

**Институт проблем управления  
им. В.А. Трапезникова РАН**

# **УПРАВЛЕНИЕ БОЛЬШИМИ СИСТЕМАМИ**

***Выпуск 60***  
***Март 2016***

**СБОРНИК  
ТРУДОВ**

ISSN 1819-2467

Регистрационный номер Эл. №ФС77-44158 от 09 марта 2011 г.

**Москва – 2016**

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
*Институт проблем управления*  
*им. В.А. Трапезникова*

**УПРАВЛЕНИЕ  
БОЛЬШИМИ  
СИСТЕМАМИ**

**СБОРНИК ТРУДОВ**

*Выпуск 60*

**Москва – 2016**

### КООРДИНАЦИОННЫЙ СОВЕТ

Академики РАН: Васильев С.Н., Емельянов С.В., Куржанский А.Б., Федосов Е.А., Черноушко Ф.Л.; члены-корреспонденты РАН: Желтов С.Ю., Каляев И.А., Пархоменко П.П., Попков Ю.С.; д-ра техн. наук: Дорофеев А.А., Кузнецов О.П., Кульба В.В., Лотоцкий В.А., Павлов Б.В., Поляк Б.Т., Рутковский В.Ю.

### РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

**Главный редактор:** член-корр. РАН Новиков Д.А. **Зам. главного редактора:** д-р физ.-мат. наук Губко М.В.; **Отв. секретарь:** канд. техн. наук Базенков Н.И.; **Редактор:** канд. техн. наук Квинто Я.И. **Техн. редактор:** канд. техн. наук Куливец С.Г.

Д-ра техн. наук: проф. Алескеров Ф.Т. (ГУ ВШЭ), проф. Алчинов А.И. (ИПУ РАН), проф. Андриевский Б.Р. (ИПМ РАН), проф. Афанасьев В.Н. (МИЭМ), проф. Бахтадзе Н.Н. (ИПУ РАН), проф. Бурков В.Н. (ИПУ РАН), проф. Вишневский В.М. (ИПУ РАН), Галаев А.А. (ИПУ РАН), д-р физ.-мат. наук проф. Ерешко Ф.И. (ВЦ РАН), д-ра техн. наук Зоркальцев В.И. (ИСЭМ СО РАН), проф. Калашников А.О. (ИПУ РАН), проф. Калянов Г.Н. (ГУ ВШЭ), проф. Каравай М.Ф. (ИПУ РАН), д-р экон. наук, проф. Ключков В.В. (ИПУ РАН), д-ра техн. наук, Коргин Н.А. (ИПУ РАН), проф. Курдюков А.П. (ИПУ РАН), д-ра физ.-мат. наук, проф. Кушнер А.Г., проф. Лазарев А.А. (МФТИ), д-ра техн. наук: проф. Лебедев В.Г. (ИПУ РАН), проф. Мандель А.С. (ИПУ РАН), д-р биол. наук проф. Михальский А.И., д-р физ.-мат. наук, проф. Непейвода Н.Н. (ИПС РАН), д-р экон. наук, проф. Нижегородцев Р.М. (ИПУ РАН), д-ра техн. наук: проф. Орлов А.И. (МГТУ), д-ра физ.-мат. наук: проф. Рапопорт Л.Б. (ИПУ РАН), проф. Райгородский А.М. (МГУ), проф. Савватеев А.В. (РЭШ), д-ра техн. наук: проф. Самуйлов К.Е. (РУДН), проф. Сидельников Ю.В. (МАИ), Совлуков А.С. (ИПУ РАН) д-ра физ.-мат. наук: проф. Соловьев С.Ю. (МГУ), проф. Угольницкий Г.А. (ЮФУ), проф. Уткин В.А. (ИПУ РАН), проф. Хоботов Е.Н. (МГТУ), д-ра физ.-мат. наук: доцент Чеботарев П.Ю. (ИПУ РАН), проф. Чхартишвили А.Г. (ИПУ РАН), проф. Щербаков П.С. (ИПУ РАН).

### РЕГИОНАЛЬНЫЕ РЕДАКЦИОННЫЕ СОВЕТЫ

**Арзамас** – д-р физ.-мат. наук проф. Пакшин П.В. **Волгоград** – д-ра физ.-мат. наук: проф. Воронин А.А., проф. Лосев А.Г. (ВолГУ); **Воронеж** – д-р техн. наук, проф. Баркалов С.А., д-р физ.-мат. наук, проф. Головинский П.А. (ВГАСУ), д-р техн. наук, проф. Подвальный С.Л. (ВГТУ); **Иркутск** – академик РАН Бычков И.В., д-р физ.-мат. наук, проф. Лакеев А.В. (ИДСТУ СО РАН); **Казань** – д-р физ.-мат. наук, проф. Маликов А.И., д-р техн. наук, проф. Сиразетдинов Р.Т. (КГТУ-КАИ); **Липецк** – д-ра техн. наук: проф. Погодаев А.К., Сараев П.В. (ЛГТУ); **Самара** – д-ра экон. наук: проф. Богатырев В.Д., проф. Гераськин М.И., д-р техн. наук, проф. Засканов В.Г. (СГАУ); **Петрозаводск** – д-р физ.-мат. наук, проф. Мазалов В.В., д-р техн. наук, доц. Печников А.А. (ИПМИ КарНЦ РАН); **Санкт-Петербург** – д-р физ.-мат. наук: проф. Петросян Л.А. (СПбГУ), д-р техн. наук проф. Фуртат И.Б. (ИПМ РАН); **Старый Оскол** – д-р техн. наук, проф. Еременко Ю.И. (СТИ).

**Адрес редакции:** 117997, г. Москва, ул. Профсоюзная, д. 65.

**Адрес в Интернет:** [ubs.mtas.ru](http://ubs.mtas.ru).

## СОДЕРЖАНИЕ

### *Математическая теория управления*

---

**Батурин В. А., Черемных С. В.**

*Методы второго порядка для задач оптимального управления.....* 6

### *Анализ и синтез систем управления*

---

**Пантелеев А. В., Пановский В. Н.**

*Разработка интервальных метаэвристических методов минимизации для поиска оптимального программного управления.....* 41

### *Информационные технологии в управлении*

---

**Зеленков Ю. А.**

*Количественный анализ эффективности и риска внедрения информационных систем.....* 63

### *Сетевые модели в управлении*

---

**Жилякова Л. Ю.**

*Распределение ресурса между аттракторами в регулярных несимметричных ресурсных сетях.....* 82

### *Управление в социально-экономических системах*

---

**Алгазин Г. И., Алгазина Ю. Г.**

*Истинное и ложное информационное равновесие в модели торговой системы.....* 119

**Рогаткин А. Д.**

*Модель Грановеттера с непрерывным временем.....* 139

**Управление в медико-биологических  
и экологических системах**

---

**Ратнер С. В., Ратнер П. Д.**

*Формирование стратегии экологического менеджмента электрогенерирующих компаний на основе методологии анализа среды функционирования.....* 161

**Управление техническими системами  
и технологическими процессами**

---

**Романенко В. А.**

*Оптимальное комплексирование ресурсов производственных систем в условиях неопределенности .....* 188



УДК 517.977  
ББК 22.193

## МЕТОДЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА ДЛЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

**Батурин В. А.<sup>1</sup>**

(ФГБУН Институт динамики систем  
и теории управления СО РАН, Иркутск)

**Черемных С. В.<sup>2</sup>**

(Евразийский лингвистический институт в г. Иркутске  
(филиал ФГБОУ ВПО «Московский государственный  
лингвистический университет»), Иркутск)

*Рассматриваются алгоритмы последовательных улучшений, эффективность которых существенно зависит от выбора значений параметров, задаваемых в алгоритмах. Обсуждается задача управления этими параметрами алгоритма. Получены модифицированные алгоритмы, в которых на каждой итерации осуществляется автоматический выбор значений параметров. Исходные (базовые) и полученные модифицированные алгоритмы применены для решения задачи оптимального управления эколого-экономической системой.*

Ключевые слова: задача оптимального управления, алгоритм улучшения, сильное улучшение, слабое улучшение, параметры алгоритма.

### **1. Введение**

В настоящее время трудно переоценить значение математического моделирования. Многие процессы, имеющие место в природе, технике, обществе, описываются (моделируются)

---

<sup>1</sup> Владимир Александрович Батурин, доктор физико-математических наук, профессор (rozen@icc.ru).

<sup>2</sup> Светлана Викторовна Черемных, кандидат физико-математических наук (sv157@rambler.ru).

различными уравнениями или системами уравнений: алгебраическими, разностными, дифференциальными. Человек всегда стремился вмешиваться в эти процессы с целью управления ими, причем как можно более лучшим образом. Поэтому часто математической моделью какой-либо хозяйственной задачи является задача оптимального управления, методам решения которой и посвящена данная статья. В работе рассматриваются алгоритмы последовательных улучшений, предназначенные для решения задач оптимального управления со свободным правым концом, обсуждается проблема выбора значений параметров алгоритма и предлагаются новые алгоритмы.

## 2. Задача оптимального управления и алгоритмы последовательных улучшений

### Постановка задачи.

Пусть задана управляемая система дифференциальных уравнений на отрезке  $[t_0, t_1]$ :

$$(1) \quad \frac{dx}{dt} = f(t, x, u), \quad x(t_0) = x_0,$$

где состояние  $x(t) \in R^n$  – непрерывная и кусочно-дифференцируемая вектор-функция, а управление  $u(t) \in U \subset R^m$  – кусочно-непрерывная вектор-функция.

Множество пар  $(x(t), u(t))$ , удовлетворяющих перечисленным условиям, называется множеством допустимых  $D$ . Предполагается, что  $D \neq \emptyset$ .

На множестве  $D$  задан функционал

$$I(x, u) = F(x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} f^0(t, x, u) dt.$$

Требуется минимизировать функционал  $I$  на множестве  $D$ , т.е. найти такую последовательность  $\{(x_s(t), u_s(t))\} \subset D$ , чтобы выполнялось  $I(x_s, u_s) \rightarrow \inf_D I$  при  $s \rightarrow \infty$ .

Поскольку в дальнейшем пойдет речь об алгоритмах второго порядка, то на функции  $f, f^0, F$  накладывается условие, что они дважды дифференцируемы.



Поиск состояния  $x(t)$  и управления  $u(t)$ , минимизирующих заданный функционал, осуществляется с помощью итерационной процедуры, в которой на каждом шаге решается задача улучшения: заданы начальные значения  $x^I(t)$  и  $u^I(t)$ , требуется найти новые состояние  $x^{II}(t)$  и управление  $u^{II}(t)$  такие, что выполняется  $I(x^{II}, u^{II}) < I(x^I, u^I)$ .

Для поставленной задачи разработана группа приближенных методов, основанных на принципе расширения. В работах [1, 3–8, 10, 14, 15, 16] описаны методы сильного и слабого улучшения для данной задачи и получены соответствующие алгоритмы. При выводе этих алгоритмов применен метод локализации, например, в [1, 10] конструируется положительно определенный функционал  $J(x^I, u^I, x, u)$ , имеющий смысл штрафа за отклонение от опорной траектории, а затем задача улучшения исходного функционала сводится к задаче улучшения вспомогательного функционала

$$I_\alpha(x, u) = \alpha I(x, u) + (1 - \alpha)J(x^I, u^I, x, u),$$

где  $\alpha \in [0, 1]$  – скалярный параметр. В этих работах функционал  $J(x^I, u^I, x, u)$  задается в следующем виде:

– в методе сильного улучшения:

$$(2) \quad J(x^I, u^I, x, u) = \frac{1}{2} \left( \int_{t_0}^{t_1} \Delta x' E \Delta x dt + [\Delta x(t_1)]' E \Delta x(t_1) \right),$$

– в методе слабого улучшения:

$$(3) \quad J(x^I, u^I, x, u) = \frac{1}{2} \left( \int_{t_0}^{t_1} \Delta u' E \Delta u dt + [\Delta x(t_1)]' E \Delta x(t_1) \right),$$

где  $E$  – единичная матрица соответствующей размерности ( $m \times m$  или  $n \times n$ ),  $\Delta x = x - x^I(t)$ ,  $\Delta u = u - u^I(t)$ . Введенный параметр  $\alpha$  служит средством регулирования близости соседних процессов ( $x^I, u^I$ ) и ( $x^{II}, u^{II}$ ), и от правильного выбора значения этого параметра зависит успешность итерации. В реальных прикладных задачах нередко степень влияния разных компонент вектора управления на весь процесс существенно отличается, кроме того, могут на порядки отличаться и масштабы различных компонент управления и состояния. Поэтому имеет смысл в формулах (2) и (3) заменить единичные матрицы на диагональ-

ные, элементы которых выполняют роль весовых коэффициентов. Тогда функционал  $J(x^I, u^I, x, u)$  примет вид

– в методе сильного улучшения:

$$(4) \quad J_{\beta, \gamma}(x^I, u^I, x, u) = \frac{1}{2} \left( \int_{t_0}^{t_1} \Delta x' \beta \Delta x dt + [\Delta x(t_1)]' \gamma \Delta x(t_1) \right),$$

– в методе слабого улучшения:

$$(5) \quad J_{\beta, \gamma}(x^I, u^I, x, u) = \frac{1}{2} \left( \int_{t_0}^{t_1} \Delta u' \beta \Delta u dt + [\Delta x(t_1)]' \gamma \Delta x(t_1) \right),$$

где  $\beta$  – диагональная матрица размерности  $n \times n$  (или  $m \times m$ ) с положительными элементами,  $\gamma$  – диагональная матрица размерности  $n \times n$  с неотрицательными элементами.

Алгоритмы сильного и слабого улучшения второго порядка, описанные в работе [1], с учетом того, что функционал  $J(x^I, u^I, x, u)$  задается формулой (4) или (5), имеют вид:

Алгоритм сильного улучшения.

1. Задаем управление  $u^I(t)$ , из системы (1) находим  $x^I(t)$ .
2. Задаем значения параметров:  $\alpha = \alpha^I, \beta = \beta^I, \gamma = \gamma^I$ .
3. При этих значениях параметров из системы

$$\frac{d\psi}{dt} = -H_x^\alpha - \sigma(H_\psi^\alpha - H_\psi^\alpha),$$

$$(6) \quad \frac{d\sigma}{dt} = -H_{xx}^\alpha + (1 - \alpha)\beta - \sigma H_{\psi x}^\alpha - H_{x\psi}^\alpha \sigma - \sigma H_{\psi\psi}^\alpha \sigma,$$

$$\psi(t_1) = -\alpha F_x(x^I(t_1)),$$

$$\sigma(t_1) = -\alpha F_{xx}(x^I(t_1)) - (1 - \alpha)\gamma$$

вычисляем  $\psi(t)$  и  $\sigma(t)$ .

Здесь  $\psi(t)$  –  $n$ -вектор,  $\sigma(t)$  –  $n \times n$ -симметрическая матрица,

$$H^\alpha(t, x, p, u) = p' f(t, x, u) - \alpha f^0(t, x, u),$$

$$H^\alpha(t, x, p) = \max_{u \in U} H^\alpha(t, x, p, u),$$

$p$  –  $n$ -вектор, все производные функции  $H^\alpha$  вычисляются в точке  $(t, x^I(t), \psi(t))$ , производная  $H^\alpha$  – в точке  $(t, x^I(t), \psi(t), u^I(t))$ .

4. Из системы

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, \tilde{u}(t, x, p)), \quad x(t_0) = x_0,$$

где

$$\tilde{u}(t, x, p) = \arg \max_{u \in U} H^\alpha(t, x, p, u),$$

$$p = \psi(t) + \sigma(t)\Delta x, \quad \Delta x = x - x^I(t),$$

вычисляем  $x^{II}(t)$ .

5. Находим

$$u^{II}(t) = \tilde{u}(t, x^{II}(t), \psi(t) + \sigma(t)(x^{II}(t) - x^I(t))).$$

6. Если  $I(x^{II}, u^{II}) \geq I(x^I, u^I)$ , то изменяем значения параметров  $\alpha, \beta, \gamma$  и повторяем процесс с пункта 3.

Алгоритм слабого улучшения.

1. Задаем управление  $u^I(t)$ , из системы (1) находим  $x^I(t)$ .

2. Задаем значения параметров:  $\alpha = \alpha^I, \beta = \beta^I, \gamma = \gamma^I$ .

3. При этих значениях параметров из системы

$$\frac{d\psi}{dt} = -H_x^\alpha + (H_{xu}^\alpha + \sigma H_{\psi u}^\alpha)(H_{uu}^\alpha - (1 - \alpha)\beta)^{-1} H_u^\alpha,$$

$$(7) \quad \frac{d\sigma}{dt} = -H_{xx}^\alpha - \sigma H_{\psi x}^\alpha - H_{x\psi}^\alpha \sigma + (H_{xu}^\alpha + \sigma H_{\psi u}^\alpha) \times \\ \times (H_{uu}^\alpha - (1 - \alpha)\beta)^{-1} (H_{ux}^\alpha + H_{u\psi}^\alpha \sigma),$$

$$\psi(t_1) = -\alpha F_x(x^I(t_1)),$$

$$\sigma(t_1) = -\alpha F_{xx}(x^I(t_1)) - (1 - \alpha)\gamma$$

вычисляем  $\psi(t)$  и  $\sigma(t)$ . В системе (7) производные функции  $H^\alpha$  вычисляются в точке  $(t, x^I(t), \psi(t), u^I(t))$ .

4. Из системы

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, \tilde{u}), \quad x(t_0) = x_0,$$

где  $\tilde{u} = u^I + \Delta u(t, \Delta x)$ ,

$$\Delta u(t, \Delta x) = -(H_{uu}^\alpha - (1 - \alpha)\beta)^{-1} [H_u^\alpha + (H_{u\psi}^\alpha \sigma + H_{ux}^\alpha) \Delta x],$$

$$\Delta x = x - x^I(t),$$

вычисляем  $x^{II}(t)$ .

5. Находим

$$u''(t) = u'(t) + \Delta u(t, x'' - x').$$

6. Если  $I(x'', u'') \geq I(x', u')$ , то изменяем значения параметров  $\alpha, \beta, \gamma$  и повторяем процесс с пункта 3.

### 3. Управление параметрами алгоритма

В вышеприведенных алгоритмах от выбранных значений  $\alpha, \beta, \gamma$  зависит весь ход итерационного процесса: существование решения системы (6) или (7) на всем отрезке  $[t_0, t_1]$ , успешность итерации (т.е. удалось ли улучшить функционал), глубина улучшения функционала на итерации и, следовательно, необходимое количество итераций. Сформулируем задачу управления выбором параметров алгоритма: имеется элемент  $(x^I(t), u^I(t))$ , требуется найти такие значения параметров  $\alpha, \beta, \gamma$ , чтобы найденные при этих значениях новые траектория и управление были наилучшими (в смысле наименьшего значения функционала).

Для решения сформулированной задачи рассмотрим задачу оптимального управления, решаемую с помощью алгоритма улучшения, как задачу с векторным параметром  $a$ , где  $a = (\alpha, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n(\text{или } m)}, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$ . После выполнения пунктов 1–5 алгоритма сильного или слабого улучшения получаем:

решается система

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, \tilde{u}(t, x, a)), \quad x(t_0) = x_0;$$

находятся  $x''$  и  $u'' = \tilde{u}(t, x'', a)$ ;

вычисляется значение функционала

$$I(x'', u'') = F(x''(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} f^0(t, x'', \tilde{u}(t, x'', a)) dt.$$

Введем обозначения:

$$f(t, x, \tilde{u}(t, x, a)) = g(t, x, a), \quad f^0(t, x, \tilde{u}(t, x, a)) = g^0(t, x, a).$$

Тогда получаем следующую задачу:

требуется минимизировать функционал

$$J(a) = I(x, a) = F(x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} g^0(t, x, a) dt,$$

где  $x(t)$  – непрерывные и кусочно-дифференцируемые функции, удовлетворяющие на  $[t_0, t_1]$  системе дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = g(t, x, a), \quad x(t_0) = x_0,$$

$a$  – параметр-вектор размерности  $2n + 1$  (или  $m + n + 1$ ).

Полученная задача, с одной стороны, является задачей конечномерной минимизации, а с другой стороны, ее можно рассматривать как частный случай задачи оптимального управления с параметром, описанной, например, в работе [1]. Следовательно, для решения этой задачи можно применить градиентные схемы, а для нахождения необходимых производных функционала по компонентам параметра  $a$  можно воспользоваться формулами для производных функционала по параметру, выведенными в работе [1].

В результате получаются следующие выражения для  $J_\alpha$ ,  $J_{\beta_i}$  и  $J_{\gamma_j}$  при  $\alpha = \alpha^I$ ,  $\beta = \beta^I$ ,  $\gamma = \gamma^I$ .

В алгоритме сильного улучшения:

$$(8) \quad J_\alpha = \int_{t_0}^{t_1} H_u'(t, x^II, \tilde{\psi}, u^II) \cdot [H_{uu}^\alpha(t, x^II, \psi + \sigma(x^II - x^I), u^II)]^{-1} \times \\ \times H_u(t, x^II, \psi_\alpha + \sigma_\alpha(x^II - x^I), u^II) dt;$$

$$(9) \quad J_{\beta_i} = \int_{t_0}^{t_1} H_u'(t, x^II, \tilde{\psi}, u^II) \cdot [H_{uu}^\alpha(t, x^II, \psi + \sigma(x^II - x^I), u^II)]^{-1} \times \\ \times H_u^0(t, x^II, \psi_{\beta_i} + \sigma_{\beta_i}(x^II - x^I), u^II) dt,$$

$$i = 1, \dots, n;$$

$$(10) \quad J_{\gamma_j} = \int_{t_0}^{t_1} H_u'(t, x^II, \tilde{\psi}, u^II) \cdot [H_{uu}^\alpha(t, x^II, \psi + \sigma(x^II - x^I), u^II)]^{-1} \times \\ \times H_u^0(t, x^II, \psi_{\gamma_j} + \sigma_{\gamma_j}(x^II - x^I), u^II) dt,$$

$$j = 1, \dots, n.$$

В алгоритме слабого улучшения:

$$\begin{aligned}
 J_{\alpha} = & - \int_{t_0}^{t_1} H'_u(t, x^{\text{II}}, \tilde{\psi}, u^{\text{II}}) \cdot \left\{ \left[ H_{uu}^{\alpha} - (1 - \alpha^I) \beta^I \right]^{-1} \times \right. \\
 & \times \left[ H_{uu}(t, x^I, \psi_{\alpha}, u^I) + \beta^I \right] \cdot \left[ H_{uu}^{\alpha} - (1 - \alpha^I) \beta^I \right]^{-1} \times \\
 (11) \times & \left[ H_u^{\alpha} + (H_{u\psi}^{\alpha} \sigma + H_{ux}^{\alpha})(x^{\text{II}} - x^I) \right] - \left[ H_{uu}^{\alpha} - (1 - \alpha^I) \beta^I \right]^{-1} \times \\
 & \times \left[ H_u(t, x^I, \psi_{\alpha}, u^I) + (H_{u\psi}^{\alpha} \sigma_{\alpha} + \right. \\
 & \left. + H_{ux}(t, x^I, \psi_{\alpha}, u^I))(x^{\text{II}} - x^I) \right] \Big\} dt;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J_{\beta_i} = & - \int_{t_0}^{t_1} H'_u(t, x^{\text{II}}, \tilde{\psi}(t), u^{\text{II}}) \cdot \left\{ \left[ H_{uu}^{\alpha} - (1 - \alpha^I) \beta^I \right]^{-1} \times \right. \\
 & \times \left[ H_{uu}^0(t, x^I, \psi_{\beta_i}, u^I) - (1 - \alpha^I) \tilde{E}_i \right] \times \left[ H_{uu}^{\alpha} - (1 - \alpha^I) \beta^I \right]^{-1} \\
 (12) \times & \left[ H_u^{\alpha} + (H_{u\psi}^{\alpha} \sigma + H_{ux}^{\alpha})(x^{\text{II}} - x^I) \right] - \left[ H_{uu}^{\alpha} - (1 - \alpha^I) \beta^I \right]^{-1} \times \\
 & \times \left[ H_u^0(t, x^I, \psi_{\beta_i}, u^I) + (H_{u\psi}^{\alpha} \sigma_{\beta_i} + \right. \\
 & \left. + H_{ux}^0(t, x^I, \psi_{\beta_i}, u^I))(x^{\text{II}} - x^I) \right] \Big\} dt, \quad i = \overline{1, m}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J_{\gamma_j} = & - \int_{t_0}^{t_1} H'_u(t, x^{\text{II}}, \tilde{\psi}(t), u^{\text{II}}) \cdot \left\{ \left[ H_{uu}^{\alpha} - (1 - \alpha^I) \beta^I \right]^{-1} \times \right. \\
 & \times H_{uu}^0(t, x^I, \psi_{\gamma_j}, u^I) \cdot \left[ H_{uu}^{\alpha} - (1 - \alpha^I) \beta^I \right]^{-1} \times \\
 (13) \times & \left[ H_u^{\alpha} + (H_{u\psi}^{\alpha} \sigma + H_{ux}^{\alpha})(x^{\text{II}} - x^I) \right] - \left[ H_{uu}^{\alpha} - (1 - \alpha^I) \beta^I \right]^{-1} \times \\
 & \times \left[ H_u^0(t, x^I, \psi_{\gamma_j}, u^I) + (H_{u\psi}^{\alpha} \sigma_{\gamma_j} + \right. \\
 & \left. + H_{ux}^0(t, x^I, \psi_{\gamma_j}, u^I))(x^{\text{II}} - x^I) \right] \Big\} dt, \quad j = \overline{1, n}.
 \end{aligned}$$

В формулах (8)–(13):

$$H(t, x, p, u) = p^I \cdot f(t, x, u) - f^0(t, x, u),$$

$$H^{\alpha}(t, x, p, u, \alpha) = p^I \cdot f(t, x, u) - \alpha f^0(t, x, u);$$

$$H^0(t, x, p, u) = p^I \cdot f(t, x, u),$$

функция  $\tilde{\psi}(t)$  находится из системы

$$\frac{d\tilde{\psi}}{dt} = -\tilde{H}_x(t, x^I, \tilde{\psi}, a^I), \quad \tilde{\psi}(t_1) = -F_x(x^I(t_1)),$$

где

$$\tilde{H}(t, x, p, a) = p'g(t, x, a) - g^0(t, x, a),$$

$$a^I = (\alpha^I, \beta_i^I, \gamma_j^I), \quad i=1, \dots, n(m), \quad j=1, \dots, n;$$

производные функции  $H^\alpha$ , аргументы которых опущены, вычисляются в точке  $(t, x^I(t), \psi(t), u^I(t))$ ;  $\tilde{E}_i$  – квадратная матрица  $m \times m$ , у которой элемент  $e_{ii} = 1$ , а все остальные элементы равны нулю.

В формулах (8)–(10) функции  $\psi(t)$  и  $\sigma(t)$  находятся из системы (6) при  $\alpha = \alpha^I, \beta = \beta^I, \gamma = \gamma^I$ , а в формулах (11)–(13) функции  $\psi(t)$  и  $\sigma(t)$  находятся из системы (7). Функции  $\psi_\alpha(t), \sigma_\alpha(t), \psi_{\beta_i}(t), \sigma_{\beta_i}(t), \psi_{\gamma_j}(t), \sigma_{\gamma_j}(t)$  находятся из систем, полученных дифференцированием системы (6) (или системы (7)) по  $\alpha, \beta_i, \gamma_j$ , соответственно. Эти системы имеют следующий вид.

В методе сильного улучшения:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \psi_\alpha &= -H_{x\alpha}^\alpha - H_{x\psi}^\alpha \psi_\alpha - \sigma_\alpha (H_\psi^\alpha - H_\psi^\alpha) - \\ &\quad - \sigma (H_{\psi\alpha}^\alpha + H_{\psi\psi}^\alpha \psi_\alpha), \\ (14) \quad \frac{d}{dt} \sigma_\alpha &= -[H_{x\alpha}^\alpha + H_{x\psi}^\alpha \psi_\alpha] - \beta - \sigma_\alpha H_{\psi x}^\alpha - \sigma [H_{\psi x}^\alpha + \\ &\quad + H_{\psi\psi}^\alpha \psi_\alpha] - [H_{x\psi}^\alpha + H_{x\psi}^\alpha \psi_\alpha] \sigma - H_{x\psi}^\alpha \sigma_\alpha - \sigma_\alpha H_{\psi\psi}^\alpha \sigma - \\ &\quad - \sigma [H_{\psi\psi}^\alpha + H_{\psi\psi}^\alpha \psi_\alpha] \sigma - \sigma H_{\psi\psi}^\alpha \sigma_\alpha, \\ \psi_\alpha(t_1) &= -F_x(x^I(t_1)), \\ \sigma_\alpha(t_1) &= -F_{xx}(x^I(t_1)) + \gamma. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \psi_{\beta_i} &= -H_{x\psi}^\alpha \psi_{\beta_i} - \sigma_{\beta_i} (H_\psi^\alpha - H_\psi^\alpha) - \sigma H_{\psi\psi}^\alpha \psi_{\beta_i}, \\ (15) \quad \frac{d}{dt} \sigma_{\beta_i} &= -H_{x\psi}^\alpha \psi_{\beta_i} + (1-\alpha)\tilde{E}_i - \sigma_{\beta_i} H_{\psi x}^\alpha - \\ &\quad - \sigma H_{\psi x\psi}^\alpha \psi_{\beta_i} - H_{x\psi\psi}^\alpha \psi_{\beta_i} \sigma - \\ &\quad - H_{x\psi}^\alpha \sigma_{\beta_i} - \sigma_{\beta_i} H_{\psi\psi}^\alpha \sigma - \sigma H_{\psi\psi}^\alpha \psi_{\beta_i} \sigma - \sigma H_{\psi\psi}^\alpha \sigma_{\beta_i}, \end{aligned}$$

$$\psi_{\beta_i}(t_1) = -\alpha F_{x\beta_i}(x^I(t_1)) = 0,$$

$$\sigma_{\beta_i}(t_1) = 0.$$

$$(16) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt} \psi_{\gamma_j} &= -H_{x\psi}^{\alpha} \psi_{\gamma_j} - \sigma_{\gamma_j} (H_{\psi}^{\alpha} - H_{\psi}^{\alpha}) - \sigma H_{\psi\psi}^{\alpha} \psi_{\gamma_j}, \\ \frac{d}{dt} \sigma_{\gamma_j} &= -H_{x\psi}^{\alpha} \psi_{\gamma_j} - \sigma_{\gamma_j} H_{\psi x}^{\alpha} - \sigma H_{\psi x\psi}^{\alpha} \psi_{\gamma_j} - \\ &\quad - H_{x\psi\psi}^{\alpha} \psi_{\gamma_j} \sigma - H_{x\psi}^{\alpha} \sigma_{\gamma_j} - \\ &\quad - \sigma_{\gamma_j} H_{\psi\psi}^{\alpha} \sigma - \sigma H_{\psi\psi\psi}^{\alpha} \psi_{\gamma_j} \sigma - \sigma H_{\psi\psi}^{\alpha} \sigma_{\gamma_j}, \\ \psi_{\gamma_j}(t_1) &= 0, \\ \sigma_{\gamma_j}(t_1) &= -(1-\alpha) \tilde{E}_j. \end{aligned}$$

В методе слабого улучшения:

$$(17) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt} \psi_{\alpha} &= -H_x(t, x^I, \psi_{\alpha}, u^I) + [H_{xu}(t, x^I, \psi_{\alpha}, u^I) + \sigma_{\alpha} H_{\psi u}^{\alpha}] \times \\ &\quad \times [H_{uu}^{\alpha} - (1-\alpha)\beta]^{-1} \cdot H_u^{\alpha} - [H_{xu}^{\alpha} + \sigma H_{\psi u}^{\alpha}] \times \\ &\quad \times [H_{uu}^{\alpha} - (1-\alpha)\beta]^{-1} \cdot [H_{uu}(t, x^I, \psi_{\alpha}, u^I) + \beta] \times \\ &\quad \times [H_{uu}^{\alpha} - (1-\alpha)\beta]^{-1} \cdot H_u^{\alpha} + [H_{xu}^{\alpha} + \sigma H_{\psi u}^{\alpha}] \times \\ &\quad \times [H_{uu}^{\alpha} - (1-\alpha)\beta]^{-1} \cdot H_u(t, x^I, \psi_{\alpha}, u^I), \\ \frac{d}{dt} \sigma_{\alpha} &= -H_{xx}(t, x^I, \psi_{\alpha}, u^I) - \sigma_{\alpha} H_{\psi x}^{\alpha} - H_{x\psi}^{\alpha} \sigma_{\alpha} + \\ &\quad + [H_{xu}(t, x^I, \psi_{\alpha}, u^I) + \sigma_{\alpha} H_{\psi u}^{\alpha}] \cdot [H_{uu}^{\alpha} - (1-\alpha)\beta]^{-1} \times \\ &\quad \times [H_{ux}^{\alpha} + H_{u\psi}^{\alpha} \sigma] - [H_{xu}^{\alpha} + \sigma H_{\psi u}^{\alpha}] \cdot [H_{uu}^{\alpha} - (1-\alpha)\beta]^{-1} \times \\ &\quad \times [H_{uu}(t, x^I, \psi_{\alpha}, u^I) + \beta] \cdot [H_{uu}^{\alpha} - (1-\alpha)\beta]^{-1} \times \\ &\quad \times [H_{ux}^{\alpha} + H_{u\psi}^{\alpha} \sigma] + [H_{xu}^{\alpha} + \sigma H_{\psi u}^{\alpha}] \cdot [H_{uu}^{\alpha} - (1-\alpha)\beta]^{-1} \times \\ &\quad \times [H_{ux}(t, x^I, \psi_{\alpha}, u^I) + H_{u\psi}^{\alpha} \sigma_{\alpha}], \\ \psi_{\alpha}(t_1) &= -F_x(x^I(t_1)), \\ \sigma_{\alpha}(t_1) &= -F_{xx}(x^I(t_1)) + \gamma. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \psi_{\beta_i} &= -H(t, x^I, \psi_{\beta_i}, u^I) + [H_{xu}^0(t, x^I, \psi_{\beta_i}, u^I) + \sigma_{\beta_i} H_{\psi u}^\alpha] \times \\
 &\quad \times [H_{uu}^\alpha - (1-\alpha)\beta]^{-1} \cdot H_u^\alpha - [H_{xu}^\alpha + \sigma H_{\psi u}^\alpha] \cdot [H_{uu}^\alpha - (1-\alpha)\beta]^{-1} \times \\
 &\quad \times [H(t, x, \psi, u) - (1-\alpha)\tilde{E}] \cdot [H - (1-\alpha)\beta] \cdot H + \\
 &\quad + [H_{xu}^\alpha + \sigma H_{\psi u}^\alpha] \cdot [H_{uu}^\alpha - (1-\alpha)\beta]^{-1} \cdot H_u^0(t, x^I, \psi_{\beta_i}, u^I) \\
 \frac{d}{dt} \sigma_{\beta_i} &= -H_{xx}^0(t, x^I, \psi_{\beta_i}, u^I) - \sigma_{\beta_i} H_{\psi x}^\alpha - H_{x\psi}^\alpha \sigma_{\beta_i} + \\
 &\quad + [H_{xu}^0(t, x^I, \psi_{\beta_i}, u^I) + \sigma_{\beta_i} H_{\psi u}^\alpha] \cdot [H_{uu}^\alpha - (1-\alpha)\beta]^{-1} \times \\
 &\quad \times [H_{ux}^\alpha + H_{u\psi}^\alpha \sigma] - [H_{xu}^\alpha + \sigma H_{\psi u}^\alpha] \cdot [H_{uu}^\alpha - (1-\alpha)\beta]^{-1} \times \\
 &\quad \times [H_{uu}^0(t, x^I, \psi_{\beta_i}, u^I) - (1-\alpha)\tilde{E}_i] \cdot [H_{uu}^\alpha - (1-\alpha)\beta]^{-1} \times \\
 &\quad \times [H_{ux}^\alpha + H_{u\psi}^\alpha \sigma] + [H_{xu}^\alpha + \sigma H_{\psi u}^\alpha] \times \\
 &\quad \times [H_{uu}^\alpha - (1-\alpha)\beta]^{-1} \cdot [H_{ux}^0(t, x^I, \psi_{\beta_i}, u^I) + H_{u\psi}^\alpha \sigma_{\beta_i}] \\
 \psi_{\beta_i}(t_1) &= 0, \\
 \sigma_{\beta_i}(t_1) &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{18}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \psi_{\gamma_j} &= -H_x^0(t, x^I, \psi_{\gamma_j}, u^I) + [H_{xu}^0(t, x^I, \psi_{\gamma_j}, u^I) + \sigma_{\gamma_j} H_{\psi u}^\alpha] \times \\
 &\quad \times [H_{uu}^\alpha - (1-\alpha)\beta]^{-1} \cdot H_u^\alpha - [H_{xu}^\alpha + \sigma H_{\psi u}^\alpha] \cdot [H_{uu}^\alpha - (1-\alpha)\beta]^{-1} \times \\
 &\quad \times H_{uu}^0(t, x^I, \psi_{\gamma_j}, u^I) \cdot [H_{uu}^\alpha - (1-\alpha)\beta]^{-1} \cdot H_u^\alpha + \\
 &\quad + [H_{xu}^\alpha + \sigma H_{\psi u}^\alpha] \cdot [H_{uu}^\alpha - (1-\alpha)\beta]^{-1} \cdot H_u^0(t, x^I, \psi_{\gamma_j}, u^I) \\
 \frac{d}{dt} \sigma_{\gamma_j} &= -H_{xx}^0(t, x^I, \psi_{\gamma_j}, u^I) - \sigma_{\gamma_j} H_{\psi x}^\alpha - H_{x\psi}^\alpha \sigma_{\gamma_j} + \\
 &\quad + [H_{xu}^0(t, x^I, \psi_{\gamma_j}, u^I) + \sigma_{\gamma_j} H_{\psi u}^\alpha] \cdot [H_{uu}^\alpha - (1-\alpha)\beta]^{-1} \times \\
 &\quad \times [H_{ux}^\alpha + H_{u\psi}^\alpha \sigma] - [H_{xu}^\alpha + \sigma H_{\psi u}^\alpha] \cdot [H_{uu}^\alpha - (1-\alpha)\beta]^{-1} \times \\
 &\quad \times H_{uu}^0(t, x^I, \psi_{\gamma_j}, u^I) \cdot [H_{uu}^\alpha - (1-\alpha)\beta]^{-1} \cdot [H_{ux}^\alpha + H_{u\psi}^\alpha \sigma] + \\
 &\quad + [H_{xu}^\alpha + \sigma H_{\psi u}^\alpha] \cdot [H_{uu}^\alpha - (1-\alpha)\beta]^{-1} \cdot [H_{ux}^0(t, x^I, \psi_{\gamma_j}, u^I) + \\
 &\quad + H_{u\psi}^\alpha \sigma_{\gamma_j}]
 \end{aligned}
 \tag{19}$$

$$\psi_{\gamma_j}(t_1) = 0,$$

$$\sigma_{\gamma_j}(t_1) = -(1 - \alpha)\tilde{E}_j.$$

В системах (14)–(19) выражение  $H^{\alpha}_{xx\psi}\psi\alpha$  понимается как матрица размерности  $n \times n$ , элементами  $a_{ij}$  которой являются суммы

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^n H^{\alpha}_{x_i, x_j, \psi_k} \cdot \frac{\partial \psi_k}{\partial \alpha};$$

аналогичным образом понимаются выражения  $H^{\alpha}_{\psi\alpha\psi}\psi\alpha$ ,  $H^{\alpha}_{x\psi\psi}\psi\alpha$ ,  $H^{\alpha}_{\psi\psi\psi}\psi\alpha$ ; матрица  $\tilde{E}_i$  ( $\tilde{E}_j$ ) – квадратная матрица  $n \times n$ , у которой элемент  $e_{ii} = 1$  ( $e_{jj} = 1$ ), а все остальные элементы равны нулю; все производные функции  $H^{\alpha}$  вычисляются в точке  $(t, x^I, \psi)$ ; производные функции  $H^{\alpha}$ , аргументы которых опущены, вычисляются в точке  $(t, x^I, \psi, u^I)$ .

Чтобы, решая полученную задачу минимизации, не интегрировать заново систему (6) (или систему (7)) при каждом изменении значений параметров, можно вычислять функции  $\psi(t)$  и  $\sigma(t)$  приблизительно, разложив их в ряды Тейлора по параметрам в окрестности точки  $(\alpha^I, \beta^I, \gamma^I)$ :

$$\begin{aligned} \psi(t, \alpha^{II}, \beta^{II}, \gamma^{II}) &= \psi(t, \alpha^I, \beta^I, \gamma^I) + \psi_{\alpha}(t, \alpha^I, \beta^I, \gamma^I) \times \\ (20) \quad &\times (\alpha^{II} - \alpha^I) + \sum_{i=1}^{n(m)} \psi_{\beta_i}(t, \alpha^I, \beta^I, \gamma^I) (\beta_i^{II} - \beta_i^I) + \\ &+ \sum_{j=1}^n \psi_{\gamma_j}(t, \alpha^I, \beta^I, \gamma^I) (\gamma_j^{II} - \gamma_j^I), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma(t, \alpha^{II}, \beta^{II}, \gamma^{II}) &= \sigma(t, \alpha^I, \beta^I, \gamma^I) + \sigma_{\alpha}(t, \alpha^I, \beta^I, \gamma^I) \times \\ (21) \quad &\times (\alpha^{II} - \alpha^I) + \sum_{i=1}^{n(m)} \sigma_{\beta_i}(t, \alpha^I, \beta^I, \gamma^I) (\beta_i^{II} - \beta_i^I) + \\ &+ \sum_{j=1}^n \sigma_{\gamma_j}(t, \alpha^I, \beta^I, \gamma^I) (\gamma_j^{II} - \gamma_j^I). \end{aligned}$$

Изложенный подход позволяет создать модифицированные алгоритмы сильного и слабого улучшения второго порядка, в которых организован поиск наилучших значений параметров на каждой итерации.

Модифицированный алгоритм сильного улучшения.

1. Задаем управление  $u^I(t)$ , из системы (1) находим  $x^I(t)$ .
2. Задаем значения параметров:  $\alpha = \alpha^I, \beta = \beta^I, \gamma = \gamma^I$ .
3. Из системы (6) при  $\alpha^I, \beta^I, \gamma^I$  вычисляем  $\psi(t)$  и  $\sigma(t)$ .
4. Из системы

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, \tilde{u}(t, x, p)), \quad x(t_0) = x_0,$$

где

$$\tilde{u}(t, x, p) = \arg \max_{u \in U} H^\alpha(t, x, p, u),$$

$$p = \psi(t) + \sigma(t)\Delta x, \quad \Delta x = x - x^I(t),$$

вычисляем  $x^{II}(t)$ .

5. Находим

$$u^{II}(t) = \tilde{u}(t, x^{II}(t), \psi(t) + \sigma(t)(x^{II}(t) - x^I(t))).$$

6. Вычисляем  $J_\alpha, J_{\beta_i}$  и  $J_{\gamma_j}$  в точке  $(\alpha^I, \beta^I, \gamma^I)$  по формулам (8)–(10), при этом производные  $\psi$  и  $\sigma$  по параметрам находятся из систем (14)–(16).

Задаем

$$\alpha^{II} = \alpha^I - \xi J_\alpha, \quad \beta_i^{II} = \beta_i^I - \xi J_{\beta_i}, \quad \gamma_j^{II} = \gamma_j^I - \xi J_{\gamma_j}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n,$$

где  $\xi$  – скалярный параметр. Переходим к решению одномерной задачи минимизации функционала  $\mathcal{J}(\alpha^{II}, \beta^{II}, \gamma^{II})$  по переменной  $\xi$ . Функции  $\psi(t)$  и  $\sigma(t)$  при  $\alpha = \alpha^{II}, \beta = \beta^{II}, \gamma = \gamma^{II}$  вычисляем по формулам (20)–(21).

7. Находим  $\tilde{u}$  при  $\alpha^{II}, \beta^{II}, \gamma^{II}, \psi(t, \alpha^{II}, \beta^{II}, \gamma^{II}), \sigma(t, \alpha^{II}, \beta^{II}, \gamma^{II})$ , а затем заново вычисляем  $x^{II}(t)$  и  $u^{II}(t)$ .

Модифицированный алгоритм слабого улучшения.

1. Задаем управление  $u^I(t)$ , из системы (1) находим  $x^I(t)$ .
2. Задаем значения параметров:  $\alpha = \alpha^I, \beta = \beta^I, \gamma = \gamma^I$ .
3. Из системы (7) при  $\alpha^I, \beta^I, \gamma^I$  вычисляем  $\psi(t)$  и  $\sigma(t)$ .
4. Из системы

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, \tilde{u}), \quad x(t_0) = x_0,$$

где

$$\tilde{u} = u^I + \Delta u(t, \Delta x),$$

$$\Delta u(t, \Delta x) = -(H_{uu}^\alpha - (1 - \alpha)\beta)^{-1} [H_u^\alpha + (H_{uv}^\alpha \sigma + H_{ux}^\alpha) \Delta x],$$

$$\Delta x = x - x^I(t),$$

вычисляем  $x^II(t)$ .

5. Находим

$$u^II(t) = u^I(t) + \Delta u(t, x^II - x^I).$$

6. Вычисляем  $J_\alpha$ ,  $J_{\beta_i}$  и  $J_{\gamma_j}$  в точке  $(\alpha^I, \beta^I, \gamma^I)$  по формулам (11)–(13), при этом производные  $\psi$  и  $\sigma$  по параметрам находятся из систем (17)–(19).

Задаем

$$\alpha^II = \alpha^I - \xi J_\alpha, \quad \beta_i^II = \beta_i^I - \xi J_{\beta_i}, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

$$\gamma_j^II = \gamma_j^I - \xi J_{\gamma_j}, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

где  $\xi$  – скалярный параметр. Переходим к решению одномерной задачи минимизации функционала  $\mathcal{K}(\alpha^II, \beta^II, \gamma^II)$  по переменной  $\xi$ . Функции  $\psi(t)$  и  $\sigma(t)$  при  $\alpha = \alpha^II$ ,  $\beta = \beta^II$ ,  $\gamma = \gamma^II$  вычисляем по формулам (20)–(21).

7. Находим  $\tilde{u}$  при  $\alpha^II$ ,  $\beta^II$ ,  $\gamma^II$ ,  $\psi(t, \alpha^II, \beta^II, \gamma^II)$ ,  $\sigma(t, \alpha^II, \beta^II, \gamma^II)$ , а затем заново вычисляем  $x^II(t)$  и  $u^II(t)$ .

В вышеизложенных модифицированных алгоритмах предусмотрена возможность управлять всеми параметрами. Однако влияние параметров на эффективность работы алгоритма неодинаковое. В каждой реальной задаче можно выбирать свое подмножество параметров для управления. Нередко бывает достаточно управлять только скалярным параметром  $\alpha$ . Если в модифицированном алгоритме слабого улучшения значения параметров  $\beta$  и  $\gamma$  зафиксировать (не управлять ими), причем задать матрицу  $\gamma$  нулевой, а параметру  $\alpha$  в начале алгоритма присваивать нулевое значение, то имеют место результаты, значительно упрощающие вычисления на этапах алгоритма [2]. Таким образом, получаем новый алгоритм слабого улучшения второго порядка.

Алгоритм с  $\alpha_{start} = 0$

1. Задается управление  $u^I(t)$ , из системы (1) находится  $x^I(t)$ .
2. Задаются параметры  $\alpha^I = 0$  и  $\beta = \beta^I > 0$ .
3. Из системы

$$\frac{d}{dt} \psi_\alpha = -H_x(t, x^I, \psi_\alpha, u^I),$$

$$\frac{d}{dt} \sigma_\alpha = -H_{xx}(t, x^I, \psi_\alpha, u^I) - \sigma_\alpha H_{\psi x}(t, x^I, \psi, u^I) -$$

$$(22) \quad -H_{x\psi}(t, x^I, \psi, u^I) \sigma_\alpha,$$

$$\psi_\alpha(t_1) = -F_x(x^I(t_1)),$$

$$\sigma_\alpha(t_1) = -F_{xx}(x^I(t_1));$$

находятся  $\psi_\alpha(t, 0)$  и  $\sigma_\alpha(t, 0)$ .

4. По формуле

$$J_\alpha(0, \beta^I) = - \int_{t_0}^{t_1} H_u'(t, x^I, \psi_\alpha, u^I) \cdot (\beta^I)^{-1} \cdot H_u(t, x^I, \psi_\alpha, u^I) dt$$

вычисляется  $J_\alpha(0, \beta^I)$ .

5. Задается  $\alpha \in (0, 1]$ .

6. Находится значение  $\alpha^{II}$  как решение задачи одномерной минимизации функционала  $J$  по параметру  $\alpha$ . При этом функции  $\psi(t, \alpha)$  и  $\sigma(t, \alpha)$  находятся по приближенным формулам:

$$\psi(t, \alpha) = \psi_\alpha(t, 0) \cdot \alpha, \quad \sigma(t, \alpha) = \sigma_\alpha(t, 0) \cdot \alpha.$$

7. Из системы

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, \tilde{u}), \quad x(t_0) = x_0,$$

где

$$\tilde{u} = u^I + \Delta u(t, \Delta x, \alpha^{II}, \beta^I),$$

$$\Delta u(t, \Delta x, \alpha^{II}, \beta^I) = -(H_{uu}^\alpha - (1 - \alpha^{II})\beta^I)^{-1} \times \\ \times [H_u^\alpha + (H_{u\psi}^\alpha \sigma(t, \alpha^{II}) + H_{ux}^\alpha) \Delta x],$$

$$\Delta x = x - x^I,$$

вычисляется  $x^{II}(t)$ , а затем находится

$$u^{II}(t) = u^I(t) + \Delta u(t, x^{II} - x^I, \alpha^{II}, \beta^I).$$

Производные функции  $H^\alpha$  вычисляются в точке  $(t, x^I, \psi(t, \alpha^I), u^I, \alpha^I)$ .

Итерация этого алгоритма менее трудоемка не только по сравнению с итерацией модифицированного алгоритма слабого улучшения, но и по сравнению с итерацией исходного алгоритма слабого улучшения, потому что векторно-матричная система (22) является линейной, в то время как в системе (7) при заданном  $\psi(t)$  уравнение на  $\sigma$  – это уравнение Риккати.

Работоспособность и эффективность модифицированных алгоритмов были проверены на ряде тестовых примеров, в которых осуществлялось управление параметром  $\alpha$ . Описания некоторых из этих примеров и результаты их решения исходными (далее они названы базовыми) и модифицированными алгоритмами можно найти в работах [2, 11, 12].

Приведем здесь два тестовых примера из работы [2], решенные алгоритмами слабого улучшения. В рассматриваемых примерах параметр  $\beta$  был зафиксирован, изменялся только параметр  $\alpha$ , его начальное значение задавалось одинаковым в обоих алгоритмах. В базовом алгоритме начальное значение параметра  $\alpha$  оставалось таким как задано на всех итерациях до тех пор, пока удавалось улучшать функционал. В случае, когда улучшить функционал не удавалось, значение параметра  $\alpha$  уменьшалось на 30%. В модифицированном алгоритме на каждой итерации предпринималась попытка оптимизировать имеющееся значение параметра  $\alpha$  и выполнить эту и последующие итерации с найденным значением данного параметра. Другие характеристики алгоритма (шаг интегрирования, точность вычисления функционала и т.п.) задавались одинаковыми в обоих алгоритмах.

Пример 1.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = u \\ x(0) = 1 \end{cases}, \quad I(x, u) = \int_0^1 (x^2(t) + u^2(t)) dt, \quad t \in [0, 1].$$

Начальное управление  $u^l(t) \equiv 0$ .

Результаты вычислений при  $\alpha_{start} = 1$ , шаге интегрирования  $h = 0,001$ , точности вычисления функционала  $\varepsilon = 0,001$  представлены в таблице 1.

Таблица 1.

Базовый алгоритм			Модифицированный алгоритм		
Номер итерации	Значение параметра $\alpha$	Значение функционала	Номер итерации	Значение параметра $\alpha$	Значение функционала
0	—	1	0	—	1
1	1	0,7335367	1	1	0,7335367

Результаты вычислений при  $\alpha_{start} = 0,7$ , шаге интегрирования  $h = 0,001$ , точности вычисления функционала  $\varepsilon = 0,001$  представлены в таблице 2.

Таблица 2.

Базовый алгоритм			Модифицированный алгоритм		
Номер итерации	Значение параметра $\alpha$	Значение функционала	Номер итерации	Значение параметра $\alpha$	Значение функционала
0	—	1	0	—	1
1	0,7	0,7460582	1	0,999958	0,7335368
2	0,7	0,7360622			
3	0,7	0,7355737			

Пример 2.

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = u \\ x_1(0) = 0 \\ x_2(0) = 1 \end{cases}, \quad I(x,u) = \int_0^1 (u(t) - x_2(t) + t)^2 dt, \quad t \in [0,1].$$

Начальное управление  $u^l(t) \equiv 0$ .

Результаты вычислений при  $\alpha_{start} = 1$ , шаге интегрирования  $h = 0,001$ , точности вычисления функционала  $\varepsilon = 0,001$  представлены в таблице 3.

Таблица 3.

Базовый алгоритм			Модифицированный алгоритм		
Номер итерации	Значение параметра $\alpha$	Значение функционала	Номер итерации	Значение параметра $\alpha$	Значение функционала
0	—	0,3333333	0	—	0,3333333
1	1	0,8744572E-16	1	1	0,8744572E-16
2	1	0,3455601E-29	2	1	0,3455601E-29

Результаты вычислений при  $\alpha_{start} = 0,7$ , шаге интегрирования  $h = 0,001$ , точности вычисления функционала  $\varepsilon = 0,001$  представлены в таблице 4.

Тестовые примеры показали, что модифицированные алгоритмы оказываются эффективнее базовых в тех случаях, когда особенности решаемой задачи оптимального управления (жесткость исходной системы, овражность минимизируемого функционала и др.) приводят к необходимости задавать малые значения параметра  $\alpha$  на первых итерациях. В этих случаях после двух-трех итераций первоначальное малое значение параметра  $\alpha$  чаще всего удается значительно увеличить, ускорив тем самым процесс решения задачи. Иногда уже в конце решения задачи оптимального управления снова требуется малое значение



ние параметра  $\alpha$  для более точного вычисления минимума функционала.

Таблица 4.

Базовый алгоритм			Модифицированный алгоритм		
Номер итерации	Значение параметра $\alpha$	Значение функционала	Номер итерации	Значение параметра $\alpha$	Значение функционала
0	—	0,3333333	0	—	0,3333333
1	0,7	0,1068978	1	0,85	0,04200113
2	0,7	0,03635779	2	0,925	0,001860381
3	0,7	0,01241163	3	0,9625	0,2409146E-04
4	0,7	0,004239099	4	0,98125	0,8461745E-07
5	0,7	0,001447999			
6	0,7	0,0004946249			

#### 4. Задача управления эколого-экономической моделью

Вышеизложенные базовые и модифицированные алгоритмы сильного и слабого улучшения были применены для решения задачи управления эколого-экономической моделью. В работах [9, 13] описаны различные эколого-экономические модели.

Рассмотрим модель замкнутой системы (отсутствует импорт и экспорт продуктов и ресурсов), описывающую совместную динамику экономики и природных ресурсов

$$v = Av + A_p \frac{dv}{dt} + Bz + B_p \frac{dZ}{dt} + Cv + p,$$

$$\frac{dr}{dt} = -K(r - r^*) - Dv - D_p \frac{dv}{dt} + z,$$

где  $v(t) \in R^n$  – вектор потока общественного продукта;  $z(t) \in R^m$  – вектор интенсивности восстановления природных ресурсов;  $Z(t) \in R^m$  – вектор мощностей восстановительных

отраслей;  $p(t) \in R^n$  – вектор конечного непроеизводственного потребления;  $r(t) \in R^m$  – вектор, характеризующий состояние природных ресурсов;  $r^*$  – вектор естественного состояния ресурсов;  $A$  – матрица прямых затрат на производство продукта;  $A_p$  – матрица затрат на расширение производства;  $B$  – матрица затрат на восстановление ресурсов;  $B_p$  – матрица затрат на расширение мощности восстановления ресурсов;  $C$  – матрица, отражающая амортизационные затраты;  $K$  – матрица естественного восстановления и взаимного влияния ресурсов;  $D, D_p$  – матрицы, отражающие расходы ресурсов, связанные с текущим производством и его расширением.

Очевидно, что величина производимого продукта  $v$  не может быть отрицательной и ограничена сверху некоторой величиной  $V$  (мощности производства), обусловленной объемом основных фондов и численностью промышленно-производственного персонала, т.е. выполняются ограничения:  $0 \leq v \leq V$ ;  $V \geq 0$ . Аналогично, интенсивность экзогенного (по отношению к природной среде) восстановления природных ресурсов не может превышать мощности восстановительных отраслей:  $0 \leq z \leq Z$ ;  $Z \geq 0$ . Кроме того, сильное отклонение состояния природных ресурсов от естественного может привести к необратимым для природы последствиям (если это загрязнения) или к невозможности продолжения производственной деятельности (если это запасы полезных ископаемых, сырья). Поэтому необходимо ограничить величину этого отклонения:  $R_{min} \leq r \leq R_{max}$ .

Ставится задача о поиске режима поведения эколого-экономической системы, соответствующего минимуму функционала полезности

$$I = \int_{t_0}^{t_1} \left[ \lambda_1 \cdot |r(t) - r^*|^2 - \lambda_2' \cdot p(t) \cdot e^{-\delta t} \right] dt .$$

Первое слагаемое под знаком интеграла характеризует степень отклонения ресурсов от естественного состояния, а второе – потребление. Величина  $\lambda_1 \geq 0$  и вектор  $\lambda_2 \geq 0$  – весовые коэффициенты,  $e^{-\delta t}$  – функция, отражающая дисконтирование.

Сделаем предположения:

1.  $v(t)$  и  $r(t)$  – скалярные величины (т.е. однопродуктовая, одноресурсная модель);
2.  $v = V$ ,  $z = Z$  (производство и восстановление идут на полную мощность);
3.  $C = 0$  (амортизационные затраты включены в прямые).

Поставим задачу оптимального управления следующим образом. Будем управлять интенсивностью изменения мощностей восстановительных отраслей  $\dot{Z}(t)$  и конечным потреблением  $p$ , т.е.  $\dot{Z}(t) = u_1$ ,  $p = u_2$ . В результате сделанных предположений и введенных обозначений модель примет вид:

$$\frac{dz}{dt} = u_1,$$

$$\frac{dv}{dt} = [(1 - A)v - Bz - B_p u_1 - u_2] / A_p,$$

$$\frac{dr}{dt} = -K(r - r^*) - Dv - D_p \frac{dv}{dt} + z.$$

Добавим в функционал несколько слагаемых, имеющих значение штрафов за нарушение ограничений:

$(\min\{0; z\})^4$  – штраф за нарушение условия  $z \geq 0$ ;

$(\min\{0; v\})^4$  – штраф за нарушение условия  $v \geq 0$ ;

$(v - V)^2$  – штраф за нарушение условия  $v = V$ ;

$(\min\{0; r - R_{min}\})^4$  – штраф за нарушение условия  $r \geq R_{min}$ .

Кроме того, для регуляризации задачи добавим еще два слагаемых:  $s_1(u_1)^2$  и  $s_2(u_2)^2$ . Зададим отрезок времени  $[t_0, t_1]$  и начальные значения  $z(t_0)$ ,  $v(t_0)$ ,  $r(t_0)$ .

Таким образом, получаем задачу оптимального управления со свободным правым концом:

$$\frac{dx_1}{dt} = u_1,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = [\bar{A}x_2 - Bx_1 - B_p u_1 - u_2] / A_p,$$

$$\frac{dx_3}{dt} = -K(x_3 - r^*) - Dx_2 - D_p \frac{dx_2}{dt} + x_1,$$

$$x_1(0) = x_1^0, \quad x_2(0) = x_2^0, \quad x_3(0) = x_3^0,$$

$$I = \int_0^1 \left[ \lambda_1 \cdot (x_3(t) - r^*)^2 - u_2 \cdot e^{-\delta t} + (\min\{0; x_1\})^4 + (\min\{0; x_2\})^4 + (x_2 - V)^2 + (\min\{0; (x_3 - R_{\min})\})^4 + s_1(u_1)^2 + s_2(u_2)^2 \right] dt,$$

$$u(t) \in R^2, \quad t \in [t_0, t_1].$$

Данная задача решалась при следующих исходных данных:

- начальный момент времени  $t_0 = 0$ , конечный момент времени  $t_1 = 1$ ;

- коэффициенты в уравнениях и функционале являются константами и имеют следующие значения:

$$\bar{A} = 0,44; r^* = 1,5; V = 1; B = 10; D = 0,005; B_p = 1,6; R_{\min} = 0,5;$$

$$D_p = 0,001; A_p = 1,1; K = 0,1; \lambda_1 = 0,5; \delta = 0,02; s_1 = 1; s_2 = 1;$$

- начальные значения вектора состояния

$$x_1^0 = 0,1, \quad x_2^0 = 1, \quad x_3^0 = 1.$$

Рассматривались различные варианты начального управления и предположений на задачу. Заданное управление и соответствующую ему траекторию будем называть сценарием.

1. Пусть планируется небольшой постоянный прирост мощностей восстановительной отрасли и постоянное непроизводственное потребление, т.е. начальное управление  $u_1^I(t) \equiv 0,1$ ,  $u_2^I(t) \equiv 0,1$ . Такое управление приведет к следующему состоянию эколого-экономической системы (опорный процесс):

- экзогенное восстановление природного ресурса неуклонно возрастает на рассматриваемом отрезке времени (от 0,1 до 0,2);

- производство общественного продукта резко уменьшается вплоть до отрицательных значений в конце периода;

- состояние природного ресурса улучшается (увеличение от 1 до 1,2), однако естественного уровня не достигает.

На рис. 1–5 представлены графики опорного и полученного в результате вычислений оптимального процессов.

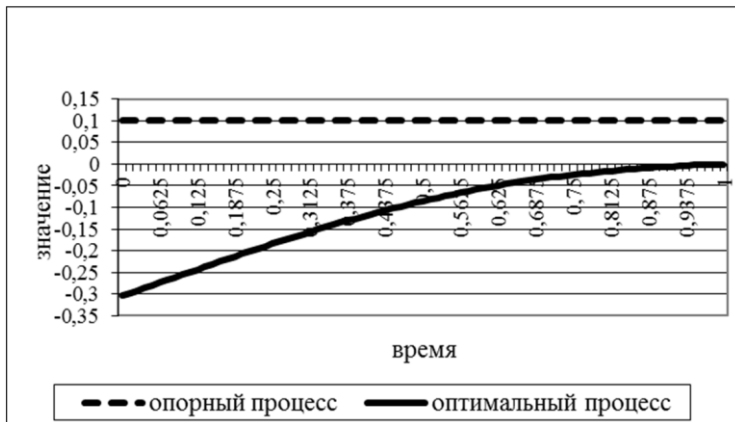


Рис. 1. Первая компонента вектора управления



Рис. 2. Вторая компонента вектора управления

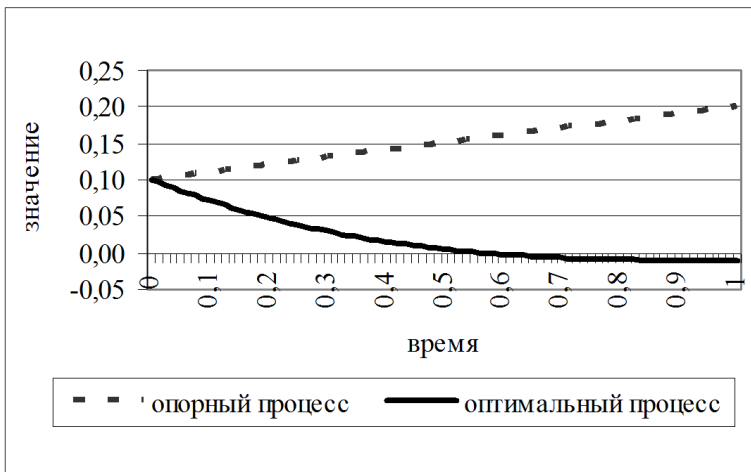


Рис. 3. Первая компонента вектора состояния

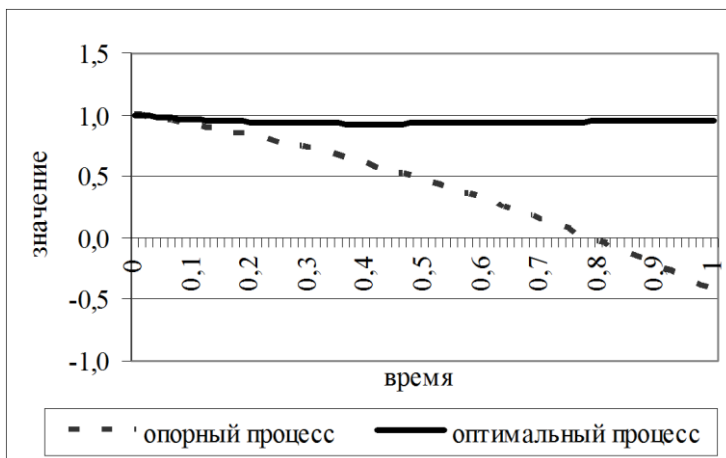


Рис. 4. Вторая компонента вектора состояния

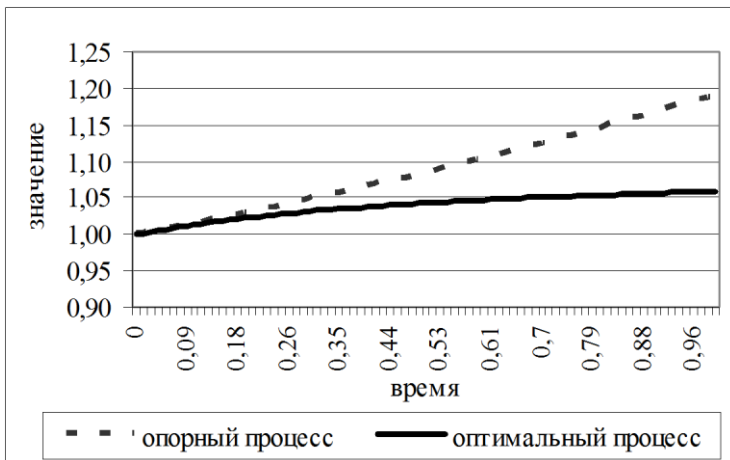


Рис. 5. Третья компонента вектора состояния

Оптимальный процесс.

При заданных исходных условиях естественное восстановление природного ресурса протекает достаточно интенсивно, поэтому мощности восстановительной отрасли следует сворачивать (величина изменения мощности отрицательная и принимает значения на отрезке  $[0, 1]$  от  $-0,32$  до  $-10^{-4}$ ). Непроизводительное потребление, наоборот, надо увеличивать (от 0,447 до 0,49). Такое управление приведет к следующему состоянию эколого-экономической системы:

- экзогенное восстановление ресурса прекратится, а в конце рассматриваемого периода начнется дополнительное потребление ресурса;
- производство общественного продукта будет оставаться приблизительно на одном уровне;
- состояние ресурса немного улучшится (увеличение с 1 до 1,05), хотя и не достигнет естественного уровня.

Итерационный процесс улучшения функционала отражен в следующих таблицах: результаты решения данной задачи алгоритмами слабого улучшения при  $\alpha_{start} = 1$  – в таблице 5, при  $\alpha_{start} = 0,7$  – в таблице 6; результаты решения данной задачи

алгоритмами сильного улучшения при  $\alpha_{start} = 1$  – в таблице 7, при  $\alpha_{start} = 0,7$  – в таблице 8.

Таблица 5.

Базовый алгоритм слабого улучшения			Модифицированный алгоритм слабого улучшения		
Номер итерации	Значение параметра $\alpha$	Значение функционала	Номер итерации	Значение параметра $\alpha$	Значение функционала
0	—	0,53700	0	—	0,53700
1	1	-0,095142	1	1	-0,095142
2	1	-0,11308	2	0,9926	-0,11309
3	1	-0,11309	3	0,1799	-0,11311

Таблица 6.

Базовый алгоритм слабого улучшения			Модифицированный алгоритм слабого улучшения		
Номер итерации	Значение параметра $\alpha$	Значение функционала	Номер итерации	Значение параметра $\alpha$	Значение функционала
0	—	0,53700	0	—	0,53700
1	0,7	0,019446	1	0,85	-0,039682
2	0,7	-0,077500	2	0,99997	-0,11306
3	0,7	-0,10304	3	0,99997	-0,11309
4	0,7	-0,11021			
5	0,7	-0,11225			
6	0,7	-0,11284			



Таблица 7.

Базовый алгоритм сильного улучшения			Модифицированный алгоритм сильного улучшения		
Номер итерации	Значение параметра $\alpha$	Значение функционала	Номер итерации	Значение параметра $\alpha$	Значение функционала
0	—	0,53700	0	—	0,53700
1	1	-0,095142	1	1	-0,095142
2	1	-0,11308	2	0,998	-0,11308
3	1	-0,11309	3	0,998	-0,11309

Таблица 8.

Базовый алгоритм сильного улучшения			Модифицированный алгоритм сильного улучшения		
Номер итерации	Значение параметра $\alpha$	Значение функционала	Номер итерации	Значение параметра $\alpha$	Значение функционала
0	—	0,53700	0	—	0,53700
1	0,7	-0,0013480	1	0,85	-0,048189
2	0,7	-0,088013	2	0,962	-0,11297
3	0,7	-0,10732	3	0,962	-0,11308
4	0,7	-0,11173			
5	0,7	-0,11276			
6	0,7	-0,11301			

2. Добавим в функционал штраф за нарушение условия  $Z(t) \geq 0$ , чтобы постараться не уменьшать мощности восстановительной отрасли. В этом случае функционал примет вид

$$I = \int_0^1 \left[ \lambda_1 \cdot (x_3(t) - r^*)^2 - u_2 \cdot e^{-\delta t} + (\min\{0; x_1\})^4 \right] dt$$

$$+ (\min\{0; x_2\})^4 + (x_2 - V)^2 + (\min\{0; (x_3 - R_{\min})\})^4 + \\ + s_1(u_1)^2 + s_2(u_2)^2 + (\min\{0; u_1\})^4 \Big] dt .$$

Результаты вычислений показали, что введение дополнительного штрафа не привело к выполнению условия  $\dot{Z}(t) \geq 0$ . Полученный в ходе решения задачи оптимальный процесс практически такой же, как и в первом случае, лишь немного уменьшились по абсолютной величине значения первой компоненты вектора управления.

**3.** Вместо введения штрафа за нарушение условия  $\dot{Z}(t) \geq 0$  запланируем следующий режим изменения мощности восстановительной отрасли:  $\dot{Z}(t) = 0,01z$ . Тогда управляемая система и функционал примут вид

$$\frac{dx_1}{dt} = 0,01x_1 ,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = [\bar{A}x_2 - Bx_1 - B_p \cdot 0,01x_1 - u_1] / A_p ,$$

$$\frac{dx_3}{dt} = -K(x_3 - r^*) - Dx_2 - D_p \frac{dx_2}{dt} + x_1 ,$$

$$x_1(0) = x_1^0, \quad x_2(0) = x_2^0, \quad x_3(0) = x_3^0 ,$$

$$I = \int_0^1 \left[ \lambda_1 \cdot (x_3(t) - r^*)^2 - u_1 \cdot e^{-\delta t} + (\min\{0; x_1\})^4 + (\min\{0; x_2\})^4 + \right. \\ \left. + (x_2 - V)^2 + (\min\{0; (x_3 - R_{\min})\})^4 + s_1(u_1)^2 \right] dt .$$

Управлять теперь будем только непроизводственным потреблением, т.е.  $p = u_1$ , и пусть начальное управление  $u_1^I(t) \equiv 0,1$ .

На рис. 6–9 представлены графики опорного и полученного в результате вычислений оптимального процессов.

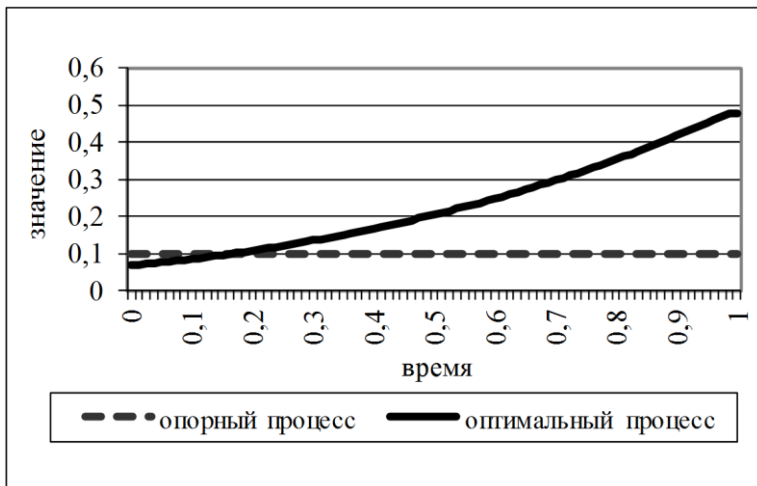


Рис. 6. Управление

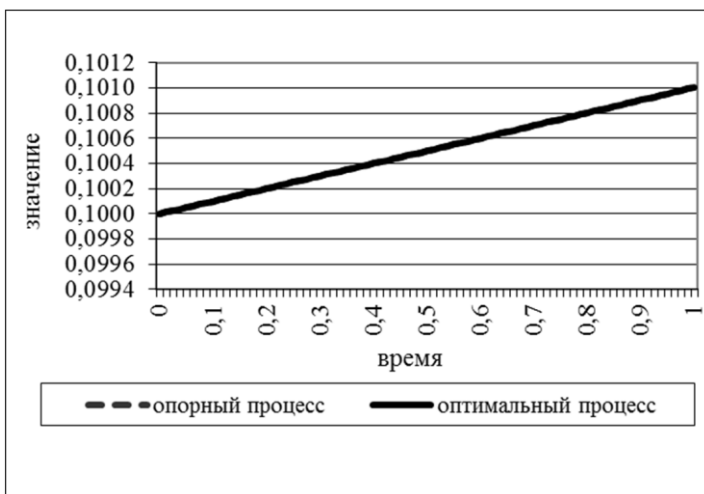


Рис. 7. Первая компонента вектора состояния

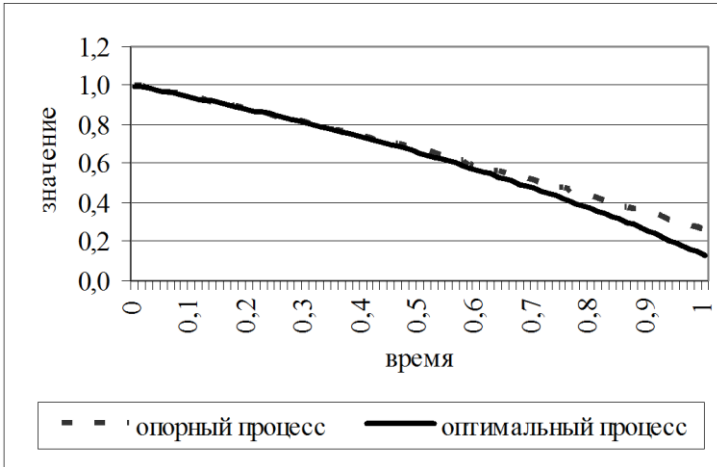


Рис. 8. Вторая компонента вектора состояния

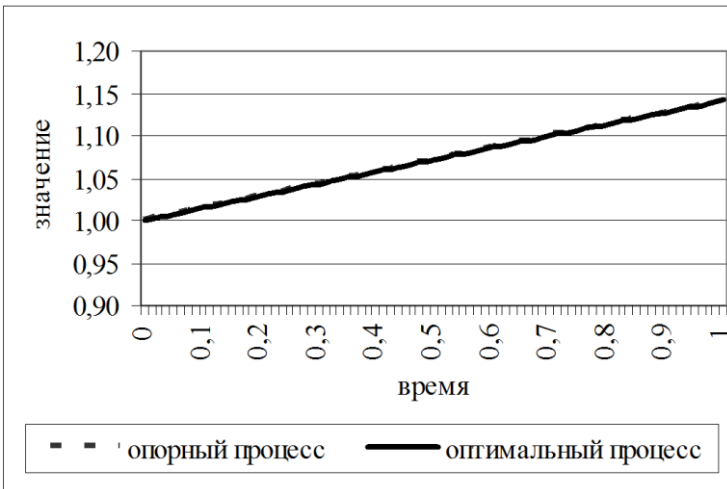


Рис. 9. Третья компонента вектора состояния

В данном случае потребление надо сначала немного уменьшить, а затем увеличивать (от 0,06 до 0,49). Однако существенно повлиять на состояние системы при этом не удастся: для всех компонент вектора состояния оптимальный процесс

близок к опорному процессу (кривые на графиках почти совпадают). Получено лишь небольшое улучшение функционала.

Итерационный процесс улучшения функционала отражен в следующих таблицах: результаты решения данной задачи алгоритмами слабого улучшения при  $\alpha_{start} = 1$  – в таблице 9, при  $\alpha_{start} = 0,7$  – в таблице 10; результаты решения данной задачи алгоритмами сильного улучшения при  $\alpha_{start} = 1$  – в таблице 11, при  $\alpha_{start} = 0,7$  – в таблице 12.

Таблица 9.

Базовый алгоритм слабого улучшения			Модифицированный алгоритм слабого улучшения		
Номер итерации	Значение параметра $\alpha$	Значение функционала	Номер итерации	Значение параметра $\alpha$	Значение функционала
0	—	0,17018	0	—	0,17018
1	1	0,13655	1	0,9708	0,13654
2	1	0,13654	2	0,4757	0,13653

Таблица 10.

Базовый алгоритм слабого улучшения			Модифицированный алгоритм слабого улучшения		
Номер итерации	Значение параметра $\alpha$	Значение функционала	Номер итерации	Значение параметра $\alpha$	Значение функционала
0	—	0,17018	0	—	0,17018
1	0,7	0,13814	1	0,993	0,13649
2	0,7	0,13656	2		
3	0,7	0,13652	3		

Таблица 11.

Базовый алгоритм сильного улучшения			Модифицированный алгоритм сильного улучшения		
Номер итерации	Значение параметра $\alpha$	Значение функционала	Номер итерации	Значение параметра $\alpha$	Значение функционала
0	—	0,17018	0	—	0,17018
1	1	0,13655	1	1	0,13655
2	1	0,13654	2	1	0,13654

Таблица 12.

Базовый алгоритм сильного улучшения			Модифицированный алгоритм сильного улучшения		
Номер итерации	Значение параметра $\alpha$	Значение функционала	Номер итерации	Значение параметра $\alpha$	Значение функционала
0	—	0,17018	0	—	0,17018
1	0,7	0,13657	1	0,7	0,13657
2	0,7	0,13652	2	0,7271	0,13640

Данная задача оптимального управления достаточно хорошо решается базовыми алгоритмами при  $\alpha = 1$  на всех итерациях, а в этом случае модифицированные алгоритмы не имеют преимуществ перед базовыми по времени вычислений. Минимумы функционала, найденные базовыми и модифицированными алгоритмами при  $\alpha = 1$  практически совпали. Когда начальное значение параметра задавалось равным 0,7, модифицированным алгоритмам для получения решения требовалось меньше итераций, чем базовым, при этом минимум функционала находился немного точнее.

Среди рассмотренных сценариев эколого-экономической системы наибольшую полезность (соответствующую наимень-

шему значению функционала) имеет сценарий, при котором мощности восстановительной отрасли уменьшаются (например, направляются на производство продукции вместо восстановления ресурса). Это может быть связано с достаточно мощным процессом естественного восстановления природного ресурса.

### Литература

1. БАТУРИН В.А., УРБАНОВИЧ Д.Е. *Приближенные методы оптимального управления, основанные на принципе расширения*. – Новосибирск: Наука. Сиб. предприятие РАН, 1997. – 175 с.
2. БАТУРИН В.А., ЧЕРЕМНЫХ С.В. *Управление выбором параметров в алгоритмах слабого улучшения второго порядка для задач оптимального управления // Известия РАН. Теория и системы управления*. – 2006. – №2. – С. 65–72.
3. ВАСИЛЬЕВ О.В., ТЯТЮШКИН А.И. *Об одном методе решения задач оптимального управления, основанном на принципе максимума // Журн. вычисл. мат. и мат. физики*. – 1981. – №6. – С. 1376–1384.
4. ГУРМАН В.И., БАТУРИН В.А., РАСИНА И.В. *Приближенные методы оптимального управления*. – Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1983. – 178 с.
5. ГУРМАН В.И., РАСИНА И.В. *О практических приложениях достаточных условий сильного относительного минимума // Автоматика и телемеханика*. – 1979. – №10. – С. 12–18.
6. КРОТОВ В.Ф., ГУРМАН В.И. *Методы и задачи оптимального управления*. – М.: Наука, 1973. – 448 с.
7. КРОТОВ В.Ф., ФЕЛЬДМАН И.Н. *Итерационный метод решения задач оптимального управления // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика*. – 1983. – №2. – С. 160–168.
8. ЛЮБУШИН А.А., ЧЕРНОУСЬКО Ф.Л. *Метод последовательных приближений для расчета оптимального управления // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика*. – 1983. – №2. – С. 147–159.

9. *Модели управления природными ресурсами* / Под ред. В.И. Гурмана. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит-ры, 1981. – 264 с.
10. *Новые методы улучшения управляемых процессов* / В.И. Гурман [и др.]. – Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1987. – 183 с.
11. ЧЕРЕМНЫХ С.В. *Управление выбором параметров в алгоритмах сильного улучшения* // Труды IX Международной Четаевской конференции «Аналитическая механика, устойчивость и управление движением» (Иркутск – оз. Байкал, 12–16 июня 2007 г.), Т. 3. – Иркутск, 2007. – С. 268–279.
12. ЧЕРЕМНЫХ С.В. *Автоматизация выбора значений параметров в алгоритмах улучшения второго порядка* // Труды XIV Байкальской Международной школы-семинара «Методы оптимизации и их приложения» (Иркутск – Северобайкальск, 2–8 июля 2008 г.), Т. 2. – Иркутск, 2008. – С. 211–221 (на диске).
13. *Эколого-экономическая стратегия развития региона. Математическое моделирование и системный анализ на примере Байкальского региона* / В.Е. Викулов, В.И. Гурман, Е.В. Данилина и др. – Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1990. – 184 с.
14. BATURIN V.A. *First-order improvement method for the problems of optimal control of logic-dynamic systems* // *Nonlinear Analysis*. – 2006. – Vol. 64, No. 2. – P. 288–294.
15. JACOBSON D.H. *New second-order and first-order algorithms for determining optimal control. A differential programming approach* // *J. Optimization Theory and Application*. – 1968. – Vol. 2, No. 4. – P. 441–440.
16. ORTEGA J.M., RHEINBOLDT W.C. *Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables*. – Academic Press, NY, 1970. – 572 p.



## **THE SECOND ORDER METHODS FOR THE OPTIMAL CONTROL PROBLEMS**

**Vladimir Baturin**, Institute of Systems Dynamics and Control Theory of the Siberian Branch of RAS, Irkutsk, Doctor of Science, professor (rozen@icc.ru).

**Svetlana Cheremnykh**, Irkutsk Euro-Asian Linguistic Institute of the Federal State Government-Funded Educational Organization of Higher Professional Education “Moscow State Linguistic University”, Irkutsk, Cand.Sc. (sv157@rambler.ru).

*Abstract: The paper considers the iterative improvement algorithms, the efficiency of which substantially depends on the chosen parameters values. The problem of control of these parameters is formulated and discussed. We designed the modified algorithms where parameters are automatically adjusted at each iteration. The original and modified algorithms are applied to solve the problem of optimal control for the ecology-economic system.*

**Keywords:** optimal control, iterative improvement algorithm, strong improvement, weak improvement, adaptive parameters adjustment.

*Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии П.В. Пакиным*

*Поступила в редакцию 08.10.2015.*

*Опубликована 31.03.2016.*

УДК 519.85 + 517.977.58

ББК 22.18 + 22.19

## **РАЗРАБОТКА ИНТЕРВАЛЬНЫХ МЕТАЭВРИСТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ МИНИМИЗАЦИИ ДЛЯ ПОИСКА ОПТИМАЛЬНОГО ПРОГРАММНОГО УПРАВЛЕНИЯ<sup>1</sup>**

**Пантелеев А. В.<sup>2</sup>, Пановский В. Н.<sup>3</sup>**

*(Московский авиационный институт, Москва)*

*Разработаны алгоритмическое и программное обеспечение метаэвристических интервальных методов глобальной условной оптимизации (усредненных концов путей, стохастической сетки, разбросанного поиска) и методика их применения для решения задачи поиска оптимального программного управления нелинейными детерминированными системами. Приведено решение прикладной задачи трехмерного сближения с маневрирующим объектом, проведен сравнительный анализ эффективности.*

Ключевые слова: интервальные методы, метаэвристические методы, глобальная условная оптимизация, оптимальное управление.

### **1. Введение**

В современной математике достаточно большое внимание уделяется решению задач глобальной оптимизации, которые возникают, например, в ходе выбора наилучших параметров конструкций самолетов, вертолетов, космических аппаратов

---

<sup>1</sup> Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научных проектов №16-31-00115 мол\_а, №16-07-00419 А.

<sup>2</sup> Андрей Владимирович Пантелеев, доктор физико-математических наук, профессор (avpanteleev@inbox.ru).

<sup>3</sup> Валентин Николаевич Пановский, аспирант (panovskiy.v@yandex.ru).

(веса, дальности полета, аэродинамических характеристик). Существующие численные методы используют разнообразные подходы, но их использование связано с большими вычислительными затратами, излишними требованиями к постановке задачи, трудностями в достижении сходимости метода [9, 12].

В статье предлагаются новые методы поиска глобального условного экстремума функций многих переменных, использующие аппарат интервального анализа [8, 10, 11, 13]. Существующие интервальные методы оптимизации можно разделить на методы безусловной оптимизации (алгоритмы Мура–Скелбоу, Ичиды–Фуджи, Дюсселя, интервальный алгоритм «имитации отжига», метод случайного интервального дробления и др. [15–17]) и условной оптимизации (методы Хансена, Мура и др. [11, 14]).

Предлагаемые интервальные методы глобальной условной оптимизации относятся к классу метаэвристических методов. Метаэвристическим алгоритмом называют алгоритм, не имеющий строгого обоснования, но, тем не менее, позволяющий найти приемлемое решение задачи в большинстве практически значимых случаев. Он не гарантирует нахождения лучшего решения, не гарантирует нахождения решения, даже если оно существует («проскакивание решения»). Однако существенным достоинством таких алгоритмов является их низкая вычислительная сложность, что позволяет их применять для решения задач повышенной трудности, не накладывая существенных ограничений на элементы постановок задач (дифференцируемость, выпуклость, ограниченность и т.д.). При этом необходимые и достаточные условия экстремума [4] в алгоритмах не используются. Метаэвристические методы объединяют в себе один или несколько эвристических методов (процедур), опирающихся на стратегию более высокого уровня.

Существующие численные методы поиска оптимального управления включают в себя достаточно большое количество методов, которые используют принцип максимума Понтрягина и уравнение Беллмана, а также прямые методы, например, градиентные методы (методы первого порядка), методы второго порядка, основывающиеся на тейлоровской аппроксимации

функции Кротова–Беллмана, разнообразные методы улучшения и др. [1, 7]

Несмотря на большое количество проведенных исследований, проблема численного решения нелинейных задач оптимального управления остается актуальной и требующей разработки новых подходов, к которым относится применение интервального анализа совместно с метаэвристическими стратегиями [2–6]. Предлагаемые в статье методы дают возможность нахождения глобального экстремума критерия оптимальности для достаточного широкого класса задач.

## 2. Используемые понятия и обозначения

Основной идеей интервального анализа является окружение вещественных чисел интервалами, а вещественных векторов – интервальными векторами, или параллелотопами [10]. Для обозначения интервала используются строчные латинские буквы, заключенные в квадратные скобки ( $[a]$ ,  $[b]$ ,  $[c]$ , ...) или привычное представление ( $[a_i; a_u]$ ,  $[b_i; b_u]$ ,  $[c_i; c_u]$ , ...), где указывается нижняя и верхняя границы. Для задания параллелотопа применяется то же обозначение с полужирным начертанием букв ( $[X] = [x_1] \times \dots \times [x_n]$ ).

Для произвольного интервала  $[x]$  определены: нижняя граница

$$lb([x]) = \underline{[x]} = \sup \{ \xi \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\} \mid \forall \zeta \in [x]: \xi \leq \zeta \},$$

верхняя граница

$$ub([x]) = \overline{[x]} = \inf \{ \xi \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\} \mid \forall \zeta \in [x]: \zeta \leq \xi \},$$

ширина непустого интервала

$$\omega([x]) = \overline{[x]} - \underline{[x]},$$

средняя точка ограниченного и непустого интервала

$$mid([x]) = \frac{\underline{[x]} + \overline{[x]}}{2}.$$

Те же параметры определены и для параллелотопов. Нижняя, верхняя границы и средняя точка становятся векторами,

ширина же рассчитывается как максимум из ширин всех образующих параллелотоп компонентов.

Интервальной оболочкой множества  $X \subset \mathbb{R}^n$  называется параллелотоп с наименьшей шириной, который содержит  $X$ . Если множество берется в квадратные скобки, это значит, что рассматривается интервальная оболочка этого множества.

Пусть  $\circ$  – некоторая бинарная операция, тогда  $[x] \circ [y] = [\{\xi_1 \circ \xi_2 \mid \xi_1 \in [x], \xi_2 \in [y]\}]$ . Пусть  $f$  – некоторый унарный оператор, тогда  $f([x]) = [\{f(\xi) \mid \xi \in [x]\}]$ . Описанная бинарная операция позволяет определить арифметические операции над интервалами [10].

Множество интервалов обозначается как  $\mathbb{IR}$ , интервальных векторов –  $\mathbb{IR}^n$ . Пусть имеется некоторая функция  $f$ , действующая из  $\mathbb{R}^n$  в  $\mathbb{R}$ . Функция  $[f](\cdot)$  называется интервальной функцией включения для  $f$ , действующей из  $\mathbb{IR}^n$  в  $\mathbb{IR}$ , если  $\{f(\xi) \mid \xi \in [\mathbf{x}]\} \subseteq [f]([\mathbf{x}])$ ,  $\forall [\mathbf{x}] \in \mathbb{IR}^n$ . Функция включения позволяет получить априорную оценку множества значений функции, даже если оно не является выпуклым или связным (если вместо переменных используются интервалы и соответствующие арифметические операции, то полученная оценка называется оценкой прямого образа функции).

### 3. Постановка интервальной задачи $\varepsilon$ -минимизации

Классическая постановка задачи условной оптимизации имеет вид: пусть имеются параллелотоп  $[\mathbf{s}]$ , задающий множество допустимых решений, и целевая функция  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Требуется найти точку  $x^*$ , такую что

$$(1) \quad f(x^*) = \min_{x \in [\mathbf{s}]} f(x) \Leftrightarrow \forall x \in [\mathbf{s}]: f(x^*) \leq f(x).$$

Приведем интервальный аналог поставленной задачи: пусть имеются параллелотоп  $[\mathbf{s}]$ , задающий множество допустимых решений, целевая функция  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , малое число  $\varepsilon > 0$ . Требуется найти параллелотоп  $[\mathbf{p}]^*$ , такой что

$$(2) \quad [\mathbf{p}]^* \subseteq [\mathbf{s}], \omega([\mathbf{p}]^*) \leq \varepsilon, \exists [\mathbf{x}] \subseteq [\mathbf{s}], \omega([\mathbf{x}]) \geq \varepsilon, \overline{[f]}([\mathbf{x}]) < \overline{[f]}([\mathbf{p}]^*).$$

#### **4. Стратегии интервальных метаэвристических методов глобальной условной оптимизации**

##### **4.1. МЕТОД УСРЕДНЕННЫХ КОНЦОВ ПУТЕЙ**

В основе метода лежат следующие процедуры:

- построение случайной сетки на области поиска (представляет собой разбиение целевого параллелопада  $[\mathbf{s}]$  на множество  $\{[\mathbf{n}]_i\}_{i=1}^N$  непересекающихся параллелопадов, таких что

$$[\mathbf{s}] = \bigcup_{i=1}^N [\mathbf{n}]_i);$$

- выбор случайного параллелопада из сетки;
- поиск пути (последовательности параллелопадов, в которой каждый следующий параллелопад имеет общую гиперплоскость с предыдущим) до «оптимального» решения по сетке;
- полученный в ходе выполнения описанных процедур «перспективный» параллелопад запоминается.

Процедуры повторяются несколько раз. Из полученных параллелопадов берутся их средние точки, на основе которых строится новый целевой параллелопад (он рассматривается как усредненный из «перспективных» параллелопадов, являющихся концами последовательностей, полученных в результате поиска, начинающегося с некоторого параллелопада, принадлежащего построенной сетке), к которому снова применяется метод. Так повторяется до тех пор, пока ширина целевого параллелопада не будет удовлетворять условию точности.

##### **4.2. МЕТОД СТОХАСТИЧЕСКОЙ СЕТКИ**

Стратегия данного метода заключается в построении на целевом параллелопаде сетки (множества непересекающихся параллелопадов, объединение которых дает искомый целевой параллелопад) случайным образом. Далее для некоторых элементов сетки ищется оценка прямого образа функции, выбирается наиболее «перспективный» параллелопад (с наименьшим

значением нижней грани оценки прямого образа). Такая процедура повторяется несколько раз. Средние точки выбранных параллелотопов определяют новый параллелотоп, к которому снова применяется алгоритм. Так повторяется до тех пор, пока ширина целевого параллелотопа не будет удовлетворять условию точности.

### 4.3. МЕТОД ИНТЕРВАЛЬНОГО РАЗБРОСАННОГО ПОИСКА

В основе точечного метода разбросанного поиска (scatter search) лежит обработка множества элементарных исходов, состоящих из найденных на предыдущем этапе «перспективных» решений. Фактически обработка заключается в комбинации, улучшении и обновлении множества элементарных исходов. В основе интервального метода лежат пять методов: метод генерации разнообразных решений, методы конструирования и обновления множества элементарных исходов, метод генерации подмножеств, метод комбинации решений, метод улучшения решений.

Процедура повторяется до тех пор, пока ширина целевого параллелотопа не будет удовлетворять условию точности.

## 5. Алгоритмы интервальных метаэвристических методов глобальной условной оптимизации

### 5.1. МЕТОД УСРЕДНЕННЫХ КОНЦОВ ПУТЕЙ

*Шаг 1.* Задать  $[s]$  – область поиска;  $\varepsilon$  – параметр точности (отвечает за ширину итогового параллелотопа);  $w$  – «скорость» уменьшения параллелотопа;  $p_{amount}$  – количество точек для построения случайной сетки;  $p_{attempts}$  – количество повторений;  $r_{max}$  – максимальное количество возвращений (используется во время поиска пути до «оптимального» решения). Положить целевой параллелотоп  $[t] = [s]$ .

*Шаг 2.* Если  $\omega([t]) < \varepsilon$ , то закончить работу алгоритма, вернув параллелотоп  $[t]$ . В противном случае положить множество концов путей (последний элемент в последовательности параллелотопов, представляющей путь)  $E = \emptyset$  и перейти к шагу 3.

*Шаг 3.* Случайным образом, используя равномерный закон распределения, выбрать в целевом параллелотопе  $p_{amount}$  точек.

*Шаг 4.* Разбить целевой параллелотоп относительно выбранных на шаге 3 точек на множество параллелотопов (так как любой параллелотоп является  $n$ -мерным параллелепипедом ( $n$  – размерность задачи), то разбиение можно делать следующим образом: в каждой точке строятся  $n$  гиперплоскостей, каждая из которых параллельна одной паре сторон данного параллелепипеда; совокупность этих гиперплоскостей порождает сетку на параллелотопе).

*Шаг 5.* Из полученной сетки выбрать случайный параллелотоп  $[p]$ .

*Шаг 6.* Процедура поиска пути от параллелотопа  $[p]$  к «оптимальному» параллелотопу (путь – последовательность параллелотопов  $\{[w]_i\}_{i=1}^m$ , таких, что все параллелотопы  $[w]_i, [w]_{i+1}, i = 1, \dots, m - 1$ , граничат, т.е. имеют общую гиперплоскость):

*Шаг 6.1.* Из параллелотопов сетки сформировать множество параллелотопов  $N = \{[n]_i\}_{i=1}^l$ , граничащих с параллелотопом  $[p]$ . Поместить в список параллелотопов, образующих путь, начальный элемент ( $P = \{[p]\}$ ) и задать количество возвратов  $r = 0$ .

*Шаг 6.2.* Если  $r \leq r_{max}$ , то перейти к шагу 6.3. В противном случае перейти к шагу 6.6.

*Шаг 6.3.* Выбрать случайный параллелотоп  $[n]_j \in N$ , удалить его из  $N$ . Если

$$[f]([n]_j) \leq [f]([p]),$$

то перейти к шагу 6.4. В противном случае перейти к шагу 6.5.

*Шаг 6.4.* Если  $[n]_j \in P$ , то положить  $r = r + 1$  и перейти к шагу 6.2. В противном случае добавить  $[n]_j$  в  $P$ . Положить  $[p] = [n]_j$  и вернуться к шагу 6.1.

*Шаг 6.5.* Если  $N \neq \emptyset$ , то перейти к шагу 6.3, в противном случае перейти к шагу 6.6.

*Шаг 6.6.* Параллелотоп  $[p]$  добавить в множество концов путей  $E$ . Переход к шагу 7.



*Шаг 7.* Если в множестве  $E$  содержится  $p_{attempts}$  элементов, то перейти к шагу 8. В противном случае перейти к шагу 3.

*Шаг 8.* Найти вектор

$$m = \frac{1}{p_{attempts}} \sum_{i=1}^{p_{attempts}} mid([\mathbf{e}]_i), \text{ где } [\mathbf{e}]_i \in E.$$

Заменить параллелотоп  $[\mathbf{t}]$  на параллелотоп

$$\left[ m_1 - \frac{w}{2} \cdot wid, m_1 + \frac{w}{2} \cdot wid \right] \times \dots \times \left[ m_n - \frac{w}{2} \cdot wid, m_n + \frac{w}{2} \cdot wid \right] \cap [\mathbf{t}],$$

где  $wid = \omega([\mathbf{t}])$ . Перейти к шагу 2.

## 5.2. МЕТОД СТОХАСТИЧЕСКОЙ СЕТКИ

*Шаг 1.* Задать  $[\mathbf{s}]$  – область поиска;  $\varepsilon$  – параметр точности (отвечает за ширину итогового параллелотопа);  $w$  – «скорость» уменьшения параллелотопа;  $p_{amount}$  – количество гиперплоскостей для построения случайной сетки;  $p_{attempts}$  – количество повторений;  $p_{analyze}$  – количество анализируемых параллелотопов. Положить целевой параллелотоп  $[\mathbf{t}] = [\mathbf{s}]$ .

*Шаг 2.* Если  $\omega([\mathbf{t}]) < \varepsilon$ , то закончить работу алгоритма, вернуть параллелотоп  $[\mathbf{t}]$ . В противном случае положить множество выбранных параллелотопов  $E = \emptyset$  и перейти к шагу 3.

*Шаг 3.* Случайным образом, используя равномерный закон распределения, выбрать в целевом параллелотопе  $p_{amount}$  точек.

*Шаг 4.* Разбить целевой параллелотоп относительно выбранных на шаге 3 точек на множество параллелотопов  $V = \{[\mathbf{b}]_j\}_{j=1}^l$ . Так как любой параллелотоп является  $n$ -мерным параллелепипедом ( $n$  – размерность задачи), то разбиение можно реализовать следующим образом: в каждой точке строится гиперплоскость, параллельная одной (случайно выбранной) паре сторон данного параллелепипеда; совокупность этих гиперплоскостей порождает разбиение исходного параллелотопа. В полученном множестве следует удалять случайно выбранные параллелотопы до тех пор, пока количество элементов не станет равным  $p_{analyze}$ . В результате получится стохастическая сетка.

*Шаг 5.* Из полученной сетки выбрать параллелотоп

$$[\mathbf{p}] = \text{Arg} \min_{j=1, \dots, l} [f](\underline{[\mathbf{b}]_j})$$

и добавить его в множество  $E$ .

*Шаг 6.* Если в множестве  $E$  содержится  $p_{attempts}$  элементов, то перейти к шагу 7. В противном случае перейти к шагу 3.

*Шаг 7.* Найти вектор

$$m = \frac{1}{p_{attempts}} \sum_{i=1}^{p_{attempts}} mid([\mathbf{e}]_i), \text{ где } [\mathbf{e}]_i \in E.$$

Заменить параллелотоп  $[\mathbf{t}]$  на параллелотоп

$$\left[ m_1 - \frac{w}{2} \cdot wid, m_1 + \frac{w}{2} \cdot wid \right] \times \dots \times \left[ m_n - \frac{w}{2} \cdot wid, m_n + \frac{w}{2} \cdot wid \right] \cap [\mathbf{t}],$$

где  $wid = \omega([\mathbf{t}])$ . Перейти к шагу 2.

### 5.3. МЕТОД ИНТЕРВАЛЬНОГО РАЗБРОСАННОГО ПОИСКА

*Шаг 1.* Задать  $[\mathbf{s}]$  – область поиска;  $\varepsilon$  – параметр точности (отвечает за ширину итогового параллелотопа);  $r_{gm}$ ,  $r_{rsc}$ ,  $r_{cs}$ ,  $r_{im} \in (0;1)$  – доли для генерации;  $p_{size}$ ,  $rs_{size}$ ,  $sub_{size}$  – размеры множеств  $P$ ,  $RS$ ,  $SUB$  соответственно;  $max_{im}$  – количество точек для улучшения;  $\sigma$  – величину влияния ширины.

*Шаг 2. Метод генерации разнообразных решений.* Сформировать множество  $P$  из  $p_{size}$  параллелотопов  $[m_1 - \omega_1; m_l + \omega_1] \times \dots \times [m_1 - \omega_1; m_l + \omega_1] \cap [\mathbf{s}]$ , где величина  $\omega_k = 0,5 \cdot r_{gm} \cdot \omega([\mathbf{s}])$ ,  $m_k$  – случайная точка на отрезке, соответствующем  $k$ -й компоненте параллелотопа  $[\mathbf{s}]$ . Отсортировать множество  $P$  по возрастанию величины  $[f](\underline{[\mathbf{p}]_i})$ , где  $[\mathbf{p}]_i \in P$ .

*Шаг 3. Метод конструирования множества элементарных исходов.* Сформировать множество  $RS$  из  $[r_{rsc} \cdot p_{size}]$  (здесь  $[\cdot]$  означает целую часть от числа) первых элементов множества  $P$ . Выбранные элементы удалить из  $P$ . Создать множество

$$D = \left\{ d_i = \left[ \sum_{j=1}^{[r_{rsc} \cdot p_{size}]} h_{\infty}([\mathbf{p}]_i, [\mathbf{rs}]_j) \right] \right\}_{i=1}^{p_{size} - [r_{rsc} \cdot p_{size}]},$$

где  $h_{\infty}([a], [b])$  – метрика Хаусдорфа [10],  $[\mathbf{rs}]_j \in RS$ . Упорядочить множество  $D$  расстояний между параллелотопом  $[\mathbf{p}]_i$  (оставшимся после удаления) и параллелотопами  $[\mathbf{rs}]_j \in RS$  по убыва-

нию. В множество  $RS$  добавить  $(rs_{size} - [r_{rsc} \cdot p_{size}])$  параллелотопов из  $P$ , которым соответствуют первые (наибольшие) значения из  $D$  (добавляются наиболее удаленные параллелотопы от имеющихся в  $RS$  для поддержания разнообразия).

*Шаг 4.* Отсортировать множество  $RS$  элементарных исходов по возрастанию величины  $[f](\mathbf{rs}_i)$ , где  $\mathbf{rs}_i \in RS$ .

*Шаг 5.* Если  $\omega(\mathbf{rs}_1) \geq \varepsilon$ , то перейти к шагу 6. В противном случае закончить работу алгоритма, вернув параллелотоп  $\mathbf{rs}_1$ .

*Шаг 6. Метод генерации подмножеств.* Создать множество  $SUB$ , состоящее из всех подмножеств размера  $sub_{size}$  множества  $RS$ .

*Шаг 7.* Создать множество комбинированных решений  $CS = \emptyset$ .

*Шаг 8. Метод комбинации решений.* Для каждого подмножества

$$sub_i = \left\{ [s]_j \in RS, j = 1, \dots, sub_{size} \right\} \in SUB$$

выполнить: составить вектор

$$mw^i = \left( \min_{j=1, \dots, sub_{size}} \omega([s_1]_j^i), \dots, \min_{j=1, \dots, sub_{size}} \omega([s_n]_j^i) \right)^T,$$

создать параллелотоп  $[\mathbf{u}]^i = \bigcup_{j=1}^{sub_{size}} [s]_j^i$ , сгенерировать  $n$  случайных

точек  $\left\{ p^k \in [\mathbf{u}]^i \right\}_{k=1}^n$ . Построить  $n$  параллелотопов

$$\left[ [p_1^k - \omega_1; p_1^k + \omega_1] \times \dots \times [p_n^k - \omega_n; p_n^k + \omega_n] \cap [\mathbf{u}]^i \right]_{k=1}^n$$

на сгенерированных точках, где  $\omega_k = 0,5 \cdot r_{cs} \cdot mw_k^i$ , и добавить их в множество  $CS$ .

*Шаг 9.* Создать множество улучшенных решений  $IS = \emptyset$ .

*Шаг 10. Метод улучшения решений.* Для каждого из параллелотопов  $[\mathbf{cs}]_i \in CS$  сгенерировать случайным образом множество  $\{p^k = (p_1^k, \dots, p_n^k)^T \in [\mathbf{cs}]_i\}_{k=1}^{\max_{im}}$  точек. Выбрать точку  $p^* = \text{Arg} \min_{k=1, \dots, \max_{im}} f(p^k)$ . Добавить в множество  $IS$  параллелотоп

$\left[ p_1^* - \omega_1; p_1^* + \omega_1 \right] \times \dots \times \left[ p_n^* - \omega_n; p_n^* + \omega_n \right] \cap [\mathbf{cs}]_i$ , где величина  $\omega_j = 0,5 \cdot r_{im} \cdot \omega([\mathbf{cs}]_i)$ .

*Шаг 11. Метод обновления множества элементарных исходов.* Для каждого параллелопада  $[\mathbf{is}]_i \in IS$ , если есть такое число  $j$ , для которого выполнено соотношение

$$\underline{[f]}([\mathbf{is}]_i) + \sigma \cdot \omega([\mathbf{is}]_i) \leq \underline{[f]}([\mathbf{is}]_j) + \sigma \cdot \omega([\mathbf{is}]_j),$$

то вставить перед  $j$ -м параллелопадом в множестве  $RS$  параллелопад  $[\mathbf{is}]_i$  и последний элемент множества  $RS$  удалить.

*Шаг 12.* Вернуться к шагу 5.

## 6. Поиск оптимального программного управления непрерывными системами

### 6.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Поведение модели объекта управления описывается дифференциальным уравнением

$$(3) \quad \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)),$$

где  $t$  – непрерывное время,  $t \in T = [t_0; t_1]$  – заданный промежуток времени функционирования системы;  $x \in \mathbb{R}^n$  – вектор состояния системы;  $u \in [\mathbf{U}] \subset \mathbb{R}^q$  – вектор управления;  $[\mathbf{U}]$  – множество допустимых значений управления, представляющее собой параллелопад;  $f(t, x, u) = (f_1(t, x, u), \dots, f_n(t, x, u))^T$  – непрерывная вектор-функция.

Начальное состояние задано и равно

$$(4) \quad x(t_0) = x_0.$$

Конечное состояние  $x(t_1)$  должно удовлетворять условиям

$$(5) \quad \Gamma_i(x(t_1)) = 0, \quad i = 1, \dots, l,$$

где  $0 \leq l \leq n$ , функции  $\Gamma_i(x)$  – непрерывно дифференцируемы; система векторов  $\{\partial \Gamma_i(x) / \partial x_1, \dots, \partial \Gamma_i(x) / \partial x_n\}$ ,  $i = 1, \dots, l$ , линейно независима  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ .

При управлении используется информация только о времени  $t$  (применяется программное управление).

Множество допустимых процессов  $D(t_0, x_0)$  определяется как множество пар  $d = (x(\cdot), u(\cdot))$ , включающих кусочно-дифференцируемую траекторию  $x(\cdot)$  и кусочно-непрерывное управление  $u(\cdot)$ , где  $u(t) \in [\mathbf{u}] \forall t \in T$ , удовлетворяющих уравнению состояния (3), условиям (4) и (5).

На множестве допустимых процессов определен функционал качества управления

$$(6) \quad I(d) = \int_{t_0}^{t_1} f^0(t, x(t), u(t)) dt + F(x(t_1)),$$

где  $f^0(t, x, u)$ ,  $F(x)$  – заданные непрерывные функции.

Требуется найти пару  $d^* = (x^*(\cdot), u^*(\cdot)) \in D(t_0, x_0)$ , на которой достигается минимальное значение функционала (6) на множестве допустимых процессов.

## 6.2. СТРАТЕГИЯ ПОИСКА РЕШЕНИЯ

Основным элементом предлагаемой стратегии является последовательное сведение поставленной задачи к соответствующей задаче нелинейного программирования, а затем – к задаче интервальной  $\varepsilon$ -минимизации и решение последней с помощью разработанных интервальных методов.

Для более простого вычисления интегрального члена в критерии (6) к системе (3) добавляется уравнение  $\dot{x}_{n+1}(t) = f^0(t, x(t), u(t))$  с начальным условием  $x_{n+1}(t_0) = 0$ , тогда значение функционала качества (6) определяется выражением

$$I = x_{n+1}(t_1) + F(x(t_1)).$$

Для сведения к задаче со свободным правым концом траектории к терминальному члену функционала добавляются либо классические штрафные функции, характеризующие степень выполнения условий (5), либо их интервальный аналог вида

$$(7) \quad \sum_{i=1}^l R_i h_\infty^2([\Gamma_i(x(t_1)); \Gamma_i(x(t_1))], [-\xi_i; \xi_i]),$$

где

$$h_\infty([a], [b]) = [\min(h_\infty^0([a], [b]), h_\infty^0([a], [b])), \max(h_\infty^0([a], [b]), h_\infty^0([a], [b]))]$$

– метрика Хаусдорфа;

$$h_{\infty}^0([a],[b]) = \inf \{r \mid [a] \subseteq [b] + [-r;r], r \geq 0\}$$

– мера близости интервалов;  $R_i$  – величины штрафов;  $\xi_i > 0$  – величины допустимой погрешности выполнения конечного условия, которые задаются пользователем.

Искомое субоптимальное программное управление предлагается искать в двух различных классах функций: кусочно-постоянных и кусочно-линейных.

Поскольку ищется наилучшее управление в каждом из классов, не совпадающих с классом кусочно-непрерывных функций, то найденное управление является субоптимальным, рассматриваемым в качестве кандидата в решение задачи.

Так как при решении задачи применяется интервальный подход, то каждому из описанных управлений сопоставляется интервальный аналог, задаваемый интервальным вектором:

• кусочно-постоянное интервальное управление (рис. 1, а); для управления такого типа необходимо задать значения функции  $u(t)$  в  $N$  моментах времени  $\tau = t + (t_1 - t_0) \cdot i / N$ ,  $i = 0, \dots, N - 1$ , т.е. управлению можно однозначно сопоставить интервальный

вектор 
$$[u] = \underbrace{[u_1(\tau_0)] \times \dots \times [u_q(\tau_0)]}_{[u(\tau_0)]} \times \dots \times \underbrace{[u_1(\tau_{N-1})] \times \dots \times [u_q(\tau_{N-1})]}_{[u(\tau_{N-1})]}$$
; соответствующее интервальное управление

будет находиться по формуле

$$[u](t) \in [u(\tau_i)] = [\underline{u}(\tau_i); \bar{u}(\tau_i)], \tau_i \leq t < \tau_{i+1}, i = 0, \dots, N - 1;$$

• кусочно-линейное интервальное управление (рис. 1, б); для управления такого типа необходимо задать дополнительное значение управления  $u(t)$  на последнем временном интервале, поэтому интервальный вектор, который ставится в соответствие управлению, имеет вид

$$[u] = \underbrace{[u_1(\tau_0)] \times \dots \times [u_q(\tau_0)]}_{[u(\tau_0)]} \times \dots \times \underbrace{[u_1(\tau_N)] \times \dots \times [u_q(\tau_N)]}_{[u(\tau_N)]};$$
 соответствующее

ющее интервальное управление будет находиться по формуле

$$[u](t) \in \frac{\tau_{i+1} - t}{\tau_{i+1} - \tau_i} \cdot [u(\tau_i)] + \frac{t - \tau_i}{\tau_{i+1} - \tau_i} \cdot [u(\tau_{i+1})], \quad \tau_i \leq t \leq \tau_{i+1}, \quad i=0, \dots, N-1.$$

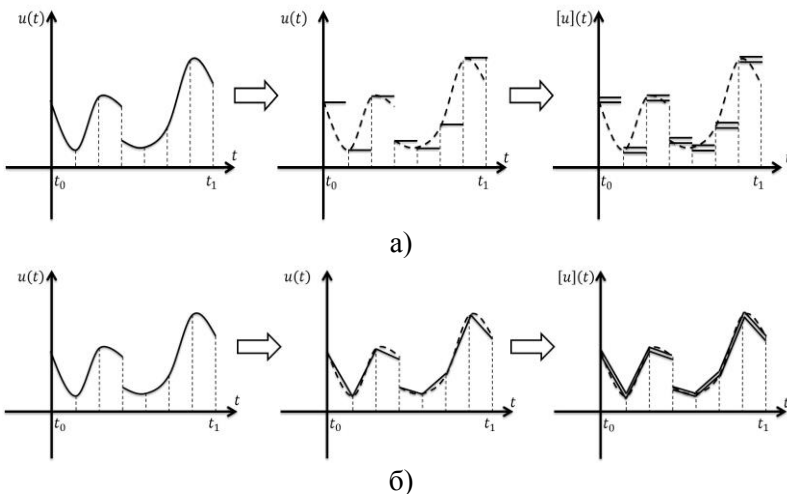


Рис. 1. Замена кусочно-непрерывного управления интервальным кусочно-постоянным («а») и кусочно-линейным («б»)

Интервальной траекторией называется решение уравнения (3) с начальным условием (4), соответствующее заданному интервальному управлению.

Если система (3), описывающая поведение модели объекта управления, нежесткая, для ее численного интегрирования применяются явные методы (методы Эйлера, Эйлера-Коши, методы Рунге–Кутты различных порядков и др.). Если же система (3) жесткая, применяются неявные методы численного интегрирования (неявный метод Эйлера, метод трапеций, Адамса–Моултона, Гира и др.). Вычисление правых частей системы (3) производится по правилам интервальной арифметики [10].

Заметим, что описанные процедуры могут быть использованы при других способах параметризации управления, напри-

мер, кусочно-полиномиальном или применении разложений по системам ортонормированных базисных функций

## 7. Программное обеспечение. Решение прикладного примера

На основе изложенных алгоритмов сформирован комплекс программ поиска оптимального программного управления. Среда разработки – Microsoft Visual Studio, язык программирования – С#.

В качестве примера рассмотрим решение задачи преследования в трехмерном пространстве, рассмотренной в [18].

Поведение модели объекта управления описывается системой дифференциальных уравнений:

$$(8) \quad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= V_x(t), \dot{V}_x(t) = u_x(t), \dot{x}^t(t) = V_x^t(t), \dot{V}_x^t(t) = u_x^t(t), \\ \dot{y}(t) &= V_y(t), \dot{V}_y(t) = u_y(t), \dot{y}^t(t) = V_y^t(t), \dot{V}_y^t(t) = u_y^t(t), \\ \dot{z}(t) &= V_z(t), \dot{V}_z(t) = u_z(t), \dot{z}^t(t) = V_z^t(t), \dot{V}_z^t(t) = u_z^t(t), \end{aligned}$$

где  $r = (x, y, z)^T$  и  $r = (x^t, y^t, z^t)^T$  – радиус-векторы, описывающие положение перехватчика и цели соответственно;  $V = (V_x, V_y, V_z)^T$  и  $V^t = (V_x^t, V_y^t, V_z^t)^T$  – векторы скоростей перехватчика и цели соответственно;  $u = (u_x, u_y, u_z)^T$  и  $u^t = (u_x^t, u_y^t, u_z^t)^T$  – векторы ускорения перехватчика (управление) и цели соответственно.

Пусть цель движется с постоянным ускорением:  $u^t = (-1, -2, 0, 1)^T$  м/с<sup>2</sup>, начальное положение цели:  $r^t = (500, -600, 500)^T$  м, скорость цели:  $V^t = (100, 100, 10)^T$  м/с, начальное положение перехватчика:  $r = (0, 0, 0)^T$  м, начальная скорость перехватчика:  $V = (150, 40, 5)^T$  м/с.

Время, за которое должен быть осуществлен перехват (координаты цели и перехватчика совпадают):  $t_1 = 50$  с.

Тогда можно задать функционал качества управления:

$$I = (x(t_1) - x^t(t_1))^2 + (y(t_1) - y^t(t_1))^2 + (z(t_1) - z^t(t_1))^2.$$

Для сглаживания искомого интервального управления в функционал добавим слагаемое



$$\Delta I = 0,001 \cdot \int_0^{t_1} (u_x^2(t) + u_y^2(t) + u_z^2(t)) dt.$$

В результате решается задача минимизации функционала  $I + \Delta I$ .

В качестве метода дискретизации были выбраны явная и неявная схемы Эйлера, область поиска

$$[\mathbf{s}] = \underbrace{[-2; 2] \times \dots \times [-2; 2]}_{3 \cdot N}$$

(для кусочно-постоянного управления) и

$$[\mathbf{s}] = \underbrace{[-2; 2] \times \dots \times [-2; 2]}_{3 \cdot (N+1)}$$

(для кусочно-линейного управления),  $N = 2$ .

Параметры метода усредненных концов путей:  $\varepsilon = 0,001$ ;  $w = 0,5$ ;  $p_{amount} = 75$ ;  $p_{attempts} = 5$ ;  $r_{max} = 5$ .

Параметры метода стохастической сетки:  $\varepsilon = 0,001$ ;  $w = 0,9$ ;  $p_{amount} = 100$ ;  $p_{attempts} = 100$ ;  $p_{analyze} = 1000$ .

Параметры метода интервального разбросанного поиска:  $\varepsilon = 0,001$ ;  $r_{gm} = 0,8$ ;  $r_{rsc} = 0,25$ ;  $r_{cs} = 0,9$ ;  $r_{im} = 0,9$ ;  $p_{size} = 100$ ;  $rs_{size} = 10$ ;  $sub_{size} = 2$ ;  $max_{im} = 1000$ ;  $\sigma = 2500$ .

На рис. 3 и 4 приведены графики траекторий цели и перехватчика, полученные с помощью интервальных кусочно-постоянных и кусочно-линейных управлений. Их сравнение с рис. 2 показывает близость результатов с найденными при использовании алгоритма пропорциональной навигации [18].

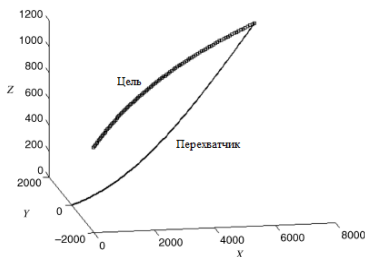


Рис. 2. График движения цели и перехватчика (при использовании алгоритма пропорциональной навигации [18])

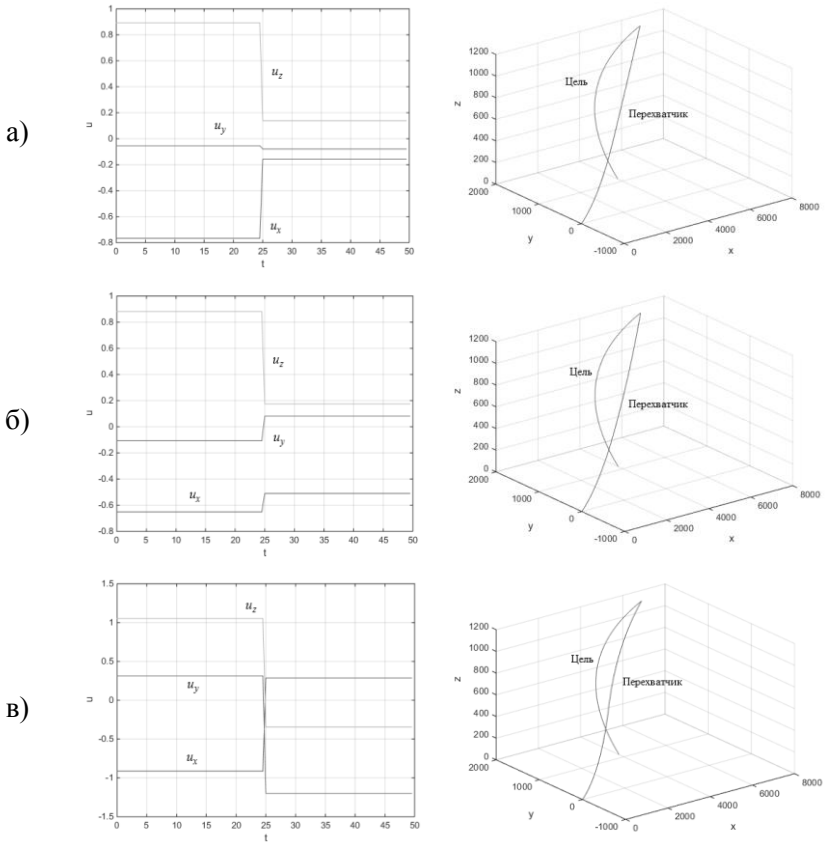


Рис. 3. Графики движения цели и перехватчика, законов изменения управления, найденные методами усредненных концов путей, стохастической сетки и интервального разброанного поиска (кусочно-постоянное управление)

В таблице 1 и 3 приведены интервалы значений критерия оптимальности, найденные в результате применения соответствующего метода интервальной минимизации в каждом из двух рассматриваемых классов управлений.

Таблица 1. Значение функционала качества управления (кусочно-постоянное управление)

Название метода	Значение функционала качества	
	Явная схема Эйлера	Неявная схема Эйлера
Метод усредненных концов путей	[0,0377; 0,0378]	[0,0371; 0,0372]
Метод стохастической сетки	[0,0359; 0,0360]	[0,0354; 0,0355]
Метод интервального разбросанного поиска	[0,0445; 0,0446]	[0,0437; 0,0438]

Таблица 2. Максимальные значения отклонения цели и перехватчика (кусочно-постоянное управление)

Название метода	Значение $\Delta_x$ ; $\Delta_y$ ; $\Delta_z$	
	Явная схема Эйлера	Неявная схема Эйлера
Метод усредненных концов путей	0,1040; 0,0501; 0,0401	0,1035; 0,04993; 0,0409
Метод стохастической сетки	0,0632; 0,0735; 0,0053	0,0631; 0,0733; 0,0051
Метод интервального разбросанного поиска	0,0910; 0,0912; 0,0317	0,0908; 0,091; 0,0315

В таблицах 2, 4 величины отклонений вычисляются как  $\Delta_x = \max |x(t_1) - x^t(t_1)|$ ,  $\Delta_y = \max |y(t_1) - y^t(t_1)|$ ,  $\Delta_z = \max |z(t_1) - z^t(t_1)|$ .

Полученные данные о максимальных значениях отклонения являются приемлемыми с практической точки зрения и свидетельствуют об успешности применения разработанных алгоритмов. Наиболее точным оказался метод стохастической сетки, кусочно-линейное управление (таблица 3, 4) предпочтительнее по величине функционала, чем кусочно-постоянное (таблица 1, 2).

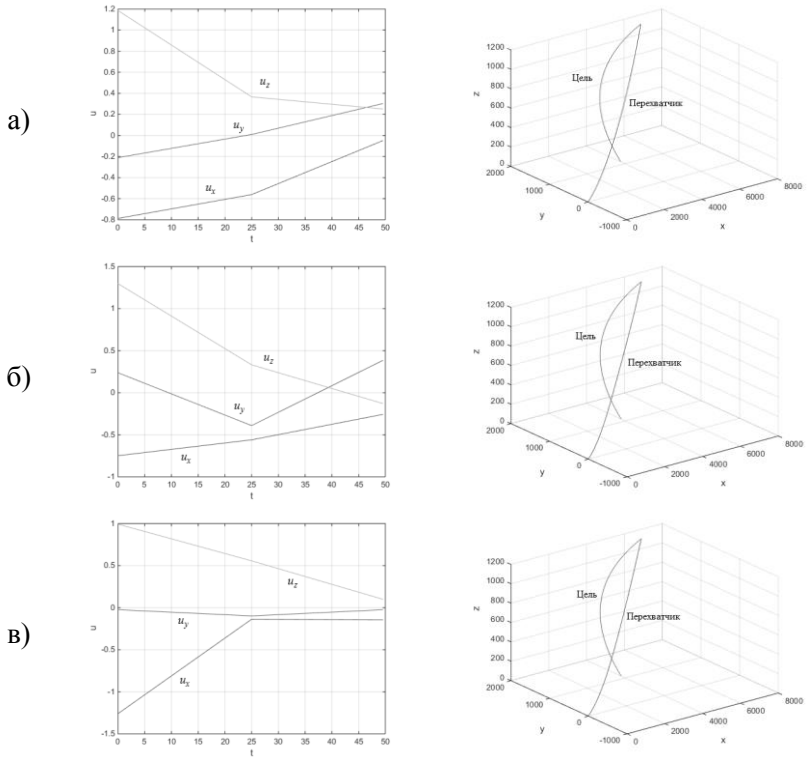


Рис. 4. Графики движения цели и перехватчика, законов изменения управления, найденные методами усредненных концов путей, стохастической сетки и интервального разброанного поиска (кусочно-линейное управление)

Таблица 3. Значение функционала качества управления (кусочно-линейное управление)

Название метода	Значение функционала качества	
	Явная схема Эйлера	Неявная схема Эйлера
Метод усредненных концов путей	[0,0347; 0,0348]	[0,0343; 0,0344]
Метод стохастической сетки	[0,0341; 0,0341]	[0,0340; 0,0341]

Название метода	Значение функционала качества	
	Явная схема Эйлера	Неявная схема Эйлера
Метод интервального разбро- санного поиска	[0,0345; 0,0346]	[0,0339; 0,0340]

Таблица 4. Максимальные значения отклонения цели и перехватчика (кусочно-линейное управление)

Название метода	Значение $\Delta_x$ ; $\Delta_y$ ; $\Delta_z$	
	Явная схема Эйлера	Неявная схема Эйлера
Метод усредненных концов путей	0,0607; 0,0698; 0,0060	0,0609; 0,0697; 0,00055
Метод стохастической сетки	0,0636; 0,0431; 0,0353	0,0632; 0,043; 0,0035
Метод интервального разбро- санного поиска	0,0432; 0,0935; 0,0053	0,0431; 0,0932; 0,0051

## 8. Заключение

Разработаны алгоритмическое и программное обеспечение трех метаэвристических интервальных методов оптимизации: усредненных концов путей, стохастической сетки и разбросанного поиска. Поставлена задача интервальной  $\epsilon$ -оптимизации, к которой была сведена задача поиска оптимального программного управления нелинейными непрерывными детерминированными системами. Решена прикладная задача преследования в трехмерном пространстве. Анализ полученных результатов свидетельствует об эффективности предложенных методов.

## Литература

1. ГУРМАН В.И., РАСИНА И.В., БЛИНОВ А.О. *Эволюция и перспективы приближенных методов оптимального управления* // Программные системы: теория и приложения. – 2001. – №2(6). – С. 11–29.
2. ПАНОВСКИЙ В.Н. *Прикладное применение интервального метода взрывов* // Электронный журнал «Труды МАИ». –

2014. – №73. – [Электронный ресурс] – URL: <http://www.mai.ru/science/trudy/published.php?ID=48451> (дата обращения: 19.03.2016.)
3. ПАНОВСКИЙ В.Н. *Применение аппарата интервального анализа для поиска глобального экстремума функций* // Электронный журнал «Труды МАИ». – 2012. – №51. – [Электронный ресурс] – URL: <http://www.mai.ru/science/trudy/published.php?ID=28948> (дата обращения: 19.03.2016.)
  4. ПАНТЕЛЕЕВ А.В. *Вариационное исчисление в примерах и задачах.* – М.: Высшая школа, 2006. – 272 с.
  5. ПАНТЕЛЕЕВ А.В., МЕТЛИЦКАЯ Д.В., АЛЕШИНА Е.А. *Методы глобальной оптимизации. Метаэвристические стратегии и алгоритмы.* – М.: Вузовская книга, 2013. – 244 с.
  6. ПАНТЕЛЕЕВ А.В. *Применение эволюционных методов глобальной оптимизации в задачах оптимального управления детерминированными системами.* – М.: Изд-во МАИ, 2013. – 160 с.
  7. ФЕДОРЕНКО Р.П. *Приближенное решение задач оптимального управления.* – М.: Наука, 1978. – 488 с.
  8. ШАРЫЙ С.П. *Конечномерный интервальный анализ.* – Новосибирск: XYZ, 2010. – 606 с.
  9. FLOUDAS C.A., PARDALOS P.M. *Encyclopedia of Optimization.* – London: Springer, 2009. – 4626 p.
  10. JAULIN L., KIEFFER M., DIDRIT O., et al. *Applied interval analysis.* – London: Springer-Verlag, 2001. – 391 p.
  11. HANSEN E. *Global optimization using interval analysis.* – New York: Marcel Dekker, 2004. – 492 p.
  12. MICHALEWICZ Z., FOGEL D. *How to solve it: Modern Heuristics.* – London: Springer, 2004. – 554 p.
  13. MOORE R.E. *Interval analysis.* – Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1966. – 145 p.
  14. MOORE R.E. *Methods and applications of interval analysis.* – Philadelphia: SIAM, 1979. – 152 p.
  15. RATSCHЕК H., ROKNE J. *New computer methods for global optimization.* – Chichester: Horwood, 1988. – 236 p.

16. SHARY S.P. *A surprising approach in interval global optimization* // *Reliable Computing*. – 2001. – P. 497–505.
17. SHARY S.P. *Randomized algorithms in interval global optimization* // *Numerical Analysis and Applications*. – 2008. – Vol. 1. – P. 376–389.
18. TEWARI A. *Advanced control of aircraft, spacecraft and rockets*. – New York: A John Wiley & Sons, 2011. – 390 p.

## **DEVELOPMENT OF METAHEURISTIC INTERVAL MINIMIZATION METHODS FOR THE OPTIMAL PROGRAM CONTROL SYNTHESIS**

**Andrei Panteleev**, Moscow Aviation Institute, Moscow, Doctor of Science, professor (avpanteleev@inbox.ru).

**Valentin Panovskiy**, Moscow Aviation Institute, Moscow, post-graduate student (panovskiy.v@yandex.ru).

*Abstract: We propose metaheuristic interval methods of global constrained optimization and their software implementation. Three methods are considered: average path ending, stochastic grid and interval scatter search. The methods are applied to the problem of optimal program control of nonlinear deterministic discrete and continuous systems. The solution of the applied problem of 3-dimensional interception and a brief comparative analysis of the effectiveness are given.*

Keywords: interval methods, metaheuristic, global constrained optimization, optimal control.

*Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии П.С. Щербаковым.*

*Поступила в редакцию 29.10.2015.  
Опубликована 31.03.2016.*

УДК 65.011.56

ББК 60.843

## **КОЛИЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ ЭФФЕКТИВНОСТИ И РИСКА ВНЕДРЕНИЯ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ**

**Зеленков Ю. А.<sup>1</sup>**

*(Финансовый университет при Правительстве  
Российской Федерации, Москва)*

*Количественная оценка эффективности и рисков внедрения информационных систем (ИС) является важнейшим условием начала работ. В данной работе для анализа используется метод Монте-Карло, в качестве критерия эффективности выбрана чистая текущая стоимость денежных потоков проекта. Рассмотрены внешние факторы, влияющие на эффективность, даны рекомендации по определению их вероятностных характеристик, разработана модель оценки проекта. Предложен способ определения положительного денежного потока, возникающего за счет сокращения времени работ, на автоматизацию которых направлена внедряемая ИС. Учтено влияние на эффективность отклонений от календарного плана. Приводится практический пример количественного анализа проекта по внедрению ИС управления корпоративными знаниями.*

Ключевые слова: эффективность ИТ, анализ рисков, обоснование проекта, управление знаниями.

### **1. Введение**

Численная оценка ожидаемых результатов является важнейшим фактором принятия решения о целесообразности запуска проектов любого рода. В частности, пятое издание «Руковод-

---

<sup>1</sup> Юрий Александрович Зеленков, доктор технических наук, заведующий кафедрой прикладной информатики (yuri.zelenkov@gmail.com).



ства к своду знаний по управлению проектами» [10] рекомендует проводить количественное исследование совместного воздействия на цели проекта тех рисков, которые в процессе качественного анализа были классифицированы как существенные. На практике эти рекомендации осуществляются достаточно редко, обычно все ограничивается качественной (и весьма субъективной) оценкой силы воздействия и вероятности возникновения рисков при запуске проекта. Формально это позволяет утверждать, что требования риск-менеджмента выполняются, но на самом деле идентификация рисков и, тем более, управление ими остается за рамками внимания руководителя проекта.

Данная ситуация является объективным следствием высокого уровня неопределенности условий, в которых обычно выполняется проект. По определению [10], проект – это временное предприятие, направленное на создание уникального продукта, услуги или результата. Вследствие уникальности каждого проекта идентификация всех рисков, особенно на ранней стадии, невозможна, и риски, как правило, возникают и выявляются в процессе реализации. При этом часто невозможно получить объективную количественную оценку даже идентифицированных рисков. Субъективная оценка риска двумерна: одна переменная оценивает непредсказуемость угроз, другая – их неконтролируемость [11]. Люди склонны переоценивать риски, которые не могут контролировать, именно поэтому руководители проектов очень часто указывают в качестве основного риска недостаток ресурсов, хотя это является не риском, а одним из условий начала проекта. Таким образом, можно сказать, что риск является функцией уникальности проекта и опыта проектной команды [22].

Цель данной работы – предложить методологию количественного анализа рисков применительно к проектам по внедрению информационных систем (ИС). Для этого во втором разделе рассмотрены вопросы, связанные с определением понятий «риск» и «неопределенность». В третьем разделе обосновывается использование чистой текущей стоимости (Net Present Value – NPV) в качестве меры эффективности и представлена модель денежных потоков проекта по внедрению ИС. В четвертом разделе обсуждается один из возможных способов опреде-

ления положительного денежного потока, возникающего за счет сокращения времени работ, на автоматизацию которых направлена внедряемая ИС. В пятом разделе рассмотрены вопросы учета отклонений от календарного плана проекта. В шестом – приводится практический пример количественного анализа рисков.

## **2. Риск и неопределенность**

Наиболее ранние определения понятий «риск» и «неопределенность» были даны Ф. Найтом в начале XX века [20] в исследованиях, посвященных управлению финансами. Он определил «риск» как ситуацию, в которой известны как возможные исходы, так и распределение их вероятностей, а «неопределенность» как состояние, в котором возможные исходы поддаются описанию, но распределения их вероятностей неизвестны. Таким образом, в интерпретации Ф. Найта различие между риском и неопределенностью сводятся лишь к объему доступной информации об анализируемой ситуации, неопределенность связана с нашими несовершенными возможностями получать информацию о независимых событиях, сочетание которых и формирует случайность. На основании этих положений во многих областях человеческой деятельности были разработаны методы управления рисками, сочетающие статистические и вероятностные подходы: в случае недостатка фактических данных, они дополняются априорными предположениями о параметрах распределения вероятностей возможных исходов [3]. При этом делаются два основных допущения: чаще всего полагается, что все факторы подчиняются гауссовскому закону, и постулируется рациональность (пусть и ограниченная) поведения заинтересованных сторон и постоянность их предпочтений.

Однако в течение XX века были накоплены данные, свидетельствующие, что данные допущения не всегда справедливы [7]. В частности, был обнаружен эффект непропорционального влияния экстремальных событий на эффективность инвестиций: 10 лучших дней рыночных торгов в США с 1927 по 2006 годы обеспечили 64% роста общей доходности за эти

80 лет [17]. Данные факты вызвали большой интерес к распределениям с «толстыми» хвостами, допускающими более частое появление экстремальных событий, чем нормальное распределение. Кроме того, исследования А. Тверски и Д. Канемана [6] и Дж. Акерлофа [1] серьезно подорвали уверенность в рациональности поведения, как отдельных людей, так и их групп. Аналогичные факты были зафиксированы не только в финансовом менеджменте, но и в других областях человеческой деятельности. Исследования в области нелинейной динамики показали, что случайность возникает не в результате сложности системы, а в силу ее чувствительности к начальным условиям, поэтому наша возможность прогнозировать принципиально ограничена [11].

В то же время была разработана теория полезности и методы оценки субъективного отношения к риску лица, принимающего решения. Согласно этим подходам различия между риском и неопределенностью заключаются в субъективном отношении к реализации того или иного исхода: неопределенность связана с неоднозначностью исхода, а риск – с отношением к неблагоприятным исходам [13]. Субъективно риск оценивается с помощью двух мер: вероятности наступления неблагоприятного события и объемов этого события (потери, ущерб, убытки) [11]. Это означает, например, что риск будет считаться малым в двух случаях: если его вероятность велика, но ущерб мал, или ущерб велик, но вероятность его мала.

Тем не менее, практикующие менеджеры и консультанты существующую практику количественного риск-менеджмента оценивают в целом весьма негативно. Во многих публикациях отмечается, что, несмотря на наличие простых и в то же время мощных методов моделирования, таких как метод Монте-Карло, в большинстве случаев используется лишь качественный анализ, не дающий полной оценки прогнозируемой ситуации. С одной стороны, это связано с использованием точечных оценок прогнозируемых переменных вместо интервальных [24], с другой – с трудностью получения интервальных или других оценок распределений [18].

Сравнительный анализ способов оценки последствий риска дан в [15], где отмечено, что наиболее универсальным методом

является имитационное моделирование, которое не ограничено ни типом распределения исследуемых событий (дискретное / непрерывное), ни видом связи между ними (зависимые / независимые), ни их порядком (последовательные / конкурентные). Поэтому для количественного исследования параметров проекта будем использовать метод Монте-Карло. Данный метод основан на многократном вычислении математической модели, связывающей независимые переменные и зависимые, которые описывают характеристики исследуемого объекта. Значения независимых переменных при повторяющихся вычислениях выбираются случайным образом в соответствии с их вероятностными характеристиками, – это дает возможность оценить распределение зависимых переменных.

Ключевым вопросом при этом является определение вероятностных характеристик независимых переменных (т.е. вероятностей наступления событий), необходимых для количественного анализа. Рекомендации по оптимальному выбору вида распределения и определению его параметров даны в [15], методики преобразования качественных оценок в количественные для аэрокосмической отрасли в [21], аналогичные методики для отрасли информационных технологий в [23].

Д. Хаббард [12] для задания случайной величины  $x$ , имеющей нормальное распределение, предлагает использовать экспертную оценку доверительного интервала, в котором с вероятностью 0,9 находится ее среднее значение. В его книгах [12, 18] описана методика «калибрования» экспертов, повышающая надежность их интервальных оценок, приводятся практические рекомендации по ее использованию. Обозначим  $x_L$  и  $x_U$  – экспертные оценки нижней и верхней границы 90-процентного доверительного интервала случайной величины. При этом очевидно, что оценки ее среднего значения  $\mu_x$  и стандартного отклонения  $\sigma_x$  могут быть получены как  $\mu_x = (x_U + x_L)/2$  и  $\sigma_x = (x_U - x_L)/3,29$ . В дальнейшем будем обозначать такой способ задания функции распределения  $F(x)$  случайной величины  $x$ , определяющей вероятность того, что  $x$  примет значение меньшее или равное произвольному действительному числу  $\alpha$  (т.е.  $F(x) = p(x \leq \alpha)$ ), как

$$F(x) = N_{CI}(x_L, x_U) = N(\mu_x, \sigma_x).$$

Таким образом, задачу оценки проекта можно свести к построению математической модели, связывающей показатели его эффективности с независимыми переменными, которые в силу своей нестационарной природы оказывают влияние на итоговый результат. Многократные вычисления этой модели позволяют получить оценки распределения эффективности и вероятность появления отрицательного результата, т.е. риск.

При моделировании методом Монте-Карло используются обратные функции распределения. Функцией  $F^{-1}(u)$ , обратной к функции распределения  $F(x)$ , называется такая функция, значение которой в произвольной точке  $u$  интервала  $(0,1)$  определяется как значение  $x$ , удовлетворяющее уравнению  $F(x) = u$ . Для неубывающей функции распределения

$$(1) \quad F^{-1}(u) = \inf \{x \mid F(x) \geq u\}, \quad 0 < u < 1,$$

где  $u$  – непрерывная случайная величина, равномерно распределенная на интервале  $(0,1)$ .

### **3. Оценка эффективности проекта**

Различные модели и методы оценки эффективности проектов рассмотрены в [8], где эффективность рассматривается как соответствие результатов проекта целям и интересам его участников. Поэтому, строго говоря, оценка проекта должна проводиться в соответствии с системой критериев, учитывающей мнения различных участников организации, представления которых о ценности тех или иных результатов могут различаться. Поскольку эти субъекты участвуют в формировании системы критериев и заинтересованы в получаемом результате, может возникнуть проблема манипулирования информацией, которая разрешается в рамках теории экономических механизмов [19] и теории управления организационными системами [9].

Поэтому в качестве наиболее общего критерия эффективности проекта целесообразно выбрать показатель, связывающий его результаты с наиболее общими целями организации. Для коммерческих организаций (фирм), такой наиболее общей целью является получение прибыли, тогда объективным крите-

рием эффективности проекта является чистой текущей стоимостью денежных потоков, создаваемых в процессе его выполнения:

$$NPV = \sum_{i=1}^n \frac{CF_i}{(1+R)^i},$$

где  $CF_i$  – денежный поток в  $i$ -м периоде,  $R$ – ставка дисконтирования. Подробное рассмотрение этого критерия и его связей с другими финансовыми показателями, а также обоснование его универсальности дано, например, в [2]. В [16] отмечено, что ИТ-проекты помимо улучшения финансовых показателей приносят также нефинансовые выгоды. Однако в [5] показано, что при правильной организации стратегического управления корпоративными ИТ все проекты влияют на общую производительность фирмы, которая выражается в конечном счете через финансовый результат. Вопрос определения значения ставки дисконтирования, которое зависит от стоимости капитала фирмы, рассмотрен в [2]. Отметим, однако, что этот показатель можно рассматривать как ставку, по которой может быть осуществлено альтернативное размещение капитала, в таком случае его можно положить равным, например, ставке по банковским депозитам.

Для вычисления  $NPV$  необходимо рассмотреть денежные потоки, возникающие в процессе выполнения проекта (рис. 1). Проект выполняется в  $k$  этапов, длительность каждого из них в месяцах задается величиной  $t_j$ ,  $j = 1, \dots, k$ . Тогда общая планируемая продолжительность проекта  $n = \sum_{j=1}^k t_j$  месяцев.

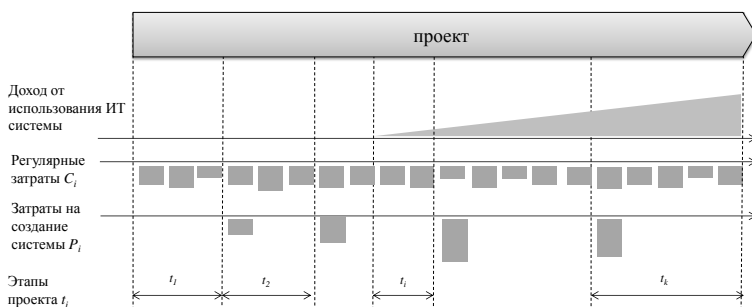


Рис. 1. Денежные потоки проекта

На эффективность проекта влияют следующие денежные потоки:

- Регулярные затраты проекта  $C_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Это ежемесячные затраты на оплату рабочего времени членов проектной группы с учетом всех начислений, их командировок, обучения, проведения семинаров и т.д. Это отрицательные денежные потоки, которые можно оценить с помощью задания доверительного интервала  $C_i = N_{CI}(C_L, C_U)$ .

- Затраты  $P_i$  на создание системы, т.е. на приобретение лицензий программного обеспечения и вычислительной техники, которые могут производиться несколько раз в течение проекта. Эти отрицательные денежные потоки можно оценить через количество пользователей  $P_i = V_i * K_i * u_i$ , где  $V_i$  – количество пользователей, для которых приобретается программное обеспечение и оборудование в  $i$ -м месяце;  $K_i$  – курс доллара к рублю (рублей за доллар);  $u_i$  – затраты на одного пользователя. Отметим, что на этапе оценки проекта точные значения переменных  $K_i$  и  $u_i$  неизвестны, поэтому для них также можно определить доверительные интервалы  $K_i = N_{CI}(K_L, K_U)$  и  $u_i = N_{CI}(u_L, u_U)$ . Если величина  $V_i$  также неизвестна, она задается аналогичным образом.

- Доходы от использования информационной системы  $W_i$ . Более подробно задача определения этой переменной будет рассмотрена в следующем разделе.

- Увеличение времени выполнения  $t_j$  этапов проекта, что приводит, во-первых, к сдвигу срока начала промышленной эксплуатации системы, во-вторых, к увеличению регулярных затрат проекта. Более подробно влияние этого фактора будет рассмотрено в разделе 5.

- Среднемесячная ставка дисконтирования. Очевидно, что эта величина также не может быть точно предсказана заранее, поэтому ее тоже предлагается определить через задание доверительного интервала  $R = N_{CI}(R_L, R_U)$ . Для упрощения полагаем, что значение ставки дисконтирования не изменяется в течение всего проекта.

Таким образом, ежемесячный денежный поток равняется

сумме трех слагаемых – регулярных затрат проекта, затрат на информационную систему и доход от использования информационной системы:

$$CF_i = C_i + P_i + W_i.$$

Отметим, что денежные потоки  $C_i$  и  $P_i$  являются отрицательными, денежные потоки  $W_i$  – положительные.

#### **4. Определение эффекта от использования информационной системы**

Возможны различные сценарии определения эффекта от использования информационной системы. Рассматриваемый здесь вариант построен на следующих предположениях. Внедряемая система предназначена для ускорения выполнения неких работ различной продолжительности, т.е. за счет использования ИС время выполнения этих работ будет сокращаться. Согласно графику проекта, система вводится в эксплуатацию постепенно, охватывая все большее количество пользователей, в течение нескольких этапов. По окончании проекта предполагается, что с помощью системы ежемесячно будет выполняться  $n_{\max}$  работ. Интервальная оценка величины  $n_{\max}$  может быть задана как  $n_{\max} = N_C(n_L, n_U)$  на основании анализа существующих потоков работ. Зависимость числа работ, выполняемых в  $i$ -й месяц проекта с помощью ИС, от номера месяца предполагается линейной, т.е.

$$n_i = \frac{i - \sum_{j=1}^{l-1} t_j}{\sum_{j=l}^n t_j} n_{\max}, \quad i = l, l+1, \dots, n,$$

где  $l$  – номер месяца, с которого начинается использование системы.

Известно текущее распределение среднемесячного объема работ по длительности, пример такого распределения представлен рядом «as is» (заштрихованные столбцы) на рис. 2.



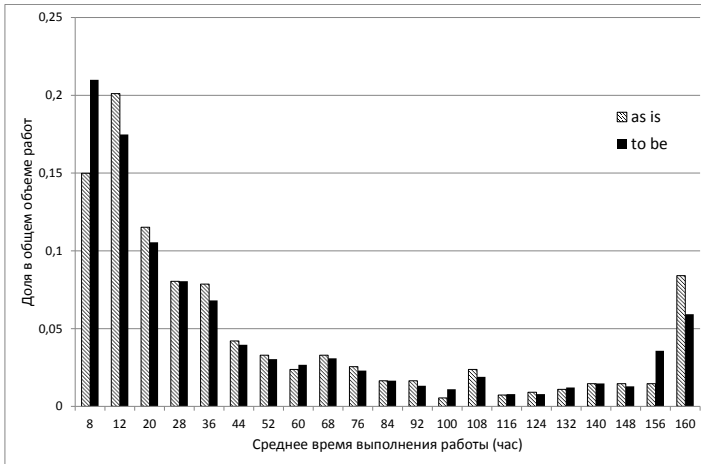


Рис. 2 Распределение ежемесячного объема работ по времени выполнения

Обозначим  $J_{max}$  – вектор вероятностей появления работ различной продолжительности в месячном объеме работ. Элементы этого вектора должны быть упорядочены по возрастанию длительностей соответствующих работ, общее число элементов –  $l$ . В результате ввода в эксплуатацию ИС это распределение вероятностей будет меняться, вероятность появления работ меньшей продолжительности будет увеличиваться, а большей – сокращаться, именно в этом и заключается эффект от внедряемой системы. Пусть начальное распределение работ  $J_i^0$  в  $i$ -м месяце равно распределению  $J_{max}$ ;  $j$ -й элемент этого вектора  $J_{ij}^0$  определяет вероятность появления работы продолжительностью  $\tau_j$ . Тогда функция распределения случайной величины  $\tau$

$$F(\tau_k) = \sum_{j=1}^k J_{ij}^0.$$

Обратная функция  $F^{-1}(\alpha_k)$  должна вернуть среднее значение времени выполнения работы  $\tau_k$ , соответствующее заданной вероятности  $\alpha_k$ . Согласно выражению (1), обратная функция возвращает время работы, значение функции вероятности для которой равно или больше  $\alpha_k$ , т.е.:

$$F^{-1}(\alpha_k) = \tau_k \mid \left( \alpha_k > \sum_{j=1}^{k-1} J_{ij}^0 \right) \wedge \left( \alpha_k < \sum_{j=1}^{k+1} J_{ij}^0 \right) \wedge \left( \alpha_k \leq \sum_{j=1}^k J_{ij}^0 \right).$$

Пусть за счет внедрения системы время выполнения части работ сократится на  $m$  часов. Эта часть от общего числа работ оценивается через коэффициент сокращения времени  $p_w = N_{CI}(p_L, p_U)$ . Обозначим новое распределение работ как  $J_i = \mathbb{J}(J_i^0, p_w, m)$ . В случае, когда  $m$  равно разности между средними временами выполнения работ, т.е.  $m = \Delta\tau = \tau_{i+1} - \tau_i$ , новое распределение может быть получено с помощью формул:

$$J_{i1} = J_{i1}^0 + p_w J_{i2}^0,$$

$$J_{ij} = (1 - p_w) J_{ij}^0 + p_w J_{ij+1}^0, \quad j = 2, 3, \dots, l-1,$$

$$J_{il} = (1 - p_w) J_{ij}^0.$$

В качестве примера на рис. 2 рядом «to be» (черные столбцы) представлено распределение работ  $J_i = \mathbb{J}(J_{\max}, p_w = 0,3, m = 8)$ . Обратная функция для распределения  $J_i$  также определяется выражением для  $F^{-1}(\alpha_k)$ , приведенным выше.

Таким образом, зная  $n_i$  – количество работ, выполняемых в месяц с помощью информационной системы, и величину коэффициента сокращения времени можно рассчитать доход от использования системы. Этот доход зависит от сокращения затрат времени на выполнение месячного объема работ, поэтому

$$\Delta t_i = \sum_{j=1}^{n_i} \left[ F_0^{-1}(\alpha_j) - F^{-1}(\alpha_j) \right],$$

$$W_i = \Delta t_i \cdot c_i;$$

где  $\alpha_j$  – случайное число, равномерно распределенное в интервале  $(0, 1)$ ;  $F_0^{-1}(\alpha_j)$  – обратная функция, соответствующая распределению  $J^0$ ;  $F^{-1}(\alpha_j)$  – обратная функция, соответствующая распределению  $J_i$ ;  $c_i$  – стоимость часа работ, задаваемая распределением  $F(c_i) = N_{CI}(c_L, c_U)$ .

Отметим, что при  $n_i = n_{\max}$  полученная формула дает сокращение затрат на выполнение работ после завершения проекта.

## 5. Влияние задержек в выполнении проекта

Для оценки возможных отклонений от плановых сроков будем использовать подход, предложенный в [4], где введены коэффициенты, позволяющие оценить вероятность сдвига сроков выполнения проекта в зависимости от различных факторов риска. Авторы [4], проанализировав обширный фактический материал, определили, что во время планирования руководитель проекта недооценивает возможные риски. Среди факторов, наиболее сильно влияющих на вероятность ошибки при определении плановых сроков, они выделили:

- ошибки календарного планирования;
- текучесть кадров в проектной команде;
- расширение требований к создаваемой системе во время проекта;
- нарушение спецификаций;
- ошибки в оценке производительности рабочей группы.

Поэтому ожидаемое время выполнения  $j$ -го этапа проекта будем оценивать как

$$t_j = t_j^0 \cdot R_{plan} \cdot R_{pers} \cdot R_{reqs} \cdot R_{spec} \cdot R_{perf},$$

где  $t_j^0$  – плановое время выполнения проекта, определенное при составлении графика;  $R_{plan}$ ,  $R_{pers}$ ,  $R_{reqs}$ ,  $R_{spec}$ ,  $R_{perf}$  – коэффициенты, учитывающие влияние рисков на срок выполнения проекта (соответственно, ошибок в планировании, текучести кадров, расширения требований, нарушения спецификаций и оценке производительности). Согласно [4] эти риски оцениваются через задание интервала сдвига срока завершения проекта (минимальное возможное значение –  $d_{min}$ , максимальное возможное значение –  $d_{max}$ ) и наиболее вероятного значения времени задержки  $d_{avg}$ . Значение каждого из перечисленных выше коэффициентов риска определяется по формуле

$$R(\alpha) = \begin{cases} 1 + d_{avg} + (d_{max} - d_{min}) \left[ 1 - \sqrt{(1-\alpha) \frac{d_{max} - d_{min}}{d_{max} - d_{avg}}} \right], & \alpha > \frac{d_{avg} - d_{min}}{d_{max} - d_{min}}, \\ 1 + d_{min} + (d_{avg} - d_{min}) \sqrt{\alpha \frac{d_{max} - d_{min}}{d_{avg} - d_{min}}}, & \alpha \leq \frac{d_{avg} - d_{min}}{d_{max} - d_{min}}; \end{cases}$$

где  $\alpha$  – вероятность возникновения риска, т.е. равномерно распределенное на интервале (0, 1) случайное число. Отметим, что приведенная формула соответствует обратной функции асимметричного треугольного распределения, задаваемого параметрами  $d_{min}$ ,  $d_{max}$ , и  $d_{avg}$ .

Особая важность работы [4] заключается в том, что в ней приводятся количественные оценки значений  $d_{min}$ ,  $d_{max}$ , и  $d_{avg}$  для всех перечисленных факторов риска, собранные во время выполнения реальных проектов по разработке программного обеспечения.

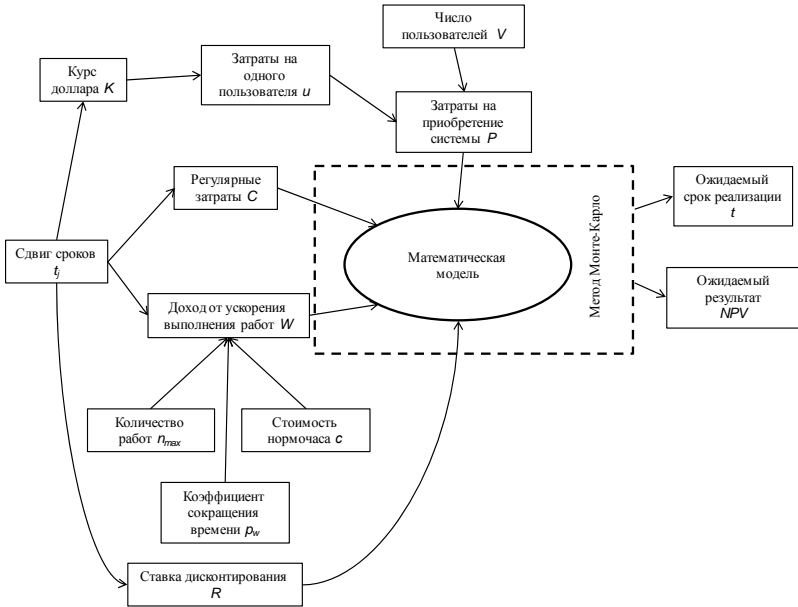


Рис. 3. Модель оценки эффективности и риска проекта по внедрению ИС

## 6. Результаты моделирования

Общая модель предложенного метода представлена на рис. 3. В качестве примера использования приведем результаты исследования эффективности и риска системы по управлению знаниями, внедряемой на одном из предприятий российского ОПК. В таблице 1 приведены исходные данные, использовавшиеся для оценки, алгоритм имитационного моделирования представлен на рис. 4.

Результаты моделирования методом Монте-Карло (число итераций  $M = 10\ 000$ ) представлены на рис. 5. При этом получены следующие результаты: среднее значение и стандартное отклонение дохода от проекта  $\mu_{NPV} = 18,76$  млн руб.,  $\sigma_{NPV} = 10,66$ ; среднее значение и стандартное отклонения срока выполнения  $\mu_t = 23,7$  мес.,  $\sigma_t = 1,95$ . После внедрения системы ежемесячное сокращение затрат в результате ее использования составит 6,2 млн руб. Такие высокие показатели объясняются небольшими затратам на реализацию проекта и значительным предполагаемыми результатами, что в целом характерно для ИС управления корпоративными знаниями [14].

Таблица 1. Параметры проекта

Параметр	Обозначение	90% доверительный интервал	
		Нижняя граница	Верхняя граница
Курс доллара (руб/\$)	$K_i$	55	65
Затраты на одного пользователя (\$)	$u_i$	235	265
Регулярные затраты (тыс. руб.)	$C_i$	250	350
Ежемесячное количество работ (шт.)	$n_{max}$	1700	1800
Коэффициент сокращения времени	$P_w$	0,3	0,4
Стоимость нормочаса (тыс. руб.)	$c_i$	1,3	1,5

Параметр	Обозначение	90% доверительный интервал	
		Нижняя граница	Верхняя граница
Годовая ставка дисконтирования (%)	$R$	9	12

Тем не менее, из рис. 5 видно, что существует 7% вероятность получения отрицательного NPV. Для того чтобы исследовать возможные причины такого исхода, выполнен анализ чувствительности эффективности проекта к независимым переменным, который показал, что наиболее сильно на эффективность проекта влияют месячный объем работ  $n_{max}$  и стоимость одного часа работ  $c$ , уменьшение каждого из них на 10% сокращает NPV на 25%.

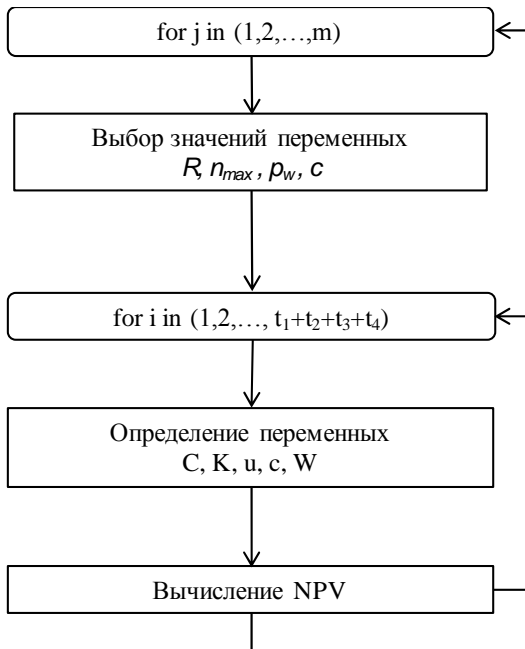


Рис. 4. Алгоритм моделирования

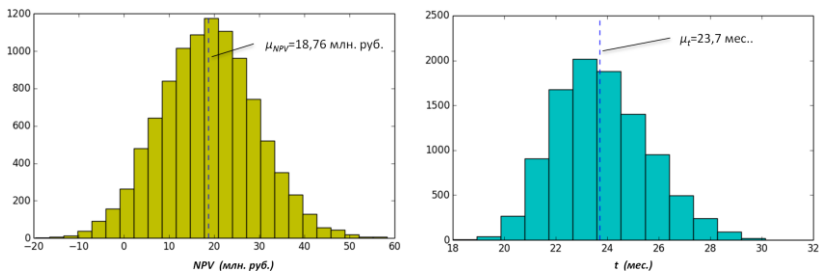


Рис. 5. Результаты моделирования

Одновременное сокращение этих параметров может привести к отрицательному эффекту. Другие факторы (курс доллара, время выполнения проекта и т.д.) оказывают гораздо меньшее влияние на эффективность. Таким образом, определена граница, определяющая целесообразность реализации проекта – при резком сокращении бизнеса (т.е. падении объема работ и уменьшении их стоимости) внедрение ИС становится невыгодным

## 7. Заключение

Описанный метод определения риска и эффективности внедрения ИС опирается на известные практики:

- Метод Монте-Карло как средство моделирования [12, 15, 18].
- Использование чистой текущей стоимости денежных потоков для оценки эффективности [2].
- Интервальная оценка независимых переменных калиброванными экспертами [12, 18].
- Учет влияния сдвигов срока проекта [4].

Предложенный в статье способ расчета положительного результата (раздел 4) позволил построить модель, описывающую все аспекты проекта. Использование данной модели позволяет определить распределение значений эффективности и вероятность получения отрицательного результата. С одной стороны, эта информация важна при принятии решения о запуске проекта, с другой – может быть использована для построения систе-

мы мониторинга, оповещающей о приближении его параметров к критическим значениям.

Дальнейшее развитие предложенного метода предполагается за счет разработки других способов определения положительного эффекта от внедрения ИС.

### **Литература**

1. АКЕРЛОФ Д., ШИЛЛЕР Р. *Spiritus animalis, или как человеческая психология управляет экономикой и почему это важно для мирового капитализма*. – М.: Юнайтед Пресс, 2010. – 280 с.
2. БРИГХЕМ Ю. ГАПЕНСКИ Л. *Финансовый менеджмент. Т.1*. – М.: Экономическая школа, 2005. – 497 с.
3. ВИШНЯКОВ Я.Д., РАДАЕВ Н.Н. *Общая теория рисков*. – М.: Академия, 2008. – 368 с.
4. ДЕМАРКО Т., ЛЕСТЕР Т. *Вальсируя с медведями: управление рисками в проектах по разработке программного обеспечения*. – М.: Компания р.m.Office, 2005. – 196 с.
5. ЗЕЛЕНКОВ Ю.А. *ИТ-стратегия 2.0 // Открытые системы. СУБД*. – 2014. – №9. – С. 23–25.
6. КАНЕМАН Д., СЛОВИК А., ТВЕРСКИ А. *Принятие решений в условиях неопределенности: правила и предубеждения*. – Х.: Гуманитарный центр, 2005. – 632 с.
7. МАНДЕЛЬБРОТ Б., ХАДСОН Р. *(Не)послушные рынки: фрактальная революция в финансах*. – М.: Вильямс, 2006. – 400 с.
8. МАТВЕЕВ А.А. НОВИКОВ Д.А., ЦВЕТКОВ А.В. *Модели и методы управления портфелями проектов*. – М.: ПМСОФТ, 2005. – 206 с.
9. НОВИКОВ Д.А. *Теория управления организационными системами*. – М.: Физматлит, 2007. – 584 с.
10. *Руководство к своду знаний по управлению проектами (Руководство РМВООК)*. – 5 изд. – Project Management Institute, 2013. – 614 с.
11. *Управление риском: Риск. Устойчивое развитие. Синергетика*. – М.: Наука, 2000. – 431 с.



12. ХАББАРД Д. *Как измерить все, что угодно. Оценка стоимости нематериального в бизнесе.* – М.: Олимп-Бизнес, 2009. – 320 с.
13. ЧЕРНОВА Г.В., КУДРЯВЦЕВ А.А. *Управление рисками.* – М.: Проспект, 2009. – 160 с.
14. ВЕСЕРРА-FERNANDEZ I., SABHERVAL R. *Knowledge management: systems and processes.* – New York: M.E. Sharpe, Inc, 2010. – 369 p.
15. DAMODARAN A. *Strategic risk taking: a framework for risk management.* – Upper Saddle River, NJ: Wharton School Pub, 2007. – 388 p.
16. *Enterprise value: governance of IT investments. The ValITFramework 2.0.* – [Электронный ресурс]. – URL: <http://www.isaca.org/Knowledge-Center/Val-IT-IT-Value-Delivery/Pages/Val-IT-Publications.aspx#framework> (дата публикации: 18.03.2016).
17. ESTRADA J. *Black swans and market timing: How not to generate alpha* // Journal of Investing. – 2008. – No. 17. – P. 20–34.
18. HUBBARD D. *The failure of risk management: why it's broken and how to fix it.* – Hoboken, NJ: Wiley, 2009. – 300 p.
19. HURWICZ L., REITER S. *Designing economic mechanisms.* – Cambridge: Cambridge University Press, 2006. – 356 p.
20. KNIGHT F. *Risk, uncertainty, and profit.* – Boston: Houghton Mifflin Co, 1921. – 260 p.
21. *NASA risk management handbook.* – [Электронный ресурс]. – URL: [http://www.hq.nasa.gov/office/codeq/doctree/NHBK\\_2011\\_3422.htm](http://www.hq.nasa.gov/office/codeq/doctree/NHBK_2011_3422.htm) (дата обращения: 18.03.2016).
22. NICHOLAS J.M., STEYN H. *Project management for engineering, business and technology.* – London: Routledge, 2012. – 691 p.
23. ROETZHEIM W. *Structured computer project management.* – Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1988. – 286 p.
24. SAVAGE S. *The flaw of averages: why we underestimate risk in the face of uncertainty.* – Hoboken, NJ: Wiley, 2009. – 419 p.

## **QUANTITATIVE ANALYSIS OF THE EFFECTIVENESS AND RISKS OF INFORMATION SYSTEMS IMPLEMENTATION**

**Yuri Zelenkov**, Financial University under the Government of the Russian Federation, Moscow, Doctor of Science, Chief of applied informatics department (yuri.zelenkov@gmail.com)

*Abstract: Quantitative evaluation of the effectiveness and risks of implementation of information systems (IS) is essential to start the project. It is necessary to choose a reasonable performance indicators and the method of determining their dependence on the variables affecting the project. The Monte Carlo method is proposed for the analysis, and net present value of the cash flows of the project is selected as a criterion of effectiveness. We discuss external factors affecting the effectiveness, give recommendations how to determine their probabilities and present the project assessment model. We also propose a method to calculate the positive cash flow which occurs due to the reduction of time of works supported by IS. Impact of deviations from project schedule is taken into account. The practical case of the project analysis for the implementation of knowledge management IS is presented.*

**Keywords:** IT efficiency, risk analysis, project assessment, knowledge management.

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии Г.Н. Каляновым*

*Поступила в редакцию 05.06.2015.  
Опубликована 31.03.2016.*

УДК 519.177  
ББК 22.18

## РАСПРЕДЕЛЕНИЕ РЕСУРСА МЕЖДУ АТТРАКТОРАМИ В РЕГУЛЯРНЫХ НЕСИММЕТРИЧНЫХ РЕСУРСНЫХ СЕТЯХ<sup>1</sup>

Жилякова Л. Ю.<sup>2</sup>

(ФГБУН Институт проблем управления  
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

*Рассматриваются несимметричные регулярные ресурсные сети с несколькими вершинами-аттракторами. Для них показано, что распределение ресурса сверх порогового значения  $\Delta W = W - T$  происходит по тому же закону, что и в соответствующей поглощающей сети (полученной из несимметричной удалением выходных ребер аттракторов). Однако существуют поправки, зависящие от пропускных способностей выходных ребер аттракторов и начального распределения ресурса. Поправки оцениваются сверху; находятся начальные состояния, при которых они максимальны. Определяются начальные состояния, при которых поправки отсутствуют.*

Ключевые слова: ресурсная сеть, графовая динамическая пороговая модель, вершины-аттракторы.

### 1. Введение

Ресурсная сеть – графовая динамическая параллельная модель с пороговым переключением правил функционирования, предложенная в [6] и получившая развитие в ряде работ (в том числе [3, 4]). Она представляет собой ориентированный взве-

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проекты № 14-01-00422а, 15-07-02488а).

<sup>2</sup> Людмила Юрьевна Жилякова, доктор физико-математических наук (zhilyakova.ludmila@gmail.com).

шенный граф, в котором вершины обмениваются ресурсами в дискретном времени. Вершины могут хранить неограниченное количество ресурса; веса ребер обозначают их пропускные способности: максимальное количество ресурса, которое может пройти через ребро за один такт времени. В отличие от классической потоковой модели Форда–Фалкерсона [7] и ее динамических модификаций [8], в ресурсной сети отсутствуют источники и стоки, и, соответственно, нет направленности движения ресурса. Его распространение происходит по всем возможным путям одновременно. При *малом ресурсе*, когда все вершины сети функционируют по одному правилу и отдают весь ресурс на каждом такте, модель представляет собой рассеяние на графе [12, 14]. Модели рассеяния хорошо изучены, – для графов с постоянной топологией они описываются однородными цепями Маркова, – и поэтому ресурсная сеть представляет гораздо больший исследовательский интерес при функционировании с *большим суммарным ресурсом*. Это означает, что некоторые вершины сети изменяют правило функционирования и накапливают излишки ресурса, которые они не в состоянии отдать. Такие «бутылочные горлышки» сети, суммарные входы которых больше суммарных выходов, были названы вершинами-аттракторами [3]. Эти вершины начинают функционировать сходно со стреляющими вершинами в пороговой модели «игра выстреливания фишек» [11, 18] и «абелева куча песка» [15, 20]. Модель кучи песка примечательна тем, что при своей простоте находит применение в моделировании сложных природных и социальных процессов, названных «самоорганизованной критичностью» [9, 10, 13].

В отличие от игры выстреливания, где фишки целочисленны, ресурс в ресурсной сети является бесконечно делимым. Благодаря этому свойству разнообразные переходные процессы сходятся к предельным состояниям, которые в целочисленных пороговых моделях могут не достигаться.

Для каждой сети понятия *малый* и *большой* ресурс строго определены. Малое и большое значения ресурса лежат по разные стороны от *порогового значения*  $T$ , которое определяется через суммарные выходные пропускные способности вершин и

координаты вектора предельных вероятностей однородной цепи Маркова, соответствующей ресурсной сети, в случае если граф регулярен. Свойство *регулярности* [5] означает, что граф сильно связан (т.е. состоит из одной эргодической компоненты) и НОД длин всех его циклов равен 1 (заметим, что в разных источниках регулярность определяется по-разному и данное определение отличается от определений, используемых в [2, 19]). Если граф циклический (НОД длин всех его циклов отличен от 1), роль предельного вероятностного вектора играет предел по Чезаро [5]. В общем случае пороговое значение не превосходит суммарной пропускной способности сети. В эйлеровых сетях, в которых каждая вершина имеет одинаковые входную и выходную пропускные способности,  $T$  совпадает с суммой пропускных способностей всех ребер сети. В остальных сетях выполняется строгое неравенство.

Задача исследования в данной работе формулируется следующим образом. Пусть в сети есть несколько аттракторов и суммарный ресурс в ней велик. Доказано, что предельное состояние в ней существует. Компоненты вектора предельного состояния, соответствующие неаттрактивным вершинам, определяются однозначно; формулы для них найдены в [3]. Необходимо найти распределение излишков ресурса сверх  $T$  между аттракторами. Пропорция, в которой эти излишки распределяются, очевидно, зависит от начального состояния и от некоторых параметров сети.

Функционирование сетей при большом ресурсе описывается неоднородными цепями Маркова, исследование которых гораздо сложнее. Из существования предельного состояния при больших ресурсах [3] следует, что эти неоднородные цепи Маркова являются сильно эргодическими [1, 16, 17]. Однако для нахождения компонент вектора предельного состояния, соответствующих вершинам-аттракторам, требуются дополнительные приемы. Для этого несимметричным сетям ставятся в соответствие *поглощающие сети*, исследованные в [4]. Граф поглощающей сети имеет переходную компоненту и стоковые вершины. Порогового значения в такой сети не существует.

Поглощающая сеть, соответствующая регулярной несимметричной сети, – это сеть, в которой удалены все ребра, выходящие из аттракторов. Таким образом, это сеть со стоковыми вершинами, соответствующими аттракторам исходной сети. Для поглощающих сетей получены формулы, позволяющие аналитически находить предельные стохастические матрицы неоднородной цепи Маркова, и, соответственно, по любому начальному состоянию определять предельное состояние сети – в данном случае пропорцию распределения ресурса между стоками.

## 2. Основные обозначения и характеристики ресурсных сетей

Ресурсная сеть представляет собой взвешенный ориентированный граф  $G = (V, E)$ ,  $|V| = n$ . Веса, соответствующие пропускным способностям ребер, задаются матрицей  $R = (r_{ij})_{n \times n}$ .

$Q(t) = (q_1(t), \dots, q_n(t))$  – состояние сети в момент  $t$ ;  $q_i(t)$  – количество ресурса в вершине  $v_i$  в момент  $t$ ;  $Q^*$  – предельное состояние.

$r_i^{in}$  и  $r_i^{out}$  – суммарные входная и выходная пропускные способности вершины  $v_i$ .

*Правила функционирования сети.* В момент  $t$  вершина  $v_i$  по ребру  $e_{im}$  отдает в смежную ей вершину  $v_m$ :

- $r_{im}$  единиц ресурса, если  $q_i(t) > r_i^{out}$  (правило 1);
- $\frac{r_{im}}{r_i^{out}} q_i(t)$  единиц ресурса, если  $q_i(t) \leq r_i^{out}$  (правило 2).

$R'$  – стохастическая матрица, полученная из матрицы  $R$  нормированием по строкам:  $R' = D^{-1}R$ , где  $D = \text{diag}(r_1^{out}, \dots, r_n^{out})$ .

$W = \text{const}$  – суммарный ресурс сети.

$Z(t)$  – множество вершин, для которых  $q_i(t) \leq r_i^{out}$ ;  $Z^+(t)$  – множество вершин, для которых  $q_i(t) > r_i^{out}$ .

$T$  – пороговое значение ресурса, такое, что при  $W \leq T$  все вершины, начиная с некоторого  $t'$ , переходят в зону  $Z(t)$ ; при  $W > T$  зона  $Z^+(t)$  непуста, начиная с некоторого  $t''$ .

$$T = \min_{i \in \{1, \dots, n\}} \frac{r_i^{out}}{q_i^{1*}},$$

где  $Q^{1*}$  – вектор предельного состояния при  $W = 1$ ;  $\tilde{Q}$  – вектор предельного состояния при  $W = T$ .

Вершина  $v_j$  несимметричной регулярной сети является *аттрактором* тогда и только тогда, когда для нее выполняется

$$(1) \quad j = \arg \min_{i \in \{1, \dots, n\}} \frac{r_i^{out}}{q_i^{1*}}.$$

Введем такую нумерацию вершин сети, при которой аттракторы имеют номера от 1 до  $l$ . В [3] доказано, что  $\tilde{Q} = (r_1^{out}, \dots, r_l^{out}, \tilde{q}_{l+1}, \dots, \tilde{q}_n)$ . Вектор  $\tilde{Q}$  пропорционален вектору  $Q^{1*}$  с коэффициентом  $T$ :  $\tilde{Q} = Q^{1*} T$ .

При этом компоненты с номерами от  $l + 1$  до  $n$  не изменяются при любом  $W > T$ , и все излишки распределяются только среди аттракторов. Вектор предельного состояния для  $W > T$  имеет вид

$$Q^* = (r_1^{out} + \Delta q_1^*, \dots, r_l^{out} + \Delta q_l^*, \tilde{q}_{l+1}, \dots, \tilde{q}_n), \text{ где } \sum_{i=1}^l \Delta q_i^* = W - T.$$

*Поток в ресурсной сети.*

Ресурс, выходящий из вершины  $v_i$  по ребру  $e_{ij}$  в момент  $t$ , приходит в вершину  $v_j$  в момент  $t + 1$ ; между моментами  $t$  и  $t + 1$  он находится в ребре  $e_{ij}$ . Этот ресурс назовем потоком  $f_{ij}(t)$ . Общий поток сети описывается матрицей  $F(t) = (f_{ij}(t))_{n \times n}$ .

Величиной потока будем называть сумму

$$f_{sum} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f_{ij}(t).$$

Суммарные исходящий и входящий потоки вершины  $v_i$ :

$$\sum_{j=1}^n f_{ij}(t) = f_i^{out}(t); \quad \sum_{i=1}^n f_{ij}(t) = f_j^{in}(t+1). \quad \text{Будем полагать,}$$

что  $f_j^{in}(0) = 0$ .

$F^{out}(t) = (f_1^{out}(t), \dots, f_n^{out}(t))$  – вектор исходящего потока;

$F^{in}(t) = (f_1^{in}(t), \dots, f_n^{in}(t))$  – вектор входящего потока.

$F^*$  – матрица предельного потока.

$f_{sum}^* = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f_{ij}^*$  – суммарный предельный поток;  $F^{in*}$  и  $F^{out*}$  –

векторы двух предельных потоков.

Доказано, что при любом значении  $W \geq T$  суммарный предельный поток в сети равен  $T$ .

### 3. Свойства поглощающих сетей

Исследованию поглощающих сетей посвящена работа [4]. Кратко перечислим полученные в ней результаты, которые понадобятся при описании регулярных сетей с несколькими аттракторами.

Пусть поглощающая сеть имеет  $l$  стоков с номерами от 1 до  $l$ , тогда ее матрица пропускных способностей состоит из блоков:

$$(2) \quad R = \left( \begin{array}{c|c} D & O_1 \\ \hline R_1 & R_2 \end{array} \right),$$

где  $(D)_{l \times l}$  – диагональная матрица;  $(O_1)_{l \times (n-l)}$  – нулевая матрица; матрица  $(R_1)_{(n-l) \times l}$  состоит из пропускных способностей ребер, ведущих из переходной компоненты в стоки; матрица  $(R_2)_{(n-l) \times (n-l)}$  – из пропускных способностей ребер, соединяющих вершины внутри переходной компоненты.

Стохастическая матрица  $R'$  будет иметь вид

$$R' = \left( \begin{array}{c|c} E_1 & O_1 \\ \hline R_1 & R_2 \end{array} \right).$$

Даже если матрица  $D$  имеет на диагонали нулевые элементы (т.е. одна или несколько стоковых вершин не имеют петель), блок  $E_1$  будет единичной матрицей.

*Свойство 1 (Теорема 2 [4]). В поглощающей сети порогового значения ресурса  $T$  не существует.*



*Свойство 2 (Лемма 1 [4]). Пусть поглощающая сеть с  $l$  стоками представлена матрицей (2). Тогда  $R^{\infty}$  – предел степенной стохастической матрицы  $R'$  – определяется по формуле*

$$(3) \quad R^{\infty} = \left( \begin{array}{c|c} E_1 & O_1 \\ \hline (E_2 - R_2')^{-1} R_1' & O_2 \end{array} \right),$$

где  $E_2$  – единичная матрица размера  $(n - l) \times (n - l)$ .

*Свойство 3 (Теорема 3 [4]). В поглощающей сети с  $l$  стоками матрица  $R^{\infty}$  остается неизменной при любых изменениях диагональных элементов.*

*Свойство 4 (Теорема 4 [4]). Пусть поглощающая сеть с  $l$  стоками представлена матрицей (2). Тогда для любого ресурса  $W$  и любого начального состояния  $Q(0) = (q_1(0), \dots, q_n(0))$  предельное состояние рассчитывается по формуле*

$$Q^* = Q(0)R^{\infty},$$

где  $R^{\infty}$  – предельная матрица, определяемая по формуле (3).

*Следствие.* Вектор предельного состояния  $Q^*$  не зависит от наличия или отсутствия петель в вершинах.

*Свойство 5 (Теорема 5 [4]). Пусть поглощающая сеть с  $l$  стоками представлена матрицей (2). Тогда элементы  $i$ -й строки матрицы  $R^{\infty}$  ( $i > l$ ) соответственно равны компонентам вектора предельного состояния при начальном состоянии  $Q_i(0) = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ , где единице равна  $i$ -я компонента:*

$$(4) \quad R^{\infty} = \begin{pmatrix} e_1^T \\ \dots \\ e_l^T \\ Q_{l+1}^* \\ \dots \\ Q_n^* \end{pmatrix},$$

( $e_1, \dots, e_l$  – первые  $l$  вектор-столбцов единичной матрицы  $(E)_{n \times n}$ ).

#### 4. Распределение ресурса между аттракторами в несимметричной регулярной сети

Поведение регулярных несимметричных сетей с несколькими аттракторами сложнее поведения поглощающих сетей. Так, в поглощающей сети ресурс, помещенный в сток в начальном состоянии, остается в нем в любой момент времени. В регулярных сетях это условие не выполняется. Для иллюстрации этого утверждения рассмотрим пример функционирования сети с двумя потенциальными аттракторами.

*Пример 1.* Несимметричная сеть ( $n = 5$ ) с двумя аттракторами  $v_1$  и  $v_2$  задана матрицей

$$(5) \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Основные ее характеристики следующие.

- Кортеж  $\rho = \left( (r_1^{in}; r_1^{out}), \dots, (r_n^{in}; r_n^{out}) \right)$  для этой сети имеет вид  $\rho = ((10, 5), (10, 5), (5, 10), (5, 10), (5, 5))$ .

- Предельное состояние при  $W = 1$ :  $Q^* = (0,250, 0,250, 0,1(6), 0,1(6), 1(6))$ .

- Пороговое значение ресурса  $T = 20$ .

- $\tilde{Q} = (5, 5, 3,(3), 3,(3), 3,(3))$ .

Рассмотрим начальное состояние  $Q(0) = (0, 5, 20, 0, 0)$ . Суммарный ресурс 25 больше порогового значения, значит, излишки ресурса должны распределиться между аттракторами. Аттрактор  $v_2$  имеет ресурс в начальном состоянии, аттрактор  $v_1$  – нет.

Предельное состояние для такого вектора  $Q(0)$  будет  $Q^* = (10, 5, 3,(3), 3,(3), 3,(3))$ . Как видно, весь излишек оказался в первой вершине (поскольку она связана с источником, имеющим большой ресурс, ребром с большой пропускной способно-

стью). Вершине  $v_2$  не удалось накопить больше того, что она имела в начале.

Даже с ресурсом, превышающим выходную пропускную способность, потенциальный аттрактор бывает неспособным перейти в зону  $Z^{+*}$ . Для той же сети перераспределим ресурс 25 в начальном состоянии:  $Q(0) = (0, 8, 17, 0, 0)$ . Предельное состояние в этом случае будет точно таким же:  $Q^* = (10, 5, 3, (3), 3, (3), 3, (3))$ .

Более того, если ресурс 8 переложить в вершину  $v_4$  (источник, связанный ребром с большой пропускной способностью с  $v_2$ ), так, чтобы начальное состояние было  $Q(0) = (0, 0, 17, 8, 0)$ , то предельное состояние будет:  $Q^* = (9,75, 5,25, 3, (3), 3, (3), 3, (3))$ . То есть в этом случае второй аттрактор получает излишки сверх своей пропускной способности, чего не наблюдалось, когда мы помещали ресурс непосредственно в него.

Таким образом, потенциальный аттрактор может притягивать ресурс из источников, но не всегда может удержать ресурс, находящийся в нем в начальном состоянии.

В данном исследовании будем рассматривать начальные состояния, в которых ресурс находится в источниках.

#### *4.1. ПОГЛОЩАЮЩАЯ СЕТЬ, СООТВЕТСТВУЮЩАЯ НЕСИММЕТРИЧНОЙ, И ПОПРАВКА НА РЕГУЛЯРНОСТЬ $\delta W$*

Исследуем распределение ресурса между потенциальными аттракторами при  $W > T$ . В [3] получена формула предельного состояния при больших ресурсах. В ней определены все компоненты вектора предельного состояния, кроме компонент, соответствующих вершинам-аттракторам. Если аттрактор в сети один, предельное состояние единственно. Если потенциальных аттракторов несколько, ресурс между ними в предельном состоянии может распределяться по-разному для разных начальных состояний. Опишем зависимость предельного состояния в аттракторах от начального состояния сети, как это было сделано для поглощающих сетей.

Рассмотрим несимметричную сеть с двумя аттракторами, заданную матрицей (5).

Пусть в начальном состоянии весь суммарный ресурс  $W > T$  находится в одном из источников. Найдем закономерность распределения ресурса  $W - T$  между аттракторами при изменении  $W$ . Рассмотрим два начальных состояния и соответствующие им предельные состояния:

$$(6) \quad Q(0) = (0, 0, 50, 0, 0) \rightarrow Q^* = (29,3, 10,7, 3,(3), 3,(3), 3,(3)).$$

$$(7) \quad Q(0) = (0, 0, 90, 0, 0) \rightarrow Q^* = (59,3, 20,7, 3,(3), 3,(3), 3,(3)).$$

Суммарный ресурс вершин, находящихся в зоне  $Z^*$ , в предельном состоянии равен 10. При  $Q(0) = (0, 0, 50, 0, 0)$  и  $Q(0) = (0, 0, 90, 0, 0)$  в зоне  $Z^{+*}$  распределяется ресурс, равный 40 и 80 соответственно. При суммарном приросте 40 прирост в вершинах составил соответственно 30 и 10, т.е.  $0,75\Delta W$  и  $0,25\Delta W$ . Прирост ресурса распределился в пропорции 3:1.

При любом дальнейшем увеличении ресурса пропорция 3:1 в распределении ресурса  $\Delta W$  между аттракторами сохраняется.

В силу симметричности аттракторов, если в начальном состоянии весь ресурс находился во втором источнике (вершине  $v_4$ ), в предельном состоянии его прирост в аттракторах распределится в пропорции  $0,25\Delta W$  и  $0,75\Delta W$  (соответственно, 1:3). А при помещении ресурса в начальном состоянии в нейтральную вершину прирост в аттракторах распределится как  $0,5\Delta W, 0,5\Delta W$ , т.е. в пропорции 1:1.

Для объяснения этого факта построим поглощающую сеть, соответствующую данной несимметричной сети. То есть превратим аттракторы в стоки, заменив все элементы матрицы  $R$ , соответствующие входным пропускным способностям аттракторов, нулями. Матрицу пропускной способности такой сети обозначим через  $R_{absorb}$ :

$$R_{absorb} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Предел степеней соответствующей стохастической матрицы обозначим через  $R_{absorb}^{\infty}$ . Найдем эту матрицу, воспользовавшись формулой (4). Для этого вычислим векторы предельного состояния при единичном ресурсе, поочередно находящемся в каждой из переходных вершин:

$$Q(0) = (0, 0, 1, 0, 0) \rightarrow Q^* = (0,75, 0,25, 0, 0, 0);$$

$$Q(0) = (0, 0, 0, 1, 0) \rightarrow Q^* = (0,25, 0,75, 0, 0, 0);$$

$$Q(0) = (0, 0, 0, 0, 1) \rightarrow Q^* = (0,5, 0,5, 0, 0, 0).$$

Тогда

$$(8) \quad R_{absorb}^{\infty} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0,75 & 0,25 & 0 & 0 & 0 \\ 0,25 & 0,75 & 0 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0,5 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Можно заметить, что именно в таких пропорциях распределяется ресурс  $\Delta W$  из каждой не-аттрактивной вершины между аттракторами.

Возникает вопрос, зависит ли эта пропорция от первых двух строк матрицы  $R$  или выходные пропускные способности аттракторов могут быть любыми до тех пор, пока они остаются аттракторами. При изменении выходных пропускных способностей аттракторов меняется пороговое значение  $T$ . Остается ли при больших  $W$  пропорция, заданная  $R_{absorb}^{\infty}$ , для излишков ресурса?

Рассмотрим следующие примеры.

*Пример 2.* Сеть задана матрицей

$$(9) \quad R = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 & 0,5 & 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 & 0,5 & 0,5 & 0,5 \\ 6 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для этой сети  $T = 10$ ;  $Q^{1*} = (0,250, 0,250, 0,1(6), 0,1(6), 1(6))$ ;

$$\tilde{Q} = (2,5, 2,5, 1,(6), 1,(6), 1,(6)).$$

Функционирование сети при разных начальных состояниях дает следующие предельные состояния:

$$Q(0) = (0, 0, 85, 0, 0) \rightarrow Q^* = (60,5, 19,5, 1,(6), 1,(6), 1,(6));$$

$$Q(0) = (0, 0, 45, 0, 0) \rightarrow Q^* = (30,5, 9,5, 1,(6), 1,(6), 1,(6)).$$

Ресурс, равный 5, остается в зоне  $Z^*$ , остальной распределяется между аттракторами. Разность ресурса для этих двух начальных состояний  $\Delta W = 40$  разделилась в пропорции 30:10, т.е. 3:1, как и раньше.

Это соотношение выполняется не только для однородных выходных пропускных способностей аттракторов. Но чтобы обе вершины оставались потенциальными аттракторами, их выходные пропускные способности нельзя изменять произвольно. Не приводят к потере аттрактивности любые изменения в пропускных способностях петель аттракторов, а также одинаковые изменения в пропускных способностях ребер, связывающих аттракторы с нейтральной вершиной  $v_5$  и друг с другом.

*Пример 3.* Сеть задана матрицей

$$R = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 8 & 1 & 1 & 0 \\ 6 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для нее имеем:  $T = 23$ ;

$$Q^{1*} = (0,261, 0,478, 0,116, 0,116, 0,029);$$

$$\tilde{Q} = (6, 11, 2,(6), 2,(6), 0,(6)).$$

Как видно, вектор предельных вероятностей изменился; в той же пропорции изменились компоненты вектора  $\tilde{Q}$ . В зоне  $Z^*$  в предельном состоянии оказывается ресурс, равный 6.

Рассмотрим две пары векторов (начальное состояние  $\rightarrow$  предельное состояние):  $Q(0) \rightarrow Q^*$ .

$$Q(0) = (0, 0, 86, 0, 0) \rightarrow Q^* = (56,910, 23,090, 2,(6), 2,(6), 0,(6)).$$

$$Q(0) = (0, 0, 46, 0, 0) \rightarrow Q^* = (26,910, 13,090, 2,(6), 2,(6), 0,(6)).$$

Разность ресурса  $\Delta W = 40$  вновь разделилась в пропорции 3:1, несмотря на вышеописанные изменения векторов предельного состояния.

Эта пропорция имеет место только для разности между двумя различными векторами. В пределах одного вектора предельного состояния она не выполняется. Рассмотрим первую пару векторов:

$$Q(0) = (0, 0, 86, 0, 0) \rightarrow Q^* = (56,910, 23,090, 2,(6), 2,(6), 0,(6)).$$

$$r_1^{out} = 6, r_2^{out} = 11.$$

$$\Delta q_1 = q_1^* - r_1^{out} = 50,910, \Delta q_2 = q_2^* - r_2^{out} = 12,090.$$

$$\Delta q_1 : \Delta q_2 = 50,910 : 12,090 > 4.$$

Вернемся к матрице (5) и проверим выполнение этой пропорции для нее. Из примера 1 имеем:

$$Q(0) = (0, 0, 100, 0, 0) \rightarrow Q^* = (66,8, 23,2, 3,(3), 3,(3), 3,(3)).$$

$$\text{Для этой матрицы } r_1^{out} = 5, r_2^{out} = 5.$$

$$\Delta q_1 = q_1^* - r_1^{out} = 61,8, \Delta q_2 = q_2^* - r_2^{out} = 18,2.$$

Как видно, пропорция 3:1 вновь не выполняется.

Вычислим разность  $\Delta q_1 - 3\Delta q_2$ :

$$\Delta q_1 - 3\Delta q_2 = 61,8 - 18,2 \cdot 3 = 61,8 - 54,6 = 7,2.$$

Проверим, чему равна эта разность при других значениях  $W$ .

Из (6), (7) следует, что при  $W = 50$  и  $W = 90$  также выполняется равенство

$$(10) \Delta q_1 - 3\Delta q_2 = 7,2.$$

Для достаточно больших значений  $W$  в сети, заданной матрицей (5), значение разности (10) остается неизменным. Обозначим его через  $\delta W$ . Начиная с некоторого  $W_{min} \geq T$ ,  $\delta W = \text{const}$ .

Таким образом, для поглощающей сети  $\delta W = 0$ . Как только поглощающая сеть превращается в регулярную, (т.е. у стоков появляются выходные ребра), величина  $\delta W$  становится положительной. Будем называть  $\delta W$  поправкой на регулярность.

Опишем процесс нахождения  $\delta W$  для произвольной сети с  $l$  аттракторами и произвольного начального состояния  $Q(0)$ , в котором ресурс, больший  $W_{min}$ , сосредоточен в не-аттрактивных

вершинах. Пусть  $R$  – матрица пропускных способностей сети с аттракторами, имеющими номера от 1 до  $l$ . Пусть  $Q^*$  – вектор предельного состояния при суммарном ресурсе  $W > 2r_{sum}$  (количество ресурса  $2r_{sum}$  заведомо больше  $W_{min}$ ). Построим вектор  $\Delta Q = Q^* - \tilde{Q}$ . Его последние  $n - l$  компонент равны нулю, а первые  $l$  компонент содержат ресурс, накопленный аттракторами сверх их пропускных способностей.  $R_{absorb}$  – матрица поглощающей сети, первые  $l$  строк которой равны нулю, а остальные  $n - l$  строк совпадают со строками матрицы  $R$ . Рассмотрим вектор предельного состояния этой поглощающей сети как функцию от количества ресурса  $Q^* = Q^*(W)$ . Будем увеличивать  $W$  от нуля до тех пор, пока какая-нибудь компонента не совпадет с компонентой вектора  $\Delta Q$ . Обозначим это количество ресурса через  $W$ . Тогда все компоненты разности  $\Delta Q - Q^*(W)$  неотрицательны по построению. Их сумма и составляет поправку на регулярность  $\delta W$ . Это такое количество ресурса, которое нарушает пропорциональность, имеющую место для поглощающей сети, распределяясь между аттракторами. Эта величина заведомо положительна. Используя введенные обозначения, можно дать формальное определение.

*Поправкой на регулярность  $\delta W$*  называется суммарное количество ресурса в предельном состоянии в одном или нескольких аттракторах, нарушающего пропорцию, заданную матрицей  $R_{absorb}$ :  $\delta W = (Q^* - \tilde{Q} - Q^*(W)) \cdot \mathbf{1}$ , где  $\mathbf{1}$  – вектор-столбец из  $n$  единиц.

Для того чтобы найти  $W_{min}$  и объяснить, откуда возникает вклад ресурса  $\delta W$ , нарушающий пропорцию, имеющую место для стоков, рассмотрим функционирование сети при ресурсах  $W > T$ , близких к пороговому значению, т.е. таких, что  $W - T \leq \delta W$ .

*Пример 4.* Сеть задана матрицей (5). Начиная с  $W = T$ , будем увеличивать суммарный ресурс в сети, помещая его в начальном состоянии в третью вершину. Для этой сети  $T = 20$ . Выпишем начальные и соответствующие им предельные состояния:



$$Q(0) = (0, 0, 20, 0, 0) \rightarrow \tilde{Q} = (5, 5, 3, (3), 3, (3), 3, (3)).$$

$$Q(0) = (0, 0, 25, 0, 0) \rightarrow Q^* = (10, 5, 3, (3), 3, (3), 3, (3)).$$

$$Q(0) = (0, 0, 27, 0, 0) \rightarrow Q^* = (12, 5, 3, (3), 3, (3), 3, (3)).$$

$$Q(0) = (0, 0, 27, 2, 0, 0) \rightarrow Q^* = (12, 2, 5, 3, (3), 3, (3), 3, (3)).$$

$$Q(0) = (0, 0, 27, 21, 0, 0) \rightarrow \\ \rightarrow Q^* = (12, 2075, 5, 0025, 3, (3), 3, (3), 3, (3)).$$

Из этих пар векторов видно, что при значениях  $W - T \leq 7,2$  ресурс из источника не распределяется пропорционально, а накапливается в одном аттракторе. Ресурс второго аттрактора остается в предельном состоянии равным  $r_2^{out} = 5$  вплоть до  $W = 27,2$ , и, соответственно,  $\delta W = 7,2$ .

При суммарном ресурсе  $W > 27,2$  второй аттрактор тоже попадает в зону  $Z^{+*}$ , и начинает выполняться соотношение

$$(q_1^* - 5 - 7,2) : (q_2^* - 5) = 1 : 3$$

В общем виде для сети с двумя симметричными аттракторами  $v_1$  и  $v_2$ , запитанными на источники  $v_3$  и  $v_4$  соответственно, можно утверждать следующее. Если ресурс в начальном состоянии находится в вершине  $v_3$  и при этом его величина удовлетворяет неравенству  $W \geq T + \delta W$ , в предельном состоянии выполнится соотношение

$$(q_1^* - r_1^{out} - \delta W) : (q_2^* - r_2^{out}) = r_{absorb\ 31}^{'\infty} : r_{absorb\ 32}^{'\infty},$$

где матрица  $R_{absorb}^{'\infty}$  задана формулой (8).

То есть, если известно значение  $\delta W$ , предельное состояние при заданном начальном находится однозначно.

*Лемма 1. Пусть в регулярной несимметричной сети с двумя аттракторами  $v_1$  и  $v_2$ , ресурс  $W > T$  в начальном состоянии находится в источнике  $v_j$ , для которого  $r_{absorb\ j1}^{'\infty} = \max_{k \in \{3, \dots, n\}} r_{absorb\ k1}^{'\infty}$ .*

*Тогда вектор предельного состояния равен*

(11)

$$Q^* = \begin{cases} \tilde{Q} + (W - T, 0, 0, \dots, 0) & \text{при } W \leq T + \delta W, \\ \tilde{Q} + (\delta W + r_{absorb\ j1}^{'\infty} \cdot \Delta W, r_{absorb\ j2}^{'\infty} \cdot \Delta W, 0, \dots, 0) & \text{при } W > T + \delta W; \end{cases}$$

где  $\Delta W = W - (T + \delta W)$ ;  $R_{absorb}^{\infty}$  – предельная матрица поглощающей сети, соответствующей данной регулярной сети.

*Доказательство.* Дисбаланс в аттракторах происходит по следующей причине. Пока аттрактор  $v_2$  добирает свой ресурс до выходной пропускной способности, он функционирует по правилу 2, т.е. на каждом такте отдает весь свой ресурс. Аттрактор  $v_1$  переходит на функционирование по правилу 1 и начинает отдавать по полной выходной пропускной способности, получая больше этого значения. Излишек на каждом такте остается в  $v_1$ . Таким образом,  $\delta W$  состоит из ресурса, накопленного одним аттрактором, пока он работает по правилу 1, в то время как другой аттрактор работает по правилу 2. Если значение ресурса суммарного ресурса  $W \leq T + \delta W$ , то по определению  $\delta W$  ресурс аттрактора  $v_2$  асимптотически стремится к  $r_1^{out}$ , и  $v_2$  не переходит в зону  $Z^+(t)$ , и верхняя строка (11) доказана.

Если  $W > T + \delta W$ , оба аттрактора оказываются в зоне  $Z^+(t)$ . В некоторый момент времени  $t'$  выполняется:  $q_2(t' - 1) \leq r_2^{out}$  и  $q_2(t') > r_2^{out}$ . Тогда  $q_1(t') = r_1^{out} + \delta W$ . Покажем, что при переходе второго аттрактора в зону  $Z^+(t)$  ресурс начинает распределяться между аттракторами в пропорции, заданной  $R'_{absorb}$ . Выходной поток в аттракторах при их переходе в зону  $Z^+(t)$  стабилизировался: он равен  $r_1^{out}$  в первом аттракторе и  $r_2^{out}$  во втором – в каждое ребро они отдают по полной пропускной способности. Накопление в аттракторах происходит, пока их входной поток больше выходного. Оно складывается из разницы стабильной и нестабильной компонент, поскольку в сбалансированном (предельном) потоке для аттракторов выполняется:  $f_1^{in*} = f_1^{out*} = r_1^{out}$ ,  $f_2^{in*} = f_2^{out*} = r_2^{out}$ . Если рассматривать только нестабильную компоненту потока, ей соответствует матрица, в которой выходные пропускные способности аттракторов равны нулю, а это и есть матрица  $R_{absorb}$ .

Таким образом, ресурс сверх  $T + \delta W$  распределяется между аттракторами в пропорции, заданной матрицей  $R_{absorb}^{\infty}$ .  $\square$

Лемма легко обобщается на случай произвольного количества аттракторов. Пусть в сети с  $l$  аттракторами  $v_1, \dots, v_l$ , ресурс

$W > T$  в начальном состоянии весь сосредоточен в источнике  $v_j$ ,  $j > l$ . Обозначим через  $\delta W_i$  – поправки в каждом аттракторе при любом  $W \geq T$  – достаточно большом, чтобы часть ресурса распределялась в предельном состоянии в соответствии с матрицей  $R_{absorb}^{\infty}$ . Ясно, что  $\delta W_i = const$ , поскольку после перехода последнего из аттракторов в зону  $Z^+(t)$  выходной поток в них стабилизируется, и ресурс начинает прибывать в них с пропорции, заданной матрицей  $R_{absorb}^{\infty}$ .

*Теорема 1. Пусть в регулярной несимметричной сети с  $l$  аттракторами  $v_1, \dots, v_l$  ресурс  $W > T$  в начальном состоянии находится в источнике  $v_j$ ,  $j > l$ . Тогда вектор предельного состояния равен:*

$$(12) \quad Q^* = \begin{cases} \tilde{Q} + (0, \dots, W - T, 0, \dots, 0) & \text{при } W \leq T + (\delta W_m - \delta W_{-m}), \\ \tilde{Q} + (\delta W_1^{\wedge}, \dots, \delta W_l^{\wedge}, 0, \dots, 0) & \text{при } T + (\delta W_m - \delta W_{-m}) < W \leq T + \delta W, \\ \tilde{Q} + (\delta W_1 + r_{absorb\ j1}^{\infty} \cdot \Delta W, \dots, \delta W_l + r_{absorb\ jl}^{\infty} \cdot \Delta W, 0, \dots, 0) & \text{при } W > T + \delta W; \end{cases}$$

где вектор  $(0, \dots, W - T, 0, \dots, 0)$  имеет ненулевую компоненту с номером  $m \leq l$ ;  $m$  находится из условия  $m = \arg \max_{k \in \{1, \dots, l\}} r_{absorb\ km}^{\infty}$ ;

$0 \leq \delta W_i^{\wedge} < \delta W_i$  – поправки при  $T + (\delta W_m - \delta W_{-m}) < W < T + \delta W$ ;  
 $\delta W_m = \max_{k \in \{1, \dots, l\}} \delta W_k$  – поправка, соответствующая аттрактору  $v_m$ ;

$\delta W_{-m} = \max_{\delta W_k \in \{\delta W_1, \dots, \delta W_l\} \setminus \delta W_m} \delta W_k$  – вторая по величине поправка при ресурсе, сконцентрированном в источнике  $v_j$ ;

$$\delta W = \sum_{i=1}^l \delta W_i; \quad \Delta W = W - (T + \delta W);$$

причем существует аттрактор  $v_i$ , для которого  $\delta W_i = 0$ ,  $i \leq l$ .

*До к а з а т е л ь с т в о.*

Докажем каждую строку из формулы (12) отдельно.

1. Справедливость формулы для случая  $W < T + (\delta W_m - \delta W_{-m})$  вытекает из доказательства леммы 1. Аттрактор  $v_m$  первым переходит на правило 1 и начинает наби-

рать излишки ресурса, составляющие поправку  $\delta W_m^{\wedge} = (W - T)$ . Если второй (по величине  $\delta W_i$ ) аттрактор не может перейти на правило 1, все излишки ресурса в предельном состоянии окажутся в вершине  $v_m$ . Переход второго аттрактора на правило 1 происходит, когда аттрактор  $v_m$  имеет ресурс, равный  $(\delta W_m - \delta W_{-m})$ . Отсюда непосредственно вытекает условие выполнения равенства  $Q^* = \tilde{Q} + (0, \dots, W - T, 0, \dots, 0)$ .

2. При ресурсе, превосходящем значение  $T$  менее чем на суммарную поправку  $\delta W$ , при функционировании сети часть аттракторов может не перейти в зону  $Z^+(t)$ , соответствующие поправки  $\delta W_i^{\wedge} = \delta W_i^{\wedge}(W)$  для них будут равны нулю, и компоненты предельного состояния будут равны соответствующим компонентам вектора  $\tilde{Q} = (r_1^{out}, \dots, r_l^{out}, \tilde{q}_{l+1}(0), \dots, \tilde{q}_n(0))$ . По мере увеличения суммарного ресурса сверх величины  $T + (\delta W_m - \delta W_{-m})$  аттракторы один за другим смогут перейти в зону  $Z^+(t)$ . Если ввести такую нумерацию аттракторов, что они будут упорядочены по убыванию величины  $\delta W_i$ , т.е.  $\delta W_1 := \delta W_m$ ,  $\delta W_2 := \delta W_{-m}$ , и т.д., то можно вычислить значение ресурса  $W$ , при котором аттрактор с номером  $k$  будет иметь в предельном состоянии  $\delta W_k^{\wedge}(W) > 0$ . Для этого необходимо, чтобы все аттракторы с номерами, меньшими  $k$ , тоже имели положительные поправки. Разобьем множество значений суммарного ресурса  $W > T$  на интервалы и рассмотрим зону  $Z^+(t)$  для каждого из них.

1)  $T < W \leq T + (\delta W_1 - \delta W_2)$ : только аттрактор  $v_1$  функционирует по правилу 1. Введем обозначение:  $T + (\delta W_1 - \delta W_2) = T_1$ . Далее границы полуинтервалов будем обозначать через  $T_i$ .

2)  $T_1 < W \leq T + (\delta W_1 - \delta W_2) + 2(\delta W_2 - \delta W_3) = T + \delta W_1 + \delta W_2 - 2\delta W_3 = T_2$ : аттракторы  $v_1$  и  $v_2$  функционируют по правилу 1.

3)  $T_2 < W \leq T + (\delta W_1 - \delta W_2) + 2(\delta W_2 - \delta W_3) + 3(\delta W_3 - \delta W_4) = T + \delta W_1 + \delta W_2 + \delta W_3 - 3\delta W_4 = T_3$ : аттракторы  $v_1, v_2$  и  $v_3$  функционируют по правилу 1.

...

$l - 2$ )  $T_{l-3} < W \leq T + \delta W_1 + \dots + \delta W_{l-2} - (l - 1)\delta W_{l-1} = T_{l-2}$ : аттракторы  $v_1, v_2, \dots, v_{l-1}$  функционируют по правилу 1.

$l-1$ )  $T_{l-2} < W \leq T + \delta W_1 + \dots + \delta W_{l-1}$ : аттракторы  $v_1, \dots, v_{l-1}$  функционируют по правилу 1, но поправка в аттракторе  $v_{l-1}$  еще не достигла своего максимального значения.

$l$ )  $W > T + \delta W_1 + \dots + \delta W_{l-1} = T + \delta W$  все аттракторы переходят в зону  $Z^+(t)$ , и поправки достигли максимальных значений. При этом, в аттракторе  $v_l$  поправки нет:  $\delta W_l = 0$ , так как больше нет аттракторов, которым нужно накапливать ресурс.

3. Третья строка формулы (12) доказана в пункте  $l$ ). При  $W > T + \delta W$  все аттракторы переходят в зону  $Z^+(t)$ , и выходной поток в них стабилизируется за конечное число тактов. Далее в сети начинается перераспределение ресурса в соответствии с матрицей  $R_{absorb}^{\infty}$ . □

*Замечание 1.* Если вершина-аттрактор, для которой выполняется условие  $m = \arg \max_{k \in \{1, \dots, l\}} r_{absorb\ km}^{\infty}$ , не единственна, то ресурс  $W - T$  в верхней строке формулы (12) распределится в равных долях между всеми этими аттракторами.

*Замечание 2.* Проиллюстрируем графически формулы в пунктах 1) ÷  $l$ ).

На рис. 1 представим, что пунктирные линии – смещающаяся вниз ось абсцисс. Они задают уровень, ресурс над которым виден. Чем ось ниже, тем больше вершин-аттракторов имеют положительные поправки. При непрерывной («главной») оси абсцисс все вершины имеют максимальные поправки. При дальнейшем увеличении ресурса излишки будут распределяться в пропорции, заданной матрицей  $R_{absorb}^{\infty}$ .

Как и во всех гистограммах количество ресурса рассчитывается как площадь частей столбиков, выделенных тем или иным цветом. Ширину каждого столбца считаем единичной. На рис. 2 количество ресурса над соответствующей осью показано цветом. Этот рисунок иллюстрирует возникновение каждого слагаемого в суммах из выражений 1) ÷  $l$ ).

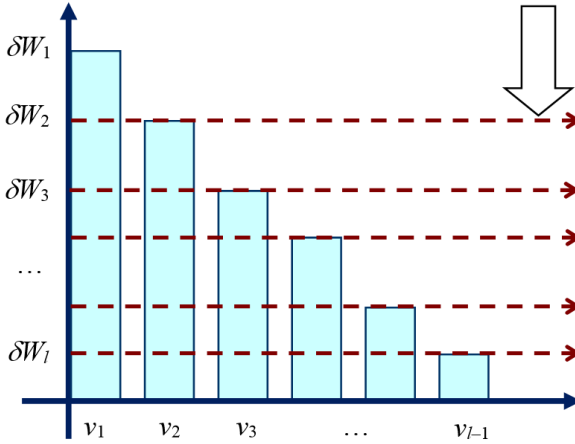


Рис. 1. Расположение величин  $\Delta W_i$  в порядке убывания

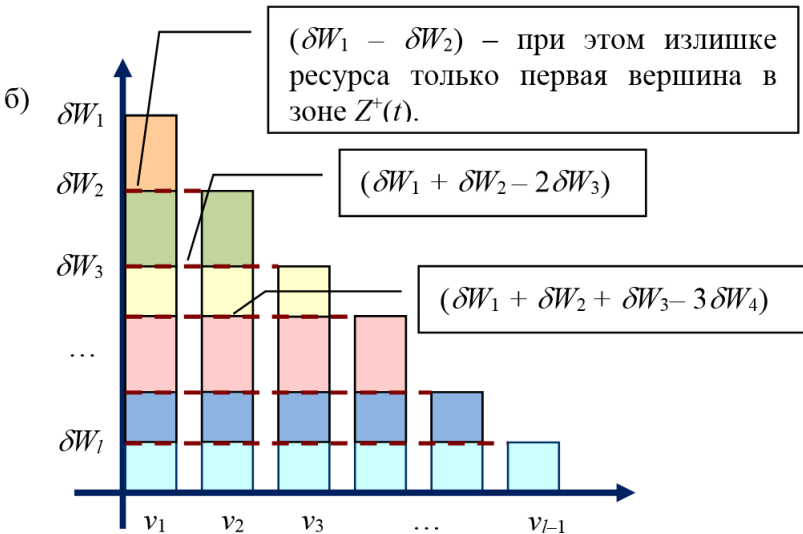


Рис. 2. Для перехода аттрактора в зону  $Z^+(t)$ , ресурс должен превысить сумму ресурсов над пунктирной чертой

*Следствие.* Непосредственно из доказательства теоремы вытекает, что если в несимметричной сети имеется  $l$  потенци-

альных аттракторов, а ресурс в начальном состоянии сосредоточен в вершине-источнике  $v_j$ ,  $j > l$ , то значения суммарного ресурса при  $W > T$  можно разбить на  $l$  интервалов, для каждого из которых поправки  $\delta W_i$  будут иметь  $i$  вершин ( $i = 1, \dots, l$ ). Границы интервалов задаются формулами из пп. 1) ÷ l).

При ресурсе  $W > T + \delta W$  все вершины имеют максимально возможную поправку, ресурс сверх  $T + \delta W$  распределяется в соответствии с матрицей  $R_{absorb}^{100}$ .

Значения  $\delta W_i$  можно найти экспериментально для любой сети. Чтобы получить аналитические зависимости и выявить закономерности, рассмотрим изменение  $\delta W_i$  при изменении строк матрицы пропускных способностей, соответствующих аттракторам. Если все элементы в них равны нулю, сеть превращается в поглощающую.

#### 4.2. ЗАВИСИМОСТЬ $\delta W$ ОТ ВЫХОДНЫХ ПРОПУСКНЫХ СПОСОБНОСТЕЙ АТТРАКТОРОВ

Вновь рассмотрим сеть с двумя потенциальными аттракторами. Здесь поправка  $\delta W$  накапливается только в одной вершине, поэтому можно записать  $\delta W_1 = \delta W$  и далее оперировать величиной  $\delta W$ .

Проследим зависимость  $\delta W$  от выходных пропускных способностей вершин-аттракторов:  $\delta W = \delta W(r_i^{out})$ ,  $i = 1, 2$ , считая, что первые две строки матрицы  $R$  однородны, как в матрицах (5) и (9).

Пример 5. В матрице

$$R = \begin{pmatrix} r & r & r & r & r \\ r & r & r & r & r \\ 6 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

будем изменять пропускные способности  $r$  от нуля с некоторым шагом. Данные экспериментов представлены в таблице 1.

Таблица 1. Характеристики предельного состояния при разных выходных пропускных способностях аттракторов

№	$r$	$r_1^{out}, r_2^{out}$	$T$	$\tilde{Q}$	$\delta W$
1.	0	0	0		0
2.	0,05	0,25	1	(0,25, 0,25, 0,1(6), 0,1(6), 0,1(6))	0,875
3.	0,1	0,5	2	(0,5, 0,5, 0,(3), 0,(3), 0,(3))	1,75
4.	0,15	0,75	3	(0,75, 0,75, 0,5, 0,5, 0,5)	2,625
5.	0,2	1	4	(1, 1, 0,(6), 0,(6), 0,(6))	3,5
6.	0,25	1,25	5	(1,25, 1,25, 0,8(3), 0,8(3), 0,8(3))	4,375
7.	0,3	1,5	6	(1,5, 1,5, 1, 1, 1)	5
8.	0,35	1,75	7	(1,75, 1,75, 1,1(6), 1,1(6), 1,1(6))	5,375
9.	0,4	2	8	(2, 2, 1,(3), 1,(3), 1,(3))	5,75
10.	0,45	2,25	9	(2,25, 2,25, 1,5, 1,5, 1,5)	6,125
11.	0,5	2,5	10	(2,5, 2,5, 1,(6), 1,(6), 1,(6))	6,5
12.	0,55	2,75	11	(2,75, 2,75, 1,8(3), 1,8(3), 1,8(3))	6,875
13.	0,6	3	12	(3, 3, 2, 2, 2)	7,2
14.	0,65	3,25	13	(3,25, 3,25, 2,1(6), 2,1(6), 2,1(6))	7,28
15.	0,7	3,5	14	(3,5, 3,5, 2,(3), 2,(3), 2,(3))	7,3
16.	0,75	3,75	15	(3,75, 3,75, 2,5, 2,5, 2,5)	7,31
17.	0,8	4	16	(4, 4, 2,(6), 2,(6), 2,(6))	7,32
18.	0,85	4,25	17	(4,25, 4,25, 2,8(3), 2,8(3), 2,8(3))	7,335
19.	0,9	4,5	18	(4,5, 4,5, 3, 3, 3)	7,35
20.	0,95	4,75	19	(4,75, 4,75, 3,1(6), 3,1(6), 3,1(6))	7,365
21.	1	5	20	(5, 5, 3,(3), 3,(3), 3,(3))	7,2
22.	1,05	5,25	21	(5,25, 5,25, 3,5, 3,5, 3,5)	6,945
23.	1,1	5,5	22	(5,5, 5,5, 3,(6), 3,(6), 3,(6))	6,67
24.	1,15	5,75	23	(5,75, 5,75, 3,8(3), 3,8(3), 3,8(3))	6,4



№	$r$	$r_1^{out},$ $r_2^{out}$	$T$	$\tilde{Q}$	$\delta W$
25.	1,2	6	24	(6, 6, 4, 4, 4)	6,13
26.	1,25	6,25	25	(6,25, 6,25, 4,1(6), 4,1(6), 4,1(6))	6,155
27.	1,3	6,5	26	(6,5, 6,5, 4,(3), 4,(3), 4,(3))	6,16
28.	1,35	6,75	27	(6,75, 6,75, 4,5, 4,5, 4,5)	6,04
29.	1,4	7	28	(7, 7, 4,(6), 4,(6), 4,(6))	5,78
30.	1,45	7,25	29	(7,25, 7,25, 4,8(3), 4,8(3), 4,8(3))	5,515
31.	1,5	7,5	30	(7,5, 7,5, 5, 5, 5)	5,18

Таблица конечна. Далее пропускная способность увеличиваться не может, так как матрица

$$R = \begin{pmatrix} 1,5 & 1,5 & 1,5 & 1,5 & 1,5 \\ 1,5 & 1,5 & 1,5 & 1,5 & 1,5 \\ 6 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

задает сеть стремя аттракторами. Это вершины  $v_1, v_2$  и  $v_5$  – для всех трех вершин выполняется критерий аттрактивности (формула (1)). В самом деле, для вершин  $v_1, v_2$  и  $v_5$  выполняется:

$$\frac{r_1^{out}}{q_1^{1*}} = \frac{r_2^{out}}{q_2^{1*}} = \frac{7,5}{0,25} = 30; \quad \frac{r_5^{out}}{q_5^{1*}} = \frac{5}{1/6} = 30;$$

при этом из таблицы 1 следует, что для этой сети  $T = 30$ .

Представим данные, полученные в таблице в виде графика (рис. 3). Из него видно, что изменения  $\delta W$  с ростом пропускных способностей аттракторов происходят немонотонно. Сначала эта величина возрастает, причем присутствуют участки линейного роста; при пропускных способностях, равных приблизительно 0,95, достигает максимума, и затем начинает убывать. Однако при пропускных способностях, равных 1,25 и 1,3, монотонность вновь нарушается.

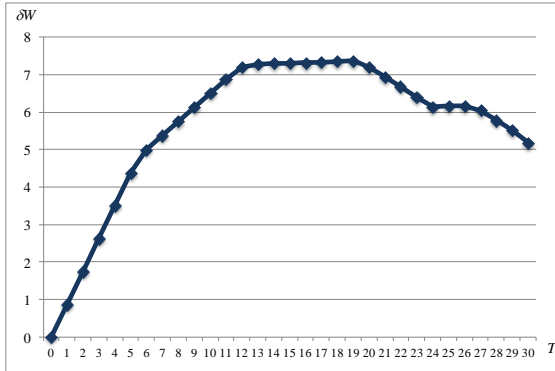


Рис. 3. Зависимость величины  $\Delta W$  от выходных пропускных способностей аттракторов (и порогового значения  $T$ )

#### 4.3. НЕЛИНЕЙНЫЕ ПЕРЕХОДЫ ПРИ ФУНКЦИОНИРОВАНИИ СЕТИ И НЕОДНОРОДНАЯ ЦЕПЬ МАРКОВА

Функционирование несимметричной сети с ресурсом, большим порогового значения, описывается неоднородной цепью Маркова.

Для того чтобы вся сеть при большом ресурсе функционировала по правилу 2 и при этом ее состояния на каждом такте совпадали с состояниями сети, работающей по двум правилам, необходимо и достаточно на каждом такте изменять пропускные способности петель вершин, имеющих избыток ресурса, так чтобы весь избыток уходил в петлю и возвращался на следующем такте. Таким образом, каждая вершина будет отдавать весь свой ресурс.

На каждом такте  $t$  строится матрица пропускных способностей  $R(t)$ , отличающаяся от матрицы  $R$  только диагональными элементами вершин, которые функционируют по правилу 1. То есть

$$r_{ii}(t) = \begin{cases} r_{ii}, & \text{если } q_i(t) \leq r_i^{out}, \\ q_i(t) - \sum_{j \neq i} r_{ij}, & \text{если } q_i(t) > r_i^{out}. \end{cases}$$

Нормируя матрицы  $R(t)$ , получим стохастические матрицы  $R'(t)$ , которые задают неоднородную цепь Маркова. Вектор

$$Q(t+1) = Q(0) \prod_{t=0}^m R'(t)$$

совпадает с вектором состояния сети, заданной матрицей  $R$ , с начальным состоянием  $Q(0)$ .

Если в начальном состоянии весь ресурс сосредоточен в источнике с номером  $j$ , матрица  $R(t)$  будет отличаться от исходной матрицы  $R$  только  $j$ -й строкой. В процессе функционирования некоторые вершины могут оказываться в зоне  $Z^+(t)$ , и тогда соответствующие им строки матрицы  $R(t)$  будут отличаться от строк матрицы  $R$ . За конечное число шагов зона  $Z^+(t)$  стабилизируется, и в ней остаются только потенциальные аттракторы. Все остальные строки матрицы  $R(t)$  и соответствующей ей матрицы  $R'(t)$  совпадают с соответствующими строками матриц  $R$  и  $R'$ .

Опишем процессы, происходящие в сети, когда одна из вершин изменяет правило функционирования. Снова для простоты рассмотрим сеть с двумя потенциальными аттракторами. Пусть  $W > T + \delta W$ , тогда при начальном состоянии, в котором весь ресурс сосредоточен в одном источнике, существует, как минимум, три точки смены правила функционирования: первый и второй аттракторы по очереди переходят на правило 1, источник с ресурсом переходит на правило 2.

Рассмотрим этапы, на которые делится функционирование сети.

0. В начальном состоянии в зоне  $Z^+(0)$  находится единственная вершина – источник с ресурсом  $W > T$ .

1. Смена правила в первой вершине-аттракторе. Поскольку в начальном состоянии этот аттрактор не имел ресурса, существует как минимум один такт времени, в который эта вершина функционирует по правилу 2. Через конечное число тактов эта вершина переходит на правило 1. Зона  $Z^+(t)$  содержит две вершины: аттрактор и источник.

2. Второй аттрактор переходит на правило 1. Зона  $Z^+(t)$  содержит три вершины: два аттрактора и источник. Выходной поток из аттракторов стабилизируется.

3. Источник покидает зону  $Z^+(t)$ . В зоне  $Z^+(t)$  остаются два аттрактора.

На промежутке между переходами 1 и 2 происходит формирование поправки  $\delta W$ . На промежутке между переходами 2 и 3 начинается формирование разности ресурса, соответствующее  $R^{absorb}$ . Если переход 2 отсутствует, второй аттрактор не получает ресурс, больший своей выходной пропускной способности.

После перехода 3 зона  $Z^+(t)$  стабилизируется.

Строки стохастических матриц  $R(t)$ , соответствующие вершинам, функционирующим по правилу 1, изменяются на каждом такте. Рассмотрим матрицы, задающие изменение вектора исходящего потока. Они изменяются только при переходах 1–3, в остальные моменты времени они стационарны. Представим матрицу стохастическую матрицу  $R'$  в виде:  $R' = (r'_1, r'_2, \dots, r'_n)$ , где  $r'_k$  – столбцы  $R'$ . Пусть  $v_j$  – вершина-источник содержащая ресурс в начальном состоянии,  $v_1, v_2$  – аттракторы, причем, пусть, для определенности первый переходит в зону  $Z^+(t)$  аттрактор  $v_1$ . Тогда изменение исходящего потока на последовательных тактах в соответствии с этапами 0-3 можно записать следующим образом:

0.  $F^{out}(t+1) = F^{out}(t)(r'_1, r'_2, r'_3, \dots, e_j, \dots, r'_n)$ ,  $t < t_1$ ;
1.  $F^{out}(t+1) = F^{out}(t)(e_1, r'_2, r'_3, \dots, e_j, \dots, r'_n)$ ,  $t_1 \leq t < t_2$ ;
2.  $F^{out}(t+1) = F^{out}(t)(e_1, e_2, r'_3, \dots, e_j, \dots, r'_n)$ ,  $t_2 \leq t < t_3$ ;
3.  $F^{out}(t+1) = F^{out}(t)(e_1, e_2, r'_3, \dots, r'_j, \dots, r'_n)$ ,  $t \geq t_3$ .

Обозначим матрицы, на которые умножается вектор  $F^{out}(t)$  через  $P_j, P_{1j}, P_{12j}$  и  $P_{12}$  соответственно. Для каждого из четырех этапов входящий поток вычисляется по формуле

$$F^{in}(t+1) = F^{out}(t)R'$$

Из сказанного выше следует, что  $\delta W$  вычисляется как первая компонента вектора

$$\begin{aligned} \delta\bar{W} &= \sum_{t=t_1}^{t_2} (F^{in}(t+1) - F^{out}(t+1)) = \sum_{t=t_1}^{t_2} (F^{out}(t)R' - F^{out}(t)P_{1j}) = \\ &= \sum_{t=t_1}^{t_2} F^{out}(t)(R' - P_{1j}). \end{aligned}$$

Матрица  $(R' - P_{1j})$  имеет два ненулевых столбца с номерами 1 и  $j$ .

Преобразуем это выражение далее, воспользовавшись зависимостью векторов исходящего потока на двух последовательных тактах. В рамках второго этапа  $F^{out}(t+1) = F^{out}(t)P_{1j}$ , следовательно,  $F^{out}(t) = F^{out}(t_1)(P_{1j})^{t-t_1}$ .

Тогда

$$\delta\bar{W} = F^{out}(t_1) \left( \sum_{t=t_1}^{t_2} (P_{1j})^{t-t_1} \right) (R' - P_{1j}).$$

Вектор  $\delta\bar{W}$  имеет ненулевые компоненты с номерами 1 и  $j$ , соответствующие аттрактору и источнику;  $\delta W = (\delta\bar{W})_{\downarrow}$ .

Значения  $\delta W_i$  для сети с  $l$  аттракторами ( $i = 1, \dots, l$ ) определяются аналогично. Количество промежуточных переходов будет  $l + 1$  – по одному на каждый аттрактор и один для источника.

#### 4.4. ПРЕДЕЛЬНОЕ СОСТОЯНИЕ СЕТИ ПРИ $f_{sum}(t) \geq T$

Заметим, что значения  $\delta W_i$  ( $i = 1, \dots, l$ ) максимальны, когда ресурс в начальном состоянии сосредоточен только в одной вершине-источнике, т.е. асимметрия его распределения максимальна. При других начальных состояниях  $\delta W$  будут меньше. В предельном случае  $\delta W = 0$ . Так, например, эксперименты показывают, что если во все вершины в начальном состоянии поместить ресурс, больший предельного значения при  $W = T$ , то весь излишек будет распределяться в пропорции, заданной матрицей  $R^{absorb}$ . Докажем, что это верно для любой несимметричной регулярной сети.

*Теорема 2.* Пусть регулярная несимметричная ресурсная сеть с  $l$  потенциальными аттракторами ( $l > 1$ ) имеет суммарный ресурс  $W > T$  и начальное ее состояние  $Q(0)$  представимо в виде  $Q(0) = \tilde{Q} + \Delta Q(0)$ , где  $\tilde{Q}$  – предельное состояние при  $W = T$ ,  $\Delta Q(0)$  – произвольный вектор, задающий распределение излишков ресурса  $W - T$ . Тогда предельное состояние представимо в виде суммы двух векторов:

$$(13) \quad Q^* = \tilde{Q} + \Delta Q(0) R_{absorb}^{\infty}.$$

*Доказательство.* Когда в регулярной сети все вершины имеют ресурс, не меньший соответствующей компоненты вектора  $\tilde{Q}$ , поток в сети состоит из двух частей:  $F^{out}(t) = \tilde{F} + \Delta F^{out}(t)$ , где стабильная компонента  $\tilde{F}$  равна предельному потоку при любом ресурсе  $W > T$ , а нестабильная компонента  $\Delta F^{out}(t)$ , уменьшающаяся со временем, отвечает за перераспределение излишков ресурса  $\Delta Q(t)$ . Причем, поскольку аттракторы при  $W = T$  отдадут по полной пропускной способности и больше отдать уже не могут, то соответствующие им компоненты вектора  $\Delta F^{out}(t)$  равны нулю – ресурс, соответствующий  $\Delta Q(t)$ , в аттракторы входит, но не может выйти. Таким образом, излишки распределяются по закону:

$$\Delta Q(t+1) = \Delta Q(t) R'_{absorb}, \text{ где } R'_{absorb} = \left( \begin{array}{c|c} E & O_1 \\ \hline R'_1 & R'_2 \end{array} \right).$$

В предельном состоянии:

$$\Delta Q^* = \Delta Q(0) \left( \begin{array}{c|c} E & O_1 \\ \hline (E_2 - R'_2)^{-1} R'_1 & O_2 \end{array} \right) = \Delta Q(0) R_{absorb}^{\infty}. \quad \square$$

#### 4.5. НАЧАЛЬНЫЕ СОСТОЯНИЯ, НЕ СОЗДАЮЩИЕ ПОПРАВКУ

Теорема 2 содержит достаточное условие того, что ресурс в аттракторах распределится в той же пропорции, что и в стоках соответствующей поглощающей сети. Однако в ней описан узкий класс начальных состояний, приводящих к такому предельному состоянию. Предельное состояние описывается формулой (13) для еще одного класса начальных состояний.

*Теорема 3.* Пусть в регулярной несимметричной ресурсной сети с  $l$  аттракторами с номерами  $1, \dots, l$  и  $k$  источниками с номерами  $l+1, \dots, l+k$ , начальное состояние задано вектором:

$$Q(0) = (q_1(0), \dots, q_l(0), \tilde{q}_{l+1} + \Delta W_{l+1} + \Delta Q_{l+1}, \dots, \dots, \tilde{q}_{l+k} + \Delta W_{l+k} + \Delta Q_{l+k}, \dots, q_n(0)),$$

где величины

$$\Delta W_j = \sum_{i \in \{1, \dots, l, l+k+1, \dots, n\}} \frac{d_i(0)}{r_i^{in-}} r_{ji} \quad (j = l+1, \dots, l+k)$$

– необходимые минимальные излишки в каждом источнике;  $r_i^{in-}$  – суммарная входная пропускная способность вершин из  $Z(0)$  по ребрам из вершин-источников,  $d_i(0)$  – дефициты<sup>1</sup> всех вершин из  $Z(0)$ :  $i = 1, \dots, l, l+k+1, \dots, n$ ,  $\Delta Q_j \geq 0$ ,  $j = l+1, \dots, l+k$ . Тогда предельное состояние представимо в виде

$$Q^* = \tilde{Q} + \Delta Q \cdot R_{absorb}^{\infty},$$

где  $\Delta Q$  – вектор длины  $n$  с ненулевыми компонентами  $\Delta Q_j$  ( $j = l+1, \dots, l+k$ ).

*Доказательство.* В теореме утверждается, что если все источники имеют ресурс и его количество достаточно велико, то накопления поправки  $\delta W$  в аттракторах не происходит. Чтобы доказать это утверждение и оценить количество ресурса, которое должно находиться в каждом из источников, обратимся к описанию смены правил вершинами в сети, данному в разделе 4.3. Накопление величины поправки происходит, когда при функционировании сети случается асинхронный переход аттракторов из зоны  $Z(t)$  в зону  $Z^+(t)$ : пока в аттракторах из  $Z^+(t)$  происходит накопление, аттракторы, находящиеся в  $Z(t)$ , продолжают отдавать весь свой ресурс.

При достаточно больших ресурсах во всех источниках аттракторы переходят на правило 1 одновременно. Следовательно, накопления поправки ресурса не происходит и  $\delta W = 0$ .

---

<sup>1</sup> Под дефицитом вершины  $v_i$  мы понимаем количество ресурса, недостающее до значения  $\tilde{q}_i$ .

Определим понятие «достаточно большого ресурса».

Для каждой вершины  $v_i$ , которая в состоянии  $Q(0)$  имеет дефицит ресурса, обозначим через  $r_i^{in-}$  ее суммарную входную пропускную способность из вершин-источников. Дефицит вершины  $v_i$  обозначим, как и прежде,  $d_i(0)$ . Тогда, чтобы покрыть дефицит каждой вершины до величины, соответствующей компоненте  $\tilde{Q}$ , источник  $v_j$  должен отдать

$$\sum_{i \in \{1, \dots, l, l+k+1, \dots, n\}} \frac{d_i(0)}{r_i^{in-}} r_{ji}$$

ресурса, где  $i$  пробегает множество индексов вершин, имеющих дефицит в начальном состоянии.

$$\text{Отсюда } \Delta W_j = \sum_{i \in \{1, \dots, l, l+k+1, \dots, n\}} \frac{d_i(0)}{r_i^{in-}} r_{ji}.$$

Соответствующая компонента вектора  $\Delta Q$  вычисляется по формуле:  $\Delta Q_j = q_j(0) - \tilde{q}_j - \Delta W_j$ .  $\square$

Проиллюстрирует теорему примером, в котором предельное состояние может быть получено из начального аналитически.

*Пример 6.* Сеть задана матрицей (5). Пусть ресурс  $W > T$  присутствует в обоих источниках, причем, в каждом источнике его достаточно много:  $Q(0) = (0, 0, 20, 40, 0)$ . Тогда предельное состояние для этой сети будет  $Q^* = (20, 30, 3, (3), 3, (3), 3, (3))$ .

Опишем алгоритм нахождения  $Q^*$ . Все его компоненты, кроме двух первых, совпадают с компонентами вектора  $\tilde{Q}$ . Для расчета первых двух компонент найдем дефициты вершин в начальном состоянии и пропорцию восполнения этих дефицитов из обоих источников, содержащих излишки ресурса. Каждый источник должен отдать ресурс в нейтральную вершину в количестве

$$\frac{3 \frac{1}{3}}{2} = \frac{5}{3}$$

и в вершины-аттракторы по 5 единиц – чтобы они получили  $r_1^{out}$  и  $r_2^{out}$  единиц ресурса. Итого каждый из двух источников дол-



жен отдать  $20/3$  ресурса для насыщения сети и оставить себе  $3, (3) = 10/3$ .

$$\Delta W_{3,4} = \frac{20}{3}, \quad \tilde{q}_{3,4} = \frac{10}{3}.$$

Излишек вершины  $v_3$  составит

$$\Delta Q_3 = 20 - \frac{20}{3} - \frac{10}{3} = 20 - 10 = 10,$$

в вершине  $v_4$  остается излишек  $\Delta Q_4 = 40 - 10 = 30$ . Эти излишки вершины должны распределить между аттракторами в пропорциях 3:1 и 1:3 соответственно (рис. 4).

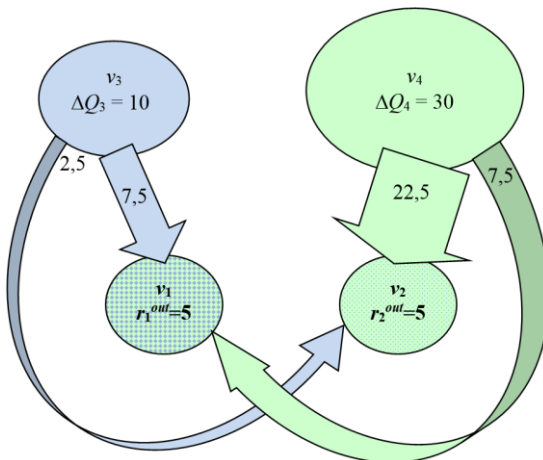


Рис. 4. Распределение излишков ресурса между аттракторами

Имеем:  $q_1^* = 5 + 7,5 + 7,5 = 20$ ;  $q_2^* = 5 + 2,5 + 22,5 = 30$ .

Эти значения соответствуют первым двум компонентам вектора предельного состояния.

#### 4.6. ОЦЕНКА ПОПРАВКИ $\delta W$

Теоремы 2–3 описывают начальные состояния, при которых для каждого из аттракторов  $\delta W_i = 0$ . Своего максимума величины  $\delta W_i$  достигают, если ресурс в начальном состоянии сосредоточен в одном источнике.

*Теорема 4.* Пусть в регулярной несимметричной ресурсной сети с  $l$  аттракторами ( $l \geq 2$ ), имеющими номера  $1, \dots, l$ , суммарный ресурс  $W > T + \Delta W_j(0)$  ( $\Delta W_j(0) > \delta W$ ) в начальном состоянии находится в вершине-источнике  $v_j$ . Тогда предельное состояние представимо в виде

$$Q^* = \tilde{Q} + \Delta Q R_{absorb}^{\infty} + (\delta W_1, \delta W_2, \dots, \delta W_l, 0, \dots, 0),$$

где  $\Delta Q = Q(0) - \left(0, \dots, 0, \sum_{i=1}^l \delta W_i, 0, \dots, 0\right)$ , ненулевая компонента имеет номер  $j$ .

Причем для аттрактора с номером  $l_0 = \arg \min_k r_{absorb\ jk}^{\infty}$  выполняется  $\delta W_{l_0} = 0$ , а остальные значения  $\delta W_i$  находятся по формуле

$$(14) \delta W_i = (q_i^* - r_i^{out}) - (q_{l_0}^* - r_{l_0}^{out}) \frac{r_{absorb\ ji}^{\infty}}{r_{absorb\ jl_0}^{\infty}}.$$

*Доказательство.* Теорема 4. двойственна теореме 1. Вершина-аттрактор с номером  $l_0 = \arg \min_j r_{absorb\ m_0j}^{\infty}$  последней из аттракторов перейдет на правило 1. Излишек  $\delta W_i$  в каждом аттракторе накапливается, пока хотя бы один аттрактор функционирует по правилу 2. Таким образом, вершина, перешедшая на правило 1 последней, не имеет излишка.

Формула (14) – следствие из теоремы 1. Когда все аттракторы функционируют по правилу 1, ресурс перераспределяется между ними в пропорции, задаваемой матрицей  $R_{absorb}^{\infty}$ . Излишки в каждой вершине-аттракторе выражаются через компоненту вектора предельного состояния, соответствующую аттрактору, для которого  $\delta W_{l_0} = 0$ . □

Теорема объясняет результаты, полученные в примерах 2–4. Пусть даны два вектора начальных состояний:

$$Q_1(0) = (q_1(0), q_2(0), \dots, \tilde{q}_{l+1} + \Delta W_{l+1}, \dots, \tilde{q}_{l+k} + \Delta W_{l+k}, \dots, q_n(0)),$$

$$Q_2(0) = (q_1(0), q_2(0), \dots, \tilde{q}_{l+1} + 2\Delta W_{l+1}, \dots, \tilde{q}_{l+k} + 2\Delta W_{l+k}, \dots, q_n(0)),$$

где

$\Delta W_i$  – любые заведомо большие величины (например, можно считать, что  $\Delta W_i > T$ ). Предельные состояния для них:

$$Q_1^* = \tilde{Q} + \Delta Q_1 R_{absorb}^{\infty} + (\delta W_1, \delta W_2, \dots, \delta W_l, 0, \dots, 0),$$

$$Q_2^* = \tilde{Q} + \Delta Q_2 R_{absorb}^{\infty} + (\delta W_1, \delta W_2, \dots, \delta W_l, 0, \dots, 0).$$

Разность между ними равна

$$Q_2^* - Q_1^* = \tilde{Q} + (\Delta Q_2 - \Delta Q_1) R_{absorb}^{\infty}.$$

Таким образом, разность двух предельных состояний не зависит от поправок в аттракторах.

Компоненты вектора предельного состояния, соответствующие потенциальным аттракторам, можно вычислить через потоки.

*Теорема 5.* Пусть регулярная несимметричная ресурсная сеть имеет потенциальные аттракторы с номерами  $1, \dots, l$ . Пусть суммарный ресурс  $W > T + \Delta W_j(0)$  в начальном состоянии находится в не-аттрактивных вершинах. Тогда для каждого из потенциальных аттракторов выполнится соотношение

$$(15) \quad \sum_{t: q_i(t) > r_i^{out}} (f_i^{in}(t) - r_i^{out}) = q_i^* - r_i^{out}.$$

*Доказательство.* Левая часть равенства (15) характеризует ресурс, накопленный сверх суммарной выходной пропускной способности вершины на протяжении всего функционирования сети – каждое слагаемое равно разности входного и выходного потоков, а это и есть предельная разность  $q_i^* - r_i^{out}$ . □

*Следствие.* Если в начальном состоянии  $Q(0)$  ресурс сосредоточен в одной неаттрактивной вершине, и его величина  $W > T$  такова, что в предельном состоянии по крайней мере один из потенциальный аттрактор имеет ресурс, равный своей суммарной выходной пропускной способности:  $q_m^* = r_m^{out}$ ,  $m \leq l$ , а при любом его увеличении  $q_m^* > r_m^{out}$ , то для всех остальных аттракторов, имевших  $q_i^* > r_i^{out}$ , выполнится:

$$\sum_{t: q_i(t) > r_i^{out}} (f_i^{in}(t) - r_i^{out}) = \delta W_i.$$

Доказательство вытекает непосредственно из формулы (15).  $\square$

Отсюда следует, что  $\delta W_i = q_i^* - r_i^{out}$ .

Пример 7. Пусть сеть задана матрицей (5) и суммарный ресурс  $W = T + \delta W_1 = 27,2$  в начальном состоянии находится в вершине  $v_3$ :  $Q(0) = (0, 0, 27,2, 0, 0)$ . Предельное состояние для этой сети будет  $Q^* = (12,2, 5, 3,(3), 3,(3), 3,(3))$ .

$\delta W_1 = 7,2$  может быть найдена как сумма разностей двух графиков в дискретных точках (рис. 5):

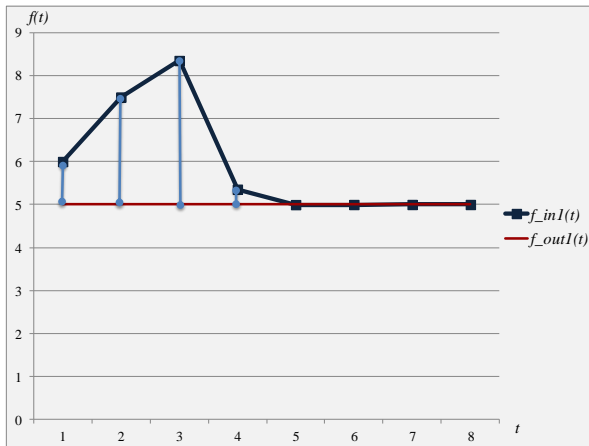


Рис. 5. Разность входящего и исходящего потоков

Из рисунка видно, что вклад в величину  $\delta W_i$  дают только первые несколько тактов функционирования сети.

## 5. Заключение

В работе исследовано распределение излишков ресурса между несколькими аттракторами в регулярных несимметричных сетях.

Получены результаты, позволяющие находить пропорцию распределения ресурса  $W - T$  при определенных начальных состояниях.

Показано, что в общем случае эта пропорция повторяет пропорцию индуцированной поглощающей сети за исключением некоторых аддитивных поправок, названных «поправками на регулярность». Эти поправки оценены сверху. Таким образом, чем больше в сети суммарный ресурс, тем меньше относительная погрешность, с которой может быть вычислено предельное состояние.

Рассмотрены переходные процессы при распределении ресурса, когда происходит смена правил функционирования вершин. Описана динамика изменения ресурса в зависимости от весов исходящих из аттракторов ребер.

Однако задача аналитического нахождения предельного состояния в аттрактивных вершинах при произвольном начальном состоянии не решена. Статья содержит много примеров, чтобы проблема была описана максимально полно, и автор надеется, что то, что не получилось у него, может получиться у проницательного читателя.

### ***Литература***

1. АГАЕВ Р.П., ЧЕБОТАРЕВ П.Ю. *Сходимость и устойчивость в задачах согласования характеристик (обзор базовых результатов)* // *Управление большими системами.* – 2010. – №30.1 «Сетевые модели в управлении». – С. 470–505.
2. ГАНТМАХЕР Ф.Р. *Теория матриц.* – М.: Физматлит. 2004. – 560 с.
3. ЖИЛЯКОВА Л.Ю. *Несимметричные ресурсные сети. III. Исследование предельных состояний* // *Автоматика и телемеханика.* – 2012. – №7. – С. 67–77.
4. ЖИЛЯКОВА Л.Ю. *Управление предельными состояниями в поглощающих ресурсных сетях* // *Проблемы управления.* – 2013. – №3. – С. 51–59.
5. КЕМЕНИ ДЖ., СНЕЛЛ ДЖ. *Конечные цепи Маркова.* – М.: Наука, 1970. – 272 с.

6. КУЗНЕЦОВ О.П. *Однородные ресурсные сети. I. Полные графы* // Автоматика и телемеханика. – 2009. – №11. – С. 136–147.
7. ФОРД Л.Р., ФАЛКЕРСОН Д.Р. *Потоки в сетях*. Пер. с англ. – М.: Мир, 1996. – 334 с.
8. AHUJA R.K., MAGNANTI T.L., ORLIN J.B. *Network Flows: Theory, Algorithms, and Applications*. – Prentice Hall, United States, 1993. – 864 p.
9. БАК П. *How Nature Works: The Science of Self-Organized Criticality*. – New York: Copernicus, 1996. – 212 p.
10. БАК П., ТАНГ С., and WIESENFELD K. *Self-organized criticality*. // Physical Review. – 1988. – A 38. – P. 364–374.
11. BJÖRNER A., LOVASZ L. *Chip-firing game on directed graphs* // J. Algebraic Combinatorics. – 1992. – No. 1. – P. 305–328.
12. BLANCHARD PH., VOLCHENKOV D. *Random Walks and Diffusions on Graphs and Databases: An Introduction (Springer Series in Synergetics)*. – Springer-Verlag – Berlin–Heidelberg, 2011. – 262 p.
13. DHAR D. *Self-organized critical state of sandpile automation models* // Physical Review Letters – 1990. – No. 64. – P. 1613–1616.
14. IVASHKEVICH E.V., PRIEZZHEV V.B. *Introduction to the sandpile model* // Physica. – 1998. – A 254. – P. 97–116.
15. HAJNAL J. *The ergodic properties of non-homogeneous finite Markov chains* // Proc. Cambridge Philos. Soc. – 1956. – Vol. 52. – P. 67–77.
16. HAJNAL J. *Weak ergodicity in non-homogeneous Markov chains* // Proc. Cambridge Philos. Soc. – 1958. – Vol. 54. – P. 233–246.
17. LOVASZ L., WINKLER P. *Mixing of Random Walks and Other Diffusions on a Graph* // Surveys in Combinatorics / Ed. P. Rowlinson. London Math. Soc. Lecture Notes Series 218, Cambridge Univ. Press, 1995. – P. 119–154.
18. PRISNER E. *Parallel Chip Firing on Digraphs* // Complex Systems. – 1994. – No. 8. – P. 367–383.

19. SENETA E. *Non-negative Matrices and Markov Chains*. – Springer, 2006. – 279 p.
20. SPEER E.R. *Asymmetric abelian sandpile models* // Journal of Statistical Physics. – April 1993. – Vol. 71, Issue 1-2. – P. 61–74.

## ALLOCATION OF RESOURCE AMONG ATTRACTOR-VERTICES IN NONSYMMETRIC REGULAR RESOURCE NETWORKS

**Ludmila Zhilyakova**, Institute of Control Sciences of RAS, (Moscow, Profsoyuznaya st., 65), Dr.Sci., Leader Scientist, zhilyakova.ludmila@gmail.com.

*We study nonsymmetric regular resource networks with several attractor-vertices. In these networks there exists a threshold value of total resource  $W = T$ , such that for any initial distribution the limit state is uniquely determined, but when  $W > T$  extra resource  $\Delta W = W - T$  allocates among attractor-vertices depending on the initial state. We prove that this allocation obeys the same law as the allocation in corresponding absorbing network (derived from asymmetric by deletion output edges of attractors). However, there are adjustments dependent on the graph characteristics and the initial distribution of resources. The upper bounds of these adjustments are estimated. The initial states are determined that lead to precise limit states with no adjustments.*

Keywords: resource network, graph dynamic threshold model, attractor-vertices, limit state.

*Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии П.Ю. Чеботарев.*

*Поступила в редакцию 31.08.2015.  
Опубликована 31.03.2016.*

УДК 519.865 + 339.13

ББК 22.18 + 65.42

## **ИСТИННОЕ И ЛОЖНОЕ ИНФОРМАЦИОННОЕ РАВНОВЕСИЕ В МОДЕЛИ ТОРГОВОЙ СИСТЕМЫ**

**Алгазин Г. И.<sup>1</sup>, Алгазина Ю. Г.<sup>2</sup>**

*(Алтайский государственный университет, г. Барнаул)*

*Формулируются и исследуются условия существования информационного равновесия на товарном конкурентном рынке при предположениях о ложной взаимной информированности конкурентов. Базовой является модель многоагентной торговой сети «центр (производитель) – агенты (посредники) – потребители» с линейными обратной функцией спроса и функциями затрат, в которой агенты могут действовать по Курно или Штакельбергу. В качестве возможного информационного воздействия на агенты центр использует раскрытие информации о своей целевой функции. Приводится обсуждение полученных результатов.*

Ключевые слова: торговая сеть, рефлексивная игра, ложная информированность, информационное равновесие, равновесие Курно, равновесие и неравновесие Штакельберга, информационное воздействие.

### **1. Введение**

В рыночных системах принятие решения каждым агентом тесно связано с его информированностью, информированностью и поведением конкурентов. В соответствующих теоретико-игровых моделях вводятся определенные предположения о

---

<sup>1</sup> Геннадий Иванович Алгазин, доктор физико-математических наук, профессор (algaz46@yandex.ru).

<sup>2</sup> Юлия Геннадьевна Алгазина, кандидат экономических наук, доцент (algazina@inbox.ru).



взаимной информированности агентов и принципах принятия ими решений.

Каноническими для игры в нормальной форме считаются предположения о наличии общего знания описания игры среди агентов и выбора ими концепции равновесия Нэша. Имеются существенные теоретические основания для изучения моделей, в которых эти предположения неприемлемы, позволяющих учитывать неполную информированность (в том числе ложную) агентов. Исследования, основанные на экспериментах, также свидетельствуют о том, что в играх в нормальной форме агенты при поиске равновесия нередко ограничены в своих когнитивных возможностях и не всегда могут располагать необходимыми вычислительными, коммуникационными и другими ресурсами. В литературе по теории игр такая ситуация также носит название ограниченной рациональности [5, 6, 8, 10, 11].

Одним из методов теоретико-игрового моделирования являются рефлексивные игры, в которых информированность игроков не является общим знанием. Так, например, могут не являться общими знания относительно множества агентов, их множеств допустимых действий, целевых функций и принципов поведения. Рефлексивные игры нашли успешное применение в моделировании и исследовании взаимодействия агентов, в том числе и на конкурентных рынках [1, 3–8].

Так, в работе [8] рассматриваются модели рефлексивного коллективного поведения на рынке олигополии Курно. Полагается, что в этих моделях агенты-производители выбирают объемы производства и имеют квадратичные функции издержек. В рамках модели информационной рефлексии, когда неопределенным параметром является «тип агента», показано, что, наблюдая выбираемые действия, агенты могут в динамике прийти к истинному информационному равновесию. В модели стратегической рефлексии анализируется динамика действий агентов и исследуется зависимость суммарного объема выпуска от числа рефлексизирующих агентов с соответствующим рангом рефлексии. Показано, что в данной модели олигополии Курно введение рефлексизирующих агентов позволяет увеличить суммарный объем производства и/или реализовать его Парето-эффективное значение.

В работе [5] также рассматривается модель стратегической рефлексии на рынке олигополии Курно. В ней также агенты, являющиеся производителями, выбирают объемы выпуска и имеют квадратичные затраты на производство. Рассматривается возможность управления рыночной ценой с помощью варьирования распределения агентов по уровням рефлексии. Исследуются свойства оптимальных управлений и доказывается, что эффективная рыночная цена всегда достижима с помощью рефлексивного управления.

Рефлексивное управление сетевым взаимодействием на конкурентном рынке Курно представлено и в исследованиях моделей олигополии для линейных функций затрат и обратной функции спроса [1]. В задаче информационной рефлексии рассмотрен случай точечной структуры информированности агентов о параметре спроса и поиск решений в соответствующей рефлексивной игре. В задаче стратегической рефлексии представлен сравнительный анализ эффективности различных концепций распределения ролей между агентами сети при предположениях о наличии общего знания описания игры среди них. Условия существования стабильного информационного равновесия с агентами, действующими по Курно, обсуждаются в работе [3].

Также в классе линейных функций спроса и издержек фирм для случая общего знания исследуется проблема статического равновесия Курно–Нэша с использованием некооперативных рефлексивных игр различных порядков [4]. Проведен анализ и получены условия сходимости к равновесию процессов стратегических рефлексивных игр одновременного, последовательно и последовательно-группового порядка.

В работе [7] обосновывается возможность и целесообразность использования аппарата рефлексивных игр для решения задач описания и изменения совместно принимаемых решений участников эколого-экономических систем. Экономические агенты в условиях конкуренции выбирают объемы производства и имеют квадратичные функции издержек. Агенты подвергаются штрафами за загрязнение окружающей среды, которые отражены в их целевых функциях. Неопределенными параметрами являются «число агентов на рынке» и «тип агента». Получены

свойства информационных равновесий и рекомендации по информационному воздействию на агентов, изменяющих их индивидуальную и/или взаимную информированность.

Проведенный обзор работ свидетельствует, что взаимная информированность участников конкурентных рынков существенным образом влияет на совместно принимаемые ими решения, и, имея возможность воздействия на эту информированность, можно целенаправленно изменять равновесные состояния подобных систем. Это подтверждает актуальность исследования соответствующих рефлексивных моделей для теории и практики конкурентных рынков.

В данной статье рассмотрено применение подходов рефлексивных игр к исследованию модели многоагентной торговой сети «центр (производитель) – агенты (посредники) – потребители» с линейными функциями затрат и обратной функции спроса при различных предположениях об информированности и поведении конкурентов.

При ложных предположениях агента (когда агент заблуждается относительно условий игры, но сам не знает об этом) полученный им результат может оказаться для него неожиданным, а может соответствовать ожидаемому. Если второе выполняется для всех агентов, то имеет место ложное информационное равновесие, так как у них нет оснований сомневаться в правильности своих представлений и принятых решениях. Равновесие, основанное на адекватных представлениях о реальности всех агентов, определяется как истинное [7, 8]. В данной статье полагается, что агенты при принятии решений имеют неверные представления о числе и затратах других агентов. В частности, агенты зачастую скрывают друг от друга свои истинные издержки, более того, агенты могут даже не подозревать о существовании некоторых своих конкурентов.

В статье формулируются и исследуются условия существования истинного и ложного информационного равновесия в модели товарного рынка с центром при следующих предположениях о поведении конкурентов: 1) все агенты (посредники) действуют по Курно; 2) первый агент действует по Штакельбергу, остальные – по Курно; 3) все агенты действуют по Штакельбергу. Также рассмотрены возможность и целесообразность

информационного воздействия центра посредством наделения агентов дополнительными знаниями о своей целевой функции.

## 2. Базовая модель торговой системы

Приведем краткое описание модели согласно работе [2].

Рассматривается фрагмент рынка однородного товара, состоящего из одного его производителя и  $h$  торговых посредников, конкурирующих объемами реализации товара. Посредник продает потребителю товар по цене  $p$ , покупая его у производителя по цене  $(1 - k)p$ . Таким образом, величина  $kp$  есть разница между ценой спроса и ценой предложения на этом рынке. Эта разница и формирует доход посредника.

Полагается следующая последовательность ходов участников рынка. Производитель имеет возможность влиять на выбор посредников через параметр  $k$  и делает ход первым. Его ход состоит в выборе и сообщении посредникам значения параметра  $k \in (0, 1]$ . Вторым ходом каждый посредник при заданном значении этого параметра одновременно с другими и независимо от них определяет свой объем  $q_r$  ( $r = 1, \dots, h$ ) подлежащего реализации товара потребителям и сообщает его производителю. Товар производится уже после того как все посредники сделали свои заявки; считается, что весь заявленный, а затем закупаемый у производителя товар будет ими реализован по единой рыночной цене, которая зависит от совокупного объема производимого и реализованного на рынке товара  $Q = \sum_{r=1}^h q_r$ . После чего производитель и посредники оценивают полученный выигрыш. В итоге выигрыши производителя и  $r$ -го посредника составят  $\Pi(p, Q, k)$  и  $R_r(p, q_r, k)$  соответственно.

Полагается также, что посредники выбирают объемы реализации так, чтобы максимизировать их прибыль. Поскольку выбор каждого посредника зависит от того, как будут действовать другие посредники, он должен делать те или иные предположения относительно их поведения. Аналогично производитель выбором параметра  $k$  стремится максимизировать собственную прибыль, которая зависит от выбора посредников. Поэтому при решении своей задачи управления (посредством

параметра  $k$ ) производителю также следует делать собственные предположения (решение этой задачи в статье не представлено и при определенных предположениях может быть рассмотрено на основе стратегий  $\Gamma_1$  [2]).

В соответствующей базовой модели рынка интересы сторон представляются в виде целевых установок на максимизацию их прибыли:

– фирмы-производителя:

$$(1) \quad \Pi(p, Q, k) = (1 - k) \cdot p \cdot Q - \varphi(Q) \rightarrow \max_k,$$

$$k \in (0, 1];$$

– посредника  $r$ :

$$(2) \quad R_r(p, q_r, k) = k \cdot p \cdot q_r - \varphi_r(q_r) \rightarrow \max_{q_r},$$

$$q_r \geq 0, \quad r = 1, \dots, h.$$

Здесь  $q_r$  – это действие посредника  $r$ , представляющее объем реализованного им товара потребителям;  $Q = \sum_{r=1}^h q_r$  – объем производимого товара, который затем полностью реализуется через посредников на рынке;  $\varphi(\cdot)$  – функция затрат производителя, а  $\varphi_r(\cdot)$  – функции затрат посредников.

Будем полагать, что и функции затрат, и цена продукции определяются следующими выражениями [1–5, 8, 9]:

$$(3) \quad \varphi(Q) = c \cdot Q + d,$$

$$(4) \quad \varphi_r(q_r) = c_r \cdot q_r + d_r, \quad r = 1, \dots, h;$$

$$(5) \quad p(Q) = a - b \cdot Q.$$

Здесь цена продукции – линейная функция объема выпуска производителем;  $b$  – снижение цены при увеличении на единицу общего выпуска фирмой-производителем; издержки фирм ( $\varphi$  и  $\varphi_r$ ) являются также линейными функциями, а  $c$  и  $c_r$  – предельные переменные издержки;  $d$  и  $d_r$  – постоянные издержки производителя и посредников соответственно. Слагаемые-константы  $d$  и  $d_r$  не будут оказывать влияния на решение задач оптимизации торговой системы.

Исходя из теоретико-игровой интерпретации ролей, которые играют производитель и посредники в торговой цепочке «производитель – посредники – потребители», будем их далее

называть также центром и агентами соответственно. Считается, что если суммарный объем превышает емкость рынка или равен ей ( $Q \geq a/b$ ), т.е.  $p \leq 0$ , агенты несут потери в объеме полных издержек (4).

В модели конъюнктура рынка определяется параметрами центра, спроса, издержек агентов, а также числом конкурирующих агентов. При определенных значениях этих параметрах не все из агентов имеют возможность осуществлять ненулевой объем реализации. Такие агенты уходят с рынка. По этой и ряду других возможных причин оставшиеся на рынке агенты могут не располагать достоверной информацией об истинном числе конкурентов и их затратах.

### 3. Информационное равновесие в модели Курно

Рыночная цена и прибыль каждого посредника зависит от неизвестного суммарного объема сделок купли-продажи конкурентов. Поэтому при определении своей рыночной стратегии посреднику необходимо принимать в расчет поведение конкурентов.

Будем использовать предположение Курно относительно объемов сделок купли-продажи: каждый посредник действует так, как будто он не ожидает от своих конкурентов изменения объемов сделок, даже если он сам сделает это.

Формально предположение Курно можно записать в виде соотношений

$$(6) \quad \frac{\partial Q_{-r}}{\partial q_r} = 0, \quad r = 1, \dots, h,$$

где обозначено  $Q_{-r} = \sum_{j \neq r} q_j$ .

Пусть выражения (1)–(5) и все их параметры являются общим знанием среди агентов.

Тогда, используя условия (6), можно получить для базовой модели (1)–(5) аналитические выражения показателей функционирования конкурентного рынка Курно. Для нас будут представлять интерес аналитические выражения следующих показателей при полной информированности агентов [2].

Значение рыночной цены товара (услуг), которое задается выражением

$$(7) \quad p^K = \frac{1}{h+1} \left( a + \frac{\sum_{j=1}^h c_j}{k} \right).$$

Оптимальный объем реализованного товара агентом задается формулой

$$(8) \quad q_r^K = \frac{k}{(h+1)b} \left( a + \frac{\sum_{j=1}^h c_j - (h+1)c_r}{k} \right), \quad r = 1, \dots, h.$$

Имеем следующее выражение для прибыли агента:

$$(9) \quad R_r^K = \frac{k}{(h+1)^2 b} \left( a + \frac{\sum_{j=1}^h c_j - (h+1)c_r}{k} \right)^2 - d_r, \quad r = 1, \dots, h.$$

Здесь показатели рынка Курно отмечены верхним индексом «K».

Полагаем, что в формуле (8) объем реализации не может быть отрицательным. С точки зрения экономических ограничений агенты, для которых  $q_r^K < 0$ , не конкурентоспособны в равновесии Курно [4]. Для таких агентов цена ниже их предельных издержек, отнесенных к параметру  $k$ : из условия  $q_r^K < 0$  и формулы (7) имеем неравенство  $p^K < c_r / k$ . Это означает, что в равновесии Курно имеются экономические ограничения конкурентоспособности на издержки каждого агента, определяющие возможность осуществлять в состоянии равновесия ненулевой объем реализации. Естественно считать, что неконкурентоспособные агенты выбирают нулевой объем реализации и уходят с рынка. А на рынке остаются и участвуют в равновесии Курно только те агенты, для которых будет выполнено условие

$$c_r < \frac{k}{h} \left( a + \frac{\sum_{j \neq r} c_j}{k} \right).$$

Примечания: 1) конкурентоспособный агент в состоянии истинного равновесия Курно будет одновременно конкурентоспособным в состоянии ложного равновесия (в рамках вводи-

мых в данной статье предположений об информированности агентов), как следует, например, далее из (12) или (13), и наоборот; 2) аналогичный вывод справедлив и для равновесия и неравновесия Штакельберга (раздел 4, соотношения (22) или (23) и (24), и раздел 5, соотношения (33)).

Рассмотрим возможную информированность оставшихся агентов относительно их количества  $h$  (не ограничивая общности считаем, что на рынке остались  $h$  агентов) и затрат  $c_r$ . Обозначим  $\Sigma = \sum_{r=1}^h c_r$ . Допустим, что представления агентов могут быть ложными и  $r$ -й агент считает, что их общее число составляет  $\tilde{h}_r$ , а суммарные предельные переменные затраты составляют  $\tilde{\Sigma}_r$ . Тогда каждый из агентов рассчитывает на следующий размер своей прибыли:

$$(10) \quad \tilde{R}_r^K = \frac{k}{(\tilde{h}_r + 1)^2 b} \left( a + \frac{\tilde{\Sigma}_r - (\tilde{h}_r + 1)c_r}{k} \right)^2 - d_r.$$

Здесь учтено, что агент не заблуждается относительно своих собственных затрат  $c_r$ .

Если агент считает истинными значениями количества агентов и их затраты, то информационное равновесие будет стабильным [8] при выполнении условия совпадения значения целевой функции агента по (9) с его ожиданиями по (10), т.е.

$$\frac{1}{h+1} \cdot \left( a + \frac{\Sigma - (h+1)c_r}{k} \right) = \frac{1}{\tilde{h}_r + 1} \cdot \left( a + \frac{\tilde{\Sigma}_r - (\tilde{h}_r + 1)c_r}{k} \right).$$

Отсюда

$$(11) \quad \frac{1}{h+1} \cdot \left( a + \frac{\Sigma}{k} \right) = \frac{1}{\tilde{h}_r + 1} \cdot \left( a + \frac{\tilde{\Sigma}_r}{k} \right).$$

При выполнении равенства (11) ни один из агентов не имеет оснований усомниться в правильности своих представлений, так как его прибыль по выражениям (9) и (10) совпадает. Из (11) следует также, что для агентов важно представление о суммарных затратах всех агентов, а не затратах отдельных агентов. Кроме того, для того чтобы информационное равновесие было



стабильным, необходимо, чтобы одновременно либо  $h > \tilde{h}_r$  и  $\Sigma > \tilde{\Sigma}_r$ , либо  $h < \tilde{h}_r$  и  $\Sigma < \tilde{\Sigma}_r$ .

Условие (11) означает совпадение истинной цены (7) и ожидаемой каждым агентом цены, т. е.

$$(12) \quad p^K = \tilde{p}_r^K,$$

а также совпадение истинного объема (8) реализованного товара агентом потребителям и ожидаемого объема:

$$(13) \quad q_r^K = \tilde{q}_r^K.$$

Нетрудно показать, что справедливо и обратное утверждение: если для представлений агентов выполняются (11), то информационное равновесие является стабильным.

Таким образом, для того чтобы информационное равновесие являлось стабильным при любом (в том числе ложном) представлении агентов об их общем числе  $h$  и суммарных затратах, необходимо и достаточно выполнение условий (11). Вместо (11) можно требовать выполнение условий (12) или (13).

Теперь перейдем к задаче информационного управления агентами. В связи с этим отметим, что для принятия решения по Курно у агентов не было никакой необходимости знать прибыль центра. Пусть теперь рефлексивное управление центра строится с учетом того, что он наделяет агентов дополнительными знаниями о своей целевой функции и это является общим знанием среди них и центра. С учетом этих предположений оценим разность  $\Pi^K - \tilde{\Pi}_r^K$ . Поскольку в состоянии истинного и ложного информационного равновесия агенты выбирают одно и то же действие (13), то  $Q^K = \tilde{Q}_r^K$  (это равенство следует также из (5) и (12)) и

$$\Pi^K - \tilde{\Pi}_r^K = (1-k) \cdot p^K \cdot Q^K - \phi(Q^K) - (1-k) \cdot \tilde{p}_r^K \cdot \tilde{Q}_r^K + \phi(\tilde{Q}_r^K) = 0.$$

Таким образом, в модели (1)–(5) при оговоренных выше представлениях агентов о числе агентов в сети, их затратах и целевой функции центра любое стабильное информационное равновесие, в том числе и ложное, дает равенство истинной и ожидаемой ими прибыли центра. Поэтому в данном случае у агентов отсутствуют основания усомниться в своей информированности.

Теперь рассмотрим модификацию целевой функции центра вида

$$\Pi(p, Q, k) = (1 - k) \cdot p \cdot Q - \phi(Q) - \Phi(h),$$

в которую дополнительно введем строго возрастающую функцию  $\Phi(\cdot)$ , определяющую затраты центра на поддержание своей сети посредников. Тогда  $\Pi^K - \tilde{\Pi}_r^K = \Phi(\tilde{h}_r) - \Phi(h)$ , т.е. истинное и ожидаемое по представлениям агентов значения прибыли центра уже не совпадают. Так, если  $h > \tilde{h}_r$ , то  $\Pi^K < \tilde{\Pi}_r^K$ ; и наоборот, при  $h < \tilde{h}_r$  будет  $\Pi^K > \tilde{\Pi}_r^K$ . Поэтому при различии истинной и ожидаемой прибыли центра у агентов могут возникнуть сомнения в правильности своих представлений и действий (в данном случае на оценку прибыли центра влияют только представления агентов о параметре  $h$ ). Эти обстоятельства следует учитывать центру при определении своей политики информационного управления агентами.

#### **4. Информационное равновесие в модели Курно с агентом Штакельберга**

Один из агентов занимает лидирующее положение среди остальных агентов так, что он, выбирая свою активность (объем выпуска), точно знает реакцию (уровень активности) на его выбор остальных агентов. Агента, выбирающего свои действия по такому правилу, называют фирмой Штакельберга. Остальные агенты, как и раньше, максимизируют собственную прибыль, основываясь на предположении Курно о неменяющейся активности других агентов. Такая ситуация называется равновесием по Штакельбергу.

Пусть первый агент придерживается предположений Штакельберга, тогда для базовой линейной модели взаимодействия (1)–(5) будем иметь

$$(14) \quad \frac{\partial Q_{-1}}{\partial q_i} = -\frac{n-1}{n}.$$

Пусть также остальные агенты ( $r = 2, \dots, h$ ) действуют в рамках предположений Курно. Тогда для этих агентов имеет место условие (6).

Если все агенты имеют правильные представления, то аналитические выражения для цены, прибыли агентов и объемов реализованного товара агентами будут, соответственно, иметь следующий вид [2]:

$$(15) p^S = \frac{1}{2h} \cdot \left( a + \frac{\Sigma + (h-1)c_1}{k} \right);$$

$$(16) R_1^S = \frac{k}{4hb} \cdot \left( a + \frac{\Sigma - (h+1)c_1}{k} \right)^2 - d_1;$$

$$(17) R_r^S = \frac{k}{4h^2b} \cdot \left( a + \frac{\Sigma - 2hc_r + (h-1)c_1}{k} \right)^2 - d_r, \quad r = 2, \dots, h;$$

$$(18) q_1^S = \frac{1}{2b} \left( a + \frac{\Sigma - (h+1)c_1}{k} \right);$$

$$(19) q_r^S = \frac{1}{2hb} \left( a + \frac{\Sigma - 2hc_r + (h-1)c_1}{k} \right), \quad r = 2, \dots, h;$$

$$(20) Q^S = \frac{1}{2hb} \cdot \left( (2h-1)a - \frac{\Sigma + (h-1)c_1}{k} \right).$$

Верхний индекс «S» означает, что показатель (критерий) относится к рынку в состоянии равновесия по Штакельбергу.

Как и в разделе 3, полагаем, что в равновесии участвуют только агенты, для которых  $q_r^S > 0$ . Для первого агента по (18) это условие означает, что

$$c_1 < \frac{k}{h} \left( a + \frac{\sum_{j \neq 1} c_j}{k} \right),$$

для остальных конкурентоспособных агентов, согласно (19),

$$c_r < \frac{k}{2h-1} \left( a + \frac{\sum_{j \neq r} c_j + (h-1)c_1}{k} \right).$$

Из последних неравенств с учетом (15) для всех конкурентоспособных агентов (включая первого) в состоянии равновесия следует соотношение  $p^S > c_r / k$ .

Допустим тот же порядок функционирования торговой системы, как и в предыдущем разделе. Пусть также представления

всех агентов могут быть ложными и  $r$ -й агент считает, что их общее число составляет  $\tilde{h}_r$ , а суммарные затраты всех агентов (вместе с первым) составляют  $\tilde{\Sigma}_r$ . Кроме того, пусть агенты, действующие по Курно, считают, что затраты первого агента составляют  $\tilde{c}_{1r}$ . Естественно полагать, что все агенты правильно оценивают собственные предельные переменные издержки.

Тогда ложное равновесие Штакельберга (или Курно–Нэша) является стабильным при выполнении условий  $R_r^S = \tilde{R}_r^S$  ( $r = 2, \dots, h$ ), т.е. для агентов Курно

$$\frac{1}{h} \cdot \left( a + \frac{\Sigma - 2hc_r + (h-1)c_1}{k} \right) = \frac{1}{\tilde{h}_r} \cdot \left( a + \frac{\tilde{\Sigma}_r - 2\tilde{h}_r c_r + (\tilde{h}_r - 1)\tilde{c}_{1r}}{k} \right).$$

Или

$$(21) \quad \frac{1}{h} \cdot \left( a + \frac{\Sigma + (h-1)c_1}{k} \right) = \frac{1}{\tilde{h}_r} \cdot \left( a + \frac{\tilde{\Sigma}_r + (\tilde{h}_r - 1)\tilde{c}_{1r}}{k} \right).$$

Последнее условие означает равенство истинной и ложной цены:

$$(22) \quad p^S = \tilde{p}_r^S, \quad r = 2, \dots, h.$$

а также по (19) равенство истинного и ожидаемого объема реализованного агентами Курно товара потребителям:

$$(23) \quad q_r^S = \tilde{q}_r^S, \quad r = 2, \dots, h.$$

Ложное равновесие является стабильным для первого агента, если  $R_1^S = \tilde{R}_1^S$ , т.е. для агента Штакельберга согласно (16) и

$$(18) \quad \text{имеем } R_1^S - \tilde{R}_1^S = kb \left[ \frac{(q_1^S)^2}{h} - \frac{(\tilde{q}_1^S)^2}{\tilde{h}_1} \right] = 0 \text{ и}$$

$$(24) \quad \frac{q_1^S}{\sqrt{h}} = \frac{\tilde{q}_1^S}{\sqrt{\tilde{h}_1}}.$$

Нетрудно также показать, что при выполнении условий (23) и (24) будут совпадать прибыли агентов, соответствующие их правильной и ложной информированности. Таким образом, для того чтобы информационное равновесие являлось стабильным при ложном представлении агентов об их общем числе и их

суммарных предельных переменных затратах, необходимо и достаточно выполнение условий (23) (или (21) или (22)) и (24).

Пусть опять рефлексивное управление центра строится с учетом того, что он наделяет агенты дополнительными знаниями о своей целевой функции и это является общим знанием среди них и центра.

Поскольку в состоянии истинного и ложного информационного равновесия агентов цена продукта совпадает, по (5) и (12) имеем  $Q^S = \tilde{Q}_r^S$ ,  $r = 2, \dots, h$ . Тогда с учетом (1), (3) и (5) имеем

$$(25) \quad \Pi^S - \tilde{\Pi}_r^S = 0, \quad r = 2, \dots, h.$$

Поэтому для агентов Курно разница между прибылью центра для истинного и ложного равновесия Штакельберга оказалась равной нулю, как и для равновесия по Курно в разделе 3.

Теперь покажем, как заблуждения агента Штакельберга относительно условий игры могут влиять на его оценку прибыли центра.

Прежде всего отметим равенство

$$Q^S = \frac{1}{b} \cdot \left( a - \frac{c_1}{k} \right) - \frac{q_1^S}{h},$$

которое, например, следует из (18) и (20). Соответственно,

$$\tilde{Q}_1^S = \frac{1}{b} \cdot \left( a - \frac{c_1}{k} \right) - \frac{\tilde{q}_1^S}{\tilde{h}_1}.$$

Тогда с учетом (24) имеем

$$Q^S - \tilde{Q}_1^S = \frac{q_1^S}{\sqrt{h}} \left( \frac{1}{\sqrt{\tilde{h}_1}} - \frac{1}{\sqrt{h}} \right) \text{ и}$$

$$Q^S + \tilde{Q}_1^S = \frac{2}{b} \cdot \left( a - \frac{c_1}{k} \right) - \frac{q_1^S}{h} - \frac{q_1^S}{\sqrt{h} \cdot \sqrt{\tilde{h}_1}}.$$

Согласно (1), (3) и (5) имеем

$$(26) \quad \begin{aligned} \Pi^S - \tilde{\Pi}_1^S &= (1-k) \cdot (a - bQ^S) \cdot Q^S - cQ^S - \\ &= -(1-k) \cdot (a - b\tilde{Q}_1^S) \cdot \tilde{Q}_1^S + c\tilde{Q}_1^S = \\ &= (Q^S - \tilde{Q}_1^S) \cdot \left[ (1-k) \cdot (a - b(Q^S + \tilde{Q}_1^S)) - c \right]. \end{aligned}$$

Здесь при  $\tilde{h} \neq h$  будет  $Q^S - \tilde{Q}_1^S \neq 0$ . Теперь допустим, что  $(1-k) \cdot (a - b(Q^S + \tilde{Q}_1^S)) - c = 0$ . Тогда из этого равенства получаем единственное значение  $\tilde{h} \neq h$ , которое обращает в ноль выражение (26) (здесь  $q_1^S$  определяется по (18)):

$$\tilde{h}_1 = \frac{4b^2 h (q_1^S)^2}{\left[ 2h \cdot \left( a + \frac{c}{1-k} \right) - \left( a + \frac{\Sigma + (h-1)c_1}{k} \right) \right]^2}.$$

Поэтому в остальных случаях у первого агента, располагающего информацией о целевой функции центра, могут возникнуть сомнения в правильности своих представлений и действий.

Можно сделать выводы, аналогичные тем, что были ранее, для случая, когда центр несет затраты  $\Phi(\cdot)$ , связанные с поддержанием своей сети посредников.

### **5. Информационное равновесие в модели торговой системы только с агентами Штакельберга**

Все фирмы-агенты действуют по Штакельбергу, т.е. каждая фирма считает, что все другие действуют по Курно. Такая ситуация называется неравновесием по Штакельбергу.

В этом случае для решения по базовой модели (1)–(5) будут выполняться соотношения:

$$(27) \quad \frac{\partial Q_r}{\partial q_r} = -\frac{h-1}{h} \quad \text{при } r = 1, \dots, h.$$

При правильных представлениях агентов об условиях игровой ситуации с учетом (27) можно получить следующие аналитические выражения для рыночной цены, объем реализации и прибыли агентов, а также суммарного объема реализации [2]:

$$(28) \quad p^{\bar{s}} = \frac{1}{h^2 + 1} \cdot \left( a + \frac{h \cdot \Sigma}{k} \right);$$

$$(29) \quad q_r^{\bar{S}} = \frac{h}{(h^2 + 1) \cdot b} \cdot \left( a + \frac{h \cdot \Sigma - (h^2 + 1)c_r}{k} \right), \quad r = 1, \dots, h;$$

$$(30) \quad R_r^{\bar{S}} = \frac{hk}{(h^2 + 1)^2 \cdot b} \left( a + \frac{h \cdot \Sigma - (h^2 + 1)c_r}{k} \right)^2 - d_r, \quad r = 1, \dots, h;$$

$$(31) \quad Q^{\bar{S}} = \frac{h}{(h^2 + 1) \cdot b} \cdot \left( ha - \frac{\Sigma}{k} \right).$$

Эти показатели торговой системы в состоянии неравновесия Штакельберга отмечены верхним индексом « $\bar{S}$ ».

Также считаем, что с рынка вытесняются агенты, имеющие в состоянии неравновесия Штакельберга отрицательный объем реализации. На рынке остаются только конкурентоспособные агенты, для которых по (29)

$$c_r < \frac{k}{h^2 - h + 1} \left( a + \frac{h \cdot \sum_{j \neq r} c_j}{k} \right).$$

С учетом (28) для них будут выполняться и соотношения  $p^{\bar{S}} > c_r/k$ .

Предполагаем прежние условия относительно информированности агентов.

Допустим, что для сети выполнены условия стабильного информационного равновесия  $R_r^{\bar{S}} = \tilde{R}_r^{\bar{S}}$ ,  $r = 1, \dots, h$ . Тогда

$$(32) \quad \begin{aligned} & \frac{\sqrt{h}}{h^2 + 1} \cdot \left( a + \frac{h \cdot \Sigma - (h^2 + 1)c_r}{k} \right) = \\ & = \frac{\sqrt{\tilde{h}_r}}{\tilde{h}_r^2 + 1} \cdot \left( a + \frac{\tilde{h}_r \cdot \tilde{\Sigma}_r - (\tilde{h}_r^2 + 1)c_r}{k} \right). \end{aligned}$$

С учетом (29) необходимое и достаточное условие стабильности информационного равновесия можно переписать в виде

$$(33) \quad \frac{q_r^{\bar{S}}}{\sqrt{h}} = \frac{\tilde{q}_r^{\bar{S}}}{\sqrt{\tilde{h}_r}}, \quad r = 1, \dots, h.$$

В качестве информационного воздействия центра на агентов может выступать раскрытие им информации о своей целевой функции. Прежде всего отметим равенства

$$Q^{\bar{s}} = \frac{1}{b} \cdot \left( a - \frac{c_r}{k} \right) - \frac{q_r^{\bar{s}}}{h} \text{ и}$$

$$\tilde{Q}_r^{\bar{s}} = \frac{1}{b} \cdot \left( a - \frac{c_r}{k} \right) - \frac{\tilde{q}_r^{\bar{s}}}{\tilde{h}_r} \quad (r = 1, \dots, h),$$

которые, в частности, следуют из (29) и (31). Поэтому анализ этой ситуации для каждого агента повторяет уже проведенный в разделе 3 для первого агента.

Пусть все агенты имеют одно и то же ложное представление (являющееся для них общим знанием): каждый из агентов считает, что их общее число составляет  $\tilde{h}$ , суммарные затраты составляют  $\tilde{\Sigma}$ .

Преобразуем выражение (32) к виду:

$$(34) \quad \frac{\sqrt{h}}{h^2 + 1} \cdot \left( a + \frac{h \cdot \Sigma}{k} \right) - \frac{\sqrt{h}}{h^2 + 1} \cdot \left( a + \frac{\tilde{h} \cdot \tilde{\Sigma}}{k} \right) = \frac{(\sqrt{h} - \sqrt{\tilde{h}})c_r}{k}.$$

Отсюда видно, что стабильное информационное равновесие может иметь место только при равенстве всех  $c_r$ ,  $r = 1, \dots, h$ , т.е.

$$c_r = c = \frac{\Sigma}{h}.$$

Далее, каждый агент правильно оценивает свои предельные переменные издержки и поэтому

$$\frac{\tilde{\Sigma}}{\tilde{h}} = \tilde{c} = \tilde{c}_r = c.$$

Тогда по (32) имеем

$$\frac{\sqrt{h}}{h^2 + 1} = \frac{\sqrt{\tilde{h}}}{\tilde{h}^2 + 1}.$$

Функция  $\frac{\sqrt{h}}{h^2 + 1}$  уже при  $h \geq 2$  монотонно убывает. Поэтому последнее равенство возможно только при  $h = \tilde{h}$ . Что доказыва-



ет невозможность ложного информационного равновесия для торговой системы, состоящей только из агентов Штакельберга, имеющих одно и то же ложное представление об их общем числе и суммарных затратах.

## **6. Заключение**

В статье на модели торговой системы «центр (производитель) – агенты (посредники) – потребители» с применением рефлексивных игр показана важность изучения влияния поведения и взаимной информированности участников, а также информационного воздействия на выбор ими равновесных решений. Рассмотрены следующие концепции поведения участников на конкурентном рынке: 1) все агенты (посредники) действуют по Курно; 2) первый агент действует по Штакельбергу, остальные – по Курно; 3) все агенты действуют по Штакельбергу. В них учтено влияние экономических ограничений конкурентоспособности агентов на равновесие.

В статье формулируются и исследуются условия существования стабильного информационного равновесия при ложных предположениях агентов о затратах конкурентов и их числе. Показано, что для агентов, действующих по Курно, необходимым и достаточным условием стабильности информационного равновесия является равенство ожидаемых агентом цен истинной цене продукта (или равенство ожидаемых объемов реализованного продукта потребителям агентом (посредником) истинному объему). Под истинной ценой (истинным объемом) понимается основанная на адекватных представлениях о реальности всех агентов цена, соответствующая выбору ими равновесия Курно–Нэша. Также получены необходимые и достаточные условия стабильности информационного равновесия для агентов, действующих по Штакельбергу. Показано также, что в модели поведения всех агентов по Штакельбергу не существует стабильного информационного равновесия, если агенты имеют одно и то же ложное представление об их общем числе и суммарных затратах.

Рассмотрено влияние информационного воздействия центра на агентов, состоящее в раскрытии информации о своей целевой

функции, на оценку ими правильности своих представлений и действий.

### Литература

1. АЛГАЗИН Г.И., АЛГАЗИНА Д.Г. *Моделирование сетевого взаимодействия на конкурентных рынках* // Управление большими системами. – 2013. – №43. – С. 172–216.
2. АЛГАЗИН Г.И., АЛГАЗИНА Ю.Г. *Моделирование поведения экономических агентов в системе «производитель–посредник–конкурентный рынок»* // Управление большими системами. – 2011. – №32. – С. 83–108.
3. АЛГАЗИН Г.И., АЛГАЗИНА Ю.Г. *Информационное равновесие в модели Курно торговой системы* // Ломоносовские чтения на Алтае: фундаментальные проблемы науки и образования: сборник научных статей. – Барнаул: Изд-во Алт. ун-та. – 2015. – С. 807–811.
4. ДЮСУШЕ О.М. *Статическое равновесие Курно–Нэша и рефлексивные игры олигополии: случай линейных функций спроса и издержек* // Экономический журнал ВШЭ. – 2006. – №1. – С. 3–32.
5. КОРЕПАНОВ В.О. *Управление рефлексивным поведением агентов в модели олигополии Курно* // Управление большими системами. – 2010. – №31. – С. 225–249.
6. НОВИКОВ Д.А. *Модели стратегической рефлексии* // Автоматика и телемеханика. – 2012. – №1. – С. 3–18.
7. НОВИКОВ Д.А., ЧХАРТИШВИЛИ А.Г. *Модели рефлексивных игр в задачах управления эколого–экономическими системами* // Управление большими системами. – 2015. – №55. – С. 362–372.
8. НОВИКОВ Д.А., ЧХАРТИШВИЛИ А.Г. *Рефлексия и управление: математические модели.* – М.: Издательство физ.-мат. лит-ры, 2013. – 412 с.
9. HEGJI S.E., MOORE E.C. *On the Economics of Manufactures and Dealers: A Reexamination* // Southwestern Economic Review. – 2006. – P. 107–120.

10. KAHNEMAN D. *Maps of Bounded Rationality: Psychology for Behavioral Economics* // The American Economic Review. – 2003. – Vol. 93, No. 5. – P. 1449–1475.
11. SIMON H.A., EGIDI M., MARRIS R., VIALE R. *Economics, Bounded Rationality and Cognitive Revolution* / Edited by M. Egidi and R. Marris. – Brookfield, VT: Edward Elgar, 1992. – 232 p.

## TRUE AND FALSE INFORMATION EQUILIBRIUM IN THE MODEL OF TRADING SYSTEM

**Gennady Algazin**, Altai State University, Barnaul, Doctor of Science, professor (algaz46@yandex.ru).

**Julia Algazina**, Altai State University, Barnaul, Cand.Sc. associated professor (algazina@inbox.ru).

*Abstract: The paper formulates and investigates the conditions for the existence of informative equilibrium in competitive commodity market under the assumptions of a wrong mutual awareness among competitors. Our framework is a multi-agent model of the trading network “center (manufacturer) – agents (mediators) – consumers” with linear inverse demand function and cost functions, and agents can act either by Cournot or Stackelberg. The center reveals the information about its objective function as an information impact on agents. The obtained results are discussed.*

Keywords: trading network, reflexive game, imperfect information, information equilibrium, Cournot equilibrium, Stackelberg equilibrium and disequilibrium, information impact.

*Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии А.Г. Чхартишвили.*

*Поступила в редакцию 22.11.2015.  
Опубликована 31.03.2016.*

УДК 51-77  
ББК 22.171

## МОДЕЛЬ ГРАНОВЕТТЕРА С НЕПРЕРЫВНЫМ ВРЕМЕНЕМ

Рогаткин А. Д.<sup>1</sup>

(ФГБУН Институт проблем управления РАН, Москва)

*Исследуется предложенная в [6] модель конформного коллективного поведения, мотивированная моделью М. Грановеттера [7]. Рассмотрено вероятностное обоснование модели на микроуровне. Изучено поведение системы при стремлении числа агентов к бесконечности и показано, что оно описывается уравнением переноса. Показано, что траектории системы совпадают с траекториями некоторой изолированной гамильтоновой системы.*

Ключевые слова: модель Грановеттера, пороговое поведение, конформизм, уравнение переноса, гамильтоновы системы, уравнение Шредингера.

### 1. Введение

В работе [7] М. Грановеттером предложена модель *конформного коллективного поведения*, в которой агенты осуществляют бинарный выбор: действовать или бездействовать. Выбор они делают в *дискретные* моменты времени одновременно и независимо, каждый сравнивает «суммарное» действие других агентов со своим индивидуальным порогом. Опишем кратко соответствующую модель согласно [3].

Рассмотрим конечное множество агентов  $N = \{1, 2, \dots, n\}$ . Каждый из агентов имеет некоторый *порог сопротивления социальному давлению*  $\theta_i \in [0, 1]$ ,  $i \in N$  (далее – *порог*; под социальным давлением понимается, сколько других агентов действуют).

---

<sup>1</sup> Андрей Дмитриевич Рогаткин, аспирант  
(andreyrogatkin@gmail.com).

На шаге  $k$  агент  $i \in N$  выбирает одно из двух состояний  $\omega_{ik} \in \{0, 1\}$  (если  $\omega_{ik} = 1$ , то говорят, что агент «действует», иначе говорят, что он «бездействует»), его состояние на шаге  $k + 1$  определяется по правилу:

$$(1) \quad \omega_{i(k+1)} = \begin{cases} 1, & \frac{1}{n} \sum_j \omega_{jk} - \theta_i \geq 0, \\ 0, & \frac{1}{n} \sum_j \omega_{jk} - \theta_i < 0. \end{cases}$$

Согласно правилу (1), агент действует, если состояние системы  $x_k = 1/n \sum_i \omega_{ik}$  не ниже, чем его порог. Такое поведение называется *конформным*.

Предположим, что пороги агентов  $\theta_1, \dots, \theta_n$  – независимые одинаково распределённые на отрезке  $[0, 1]$  случайные величины с гладкой функцией распределения  $F: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ ,  $F(0) = 0$ ,  $F(1) = 1$ .

На макроуровне модель [7] имеет простое описание: если число агентов велико, то состояние системы подчиняется рекуррентному соотношению

$$(2) \quad x_{k+1} = F(x_k).$$

В работе [3] классифицированы положения равновесия в этой модели и показано, что система приходит в состояние равновесия не более чем за  $n$  шагов при любых начальных условиях.

Модель Грановеттера получила широкое распространение (см. обзор [1, 2]), однако имеет ограниченное применение, главным образом потому, что опирается на дискретность времени и одновременность принятия агентами решений, что не всегда имеет место. В работе [6] предложен способ изменить это требование и описано, каким образом агенты могут осуществлять свой выбор последовательно, сохранив при этом механизм индивидуального принятия решений. Эта модель имеет удобное асимптотическое описание (см. выражение (13)) при стремлении числа агентов к бесконечности, которое можно интерпретировать как переход к непрерывному времени.

В работе [4] модель Грановеттера также рассматривается в непрерывном времени с использованием предельного перехода при стремлении числа агентов к бесконечности, но одновременность принятия агентами решений сохраняется. Отличие настоящей работы от [6] состоит в следующем. Во-первых, в [6] исходные предположения модели на микроуровне описаны либо слишком кратко для однозначного понимания, либо не обоснованы, поэтому ниже приводится корректная вероятностная постановка. Во-вторых, в работе [6] соответствующая модель используется как основа для построения более сложных моделей с ограничением множества агентов, влияющих на принятие индивидуального решения, и не исследуется в достаточной мере сама по себе. В настоящей же работе анализируется динамика системы, приводится пример аналогичной системы из классической механики и обсуждаются способы обобщить модель на случай квантовой механики.

Структура изложения материала настоящей работы следующая. Во втором разделе приводится постановка модели и её асимптотическое описание при помощи уравнения непрерывности (13) и траекторий первого порядка (15). Приводятся оценки математического ожидания состояния и энтропии системы, их применение иллюстрируется примером. В третьем разделе исследуется устойчивость траекторий. В четвёртом разделе показывается связь модели с классической механикой и приводится пример гамильтоновой системы, траектории которой совпадают с траекториями системы (15) при соответствующих начальных условиях. В пятой части обсуждаются способы обобщить модель на квантовомеханический случай.

## **2. Модель принятия агентами решений и уравнение динамики состояний системы**

Перейдем к описанию модели принятия агентами решений в непрерывном времени. Обозначим через  $\omega_i(t) \in \{0, 1\}$  состояние агента  $i$  в момент времени  $t \in [0, +\infty)$ . Если агент в момент времени  $t$  действует, то  $\omega_i(t) = 1$ , в противном случае  $\omega_i(t) = 0$ .

Среднее арифметическое действий всех агентов  $x(t) = 1/n \sum_i \omega_i(t)$ , которое назовём *состоянием системы*, можно содержательно интерпретировать как *социальное давление* в следующем смысле. Пусть агент  $i$  имеет некоторый *порог сопротивления социальному давлению*  $\theta_i \in [0, 1]$  (далее *порог*). Если социальное давление превышает порог агента на *момент принятия им решения*, то агент решает действовать. Иначе он решает бездействовать – см. также выражение (1).

Моменты принятия агентами решений определим следующим образом. В каждый из моментов времени  $1/n, 2/n, \dots, k/n, \dots$  решение принимает только один агент из множества  $N$ , выбираемый случайно, причем выбор любого из агентов равновероятен. Номер выбранного на шаге  $k$  агента обозначим через  $i_k$ .

Связь времени с числом агентов имеет следующий смысл: агент принимает решение (менять или не менять действие) в среднем один раз за единичное характерное время. Чем больше в сети агентов, тем больше будет принято решений за единицу времени. Таким образом,

$$(3) \quad \omega_i \left( t + \frac{1}{n} \right) = \begin{cases} \chi(x(t) \geq \theta_i), i_k = i, \\ \omega_i(t), i_k \neq i. \end{cases}$$

Случайные величины  $i_1, \dots, i_n, \theta_1, \dots, \theta_n$  предположим независимыми в совокупности. Согласно описанной модели, в моменты времени  $1/n, 2/n, \dots, k/n, \dots$  действие произвольно выбранного агента может остаться неизменным или измениться. Соответственно, состояние системы либо остаётся неизменным, либо увеличивается на  $1/n$ , либо уменьшается на  $1/n$ .

В соответствии с выражением (3), условная вероятность  $P(\uparrow | m/n)$  увеличения социального давления на  $1/n$  для системы, находящейся в состоянии  $m/n$ , где  $m = 1, \dots, n$ , определяется как вероятность события, состоящего в одновременном выполнении следующих двух условий:

- 1) реализации порога случайно выбранного агента  $i_k$  меньшего или равного  $m/n$ ;
- 2) выбора агента с состоянием 0.

То есть

$$(4) \quad P\left(\uparrow \mid \frac{m}{n}\right) \triangleq \text{Prob}\left(x\left(t + \frac{1}{n}\right) = \frac{m+1}{n}, x(t) = \frac{m}{n}\right) = \\ = \text{Prob}\left(\omega_{i_k} = 0, \theta_{i_k} \leq \frac{m}{n}\right).$$

В силу независимости  $\theta_i$  и  $i_k$ , из (4) получаем:

$$(5) \quad P\left(\uparrow \mid \frac{m}{n}\right) = \text{Prob}\left(\omega_{i_k} = 0\right) \cdot \text{Prob}\left(\theta_{i_k} \leq \frac{m}{n}\right) = \left(1 - \frac{m}{n}\right) F\left(\frac{m}{n}\right).$$

Аналогично, вероятность  $P(\downarrow \mid m/n)$  уменьшения среднего действия агентов на  $1/n$  для системы, находящейся в состоянии  $m/n$ , определяется как вероятность события, состоящего в одновременном выполнении следующих двух условий:

- 1) реализации порога случайно выбранного агента  $i_k$  большего  $m/n$ ;
- 2) выбора агента с состоянием 1.

То есть

$$(6) \quad P\left(\downarrow \mid \frac{m}{n}\right) \triangleq \text{Prob}\left(x\left(t + \frac{1}{n}\right) = \frac{m-1}{n} \mid x(t) = \frac{m}{n}\right) = \\ = \text{Prob}\left(\omega_{i_k} = 1, \theta_{i_k} > \frac{m}{n}\right),$$

В силу независимости  $\theta_i$  и  $i_k$ , из (6) получаем:

$$(7) \quad P\left(\downarrow \mid \frac{m}{n}\right) = \text{Prob}\left(\omega_{i_k} = 1\right) \cdot \text{Prob}\left(\theta_{i_k} > \frac{m}{n}\right) = \frac{m}{n} \left(1 - F\left(\frac{m}{n}\right)\right).$$

Так как за один «временной шаг» длины  $1/n$  состояние системы может измениться не больше чем на  $1/n$ , то вероятность  $P(\uparrow\downarrow \mid m/n)$  того, что система, находящаяся в состоянии  $m/n$ , не изменит своего состояния, равна

$$(8) \quad P\left(\uparrow\downarrow \mid \frac{m}{n}\right) = 1 - P\left(\downarrow \mid \frac{m}{n}\right) - P\left(\uparrow \mid \frac{m}{n}\right).$$

В рамках рассматриваемой модели вероятности изменения состояния системы зависят только от состояния системы, т.е. процесс  $x(t)$  по определению является марковским.

Введём обозначение



$$q\left(\frac{m}{n}, t\right) \triangleq \text{Prob}\left(x(t) = \frac{m}{n}\right),$$

где  $q(m/n, t)$  - распределение вероятностей состояний системы:

$$(9) \quad \sum_{m=0}^n q\left(\frac{m}{n}, t\right) = 1, \quad \forall t \in [0, +\infty).$$

В соответствии с описанным выше случайным законом, получаем, что справедливо следующее утверждение.

Утверждение 1. Динамика распределения вероятностей состояний системы описывается уравнением Колмогорова–Чепмена:

$$(10) \quad \begin{aligned} q\left(\frac{m}{n}, t + \frac{1}{n}\right) &= P\left(\uparrow \mid \frac{m-1}{n}\right) q\left(\frac{m-1}{n}, t\right) + \\ &+ P\left(\downarrow \mid \frac{m+1}{n}\right) q\left(\frac{m+1}{n}, t\right) + \\ &+ \left[1 - P\left(\uparrow \mid \frac{m}{n}\right) - P\left(\downarrow \mid \frac{m}{n}\right)\right] q\left(\frac{m}{n}, t\right). \end{aligned}$$

Для каждого  $n$  обозначим через  $q^n(m/n, t)$  решение уравнения (10) с начальными условиями

$$(11) \quad q^n\left(\frac{m}{n}, 0\right) = \int_{\frac{m}{n} - \frac{1}{2n}}^{\frac{m}{n} + \frac{1}{2n}} q_0(x) dx,$$

где  $q_0(x)$  – некоторая гладкая функция  $x$ . Предположим, что решения  $q^n(m/n, t)$  уравнения (10) при  $n \rightarrow \infty$  имеют гладкий предел  $p(x, t)$ , причем предел понимается в том смысле, что для любого интервала  $(a, b) \subset [0, 1]$

$$(12) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{m=[na]}^{[nb]} q^n\left(\frac{m}{n}, t\right) \right) = \int_a^b p(x, t) dx.$$

Утверждение 2. Плотность распределения вероятностей состояний системы  $p(x, t)$  удовлетворяет уравнению

$$(13) \quad \frac{\partial}{\partial t} p(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} ([F(x) - x] p(x, t)) = 0.$$

Доказательство утверждения 2 приведено в приложении.

Уравнение (13), известное в физике как *основное кинетическое уравнение (master equation)*, в рассматриваемом случае имеет вид *уравнения переноса*, которое в том числе отражает условие нормировки (аналогичное условию (9)) – сохранение во

времени интеграла  $\int_0^1 p(x,t) dx$  :

$$(14) \quad \frac{d}{dt} \int_0^1 p(x,t) dx = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} p(x,t) dx = - \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} [(F(x) - x) p(x,t)] dx = \\ = (F(1) - 1) p(1,t) - (F(0) - 0) p(0,t) = 0.$$

Уравнением характеристик уравнения (13) является

$$(15) \quad \dot{x} = F(x) - x,$$

которое представляет собой непрерывный аналог уравнения Грановеттера (2).

В частности, если начальное состояние системы  $x_0$  известно точно:

$$(16) \quad p(x,0) = \delta(x - x_0),$$

то движение системы будет описываться дифференциальным уравнением (15), т.е. решением уравнения (13) будет являться

$$(17) \quad p(x,t) = \delta(x - x(t)),$$

где  $x(t)$  – решение уравнения (15) с начальным условием  $x(0) = x_0$ .

Проведём анализ *математического ожидания состояния*  $Ex(t)$  и *энтропии*  $I(t) = - \int_0^1 p(x,t) \ln p(x,t) dx$  исследуемой системы.

Утверждение 3. Математическое ожидание состояния системы  $Ex(t)$  удовлетворяет равенству

$$(18) \quad \frac{d}{dt} (Ex(t)) = EF(x(t)) - Ex(t).$$

Доказательство утверждения 3 приведено в приложении.

Утверждение 4. Динамика энтропии системы описывается выражением

$$(19) \frac{dI}{dt}(t) = \int_0^1 (F'(x) - 1) p(x, t) dx .$$

Доказательство утверждения 4 приведено в приложении.

Выражения (15), (18) и (19) позволяют качественно оценивать поведение системы с известными функцией распределения порогов и начальными условиями. Рассмотрим иллюстративный пример.

Пример 1. Пусть функция распределения порогов агентов  $F(x) = x^2$ . Тогда уравнение (13) с начальным условием  $p(x, 0) = p_0(x)$ , где  $p_0(x)$  – некоторая гладкая функция, имеет решение

$$(20) p(x, t) = p_0 \left( \frac{1}{1 + \frac{1-x}{x} e^{-t}} \right) \cdot \frac{e^{-t}}{(x + (1-x)e^{-t})^2} .$$

На рис. 1, 2, 3 изображена функция  $p(x, t)$ , заданная выражением (20) с начальным условием

$$(21) p_0(x) = \alpha e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}}, \quad x_0 = 0,97, \quad \sigma = 2^{-4},$$

где  $\alpha$  – нормирующий множитель, гарантирующий равенство единице интеграла от начального условия на отрезке  $[0, 1]$ .

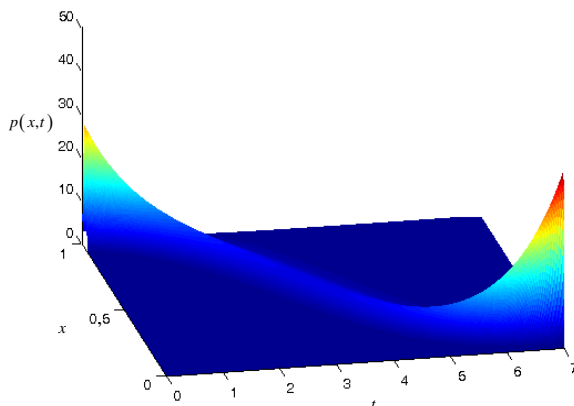


Рис. 1. График решения  $p(x, t)$  уравнения (13) с начальным условием (21)

Как видно из рис. 1, положение максимума плотности распределения вероятностей (моды) состояния системы с функцией распределения порогов  $F(x) = x^2$  со временем стремится к нулю. Как показывают рис. 2 и рис. 3, эта динамика носит несимметричный характер: вероятность того, что координата системы находится между модой (максимумом плотности распределения) и нулём, меньше, чем вероятность того, что система находится между модой и единицей.

Наблюдаемая динамика качественно соответствует выражениям (15) и (19). Так как правая часть (15) отрицательна, система движется в направлении уменьшения состояния системы. При этом максимальная скорость движения достигается в точке  $x = 0,5$ . Правая часть выражения (19) положительна, пока система с высокой вероятностью находится в области  $x > 0,5$  и, следовательно, энтропия возрастает и плотность вероятности «размывается». С течением времени вероятность нахождения системы в области  $x < 0,5$  возрастает, и правая часть (19) становится отрицательной. Это приводит к «фокусировке» плотности вероятности с течением времени при движении системы к нулю.

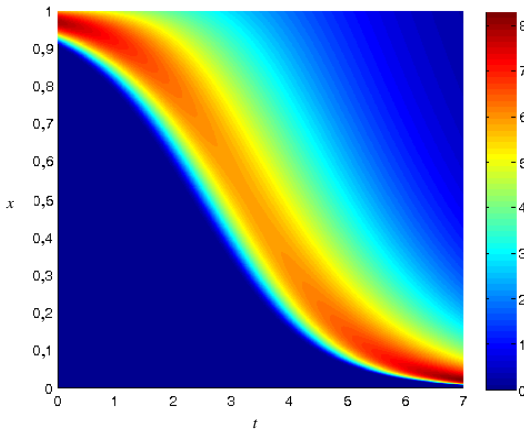


Рис. 2. График функции  $\log(100p(x, t) + 1)$ , где  $p(x, t)$  - решение уравнения (13) с начальным условием (21)

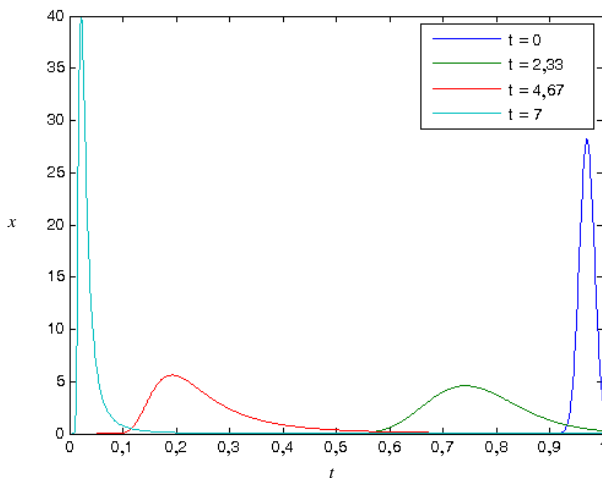


Рис. 3. Срезы решения  $p(x, t)$  уравнения (13) с начальным условием (21) в различные моменты времени

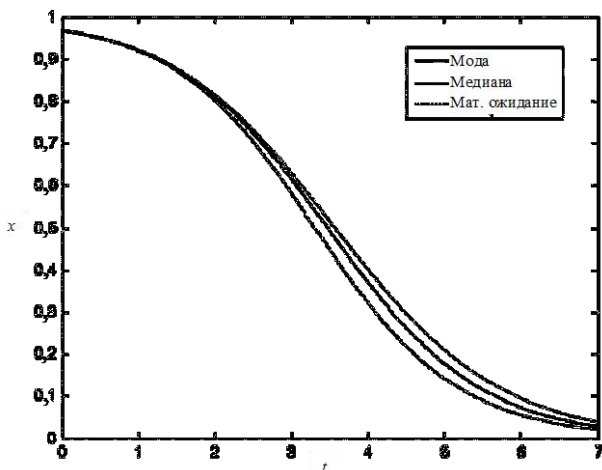


Рис. 4. График зависимости моды, медианы и математического ожидания решения  $p(x, t)$  уравнения (13) с начальным условием (21)

Выражение (15) для системы с  $F(x) = x^2$  принимает вид

$$(22) \frac{d}{dt}(Ex(t)) = Ex^2(t) - Ex(t) = Dx(t) + (Ex(t))^2 - Ex(t),$$

где  $Dx(t)$  – дисперсия состояния системы. •

Таким образом, описанная выше модель принятия агентами решений в пределе при стремлении числа агентов к бесконечности описывается уравнением переноса (13), и для исследования системы применимы методы математической физики. Приведём некоторые примеры физических аналогов – механических систем, описываемых этим уравнением.

### 3. Анализ устойчивости и структура положений равновесия

Исследуем уравнение (15). Положением равновесия (15) являются все точки отрезка  $[0, 1]$  удовлетворяющие

$$(23) F(x) - x = 0.$$

Согласно [5], положение равновесия  $x^*$  *асимптотически устойчиво* (по Ляпунову), если

1. Для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  такое, что из неравенства  $|x(0) - x^*| < \delta$  следует неравенство  $|x(t) - x^*| < \varepsilon$  при  $0 \leq t \leq +\infty$ .

2. Существует такая открытая окрестность  $U$  точки  $x^*$ , что все решения  $x(t)$  с начальным условием  $x(0) \in U$  обладают свойством  $\lim x(t) = x^*$ .

При этом  $U$  называют *областью притяжения* положения равновесия  $x^*$ .

Положение равновесия (15)  $x^*$  *неустойчиво* (по Ляпунову), если для некоторого  $\varepsilon > 0$  и любого  $\delta > 0$  существует  $t_1 = t_1(\delta) > 0$  такое, что  $|x(0) - x^*| < \delta$  и  $|x(t_1) - x^*| \geq \varepsilon$ .

В силу гладкости  $F(\cdot)$ , по теореме об устойчивости по квазилинейному приближению и теореме о неустойчивости [5, с. 261–262], выполнено

Утверждение 5. Пусть  $x^*$  – положение равновесия системы. Тогда при  $F'(x^*) < 1$  положение равновесия  $x^*$  асимптотически устойчиво. При  $F'(x^*) > 1$  положение равновесия  $x^*$  неустойчиво.

#### 4. Аналогии с механическими системами

Покажем связь уравнения (15) с уравнениями движения частицы в потенциале

$$(24) V(x) = -\frac{m}{2}(F(x) - x)^2.$$

Запишем гамильтониан системы с потенциалом (24):

$$(25) H(x, p) = \frac{p^2}{2m} - \frac{m}{2}(F(x) - x)^2.$$

Уравнения Гамильтона имеют вид

$$(26) \begin{cases} \dot{x} = \frac{p}{m}, \\ \dot{p} = m(F(x) - x)(F'(x) - 1). \end{cases}$$

Дифференцируя первое уравнение системы (26) и подставляя в него второе, получаем

$$(27) \ddot{x} = (F(x) - x)(F'(x) - 1).$$

Траектории (27) удовлетворяют (15). Действительно, дифференцируя выражение  $\dot{x} = F(x) - x$ , получаем

$$(28) \ddot{x} = (F'(x) - 1)\dot{x},$$

что после подстановки  $\dot{x} = F(x) - x$  совпадает с (27).

Важно отметить, что уравнения (15) и (27) не являются идентичными. Эти дифференциальные уравнения имеют разный порядок, и для их решения необходимо задание разного количества начальных условий. Между ними есть лишь некоторая связь, смысл которой состоит в следующем:

**Утверждение 7.** Если уравнение (27) решается с начальными условиями

$$(29) x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = F(x_0) - x_0,$$

то полученная кривая будет совпадать с кривой, являющейся решением уравнения (15) с начальным условием  $x(0) = x_0$ .

Действительно, связь (29) между начальными условиями задаёт некоторую кривую в фазовом пространстве. Эта кривая состоит из точек, в которых полная энергия системы равна нулю: согласно (29) и (25),

$$(30) H(x(0), m\dot{x}(0)) = \frac{m}{2}(F(x_0) - x_0)^2 - \frac{m}{2}(F(x_0) - x_0)^2 = 0.$$

Но полная энергия системы сохраняется на траекториях системы, а значит,

$$(31) H(x(t), p(t)) = \frac{p(t)^2}{2m} - \frac{m}{2}(F(x(t)) - x(t))^2 = 0.$$

Откуда следует

$$(32) m\dot{x} = \pm |F(x) - x|.$$

Сравнивая (32) с (27) и (28), получаем (15).

**Пример 2.** Пусть в некоторой окрестности точки  $x = 1/2$  функция распределения имеет вид  $F(x) = 1/4 + x/2$ . Уравнение (15) принимает вид  $\dot{x} = 1/4 - x/2$ . Решая это  $1/4$  уравнение при начальном условии  $x(0) = x_0$ , получаем траекторию

$$(33) x(t) = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - x_0\right) e^{-\frac{1}{2}t}.$$

Уравнение (27) принимает вид  $\ddot{x} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}x\right)$ . Решая это уравнение при начальном условии  $x(0) = x_0$ ,  $\dot{x}(0) = v_0$ , получаем траекторию

$$(34) x(t) = \frac{1}{2} + \left(v_0 + \frac{x_0}{2} - \frac{1}{4}\right) e^{\frac{1}{2}t} - \left(v_0 - \frac{x_0}{2} + \frac{1}{4}\right) e^{-\frac{1}{2}t}.$$

Сравнивая (33) с (34), можно заметить, что эти кривые совпадают при

$$v_0 = \frac{1}{4} - \frac{x_0}{2} = F(x_0) - x_0. \bullet$$

Таким образом, траектории (15) совпадают с траекториями движения свободной частицы в потенциале (24) с начальными условиями, подчиняющимися (29). Этот факт может быть использован при построении соответствующей квантовой модели.

**Пример 3.** Пусть функция распределения имеет вид  $F(x) = x^2(3 - 2x)$ . Система имеет одно неустойчивое положение равновесия (см. рис. б) в точке  $x = 1/2$  и два неустойчивых положения равновесия: в точке  $x = 0$  и в точке  $x = 1$ .



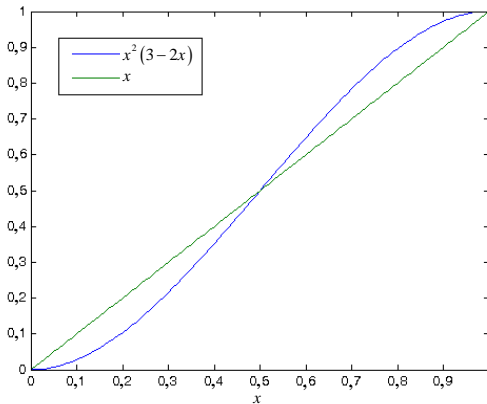


Рис. 5. График функции распределения  $F(x) = x^2(3 - 2x)$

Потенциал системы, согласно (24), имеет вид

$$\begin{aligned}
 V(x) &= -\frac{m}{2}(x^2(3-2x) - x)^2 = -\frac{m}{2}x^2(-2x^2 + 3x - 1)^2 = \\
 (35) \quad &= -\frac{m}{2}x^2(x-1)^2(2x-1)^2.
 \end{aligned}$$

На рис. 6 изображён график потенциальной энергии (35) при  $m = 2$ .

Гамильтониан рассматриваемой системы имеет вид

$$(36) \quad H(x, p) = \frac{p^2}{2m} - \frac{m}{2}(F(x) - x)^2,$$

что в точности совпадает с гамильтонианом тела, движущегося без потерь энергии в поле тяготения по неровному ландшафту, форма которого имеет вид  $-x^2(x-1)^2(2x-1)^2/2$  (считая ускорение свободного падения равным 1).

Рассмотрим движение из начальной точки  $x_0 = 1/4$ . Согласно (29), начальное условие на скорость имеет вид

$$(37) \quad v_0 = F(x_0) - x_0 = \frac{1}{16} \left( 3 - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{4} = -\frac{3}{32}.$$

Начальная скорость отрицательна, и система движется в направлении точки  $x = 0$ . Согласно (27), скорость остаётся отрицательной, но стремится к нулю, а точка  $x = 0$  никогда не достигается. Таким образом, движение системы идентично движению

тела по неровному ландшафту, а связь (29) между начальными условиями означает задание такой начальной скорости тела, что оно бесконечно движется в направлении положения равновесия 0 или 1, асимптотически приближаясь к нему.

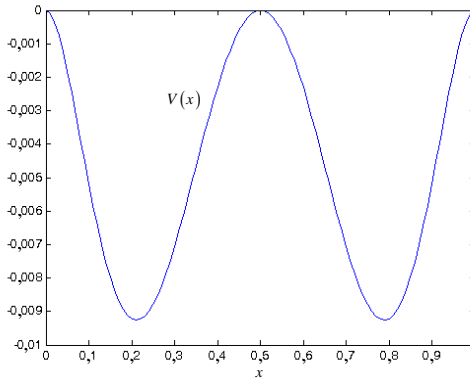


Рис. 6. График потенциала (35) системы с функцией распределения  $F(x) = x^2(3 - 2x)$  при  $t = 2$

На рис. 7 изображены траектории рассматриваемой системы на фазовой плоскости. Они, так же как и ограничения на начальные условия (29), задаются кривой  $F(x) - x$ .

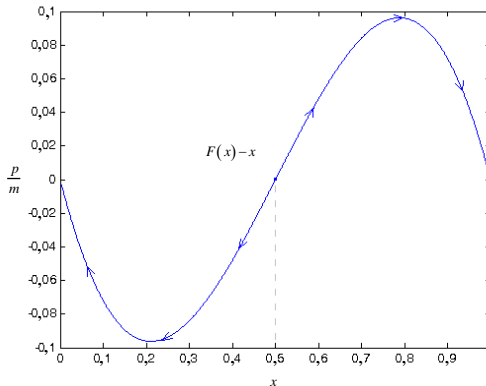


Рис. 7 Траектории системы на фазовой плоскости

## 5. Заключение

Исследована предложенная в [6] модель конформного коллективного поведения, мотивированная моделью М. Грановеттера [7]. Рассмотрено вероятностное обоснование модели на микроуровне. Изучено поведение системы при стремлении числа агентов к бесконечности, показано, что оно описывается уравнением переноса. Показано, что траектории системы совпадают с траекториями некоторой изолированной гамильтоновой системы.

Перспективным направлением дальнейших исследований является обобщение описанных моделей классической механики на случай квантовой неопределённости в поведении агентов. Вкратце предлагаемый подход может быть описан следующим образом. Уравнение Шрёдингера движения квантовой частицы в потенциале  $V(x)$  имеет вид

$$(38) \quad i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = - \left( \frac{\hbar^2}{2m} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi + V\psi .$$

Приведём известный способ записи уравнения Шрёдингера через амплитуду и фазу. Он состоит в следующем. Если выразить волновую функцию через амплитуду  $R(\cdot)$  и фазу  $S(\cdot)$ :

$$\psi(x, t) = R(x, t) \exp\left(\frac{i}{\hbar} S(x, t)\right)$$

(где  $R(x, t) > 0$ ) и подставить в уравнение (38), получим уравнение

$$(39) \quad i\hbar \frac{\partial R}{\partial t} - R \frac{\partial S}{\partial t} = - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} R - i \frac{\hbar}{m} \frac{\partial}{\partial x} R \frac{\partial}{\partial x} S - \frac{i\hbar}{2m} R \frac{\partial^2}{\partial x^2} S + \\ + \frac{1}{2m} \left( R \frac{\partial}{\partial x} S \right)^2 + VR.$$

Переписывая его как два уравнения – для комплексной и действительной части, получаем систему

$$(40) \begin{cases} \frac{\partial R}{\partial t} + \frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial x} R \frac{\partial}{\partial x} S + \frac{1}{2m} R \frac{\partial^2}{\partial x^2} S = 0, \\ \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} R - R \frac{\partial S}{\partial t} - \frac{1}{2m} R \left( \frac{\partial}{\partial x} S \right)^2 - VR = 0. \end{cases}$$

Вводя замену переменных  $P(x, t) = R^2(x, t)$ , получаем систему

$$(41) \begin{cases} \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( P \frac{\partial S}{\partial x} \right) = 0, \\ \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\left( \frac{\partial}{\partial x} S \right)^2}{2m} + V(x) - \frac{\hbar^2}{4m} \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} P}{P} - \frac{1}{2} \frac{\left( \frac{\partial}{\partial x} P \right)^2}{P^2} \right] = 0. \end{cases}$$

Система двух действительных уравнений (41) тождественна одному комплексному уравнению Шрёдингера (38). Первое уравнение (41) – уравнение переноса. Второе – уравнение Гамильтона–Якоби с потенциалом

$$(42) V(x) - \frac{\hbar^2}{4m} \left[ \frac{\frac{\partial}{\partial x} P}{P} - \frac{1}{2} \frac{\left( \frac{\partial}{\partial x} P \right)^2}{P^2} \right] \frac{1}{2},$$

в котором второе слагаемое носит название *квантового потенциала*. Если теперь подставить в выражение для потенциала, то в классическом приближении ( $\hbar = 0$ ) второе уравнение запишется как

$$(43) \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\left( \frac{\partial}{\partial x} S \right)^2}{2m} - \frac{m}{2} (F(x) - x)^2 = 0.$$

Одним из решений этого уравнения является

$$(44) \frac{\partial}{\partial x} S = m(F(x) - x).$$

Утверждение 8. Пусть выполнено (44). Тогда первое уравнение системы (41) имеет вид уравнения переноса (13).

Классическая модель Грановеттера с непрерывным временем, описанная в этой работе при помощи уравнения переноса (13), имеет следующий физический смысл: плотность вероятности положения системы переносится потоком  $m(F(x) - x)$ . Этот поток не зависит от плотности вероятности положения системы. В терминах исходных параметров модели это означает, что пороги агентов не зависят от их действий. Эти пороги и определяют динамику состояния системы. В действительности же наблюдается ситуация, когда состояние системы (среднее действие агентов) влияет некоторым образом на пороги агентов. Таким образом, возникает сложная система: пороги агентов влияют на состояние системы, а состояние системы влияет на пороги агентов. При этом если зависимость порогов агентов от плотности распределения состояния системы имеет вид второго уравнения (41), то система будет описываться уравнением Шрёдингера (38).

### Литература

1. БРЕЕР В.В. *Модели конформного поведения. Ч.1. От философии к математическим моделям* // Проблемы управления. – 2014. – №1. – С. 2–13.
2. БРЕЕР В.В. *Модели конформного поведения. Ч.2. Математические модели* // Проблемы управления. – 2014. – №2. – С. 2–17.
3. БРЕЕР В.В., РОГАТКИН А.Д. *Вероятностная модель порогового поведения в многоагентных системах* // Автоматика и телемеханика. – 2015. – №8. – С. 56–77.
4. БРЕЕР В.В. *Модели толерантного порогового поведения (от Т. Шеллинга – к М. Грановеттеру)*. // Проблемы управления (в печати)
5. ДЕМИДОВИЧ Б.П. *Лекции по математической теории устойчивости*. – М.: Наука, 1967. – 467 с.
6. АКХМЕТZHANOV A.R., WORDEN L., DUSHOFF J. *Effects of Mixing in Threshold Models of Social Behavior* // Phys. Rev. E. – 2013. – Т. 88. – №. 1. – P. 012816.

7. GRANOVETTER M. *Threshold Models of Collective Behavior* // *American Journal of Sociology*. – 1978. – Vol. 83. – P. 1420–1443.

## 6. Приложение

Доказательство утверждения 2. Пусть выполнено (10). Переноса  $q(m/n, t)$  в левую часть, получаем

$$(45) \quad q\left(\frac{m}{n}, t + \frac{1}{n}\right) - q\left(\frac{m}{n}, t\right) = P\left(\uparrow \mid \frac{m-1}{n}\right) q\left(\frac{m-1}{n}, t\right) + \\ + P\left(\downarrow \mid \frac{m+1}{n}\right) q\left(\frac{m+1}{n}, t\right) - \left[ P\left(\uparrow \mid \frac{m}{n}\right) + P\left(\downarrow \mid \frac{m}{n}\right) \right] q\left(\frac{m}{n}, t\right).$$

Подставляя в вероятности увеличения и уменьшения состояния системы (5) и (7), имеем:

$$(46) \quad p\left(\frac{m}{n}, t + \frac{1}{n}\right) - p\left(\frac{m}{n}, t\right) = \left(1 - \frac{m-1}{n}\right) F\left(\frac{m-1}{n}\right) p\left(\frac{m-1}{n}, t\right) + \\ + \left(\frac{m+1}{n}\right) \left(1 - F\left(\frac{m+1}{n}\right)\right) p\left(\frac{m+1}{n}, t\right) - \\ - \left[ \left(1 - \frac{m}{n}\right) F\left(\frac{m}{n}\right) + \frac{m}{n} \left(1 - F\left(\frac{m}{n}\right)\right) \right] p\left(\frac{m}{n}, t\right).$$

Перегруппировав слагаемые в правой части последнего выражения, получим допредельные разности для производных по  $x$  и  $t$ :

$$(47) \quad p\left(\frac{m}{n}, t + \frac{1}{n}\right) - p\left(\frac{m}{n}, t\right) = \\ = \left(1 - \frac{m}{n}\right) \left( F\left(\frac{m-1}{n}\right) p\left(\frac{m-1}{n}, t\right) - F\left(\frac{m}{n}\right) p\left(\frac{m}{n}, t\right) \right) + \\ + \frac{m}{n} \left( \left(1 - F\left(\frac{m+1}{n}\right)\right) p\left(\frac{m+1}{n}, t\right) - \left(1 - F\left(\frac{m}{n}\right)\right) p\left(\frac{m}{n}, t\right) \right) + \\ + \frac{1}{n} F\left(\frac{m-1}{n}\right) p\left(\frac{m-1}{n}, t\right) + \frac{1}{n} \left(1 - F\left(\frac{m+1}{n}\right)\right) p\left(\frac{m+1}{n}, t\right).$$

Разделив обе части на  $1/n$  и переходя к пределу при  $m/n \rightarrow x$ ,  $n \rightarrow \infty$ , получаем

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} p(x, t) &= -(1-x) \frac{\partial}{\partial x} (F(x) p(x, t)) + \\
 &+ x \frac{\partial}{\partial x} ((1-F(x)) p(x, t)) + F(x) p(x, t) + (1-F(x)) p(x, t) = \\
 (48) \quad &= -\frac{\partial}{\partial x} (F(x) p(x, t)) + x \frac{\partial}{\partial x} p(x, t) + p(x, t) = \\
 &= -\frac{\partial}{\partial x} (F(x) p(x, t)) + \frac{\partial}{\partial x} (xp(x, t)) = \\
 &= -\frac{\partial}{\partial x} ([F(x) - x] p(x, t)),
 \end{aligned}$$

т.е.  $\frac{\partial}{\partial t} p(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} ([F(x) - x] p(x, t)) = 0$ . •

Доказательство утверждения 3. По определению математического ожидания

$$(49) \quad \frac{d}{dt} Ex(t) = \frac{d}{dt} \left( \int_0^1 xp(x, t) dx \right).$$

В силу гладкости  $p(x, t)$ , по правилу Лейбница

$$(50) \quad \frac{d}{dt} \left( \int_0^1 xp(x, t) dx \right) = \int_0^1 x \frac{\partial}{\partial t} p(x, t) dx.$$

Выражая  $\partial p/\partial t$  из (13) и интегрируя по частям, получаем

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 x \frac{\partial}{\partial t} p(x, t) dx &= -\int_0^1 x \frac{\partial}{\partial x} [(F(x) - x) p(x, t)] dx = \\
 (51) \quad &= x(F(x) - x) p(x, t) \Big|_0^1 + \int_0^1 (F(x) - x) p(x, t) dx = \bullet \\
 &= EF(x(t)) - Ex(t).
 \end{aligned}$$

Доказательство утверждения 4. По определению энтропии,

$$(52) \quad \frac{d}{dt} I(t) = -\frac{d}{dt} \int_0^1 p(x, t) \ln p(x, t) dx.$$

В силу гладкости  $p(x, t)$ ,

$$\begin{aligned}
 & -\frac{d}{dt} \int_0^1 p(x,t) \ln p(x,t) dx = \\
 (53) & = -\int_0^1 \left( \frac{\partial p}{\partial t}(x,t) \ln p(x,t) + \frac{\partial p}{\partial t}(x,t) \right) dx = \\
 & = -\int_0^1 \frac{\partial p}{\partial t}(x,t) (\ln p(x,t) + 1) dx
 \end{aligned}$$

Выражая  $\partial p/\partial t$  из (13) и интегрируя по частям, учитывая  $F(0) = 0$ ,  $F(1) = 1$ , получаем

$$\begin{aligned}
 & -\int_0^1 \frac{\partial p}{\partial t}(x,t) (\ln p(x,t) + 1) dx = \\
 & = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} [(F(x) - x) p(x,t)] (\ln p(x,t) + 1) dx = \\
 & = [(F(x) - x) p(x,t)] (\ln p(x,t) + 1) \Big|_0^1 - \\
 (54) & - \int_0^1 (F(x) - x) \frac{\partial p}{\partial x}(x,t) dx = \\
 & = 0 - (F(x) - x) p(x,t) \Big|_0^1 + \int_0^1 (F'(x) - 1) p(x,t) dx = \\
 & = \int_0^1 (F'(x) - 1) p(x,t) dx.
 \end{aligned}$$



## **CONTINUOUS GRANOVETTER MODEL**

**Andrei Rogatkin**, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Cand.Sc., PhD student (andreyrogatkin@gmail.com).

*Abstract: In this paper the model of collective conformal behavior proposed in [6] and originally motivated by M.Granovetter [7] is investigated. Probabilistic foundations of the model are considered at micro level. The model properties are studied in the case when the number of agents tends to infinity and it is shown that the transport equation holds. It is proved that the system trajectories coincide with trajectories of an isolated Hamiltonian system.*

**Keywords:** Granovetter model, threshold behavior, conformism, transfer equation, Hamiltonian system, Schrodinger equation.

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии Н.И. Базенковым.*

*Поступила в редакцию 19.08.2015.*

*Опубликована 31.03.2016.*

УДК 338.2  
ББК 65.05.3

## **ФОРМИРОВАНИЕ СТРАТЕГИИ ЭКОЛОГИЧЕСКОГО МЕНЕДЖМЕНТА ЭЛЕКТРОГЕНЕРИРУЮЩИХ КОМПАНИЙ НА ОСНОВЕ МЕТОДОЛОГИИ АНАЛИЗА СРЕДЫ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ<sup>1</sup>**

**Ратнер С. В.<sup>2</sup>,**

*(ФГБУН Институт проблем управления  
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)*

**Ратнер П. Д.<sup>3</sup>**

*(Российский экономический университет  
им. Г.В. Плеханова, Краснодарский филиал, Краснодар)*

*Изучается возможность применения методологии анализа среды функционирования (АСФ) – непараметрического метода оптимизации к решению задач экологического менеджмента предприятий электроэнергетической отрасли. Анализируются способы учета нежелательных выходов, строится алгоритм последовательного двойного применения базовой модели АСФ для решения задачи формирования оптимальной по набору экологических и экономических параметров стратегии природоохранной деятельности генерирующих компаний. Проводится апробация алгоритма на статистических данных по экологическим эффектам деятельности генерирующих компаний России. Обсуждаются возможности использования метода на практике.*

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 16-06-00147\_a «Разработка моделей анализа среды функционирования для оптимизации траекторий развития региональных экономических систем по экологическим параметрам».

<sup>2</sup> Светлана Валерьевна Ратнер, доктор экономических наук (laparat@mail.ru, тел. (495) 334-79-00).

<sup>3</sup> Павел Дмитриевич Ратнер, студент (ratner.p.d@gmail.com).

Ключевые слова: анализ среды функционирования, непараметрическая оптимизация, экологические эффекты, электроэнергетика.

## **1. Введение**

В настоящее время электроэнергетические объекты, работающие на углеводородном топливе, являются одними из основных эмитентов парниковых газов и других загрязняющих веществ (16% общероссийских выбросов от стационарных источников), крупными потребителями свежей воды (35% общего использования водных ресурсов по России), загрязнителями почв, подземных и поверхностных вод. Повышение экологической эффективности деятельности предприятий электроэнергетики является одним из наиболее важных условий обеспечения устойчивого развития как отрасли, так и страны в целом. Одной из важнейших проблем экологической оптимизации развития электроэнергетики является максимальное сокращение негативных воздействий на окружающую среду с использованием различных природоохранных мероприятий (как технологического характера, так и организационных) при сохранении существующих объемов выработки электроэнергии [4].

Приоритеты инвестиционной деятельности электрогенерирующих компаний, направленной на снижение негативных экологических эффектов, определяются, в основном, существующей на сегодняшний день системой экологических платежей и штрафов за сверхнормативные выбросы и мало учитывают реалии экологической ситуации в регионах. В большинстве литературных источников действующие в России экономические механизмы и стимулы к минимизации негативного воздействия на окружающую среду электроэнергетическими объектами признаны неэффективными (см., например, работы [3, 5]).

В то же время успешных примеров перехода на экологически чистые технологии генерации энергии в масштабах региональных и национальных энергетических систем в мировой практике на сегодняшний день пока нет. Хорошо известные ситуации бразильского энергетического кризиса 2001 года,

связанного с засухой и нехваткой воды для обеспечения стабильной работы гидроэлектростанций (производят около 40% всей потребляемой в стране электроэнергии) [15], китайского экологического кризиса последних лет, вызванного увеличением объемов генерации энергии на угольных станциях [18], проблемы непропорционально интенсивного роста количества солнечных электростанций в Чехии [16] иллюстрируют сложный и комплексный характер задачи разработки оптимальной конфигурации энергетической системы. Отсутствие полного понимания влияния некоторых процессов генерации энергии на экосистемы и недостаточное внимание к экологическим аспектам при проектировании конфигурации энергетической систем может привести к неожиданным и нежелательным последствиям, когда положительный эффект от снижения негативного воздействия на окружающую среду по одному параметру (или группе параметров) полностью нивелируется увеличением нагрузки на экосистемы по другому параметру (или группе параметров). Так, например, известно, что использование технологий улавливания CO<sub>2</sub> в целях сокращения объемов выбросов парниковых газов приводит к существенному увеличению забора и потребления водных ресурсов электростанциями [23].

Увеличение количества рассматриваемых оптимизационных критериев, которые необходимо учитывать при проектировании структуры региональной энергетической системы (минимизация негативного воздействия на окружающую среду (в том числе с точки зрения климатических изменений), снижение стоимости производства энергии, максимизация полезного экономического и социального эффекта) послужило одной из основных причин все более широкого применения для решения таких задач непараметрического метода исследования операций – анализа среды функционирования (Data Envelopment Analysis, DEA).

Среди многочисленных подходов к моделированию энергетических и экологических проблем в зарубежной литературе анализ среды функционирования (АСФ) завоевал лидирующие позиции. Одна из причин – возможность проведения *сравнительного* моделирования эффективности функционирования различных секторов энергетики в разных странах, что стало

особенно актуально в связи с либерализацией энергетических рынков [25].

В настоящее время АСФ представляет собой развитую методологию оценки сравнительной эффективности функционирования множества однородных экономических, производственных или иных объектов с помощью различных моделей математического программирования. Объекты, эффективность которых оценивается в АСФ, обычно называются производственными единицами (ПЕ) или производственными объектами (ПО) и выполняют одну и ту же производственную функцию, преобразуя множество некоторых входов во множество некоторых выходов. Преимуществом АСФ является возможность работы с ПО в отсутствие каких-либо предположений о виде функциональной зависимости между входами и выходами. В российских работах АСФ применяется, в основном, для оценки эффективности деятельности бюджетной системы, региональных властей, банковских структур и т.д. [1–2], однако в последние годы появились работы по использованию АСФ в задачах оценки экологических аспектов деятельности хозяйствующих субъектов, в том числе объектов электроэнергетики [7].

В классической модели анализа среды функционирования, обозначаемой ССР (по первым буквам имен разработчиков – Charnes A., Cooper W.W., Rhodes E. [10]) для каждого производственного объекта решается дробно-линейная задача математического программирования, где максимизируется отношение линейной комбинации взвешенных выходов к линейной комбинации взвешенных входов:

$$(1) \max_{u,v} h = \frac{\sum_i u_i y_{ij}}{\sum_k v_k x_{kj}}.$$

Данное отношение называется коэффициентом эффективности, его значения лежат в интервале от нуля до единицы. ПО, для которых коэффициент эффективности равен единице, признаются эффективными, а остальные – неэффективными. Если коэффициент эффективности задан в виде (1), то сама задача называется ориентированной по входам (input-oriented). Возможна и другая форма задания коэффициента эффективности:

как отношение линейной комбинации взвешенных входов к линейной комбинации взвешенных выходов. В этом случае задача будет называться ориентированной по выходам.

Расчет проекций неэффективных ПО в пространстве входов/выходов на границу эффективности позволяет определить целевые ориентиры по сокращению входов/увеличению выходов, достижение которых позволяет стать ПО эффективным.

Особенностью использования моделей АСФ для решения задач оптимизации энергетических систем является наличие так называемых нежелательных выходов, к которым относятся выбросы. Поэтому для решения экологических задач был разработан специальный класс моделей анализа среды функционирования, называемый моделями экологического АСФ (environmental DEA).

Целью настоящей работы является обзор методов и подходов, используемых для учета нежелательных выходов в моделях экологического АСФ, и разработка алгоритма применения базовой, ориентированной по входам модели анализа среды функционирования для проведения сравнительного анализа экологической эффективности крупных электрогенерирующих компаний России. Возможности разработанного двухэтапного алгоритма апробированы на данных по 24 производственным объектам на первом этапе и на детализированных данных 11 энергетических объектов, входящих в состав ОГК-2, на втором этапе.

## ***2. Модели анализа среды функционирования, используемые для решения задач оптимизации энергетической системы по экологическим критериям***

В коэффициентной форме классическая модель АСФ (ориентированная по входам ССR-модель) записывается следующим образом:

$$(2) \max_{u,v} \sum_{m=1}^M u_m y_{m0}$$

при ограничениях

$$\sum_{m=1}^M u_m y_{mk} - \sum_{n=1}^N v_n x_{nk} \leq 0 \quad k = 1, 2, \dots, K,$$

$$\sum_{n=1}^N v_n x_{n0} = 1,$$

$$u_m, v_n \geq 0 \quad m = 1, 2, \dots, M \quad n = 1, 2, \dots, N;$$

где 0 – индекс ПО, для которого решается задача оптимизации;  $X$  – вектор входов размерности  $N$ ;  $Y$  – вектор выходов размерности  $M$ ;  $K$  – количество производственных объектов.

Или в двойственной форме:

$$(3) \quad \min_{\lambda} \theta$$

при ограничениях

$$\sum_{n=1}^N x_{nk} \lambda_k \leq \theta x_{n0}, \quad n = 1, 2, \dots, N,$$

$$\sum_{m=1}^M y_{mk} \lambda_k \geq y_{m0}, \quad m = 1, 2, \dots, M,$$

$$\lambda_k \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots, K.$$

В данной модели ищется возможность пропорционального сокращения входов без сокращения выходов. Множеством производственных возможностей модели CCR называется множество следующих наборов векторов  $(X, Y)$ :

$$(4) \quad T = \left\{ (X, Y) \left| \sum_{j=1}^n X_j \lambda_j \leq X, \quad \sum_{j=1}^n Y_j \lambda_j \geq Y, \quad \lambda_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n \right. \right\}.$$

В классических моделях АСФ, включая базовую модель CCR, входы и выходы предполагаются строго монотонными, т.е. множество производственных возможностей удовлетворяет следующему постулату:

$$(5) \quad \text{если } (X; Y) \in T \text{ и } X' \geq X \text{ или } Y' \leq Y, \\ \text{то } (X'; Y) \in T \text{ или } (X; Y') \in T.$$

Однако это свойство не всегда описывает реальную ситуацию производственного процесса. Например, генерация энергии электростанцией на углеводородном топливе всегда неизбежно связана с производством такого нежелательного выхода как

диоксид серы, и сокращение выхода без сокращения входа технологически невозможно. Поэтому использование множества производственных возможностей, удовлетворяющих постулату (5), приводит к некорректным результатам моделирования.

Обзор литературы позволяет сделать вывод о том, что к настоящему времени предпринято большое количество попыток учета нежелательных выходов в моделях АСФ, которые сформировались в два основных подхода: а) пересчет (модификация) исходных данных и использование традиционных моделей АСФ [20]; б) использование оригинальных исходных данных и моделей, основанных на концепции слабой монотонности [12–14].

При использовании первого подхода общую эффективность деятельности компании можно разделить на техническую (или экономическую), определяемую как отношение взвешенной суммы желательных выходов к взвешенной сумме входов, и экологическую, представляющую собой отношение взвешенных сумм желательных и нежелательных выходов.

Пусть из  $M$  выходов модели (2) первые  $k$  являются желательными, а остальные – нежелательными. Тогда экономическая мера эффективности ПО с индексом «0» может быть представлена в следующем виде:

$$(6) \quad h_{economy} = \frac{\sum_{r=1}^k \mu_r y_{r0}}{\sum_{i=1}^M v_i x_{i0}},$$

а экологическая как

$$(7) \quad h_{ecology} = \frac{\sum_{r=1}^k \mu_r y_{r0}}{\sum_{s=k+1}^p \mu_s y_{s0}}.$$

Для того чтобы учесть обе меры эффективности в одной базовой модели ССР, необходимо сконструировать их некую комбинацию, отвечающую общей логике решения задачи – максимизации желательных входов и минимизации нежелательных выходов и входов. Следующий вариант



комбинированной меры эффективности вполне отвечает требуемым условиям (вариант А):

$$h_A = \frac{\sum_{r=1}^k \mu_r y_{r0} - \sum_{s=k+1}^p \mu_s y_{s0}}{\sum_{i=1}^M v_i x_{i0}}.$$

Кроме того, нежелательные выходы можно рассматривать наравне с входами модели, тогда мера эффективности примет следующий вид (вариант В):

$$h_B = \frac{\sum_{r=1}^k \mu_r y_{r0}}{\sum_{i=1}^M v_i x_{i0} + \sum_{s=k+1}^p \mu_s y_{s0}}.$$

В данном случае сокращение нежелательных выходов модели происходит одновременно с сокращением входов.

В работе [17] приводится доказательство того, что базовые модели ССР с мерой эффективности, сконструированной по варианту А, являются аналогичными моделям с мерой эффективности по варианту В.

Множество производственных возможностей, удовлетворяющее свойству слабой монотонности, определяется следующим образом:

$$(8) \quad T_e = \left\{ (X, Y, U) \mid \begin{array}{l} \sum_{k=1}^K z_k x_{nk} \leq x_n \quad n = 1, 2, \dots, N, \\ \sum_{k=1}^K z_k y_{mk} \geq y_m \quad m = 1, 2, \dots, M, \\ \sum_{k=1}^K z_k u_{jk} = u_j \quad j = 1, 2, \dots, J, \\ z_k \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots, K; \end{array} \right\},$$

где  $U$  – вектор нежелательных выходов,  $e$  – индекс, обозначающий environmental (экологический), так как множества производственных возможностей такого вида используются в специальном направлении АСФ, называемом экологический АСФ.

Кроме того,  $T_e$  также удовлетворяет следующему свойству:

(9) если  $(X, Y, U) \in T$  и  $U = 0$ , то  $Y = 0$ .

Это означает, что полное элиминирование нежелательных выходов возможно только при прекращении производственного

процесса. Аналогичный подход может быть применен и для описания нежелательных входов. Модели со слабой монотонностью входов представлены в работах [13, 19].

Помимо свойства монотонности, операционные характеристики входов и выходов (шкалы, в которых измерены величины, представляющие входы и выходы) также могут быть отличительным признаком моделей экологического АСФ. В литературе часто упоминаются две модели [8–9], в которых входные и выходные переменные являются категориальными. Такие модели хорошо описывают производственные процессы в условиях введения определенного экологического законодательства, а также позволяют учесть влияние других внешних факторов, не подвластных контролю на самих производственных объектах.

Отдача от масштаба также является важным признаком множества производственных возможностей моделей АСФ. Базовая модель ССР является моделью с постоянной отдачей от масштаба. Если к свойствам множества  $T$  добавить условие

$$\sum_{i=1}^K \lambda_i = 1,$$

получим модель ВСС с переменной отдачей от масштаба (при увеличении масштабов производства эффект масштаба меняется от возрастания до убывания). Также весьма популярной в литературе является модель с невозрастающей отдачей от масштаба, которая характеризуется условием

$$\sum_{i=1}^K \lambda_i \leq 1.$$

Модели с переменной и невозрастающей отдачей от масштаба также могут быть не только строго монотонными, но и слабо монотонными.

Помимо ориентации меры эффективности (на входы, на выходы, на нежелательные выходы), важным свойством задач экологического АСФ является также способ сокращения входов (увеличения выходов), т.е. направление движения к границе эффективности.

Радиальная мера эффективности (или радиальный способ продвижения к границе эффективности) наиболее часто используется во всех моделях АСФ. В данном случае входы сокраща-

ются пропорционально на одно и то же число  $OC'/OC$  (движение по радиусу от исходной точки до границы эффективности) (рис. 1).

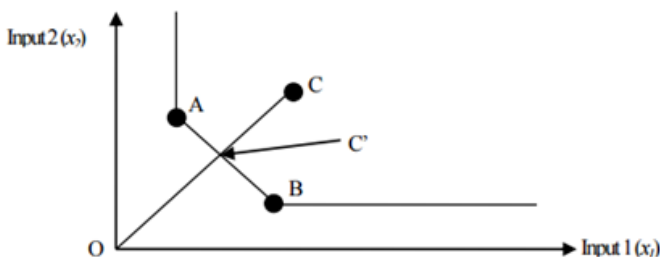


Рис. 1. Графическая иллюстрация радиальной меры эффективности в базовой модели CCR (двумерный случай)

Комбинируя радиальную меру эффективности с разными типами множества производственных возможностей, получим разные модели АСФ, в том числе и базовые CCR и ВСС. Так, в работах [12, 22–23] использовано множество производственных возможностей  $T_e$  и радиальная мера эффективности:

$$\min \theta : (X_0, Y_0, \theta U_0) \in T_e.$$

Не-радиальные меры эффективности позволяют сокращать входы/увеличивать выходы непропорционально и имеют обычно лучшую разрешающую способность, нежели радиальные меры. В литературе хорошо известна не-радиальная мера Рассела

$$\min \left\{ \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \theta_n : (X_0 \theta, Y_0) \in T \right\},$$

где  $\theta$  – диагональная матрица, содержащая  $\theta_1, \dots, \theta_n$ .

В том случае, если  $\theta_1, \dots, \theta_n$  имеют разные веса, говорят об использовании взвешенной не-радиальной меры эффективности, которая отражает предпочтения лица, принимающего решения [24].

Гиперболическая мера эффективности, также называемая графической мерой, сокращает выходы и увеличивает входы одновременно на одну и ту же величину (движение к границе эффективности по гиперболе):

$$\left\{ \theta : (\theta X_0, Y_0 / \theta) \in T \right\}.$$

Эта мера считается наиболее удачной в том случае, когда имеются желательные и нежелательные выходы.

Направленная функция расстояния (Directional Distance Function, DDF) представляет собой меру эффективности, которая позволяет одновременно увеличивать желательные выходы и сокращать входы или нежелательные выходы при помощи вектора заданного направления. Она является обобщением традиционной радиальной меры эффективности [11].

### **3. Анализ сравнительной эффективности генерирующих компаний России по экологическим показателям**

Рассмотрим задачу оценки эффективности деятельности генерирующих компаний Российской Федерации по набору экологических параметров. Для расчета экологической эффективности (7) по базовой модели CCR, ориентированной по входам, с радиальной мерой эффективности используем последние доступные статистические данные [6] об экологических аспектах деятельности основных игроков на оптовом рынке электроэнергии и мощности – пяти генерирующих компаний оптового рынка электроэнергии (ОГК), которые объединяют крупнейшие тепловые электростанции России и нескольких территориальных генерирующих компаний (ТГК), которые объединяют электростанции нескольких соседних регионов, не вошедшие в ОГК и работающие в составе изолированных энергосистем (всего 24 объекта).

В качестве нежелательных выходов модели рассматриваются выбросы в атмосферу (тыс. т), объемы образования твердых отходов (тыс. т) и объемы потребления свежей воды для производственных и бытовых нужд компании (млн м<sup>3</sup>). В качестве желательных выходов рассматривается объем выработки электрической энергии.

Результаты расчетов, выполненных с помощью пакета прикладных программ MaxDEA, с использованием радиальной и не-радиальной мер эффективности представлены в таблице 1.

Таблица 1. Коэффициенты экологической эффективности деятельности генерирующих компаний в 2011 гг.

Название компании	Эффективность по радиальной мере	Эффективность по не-радиальной мере
ОГК-1	0,374	0,190
ОГК-2	0,168	0,115
ОГК-3	0,142	0,101
ОГК-4 ОАО «Э.ОН Россия»	0,611	0,543
ОГК-5 «Энел ОГК-5»	0,132	0,093
ТГК-1	0,300	0,265
ТГК-2	0,112	0,111
ОАО «Мосэнерго» (ТГК-3)	<b>1,000</b>	<b>1,000</b>
ТГК-4 ОАО «Квадра»	0,558	0,477
ТГК-5	0,428	0,402
ТГК-6	0,591	0,412
ОАО «Волжская ТГК» (ТГК-7)	<b>1,000</b>	<b>1,000</b>
ТГК-9	0,122	0,096
ОАО «Фортум» (ТГК-10)	0,366	0,299
ТГК-11	0,532	0,206
ОАО «Кузбассэнерго» (ТГК-12)	0,115	0,081
ОАО «Енисейская ТГК» (ТГК-13)	0,089	0,075
ТГК-14	0,717	0,457
Генерирующие компании «Лукойл»	<b>1,000</b>	<b>1,000</b>
ОАО «Дальневосточная ГК»	0,177	0,091
ОАО «Иркутскэнерго»	0,528	0,284
ОАО «Татэнерго»	<b>1,000</b>	<b>1,000</b>
ОАО «Башкирэнерго»	0,678	0,616
ОАО «СИБЭКО»	0,136	0,101

Интерпретация коэффициента эффективности ПО в данном случае следующая: он показывает отношение минимально возможных негативных экологических эффектов к реальным. Эффективными в данном случае являются те производственные объекты, которые используют наилучшие доступные технологии и наиболее чистое топливо с экологической точки зрения. Коэффициент эффективности таких ПО равен единице (выделены жирным шрифтом). Нетрудно заметить, что коэффициент эффективности неэффективных ПО, вычисленный радиальным способом, больше по значению, нежели коэффициент эффективности, вычисленные не-радиальным способом.

Целевые значения входных параметров (по 2011 году), которые необходимо достичь (по радиальному способу движения к границе эффективности) неэффективным компаниям для того, чтобы стать эффективными, приведены в таблице 2.

Таблица 2. Значения целевых параметров по входам, достижение которых необходимо для в 2011 году

Название компании	Целевые параметры		
	выбросы	отходы	потребление воды
ОГК-1	34,256	84,108	332,035
ОГК-2	63,444	155,770	614,933
ОГК-3	26,513	65,097	256,985
ОГК-4 ОАО «Э.ОН Россия»	55,864	147,106	412,725
ОГК-5 «Энел ОГК-5»	43,741	121,476	241,682
ТГК-1	16,385	29,442	158,045
ТГК-2	9,305	26,654	40,894
ТГК-4 ОАО «Квадра»	11,685	19,870	112,633
ТГК-5	10,929	31,453	46,131
ТГК-6	15,532	18,012	270,476
ТГК-9	14,927	42,799	65,070
ОАО «Фортум» (ТГК-10)	18,787	51,954	106,641
ТГК-11	9,231	26,567	38,964
ОАО «Кузбассэнерго»	19,991	52,513	149,342
ОАО «Енисейская ТГК»	11,266	31,170	63,775
ТГК-14	26,226	75,477	110,700

Название компании	Целевые параметры		
	выбросы	отходы	потребление воды
ОАО «Дальневосточная ГК»	23,341	67,172	98,520
ОАО «Иркутскэнерго»	63,063	181,488	266,183
ОАО «Башкирэнерго»	20,362	53,769	148,491
ОАО «СИБЭКО»	11,243	31,417	59,607

При достижении целевых ориентиров, представленных в таблице 2, каждая из анализируемых компаний может вплотную приблизиться в многомерном пространстве входов и выходов к своей эталонной точке, находящейся на границе эффективности.

Расчет целевых показателей, проведенный по не-радиальной мере эффективности, показал, что их значения меняются только для тех компаний, для которых существует не единственная эталонная точка (таблица 3).

*Таблица 3. Изменения целевых параметров в зависимости от способа продвижения к границе эффективности*

Название компании	Эталонные точки	$\Delta_{\text{выб}}$	$\Delta_{\text{отходы}}$	$\Delta_{\text{вода}}$
ОГК-4	«Мосэнерго»; «Татэнерго»	5,93	24,50	-71,27
ОГК-5	«Мосэнерго»; «Татэнерго»	-3,51	-14,52	42,22
ТГК-1	«Мосэнерго»; «Волжская ТГК»	3,39	-2,45	32,13
ТГК-2	«Мосэнерго»; «Татэнерго»	-0,10	-0,41	1,20
ТГК-4	«Мосэнерго»; «Волжская ТГК»	2,77	-2,01	26,27
ТГК-6	«Мосэнерго»; ГК Лукойл	6,25	-4,77	180,53
ТГК-9	«Мосэнерго»; «Татэнерго»	-0,13	-0,52	1,53
ТГК-10	«Мосэнерго»; «Татэнерго»	-1,68	-6,96	20,24
ТГК-12	«Мосэнерго»; «Татэнерго»	-4,00	-16,53	48,08

Название компании	Эталонные точки	$\Delta_{\text{выб}}$	$\Delta_{\text{отходы}}$	$\Delta_{\text{вода}}$
ТГК-13	«Мосэнерго»; «Татэнерго»	-0,99	-4,13	12,01
ОАО «Башкирэнерго»	«Мосэнерго»; «Татэнерго»	2,25	9,30	-27,05
ОАО «СИБЭКО»	«Мосэнерго»; «Татэнерго»	-0,75	-3,09	8,99

При продвижении к границе эффективности по не-радиальному пути некоторые целевые параметры могут увеличить свое значение по сравнению с радиальным способом (в этом случае в таблице разница указана со знаком «минус»), а некоторые – уменьшить (разница со знаком «плюс»). Какой из данных способов достижения эффективности лучше, зависит от затрат компании, которые необходимо произвести для достижения намеченных целевых показателей.

#### **4. Динамика экологической эффективности генерирующих компаний**

Рассмотрим вопрос о том, как меняется экологическая эффективность генерирующих компаний во времени. В таблице 4 приведены результаты расчетов коэффициентов эффективности генерирующих компаний за период 2009–2011 гг. по модели ССР, ориентированной по входам, с использованием радиальной меры эффективности.

*Таблица 4. Коэффициенты эффективности деятельности генерирующих компаний (по экологическим показателям) в 2009–2011 гг.*

Название компании	2009	2010	2011
ОГК-1	0,374	0,387	0,374
ОГК-2	0,173	0,165	0,168
ОГК-3	0,171	0,158	0,142
ОГК-4 ОАО «Э.ОН Россия»	0,624	0,577	0,611
ОГК-5 «Энел ОГК-5»	0,147	0,126	0,132
ТГК-1	0,534	0,378	0,300



Название компании	2009	2010	2011
ТГК-2	0,130	0,115	0,112
ОАО «Мосэнерго» (ТГК-3)	<b>1,000</b>	0,993	<b>1,000</b>
ТГК-4 ОАО «Квадра»	0,588	0,400	0,558
ТГК-5	0,505	0,464	0,428
ТГК-6	0,338	0,366	0,591
ОАО «Волжская ТГК» (ТГК-7)	0,731	0,627	<b>1,000</b>
ТГК-9	0,136	0,118	0,122
ОАО «Фортум» (ТГК-10)	0,438	0,308	0,366
ТГК-11	0,667	0,714	0,532
ОАО «Кузбассэнерго» (ТГК-12)	0,123	0,107	0,115
ОАО «Енисейская ТГК» (ТГК-13)	0,097	0,078	0,089
ТГК-14	0,099	0,079	0,717
Генерирующие компании Лукойл (до 2010 года ООО «ЮГК ТГК-8»)	<b>1,000</b>	<b>1,000</b>	<b>1,000</b>
ОАО «Дальневосточная ГК»	0,208	0,189	0,177
ОАО «Иркутскэнерго»	0,719	0,597	0,528
ОАО «Татэнерго»	<b>1,000</b>	<b>1,000</b>	<b>1,000</b>
ОАО «Башкирэнерго»	0,527	0,510	0,678
ОАО «СИБЭКО»	0,142	0,126	0,136

В 2009 и 2010 годах из всех анализируемых объектов только 3 компании – ОАО «Мосэнерго», Генерирующие компании группы «Лукойл» и ОАО «Татнефть» – были экологически эффективными. В 2011 году еще одна компания – ОАО «Волжская ТГК» стала эффективной. Однако судить о реальном изменении экологической эффективности только по значениям коэффициентов эффективности некорректно, в силу того, что от года к году может смещаться сама граница эффективности.

Для оценки изменения эффективности ПО во времени в задачах АСФ используется индекс производительности Малмквиста (Malmquist productivity index, MPI), который является непараметрическим методом анализа временных рядов [17]. В общем виде MPI определяется на основе функции расстояния, однако может также быть представлен как отношение мер эффективности.

Пусть  $\theta^t(X_0^t, Y_0^t)$  и  $\theta^{t+1}(X_0^t, Y_0^t)$  – ориентированные по входам меры эффективности ПО<sub>0</sub>, рассчитанные по входам и выходам из решения задачи (3) в момент времени  $t$  на множестве производственных возможностей  $T$  в моменты времени  $t$  и  $t + 1$ . Пусть  $\theta^t(X_0^{t+1}, Y_0^{t+1})$  и  $\theta^{t+1}(X_0^{t+1}, Y_0^{t+1})$  – ориентированные по входам меры эффективности ПО<sub>0</sub>, рассчитанные по входам и выходам из решения задачи (3) в момент времени  $t + 1$  на множестве производственных возможностей в моменты времени  $t$  и  $t + 1$ . Тогда ориентированный по выходам индекс производительности Малмквиста может быть представлен как

$$(9) \quad MPI_0 = \left[ \frac{\theta^t(X_0^{t+1}, Y_0^{t+1})}{\theta^t(X_0^t, Y_0^t)} \cdot \frac{\theta^{t+1}(X_0^{t+1}, Y_0^{t+1})}{\theta^{t+1}(X_0^t, Y_0^t)} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Значения  $MPI_0 < 1$ ,  $MPI_0 = 1$  и  $MPI_0 > 1$  говорят соответственно о снижении, постоянстве или увеличении эффективности ПО<sub>0</sub> в течение исследуемого периода [17].

Кроме того, в литературе часто используют следующую форму представления индекса Малмквиста:

$$(10) \quad MPI_0 = \left[ \frac{\theta^t(X_0^t, Y_0^t)}{\theta^{t+1}(X_0^t, Y_0^t)} \cdot \frac{\theta^t(X_0^{t+1}, Y_0^{t+1})}{\theta^{t+1}(X_0^{t+1}, Y_0^{t+1})} \right]^{\frac{1}{2}} \times \frac{\theta^{t+1}(X_0^{t+1}, Y_0^{t+1})}{\theta^t(X_0^t, Y_0^t)}.$$

В форме (10) изменение производительности (эффективности) представлено в декомпозированном виде, где первая часть представляет собой эффекта сдвига границы эффективности (Frontier Shift Effect), а вторая – эффект роста относительной эффективности (Catch-up Effect).

Результаты расчетов индексов Малмквиста приведены в таблице 5.

Таблица 5. Значения индекса Малмквиста (ориентированного по выходу) в период 2009-2010 и 2010-2011

Название компании	MPI 2009–2010	MPI 2010–2011
ОГК-1	0,9522	0,9426
ОГК-2	0,8574	0,9784
ОГК-3	0,9522	0,9426
ОГК-4 ОАО «Э.ОН Россия»	0,6700	<b>1,0242</b>

Название компании	MPI 2009–2010	MPI 2010–2011
ОГК-5 «Энел ОГК-5»	0,8805	<b>1,0170</b>
ТГК-1	0,5365	0,6175
ТГК-2	0,8805	0,9484
ОАО «Мосэнерго» (ТГК-3)	0,9723	0,9865
ТГК-4 ОАО «Квадра»	0,6705	<b>1,3079</b>
ТГК-5	0,8805	0,9200
ТГК-6	0,8469	<b>1,2539</b>
ОАО «Волжская ТГК» (ТГК-7)	0,7708	<b>1,2641</b>
ТГК-9	0,8805	0,9520
ОАО «Фортум» (ТГК-10)	0,8891	<b>1,1160</b>
ТГК-11	0,8805	0,9200
ОАО «Кузбассэнерго» (ТГК-12)	0,8556	<b>1,0659</b>
ОАО «Енисейская ТГК» (ТГК-13)	0,8157	<b>1,1212</b>
ТГК-14	0,8805	<b>1,2143</b>
Генерирующие компании Лукойл	<b>1,0171</b>	<b>1,0569</b>
ОАО «Дальневосточная ГК»	0,8805	0,9200
ОАО «Иркутскэнерго»	0,8805	0,9200
ОАО «Татэнерго»	0,9383	1,0000
ОАО «Башкирэнерго»	0,7630	<b>1,3424</b>
ОАО «СИБЭКО»	0,8550	<b>1,0862</b>

Таким образом, реальная экологическая эффективность увеличилась в период 2009–2010 гг. только у генерирующих компаний группы «Лукойл», в то время как у остальных компаний она снизилась. В период 2010–2011 гг. уже 12 компаний увеличили свою экологическую эффективность (значение индекса Малкмвиста выделены жирным шрифтом).

### **5. Формирование оптимальной стратегии экологического менеджмента генерирующей компании**

До настоящего момента все выполненные нами расчеты касались только экологической эффективности изучаемых ПО, в то время как экономические параметры их деятельности не

рассматривались. Включение в рассмотрение экономических параметров возможно благодаря способам, подробно описанным в п. 2. Однако, по нашему мнению, для решения задачи формирования оптимальной стратегии инвестиций генерирующих компаний, направленных на природоохранную деятельность, возможно использование более простого подхода, а именно решение задачи в два этапа.

На первом этапе решается задача оценки экологической эффективности деятельности компании и расчета целевых значений по основным экологическим показателям в случае, если компания оказалась неэффективной. На втором этапе для каждого неэффективного производственного объекта строится еще одна модель АСФ, в которой входами являются экономические параметры проектов (стоимость, срок реализации и др.) по сокращению негативных экологических эффектов до уровня, рассчитанного в качестве целевого ориентира (или близкого к нему) на предыдущем этапе. Решение данной модели помогает выбрать проекты, наиболее эффективные с точки зрения инвестиционных вложений и достижения позитивных экологических результатов.

Последовательно детализируя данные по электростанциям, входящих в ведение каждой ОГК и ТГК, получим решение задачи об оптимизации развития энергетической системы в целом.

Рассмотрим задачу оценки эффективности деятельности отдельных производственных объектов (электростанций) в составе оптовой генерирующей компании ОГК-2 (признана неэффективной по данным 2011 года). Результаты расчета модели ССР по входным параметрам, выполненные в пакете прикладных программ MaxDEA (радиальный способ движения к границе эффективности) на данных 2013 года (официальный отчет о деятельности компании в 2013 году, <http://www.ogk2.ru/>) приведены в таблице 6.

Из результатов расчетов, представленных в таблице 2, можно сделать вывод о том, что эффективными по экологическим показателям деятельности являются три электростанции компании ОГК-2 – Адлерская ТЭС, Киришская ГРЭС и Сургутская ГРЭС-1. На всех этих электростанциях в

качестве основного топлива используется газ, однако Псковская и Ставропольская ГРЭС также работают на газе и, тем не менее, не являются эффективными объектами, поэтому вид топлива не является единственным объясняющим фактором экологической эффективности или неэффективности.

Таблица 6. Результаты расчета экологической эффективности деятельности электростанции компании ОГК-2 по экологическим показателям (по модели ССР)

Электростанция	Коэфф. эф-ти	Целевые показатели по входам		
		Выбросы, тыс. т	Отходы, тыс. т	Вода, млн м <sup>3</sup>
Адлерская ТЭС	1	743,25	3,09	642,33
Киришская ГРЭС	1	2415,57	3,40	574645,2
Красноярская ГРЭС-2	0,066	1572,01	1,26	34978,45
Новочеркасская ГРЭС	0,057	3262,63	2,57	52722,81
Псковская ГРЭС	0,876	488,38	0,69	116182,1
Рязанская ГРЭС	0,422	3507,38	14,60	3031,13
Серовская ГРЭС	0,039	645,04	0,49	3281,98
Ставропольская ГРЭС	0,744	2489,71	3,51	592281,4
Сургутская ГРЭС-1	1	7432,52	5,57	21622,2
Троицкая ГРЭС	0,237	1818,42	7,57	1571,507
Череповецкая ГРЭС	0,041	932,33	0,72	11876,88

Содержательно наиболее «близким» статистическим показателем, используемым в практике энергоменеджмента генерирующих компании, к рассчитанному коэффициенту эффективности является показатель удельного расхода условного топлива на отпуск электроэнергии, который характеризует экономичность различных генерирующих установок (коэффициент линейной корреляции Пирсона, рассчитанный по данным электростанций, входящих в состав ОГК-2, равен  $-0,81$ ).

Улучшение экологических показателей деятельности компаний возможно благодаря реализации следующих проектов, не связанных со сменой топлива или технологией генерации энергии [3–4, 5–6]:

1) по уменьшению выбросов в атмосферу: внедрение малотоксичных горелок при сжигании высококонцентрированной пыли для снижения окислов азота, установка (или ремонт) аспирационных установок, электрофильтров, золоулавливателей;

2) по снижению потребления воды и сбора сточных вод: очистка и отведение минерализованных сточных вод, установка (или ремонт) очистных сооружений производственных и поверхностных стоков, введение в эксплуатацию нефтесборщиков;

3) по снижению объемов образования отходов: утилизация (переработка и использование) золошлаков, разработка технологий, повышающих надежность хранения золошлаков;

4) по общему повышению экологической эффективности: внедрение систем экологического менеджмента по ИСО 14001 (в настоящее время внедрена на Ставропольской, Псковской, Сургутской, Серовской и Троицкой ГРЭС), снижение удельных расходов условного топлива на отпуск электроэнергии.

Кроме того, необходимо также рассматривать существующие технико-технологические возможности по замене топлива на более экологически чистое и переход на принципиально иные технологии генерации энергии (инновационные варианты развития). Наименее затратный вариант на настоящий момент предусматривает использование природного газа для выработки электроэнергии, к наиболее затратным российские специалисты относят промышленное освоение технологий ветровой энергетики и фотовольтаики [6]. В пределах средних затрат находятся атомная энергетика и технология «чистого угля», минимизирующая выбросы загрязняющих веществ в атмосферу.

Стоимостные и временные показатели каждого из вышеперечисленных проектов (а также некоторые показатели социальной эффективности) могут быть использованы как входные параметры для ССР модели АСФ следующего уровня, решение которой позволяет оптимизировать экономические (и

социальные) параметры инвестиционных проектов, направленных на снижение негативного воздействия на окружающую среду каждой из неэффективных электростанций. Выходами модели в данном случае являются целевые показатели экологических эффектов, рассчитанные на предыдущем этапе. Обобщенный алгоритм построения модели представлен на рис. 2

Расчет иллюстративного примера в данном случае не представляется возможным в силу отсутствия в открытом доступе необходимых статистических данных об экономических показателях инвестиционных проектов, направленных на снижение негативного воздействия на окружающую среду.

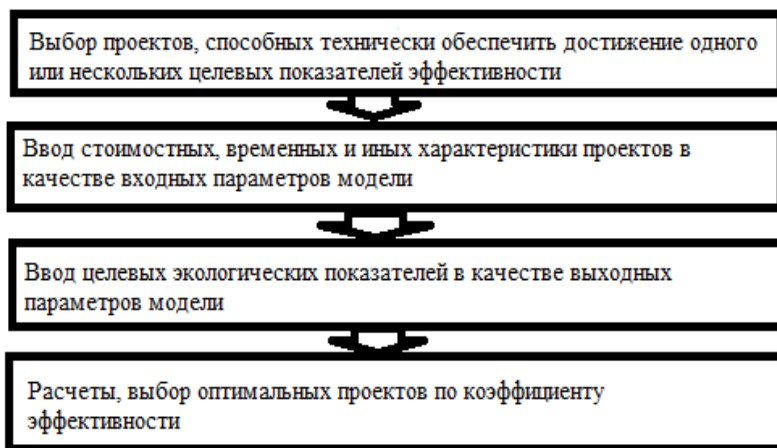


Рис. 2. Алгоритм построение модели АСФ второго уровня

## 6. Заключение

Основным результатом настоящего исследования является доказательство возможности использования базовой модели анализа среды функционирования (модели ССР, ориентированной по входам) для решения задачи выбора оптимальной стратегии экологического менеджмента генерирующей компании.

Следует заметить, что каждая из рассмотренных крупных генерирующих компаний состоит из нескольких производственных единиц – электростанций, работающих на разном оборудовании и по разным технологиям генерации электроэнергии. Поэтому используемые для расчетов статистические данные являются усредненными, а полученные результаты расчета экологической эффективности не отражают полной картины, по которой можно было бы судить о качестве экологического менеджмента на исследуемых предприятиях. Тем не менее, полученные результаты могут быть использованы при оценке степени выполнения и степени целесообразности инвестиционных программ генерирующих компаний с точки зрения экологических проблем, разработке государственных программ поддержки модернизационных процессов в электроэнергетике, экологических стандартов и программ по энергосбережению.

Разработанный метод включает последовательное решение нескольких моделей АСФ: на первом этапе определяются эффективные и неэффективные с точки зрения экологии энергетические объекты, для неэффективных объектов рассчитываются целевые параметры снижения негативных экологических эффектов. На втором этапе по каждому неэффективному энергетическому объекту решается своя задача оптимизации (используется модель CRR, ориентированная по входу), в которой в качестве входов рассматриваются экономические и социальные характеристики проектов, направленных на снижение негативных экологических эффектов, а в качестве выходов указываются рассчитанные на первом этапе значения целевых показателей негативных экологических эффектов.

Помимо радиального способа продвижения к границе эффективности при расчете целевых показателей, для каждого из изучаемых ПО возможно также использование иных способов продвижения к границе, в частности не-радиального. Выбор способа продвижения к границе в данном случае определяется стоимостными характеристиками проектов, направленных на достижение целевых экологических показателей и может быть однозначно определен только на этапе решения задачи АСФ второго уровня (определении экономической эффективности). Кроме стоимостных характеристик выбор способа продвижения



к границе эффективности может быть также определен из соотношений важности того или иного экологического эффекта для конкретного региона или территории.

Наряду с исследованиями сравнительной эффективности ПО в один и тот же момент времени, в эколого-ориентированных исследованиях часто возникает необходимость оценки изменения эффективности ПО во времени. Для этих целей используется индекс производительности Малмквиста (Malmquist productivity index, MPI), который является непараметрическим методом анализа временных рядов, позволяющим исследовать изменение сравнительной эффективности ПО во времени с помощью решения задач АСФ.

### **Литература**

1. ПИСКУНОВ А.А., ИВАНЮК И.И., ДАНИЛИНА Е.П. и др. *Система рейтингования регионов с использованием методологии АСФ* // Вестник АКСОР. – 2008. – №4. – С. 24–30.
2. ПИСКУНОВ А.А., ИВАНЮК И.И., ЛЫЧЕВ А.В. и др. *Использование методологии АСФ для оценки эффективности расходования бюджетных средств на государственное управление в субъектах Российской Федерации* // Вестник АКСОР. – 2009. – №2. – С. 28–36.
3. РАТНЕР С.В., АЛМАСТЯН Н.А. *Экологический менеджмент в Российской Федерации: проблемы и перспективы развития* // Национальные интересы: приоритеты и безопасность. – 2014. – №17. – С. 37–45.
4. РАТНЕР С.В., АЛМАСТЯН Н.А. *Рыночные и административные методы регулирования негативным воздействием объектов электроэнергетики на окружающую среду* // Экономический анализ: теория и практика. – 2015. – №16. – С. 2–15.
5. ФАДЕЕВА А.В. *Противоречия в эколого-экономической системе современного российского общества как фактор активизации инвестиций в человеческий капитал* // Экономические науки. – 2007. – №2(27). – С. 203–204.

6. *Функционирование и развитие электроэнергетики в 2011 году*. – Информационно-аналитический доклад. – Минэнерго РФ, 2012. – 383 с.
7. ХРУСТАЛЕВ Е.Ю., ПАТНЕР П.Д. *Анализ экологической эффективности электроэнергетических компаний России на основе методологии анализа среды функционирования // Экономический анализ: теория и практика*. – 2015. – №35. – С. 33–42.
8. BANKER R.D., MOREY R.C. *The use of categorical variables in data envelopment analysis // Management Science*. – 1986. – No. 32. – P. 1613–1627.
9. BANKER R.D., MOREY R.C. *Efficiency analysis for exogenously fixed inputs and outputs // Operations Research*. – 1986. – No. 34. – P. 513–521.
10. COOPER W.W., SEIFORD L.M., TONE T. *Introduction to Data Envelopment Analysis and Its Uses: With DEA-Solver Software and References*. – Springer, New York. 2006. – 388 p.
11. CHUNG Y.H., FARE R., GROSSKOPF S. *Productivity and undesirable outputs: A directional distance function approach // Journal of Environmental Management*. – 1997. – No. 51. – P. 229–240.
12. FARE R., GROSSKOPF S., PASURKA JR. etc. *Accounting for air pollution emissions in measures of state manufacturing productivity growth // Journal of Regional Science*. – 2001. – No. 41. – P. 381–409.
13. FARE R., GROSSKOPF S., LOVELL C.A.K. *Production frontiers*. – Cambridge University Press, Cambridge, 1994 – 312 p.
14. FARE R., GROSSKOPF S., HERNANDEZ-SANCHO F. *Environmental performance: An index number approach // Resource and Energy Economics*. – 2004. – No. 26. – P. 343–352.
15. *Global Wind 2006 Report*. – GWEC, Brussels, Belgium, 2007. – 60 p.
16. HAN L. *The brief and wondrous life of solar energy development // The New Presence*, April, 2015. – [Электронный ресурс] – URL: <http://www.pritomnost.cz/en/economics> (дата обращения: 18.03.2016).
17. KORHONEN P.J., LUPTACIK M. *Eco-efficiency analysis of power plants: An extension of data envelopment analysis // Eu-*

- ropean Journal of Operational Research. – 2004. – No. 154. – P. 437–446.
18. LO K. *A Critical review of China rapidly developing renewable energy and energy policies* // Renewable and Sustainable Energy Reviews. – 2014. – No. 29. – P. 508–516.
  19. OUDE LANSINK A., BEZLEPKIN I. *The effect of heating technologies on CO2 and energy efficiency of Dutch greenhouse firms* // Journal of Environmental Management. – 2003. – No. 68. – P. 73–82.
  20. SEIFORD L.M., ZHU J. *Modelling undesirable factors in efficiency evaluation* // European Journal of Operational Research. – 2002. – No. 142. – P. 16–20.
  21. TYTECA D. *On the measurement of the environmental performance of firms – a literature review and a productive efficiency perspective* // Journal of Environmental Management. – 1996. – No. 46. – P. 281–308.
  22. TYTECA D. *Linear programming models for the measurement of environmental performance of firms – concepts and empirical results* // Journal of Productivity Analysis. – 1997. – No. 8. – P. 183–197.
  23. *Water for Energy: Is energy becoming a thirstier resource? World Energy Outlook 2012. Special Topics.* – OECD/IEA, Paris, 2012. – 31 p.
  24. ZHU J. *Data envelopment analysis with preference structure* // Journal of the Operational Research Society. – 1996. – No. 47. – P. 136–150.
  25. ZHOU P., ANG B.W., POH K.L. *A survey of data envelopment analysis in energy and environmental studies* // European Journal of Operational Research. – 2008. – No. 189. – P. 1–18.

## **ELABORATION OF ECOLOGY MANAGEMENT STRATEGY OF POWER GENERATING COMPANIES BASED ON DATA ENVELOPMENT ANALYSIS**

**Svetlana Ratner**, Institute of Control Science, RAS, Moscow, Doctor of Science, professor (lanarat@mail.ru).

**Pavel Ratner**, Plekhanov Russian University of Economics, Krasnodar, Russian Federation, student (ratner.p.d@gmail.com).

*Abstract: This paper demonstrates a possibility of a CCR Data Envelopment Analysis (DEA) model to be applied to elaboration of ecology management strategies in power generating companies. The literature review of data envelopment analysis in environmental and energy studies is provided. The methods of including undesirable outputs in the model are analyzed. The two-stage algorithm of construction of a DEA-model with undesirable outputs is presented. The DEA-model is applied to statistical data for main Russian electric power generation companies. The scores of ecological efficiency are calculated and possible practical implementations of the results are discussed.*

**Key words:** data envelopment analysis, non-parametric optimization, ecological effects, electricity generation.

*Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии В.В. Клочковым.*

*Поступила в редакцию 07.08.2015.*

*Опубликована 31.03.2016.*

УДК 519.23/.25 : 510.644.4

ББК 22.17 22.18 22.12

## **ОПТИМАЛЬНОЕ КОМПЛЕКСИРОВАНИЕ РЕСУРСОВ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ СИСТЕМ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ**

**Романенко В. А.<sup>1</sup>**

*(Самарский государственный аэрокосмический  
университет им. академика С.П. Королева  
(национальный исследовательский университет), Самара)*

*Рассмотрена задача определения оптимального по критерию экономичности комплекта технологических ресурсов производственной системы при исходных данных, содержащих различные виды неопределенности. Предложены подходы, позволяющие решать задачу в стохастической и нечеткой постановках на базе общедоступного программного обеспечения со сравнительно малыми затратами машинного времени. Результаты решения проиллюстрированы на частном, но практически значимом примере комплексирования средств наземного обслуживания самолетов в узловых аэропортах, не рассмотренном ранее в специальной литературе.*

Ключевые слова: технологические ресурсы, оптимизация, стохастическое программирование, нечеткое программирование, численный вероятностный анализ.

### **1. Описание модельной системы**

Рассматриваются технические и организационно-технические системы с протекающими в них технологическими процессами, состоящими в целенаправленном преобразовании некоторых объектов – операндов – под воздействием других объектов – операторов. В рамках системы по функциональному признаку выделяются подсистемы, каждая из которых предна-

---

<sup>1</sup> Владимир Алексеевич Романенко, кандидат технических наук, доцент (vla\_rom@mail.ru).

значена для выполнения определенной технологической операции и оснащена с этой целью комплектом операторов одного или нескольких типов, имеющих одинаковое назначение. Анализ ограничен классом систем с групповым поступлением операндов. Предполагается, что в систему одновременно поступает несколько операндов, в общем случае относящихся к различным типам. Промежуток времени между поступлением групп операндов достаточно велик для того, чтобы считать процессы преобразования различных групп взаимно независимыми. Успешное преобразование операнда в соответствующей подсистеме возможно при выполнении над ним работ, объем которых зависит от его типа. Для выполнения работ по преобразованию операнда могут привлекаться как один, так и несколько операторов из одного комплекта, причем величины производительности операторов могут различаться в зависимости как от их типа, так и от типа преобразуемого операнда. Преобразование операндов должно выполняться подсистемой за заданное время.

Важной задачей оптимизации рассматриваемых систем, представляющей собой разновидность «задачи о ранце», является оптимальное комплексование операторов, состоящее в определении таких типов и численности операторов, образующих комплект, которые были бы наилучшими в смысле некоторого критерия, обычно имеющего экономическое содержание, и удовлетворяли бы заданным ограничениям. Подход к решению задачи оптимального комплексования должен учитывать наличие неопределенности в исходных данных, обусловленной как вариабельностью протекающих в системе процессов, так и недостатком знаний о системе. Процессы поступления операндов в систему и ее подсистемы и преобразования в них операндов могут носить вероятностный характер, обусловленный наличием индивидуальных особенностей процедуры преобразования каждого конкретного операнда, возможностью возникновения случайных отклонений фактических характеристик процессов от нормативных, отказов, появления брака и т.п. Неопределенность исходных данных, вызванная недостаточностью знаний о системе, объясняется тем, что на этапах проектирования новой или совершенствования существующей системы, когда вероятнее всего и будет решаться рассматриваемая опти-

мизационная задача, необходимые для ее решения характеристики системы еще не будут полностью известны.

Характер неопределенности, присущей данным о системе, диктует требования к выбору способа ее описания и метода решения оптимизационной задачи. Правомерно считать, что наличие статистических выборок достаточного объема, вполне объяснимое на стадии совершенствования существующей системы, позволит рассматривать ее неопределенные характеристики как случайные величины (СВ) с известными функциями распределения, что даст возможность свести задачу комплексирования к задаче стохастического программирования и решить ее соответствующими методами. Однако если накопленная статистика отсутствует, а ее получение невозможно или связано с неприемлемыми затратами ресурсов, что характерно в первую очередь для этапа проектирования новой системы, то единственным способом определения значений параметров системы становится экспертное оценивание. В этом случае разброс мнений экспертов, их представления о стохастичности оцениваемого параметра могут найти отражение в выбранной форме представления неопределенной характеристики, которая может рассматриваться как нечеткая величина (НВ) с экспертно заданной функцией принадлежности. При этом задача комплексирования может быть решена методами нечеткого программирования.

В рассматриваемой системе предполагаются неопределенными как характеристики операндов, такие как их численность в составе группы и потребный объем работ по преобразованию операнда каждого типа, так и – операторов: производительность операторов при выполнении работ по преобразованию операндов, издержки на приобретение операторов различных типов, их содержание, эксплуатацию и т.п.

Ниже рассмотрены подходы к решению задачи оптимального комплексирования в условиях как нечеткой, так и стохастической неопределенности. В качестве критерия оптимальности выбран максимум показателя, отражающего уровень экономичности создаваемой или трансформируемой системы. Ограничения накладываются на величину объема работ, обеспечиваемого комплектом операторов в течение заданного проме-

жутка времени, которая должны быть не меньше величины объема работ, необходимой для преобразования операндов, поступивших в систему в составе группы.

## **2. Общая постановка задачи оптимального комплексирования**

Оптимизационные задачи комплексирования ресурсов производственных систем, сводимые к задачам математического программирования с учетом неопределенных факторов, были впервые сформулированы и решены в работе [3] применительно к строительным механизмам. В отличие от [3] и других работ, где неопределенность учитывалась только в вероятностной форме либо не принималась во внимание [12], здесь задача оптимального комплексирования формулируется в двух постановках, одна из которых соответствует условиям наличия стохастических, другая нечетких исходных данных. Ограничимся поиском детерминированных решений, поскольку интерпретация и практическое использование нечетких или вероятностных результатов при проектировании или совершенствовании производственных систем может представлять известную сложность.

Предварительно рассмотрим детерминированную постановку задачи оптимального комплексирования, введя следующие обозначения:

$\psi$  – число типов операторов, имеющих в подсистеме либо доступных для приобретения и использования;

$\xi$  – число типов операндов, которые могут поступить подсистему в составе группы;

$i, j$  – номер типа операторов и операндов соответственно,  $i = 1, \dots, \psi$ ;  $j = 1, \dots, \xi$ ;

$\tau_j$  – расчетная продолжительность пребывания операнда  $j$ -го типа в подсистеме,  $j = 1, \dots, \xi$ ;

$K_j$  – численность операндов  $j$ -го типа, поступающих в подсистему в составе группы,  $j = 1, \dots, \xi$ ;

$Q_j$  – объем работ по преобразованию операнда  $j$ -го типа,  $j = 1, \dots, \xi$ ;



$R_{ij}$  – производительность оператора  $i$ -го типа при обработке операнда  $j$ -го типа, заданная с учетом затрат времени на подготовительно-заключительные операции,  $i = 1, \dots, \psi, j = 1, \dots, \xi$ ;

$Z_i$  – приведенные годовые затраты на приобретение, содержание и эксплуатацию операторов  $i$ -го типа, оплату труда их обслуживающего персонала,  $i = 1, \dots, \psi$ ;

$s_{ij}$  – численность операторов  $i$ -го типа, используемых при преобразовании операндов  $j$ -го типа,  $i = 1, \dots, \psi, j = 1, \dots, \xi$ ;

$s_i$  – общее число операторов  $i$ -го типа,  $i = 1, \dots, \psi$ .

Допуская возможность одновременного участия разнотипных операторов в преобразовании однотипных операндов, правомерно рассматривать величины  $s_{ij}$ ,  $i = 1, \dots, \psi, j \in \{1, \dots, \xi\}$ , в качестве характеристик степени участия операторов того или иного типа в обработке операндов  $j$ -го типа. Подобная трактовка позволяет допустить возможность принятия величинами  $s_{ij}$  дробных значений. Однако очевидно, что общее число ресурсов любого типа, имеющееся в распоряжении подсистемы, может быть только целым. Обозначив  $\lceil \cdot \rceil$  математический оператор округления до ближайшего большего целого числа, выражение для определения  $s_i$  запишем как

$$s_i = \left\lceil \sum_j s_{ij} \right\rceil, \quad i = 1, \dots, \psi.$$

В качестве критерия рассматриваемой оптимизационной задачи принят минимум суммарных приведенных годовых затрат:

$$(1) \quad Z = \sum_i s_i Z_i = \sum_i \left\lceil \sum_j s_{ij} \right\rceil Z_i \xrightarrow[\substack{s_{ij}, \\ i=1, \dots, \psi, \\ j=1, \dots, \xi}]{\quad} \min.$$

Для выполнения в срок работ по обработке операндов необходимо, чтобы суммарный объем работ  $Q^{\Pi}_j$ , требуемый для преобразования всех одновременно поступающих в подсистему операндов рассматриваемого ( $j$ -го) типа, не превосходил суммарного (располагаемого) объема работ  $Q^P_j$ , который способны произвести в течение расчетного времени  $\tau_j$  все операторы, выделяемые для преобразования операндов данного типа. Указан-

ное ограничение записывается для каждого типа операндов в виде неравенства:

$$(2) \quad Q_j^{\Pi} \leq Q_j^P, \quad j=1, \dots, \xi.$$

Выражения для определения  $Q_j^{\Pi}$  и  $Q_j^P$  с использованием введенных выше обозначений записываются в виде

$$(3) \quad Q_j^{\Pi} = Q_j K_j, \quad Q_j^P = \sum_i R_{ij} \tau_j s_{ij}.$$

Таким образом, оптимизационная задача состоит в определении таких значений  $s_{ij}$  численности операторов, которые для заданного набора параметров подсистемы, включающего  $\tau_j$ ,  $K_j$ ,  $Q_j$ ,  $R_{ij}$ ,  $Z_i$  ( $i = 1, \dots, \psi$ ,  $j = 1, \dots, \xi$ ), обеспечивали бы минимальную сумму приведенных годовых затрат  $Z$  (1) и удовлетворяли бы ограничениям по объему работ (2), (3).

Задача (1)–(3), в детерминированной постановке вполне математически определенная, при замене детерминированных параметров целевой функции и ограничений на случайные либо нечеткие величины перестает быть определенной. В этом случае ее постановку (1)–(3) можно рассматривать лишь как условную, поскольку наличие неопределенных величин в выражении критерия (1) приводит к бесконечному числу целевых функций, а ограничения (2), (3) не порождают какого либо детерминированного множества возможных значений. Такого рода задачи требуют применения специальных подходов для придания определенности их постановкам.

При описании стохастической и нечеткой задач комплексирования в обозначениях неопределенных величин используем прописные буквы. При этом, чтобы различать случайные и нечеткие величины, обозначение последних дополним надстрочным знаком «тильда». В стохастической постановке величины  $K_j$ ,  $Q_j$ ,  $R_{ij}$  и  $Z_i$  будем считать случайными с заданными для всех  $i = 1, \dots, \psi$ ,  $j = 1, \dots, \xi$  функциями распределения  $F_{K_j}(k)$ ,  $F_{Q_j}(q)$ ,  $F_{R_{ij}}(r)$  и  $F_{Z_j}(z)$  соответственно. В нечеткой постановке аналогами СВ  $K_j$ ,  $Q_j$ ,  $R_{ij}$  и  $Z_i$  выступают НВ  $\tilde{K}_j$ ,  $\tilde{Q}_j$ ,  $\tilde{R}_{ij}$  и  $\tilde{Z}_i$ , функции принадлежности которых, соответственно  $\mu_{\tilde{K}_j}(K_j)$ ,

$\mu_{\bar{Q}_j}(Q_j)$ ,  $\mu_{\bar{R}_{ij}}(R)$  и  $\mu_{\bar{Z}_i}(Z_i)$ , также предполагаются заданными для всех  $i = 1, \dots, \psi$ ,  $j = 1, \dots, \xi$ .

### **3. Подход к решению стохастической задачи оптимального комплексирования**

Рассматриваемая задача относится к классу задач стохастического программирования, первые работы по которому появились в середине 50-х гг. XX века. Подробный исторический обзор состояния исследований и обобщение результатов, достигнутых в данной отрасли за 20 лет ее наиболее бурного развития, дан в [13]. Сводка современных постановок и подходов к решению задач математического программирования с учетом неопределенностей различного характера, в том числе стохастического, приведена в [9].

Среди значительного числа разработанных корректных постановок стохастических задач выделим две, к которым могут быть сведены формулировки большого числа разнообразных задач со случайными параметрами в составе целевой функции и ограничений [13]. Первая предполагает усреднение стохастических параметров условий задачи и использование вместо СВ их математических ожиданий. Данный подход, при его простоте, не всегда оправдан, так как решение задачи с усредненными параметрами может не удовлетворять условиям задачи при различных реализациях стохастических параметров. Вторая постановка, не связанная с указанной опасностью, предусматривает использование величин вероятности выполнения ограничений, которые не должны принимать значения ниже заданного доверительного уровня. Для различных ограничений, в зависимости от величины ущерба, наносимого их невыполнением, могут задаваться различные доверительные уровни. При этом в качестве целевой функции выбирается математическое ожидание исходной целевой функции или вероятность превышения исходной целевой функцией некоторого заданного доверительного уровня. Решение задачи в указанной постановке сопряжено с необходимостью трудоемкого определения вероятностных распределений одних СВ по заданным распределениям других СВ, что

является недостатком данного подхода. Комбинируя оба подхода, сформулируем стохастическую задачу комплексирования следующим образом, допускающим ее решение известными методами нелинейного программирования:

$$(4) \quad \bar{Z} = M[Z] = \sum_i s_i \cdot M[Z_i] = \sum_i \left[ \sum_j s_{ij} \right] \cdot M[Z_i] \xrightarrow[\substack{s_{ij}, \\ i=1, \dots, \psi, \\ j=1, \dots, \xi}]{} \min ,$$

$$(5) \quad p(Q_j^{\Pi} \leq Q_j^{\text{P}}) \geq \rho_j, \quad j = 1, \dots, \xi ,$$

где  $M[\cdot]$  – оператор математического ожидания;  $p(Q_j^{\Pi} \leq Q_j^{\text{P}})$  – фактическая вероятность выполнения условия  $Q_j^{\Pi} \leq Q_j^{\text{P}}$ ;  $\rho_j$  – заданная вероятность (надежность) выполнения указанного условия, определяемая ЛПР или устанавливаемая соответствующей нормативной документацией,  $j = 1, \dots, \xi$ .

Расчет величин  $p(Q_j^{\Pi} \leq Q_j^{\text{P}})$ ,  $j = 1, \dots, \xi$ , предполагает наличие известных вероятностных распределений СВ  $Q_j^{\Pi}$  и  $Q_j^{\text{P}}$ , которые предварительно должны быть определены по функциям  $F_{K_j}(k)$ ,  $F_{Q_j}(q)$ ,  $F_{R_j}(r)$ , заданным для всех  $i = 1, \dots, \psi$  и  $j = 1, \dots, \xi$ . Традиционно при решении задач стохастического программирования для формирования вероятностных распределений СВ [9, 13] используется метод стохастического имитационного моделирования, который в рассматриваемом случае позволяет определять вероятности  $p(Q_j^{\Pi} \leq Q_j^{\text{P}})$ . Начиная с 1990-х годов [4], и особенно в последнее время [6, 7, 15], распространение получили методы численного вероятностного анализа (ЧВА), представляющие в определенных случаях альтернативу имитационному моделированию, которая позволяет существенно сократить объем вычислений, сохранив их точность.

ЧВА – раздел вычислительной математики, предметом которого является решение задач со стохастическими неопределенностями в данных с использованием численных операций над плотностями и функциями распределения СВ и их функций. Рассматриваются системы случайных величин  $(X_1, X_2, \dots, X_M)$  и функциональные зависимости вида  $Y = g(X_1, X_2, \dots, X_M)$ , где  $X_1, X_2, \dots, X_M$  – независимые СВ, которые представляются не обычным образом – посредством своих плотностей  $f_{X_1}(x_1)$ ,

$f_{X_2}(x_2), \dots, f_{X_M}(x_M)$  или функций  $F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2), \dots, F_{X_M}(x_M)$  распределения, а с помощью гистограмм. Вводится понятие гистограммной СВ, которой называется СВ  $X$  с плотностью распределения, заданной гистограммой – кусочно-постоянной функцией  $f'_X(x)$ , определяемой множеством  $\{x_k : x_k \in R, k = 0, \dots, K\}$ , элементы которого подчиняются условию  $x_{k-1} < x_k, k = 1, \dots, K$ . На полуинтервале  $[x_{k-1}, x_k)$  гистограмма принимает постоянное значение  $f'_{Xk}$ , которое представляет собой усредненное на  $[x_{k-1}, x_k)$  значение плотности вероятности  $f_X(x)$  и связано с  $f_X(x)$  и  $F_X(x)$  соотношением

$$f'_{Xk} = \frac{\int_{x_{k-1}}^{x_k} f_X(x) dx}{x_k - x_{k-1}} = \frac{F_X(x_k) - F_X(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}.$$

Ставится задача определения в гистограммной форме СВ  $Y$  на множестве  $\{y_l : y_l \in R, l = 0, \dots, L\}$  с элементами, подчиняющимися условию  $y_{l-1} < y_l, l = 1, \dots, L$ .

Усредненное на полуинтервале  $[y_{l-1}, y_l)$  значение плотности вероятности СВ  $Y$  определяется как

$$f'_{Yl} = \frac{p(y_{l-1} \leq Y < y_l)}{y_l - y_{l-1}},$$

где  $p(y_{l-1} \leq Y < y_l)$  – вероятность попадания СВ  $Y$  на  $[y_{l-1}, y_l)$ . Если  $X_1, X_2, \dots, X_M$  независимы, то эта вероятность приблизительно определяется в результате численного вычисления следующего интеграла:

$$p(y_{l-1} \leq Y < y_l) = \int_{\Omega_l} \dots \int f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) \dots f_{X_M}(x_M) dx_1 dx_2 \dots dx_M,$$

где  $\Omega_l = \{(x_1, x_2, \dots, x_M) : y_{l-1} \leq g(x_1, x_2, \dots, x_M) < y_l\}$ . При этом вместо  $f_{X_m}$  используются гистограммно заданные усредненные плотности  $f'_{X_m}, m = 1, \dots, M$ .

Для системы независимых СВ  $(X, Y)$  вероятность  $p(X < Y)$  того, что одна СВ ( $Y$ ) превосходит другую ( $X$ ), приблизительно рассчитывается как повторный интеграл вида [2]

$$(6) \quad p(X < Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_x^{\infty} f_X(x) f_Y(y) dy \right) dx$$

с использованием вместо  $f_X(x)$  и  $f_Y(x)$  гистограммно заданных усредненных плотностей  $f'_X(x)$  и  $f'_Y(x)$  СВ  $X$  и  $Y$  соответственно.

При решении задачи стохастического комплексирования (4), (5) на каждом шаге оптимизационного алгоритма с помощью аналитических соотношений (3) путем выполнения последовательности операций гистограммного суммирования и перемножения определяются вероятностные распределения величин  $Q^{\Pi_j}$  и  $Q^{\text{P}_j}$ . После чего, также гистограммно, с использованием формулы (6) определяются величины  $p(Q^{\Pi_j} \leq Q^{\text{P}_j})$ ,  $j = 1, \dots, \xi$ .

Количественная оценка сокращения числа вычислительных операций благодаря использованию методов ЧВА вместо метода Монте-Карло выполнена в [7]. Если погрешность, с которой гистограмма  $f'_Y(y)$  аппроксимирует плотность вероятности  $f_Y(y)$  либо с которой численно определяется вероятность  $p(X < Y)$ , не должна превышать величины  $\varepsilon$ , то, как показано в [7], необходимое число операций гистограммной арифметики оценивается как  $O(\varepsilon^{-1})$ . Аналогичные по точности оценки указанных вероятностных характеристик, достигаемые на базе метода Монте-Карло, требуют выполнения порядка  $O(\varepsilon^{-2})$  операций. Таким образом, при решении рассматриваемой оптимизационной задачи, когда необходимо обеспечить погрешность вычислений на уровне  $10^{-2}$ – $10^{-3}$ , использование методов ЧВА обеспечивает сокращение числа операций в 100–1000 раз по сравнению с методом Монте-Карло. Данный вывод подтверждается результатами серии вычислительных экспериментов по гистограммному определению плотности  $f_Y(y)$  для  $Y = X_1 + X_2$  или  $Y = X_1 \times X_2$ , свидетельствующими о том, что при количестве полуинтервалов построения гистограммы  $K = 30$  погрешность не превышает 0,002, а число выполненных арифметических операций определяется величиной порядка  $30^2$ . Для получения аналогичной точности методом Монте-Карло при тех же исходных данных требуется около  $10^6$  повторов.

#### 4. Подход к решению нечеткой задачи оптимального комплексирования

За время, прошедшее с момента публикации в начале 70-х годов XX века первых работ по нечеткому математическому программированию [16, 17], предложено значительное число способов, позволяющих избежать некорректности постановок, подобных (1)–(3) с нечеткими параметрами  $\tilde{K}_j$ ,  $\tilde{Q}_j$ ,  $\tilde{R}_{ij}$  и  $\tilde{Z}_i$  и свести нечеткую задачу к детерминированной задаче математического программирования. Обзоры таких способов приводятся, например, в [9, 10]. Ограничимся здесь перечислением некоторых подходов, позволяющих получить решение задачи с нечеткими целевой функцией и ограничениями, не содержащее неопределенности. В [9] такое решение достигается благодаря применению дефазсификации нечетких параметров целевой функции и ограничений, которая в данном случае играет роль, аналогичную рассмотренному выше усреднению СВ, применяемому при решении стохастических задач. В качестве аналога другого рассмотренного выше для стохастических задач подхода, состоящего в задании доверительных вероятностей выполнения ограничений, следует рассматривать описанный там же, в [9], подход, предусматривающий формулировку ограничений в терминах возможности их достижения. В рамках этого подхода в применении к рассматриваемой задаче запись ограничений (2) принимает вид

$$(7) \quad Pos(\tilde{Q}_j^H \leq \tilde{Q}_j^P) \geq \beta_j, \quad j = 1, \dots, \xi,$$

где  $Pos(\tilde{Q}_j^H \leq \tilde{Q}_j^P)$  – возможность выполнения нечеткого ограничения  $\tilde{Q}_j^H \leq \tilde{Q}_j^P$ ;  $\beta_j$  – заданный доверительный уровень выполнения ограничения,  $j = 1, \dots, \xi$ . В [14] описан подход, предполагающий дефазсификацию целевой функции и приведение ограничений к четкой алгебраической форме ценой двукратного увеличения их числа. В [5] для решения задач нечеткого программирования предлагается использовать теоретико-вероятностный метод сравнения НВ, предусматривающий введение количественного параметра, с которым можно обращаться

как с вероятностью того, что одна из НВ не превосходит другую. Подходом предполагается приведение ограничений (2) к следующему виду, сходному с (5):

$$(8) \quad p(\tilde{Q}_j^H \leq \tilde{Q}_j^P) \geq \rho'_j, \quad j=1, \dots, \xi,$$

где  $p(\tilde{Q}_j^H \leq \tilde{Q}_j^P)$  – вероятность выполнения нечеткого ограничения  $\tilde{Q}_j^H \leq \tilde{Q}_j^P$ ;  $\rho'_j$  – заданная доверительная вероятность (надежность) выполнения нечеткого ограничения  $\tilde{Q}_j^H \leq \tilde{Q}_j^P$ ,  $j = 1, \dots, \xi$ . Указанный подход, наряду с интуитивной ясностью, обладает рядом достоинств, выгодно отличающих его от других описанных выше подходов. Так, он не требует увеличения числа ограничений. Его использование не затруднено неясностью в отношении назначения возможностной величины доверительных уровней  $\beta_j$  для ограничений в форме (7). Замена возможностной меры вероятностной, не снимая полностью указанной проблемы, делает ее менее острой, что объясняется, во-первых, большей подготовленностью и «нацеленностью» ЛПР на работу с понятием вероятности, и, во-вторых, наличием нормативной документации, задающей именно в вероятностной, а не в нечеткой, форме требования к уровню надежности проектируемых систем. Данные этой документации (при ее наличии) могут служить основой при назначении величин  $\rho'_j$ . При этом, однако, следует помнить, что вероятности  $\rho'_j$  и  $\rho_j$ , очевидно, не могут рассматриваться как полностью равнозначные величины, поскольку применяются они в отношении к различным типам неопределенности. Тем не менее, принимая во внимание преимущества подхода, используем его для решения задачи комплексирования.

Кратко остановимся на сравнении НВ, предполагающем вычисление вероятности того, что одна НВ превосходит другую. Рассмотрим использованную при решении задачи комплексирования методика, несколько упрощенную по сравнению с предложенной в [5]. Пусть  $\tilde{A}$  и  $\tilde{B}$  – определенные на некотором универсальном множестве  $\theta$  нечеткие величины  $L$ - $R$ -типа с выпуклыми функциями принадлежности  $\mu_{\tilde{A}}(t)$  и  $\mu_{\tilde{B}}(t)$  (где  $t \in \theta$ )



соответственно, а  $A_\alpha = \{t: \mu_{\tilde{A}}(t) \geq \alpha\}$  и  $B_\alpha = \{t: \mu_{\tilde{B}}(t) \geq \alpha\}$  (где  $\alpha \in [0, 1]$ ) – множества  $\alpha$ -уровня  $\tilde{A}$  и  $\tilde{B}$  соответственно. Задача сравнения НВ сводится к поуровневому сравнению четких отрезков, представленных на соответствующих  $\alpha$ -уровнях. Вероятность  $p_\alpha(B_\alpha > A_\alpha)$ , с которой отрезок  $B_\alpha$  больше отрезка  $A_\alpha$ , для каждого  $\alpha$ -уровня вычисляется способом, описанным ниже. Множество вероятностей  $p_\alpha$ ,  $\alpha \in [0, 1]$ , трактуется как нечеткое подмножество

$$\tilde{P}(\tilde{B} > \tilde{A}) = \{\alpha / p_\alpha(B_\alpha > A_\alpha)\},$$

где  $\alpha$  рассматривается как степень принадлежности  $p_\alpha(B_\alpha > A_\alpha)$  к НВ  $\tilde{P}(\tilde{B} > \tilde{A})$ .

Для преобразования НВ  $\tilde{P}(\tilde{B} > \tilde{A})$  в четкую  $p(\tilde{B} > \tilde{A})$  (дефазификации) в [5] предложено использовать выражение, широко применяемое при решении подобного рода задач:

$$(9) \quad p(\tilde{B} > \tilde{A}) = \frac{\sum \alpha \cdot p_\alpha(B_\alpha > A_\alpha)}{\sum \alpha}.$$

Задача сравнения отрезков  $A_\alpha, B_\alpha$  формулируется как задача определения вероятности  $p_\alpha(B_\alpha > A_\alpha)$ , трактуемой как вероятность того, что случайная точка  $B$  из отрезка  $B_\alpha$  будет больше случайной точки  $A$  из отрезка  $A_\alpha$ , при этом независимые отрезки  $A_\alpha = [a^L_\alpha, a^R_\alpha]$  и  $B_\alpha = [b^L_\alpha, b^R_\alpha]$  рассматриваются как отрезки равномерно распределенных СВ  $A \in [a^L_\alpha, a^R_\alpha]$  и  $B \in [b^L_\alpha, b^R_\alpha]$ , соответственно. Если сравниваемые отрезки не имеют общих областей, то решение задачи их сравнения является очевидным. Если же имеет место наложение отрезков, то все его варианты легко сводятся к двум нетривиальным случаям, представленным на рис. 1.

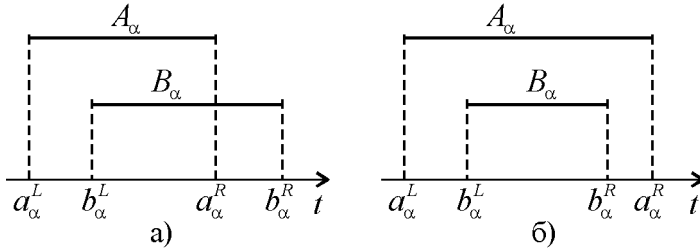


Рис. 1. Пересечение (а) и поглощение (б) отрезков

Как показано в [11], искомые вероятности  $p_\alpha(B_\alpha > A_\alpha)$  определяются в случае пересечения отрезков по формуле

$$(10) \quad p_\alpha(B_\alpha > A_\alpha) = 1 - \frac{(a_\alpha^R - b_\alpha^R)^2}{2(a_\alpha^R - a_\alpha^L)(b_\alpha^R - b_\alpha^L)},$$

а в случае их поглощения – по формуле

$$(11) \quad p_\alpha(B_\alpha > A_\alpha) = \frac{b_\alpha^R + b_\alpha^L - 2a_\alpha^L}{2(a_\alpha^R - a_\alpha^L)}.$$

На базе (9)–(11) вычисляются величины  $p(\tilde{Q}_j^\Pi \leq \tilde{Q}_j^P)$ ,  $j = 1, \dots, \xi$ , участвующие в задании ограничений (8) нечеткой задачи комплексирования. Для вычисления используется набор  $\alpha$ -уровней, включающий  $N$  значений  $\alpha$ , определяемых разбиением отрезка  $[0, 1]$  на  $(N - 1)$  равных частей. Тестовые расчеты показали, что вычислительная устойчивость и результативность оптимизационного алгоритма обеспечивается при  $N \approx 10\text{--}15$ .

Целевая функция задачи  $Z^d$  определяется путем дефаззификации по методу центра тяжести входящих в ее выражение НВ  $\tilde{Z}_i$ ,  $i = 1, \dots, \psi$ . В этом случае запись критерия принимает вид:

$$(12) \quad Z^d = \sum_i s_i Z_i^d = \sum_i \left[ \sum_j s_{ij} \right] Z_i^d \xrightarrow[\substack{s_{ij}, \\ i=1, \dots, \psi, \\ j=1, \dots, \xi}]{\text{min}},$$

где « $d$ » – индекс, означающий дефаззифицированное значение НВ.

Таким образом, нечеткая задача оптимального комплексирования сводится к задаче в четкой постановке с критерием (12)

и ограничениями (8), решаемой известными методами математического программирования.

### **5. Модельный пример. Анализ результатов**

Характерным примером систем, для которых решение рассматриваемой задачи представляет несомненную ценность, может служить компонент системы обслуживания перевозок узлового аэропорта (хаба) – подсистема, предназначенная для выполнения отдельной технологической операции, в которой роль операндов играют обслуживаемые воздушные суда (ВС) и их загрузка, а операторов – соответствующие технологические ресурсы аэропорта, под которыми понимаются аэропортовые средства механизации и автоматизации, производственное оборудование, персонал и т.д. Особенностью расписания хаба является существенно нестационарный характер потока прибывающих на обслуживание ВС, проявляющийся в периодическом повторении кратких промежутков времени с большим числом почти одновременно поступающих ВС, за которыми следуют длительные паузы со значительно меньшим их количеством. Предназначенные для выполнения выбранной операции аэропортовые средства одного типа могут использоваться для обслуживания ВС различных типов, при этом производительность средства зависит не только от его типа, но и от типа обслуживаемого ВС. Временные затраты на операцию лимитированы, что особенно характерно для хаба, где любое значительное отклонение от графика чревато разрушением системы стыковок рейсов. Неизбежные отклонения от расписания и технологических графиков обслуживания ВС, а также присущая этапу проектирования или совершенствования рассматриваемой подсистемы неполнота данных служат источником неопределенности в характеристиках процессов поступления в хаб ВС и их наземного обслуживания. На этапе проектирования состава подсистемы, например, при переходе действующего аэропорта к работе по схеме хаба, когда конкретные типы средств еще не выбраны, их стоимостные и эксплуатационные характеристики не являются определенными. Такие факторы, как широкое разнообразие марок аэропортовой техники одинакового назначения, большое

число предприятий, занимающихся ее выпуском и продажей, возможность приобретения техники как на первичном, так и на вторичном рынках, определяют значительный разброс как стоимостных, так и эксплуатационных характеристик операторов. Таким образом, задание в стохастической или нечеткой формах исходных данных для решения задачи комплексирования средств наземного обслуживания хаба представляется вполне правомерным. Для аэропортовых систем общие принципы решения задач оптимизации состава и численности средств без учета влияния вероятностных факторов как задач математического программирования изложены в монографии [12]. Однако к настоящему времени отсутствуют работы по решению в стохастической либо нечеткой постановке задач оптимального комплексирования средств в системе наземного обслуживания такого перспективного класса аэропортов, как хабы с их ярко выраженными специфическими чертами.

Будем в рамках примера считать, что обработка накопленной в процессе функционирования аэропорта статистики обеспечивает получение вероятностных распределений, необходимых для решения задачи комплексирования в стохастической постановке. Примем, что используемые в примере СВ подчинены распределению равнобедренного треугольника (Симпсона). Связь между параметрами распределения устанавливается посредством коэффициента вариации  $v_X$  с помощью известных формул [1]:

$$X^L = X^M (1 - \sqrt{6} \cdot v_X), \quad X^R = X^M (1 + \sqrt{6} \cdot v_X),$$

где  $X^L$ ,  $X^R$  – соответственно левая и правая границы области возможных значений СВ  $X$ ;  $X^M$  – модальное значение СВ  $X$ , совпадающее с математическим ожиданием  $M[X]$ .

Чтобы иметь возможность сравнить результаты решения задачи комплексирования в стохастической и нечеткой постановках, используем в исходных данных «нечеткой» задачи функции принадлежности нечетких величин, сформированные на основе распределений их вероятностных аналогов. Используем известный прием [5], согласно которому функция принадлежности  $\mu_{\tilde{X}}(x)$  нечеткой величины  $\tilde{X}$  определяется на основе

заданной плотности распределения  $f_X(x)$  соответствующей случайной величины  $X$  как

$$\mu_{\bar{x}}(x) = \frac{f_X(x)}{\max_x f_X(x)}.$$

Решение задачи комплексирования в обеих постановках рассмотрено на примере одной из ключевых функциональных подсистем аэропорта, отвечающей за выполнение операции заправки ВС авиатопливом. Операторами подсистемы являются авиатопливозаправщики (АТЗ), представляющие собой мобильные средства заправки ВС авиационным топливом. Пусть для приобретения и использования хабом доступны АТЗ четырех типов. Модальные значения приведенных годовых затрат на АТЗ по типам в некоторых относительных единицах приняты равными  $Z^M_1 = 1,0$ ,  $Z^M_2 = 1,5$ ,  $Z^M_3 = 2,0$ ,  $Z^M_4 = 3,3$ . Коэффициент вариации одинаков для всех типов АТЗ и равен  $v_Z = 0,25$ .

Предполагается, что в хаб в промежутки максимальной интенсивности движения ВС могут прибывать ВС семи типов, при этом малая продолжительность промежутков позволяет принять допущение о групповом характере их поступления. В таблице 1 приведены численности ВС  $K_j$  в составе группы, принятые в рамках примера фиксированными величинами, и модальные значения объемов авиатоплива, потребных для заправки ВС  $Q^M_j$  по типам,  $j = 1, \dots, 7$ . Коэффициент вариации объемов заправки предполагается одинаковым для всех типов ВС, равным  $v_Q = 0,25$ .

Таблица 1. Характеристики потока ВС

$j$	1	2	3	4	5	6	7
$K_j$	1	3	6	3	4	1	1
$Q^M_{j, \text{м}^3}$	5,0	6,0	8,0	1,1	1,6	42,0	51,0

Рассмотрены два набора («А» и «Б») значений расчетной продолжительности стоянки ВС на заправке, первый из которых соответствует более жестким требованиям к системе наземного обслуживания хаба по затратам времени на заправку.

Набор «А»:  $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = 15$  мин.,  $\tau_4 = \tau_5 = 20$  мин.,  
 $\tau_6 = \tau_7 = 25$  мин.

Набор «Б»:  $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = 25$  мин.,  $\tau_4 = \tau_5 = 30$  мин.,  
 $\tau_6 = \tau_7 = 35$  мин.

Модальные значения производительности АТЗ  $i$ -го типа при заправке ВС  $j$ -го типа  $R_{ij}^M$  представлены в таблице 2.

Так как на величинах производительности АТЗ отражаются затраты времени на подготовительно-заключительные операции, включающие в данном случае возможные временные потери на наполнение емкостей АТЗ на заправочных пунктах, передвижение АТЗ по перрону, приведение их в рабочее либо транспортное положение у ВС и т.п., которые в свою очередь зависят от технологических схем выполнения заправки, принятых в конкретном аэропорту, его планировки и других факторов, то для разных аэропортов распределения производительности заправки одинаковых типов ВС одноптипными АТЗ справедливо считать различными. Следуя данным соображениям, получим решение задачи для различных значений коэффициента вариации производительности АТЗ. Примем, что набору «А» соответствует меньший разброс производительности АТЗ, при котором  $v_{Rij} = v_R = 0,15$ ,  $i = 1, \dots, 4$ ,  $j = 1, \dots, 7$ . Набору «Б» поставим в соответствие значение  $v_R = 0,25$ , также одинаковое для всех  $(i, j)$ .

Таблица 2. Производительность ресурсов,  $R_{ij}^M$ , м<sup>3</sup>/мин.

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6	7
1	0,32	0,34	0,40	0,40	0,45	0,45	0,45
2	0,48	0,50	0,70	0,64	0,70	0,70	0,70
3	0,49	0,55	0,71	0,65	0,72	0,72	0,72
4	0,90	0,85	1,40	1,40	1,50	1,60	1,60

Решение задачи в обеих постановках получено с помощью надстройки «Поиск решения» табличного процессора Microsoft Excel. Количество полуинтервалов построения гистограмм СВ, входящих в наборы исходных данных, принято равным  $K = 30$ . Такая величина обеспечивает достаточно низкую (на уровне 0,001–0,002) погрешность гистограммных результатов. Число

$\alpha$ -уровней в соответствии с приведенными выше рекомендациями задано равным  $N = 15$ , что гарантирует работоспособность алгоритма нечеткой оптимизации.

Результаты решения задачи комплексирования для описанных выше исходных данных представлены в таблицах 3, 4 и на рис. 2. Таблица 3 содержит значения оптимальной численности  $s_i^{opt}$  по типам АТЗ ( $i = 1, \dots, 4$ ), полученные для набора исходных данных «А» в результате решения задачи во всех трех сформулированных выше постановках, обозначенных следующим образом: «Д» – детерминированная постановка (1)–(3), в которой все неопределенные величины заменены их модальными значениями, «В» – вероятностная (4), (5); «Н» – нечеткая (8), (12). В двух последних постановках надежности выполнения всех ограничений принимались одинаковыми, равными  $\rho_j = \rho$  и  $\rho'_j = \rho'$ ,  $j = 1, \dots, 7$ . В таблице 4 приводятся значения аналогичных величин, полученные для набора «Б».

Таблица 3. Результаты оптимизации. Набор «А».

Постановка задачи	Д	В	Н	В	Н	В	Н	В	Н	В	Н
$\rho, \rho'$	–	0,60		0,80		0,90		0,95		0,99	
$s_1^{opt}$	4	4	5	5	6	7	8	11	9	14	8
$s_2^{opt}$	11	10	10	11	11	11	11	11	12	12	14
$s_3^{opt}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$s_4^{opt}$	3	4	3	5	4	5	4	5	4	5	5

Таблица 4. Результаты оптимизации. Набор «Б».

Постановка задачи	Д	В	Н	В	Н	В	Н	В	Н	В	Н
$\rho, \rho'$	–	0,60		0,80		0,90		0,95		0,99	
$s_1^{opt}$	3	3	3	7	3	8	5	9	6	9	5
$s_2^{opt}$	7	7	8	7	8	7	8	7	9	9	9
$s_3^{opt}$	0	0	0	0	0	0	0	1	0	2	1
$s_4^{opt}$	2	3	2	3	3	3	3	3	3	3	4

Как отмечалось выше, интенсивность потоков ВС, поступающих на обслуживание в подсистемы хаба, может в течение кратких временных промежутков достигать весьма значительно уровня. Тем не менее, одновременность поступления операндов, принятая в качестве допущения, в хабе фактически не реализуется. Поэтому оптимальное число АТЗ, полученное с учетом предположения о групповом поступлении ВС, следует рассматривать как гарантированно достаточное, с некоторым запасом обеспечивающее выполнение заданных ограничений.

Рис. 2 иллюстрирует зависимости выраженных в относительных единицах оптимальных значений целевых функций  $\bar{Z}^{opt}$  и  $Z^{d opt}$ , определенных для двух наборов исходных данных («А» и «Б») задачи в стохастической и нечеткой постановках, от величин заданной надежности выполнения ограничения на объем заправляемого топлива. Для сравнения отмечены оптимальные уровни целевой функции  $Z^{opt}$  задачи в детерминированной постановке.

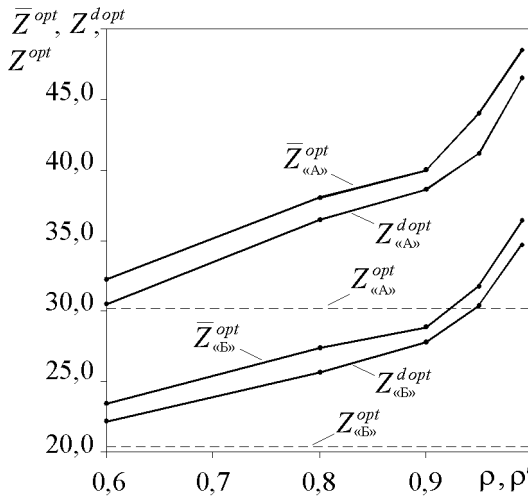


Рис. 2. Результаты оптимизации

Результаты решения оптимизационной задачи, полученные с учетом неопределенности, существенно отличаются от резуль-



татов задачи в детерминированной постановке. С ростом уровня требований, предъявляемых к надежности выполнения ограничений, оптимальная численность средств заправки ВС заметно возрастает. Так, минимальная величина суммарных затрат, полученная с учетом неопределенности для высоких ( $\rho = \rho' \geq 0,9$ ) уровней надежности, на 30–80% выше аналогичной величины, найденной при детерминированных исходных данных. Приведенные результаты свидетельствуют о необходимости учета неопределенности при решении задачи оптимизации состава и численности комплектов технологических ресурсов узловых аэропортов.

При определенной близости «вероятностного» и «нечеткого» решений первое из них предполагает использование несколько более многочисленного и, соответственно, более затратного комплекта ресурсов, по сравнению со вторым, при одинаковых значениях  $\rho$  и  $\rho'$ . Если принимать «вероятностное» решение в качестве эталонного, то для обеспечения большей близости к нему «нечеткого» решения требуется коррекция величины  $\rho'$ . Как показывает сравнительный анализ результатов решения задачи оптимизации в двух рассматриваемых постановках, при наличии заданного экспертом или нормативной документацией значения  $\rho$  величину  $\rho'$ , используемую при поиске «нечеткого» решения, представляется целесообразным рассчитывать согласно следующему выражению, применимому в промежутке наиболее употребительных значений  $0,5 \leq \rho \leq 0,95$ :

$$\rho' = \rho + \begin{cases} 0,1, & \text{если } 0,5 \leq \rho \leq 0,8, \\ 0,05, & \text{если } 0,8 < \rho \leq 0,9, \\ 0,03, & \text{если } 0,9 < \rho \leq 0,95. \end{cases}$$

Для решения задачи оптимального комплексирования как в стохастической, так и в нечеткой постановках достаточно возможностей стандартного прикладного программного обеспечения персональных ЭВМ, поскольку, благодаря использованию методов ЧВА и нечетких вычислений, исключается необходимость в проведении имитационного моделирования. При использовании современной персональной вычислительной техники затраты машинного времени на решение задачи с

рассматриваемыми выше исходными данными в стохастической постановке составили не более 3–5 мин., в нечеткой постановке – не более 0,25–0,5 мин.

Снижение временных затрат при переходе от гистограммных к нечетким методам работы с неопределенными величинами вполне согласуется с сокращением числа операций на каждом шаге оптимизационного алгоритма. В [7] показано, что при заданном количестве полуинтервалов  $K$  число арифметических операций в ходе гистограммных расчетов оценивается как  $O(K^2)$ . Число операций с нечеткими числами может считаться пропорциональным количеству  $\alpha$ -уровней  $N$  и оцениваться как  $O(N)$ . Следовательно, переход от гистограммных расчетов со значениями  $K = 30–50$ , обеспечивающими в подавляющем большинстве случаев удовлетворительную точность, к нечетким с вполне обоснованными значениями  $N = 10–15$  обеспечивает сокращение объема вычислений не менее чем в 60 раз при решении большинства задач оптимального комплексирования. Тем не менее, принимая во внимание различия гистограммного и нечеткого подходов к определению вероятности выполнения ограничений оптимизационной задачи, нельзя считать нечеткий подход полной заменой гистограммному. При решении наиболее «ответственных» задач комплексирования, в случае наличия явно заданных требований к вероятности выполнения ограничений (5), необходимо применять не нечеткие, а гистограммные вычисления.

## **6. Заключение**

Учет неопределенного характера исходных данных при решении задачи оптимального комплексирования оказывает существенное влияние на ее результаты, поэтому сформулированная в [3] стохастическая и предложенная в настоящей статье нечеткая постановки рассматриваемой задачи представляются вполне правомерными. Предложенный подход, предусматривающий использование гистограммных вычислений, позволяет решать стохастические задачи оптимального комплексирования на базе стандартного программного обеспечения со сравнительно малыми затратами машинного времени без необходимости выпол-

нения процедуры имитационного моделирования. Еще более значительное сокращение временных затрат на решение задачи оптимального комплексирования достигается благодаря предложенному сведению ее к задаче нечеткого программирования, решаемой с использованием теоретико-вероятностного метода сравнения нечетких величин. Результаты решения представленной в качестве примера задачи оптимизации состава и численности средств наземного обслуживания ВС узлового аэропорта с вероятностными или нечеткими исходными данными, описание которой в специальной литературе отсутствует, свидетельствуют о возможности использования рассмотренных подходов для решения практически важных задач оптимизации производственных систем в условиях неопределенности.

### Литература

1. ВАДЗИНСКИЙ Р.Н. *Справочник по вероятностным распределениям.* – СПб.: Наука, 2001. – 295 с.
2. ВЕНТЦЕЛЬ Е.С., ОВЧАРОВ Л.А. *Прикладные задачи теории вероятностей.* – М.: Радио и связь, 1983. – 416 с.
3. ГАРКАВИ Н.Г. *Методика расчета оптимальных параметров землеройных машин* // Сборник. Горные, строительные и дорожные машины. – Киев: Техника, 1968. – С. 79–99.
4. ГЕРАСИМОВ В.А., ДОБРОНЕЦ Б.С., ШУСТРОВ М.Ю. *Численные операции гистограммной арифметики и их применения* // Автоматика и телемеханика. – 1991. – №2. – С. 83–88.
5. ДИЛИГЕНСКИЙ Н.В., ДЫМОВА Л.Г., СЕВАСТЬЯНОВ П.В. *Нечеткое моделирование и многокритериальная оптимизация производственных систем в условиях неопределенности: технология, экономика, экология.* – М.: Машиностроение-1, 2004. – 397 с.
6. ДОБРОНЕЦ Б.С., ПОПОВА О.А. *Численные операции над случайными величинами и их приложения* // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. – 2011. – №4(2). – С. 229–239.

7. ДОБРОНЕЦ Б.С., ПОПОВА О.А. *Элементы численного вероятностного анализа* // Вестник СибГАУ. – 2012. – №2. – С. 19–23.
8. ЗАЙЧЕНКО Ю.П. *Исследование операций. Нечеткая оптимизация*. – Киев: Выща школа, 1991. – 191 с.
9. ЛЮ Б. *Теория и практика неопределенного программирования*. – М.: БИНОМ, 2005. – 416 с.
10. ОРЛОВСКИЙ С.А. *Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации*. – М.: Наука, 1981. – 208 с.
11. РОМАНЕНКО В.А. *Теоретико-вероятностные методы сравнения нечетких чисел* // Системы управления и информационные технологии. – 2012. – №3.1(49). – С. 159–165.
12. РУСИНОВ И.Я. *Механизация наземного обслуживания воздушных перевозок*. – М.: Транспорт, 1971. – 252 с.
13. ЮДИН Д.Б. *Математические методы управления в условиях неполной информации*. – М.: «Сов. радио», 1974. – 400 с.
14. ЯХЪЯЕВА Г.Э. *Нечеткие множества и нейронные сети*. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006. – 316 с.
15. LI W., HYM J. *Computer arithmetic for probability distribution variables* // Reliability Engineering and System Safety. – 2004. – Vol. 85. – P. 191–209.
16. NEGOITA C.V., SULARIA M. *On fuzzy mathematical programming and tolerances in planning* // ECEESR. – 1976. – Vol. 1. – P. 3–14.
17. ZADEH L.A., BELLMAN R.E. *Decision-making in a fuzzy environment* // Management Science. – 1970. – No. 17(4). – P. 141–164.

## **OPTIMAL AGGREGATION OF PRODUCTION SYSTEMS RESOURCES UNDER CONDITIONS OF UNCERTAINTY**

**Vladimir Romanenko**, Samara State Aerospace University named after academician S.P.Korolyov (National Research University), Samara, Cand.Sci., associate professor (vla\_rom@mail.ru).

*Abstract: We consider the problem of finding the set of production system technological resources optimal by the efficiency. The input data contains various kinds of uncertainty. The approaches we propose allow to solve the problem both in stochastic and fuzzy formulations on the basis of the popular software with rather small machine time expenses. The results are illustrated with a particular, but practically significant example of an aggregation of ground handling facilities in hub airports. This example was not previously considered in the literature.*

**Keywords:** technological resources, optimization, stochastic programming, fuzzy programming, numerical probabilistic analysis.

*Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии А.А. Ворониным.*

*Поступила в редакцию 17.12.2015.  
Опубликована 31.03.2016.*