x,t)] (\ln p(x,t) + 1) \Big|_0^1 - \\
 (54) & - \int_0^1 (F(x) - x) \frac{\partial p}{\partial x}(x,t) dx = \\
 & = 0 - (F(x) - x) p(x,t) \Big|_0^1 + \int_0^1 (F'(x) - 1) p(x,t) dx = \\
 & = \int_0^1 (F'(x) - 1) p(x,t) dx.
 \end{aligned}$$

CONTINUOUS GRANOVETTER MODEL

Andrei Rogatkin, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Cand.Sc., PhD student (andreyrogatkin@gmail.com).

Abstract: In this paper the model of collective conformal behavior proposed in [6] and originally motivated by M.Granovetter [7] is investigated. Probabilistic foundations of the model are considered at micro level. The model properties are studied in the case when the number of agents tends to infinity and it is shown that the transport equation holds. It is proved that the system trajectories coincide with trajectories of an isolated Hamiltonian system.

Keywords: Granovetter model, threshold behavior, conformism, transfer equation, Hamiltonian system, Schrodinger equation.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии Н.И. Базенковым.

Поступила в редакцию 19.08.2015.

Опубликована 31.03.2016.