

**Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН**

УПРАВЛЕНИЕ БОЛЬШИМИ СИСТЕМАМИ

***Выпуск 61
Март 2016***

**СБОРНИК
ТРУДОВ**

ISSN 1819-2467

Регистрационный номер Эл. №ФС77-44158 от 09 марта 2011 г.

Москва – 2016

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова

**УПРАВЛЕНИЕ
БОЛЬШИМИ
СИСТЕМАМИ**

СБОРНИК ТРУДОВ

Выпуск 61

Москва – 2016

КООРДИНАЦИОННЫЙ СОВЕТ

Академики РАН: Васильев С.Н., Емельянов С.В., Куржанский А.Б., Федосов Е.А., Черноушко Ф.Л.; члены-корреспонденты РАН: Желтов С.Ю., Каляев И.А., Пархоменко П.П., Попков Ю.С.; д-ра техн. наук: Дорофеев А.А., Кузнецов О.П., Кульба В.В., Лотоцкий В.А., Павлов Б.В., Поляк Б.Т., Рутковский В.Ю.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор: член-корр. РАН Новиков Д.А. **Зам. главного редактора:** д-р физ.-мат. наук Губко М.В.; **Отв. секретарь:** канд. техн. наук Базенков Н.И.; **Редактор:** канд. техн. наук Квинто Я.И. **Техн. редактор:** канд. техн. наук Куливец С.Г.

Д-ра техн. наук: проф. Алескеров Ф.Т. (ГУ ВШЭ), проф. Алчинов А.И. (ИПУ РАН), проф. Андриевский Б.Р. (ИПМ РАН), проф. Афанасьев В.Н. (МИЭМ), проф. Бахтадзе Н.Н. (ИПУ РАН), проф. Бурков В.Н. (ИПУ РАН), проф. Вишневский В.М. (ИПУ РАН), Галаев А.А. (ИПУ РАН), д-р физ.-мат. наук проф. Ерешко Ф.И. (ВЦ РАН), д-ра техн. наук Зоркальцев В.И. (ИСЭМ СО РАН), проф. Калашников А.О. (ИПУ РАН), проф. Калянов Г.Н. (ГУ ВШЭ), проф. Каравай М.Ф. (ИПУ РАН), д-р экон. наук, проф. Ключков В.В. (ИПУ РАН), д-ра техн. наук, Коргин Н.А. (ИПУ РАН), проф. Курдюков А.П. (ИПУ РАН), д-ра физ.-мат. наук, проф. Кушнер А.Г., проф. Лазарев А.А. (МФТИ), д-ра техн. наук: проф. Лебедев В.Г. (ИПУ РАН), проф. Мандель А.С. (ИПУ РАН), д-р биол. наук проф. Михальский А.И., д-р физ.-мат. наук, проф. Непейвода Н.Н. (ИПС РАН), д-р экон. наук, проф. Нижегородцев Р.М. (ИПУ РАН), д-ра техн. наук: проф. Орлов А.И. (МГТУ), д-ра физ.-мат. наук: проф. Рапопорт Л.Б. (ИПУ РАН), проф. Райгородский А.М. (МГУ), проф. Савватеев А.В. (РЭШ), д-ра техн. наук: проф. Самуйлов К.Е. (РУДН), проф. Сидельников Ю.В. (МАИ), Совлуков А.С. (ИПУ РАН) д-ра физ.-мат. наук: проф. Соловьев С.Ю. (МГУ), проф. Угольницкий Г.А. (ЮФУ), проф. Уткин В.А. (ИПУ РАН), проф. Хоботов Е.Н. (МГТУ), д-ра физ.-мат. наук: доцент Чеботарев П.Ю. (ИПУ РАН), проф. Чхартишвили А.Г. (ИПУ РАН), проф. Щербаков П.С. (ИПУ РАН).

РЕГИОНАЛЬНЫЕ РЕДАКЦИОННЫЕ СОВЕТЫ

Арзамас – д-р физ.-мат. наук проф. Пакшин П.В. **Волгоград** – д-ра физ.-мат. наук: проф. Воронин А.А., проф. Лосев А.Г. (ВолГУ); **Воронеж** – д-р техн. наук, проф. Баркалов С.А., д-р физ.-мат. наук, проф. Головинский П.А. (ВГАСУ), д-р техн. наук, проф. Подвальный С.Л. (ВГТУ); **Иркутск** – академик РАН Бычков И.В., д-р физ.-мат. наук, проф. Лакеев А.В. (ИДСТУ СО РАН); **Казань** – д-р физ.-мат. наук, проф. Маликов А.И., д-р техн. наук, проф. Сиразетдинов Р.Т. (КГТУ-КАИ); **Липецк** – д-ра техн. наук: проф. Погодаев А.К., Сараев П.В. (ЛГТУ); **Самара** – д-ра экон. наук: проф. Богатырев В.Д., проф. Гераськин М.И., д-р техн. наук, проф. Засканов В.Г. (СГАУ); **Петрозаводск** – д-р физ.-мат. наук, проф. Мазалов В.В., д-р техн. наук, доц. Печников А.А. (ИПМИ КарНЦ РАН); **Санкт-Петербург** – д-р физ.-мат. наук: проф. Петросян Л.А. (СПбГУ), д-р техн. наук проф. Фуртат И.Б. (ИПМ РАН); **Старый Оскол** – д-р техн. наук, проф. Еременко Ю.И. (СТИ).

Адрес редакции: 117997, г. Москва, ул. Профсоюзная, д. 65.

Адрес в Интернет: ubs.mtas.ru.

СОДЕРЖАНИЕ

Системный анализ

Бочаров П. С., Горяшко А. П.
О способах анализа игр разбиений 6

Мячин А. Л.
*Анализ паттернов: порядково-инвариантная
паттерн-кластеризация*..... 41

Математическая теория управления

Емельянов М. А.
*Пассивность и стабилизация нелинейных
дифференциальных повторяющихся процессов*..... 60

Шулепов А. Н., Сагадеева М. А.
*Оптимальное управление состояниями одной
нестационарной модели в относительно радиальном
случае*..... 88

Анализ и синтез систем управления

Гутова С. Г., Казакевич И. А.
*Настройка параметров пропорционально-
интегрального регулятора с помощью метода
симплекс-планирования*..... 95

Сетевые модели в управлении

**Мазалов В. В., Печников А. А., Трухина Л. И.,
Цынгугев Б. Т.**
Ранжирование академического веб-пространства.... 118

Управление в социально-экономических системах

Акинфиев В. К.

Моделирование инвестиционных стратегий компаний в условиях неопределённости 136

Киселев В. Г.

Обоснование региональной мультирисковой программы страхования сельскохозяйственных культур..... 168

Клочков В. В., Селезнева И. Е.

Стохастическая модель двусторонней олигополии и ценовое управление конкуренцией на рынках высокотехнологичной продукции 191

Технические и программные средства управления

Алексеев В. А., Сараев П. В., Домашнев П. А.,

Назаркин О. А.

Организация хранения нейро-нечётких моделей в реляционных базах данных..... 226

О СПОСОБАХ АНАЛИЗА ИГР РАЗБИЕНИЙ¹

Бочаров П. С.²

(ООО «Уили», Москва)

Горяшко А. П.³

(Московский технологический институт, Москва)

Предлагается рассматривать известные в теории игры, такие, например, как игра полковника Блотто и полковника Лотто, в виде общего класса комбинаторных игр разбиений, анализируя при этом относительную «силу» всего класса разбиений с заданными параметрами. Предложенные методы анализа опираются как на результаты компьютерного моделирования, выполненные с помощью разработанного комплекса программ, так и на результаты методов комбинаторного поиска в теории алгоритмов. Результаты моделирования показывают, в частности, что с помощью полиномиально доступных алгоритмов можно генерировать «эффективные», с точки зрения способности выигрывать, стратегии разбиений.

Ключевые слова: теория игр, теория разбиений, игры полковника Блотто, игры полковника Лотто, вычисление платежных функций, турниры.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект №15-08-08935А).

Авторы признательны рецензентам за те крайне полезные замечания, которые были сделаны в процессе рецензирования.

² Павел Сергеевич Бочаров, руководитель группы мобильной разработки (pavel@wheely.com).

³ Александр Петрович Горяшко, доктор технических наук, профессор (petrovich4you@gmail.com).

1. Введение

В математической теории игр особое место занимает специальный класс игр, который принято называть играми Блотто и играми Лотто (с добавлением воинского чина в различных постановках задач: генерал, полковник, капитан). Это класс игр с нулевой суммой и неполной информацией: каждый игрок должен распределить заданный ресурс по заданному числу полей (выбрать стратегию игры), не имея представления о выборе противника, после чего по определенным правилам происходит сравнение выбранных размещений. Выигрыш определяется, например, знаками величин разности ресурсов в каждом изолированном поле. Основное отличие игры Лотто от игры Блотто состоит в том, что игра Лотто *не предполагает* фиксацию сравниваемых полей.

В подобных играх число возможных чистых стратегий у игрока экспоненциально растет с размерностью задачи, т.е. с числом полей и суммарной величиной распределяемого ресурса. Это обстоятельство не является препятствием при поиске ответа на традиционный вопрос теории игр – какова цена игры и структура множества стратегий, обеспечивающих получение цены игры. Почти все исчерпывающие ответы на этот вопрос содержатся во множестве работ последних десятилетий, из которых мы в дальнейшем будем ссылаться лишь на некоторые работы последних лет.

В 1921 году Э. Борель [6] предложил решение задачи размещения объектов как игры двух лиц с постоянной суммой и неполной информацией. Рассмотренная им математическая модель получила впоследствии (во время второй мировой войны) название «игра полковника Блотто». В первоначальной формулировке игрок А и игрок В должны разместить имеющиеся у них целочисленные ресурсы X_A и X_B ($X_A \geq X_B$) между несколькими участками. Каждый из игроков не знает размещения, которое выбрал противника. Игру выигрывает тот, кто побеждает на большем числе участков (полей боя), а выигрыш игрока определяется знаком величины $l_A(i) - l_B(i)$, где $l_A(i)$ ($l_B(i)$) – величина ре-

сурса, размещенного на поле i первым (вторым) игроком (такое определение выигрыша принято называть «winner takes all»). Таким образом, в основе подобных игровых моделей лежат способы размещения некоторого целого числа (ресурса) по целому числу игровых полей. В играх этого класса, как правило, нет чистых оптимальных стратегий, а возможности получения равновесных по Нэшу смешанных стратегий изучены досконально: при различных предположениях относительно принципов размещения ресурсов, произвольном соотношении количества ресурсов у игроков и различных классов платежных функций (см., например, [12, 18, 11]). Например, уже в одной из первых работ этого направления [12] было показано, что в задаче полковника Блотто достигается смешанное равновесие по Нэшу при условии, что игра симметрическая, т.е. распределяемый ресурс противников одинаков, и распределение ресурса в каждом поле может быть описано одномерной равномерной функцией распределения в интервале $[0, 2n/m]$ (предполагается, что n/m делится нацело).

Наиболее общие результаты были получены уже в последние десятилетия. Так, в работе [11], в которой было введено понятие игры генерала Блотто (General Blotto), полученные ранее результаты обобщены прежде всего в плане вида платежных функций. В частности, вместо выигрыша изолированных полей, как в первоначальных работах, изучались случаи, когда игроки стремятся выиграть все заданные подмножества этих полей.

В [18] приведены окончательные результаты решения проблемы равновесия по Нэшу для смешанных стратегий в случае несимметрической игры полковника Блотто, т.е. когда ресурсы противников могут быть различны.

В [13] и [14] рассмотрена так называемая игра Лотто, обладающая тем, казалось бы, существенным отличием от игры Блотто, что не предполагается задания фиксированной нумерации полей, в которых размещается ресурс. Иными словами, в этой игре разбиение заданного ресурса n на m частей задано с точностью до определенного множества допустимых перестановок элементов разбиения. Как может сказаться подобная постановка на поведе-

нии игроков? В игре появляется новый источник неопределенности, и игрокам приходится находить способы поиска такого размещения своих ресурсов, которые могут обеспечить победу хотя бы для большинства возможных перестановок полей. Естественно предположить, что решение этой задачи окажется сложнее, нежели в моделях игры Блотто, по крайней мере, с позиций алгоритмической сложности. Оказалось, однако, что возможно такое определение дискретной игры полковника Лотто [13], при котором условия получения равновесия в играх Блотто и Лотто полностью совпадают, т.е. при равных значениях размещаемых ресурсов и числе полей, а также некоторых предположениях о виде распределения для играемых стратегий эти игры имеют одну и ту же цену.

Следуя [13], сформулируем один из подобных результатов точнее. Пусть игроки распределяют по одинаковому числу полей ресурсы a и b ($a \geq b > 0$). В случае игры Лотто $L(a, b)$, в которой первый игрок выбирает распределение неотрицательных целочисленных случайных переменных X , для которого математическое ожидание $E(X) = a$, а второй – распределение с математическим ожиданием $E(X) = b$, цена игры $\text{Val } L(a, b) = (a - b)/a$, и единственная оптимальная стратегия для более сильного игрока ($a > b$) состоит в том, чтобы равномерно на интервале $[0, 2a]$ с математическим ожиданием распределить имеющийся ресурс по всем полям, а для игрока с ресурсом b – с вероятностью $1 - b/a$ размещать на своих полях 0 и с дополнительной вероятностью играть такое же распределение на интервале $[0, 2a]$, как и более сильный игрок (в этом случае его распределение будет иметь математическое ожидание равное b). В случае равенства ресурсов ($a = b$) оба игрока играют одинаковые равномерные распределения на интервале $[0, 2a]$ и получают нулевую цену.

Таким образом, основное свойство игры Лотто, в которой результат каждой отдельной встречи зависит не от фиксированной нумерации полей, известной всем участникам, а определяется суммарным значением платежной функции при всех перестановках полей, с точки зрения обеспечения равновесия в смешанных

стратегиях практически не вносит в модель ничего существенного. Всегда ли это так в реальных ситуациях?

Пусть на командный чемпионат мира по шахматам можно выставить по 5 шахматистов. Шахматисты строго упорядочены по силе коэффициентом Эло. Потому для всех команд естественно ровно также упорядочить номера досок: за первой доской играет самый сильный, за второй – следующий за ним по силе и т.д. Часто так и происходит. Но ведь есть еще и «игровая несоместимость» (когда игрок с более высоким рангом, как правило, плохо играет с некоторым игроком, имеющим ранг гораздо ниже), есть конкретное самочувствие игроков, есть ситуации, когда игроку необходим отдых и т.п. Таким образом, тренеру команды на протяжении турнира приходится решать задачу, более соответствующую модели Лотто, и часто от правильного ее решения, зависит исход командной борьбы. Подобного рода обстоятельства возникают фактически в любых командных соревнованиях.

Спортивные игры не единственный пример важности моделей типа игры Лотто. Например, в экономике при проведении таких тендеров и аукционов, в которых предполагается обязательный выбор участником некоторого *набора* торгуемых предметов (*bundle goods*). В этом случае перед участниками возникает задача распределения имеющихся у них денежных ресурсов по различным наборам товаров типа Лотто. Аналогичная ситуация возникает перед инвесторами на финансовых рынках, когда необходимо вкладывать средства в некоторое множество ценных бумаг (*securities*). Следует заметить также, что в реальных ситуациях наибольший интерес вызывают не модели *one shot game* игр разбиений ресурсов, а модель повторяющейся игры, такая, например, как турниры.

Примеры можно продолжать, но уже ясно, что в играх разбиений (особенно типа Лотто) нахождение *support*-стратегий⁴, которые обеспечивают равновесие по Нэшу, далеко не единствен-

⁴ В теории игр *support*-множествами принято называть множество стратегий с ненулевой вероятностью в случае равновесия в смешанных стратегиях.

ная проблема. Не менее важными следует считать задачи исследования *структуры* множества всех допустимых стратегий в игре с позиций их взаимной «силы», а также поиск слабо доминантных support-стратегий, которые могут «успешно» играть против равновесных смешанных стратегий. Однако полиномиально доступное решение подобных задач в модели игры Лотто требует решения проблемы перебора всех $m!$ допустимых перестановок. Здесь, к сожалению, недостаточно предположения о равномерном распределении всех допустимых перестановок, как это было сделано в [13].

В теории игр интерес к решению «сложностных» проблем, иначе говоря, алгоритмическая теория игр, возник относительно недавно [3]. Этот интерес в значительной мере обусловлен тем, что на практике чаще всего игроки играют в так называемую «воображаемую» (*fictitious*) игру, т.е. ищут выигрышную стратегию, наблюдая в процессе игры за противником, и строя модель его поведения. Хотя и существуют классические работы [8], показывающие, что определенные классы *fictitious* игр могут сходиться к равновесию, численные эксперименты последних лет показывают, что нередко такие исходные наборы стратегий (даже в столь простых играх как «Камень, ножницы, бумага»), которые приводят к появлению циклов далеких от ситуаций равновесия. Было также показано [7], что и в тех случаях, при которых *fictitious* игры сходятся к равновесию, достижение равновесия может потребовать экспоненциально растущего с ростом параметров стратегии числа шагов. Таким образом, исследования последних лет говорят о важности, особенно с прикладной точки зрения, поиска полиномиально доступных приближенных методов вычисления различных показателей качества в теории игр [21].

Особенно хотелось бы указать на полезность (а, возможно, и необходимость) проведения *численных* экспериментов для выяснения часто достаточно неожиданных эффектов, связанных с *динамикой* поведения для таких дискретных моделей игр, как игры Блотто и Лотто. Проведение таких экспериментов, особенно в случае игры Лотто, практически недоступно при отсутствии эф-

фективных методов приближенного вычисления показателей качества игры.

Необходимость детального рассмотрения поведения моделей игры Лотто поставила перед авторами задачу создания набора программ [1] компьютерного моделирования класса задач, возникающих в теории разбиений. Эти программы позволяют проводить численные эксперименты с разбиениями достаточно большой размерности и полученные результаты позволяют полнее понять структуру стратегий дискретных моделей игры Лотто. Первым результатам в этом направлении как раз и посвящена настоящая работа, в основе которой обоснование применения полиномиальных алгоритмов аппроксимации результатов взаимодействия игроков в игре Лотто и синтез «успешных» support-стратегий.

Дальнейшее изложение построено следующим образом.

Раздел 2 «Разбиения и игры разбиений» посвящен изложению результатов комбинаторики разбиений, которые могут быть полезны для лучшего понимания особенностей игровых задач типа «игр Блотто» и «игр Лотто».

В разделе 3 «Приближенное вычисления результатов игры Лотто для пары разбиений» приводится формулировка способа приближенного вычисления значения платежной функции в симметричной игре Лотто с нулевой суммой.

В разделе 4 «Результаты вычислительных экспериментов с «эффективными» support-стратегиями» содержатся результаты численных экспериментов, на основании которых можно осуществлять выбор support-стратегий.

В разделе «Обсуждение» приведен ряд соображений о перспективах использования методов компьютерного моделирования для анализа игр разбиений.

2. Разбиения и игры разбиений

Традиционно при рассмотрении игровых задач Блотто и Лотто исследователи не прибегают к аппарату комбинаторики размещений, т.е. тому разделу теории алгоритмов, в котором изучают-

ся сложностные аспекты методов генерации разбиений и алгоритмические свойства разбиений. Возможная причина состоит в том, что получение общих закономерностей установления равновесия (доказательство теорем существования) не требует анализа скорости сходимости алгоритмов поиска равновесия или комбинаторной структуры различных подмножеств множества разбиений. В этом разделе методология игр, объединенных наименованиями «игры Блотто» и «игры Лотто», будет изложена на языке комбинаторных алгоритмов [4].

В [4] все типы размещений заданного числа n в заданном количестве мест m распадается на двенадцать классов задач. Для наших целей интерес представляют классы, которые в [4] называются разбиением (*partition*) n непомеченных шаров по m помеченным урнам и разбиением n непомеченных шаров по m непомеченным урнам.

Разбиение целого числа n определяется как последовательность $\{a_1, a_2, \dots\}$ неотрицательных целых чисел $a_1 \geq a_2 \geq \dots$ такая, что $n = a_1 + a_2 + \dots$. Например, одним из разбиений числа 8 может быть последовательность⁵ 422, другим – последовательность 530. Количество ненулевых членов называется количеством частей. В комбинаторике нулевые члены (если они присутствуют) обычно для простоты опускаются, поэтому все способы разбиений числа 8 в обратном лексикографическом порядке будут выглядеть как

$$(1) \quad 8, 71, 62, 611, 53, 521, \dots, 2111111, 11111111.$$

Нас будут интересовать только разбиения числа n на фиксированное число урн (или полей), не превышающее m (обозначим их как (n, m) -разбиения), и при записи нулевые члены не будут опускаться. Например, все разбиение числа 8 по трем полям в обратном лексикографическом порядке будет выглядеть как

$$(2) \quad 800, 710, 620, 611, 530, 521, 440, 431, 422, 332.$$

⁵ Здесь и далее числовые примеры разбиений для простоты приведены в записи вида $a_1 a_2 \dots$

Для оценки количества разбиений существует ряд приближенных формул, в частности

$$(3) \quad p(n) = \frac{e^{\pi\sqrt{2n/3}}}{4n\sqrt{3}} (1 + \mathcal{O}(n^{-1/2})).$$

Формула (3) дает приближенную оценку, например, $p(100) \approx 1,993 \cdot 10^8$ при точном значении $p(100) = 190569292$ [4].

Многие численные эксперименты, которые описаны в работе, проводились для разбиений при $n = 100$ и $m = 10$. Точное значение количества всех разбиений 100 на 10 полях

$$(4) \quad p(100, 10) = 6292069.$$

Модель игры Блотто (точнее, игры полковника Блотто) можно представить, как вычисление функции платежа $B(\rho_1, \rho_2)$, где ρ_1 и ρ_2 – это некоторые разбиения заданного числа n по заданному числу полей (урн) m , причем эти урны помечены, т.е. любая перестановка разбиений может изменить значение функции $B(\rho_1, \rho_2)$.

Функция $B(\alpha, \beta)$ обычно задается следующим образом:

$$(5) \quad B(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^m \text{sign}(x_i - y_i),$$

где $\alpha = \{x_1, \dots, x_m\}$, $\beta = \{y_1, \dots, y_m\}$, $\text{sign}(z) = 1$, если $z > 0$, $\text{sign}(z) = -1$, если $z < 0$ и $\text{sign}(0) = 0$.

Победитель в игре полковника Блотто имеет положительный платеж, т.е. победитель должен выиграть по крайней мере на одно поле больше, чем его противник.

Как уже было отмечено, принципиальное отличие модели игры полковника Лотто состоит в том, что функция платежа для игры Лотто $L(\alpha, \beta)$ вычисляется при условии, что поля не помечены. Пусть при сравнении пары наборов α и β платеж определяется в соответствии с (5), т.е. как в игре полковника Блотто. В общем случае перестановки значений в фиксированных наборах α и β могут приводить к изменению знака платежа. Для определения функции платежа в игре Лотто достаточно задать множество всех перестановок Θ_α набора α . Тогда

$$(6) \quad L(\alpha, \beta) = \sum_{\alpha \in \Theta_\alpha} \sum_{i=1}^m \text{sign}(x_i - y_i).$$

Рассмотрим простой пример. Выберем из множества всех $(8, 3)$ -разбиений разбиения $\alpha = \{5, 3, 0\}$ и $\beta = \{4, 2, 2\}$. Для получения значения (6) необходимо вычислить $3!$ значений функции (5), переставляя всеми возможными способами значения α (таблица 1).

Таблица 1. Пример вычисления функций $B(\alpha, \beta)$ и $L(\alpha, \beta)$

α	530	503	035	053	305	350
β	422	422	422	422	422	422
$B(\alpha, \beta)$	1	1	1	1	-1	-1
$L(\alpha, \beta)$				2		

Таким образом, в четырех случаях игру Блотто выигрывает α , но в двух случаях выигрыш остается за β . В общем случае результат игры полковника Лотто является случайной величиной, значение которой определяется как видом разбиений α и β , так и распределением вероятностей перестановок значений в этих наборах. В работе [13], в которой и были предложены игры полковника и генерала Лотто, исследовались в основном вопросы равновесия в смешанных стратегиях в игре Лотто и сравнение между игрой Блотто и Лотто сводилось к указанию факта «эквивалентности» этих игр. Точнее говоря, утверждалось, что в случае, когда все выбираемые в игре смешанные стратегии предполагают равномерное (с вероятностью $1/m!$) распределения перестановок разбиений, значение игр Блотто и Лотто совпадает, и те support-множества стратегий, которые доставляют равновесие в игре Блотто, будут доставлять равновесие и в игре Лотто.

Нас будет интересовать изучение произвольных стратегий в играх разбиений по правилам Лотто, что требует детального анализа поведения функции $L(\alpha, \beta)$. Очевидно, прямое вычисление (6) для пары произвольных (n, m) -разбиений требует $\mathcal{O}(m! \cdot (m \cdot \log n))$ битовых операций, что делает такое вычисление практически недоступным при сколько-нибудь заметных значениях m и числах пар изучаемых разбиений.

2.1. МАТРИЦЫ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ РАЗБИЕНИЙ

Пусть заданы N -мерные наборы целых положительных чисел $\alpha = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ и $\beta = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$, причем $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{i=1}^m b_i = n$. Построим квадратную матрицу вида $\alpha^T \cdot \beta$, которую назовем матрицей взаимодействий или I-матрицей (*interaction matrix*). В этой матрице операция алгебраического умножения любых $a_i \in \alpha^T$ и $b_j \in \beta$ заменяется операцией $\text{sign}(a_i - b_j)$. В общем случае I-матрица есть тернарная матрица $m \times m$, главная диагональ которой является результирующим вектором игры Блотто между разбиениями α и β при заданном матрицей порядке столбцов и строк. След такой матрицы есть численный результат игры полковника Блотто, а сумма значений всех столбцов (всех строк) $S(\alpha, \beta)$ определяет «кто сильнее в среднем» в игре полковника Лотто. Точный смысл этого утверждения будет дан ниже.

В таблице 2 показан пример I-матрицы для пары строго упорядоченных по возрастанию (63, 7)-разбиений $\alpha = \{27, 11, 9, 7, 5, 3, 1\}$ и $\beta = \{21, 12, 10, 8, 6, 4, 2\}$. След этой матрицы $\text{Tr} = 5$, а сумма значений всех столбцов (всех строк) $S(\alpha, \beta)$ равна 5. Таким образом, разбиение α выигрывает у разбиения β в игре полковника Блотто, определяемой заданным порядком столбцов.

Таблица 2. Пример I-матрицы для (63, 7)-разбиений

$\alpha \setminus \beta$	27	11	9	7	5	3	1	
21	-1	1	1	1	1	1	1	
12	-1	1	1	1	1	1	1	
10	-1	-1	1	1	1	1	1	
8	-1	-1	-1	1	1	1	1	
6	-1	-1	-1	-1	1	1	1	
4	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	
2	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	$\text{Tr} = 5$
\sum	-7	-3	-1	1	3	5	7	$S(\alpha, \beta) = 5$

Однако несложно убедиться, что при перестановке столбцов этой матрицы, например, в порядке $\beta' = \{27, 11, 7, 9, 5, 3, 1\}$, след становится равным -1 , т.е. разбиение α уже проигрывает разбиению β' в игру полковника Блотто, при этом значение $S(\alpha, \beta')$ остается неизменным.

Приведем еще один способ описания взаимодействия разбиений $\alpha = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ и $\beta = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$, где $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{i=1}^m b_i = n$. Этот способ позволяет получать другой вид векторов, характеризующих взаимную «силу» разбиений α и β . Введем вначале формальные определения (7), (8) и (9).

$$(7) \quad R^*(\alpha, \beta) = \left\{ \sum_i^m \text{sign}^*(a_1 - b_i), \dots, \sum_i^m \text{sign}^*(a_m - b_i) \right\},$$

$$R^*(\beta, \alpha) = \left\{ \sum_i^m \text{sign}^*(b_1 - a_i), \dots, \sum_i^m \text{sign}^*(b_m - a_i) \right\},$$

$$(8) \quad S^*(\alpha, \beta) = \sum_i^m \sum_j^m \text{sign}^*(a_i - b_j),$$

$$S^*(\beta, \alpha) = \sum_i^m \sum_j^m \text{sign}^*(b_i - a_j),$$

$$(9) \quad \text{sign}^*(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x \leq 0. \end{cases}$$

Каждая компонента i вектора $R^*(\alpha, \beta)$ – это то суммарное количество компонент разбиения β , которое строго меньше α_i , потому сумма $S^*(\alpha, \beta)$ всех компонент этого вектора характеризует «возможности» разбиения α , в игре с разбиением β .

Разбиения α , β и вектора $R^*(\alpha, \beta)$ и $R^*(\beta, \alpha)$ можно представить в виде матрицы $m \times 4$, которую будем называть I^* -матрицей. В таблице 3 показана I^* -матрица для разбиений из предыдущего примера.

Определение 1. Назовем *относительной силой* разбиения α по отношению к β величину

$$(10) \quad S(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \text{sign}(a_i - b_j).$$

Таблица 3. Пример I^* -матрицы для $(63, 7)$ -разбиений

α	21	12	10	8	6	4	2	$S^*(\alpha, \beta) = 27$
$R^*(\alpha, \beta)$	6	6	5	4	3	2	1	
β	27	11	9	7	5	3	1	$S^*(\beta, \alpha) = 22$
$R^*(\beta, \alpha)$	7	5	4	3	2	1	0	

Назовем **потенциальным ресурсом** разбиения α по отношению к β величину

$$(11) \quad S^*(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \text{sign}^*(a_i - b_j).$$

Определение 2. Назовем **собственным ресурсом** разбиения α величину

$$(12) \quad S^*(\alpha) = S^*(\alpha, \alpha) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \text{sign}^*(a_i - a_j).$$

Укажем некоторые свойства разбиений, которые легко установить по виду матриц I и I^* .

1. $S^*(\alpha, \beta) + S^*(\beta, \alpha) = m^2 - q$, где q – число нулей в I -матрице. Нули в I -матрице появляются в том и только в том случае, когда для какой-то пары индексов (i, j) выполняется равенство $a_i = b_j$.

2. При любом изменении порядка столбцов (строк) I -матрицы значения величин относительной силы $S(\alpha, \beta)$ и $S(\beta, \alpha)$ (также потенциальных ресурсов $S^*(\alpha, \beta)$ и $S^*(\beta, \alpha)$) остаются неизменны. Таким образом, эти величины оказываются инвариантом для игры полковника Лотто с разбиениями α и β .

3. $-(m^2 - m) \leq S(\alpha, \beta) \leq m^2 - m$. Здесь верхняя и нижняя границы справедливы, например, для разбиений вида $\alpha = \{n, 0, \dots, 0\}$ и $\beta = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$, где $b_i > 0$ для всех $i \in [1, m]$ и $\sum_{i=1}^m b_i = n$.

2.2. СВОЙСТВА (n, m) -РАЗБИЕНИЙ

Многочисленные результаты теории разбиений относятся, в первую очередь, к различным комбинаторным свойствам как отдельных разбиений, так и множеств разбиений с одинаковыми

параметрами. Хотя выяснение вопроса о взаимной «силе» всего множества попарных разбиений явно не привлекало внимания, установленные закономерности, как выясняется, могут представлять непосредственный интерес при изучении игр разбиений.

Здесь мы остановимся на следующих свойствах:

1) свойство, связанное с разнообразием числа частей разбиений;

2) свойство, связанное с уравновешенностью (балансом) разбиения.

Первое свойство исследовалось в теории разбиений как свойство множества всех строго упорядоченных разбиений, т.е. таких разбиений $\alpha = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$, для которых $a_1 > a_2 > \dots > a_m$.

В нашей работе разнообразие элементов характеризуется введенным выше понятием собственного ресурса (12). Заметим, что

$$(13) \quad 0 \leq S^*(\alpha) \leq m(m-1)/2,$$

где нижняя граница достигается на разбиениях из m одинаковых значений (если n/m целое), а верхняя – на вполне упорядоченных последовательностях α . (Если разбиение $\alpha = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ упорядочено по возрастанию, то I-матрица будет кососимметрической: элементы, расположенные симметрично относительно главной диагонали, имеют противоположные знаки, а все диагональные элементы равны нулю.) Экспериментально можно установить, как распределены значения собственного ресурса для всего множества (n, m) -разбиений.

На рис. 1 показано распределение значений собственного ресурса $(100, 10)$ -разбиений.

Второе свойство – уравновешенность, или баланс последовательности – издавна привлекал внимание исследователей, занимающихся комбинаторными проблемами, в частности проблемами точного покрытия (см. задача Лэнгфорда [4]). В теории разбиений оптимально сбалансированным (n, m) -разбиением называется такое, для которого $|a_i - a_j| \leq 1$ для всех $1 \leq i, j \leq m$. В [4] показано, что имеется ровно одно оптимально сбаланси-

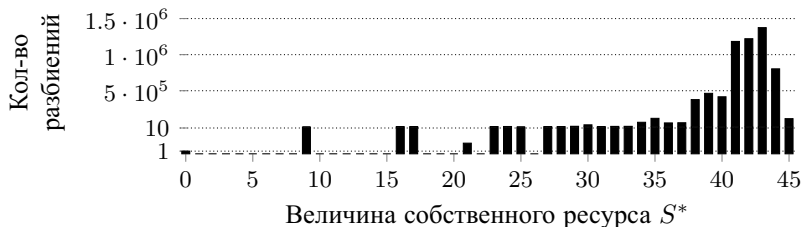


Рис. 1. Распределение значений собственного ресурса для (100, 10)-разбиений (масштаб части оси ординат от 1 до 10 для наглядности увеличен)

рованное (n, m) -разбиение, все части a_j которого задаются как $\lfloor (n + m - j)/m \rfloor = \lceil (n + 1) - j/m \rceil$ для всех $1 \leq j \leq m$.

Для наших целей оказалось полезным следующее

Определение 3. Пусть задано произвольное (n, m) -разбиение $\alpha = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$. В этом случае **уравновешенностью** $E(\alpha)$ разбиения α будем называть величину

$$(14) \quad E(\alpha) = - \max \left| \frac{\sum_{i=1}^m a_i (i - m'_i)}{n} \right|,$$

$$m'_i = \begin{cases} (m + 1)/2 & \text{при нечетном } m, \\ m/2 + 1 & \text{при четном } m \text{ и } i \leq m/2, \\ m/2 & \text{при четном } m \text{ и } i > m/2, \end{cases}$$

где максимум берется по всем перестановкам α .

В приведенном определении используется понятие положения центра масс системы из m материальных точек, если под массой i -й точки понимать величину ресурса a_i , размещенного в i -м поле, а под радиус-вектором – номер этого поля i , считая от «середины» m'_i . Таким образом, уравновешенность $E(\alpha)$ характеризует максимальное (по всем возможным перестановкам) абсолютное смещение положения «центра масс» разбиения α от его «середины»: чем больше значение уравновешенности $E(\alpha)$, тем меньше «центр масс» разбиения α смещен от «середины».

На рис. 2 показано распределение значений уравновешенности для (100, 10)-разбиений.



Рис. 2. Распределение значений уравновешенности для (100, 10)-разбиений

Обозначим через $\mathbb{R}(n, m)$ множество всех (n, m) -разбиений. Справедлива оценка

$$(15) \quad -m' \leq \mathbf{E}(\alpha) \leq 0, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}(n, m)$$

$$m' = \begin{cases} (m - 1)/2 & \text{при нечетном } m, \\ m/2 & \text{при четном } m, \end{cases}$$

где оценка снизу достигается на разбиении вида $\{n, 0, \dots, 0\}$, а оценка сверху – на равномерном разбиении $\{n/m, \dots, n/m\}$, когда n/m – целое.

Сложность алгоритма вычисления $\mathbf{E}(\alpha)$ не превосходит $\mathcal{O}(m^2)$, поскольку максимум в (14) достигается на разбиениях, упорядоченных по возрастанию или по убыванию, а такое упорядочение любой последовательности размерности m возможно за $\mathcal{O}(m^2)$ операций сравнения.

Очевидно, значение функции $L(\alpha, \beta)$ вычисляется с полиномиальной трудоемкостью, когда разбиение α является в точности равномерным (n/m – целая величина). Например, рассмотрим пару (63, 7)-разбиений, где α – равномерное разбиение, а $\beta = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 21\}$ (таблица 4).

В этом случае, очевидно, $B(\alpha, \beta) = 1$ (разбиение α выигрывает 4 поля при любой перестановке полей) и нормированное значение $L(\alpha, \beta)/m!$ также в точности равно 1. Вычисление точного значения платежа в игре Лотто в данном случае требует не более $\mathcal{O}(m^2 \log n)$ операций.

Несложно найти разбиение, которое выигрывает в игру Лотто у равномерного разбиения. Пусть m – нечетное и n/m – целое. Достаточно на $(m - 1)/2 + 1$ полях «максимально равномерно»

Таблица 4. I^* -матрица для $(63, 7)$ -разбиений, одно из которых равномерное

α	9	9	9	9	9	9	9	$S^*(\alpha, \beta) = 28$
$R^*(\alpha, \beta)$	4	4	4	4	4	4	4	
β	21	12	10	8	6	4	2	$S^*(\beta, \alpha) = 21$
$R^*(\beta, \alpha)$	7	7	7	0	0	0	0	

разместить весь ресурс – например, в нашем случае таким будет разбиение $\beta = \{16, 16, 16, 15, 0, 0, 0\}$ – чтобы это разбиение всегда выигрывало у равномерного.

3. Приближенное вычисления результатов игры Лотто для пары разбиений

В предыдущем разделе показаны два (в принципе совершенно аналогичных) способа описания игры полковника Лотто пары разбиений: I -матрица и I^* -матрица. Результат этой игры – платежные функции $S(\alpha, \beta)$ и $S^*(\alpha, \beta)$ – вычисляются за полиномиальное по m время и везде в дальнейшем приняты в качестве приближенного значения функции $L(\alpha, \beta)$.

Рассмотрим основания для такого подхода.

Пусть задана пара (n, m) -разбиений $\alpha = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$, $\beta = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ и Θ_m – множество всех $m!$ перестановок α . Обозначим через $\Delta w(\alpha, \beta)$ и $\Delta l(\alpha, \beta)$, соответственно, долю ожидаемых выигрышей и проигрышей разбиения α при реализации всех $m!$ перестановок α . Заметим, что $\Delta w(\alpha, \beta) = \Delta l(\beta, \alpha)$, а $\Delta l(\alpha, \beta) = \Delta w(\beta, \alpha)$.

Утверждение 1. Пусть рассматривается симметричная игра полковника Лотто для пары (n, m) -разбиений (α, β) и функция платежа $L(\alpha, \beta)$ задана в соответствии с (6). Тогда

1) Если $S^*(\alpha, \beta) \neq S^*(\beta, \alpha)$, то $\text{sign}(\Delta w(\alpha, \beta) - \Delta l(\alpha, \beta)) = \text{sign}(S^*(\alpha, \beta) - S^*(\beta, \alpha))$.

2) Если $S^*(\alpha, \beta) = S^*(\beta, \alpha)$, то могут существовать та-

кие пары разбиений (α, β) , для которых $\Delta w(\alpha, \beta) \neq \Delta l(\alpha, \beta)$.

Доказательство. Прежде всего воспользуемся замечанием в [13] о том, что в случае, когда смешанные стратегии в игре Лотто реализуются с вероятностью $1/m!$ для каждой из $m!$ перестановок, не только цены игры Лотто и игры Блотто совпадают, но и множество оптимальных стратегий игры Лотто отображаются в оптимальные стратегии игры Блотто. Это замечание дает нам основание использовать результаты, полученные в [18], для несимметричных игр Блотто.

Основным приемом, который позволяет это сделать, станет следующее. При построении I^* -матрицы любой симметричной игры пары разбиений α и β , такой игре с одинаковым ресурсом n однозначно соответствует несимметричная игра векторов «потенциальных ресурсов» $R^*(\alpha, \beta)$ и $R^*(\beta, \alpha)$. При этом значения самих потенциальных ресурсов $S^*(\alpha, \beta)$ и $S^*(\beta, \alpha)$ не зависят от перестановок значений в полях исходных разбиений α и β .

Для несимметричных игр разбиений известны оценки, полученные в [18], которые позволяют связать долю выигранных и проигранных полей как функцию величин ресурсов игроков при условии, что ресурс в каждом поле равномерно выбирается из целочисленного интервала $[0, 2 \cdot (\text{ресурс игрока})/m]$. При условии, что отношение ресурсов слабого (R_w) и сильного (R_s) игрока удовлетворяют неравенству $2/m \leq R_w/R_s \leq 1$, единственный равновесный по Нэшу платеж, т.е. математическое ожидание доли выигранных полей, будет задаваться для слабого игрока $\Delta w_w = R_w/2R_s$ и для сильного $\Delta w_s = 1 - \Delta w_w$.

Условие по максимальной величине ресурса в нашем случае выполняется всегда, поскольку максимальный потенциальный ресурс не превосходит $(m - 1)^2$, а максимальный ресурс каждого поля не больше m .

Теперь рассмотрим два случая из [18]: а) когда $2/m \leq R_w/R_s \leq 1$ и б) когда $1/(m - 1) \leq R_w/R_s \leq 2/m$. Пусть для величины потенциальных ресурсов $S^*(\alpha, \beta) > S^*(\beta, \alpha)$. Тогда $S^*(\alpha, \beta)$ соответствуют тому, что в [18] обозначено как R_s , а $S^*(\beta, \alpha)$ – как R_w . Для потенциальных ресурсов справедливо

$S^*(\alpha, \beta) + S^*(\beta, \alpha) \leq m^2$. Таким образом, случай а) не будет выполняться только когда $S^*(\alpha, \beta) = m$, $S^*(\beta, \alpha) = (m - 1)^2$, т. е. когда одно разбиение максимально неуравновешенно. Но для такой пары разбиений будет выполняться случай б).

В случае а) ожидаемая доля выигранных полей Δw_w для противника с меньшим ресурсом будет $\frac{S^*(\beta, \alpha)}{2S^*(\alpha, \beta)}$, и для противника с большим ресурсом $\Delta w_s = 1 - \Delta w_w$.

В случае б) ожидаемая доля выигранных полей Δw_w для противника с меньшим ресурсом будет $\frac{2}{m} - \frac{2S^*(\beta, \alpha)}{m^2 S^*(\alpha, \beta)}$ и для противника с большим ресурсом $\Delta w_s = 1 - \Delta w_w$.

В обоих случаях, если $S^*(\alpha, \beta) > S^*(\beta, \alpha)$, то $\Delta w(\alpha, \beta) > \Delta w(\beta, \alpha)$. Иными словами, математическое ожидание доли выигранных полей в игре полковника Лотто будет строго больше (строго меньше) у того разбиения, чья величина потенциального ресурса относительно противника строго больше (строго меньше).

Для иллюстрации второго пункта из утверждения 1 приведем пример для (8, 4)-разбиений. Пусть разбиение $\alpha = \{4, 2, 2, 0\}$, а $\beta = \{5, 3, 0, 0\}$. В таблице 5 представлена I*-матрица для этой пары разбиений.

Таблица 5. I*-матрица для пары (8, 4)-разбиений

α	4	2	2	0	$S^*(\alpha, \beta) = 7$
$R^*(\alpha, \beta)$	3	2	2	0	
β	5	3	0	0	$S^*(\beta, \alpha) = 7$
$R^*(\beta, \alpha)$	4	3	0	0	

Значения $S^*(\alpha, \beta)$ и $S^*(\beta, \alpha)$ для этих разбиений совпадают, однако, как видно из таблицы 6, доля выигрышей $\Delta w(\alpha, \beta) = 3/12$ не равна доле проигрышей $\Delta l(\alpha, \beta) = 4/12$.

В таблице 7 приведены экспериментально полученные [1, exp-contraryPairs.hs] для некоторых значений n и m количественные оценки таких пар разбиений (α, β) , для которых по-

Таблица 6. Результаты игр Блотто всех перестановок разбиения 4220 с разбиением 5300

α	$\beta = 5300$		
	Выигрыш	Ничья	Проигрыш
4220	0	0	1
4202	0	0	1
4022	0	1	0
2420	1	0	0
2240	0	0	1
0224	0	1	0
2024	0	1	0
2204	0	0	1
0422	1	0	0
0242	0	1	0
2042	0	1	0
2402	1	0	0
Σ	3	5	4

тенциальные ресурсы $S^*(\alpha, \beta)$ и $S^*(\beta, \alpha)$ оказываются равными, однако доля выигрышей не совпадает с долей проигрышей: $\Delta w(\alpha, \beta) \neq \Delta l(\alpha, \beta)$.

4. Результаты вычислительных экспериментов с «эффективными» support-стратегиями

В предыдущих разделах были предложены некоторые возможности изучения известных классов игр вида игр Блотто и игр Лотто в рамках общих подходов комбинаторного поиска теории алгоритмов. Достоинством такого подхода следует считать возможность получения полиномиально доступных численных результатов и, как следствие, экспериментальное исследование различных моделей соревновательных процессов в самых разнообразных прикладных проблемах: экономических, социальных и

Таблица 7. Количество всех возможных пар разбиений (α, β) из множества (n, m) -разбиений, для которых $\mathbf{S}^*(\alpha, \beta) = \mathbf{S}^*(\beta, \alpha)$ и $\Delta w(\alpha, \beta) = \Delta l(\alpha, \beta)$ либо $\Delta w(\alpha, \beta) \neq \Delta l(\alpha, \beta)$. Порядок разбиений в паре не учитывается, т.е. (α, β) и (β, α) – одна и та же пара

n	m	$\Delta w \neq \Delta l$	$\Delta w = \Delta l$	Общее количество всех пар
4	2	0	3	3
6	3	0	7	21
9	3	0	21	66
8	4	1	27	105
12	4	12	118	561
16	4	50	386	2 016
10	5	3	52	435
15	5	70	308	3 486
25	5	2 209	4 672	70 876
12	6	25	179	1 653
18	6	360	1 535	19 701
24	6	2 789	9 687	141 246
30	6	14 483	47 648	726 615
36	6	59 393	191 735	2 956 096

биологических. В последние годы в математической теории игр заметно усилился и интерес к алгоритмическим методам изучения игр и к проведению разного рода экспериментальных исследований [9].

По существу, наша работа примыкает именно к направлению экспериментального изучения эффективного поведения игроков в соревнованиях (contests) самого разного вида. В данном разделе будут показаны результаты компьютерного моделирования, которые (по крайней мере, частично) отвечают на следующий общий вопрос: *как предложенные в работе характеристики конкретных числовых стратегий в играх разбиений могут помочь выбору подмножества «эффективных» (обладающих высокой способно-*

стью победить) стратегий.

Приведены результаты следующих классов:

- круговые турниры на множестве всех (n, m) -разбиений;
- командные турниры двух заранее выбранных подмножеств (n, m) -разбиений.

4.1. КРУГОВЫЕ ТУРНИРЫ

Пусть заданы числа n , m и все N (n, m) -разбиений. Круговым турниром будем называть турнир из N^2 поединков, где каждое разбиение встречается с каждым по одному разу, а победитель выявляется по суммарному значению платежной функции в игре полковника Лотто $L(\alpha, \beta)$ – круговой турнир первого рода, и по суммарному числу набранных очков $\text{sign } L(\alpha, \beta)$ (победа = 1, поражение = -1, ничья = 0) – круговой турнир второго рода.

В таблицах 8 и 9 приведены результаты круговых турниров первого и второго рода для $(7, 3)$ -разбиений.

Таблица 8. Результаты кругового турнира первого рода для $(7, 3)$ -разбиений

	700	610	520	511	430	421	331	322	Σ
700	0	-1	-1	-3	-1	-3	-3	-3	-15
610	1	0	0	-1	0	-2	-2	-3	-7
520	1	0	0	0	0	0	-1	-1	-1
511	3	1	0	0	1	-1	-1	-3	0
430	1	0	0	-1	0	0	1	2	3
421	3	2	0	1	0	0	0	-1	5
331	3	2	1	1	-1	0	0	1	7
322	3	3	1	3	-2	1	-1	0	8

Заметим, что сумма элементов правых столбцов таблиц 8 и 9 равны нулю, что является следствием «полноты» рассматриваемого кругового турнира всего множества разбиений при заданных n и m .

Таблица 9. Результаты кругового турнира второго рода для (7, 3)-разбиений

	700	610	520	511	430	421	331	322	Σ
700	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-7
610	1	0	0	-1	0	-1	-1	-1	-3
520	1	0	0	0	0	0	-1	-1	-1
511	1	1	0	0	1	-1	-1	-1	0
430	1	0	0	-1	0	0	1	1	2
421	1	1	0	1	0	0	0	-1	2
331	1	1	1	1	-1	0	0	1	4
322	1	1	1	1	-1	1	-1	0	3

Таблицы 8 и 9 не дают полного представления о выигрывающих способностях разбиений при больших значениях n и m . Потому на рис. 3, 4 показаны результаты моделирования в графическом виде турниров первого и второго рода для (36, 6)-разбиений. Эти графики показывают, как меняются результаты турнира в зависимости от способа оценки платежных функций. В круговом турнире первого рода локальные максимумы «выигрывающей способности» разбиений «монотонно» возрастают с местом в лексикографическом порядке. Наиболее «сильным» оказывается разбиение, наиболее близкое к оптимально сбалансированному. Но в турнирах второго рода подобная «монотонность» нарушается. Как следует из множества проделанных экспериментов, глобальный максимум силы, как правило, сдвигается влево.

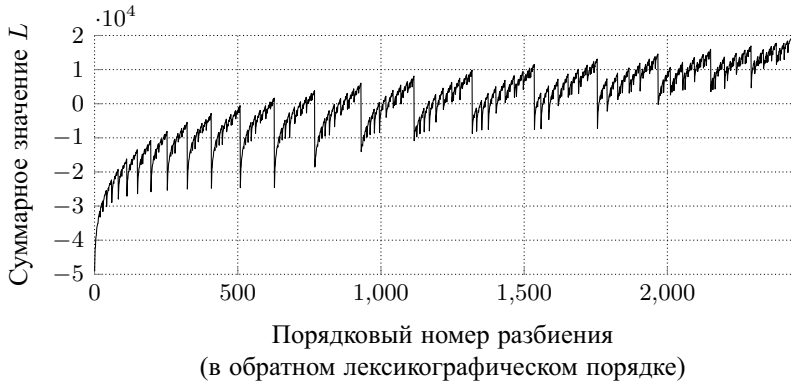


Рис. 3. Результаты кругового турнира первого рода для $(36, 6)$ -разбиений

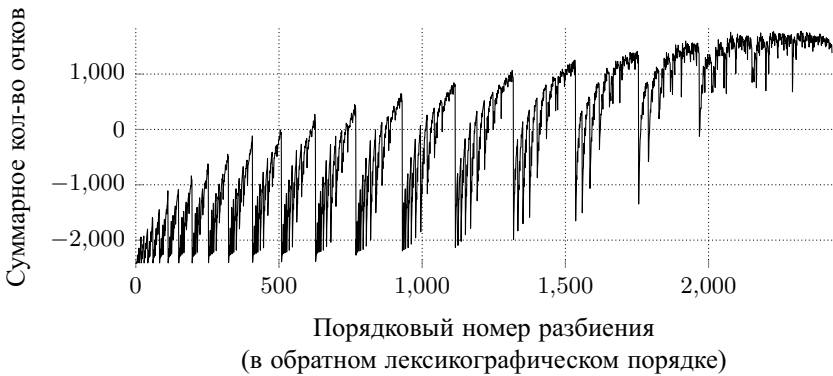


Рис. 4. Результаты кругового турнира второго рода для $(36, 6)$ -разбиений

4.2. КОМАНДНЫЕ ТУРНИРЫ

Определение 4. Назовем *классом разбиений* такое подмножество $\mathbb{C} = \mathbb{R}(I) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ множества всех возможных (n, m) -разбиений \mathbb{R} , для каждого разбиения α_i ($i \in [1, l]$) из которого выполняется некоторое условие I . Положительное число l будем называть *размером класса* \mathbb{C} .

Результаты компьютерного моделирования, приведенные в этом разделе, получены при следующих условиях:

а) Моделируется четыре командных турнира, в каждом из которых участвуют две команды: первая команда – \mathcal{C}_i – является подмножеством одного из четырех классов \mathbb{C}_i ($i \in [1, 4]$), а ее противником выступает команда $\mathcal{R}_i \subset \mathbb{R}$, $i \in [1, 4]$, сформированная из игроков множества всех $(100, 10)$ -разбиений. Каждый из четырех классов \mathbb{C}_i характеризуется определенными диапазонами значений собственного ресурса $\mathbf{S}^*(\alpha)$ и уравновешенности $\mathbf{E}(\alpha)$:

1) команда $\mathcal{C}_1 = \mathcal{R}_0$ – подмножество класса $\mathbb{C}_1 = \mathbb{R}$ (множество всех $(100, 10)$ -разбиений, $\mathbf{S}^*(\alpha) \in [0, 45]$, $\mathbf{E}(\alpha) \in [-5, 0]$);

2) команда $\mathcal{C}_2 = \mathcal{S}$ – подмножество класса $\mathbb{C}_2 = \mathbb{S}$ (множество «сильных» разбиений, $\mathbf{S}^*(\alpha) \in [43, 45]$, $\mathbf{E}(\alpha) \in [-5, 0]$);

3) команда $\mathcal{C}_3 = \mathcal{E}$ – подмножество класса $\mathbb{C}_3 = \mathbb{E}$ (множество «уравновешенных» разбиений, $\mathbf{S}^*(\alpha) \in [0, 45]$, $\mathbf{E}(\alpha) \in [-1, 0]$);

4) команда $\mathcal{C}_4 = \mathcal{SE}$ – подмножество класса $\mathbb{C}_4 = \mathbb{SE}$ (множество «сильных и уравновешенных» разбиений, $\mathbf{S}^*(\alpha) \in [43, 45]$, $\mathbf{E}(\alpha) \in [-1, 0]$).

б) В каждом командном турнире определяется размер участвующих команд (допускаются несимметричные размеры), игроки этих команд выбираются случайно и равномерно из соответствующих классов.

с) В каждом i -м командном турнире каждое разбиение из команды \mathcal{C}_i разыгрывает игру полковника Лотто с каждым разбиением из команды \mathcal{R}_i . Строится распределение доли «непроигранных» для команды \mathcal{C}_i против \mathcal{R}_i – отношение суммарного числа побед и ничей, определяемых значением $\text{sign } L(\alpha, \beta)$ (победа

= 1, поражение = -1, ничья = 0), к общему количеству партий.

На графиках 5, 6, 7 и 8 изображены гистограммы распределения долей «непроигрышей» для проведенных экспериментов, а в таблице ?? подробные численные результаты: количество разбиений в командах, их характеристики (диапазоны уравновешенности и собственного ресурса), а также первые четыре момента численных распределений полученных результатов.

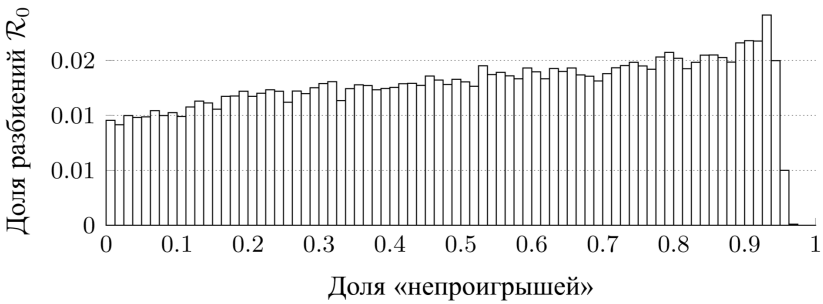


Рис. 5. Гистограмма распределения доли суммарного количества выигрышей и ничьих среди общего числа всех партий в турнире команды $C_1 = \mathcal{R}_0 \subset \mathbb{R}$ против $\mathcal{R}_1 \subset \mathbb{R}$

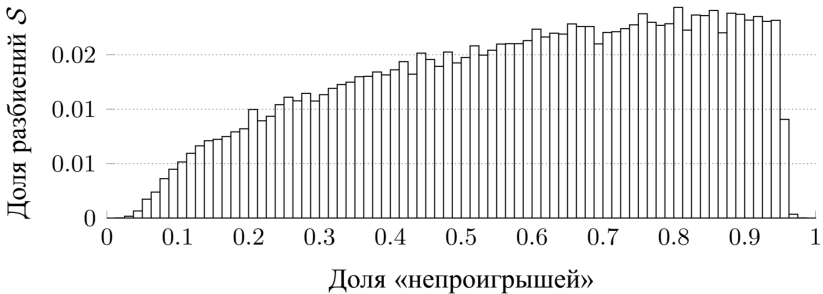


Рис. 6. Гистограмма распределения доли «непроигрышей» в командном турнире $C_2 = S \subset \mathbb{S}$ против $\mathcal{R}_2 \subset \mathbb{R}$

Основной вывод, который можно сделать по результатам экспериментов этого раздела состоит в следующем.

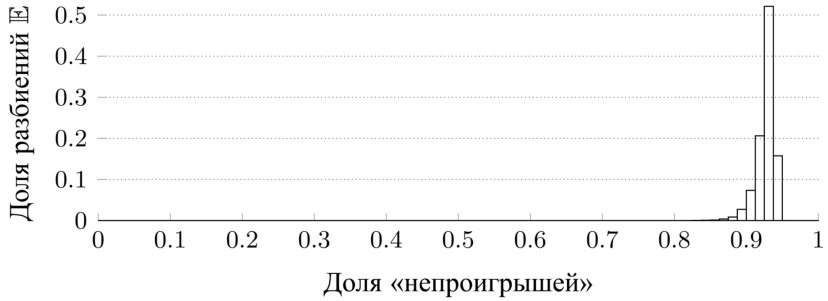


Рис. 7. Гистограмма распределения доли «непроигрышей» в командном турнире $\mathcal{C}_3 = \mathcal{E} = \mathbb{E}$ против $\mathcal{R}_3 \subset \mathbb{R}$

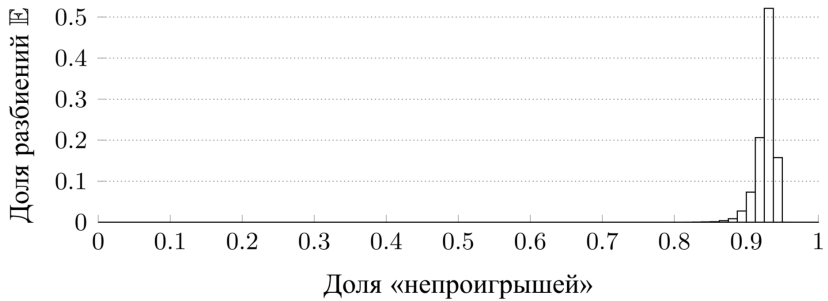


Рис. 8. Гистограмма распределения доли «непроигрышей» в командном турнире $\mathcal{C}_4 = \mathcal{SE} = \mathbb{SE}$ против $\mathcal{R}_4 \subset \mathbb{R}$

Таблица 10. Результаты командных турниров C_i против \mathcal{R}_i .

Класс команды C_i	Диапазон		Численность		Числовые характеристики доли «непроигршей» ¹ θ команды C_i в турнире с командой $\mathcal{R}_i \subset \mathbb{R}$				
	Собств. ресурса	Уравно-вешен.	Класса	Команды C_i	Команды противника \mathcal{R}_i	$M[\theta]$	$D[\theta]$	μ_3	μ_4
\mathbb{R}	[0, 45]	[-5, 0]	6 292 069	60 000	60 000	0.51444	0.07428	-0.14220	1.83737
S	[43, 45]	[-5, 0]	2 290 362	60 000	60 000	0.58334	0.05588	-0.28689	2.02625
E	[0, 45]	[-1, 0]	9 165	9 165	1 000 000	0.92685	0.00016	-1.90790	9.06557
S/E	[43, 45]	[-1, 0]	229	229	1 000 000	0.93716	0.00002	-1.20289	4.87540

¹ Отношение суммарного количества выигрышей и ничьих к общему числу партий для каждого игрока в команде C_i .

Характеристики «игроков», предложенные в работе – уравновешенность и собственный ресурс – безусловно влияют на «выигрывающие способности» игроков (стратегий). Выбрав «игроков» с параметрами из определенного диапазона можно гарантировать, что команда, составленная из них, выиграет у любой случайно взятой из всего множества разбиений команды с вероятностью не менее 0,93 и стандартным отклонением 0,04%.

5. Обсуждение

Основное отличие игр разбиений от большинства других моделей теории игр, с нашей точки зрения, состоит в возможности компьютерного моделирования для детального численного анализа структуры игровых стратегий. Это справедливо даже в случаях, когда множество игровых стратегий состоит из многих миллионов стратегий. Это уникальная возможность – до сих пор анализ игр с большим числом стратегий ограничивался установлением условий, при которых существует равновесия в смешанных стратегиях (антагонистические игры с постоянной суммой) или, в редких случаях, установлением наличия чистых выигрышных стратегий. Между тем, анализ множества игровых стратегий в целом ряде приложений теории игр оказывается не просто полезным, а абсолютно необходимым, ибо в противном случае не представляется возможным изучение динамики игры вообще и наличия эволюционно стабильных стратегий.

Какие проблемы позволяет решить (или как минимум прояснить) численный анализ структуры множества стратегий? Начнем с самого простого – возможно, даже тривиального обстоятельства – наличия оптимально сбалансированных разбиений. Само понятие баланса (уравновешенности) не нуждается в рекомендациях в связи с чрезвычайно частым применением как в теории оптимизации, так и в комбинаторике. В теории игр разбиений уже было показано (см., например, [11]), что именно оптимально сбалансированные стратегии для игр генерала Блотто являются уникальными стратегиями чистого равновесия. Подобное обстоятельство было отмечено [10] для класса стохастиче-

ских игр, когда платежная функция для каждого поля j игроков A и B (success function) является непрерывной вероятностной функцией $P(\frac{x(A,j)}{x(A,j)+x(B,j)})$, где $x(A, j)$ ($x(B, j)$) – величина ресурса в j -м поле для игрока A (B) и, кроме того, полезности (цены) всех полей для обоих игроков одинаковы. Однако в турнире, в котором около 6000 участников играли в игру полковника Блотто [5], те кто выбрал равномерное распределение ресурса по полям (таких было около 11%) показали результат значительно хуже равновесного и почти вдвое меньше результатов Тор-10.

Правдоподобное объяснение (которое приводят авторы [5], ссылаясь на психологические теории «глубины рассуждений») состоит в том, что большая часть участников отвергла этот вариант, заметив, как легко у него выиграть. Не менее важно то, что результат, показанный участником *турнира*, в первую очередь *зависит от состава* участников этого турнира. Говоря на языке теории игр – от того, какие support-стратегии они предпочитают. И здесь не обойтись без анализа класса «равновесных» разбиений, выяснению параметров которых посвящена большая часть работ в теории игр распределения ресурсов.

Наши численные эксперименты показывают, что, например, во множестве всех $(100, 10)$ -разбиений доля равновесных разбиений составляет $517\ 917/6\ 292\ 069 = 0,082$. Асимптотические оценки доли тех n разбиений на не более чем m частей, где каждая часть не превосходит l , можно найти в [2] и [4].

Правомерно поинтересоваться:

1) Можно ли полагать, что одни лишь равновесные стратегии представляют интерес?

2) Каковы возможные принципы уточнения представлений о рациональности игроков?

На первый вопрос ответ однозначно отрицательный, и на то есть несколько причин.

Причина первая связана с «жесткостью» стандартного определения равновесия в игре. Стоит рассмотреть возможность ϵ -

равновесия⁶ (см., например, [20]), как многие результаты теории существенно меняются. Так в широко известной игре «дилеммы узника» (в варианте игры, повторяющейся конечное число раз T , где платежи усредняются за T раундов) Нэш-равновесие достижимо лишь при стратегии «обманывать» в каждом раунде, а стратегия *tit-for-tat* (наиболее близкий по смыслу перевод – «око за око») не является равновесной. Однако стоит допустить возможность ϵ -равновесия (при некотором ϵ , зависящем, в частности, от числа периодов) – и *tit-for-tat* будет ϵ -равновесной стратегией.

Кроме того, анализ всего множества равновесных стратегий показывает, что они далеко не одинаковы с точки зрения «способности побеждать». Конечно, в идеализированной постановке равновесия по Нэшу, когда противники в одинаковой мере «рациональны» (в предположении, что подобное возможно в реальной жизни), достаточно ограничиться многократно установленными ограничениями на равновесность стратегий. В более правдоподобных обстоятельствах (*fictitious play*, турниры) выясняется, что «*All animals are equal, but some animals are more equal than others*»⁷. Первостепенными становятся вопросы: «как устроена игра», «кто твой противник». От ответа на эти вопросы в первую очередь зависит выбор «успешных» support-множеств. Показательный пример, явно демонстрирующий необходимость анализа стратегий даже максимально далеких от равновесия, дает «игра гладиаторов», впервые предложенная в [17]. В этой игре две команды гладиаторов встречаются в попарных поединках, в которых вероятность победы зависит от силы противников. Стратегия – выбор силы гладиаторов, входящих в команду. Оказывается – и это довольно ожидаемо – что когда суммарные силы команд не очень отличаются, то существует Нэш-равновесие, при котором силы гладиаторов должны распределяться равномерно.

⁶ Множество стратегий называется ϵ -аппроксимацией равновесия по Нэшу ($\epsilon > 0$), если изменением стратегии игрок может увеличить свою платежную функцию не более чем на ϵ .

⁷ «Все животные равны. Но некоторые животные равны более, чем другие» Дж. Оруэлл

Однако чем более неравны силы команд, тем более «неравновесным» должно быть распределение сил гладиаторов. В конце концов команда, которая суммарно много слабее, должна весь свой ресурс силы «передать» одному гладиатору (в наших обозначениях это разбиение номер один в обратном лексикографическом упорядочивании)⁸.

Хотя доля равновесных стратегий во всем множестве (n, m) -разбиений не велика, в абсолютном выражении она может быть весьма заметна. Насколько оправдан на практике предлагаемый в теории способ генерации всех таких стратегий, если попытаться оценивать трудоемкость подобного процесса. Пусть генерация одного разбиения требует одной единицы трудоемкости. Доля равновесных разбиений, например, во множестве всех $(100, 10)$ -разбиений, равна 0,082. Значит, при случайной генерации получение одного равновесного разбиения в среднем обойдется в 12 единиц трудоемкости. Кроме того, практически крайне трудно гарантировать действительную равномерность получаемых разбиений, а значит и получение гарантированных оценок дисперсии платежей в игре.

Не исключено, что более эффективным — особенно в модели игр с обучением — сгенерировать (например, с помощью алгоритма Н в [4]) все разбиения в обратном лексикографическом порядке, начиная с $2n/m$ (трудоемкость не превосходит утроенного числа всех таких разбиений). Имея все множество таких разбиений, можно заранее упорядочить их по «взаимной силе» и попытаться выяснить стратегию противника на основе его прошлых выборов. Решение подобной задачи уже будет зависеть от вычислительных ресурсов игроков (объема памяти, быстродействия), а также от представлений противников о величине допустимого стандартного отклонения значения накопленных платежей. Подобная постановка, по сути дела, означает возможность введения

⁸ Авторы статьи замечают, что это как раз случай Давида и Голиафа – войско филистимлян, будучи много сильнее, войска израильтян, но не обученное теории игр, приняло заведомо невыгодное для себя предложение единичного поединка.

материального коррелята понятия «рациональность».

Таким образом, первоначальные результаты компьютерного моделирования множества стратегий игр, как нам представляется, могут быть свидетельством важности этого подхода в алгоритмической теории игр.

Литература

1. БОЧАРОВ П.С. *Набор программ для компьютерного моделирования и анализа игр разбиений*. – [Электронный ресурс] – URL: <https://github.com/pbo/partition-games>.
2. ВЕРШИК А.М., ЯКУБОВИЧ Ю.В. *Предельная форма и флуктуации случайных разбиений натуральных чисел на фиксированное число слагаемых* // *Moscow Mathematical Journal*. – 2001. – Vol. 1, №3. – С. 457–485.
3. ГОРЯШКО А.П. *Теория игр: от анализа к синтезу. Обзор результатов проектирования рынков* // *Cloud of Science*. – 2014. – Т. 1, №1. – С. 112–154. – URL: <http://cloudfscience.ru/sites/default/files/pdf/CloudOfScience01010112.pdf>.
4. КНУТ Д.Э. *Искусство программирования. Том 4а*. – М.: Вильямс, 2013. – 960 с.
5. ARAD A., RUBINSTEIN A. *Multi-dimensional iterative reasoning in action: The case of the Colonel Blotto game* // *Journal of Economic Behavior & Organization*. – 2012. – No. 84. – P. 571–585.
6. BOREL E. *La theorie du jeu et les equations integrales a noyau symetrique* // *Comptes Rendus de l'Academie*. – 1921. – No. 173. – P. 1304–1308. English: Translated by Savage L.J. *The theory of play and integral equations with skew symmetric kernels* // *Econometrica*. – 1953. – No. 21. – P. 97–100.
7. BRANDT F., FISCHER F., HARRENSTEIN P. *On the Rate of Convergence of Fictitious Play* // *Theory of Computing Systems*. – 2013. – No. 53(1). – P. 41–52.

8. BROWN G.W. *Iterative Solutions of Games by Fictitious Play* // Activity analysis of production and allocation. – 1951. – No. 13(1). – P. 374–376.
9. DECHENAUX E., KOVENOCK D., SHEREMETA R.M. *A survey of experimental research on contests, all-pay auctions and tournaments* // Experimental Economics. – 2014. – P. 1–61.
10. FRIEDMAN L. *Game-theory models in the allocation of advertising expenditures* // Operations Research. – 1958. – No. 6. – P. 699–709.
11. GOLMAN R., PAGE S.E. *General Blotto: Games of Strategic Allocative Mismatch* // Public Choice. – 2009. – No. 138. – P. 279–299.
12. GROSS A., WAGNER R.A. *A continuous colonel Blotto game* // RAND Corporation RM-408, 1950. – 14 p.
13. HART S. *Discrete Colonel Blotto and General Lotto Games* // International Journal of Game Theory. – 2008 – No. 36. – P. 441–460.
14. HART S. *Allocation Games with Caps: From Captain Lotto to All-Pay Auctions* // International Journal of Game Theory. – 2016. – Vol. 45, Issue 1. – P. 37–61.
15. MOLDOVANU B., SELA A. *Contest Architecture* // Journal of Economic Theory. – 2006. – No. 126. – P. 70–96.
16. PAPADIMITRIOU C.H. *The complexity of finding Nash equilibria*. – Chapter 2. Algorithmic Game Theory. – 2007. – P. 29–51.
17. RINOTT Y., SCARSINI M., YU Y. *Probability Inequalities for a Gladiator Game*. – Jerusalem, 2011. – 571 p.
18. ROBERSON B. *The Colonel Blotto Game* // Econ. Theory. – 2006 – No. 29. – P. 1–24.
19. STAHL D.O., WILSON P.W. *On players models of other players: theory and experimental evidence* // Games and Economic Behavior. – 1995. – No. 10. – P. 218–254.
20. TSAKNAKIS H., SPIRAKIS P.G. *An optimization approach for approximate Nash equilibria* // In Internet and Network

Economics. – 2007. – Vol. 4858. – P. 42–56.

21. VAZIRANI V.V. *Combinatorial algorithms for market equilibria*. – Chapter 5. Algorithmic Game Theory, 2007. – P. 103–134.

ON ANALYSIS OF PARTITION GAMES

Pavel Bocharov, Wheely, Moscow, Head of Mobile Development (pavel@wheely.com).

Alexander Goryashko, Moscow Technological Institute, Doctor of Science, professor (petrovich4you@gmail.com).

Abstract: The paper examines disjoint subsets of strategies for the Lotto games in order to provide a criteria of their “relative strength”, i.e. to define which strategies are more likely to win. The proposed methods are based both on the results of simulation and analytical techniques from combinatorial search theory. We showed that analysis of disjoint subsets of the set of (n, m) -partitions allows one to choose strategies with high “winning ability”. Our focus is on the simulation of tournaments performed to check these assumptions. Actors in these elimination tournaments are the partitions and the payoffs are identical to that for the Lotto game. The simulation demonstrated that a contestant using the strategies from specially designed disjoint subsets wins with frequency near 0.9 in the elimination tournament if other contestants play the Nash equilibrium for the given (n, m) -partitions.

Keywords: game theory, colonel Blotto game, colonel Lotto game, partition, payoff function computing, tournament.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии Н.И. Базенковым.

Поступила в редакцию 06.06.2015.

Дата опубликования 31.05.2016.

УДК 51-74
ББК 32.973.26-018.2

АНАЛИЗ ПАТТЕРНОВ: ПОРЯДКОВО-ИНВАРИАНТНАЯ ПАТТЕРН-КЛАСТЕРИЗАЦИЯ^{1,2}

Мячин А. Л.³

*(Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики», Москва,
ФГБУН Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)*

Представлены новые алгоритмы выделения паттернов анализируемых наборов данных на основе методов порядково-фиксированной и порядково-инвариантной паттерн-кластеризации. Приведено описание предлагаемых методов и оценки вычислительной сложности. Рассмотрены примеры, демонстрирующие их особенности и поясняющие работу соответствующих процедур кластеризации. Сформулирована и доказана теорема о взаимосвязи кластеров, полученных в результате использования порядково-инвариантной паттерн-кластеризации с полными взвешенными орграфами. Этот результат делает возможным использование теории графов для исследования свойств полученных кластеров.

¹ Статья подготовлена в результате проведения исследования в рамках Программы фундаментальных исследований Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики» (НИУ ВШЭ) и с использованием средств субсидии в рамках государственной поддержки ведущих университетов Российской Федерации «5-100», а также при поддержке Лаборатории теории выбора и анализа решений Института проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН.

² Автор выражает благодарность д.т.н., проф. Алескерову Ф.Т. и к.т.н. Рубчинскому А.А. за помощь в написании данной статьи.

³ Алексей Леонидович Мячин (amyachin@hse.ru).

Ключевые слова: анализ паттернов; порядково-фиксированная паттерн-кластеризация; порядково-инвариантная паттерн-кластеризация; кластерный анализ.

1. Введение

В настоящее время понятие «паттерн» широко используется в самых различных сферах деятельности. Несмотря на то, что это понятие применялось в задачах обработки информации впервые более 50 лет назад [8], современное толкование этого термина сложилось относительно недавно. Согласно [1], «под паттерном понимается такая комбинация определённых, с точностью до погрешности, значений некоторого подмножества признаков, что объекты с этими значениями достаточно сильно отличаются от других объектов».

Ранее метод анализа паттернов успешно зарекомендовал себя при решении прикладных задач в ряде областей: анализе банковской сферы [2, 5], макроэкономике [4], политологии [6].

Предлагаются к рассмотрению две модификации метода анализа паттернов: порядково-фиксированная и порядково-инвариантная паттерн-кластеризация. Обе основаны на парном сравнении выбранных показателей, однако порядково-фиксированная паттерн-кластеризация использует одну, заранее заданную их последовательность, в то время как порядково-инвариантная паттерн-кластеризация рассматривает все возможные перестановки показателей. Приведены примеры, поясняющие предложенные методы.

2. Описание метода анализа паттернов

Метод анализа паттернов базируется на выявлении схожести показателей, характеризующих внутреннюю структуру исследуемых объектов. На его основе формируются кластеры, схожие по некоторой, заранее выбранной метрике, причём объекты различных кластеров существенно отличаются. При наличии информации о количественных значениях показателей исследуемых объектов, измеренной в последовательные момен-

ты времени, возможно построение траекторий развития как динамических групп, так и отдельных объектов, а также выявление неявных взаимосвязей исходных показателей.

Приведём общее описание метода.

Пусть имеется некоторое множество исследуемых объектов X , содержащее k элементов. Каждый объект $x_i \in X$ характеризуется набором m показателей, что будем записывать в векторной форме как $x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ij}, \dots, x_{im})$, где x_{ij} — значение j -го показателя i -го объекта.

С целью иллюстрации метода воспользуемся графическим представлением объектов в системе параллельных координат [7]. Данное представление использует m параллельных, обычно вертикальных и равномерно распределённых координатных осей, каждая из которых отражает один из выбранных показателей. Тогда каждый объект $x_i \in X$ изображается в виде кусочно-линейной функции с вершинами на параллельных осях. Далее, вводится некоторое множество кластеров Y , состоящее из номеров (имён, меток), а также функция $d(x_i, x_l)$, позволяющая оценить меру близости объектов x_i и x_l . Исходной задачей анализа является разбиение множества X на ν непересекающихся подмножеств (кластеров), содержащих близкие по метрике d объекты. При этом каждому объекту подмножества приписывается имя (метка, номер кластера) $y_i \in Y$.

В качестве иллюстрации рассмотрим пример данных из [2]. Исследуется множество, состоящее из трех гипотетических банков по трем показателям (А, В и С), описанным в таблице 1.

Таблица 1. Показатели гипотетических банков, используемые в анализе паттернов

	А	В	С
Банк 1	50	20	40
Банк 2	55	10	45
Банк 3	10	60	20

По приведённым показателям для каждого банка построим кусочно-линейные функции (рис. 1).

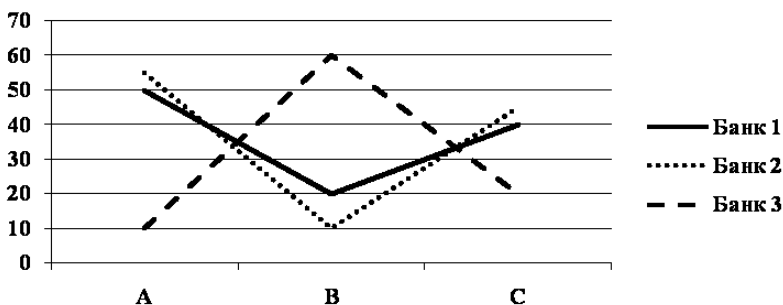


Рис. 1. Кусочно-линейные функции гипотетических банков

Рис. 1 демонстрирует, что банки 1 и 2 придерживаются схожих стратегий по выбранным показателям, тогда как стратегия банка 3 существенно отличается. В результате получим два подмножества. В первое входят банки 1 и 2, во второе – банк 3.

Следует отметить, что с целью разбиения исходного множества X на непересекающиеся подмножества возможно совместное использование методов анализа паттернов и методов кластерного анализа [9, 10].

3. Порядково-фиксированная паттерн-кластеризация

Опишем предлагаемый алгоритм порядково-фиксированной паттерн-кластеризации объектов множества X . С этой целью учтем характер парных отношений смежных показателей, а именно: объекту $x_i \in X$ ставится в соответствие последовательность символов $r_i^1, r_i^2, \dots, r_i^j, \dots, r_i^{m-1}$, где r_i^j определяется формулами

- (1) $r_i^j = 1$ при $x_{ij} < x_{i,j+1}$,
- (2) $r_i^j = 0$ при $x_{ij} = x_{i,j+1}$,
- (3) $r_i^j = 2$ при $x_{ij} > x_{i,j+1}$.

Отметим, что область значений, которую могут принимать базовые показатели исследуемого объекта, принадлежит множеству действительных чисел. С другой стороны, множество значений парных отношений, как правило, перечисляемо, т.е. дискретно и ограничено. Это дает возможность рассматривать последовательность символов $r_i^1, r_i^2, \dots, r_i^{m-1}$ как позиционный код $r_i^1, r_i^2, \dots, r_i^{m-1}$ некоторого числа. Такая трактовка делает удобным построение и оптимизацию автоматической процедуры кластеризации, поскольку позволяет, в частности, заменить операцию посимвольного сравнения кодов на арифметическую операцию сравнения двух чисел. В частности, возможно рассматривать последовательность $r_i^1, r_i^2, \dots, r_i^{m-1}$ в качестве позиционного десятичного кода числа q_i , формируемого посредством формулы

$$(4) \quad q_i = \sum_{j=1}^{m-1} 10^{j-1} r_i^{m-j}.$$

Такое представление привычно и удобно в использовании, а однозначность кодирования определяется однозначностью десятичной системы счисления.

Учитывая сделанное выше замечание, исследуемые объекты x_i будем характеризовать вектором значений базовых показателей $x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{im})$ и позиционным кодом $r_i = r_i^1 r_i^2 \dots r_i^{m-1}$, характеризующим значения парных отношений смежных показателей.

Процедуру кластеризации реализуем посредством оценки меры близости формируемых кодов, для чего может быть использовано расстояние Хемминга¹:

$$(5) \quad d(r_i, r_l) = \sum_{j=1}^{m-1} |r_i^j - r_l^j|.$$

Реализованный алгоритм предполагает, что:

- 1) при $d(r_i, r_l) = 0$ объекты x_i и x_l относятся к одному кластеру;

¹ Имеется в виду общий случай расстояния Хемминга для кодовых последовательностей одинаковой длины произвольного алфавита [3].

2) при $d(r_i, r_l) \neq 0$ объекты x_i и x_l относятся к разным кластерам.

Таким образом, исходное множество объектов X разбивается на ряд кластеров, число которых обозначим как v_{fix} . Дадим следующее определение.

Определение 1. Кластеризацию, проведенную описанным выше методом с заданной (т.е. с заранее фиксированной) последовательностью показателей, будем называть порядково-фиксированной паттерн-кластеризацией, а кластеры, полученные в результате ее проведения, соответственно, порядково-фиксированными паттерн-кластерами.

Определим максимальное число кластеров, на которое может быть разбито исходное множество при использовании указанной выше процедуры порядково-фиксированной паттерн-кластеризации – v_{fix}^{max} . С этой целью учтем, что рассматриваемая процедура кластеризации основана на сопоставлении кодовых последовательностей $r_i^1, r_i^2, \dots, r_i^j, \dots, r_i^{m-1}$, формируемых посредством выражений (1)–(3) для каждого объекта. Длина этих последовательностей равна $(m - 1)$. Выражения (1)–(3) определяют также и три возможных значения, которые может принимать каждый символ. Подставляя, получим, что число различных кодовых комбинаций равно $3^{(m-1)}$, и оно определяет максимально возможное число формируемых кластеров (когда каждый кластер содержит только один объект):

$$(6) \quad v_{fix}^{max} = 3^{(m-1)}.$$

Вычислительную сложность Z_{fix} порядково-фиксированной паттерн-кластеризации можно оценить следующим образом. Для каждого из k исследуемых объектов x_i требуется вычислить при помощи формул (1)–(3) $(m - 1)$ значений r_i^j . Далее, при формировании кластеров необходимо сравнить k расстояний Хемминга d . Известно, что возможное количество парных сочетаний равно $k(k - 1)/2$. Таким образом:

$$(7) \quad z_{fix} = \frac{k^2(k - 1)(m - 1)}{2}.$$

Продемонстрируем работу предложенного метода, используя данные примера 1. Банки 1–3 описываются векторами

$x_1 = (50; 20; 40)$; $x_2 = (55; 10; 45)$; $x_3 = (10; 60; 20)$ соответственно. Таким образом, работа каждого банка охарактеризована тремя показателями, для сопоставления которых необходимо провести 2 парных сравнения. Для Банка 1:

$$x_{11} > x_{12} \Rightarrow r_1^1 = 2; x_{12} < x_{13} \Rightarrow r_1^2 = 1.$$

Следовательно, формируемая кодовая последовательность имеет вид: $r_1 = (2, 1)$.

Для Банка 2: $x_{21} > x_{22} \Rightarrow r_2^1 = 2$; $x_{22} < x_{23} \Rightarrow r_2^2 = 1 \Rightarrow r_2 = (2, 1)$.

Для Банка 3: $x_{31} < x_{32} \Rightarrow r_3^1 = 1$; $x_{32} > x_{33} \Rightarrow r_3^2 = 2 \Rightarrow r_3 = (1, 2)$.

Соответствующие им десятичные представления находятся как

$$q_1 = \sum_{j=1}^2 10^{j-1} r_1^{m-j} = 21; \quad q_2 = \sum_{j=1}^2 10^{j-1} r_2^{m-j} = 21;$$

$$q_3 = \sum_{j=1}^2 10^{j-1} r_3^{m-j} = 12.$$

Для разделения банков по различным кластерам необходимо оценить расстояние Хемминга d между полученными кодовыми последовательностями:

$$d(r_1, r_2) = 0; d(r_1, r_3) \neq 0; d(r_2, r_3) \neq 0.$$

Полученные результаты демонстрируют идентичность кодировок паттернов банка 1 и 2. Таким образом, исходное множество из трех банков разделяется на 2 подмножества: первое образуют Банки 1 и 2, второе – Банк 3 (что согласуется с приведенным в разделе 2 результатом).

4. Порядково-инвариантная паттерн-кластеризация

В этом разделе предлагается иной метод анализа паттернов – порядково-инвариантная паттерн-кластеризация и рассматриваются отдельные его свойства. Для демонстрации лежащей в его основе идеи вновь рассмотрим множество, состоящее из трех гипотетических банков, однако с несколько иными значениями показателей, представленными в таблице 2.

Таблица 2. Показатели гипотетических банков

	A'	B'	C'
Банк 1	50	10	50
Банк 2	50	0	70
Банк 3	50	20	30

Используя значения таблицы 2, вновь построим кусочно-линейные функции (рис. 2).

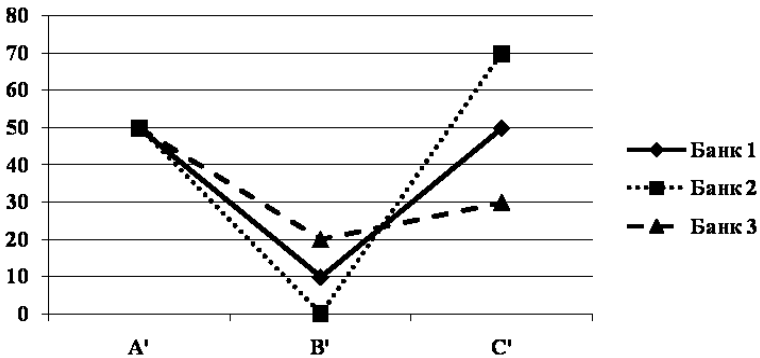


Рис. 2. Кусочно-линейные функции Банков 1, 2 и 3

Все три графика имеют схожий вид, что свидетельствует о возможности объединения их в единый кластер. Проверим этот вывод, используя процедуру порядково-фиксированной паттерн-кластеризации:

$$x_{12} < x_{13} \Rightarrow r_1^2 = 1; \quad x_{22} < x_{23} \Rightarrow r_2^2 = 1;$$

$$x_{32} < x_{33} \Rightarrow r_3^2 = 1.$$

Соответственно:

$$q_1 = \sum_{j=1}^2 10^{j-1} r_1^{m-j} = 21; \quad q_2 = \sum_{j=1}^2 10^{j-1} r_2^{m-j} = 21;$$

$$q_3 = \sum_{j=1}^2 10^{j-1} r_3^{m-j} = 21 \text{ и}$$

$$d(r_1, r_2) = 0; d(r_1, r_3) = 0; d(r_2, r_3) = 0.$$

Таким образом, согласно полученным результатам все три исследуемых банка можно объединить в единый кластер.

Однако проверим, сохранится ли данный вывод, если анализировать значения показателей A' , B' , C' в иной последовательности, например A' , C' , B' или B' , A' , C' .

Для наглядности построим кусочно-линейные функции (рис. 3).

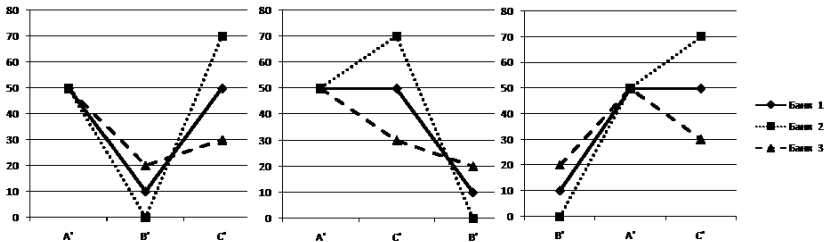


Рис. 3. Кусочно-линейные функции для различных последовательностей показателей A' , B' и C'

Рисунок наглядно демонстрирует, что кусочно-линейные функции теряют свою схожесть при изменении последовательности анализируемых показателей. Аналогичный вывод дает и метод порядково-фиксированной паттерн-кластеризации, примененный для случая рассматриваемых последовательностей показателей.

Основная идея метода порядково-инвариантной паттерн-кластеризации состоит в поиске и объединении в единые кластеры объектов, которые не меняют свою принадлежность кластеру при любом изменении последовательности анализируемых показателей.

Отметим, что само существование таких кластеров далеко не очевидно. Поэтому продемонстрируем саму возможность порядково-инвариантной паттерн-кластеризации, используя данные примера 1. Построим кусочно-линейные функции для различных последовательностей показателей A , B и C (рис. 4–6).

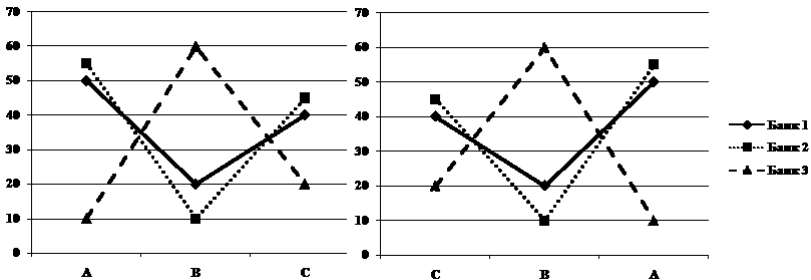


Рис. 4. Кусочно-линейные функции показателей «ABC» и «CBA»

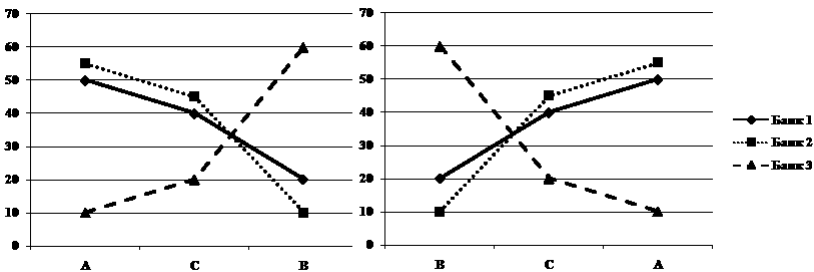


Рис. 5. Кусочно-линейные функции показателей «ACB» и «BCA»

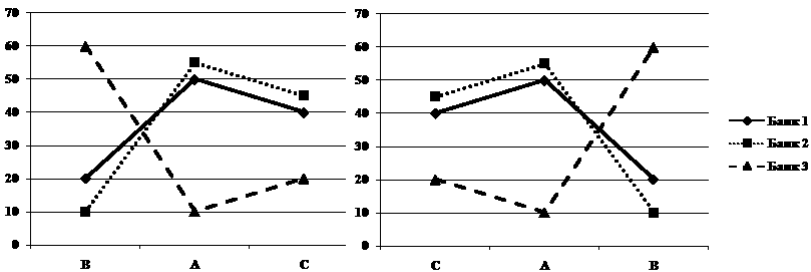


Рис. 6. Кусочно-линейные функции показателей «BAC» и «CAB»

Приведенный рисунок наглядно демонстрирует, что Банки 1 и 2 продолжают демонстрировать схожий, а Банк 3 – иной

характер кусочно-линейных функций, вне зависимости от последовательности рассматриваемых показателей.

Определение 2. Процедуру кластеризации, результат которой не зависит от последовательности показателей исследуемых объектов, будем называть «порядково-инвариантной паттерн-кластеризацией», а кластеры, полученные в результате ее применения, соответственно, порядково-инвариантными паттерн-кластерами.

Перейдем к непосредственному описанию метода. Как и ранее, исходные объекты определены множеством $X: |X| = k$. Каждый из объектов $x_i \in X, i = 1, 2, \dots, k$, представлен системой m показателей, что записывается в векторной форме как $x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{im})$. Значения символов r_i^j однозначно определены формулами (1)–(3).

Объекты представлены графически в системе параллельных координат. Учтем, что различная последовательность анализируемых показателей приводит в общем случае к построению различных кусочно-линейных функций и, как следствие, формированию различных порядково-фиксированных паттерн-кластеров. Поэтому для реализации порядково-инвариантной кластеризации необходимо выполнить порядково-фиксированную паттерн-кластеризацию для всех возможных перестановок исходных показателей и затем объединить те объекты, которые остаются в едином кластере вне зависимости от рассматриваемой последовательности показателей.

Число различных перестановок P_m по m показателям определяется формулой

$$(8) \quad P_m = m!,$$

что свидетельствует о высокой вычислительной сложности непосредственной реализации порядково-инвариантной паттерн-кластеризации при последовательном переборе всех возможных последовательностей исследуемых показателей. Однако в действительности не все комбинации нуждаются в рассмотрении. Так, например, использование прямой и обратной последовательности наборов значений показателей $(x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}, \dots, x_{i(m-1)}, x_{im})$ и $(x_{im}, x_{i(m-1)}, \dots, x_{i3}, x_{i2}, x_{i1})$ дает одинаковый результат кластеризации (что графически определяется рас-

смотрением кусочно-линейных функций «слева-направо» и «справа-налево»). Поэтому возможно рассмотрение не всех, а лишь половины возможных перестановок:

$$(9) \quad P'_m = \frac{m!}{2}.$$

Еще более существенное снижение числа необходимых к рассмотрению перестановок достигается путем применения доказанной ниже теоремы, которая позволяет не только снизить вычислительную сложность метода, но и является основой рассматриваемого алгоритма порядково-инвариантной паттерн-кластеризации.

Выполним следующее построение. Для каждого объекта построим полный, взвешенный орграф, вершины которого соответствуют значениям показателей, а веса ребер – значениям парных отношений (определяемых выражениями 1–3). На данном этапе будем полагать, что каждые две вершины орграфа соединяются двумя ребрами, имеющими противоположные направления. В этом случае произвольная последовательность анализируемых показателей объекта определяет конкретный гамильтонов путь в рассматриваемом орграфе. Множество всех возможных перестановок показателей соответствует множеству всех возможных гамильтоновых путей орграфа.

Теорема. Два объекта x_1 и x_2 , описанные векторами $x_1 = (x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1m})$ и $x_2 = (x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2m})$ соответственно, принадлежат одному порядково-инвариантному паттерн-кластеру тогда и только тогда, когда они могут быть представлены полными взвешенными орграфами G_1 и G_2 с идентичными весами ребер (определяемых выражениями 3–5), соединяющих их соответственные вершины.

Доказательство. Пусть два объекта x_1 и x_2 принадлежат одному порядково-инвариантному паттерн-кластеру. Рассмотрим произвольную последовательность анализируемых показателей. Этой последовательности соответствует определенный гамильтонов путь в орграфах G_1 и G_2 .

Согласно условию, объекты x_1 и x_2 принадлежат одному порядково-инвариантному паттерн-кластеру. Это означает, что

отношения между значениями соседних показателей, определяемых формулами (1)–(3), одинаковы для обоих объектов. Повторяя это рассуждение для всех возможных гамильтоновых путей, охватывающих все ребра графов G_1 и G_2 , приходим к утверждению теоремы о идентичности весовых значений их ребер, соединяющих соответственные вершины.

Обратно, пусть два объекта $x_1 = (x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1m})$ и $x_2 = (x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2m})$ представлены полными взвешенными орграфами G_1 и G_2 , а вес ребер, соединяющие соответственные вершины в обоих графах, имеет одинаковые значения. Рассмотрим произвольную последовательность исследуемых показателей. Этой последовательности соответствует одинаковый гамильтонов путь в обоих графах. Поскольку, в силу условия, ребра гамильтоновых путей, соединяющих соответственные вершины, имеют одинаковые значения, то и отношения значений показателей соответственных вершин идентичны, что означает принадлежность объектов к одному порядково-фиксированному паттерн-кластеру. Повторяя данное рассуждение для всех возможных последовательностей исследуемых показателей, приходим к выводу о принадлежности обоих объектов одному порядково-фиксированному паттерн-кластеру вне зависимости от самой последовательности, что и определяет их принадлежность одному порядково-инвариантному паттерн-кластеру.

Теорема доказана.

Доказанная выше теорема о взаимном соответствии объектов, принадлежащих порядково-инвариантному паттерн-кластеру, и полного взвешенного орграфа позволяет использовать его в качестве удобного инструментария графического представления и исследования свойств порядково-инвариантных паттерн-кластеров.

Выше предполагалось, что две вершины V_{if} и V_{ig} полного взвешенного орграфа соединяются двумя ребрами $V_{if}V_{ig}$ и $V_{ig}V_{if}$, имеющими противоположные направления и различные веса. Это предположение является удобным для построения произвольных гамильтоновых путей орграфа, однако является избыточным для описания порядково-инвариантных паттерн-

кластеров, поскольку вес ребра $V_{if}V_{ig}$, определяемый выражениями (1)–(3), однозначно определяет вес ребра обратного направления $V_{ig}V_{if}$.

Следствием этого является возможность выбора направлений ребер орграфа, удобного с точки зрения анализа данных и программной реализации порядково-инвариантной паттерн-кластеризации.

Опишем используемый алгоритм порядково-инвариантной паттерн-кластеризации, основанный на доказанной выше теореме.

Для каждого объекта формируется характеризующий его орграф. Для удобства программной реализации использована процедура последовательного обхода вершин графа с формированием ребер по направлению от заданной вершины ко всем последующим, как это показано на рис. 7 (направление ребер не указано для простоты рисунка).

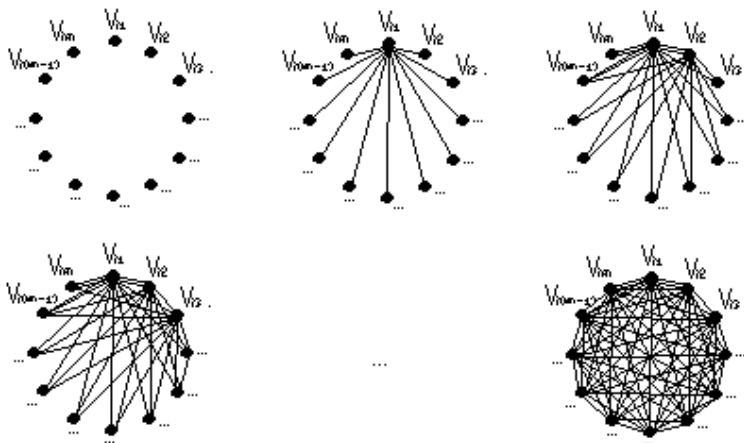


Рис. 7. Формирование орграфа порядково-инвариантного паттерн-кластера

Далее, используя выражения (1)–(3), определяются весовые значения каждого ребра. Поскольку каждая пара вершин фор-

мируемого орграфа соединена одним ребром, то их общее число u_{inv} определяется известным выражением:

$$(10) u_{inv} = \frac{m(m-1)}{2},$$

что и определяет количество необходимых парных сравнений для формирования весовых значений.

Далее реализуется процедура кластеризации, которая (согласно теореме) помещает в единый кластер объекты, характеризующиеся сформированными орграфами с идентичными весовыми показателями соответственных ребер.

Выше качественно (на основании графиков) продемонстрирована идея порядково-инвариантной паттерн-кластеризации, используя данные примера 1, представленные в таблице 1. Вновь воспользуемся этими данными, чтобы наглядно продемонстрировать работу алгоритма порядково-инвариантной паттерн-кластеризации.

Отметим, что таблица 1 содержит данные объектов (банков), работа которых характеризуется тремя показателями: А, В и С. Каждому из этих объектов поставим в соответствие полный взвешенный орграф, число вершин которого $m = 3$, а их значения соответствуют значениям показателей А, В и С соответствующего объекта (рис. 8). Число ребер, вес которых определяется характером отношений соединяемых вершин (см. формулы 1–3), также равно трем.

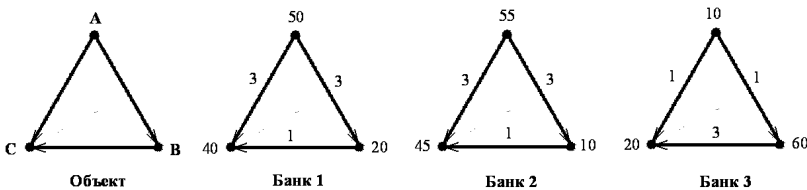


Рис. 8. Представление объектов таблицы 1 в форме полных взвешенных орграфов

Максимальное число возможных последовательностей расположения показателей А, В и С определяется формулой (8):

$P_3 = 3! = 6$. Однако, как отмечалось выше, для реализации порядково-инвариантной паттерн-кластеризации нет необходимости рассматривать их все. Достаточно ограничиться числом ребер формируемого орграфа, определяемого формулой (10):

$$u_{inv} = \frac{m(m-1)}{2} = 3.$$

Поэтому ограничимся тремя последовательностями показателей, выбрав для наглядности ABC, ACB и BAC (данные последовательности выбраны в качестве примера для наглядного сопоставления с рис. 5–7). Возможно также использование как обратных последовательностей (CBA, BCA и CAB), так и их комбинаций. Запишем соответствующие им позиционные коды, определяемые (с учетом направления) весовыми значениями ребер графа, согласно формулам (1)–(3).

Таблица 3. Кодировки гипотетических банков

Объект	Значение формируемого кода для рассматриваемой последовательности показателей		
	ABC	ACB	BAC
Банк 1	21	22	12
Банк 2	21	22	12
Банк 3	12	11	21

Как видно из приведенной таблицы, значение формируемых кодов Банков 1 и 2 совпадает для всех анализируемых последовательностей показателей, что предопределяет нулевое значение расстояния Хемминга между кодовыми последовательностями. Поэтому, Банк 1 и Банк 2 помещают в один порядково-инвариантный паттерн-кластер. Банк 3, соответственно, размещается в другом порядково-инвариантном паттерн-кластере. Отметим, что полученный результат полностью согласуется с результатом, полученным ранее графически.

5. Заключение

Описан алгоритм выделения паттернов на основе предложенного метода «порядково-инвариантной паттерн-кластеризации». Приведены примеры, поясняющие суть метода и работу соответствующей процедуры кластеризации.

Сформулирована и доказана теорема, описывающая представление порядково-инвариантных паттерн-кластеров в форме полных взвешенных орграфов. Возможность установления взаимно однозначного соответствия паттерна порядково-инвариантного паттерн-кластера и соответствующего ему полного взвешенного орграфа позволяет использовать методы теории графов для исследования свойств таких кластеров.

В связи с простотой использования и невысокой вычислительной сложностью предложенный метод позволяют не только обрабатывать большие массивы данных, но и существенно снижать временные затраты.

Литература

1. АЛЕСКЕРОВ Ф.Т., БЕЛОУСОВА В.Ю., ЕГОРОВА Л.Г. и др. *Анализ паттернов в статистике и динамике. Часть 1: Обзор литературы и уточнение понятия* // Бизнес-информатика. – 2013. – Т. 3. – С. 3–18.
2. АЛЕСКЕРОВ Ф.Т., СОЛОДКОВ В.М., ЧЕЛНОКОВА Д.С. *Динамический анализ паттернов поведения коммерческих банков России* // Экономический журнал Высшей школы экономики. – 2006. – Т. 10, №1. – С. 48–62.
3. БЛЕЙХУТ Р. *Теория и практика кодов, контролирующих ошибки*. – М.: Мир, 1986. – 576 с.
4. ALESKEROV F., ALPER C.E. *A clustering approach to some monetary facts: a long-run analysis of cross-country data* // The Japanese Economic Review. – 2000. – Vol. 51, No. 4. – P. 555–567.
5. ALESKEROV F., ERSEL H., YOLALAN R. *Multicriterial Ranking Approach for Evaluating Bank Branch Performance* //

- International Journal of Information Technology and Decision Making. – 2004. – Vol. 3, No. 2. – P. 321–335.
6. ALESKEROV F., NURMI H. *A method for finding patterns of party support and electoral change: An analysis of British general and Finnish municipal elections* // *Mathematical and Computer Modelling*. – 2008. – Vol. 48. – P. 1385–1395.
 7. FEW S. *Multivariate Analysis Using Parallel Coordinates*. – 2006. – [Электронный ресурс] – URL: http://www.perceptualedge.com/articles/b-eye/parallel_coordinates.pdf (дата обращения: 11.01.2016).
 8. FISHER R.A. *The use of multiple measurements in taxonomic problems* // *Annals of Eugenics*. – Vol. 7. – 1936. – P. 179–188.
 9. MIRKIN B. *Summary and semi-average similarity criteria for individual clusters, in: Models, Algorithms, and Technologies for Network Analysis* / Ed. by B.I. Goldengorin, V.A. Kalyagin, P.M. Pardalos. – Vol. 59. – NY: Springer, 2013. – P. 101–126.
 10. MIRKIN B. *Clustering for Data Mining: A Data Recovery Approach*. Boca Raton: Chapman-Hall/CRC. – Taylor and Francis Group, 2005. – 350 p.

PATTERN ANALYSIS: ORDINAL-INVARIANT PATTERN-CLUSTERING

Alexey Myachin National Research University Higher School of Economics, Moscow, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, (amyachin@hse.ru).

Abstract: New algorithms of patterns analysis based on methods of ordinal-fixed and ordinal-invariant pattern clustering are developed. The definition of the proposed methods as well as the evaluation of the computational complexity is given. We provide some examples that demonstrate features of these clustering procedures and explain their operation. We also formulate and prove the theorem on the interconnection of clusters obtained by the use of ordinal-invariant pattern-clustering with complete weighted digraphs. These results allow to apply graph theory for the study of properties of obtained clusters.

Keywords: pattern analysis; ordinal-fixed pattern clustering; ordinal-invariant pattern clustering; cluster analysis.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии Н.И. Базенковым

*Поступила в редакцию 13.01.2016.
Опубликована 31.05.2016.*

УДК 62.50
ББК В161.84я43

ПАССИВНОСТЬ И СТАБИЛИЗАЦИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ПОВТОРЯЮЩИХСЯ ПРОЦЕССОВ¹

Емельянов М. А.²

*(Арзамасский политехнический институт Нижегородского
государственного технического университета
им. Р.Е. Алексеева, Арзамас)*

Модели в виде повторяющихся процессов являются базовыми при проектировании систем управления с итеративным обучением, получивших широкое распространение в различных областях техники. Они представляют собой одну из разновидностей так называемых 2D-систем. В данной работе для нелинейных повторяющихся процессов предлагается обобщение понятия пассивности и новое понятие векторной функции накопления, которые затем используются для решения задачи стабилизации. Результаты обобщаются на случай повторяющихся процессов с возможными нарушениями, моделируемыми марковской цепью с конечным числом состояний. Эти новые результаты применяются к синтезу управления с итеративным обучением в условиях информационных нарушений. Приводится пример.

Ключевые слова: повторяющиеся процессы, нелинейные 2D-системы, нелинейные дифференциальные повторяющиеся процессы, пассивность, стабилизация, управление с итеративным обучением.

¹ Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проекты №-№ 16-38-00304 мол а, 16-08-00916 а).

Автор выражает благодарность проф. П.В. Пакишину, проф. К. Галковскому и проф. Э. Роджерсу за ценное обсуждение содержания статьи.

² Михаил Александрович Емельянов, аспирант, (607227, г. Арзамас, ул. Калинина, д. 19, АПИ НГТУ им. Р.Е. Алексеева, кафедра прикладной математики, mikhailmelianov@arzasmas.ru).

Введение

Функционирование многих технических систем управления сводится к выполнению последовательности циклов, называемых повторениями, каждый из которых протекает в течение определённого ограниченного отрезка времени, называемого длительностью повторения [17]. После окончания каждого цикла система возвращается в начальное состояние и начинает выполнять новый цикл. Выходная переменная в таких системах называется профилем повторения. Эти системы относятся к классу так называемых 2D-систем, в которых динамические процессы зависят от двух переменных, в рассматриваемом случае – от времени на текущем цикле повторения и от номера цикла повторения. Важным практическим примером может служить система автономного патрулирования территории [7], которая состоит из двух основных компонент, а именно: беспилотного летательного аппарата и автономных наземных датчиков. Эта система используется для беспилотного патрулирования территории, обнаружения нарушителей, захвата требуемой цели и быстрой передачи информации о местонахождении оператору. Здесь профилем повторения является заданная замкнутая траектория патрулирования и целью является минимизация общего расстояния, пройденного беспилотным летательным аппаратом за цикл патрулирования. В течение каждого цикла патрулирования летательный аппарат проходит каждый из автономных наземных датчиков и для формирования траектории использует как текущую информацию, так и информацию с предыдущего пролета (цикла патрулирования). Одной из основных задач в данном случае является уменьшение возможных отклонений от заданной траектории, размах которых может возрастать от повторения к повторению. При появлении подобных отклонений необходимо скорректировать траекторию с целью восстановления нормального процесса патрулирования. Решением данной задачи может являться использование управления с итеративным обучением, т.е управление на текущем пролете по траектории должно использовать информацию, получен-

ную на предыдущем пролете по траектории с целью коррекции управления, направленной на уменьшение отклонения от желаемой траектории. Такая задача не может быть решена стандартными методами теории управления, поскольку здесь должен учитываться двумерный характер динамики системы, т.е. зависимость динамических свойств от двух переменных: времени на текущем повторении и номера повторения.

Алгоритмы управления с итеративным обучением начали также получать распространение в мультиагентных системах для решения задачи управления множеством связанных информационной сетью динамических систем (агентов), в частности, беспилотных летательных аппаратов [7, 14]. Для исследования таких систем в рамках линейных моделей была разработана строгая теория устойчивости [17], основанная на изучении свойств некоторого линейного оператора в банаховом пространстве. Эта теория была применена к синтезу управления с итеративным обучением портальным роботом, где результаты были доведены до эксперимента, подтвердившего ее высокую эффективность [13]. Существующие алгоритмы построения управления для повторяющихся процессов не могут быть применены в нелинейной постановке, следовательно возникает необходимость в разработке строгой теории устойчивости для нелинейных повторяющихся процессов. Важные примеры нелинейных повторяющихся процессов представлены в [19], где проводятся исследования относительно включения смарт-устройств в систему работы ротора ветрогенератора в сочетании с управлением с итеративным обучением для повышения качественных характеристик ветрогенератора, снижения экстремальных нагрузок на рабочие лопасти и сохранения максимальной производительности. Другой важный пример представлен в [18], где управление с итеративным обучением применяется к конвейерной системе высокоточного лазерного напыления металла.

Задача стабилизации нелинейных 2D-систем мало рассматривалась в литературе. В случае нелинейных 1D-систем одним из наиболее мощных методов синтеза управления является тео-

рия диссипативности [3, 20], где частная форма диссипативности, известная как пассивность (и ее обобщения) [3, 10, 11], играет важную роль в решении задач глобальной стабилизации для широкого класса нелинейных систем. В этой статье понятие пассивности обобщается на случай нелинейных дифференциальных повторяющихся процессов, которые являются важным классом 2D-систем. Результаты получены на основе подхода с использованием векторной функции накопления, отличающегося от традиционного с использованием систем сравнения, см., например [12], и обеспечивают управление с нелинейной обратной связью по выходу, которое гарантирует экспоненциальную устойчивость рассматриваемого процесса.

В реальных приложениях могут возникнуть нарушения, и поэтому в данной статье результаты обобщаются на случай нелинейных повторяющихся процессов с возможными нарушениями, которые моделируются марковской цепью с конечным числом состояний.

Для обычных систем основы теории устойчивости таких систем заложены в работе [1]. Дальнейшее обобщение и развитие результатов представлено в монографии [2]. В данной работе для решения задачи стабилизации используется понятие пассивности, основанное на стохастическом аналоге векторной функции накопления, для получения управления с нелинейной обратной связью по выходу, которое гарантирует экспоненциальную устойчивость в среднем квадратическом для рассматриваемой системы с возможными нарушениями. Затем результаты применяются к решению задачи синтеза управления с итеративным обучением в условиях информационных нарушений.

1. Пассивность и стабилизация детерминированных повторяющихся процессов

Рассмотрим нелинейный повторяющийся процесс с длительностью повторения T , описываемый следующей моделью в про-

странстве состояний

$$(1) \quad \begin{aligned} \dot{x}_{k+1}(t) &= f_1(x_{k+1}(t), y_k(t), u_{k+1}(t)), \\ y_{k+1}(t) &= f_2(x_{k+1}(t), y_k(t), u_{k+1}(t)), \end{aligned}$$

где k – номер повторения (итерации); $x_k(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ – вектор состояния на текущей итерации; $y_k(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ – вектор профиля повторения; $u_k(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ – вектор входных переменных; f_1, f_2 – нелинейные функции, такие что $f_1(0, 0, 0) = 0$, $f_2(0, 0, 0) = 0$. Эти требования нужны для того, чтобы нулевая точка соответствовала состоянию равновесия.

Граничные условия, т.е. последовательность векторов начального состояния и начальный профиль повторения, считаются известными и имеют вид

$$(2) \quad \begin{aligned} x_{k+1}(0) &= d_{k+1}, \quad k \geq 0, \\ y_0(t) &= f(t), \quad 0 \leq t \leq T, \end{aligned}$$

где элементы вектора $d_{k+1} \in \mathbb{R}^{n_x}$ – известные постоянные; элементы вектора $f(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ – известные функции t , $0 \leq t \leq T$. Кроме того, предполагается, что $f(t)$ и d_{k+1} удовлетворяют неравенствам

$$(3) \quad \begin{aligned} |f(t)|^2 &\leq M_f, \\ |d_{k+1}|^2 &\leq \kappa_d z_d^{k+1}, \quad k = 0, 1, \dots, \end{aligned}$$

где $M_f > 0$, $\kappa_d > 0$ и $0 < z_d < 1$. Величина z_d определяет скорость сходимости последовательности начальных векторов состояния. Далее всюду будем считать, что граничные условия системы удовлетворяют (3). Основой построения стабилизирующих управлений для линейных повторяющихся процессов является понятие устойчивости вдоль повторений [13, 17]. Это понятие основано на свойствах линейного оператора в банаховом пространстве и, следовательно, не может быть использовано в случае нелинейных систем. Определения, которые приводятся далее, позволяют расширить теорию и применить её для случая нелинейных процессов.

Предположим, что измерению доступен вектор $z \in R^{n_z}$:

$$z_{k+1}(t) = g(x_{k+1}(t), y_k(t), u_{k+1}(t)),$$

где g – нелинейная функция, такая что $g(0, 0, 0) = 0$. Вектор z также может формироваться в целях синтеза стабилизирующего управления в результате процедуры пассивации [3]. Детально такая процедура будет рассмотрена далее в примере в конце этого раздела.

Предположим, что входная переменная формируется в виде

$$(4) \quad u_{k+1}(t) = -\varphi(z_{k+1}(t)),$$

где $\varphi(0) = 0$, и при подстановке (4) в (1) функция f_1 в правой части (1) удовлетворяет условию Липшица, т.е.

$$|f_1(x', y', \varphi(z')) - f_1(x'', y'', \varphi(z''))| \leq L(|x' - x''| + |y' - y''|),$$

$x', x'' \in \mathbb{R}^{n_x}$, $y', y'' \in \mathbb{R}^{n_y}$, где z' и z'' соответствуют значениям функции φ в точках (x', y') , (x'', y'') .

Определение 1. *Нелинейный дифференциальный повторяющийся процесс (1), (4) называется экспоненциально устойчивым если для любых граничных условий (2), удовлетворяющих (3), существуют $\kappa > 0$, $\lambda > 0$, и $0 < \zeta < 1$ такие, что*

$$(5) \quad |x_k(t)|^2 + |y_k(t)|^2 \leq \kappa \exp(-\lambda t) \zeta^k.$$

Основная цель статьи – найти такой закон управления с обратной связью (4), который обеспечивал бы экспоненциальную устойчивость системы (1), (3). Последующий анализ основан на расширении понятия пассивности на класс дискретных нелинейных повторяющихся процессов с использованием следующей векторной функции накопления:

$$(6) \quad V(x, y) = \begin{bmatrix} V_1(x_{k+1}(t)) \\ V_2(y_k(t)) \end{bmatrix},$$

где $V_1(x) > 0$, $x \neq 0$, $V_2(y) > 0$, $y \neq 0$, $V_1(0) = 0$, $V_2(0) = 0$. Оператор дивергенции для данной функции вдоль траекторий системы (1) будет иметь вид

$$(7) \quad \operatorname{div} V(x_{k+1}(t), y_k(t)) = \frac{dV_1(x_{k+1}(t))}{dt} + \Delta_k V_2(y_k(t)),$$

где $\Delta_k V_2(y_k(t)) = V_2(y_{k+1}(t)) - V_2(y_k(t))$.

Определение 2. Дифференциальный нелинейный повторяющийся процесс (1) с граничными условиями (2) называется экспоненциально G -пассивным, если существует векторная функция (6) и положительные скаляры c_1, c_2, c_3 такие, что

$$(8) \quad \begin{aligned} c_1|x|^2 &\leq V_1(x) \leq c_2|x|^2, \\ c_1|y|^2 &\leq V_2(y) \leq c_2|y|^2, \\ \operatorname{div}V(x_{k+1}(t), y_k(t)) &\leq z_{k+1}^T(t)Gu_{k+1}(t) - \\ &- c_3(|x_{k+1}(t)|^2 + |y_k(t)|^2), \end{aligned}$$

где G – постоянная матрица соответствующего размера.

Это определение является 2D-аналогом определения, данного в [11] для 1D-систем.

Теорема 1. Пусть нелинейный дифференциальный повторяющийся процесс (1) с граничными условиями (2) экспоненциально G -пассивен и функция $V_1(x)$ удовлетворяет условию

$$(9) \quad \left| \frac{\partial V_1(x)}{\partial x} \right| \leq c_4|x|.$$

Предположим также, что существует функция $\varphi(z)$ вида (4) такая, что, $z^T G \varphi(z) > 0$, если $z \neq 0$. Тогда система (1) с граничными условиями (2) и законом управления (4) является экспоненциально устойчивой.

Доказательство. Из последнего неравенства (8) следует, что для $\bar{c}_3 < c_3$ справедливо неравенство $-c_3(|x_{k+1}(t)|^2 + |y_k(t)|^2) \leq -\bar{c}_3(|x_{k+1}(t)|^2 + |y_k(t)|^2)$ и \bar{c}_3 можно выбрать настолько малым, чтобы выполнялось соотношение

$$(10) \quad z_d^{\frac{1}{2}} < 1 - \frac{\bar{c}_3}{c_2} < 1.$$

Учитывая первые два неравенства из (8), получим

$$(11) \quad \begin{aligned} \operatorname{div}V(x_{k+1}(t), y_k(t)) &\leq -z_{k+1}^T(t)G\varphi(z_{k+1}(t)) - \\ &- \bar{c}_3(|x_{k+1}(t)|^2 + |y_k(t)|^2) \leq \frac{\bar{c}_3}{c_2}(V_1(x_{k+1}(t)) + V_2(y_k(t))). \end{aligned}$$

С учетом (7), неравенство (11) может быть переписано как

$$(12) \quad \frac{dV_1(x_{k+1}(t))}{dt} + \lambda V_1(x_{k+1}(t)) + V_2(y_{k+1}(t)) - \zeta V_2(y_k(t)) \leq 0,$$

где $\lambda = \frac{\bar{c}_3}{c_2}$, $\zeta = 1 - \frac{\bar{c}_3}{c_2} \in (0, 1)$. Решая неравенство (12) относительно $V_1(x_{k+1}(t))$, получим

$$(13) \quad V_1(x_{k+1}(t)) \leq V_1(x_{k+1}(0))e^{-\lambda t} - \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} [V_2(y_{k+1}(s)) - \zeta V_2(y_k(s))] ds,$$

и, обозначив

$$W_{k+1}(t) = V_1(x_{k+1}(0))e^{-\lambda t} - V_1(x_{k+1}(t)),$$

$$H_k(t) = \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} V_2(y_k(s)) ds,$$

запишем (13) в виде

$$(14) \quad H_{k+1}(t) \leq \zeta H_k(t) + W_{k+1}(t).$$

Решая неравенство (14), имеем

$$(15) \quad H_n(t) \leq \zeta^n H_0(t) + \sum_{k=1}^n W_k(t) \zeta^{n-k}$$

или

$$\sum_{k=1}^n V_1(x_k(t)) \zeta^{n-k} + \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} V_2(y_n(s)) ds \leq$$

$$\leq e^{-\lambda t} \sum_{k=1}^n V_1(x_k(0)) \zeta^{n-k} +$$

$$+ \zeta^n \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} V_2(y_0(s)) ds.$$

Последнее неравенство эквивалентно следующему

$$(16) \quad e^{\lambda t} \sum_{k=1}^n V_1(x_k(t)) \zeta^{-k} + \zeta^{-n} \int_0^t e^{\lambda s} V_2(y_n(s)) ds \leq$$

$$\leq \zeta^{-n} \sum_{k=1}^n V_1(x_k(0)) \zeta^{n-k} +$$

$$+ e^{\lambda t} \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} V_2(y_0(s)) ds.$$

Преобразуя правую часть (16) с учетом (2) и (10), можно записать

$$\begin{aligned}
 (17) \quad \zeta^{-n} \sum_{k=1}^n V_1(x_k(0)) \zeta^{n-k} + e^{\lambda t} \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} V_2(y_0(s)) ds &\leq \\
 &\leq \frac{c_2 M_f (e^{\lambda T} - 1)}{\lambda} + c_2 \kappa_d \sum_{k=0}^{\infty} \zeta^k = \\
 &= \frac{c_2 M_f (e^{\lambda T} - 1)}{\lambda} + \frac{c_2 \kappa_d}{1 - \zeta} = C.
 \end{aligned}$$

Из (16) и (17) следует, что

$$(18) \quad |x_n(t)|^2 \leq \frac{C}{c_1} \zeta^n e^{-\lambda t}$$

для всех $t \in [0, \infty]$, $n = 0, 1, 2, \dots$ В силу условия Липшица и (9) имеем

$$\begin{aligned}
 (19) \quad \frac{dV_1(x_{k+1}(t))}{dt} &= \frac{\partial V_1(x_{k+1}(t))}{\partial x_{k+1}(t)} f_1(x_{k+1}(t), y_k(t), t) \geq \\
 &\geq - \left| \frac{\partial V_1(x_{k+1}(t))}{\partial x_{k+1}(t)} \right| |f_1(x_{k+1}(t), y_k(t), t)| \geq \\
 &\geq -c_4 L (|x_{k+1}(t)| + \varepsilon |y_k(t)|) (|x_{k+1}(t)| + |y_k(t)|) \geq \\
 &\geq -2c_4 L \left(\frac{\varepsilon + 1}{2\sqrt{\varepsilon}} |x| + \sqrt{\varepsilon} |y| \right)^2 \geq \\
 &\geq -2c_4 L \left(2 \left(\frac{\varepsilon + 1}{2\sqrt{\varepsilon}} |x| \right)^2 + 2(\sqrt{\varepsilon} |y|)^2 \right) \geq \\
 &\geq -\alpha V_1(x_{k+1}(t)) - \beta \varepsilon V_2(y_k(t)),
 \end{aligned}$$

где $\alpha = \frac{c_4 L (\varepsilon + 1)^2}{c_2 \varepsilon}$, $\beta = \frac{4c_4 L}{c_2}$, а ε – произвольное положительное число. С учетом (19) из (12) следует

$$(20) \quad V_2(y_{k+1}(t)) - z_0 V_2(y_k(t)) \leq \alpha V_1(x_{k+1}(t)),$$

где $z_0 = \zeta + \beta \varepsilon$. Выбирая ε настолько малым, что $0 < z_0 < 1$, и решая разностное неравенство (20) с учетом (18), имеем

$$V_2(y_n(t)) \leq z_0^n V_2(y_0(t)) + \frac{\alpha c_2}{c_1} \sum_{k=1}^n z_0^{n-k} \zeta^k e^{-\lambda t}.$$

Из последнего неравенства, принимая во внимание ограничения (3) на граничные условия (2), для любого $\zeta_0 > z_0$ получим, что

функция $V_2(y_n(t))\zeta_0^{-n}e^{\lambda t}$ ограничена при $t \in [0, \infty]$, $n = 0, 1, \dots$
Тогда с учётом второго неравенства (8)

$$(21) \quad |y_n(t)|^2 \leq \bar{C}\zeta_0^n e^{-\lambda t},$$

где \bar{C} некоторая положительная константа. Из (18), (21) легко видеть, что справедливо (5). Теорема доказана.

Рассмотрим случай, когда (1) имеет вид

$$(22) \quad \begin{aligned} \dot{x}_{k+1}(t) &= A_{11}x_{k+1}(t) + A_{12}y_k(t) + \\ &+ \phi_1(x_{k+1}(t), y_k(t))u_{k+1}(t), \\ y_{k+1}(t) &= A_{21}x_{k+1}(t) + A_{22}y_k(t) + \\ &+ \phi_2(x_{k+1}(t), y_k(t))u_{k+1}(t); \end{aligned}$$

и выберем функцию накопления в виде (6) где $V_1(x_{k+1}(t)) = x_{k+1}^T(t)P_1x_{k+1}(t)$ и $V_1(y_k(t)) = y_k^T(t)P_2y_k(t)$; P_1 и P_2 – симметричные положительно определенные матрицы (обозначим это символом \succ) соответствующих размерностей $P_1 = P_1^T > 0$ и $P_2 = P_2^T > 0$, удовлетворяющие неравенству Ляпунова

$$(23) \quad \bar{A}^T P^{1,0} + P^{1,0} \bar{A} + \bar{A}^T P^{0,1} \bar{A} - P^{0,1} + Q \prec 0,$$

где $\bar{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$, $P = \text{diag}[P_1 \ P_2]$, $P^{1,0} = \text{diag}[P_1 \ 0]$, $P^{0,1} = \text{diag}[0 \ P_2]$, $Q = Q^T \succ 0$. Обозначим $\bar{x}_{k+1}(t) = [x_{k+1}^T(t) \ y_k^T(t)]^T$ и $\phi(\bar{x}_{k+1}x(t)) = [\phi_1^T(x_{k+1}(t), y_k(t)) \ \phi_2^T(x_{k+1}(t), y_k(t))]^T$ и определим вспомогательный выходной вектор для (22) в виде

$$(24) \quad \begin{aligned} z_{k+1}(t) &= \phi^T(\bar{x}_{k+1}(t))P^{1,0}\bar{x}_{k+1}(t) + \\ &+ \phi^T(\bar{x}_{k+1}(t))P^{0,1}\bar{A}\bar{x}_{k+1}(t) + \\ &+ \frac{1}{2}\phi^T(\bar{x}_{k+1}(t))P^{0,1}\phi^T(\bar{x}_{k+1}(t))\bar{u}_{k+1}(t). \end{aligned}$$

Вычисляя дивергенцию векторной функции (6) получим

$$(25) \quad \operatorname{div} V(\bar{x}_{k+1}(t)) = \\ = \bar{x}_{k+1}(t)^T [\bar{A}^T P^{1,0} + P^{1,0} \bar{A} + \bar{A}^T P^{0,1} \bar{A} - P^{0,1}] \bar{x}_{k+1}(t) + \\ + 2\bar{x}_{k+1}(t)^T P^{1,0} \phi(\bar{x}_{k+1}(t)) u_{k+1}(t) + \\ + 2\bar{x}_{k+1}(t)^T \bar{A}^T P^{0,1} \phi(\bar{x}_{k+1}(t)) u_{k+1}(t) + \\ + \bar{u}_{k+1}(t)^T \phi^T(\bar{x}_{k+1}(t)) P^{0,1} \phi(\bar{x}_{k+1}(t)) u_{k+1}(t) \leq \\ \leq 2z_{k+1}(t)^T u_{k+1}(t) - \bar{x}_{k+1}(t)^T Q \bar{x}_{k+1}(t).$$

Из (25) следует, что система (22), (24) экспоненциально G -пассивна при $G = 2I$ (где I единичная матрица соответствующей размерности). Тогда согласно теореме 1 закон управления

$$(26) \quad u_{k+1}(t) = -[I + \frac{1}{2} \phi^T(\bar{x}_{k+1}(t)) P^{0,1} \phi(\bar{x}_{k+1}(t))]^{-1} \phi^T(\bar{x}_{k+1}(t)) [P^{1,0} + \\ + P^{0,1} \bar{A}] \bar{x}_{k+1}(t)$$

обеспечит экспоненциальную устойчивость системы (22), (26).

2. Пассивность и стабилизация повторяющихся процессов при случайных нарушениях

В данном разделе полученные результаты распространены для случая дифференциальных повторяющихся процессов при наличии нарушений. Нарушения описываются моделью в пространстве состояний в виде скачкообразных изменений параметров или структуры, управляемых однородной марковской цепью с конечным числом состояний. Такие модели получили название систем с марковскими скачками, или систем со случайной структурой [1, 15].

Пусть нелинейный дифференциальный повторяющийся процесс описывается следующей моделью в пространстве состояний

$$(27) \quad \begin{aligned} \dot{x}_{k+1}(t) &= g_1(x_{k+1}(t), y_k(t), u_{k+1}(t), r(t)), \\ y_{k+1}(t) &= g_2(x_{k+1}(t), y_k(t), u_{k+1}(t), r(t)), \end{aligned}$$

где $r(t)$ ($t \geq 0$) представляет собой марковскую цепь с дискретным числом состояний $\mathbb{N} = \{1, \dots, \nu\}$ и вероятностями перехода,

допускающими разложение

$$(28) \quad \begin{aligned} & P(r(t + \tau) = j \mid r(t) = i) = \\ & = \begin{cases} \pi_{ij}\tau + o(\tau), & j \neq i, \\ 1 + \pi_{ii}\tau + o(\tau), & j = i, \end{cases} \end{aligned}$$

$i, j = 1, \dots, \nu$, $\pi_{ij} > 0$, $\pi_{ii} = -\sum_{i \neq j}^{\nu} \pi_{ij}$ и g_1 и g_2 – нелинейные функции, такие что для всех $r \in \mathbb{N}$ $g_1(0, 0, 0, r) = 0$, $g_2(0, 0, 0, r) = 0$.

Дальнейшие обозначения аналогичны принятым в (1), граничные условия по-прежнему задаются в виде (2). Введем определения экспоненциальной устойчивости и экспоненциальной G -пассивности для системы (27).

Предположим, что измерению доступен вектор $z \in R^{n_z}$:

$$(29) \quad z_{k+1}(t) = h(x_{k+1}(t), y_k(t), u_{k+1}(t), r(t)),$$

где h – нелинейная функция такая, что для всех $r \in \mathbb{N}$ $h(0, 0, 0, r) = 0$. Предположим далее, что входная переменная формируется в виде (4) и при подстановке (29) в (27) функция g_2 в правой части (27) удовлетворяет условию Липшица, т.е.

$$|g_1(x', y', \varphi(z'), r) - g_1(x'', y'', \varphi(z''), r)| \leq L(|x' - x''| + |y' - y''|),$$

$x', x'' \in \mathbb{R}^{n_x}$, $y', y'' \in \mathbb{R}^{n_y}$, где z' и z'' соответствуют значениям функции h в точках $(x', y')(x'', y'')$.

Определение 3. *Нелинейный повторяющийся процесс (27), (4) называется экспоненциально устойчивым в среднем квадратическом, если для любых граничных условий (2), удовлетворяющих (3), существуют $\kappa > 0$, $\lambda > 0$, и $0 < \zeta < 1$, такие, что*

$$(30) \quad E[|x_k(t)|^2 + |y_k(t)|^2] \leq \kappa \exp(-\lambda t) \zeta^k,$$

где E – оператор математического ожидания.

Выберем векторную функцию накопления в виде

$$(31) \quad V(x_{k+1}(t), y_k(t), r(t)) = \begin{bmatrix} V_1(x_{k+1}(t), r(t)) \\ V_2(y_k(t), r(t)) \end{bmatrix},$$

где $V_1(x, r) > 0$, $x \neq 0$, $V_2(y, r) > 0$, $y \neq 0$, $V_1(0, r) = 0$, $V_2(0, r) = 0$, и введем операторы \mathcal{D}_1 и \mathcal{D}_2 , определяемые вдоль траекторий системы (27):

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_1 V(\xi, \eta, i) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} E[V_1(x_{k+1}(t + \Delta t), r(t + \Delta t)) - \\ &\quad - V_1(x_{k+1}(t), r(t)) \mid x_{k+1}(t) = \xi, y_k(t) = \eta, r(t) = i], \\ \mathcal{D}_2 V(\xi, \eta, i) &= E[V_2(y_{k+1}(t), r(t)) - \\ &\quad - V_2(y_k(t), r(t)) \mid x_{k+1}(t) = \xi, y_k(t) = \eta, r(t) = i]. \end{aligned}$$

Оператор \mathcal{D}_1 впервые введен в работе [2], где он получил естественное название усреднённой производной в силу системы, которое в дальнейшем, к сожалению, было утрачено и вместо него стали использоваться более формализованные названия (инфинитезимальный оператор, производящий дифференциальный оператор). Если u определяется соотношением (4) и $V_1(\xi, i)$ дифференцируема по ξ для каждого $i \in \mathbb{N}$, то, следуя [1, 2], в силу (27) и (28) получим, что

$$(32) \quad \mathcal{D}_1 V(\xi, \eta, i) = \frac{\partial V_1(\xi, i)}{\partial \xi} g_1(\xi, \eta, -\varphi, i) + \sum_{j=1}^{\nu} \pi_{i,j} V_1(\xi, j).$$

Запишем стохастический аналог оператора дивергенции \mathcal{D} :

$$(33) \quad \mathcal{D}V(\xi, \eta, i) = \mathcal{D}_1 V(\xi, \eta, i) + \mathcal{D}_2 V(\xi, \eta, i).$$

Определение 4. *Нелинейный дифференциальный повторяющийся процесс (27) с граничными условиями (2) называется экспоненциально G -пассивным в среднем квадратическом, если существует векторная функция (31) и положительные скалярные величины c_1, c_2, c_3 такие, что*

$$(34) \quad \begin{aligned} c_1 |\xi|^2 &\leq V_1(\xi, i) \leq c_2 |\xi|^2, \\ c_1 |\eta|^2 &\leq V_2(\eta, i) \leq c_2 |\eta|^2, \\ \mathcal{D}V(\xi, \eta, i) &\leq z^T G u - c_3 (|\xi|^2 + |\eta|^2), \end{aligned}$$

где вектор z определяется из (29), G – постоянная матрица соответствующей размерности.

Теорема 2. Пусть нелинейный повторяющийся процесс (27) с граничными условиями (2) экспоненциально G -пассивен в среднем квадратическом. Предположим также, что функция V_1 удовлетворяет условию

$$\left| \frac{\partial V_1(\xi, i)}{\partial \xi} \right| \leq c_4 |\xi|$$

и существует функция $\varphi(z)$ вида (4) такая, что $\varphi(0) = 0$ и $z^T G \varphi(z) > 0$, если $z \neq 0$. Тогда система (27) с граничными условиями (2) и законом управления (4) экспоненциально устойчива в среднем квадратическом.

Доказательство. Из последнего неравенства (34) с учетом (4) следует, что существует $\bar{c}_3 < c_3$ такая, что $z^{\frac{1}{2}} < 1 - \frac{\bar{c}_3}{c_2} < 1$ и

$$(35) \quad \mathcal{D}V(\xi, \eta, i) \leq -\bar{c}_3(|\xi|^2 + |\eta|^2).$$

Применяя к (35) оператор математического ожидания, с учетом свойства условных математических ожиданий и первых двух неравенств (34) получим

$$(36) \quad \mathbb{E}[\mathcal{D}_1 V(x_{k+1}(t), y_k(t), r(t))] + \lambda \mathbb{E}[V_1(x_{k+1}(t), r(t))] + \\ + \mathbb{E}[V_2(y_{k+1}(t), r(t))] - \zeta \mathbb{E}[V_2(y_k(t), r(t))] \leq 0,$$

где $\lambda = \frac{c_3}{c_2}$, $\zeta = 1 - \frac{c_3}{c_2} \in (0, 1)$. В силу условий регулярности, гарантированных выполнением условий Липшица по аналогии с [1] (Теорема 5.2), [2] (теорема 4.1):

$$\mathbb{E}[\mathcal{D}_1 V(x_{k+1}(t), y_k(t), r(t))] = \frac{d}{dt} \mathbb{E}[V_1(x_{k+1}(t), y_k(t), r(t))].$$

Решая, с учетом этого, неравенство (36) относительно $V_1(x_{k+1}(t))$, имеем

$$(37) \quad \mathbb{E}[V_1(x_{k+1}(t), r(t))] \leq \mathbb{E}[V_1(x_{k+1}(0), r(0))] e^{-\lambda t} - \\ - \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} \mathbb{E}[V_2(y_{k+1}(s), r(s)) - \zeta V_2(y_k(s), r(s))] ds.$$

Обозначим

$$W_{k+1}(t) = \mathbb{E}[V_1(x_{k+1}(0), r(0)) e^{-\lambda t} - V_1(x_{k+1}(t), r(t))], \\ H_k(t) = \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} \mathbb{E}[V_2(y_k(s), r(s))] ds.$$

и запишем неравенство (37) в следующем виде
 (38)
$$H_{k+1}(t) \leq \zeta H_k(t) + W_{k+1}(t).$$

Решая неравенство (38), получим

$$(39) \quad H_n(t) \leq \zeta^n H_0(t) + \sum_{k=1}^n W_k(t) \zeta^{n-k}$$

или

$$(40) \quad \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[V_1(x_k(t), r(t))] \zeta^{n-k} + \\ + \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} \mathbb{E}[V_2(y_n(s), r(s))] ds \leq \\ \leq e^{-\lambda t} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[V_1(x_k(0), r(0))] \zeta^{n-k} + \\ + \zeta^n \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} \mathbb{E}[V_2(y_0(s), r(s))] ds.$$

Последнее неравенство эквивалентно следующему:

$$(41) \quad e^{\lambda t} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[V_1(x_k(t), r(t))] \zeta^{-k} + \\ + \zeta^{-n} \int_0^t e^{\lambda s} \mathbb{E}[V_2(y_n(s), r(s))] ds \leq \\ \leq \zeta^{-n} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[V_1(x_k(0), r(0))] \zeta^{n-k} + \\ + e^{\lambda t} \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} \mathbb{E}[V_2(y_0(s), r(s))] ds.$$

Дальнейшее повторяет заключительную часть доказательства теоремы 1 с очевидными изменениями в обозначениях.

Рассмотрим частный случай системы (27):

$$(42) \quad \begin{aligned} \dot{x}_{k+1}(t) &= A_{11}(r(t))x_{k+1}(t) + A_{12}(r(t))y_k(t) \\ &\quad + \phi_1(x_{k+1}(t), y_k(t), r(t))u_{k+1}(t), \\ y_{k+1}(t) &= A_{21}(r(t))x_{k+1}(t) + A_{22}(r(t))y_k(t) \\ &\quad + \phi_2(x_{k+1}(t), y_k(t), r(t))u_{k+1}(t). \end{aligned}$$

Выберем функцию накопления (31) с $V_1(x_{k+1}(t)) = x_{k+1}^T(t)P_1(r(t))x_{k+1}(t)$ и $V_2(y_k(t)) = y_k^T(t)P_2(r(t))y_k(t)$, где $P_1(i) > 0$ и $P_2(i)(i) > 0$, $i \in \mathbb{N}$, которые удовлетворяют следующей системе билинейных матричных неравенств

$$(43) \quad A_1^T(i)P(i) + P(i)A_1(i) + A_2^T(i)P(i)A_2(i) + \\ + \sum_{j=1}^{\nu} \pi_{ij} I^{1,0}P(i) - I^{0,1}P(i) + Q(i) \prec 0, \quad i \in \mathbb{N},$$

$$\text{где } A_1(i) = \begin{bmatrix} A_{11}(i) & A_{12}(i) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad I^{1,0} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_2(i) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A_{21}(i) & A_{22}(i) \end{bmatrix}, \quad I^{0,1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix},$$

$$P(i) = \text{diag}[P_1(i) \ P_2(i)] \quad \text{и} \quad Q(i) = Q^T(i) \succ 0.$$

Обозначим $\bar{\xi} = [\xi^T \ \eta^T]^T$, $\phi(\bar{x}_{k+1}(t), r(t)) = [\phi_1^T(\bar{x}_{k+1}(t), r(t)) \ \phi_2^T(\bar{x}_{k+1}(t), r(t))]^T$ и определим вспомогательный вектор вида

$$(44) \quad z_{k+1}(t) = 2[\phi^T(\bar{x}_{k+1}(t), r(t))I^{1,0}P(r(t))\bar{x}_{k+1}(t) + \\ + 2\phi^T(\bar{x}_{k+1}(t), r(t))I^{0,1}P(r(t))A_2(r(t))\bar{x}_{k+1}(t) + \\ + \frac{1}{2}\phi^T(\bar{x}_{k+1}(t), r(t))I^{0,1}P(r(t))\phi(\bar{x}_{k+1}(t), r(t))u_{k+1}(t)].$$

Вычисляя дивергенцию (31) вдоль траекторий (42), получим

$$(45) \quad DV(\xi, \eta, i) = \bar{\xi}^T [A_1^T(i)P(i) + P(i)A_1(i) + \\ + A_2^T(i)P(i)A_2(i) + \sum_{j=1}^{\nu} \pi_{ij} I^{1,0}P(i) - \\ - I^{0,1}P(i)]\bar{\xi} + z^T u \leq z^T u - \bar{\xi}^T Q \bar{\xi}.$$

Из (45) следует, что процесс (42) и (44) экспоненциально G -пассивен в среднем квадратическом при $G = I$. Тогда согласно теореме 2 закон управления

$$(46) \quad u_{k+1}(t) = \\ - [I + \phi^T(\bar{x}_{k+1}(t), i)I^{0,1}P(i)\phi(\bar{x}_{k+1}(t), i)]^{-1} \times \\ \times \phi^T(\bar{x}_{k+1}(t), i)[I^{1,0}P(i) + \\ + I^{0,1}P(i)A_2(i)]\bar{x}_{k+1}(t), \quad \text{если } r(t) = i,$$

обеспечивает экспоненциальную устойчивость системы в среднем квадратическом. Реализация управления (46), как видно из формулы, предполагает наблюдаемость моментов смены состояний марковской цепи $r(t)$. Если эти моменты не наблюдаемы, что часто имеет место на практике, можно попытаться построить алгоритм постоянной структуры или алгоритм оценивания состояния марковской цепи. Эти вопросы требуют отдельного самостоятельного рассмотрения.

3. Управление с итеративным обучением при наличии неопределенностей в информационном канале

В данном разделе полученные результаты применяются для построения закона управления с итеративным обучением [4, 5, 9] для линейной системы, описываемой следующей моделью в пространстве состояний:

$$(47) \quad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= C(r(t))x(t), \end{aligned}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния, $u \in \mathbb{R}^m$ – вектор входных значений, $y \in \mathbb{R}^p$ – вектор выходных значений и $r(t)$ – марковская цепь с конечным числом состояний $\mathbb{N} = \{1, \dots, \nu\}$, соответствующим числу возможных нарушений и вероятностями перехода, описываемыми (28). Чтобы сформулировать задачу синтеза управления с итеративным обучением, введем целочисленную величину k , определяющую номер повторения, а также $u_k(t)$, $x_k(t)$ и $y_k(t)$ – входной вектор, вектор состояний и выходной вектор соответственно, $0 \leq t \leq T$, где T – длительность повторения. Динамика системы с учетом повторений будет иметь вид

$$(48) \quad \begin{aligned} \dot{x}_k(t) &= Ax_k(t) + Bu_k(t), \\ y_k(t) &= C(r(t))x_k(t) \end{aligned}$$

с граничными условиями

$$(49) \quad y_0(t) = 0, 0 \leq t \leq T, x_k(0) = x_0, k = 0, 1, \dots$$

Пусть $y_{ref}(t)$ – заданный опорный сигнал при $0 \leq t \leq T$, где каждый элемент $y_{ref}(t)$ дифференцируем. Тогда $e_k(t) = y_{ref}(t) -$

$y_k(t)$ – ошибка на текущем шаге k и целью является построение последовательности входных функций, таких что качество управляемого процесса будет улучшаться от повторения к повторению. Для этого достаточно, чтобы выполнялись следующие условия сходимости:

$$(50) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} |e_k(t)| = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} |u_k(t) - u_\infty(t)| = 0,$$

где пределы понимаются в среднем квадратическом. Задачей закона управления с итеративным обучением является формирования входного управления на текущем шаге, используя информацию с предыдущего шага:

$$(51) \quad u_{k+1}(t) = u_k(t) + \Delta u_{k+1}(t),$$

где $\Delta u_{k+1}(t)$ – корректирующая поправка. Важной особенностью управления с итеративным обучением является использование информации с пройденного шага для расчёта $\Delta u_{k+1}(t)$. Это позволяет использовать информацию, которая не является причинно-следственной в общепринятом смысле, а создается и хранится на предыдущем шаге. Учитывая стохастический характер нарушений, введем строгое понятие сходимости в соответствии со следующим определением.

Определение 5. Закон управления (51) системой (48) называется сходящимся, если для всех $0 \leq t \leq T$

$$(52) \quad E[|e_k(t)|^2] = E[|y_{ref}(t) - y_k(t)|^2] \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty,$$

и

$$(53) \quad E[|u_k(t) - u_\infty(t)|^2] \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Чтобы описать динамику управления с итеративным обучением в стандартной форме повторяющегося дифференциального процесса, введем в рассмотрение вспомогательный вектор вида

$$(54) \quad \dot{x}_{k+1}(t) = x_{k+1}(t) - x_k(t),$$

и

$$(55) \quad e_{k+1}(t) - e_k(t) = -C(r(t))A \int_0^t (x_{k+1}(\tau) - x_k(\tau))d\tau - C(r(t))B \int_0^t (u_{k+1}(\tau) - u_k(\tau))d\tau.$$

Тогда, с учетом того, что в силу повторяющегося характера функционирования системы $x_{k+1}(0) = x_k(0)$, динамика управления с

итеративным обучением может быть записана в виде линейного дифференциального повторяющегося процесса с неопределённостями:

$$(56) \quad \begin{aligned} \dot{v}_{k+1}(t) &= Av_{k+1}(t) + B \int_0^t \Delta u_{k+1}(\tau) d\tau, \\ e_{k+1}(t) &= -C(r(t))Av_{k+1}(t) + e_k(t) - \\ &\quad - C(r(t))B \int_0^t \Delta u_{k+1}(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Эти уравнения справедливы, если $C(i)B \neq 0, i \in \mathbb{N}$, т.е., если относительный порядок системы равен единице. Для систем более высокого относительного порядка должны использоваться производные от ошибки. Техника построения 2D-модели в этом случае продемонстрирована в разделе 4 при рассмотрении примера.

Представим корректирующую поправку в виде суммы двух компонент:

$$(57) \quad \Delta u_{k+1}(t) = \Delta_1 u_{k+1}(t) + \Delta_2 u_{k+1}(t).$$

Компонента $\Delta_1 u_{k+1}(t)$ должна обеспечивать экспоненциальную устойчивость в среднем квадратическом (56) при $\Delta_2 u_{k+1}(t) \equiv 0$.

Предположим также, что вектор состояния x доступен измерению, тогда компоненту Δ_1 можно сформировать в виде

$$(58) \quad \Delta_1 u_{k+1}(t) = F_1(i)\dot{v}_{k+1}(t) + F_2(i)\dot{e}_k(t), \text{ если } r(t) = i.$$

Если (58) гарантирует экспоненциальную устойчивость в среднем квадратическом системы (56) тогда, согласно определению 5, закон управления с итеративным обучением является сходящимся.

Для нахождения матриц усиления стабилизирующего управления $F_1(i)$ и $F_2(i)$, $i \in \mathbb{N}$, воспользуемся условиями теоремы 2.

Выберем векторную функцию Ляпунова (6) где $V_1(v_{k+1}(t), r(t)) = v_{k+1}^T(t)P_1(r(t))v_{k+1}(t)$, $V_2(e_k(t), r(t)) = e_k^T(t)P_2(r(t))e_k(t)$, при $P_1 \succ 0$, $P_2 \succ 0$. Для вычисления

стохастического оператора дивергенции \mathcal{D} вдоль траектории системы (56) и (58) запишем, в соответствии с теоремой 2, условия экспоненциальной устойчивости в среднем квадратическом:

$$(59) \quad P(i) = \text{diag}[P_1(i) \ P_2(i)] \succ 0, \quad A_{c1}^T(i)P(i) + \\ + P(i)A_{c1}(i) + \sum_{j=1}^{\nu} \pi_{ij} I^{1,0} P(j) - I^{0,1} P(i) + \\ + A_{c2}^T(i)P(i)A_{c2}(i) + Q(i) \preceq 0, \quad i \in \mathbb{N},$$

где

$$A_{c2}(i) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -C(i)A - C(i)BF_1(i) & I - C(i)BF_2(i) \end{bmatrix}, \\ A_{c1}(i) = \begin{bmatrix} A + BF_1(i) & BF_2(i) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Обозначив $X_1(i) = P_1^{-1}(i)$, $X_2(i) = P_2^{-1}(i)$, $Y_1 = F_1(i)X_1(i)$, $Y_2(i) = F_2(i)X_2(i)$, после громоздких, но простых преобразований с использованием леммы Шура о дополнении [8] получим набор линейных матричных неравенств относительно переменных $X_l(i)$, $Y_l(i)$, $l = 1, 2$:

$$(60) \quad \begin{bmatrix} S_{11}(i) & S_{12}(i) & S_{13}(i) \\ S_{12}^T(i) & -X(i) & 0 \\ S_{13}^T(i) & 0 & S_{33}(i) \end{bmatrix} \prec 0, \quad X_l \succ 0, \quad l = 1, 2, \quad i \in \mathbb{N},$$

где $S_{11}(i) = \begin{bmatrix} A_{c11}(i) & BY_1(i) \\ (BY_1(i))^T & -X_2(i) \end{bmatrix}$, $S_{12}(i) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A_{c12}(i) & A_{c22}(i) \end{bmatrix}^T$, $A_{c11}(i) = AX(i) + BY_1(i) + (AX(i) + BY_1(i))^T + \pi_{ii}X_1(i)$, $A_{c12}(i) = -C(i)AX_1(i) - C(i)BY_1(i)$, $A_{c22}(i) = X_2(i) - C(i)BY_2(i)$, $S_{13}(i) = [\pi_{i1}^{\frac{1}{2}}X(i)I^{1,0} \dots \pi_{ii-1}^{\frac{1}{2}}X(i)I^{1,0} \pi_{ii+1}^{\frac{1}{2}}X(i)I^{1,0} \dots \pi_{i\nu}^{\frac{1}{2}}X(i)I^{1,0} \ X(i)]$, $S_{33}(i) = \text{diag}[-X(1) \dots -X(i-1) - X(i+1) \dots -X(\nu) - Q^{-1}(i)]$. Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. *Рассмотрим систему (56) и предположим, что соотношения (60) при $i \in \mathbb{N}$ разрешимы относительно переменных $X_l(i)$, $Y_l(i)$, $l = 1, 2$ и $F_1(i) = Y_1(i)X_1^{-1}(i)$ и $F_2(i) =$*

$Y_2(i)X_2^{-1}(i)$, $i \in \mathbb{N}$. Тогда закон управления с итеративным обучением (51) сходится.

Доказательство. Из разрешимости (60) следует справедливость (59), что гарантирует экспоненциальную устойчивость в среднем квадратичном системы (56). Отсюда немедленно следует предельное свойство (52) и, с учетом (51), (54) и (56), предельное свойство (53), что означает сходимость закона управления (51) системой (48).

Компонента $\Delta_2 u_{k+1}(t)$ в законе управления может быть использована для обеспечения пассивности и по теореме 2 это даст робастность управления относительно возможных нелинейностей на входе. Рассмотрим вспомогательный вектор

$$(61) \quad z_{k+1}(t) = 2\bar{B}^T(r(t))I^{1,0}P(r(t))\chi_{k+1}(t) + \\ + 2\bar{B}^T(r(t))I^{0,1}P(r(t))A_{c2}(r(t))\chi_{k+1}(t) + \\ + \frac{1}{2}\bar{B}^T(r(t))I^{0,1}P(r(t))\bar{B}(r(t))w_{k+1}(t),$$

где $\chi_{k+1}(t) = [v_{k+1}(t) \ e_k(t)]^T$, $w_{k+1}(t) = \int_0^t \Delta_2 u_{k+1}(\tau) d\tau$,

$$\bar{B}(r(t)) = \begin{bmatrix} B \\ -C(r(t))B \end{bmatrix}, \text{ для которого}$$

$$DV(\xi, \eta, i) = \bar{\xi}^T [A_{c1}^T(i)P(i) + P(i)A_{c1}(i) + \\ + A_{c2}^T(i)P(i)A_{c2}(i) + \sum_{j=1}^{\nu} \pi_{ij} I^{1,0}P(i) - \\ - I^{0,1}P(i)]\bar{\xi} + z^T w \leq z^T w - \bar{\xi}^T Q(i)\bar{\xi},$$

где, как и ранее, $\bar{\xi} = [\xi^T \ \eta^T]^T$.

Тогда, согласно теореме 2, при $G = I$ обеспечивается экспоненциальная G -пассивность в среднем квадратическом и для

$$(62) \quad \Delta_2 u_{k+1}(t) = \\ - [I + \bar{B}^T(i)I^{0,1}P(i)\bar{B}(i)]^{-1} [\bar{B}^T(i)I^{1,0}P(i) + \\ + \bar{B}^T(i)I^{0,1}P(i)A_2(i)]\dot{\chi}_{k+1}(t), \text{ если } r(t) = i,$$

обеспечивается экспоненциальная устойчивость в среднем квадратическом. Существенно отметить две особенности, которые

могут создать определенные трудности при практической реализации алгоритма управления. Первая состоит в необходимости использования производной от ошибки. Эта принципиальная особенность управления с итеративным обучением хорошо известна и широко обсуждается в литературе [4, 5, 9]. Вторая особенность состоит в том, что моменты смены состояний марковской цепи, моделирующей нарушения, должны наблюдаться.

Эта особенность характерна и для обычных систем с марковскими переключениями. В широко распространенном на практике случае, когда эти моменты не наблюдаются, можно делать попытку построения алгоритма постоянной структуры, а если она оказывается безуспешной, строить алгоритм оценивания состояния марковской цепи.

4. Пример

Рассмотрим простейший жесткий однозвенный манипулятор, динамика которого в вертикальной плоскости описывается уравнением

$$(63) \quad J\ddot{\theta} = -(0,5mgl + Mgl) \sin \theta + u,$$

где θ – угол поворота звена; M – масса груза; m – масса звена; g – ускорение свободного падения; l – длина звена; J – момент инерции нагруженного звена; u – управляющий крутящий момент. Введем переменные состояния как $x_1 = \theta$, $x_2 = \dot{\theta}$ и запишем уравнения состояния (63) в виде

$$(64) \quad \dot{x} = Ax + Bg(u, y),$$

где

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/J \end{bmatrix}, \\ y &= Cx, \quad C = [1 \ 0], \\ g(u, y) &= -(0,5mgl + Mgl) \sin y + u. \end{aligned}$$

Предположим, что этот манипулятор выполняет операции схватывания и перемещения, т.е. повторяет циклы движения одинаковой продолжительности с возвращением в начальное состо-

яние по окончанию каждого цикла. В этом случае с целью достижения требуемой точности перемещения, в соответствии с заданной траекторией движения $\theta_{ref}(t)$, можно использовать управление с итеративным обучением.

Для решения задачи управления с итеративным обучением заметим, что в силу особенностей динамики манипулятора можно предварительно воспользоваться линеаризацией обратной связью [3]. С этой целью сформируем управление из двух составляющих

$$(65) \quad u = \hat{u} + \bar{u},$$

где \hat{u} – линеаризующая составляющая, \bar{u} – составляющая, с помощью которой будет реализоваться итеративное обучение.

Выберем

$$(66) \quad \hat{u} = (0,5mgl + Mgl) \sin y,$$

тогда (64) на k -м цикле повторения запишется в виде

$$(67) \quad \begin{aligned} \dot{x}_k &= Ax_k + Bu_k, \\ y_k &= Cx_k. \end{aligned}$$

Относительный порядок (67) равен двум, поскольку $CB = 0, CAB \neq 0$, поэтому процедура построения 2D-модели, изложенная в разделе 3, не может быть непосредственно применена здесь, но ее можно модифицировать за счет использования производной ошибки второго порядка. Обозначим $\varepsilon_k = \ddot{e}_k = \ddot{y}_{ref} - \ddot{y}_k$, $v_{k+1}(t) = \dot{x}_{k+1}(t) - \dot{x}_k(t)$, $\Delta u_{k+1} = \bar{u}_{k+1} - \bar{u}_k$, тогда из (67) легко следует 2D-модель процесса управления с итеративным обучением:

$$(68) \quad \begin{aligned} \dot{v}_{k+1} &= Av_{k+1} + B\Delta u_{k+1}, \\ \varepsilon_{k+1} &= -CA^2v_{k+1} + \varepsilon_k - CAB\Delta u_{k+1}, \end{aligned}$$

Выберем корректирующую поправку в виде

$$(69) \quad \Delta u_{k+1}(t) = K_1v_{k+1}(t) + K_2\varepsilon_k(t).$$

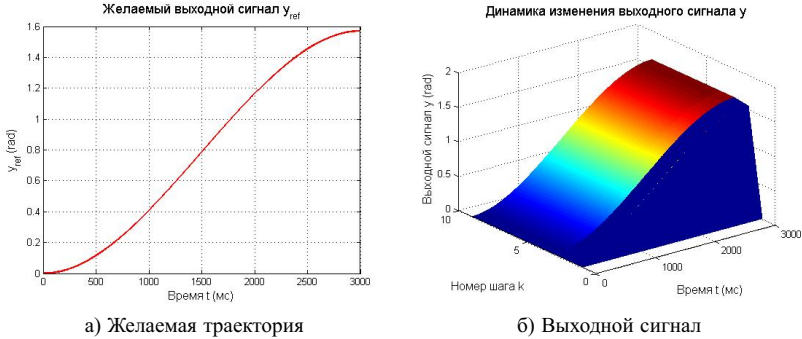


Рис. 1. Выходной сигнал

Подставляя (69) в (68) получим

$$\begin{aligned}
 \dot{v}_{k+1} &= (A + BK_1)v_{k+1} + BK_2\varepsilon_k(t), \\
 \varepsilon_{k+1} &= -(CA^2 + CABK_1)v_{k+1} + \\
 (70) \quad &+ (I - CABK_2)\varepsilon_k(t).
 \end{aligned}$$

Если управление (69) обеспечивает экспоненциальную устойчивость (70) и выполнены условия

$$(71) \quad y_k^{(i)}(0) = y_{ref}^{(i)}(0) \quad (i = 0, 1, k = 0, 1, \dots),$$

то $|e_k(t)| \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$.

Для расчетов были взяты следующие числовые данные [16]. $\theta_{ref}(t) = (\pi t^2)/6 - (\pi t^3)/27$, $m = 1,5$ кг, $M = 3$ кг, $g = 9,8$ м/сек², $l = 0,5$ м, $J = Mt^2 + \frac{1}{3}ml^2$ кг м². Решая линейные матричные неравенства (60) при соответствующем их упрощении с учетом, того, что структура рассматриваемой системы постоянна, получим $K_1 = [-0,0001, -0,0106]$, $K_2 = 0,8330$. Результаты моделирования представлены на рис. 1–2. Ошибка обучения $e(t) = \theta_{ref}(t) - \theta(t)$ сходится менее чем за 5 шагов.

5. Заключение

В данной статье представлены новые результаты по развитию теории пассивности и стабилизации применительно к зада-

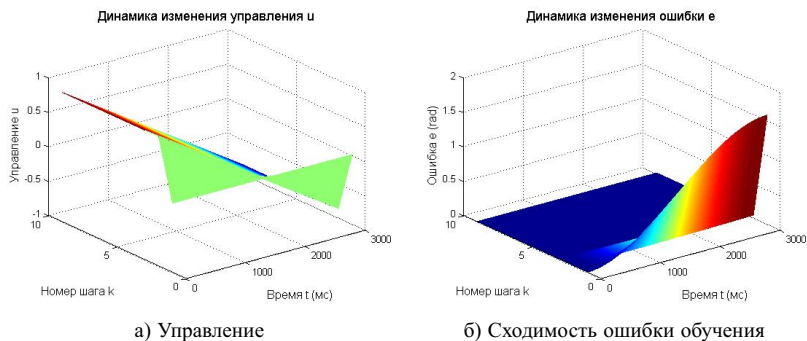


Рис. 2. Управление и ошибка обучения

че синтеза законов управления для нелинейных повторяющихся процессов, включая случай возможных нарушений. Чтобы продемонстрировать эффективность полученных теоретических результатов, показано, как они могут быть применены для построения управления с итеративным обучением при информационных нарушениях. Эти результаты могут рассматриваться как базовые для дальнейших исследований нелинейных повторяющихся процессов, с целью более полного раскрытия их потенциала. В частности, результаты примера справедливы при точном выполнении условий (66) и (70), которые на практике, очевидно будут выполняться с определенными погрешностями, поэтому в дальнейших исследованиях здесь важную роль приобретает анализ робастности полученного решения.

Литература

1. КАЦ И.Я. *Метод функций Ляпунова в задачах устойчивости и стабилизации систем случайной структуры*. – Екатеринбург: Изд-во Уральской государственной академии путей сообщения, 1998. – 222 с.
2. КАЦ И.Я., КРАСОВСКИЙ Н.Н. *Об устойчивости систем со случайными параметрами* // Прикладная математика и механика. – 1960. – XXIV. – С. 809–823.

3. ХАЛИЛ Х.К. *Нелинейные системы*. – М.: Ин-т компьютер. исслед.; Ижевск: РХД, 2009. – 832 с.
4. AHN H.-S., CHEN Y.Q., MOORE K.L. *Iterative Learning Control. Brief Survey and Categorization* // IEEE Trans. Circuits Syst. I. Fundamental Theory and Application. – 2007. – Vol. 37. – P. 1099–1121.
5. AHN H.-S., CHEN Y. Q., MOORE K. L. *Iterative Learning Control: Robustness and Monotonic Convergence for Interval Systems. Communications and Control Engineering Series*. – London: Springer-Verlag, 2007. – 230 p.
6. AZEVEDO-PERDICOULIS T.P., JANK G. *Disturbance attenuation of linear quadratic OL-Nash games on repetitive processes with smoothing on the gas dynamics* // Multidimensional Systems and Signal Processing. – 2012. – Vol. 23. – P. 135–153.
7. BARTON K., KINGSTON D. *Systematic Surveillance for UAVs: A Feedforward Iterative Learning Control Approach* // American Control Conference (ACC'2013). – 2013. – P. 5917–5922.
8. BOYD S., EL GHAOU L., FERON E. AND BALAKRISHNAN V. *Linear matrix inequalities in control and system theory*. – Philadelphia: SIAM, 1994. – 193 p.
9. BRISTOW D.A., THARAYIL M., ALLEYNE A. *A Survey of Iterative Learning Control* // IEEE Control Syst. Magazine. – 2006. – Vol. 26. – P. 96–114.
10. BYRNES C., ISIDORI A., WILLEMS J. *Passivity, feedback equivalence and the global stabilization of minimum phase nonlinear systems* // IEEE Trans. Automat. Contr. – 1991. – Vol. 36. – P. 1228–1240.
11. FRADKOV A., HILL D. *Exponential feedback passivity and stabilizability of nonlinear systems* // Automatica. – 1998. – Vol. 34. – P. 697–703.
12. HADDAD W., HUI Q., CHELLABONA V., NERSESOV S. *Vector dissipativity theory for discrete-time large-scale nonlinear dynamical systems* // Advances in Difference

- Equations. – 2001. – Vol. 1. – P. 37–66.
13. HLADOWSKI L., GALKOWSKI K., CAI Z., ROGERS E., FREEMAN C.T., LEWIN P.L. *Experimentally supported 2D systems based iterative learning control law design for error convergence and performance* // Control Engineering Practice. – 2010. – Vol. 18. – P. 339–348.
 14. LIU Y., JIA Y. *An iterative learning approach to formation control of multi-agent systems* // Systems & Control Letters. – 2012. – Vol. 61. – P. 148–154.
 15. MARITON M. *Jump linear systems in automatic control*. – N-Y: Marcel Dekker, 1990. – 320 p.
 16. PAN Y.J., MARQUEZ H.J., CHEN T. *Sampled data iterative learning control for a class of nonlinear networked control systems* // Proc. American Control Conference (ACC'2006). – 2006. – P. 3494–3499.
 17. ROGERS E., GALKOWSKI K., OWENS D.H. *Control Systems Theory and Applications for Linear Repetitive Processes. Lecture Notes in Control and Information Sciences*. – N-Y: Springer-Verlag. – 2007. – 466 p.
 18. SAMMONS P.M., BRISTOW D.A., LANDERS R.G. *Iterative learning control of bead morphology in laser metal deposition processes* // Proc. American Control Conference, 2013. – P. 5962–5967.
 19. TUTTY O., BLACKWELL M., ROGERS E., SANDBERG R. *Iterative Learning Control for Improved Aerodynamic Load Performance of Wind Turbines With Smart Rotors* // IEEE Transaction on control systems technolog. – 2013. – Vol. 22. – P. 967–979.
 20. WILLEMS J.C. *Dissipative dynamical systems part i: General theory* // Arch. Rational Mech. Analysis. – 1972. – Vol. 45. – P. 325–351.

PASSIVITY BASED STABILIZATION OF NONLINEAR DIFFERENTIAL REPETITIVE PROCESSES WITH APPLICATION TO ITERATIVE LEARNING CONTROL

Mikhail Emelianov, Arzamas Polytechnical Institute of R.E. Alekseev Nizhny Novgorod State Technical University, Arzamas, postgraduate student, (mikhailemelianovarzamas@gmail.com).

Abstract: Repetitive processes propagate information in two independent directions. They arise in the modeling of industrial systems such as metal rolling and can be used as a setting for control law design. The latter area has seen experimental verification for designs based on linear dynamic models. This paper addresses stabilization and disturbance attenuation for differential nonlinear repetitive processes where vector Lyapunov functions are used to characterize a physically relevant stability property and the disturbance attenuation is expressed in terms of an H_∞ norm. An extension to processes with failures modeled by a finite state Markov chain is also developed and applied to iterative learning control design in the presence of model uncertainty and information channel failures. An illustrative example is also given.

Keywords: repetitive process, nonlinear 2D-systems, differential nonlinear repetitive processes, passivity, stability, iterative learning control.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии И.Б. Фуртатом.

*Поступила в редакцию 31.01.2015.
Дата опубликования 31.05.2016.*

УДК 517.9
ББК 78.34

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ СОСТОЯНИЯМИ ОДНОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ МОДЕЛИ В ОТНОСИТЕЛЬНО РАДИАЛЬНОМ СЛУЧАЕ

Шулепов А. Н.,¹ Сагадеева М. А.²,

(ФГБОУ ВПО Южно-Уральский государственный университет
(НИУ), Челябинск)

Рассмотрена модель, описываемая неклассическим уравнением математической физики, с коэффициентами зависящими от времени. Такие уравнения часто называют уравнениями соболевского типа в относительно радиальном случае, т.е. стационарное уравнение обладает разрешающей сильно непрерывной вырожденной полугруппой. Показано существование единственного оптимального управления решениями задачи Шоултера–Сидорова для нестационарной модели.

Ключевые слова: оптимальное управление, нестационарные уравнения соболевского типа, относительно радиальный случай.

Введение

В ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с границей $\partial\Omega$ класса C^∞ . Рассмотрим краевую задачу

$$(1) \quad \Delta x(s, t) = x(s, t) = 0, \quad (s, t) \in \partial\Omega \times [0, T],$$

для уравнения в частных производных вида [1]

$$(2) \quad (\lambda - \Delta)x_t = \nu(t)\Delta x - i\nu(t)d\Delta^2 x + u.$$

Здесь коэффициенты $\lambda, d \in \mathbb{R}$ описывают параметры системы, вектор-функция u отвечает внешним воздействиям на систему и является функцией управления.

¹ Андрей Николаевич Шулепов, магистрант (andrewn92@mail.ru).

² Минзиля Алмасовна Сагадеева, кандидат физико-математических наук, доцент, (sagadeeva_ma@mail.ru).

Задачу оптимального управления для модели (1), (2) будем исследовать с помощью абстрактных результатов. Пусть \mathfrak{X} , \mathfrak{Y} и \mathfrak{U} – гильбертовы пространства. Пусть операторы $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}; \mathfrak{Y})$, $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{X}; \mathfrak{Y})$.

Рассмотрим задачу Шоуолтера–Сидорова [4]

$$(3) \quad P(x(0) - x_0) = 0$$

для уравнения соболевского типа [5, 6]

$$(4) \quad L\dot{x}(t) = a(t)Mx(t) + u(t), \quad (\ker L \neq \{0\}), \quad t \in [0, \tau].$$

Введем в рассмотрение функционал качества

$$(5) \quad J(u) = \alpha \sum_{q=0}^1 \int_0^{\tau} \|z^{(q)}(t) - z_d^{(q)}(t)\|_{\mathfrak{Z}}^2 dt + \\ + (1 - \alpha) \sum_{q=0}^k \int_0^{\tau} \langle N_q u^{(q)}(t), u^{(q)}(t) \rangle_{\mathfrak{U}} dt,$$

где $k = 0, 1, \dots, p + 1$; $N_q \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$, – самосопряженные и положительно определенные операторы; $z = Cx$, оператор $C \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}; \mathfrak{Z})$, а $z_d = z_d(t, s)$ – плановое наблюдение из некоторого гильбертова пространства наблюдений \mathfrak{Z} . Отметим, что $\alpha \in (0, 1)$ и $(1 - \alpha)$ – весовые коэффициенты целей оптимального управления, заключающиеся в достижении плановых показателей наблюдаемой величины без скачкообразных изменений (первое слагаемое в (5)) и минимизации расходов для этого ресурсов управления (второе слагаемое в (5)). В работе приведено приложение абстрактных результатов, полученных в [2].

1. Абстрактные результаты

Доказательства утверждений этой части можно найти в работе [6].

Обозначим

$$\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}; \mathfrak{U})\}, \quad \sigma^L(M) = \mathbb{C} \setminus \rho^L(M),$$

$$R_{\mu}^L(M) = (\mu L - M)^{-1}L, \quad L_{\mu}^L(M) = L(\mu L - M)^{-1}, \quad \mu \in \rho^L(M),$$

$$R_{(\lambda,p)}^L(M) = \prod_{k=0}^p R_{\lambda_k}^L(M), \quad L_{(\lambda,p)}^L(M) = \prod_{k=0}^p L_{\lambda_k}^L(M),$$

$$\lambda_k \in \rho^L(M) \quad (k = \overline{0,p}).$$

Определение 1. Оператор M называется p -радиальным относительно оператора L (или коротко (L, p) -радиальным), если

- (i) $\exists \omega \in \mathbb{R} \quad \forall \mu > \omega \Rightarrow \mu \in \rho^L(M)$;
- (ii) $\exists K > 0 \quad \forall \mu_k > \omega, k = \overline{0,p}, \forall n \in \mathbb{N}$

$$\max\{\|(R_{(\mu,p)}^L(M))^n\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{X})}, \|(L_{(\mu,p)}^L(M))^n\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{Y})}\} \leq \frac{K}{\prod_{k=0}^p (\mu_k - \omega)^n}.$$

Также введем обозначения $\mathfrak{X}^0 = \ker R_{(\mu,p)}^L(M)$, $\mathfrak{Y}^0 = \ker L_{(\mu,p)}^L(M)$, $L_0 = L \Big|_{\mathfrak{X}^0}$, $M_0 = M \Big|_{\text{dom} M \cap \mathfrak{X}^0}$. Через \mathfrak{X}^1 (\mathfrak{Y}^1) обозначим замыкание линейала $\text{im} R_{(\mu,p)}^L(M)$ ($\text{im} L_{(\mu,p)}^L(M)$), а через $\tilde{\mathfrak{X}}$ ($\tilde{\mathfrak{Y}}$) – замыкание линейала $\mathfrak{X}^0 + \text{im} R_{(\mu,p)}^L(M)$ ($\mathfrak{Y}^0 + \text{im} L_{(\mu,p)}^L(M)$) в норме пространства \mathfrak{X} (\mathfrak{Y}).

Определение 2. Сильно непрерывное отображение $V^\bullet : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{V})$ называется *сильно непрерывной полугруппой разрешающих операторов* (или просто *разрешающей C_0 -полугруппой*), если

- (i) $V^s V^t = V^{s+t} \quad \forall s, t > 0$;
- (ii) $v(t) = V^t v_0$ есть решение этого уравнения для любого v_0 из плотного в \mathcal{V} линейала.

Полугруппу $\{V(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{V}) : t \in \overline{\mathbb{R}_+}\}$ будем называть *экспоненциально ограниченной* с константами C, ω , если

$$\exists C > 0 \quad \exists \omega \in \mathbb{R} \quad \forall t \in \overline{\mathbb{R}_+} \quad \|V(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{V})} \leq C e^{\omega t}.$$

Теорема 1. Пусть оператор M (L, p) -радиален. Тогда существует экспоненциально ограниченная с константами K, ω из определения 1 и сильно непрерывная разрешающая полугруппа для однородного уравнения (4) при $a \equiv 1$, рассматриваемого на подпространстве $\tilde{\mathfrak{X}}$

Замечание 1. Операторы разрешающей полугруппы для уравнения (4) при $a \equiv 1$ и $t > 0$ можно представить в виде

$$X(t) = s - \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\left(L - \frac{t}{k} M \right)^{-1} L \right)^k = s - \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{k}{t} R_{\frac{k}{t}}^L(M) \right)^k,$$

принимая во внимание поправки формулы, обсуждаемые в работе [3].

Замечание 2. Единицей полугруппы $\{X(t) \in \mathcal{L}(\tilde{\mathfrak{X}}) : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$ является проектор P вдоль \mathfrak{X}^0 на \mathfrak{X}^1 .

Определение 3. Оператор M называется *сильно (L, p) -радиальным*, если при любых $\lambda, \mu_0, \mu_1, \dots, \mu_p > \omega$ выполняются условия

(i) существует плотный в \mathfrak{Y} линейал \mathfrak{Y}° такой, что для всех $y \in \mathfrak{Y}^\circ$

$$\|M(\lambda L - M)^{-1} L_{(\mu, p)}^L(M)y\|_{\mathfrak{Y}} \leq \frac{\text{const}(y)}{(\lambda - \omega) \prod_{k=0}^p (\mu_k - \omega)};$$

$$(ii) \|R_{(\mu, p)}^L(M)(\lambda L - M)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{Y}; \mathfrak{X})} \leq \frac{K}{(\lambda - \omega) \prod_{k=0}^p (\mu_k - \omega)}.$$

Теорема 2. Пусть M сильно (L, p) -радиален. Тогда

(i) $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}^0 \oplus \mathfrak{X}^1$, $\mathfrak{Y} = \mathfrak{Y}^0 \oplus \mathfrak{Y}^1$;

(ii) $L_k = L \Big|_{\mathfrak{X}^k} \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}^k; \mathfrak{Y}^k)$, $M_k = M \Big|_{\text{dom} M_k} \in \mathcal{C}l(\mathfrak{X}^k; \mathfrak{Y}^k)$,

$\text{dom} M_k = \text{dom} M \cap \mathfrak{X}^k$, $k = 0, 1$;

(iii) существуют операторы $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{Y}^0; \mathfrak{X}^0)$ и $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{Y}^1; \mathfrak{X}^1)$.

2. Оптимальное управление для модели в относительно радиальном случае

Определение 4. Вектор-функция $x \in H^1(\mathfrak{X}) = \{x \in L_2(0, \tau; \mathfrak{X}) : \dot{x} \in L_2(0, \tau; \mathfrak{X})\}$ называется *сильным решением уравнения (4)*, если она почти всюду на $(0, \tau)$ обращает его в тождество. Сильное решение $x = x(t)$ уравнения (4) называется *сильным решением задачи Шоултера–Сидорова (3), (4)*, если оно удовлетворяет (3).

Обозначим $\mathbb{N}_0 \equiv \mathbb{N} \cup \{0\}$. Построим гильбертово пространство $H^{p+1}(\mathfrak{Y}) = \{y \in L_2(0, \tau; \mathfrak{Y}) : y^{(p+1)} \in L_2(0, \tau; \mathfrak{Y}), p \in \mathbb{N}_0\}$ со скалярным произведением $[y, z] = \sum_{q=0}^{p+1} \int_0^\tau \langle y^{(q)}, z^{(q)} \rangle_{\mathfrak{Y}} dt$.

В силу результатов [2] при условии сильной (L, p) -радиальности оператора M для любых $x_0 \in \mathfrak{X}$ и $f \in H^{p+1}(\mathfrak{Y})$ существует единственное сильное решение $x \in H^1(\mathfrak{X})$ задачи Шоултера–Сидорова (3) для уравнения (4) вида

$$x(t) = X_0^{\int_0^t a(\zeta) d\zeta} P x_0 + \int_0^t X_s^{\int_0^t a(\zeta) d\zeta} L_1^{-1} Q(f(s) + Bu(s)) ds - \sum_{k=0}^p (M_0^{-1} L_0)^k M_0^{-1} (I - Q)(AD)^k A(f(t) + Bu(t)).$$

Определим пространства $\mathfrak{X} = \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$, $\mathfrak{Y} = W_2^{-1}(\Omega)$.

Пусть $\lambda, d \in \mathbb{R}$ фиксированы, тогда определим операторы соотношениями $L = \lambda - \Delta$, $M = \Delta - id\Delta^2$, где Δ – оператор Лапласа. Как показано в [1], оператор $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ и оператор $M \in \mathcal{Cl}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ с $\text{dom} M = \{x \in W_2^3(\Omega) : \Delta x(s, t) = x(s, t) = 0, s \in \partial\Omega\}$. Обозначим через $\{\lambda_k\}$ последовательность собственных значений однородной задачи Дирихле для оператора Лапласа Δ в области Ω . Последовательность $\{\lambda_k\}$ занумерована по невозрастанию с учетом кратности. Обозначим через $\{\varphi_k\}$ ортонормированную (в смысле $L_2(\Omega)$) последовательность соответствующих собственных функций, $\varphi_k \in C^\infty(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$.

Лемма 1. При любых $\lambda, d \in \mathbb{R}$ оператор M сильно $(L, 0)$ -радиален.

Доказательство Леммы приводится в [1].

Переопределим условие Шоултера–Сидорова:

$$P(x(0) - x_0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \sum_{\mu_k \in \sigma^L(M)} \langle (x(t) - x_0), \varphi_k \rangle \varphi_k$$

Определение 5. Вектор-функцию $v \in H_{\partial}^1(\mathfrak{U})$ назовем *оптимальным управлением модели* (1), (2) решениями задачи (3), (4), если

$$(6) \quad J(v) = \min_{(x,u) \in \mathfrak{X} \times H_{\partial}^1(\mathfrak{U})} J(u),$$

где пары $(x, u) \in \mathfrak{X} \times H_{\partial}^1(\mathfrak{U})$ удовлетворяют (3), (4) и $H_{\partial}^1(\mathfrak{U})$ — замкнутое, выпуклое подмножество в $H^1(\mathfrak{U})$.

Теорема 3. Пусть оператор M сильно (L, p) -радиален, $p \in \mathbb{N}_0$, функция $a \in C^{p+1}([0, \tau]; \mathbb{R}_+)$. Тогда при любых $x_0 \in \mathfrak{X}$ существует единственное оптимальное управление $v \in H_{\partial}^{p+1}(\mathfrak{U})$ модели (1), (2) задачи (3), (5), (6).

Литература

1. САГАДЕЕВА М.А., ШУЛЕПОВ А.Н. *Об одной нелинейной модели на основе относительно радиального уравнения соболевского типа* // Вестник Одесского национального университета. Математика и механика. — 2013. — Т. 18, вып. 2(18). — С. 35–43.
2. САГАДЕЕВА М.А., ШУЛЕПОВ А.Н. *Задачи оптимального и жесткого управления решениями специального вида нестационарных уравнений соболевского типа* // Вестник СамГТУ. Серия: Физико-математические науки. — 2014. — №2(35). — С. 33–38.
3. САГАДЕЕВА М.А., ШУЛЕПОВ А.Н. *Аппроксимации вырожденных C_0 -полугрупп* // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. — 2013. — Т. 6, №2. — С. 133–137.
4. СВИРИДЮК Г.А., ЗАГРЕБИНА С.А. *Задача Шоуолтера-Сидорова как феномен уравнений соболевского типа* // Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика. — 2010. — Т. 3, №1. — С. 104–125.
5. FAVINI A., YAGI A. *Degenerate differential equations in Banach spaces*. — New York, Basel, Hong Kong: Marcel Dekker, Inc, 1999. — 236 p.

6. SVIRIDYUK G.A., FEDOROV V.E. *Linear Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators*. – Utrecht, Boston: VSP, 2003. – 216 p.

OPTIMAL CONTROL OF STATES FOR A NONSTATIONARY MODEL IN THE RELATIVELY RADIAL CASE

Minzilya Sagadeeva, South Ural State University, Chelyabinsk,
Cand.Sc., associate professor (sagadeeva_ma@mail.ru).

Andrew Shulepov, South Ural State University, Chelyabinsk,
student (andrewn92@mail.ru).

Abstract: In this paper we prove the existence of a unique optimal and hard control over solutions of Showalter–Sidorov problem for the nonstationary model, which is described by Sobolev type equations. In this case, one of the operators in the equation is multiplied by a scalar function of the time-variable, besides stationary equation has a strong continuous degenerate resolving semigroup of operators.

Keywords: optimal control, nonstationary Sobolev type equations, relatively radial case.

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии М.В. Губко.*

*Поступила в редакцию 29.05.2015.
Дата опубликования 31.05.2016.*

УДК 681.5
ББК 32.965

НАСТРОЙКА ПАРАМЕТРОВ ПРОПОРЦИОНАЛЬНО-ИНТЕГРАЛЬНОГО РЕГУЛЯТОРА С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА СИМПЛЕКС-ПЛАНИРОВАНИЯ

Гутова С. Г.¹, Казакевич И. А.²

(Кемеровский государственный университет, Кемерово)

Рассмотрен вопрос о нахождении оптимальных настроек пропорционально-интегрального регулятора с помощью двумерного симплекса. При построении замкнутой системы автоматического регулирования колебательных динамических объектов применяются различные критерии регулирования. В заключении приводится сравнительный анализ результатов нахождения параметров регулятора при различных критериях регулирования.

Ключевые слова: пропорционально-интегральный регулятор, настройка параметров, колебательное звено, симплекс-планирование.

1. Введение

Главная задача систем регулирования состоит в том, чтобы стабилизировать параметры процесса на заданном уровне при наличии внешних возмущающих воздействий на объект управления. Этим занимаются системы автоматической стабилизации. Другой не менее важной задачей является задача обеспечения программного перехода на новые режимы работы. Решение этой проблемы осуществляется с помощью той же системы стабили-

¹ Светлана Геннадьевна Гутова, кандидат технических наук, доцент (gsg1967@mail.ru).

² Иван Андреевич Казакевич, магистрант (iakaz93@mail.ru).

зации, задание которой изменяется с помощью программного воздействия.

Целью данной работы является построение замкнутой системы регулирования, вырабатывающей управляющее воздействие, которое приводит выходной сигнал объекта к задающему уровню.

Как правило, модель замкнутой системы регулирования имеет больший порядок, чем модель объекта регулирования [5]. Для нахождения полюсов передаточной функции замкнутой системы автоматического регулирования предлагается использовать алгоритм нахождения корней уравнения третьей степени с помощью формулы Кордано [9]. Для нахождения настроек параметра регулятора применен метод симплекс-планирования [5–7].

В ряде практических случаев реальные контуры регулирования могут быть сведены к простейшим контурам второго или третьего порядка, настройка которых осуществляется путем выбора по определенным правилам параметров регулятора [12, 15, 16]. Поэтому в работе рассмотрен объект регулирования, представленный одним из простейших динамических звеньев – колебательным звеном второго порядка.

2. Объект регулирования и регулятор

2.1. ОБЪЕКТ РЕГУЛИРОВАНИЯ

В качестве объекта регулирования рассмотрим колебательное звено второго порядка. Оно является частным случаем апериодического или инерционного звена второго порядка, полюса которого являются комплексно-сопряженными числами.

Колебания всегда возникают, когда есть обмен энергией между частями конструкции, там, где идёт процесс накопления и передачи энергии. Например, центробежный механизм. При толчке возникают затухающие колебания пружины [12].

Математическое описание колебательного звена – линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами [2, 3, 10]:

$$(1) \quad T^2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2T\xi \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = Kx(t),$$

где K – коэффициент передачи; T – постоянная времени, характеризующая инерционность системы, т.е. продолжительность переходного процесса в ней ($T > 0$); ξ – коэффициент (декремент) затухания, который характеризует рассеяние энергии в звене ($0 < \xi < 1$).

При $\xi = 1$ колебательное звено превращается в аperiodическое звено II порядка.

После применения преобразования Лапласа [11] к формуле (1) получим представление колебательного звена в виде передаточной функции [2, 3, 10, 11]:

$$(2) \quad G(s) = \frac{K}{T^2 s^2 + 2T\xi s + 1}.$$

В качестве примера приведем функциональную схему электрического четырехполюсника (RLC-фильтра) [12].

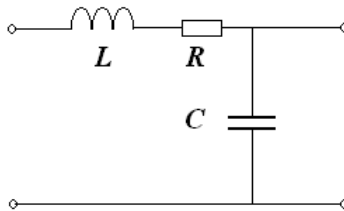


Рис. 1. Функциональная схема электрического четырехполюсника

Здесь R – сопротивление нагрузки; L – индуктивность обмотки дросселя; C – емкость конденсатора.

Передаточная функция четырехполюсника имеет вид

$$G(s) = \frac{K}{LCs^2 + RCs + 1}.$$

$$\text{Здесь } T = \sqrt{LC}, \xi = \frac{RC}{2T} = \frac{R}{2} \cdot \sqrt{\frac{C}{L}}.$$

Чтобы звено было колебательным, необходимо соотношение параметров

$$R^2 < \frac{4L}{C}.$$

Так как известно, что любое входное воздействие можно представить в виде линейной комбинации ступенчатых воздействий с различными амплитудами и различными начальными моментами [10], рассмотрим переходную характеристику объекта (2). Для этого подадим на вход единичное ступенчатое воздействие:

$$(3) \quad x(t) = 1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \geq 0. \end{cases}$$

Переходная характеристика объекта (2) примет вид

$$(4) \quad y(t) = K \left(1 - C e^{-\gamma t} \sin(\lambda t + \theta) \right),$$

$$\lambda = \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{T}, \quad C = \frac{1}{\lambda T}, \quad \gamma = \frac{\xi}{T}, \quad \theta = \arctg \frac{\lambda}{\gamma}.$$

График переходной характеристики (4) представлен на рис. 2.

2.2. РЕГУЛЯТОР И КРИТЕРИИ РЕГУЛИРОВАНИЯ

В данной работе система автоматического регулирования объектом (2) строится на основе пропорционально-интегрального закона управления [3, 11], т.е. с использованием пропорционально-интегрального регулятора (ПИ-регулятора).

Дифференциальное уравнение, описывающее работу ПИ-регулятора, является суммой пропорциональной и интегральной составляющих:

$$(5) \quad u(t) = K_R x(t) + \frac{1}{T_I} \int_0^t x(t) dt,$$

где K_R – коэффициент усиления регулятора, обеспечивающий пропорциональное увеличение (уменьшение) выходного сигнала регулируемого объекта; T_I – постоянная времени интегрирования.

Пропорционально-интегральное управление сочетает в себе высокую точность интегрального управления (астатизм) с большим быстродействием пропорционального управления. В первые моменты времени при появлении ошибки $x(t)$ система с ПИ-регулятором работает как система пропорционального регулирования, а в дальнейшем начинает работать как система интегрального управления.

Передаточная функция такого регулятора имеет вид

$$(6) \quad R(s) = K_R + \frac{1}{T_I s}.$$

Из [2, 3, 11] знаем, что система автоматического регулирования прежде всего должна быть устойчива. В устойчивой системе переходный процесс затухает. Однако для практики вовсе не безразличен характер затухания переходного процесса. Так, например, если переходный процесс затухает медленно и система долго входит в новый установившийся режим, то она обладает недостаточным быстродействием, и, следовательно, ее применение будет ограничено. Поэтому устойчивость является необходимым, но недостаточным условием работоспособности автоматических систем. Достаточным условием является качество процессов регулирования, которое оценивается качеством переходных процессов и ошибками в установившихся режимах.

Качество переходных процессов обычно оценивают по переходной характеристике.

Основными показателями качества переходного процесса являются время регулирования и перерегулирование.

Время регулирования τ определяется длительностью переходного процесса. Теоретически переходный процесс длится бесконечно долго, однако практически считают, что он заканчивается, как только отклонения регулируемой величины от нового ее установившегося значения не будут превышать допустимых пределов δ . Обычно принимают $\delta = (3-5)\%$ от установившегося значения $u_{уст}$. Временем τ характеризуют быстродействие системы.

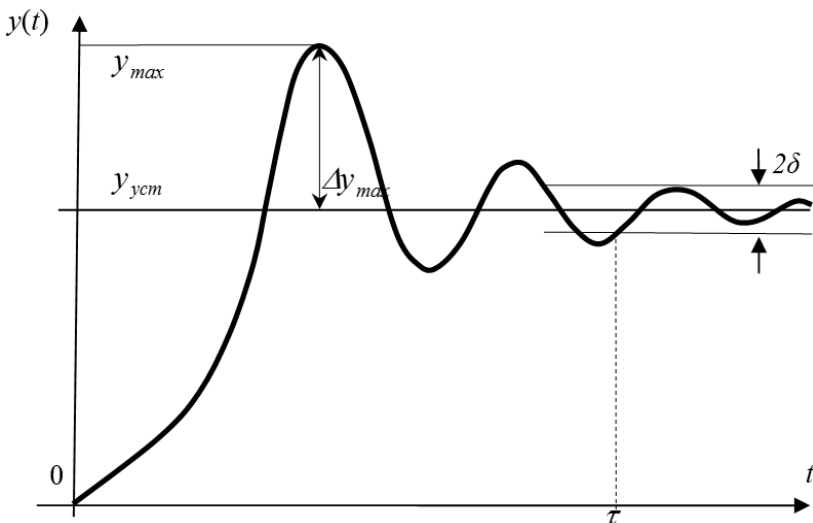


Рис. 2. Переходная характеристика замкнутой системы для случая колебательного звена с перерегулированием и временем регулирования

Перерегулирование Δy_{max} , или выброс, представляет собой максимальное отклонение регулируемой величины от нового установившегося значения. Обычно первый максимум является наибольшим. Относительное перерегулирование вычисляют по формуле

$$(7) \quad \sigma = \frac{\Delta y_{max}}{y_{уст}} = \frac{y_{max} - y_{уст}}{y_{уст}}.$$

Здесь y_{max} – это максимальное значение первого колебания устойчивой системы.

Время регулирования и перерегулирование – основные показатели переходного процесса – тесно связаны между собой. На первый взгляд может показаться, что перерегулирование недопустимо, так как оно увеличивает время регулирования. Однако это не так. Действительно, перерегулирование появляется вследствие того, что система к новому установившемуся состоянию подходит с определенной скоростью.

Чем больше эта скорость, тем дальше за новое установившееся положение пройдет система по инерции. Значит, для уменьшения перерегулирования необходимо уменьшить скорость, с которой система подходит к новому установившемуся состоянию. Это, в конце концов, приведет к увеличению времени регулирования.

Так как время регулирования характеризует быстродействие системы, то там, где это необходимо, стремятся свести его к минимуму. Это значит, что система должна обрабатывать задающее воздействие с большой скоростью, что в итоге приводит к большому перерегулированию. Кроме того, поскольку переходный процесс колебательный, то будут иметь место большие ускорения регулируемой величины, что может вызвать недопустимо большие динамические нагрузки на элементы системы. Таким образом, как отсутствие, так и слишком большое перерегулирование нежелательно. Поэтому в качестве оптимального допускают перерегулирование в пределах 20–30%. При этом число полуколебаний переходной функции равно двум или трем.

Числовые значения времени регулирования и перерегулирования часто задают в качестве исходных данных для синтеза корректирующих устройств, поскольку правильным выбором и настройкой последних обеспечивается подавление нежелательных колебаний регулируемой величины в переходном процессе.

Для некоторых систем перерегулирование вообще недопустимо, например, для систем автоматического регулирования химических процессов, где перерегулирование может испортить выпускаемый продукт. Необходимо также иметь в виду, что стремление уменьшить время регулирования приводит к увеличению мощности исполнительного устройства.

2.3. НАСТРОЙКА ПАРАМЕТРОВ ПИ-РЕГУЛЯТОРА

Среди методов настройки параметров автоматического регулятора можно выделить две основные группы.

К первой группе относятся методы, требующие экспериментов над объектом, т.е. эмпирические методы. Они используют данные, полученные экспериментально на реальном объекте. Наиболее известный представитель этой группы – метод, пред-

ложенный Циглером и Никольсом в 1942 году. В системах без запаздывания применяют вариант этого метода, основанный на использовании запасов устойчивости. В этом варианте процедура настройки начинается с экспериментального исследования системы при условии, что интегральная составляющая ПИ-регулятора обнуляется. Коэффициент передачи пропорциональной составляющей увеличивается до тех пор, пока на выходе системы не установятся колебания с постоянной амплитудой колебаний, т.е. система не окажется на границе устойчивости. Это значение коэффициента передачи регулятора фиксируется и измеряется период колебаний. Затем значения параметров регулятора выбранного типа рассчитываются по формулам [14] с использованием фиксированных значений коэффициента передачи и периода колебаний. Недостатком метода Циглера – Никольса является необходимость выводить систему на границу устойчивости, что для многих объектов управления делать не рекомендуется.

Кроме метода Циглера – Никольса к эмпирическим методам относятся: метод Чина – Хронеса – Ресвика; метод Кеслера; метод Латцеля; метод Куна; метод Пройса [4, 8, 13, 16]. Трудоемкость и качество настройки САР по указанным методам различны. Так, например, метод Чина – Хронеса – Ресвика дает практически неудовлетворительные результаты (большие перерегулирования). Метод Латцеля отличается высокой точностью, но и трудоемкостью, так как в нем используется табличная информация. Методом Пройса можно получить хорошие результаты настройки регуляторов, но он математически сложен и нуждается в трудоемком моделировании.

Также к методам, требующим проведения экспериментов над объектом, можно отнести методы расчета параметров по амплитудно-фазовым (АФХ) и частотным характеристикам объекта [13]. Применение таких методов требует наличие специальной аппаратуры для экспериментального определения АФХ объекта управления. Эту характеристику можно использовать для расчета настроек ПИ-регулятора, где главным критерием является обеспечение заданных запасов устойчивости в системе.

К экспериментальным можно также отнести графические методы и методы расчета параметров регулятора по номограммам [4, 16].

Ко второй группе относятся методы настройки параметров регулятора, основанные на использовании методов оптимизации. Выбирается критерий минимизации, в качестве которого может быть один из показателей качества или комплексный критерий, составленный из нескольких показателей с разными весовыми коэффициентами. К критерию добавляются ограничения, накладываемые требованиями робастности. Таким путем получается целевая функция, зависящая от параметров ПИ-регулятора. Далее используются численные методы минимизации целевой функции с заданными ограничениями, которые и позволяют найти искомые параметры.

Методы, основанные на оптимизации, имеют следующие достоинства: позволяют получить оптимальные значения параметров, не требующие дальнейшей подстройки; не требуют упрощения модели объекта – модель может быть как угодно сложной; позволяют быстро достичь конечного результата (избежать процедуры длительной подстройки параметров).

Однако реализация данного подхода связана с большими проблемами, которые не один десяток лет являются предметом научных исследований. К этим проблемам относятся: низкая надежность метода (во многих случаях вычислительный процесс может расходиться и искомые коэффициенты не будут найдены); низкая скорость поиска минимума для овражных функций и функций с несколькими минимумами.

Тем не менее методы оптимизации являются мощным средством настройки регуляторов с помощью специально разработанных для этого компьютерных программ. К данной группе, в частности, относятся метод Нелдера – Мида, методы случайного поиска [6, 7]. Рассмотренный в работе метод симплекс-планирования [7] также можно отнести к методам, использующим процедуру оптимизации по выбранному критерию.

3.1. МЕТОД СИМПЛЕКС-ПЛАНИРОВАНИЯ

Поиск оценок параметров регулятора в данной работе осуществляется методом симплекс планирования, в соответствии с

которым исходную серию опытов планируют так, чтобы точки, соответствующие условиям проведения этих опытов, образовывали правильный симплекс в многофакторном пространстве [7]. Под правильным симплексом понимается совокупность $k + 1$ равноудаленных одна от другой точек в k -мерном пространстве. В одномерном пространстве симплексом является отрезок прямой, в двухмерном – равносторонний треугольник, в трехмерном – правильная треугольная пирамида – тетраэдр.

После проведения первой серии опытов выявляется точка (опыт), отвечающая условиям, при которых получаются наихудшие результаты, т.е. достигается наихудшее значение целевой функции f (наибольшее время регулирования, наибольшее перерегулирование). Эту точку заменяют новой, представляющей собой ее «зеркальное отображение» относительно противоположной грани симплекса. Вместе с оставшимися указанная точка снова образует правильный симплекс, центр тяжести которого смещен по сравнению с исходным в направлении от худшей точки к центру тяжести остальных точек. В общем случае это направление не является наиболее крутым, однако оно обращено в сторону повышения качества процесса.

После реализации опыта в дополнительной точке опять производится сопоставление результатов, выявляется наихудшая точка, которую так же заменяют ее «зеркальным отображением» и т.д. Если на каком-то этапе очередное «зеркальное отображение» попадает в точку, которая была худшей точкой симплекса два этапа назад, то необходимо уменьшить (например, вдвое) расстояние между точками симплекса.

Эту процедуру пошагового восхождения с последовательным отбрасыванием наихудших точек повторяют до тех пор, пока не будет достигнута «почти стационарная» область, в данном случае область, в которой точки симплекса будут совпадать с заданной точностью.

Для определения оптимальных настроек регулятора K_R и K_I воспользуемся симплекс методом для размерности пространства $k = 2$ [5, 6]. Для этого зададим первоначальный симплекс из трех точек плоскости с координатами (K_R, K_I) , которые являются вершинами равностороннего треугольника ABC .

Если $d = 0,5$, то можно положить $A(0,1; 0,1)$, $B(0,1; 0,6)$ и $C(0,15; 0,19)$, и первоначальный симплекс имеет вид, приведенный на рис. 3.

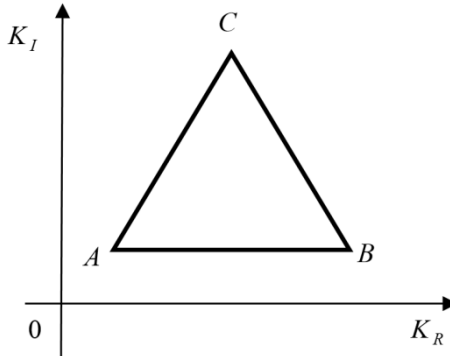


Рис. 3. Первоначальный симплекс

Далее, необходимо рассчитать время регулирования или перерегулирование для каждой точки симплекса. Определить лучшую и худшую точку, согласно выбранному показателю качества регулирования. Затем точки переименовываются так, чтобы A была лучшей, а C – худшей точкой симплекса.

Следующий шаг состоит в отображении точки C симметрично относительно прямой AB . Получим новую точку симплекса – точку M (см. рис. 4).

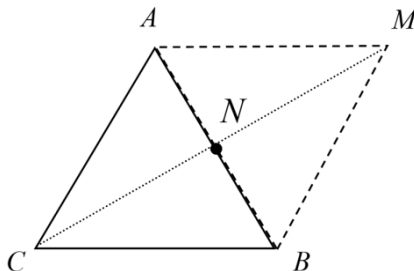


Рис. 4. Нахождение точки нового симплекса путем отображения относительно прямой AB

Так как точка N – середина отрезка AB :

$$N = \frac{A+B}{2},$$

– является одновременно серединой отрезка CM , то получим уравнение:

$$\frac{C+M}{2} = \frac{A+B}{2},$$

откуда $M = A + B - C$.

После чего снова надо найти лучшую и худшую точки и переименовать вершины треугольника в порядке ухудшения показателя качества регулирования: A , B и C .

Если худшей окажется точка M , то после очередного отображения точка $C = M$ вернется в начальное положение и процесс заикнется. В таком случае сторону треугольника необходимо уменьшить вдвое. Причем точка, которая останется неизменной, – лучшая точка A . Получим новый симплекс $A'B'C'$ (см. рис. 5).

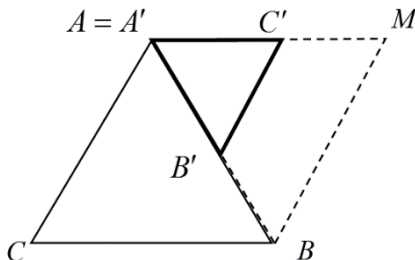


Рис. 5. Уменьшение стороны симплекса вдвое

Аналогично уменьшим сторону симплекса, если координаты новой точки симплекса после отображения перестанут быть неотрицательными.

Процесс продолжается, пока сторона треугольника не станет меньше заданной величины μ .

После чего оптимальными настройками параметров регулятора считаем координаты точки A .

Приведем алгоритм нахождения оптимальной точки.

1. Пусть сторона треугольника равна d .

2. Зададим первоначальную точку произвольно $A(a_1^0, a_2^0)$.

3. Найдем координаты других точек симплекса:

$$B(b_1, b_2) = (a_1^0, a_2^0 + d);$$

$$C(c_1, c_2) = \left(a_1^0 + \frac{d}{2}, a_2^0 + \frac{d\sqrt{3}}{2} \right).$$

4. В каждой точке симплекса найдем значение целевой функции:

$$f_A = f(a_1^0, a_2^0); f_B = f(b_1^0, b_2^0); f_C = f(c_1^0, c_2^0).$$

5. Упорядочим точки симплекса по убыванию (возрастанию) значения целевой функции и переименуем их так, чтобы точка A стала наилучшей точкой, а точка C – наихудшей.

6. Получим точку M – «зеркальное» отображение точки C относительно стороны AB (см. рис. 4). Координаты M найдем по формуле

$$M(m_1, m_2) = (a_1 + b_1 - c_1, a_2 + b_2 - c_2).$$

7. Найдем значения целевой функции в каждой точке нового симплекса A, B, M .

8. Упорядочим точки симплекса по убыванию значения целевой функции и переименуем их так, чтобы точка A стала наилучшей точкой, а точка C – наихудшей. Получим координаты точек на k -м шаге (в данном случае $k = 1$): $A(a_1^k, a_2^k)$, $B(b_1^k, b_2^k)$, $C(c_1^k, c_2^k)$.

9. Проверим полученные координаты на ограничения: если $a_i^k \leq 0$, или $b_i^k \leq 0$, или $c_i^k \leq 0$ ($i = 1, 2$), то переходим к пункту 11; если ограничения на координаты выполняются, то переходим к пункту 6.

10. Проверим, что при повторном зеркальном отображении худшая точка $C(c_1^k, c_2^k)$ не совпадает с худшей точкой две итерации назад (зацикливание): если $C(c_1^k, c_2^k) = C(c_1^{k-2}, c_2^{k-2})$, то переходим к пункту 11; если нет, переходим к пункту 6.

11. В случае нарушения ограничений или зацикливания уменьшим вдвое сторону симплекса (см. рис. 5), т.е. координаты вершин на k -м шаге пересчитаем по формулам

$$A' = A(a_1^k, a_2^k) = A(a_1^k, a_2^k);$$

$$B' = B(b_1^k, b_2^k) = \left(\frac{a_1^k + b_1^k}{2}, \frac{a_2^k + b_2^k}{2} \right);$$

$$C' = C(c_1^k, c_2^k) = \left(\frac{a_1^k + c_1^k}{2}, \frac{a_2^k + c_2^k}{2} \right).$$

После чего переходим к пункту 6.

12. Продолжаем выполнять пункты 6–11, пока сторона симплекса не станет меньше заданной величины μ , т.е. пока выполняется условие

$$|AB| = \sqrt{(a_1^k - b_1^k)^2 + (a_2^k - b_2^k)^2} \geq \mu.$$

13. Как только условие пункта 12 перестает выполняться, оптимальной точкой считаем точку $A(a_1^k, a_2^k)$.

3.2. НАСТРОЙКА ПАРАМЕТРОВ РЕГУЛЯТОРА ЗАМКНУТОЙ СИСТЕМЫ

Построим замкнутую систему автоматического регулирования объектом (2) на основе пропорционально-интегрального закона управления, т.е. с использованием пропорционально-интегрального регулятора (ПИ-регулятора), имеющего передаточную функцию (5).

Схема замкнутой системы регулирования с отрицательной обратной связью [3, 11] приведена на рис. 6.

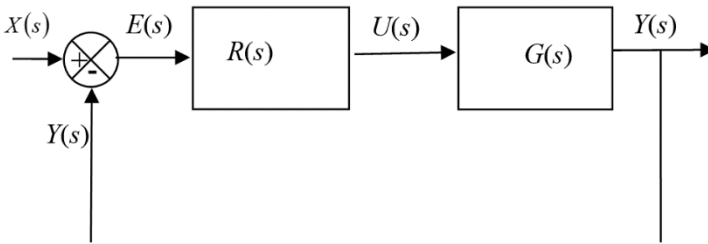


Рис. 6. Схема замкнутой системы регулирования с отрицательной обратной связью

Здесь $u(t)$ – управляющее воздействие, вырабатываемое регулятором; $\varepsilon(t)$ – рассогласование между задающим воздействием $x(t)$ и выходным сигналом $y(t)$ объекта (2), т.е. $\varepsilon(t) = x(t) - y(t)$; $U(s)$, $E(s)$ и $Y(s)$ – их изображения по Лапласу соответственно.

Согласно рис. 6, передаточная функция разомкнутой системы регулирования, связывающая $E(s)$ и $Y(s)$, имеет вид

$$(8) \quad W_{раз}(s) = R(s) \cdot G(s).$$

Тогда передаточная функция замкнутой системы с отрицательной обратной связью примет вид

$$(9) \quad W(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{W_{раз}(s)}{1 + W_{раз}(s)}.$$

Или после подстановки (8) в (9):

$$(10) \quad W(s) = \frac{R(s) \cdot G(s)}{1 + R(s) \cdot G(s)}.$$

Заменим для удобства коэффициент $1/T_I$ в формуле (5) на K_I и приведем дроби к общему знаменателю. Получим передаточную функцию регулятора в виде

$$(11) \quad R(s) = \frac{K_R s + K_I}{s}.$$

Подставим (11) и (2) в выражение (10). Получим:

$$(12) \quad W(s) = \frac{KK_I \cdot \left(\frac{K_R}{K_I} s + 1 \right)}{T^3 s^3 + 2\xi T s^2 + (1 + KK_R) \cdot s + KK_I}.$$

Обозначим

$$\frac{K_R}{K_I} = \tau, \quad 1 + KK_R = \alpha, \quad KK_I = \beta, \quad \varphi = 2\xi T.$$

Тогда (12) примет вид

$$(13) \quad W(s) = \beta \cdot \frac{\tau s + 1}{T^3 s^3 + \varphi s^2 + \alpha s + \beta}.$$

Найдем корни характеристического уравнения

$$(14) T^3 s^3 + \varphi s^2 + \alpha s + \beta = 0.$$

Воспользуемся формулой Кордано [9]. Кубическое уравнение (14) имеет три корня. Один действительный:

$$s_1 = q$$

и два комплексно-сопряженных:

$$s_2 = u - iv, \quad s_3 = u + iv.$$

Тогда (14) можно представить в виде

$$\begin{aligned} T^3 s^3 + \varphi s^2 + \alpha s + \beta &= T^3 (s - q) \cdot (s - u + iv) \cdot (s - u - iv) = \\ &= T^3 (s - q) \cdot \left((s - u)^2 + v^2 \right) = T^3 (s - q) \cdot \left(s^2 - 2us + (u^2 + v^2) \right). \end{aligned}$$

Обозначим

$$G = -q, \quad E = -2u, \quad F = u^2 + v^2.$$

Тогда (13) принимает вид

$$(15) W(s) = \beta \cdot \frac{\nu s + 1}{(s + G) \cdot (s^2 + Es + F)}.$$

Изображение по Лапласу выходного сигнала получается по правилу

$$(16) Y(s) = \frac{Ap}{s} \cdot \frac{\beta}{T^3} \cdot \frac{\nu s + 1}{(s + G) \cdot (s^2 + Es + F)}.$$

Здесь задающее воздействие – ступенчатая функция Ap/s с амплитудой Ap .

Чтобы было возможно применение таблицы обратного преобразования Лапласа [11], представим передаточную функцию (15) в виде суперпозиции двух более простых передаточных функций. Используем метод неопределенных коэффициентов [1].

$$(17) \frac{\nu s + 1}{(s + G) \cdot (s^2 + Es + F)} = \frac{A_1}{s + G} + \frac{A_2 s + A_3}{s^2 + Es + F}.$$

Приведа к общему знаменателю и приравняв коэффициенты полиномов числителя в левой и правой частях уравнения (17), получим систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов A_1 , A_2 и A_3 :

$$\begin{aligned}
 & A_1 + A_2 = 0, \\
 (18) \quad & A_1 E + A_2 G + A_3 = \nu, \\
 & A_1 F + A_3 G = 1.
 \end{aligned}$$

Решение системы (18) имеет вид

$$\begin{aligned}
 (19) \quad & A_1 = \frac{1 - G\nu}{G^2 - EG + F}, \\
 & A_2 = \frac{G\nu - 1}{G^2 - EG + F}, \\
 & A_3 = \frac{G - E + F\nu}{G^2 - EG + F}.
 \end{aligned}$$

С учетом (19) выражение (16) приобретает следующий вид:

$$Y(s) = \frac{Ap}{s} \cdot \frac{\beta}{T^3} \cdot \left(\frac{A_1}{s + G} + \frac{A_2 s + A_3}{s^2 + Es + F} \right) = Y_1(s) + Y_2(s).$$

Здесь

$$(20) \quad Y_1(s) = \frac{Ap}{s} \cdot \frac{\beta}{T^3} \cdot \frac{A_1}{s + G} = \frac{ApA_1\beta}{T^3G} \cdot \frac{1}{s \left(\frac{1}{G}s + 1 \right)},$$

$$(21) \quad Y_2(s) = \frac{Ap}{s} \cdot \frac{\beta}{T^3} \cdot \frac{A_2 s + A_3}{s^2 + Es + F} = \frac{ApA_3\beta}{T^3F} \cdot \frac{\frac{A_2}{A_3}s + 1}{s \left(\frac{1}{F}s^2 + \frac{E}{F}s + 1 \right)}.$$

Введем обозначения:

$$\rho = \frac{A_2}{A_3}, N^2 = \frac{1}{F}, \text{ где } N = \frac{1}{\sqrt{F}},$$

$$2\eta N = \frac{E}{F}, \text{ где } \eta = \frac{E}{2NF} = \frac{E}{2\sqrt{F}}.$$

Тогда (21) примет вид

$$(22) \quad Y_2(s) = \frac{ApA_3\beta}{T^3F} \cdot \frac{\rho s + 1}{s \cdot (N^2 s^2 + 2\eta N s + 1)}.$$

Оригинал изображения (19) согласно таблице преобразований Лапласа [11] примет вид

$$(23) \quad y_1(t) = \frac{ApA_1\beta}{T^3G} \cdot (1 - e^{-Gt}).$$

Оригинал изображения (21) имеет вид

$$(24) \quad y_2(t) = \frac{ApA_3\beta}{T^3F} \cdot (1 + Ce^{-\gamma t} (\sin(\lambda t - \theta))),$$

где параметры находятся по следующим формулам:

$$\gamma = \frac{\eta}{N}; \quad \lambda = \frac{\sqrt{1 - \eta^2}}{N}; \quad \theta = \arctg \frac{\lambda N}{\rho - \gamma N^2};$$

$$C = \frac{\sqrt{\rho^2 + (1 - 2\gamma\rho)N}}{\lambda N^2}.$$

Таким образом, учитывая (22) и (23), переходная характеристика замкнутой системы (14) принимает вид

$$(25) \quad y(t) = \frac{Ap\beta}{T^3} \cdot \left[\frac{A}{G} \cdot (1 - e^{-Gt}) + \frac{C}{F} \cdot (1 + Ce^{-\gamma t} (\sin(\lambda t - \theta))) \right].$$

При нахождении оптимальных настроек параметров регулятора используем в качестве критерия минимум времени переходного процесса τ^* в замкнутой системе.

Определим время переходного процесса как время, когда кривая $y(t)$ входит в заданный коридор $(Ap - \delta; Ap + \delta)$ и больше не покидает его. Таким образом, необходимо выполнение условия

$$(26) \quad |Ap - y(t)| \leq \delta.$$

Так как переходный процесс колебательный, переходная характеристика (24) может пересекать полосу 2δ несколько раз. Для того чтобы убедиться, что система достигла с заданной точностью установившегося значения, проверим дополнительное условие – равенство нулю производной ее переходной характеристики:

$$(27) \quad |y'(t)| \leq \Delta.$$

Для начального симплекса, приведенного на рис. 3, параметров объекта (2) $K = 1$, $T = 2$ и задающего воздействия с амплитудой $Ap = 7$ оптимальные параметры регулятора оказались следующими: $K_R = 0,24$ и $K_I = 0,34$.

Минимальное время переходного процесса $\tau^* = 7,806$ с.

Здесь параметры симплекс метода были заданы следующими:

$$\delta = 0,001; \Delta = 0,001; \mu = 0,001.$$

Результат визуализации последовательного построения симплекса приведен на рис. 7.

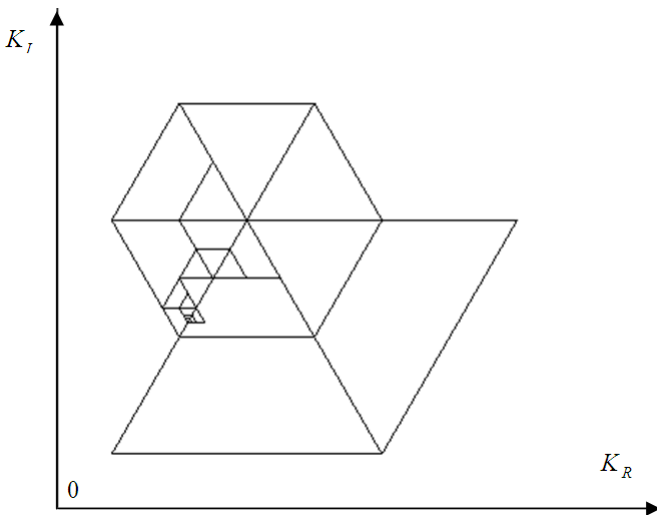


Рис. 7. Результат визуализации последовательного построения симплекса при минимизации времени переходного процесса

Теперь возьмем за критерий качества регулирования минимум перерегулирования.

Для начального симплекса, приведенного на рис. 3, параметров объекта (2) $K = 1$, $T = 2$ и задающего воздействия с амплитудой $Ap = 7$ оптимальные параметры регулятора оказались равными $K_R = 0,63$ и $K_I = 0,04$.

Минимальное перерегулирование $\sigma^* = 0,005$.

Здесь параметры симплекс метода были заданы следующими:

$$\delta = 0,001; \Delta = 0,001; \mu = 0,001.$$

Результат визуализации последовательного построения симплекса приведен на рис. 8.

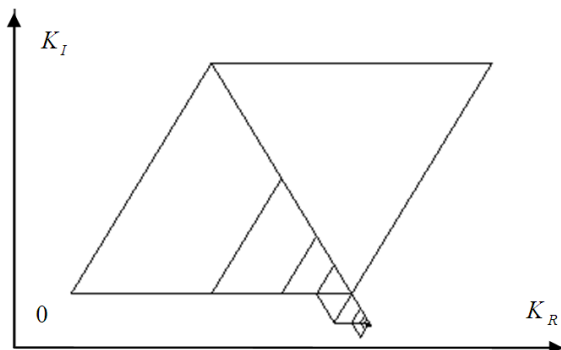


Рис. 8. Результат визуализации последовательного построения симплекса при минимальном перерегулировании

3.3. СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ МОДЕЛИРОВАНИЯ

На примере колебательного звена (2) и различных параметров объекта проанализируем значения оптимальных настроек параметров регулятора в зависимости от выбора критерия качества регулирования.

В таблице 1 приведены значения оптимальных настроек для различных значений параметров K и T объекта (2) и критериев качества регулирования 1) MinTime – минимальное время переходного процесса; 2) MinHigh – минимальное перерегулирование.

Анализ таблицы позволяет сделать вывод о том, что при использовании различных критериев настройки параметра регулятора существенно отличаются.

Так, если за критерий взять минимальное время переходного процесса, то коэффициент пропорциональности регулятора в среднем больше, чем в случае, когда качество регулирования определялось минимальным перерегулированием. Напротив,

постоянная времени интегрирования $T_I = 1/K_I$ в среднем больше во втором случае.

Таблица 1. Сравнительный анализ оптимальных настроек регулятора при различных критериях качества регулирования *MinTime* и *MinHigh*

Параметры объекта		Параметры регулятора при <i>MinTime</i>		Параметры регулятора при <i>MinHigh</i>	
K	T	K_R	K_I	K_R	K_I
1	4	0,35	0,1	0,659	0,010
2	3	0,131	0,046	0,646	0,021
3	3	0,224	0,098	0,0004	0,029
5	5	0,725	1,179	0,064	0,0002

Более того, при возрастании использования в качестве критерия регулирования минимального перерегулирования постоянная времени интегрирования неограниченно растет, как следствие, интегрирующая составляющая формулы ПИ-регулятора (5) неограниченно уменьшается. Это ведет к тому, что регулятор превращается из пропорционально-интегрального просто в пропорциональный.

Это можно объяснить тем, что если приоритетом является минимум времени переходного процесса, то воздействие на объект осуществляется в большей степени пропорциональной составляющей регулятора. Если же главное – не допустить большого перерегулирования, то переходный процесс растягивается за счет увеличения постоянной времени интегрирования.

Литература

1. БАХВАЛОВ Н.С. Численные методы (анализ, алгебра, обыкновенные дифференциальные уравнения). – М.: Наука, Гл.ред.физ.-мат.лит., 1973. – 632 с.
2. БЕСЕКЕРСКИЙ В.А. Радиоавтоматика: учебное пособие для вузов спец. «Радиотехника»/ Под ред. В.А. Бесекерского. – М.: Высшая школа, 1985. – 271 с.
3. ВОРОНОВ А.А., КИМ Д.П., ЛОХИН В.М. Теория автоматического управления. – М.: Высшая школа, 1986. – 504 с.

4. ГАЙДУК А.Р., БЕЛЯЕВ В.Е., ПЬЯВЧЕНКО Т.А. *Теория автоматического управления в примерах и задачах с решениями в MATLAB: учебное пособие.*– С.-Пб.: Лань, 2011. – 464 с.
5. ГУТОВА С.Г., КАЗАКЕВИЧ И.А. *Применение симплекс-планирования для настроек параметров регулятора* // Сборник научных трудов II Международной конференции «Информационные технологии в науке, управлении, социальной сфере и медицине», Национальный исследовательский Томский политехнический университет, 2015. Часть I. / Под ред. О.Г. Берестневой, О.М. Гергет.– Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2015. – С. 32–36.
6. ЖИГЛЯЕВ А.А., ЖИЛИНСКАС А.Г. *Методы поиска глобального экстремума.*– М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1991. – 248 с.
7. КАФАРОВ В.В. *Методы кибернетики в химии и химической технологии.*– М.: Химия, 1985. – 448 с.
8. КОНОВАЛОВ Б.И., ЛЕБЕДЕВ Ю.М. *Теория автоматического управления: учебное пособие.*– Томск: Томский государственный университет системуправления и радиоэлектроники, 2010. – 163 с.
9. КОРН Г., КОРН Т. *Справочник по математике для научных работников и инженеров.*– М.: Наука, 1968. – 47 с.
10. КУО Б. *Теория и проектирование цифровых систем управления.*– М.: Машиностроение, 1986. – 448 с.
11. МАКАРОВ И.М., МЕНСКИЙ Е.М. *Линейные автоматические системы.*– М.: Машиностроение, 1982. – 464 с.
12. МОСКАЛЕНКО В.В. *Электрический привод: учебник для студ. высш. учеб. заведений.*– М.: Издательский центр «Академия», 2007. – 368 с.
13. МИХАЛЕВИЧ С.С. *Частотный метод параметрического синтеза ПИД-регулятора для стационарных, интервальных и многосвязных САУ:* автореферат дис. ... канд. техн. наук. – Томск: Национальный исследовательский Томский гос. ун-т, 2015. – 22 с.
14. *Настройка типовых регуляторов по методу Циглера – Никольса: метод. указания к выполнению лаб. работы для*

студентов, обучающихся по направлениям 210100 «Электроника и наноэлектроника» и 201000 «Биотехнические системы и технологии» / Сост. О.С. Вадутов.– Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2014. – 10 с.

15. ФИТЕРМАН М.Я., ОРИЦУК А.А. *Настройка контуров регулирования САП*// Промышленные АСУ и контроллеры. – 2007. – №8.– [Электронный ресурс] – URL: <http://www.industrialauto.ru/modules/myarticles/article.php?storyid=57> (дата обращения: 28.04.2016).
16. ЧУДНЫЙ А.Ю. *Моделирование нелинейных характеристик для текущего контроля в АСУТП*: автореферат дис. ... канд. техн. наук. –Орел: Орловский гос. техн. ун-т, 2004. –17 с.

TUNING PARAMETERS PROPORTIONAL-INTEGRAL CONTROLLER USING THE METHOD OF SIMPLEX PLANNING

Svetlana Gutova, State University of Kemerovo, Kemerovo, associate professor (gsg1967@mail.ru).

Ivan Kazakevitch, State University of Kemerovo, Kemerovo, master student (iakaz93@mail.ru).

Abstract: The article addresses the problem of finding the optimal parameters of a proportional-integral controller using the two-dimensional simplex approach. When building a closed control system of oscillatory dynamic objects different regulatory criteria are used. In conclusion we provide the comparative analysis of the controller parameters found under different regulatory criteria.

Keywords: proportional-integral controller, parameters adjustment, oscillatory link, simplex planning.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии П.С. Щербаковым

Поступила в редакцию 07.01.2016.

Опубликована 31.05.2016.

РАНЖИРОВАНИЕ АКАДЕМИЧЕСКОГО ВЕБ-ПРОСТРАНСТВА

Мазалов В. В.¹, Печников А. А.²

*(Институт прикладных математических исследований
КарНЦ РАН, Петрозаводск)*

Трухина Л. И.³

*(Читинский институт (филиал) Байкальского государственного
университета экономики и права, Чита)*

Цынгугев Б. Т.⁴

(Забайкальский государственный университет, Чита)

Предлагается для анализа научно-образовательного веб-пространства использовать методы теории графов и кооперативной теории игр. Основной характеристикой анализа является центральность вершин во взвешенном графе. Взвешенный граф представлен как электрическая цепь, и в качестве меры центральности вершины рассматривается суммарный ток, протекающий через данную вершину. Вычисление центральности вершин использует обратную матрицу Лапласа. Рассматриваемый метод имеет относительно невысокую вычислительную сложность. Метод иллюстрируется результатами расчетов электрической центральности для ранжирования вершин графа, представляющего фрагмент взаимосвязанных

¹ Владимир Викторович Мазалов, доктор физико-математических наук, профессор (Петрозаводск, ул. Пушкина, д. 65, тел. (8142) 78-11-08, vmazalov@krc.karelia.ru)

² Андрей Анатольевич Печников, доктор технических наук, доцент (Петрозаводск, ул. Пушкинская, д. 11, тел. (8142) 76-63-12 (доп. 39), pechnikov@krc.karelia.ru)

³ Людмила Ивановна Трухина, кандидат физико-математических наук (litrukhina@gmail.ru).

⁴ Булат Тимурович Цынгугев, аспирант (btsynguev@gmail.com).

сайтов академических организаций РФ. Сделано сравнение с широко используемым методом PageRank.

Ключевые слова: электрическая центральность, вектор Майерсона, веб-граф

Введение

Анализ веб-пространства стремительно набирает всемирную популярность благодаря возникновению всемирной паутины Интернет, а также появлению в 1990-х годах онлайн-сервисов социальных сетей (SixDegrees, LiveJournal, Facebook, Twitter, YouTube и другие). Методы анализа социальных сетей чрезвычайно важны для анализа развития современных тенденций в различных областях науки, а также и для улучшения обмена научной информацией среди научных организаций.

Основной целью статьи является анализ академического веб-пространства России с использованием методов ранжирования вершин графов, основанных на обратной матрице Лапласа и на векторе Майерсона.

Одним из базовых понятий в анализе сетевых структур является *betweenness centrality*. Центральность вершины — это важная мера, отражающая то, насколько вершина участвует в процессе распространения информации между остальными вершинами в графе.

1. Электрическая центральность

В отличие от традиционных моделей вычисления центральности вершин в графе на основе геодезических путей или вычисления предельных вероятностей для некоторого случайного блуждания на данном графе (метод PageRank [6]) в работах [3, 5, 9–11, 13–15] было предложено при расчете меры центральности использовать аналогию с электрическими сетями. В данном подходе граф рассматривается как электрическая цепь с идеальными элементами, где каждое ребро имеет некую пропускную способность (значение обратное сопротивлению), а верши-

ны графа являются её узлами. Для поиска меры центральности в модели электрической цепи используются правила Кирхгофа. Одну модель отличает от другой то, что напряжение подается в цепь различными способами и в качестве меры центральности вершины выбирается либо ее электрический потенциал, либо ток, проходящий через данную вершину, либо другие характеристики.

В [4] рассматривается модель электрической цепи, где каждая вершина цепи соединена с искусственно вводимой вершиной v_{n+1} ребром с пропускной способностью δ . Единичный электрический ток подается в некоторую вершину s , цепь заземляется в вершине v_{n+1} . Таким образом, электрический ток течет по цепи из вершины s в вершину v_{n+1} . Подобный прием использовался в работах [7, 8].

Мерой центральности вершины v служит средняя величина тока, проходящего через вершину v по всем возможным s . Отметим, что ток на ребрах, инцидентных вершине v_{n+1} , не учитывается при расчете центральности.

Обозначим взвешенный граф как $G = (V, E, W)$, где V — множество вершин, E — множество ребер, W — матрица весов:

$$W(G) = \begin{pmatrix} 0 & w_{1,2} & \dots & w_{1,n} \\ w_{2,1} & 0 & \dots & w_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{n,1} & w_{n,2} & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

где $w_{i,j} \geq 0$ — вес ребра между вершинами v_i и v_j , $n = |V|$ — число вершин. Если вершины v_i и v_j несмежные, то $w_{i,j} = 0$. Если G — неориентированный граф, то $w_{i,j} = w_{j,i}$.

Пусть φ_v^s обозначает абсолютный потенциал в вершине $v \in V$ при условии, что источник электрического тока подключен к вершине s . Примем абсолютный потенциал в вершине v_{n+1} равным нулю: $\varphi_{v_{n+1}}^s = 0$, тогда вектор абсолютных потенциалов $\varphi^s(G) = [\varphi_{v_1}^s, \dots, \varphi_{v_n}^s]^T$ в вершинах графа G можно определить следующим выражением (правила Кирхгофа) [4]:

$$(1) \quad \varphi^s(G) = [D(G) - W(G) + \delta I]^{-1} b_s,$$

где $D(G)$ — диагональная матрица суммы весов ребер, инцидентных соответствующим вершинам, I — единичная матрица размерности n , b_s — вектор-столбец, состоящий из n элементов, значения которых равны:

$$b_s(v) = \begin{cases} 1, & v = s, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Ток, протекающий через ребро $e = (v_i, v_j)$, согласно закону Ома, равен $x_e^s = |\varphi_{v_i}^s - \varphi_{v_j}^s| \cdot w_{i,j}$.

Величину тока, протекающего через вершину v можно найти, определив сумму токов на ребрах, инцидентных ей, и поделив полученную сумму на 2. Отметим, что необходимость в делении на 2 возникла в связи с тем, что при суммировании всех токов на ребрах, инцидентных вершине, учитывается электрический ток как входящий в вершину, так и выходящий из нее.

Соответственно величину тока, протекающего через вершину v , при условии, что источник тока находится в вершине s , можно вычислить следующим образом:

$$(2) \quad x^s(v) = \frac{1}{2}(b_s(v) + \sum_{e:v \in e} x_e^s).$$

Таким образом, меру центральности в вершине v для взвешенных графов $CF_\delta(v)$ можно определить по формуле:

$$(3) \quad CF_\delta(v) = \frac{1}{n} \sum_{s \in V} x^s(v) = \frac{1}{2n} (1 + \sum_{s \in V} \sum_{e:v \in e} x_e^s).$$

Вычислительная сложность алгоритма поиска электрической центральности вершин взвешенных графов предлагаемым способом относительно невысока и равна сложности вычисления обратной матрицы $O(n^3)$.

2. Вектор Майерсона

Для определения центральности вершин в графе можно использовать теоретико-игровой подход.

Пусть множество вершин графа G является множеством игроков кооперативной игры, в которой характеристическая функция задаётся следующим образом [12]: каждая прямая связь — путь длиной 1 — приносит игрокам доход r , где $0 \leq r \leq 1$. Кроме того, игроки также извлекают выгоду из косвенных (непрямых) связей, но уже меньшую. За каждый путь длиной 2 коалиция получает r^2 , за путь длиной 3 получает r^3 и т.д. Так как любые две вершины могут быть связаны несколькими путями разной длины, то при построении характеристической функции учитываются только кратчайшие. А если две вершины связаны несколькими путями одинаковой длины, то учитываются все такие пути, при условии, что между этими вершинами нет другого меньшего пути.

Таким образом, для любой коалиции S можно записать

$$(4) \quad \vartheta(S) = a_1 r + a_2 r^2 + \dots + a_L r^L = \sum_{k=1}^L a_k r^k,$$

где L — максимальное расстояние между двумя вершинами в данной коалиции;

a_k — число геодезических путей длины k в данной коалиции,

$$\vartheta(i) = 0, \quad \forall i \in N.$$

Делёж в данной игре определяется по формуле

$$(5) \quad Y_i(\vartheta, G) = \frac{A_1^i}{2} r + \frac{A_2^i}{3} r^2 + \dots + \frac{A_L^i}{L+1} r^L = \sum_{k=1}^L \frac{A_k^i}{k+1} r^k,$$

где A_k^i — число путей длины k , содержащих игрока i .

В [2] доказано, что предложенный делёж для невзвешенных графов является вектором Майерсона.

В рассматриваемой игре значение вектора Майерсона зависит от числа путей. Следовательно, большее значение выигрыша для игрока означает большее количество путей, проходящих через него, а значит, и больший вес игрока в сети. Поэтому можно использовать вектор Майерсона как меру центральности вершин графа. Модифицируем этот подход для взвешенных сетей.

Пусть дан взвешенный граф с целыми весами на ребрах. Заменим каждое ребро веса n на n параллельных ребер единицы веса. Самый короткий путь между любыми двумя вершинами будет определяться так же, как и в невзвешенном графе, так как все ребра имеют единичную длину. Но теперь в целом геодезических путей больше, чем было ранее, из-за мультиребер. Если вершины A и B соединены m ребрами, а B и C — n ребрами, то из вершины A в вершину C ведёт $m \cdot n$ путей. Применяя формулу (5) к вершинам мультиграфа, получим меру центральности вершины во взвешенном графе.

В [2] предложен алгоритм нахождения числа кратчайших путей в невзвешенном графе с помощью производящих функций. Этот алгоритм несложно перенести на случай взвешенных графов.

Рассмотрим дерево G_p с корнем в вершине p . Введём в рассмотрение производящую функцию

$$\varphi_p(x) = \sum_{k=1}^L \alpha_k^p x^k,$$

где α_k^p — число путей, состоящих из k игроков (длины $k - 1$), содержащих вершину p .

Вычислим производящую функцию рекуррентно. Вначале определим в финальных вершинах q дерева G_p

$$\varphi_q(x) = x.$$

Для остальных вершин дерева, не являющихся корнем, положим

$$(6) \quad \varphi_q(x) = x \left(1 + \sum_{i=1}^d \varphi_{q_i}(x) \right),$$

где сумма берётся по всем потомкам $q_i, i = 1, \dots, d$, вершины q .

Для корня дерева — вершины p — положим

$$(7) \quad \varphi_p(x) = x \left(1 + \sum_{i=1}^d \varphi_{q_i}(x) + \sum_{i \neq j} \varphi_{q_i}(x) \varphi_{q_j}(x) \right),$$

где сумма берётся по всем потомкам $q_i, i = 1, \dots, d$, вершины p .

Во взвешенном графе число путей через производящую функцию вычисляется точно так же, с той лишь разницей, что когда поднимаемся вверх к корню, то в вершине, где есть параллельные ребра, мы как бы копируем поддерево внизу такое же число раз. То есть вычисляем во всех вершинах $\varphi_q(x) = x(1 + \sum_i w(q, q_i)\varphi_{q_i}(x))$, где, q_i - потомки q и $w(q, q_i)$ – вес ребра (q, q_i) . А в корне функция вычисляется по формуле

$$(8) \quad \varphi_p(x) = x \left(1 + \sum_{i=1}^d w(p, q_i)\varphi_{q_i}(x) + \sum_{i \neq j} w(p, q_i)\varphi_{q_i}(x) \cdot w(p, q_j)\varphi_{q_j}(x) \right).$$

3. Примеры

Рассмотрим частный случай, когда G – полный двудольный граф с n вершинами, вершины которого разделены на два множества V_1 и V_2 таким образом, что ни одна вершина в V_1 не соединена с вершинами V_1 , и ни одна вершина в V_2 не соединена с вершинами V_2 . Обозначим данный полный двудольный граф как $K_{|V_1|, |V_2|}$. Все ребра имеют вес равный единице. Для случая $K_{1, n-1}$, т.е. для звезды, аналитическое решение электрической центральности было представлено в [4].

3.1. ДВУДОЛЬНЫЙ ГРАФ $K_{2, N-2}$.

Пусть $V_1 = \{v_1, v_2\}$, $v' \in V_2$. Тогда матрица Лапласа имеет вид:

$$D(G) - W(G) + \delta I =$$

$$= \begin{pmatrix} n-2+\delta & 0 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & n-2+\delta & -1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & -1 & 2+\delta & 0 & \dots & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2+\delta & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 2+\delta \end{pmatrix}.$$

Обратная матрица имеет вид:

$$(D(G) - W(G) + \delta I)^{-1} = \frac{1}{\delta(n + \delta)} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} \frac{n-2+n\delta+\delta^2}{n+\delta-2} & \frac{n-2}{n+\delta-2} & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \frac{n-2}{n+\delta-2} & \frac{n-2+n\delta+\delta^2}{n+\delta-2} & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \frac{2+n\delta+\delta^2}{2+\delta} & \frac{2}{2+\delta} & \dots & \frac{2}{2+\delta} \\ 1 & 1 & \frac{2}{2+\delta} & \frac{2+n\delta+\delta^2}{2+\delta} & \dots & \frac{2}{2+\delta} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \frac{2}{2+\delta} & \frac{2}{2+\delta} & \dots & \frac{2+n\delta+\delta^2}{2+\delta} \end{pmatrix}.$$

Здесь и далее, тот факт что это обратная матрица, проверяется непосредственно умножением на матрицу $D(G) - W(G) + \delta I$. После несложных вычислений приходим к единичной матрице.

При $s = v_1$ ток распределяется следующим образом:

$$x^s(v_1) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{(\delta + n - 1)(n - 2)}{(n + \delta)(n + \delta - 2)} \right),$$

$$x^s(v_2) = \frac{(n - 2)}{2(n + \delta - 2)(\delta + n)},$$

$$x^s(v') = \frac{1}{2(n + \delta - 2)}.$$

Так как вершины v_1 и v_2 расположены симметрично, то при $s = v_2$ получаем

$$x^s(v_1) = \frac{(n - 2)}{2(n + \delta - 2)(\delta + n)},$$

$$x^s(v_2) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{(\delta + n - 1)(n - 2)}{(n + \delta)(n + \delta - 2)} \right),$$

$$x^s(v') = \frac{1}{2(n + \delta - 2)}.$$

При $s = v'$:

$$x^s(v_1) = x^s(v_2) = \frac{\delta + 2n - 4}{2(2 + \delta)(\delta + n)},$$

$$x^s(s) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2(\delta + n - 1)}{(2 + \delta)(\delta + n)} \right),$$

$$x^s(v') = \frac{1}{(2 + \delta)(\delta + n)}.$$

Получаем следующий результат для $K_{2,n-2}$:

$$CF_\delta(v_1) = CF_\delta(v_2) = \frac{1}{2n} \left(1 + \frac{n-2}{n+\delta-2} + \frac{(n-2)(\delta+2n-4)}{(2+\delta)(\delta+n)} \right),$$

$$CF_\delta(v') = \frac{1}{2n} \left(1 + \frac{2}{n+\delta-2} + \frac{2(\delta+2n-4)}{(2+\delta)(\delta+n)} \right).$$

3.2. ДВУДОЛЬНЫЙ ГРАФ $K_{3,N-3}$.

Пусть $V_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$, $v' \in V_2$.

Тогда матрица Лапласа:

$$D(G) - W(G) + \delta I =$$

$$= \begin{pmatrix} n-3+\delta & 0 & 0 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & n-3+\delta & 0 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & 0 & n-3+\delta & -1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3+\delta & 0 & \dots & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 3+\delta & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 3+\delta \end{pmatrix}.$$

Обратная матрица имеет вид:

$$(D(G) - W(G) + \delta I)^{-1} = \frac{1}{\delta(n+\delta)} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} \frac{n-3+n\delta+\delta^2}{n+\delta-3} & \frac{n-3}{n+\delta-3} & \frac{n-3}{n+\delta-3} & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \frac{n-3}{n+\delta-3} & \frac{n-3+n\delta+\delta^2}{n+\delta-3} & \frac{n-3}{n+\delta-3} & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \frac{n-3}{n+\delta-3} & \frac{n-3}{n+\delta-3} & \frac{n-3+n\delta+\delta^2}{n+\delta-3} & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \frac{3+n\delta+\delta^2}{3+\delta} & \frac{3}{3+\delta} & \dots & \frac{3}{3+\delta} \\ 1 & 1 & 1 & \frac{3}{3+\delta} & \frac{3+n\delta+\delta^2}{3+\delta} & \dots & \frac{3}{3+\delta} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \frac{3}{3+\delta} & \frac{3}{3+\delta} & \dots & \frac{3+n\delta+\delta^2}{3+\delta} \end{pmatrix}$$

Рассуждая аналогично $K_{2,n-2}$, получим следующий результат для $K_{3,n-3}$:

$$\begin{aligned} CF_{\delta}(v_1) &= CF_{\delta}(v_2) = CF_{\delta}(v_3) = \\ &= \frac{1}{2n} \left(1 + \frac{(n-3)(\delta+n+1)}{(n+\delta-3)(\delta+n)} + \frac{(n-3)(\delta+2n-5)}{(3+\delta)(\delta+n)} \right), \\ CF_{\delta}(v') &= \frac{1}{2n} \left(1 + \frac{3(\delta+n+1)}{(n+\delta-3)(\delta+n)} + \frac{3(\delta+2n-5)}{(3+\delta)(\delta+n)} \right). \end{aligned}$$

3.3. ДВУДОЛЬНЫЙ ГРАФ $K_{R,N-R}$.

Пусть $v \in V_1$, $v' \in V_2$ и $r = |V_1|$, $n-r = |V_2|$. Подобно рассуждениям рассмотренных случаев $K_{1,n-1}$, $K_{2,n-2}$ и $K_{3,n-3}$, можно определить значения центральностей для вершин полного двудольного графа $K_{r,n-r}$:

$$\begin{aligned} CF_{\delta}(v) &= \frac{1}{2n} \left(1 + \frac{(n-r)(\delta+n-2+r)}{(n+\delta-r)(\delta+n)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(n-r)(\delta+2n-2-r)}{(r+\delta)(\delta+n)} \right), \\ CF_{\delta}(v') &= \frac{1}{2n} \left(1 + \frac{r(\delta+n-2+r)}{(n+\delta-r)(\delta+n)} + \frac{r(\delta+2n-2-r)}{(r+\delta)(\delta+n)} \right). \end{aligned}$$

3.4. ЦЕНТРАЛЬНОСТЬ НА ОСНОВЕ ВЕКТОРА МАЙЕРСОНА ДЛЯ ЗВЕЗДЫ $K_{1,N-1}$.

Найдём меру центральности на основе вектора Майерсона для звезды из n вершин. Пусть вес ребра между вершинами 1 и 2 равен $w_{1,2}$, а остальные рёбра имеют вес равный единице.

По формуле (5) для центра звезды получим

$$Y_1 = \frac{A_1^1}{2}r + \frac{A_2^1}{3}r^2 = \frac{n-2+w_{1,2}}{2}r + \left(\frac{C_{n-2}^2 + w_{1,2}(n-2)}{3} \right) r^2 = \\ \frac{n-2+w_{1,2}}{2}r + \left(\frac{(n-2)(n-3)}{6} + \frac{w_{1,2}(n-2)}{3} \right) r^2.$$

Для вершины 2:

$$Y_2 = \frac{A_1^2}{2}r + \frac{A_2^2}{3}r^2 = \frac{w_{1,2}}{2}r + \frac{w_{1,2}(n-1)}{3}r^2.$$

Для всех остальных вершин:

$$Y_v = \frac{A_1^v}{2}r + \frac{A_2^v}{3}r^2 = \frac{1}{2}r + \frac{n-2+w_{1,2}}{3}r^2.$$

4. Эксперименты

В качестве примера был рассмотрен фрагмент реального веб-графа научных учреждений Российской академии наук (далее – веб-граф РАН) в их дореформенной версии, построенного с использованием базы данных внешних гиперссылок [1]. База данных расположена в интернете по адресу <http://grid.krc.karelia.ru/webometrics2>. Для гостевого входа в качестве имени пользователя и пароля достаточно ввести слово «guest».

Веб-граф РАН представляет собой ориентированный граф с кратными дугами без петель. По данным на март 2014 года он содержал 956 вершин, соответствующих сайтам научных отделений, центров, институтов, библиотек и др., связанных почти 39000 дугами, соответствующими гиперссылкам, связывающим эти сайты.

Поскольку в статье рассматривается неориентированный граф, для проведения вычислительных экспериментов над веб-графом РАН были выполнены следующие действия:

- 1) оставлены только те вершины веб-графа, любая пара которых связана «встречными» дугами любой кратности;
- 2) все кратные встречные дуги заменены на ребра, вес которых равен меньшей из двух кратностей встречных дуг;
- 3) в полученном после первых двух шагов графе удалены все вершины (и соответствующие им ребра), не вошедшие в максимальную компоненту связности.

Далее из построенного графа была удалена вершина, соответствующая сайту РАН с доменным именем www.ras.ru. Дело в том, что сайт РАН занимает доминирующее положение в системе веб-сайтов учреждений РАН, имея около 500 исходящих гиперссылок и 1300 входящих. Вследствие этого при любом методе ранжирования вершин веб-графа, вершина, соответствующая данному сайту, занимает первое место в рейтингах. Поскольку наша цель – показать, что новые предлагаемые методы ранжирования вершин обладают более высокой чувствительностью по отношению к вершинам с определенными особенностями, доминирующую вершину мы исключили из дальнейшего рассмотрения.

Полученный таким образом граф содержит 169 вершин, связанных 279 ребрами. Вес ребер варьируется от 1 до 38, средний вес ребра равен 2,04. Его изображение приведено на рис. 1.

На рисунке некоторые вершины графа помечены названиями научных учреждений. Пронумерованными эллипсами выделены четко различимые группы веб-сайтов, таких как:

1–3. Сайты научных учреждений, входящих в состав Дальневосточного, Сибирского и Уральского региональных отделений РАН (ДВО РАН, СО РАН и УрО РАН).

4. Сайты научных учреждений, входящих в состав КарНЦ РАН.

5–6. Сайты институтов (Институт социально-экономического развития территорий РАН, Институт теоретической физики РАН).

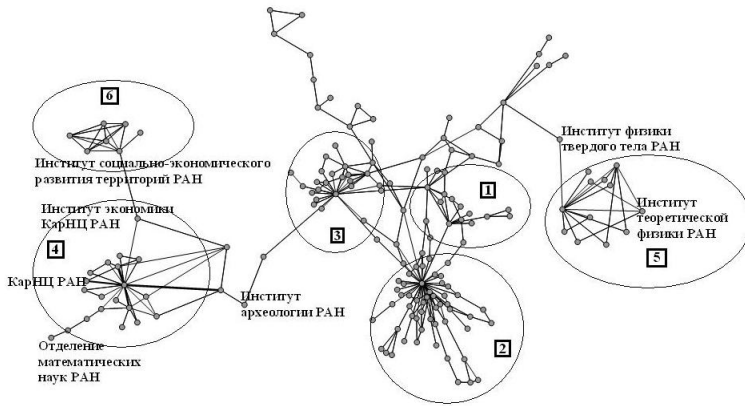


Рис. 1. Неориентированный граф учреждений РАН

Достаточно очевидно, что сайты, являющиеся «головными» в этих группах, должны иметь высокие значения такой известной характеристики ссылочного ранжирования как PageRank (PR), введенной в работе [6]. И действительно, это подтверждается таблицей 1, в которую попали все сайты учреждений, указанных в пп. 1–5.

Таблица 1. Десять первых сайтов с наибольшим значением PR

Название	URL	PR
Сибирское отделение РАН	www.sbras.nsc.ru	0,088
Карельский научный центр РАН	www.krc.karelia.ru	0,048
Институт вычислительных технологий СО РАН	www.ict.nsc.ru	0,038
Уральское отделение РАН	www.uran.ru	0,037
Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН	itp.ac.ru	0,022
Дальневосточный геологический институт ДВО РАН	www.fegi.ru	0,017
Дальневосточное отделение РАН	www.febras.ru	0,013
Институт социально-экономического развития территорий РАН	www.vscac.ru	0,013
Институт проблем химической физики РАН	www.icp.ac.ru	0,012
Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН	mathem.krc.karelia.ru	0,012

Для этих же сайтов были сделаны расчеты значений электрической центральности и центральности по вектору Майерсона. Сравнивая значения PR с ранжированием по значениям электрической центральности для $\delta = 0,3$, можно отметить, что 5 из 6 указанных головных сайтов попадают в первую десятку и в этом случае, а сайт www.vssc.ac.ru находится на 15-м месте.

Несколько иные результаты мы имеем для вектора Майерсона при $r = 0,9$: только 3 головных сайта попадают в первую десятку.

Таблица 2. Сравнение рангов 5 учреждений РАН

Название (URL)	Ранг по PR	Ранг по электрической центральности	Ранг по вектору Майерсона
Институт археологии РАН (www.archaeolog.ru)	76	41	3
Институт истории и археологии УрО РАН (www.ihist.uran.ru)	133	38	5
Институт экономики КарНЦ РАН (economy.krc.karelia.ru)	80	17	7
Библиотека РАН (www.rasl.ru)	151	19	35
Институт физики твердого тела РАН (www.issp.ac.ru)	137	23	22

На рис. 1 несложно выявить сайты, удаление которых ведет к образованию достаточно крупных несвязных компонент. В первую очередь, к ним относятся сайты Института археологии РАН, Института истории и археологии УрО РАН, Института экономики КарНЦ РАН, Библиотеки РАН и Института физики твердого тела РАН. Значения рангов сайтов этих учреждений по PR, электрической центральности ($\delta = 0,3$) и вектору Майерсона ($r = 0,9$) приводятся в таблице 2. Здесь в колонке «Ранг по PR» даются порядковые номера указанных сайтов в общем списке сайтов, упорядоченных по убыванию значений PR. Такой же смысл имеют значения, указанные в колонках «Ранг по электри-

ческой центральности» и «Ранг по вектору Майерсона».

Очевидно, что обнаружение указанных сайтов, имеющих важное значение в анализируемом графе РАН, более точно проводится с помощью методов, основанных на использовании понятий электрической центральности и вектора Майерсона, нежели с помощью PR. Например, сайт Института физики твердого тела РАН по сравнению с рангом по PR (137 место) поднялся на 115 позиций в ранге по вектору Майерсона (22 место). На рис. 1 видно, что удаление этого сайта ведет к образованию двух несвязных компонент, к одной из которых относится группа, состоящая из 12 сайтов, входящих в веб-пространство Института теоретической физики РАН, включающего официальный сайт, сайты лабораторий, проектов, библиотеки и др.

5. Заключение

В работе предложен подход к анализу академического веб-пространства на основе разработанных авторами методов вычисления центральности вершин во взвешенном графе. Граф моделируется как некоторая электрическая цепь с новой заземленной вершиной, затем с одинаковой вероятностью в каждую из вершин подводится единичный ток. Средняя величина тока, проходящего через вершину, и берется в качестве центральности данной вершины. В физическом смысле это соответствует второму началу термодинамики: система находится в термодинамическом равновесии, и энтропия такой равновесной системы является мерой центральности в сети. Информационная энтропия тесно связана с термодинамической энтропией. В этом смысле распространение информации в академической сети подобно распространению тока в электрической цепи. Для вычисления центральности предлагается использовать правила Кирхгофа, которые представляют собой систему линейных уравнений. Для некоторых видов графов центральность можно найти в аналитическом виде. В работе это сделано для двудольных графов. В общем случае задача сводится к вычислению обратной матрицы, для этого можно использовать численные методы. Предложенный метод был исполь-

132

зован для моделирования академического веб-пространства, сделано сравнение с традиционным методом PageRank и вектором Майерсона, адаптированным для взвешенных графов. Показаны преимущества метода электрической центральности на примере вычисления этой характеристики для вершин, которые являются коммуникаторами связанных компонент.

Работа частично поддержана Отделением математических наук РАН, грантом РГНФ (проект 15-02-00352) и грантами РФФИ (проекты 15-01-06105, 16-51-55006).

Литература

1. ГОЛОВИН А.С., ПЕЧНИКОВ А.А. *База данных внешних гиперссылок для исследования фрагментов Веба* // Информационная среда вуза XXI века: материалы VII Всероссийской научно-практической конференции, Петрозаводск, 23–27 сентября 2013 г. – С. 55–57.
2. МАЗАЛОВ В.В., ТРУХИНА Л.И. *Производящие функции и вектор Майерсона в коммуникационных сетях* // Дискретная математика. – 2014. – Том 26, Вып. 3. – С. 65–75.
3. ЧЕБОТАРЕВ П.Ю., ШАМИС Е.В. *Матричная теорема о лесах и измерение связей в малых социальных группах* // Автоматика и телемеханика. – 1997. – №9. – С. 125–137.
4. AVRACHENKOV K.E., MAZALOV V.V., TSYNGUEV B.T. *Beta Current Flow Centrality for Weighted Networks* // Lecture Notes in Computer Science. Computational Social Networks. – 2015. – Vol. 9197. – P. 216–227. (DOI: 10.1007/978-3-319-21786-4_19).
5. BRANDES U., FLEISCHER D. *Centrality measures based on current flow* // STACS-2005. Lecture Notes in Computer Science. – 2005. – Vol. 3404. – P. 533–544. (DOI:10.1007/978-3-540-31856-9_44).
6. BRIN S., PAGE L. *The anatomy of a large-scale hypertextual Web search engine* // Computer Networks and ISDN Systems. – 1998. – Vol. 30(17). – P. 107–117. (DOI: 10.1016/j.comnet.2012.10.007).

7. CHEBOTAREV P., SHAMIS E. *The Forest Metrics for Graph Vertices* // *Electronic Notes in Discrete Mathematics*. – 2002. – Vol. 11. – P. 98–107.
8. CHEBOTAREV P., AGAEV R. *Forest matrices around the Laplacian matrix* // *Linear Algebra and its Applications*. – 2002. – Vol. 356, Issues 1–3. – P. 253–274.
9. ESTRADA E., HATANO N. *Resistance Distance, Information Centrality, Node Vulnerability and Vibrations in Complex Networks* // *Network Science. Complexity in Nature and Technology*, Springer, 2010. – P. 13–29. (DOI:10.1007/978-1-84996-396-1_2).
10. FREEMAN L.C., BORGATTI S.P., WHITE D.R. *Centrality in valued graphs: A measure of betweenness based on network flow* // *Social Networks* 13. – 1991. – P. 141–154. (DOI:10.1016/0378-8733(91)90017-N).
11. HINES P., BLUMSACK S. *A centrality measure for electrical networks* // *Proc. 41st Hawaii International Conference on System Sciences*. – 2008. – P. 185. (DOI: 10.1109/HICSS.2008.5).
12. JACKSON M.O. *Social and economic networks*. – Princeton University Press, 2008.
13. NEWMAN M.E.J. *A measure of betweenness centrality based on random walks* // *Social networks*. – 2005. – Vol. 27. – P. 39–54. (DOI:10.1016/j.socnet.2004.11.009).
14. WANG H., HUA H., WANG D. *Cacti with minimum, second-minimum, and third-minimum Kirchhoff indices* // *Mathematical Communications*. – Vol. 15. – 2010. – P. 347–358.
15. WANG Z., SCAGLIONE A., THOMAS R. *Electrical centrality measures for electric power grid vulnerability analysis* // *Proc. 49th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*. – 2010. – P. 5792–5797. (DOI: 10.1109/CDC.2010.5717964).

RANKING OF RUSSIAN ACADEMIC WEB

Vladimir Mazalov, Institute of Applied Mathematical Research Karelian Research Centre RAS, Petrozavodsk, Doctor of Science, professor (vmazalov@krc.karelia.ru).

Andrey Pechnikov, Institute of Applied Mathematical Research Karelian Research Centre RAS, Petrozavodsk, Doctor of Science, associate professor (pechnikov@krc.karelia.ru).

Liudmila Trukhina, Chita Branch of Baikal State University of Economics and Law, Chita, (litrukhdina@gmail.ru).

Bulat Tsynguev, Transbaikal State University, Chita, (btsynguev@gmail.com).

Abstract: We propose to apply the methods of the graph theory and the cooperative game theory for determining nodes centrality in weighted graphs. In this method a graph considers like electric circuit, where the centrality measure is the total sum of electric current flow through this node. The computing of betweenness centrality is based on the inverse Kirchhoff's matrix. This method has low computational complexity. The results of numerical experiments of electric centrality are presented for graph of web sites of Russian academic organizations. We compare our results with the popular Page Rank method.

Keywords: Electric centrality, Myerson value, webgraph.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии П.Ю. Чеботарёвым.

Поступила в редакцию 25.08.2015.

Дата опубликования 31.05.2016.

УДК 021.8 + 025.1
ББК 78.34

МОДЕЛИРОВАНИЕ ИНВЕСТИЦИОННЫХ СТРАТЕГИЙ КОМПАНИЙ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ.

Акинфиев В. К.¹

*(ФГБУН Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)*

Рассмотрена задача выбора инвестиционных решений компаний в конкурентной среде и в условиях неопределенности спроса на продукцию. Предложена математическая модель, описывающая инвестиционное поведение компаний на рынке типа «дуополия». Модель учитывает взаимосвязь между выбором компаниями инвестиционных решений и динамикой рыночной цены на продукцию. Решение задачи сведено к анализу биматричной игры, в которой матрица выигрышей формируется в результате численного моделирования. Приводится иллюстративный пример использования предложенного подхода.

Ключевые слова: выбор инвестиционных решений, дуополия, математическая модель, биматричная игра.

1. Введение

В [1, 2] предложен подход к моделированию и рассмотрена задача выбора инвестиционных стратегий компаний в условиях неопределенности, связанной с высокой волатильностью спроса на рынке. Решение было предложено для случая компании-монополиста или нескольких компаний, которые действуют согласованно (придерживаются одной инвестиционной стратегии).

В данной работе рассматривается обобщение этой задачи для рынка типа «олигополия», где две и более компании конкурируют между собой за долю рынка и, соответственно, долю

¹ Валерий Константинович Акинфиев, доктор технических наук, ведущий научный сотрудник (akinf@ipu.ru).

прибыли (денежного потока, объема оборота на товарном рынке). Компании могут выбирать различные инвестиционные стратегии, зная, что будущая динамика спроса на рынке является неопределенной. Выбор той или иной инвестиционной стратегии, в зависимости от реализации сценария динамики спроса, может привести для каждой конкретной компании, как к выигрышу, так и к проигрышу. Причем, по-прежнему, при постановке задачи будет учитываться важный фактор взаимовлияния инвестиционных стратегий компаний и динамики цен на товарную продукцию.

Предполагаем, что выбор инвестиционной стратегии задает суммарный объем средств, направляемых компанией на инвестиции и распределение этих средств между инвестициями в расширение производства и сокращение производственных издержек.

Заметим, что большое значение в конкурентной борьбе имеет уровень удельных затрат на выпуск продукции (ниже среднеотраслевой или выше среднеотраслевой). Поэтому инвестиционная стратегия, направленная на сокращение производственных издержек, часто бывает более предпочтительной, чем стратегия расширения производства.

Современная теория инвестиций в условиях неопределенности сложилась, в основном, в последние двадцать – двадцать пять лет и связана с разработкой постановок задач и методов анализа решений, использующих идеологию оценки стоимости реальных опционов различного типа в непрерывном времени. Основы методологии этого подхода изложены в ряде публикаций [10, 15, 16], которые оказали большое влияние на развитие этого направления исследований. В настоящее время оно характеризуется широким арсеналом методов и большим разнообразием постановок задач. Их можно разделить на две большие группы.

Первая рассматривает задачи выбора инвестиционных решений для отдельной компании [9–11, 14, 16]. Так, например, в [9] рассмотрена задача выбора оптимального времени инвестирования в условиях неопределенности прогнозируемой динамики денежного потока инвестиционного проекта в децентрализованной компании. Использование методов оценки реальных

опционов позволяет учесть условия асимметричности информации, которой обладают владельцы и агенты относительно параметров проекта.

Во второй группе фокус переносится на анализ равновесия на товарном рынке, на котором присутствуют несколько компаний-производителей, и задача выбора инвестиционных решений компаний рассматривается в игровой постановке. Большой поток работ по этой тематике основан на сочетании методологии и методов оценки «реальных опционов» и игрового подхода [12, 15, 17].

Наиболее популярные постановки задач рассматривают рынок типа «дуополия» и ситуацию выбора игроками либо наилучшего времени инвестирования (оценка опциона на отсрочку начала реализации инвестиционного проекта), либо наилучшего объема инвестирования (оценка опциона на расширение производства), либо на их сочетание. Задача может рассматриваться как в симметричном, так и в не симметричном случае (одна из компаний является лидером в отрасли, а другая – последователем).

В [12] исследуется, например, ситуация, когда каждая компания обладает последовательностью инвестиционных возможностей, которые описываются с помощью вечных американских опционов проектов расширения мощностей. Каждая фирма максимизирует свою стоимость с учетом стратегии конкурентов. Рассмотрен случай симметрии, который предполагает, что все фирмы равны и обладают одинаковой технологией производства продукта. В качестве эндогенного параметра рассматривается спрос на рынке, который является неопределенным и моделируется в непрерывном времени стохастического процесса типа GBM. Стоимость исполнения опциона зависит от цены продукции на рынке, которая определяется стохастическим спросом и суммарным расширением мощностей всех компаний. В [17] рассматривается аналогичная задача выбора времени и объема инвестирования в условиях неопределенности.

Для большинства вариантов этих задач качественные или количественные результаты решения получены при следующих достаточно сильных допущениях:

1. Предполагается, что инвестиционные вложения происходят мгновенно и сразу после этого возникает бесконечный во времени денежный поток, который и является основным фактором неопределенности в оценке эффективности (оптимальности) инвестиционной стратегии компаний. В ряде работ неопределенность денежного потока определяется стохастическим спросом и предложением продукции на рынке.

2. Предполагается также, что денежный поток или спрос на рынке ведет себя как случайный процесс определенного вида. Подавляющее число работ используют для моделирования этой неопределенности геометрическое броуновское движение (GBM), который вначале был использован в модели оценки опционов Блэка – Шоулза – Мертона на финансовых рынках и состоит в следующем:

случайный процесс S_t является геометрическим броуновским движением (GBM), если он удовлетворяет следующему стохастическому дифференциальному уравнению:

$$(1) \quad dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t.$$

В данной модели параметр μ – неслучайный тренд, σ – степень волатильности и W_t – стандартный винеровский процесс (броуновское движение). Заметим, что в данном подходе предполагается, что в стохастическом уравнении параметры μ и σ являются постоянными величинами.

Данный подход, как считают его сторонники, хорошо описывает волатильность цены активов на финансовых рынках и с большой долей осторожности его можно применять к оценке стоимости реальных активов, в частности, к оценке инвестиционных проектов и инвестиционных стратегий. Сейчас существует определенная степень пессимизма по отношению практической ценности данного подхода [5]. Кроме того, указанные модели дают только первое приближение к сложным процессам, происходящим на современных финансовых и особенно товарных рынках.

Ряд экономистов считает, что броуновское движение W в этой модели должно быть заменено либо на другой гауссовский процесс, скажем, процесс Орнштейна – Уленбека, либо на негауссовский процесс с независимыми и однородными приращениями (коротко – процесс Леви), имеющий более «тяжелые» хво-

сты приращений, либо на гауссовский процесс дробного броуновского движения (ДБД), которому присуща «долгая память». При этом возникают большие трудности, связанные, в частности, с проблемой построения стохастического интеграла по процессу Леви или процессу ДБД, которые даже не являются семимартингалом.

Другое усложнение модели связано с введением дополнительно к диффузионному процессу «дискретной» скачкообразной компоненты, которая в модели рынков отражает появляющиеся и влияющие на цены новости макроэкономического и политического характера. В ряде работ были исследованы эмпирические свойства доходностей, которые не соответствуют модели GBM, предлагая рассматривать более широкий класс Леви-устойчивых вероятностных распределений. Дальнейшее развитие финансовой теории привело к тому, что волатильность сама стала рассматриваться не как параметр (пусть даже изменяющийся во времени), а как случайный процесс. Хороший обзор современных достижений и нерешенных проблем в области стохастическая финансовая математики содержится в [8].

Следует заметить, что набор специальных уравнений, для которых можно явно построить решение, полученное для стохастических процессов типа GBM, очень невелик. Исследования пока ограничиваются «индивидуальными» теоремами о состоятельности или асимптотической нормальности предлагаемых оценок, не ставя большей частью вопрос об асимптотике минимаксного риска ввиду сложности этой задачи. По этим причинам более сложные модели, чем GBM в задачах, использующих методику оценки реальных опционов, не используются.

Следует еще раз подчеркнуть, что в уравнении (1) параметр μ (неслучайный тренд) считается константой и не зависит от времени. Это допущение значительно снижает реалистичность моделирования динамики спроса на рынке, скорость изменения которого также может существенно изменяться во времени, если мы рассматриваем большие промежутки времени (несколько лет), что является характерной особенностью инвестиционных проектов в реальных секторах экономики. И, конечно, функция $\mu(t)$ также заранее неизвестна.

Для крупных инвестиционных проектов горизонт прогнозирования составляет, как правило, 10–15 лет. В течение этого периода могут происходить «шоки» спроса, когда $\partial\mu(t)/\partial t$ может сильно изменяться, вплоть до смены знака. Так, например, «шоки спроса» на рынках произошли в 2008–2009 годах (мировой экономический кризис) и в 2014–2015 годах (падение цен на нефть и санкции). Например, спрос на металл на российском рынке упал в 2009 году на 20–25% и стал частично восстанавливаться лишь к 2010–2011 годам. В начале 2015 году внутренний спрос на металл уже снизился на 10–15% и продолжит снижаться, в том числе благодаря существенному снижению объемов производства и продаж в отрасли автомобилестроения (–30%) и снижению объемов строительной отрасли. На примере экономики США экономические кризисы различного масштаба и, соответственно, «шоки спроса» на рынках происходят достаточно регулярно.

Еще одно важное замечание состоит в том, что для целей оценки инвестиционных решений компаний более важным в формуле (1) является параметр $\mu(t)$, чем второй стохастический член. Влияние второго члена в формуле (1) снижается, если учесть, что для оценки эффективности инвестиционных решений используются интегральные характеристики, усредненные по времени, такие, например, как показатель NPV.

Исходя из этого, в данной работе для учета неопределенности спроса на рынке будет использоваться методология стохастического сценарного моделирования, которая состоит в рассмотрении конечного набора характерных сценариев изменения $\mu(t)$ и задании для каждого из них вероятностных характеристик их осуществления.

Что касается первого допущения, то хорошо известно, что процесс инвестирования компании является непрерывным процессом. Продолжительность инвестиционной фазы инвестиционного проекта может составлять существенный промежуток времени и эффект от инвестиций (денежный поток) появляется с некоторым запаздыванием (лагом) по отношению к началу инвестирования. Кроме того, денежный поток может существенно изменяться в разные периоды времени, в том числе и под воздействием случайного спроса, результатов выбора инвестици-

онных стратегий компаний и цен на продукцию, складывающихся на рынке.

Как было показано, существует существенный разрыв в степени реалистичности моделирования инвестиционных процессов между теоретическими работами, основанными на методологии реальных опционов, и традиционными методами моделирования инвестиционных проектов, основанных на методологии DCF. Последние модели с большей степенью реалистичности позволяют моделировать денежные потоки на разных этапах осуществления инвестиционных проектов, что объясняет их широкое использование в практической оценке и выборе инвестиционных решений компаний.

Тем не менее, эти методы плохо работают в условиях неопределенности исходных данных модели, включая волатильность цен и спроса, связанные, в том числе, с действиями на рынке компаний-конкурентов. Это является одним из основных аргументов против них со стороны сторонников подхода, связанного с применением методологии «реальных опционов» [10].

В данной работе предпринята попытка ослабить недостатки обоих подходов: используя методы сценарного стохастического моделирования рыночной неопределенности и построения агрегированных моделей оценки эффективности инвестиционных стратегий компаний, основанных на подходе DCF и включающих механизмы принятия инвестиционных решений на основе изменяющейся информации о рынке, которые более адекватно описывают инвестиционные процессы в бизнесе.

2. Модель

Рассмотрим рынок, на котором присутствует N компаний. Каждая компания может принимать инвестиционные решения в соответствии с некоторой выбранной стратегией и исходя из информации, поступающей с рынка. Инвестиционные решения компаний направлены на усиление ее конкурентных преимуществ на рынке, которые выражаются в увеличении ее доли прибыли, объема или рентабельности продаж. Компании стремятся увеличивать свой свободный денежный поток и, в конечном счете, интегральный показатель успешности своей инвести-

ционной стратегии – NPV (суммарный дисконтированный свободный денежный поток компании за прогнозный период).

Как было показано ранее, на выбор инвестиционных решений существенное влияние оказывает прогноз величины спроса и цен на товарную продукцию. Мы будем рассматривать ситуацию высокой волатильности спроса на товарных рынках, в том числе ситуацию, когда на прогнозном периоде рынки могут несколько раз менять тренд. Данная ситуация является наиболее сложной для оценки и анализа эффективности инвестиционных решений. Сложность заключается в том, что компании не в состоянии прогнозировать эти изменения на весь прогнозный период и ограничиваются лишь оценкой тренда, наблюдаемого в период, в котором принимаются инвестиционные решения (формируется инвестиционный бюджет компании).

Возникает следующий важный вопрос – какова должна быть инвестиционная стратегия компаний в условиях неопределенности спроса и неопределенности действия компаний-конкурентов? Понятие «инвестиционная стратегия компании» будет формализовано далее. Как должна меняться инвестиционная стратегия в условиях нестабильности рынков, для того чтобы обеспечить максимальный уровень эффективности инвестиций и, соответственно, максимальный рост стоимости компании.

Ситуация еще более усложняется, если принять во внимание взаимосвязь между инвестиционной активностью компаний, которая может дополнительно провоцировать нестабильность рынков, и динамикой рынков, которая определяет во многом выбор стратегии. Излишняя инвестиционная активность компаний, как правило, приводит к появлению «лишних» производственных мощностей и, в периоды снижения спроса, к значительному снижению цены на продукцию [1, 2].

Далее мы рассматриваем ситуацию, когда кампании в начале каждого периода (года) формируют свои инвестиционные бюджеты (объем финансовых ресурсов, выделяемых на реализацию инвестиционных проектов различных типов) на основе некоторых рациональных правил, использующих результаты анализа тенденций динамики спроса и цены на продукцию.

В данной работе термин «выбор инвестиционной стратегии» включает:

– выбор инвестиционной активности компании в различные периоды времени, которая определяет объем средств компании, направляемых на реализацию инвестиционных проектов;

– выбор направлений инвестирования, которые определяют соотношение и объем финансовых средств компании, направляемых на реализацию инвестиционных проектов двух типов:

▪ проектов развитие производственных мощностей и расширения производства и, соответственно, увеличение предложения продукции на рынке;

▪ проектов, направленных на сокращение производственных издержек, которые не увеличивают предложение продукции на рынке, а влияют только на рентабельность производства и свободный денежный поток компаний.

Рассмотрим временной промежуток (прогнозный период) равный T периодов, $t = 1, \dots, T$.

Пусть $NCF_i(t)$ – свободный денежный поток компании i ($i = 1, \dots, N$) в период t , равный чистой прибыли, полученной компанией за этот период, за вычетом средств, направленных на инвестиции:

$$(1) \quad NCF_i(t) = (P(t) - C_i(t)) \cdot B_i(t) \cdot (1 - p) - I_i(t),$$

где $P(t)$ – рыночная цена на продукцию в период t . В каждый период времени цена формируется на основе соотношения спроса на продукцию $D(t)$ и суммарного предложения со стороны компаний-производителей $S(t)$. $S(t)$ определяется в каждый период t : $S(t) = \sum_{i=1}^N S_i(t)$, где $S_i(t)$ – уровень производственных мощностей компании i .

Тогда

$$P(t) = P(0) \cdot \left(1 + \gamma \cdot \frac{D(t) - S(t)}{D(t)} \right),$$

где параметр γ – эластичность цены по величине превышения спроса над предложением. Здесь $P(0)$ – цена на рынке на начало прогнозного периода (начальные условия). Если $D(t) - S(t) \geq 0$, то возникает дефицит предложения на рынке и

цена продукции растет, в противном случае – избыток предложения и, соответственно, цена падает.

Следует отметить, что, в свою очередь, $D(t)$ также может зависеть от динамики цены $P(t)$. Увеличение $P(t)$ может приводить к снижению $D(t)$, что учитывается введением отрицательной обратной связи в модель. Степень влияния цены на спрос задается через параметр эластичности спроса по отношению изменения рыночной цены на продукцию. Далее рассматривается рынок с неэластичным спросом, к которым, в частности, относятся металлургическая отрасль.

Пусть $B(t)$ – общий объем продаж на рынке в период t , который в модели рассчитывается по следующей формуле: $B(t) = \min\{D(t), S(t)\}$. Предположим, что загрузка мощностей всех компаний одинакова, тогда объем продаж компании i вычисляется следующим образом:

$$B_i(t) = B(t) \cdot \frac{S_i(t)}{S(t)}.$$

$C_i(t)$ – себестоимость продукции компании i в период t ; p – ставка налога на прибыль.

Заметим, что все величины, входящие в формулу расчета $NCF_i(t)$, зависят от случайного спроса $D(t)$ и выбора инвестиционных стратегий компаний, которые определяют уровень их производственных мощностей $S_i(t)$ и себестоимости продукции $C_i(t)$.

Далее рассмотрим модель, которая позволяет оценивать эффективность инвестиционных стратегий компаний с учетом рыночной неопределенности спроса. Общая структура разработанной модели применительно к рынку типа «дуополия» приведена на рис. 1. Динамика спроса на продукцию (потребление) – $D(t)$ – это экзогенная переменная модели, график изменения которой задается заранее для различных внешних по отношению к модели макроэкономических сценариев.

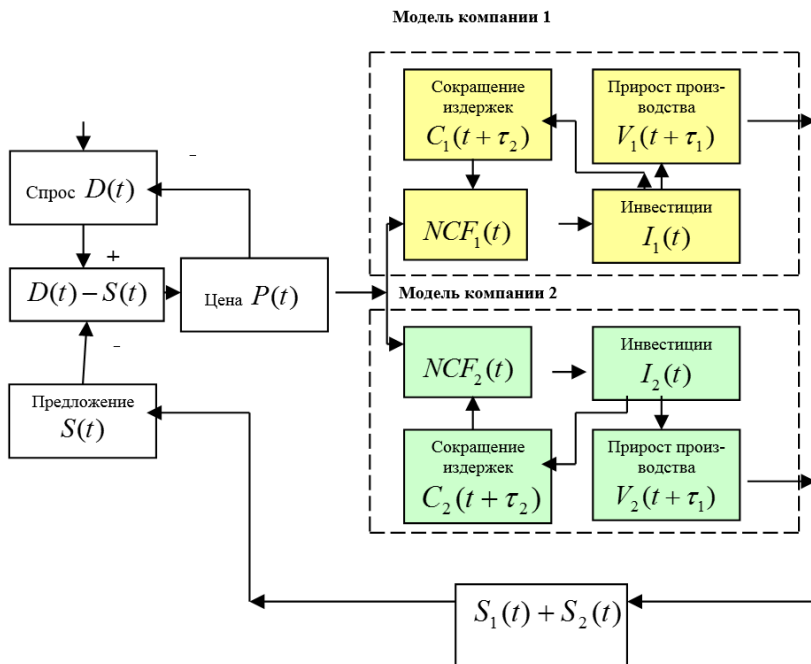


Рис 1. Структура модели

2.1. МОДЕЛЬ ПОВЕДЕНИЯ КОМПАНИИ

Далее предполагается, что компании принимают инвестиционные решения в условиях высокой волатильности рынков и неопределенности относительно прогнозной динамики спроса на продукцию компаний $D(t)$.

Компании могут наблюдать в каждом периоде t лишь за изменением своих финансовых показателей (чистая прибыль, цена продукции, объем продаж) и (или) прогнозировать их изменение на следующие несколько периодов. Модель позволяет варьировать глубину «достоверного» прогноза динамики рынков, доступного участникам рынка. Это позволяет учитывать при анализе фактор «дальновидности» компаний. Очевидно, что в случае низкой волатильности рынков глубина «достоверного» прогноза может быть увеличена.

Компания на каждом шаге t принимает инвестиционные решения на основе этой доступной информации в соответствии

с некоторым наперед заданным алгоритмом, который будет описан далее.

Пусть далее, если $P(t) - P(t - 1) > 0$ или $B_i(t) - B_i(t - 1) > 0$ (что сигнализирует компании о повышательном тренде на рынке), то часть накопленного к периоду t чистого денежного потока компании в доле равной величине α_i может быть направлено на инвестирование в ее развитие $- I_i^*(t)$. Величина α_i определяет **инвестиционную активность** компании i . Чем больше величина α_i (доля), тем выше ее инвестиционная активность. Таким образом,

$$I_i^*(t) = \alpha_i \cdot \sum_{t=1}^{t-1} NCF_i(t).$$

Как было отмечено ранее, общий объем инвестиций компания может направлять в проекты двух типов: проекты, направленные на увеличение производственной мощности (проекты первого типа) и проекты, направленные на сокращение издержек (проекты второго типа) в некотором соотношении α_i^1 и α_i^2 , ($\alpha_i^2 = 1 - \alpha_i^1$).

Величины α_i , α_i^1 и α_i^2 являются параметрами модели, которые могут выбираться компанией в зависимости от их прогнозов динамики рынков.

Таким образом, размер инвестиций $I_i(t)$ определяется в результате анализа фактических данных и возможного прогноза динамики рынка в соответствии с алгоритмом, описанным ниже, и не может превышать величину равную $I_i^*(t)$, которая определяется, в свою очередь, через варьируемый параметр инвестиционной активности. $I_i(t) = I_i^1(t) + I_i^2(t)$, где $I_i^1(t)$ и $I_i^2(t)$ – размер инвестиций в проекты первого и второго типа соответственно, которые определяются в соответствии с некоторыми правилами и алгоритмами, описываемыми далее.

2.2. ИНВЕСТИЦИИ ПЕРВОГО ТИПА

Компания i инвестирует в проекты первого типа в соответствии со следующим алгоритмом:

Если в период t наблюдается восходящий тренд на рынке (спрос – предложение > 0), то компания инвестирует в проекты первого типа следующим образом:

$$I_i^1(t) = \min\{\alpha_i^1 \cdot I_i^*(t), I_{np}^1\},$$

где I_{np}^1 – предельно допустимый за период уровень инвестиций в проекты первого типа.

Если в период t наблюдается нисходящий тренд на рынке, то это сигнализирует компании о появлении избыточных производственных мощностей и в соответствии с этим компания в этом периоде не инвестирует в проекты первого типа, т.е. $I_i^1(t) = 0$.

Предположим, что существует временной лаг τ_1 между периодом инвестирования и периодом соответствующего прироста производственных мощностей – $V_i(t)$. Пусть также величина E_1 характеризует прирост производственных мощностей на единицу инвестиционных вложений. Тогда $V_i(t) = E_1 \cdot I_i^1(t - \tau_1)$. Соответственно, производственные мощности рассчитывается с помощью рекуррентного соотношения $S_i(t) = S_i(t - 1) + V_i(t)$. Для $t = 1$ задается начальная мощность производства компании i – $S_i(0)$.

2.3. ИНВЕСТИЦИИ ВТОРОГО ТИПА

Рассмотрим влияние принимаемых инвестиционных решений компании на динамику изменения себестоимости производства продукции. Себестоимость продукции в период t рассчитывается по следующей формуле:

$$(2) \quad C_i(t) = C_i(t - 1) - E_2(t) \cdot I_i^2(t - \tau_2),$$

где $E_2(t)$ – удельная эффективность инвестиций в проекты снижения производственных издержек (энерго- и ресурсосбережение), τ_2 – временной лаг между периодом инвестирования и периодом соответствующего изменения себестоимости. Для $t = 1$ задается $C_i(0)$ – себестоимость продукции на начало прогнозного периода;

Величина $E_2(t)$ характеризует снижение себестоимости продукции на единицу инвестиционных вложений в проекты второго типа. В расчетах используется модель «Снижающейся эффективности инвестиций». В соответствии с этой моделью $E_2(t)$ снижается при изменении себестоимости продукции $C_i(t)$ и приближении его к некому пороговому значению $C_{пр}$.

C_{np} – оценка предельно возможного снижения себестоимости продукции, при достижении которого эффективность инвестиций становится равной нулю: $E_2(t) = 0$.

$$(3) \quad E_2(t) = E_2(0) \cdot \left(1 - \frac{C_i(0) - C_i(t)}{C_{np}}\right).$$

Компания инвестирует в проекты второго типа в соответствии со следующим алгоритмом:

$$I_i^2(t) = \min \left\{ I_i^*(t) \cdot (1 - \alpha_i^1) \cdot \frac{E_2(t)}{E_2(0)}, I_{np}^2 \right\},$$

где I_{np}^2 – предельно допустимый за период уровень инвестиций в проекты второго типа. В соответствии с описанным алгоритмом, если начиная с периода t $E_2(t)$ становится равной нулю, то и величина инвестиций $I_i^2(t)$ также становится равной нулю.

В соответствии с этим механизмом объем инвестиций компании i в период t зависит от размера денежного потока, накопленного к этому периоду, выбранных параметров α_i и α_i^1 , а также отношения текущего показателя эффективности инвестиций к эффективности инвестиций на начало прогнозного периода.

3. Постановка задачи

Модель, описанная в предыдущем разделе, позволяет, задавая на ее входе параметры инвестиционных стратегий компаний $(\alpha_i, \alpha_i^1, i = 1, \dots, N)$ и варианты динамики изменения спроса на рынке ψ , рассчитать свободный денежный поток компаний.

Пусть $NCF_i(t)$ – свободный денежный поток компании i ($i = 1, \dots, N$), который зависит от выбора всеми компаниями вариантов своих инвестиционных стратегий и реализации сценария динамики рыночного спроса. Тогда показатель эффективности выбранной инвестиционной стратегии рассчитывается как разница между свободным денежным потоком компании, реализующей инвестиционную стратегию с параметрами α_i, α_i^1 , и свободным денежным потоком компании при отсутствии инвестиций, т.е. $\alpha_i = 0, \alpha_i^1 = 0$.

$$(4) \quad NPV_i = \sum_{t=1}^{t=T} (NCF_i(t, \alpha_i, \alpha_i^1) - NCF_i(t, 0, 0)) \cdot \frac{1}{(1+d)^t},$$

где d – ставка дисконтирования.

Компании стремятся максимизировать показатель эффективности (4), выбирая соответствующую инвестиционную стратегию. Заметим, что компании не знают заранее выбора инвестиционных стратегий компаний конкурентов и динамики спроса на рынке.

Если предположить, что существует некоторый координирующий орган, который сам выбирает инвестиционные стратегии компаний исходя из своего критерия (отражающего понимание общей полезности), то тогда задача сводится к задаче оптимизации выбранного критерия, значения которого при различных сочетаниях варьируемых переменных $(\alpha_i, \alpha_i^1, i = 1, \dots, N)$ вычисляются с помощью имитационной модели.

Для каждого сценария рыночной конъюнктуры ψ определяются оптимальный набор параметров инвестиционных стратегий компаний, которые максимизируют некоторую целевую функцию. Можно использовать различные критерии, например:

1. Максимизировать суммарный выигрыш всех компаний:

$$\sum_{i=1}^N NPV_i(\alpha_i, \alpha_i^1, \psi) \rightarrow \max.$$

2. Максимизировать минимальное значение NPV на множестве компаний:

$$\min_i NPV_i(\alpha_i, \alpha_i^1, \psi) \rightarrow \max.$$

Данный вариант решения задачи позволяет найти такие стратегии игроков, которые обеспечивают более равномерный выигрыш компаний.

Данная задача сводится к задаче многопараметрической оптимизации, в которой значения выбранного критерия оптимальности вычисляется с помощью имитационной модели, описанной в предыдущем разделе. Решение может быть получено с использованием имитационно-оптимизационных методов, включая различные методы направленного перебора и методы случайного поиска [3].

И далее, выбор инвестиционных стратегий компаний, учитывающих фактор неопределенности реализации того или иного

сценария рыночного спроса на продукцию ψ (игра с природой), может быть выполнен на основе применения стандартных методов выбора статистических решений.

Заметим, что в рамках данной постановки задачи в определенной степени сохраняется свойство «активности» компаний. Координирующий орган выбирает только общую инвестиционную стратегию для каждой компании, на основе которой компании формируют свои инвестиционные бюджеты самостоятельно, исходя из некоторых алгоритмов принятия инвестиционных решений.

4. Задача в игровой постановке

Рассмотрим далее случай, когда координирующий орган на рынке отсутствует. Компании принимают решения инвестировать в расширение своего производства или сокращение производственных издержек по правилам, описанным в предыдущих разделах. Для каждого ψ сценария рыночной конъюнктуры компании выбирают инвестиционные стратегии $(\alpha_i, \alpha_i^1, i = 1, \dots, N)$, которые максимизируют их целевые функции (4) с учетом возможного выбора инвестиционных стратегий остальными игроками.

Задача может быть сведена к исследованию модели одношаговой непрерывной игры с ненулевой суммой, в которой функции выигрышей игроков (компаний) задаются имитационной моделью. Поэтому в качестве основного метода исследования данной задачи будет использоваться методы численного моделирования.

Большинство рынков в современной экономике относятся к рынкам несовершенной конкуренции, на которых каждый производитель в состоянии существенно влиять на цену продукции. Наиболее интересным для исследования типом рыночных структур, в силу большого спектра стратегий поведения участников и нетривиальности выводов, является олигополия. Как правило, число олигополистов ограничено несколькими фирмами, хотя в некоторых случаях при информационной открытости (облегчающей координацию фирм) может достигать до несколь-

ких десятков. Причем размер каждой фирмы должен позволять ей значимо влиять на ситуацию на рынке. Именно для олигополии в наибольшей степени характерно стратегическое взаимодействие участников.

Различным аспектам олигополистического поведения посвящено большое количество как зарубежной, так и российской литературы, включая исследование классических моделей (Курно, Бертран и др.). Как правило, в этих работах анализируются рыночные стратегии компаний, которые состоят в выборе либо объема производства (поставок продукции на рынок), либо в выборе цены поставки продукции.

Исследуемая задача лежит в русле данного научного направления и развивает методы анализа рыночных стратегий компаний в области инвестиционных решений, направленных на повышение их конкурентных преимуществ (увеличение производственных мощностей и сокращения производственных издержек).

Основные характерные черты рассматриваемой игры:

1. Рассматривается рынок с неэластичным спросом, динамика которого является неопределенной и задается эндогенно несколькими характерными сценариями.

2. Компании выпускают однородную продукцию.

3. Рыночная конкуренция. Компании конкурируют за счет увеличения мощности производства продукции и (или) за счет снижения производственных издержек, которые предполагают реализацию определенного набора инвестиционных проектов. Связь между параметрами модели задается в классе функций, заданных алгоритмически через выбор игроками параметров своих инвестиционных стратегий.

4. Единая рыночная цена, которая определяется в каждый период времени на основе соотношения между суммарной мощностью всех компаний, представленных на рынке, и рыночным спросом на продукцию.

6. Возможны коалиции.

7. Компании максимизируют выбранный показатель эффективности инвестиционной стратегии, в том числе:

- суммарный дисконтированный денежный поток компании за прогнозный период (NPV);

- долю рынка в конце прогнозного периода.

8. Совершенное знание или рациональные ожидания компаний относительно п.п. 1–7.

Заметим, что множество возможных инвестиционных стратегий каждой компании совпадает с множеством точек единичного квадрата на плоскости. Без потери общности можно рассматривать конечный набор стратегий, используя, например, сеточные методы. Пусть далее, для большей наглядности и простоты изложения, компании используют несколько базовых инвестиционных стратегий. Рассмотрим, например, набор стратегий, приведенный ниже.

Стратегия 1. $\alpha_i = 1$, $\alpha_i^1 = 1$. Вкладывать капитал в расширение производства (интенсивный вариант развития). Данная стратегия позволяет наращивать объемы производства и при растущем рынке приводит к увеличению объема продаж и, соответственно, денежного потока. При падающем рынке эта стратегия приводит к снижению загрузке производственного оборудования и увеличению себестоимости и, соответственно, уменьшению денежного потока.

Стратегия 2. $\alpha_i = 1$, $\alpha_i^1 = 0$. Вкладывать капитал в сокращение производственных издержек (экстенсивный вариант развития). Данная стратегия позволяет, не наращивая объемы производства, сокращать издержки и снижать себестоимость продукции. При растущем рынке это приводит к сохранению объема продаж и, соответственно, увеличению денежного потока за счет увеличения рентабельности. При падающем рынке эта стратегия позволяет за счет более низкой «точки безубыточности», сохранить или уменьшить падение денежного потока.

Часто компании используют более осторожные стратегии, состоящие в том, предполагаемый объем инвестиций распределяется равномерно между инвестициями первого и второго типа (параметр $\alpha_i^1 = 0,5$). При этом варьируется только инвестиционная активность, которая зависит от прогнозируемой компанией динамики рыночной конъюнктуры. Как правило, с предполагаемым улучшением рыночной конъюнктуры компании повышают свою инвестиционную активность (параметр α_i).

Стратегия 3. $\alpha_i = 1, \alpha_i^1 = 0,5$. Высокая инвестиционная активность.

Стратегия 4. $\alpha_i = 0,5, \alpha_i^1 = 0,5$. Умеренная инвестиционная активность.

Стратегия 5. $\alpha_i = 0, \alpha_i^1 = 0,5$. Низкая инвестиционная активность.

Далее будем рассматривать рынок типа «дуополия», на котором представлены две компании. Пусть задано множество инвестиционных стратегий компании 1 ($k = 1, \dots, K$) и компании 2 ($j = 1, \dots, J$). По результатам проведения серии расчетов на модели для каждого сценария ψ можно построить матрицы выигрышей компаний $NPV_{k,i}^1, NPV_{k,i}^2$.

В данной постановке решение задачи сводится к анализу биматричной игры с платежными матрицами $NPV_{k,j}^1, NPV_{k,j}^2$. Даная задача достаточно хорошо исследована. Как известно, условием существования хотя бы одной равновесной точки Нэша в чистых стратегиях (k_0, j_0) является выполнение следующих неравенств:

$$(5) \quad NPV_{k_0, j_0}^1 \geq NPV_{k_0, j_0}^1, k = 1, \dots, K ;$$

$$(6) \quad NPV_{k_0, j_0}^2 \geq NPV_{k_0, j_0}^2, j = 1, \dots, J .$$

Если такая точка существует, то она считается решением данной задачи.

Возможность получения решения (равновесной точки Нэша) биматричной игры в чистых стратегиях в общем случае не гарантировано и зависит от свойств матриц $NPV_{k,j}^1, NPV_{k,j}^2$. Метод решения данной задачи включает проведение серии численных расчетов на имитационной модели, построение платежной матрицы, ее анализ и поиск решения.

В смешанных стратегиях равновесная точка всегда существует и может быть найдена различными методами: например, сведением к задаче ЦЛП или к линейной задаче дополненности. Заметим, что смешанное равновесие Нэша служит не очень «удобной» вариантом решения данной игры, поскольку игровая ситуация разыгрывается только один раз.

В качестве иллюстрации предложенного подхода в следующем разделе статьи приведены результаты численных расче-

тов и анализ решений задачи для случая трех инвестиционных стратегий и двух сценариев динамики рыночной конъюнктуры. Будет показано, что во многих случаях существует возможность получения решения данной игры (равновесной точки Нэша) в чистых стратегиях, анализ которых позволяет сделать ряд интересных для практики качественных выводов.

Результатом этого этапа анализа инвестиционных стратегий компаний является ответ на следующий вопрос: если реализуется сценарий ψ , то каковы должны быть рациональные (оптимальные) стратегией компаний в смысле критерия (4). Решение задачи предполагает, что обе компании считают наиболее вероятным осуществление одного и того же сценария рыночной конъюнктуры.

Представляет интерес анализ решений данной задачи для случая, когда оценки вероятности осуществления того или иного сценария у компаний не совпадают.

Пусть игроки придерживаются различной оценки вероятности осуществления того или иного сценарий ψ и выбирают инвестиционную стратегию исходя из собственного прогноза рыночной конъюнктуры. Можно рассматривать различные модификации этой задачи в зависимости от того, обладают ли игроки информацией относительно выбора конкурентом сценария ψ . Если предположить, что игроки обладают различной степенью оптимизма (оптимисты, реалисты или пессимисты), то мы получаем более сложную конструкцию биматричной игры, в которой каждый игрок выбирает решение (равновесную стратегию) на матрице, соответствующей его сценарию ψ . При этом этот выбор не обязательно является равновесной стратегией на матрице, соответствующей сценарию ψ его соперника.

Интересным направлением исследования данной задачи является также учет рефлексии при выборе компаниями своих инвестиционных стратегий. Обзор работ по теории рефлексивных игр, включая стратегическую рефлексию, можно найти в [13].

Стратегическая рефлексия – процесс и результат размышления игрока о принципах принятия решений оппонентами.

Базовая модель стратегической рефлексии опирающейся на понятие ранг рефлексии: считается, что если игрок использует гарантирующую стратегию, то его ранг рефлексии равен 0. Если

игрок считает, что его оппонент будет использовать свою гарантирующую стратегию, то его ранг рефлексии равен 1 и т. д. Игрок ранга k считает, что его оппонент имеет ранг рефлексии $(k - 1)$. Если оба игрока осознают, что выбор ранга рефлексии является их стратегией, тогда возникает игра рангов [4, 7]. В случае конечных игр игра рангов, в которой игроки выбирают свои ранги рефлексии, также является конечной игрой; кроме того, в такой игре максимальный целесообразный ранг рефлексии ограничен [13]. Пример применения данного подхода к исследованию матричной игры, матрица выигрышей которой вычисляется с помощью имитационной модели, содержится в [6].

5. Моделирование инвестиционных стратегий. Анализ результатов

В данном разделе для иллюстрации предлагаемого подхода приводятся результаты численных экспериментов с разработанной моделью и их анализ.

Рассмотрим рынок типа «дуополия», на котором представлены, например, компании металлургической отрасли. В расчетах использованы следующие параметры модели:

предполагается, что в период $t = 0$ спрос и предложение на рынке сбалансированы, т.е. $B(0) = D(0) = S(0)$ и равны 10 млн т в год. $P(0)$ – равновесная рыночная цена на продукцию, равная 500 долл. США за тонну; $C(0)$ – себестоимость производства одной тонны продукции равна 400 долл. США.

Параметр эластичности цены γ равен 0,5. Это означает, что при отклонении величины небаланса в период t от равновесного значения (в период $t = 0$) на b процентов, соответственно, цена продукции изменится по отношению к ее равновесному значению на $0,5b$ процентов (с тем же знаком).

$E_1(t) = 0,03$, т.е. при инвестировании 100 млн долл. США происходит прирост производственных мощностей компании на величину 3,0 тыс. т за период τ_1 , равный 2 годам, что соответствует средней продолжительности реализации инвестиционных проектов в металлургии, направленных на увеличение производственных мощностей. $I_{пр}^1$ – предельно допустимый за период

объем инвестиций в проекты первого типа принят на уровне 100 млн долл. США в год.

$E2(0) = 0,015$, т.е. при инвестировании 100 млн долл. США происходит снижение себестоимости производства 1 т продукции на величину 1,5 долл. Величина τ_2 в расчетах принята равной 1 году.

Данные параметры модели получены на основе анализа данных реализации инвестиционных проектов и программ ряда компаний в черной металлургии и, естественно, отражают оценку средних значений этих параметров. Для компаний других отраслей экономики данные параметры модели должны быть уточнены. Рассматривается прогнозный период с 2014 года по 2029 год.

5.1. СИММЕТРИЯ

Пусть обе компании обладают одинаковой начальной мощностью (5 млн т продукции в год).

Сценарий 1 (равномерный рост спроса на всем прогнозном периоде). В соответствии с этим сценарием рыночный спрос на продукцию компаний на протяжении прогнозного периода растет равномерно с темпом 4% в год (рис. 2). Матрица выигрышей компаний приведена в таблице 1.

Таблица 1. Матрица выигрышей компаний (сценарий 1)

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$
$k = 1$	7120 \7120	8097 \6414	9221 \4262
$k = 2$	6414\ 8097	7481\7485	9056\4801
$k = 3$	4262\ 9221	4801\9056	6965\6965

Первый элемент матрицы соответствует выигрышу первого игрока, а второй элемент – выигрышу второго игрока. В таблице жирным шрифтом выделены максимальные элементы столбцов

матрицы первого игрока и максимальные элементы строк матрицы второго игрока. Анализ полученной матрицы показывает наличие единственной равновесной точки Нэша, которая соответствует выбору обеими компаниями инвестиционной стратегии 1 ($k = 1$ и $j = 1$). Элементы матрицы первого и второго игрока в этой точке выделены жирным шрифтом.

На рис. 2 показана динамика предполагаемого рыночного спроса на продукцию для сценария 1 и динамики роста производственных мощностей и, соответственно, предложения со стороны конкурирующих компаний (компания 1 и компания 2). На рис. 3 показана динамика рыночной цены на продукцию.

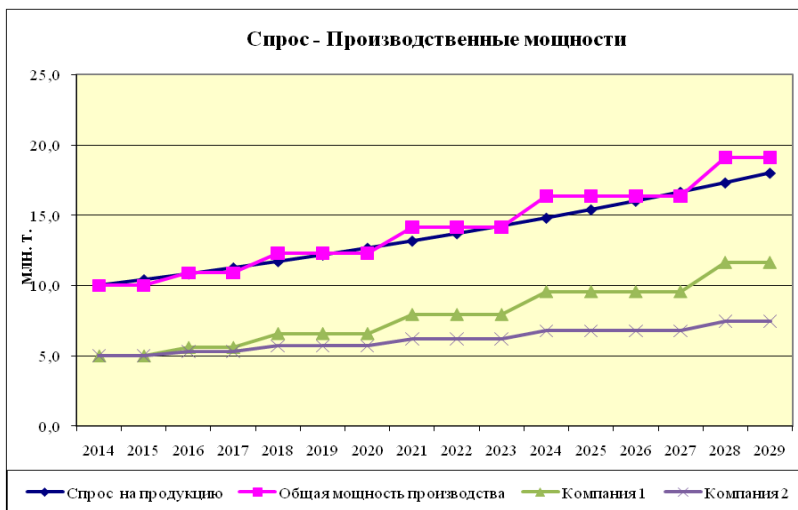


Рис. 2. График спрос – производственные мощности

Следует заметить, что, в отличие от матричных игр, в биматричных играх может оказаться так, что совместное отклонение двумя игроками от равновесия Нэша приводит к увеличению выигрыша обоих игроков. Эта ситуация иллюстрируется примером (таблица 1). В точке равновесия выигрыш обоих игроков одинаков и равен 7120 млн \$. Однако если компании условятся выбрать другую точку, которая соответствует выбору инвестиционной стратегии 2 ($k = 2$ и $j = 2$), то выигрыш обеих

игроков также будет одинаков и равен 7481 млн \$, что превышает их выигрыш в равновесной точке.



Рис. 3. Динамика цены

Выходом в таких ситуациях является кооперация игроков, т.е. сотрудничество, состоящее в том, что игроки могут договориться о согласованном выборе инвестиционных стратегий. В реальных экономических ситуациях конкурирующие участники рынка могут взаимодействовать друг с другом, вступая в переговоры и заключая соглашения, часто не официальные. Если в платежной матрице игры существует множество точек, оптимальных по Парето (т.е. недоминируемых другими), то такое множество называется переговорным. Существуют различные способы достижения игроками договоренности о совместном выборе точки из переговорного множества, включая различные так называемые арбитражные схемы.

Анализ матрицы игры (таблица 1) иллюстрирует полезность такой кооперации для обеих компаний. Если кооперация между игроками невозможна, им выгоднее придерживаться равновесных стратегий.

Сценарий 2 (2014–2018 гг. – период роста спроса, далее в 2019–2020 гг. – резкое падение спроса и в 2021–2029 гг. – медленное равномерное восстановление спроса до уровня 2018 г.) (рис. 6).

Матрица выигрышей компаний при реализации сценария 2 приведена в таблице 2.

В таблице жирным шрифтом выделены максимальные элементы столбцов матрицы первого игрока и максимальные элементы строк матрицы второго игрока. Анализ полученной матрицы показывает наличие единственной равновесной точки Нэша, которая соответствует выбору обеими компаниями инвестиционной стратегии 1 ($k = 1$ и $j = 1$). Элементы матрицы первого и второго игрока в этой точке выделены жирным шрифтом.

Таблица 2. Матрица выигрышей компаний (сценарий 2)

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$
$k = 1$	4750\4750	4285\3507	5764\2980
$k = 2$	3507\4 285	4087\4087	5941\3715
$k = 3$	2980\5764	3715\ 5941	5098\5098

Заметим, что равновесная точка Нэша для обоих сценариев совпадает. Это говорит о том, в условиях конкурентной борьбы и отсутствия кооперации, вне зависимости от сценария, наиболее выгодной стратегией для обеих компаний является стратегия максимальной инвестиционной активности.

Переговорное множество состоит из единственной точки, которая соответствует выбору обеими компаниями инвестиционной стратегии 3 ($k = 3$ и $j = 3$), соответствующей стратегии минимальной инвестиционной активности. Данный набор стратегий игроков обеспечивает им в случае их кооперации максимальный выигрыш.

На рис. 4 показана динамика предполагаемого рыночного спроса на продукцию для сценария 2 и динамики роста производственных мощностей и, соответственно, предложения со стороны конкурирующих компаний (компания 1 и компания 2). На рис. 5 показана динамика рыночной цены на продукцию.

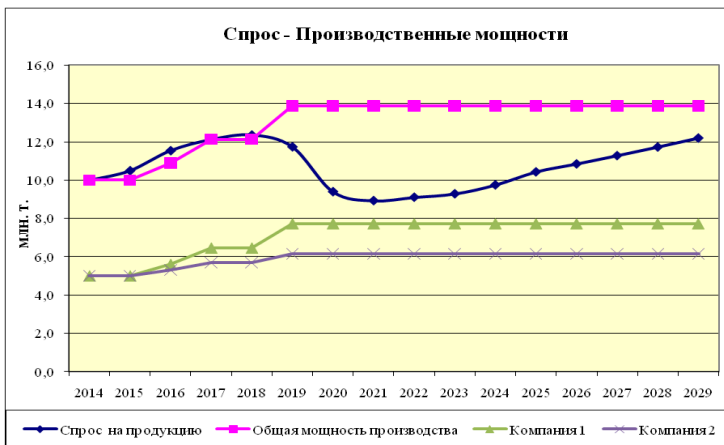


Рис. 4. График спрос – производственные мощности

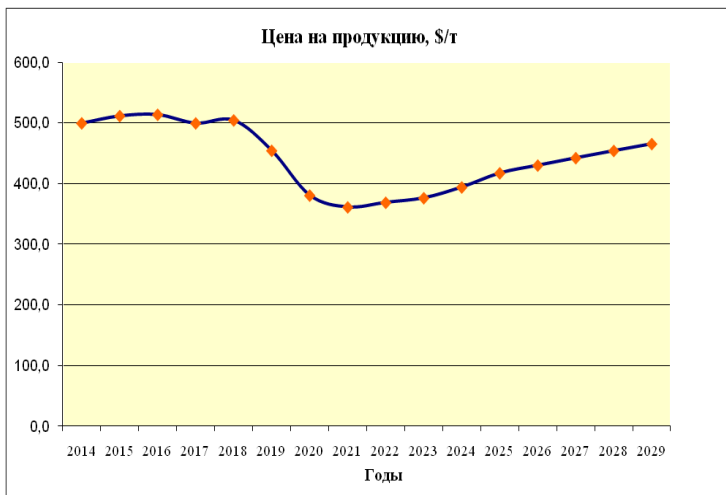


Рис. 5. Динамика цены

5.2 НЕСИММЕТРИЧНЫЙ СЛУЧАЙ

Пусть компании отличаются начальной мощностью производства и, соответственно, долей рынка. Начальная мощность производства компании 1 составляет 7 млн т продукции в год, а компании 2, соответственно, 3 млн т продукции в год. Доля рынка компаний составляет 70% и 30% соответственно.

Матрица выигрышей компаний при реализации сценария 1 приведена в таблице 3 и, при реализации сценария 2, в таблице 5.

В таблицах жирным шрифтом выделены максимальные элементы столбцов матрицы первого игрока и максимальные элементы строк матрицы второго игрока. Анализ полученных матриц показывает наличие единственной равновесной точки Нэша, которая соответствует выбору обеими компаниями инвестиционной стратегии 1 ($k = 1$ и $j = 1$). Элементы матрицы первого и второго игрока в этой точке выделены жирным шрифтом.

Заметим, что равновесная точка Нэша для обоих сценариев также совпадает.

Таблица 3. Матрица выигрышей компаний (сценарий 1)

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$
$k = 1$	10841\3581	11948\3297	12151\2563
$k = 2$	10216\4379	11304\3868	12189\2799
$k = 3$	4262\9221	4801\9056	9751\4179

Переговорное множество состоит из единственной точки, которая соответствует выбору обеими компаниями инвестиционной стратегии 2 ($k = 2$ и $j = 2$), соответствующей стратегии умеренной инвестиционной активности. Данный набор стратегий игроков обеспечивает им в случае их кооперации максимальный выигрыш.

Таблица 4. Матрица суммарного выигрыша компаний

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$
$k = 1$	14421	15245	14714
$k = 2$	14595	15175	14988
$k = 3$	12775	13230	13930

В таблице 4 приведен суммарный выигрыш компаний для различных сочетаний, выбранных ими стратегий. Анализ показывает, что точка, соответствующая максимальному суммарному выигрышу компаний ($k = 1$ и $j = 2$), не совпадает ни с равновесной точкой Нэша ($k = 1$ и $j = 1$), ни с точкой из переговорного множества ($k = 2$ и $j = 2$). Возможна и другая форма кооперации, которая состоит в следующем: игроки договариваются выбрать точку, соответствующую суммарному выигрышу компаний, и далее эффект, полученный от такого решения, делится между участниками так, чтобы выигрыш каждого участника был больше, чем выигрыш в точке переговорного множества.

Таблица 5. Матрица выигрышей компаний (сценарий 2)

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$
$k = 1$	7303\2290	8086\2253	6541\1290
$k = 2$	6400\2460	6340\1988	7743\1878
$k = 3$	4671\3450	5648\3408	7137\3059

Анализ матрицы (таблица 5) показывает, что для случая реализации сценария 2 матрица не содержит точек переговорного множества. В тоже время точка, соответствующая максималь-

ному суммарному выигрышу компаний ($k = 1$ и $j = 2$), не совпадает с равновесной точкой Нэша ($k = 1$ и $j = 1$). Поэтому возможна форма кооперации, описанная выше, которая позволяет игрокам увеличить свой выигрыш по сравнению с выигрышем в равновесной точке.

6. Заключение

Исследована задача анализа и выбора инвестиционных стратегий компании на рынке типа «дуополия», направленных на повышение их конкурентных преимуществ (увеличение производственных мощностей и сокращения производственных издержек).

Задача сведена к анализу биматричной игры, в которой матрица выигрышей формируется в результате численного моделирования. Метод решения данной задачи включает проведение серии численных расчетов на имитационной модели, построение платежной матрицы и ее анализ.

Показано, что во многих случаях существует решение данной игры (равновесной точки Нэша) в чистых стратегиях. Анализ решений с учетом возможных коалиций игроков и различного типа договоренностей между ними позволил сделать ряд интересных для практики качественных выводов.

Следует заметить, что предлагаемый подход к исследованию задачи выбора инвестиционных стратегий компаний в условиях конкуренции открываются широкие возможности исследовать различные модификации данной задачи. Например, варьируя параметры модели, можно рассматривать различные типы асимметрии на рынке:

- одна из компаний является лидером отрасли по объемам производства и доле рынка ($D_1(0) > D_2(0)$);
- одна из компаний является технологическим лидером отрасли, имеет более низкие производственные издержки ($S_1(0) > S_2(0)$);
- одна из компаний обладает лучшим менеджментом, что выражается в более эффективном использовании средств, выделяемых на инвестиции ($E_1(0) > E_2(0)$).

Литература

1. АКИНФИЕВ В.К. *Инвестиционные стратегии компаний и цикличность рынков металлопродукции* // Управление большими системами. – 2010. – №28. – С. 179–196.
2. АКИНФИЕВ В.К. *Выбор инвестиционных стратегий компаний в условиях нестабильности рынков* // Управление большими системами. – 2014. – №51. – С. 107–129.
3. АКИНФИЕВ В.К., ЦВИРКУН А.Д. *Выбор программ развития крупномасштабных систем на основе оптимизационно-имитационный методов* // Сборник научных трудов «Управление развитием крупномасштабными системами MLSO-2014». – М.: ИПУ РАН, 2014. – С. 87–95.
4. ГУБАНОВ Д.А., ЧХАРТИШВИЛИ А.Г. *О стратегической рефлексии в биматричных играх* // Управление большими системами. – 2008. – №21. – С. 49–57.
5. ДЖУЛИАН РОШ. *Стоимость компании: от желаемого к действительному*. – Минск: Гривцов Паблишер, 2008. – С. 352.
6. КОРЕПАНОВ В.О., НОВИКОВ Д.А. *Модели стратегического поведения в задаче о диффузионной бомбе* // Проблемы управления. – 2015. – №2. – С. 38–44.
7. НОВИКОВ Д.А. *Модели стратегической рефлексии* // Автоматика и телемеханика. – 2012. – №1. – С. 3–23.
8. СУББОТИН А.В. *Моделирование волатильности: от условной гетероскедастичности к каскадам на множественных горизонтах* // Прикладная эконометрика. – 2009. – №3(15). – С. 94–138.
9. BOLTON P., YANG J., WANG N. *Investment, Liquidity, and Financing under Uncertainty* // Working Papers/ Columbia University, 2014. [Электронный ресурс] – URL: <https://www0.gsb.columbia.edu/faculty/pbolton/papers/SSRN-id2364067.pdf> (дата обращения: 17.04.2016).
10. DIXIT A.K., PINDYCK R.S. *Investment under Uncertainty*. – Princeton University Press. Princeton, 1994. – 488 p.
11. GRENADIER S.R., WANG N. *Investment timing, agency, and information* // Journal of Financial Economics. – 2005. – Vol. 75. – P. 493–533.

12. GRENADIER S.R. *Option exercise games: an application to the equilibrium investment strategies of firms* // Review of Financial Studies. – 2002. – Vol. 15, No. 3. – P. 691–721.
13. NOVIKOV D., CHKHARTISHVILI A. *Reflexion and Control: Mathematical Models*. – London: CRC Press, 2014. – 298 p.
14. MASON R., WEEDS H. *Investment, Uncertainty and Pre-emption* // International Journal of Industrial Organization. – 2010. – Vol. 28. – P. 278–287.
15. SCHWARTZ E.S., TRIGEORGIS L. *Real Options and Investment under Uncertainty: Classical Readings and Recent Contributions*. – The MIT Press, Cambridge, Mass, USA, 2001. – 261 p.
16. SMIT H.T.J., TRIGEORGIS L. *Strategic Investment: Real Options and Games*. – Princeton University Press, Princeton, NJ, USA, 2004. – 504 p.
17. XIUMEI LV, SHIQIN XU, XIAOLING TANG. *Investment Timing and Capacity Choice under Uncertainty* // Hindawi Publishing Corporation. Abstract and Applied Analysis. – 2014. – Vol. 2014, Article ID 801862. – P. 172–184.

SIMULATION OF INVESTMENT STRATEGIES OF FIRMS UNDER UNCERTAINTY

Valerij Akinfiyev, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Doctor of Science, professor (akinf@ipu.ru).

Abstract: This paper examines the problem of investment strategies choice of firms under demand uncertainty and competition in the market. A mathematical model describing the investment behavior of firms in a Duopoly Market is proposed. We study the impact of Investment Strategy of Firms on its financial performance and the efficiency of investment under demand uncertainty and competition in the market. Solution is reduced to the analysis of a bimatrix game, wherein the payoff matrix is formed by numerical simulation. We present an illustrative example of the proposed approach.

Keywords: investment decisions of firms, duopoly market, mathematical model, bimatrix game.

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии Р.М. Нижегородцевым*

*Поступила в редакцию 15.11.2015.
Опубликована 31.05.2016.*

УДК 519.2/.6+368.5
ББК 2.22

ОБОСНОВАНИЕ РЕГИОНАЛЬНОЙ МУЛЬТИРИСКОВОЙ ПРОГРАММЫ СТРАХОВАНИЯ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННЫХ КУЛЬТУР

Киселев В. Г.¹

(ФИЦ ИУ РАН, Вычислительный центр
им. А.А. Дородницына, Москва)

Приводятся особенности страхования в сельском хозяйстве. Приводится математическая модель одной программы страхования – мультирисковой программы. Приводится математическая модель функционирования страховой компании. Приводится математическая модель экономики агрофирмы и исследуется эффект от страхования в зависимости от степени участия в страховании государства. Обсуждается процедура согласования параметров программы страхования между участниками страховой операции – агрофирмами, страховой компанией и государством.

Ключевые слова: агрострахование, критерии приемлемости, информационная база, вероятностные характеристики, имитационное моделирование.

1. Введение

Основным способом обеспечения финансовой устойчивости сельскохозяйственных производителей является страхование сельскохозяйственных рисков. Практически для всех видов страхования разработаны приемлемые методики, основанные на имеющихся в достаточной мере статистических данных и использующие современные достижения актуарной математики

¹ Валерий Георгиевич Киселев, кандидат физико-математических наук, доцент (vgkiselev@yandex.ru).

(последние достижения в актуарной математике приведены в переводной монографии [1]). Исключение составляет страхование в сельском хозяйстве и особенно в его растениеводческой отрасли. В работах [5–10] отмечались основные особенности страхования сельскохозяйственного производства. Основная особенность заключается в том, что для обоснования различных программ агрострахования не хватает основного – достаточной информационной базы. Не исключены такие случаи, когда нет даже минимальной информации – данных о средних значениях урожайности страхуемой культуры, особенно когда речь идет о страховании вновь созданных агрофирм, или об использовании инновационных методов производства, или о страховании интродуцируемых культур. Второй важной особенностью является коррелированность страховых случаев, объясняющаяся тем, что многие застрахованные агрофирмы находятся в одной агроклиматической зоне, и если в некоторый год сложились неблагоприятные погодные условия в этой зоне, то недобор урожая будет у всех застрахованных хозяйств этой зоны и им всем придется выплачивать причиненный погодой ущерб, а это возможно только при наличии больших средств, которые страховая фирма может накопить в другие благоприятные годы. Это существенное отличие агрострахования от других классических видов страхования, когда страховые случаи независимы и одновременно происходят лишь у малой части страхователей и страховые выплаты можно производить за счет большого количества других участников страховой компании, не потерпевших ущерба.

Третьей особенностью, отличающей агрострахование от классических видов страхования, является оценка доли участия застрахованных природных факторов в недоборе урожая. Достоверная оценка потерь урожая является очень сложной задачей. Величина потерь зависит не только от природных (объективных) факторов, но и от человеческого фактора, коим является производственная деятельность агрофирмы. Вопросы о величине потерь урожая должны рассматриваться совместно с представителями агрофирмы (страхователя) и страховой компании (страховщика).

Наконец, четвертой, очень важной особенностью является участие государства в страховании сельскохозяйственного производства. Как показывает опыт, без участия государства агрострахование невозможно.

2. Цель и задачи исследования

В настоящее время система страхования в сельском хозяйстве Российской Федерации находится в стадии активного становления. Пока по существу только вырабатываются концепции системы страхования, и это связано с изменением целей и принципов конструируемого механизма защиты интересов сельскохозяйственных производителей, что, в свою очередь, связано с известными перестроечными процессами в стране. Для выработки приемлемых программ страхования урожая необходим системный подход, учитывающий интересы всех участников процедуры страхования: страховых фирм, страхователей-агрофирм, а также государственные интересы.

Целью данного исследования является создание системы математических моделей, с помощью которых можно будет построить процедуру согласования интересов участвующих в данной программе страхования всех трех заинтересованных сторон и разработка самой этой процедуры.

Для этого будут рассмотрены следующие задачи:

- построение экономических моделей функционирования страховой компании и агрофирмы в условиях выполнения обязательств, взятых по заключению страхового договора по данной программе, и исследование этих моделей;
- исследование вопроса о необходимой и имеющейся информационной базе;
- разработка процедуры согласования параметров, определяющих свойства данной программы страхования производства сельскохозяйственной культуры.

Следует отметить, что касается экономических моделей агрострахования, то публикации на эту тему вообще отсутствуют, а в доступных публикациях (например, [12, 13]) приводятся

лишь словесные описания некоторых программ и даются некоторые рекомендации относительно значений традиционных параметров программ страхования, таких как величина страхового тарифа, степень участия государства в данной страховой программе и т.д.

Что касается вопроса о необходимой информации, то при описании программ страхования обычно ограничиваются рекомендацией использовать информацию только за последние годы (как правило, это 5 лет). Это никак не обосновывается и, как будет следовать из дальнейшего изложения, этой информации недостаточно для принятия обоснованных решений.

Что же касается процедуры согласования параметров, определяющих страховую программу, то в реальной жизни такая процедура вообще отсутствует. Как происходит подобное согласование можно судить по автострахованию ОСАГО – оно происходит путем народного обсуждения и даже обсуждения на уровне Госдумы. Хотелось бы иметь прозрачную процедуру согласования, основанную на достоверной информации и подтвержденную достоверными результатами исследований.

Все эти перечисленные задачи будут рассмотрены на примере одной программы агрострахования.

Все результаты, касающиеся агрострахования, получены автором. В тех же немногих случаях, когда рассматриваются общие вопросы актуарной математики, сделаны соответствующие ссылки.

3. Мультирисковая программа страхования сельскохозяйственных культур

Имеется достаточно много видов программ страхования в сельском хозяйстве. Основные программы описаны в [4, 9]. Здесь мы будем рассматривать применение только одной программы страхования – мультирисковой программы страхования производства сельскохозяйственных культур. Это самый распространенный, если не единственный, вид агрострахования в нашей стране.

Рассмотрим сначала случай страхования урожая одной культуры одной фирмой на площади S . Пусть y_- и y_+ – минимальная и максимальная урожайности соответственно, а Ey – ее среднее значение. Пусть цена единицы полученной продукции равна c . Страховая урожайность y_a – то значение урожайности, ниже которой страховая компания выплачивает страховое возмещение, равное стоимости недополученного урожая. Обычно значение страховой урожайности задают в виде $y_a = \alpha Ey$, где $0 < \alpha < 1$ – некоторый коэффициент. При сделанных предположениях страховая сумма, исходя из которой определяется величина страхового взноса, равна cSy_a .

Страховой взнос (страховая премия) – это плата за страхование – сумма, которую страхователь должен заплатить страховой компании, равен $\pi = \delta cSy_a$, где $0 < \delta < 1$ – страховой тариф – ставка страховой компании, задаваемая ею с учетом собственного финансового благополучия. С другой стороны, как это принято в страховом деле [1], страховая премия вычисляется из условия $\pi = cS(1 + \theta)Er$, где $\theta > 0$ – величина страховой надбавки, а страховое возмещение $r = cS(y - y_a)_+$ (нижний знак (+) означает функцию Хевисайда). Будем считать, что часть $0 < \gamma < 1$ страховой премии выплачивается из федерального и местного бюджетов. Следовательно, страхователь должен заплатить страховой фирме только величину $(1 - \gamma)\pi$. Такова мультирисковая программа страхования.

ВЛИЯНИЕ СТРАХОВАНИЯ НА ЭКОНОМИЧЕСКИЕ ПОКАЗАТЕЛИ АГРОФИРМЫ.

Будем предполагать, что известна функция распределения урожайности выращиваемой культуры. Первый показатель, ради чего и производится страхование, – это надежность получения урожая. Здесь все просто. Если страховая урожайность равна y_a , $P(y < y_a) = p_a$, то это значит, что с вероятностью $(1 - p_a)$ производитель будет получать запланированный урожай, а с вероятностью p_a будет недобор, который в какой-то мере будет компенсироваться страховой компанией.

Пусть страхователь выбрал для себя значение y_a и решил застраховать урожай с площади S . Тогда страховые выплаты

страхователя – плата за получаемую надежность – равны $\pi_f = cS\delta\alpha y_\alpha(1 - \gamma)$, где γ – доля участия государства.

В работах [7, 8] показано, что

$$\delta = (1 + \theta) \int_{y_-}^{y_\alpha} \left(1 - \frac{y}{y_\alpha}\right) f(y) dy,$$

т.е. величина страхового тарифа δ определяется величиной страховой надбавки θ .

С учетом изложенного выше

$$\pi_f = cS(1 - \gamma)(1 + \theta) \int_{y_-}^{y_\alpha} (y_\alpha - y) f(y) dy.$$

В конкретный год доход агрофирмы

$$D_f = cS y + r_f - \pi_f,$$

т.е. равен доходу от реализации выращенной продукции, равному cSy , минус страховые платежи $\pi_f = (1 - \gamma)\pi_l$ (π_l – премия, получаемая страховой компанией) и плюс страховое возмещение $r_f = (y_\alpha - y)_+$, полученное от страховой компании при недостаточном урожае.

Средний доход агрофирмы в этом случае равен

$$\frac{1}{cS} ED_f = Ey + \psi \int_{y_-}^{y_\alpha} (y_\alpha - y) f(y) dy = Ey + \psi Er,$$

где

$$\psi = \gamma - \theta(1 - \gamma) -$$

очень важный показатель, который мы назовем индикатором программы страхования. Отсюда следует, что при $\psi > 0$ средний доход агрофирмы при страховании больше среднего дохода без страхования.

Это условие удобно переписать или в виде

$$\theta < \frac{\gamma}{1 - \gamma},$$

или в виде

$$\gamma > \frac{\theta}{1 + \theta}.$$

В первом случае – это ограничение сверху на величину рискованной надбавки при фиксированном γ , а второе неравенство является ограничением снизу на величину господдержки при фиксированной страховой надбавке. В противном случае страхование уменьшает средний доход агрофирмы. При отсутствии господдержки ($\gamma = 0$) при страховании средний доход фирмы убывает.

ЭКОНОМИКА СТРАХОВОЙ ФИРМЫ ПРИ МУЛЬТИРИСКОВОМ СТРАХОВАНИИ

Исследуем теперь вопрос о том, как влияет рассматриваемое страхование на страховую фирму.

Годовой доход страховой компании равен

$$D_t = (1 + \theta)Er - r ,$$

а средний доход

$$ED_t = \theta Er .$$

Другое выражение для среднего дохода можно представить в следующем виде:

$$ED_t = cS\theta \int_{y_-}^{y_\alpha} (y_\alpha - y)f(y)dy .$$

При нулевой рискованной надбавке θ средний доход страховой компании также нулевой, поскольку вся премия в среднем идет на компенсацию рисков. Необходимым условием функционирования страховой компании является условие $\theta > 0$. Часть премии в размере $\theta cSEr$ идет на содержание фирмы (аренда и содержание помещения, проведение необходимых работ по страхованию, зарплата сотрудников, отчисления на развитие фирмы и т.д.).

Выделим отдельно важную составляющую расходов – расходы на содержание службы сопровождения программ страхования. Достоверная оценка причин потерь урожая является очень сложной задачей. Величина потерь зависит не только от природных (объективных) факторов, но и от человеческого фактора, коим является производственная деятельность агрофирмы

Вопросы о величине потерь урожая должны рассматриваться совместно с представителями агрофирмы (страхователя) и страховой компании (страховщика). Эти вопросы становятся более актуальными, если агрофирма пользуется господдержкой в страховании своего урожая.

Все эти противоречия между страхователем и страховщиком по определению ущерба должны решаться независимой экспертизой, которая, в свою очередь, должна опираться на достоверную информацию. Такую информацию должна предоставлять служба сопровождения программ страхования, которая по имеющейся агроклиматической информации с помощью комплекса математических моделей должна уметь вычислять эти ущербы.

Это очень важная составляющая затрат страховой компании, особенно в рассматриваемой мультирисковой программе страхования. Как показывает зарубежный опыт, в структуре тарифа в этом виде страхования на службу мониторинга уходит примерно 20–30% страховой премии.

При разработке стратегии функционирования страховой компании кроме среднего дохода используются (см., например [1]) такие показатели, как вероятность неразорения, величина максимальных потерь и другие, связанные с финансовой устойчивостью фирмы. Из показателей, связанных с устойчивой деятельностью фирмы, наиболее важным является вероятность неразорения. На интуитивном уровне понятно, что это такое, а детальное описание этого факта будет проведено в следующих разделах.

Для того чтобы обезопасить себя от разорения, страховые компании могут прибегнуть к механизму перестрахования, который состоит в следующем. Страховщик при заключении договоров страхования принимает на себя финансовую ответственность за возможные риски и за это получает премию. Если для страховой компании крупные выплаты нежелательны, а это, как мы видели, весьма вероятно в агростраховании, то она может передать часть премии другой страховой компании – перестраховщику взамен на обязательство оплатить часть риска. Существуют разные схемы перестрахования, но экономическая

суть перестрахования для страховой компании одна, а именно: в результате перестрахования страховщик получает средний доход меньше. Эта оценка получена в [8] для случая одного хозяйства и одной страхуемой культуры, но она справедлива и для общего случая, поскольку не используют конкретный вид получаемых премий и конкретный вид премий.

Для классических видов страхования показано (см. [1, 2]), что при перестраховании вероятность неразорения повышается, т.е. повышается надежность функционирования страховой системы. Однако этот результат является естественным, и мы вправе предположить выполнение этого свойства и для агрострахования. Но строгое обоснование надежности страховой компании требует самостоятельного исследования. Таким образом, смысл перестрахования заключается в том, что за счет уменьшения дохода страховая фирма повышает надежность заключенных сделок.

4. Информационная база региональной системы агрострахования

Из изложенного выше следует, что для вычисления необходимых величин, т.е. для обоснования программы агрострахования, необходимо знать распределение случайной величины – урожайности страхуемой культуры. Для этого необходимо иметь достаточно длинные статистические ряды. Такая информация имеется как для всей России в целом, так и для отдельных административных единиц в ежегодных статистических справочниках, например, таких как [14].

В работах [7, 10] был проведен анализ этих рядов, который показал, что эти ряды не могут относиться к одной стационарной случайной величине, что имеются на некоторых временных отрезках тренды, и там же были названы причины этого факта. В частности, были отмечены основные факторы, влияющие на урожайность:

- климатические условия, которые со временем имеют тенденцию к изменению;

- научно-технический прогресс – использование новых перспективных сортов, современных технологий и современной техники;
- человеческий фактор – качество выполняемых работ.

Последний социальный фактор очень важен. Известно, что на опытных участках урожайности культур могут быть в несколько раз выше, чем в соседних хозяйствах при использовании одних и тех же технологий выращивания.

Таким образом, необходимо рассматривать урожайность как случайный процесс с ненулевым трендом и вычислять по имеющимся рядам эмпирические характеристики этого процесса и прогнозировать на перспективу урожайности нужно весьма осторожно. Если первый климатический фактор определяет в основном разброс получаемых урожаев, то второй и третий факторы в значительной степени определяют тренды средних значений. Так, падение урожайностей на 10-летнем интервале примерно с 1988 г. по 1998 г., совпадающем с периодом не очень понятных преобразований в стране, можно объяснить всеобщей неразберихой, а после этого в связи со стабилизацией обстановки в целом по стране наблюдался рост урожайности. Таким же образом можно объяснить медленный положительный тренд с 1970 г. по 1988 г., когда сельскому хозяйству стали уделять большое внимание. Однако это всего лишь один из возможных способов объяснения подобных явлений. По-видимому, найдутся и другие правдоподобные объяснения, в частности, возможно, что эти тренды объясняются климатическими изменениями. В общем, здесь ситуация абсолютно идентична той, которая наблюдается с объяснениями изменения климата, когда одни специалисты считают, что наблюдается всеобщее потепление, и объясняют причины этого явления, а другие с не меньшей убежденностью объясняют наблюдаемый факт повышения температуры временным явлением, за которым последует похолодание.

Таким образом, мы отметили влияние антропогенного фактора на урожайность сельскохозяйственных культур, и это влияние может существенно изменить характеристики случайного процесса – урожайности.

Следовательно, в силу приведенных причин мы не можем считать, что длинный временной ряд относится к одной случайной величине – урожайности страхуемой культуры. Но, с другой стороны, нам необходимо знать функцию распределения этой случайной величины, которая тем точнее, чем больше привлекается измерений для ее построения. В данной ситуации остается один выход – воспользоваться методами имитационного моделирования [11], которые в данном случае будут заключаться в рассмотрении различных вариантов использования имеющейся информации, в частности, ее корректировке на основании каких-либо гипотез. Если речь идет о страховании интродуцируемой культуры или о новой агрофирме, о чем говорилось выше, такой подход является единственно возможным.

Не останавливаясь подробно на деталях такого подхода, будем считать, что в нашем распоряжении имеется эмпирическая функция распределения случайной величины – урожайности страхуемой сельскохозяйственной культуры.

5. Региональное мультирисковое страхование

В разделе 3 была рассмотрена мультирисковая программа страхования урожая одной культуры одним хозяйством. Обобщим теперь сказанное на более реальный случай, когда в страховании участвуют несколько агрофирм и страхуется несколько культур.

Пусть j означает номер хозяйства; J – множество всех хозяйств, участвующих в страховании своей продукции; k – номер культуры; K – множество всех культур. Пусть считается известным, что j -я фирма заключила со страховой компанией договор на страхование k -й культуры на площади S_{kj} со страховым уровнем y_{akj} .

Пусть страховой тариф при страховании k -й культуры для j -й фирмы равен δ_{kj} (страховые тарифы для разных культур и разных фирм в общем случае могут различаться)

Страховое возмещение j -й агрофирме по k -й культуре равно

$$r_{kj} = c_k S_{kj} (y_{akj} - y_{kj})_+,$$

где смысл обозначений очевиден. Всего страховая фирма возьмет всем хозяйствам по всем застрахованным культурам

$$R = \sum_{k,j} r_{kj}.$$

Страховая премия, полученная страховой фирмой от всех хозяйств по всем страхуемым культурам, равна

$$\Pi = \sum_{k,j} \pi_{k,j} = (1 + \theta) \sum_{k,j} Er_{k,j},$$

где θ – введенная ранее страховая надбавка.

С другой стороны,

$$\pi_{k,j} = c_k \delta_{kj} S_{kj} y_{\alpha kj},$$

$$\Pi = \sum_{k,j} c_k \delta_{kj} S_{kj} y_{\alpha kj} = (1 + \theta) \sum_{k,j} Er_{k,j},$$

и мы можем получить зависимость величины страхового тарифа от величины страховой надбавки θ , которую задавать более естественно при формировании программы страхования. Это соотношение можно получить, приравняв два выражения для π_{kj} . Из этого равенства получим

$$\delta_{kj} = (1 + \theta) E \left(1 - \frac{y_{kj}}{y_{\alpha kj}}\right)_+.$$

Отсюда следует, что, задав одну единственную величину θ – страховую надбавку, страховщик может назначить величину страхового тарифа для каждой культуры и для каждой фирмы.

Далее, зная только значение θ , можно назначить, например, средний для всех хозяйств страховой тариф по каждой культуре. Для этого надо воспользоваться соотношением

$$\sum_j \pi_{kj}(\delta_k) = (1 + \theta) \sum_j Er_{kj}.$$

Преобразуем это соотношение следующим образом:

$$c_k \delta_k \sum_j S_{kj} y_{\alpha kj} = (1 + \theta) \sum_j Er_{kj}.$$

Отсюда получим искомое выражение для страхового тарифа для k -й культуры.

$$\delta_k = (1 + \theta) \frac{\sum_j S_{kj} E(y_{\alpha kj} - y_{kj})_+}{\sum_j S_{kj} y_{\alpha kj}}.$$

Заметим, что страховой тариф, средний для всех культур, по-видимому, не имеет смысла, поскольку риски по выращиванию этих культур могут сильно отличаться.

ФИНАНСОВЫЕ ПОТОКИ В СТРАХОВОЙ КОМПАНИИ ПРИ МУЛЬТИРИСКОВОМ СТРАХОВАНИИ

Рассмотрим сначала стационарный случай функционирования страховой компании, когда заключенные с агрофирмами страховые договора со временем не меняются, т.е. величины c и S_{kj} постоянны.

Финансы страховой компании складываются следующим образом. Ежегодный доход равен

$$D_I = \Pi - R$$

или

$$D_I = (1 + \theta) \sum_{k,r} E r_{kj} - \sum_{k,r} r_{k,j}.$$

Тогда средний доход страховой фирмы – один из основных показателей ее благополучия – можно вычислить следующим образом:

$$E D_I = \theta \sum_{k,j} E r_{k,j}.$$

Преобразуем это выражение, используя соотношение для выплат r_{kj} :

$$E D_I = \theta \sum_{k,j} c_k S_{kj} E(y_{\alpha kj} - y_{kj})_+,$$

и поскольку

$$E(y_{\alpha kj} - y_{kj})_+ = \int_{\bar{y}_{kj}}^{y_{\alpha kj}} (y_{\alpha kj} - y_{kj}) dF_{kj},$$

где F_{kj} – эмпирическая функция распределения урожайности y_{kj} , то

$$ED_I = \theta \sum_{k,j} c_k S_{kj} \int_{y_{kj}^-}^{y_{\alpha kj}} (y_{\alpha kj} - y_{kj}) f(y_{kj}) dy_{kj}.$$

Заметим, что при $\theta = 0$ средний доход страховой компании равен нулю, поскольку вся премия идет на компенсацию рисков.

ВЕРОЯТНОСТЬ НЕРАЗОРЕНИЯ СТРАХОВОЙ КОМПАНИИ ПРИ МУЛЬТИРИСКОВОМ СТРАХОВАНИИ

Как уже было сказано выше, из показателей, связанных с устойчивой деятельностью фирмы, наиболее важным является вероятность неразорения.

Введем следующие обозначения. Деятельность фирмы будем рассматривать на конечном интервале времени в T лет, т.е. время будет принимать дискретные значения $t = 0, 1, 2, \dots, T$. Пусть $U(t)$ – капитал страховой фирмы к концу года t , а начальный капитал равен u , т.е. $U(0) = u$. Пусть $\pi(t)$ означает страховые поступления в год t , а $r(t)$ – выплаты в этот год. Тогда можно записать следующее соотношение:

$$U(t) = U(t-1) + \pi(t) - r(t),$$

$$U(0) = u, \quad t = 1, 2, \dots.$$

Решая это разностное уравнение, для любого времени t получим

$$U(t) = u + \Pi(t) - R(t),$$

где $\Pi(t) = \sum_{\tau=1}^t \pi(\tau)$, $R(t) = \sum_{\tau=1}^t r(\tau)$ – суммарные за t лет поступления и выплаты соответственно.

При конкретной реализации процесса $U(t)$ может так случиться, что в некоторый момент времени τ требуемые выплаты превысят имеющийся капитал, т.е. $U(\tau) < 0$. Такой момент времени называют моментом разорения. Вероятность $\Psi(u, t) = P(\tau \leq t)$ называют вероятностью разорения до момента t , при условии, что начальный капитал равен u (мы здесь будем рассматривать только практически интересный случай конечного времени, хотя разорению на бесконечном интервале посвящено больше исследований). Соответственно, $\varphi(u, t) = 1 - \Psi(u, t)$ будет вероятностью неразорения.

Изучению этой характеристики страхования посвящено очень много исследований (см. [1, 2]), однако все они проведены в предположении, что известны характеристики соответствующих процессов, что является допустимым предположением для классических видов страхования, но в агростраховании максимум, что может быть известно, – это эмпирическая функция распределения случайной величины – урожайности страхуемой культуры. В работе [8] приведены два метода вычисления вероятности неразорения для такого случая информированности и для страхования одной культуры одним хозяйством.

Реально же страховая компания заключает договора с большим количеством хозяйств и по нескольким культурам. Поэтому реальное уравнение, описывающее динамику финансов страховой компании, с учетом соотношений должно иметь следующий вид:

$$\begin{aligned}
 U(t) &= u + \sum_{\tau=1}^t [\Pi(\tau) - R(\tau)] = u + \Pi(t) - \sum_{\tau=1}^t R(\tau) = \\
 &= u + \Pi(t) - \sum_{\tau=1}^t \sum_{k,r} c_k S_{kj} [y_{akj} - y_{kj}(\tau)]_+ = \\
 &= u + \sum_{\tau=1}^t [(1 + \theta) \sum_{k,r} Er_{kj}(\tau) - \sum_{k,r} r_{k,j}(\tau)] = \\
 &= u + \sum_{\tau=1}^t \sum_{k,r} c_k S_{kj} [(1 + \theta) E(y_{akj} - y_{kj}(\tau))_+ - (y_{akj} - y_{kj}(\tau))_+].
 \end{aligned}$$

Здесь приведено нужное нам соотношение в нескольких видах, удобных в разных случаях. Заметим, что это соотношение справедливо в предположении, что страховые договора с хозяйствами не меняются от года к году.

Перепишем это соотношение еще в одном, удобном для нашего исследования, виде

$$U(t) = u + \Pi(t) - \sum_{\tau=1}^t \sum_k \sum_j r_{kj}(\tau).$$

Первые два слагаемые в этом выражении – детерминированные величины, третье – случайная величина. Следовательно,

для вычисления вероятности неразорения необходимо знать функцию распределения суммы

$$\sum_{\tau=1}^t \sum_k \sum_j r_{kj}(\tau).$$

Как следует из предыдущего раздела о зональном агростраховании, урожайности хозяйств любой культуры в информационной зоне страхования связаны линейным соотношением $y_j(t) = \alpha_j y(t)$, где $y(t)$ – средняя урожайность какой-либо культуры в зоне страхования. Таким образом,

$$r_{kj}(\tau) = r_{kj}(y_k(\tau))$$

и

$$\sum_j r_{kj}(\tau) = \sum_j r_{kj}(y_k(\tau)) = r_k(y_k(\tau)) -$$

выплаты страховой компании всем хозяйствам по k -й культуре в год номера τ .

Тогда

$$\sum_{\tau=1}^t r_k(y_k(\tau)) = R_k(t) -$$

суммарные выплаты за t лет всем хозяйствам по страхуемой культуре.

Поскольку случайные величины $y_k(\tau)$, $\tau = 1, 2, \dots$, – независимы, то и $r_k(y_k(\tau))$ – независимые, и $R_k(t)$ является суммой независимых случайных величин. Закон распределения этой суммы согласно центральной предельной теореме стремится к нормальному с параметрами

$$N(ER_k, DR_k).$$

Поскольку $r_k(y_k(\tau))$, $\tau = 1, 2, \dots$, независимы и одинаково распределены, то

$$ER_k(y_k) = t ER_k(y_k), DR_k = t DR_k(y_k).$$

Таким образом, при достаточно больших t случайная величина

$$R(t) = \sum_{\tau} \sum_k \sum_j = \sum_k R_k(t)$$

является композицией $|K|$ независимых случайных величин, распределенных приближенно по нормальному закону, т.е. и сама

она распределена приближенно по нормальному закону с параметрами

$$ER(t) = \sum_k ER_k(t),$$

$$DR(t) = \sum_k DR_k(t) + 2 \sum_{k_1 < k_2} \rho_{k_1 k_2}(t) \sqrt{DR_{k_1} DR_{k_2}},$$

где $\rho_{k_1 k_2}(t)$ – коэффициент корреляции случайных величин $R_{k_1}(t)$ и $R_{k_2}(t)$, $k_1, k_2 \in K$.

К сожалению, эти коэффициенты корреляции неизвестны, можно лишь эмпирически определить коэффициенты корреляции урожайностей культур, т.е. $\rho_{k_1 k_2}(R_{k_1}(1), R_{k_2}(1))$.

Для получения нижней оценки вероятности неразорения можно воспользоваться принципом гарантированного результата [3]. В данном случае это выглядит следующим образом. Выпишем цепочку соотношений

$$\varphi(u, t) = P(U(t) > 0) = P(R(t) < u + \Pi(t)) = F_R(u + \Pi(t)),$$

$$\varphi(u, t) \geq \min_{k_1, k_2 \in K} F_{R(k_1, k_2)}(u + \Pi(t)),$$

где $F_R(x)$ – функция распределения нормальной величины $R(t)$, зависящей от коэффициентов корреляции согласно выше приведенному соотношению.

Можно получить и верхнюю оценку вероятности неразорения. Для этого воспользуемся очевидным ее свойством: функция $\varphi(u, t)$ убывает по t к $\varphi(t)$ – вероятности неразорения на бесконечном интервале времени. Это свойство отражает тот факт, что чем больше рисков, тем меньше надежность системы.

Из этого свойства следует, что для получения верхней оценки вероятности неразорения достаточно рассмотреть первый год функционирования страховой компании.

Тогда с учетом предыдущих обозначений

$$\varphi(u, 1) = P(u + \pi > R(1)) =$$

$$= P \left[\sum_{k,j} c_k S_{kj} y_{kj} \geq \sum_{k,j} c_k S_{kj} y_{\alpha kj} (1 - \delta_{kj}) - u \right].$$

Далее, учитывая отмеченную ранее линейную зависимость урожайностей в хозяйствах и введя соответствующее обозначение, получим

$$\varphi(u, 1) = P \left[\sum_k \alpha_k y_k \geq A - u \right].$$

Эмпирическую функцию распределения суммы в последнем выражении можно построить, имея достаточно длинные временные ряды (об этом говорилось выше в соответствующем разделе), и получить нужную нам оценку.

Далее, имея такую функцию распределения, можно оценить величину требуемого начального капитала для обеспечения требуемой вероятности неразорения.

В качестве примера рассмотрим простейший случай страхования одной культуры. Тогда

$$\varphi(u, 1) = P \left[y > y_\alpha (1 - \delta) - \frac{u}{cS} \right].$$

Зададимся некоторым уровнем вероятности неразорения \tilde{p} , т.е. потребуем, чтобы вероятность неразорения была бы не меньше этой величины. Тогда должно выполняться неравенство

$$P \left[y > y_\alpha (1 - \delta) - \frac{u}{cS} \right] \geq \tilde{p}.$$

Отсюда следует неравенство

$$y_\alpha (1 - \delta) - \frac{u}{cS} \leq y_{\tilde{p}},$$

и, следовательно,

$$u > cS(y_\alpha (1 - \delta) - y_{\tilde{p}}).$$

Здесь $y_{\tilde{p}} = \arg[F(y) = 1 - \tilde{p}]$, а $F(y)$ – функция распределения случайной величины y .

Заметим, что в случае абсолютной надежности $\tilde{p} = 1$ и последнее неравенство принимает вид

$$u > cS(y_\alpha (1 - \delta) - y_-).$$

МЕХАНИЗМ ПЕРЕСТРАХОВАНИЯ

Механизм перестрахования о котором вкратце упоминалось в разделе 2, состоит в следующем. Страховщик при заключении договоров страхования принимает на себя финансовую ответственность за возможные риски и за это получает премию. Если для страховой компании крупные выплаты нежелательны, а это, как мы видели, весьма вероятно в агростраховании, то она может передать часть премии другой страховой компании – перестраховщику взамен на обязательство оплатить часть риска. Существуют разные схемы перестрахования. Мы здесь опишем одну из них, используя ранее введенные обозначения.

ПРОПОРЦИОНАЛЬНОЕ ПЕРЕСТРАХОВАНИЕ

В данном случае схема перестрахования следующая. Величина премии страховщика в год t с учетом нескольких страхуемых культур и многих страхователей – агрофирм равна

$$\pi(t) = \sum_{k,j} c_k S_{kj} \delta_k y_{\alpha kj},$$

а выплаты по риску равны

$$r(t) = \sum_{k,j} c_k S_{kj} (y_{\alpha kj} - y_{kj}(t))_+.$$

Часть риска $\beta r(t)$, $0 \leq \beta \leq 1$, выплачивает страховщик, а остальную $(1 - \beta)r(t)$ – перестраховщик. За это перестраховщик получает некоторую часть премии страховщика. Пусть рисковые запасы страховщика и перестраховщика равны θ и θ_1 соответственно. Как правило, $\theta_1 < \theta$, поскольку у перестраховщика меньше издержки.

Премия страховщика – то, что он получает от страхователей, равна $\pi(t) = Er(t)(1 + \theta)$, а премия перестраховщика $\pi_1(t) = (1 - \beta) Er(t)(1 + \theta_1)$. В результате перестрахования страховщик получает средний доход

$$\begin{aligned} E\tilde{D}_t &= \pi(t) - \pi_1(t) - \beta Er(t) = \\ &= Er(t)(\theta - \theta_1(1 - \beta)) < \theta Er(t) = ED_t. \end{aligned}$$

Эта и другие оценки, которые будут приведены в данном разделе, получены в [2] для случая одного хозяйства и одной

страхуемой культуры, но они справедливы и для общего случая, поскольку не используют конкретный вид получаемых премий.

Для классических видов страхования показано (см. [1, 2]), что при перестраховании вероятность неразорения повышается, т.е. повышается надежность функционирования страховой системы. Этот результат является естественным, и мы вправе предположить выполнение этого свойства и для агрострахования.

Средние доходы перестраховщика в рассматриваемом нами пропорциональном перестраховании равны

$$E\tilde{D} = Er(t)\theta_1(1 - \beta),$$

а суммарные доходы равны

$$E\tilde{D}_1 + E\tilde{D} = \theta Er(t) = ED_1,$$

и это естественно.

Таким образом, финансовые показатели страховой компании ухудшаются, но показатели надежности повышаются. В этом заключается смысл перестрахования – за счет некоторой потери прибыли повысить надежность функционирования системы.

6. Выводы

Целью данной работы была разработка системы математических моделей, с помощью которых можно построить процедуру согласования интересов участвующих в данной программе страхования всех трех заинтересованных сторон. Для этого были предложены математические модели, описывающие интересы всех заинтересованных участников – агрофирм, страховой компании и государства.

При некоторых предположениях были проведены исследования, показывающие, как зависят интересы всех участников от определяющих параметров конкретной программы агрострахования и выявившие основные экономические свойства страхования растениеводческих культур.

Был также исследован вопрос о необходимом и имеющемся информационном обеспечении агрострахования. На одном

примере было показано, что получение необходимых достаточно длинных рядов возможно только с помощью имитационного моделирования и рассмотрении различных гипотез предыстории и будущего. Это принципиальное отличие от классических видов страхования.

По-видимому, все несколько идеализированные аналитические исследования могут только помочь понять некоторые закономерности финансового состояния как страховой компании, так и агрофирмы, а реальные выводы необходимо делать, проводя эксперименты с помощью имитационного моделирования на некоторых искусственно спрогнозированных рядах урожайности. Эти случайные ряды урожайности должны учитывать скорректированную предыдущую статистику, возможные тренды, связанные с привлечением новых технологий, новых сортов и т.д.

Литература

1. БАУЭРС Н., ГЕРБЕР Х., ДЖОНС Д. и др. *Актuarная математика*. – М.: Янус-К, 2001. – 655 с.
2. БОЙКОВ А.В. *Страхование: актуарные расчеты и математические модели страхования*. – М.: ОРГСЕРВИС-2000, 2008. – 172 с.
3. ГЕРМЕЙЕР Ю.Б. *Введение в теорию исследования операций*. – М.: Наука, 1971. – 383 с.
4. ДОВБИЙ И.П. *Страхование агрорисков за рубежом // Банки. Лизинг. Страхование*. – 2008. – №6.
5. КИСЕЛЕВ В.Г. *Математические модели экономики страховой агрокомпании*. – М.: ВЦ РАН, 2013. – 30 с.
6. КИСЕЛЕВ В.Г. *Имитационная система мониторинга программ агрострахования*. – М.: ВЦ РАН, 2010. – 34 с.
7. КИСЕЛЕВ В.Г. *Информационная база региональной системы агрострахования // Труды 5-й международной конференции «Управление большими системами»*. – М.: ИПУ РАН, 2011.
8. КИСЕЛЕВ В.Г. *Актuarная математика в агростраховании*. – М.: ВЦ РАН, 2011. – 29 с.

9. КИСЕЛЕВ В.Г. *Системный анализ основных систем агро-страхования*. – М.: ВЦ РАН, 2012. – 28 с.
10. КИСЕЛЕВ В.Г. *Особенности информационного обеспечения системы страхования сельскохозяйственного производства* // Материалы международной научно-практической конференции «Математика и ее приложения. Экономическое прогнозирование: модели и методы». – Орел, 2011. – С. 236–240.
11. ПАВЛОВСКИЙ Ю.Н., БЕЛОТЕЛОВ Н.В., БРОДСКИЙ Ю.И. *Имитационное моделирование*. – М.: Академия, 2008. – 236 с.
12. *Страхование урожая сельскохозяйственных культур с государственной поддержкой*. – Практическое пособие по организации страхования сельхозкультур. – М.: МСХ РФ, ФГУФАГПССАП (Федеральное государственное учреждение «Федеральное агентство по государственной поддержке страхования в сфере агропромышленного производства» Министерства сельского хозяйства РФ).
13. *Современная практика сельскохозяйственного страхования*. // Агрострахование в России. – 2004. – Октябрь. – С. 29–42.
14. *Сельское хозяйство Тверской области. Статистический сборник*. – Тверь, 2002.

TO THE RATIONALE MULTIRISQUE REGIONAL PROGRAM OF CROP INSURANCE

Valeriy Kiselev, A.A. Dorodnicyn Computing Center of RAS, Moscow, Cand.Sc., assistant professor (vgkiselev@yandex.ru).

We describe the specific features of agricultural insurance. A mathematical model for the multi-risk insurance is developed. An agricultural firm mathematical model is developed and the effect of insurance is investigated depending on the degree of government participation. We also discuss the procedure of negotiation between participants of the insurance operation: agricultural firms, insurance companies and the government.

Keywords: insurance, eligibility criteria, information framework, probabilistic characteristics, simulation.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии Н.И. Базенковым.

*Поступила в редакцию 01.06.2015.
Опубликована 31.05.2016.*

УДК 338.45:338.51:338.53

ББК 65.05

СТОХАСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДВУСТОРОННЕЙ ОЛИГОПОЛИИ И ЦЕНОВОЕ УПРАВЛЕНИЕ КОНКУРЕНЦИЕЙ НА РЫНКАХ ВЫСОКОТЕХНОЛОГИЧНОЙ ПРОДУКЦИИ

Клочков В. В.¹, Селезнева И. Е.²

(ФГБУН Институт проблем управления РАН, Москва)

Рассматривается проблема стратегического управления конкуренцией на рынках высокотехнологичной промышленности. Учитывается, что жесткая политика ценообразования в долгосрочной перспективе может привести к уходу поставщиков с рынка, сокращению его конкурентности и росту закупочных цен. Для оптимизации ценовой политики заказчиков с учетом такого эффекта предложена модель двусторонней олигополии как замкнутой системы массового обслуживания.

Ключевые слова: конкуренция, стратегическое управление, ценообразование, двусторонняя олигополия, теория массового обслуживания.

1. Введение

1.1. ПРОБЛЕМЫ ЦЕНООБРАЗОВАНИЯ И КОНКУРЕНЦИИ НА РЫНКАХ ВЫСОКОТЕХНОЛОГИЧНОЙ ПРОДУКЦИИ

Снижение издержек на разработку и производство современной продукции стало одним из основных требований, предъявляемых к предприятиям наукоемких и высокотехнологичных отраслей российской промышленности, в том числе оборонно-промышленного комплекса (ОПК). Причины высокой себестои-

¹ Владислав Валерьевич Клочков, доктор экономических наук, кандидат технических наук, ведущий научный сотрудник (vlad_klochkov@mail.ru).

² Ирина Евгеньевна Селезнева, аспирант (ir.seleznewa2016@yandex.ru, Москва, ул. Профсоюзная, д. 65, тел. (495) 334-93-09).

мости продукции заключаются, в значительной степени, в технологическом отставании от мировых лидеров, причем имеются в виду как собственно производственные технологии, так и технологии организационные. Помимо технологических факторов, весьма значимы и факторы институциональные. Нередки случаи завышения цен комплектующих изделий, шантажа со стороны их поставщиков, особенно усугубляемого их монополизмом. В свою очередь, монопольное положение некоторых производителей стимулирует внедрение прогрессивных технологий, т.е. институциональные факторы удорожания продукции усиливают действие технологических факторов.

При этом, вопреки ожиданию, и высокий уровень рыночной власти государства как основного заказчика продукции ОПК не обеспечивает дешевизны закупок. Даже если этот рынок представляет собой монополию (что имеет место при отсутствии экспорта продукции), потенциальных поставщиков, как правило, тоже немного или также один. Таким образом, высокая рыночная власть покупателя уравнивается высокой рыночной властью поставщиков. То же самое наблюдается и на рынках комплектующих изделий. Многие рынки финальной продукции ОПК и комплектующих изделий к ней монополизированы, прежде всего, по причине деградации ряда производителей (которые в советский период конкурировали за право разработки и производства продукции соответствующего назначения) в течение почти 20-летнего кризисного периода. Таким образом, в рамках общепринятой классификации [2] рассматриваемые рынки если и представляют собой монополии, то ограниченные олигополией поставщиков или даже двусторонние (монополия-монополия), и рыночная власть заказчиков по меньшей мере уравнивается рыночной властью поставщиков.

Основным экономическим механизмом, стимулирующим сокращение издержек и снижение цен, традиционно принято считать конкуренцию. Однако конкуренция поставщиков далеко не «бесплатна» и для самих заказчиков. Заметим, что сама по себе возможность для заказчиков выбирать между конкурирующими исполнителями неявно подразумевает наличие у последних свободных мощностей (конструкторских или производственных), стоимость содержания которых, в той или иной фор-

ме, может быть перенесена на цену¹. Кроме того, пользоваться преимуществами конкуренции между производителями и поставщиками заказчиков следует дальновидно. Проводимая заказчиками в отношении конкурирующих поставщиков излишне жесткая политика ценообразования сокращает рентабельность разработки и производства приобретаемой продукции. Жесткая политика отбора победителей в конкуренции за заказы может способствовать в долгосрочной перспективе не снижению, а повышению затрат предприятий на разработку и производство наукоемкой и высокотехнологичной продукции, и, в конечном счете, цен на продукцию по следующим причинам.

Во-первых, специфика экономики высокотехнологичной промышленности такова, что в большинстве таких отраслей сильны как эффекты обучения, накопления опыта, так и эффекты забывания, деградации потенциала предприятий (кадрового, интеллектуального, организационного и др.) во время простоев. Например, в авиационной промышленности, как показывает эмпирический анализ эффекта забывания, за год простоя теряется порядка 30–40% накопленного опыта предприятий², см. [11]. В связи с этим, даже временные перерывы в загрузке производственных и конструкторских подразделений предприятий, проигравших в конкуренции, могут негативно отразиться на себестоимости выполнения будущих заказов, если таковые будут выиграны этими предприятиями. В свою очередь, это приведет и к росту цены, уплачиваемой заказчиками.

¹ Хотя, разумеется, нельзя утверждать, что повышение себестоимости однозначно влечет за собой и рост цен и наоборот, поскольку цена определяется как себестоимостью, так и рыночной властью участников торгов.

² Потеря накопленного опыта измеряется, как и сам опыт, в единицах накопленного выпуска, с ростом которого снижаются удельные производственные издержки благодаря эффекту обучения. И если, например, к началу вынужденного простоя предприятие уже выпустило 500 ед. продукции данного типа, сократив удельные производственные издержки в соответствии со своей кривой обучения, то годичный простой вызовет потерю 40% этого опыта, и удельные издержки вернуться к уровню, определяемому кривой обучения при накопленном выпуске, равном 60% от 500 ед., т.е. 300 ед., и т.д.

Во-вторых, проигрыш отдельных предприятий в конкуренции может приводить к их банкротству и полной ликвидации, и в дальнейшем заказчик уже не сможет воспользоваться преимуществами конкуренции исполнителей при размещении будущих заказов – выбор потенциальных исполнителей сузится. Причем, вопреки представлениям классической политэкономии о том, что ресурсы проигравших в конкуренции предприятий быстро и без потерь перейдут к более эффективным конкурентам, переход ресурсов предприятий, проигравших в конкуренции, к их более успешным соперникам не будет ни мгновенным, ни полным. Неизбежны безвозвратные потери потенциала предприятий, накопленного опыта и др. системных составляющих капитала.

Практический опыт показывает, что сокращение издержек и уровня цен на продукцию (особенно в стратегической перспективе) не обязательно достигается на пути усиления давления заказчика на конкурирующих поставщиков, тем более что во многих сегментах рынков финальной продукции и компонент в настоящее время конкурирующих поставщиков нет, и прежде придется их создать (при решающей поддержке государства), а в дальнейшем неясно, смогут ли они работать рентабельно в условиях жесткого давления заказчиков, нацеленного на всемерное снижение закупочных цен.

Руководители фирм-заказчиков комплектующих изделий и услуг, а также государственных органов-заказчиков финальной продукции ОПК, принимая реальные решения, как правило, учитывают приведенные выше соображения об ограниченной применимости конкурентных механизмов, понимают стратегическую недалководидность сиюминутной экономии на конкурирующих поставщиках. Даже в странах с либеральной рыночной экономикой, с конкурсными принципами распределения заказов на разработку и производство высокотехнологичной продукции перечисленные негативные последствия учитываются, что нередко существенно влияет на итоги соответствующих конкурсов. Характерный пример: согласно свидетельствам руководства компании Boeing, приведенным в книге [6], при выборе разработчика и поставщика тяжелых транспортных самолетов для ВВС США (впоследствии принятых на вооружение как

C-5A/B/M Galaxy) Министерство обороны США отдало предпочтение компании Lockheed, не имевшей опыта в постройке самолетов такого класса, с учетом сравнения загрузки производственных мощностей Boeing и Lockheed как военной, так и гражданской продукцией.

В дальнейшем, как правило, конкурсные процедуры в ОПК США предусматривали следующий способ разрешения противоречия между соображениями отбора наилучшего предложения и сохранения потенциальных конкурентов в будущем: победитель конкурса становится головным исполнителем заказа, но привлекает проигравших конкурентов в качестве субподрядчиков, передавая им часть работ по проекту. Так, в книге [1] показано, что в рамках проведенного в США конкурса на создание нового фронтового истребителя (ATF, Advanced Tactical Fighter) выбор между конкурирующими проектами YF-22 и YF-23 также выполнялся с учетом факторов загрузки мощностей конкурирующих фирм, сохранения их конструкторских компетенций и в целом – возможных потерь от проигрыша. По итогам конкурса победителем была признана группа компаний Lockheed/Boeing/General Dynamics с проектом, который сейчас известен как F-22, однако конкурирующие участники (представлявшие проект YF-23), компании Northrop и McDonnell Douglas, получили заказы на разработку и изготовление целого ряда агрегатов, модулей и систем.

Принятие решений в сфере ценообразования на высокотехнологичную продукцию должно опираться на количественные оценки, экономико-математические модели, учитывающие вышеприведенные качественные соображения. Однако «мейнстрим» экономической науки – как неоклассической, так и институциональной, которая фактически стала «мейнстримом» в последние десятилетия – в принципе не уделяет значительного внимания описанным выше «технологическим» аспектам конкуренции, сосредоточившись

➤ собственно на оптимальных стратегиях конкурентного поведения фирм (что характерно для ученых классической школы и их современных последователей) – как правило, статических, без учета вышеописанных динамических эффектов,

➤ а также на транзакциях и транзакционных издержках, асимметрии информации и т.п. институциональных аспектах (что характерно для институционалистов).

Остаются за рамками рассмотрения долговременные, стратегические последствия конкуренции. В результате такой позиции мейнстрима экономической науки, вышеперечисленные аргументы против недалековидного ужесточения конкурентных процедур нередко считаются «внеэкономическими» (социальными, политическими, психологическими и т.п.). Экономической науке следует больше внимания уделять таким вопросам: что происходит с предприятиями, проигравшими в конкуренции, с их руководством, работниками, основными фондами, а также нематериальными активами – в том числе накопленными знаниями, связями, корпоративной культурой? Каким образом можно более эффективно, с меньшими потерями задействовать эти ресурсы? Эти вопросы важны как с социальной точки зрения, так и с чисто экономической, прагматической, поскольку непосредственно касаются эффективности использования ресурсов, стимулов к победе в конкурентной борьбе и т.п.

1.2. ОБЗОР МОДЕЛЕЙ РЫНКОВ С НЕМНОГИМИ ПРОДАВЦАМИ И ПОКУПАТЕЛЯМИ

В высокотехнологичных и наукоемких отраслях промышленности наиболее распространенными являются такие рыночные структуры, как двусторонние олигополии либо ограниченные монополии и монополии (ограниченные, соответственно, олигополией спроса или предложения). Поскольку в таких отраслях, в силу технологических особенностей, работает небольшое количество предприятий, в том числе и в сфере производства компонент, таковы практически все рынки комплектующих изделий и компонент сложных систем. Так, в зарубежной авиационной промышленности несколько производителей авиадвигателей (Rolls-Royce, General Electric, Pratt&Whitney, SNECMA) поставляют свою продукцию нескольким же производителям самолетов (Boeing, Airbus, Bombardier, Embraer). В принципе, такие рынки часто встречаются и в прочих, средне- и низкотехнологичных отраслях промышленности, в топливно-

энергетическом комплексе, даже в индустрии потребительских товаров (оптовые рынки).

В то же время можно заметить, что, несмотря на значительное количество выполненных в зарубежной экономической науке работ, посвященных моделированию таких рынков, получено мало имеющих практический смысл (или хотя бы пригодных в дидактических целях) результатов. Существенно проще моделировать рыночные структуры, в которых либо среди покупателей, либо среди продавцов имеет место совершенная конкуренция, т.е. соответствующих агентов много и ни один из них в отдельности не влияет на рыночную конъюнктуру. Тогда можно представить поведение соответствующей стороны в виде однозначной функции параметров рыночной конъюнктуры (прежде всего цены) – функции спроса или предложения, сосредоточившись на оптимальных стратегиях противоположной стороны, где может быть один или немного игроков. Если же приходится учитывать стратегическое поведение игроков, как со стороны спроса, так и со стороны предложения, как правило, модели приходится строить на основе весьма сильных искусственных предпосылок.

Известный пример – модель двусторонней монополии Рубинштейна [18], иллюстрирующая процесс торгов единственным работодателем и монолитным профсоюзом о ставке зарплаты. Поскольку фактически стороны делят фиксированный выигрыш, стремясь установить ставку как можно ближе к предельно допустимой для партнера, объективно можно утверждать лишь, что исход такого дележа определяется соотношением переговорной силы сторон, но в рамках простейших моделей выразить ее не представляется возможным. В указанной модели автор привлекает искусственное допущение о постепенном сокращении суммарного выигрыша (впрочем, оно оправдано с содержательной точки зрения, так как затягивание переговоров приводит к потерям обеих сторон) и доказывает, что существует единственная пропорция такого дележа, которую первый игрок сразу должен предложить партнеру, а второй – немедленно принять. При этом назначение «первого и второго» участников переговоров остается произвольным (и при этом первый игрок

имеет преимущество), что дополнительно снижает предсказательную силу данной модели.

Обзор литературы, посвященной анализу рынков с немногими продавцами и покупателями (преимущественно зарубежной) позволяет выявить несколько кластеров моделей, примеры которых будут ниже прокомментированы. Как правило, ищется игровое равновесие при некоторых – зачастую очень жестких – допущениях о классах функций затрат производителей, а также о функциях спроса на продукцию заказчиков, являющихся промежуточным звеном в технологической цепочке. Часто даже количество игроков ограничено (как правило, 1 или 2 с каждой стороны). В работе [12] поставщики и заказчики попеременно делают предложения противоположной стороне, и доказано, что в такой игре существует единственное равновесие. Сами авторы рассматривают свою модель как расширение модели двусторонней монополии Рубинштейна [18] на случай нескольких продавцов и покупателей. В работе [13] предлагается альтернативный подход к моделированию стратегий фирм – управление долями рынка, и исследуется совпадение или отличие результатов от полученных при анализе классической игры Курно.

Можно также заметить, что подавляющее большинство зарубежных работ на данную тему нацелено на применение результатов (чаще качественных, несмотря на наличие математических моделей) в антимонопольной политике, в центре внимания их авторов – благосостояние потребителей и производителей (измеряемое их излишками), тогда как целью предлагаемой работы является долгосрочная оптимизация закупочной политики заказчиков, а также прогнозирование числа поставщиков и уровня их мощностей. Например, в работе [15], название которой предполагает всеобъемлющий характер исследования такой рыночной структуры, с самого начала авторы ограничиваются вопросами измерения рыночной власти (а также ее зависимости от характеристик рынков «выше» и «ниже» по технологической цепочке) как основания для применения антимонопольных мер. Те же узкие цели преследует работа [14], в которой, помимо прочего, учитывается и транспортировка товаров между заказчиками и поставщиками. Нередко авторы прямо указывают, что

механизм ценообразования не является предметом их рассмотрения и представляется как «черный ящик».

Несмотря на то, что в экономической литературе существует массив работ, посвященных моделированию рынков двусторонней олигополии, как правило, в этих работах не учитывается отраслевая специфика, тем более специфика высокотехнологичных отраслей, тогда как она важна не только в плане предпосылок моделей, но и в плане самих вопросов, которыми задаются исследователи. В частности, в известных нам моделях не учтена динамика изменения затрат, обусловленная эффектами обучения и забывания. Не учитывается структура и большая протяженность жизненного цикла продукции, периодический характер заказов на комплектующие изделия (периоды серийного производства перемежаются периодами разработки новых поколений продукции). Редко учитывается ограниченность производственных мощностей, необходимость их поддержания и стратегического планирования их уровня.

Важнейшим инструментом управления рынками продукции ОПК и развитием этого комплекса отраслей является политика ценообразования заказчика-монопсониста на соответствующую продукцию. В то же время в известных работах, посвященных ценообразованию на продукцию ОПК [3, 4], основное внимание уделяется методам калькуляции себестоимости (поскольку при государственных закупках продукции ОПК преобладает принцип ценообразования «затраты плюс»), а не рыночным факторам и процессам взаимодействия заказчиков и поставщиков. В основном, внимание уделяется повышению корректности и «справедливости» определения затрат разработчиков и производителей, причитающейся им премии за риск и т.п. В работе [7] авторы также исходят из того, что цена должна лежать между минимально приемлемой для поставщиков ценой, определяемой его затратами, и лимитной ценой для заказчиков, причем последняя определяется, исходя из различных оценок выгоды заказчика от приобретения данного продукта. Однако невозможно определить, какой именно будет равновесная цена на таком рынке, и оцениваются лишь границы «коридора» допустимых цен.

Таким образом, необходима разработка новой экономико-математической модели рынков высокотехнологичной финальной продукции ОПК, а также комплектующих изделий к ней, учитывающая перечисленные специфические особенности, а также дающая ответы на следующие вопросы:

➤ какую ценовую политику и политику распределения заказов следует проводить заказчику, стремящемуся в долгосрочной перспективе обеспечить минимальные закупочные затраты на приобретение заданного объема продукции заданного качества?

➤ какой уровень производственных мощностей следует поддерживать подрядчикам, исполнителям заказов?

Научно обоснованные ответы на эти вопросы важны для стратегического планирования развития ОПК и многих гражданских отраслей высокотехнологичной промышленности, как на государственном, так и на корпоративном уровнях. Рациональный уровень производственных мощностей определяет, какой объем фондообразующих продуктов может быть приобретен у станкостроительных предприятий и других производителей производственного оборудования, строительных организаций. То есть указанные вопросы актуальны не только для тех отраслей, в которых имеет место двусторонняя олигополия, но и для тех, кто создает их производственный, кадровый и др. потенциал.

2. Стохастическая модель двусторонней олигополии

Рассмотрим рынок ограниченной монополии (например, рынок вооружений и военной техники в стране, на котором работает несколько крупных конкурирующих поставщиков), или рынок двусторонней олигополии (если имеется в виду рынок покупных комплектующих изделий, ПКИ, предназначенных для нескольких системных интеграторов в сетевой структуре), в рамках следующего единого подхода. Пусть на рынке действует n конкурирующих производителей (подрядчиков, исполнителей заказов и т.п.) и m потенциальных покупателей (заказчиков, включая государственных, или системных интеграторов фи-

нальной продукции и т.п.). Для упрощения модели будем считать всех производителей однородными, как и заказчиков.

Цели данного исследования требуют учета жизненного цикла производственных проектов, а также динамики циклического характера взаимодействия заказчиков и исполнителей. Пусть исполнение одного контракта производителем в среднем длится $T_{контр}$ лет, и заказ выдается, по итогам конкурса, лишь одному исполнителю. Предположим, что каждый исполнитель может одновременно выполнять только один заказ. Пусть у заказчиков потребность в заключении очередного заказа наступает в среднем через $T_{пер}$ лет (нижний индекс выбран таким, поскольку это средняя продолжительность перерыва между заказами). Подчеркнем, что это – именно средние, ожидаемые продолжительности соответствующих периодов. Каждый из них длится несколько лет или даже десятилетий, в зависимости от отрасли, и заранее предсказать, когда начнется и закончится очередной период, невозможно, однако производителям необходимо планировать свою производственную деятельность, а заказчикам – закупочную политику. И при этом будущие длительности соответствующих периодов правомерно рассматривать как неопределенные.

Для математического описания таких ситуаций – выполнения заказов (заявок) случайной длительности, возникающих в случайные моменты времени, как правило, используются методы *теории массового обслуживания* [5]. На первый взгляд, наиболее близка методологически к данной работе статья [16], в которой рассматриваются марковские модели торгов, причем подчеркивается, что основным объектом приложения является рынок двусторонней олигополии. Однако и в этой статье в центре внимания – сам процесс установления связей между фирмами в сетевых организационных структурах, а не процессы ценообразования на рынке, выживания или закрытия предприятий, которые являются основным предметом интереса данной работы. Таким образом, предлагаемая нами модель основана на оригинальных исходных предпосылках о механизме торгов и ценообразования, а также призвана отвечать на иные вопросы, нежели модели, предложенные в работах [12, 13, 14, 15, 16] и т.п.

С содержательной точки зрения, вполне естественно считать, что заказчики, уже заключившие контракт, до его выполнения не испытывают потребности в заключении новых контрактов, т.е. каждый заказчик реализует в конкретный момент времени единственный проект. Таким образом, мы рассматриваем замкнутую *систему массового обслуживания* (СМО)¹, подробнее см., например, [5], в которой понятие средней периодичности выдачи заказов $T_{пер}$ относится лишь к «свободному» заказчику, не порождающему заказов. Можно сопоставить периодичностям событий «выдача заказа» и «исполнение заказа» в этой СМО средние длительности этапов жизненных циклов изделий (ЖЦИ): предпроизводственные этапы ЖЦИ соответствуют периодичности выдачи заказов системным интегратором производителем компонент $T_{пер}$, а этап производства – средней длительности исполнения контракта $T_{контр}$. На рынках финальной продукции ОПК периоды массовых заказов также перемежаются с перерывами – так, например, Государственная программа вооружений до 2020 г. (ГПВ-2020) предусматривает радикальное обновление вооружений российской армии (до 70%), но за пределами указанного срока прогнозируется и планируется некоторое снижение спроса на продукцию ОПК со стороны российского государства.

Количества исполнителей и заказчиков в общем случае могут соотноситься друг с другом любым образом. Поскольку заказчик, чей заказ уже исполняется, новых заказов не порождает, а каждый исполнитель может одновременно выполнять лишь один заказ, при $n > t$ рассматриваемый рынок заведомо является конкурентным и всегда имеются свободные производственные мощности для выполнения возникающих заказов. В других случаях это отнюдь не гарантировано.

Итак, рассматриваемая система может быть представлена как n -канальная система массового обслуживания, причем за-

¹ Примером замкнутой СМО можно считать машинный парк, обслуживаемый определенным числом ремонтных бригад. Обычно предполагается, что потребовать ремонта могут лишь исправные и работающие машины, а те, что уже требуют ремонта, до возвращения в строй не изнашиваются, не повреждаются и т.п.

мкнутая, с m источниками заказов. Интенсивность потока заказов от каждого потенциального заказчика (не связанного в данный момент контрактом) обозначим $\lambda = 1 \div T_{пер}$. Интенсивность выполнения заказов одним исполнителем обозначим $\mu = 1 \div T_{контр}$. Всего такая замкнутая СМО может находиться в одном из $(m + 1)$ возможных состояний. Номер состояния СМО $i = 0, 1, \dots, m$ соответствует числу заказчиков, нуждающихся в заключении контракта (т.е. готовых закупать, например, комплектующие изделия по завершении разработки нового продукта) – однако необязательно, что его заказ будет немедленно принят к исполнению.

Будем считать, что если какой-либо заказчик объявляет заказ и есть свободный исполнитель, заказ принимается. Если же $i > n$, заказ становится в очередь и принимается только по мере высвобождения занятых исполнителей. Поэтому в состоянии с произвольным номером i число занятых исполнителей составляет $n_{зан}(i) = \min(i; n)$, число свободных исполнителей, ожидающих заказа, равно $n_{своб}(i) = \max(n - i; 0)$, а число заказчиков, ожидающих в очереди, равно $l_{оч}(i) = \max(i - n; 0)$. Число же потенциальных заказчиков, которые в следующий момент, в принципе, могут выдать заказ, составляет $m_{потенц}(i) = \max(m - i; 0)$.

Интенсивности переходов между соседними состояниями обозначим, соответственно, $\lambda_{i, i+1}$ событий в год – для перехода из i -го состояния в состояние $(i + 1)$, и $\mu_{i+1, i}$ событий в год – для перехода из $(i + 1)$ -го состояния в состояние i . Если время пребывания заказчика в очереди не ограничено по содержательным условиям задачи, тогда

$$(1) \quad \lambda_{i, i+1} = \lambda \cdot m_{потенц}(i),$$

$$(2) \quad \mu_{i+1, i} = \mu \cdot n_{зан}(i+1),$$

где $m_{потенц}(i) = \max(m - i; 0)$ – число потенциальных заказчиков в состоянии с номером i ; $n_{зан}(i + 1) = \min(i + 1; n)$ – число исполнителей, занятых в состоянии с номером $(i + 1)$.

Наглядно граф состояний и переходов такой СМО изображен на рис. 1.

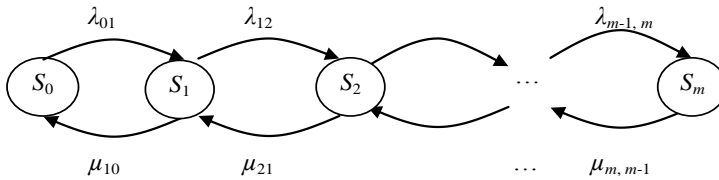


Рис. 1. Граф состояний и переходов рынка двусторонней олигополии как замкнутой системы массового обслуживания

Как известно из теории массового обслуживания [5], по прошествии времени, превышающего по порядку величины характерные периодичности событий «выдача заказа» и «исполнение заказа», в СМО установится так называемый *стационарный режим*, т.е. в каждом i -м состоянии она будет пребывать стабильную долю времени, соответствующую *финальной вероятности* этого состояния P_i , $i = 0, 1, \dots, m$. Причем финальные вероятности соседних состояний СМО удовлетворяют рекуррентным соотношениям, называемым *формулами Эрланга* [5]:

$$(3) \quad P_{i+1} = \frac{\lambda_{i,i+1}}{\mu_{i+1,i}} P_i,$$

где $i = 0, 1, \dots, m - 1$, а также условию нормировки:

$$(4) \quad \sum_{i=0}^m P_i = 1,$$

которое замыкает систему уравнений, состоящую из формул Эрланга для всех пар соседних состояний СМО. Решив ее, получаем значения $(m + 1)$ финальных вероятностей СМО $\{P_i\}$. Однако, в отличие от большинства задач теории массового обслуживания, в данной задаче представляют интерес не столько ожидаемые значения количества занятых и свободных исполнителей и заказчиков, сколько ожидаемая частота заключения контрактов в тех или иных условиях – конкуренции поставщиков, соперничества заказчиков за свободного поставщика, монополии поставщика и/или монополии заказчика. От структуры заключенных контрактов, т.е. долей контрактов, заключенных по

различным ценам, зависит и средняя по времени закупочная цена, уплачиваемая заказчиками, и доходы поставщиков.

Во-первых, новые контракты заключаются при всех переходах в состояния с большими номерами (переходах слева направо на рис. 1), вплоть до перехода из состояния $i = \min(m; n) - 1$ в состояние $i + 1 = \min(m; n)$ (т.е. пока остаются свободные исполнители и потенциальные заказчики). Простейшие модели СМО основаны на допущении о том, что все потоки событий являются пуассоновскими [5] и обладают, помимо прочих, свойством ординарности. То есть одновременно может произойти лишь одно событие. Поэтому даже если в данном состоянии с номером i число потенциальных заказчиков больше единицы: $m_{\text{потенц}}(i) > 1$, тем не менее считается, что заказ в данный момент времени выдает лишь один из них. Поэтому при таких переходах соперничества между заказчиками не возникает и контракты заключаются в условиях монополии.

Если при этом число свободных исполнителей, ожидающих заказа, также равно единице: $n_{\text{своб}}(i) = 1$, то монополия ограничена монополией, т.е. имеет место двусторонняя монополия, и рыночная власть партнеров может определяться соображениями, лежащими за пределами данной модели¹. Определенно можно сказать лишь, что цена будет ниже, чем в случае односторонней монополии поставщика, и выше, чем в случае односторонней монополии заказчика:

$$(5) \quad P_{\text{монополист}} < P_{\text{двусторонн}} < P_{\text{монопол}}$$

Если же свободных исполнителей более одного: $n_{\text{своб}}(i) > 1$, то монополия заказчика является неограниченной. Причем, даже небольшое количество конкурирующих поставщиков в рассматриваемых отраслях обеспечивает очень жесткую конкуренцию. В рамках данной модели предположим, что конкурирующие поставщики, во избежание простоя производственных мощностей, будут готовы исполнить заказ, даже если выручка

¹ Как уже было отмечено выше, известны модели двусторонних монополий, например, модель Рубинштейна [18], в которых равновесная цена определяется лишь с привлечением сильных дополнительных допущений о процессе торгов, интересах участников и т.п.

будет покрывать не полные издержки, а лишь переменные (как известно из экономической теории и легко доказывается, это – условие продолжения производства в краткосрочном периоде, см. [2]): $p_{\text{монопсон}} > AVC$, хотя возможно, что $p_{\text{монопсон}} < AC$. Эту цену устанавливает заказчик-монопсонист, и она будет одной из управляющих переменных в данной модели. Чем выше значение этой цены, задаваемой заказчиком, тем больше поставщиков смогут рентабельно работать на данном рынке.

В принципе, при наличии более детальной априорной информации можно построить зависимость $p_{\text{монопсон}} = p_{\text{монопсон}}(n_{\text{своб}})$, $(\partial p_{\text{монопсон}}) \div (\partial n_{\text{своб}}) < 0$, отражающую ужесточение конкуренции по мере увеличения числа свободных исполнителей, но в данной модели ограничимся более простым допущением, что все контракты, заключаемые при монопсонии заказчика и конкуренции исполнителей, заключаются по единой цене $p_{\text{монопсон}}$, не зависящей от числа свободных исполнителей, борющихся за заказ. Важна лишь суммарная интенсивность потока контрактов, заключенных в ситуации монопсонии заказчиков. Она составит

$$(6) \quad v_{\text{монопсон}} = \sum_{i=0}^{i=\min\{m-1; n-2\}} P_i \cdot \lambda_{i,i+1}.$$

В то же время контракты могут заключаться и при переходах в состояния с меньшими номерами (переходах справа налево на рис. 1). Это возможно в тех случаях, когда в исходном состоянии с номером i один или несколько заказчиков ожидали в очереди, пока освободится кто-либо из исполнителей: $l_{\text{оч}}(i) > 0$. И для обратных переходов выполняется свойство ординарности, поэтому в конкретный момент времени при переходе в предыдущее состояние с номером $(i - 1)$ высвобождается лишь один исполнитель и при наличии очереди заказчиков он заведомо является монополистом.

Если при этом число заказчиков, ожидающих в очереди, также равно единице: $l_{\text{оч}}(i) = 1$, то монопсония ограничена монополией, т.е. имеет место двусторонняя монополия, при которой, как уже сказано выше, цена определяется экзогенно (по отношению к предлагаемой здесь модели) и удовлетворяет двойному неравенству $p_{\text{монопсон}} < p_{\text{двусторонн}} < p_{\text{монопол}}$.

Если же в очереди ожидает более одного заказчика: $l_{оч}(i) > 1$, при переходе в состояние с номером $(i - 1)$ и высвобождении какого-либо исполнителя последний становится монополистом и ожидающие в очереди заказчики борются за возможность разместить свои заказы. При этом монополист установит цену $p_{монопол}$, которая должна быть не выше некоторой лимитной цены $p_{лимит}$, которая определяется условием безубыточности самого заказчика, если это – системный интегратор более сложных изделий¹, или его финансовыми возможностями, если это – покупатель финальной продукции: $p_{монопол} < p_{лимит}$. И в данном случае можно, при наличии априорной информации, построить зависимость монопольной цены от жесткости конкуренции заказчиков за право разместить заказ: $p_{монопол} = p_{монопол}(l_{оч})$, $(\partial p_{монопол}) \div (\partial l_{оч}) > 0$, но в данной модели ограничимся допущением о том, что при любом количестве заказчиков, ожидающих в очереди, монопольная цена останется постоянной и равной $p_{монопол}$. Тогда имеет значение лишь суммарная интенсивность потока контрактов, заключаемых в условиях монополии высвобождающегося поставщика. Ее можно оценить по формуле

$$(7) \quad v_{монопол} = \sum_{i=n+2}^{i=m} P_i \cdot \mu_{i,i-1}.$$

Подчеркнем, что в статье оптимизируется лишь стратегия покупателей, определяется оптимальная для них закупочная цена $p_{монопсон}$. При этом цена $p_{монопол}$, запрашиваемая продавцами (в те периоды, когда они являются монополистами), в предлагаемой модели считается фиксированной, экзогенной. Однако она также подлежит оптимизации – и в полном варианте модель яв-

¹ Строго говоря, однозначное определение лимитной цены комплектующих изделий к сложным финальным изделиям затруднено, поскольку отдельная деталь может, в принципе, подорожать и в несколько раз, и это слабо отразится на себестоимости изделия, однако если большая часть компонент подорожает даже на несколько процентов, изменение себестоимости уже может быть критическим. Это порождает «проблему безбилетника» на рынках комплектующих изделий, которая и является одним из главных факторов удорожания продукции российского ОПК.

ляется игровой, в этой игре следует искать седловую точку, т.е. равновесную пару цен $(p_{\text{монопол}}; p_{\text{монопсон}})$, от которой ни одной стороне не выгодно отклоняться в одностороннем порядке. В работе приводится лишь иллюстрация подхода к моделированию процесса взаимодействия поставщиков и заказчиков, но полностью задача поиска игрового равновесия не решается.

Суммарная интенсивность потока контрактов, заключенных в ситуации двусторонней монополии, составит

$$(8) \quad v_{\text{двусторонн}} = P_{n-1} \cdot \lambda_{n-1,n} + P_{n+1} \cdot \mu_{n+1,n}.$$

Совокупная частота заключения контрактов на рассматриваемом рынке складывается из трех ранее вычисленных слагаемых:

$$(9) \quad v_{\Sigma} = v_{\text{монопсон}} + v_{\text{монопол}} + v_{\text{двусторонн}}.$$

Средневзвешенная цена контракта составит

$$(10) \quad \bar{p} = \frac{P_{\text{монопсон}} \cdot v_{\text{монопсон}} + P_{\text{двусторонн}} \cdot v_{\text{двусторонн}} + P_{\text{монопол}} \cdot v_{\text{монопол}}}{v_{\Sigma}}.$$

Будем считать, что если контракт заключен по цене, определяемой рыночной конъюнктурой на момент заключения сделки, то в дальнейшем цена не пересматривается и контракт выполняется по данной цене.

На первый взгляд, в представленной здесь простейшей модели цены заключаемых контрактов и интенсивность конкуренции не зависят также и от организации отраслей-поставщиков и заказчиков, от форм собственности и контроля. Если $(\partial p_{\text{монопол}}) \div (\partial l_{\text{оч}}) = 0$ и $(\partial p_{\text{монопсон}}) \div (\partial n_{\text{своб}}) = 0$, цена конкретного контракта определяется лишь тем, что в избытке или в дефиците в данный момент – заказы или производственные мощности. В то же время, в принципе, ожидающий в очереди заказчик может и не соглашаться сразу на самую высокую цену $p_{\text{монопол}} = p_{\text{лимит}}$, а дожидаться высвобождения большего числа поставщиков. «Размен» между ценой контракта и временем ожидания можно оценить, если известны потери заказчика от ожидания поставок: пусть задержка поставки единицы продукции влечет за собой потери заказчика в размере r денежных единиц в единицу времени, тогда, если длительность периода ожидания составляет $t_{\text{ож}}$, а затем период поставок длится $t_{\text{пост}}$ (поставки идут по-

стоянным потоком q единиц за период), можно оценить максимально приемлемую цену, на которую заказчик согласился бы, чтобы избежать задержки.

$$(11) p * q * t_{пост} + r * q * t_{ож} = (p + \Delta p_{доп}) * q * t_{пост},$$

следовательно

$$(12) \Delta p_{доп} = r * \frac{t_{ож}}{t_{пост}}.$$

Аналогично и конкурирующие поставщики, ожидающие заказов, могут не соглашаться сразу на наименее выгодную для них цену $p_{монопсон} = AVC$, а дожидаться более благоприятной для себя конъюнктуры рынка. И в данном случае может быть оценен «размен» между временем ожидания и ценой контракта. Поскольку времена ожидания в конкретном состоянии СМО зависят от временных параметров модели и от числа поставщиков и заказчиков, зависимости $p_{монопол}(l_{оч})$ и $p_{монопсон}(n_{своб})$ можно построить, основываясь на описанных соображениях. Поскольку, в общем случае, фирмы прибегнут к ожиданию лишь тогда, когда это позволит им смягчить потери от наименее благоприятных цен, учет описанных стратегий эквивалентен повышению $p_{монопол}$ и понижению $p_{монопол}$ относительно их крайних значений. Эти изменения оказывают разнонаправленное влияние на средневзвешенную закупочную цену \bar{p} . Что окажет большее влияние – зависит от того, какая сторона более чувствительна к временным потерям. Чем выше такая уязвимость, тем реже фирмы будут прибегать к ожиданию более благоприятной рыночной конъюнктуры, и тем чаще будут соглашаться на предельно допустимые для себя цены (заметим, что учет временного фактора и потерь от ожидания лежит и в основе самой известной в данной области модели Рубинштейна [18]).

В то же время, ожидая высвобождения поставщиков, заказчик принимает во внимание и угрозу появления соперников, которые также будут готовы выдать заказ. Аналогичную угрозу вынуждены учитывать и свободные поставщики в ожидании заказов. Эти факторы повышают реалистичность именно простейшей модели, в которой цены на рынках чистых монополии и монопсонии не зависят от количества ожидающих заказа поставщиков или ожидающих в очереди заказчиков. Впрочем,

описанный риск появления соперников во время ожидания более благоприятной рыночной конъюнктуры существенно ослабевает, если все поставщики или, соответственно, заказчики контролируются одной фирмой. Таким образом, средневзвешенная закупочная цена в предложенной общей модели может зависеть от структуры собственности и контроля, и та сторона, которая контролируется централизованно, получает преимущество, большую рыночную власть, которая вполне может быть выражена и количественно.

3. Параметрические расчеты и разработка рекомендаций в сфере ценового управления конкуренцией на рынках

Интересно выявить такие ситуации, когда повышение закупочной цены в периоды конкуренции исполнителей (т.е. в ситуации, когда последние обладают малой рыночной властью, а заказчики могут диктовать им цену) повысит конкурентность рынка, привлечет новых производителей и позволит снизить среднюю закупочную цену ПКИ или финальных изделий. Если число заказчиков m считается фиксированным, то число исполнителей (подрядчиков) в предлагаемой модели – эндогенно и определяется как максимально возможное число конкурентов n_{max} , еще способных получать прибыль при данных ценах (т.е. выручка должна покрывать полные издержки или цена должна быть выше средних затрат):

$$(13) \bar{p}(n_{max}) > AC,$$

$$(14) \bar{p}(n_{max} + 1) < AC.$$

Заказчики могут управлять уровнем конкурентности рынка, определяя цену, по которой производятся закупки в ситуации конкуренции поставщиков, т.е. при односторонней монополии заказчика (в рамках данной модели – $p_{монополия}$). Особо подчеркнем, что в этой ситуации заказчик обладает большой рыночной властью и может установить сколь угодно низкую цену, покрывающую хотя бы средние переменные издержки. Последнее является условием продолжения производства в краткосрочном периоде, или условием минимизации убытков. Обоснуем это

условие более подробно. Прибыль исполнителя заказа в общем случае составляет

$$(15) \Pi(q) = R(q) - TC(q),$$

где q – объем выпуска; $\Pi(q)$ – прибыль; $R(q)$ – выручка; $TC(q)$ – полные издержки. Раскрывая выражения для выручки и полных затрат, получим следующее выражение:

$$(16) \Pi(q) = p * q - FC - VC(q),$$

где p – закупочная цена; FC – постоянные издержки; $VC(q)$ – переменные издержки.

Если цена продукции ниже средних издержек: $p < AC(q)$, где $AC(q)$ – средние затраты, то $p * q < TC(q)$, т.е. $p * q - TC(q) = \Pi(q) < 0$. Таким образом, поставщик при столь низких ценах несет убытки. Перед ним стоит задача минимизации убытков: $|\Pi| \rightarrow \min$. Следует ли ему при этом продолжать выпуск продукции и при каких условиях?

Поставщики, вне зависимости от того, выполняют ли они заказ в данный момент времени или нет, несут постоянные затраты. В отсутствие выпуска продукции прибыль поставщика заведомо отрицательна и равна по абсолютной величине постоянным затратам: $\Pi_1 = -FC$ (по крайней мере в краткосрочном периоде, пока предприятие не будет полностью ликвидировано). Если цена превышает хотя бы средние переменные затраты: $p > AVC(q)$, где $AVC(q)$ – средние переменные затраты, тогда $p * q > VC(q)$, т.е. $p * q - VC(q) > 0$. Обозначим $b = p * q - VC(q)$, т.е. $b > 0$. Тогда $\Pi_2 = -FC + b$, т.е. $|\Pi_2| < |\Pi_1|$. Таким образом, даже при убыточных ценах (ниже средних затрат) поставщики, стремясь минимизировать убытки, будут готовы выполнить заказ, цена которого превышает не средние полные затраты, а лишь средние переменные издержки. Если заказчик установит цену ниже, чем средние переменные издержки, то поставщикам будет невыгодно (даже в краткосрочной перспективе) выполнять данный заказ, поскольку их убыток лишь возрастет.

Если же в долгосрочной перспективе цены не обеспечивают прибыльности, поставщики будут уходить с рынка – до тех пор, пока средневзвешенная цена не станет достаточной для обеспечения рентабельности производства. Поэтому в долгосрочной

перспективе с ростом указанной цены расширяются и возможности привлечения в отрасль конкурирующих поставщиков: $(\partial n_{max}) \div (\partial p_{монопсон}) > 0$. В то же время благодаря усилению конкуренции все большая доля контрактов будет заключаться не по монопольной цене $p_{монопол}$ или цене двусторонней монополии-монопсонии $p_{двусторонн}$, а именно по той – относительно низкой и назначенной самими заказчиками – цене $p_{монопсон}$, которая соответствует конкуренции между исполнителями. Именно этот механизм долгосрочного, стратегического управления уровнем конкурентности рынка и ценами и призвана отразить предлагаемая модель. Остается определить, в каких условиях, в какой области параметров модели будет наблюдаться искомый эффект – снижение средней закупочной цены \bar{p} с ростом цены $p_{монопсон}$, предлагаемой самими заказчиками.

Рассмотрим следующий пример. Пусть $T_{контр} = 20$ лет; $T_{пер} = 5$ лет; среднегодовой объем выпуска в рамках одного контракта составляет $q = 100$ ед./год; средние переменные издержки равны $AVC = 1$ ден. ед./ед.; постоянные затраты одного поставщика равны $FC = 10$ ден. ед./год. То есть $AFC = 0,1$ ден. ед./ед. и $AC = 1,1$ ден. ед./ед. Таким образом, средние постоянные издержки составляют лишь около 9% средней себестоимости единицы продукции – но только для работающего предприятия, загруженного заказом. На первый взгляд, столь малая доля средних постоянных издержек в сумме средних затрат нереальна. Однако, например, в авиационной промышленности доля затрат на приобретение и содержание основных фондов не превышает 3–5% себестоимости продукции, тогда как материальные затраты и затраты на оплату труда составляют, соответственно, 45–70% и 18–45% (в зависимости от подотрасли и периода), подробнее см. [8, 9, 17]. Таким образом, средние постоянные издержки вполне могут быть на порядок ниже средних переменных затрат. Пусть цены на рынках чистой и двусторонней монополии составляют, соответственно, $p_{монопол} = 2$ ден. ед./ед. и $p_{двусторонн} = 1,5$ ден. ед./ед.

Рассмотрим случаи, когда заказчик – единственный ($m = 1$), и когда их несколько ($m = 3$ и $m = 5$). На рис. 2 представлены построенные в рамках данного примера и на основе изложенной в статье модели (с использованием формул (1)–(4), (6)–(10), (13)

и (14)) графики зависимости средневзвешенной закупочной цены от той цены $p_{\text{монополист}}$, которую предлагают заказчики, обладающие рыночной властью над поставщиками.

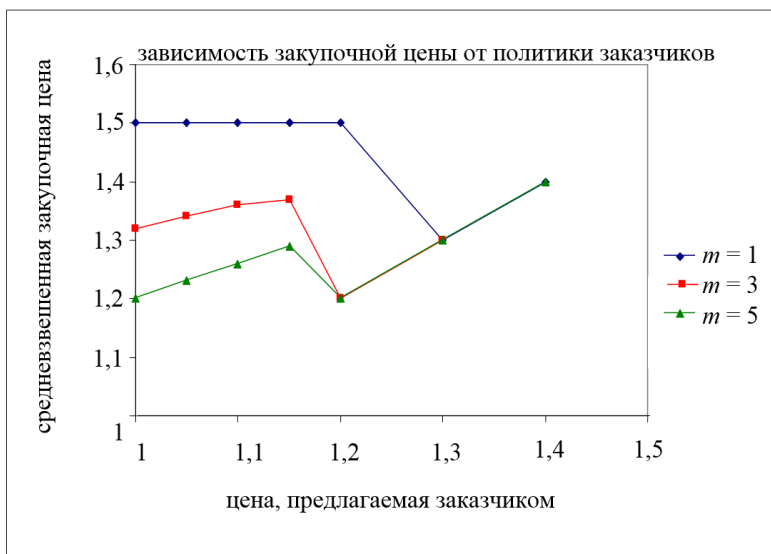


Рис. 2. Зависимость средней закупочной цены от цен, предлагаемых заказчиками конкурирующим поставщикам (пример 1)

Если цена, предлагаемая заказчиками в условиях монополии, близка к средним переменным издержкам ($p_{\text{монополист}} \approx AVC$), заведомо невозможно в долгосрочной перспективе существование конкурирующих поставщиков – поставщики могут выжить, лишь если периодически будут получать более высокую цену в ситуациях двусторонней монополии $p_{\text{двусторонн}}$ или чистой монополии $p_{\text{монопол}}$. В то же время, когда закупочная цена в условиях конкуренции поставщиков (т.е. параметр, управляемый заказчиками, обладающими рыночной властью) превысит некоторый порог, позволяющий привлечь в отрасль новых исполнителей, средняя закупочная цена может сокращаться резко по следующей причине. Если предлагаемая заказчиками цена $p_{\text{монополист}}$ позволяет рентабельно работать конкурирующим поставщикам в

количестве $n > m$, в любом состоянии СМО заведомо имеются свободные поставщики, и средняя закупочная цена становится тождественно равной цене, предлагаемой заказчиками: $\bar{p} \equiv p_{\text{монопсон}}$. С ростом последней, средняя закупочная цена возрастает неограниченно.

Таким образом, зависимость средней закупочной цены от цены, предлагаемой заказчиком-монопсонистом $\bar{p}(p_{\text{монопсон}})$, может иметь минимум при некоторой цене, превышающей минимально допустимую в краткосрочном периоде ($p_{\text{монопсон}} \geq AVC$). Заказчикам, даже если они – монопсонисты, следует назначать достаточно высокую закупочную цену на ПКИ или производственные услуги, чтобы привлекать конкурирующих поставщиков и подрядчиков (тем более что последним придется рисковать и заранее быть готовыми к тому, что существенную часть времени они проведут, не получая заказов, о чем подробнее будет сказано далее). Это позволит заказчикам снизить закупочные затраты, избежав монополизма поставщиков. На рис. 2 наглядно отображен выигрыш от применения предлагаемой в работе стратегии ценообразования, т.е. сокращение средних закупочных цен с ростом цены, предлагаемой заказчиком-монопсонистом.

Также анализ рис. 2 позволяет выявить, на первый взгляд, парадоксальный эффект: с ростом количества потенциальных заказчиков минимально достижимые закупочные цены сокращаются. На первый взгляд, рост числа заказчиков снижает их рыночную власть. Однако в данном случае «спрос рождает предложение»: чем больше потенциальных заказчиков, тем более устойчивый поток заказов они генерируют (напомним, что этот поток рассматривается как случайный), что позволяет рентабельно работать и большему количеству поставщиков, избегая монополизма.

Рис. 2 построен в ситуации, в которой доля постоянных затрат в общих издержках мала. В приведенном выше примере считается, что фондоотдача производства весьма высока, а доля затрат на содержание основных фондов составляет менее 10% полных затрат предприятий (при 100%-й загрузке мощностей). Так как переменные издержки составляют $VC = AVC * q = 100 \text{ ден. ед./год}$ и постоянные затраты одного

поставщика равны $FC = 10 \text{ ден. ед./год}$, следовательно общие затраты поставщика $TC = FC + VC = 10 + 100 = 110 \text{ ден. ед./год}$. То есть постоянные затраты (включающие в себя затраты на содержание производственных мощностей) составляют приблизительно 9% от полных затрат.

Как показано выше, для авиационной промышленности доля постоянных затрат в структуре себестоимости производства может быть и ниже данного порога. Однако, если рассматривать какие-либо иные, более фондоемкие отрасли ОПК, либо авиационную промышленность, но в период восстановления серийного производства, накопления опыта, то, в принципе, доля постоянных затрат может и возрасти. Пусть, при сохранении всех прочих параметров исходного примера, $FC = 20 \text{ ден. ед./год}$, т.е. производство стало вдвое более фондоемким. При этом содержание «избыточных» мощностей, обеспечивающее конкуренцию, станет более дорогостоящим. При этом, вероятно, уменьшатся возможности применения рассматриваемой здесь стратегии – снижения средних закупочных цен путем повышения цен, назначаемых заказчиками и стимулирования конкуренции между поставщиками. На рис. 3 (также построенном на основе изложенной в статье модели, с использованием формул (1)–(4), (6)–(10), (13) и (14)) изображены графики, аналогичные таковым на рис. 2, но полученные при вдвое большей фондоемкости производства.

Сравнение рис. 2 и 3 показывает, что единственному заказчику-монополисту уже не удастся подобрать такое значение закупочной цены, которое стимулировало бы вход в отрасль хотя бы второго поставщика, и он всегда будет вынужден взаимодействовать с единственным поставщиком-монополистом. Что касается рынков с большим количеством заказчиков, как отмечено выше, особенности систем массового обслуживания приводят к более благоприятным результатам для обеих сторон, и достижимые минимумы ожидаемых закупочных цен для 3 и, тем более, 5 заказчиков будут ниже. В то же время достижимые цены будут выше, чем в исходном примере, поскольку они, фактически, должны покрывать более высокие постоянные издержки. Относительный выигрыш от применения предлагаемой здесь

стратегии ценообразования будет ниже, чем в исходном примере.

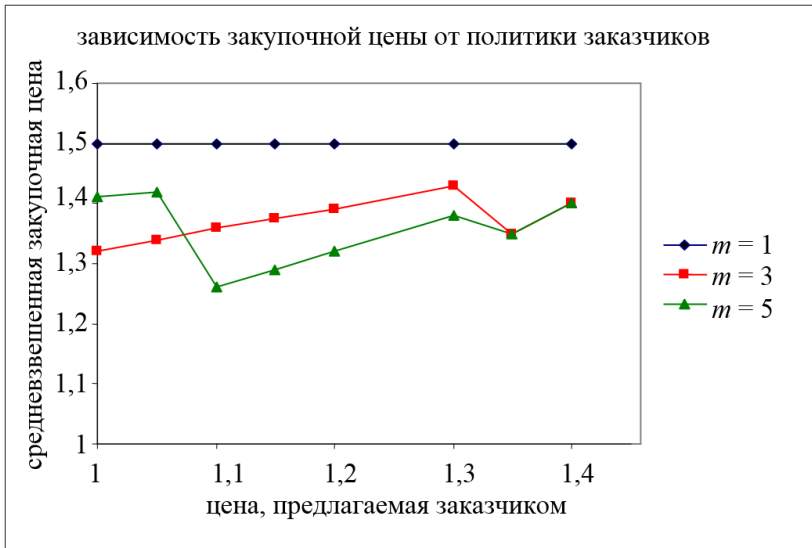


Рис. 3. Зависимость средней закупочной цены от цен, предлагаемых заказчиками конкурирующим поставщикам (пример 2)

Отметим, что расчетные примеры и построенные на их основе графики лишь иллюстрируют наглядно выявленные зависимости и закономерности, а не доказывают их. Касательно выявленного эффекта влияния фондоемкости на эффективность обсуждаемой стратегии ценообразования, его качественное обоснование таково. Выигрыш от предложения заказчиком-монополистом цены более высокой, чем минимально допустимая, обусловлен тем, что при более высокой закупочной цене в отрасли может рентабельно работать большее число конкурирующих поставщиков, и тогда заказчик реже (а то и никогда) будет вынужден иметь дело с поставщиком-монополистом. В то же время наличие конкурирующих поставщиков означает и поддержание избыточных производственных мощностей. И чем выше затраты на их поддержание, тем меньше, при прочих рав-

ных условиях, стимулов для входа в отрасль конкурирующих поставщиков. Соответственно, тем слабее конкуренция между ними и тем чаще возникает монополия.

4. Взаимосвязь конкуренции и уровня производственных мощностей предприятий-поставщиков

Прежде всего, конкуренция подразумевает прирост потребного объема ОПФ по сравнению с ситуацией жесткого равенства мощностей потребностям заказчиков. Этот прирост мощностей будет компенсирован снижением общих затрат на закупку продукции отрасли. Отчасти данный эффект родственен аналогичному приросту мощностей при внедрении принципов «быстро реагирующего производства» (QRM, Quick Response Manufacturing, подробнее см. [19, 20]).

В принципе, в данной модели вход новых поставщиков происходит свободно до тех пор, пока средневзвешенная закупочная цена позволяет им получать положительную прибыль. Соответственно, происходит пропорциональный прирост производственных мощностей и объема основных фондов. На рис. 4, наряду с показанными ранее на рис. 2 графиками зависимости средних закупочных цен от цен, предлагаемых заказчиками в период конкуренции поставщиков, по вспомогательной оси схематично отображаются уровни производственных мощностей предприятий-поставщиков, отнесенные к объемам заказов, т.е. относительная избыточность объема основных фондов, обусловленная конкуренцией поставщиков. Графики коэффициента избыточности производственных мощностей $\{(n_{max}) \div m\}$ снабжены такими же маркерами, что и графики средних закупочных цен при соответствующих количествах заказчиков m , однако изображаются не сплошными, а штриховыми линиями. Рис. 4 построен с использованием формул (1)–(4), (6)–(10), (13) и (14), строго на основе изложенной в статье модели.

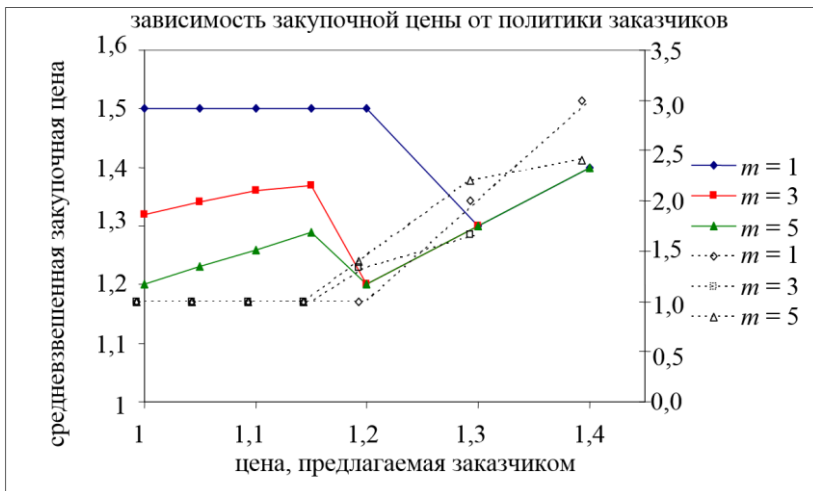


Рис. 4. Зависимость средней закупочной цены и относительной избыточности производственных мощностей от цен, предлагаемых заказчиками конкурирующим поставщикам (в рамках примера 1).

Сопоставляя эти графики со значениями средних закупочных цен, которые будут уплачивать заказчики, можно найти диапазоны вероятного прироста объема основных производственных фондов. Так, при $m = 1$ заказчику целесообразно предлагать поставщикам цену не менее $p_{\text{монопсон}} = 1,3$, но в то же время и не значительно выше этого порога. При этом в отрасли могут безубыточно работать $n_{\text{max}} = 2$ конкурирующих поставщика, т.е. $\{(n_{\text{max}}) \div m\} = 2$. Дальнейшее увеличение предлагаемой цены до уровня $p_{\text{монопсон}} = 1,4-1,5$ заказчику уже невыгодно.

Аналогично, при $m = 3$ заказчикам целесообразно предлагать поставщикам цену не менее $p_{\text{монопсон}} = 1,2$, но в то же время и не значительно выше этого порога. При этом в отрасли могут безубыточно работать $n_{\text{max}} = 4$ конкурирующих поставщика, т.е. $\{(n_{\text{max}}) \div m\} = 1,33$. Дальнейшее увеличение предлагаемой цены до уровня $p_{\text{монопсон}} = 1,3$, и, тем более, 1,4 заказчикам уже невыгодно. При $m = 5$ заказчикам целесообразно предлагать поставщикам цену не менее $p_{\text{монопсон}} = 1,2$, но в то же время и не значительно выше этого порога. При этом в отрасли могут безубыточно

точно работать $n_{max} = 7$ конкурирующих поставщиков, т.е. $\{(n_{max}) \div m\} = 1,4$. Дальнейшее увеличение предлагаемой цены хотя бы до уровня $p_{монопсон} = 1,3$ заказчикам уже категорически невыгодно.

Таким образом, вероятный прирост уровня производственных мощностей при переходе к закупочной политике, стимулирующей конкуренцию, варьирует от 100% при единственном заказчике до 30–40% при 3–5 заказчиках. Эти оценки получены именно в рассмотренном примере, по порядку величин параметров соответствующем авиационной промышленности. При этом, несмотря на значительную относительную избыточность производственных мощностей, заказчики получают выигрыш за счет конкуренции между поставщиками, поскольку в данной отрасли затраты на основные фонды не превышают нескольких процентов общих издержек производства.

5. Возможные расширения исходной модели двусторонней олигополии

Расчет показывает, что прибыль исполнителей резко падает с ростом их числа, особенно когда последнее начинает превышать число потенциальных заказчиков $n > m$. Это объясняется сменой характера взаимодействия игроков – монополизм исполнителей и даже конкуренция заказчиков за дефицит сменяется конкуренцией между исполнителями. Кроме того, привлечение в отрасль конкурирующих поставщиков приведет к резкому увеличению средней длительности периодов простоя их мощностей $T_{простой}$. Если рассматриваются проекты разработки и производства сложной наукоемкой продукции, а также компонент для нее, длительность периодов простоя может иметь порядок десятилетий (в соответствии с общей длительностью ЖЦИ). Так, в рассмотренном здесь числовом примере при единственном заказчике ($m = 1$), пока и поставщик оставался единственным ($n = 1$), простой имел место строго в то же время, что и перерыв в заказах у поставщика, т.е. $T_{простой} \equiv T_{пер} = 5 \text{ лет}$. Однако уже при появлении второго конкурирующего поставщика средняя длительность простоя мощностей составит $T_{простой} = 30 \text{ лет}$. Формально можно ввести в модель эффекты обучения и забыва-

ния, рассматривая средние переменные издержки как зависящие от средней длительности периодов исполнения заказов и простоя:

$$(17) \quad AVC = AVC(T_{\text{простой}}, T_{\text{контр}}),$$

$$(18) \quad \frac{\partial AVC}{\partial T_{\text{контр}}} < 0,$$

$$(19) \quad \frac{\partial AVC}{\partial T_{\text{простой}}} > 0.$$

Учет эффектов забывания приведет к тому, что оценка средних переменных издержек будет расти по мере снижения средней загрузки мощностей при входе в отрасль новых поставщиков, т.е., в конечном счете, $(\partial AVC) \div (\partial n) > 0$. В итоге привлечение конкурентов (которое снижает загрузку мощностей поставщиков и увеличивает длительность простоев) приведет к еще более резкому снижению прибыли поставщиков, чем в простейшей модели при $AVC = Const$. Это дополнительно ограничивает вход конкурирующих поставщиков в отрасль.

Однако на практике формальный учет эффекта забывания в данной модели вряд ли целесообразен. Столь длительные – порядка нескольких лет или даже десятилетий – периоды простоя приводят к деградации потенциала предприятия, которая не будет компенсирована относительно высокой ценой, получаемой победителем в конкуренции. В реальности риски таких потерь компенсируются благодаря диверсификации портфеля проектов крупных многопрофильных корпораций, а также специализированных производителей компонент. Это позволяет не только компенсировать длительное отсутствие потока доходов в конкретном сегменте, но и избегать деградации потенциала, перебрасывая временно свободные производственные мощности и персонал на проекты в других сегментах рынка, в которых данная компания получила заказ в настоящее время. В свою очередь и заказчики, как упоминалось выше, как правило, стараются не допускать полного отсутствия заказов во всех сегментах у своих поставщиков, даже в ущерб краткосрочным показателям закупочных затрат.

Также целесообразно проанализировать, как изменятся закупочные цены и потребные объемы основных производственных фондов, если поставщики будут специализироваться на потребностях определенных заказчиков. До сих пор продукция, рынок которой моделируется, считалась однородной, а поставщики (и, соответственно, их оборудование, технологии и т.п.) – универсальными. Поэтому рынок рассматривался как замкнутая СМО с m источниками заявок, каждый из которых порождал поток заявок интенсивностью λ . Если же теперь все поставщики будут специализироваться на продукции, предназначенной строго для данного заказчика, единый рынок распадается на m рынков, каждый из которых может быть представлен как замкнутая СМО с одним источником заявок. Можно предположить, что универсальность требовала более сложного и дорогостоящего оборудования, тогда как специализация позволит снизить соответствующие постоянные издержки до некоторого уровня $FC_{спец} < FC$. Как это отразится на рыночной конъюнктуре, на средневзвешенной закупочной цене, а также на равновесном уровне производственных мощностей и потребностях в основных производственных фондах?

Как показано выше, при прочих равных, в силу вероятностных свойств систем массового обслуживания, именно монополия (а такую структуру будут иметь сегментированные рынки со специализацией поставщиков на определенных заказчиках) получает наименьший выигрыш от применения предлагаемой здесь закупочной политики. При этом, если политика стимулирования конкуренции путем назначения достаточно высоких закупочных цен все-таки окажется выгодной, именно для монополии наблюдается наиболее резкий скачок уровня производственных мощностей – на 100%, т.е. вдвое.

6. Заключение

1. На олигополистическом рынке для поддержания низких закупочных затрат в долгосрочной перспективе заказчикам – даже в ситуации, когда они обладают большой рыночной властью над поставщиками – в определенных условиях выгодно предлагать более высокую (по сравнению с минимально прием-

лемой в краткосрочном периоде) цену, для поддержания наличия конкурирующих поставщиков. Как показали параметрические оценки, проведенные с использованием характерных для авиационной промышленности соотношений параметров модели, снижение средней закупочной цены может достигать 10–15%, по сравнению с «экономной» закупочной политикой. Напротив, стремление сэкономить на поставщиках может приводить к сокращению числа потенциальных конкурентов и усилению их рыночной власти.

В связи с выявленными эффектами, требуется пересмотр политики ценообразования как государственных заказчиков, так и корпораций – системных интеграторов.

2. Относительный прирост уровня производственных мощностей при переходе к предлагаемой закупочной и ценовой политике заказчиков, стимулирующей конкуренцию среди поставщиков, может варьировать (применительно к авиационной промышленности) от 30–40% до 100% – при наличии единственного поставщика-монопсониста. Тем не менее эта избыточность производственных мощностей будет компенсирована снижением средних закупочных цен благодаря конкуренции между поставщиками.

3. Выявлено, что, вопреки стереотипу, рост количества заказчиков может приводить к снижению средних закупочных цен (несмотря на снижение рыночной власти заказчика), поскольку большее их число может обеспечить более устойчивый поток нерегулярных, в общем случае, заказов и рентабельность большего числа конкурирующих поставщиков.

4. Противоречия между соображениями отбора наилучшего предложения в краткосрочной перспективе и сохранения потенциальных конкурентов в будущем смягчаются путем более полного использования потенциала проигравших поставщиков: победитель конкурса становится головным исполнителем заказа, но привлекает проигравших конкурентов в качестве субподрядчиков, передавая им часть работ по проекту.

Литература

1. ИЛЬИН В.Е., ЛЕВИН М.А. *Истрребители*. – М.: Виктория АСТ, 1996 – 288 с.
2. КЛОЧКОВ В.В. *Экономика: учебное пособие для вузов*. – М.: ИНФРА-М, 2012. – 684 с.
3. ЛАВРИНОВ Г.А., ХРУСТАЛЕВ Е.Ю. *Методы прогнозирования цен на продукцию военного назначения* // Проблемы прогнозирования. – 2006. – №1. – С. 87–96.
4. ПЕТРОВ Д.Н. *Методические подходы к оценке стоимости НИОКР при формировании гособоронзаказа* // Ежегодник ВНИИ ПВТИ. – 2010. – С. 97–108.
5. ТАХА Х. *Введение в исследование операций* / 6-е издание. – М.: Вильямс, 2001. – 916 с.
6. УДАЛОВ К.Г., КОМИССАРОВ Д.С. *Самолет Боинг-747*. – М.: АВИКО ПРЕСС, 1994 – 96 с.
7. УСТЮЖАНИНА Е.В., ДЕМЕНТЬЕВ В.Е., ЕВСЮКОВ С.Г. *Ценообразование на инновационную продукцию в условиях монополии* // Национальные интересы: приоритеты и безопасность. – 2014. – №37(274). – С. 2–15.
8. *Aircraft Engine and Engine Parts Manufacturing: 1997; 2002, 2007* // In: 1997; 2002, 2007 Economic Census. Manufacturing. Industry series. – U.S. Census Bureau, 1999; 2004, 2009.
9. *Aircraft Manufacturing* // In: Economic Census. Manufacturing. Industry series. – U.S. Census Bureau, 1999, 2004, 2009.
10. ALCHIAN A. *Reliability of Progress Curves in Airframe Production* // *Econometrica*. – 1963. – Vol. 31, No. 4. – P. 679–694.
11. BENKARD C.L. *A Dynamic Analysis of the Market for Wide-bodied Commercial Aircraft* // *Review of Economic Studies*. – Jun., 2004. – Vol. 71, No. 3. – P. 581–611.
12. COLLARD-WEXLER A., GOWRISANKARAN G., LEE R.S. *Bargaining in bilateral oligopoly: an alternating offers' representation of the "Nash-in-Nash solution"* // NBER working paper series. WP 20641. – 2014. – 47 p.
13. DICKSON A., HARTLEY R. *Bilateral oligopoly and quantity competition* // Glasgow: University of Strathclyde. Discussion papers on economics. – 2009. – No. 09-22. – 28 p.

14. FUNAKI Y., HOUBA H., MOTCHENKOVA E. *Market power in bilateral oligopoly markets with nonexpandable infrastructures* // Tinbergen Institute Discussion Papers 12-139/II and TILEC Discussion Paper Series 2012-041. – 2012. – 42 p.
15. HENDRICKS KENNETH and McAFEE R. PRESTON. *A Theory of Bilateral Oligopoly* // Economic Inquiry. – April 2010. – Vol. 48, Issue 2. – P. 391–414.
16. LEE R.S., FONG K. *Markov-perfect network formation. An applied framework for bilateral oligopoly and bargaining in buyer-seller networks.* – Электронный ресурс. – URL: <http://pages.stern.nyu.edu/~rslee/papers/MPNENetworkFormation.pdf> (дата обращения: 01.05.2016).
17. *Other Aircraft Parts and Auxiliary Equipment Manufacturing: 1997, 2002, 2007* // In: 1997; 2002, 2007 Economic Census. Manufacturing. Industry series. – U.S. Census Bureau, 1999; 2004, 2009.
18. RUBINSTEIN A. *Perfect Equilibrium in a Bargaining Model* // Econometrica. – 1982. – Vol. 50. – P. 97–109.
19. SURI RAJAN *Quick Response Manufacturing. A Companywide Approach to Reducing Lead Times.* – Productivity Press, 1998. – 574 p.
20. SURI RAJAN *It's About Time. The Competitive Advantage of Quick Response Manufacturing,* Productivity Press, 2010. – 228 p.

A STOCHASTIC MODEL OF BILATERAL OLIGOPOLY AND PRICE CONTROL OF HIGH-TECH PRODUCTS' MARKET COMPETITION

Vladislav Klochkov, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Doctor of Science (Moscow, Profsoyuznaya st., 65, vlad_klochkov@mail.ru).

Irina Selezneva, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, postgraduate (Moscow, Profsoyuznaya st., 65, (495)334-93-09, ir.seleznewa2016@yandex.ru).

Abstract: We consider the problem of competition strategic management in the markets of high-tech industry. It is considered that rigid pricing policy in the long term may lead to the withdrawal of suppliers from the market, to reduction of its competitiveness and growth in purchase prices. To optimize customers' pricing policy taking into account this effect, a model of bilateral oligopoly as a closed queuing system is proposed.

Keywords: competition, strategic management, pricing, bilateral oligopoly, queuing theory.

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии В.И. Зоркальцевым.*

*Поступила в редакцию 11.08.2015.
Опубликована 31.05.2016.*

УДК 004.652+004.89
ББК 32.973.26-018.2.75

ОРГАНИЗАЦИЯ ХРАНЕНИЯ НЕЙРО-НЕЧЕТКИХ МОДЕЛЕЙ В РЕЛЯЦИОННЫХ БАЗАХ ДАННЫХ¹

**Алексеев В. А.², Сараев П. В.³,
Домашнев П. А.⁴, Назаркин О. А.⁵**

*(Липецкий государственный технический университет,
Липецк)*

Рассматривается организация хранения нейро-нечетких моделей типа ANFIS в реляционных базах данных. Разработаны две схемы хранения: универсальная, основанная на представлении модели ANFIS как функции многих переменных в виде дерева вычисления, и специфическая, отражающая слоистую структуру модели. Показаны способы организации вычислений по моделям ANFIS для двух вариантов схемы хранения. Обоснована возможность вычислений по модели ANFIS стандартными средствами языка SQL.

Ключевые слова: нейро-нечеткая модель ANFIS, дерево вычислений, реляционные базы данных, математические вычисления на SQL.

¹ Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Администрации Липецкой области в рамках научного проекта №14-47-03611-р_центр_а.

² Владимир Александрович Алексеев, кандидат технических наук (alexeev48@gmail.com).

³ Павел Викторович Сараев, доктор технических наук, доцент (psaraev@yandex.ru).

⁴ Павел Алексеевич Домашнев, кандидат технических наук (pdomashnev@gmail.com)

⁵ Олег Александрович Назаркин, кандидат технических наук (nazarkino@mail.ru)

1. Введение

Нейро-нечеткие модели находят применение в системах моделирования и управления техническими, социальными и другими системами [1, 4, 7, 8]. Практическое применение нейро-нечетких моделей в таких системах требует разработки схемы их постоянного хранения. Однако работы по данной тематике сосредоточены в основном на применении класса нейро-нечетких моделей к решению конкретных прикладных задач [7] или синтезу методов обучения таких моделей [4]. Разрабатываемые программные комплексы включают базы моделей [7] или базы данных и знаний [4], однако схема и средства их хранения не раскрываются, а вычисления по моделям реализуются прикладным приложением. В [8] предлагается оригинальная методика автоматической генерации программного кода, реализующего вычисления по построенной модели, для встраивания его в прикладные приложения.

В связи с этим представляется актуальным исследование и разработка схемы постоянного хранения нейро-нечетких моделей в базе данных. При этом цели могут быть различными – от сохранения некоторого текущего состояния модели, которая затем будет улучшаться, и сопоставления нескольких моделей, построенных с применением различных алгоритмов, до многократного использования построенной модели для прогнозирования и управления техническими, социальными и другими системами. Общими требованиями к схеме постоянного хранения в системах моделирования является простота использования и эффективность вычислений по модели. Простота использования подразумевает минимальные трудозатраты на интеграцию нейро-нечетких моделей в прикладные системы. Эффективность вычислений, главным образом, связана с производительностью таких систем. В данной работе в качестве средства хранения рассматриваются реляционные базы данных, как наиболее доступные и распространенные системы, для которых имеются

хорошо отработанные стандартные средства доступа к данным и язык запросов SQL¹.

Целью данного исследования является разработка вариантов схемы данных для хранения нейро-нечетких моделей в реляционных базах данных и способов организации вычислений для хранимых в базе данных моделей.

2. Структура модели ANFIS

Нейро-нечеткая модель ANFIS реализует обобщенную схему вывода Такаги – Сугено – Канга (TSK) [1, 13, 14]. Пример структуры модели для двух входных переменных представлен на рис. 1.

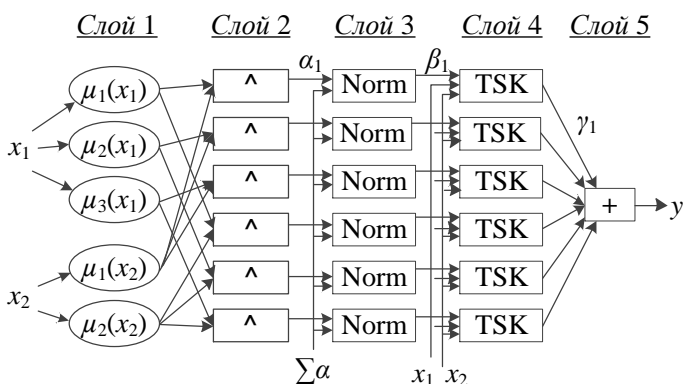


Рис. 1. Пример структуры нейро-нечеткой модели ANFIS для двух входных переменных

¹ Авторы, тем не менее, понимают преимущества, которые дает использование объектно-ориентированных СУБД для решения поставленных задач, и планируют рассмотреть особенности хранения нейро-нечетких моделей в таких СУБД и возможности организации вычислений на их основе.

Рассмотрим подробнее функции нейронов каждого уровня модели (N – количество правил в модели, M – количество входных переменных) [1, 13, 14]:

Слой 1. Выходы нейронов этого слоя представляют собой степени принадлежности входных значений нечетким множествам, ассоциированным с нейронами. Обычно используется гауссовская функция принадлежности:

$$(1) \quad \mu_k(x_j) = G(a_{jk}, b_{jk}, x_j) = \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x_j - a_{jk}}{b_{jk}}\right)^2\right],$$

где $j = 1, \dots, M$ – номер переменной; $k = 1, \dots, K_j$ – номер фаззификатора для переменной j ; a_{jk}, b_{jk} – множество параметров.

Слой 2. Каждый нейрон этого слоя вычисляет уровень истинности правила i по формуле

$$(2) \quad \alpha_i = \mu_{k[1,i]}(x_1) \wedge \dots \wedge \mu_{k[M,i]}(x_M),$$

где оператор $k[j, i]$ определяет номер используемого в правиле i фаззификатора переменной j , а для моделирования логической связки «И» может использоваться любая дифференцируемая t -норма, в частности, произведение, т.е.

$$(3) \quad \alpha_i = \prod_{j=1}^M \mu_{k[j,i]}(x_j).$$

Слой 3. Реализует нормализацию уровней истинности каждого правила по формуле

$$(4) \quad \beta_i = \frac{\alpha_i}{\sum_{i=1}^N \alpha_i}.$$

Слой 4. Выходы нейронов представляют произведение нормализованных значений уровней истинности на соответствующие выходы правил TSK:

$$(5) \quad \gamma_i = \beta_i \left(c_{i0} + \sum_{j=1}^M c_{ij} x_j \right).$$

Слой 5. Выполняет суммирование выходов нейронов предыдущего слоя, формируя выход модели ANFIS:

$$(6) \quad y = \sum_{i=1}^M \gamma_i .$$

С учетом (1)–(6) модель ANFIS реализует следующую функциональную зависимость:

$$(7) \quad F(x) = \frac{1}{\sum_{i=1}^N \left[\prod_{j=1}^M \mu_{k[j,i]}(x_j) \right]} \sum_{i=1}^N \left(\left[\prod_{j=1}^M \mu_{k[j,i]}(x_j) \right] \times \left[c_{i0} + \sum_{j=1}^M c_{ij} x_j \right] \right) .$$

Схема хранения модели ANFIS может основываться на универсальной модели данных для представления математических выражений или учитывать особенности слоистой структуры модели. Целью работы является разработка и исследование подходов к построению схемы хранения и организации вычислений по модели ANFIS.

3. Представление математических выражений в системах моделирования

Для математического выражения общего вида можно построить дерево вывода на основе трех множеств [2, 10]:

1. Множество операндов математического выражения, включающее константы и переменные L .

2. Множество операций математического выражения, куда входят все операторы и функции данного математического выражения A .

3. Множество узлов дерева вывода математического выражения, содержащее множество результатов промежуточных математических операций (вектор результатов промежуточных операций) N .

Частным случаем такого представления является вычисляемое выражение для скалярной функции n переменных. Так, например, функция трех переменных

$$(8) \quad f(x) = 5 \ln(x_1) + \frac{6e^{x_2}}{\sqrt{x_1 x_3}}$$

может быть представлена в виде дерева, структура которого приведена на рис. 2.

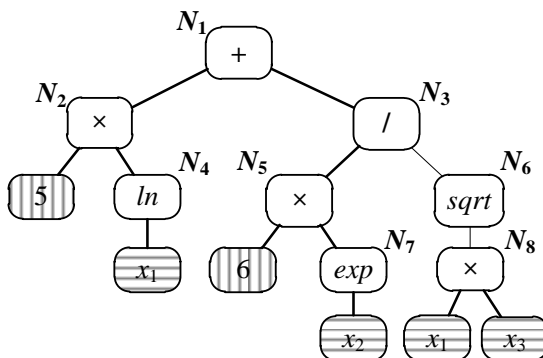


Рис. 2. Пример структуры дерева вычисления скалярной функции трех переменных

Для данного примера множество операндов:

$$L = \{5; 6; x_1; x_2; x_3\},$$

множество операций:

$$A = \{ "+"; "×"; "/"; "exp"; "ln"; "sqrt" \},$$

множество узлов:

$$N = \{N_1; N_2; N_3; N_4; N_5; N_6; N_7; N_8\}.$$

Множество A для данного примера включает унарные и бинарные элементарные функции, в результате выражение представляется в виде двоичного дерева. В общем случае могут использоваться функции нескольких (более двух) переменных, соответственно математическое выражение будет представлено N -арным деревом.

При условии, что численно определены значения операндов, вектор результатов промежуточных операций будет содержать численный результат выполнения каждой операции. В этом случае для расчета значения выражения достаточно применить алгоритм, аналогичный вычислению по обратной польской (постфиксной) записи [10], с сохранением результатов промежуточных вычислений в узлах дерева. Преимуществами

такого алгоритма вычисления является возможность проведения расчетов путем однократного просмотра дерева снизу вверх и поддержка операций с любым количеством операндов.

Системы моделирования, как правило, работают с известной структурой моделей, (например, линейной, полиномиальной, нейросетевой, нейро-нечеткой [3, 11, 13, 14]), и в каждом конкретном случае использование для расчетов универсального представления математических выражений является избыточным и может привести к снижению производительности вычислений. Однако в исследовательских системах, реализующих комплекс методов моделирования и, соответственно, работающих с моделями различной структуры, представляется целесообразным разработка единого, универсального механизма вычислений и хранения моделей.

В системах, ориентированных на вычисления по математическим моделям, целесообразно учесть типовые особенности этих моделей в структуре хранения и алгоритме вычисления для сокращения количества узлов и уровней в дереве вычисления.

Так, например, регрессионные модели представляются в виде [3]

$$(9) \quad f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 \varphi_1(x_1) + \alpha_2 \varphi_2(x_2) + \dots + \alpha_N \varphi_N(x_N),$$

где α_i , $i = 1, \dots, N$, – параметры модели; $\varphi_i(x_i)$, $i = 1, \dots, N$, – функции-преобразователи; x_i , $i = 1, \dots, N$, – независимые переменные. В частном случае регрессионная модель линейная, т.е. $\varphi_i(x_i) = x_i$. Для моделей такой структуры целесообразно включить в множество операций A параметризованные функции вида $\alpha_i \varphi_i(\cdot)$ и оператор суммирования N переменных Σ .

Для нейро-нечетких моделей типа ANFIS [1, 13, 14] с гауссовой функцией фаззификации в множество операций A целесообразно включить параметризованную функцию Гаусса (1), операторы суммирования и произведения N переменных Σ , Π .

Вообще использование параметризованных функций во многих случаях позволяет сократить количество уровней дерева вычислений, не нарушая общего принципа построения дерева. Сложность здесь представляет адекватное формирование множества параметризованных операций с учетом структуры ис-

пользуемых моделей. В качестве общей рекомендации можно предложить использование параметра-мультипликатора для всех операций, что позволяет сократить количество уровней дерева выражений как в регрессионных моделях (9), так и в нейро-нечетких (7) за счет правил TSK (5).

Расширим понятие дерева вывода выражения [2, 10], добавив в него множество параметров P , связанных с соответствующими элементами множества операций A . С позиций вычислений по математическим моделям представляется логичным относить параметры к тому же уровню, что и соответствующий параметризованный оператор выражения, так как значения параметров в модели не являются независимыми, не имеют самостоятельного смысла и не могут существовать вне контекста этого оператора. На рис. 3 представлена модифицированная структура дерева вычисления для выражения (8) с применением параметров-мультипликаторов. Как видно, сократилось количество узлов дерева вывода с 8 до 6. В то же время общее количество уровней для данного дерева вычислений осталось неизменным (сократилось лишь для некоторых ветвей дерева).

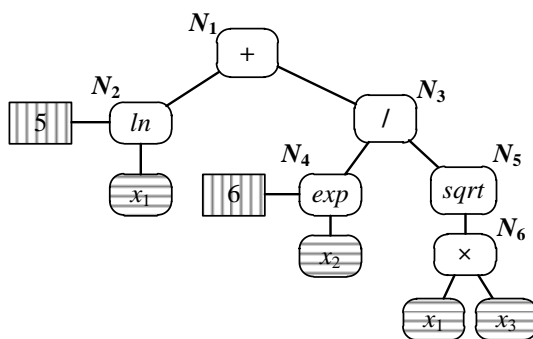


Рис. 3. Модифицированная структура дерева вычисления с применением параметров-мультипликаторов

4. Универсальная схема хранения математических выражений в реляционной БД

Хранение дерева математического выражения может быть осуществлено в базе данных под управлением любой современной СУБД. Концептуальная модель данных [5] для хранения математического выражения может быть представлена следующей диаграммой сущность–связь (Entity-Relationship, ER) в нотации Crow's Foot [5]:



Рис. 4. ER-диаграмма концептуальной модели данных для хранения математических выражений

В представленной модели данных количество параметров для каждого узла дерева вычислений принято равным не более двух (в зависимости от используемой функции), что в большинстве случаев достаточно. При необходимости количество параметров может быть увеличено без принципиального изменения

модели данных – за счет добавления нужного количества атрибутов для сущности «элемент выражения» или введения дополнительной сущности «параметр». Атрибут «значение параметра 1» также используется для хранения значений операндов-констант выражения.

Данная работа направлена на разработку схемы хранения моделей в реляционной базе данных, поэтому приведем диаграмму логической реляционной модели данных, основываясь на правилах преобразования концептуальной модели [5], без привязки к какой-либо конкретной реляционной СУБД:

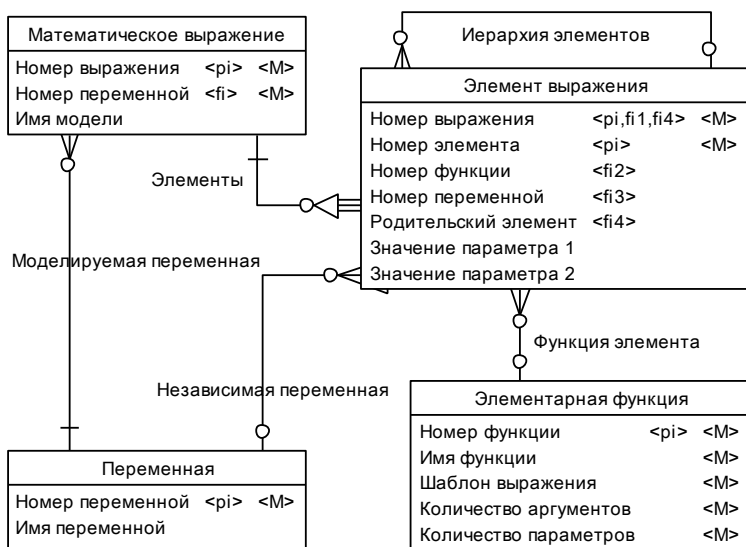


Рис. 5. Диаграмма логической модели данных для хранения математических выражений

Таким образом, четырех реляционных отношений достаточно, чтобы хранить дерево вычислений для модели, представленной скалярной функцией n переменных. Так, например, функция (8) может быть представлена в реляционной БД в виде следующих таблиц (таблицы 1–4):

Таблица 1. Пример содержания таблицы «Переменная»

<u>Номер переменной</u>	Имя переменной
1	x1
2	x2
3	x3
4	y1

Таблица 2. Пример содержания таблицы «Математическое выражение»

<u>Номер выражения</u>	Имя модели	Моделируемая переменная
1	F(x)	4

Таблица 3. Пример содержания таблицы «Элементарная функция»

<u>Номер функции</u>	Имя функции	Шаблон выражения	Количество аргументов	Количество параметров
1	x	$\{p0\} \times \{x0\}$	1	1
2	+	$\{p0\} \times (\{x0\} + \{x1\})$	2	1
3	*	$\{p0\} \times (\{x0\}) \times (\{x1\})$	2	1
4	/	$\{p0\} \times (\{x0\}) / (\{x1\})$	2	1
5	ln(x)	$\{p0\} \times \ln(\{x0\})$	1	1
6	sqrt(x)	$\{p0\} \times \sqrt{\{x0\}}$	1	1
7	exp(x)	$\{p0\} \times \exp(\{x0\})$	1	1
8	1 / x	$\{p0\} / (\{x0\})$	1	1

Таблица 4. Пример содержания таблицы «Элемент выражения»

Номер элемента	Номер выражения	Родительский элемент	Номер функции (имя функции ¹)	Номер переменной	Значение параметра 1
1	1	–	2 (+)	–	1
2	1	1	5 (ln(x))	1	5
3	1	1	4 (/)	–	6
4	1	3	7 (exp(x))	2	1
5	1	3	6 (sqrt(x))	–	1
6	1	5	3 (*)	–	1
7	1	6	–	3	1
8	1	6	–	1	1

Представленная модель данных позволяет хранить в реляционной БД широкий класс математических моделей, представимых в виде скалярной функции n переменных, включая нейро-нечеткие модели типа ANFIS.

5. Организация вычислений по модели, представленной в универсальной схеме хранения

Вычисления по математическому выражению, сохраненному в представленной выше схеме (рис. 5), могут быть проведены:

а) средствами хранимых процедур, реализованных в СУБД (например, на языке PL/SQL при хранении моделей в БД под управлением Oracle);

б) в прикладном приложении, реализованном на языке высокого уровня.

¹ Имя функции указывается только для удобства восприятия

Первый способ требует детального рассмотрения проблем, связанных с математическими вычислениями в СУБД средствами процедурных расширений языка SQL (таких как Oracle PL/SQL или Microsoft Transact-SQL), в частности полноты языков в части реализованных математических функций, производительности вычислений, и выходит за рамки данной статьи.

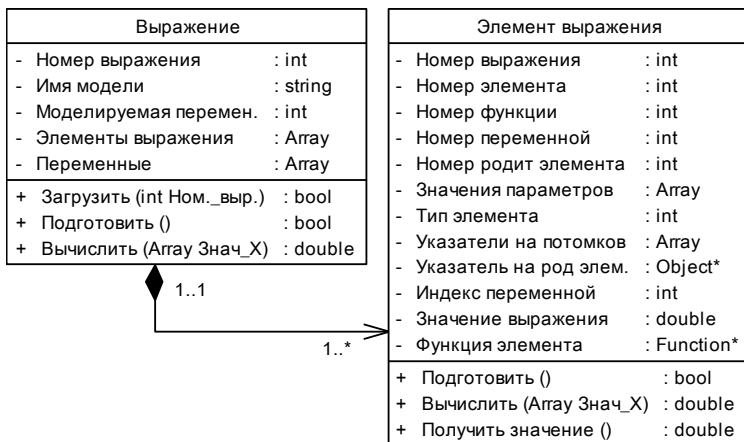


Рис. 6. Структура классов для вычисления математического выражения

При обработке математического выражения средствами объектно-ориентированных языков программирования достаточно реализовать 2 класса, состав атрибутов и операций которых в нотации UML представлен на рис. 6. При этом должно быть обеспечено однозначное соответствие номеров элементарных функций в базе данных и их реализаций в коде программы.

Применение иерархического дерева для вычисления выражений требует его обход «снизу вверх», когда при посещении очередного узла все его потомки оказываются пройденными. Поэтому массив элементов выражения индексируется так, что потомки всегда имеют больший номер по сравнению с рассматриваемым элементом. Тогда остается вычислить значение вложенного выражения снизу вверх по упорядоченным значениям элементов массива, сохраняя эти значения в поле «Значение

выражения». Следует отметить, что индексирование и формирование массивов указателей на потомков производится один раз после загрузки выражения и его элементов из базы данных.

Недостаток данного подхода к вычислению математического выражения состоит в том, что процесс организован в режиме «интерпретатора»: считанные номера элементарных функций сопоставляются с известными вариантами, и осуществляется вызов соответствующей программной реализации функции. Повысить эффективность вычислений можно за счет предварительной обработки номеров элементарных функций с сохранением в элементах выражения адресов программной реализации данных функций. Предварительная обработка может осуществляться один раз при подготовке выражения к вычислениям.

При этом набор реализуемых «элементарных» функций будет расширяемым и может быть реализован в виде «словаря», устанавливающего соответствие между идентификатором функции (совпадающем с номером функции в базе данных) и ее программной реализацией, например:

```
1 //бинарный оператор суммирования с параметром
2 private double FunctionAdd(double[] _PVals, double[] _XVals)
3 { return _PVals[0]*(_XVals[0]+_XVals[1]); }
4 //бинарный оператор умножения с параметром
5 private double FunctionMultiply(double[] _PVals, double[]
6   _XVals)
7 { return _PVals[0]*(_XVals[0]*_XVals[1]); }
8 private delegate double BasicFunction (
9   double _PVals[],           //значения параметров
10  double _XVals[] );         //значения переменных
11 private Dictionary<int, BasicFunction> ExpressionOperations;
12 ExpressionOperations = new Dictionary<int, BasicFunction>
13 { { 2, FunctionAdd }, } ;
14 { 3, FunctionMultiply
```

*Листинг 1. Вариант реализации «словаря»
элементарных функций на языке C#*

Возможный алгоритм загрузки выражения из реляционной базы данных может быть представлен следующим образом:

Алгоритм 1. Загрузка математического выражения из реляционной базы данных

- 1: Получить информацию о требуемом математическом выражении M из базы данных:
SELECT * FROM [Математическое выражение]
WHERE [Номер выражения] = M
 - 2: Установить значения переменных объекта «Выражение»: «Номер выражения», «Имя модели», «Моделируемая переменная».
 - 3: Получить информацию о независимых переменных, используемых в выражении M :
SELECT DISTINCT [Номер переменной]
FROM [Элемент выражения]
WHERE [Номер выражения] = M
AND [Номер переменной] IS NOT NULL
ORDER BY [Номер переменной]
 - 4: Занести номера независимых переменных в массив «Переменные» объекта «Выражение».
 - 5: Получить информацию об элементах выражения из базы данных в порядке возрастания их идентификаторов:
SELECT * FROM [Элемент выражения]
WHERE [Номер выражения] = M
ORDER BY [Номер элемента]
 - 6: Для каждой строки результирующей таблицы:
 - 7: Создать объект «Элемент выражения» A , установив значения переменных объекта A равными значениям соответствующих атрибутов из базы данных: номер выражения, номер элемента, номер функции, номер переменной, номер родительского элемента, значения параметров.
 - 8: Добавить элемент A в массив элементов выражения.
-

Возможный алгоритм подготовки загруженного выражения B к вычислениям:

Алгоритм 2. Подготовка загруженного выражения B к вычислениям

- 1: Для каждого элемента A из массива B . [Элементы выражения], начиная с первого, выполнить:
 - 2: Если A . [Номер функции] > 0 , то:
 - 3: Установить указатель A . [Функция элемента] из словаря функций по идентификатору A . [Номер функции].
 - 4: Если A . [Номер переменной] > 0 , то:
 - 5: Занести в A . [Индекс переменной] индекс переменной A . [Номер переменной] в массиве B . [Переменные].
 - 6: Просмотреть каждый последующий элемент C из массива B . [Элементы выражения]:
 - 7: Если C . [Номер родит элемента] = A . [Номер элемента], то:
 - 8: C . [Указатель на родит элемент] := A
 - 9: Добавить C в массив A . [Указатели на потомков].
 - 10: Если есть элементы в A . [Указатели на потомков], то:
 - 11: A . [Тип элемента] := «промежуточный узел»
 - 12: Иначе если Если A . [Номер переменной] > 0 , то:
 - 13: A . [Тип элемента] := «операнд-переменная»
 - 14: Иначе:
 - 15: A . [Тип элемента] := «операнд-константа»
 - 16: A . [Значение выражения] := A . [Значения параметров][0]
-

Нерекурсивный алгоритм вычисления по подготовленному выражению B может быть реализован таким образом:

Алгоритм 3. Вычисление значения выражения B

- 1: Сформировать массив значений X независимых переменных, установив значения элементов массива X по исходным данным на основании массива B . [Переменные].
-

Окончание алгоритма 3

- 2: Для каждого элемента A из массива B . [Элементы выражения], начиная с последнего, выполнить функцию Calculate(X):
 - 3: Если A . [Тип элемента] = «операнд-константа», то значение элемента уже содержится в A . [Значение выражения].
 - 4: Если A . [Тип элемента] = «операнд-переменная», то:
 - 5: Если задана функция-преобразователь, то:
 - 6: В массив Z [] занести значение $X[A$. [Индекс переменной]]
 - 7: A . [Значение выражения] := A . [Функция элемента](Значения параметров, Z)
 - 8: иначе:
 - 9: A . [Значение выражения] := $X[A$. [Индекс переменной]]
 - 10: Если A . [Тип элемента] = «промежуточный узел», то:
 - 11: Для каждого потомка элемента A из массива [Указатели на потомков] занести значение выражения в массив Z [].
 - 12: A . [Значение выражения] := A . [Функция элемента](Значения параметров, Z)
 - 13: Значение выражения для 1-го элемента выражения B содержит результат расчетов.
-

6. Представление модели ANFIS в универсальной схеме хранения

Универсальная реляционная схема хранения математических выражений может быть применена для хранения нейронечетких моделей типа ANFIS, если рассмотреть данную модель в виде (7).

Для уменьшения количества уровней в дереве выражения целесообразно введение в состав элементарных функций следующих операторов:

1. Суммирования N переменных Σ .
2. Вычисления произведения N переменных Π .

3. Функция Гаусса (1).

Дерево вычислений для функциональной зависимости (7), реализующей модель типа ANFIS с N правилами и M входными переменными, может быть представлено следующим образом:

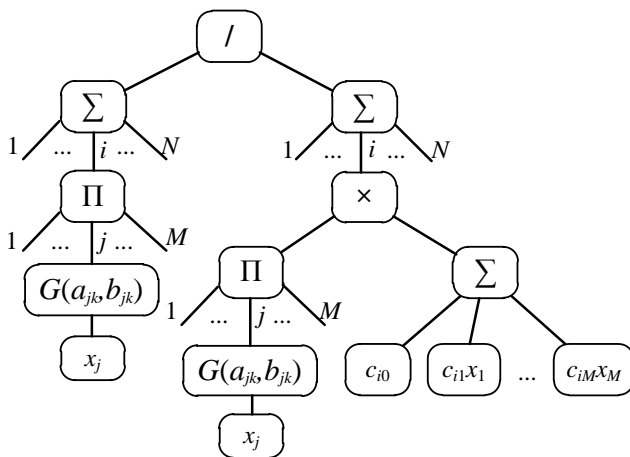


Рис. 7. Структура дерева вычислений для модели ANFIS

Для исключения дублирования вычислений при нормировании (третий слой ANFIS) представляется целесообразным обобщить схему представления, преобразовав ее к ориентированному графу общего вида (рис. 8). Аналогично могут быть исключены повторные вычисления выходов нейронов-фаззификаторов первого слоя, если они подаются на вход нескольких правил (нейронов второго слоя).

Изменение схемы представления не требует модификации алгоритма вычисления выражения, так как в нем гарантируется, что к моменту вычисления элемента слоя i все вычисления в слоях $k > i$ уже проведены, а промежуточные результаты вычислений – известны. Однако требуется внести изменения в схему хранения. На концептуальной модели (рис. 4) связь «Иерархия элементов» должна быть преобразована к типу «многие-многим», что приведет к созданию дополнительного реляционного отношения в логической модели (рис. 5). Соответствующим

щие изменения должны быть внесены и в структуру классов, представленную на рис. 6.

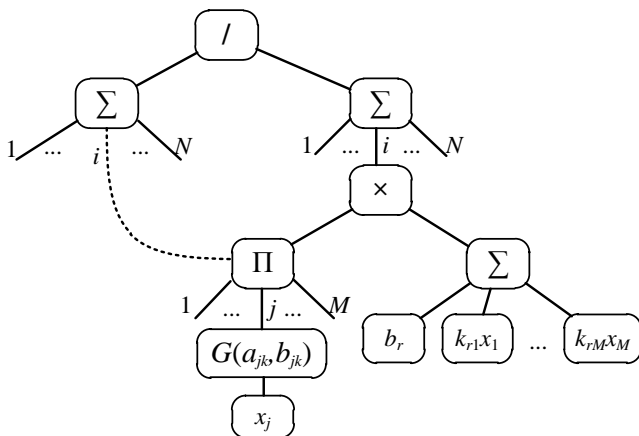


Рис. 8. Обобщенная структура графа вычислений для модели ANFIS

7. Схема данных для хранения ANFIS

Альтернативный вариант хранения модели ANFIS предполагает разработку специфической схемы данных. ER-диаграмма возможного варианта концептуальной модели данных [5] представлена на рис. 9.

Эта схема позволяет хранить нейро-нечеткие модели типа ANFIS для заданной выходной переменной и множества входных переменных. Модель может включать произвольное количество правил и нейронов-фаззификаторов в первом слое. Количество нейронов-фаззификаторов может быть одинаковым или различным для отдельных переменных.

Полагая, что используется гауссова функция принадлежности, в схеме данных для нейронов первого слоя предусмотрено по 2 значения параметров. При использовании другой функции принадлежности количество параметров может быть скорректировано.

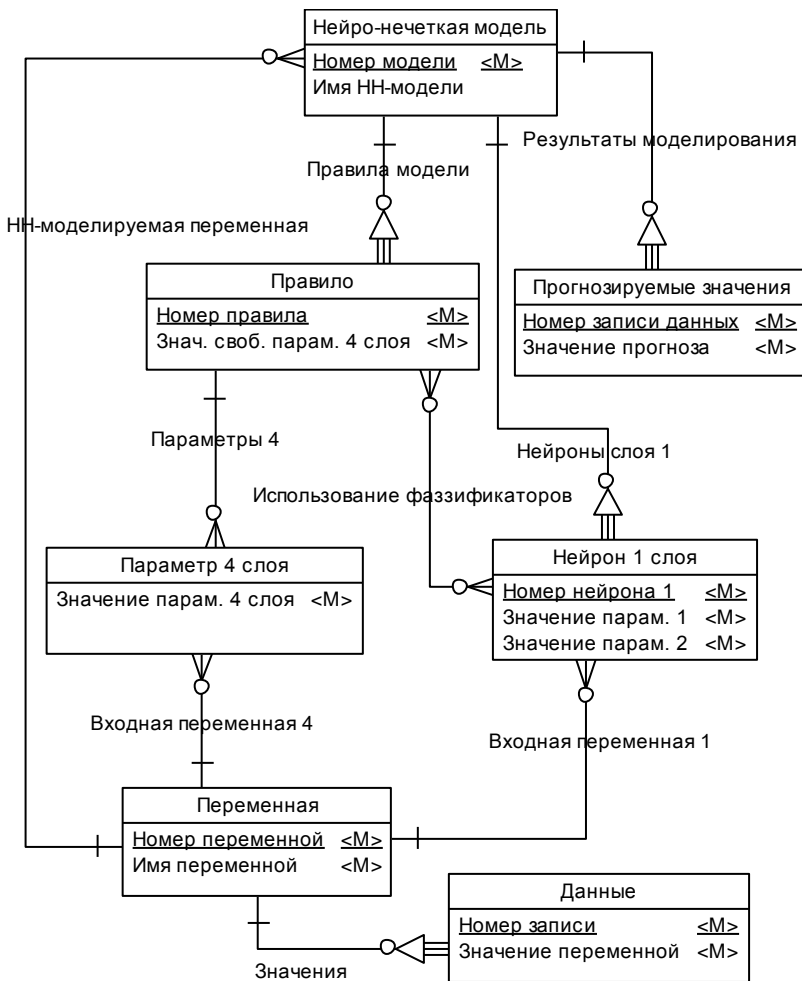


Рис. 9. ER-диаграмма концептуальной модели данных для хранения ANFIS

Диаграмма логической реляционной модели данных, построенная для приведенной концептуальной модели, приведена на рис. 10.

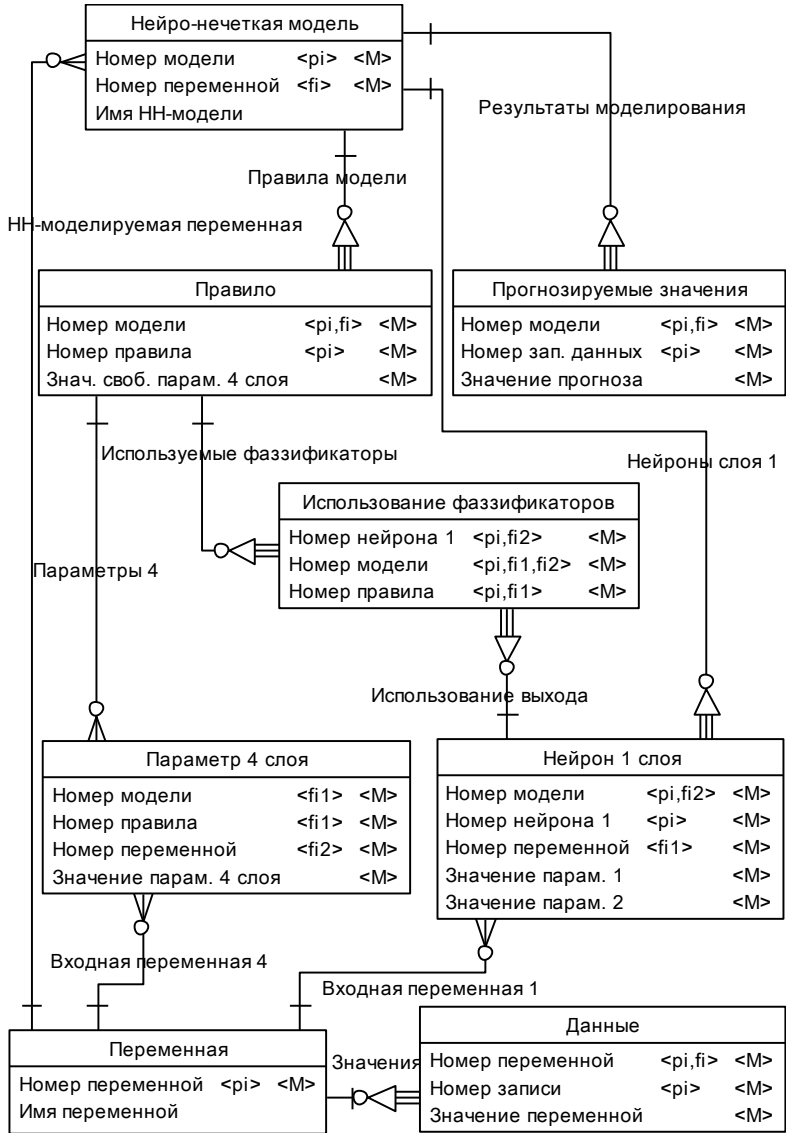


Рис. 10. Диаграмма логической модели данных для хранения ANFIS

Таким образом, хранение нейро-нечеткой модели ANFIS в реляционной БД может быть организовано с использованием следующего набора реляционных отношений (используются соответствующие англоязычные наименования отношений и атрибутов):

```
VARIABLE (VAR_ID, VAR_NAME)
ANFIS (ANFIS_ID, ANFIS_NAME, VAR_ID)
RULE (ANFIS_ID, RULE_NUM, CO_VAL)
NEURON1 (ANFIS_ID, NEU_NUM, VAR_ID, A_VAL, B_VAL)
RULE_INPUT (ANFIS_ID, RULE_NUM, NEU_NUM)
PARAM4 (ANFIS_ID, RULE_NUM, VAR_ID, C_VAL)
DATA (VAR_ID, REC_NUM, VAR_VAL)
FORECAST (ANFIS_ID, REC_NUM, FORECAST_VAL)
```

8. Организация вычислений по модели ANFIS

Вычисления по модели ANFIS, представленной в специфической схеме данных (рис. 10), могут быть реализованы в прикладном приложении на языке высокого уровня с предварительной загрузкой из базы данных структуры и параметров модели. Большой интерес представляет, однако, исследование возможности реализации вычисления прогнозируемого значения по модели ANFIS средствами языка SQL. При разработке прикладных программных систем это дает ряд преимуществ, которые будут обсуждаться ниже.

Рассмотрим процесс вычислений поэтапно, в соответствии со слоистой структурой ANFIS. Значения выходов нейронов первого слоя для модели с идентификатором M и записи данных с номером R могут быть рассчитаны следующим образом:

```
1  T1 = SELECT N.NEU_NUM,
2      EXP(-POW((D.VAR_VAL-N.A_VAL)/N.B_VAL, 2))
      AS N1_OUT
3  FROM NEURON1 N INNER JOIN VARIABLE V
      ON N.VAR_ID=V.VAR_ID
4  INNER JOIN DATA D ON V.VAR_ID=D.VAR_ID
```


5 WHERE N.ANFIS_ID=M AND D.REC_NUM=R

Листинг 2. SELECT-запрос для расчета значений выходов нейронов первого слоя нейро-нечеткой модели

SELECT-запрос для расчета значений выходов нейронов второго слоя для той же модели приведен в листинге 3. На данном этапе для простоты понимания запроса используется предположение, что в языке SQL существует агрегирующая функция MUL для реализации произведения.

SELECT-запросы для расчета значений выходов нейронов слоев с третьего по пятый для той же модели и той же записи данных приведены в листинге 4.

```
1 T2 = SELECT R.RULE_NUM,  
2     MUL(T1.NEU1_OUT) AS N2_OUT  
3 FROM RULE R INNER JOIN RULE_INPUT RI  
4     ON R.RULE_NUM=RI.RULE_NUM  
5     INNER JOIN T1 ON RI.NEU_NUM=T1.NEU_NUM  
6 WHERE R.ANFIS_ID=M AND RI.ANFIS_ID=M  
7 GROUP BY R.RULE_NUM
```

Листинг 3. Предварительный SELECT-запрос для расчета значений выходов нейронов 2-го слоя нейро-нечеткой модели

```
1 T3 = SELECT T2.RULE_NUM,  
2     T2.N2_OUT/(SELECT SUM(T.N2_OUT) FROM T2 T)  
3     AS N3_OUT  
4 FROM T2  
5 GROUP BY T2.RULE_NUM  
  
5 T4 = SELECT R.ANFIS_ID, T3.RULE_NUM,  
6     T3.N3_OUT*(R.C0_VAL+SUM(P4.C_VAL*D.VAR_VAL))  
7     AS N4_OUT  
8 FROM T3 INNER JOIN RULE R  
9     ON T3.RULE_NUM=R.RULE_NUM  
10    INNER JOIN PARAM4 P4  
11    ON T3.RULE_NUM=P4.RULE_NUM
```

```
11     INNER JOIN DATA D ON P4.VAR_ID=D.VAR_ID
12 WHERE R.ANFIS_ID=M AND P4.ANFIS_ID=M
13     AND D.REC_NUM=R

14 T5 = SELECT ANFIS_ID, SUM(N4_OUT)
        AS ANFIS_OUT
15 FROM T4
```

Листинг 4. SELECT-запрос для расчета значений выходов нейронов 3-5-го слоев нейро-нечеткой модели

Для завершения обоснования возможности вычислений по модели ANFIS средствами языка SQL необходимо уточнить этап 2, заменив несуществующую в языке SQL агрегирующую функцию MUL другими конструкциями. Прямая «арифметическая» замена дает:

$$(10) \text{ MUL}(x_i) = \text{EXP}(\text{SUM}(\text{LN}(x_i))) .$$

В нашем случае $x_i > 0$, следовательно, такая замена всегда действительна. После замены функции MUL по формуле (10) в запросах для первого и второго слоя выполняются избыточные вычисления значений функций EXP(), LN(), которых можно избежать. В результате этих преобразований имеем:

```
1  T1 = SELECT N.NEU_NUM,
2     -POW((D.VAR_VAL-N.A_VAL)/N.B_VAL,2)
        AS N1_OUT
3  FROM NEURON1 N INNER JOIN VARIABLE V
4     ON N.VAR_ID=V.VAR_ID
5     INNER JOIN DATA D ON V.VAR_ID=D.VAR_ID
6  WHERE N.ANFIS_ID=M AND D.REC_NUM=R

7  T2 = SELECT R.RULE_NUM,
8     EXP(SUM(T1.N1_OUT)) AS N2_OUT
9  FROM RULE R INNER JOIN RULE_INPUT RI
10     ON R.RULE_NUM=RI.RULE_NUM
11     INNER JOIN T1 ON RI.NEU_NUM=T1.NEU_NUM
12 WHERE R.ANFIS_ID=M AND RI.ANFIS_ID=M
```

13 GROUP BY R.RULE_NUM

Листинг 5. SELECT-запросы для расчета значений выходов нейронов 1-2-го слоев нейро-нечеткой модели

Таким образом, прогнозируемое по модели ANFIS значение может быть вычислено средствами языка SQL без использования процедурных расширений языка. Такой подход представляется оправданным в случае, когда необходимо реализовать вычисление прогнозируемых значений для множества записей данных. Приведенные выше запросы легко обобщить на случай вычислений для множества записей данных (например, последовательность записей с номера R1 по номер R2). Для этого вычисления по первому слою модели модифицируются так:

```
1 T1 = SELECT D.REC_NUM, N.NEU_NUM,  
2     -POW((D.VAR_VAL-N.A_VAL)/N.B_VAL,2)  
3     AS N1_OUT  
4 FROM NEURON1 N INNER JOIN VARIABLE V  
5     ON N.VAR_ID=V.VAR_ID  
6     INNER JOIN DATA D ON V.VAR_ID=D.VAR_ID  
7 WHERE N.ANFIS_ID=M  
8     AND D.REC_NUM>=R1 AND D.REC_NUM<=R2
```

Листинг 6. SELECT-запрос для расчета значений выходов нейронов первого слоя нейро-нечеткой модели в случае множества записей данных

Остальные запросы могут быть модифицированы аналогичным образом. На завершающем этапе (пятый слой) имеем:

```
1 T5 = SELECT ANFIS_ID, REC_NUM,  
2     SUM(N4_OUT) AS ANFIS_OUT  
3 FROM T4  
4 GROUP BY REC_NUM
```

Листинг 7. SELECT-запрос для расчета значений выходов нейронов пятого слоя нейро-нечеткой модели в случае множества записей данных

Результаты вычислений могут быть сохранены в таблице прогнозов для последующей обработки:

```
1  INSERT INTO FORECAST (ANFIS_ID, REC_NUM,  
                          FORECAST_VAL)  
2  SELECT ANFIS_ID, T5.REC_NUM, T5.ANFIS_OUT  
3  FROM T5
```

Листинг 8. INSERT-запрос для сохранения результатов расчетов по нейро-нечеткой модели

Технологические преимущества вычислений по нейро-нечетким моделям ANFIS средствами СУБД понятны и являются следствием использования здесь централизованной модели вычислений и стандартных средств языка SQL:

1. Вычисления на языке SQL средствами СУБД позволят избавиться от накладных расходов на передачу этих данных в клиентское приложение (по сети или локально, между процессами).

2. Использование стандартных конструкций языка SQL позволяет использовать все возможности СУБД по оптимизации запросов для повышения производительности вычислений.

3. Логика вычислений существует в единственном экземпляре, что гарантирует непротиворечивость ее реализации и облегчает разработку прикладных программных модулей.

4. Упрощается интеграция построенных моделей в системы управления производством и другие корпоративные информационные системы.

Кроме того, организация вычислений на стороне сервера дает некоторые «логические» преимущества при построении систем анализа и управления различными процессами (социальными, техническими и т.п.), основанных на нейро-нечетких моделях:

1. Вычисления в режиме онлайн. Результаты вычисления по моделям совмещаются в БД с исходными данными; они могут быть получены и сохранены в БД непосредственно после поступления соответствующих исходных данных.

2. Готовность результатов моделирования. Исключается необходимость повторного расчета прогнозируемых по модели

значений в различных прикладных модулях, различных контекстах решения задачи и т.п.

3. Целостность результатов моделирования. Стандартными средствами реляционных СУБД (триггерами) может быть обеспечена актуализация результатов моделирования (прогнозируемых значений) при изменении структуры модели или значений ее параметров.

Вычисления в режиме онлайн позволяют, в частности, реализовывать логику обработки данных непосредственно при поступлении, что особенно актуально при работе с большими данными: их анализ постфактум может требовать слишком больших вычислительных ресурсов [9]. Такая возможность может быть востребована, например, в системах анализа сетевого трафика, служебных журналов сетевых сервисов, web-сайтов для обнаружения/предотвращения вторжений за счет выявления нестандартного поведения участников информационного обмена [6, 12].

Основной недостаток такой схемы является классическим для централизованной модели вычислений – производительность схемы определяется сервером БД.

9. Заключение

Представлены подходы к организации хранения нейронечетких моделей типа ANFIS в реляционных базах данных и способы организации вычислений по хранимым моделям. Задача является актуальной как для исследовательских систем моделирования, так и в прикладных системах анализа, прогнозирования и управления техническими, социальными и другими системами. Предложено две схемы хранения: первая – универсальная схема – основана на представлении математического выражения модели ANFIS в виде дерева вычислений; вторая – специфическая схема – построена на основе слоистой структуры модели. Рассмотрены достоинства и недостатки каждой из схем, способы организации вычислений по моделям для этих двух схем. Показано, что при использовании специфической схемы хранения вычисления могут быть организованы стандартными средствами языка SQL, без привлечения процедурных расширений языка. Таким образом

задействуются все средства оптимизации производительности, имеющиеся в СУБД, облегчается интеграция нейро-нечетких моделей в прикладные системы, обеспечивается возможность организации вычислений и принятия решений в режиме онлайн, по мере поступления исходных данных.

Литература

1. БЛЮМИН С.Л., ШУЙКОВА И.А., САРАЕВ П.В. И ДР. *Нечеткая логика: алгебраические основы и приложения*. – Липецк: ЛЭГИ, 2002. – 111 с.
2. ДМИТРИЕВ В.М., ГАНДЖА Т.В. *Алгоритм формирования и вычисления математических выражений методом компонентных цепей* // Математические машины и системы. – 2010. – №3, том 1. – С. 9–21.
3. ДРЕЙПЕР Н., СМИТ Г. *Прикладной регрессионный анализ*. Кн. 1. – М.: Финансы и статистика, 1986. – 366 с.
4. КЛИМЕНКО А.В., СТОЯНОВА О.В., ДЛИ М.И. и др. *Нейро-нечеткий метод построения моделей сложных объектов* // Прикладная информатика. – 2007. – №3(9). – С. 119–127.
5. КОННОЛЛИ Т., БЕГГ К. *Базы данных. Проектирование, реализация и сопровождение. Теория и практика*. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2003. – 1440 с.
6. КОРНЕВ П.А., ПЫЛЬКИН А.Н., СВИРИДОВ А.Ю. *Применение инструментария искусственного интеллекта в системах обнаружения вторжений в вычислительные сети* // Современные проблемы науки и образования. – 2014. – №6. – [Электронный ресурс] – URL: www.science-education.ru/120-16906 (дата обращения: 19.05.2015).
7. КРИВЕЦКИЙ И.Ю., ПОПОВ Г.И. *Возможности применения технологии нейро-нечетких сетей в некоторых видах спорта* // Информатика и системы управления. – 2013. – №4(38). – С. 80–87.
8. МИХАЙЛЮК П.П. *Программный комплекс синтеза нейро-нечетких моделей технологических процессов* // Системы управления и информационные технологии. – 2007. – №1.3(27). – С. 365–369.

9. НОВИКОВ Д.А. *Большие данные: от Браге к Ньютону* // Проблемы управления. – 2013. – Вып. 6. – С. 15–23.
10. ПРАТТ Т., ЗЕЛКОВИЦ М. *Языки программирования: разработка и реализация* / Под общей ред. А. Матросова. – СПб.: Питер, 2002. – 688 с.
11. САРАЕВ П.В. *Идентификация нейросетевых моделей.* – Липецк: ЛГТУ, 2011. – 94 с.
12. ЧАСТИКОВА В.А., ВЛАСОВ К.А., КАРТАМЫШЕВ Д.А. *Обнаружение DDOS-атак на основе нейронных сетей с применением метода роя частиц в качестве алгоритма обучения* // Фундаментальные исследования. – 2014. – №8–4. – С. 829–832. – [Электронный ресурс] – URL: www.rae.ru/fs/?section=content&op=show_article&article_id=10003946 (дата обращения: 19.05.2015).
13. FULLER R. *Introduction to Neuro-Fuzzy Systems.* – Berlin/Heidelberg, Springer-Verlag, 2000. – 289 p.
14. JYH-SHING ROGER JANG. *ANFIS: Adaptive-Network-Based Fuzzy Inference* // IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics. – 1993. – Vol. 23, Issue 3. – P. 665–685.

ORGANIZING THE STORAGE OF NEURO-FUZZY MODEL IN RELATIONAL DATABASES

Vladimir Alexeev, Lipetsk State Technical University, Lipetsk,
Cand.Sc. (alexeev48@gmail.com).

Pavel Saraev, Lipetsk State Technical University, Lipetsk, Doctor
of Science, assistant professor (psaraev@yandex.ru).

Pavel Domashnev, Lipetsk State Technical University, Lipetsk,
Cand.Sc. (pdomashnev@gmail.com).

Oleg Nazarkin, Lipetsk State Technical University, Lipetsk,
Cand.Sc. (nazarkino@mail.ru).

Abstract: The paper considers the organization of the storage of ANFIS neuro-fuzzy models in relational databases. Two storage schemes were developed: the universal schema based on the ANFIS model representation as a function of several variables in a computation tree and the specific schema, which reflects layered model structure. Algorithms for computing ANFIS model output for two variants of the storage are described. The possibility of computing ANFIS model output by standard means of SQL is substantiated.

Keywords: ANFIS neuro-fuzzy model, computation tree, relational databases, SQL-based calculations.

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии Н.И. Базенков.*

*Поступила в редакцию 15.06.2015.
Опубликована 31.05.2016.*