УДК 342.8
ББК 67.400.5

# ОПТИМАЛЬНЫЙ ПОРОГ ГОЛОСОВАНИЯ КАК ФУНКЦИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ВАРИАЦИИ СРЕДЫ[1]

**Чеботарев П. Ю.**[2], **Малышев В. А.**[3], **Цодикова Я. Ю.**[4], **Логинов А. К.**[5], **Лезина З. М.**[6], **Афонькин В. А.**[7]
(*ФГБУН Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва*)

*В рамках модели социальной динамики, определяемой коллективными решениями в стохастической среде (модель ViSE), рассмотрен случай однородного общества, состоящего из классически-рациональных экономических субъектов (эгоистов). Получены выражения для оптимального порога голосования и максимального ожидаемого приращения капитала как функции от параметров среды. Найдена оценка скорости изменения оптимального порога в нуле, выражаемая абсолютной константой.*

Ключевые слова: социальная динамика, голосование, стохастическая среда, homines economici, оптимальный порог голосования.

---

[1] *Работа частично поддержана грантом Российского научного фонда (проект 16-11-00063).*

[2] *Павел Юрьевич Чеботарев, доктор физико-математических наук, заведующий лабораторией (pavel4e@gmail.com).*

[3] *Виталий Алексеевич Малышев, математик (vit312@gmail.com).*

[4] *Яна Юльевна Цодикова, ведущий инженер (codikova@mail.ru).*

[5] *Антон Константинович Логинов, старший математик (a_k_log@mail.ru).*

[6] *Зоя Марковна Лезина, кандидат технических наук, в.н.с. (lezinazo@gmail.com).*

[7] *Вадим Александрович Афонькин, математик (afonkinvadim@yandex.ru).*

*Эгоист подобен давно сидящему в колодце.*
Козьма Прутков

## 1. Введение

Рассмотрим модель голосования в стохастической среде (модель ViSE – Voting in Stochastic Environment) [1] в случае, когда *общество* состоит из $n$ *классически-рациональных экономических субъектов* (*homines economici* [10]), являющихся *ограниченными эгоистами* (далее – *эгоисты*). Такой участник в каждом акте выбора максимизирует индивидуальную функцию полезности. Легко видеть, что более выгодных индивидуальных стратегий у участника в этой модели нет. Кооперативные и альтруистические стратегии рассматривались в [1, 3, 4, 5].

Пусть $\alpha \in [0, 1]$ – строгий *порог голосования*, т.е. число, превышение которого долей общества, поддерживающей предложение, необходимо и достаточно для принятия этого предложения.

Каждый участник характеризуется текущим значением *капитала* (которое может интерпретироваться также как значение индивидуальной *функции полезности*). *Предложение среды* есть вектор предлагаемых приращений капиталов участников. Это понятие позволяет моделировать возможные нововведения, выгодные для одних и невыгодные для других субъектов. В результате принятия такого предложения капиталы первых получают положительные, а капиталы последних – отрицательные приращения.

Предложения последовательно ставятся на голосование, в котором участвуют все субъекты. Каждый homo economicus голосует за те и только те предложения, которые увеличивают его капитал (полезность). Если предложение поддержано долей общества, превосходящей порог $\alpha$, то оно принимается (используется процедура голосования «$\alpha$-большинство» [8, 9, 11]), и капиталы участников получают предусмотренные в нем приращения. В противном случае значения капиталов остаются прежними.

Генерация и рассмотрение предложений повторяются многократно, предметом же изучения являются изменения вектора капиталов участников в результате этого процесса. Приводит он к повышению благосостояния общества в целом или же демократические решения могут систематически снижать суммарный капитал участников? Растет ли имущественное расслоение? Многие ли участники разоряются?

В соответствии с рассматриваемой моделью ViSE приращения капиталов, составляющие предложение среды, есть реализации независимых одинаково распределенных случайных величин. В данной работе изучается случай, когда эти величины имеют распределение $N(\mu, \sigma)$, т.е. нормальны с математическим ожиданием $\mu$ и стандартным отклонением $\sigma$.

Отношение $\sigma/\mu$ называют коэффициентом вариации случайной величины. Далее нам понадобится *обратный коэффициент вариации*: $\rho = \mu/\sigma$, который будем называть *приведенным средним среды*.

Если $\rho > 0$, то возможности, предоставляемые средой, чаще благоприятны, если же $\rho < 0$, то превалируют невыгодные предложения.

Одна из сторон общественной практики, осмыслению которых может помочь исследование данной модели, – принятие парламентом всевозможных законопроектов, которые «подсказываются самой жизнью» (средой) – экономической и политической конъюнктурой. При этом предполагается, что депутаты, являясь лоббистами тех или иных интересов, приверженцами одних или других взглядов, настолько заинтересованы в принятии или отклонении законопроектов (например, проектов бюджета), что эта заинтересованность адекватно выражается в терминах индивидуальной полезности или капитала. Разумеется, принятие любых других коллективных решений также в определенной степени может рассматриваться в терминах модели ViSE и ее модификаций.

В настоящей работе исследуются вопросы:

– о динамике капиталов участников при сформулированных модельных предположениях;

– об *оптимальном пороге голосования* – пороге, максимизирующем совокупный капитал общества;

– о связи этого порога с показателем $\rho$, характеризующим благоприятность среды.

## 2. Зависимость приращений капиталов от параметров среды и числа участников

Зависимость среднего приращения капитала за один шаг от параметров среды и порога голосования рассматривалась в [6], где, в частности, было установлено, что голосование простым большинством (т.е. при $\alpha = 0{,}5$) в умеренно неблагоприятной среде ведет к разорению общества.

Аналитически эта зависимость выражается следующим предложением.

**Предложение 1.** 1. *В обществе, состоящем из $n$ эгоистов, математическое ожидание приращения капитала участника за один шаг равно*

$$M(\tilde{d}) = \sigma \sum_{x=[\alpha n]+1}^{n} \left(\rho + \tfrac{f}{q}\left(\tfrac{x}{pn} - 1\right)\right) b(x|n), \tag{1}$$

*где* $p = F(\rho)$, $q = 1 - p = F(-\rho)$, $f = f(\rho)$, $b(x\,|\,n) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$, $F(\cdot)$ *и* $f(\cdot)$ *– функция распределения и плотность стандартного нормального распределения* $N(0,1)$.

2. *Использование стандартной нормальной аппроксимации биномиального распределения приводит к приближению*

$$\hat{M}(\tilde{d}) = \sigma\left(\rho F(\tau) + \tfrac{f}{\sqrt{pqn}} f(\tau)\right), \tag{2}$$

*где*

$$\tau = \frac{pn - [\alpha n] - 0{,}5}{\sqrt{pqn}}. \tag{3}$$

Предложение 1 следует из леммы о голосующей нормальной выборке [3]. Легко заметить, что $p$ и $q$ – соответственно вероятности положительности и отрицательности одиночного приращения капитала в предложении среды; $f/\sigma$ – плотность вероятности предложения среды, равного 0.

Нормальную аппроксимацию рекомендуют использовать, когда $pqn \geqslant 9$. При фиксированном $pqn$ ее точность максимальна при $p = 0{,}5$ и снижается, когда $p$ приближается к 0 или 1. В связи с этим при $0{,}1 < p < 0{,}9$ нормальное приближение часто применяют уже при $pqn > 5$. Для значений $p$, очень близких к 0 или 1, иногда требуют выполнения условия $pqn > 25$.

Зависимость среднего приращения капитала участника за один шаг от приведенного среднего среды $\rho$ при 21 участнике и $\alpha = 0{,}5$ показана на рис. 1.

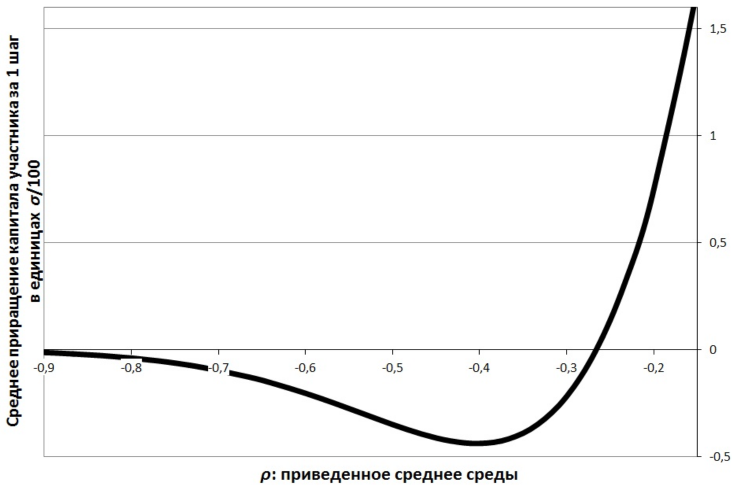



*Рис. 1. Среднее приращение капитала участника за один шаг*: 21 *участник*, $\alpha = 0{,}5$

На рис. 1 видно, что при $\rho \in (-0{,}9, -0{,}266)$ среднее приращение капитала составляет заметную отрицательную величину, т.е. предложения, одобренные большинством, оказываются в среднем невыгодными для общества. Соответствующую часть графика будем называть «ямой ущерба». При $\rho < -0{,}9$ отрицательное $M(\tilde{d})$ очень близко к нулю, поскольку предложения принимаются крайне редко.

Наличие «ямы ущерба» естественно соотносится с результатами А.В. Малишевского [2, с. 92–95], которые впервые продемонстрировали, что итог голосования эгоистов может быть крайне невыгоден для них самих (причем всех без исключения). А также – с афоризмом Козьмы Пруткова «эгоист подобен давно сидящему в колодце», выбранным в качестве эпиграфа к статье.

Феномен ямы ущерба объясняется тем, что в силу отрицательности $\rho$ положительные предложения среды в среднем имеют меньший модуль, чем отрицательные. В результате совокупный убыток проигравшего меньшинства систематически превосходит совокупный доход выигравшего большинства. Таким образом, несмотря на стремление всех участников к увеличению капитала и одобрение всех изменений большинством, общество разоряется. Итак, в умеренно неблагоприятной среде решения, принимаемые большинством голосов эгоистов, в среднем уменьшают их суммарный капитал!

Как среднее приращение капитала зависит от числа участников? Эта зависимость иллюстрируется рис. 2. При увеличении

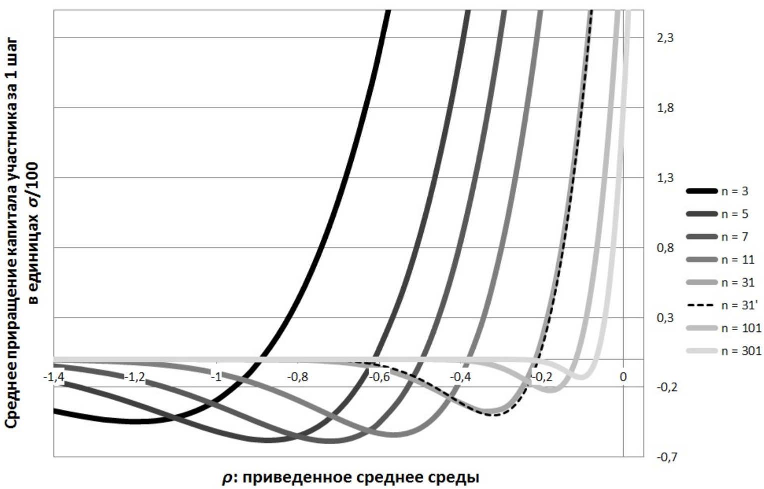



*Рис. 2. Среднее приращение капитала участника за один шаг при нечетных $n$ и $\alpha = 0{,}5$*

$n$ точка минимума сдвигается вправо и «яма ущерба» становится у́же. Глубина «ямы» сначала увеличивается, достигая максимума при $n = 7$, а при дальнейшем увеличении $n$ стремится к нулю, монотонно уменьшаясь. Отметим, что при малых $n$ аппроксимация (2) имеет недостаточную точность и не отражает начальную тенденцию углубления «ямы» при росте $n$. При $n = 31$ ее точность (см. пунктирную линию на рис. 2) уже приемлема.

Таким образом, эффект разорения общества в результате решений, принятых большинством, при росте $n$ постепенно ослабевает. При четных $n$ «яма» несколько «мельче», чем при нечетных, поскольку де-факто порог голосования оказывается выше: для принятия предложения необходим перевес минимум в два голоса.

Можно заметить, что форма графиков при разных $n$ сходна. Более того, если обозначить через $\varphi_n(\rho)$ зависимость $M(\tilde{d})$ от $\rho$ при $n$ участниках и фиксированном $\sigma$, то при $n$ и $n'$, превосходящих 15, имеет место приблизительное соотношение

$$\varphi_{n'}(\rho) \approx \sqrt{\frac{n}{n'}}\,\varphi_n\Big(\rho\sqrt{\frac{n'}{n}}\,\Big). \tag{4}$$

Тем самым уменьшение $n$ в $k^2$ раз приводит к растяжению графика в $k$ раз по обеим осям. Совмещение зависимостей $M(\tilde{d})$ от $\rho$, полученное с помощью (4) для разных $n$, иллюстрирует рис. 3, где показаны графики $\sqrt{n}\,\varphi_n\big(\rho\,/\sqrt{n}\,\big)$. В случае, когда $n$ и $n'$ больше 30, точность приближения (4) достаточно высока.

Из (2) и (4) следует, что $k^2$-кратное увеличение числа участников действует аналогично $k$-кратному уменьшение $\sigma$. Соответственно, увеличение дисперсии «уравновешивает» такое же кратное увеличением числа голосующих: график зависимости $M(\tilde{d})$ от $\rho$ при этих одновременных изменениях почти не меняется. Так, при нечетном $n$, $\alpha = 0{,}5$ и $\rho = 0$ (нейтральной среде) из (2) и (3) следует

$$\hat{M}(\tilde{d}) = \frac{\sigma}{\pi\sqrt{n}} \tag{5}$$

– исключительно простая формула.

Для вероятностных схем усреднения такая закономерность, разумеется, естественна.


*Рис. 3. Совмещение графиков для разных $n$ (рис. 2) посредством масштабирования (4) по двум осям*

## 3. Зависимость динамики капиталов от порога голосования $\alpha$

При увеличении порога голосования $\alpha$ наблюдаемая «яма ущерба» становится узкой и неглубокой: среднее приращение капитала участника всё меньше заходит в отрицательную область (рис. 4).

В то же время в случае высоких $\alpha$ скорость роста капитала участника при увеличении $\mu$ значительно ниже, чем при голосовании простым большинством. Посредством высокого $\alpha$ общество страхуется от ущерба при умеренно отрицательных $\mu$, но одновременно теряет выгоду при бóльших значениях $\mu$, т.е. когда среда более благоприятна. В числе прочих на рис. 4 (где использована аппроксимация (2)) показана кривая для $\alpha = 0{,}45$. Она имеет относительно широкую и глубокую «яму ущерба», но при увеличении $\mu$ растет быстрее других и в области положитель-

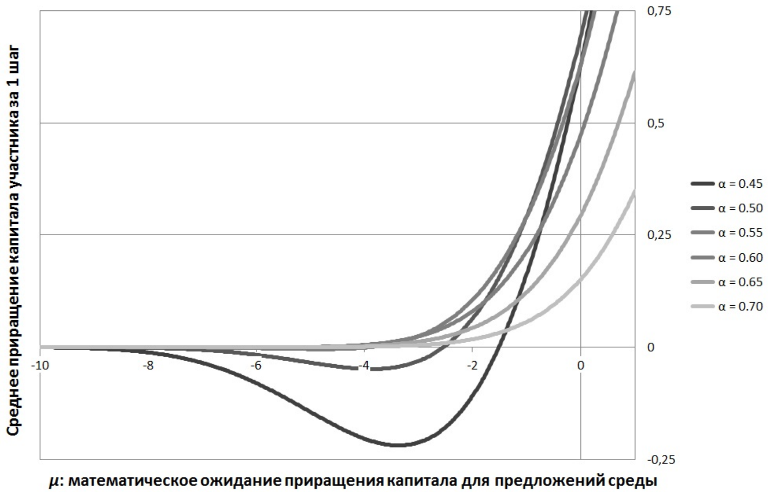



*Рис. 4. Среднее приращение капитала участника за один шаг при разных порогах* $\alpha$ $(n = 21,\ \sigma = 10)$

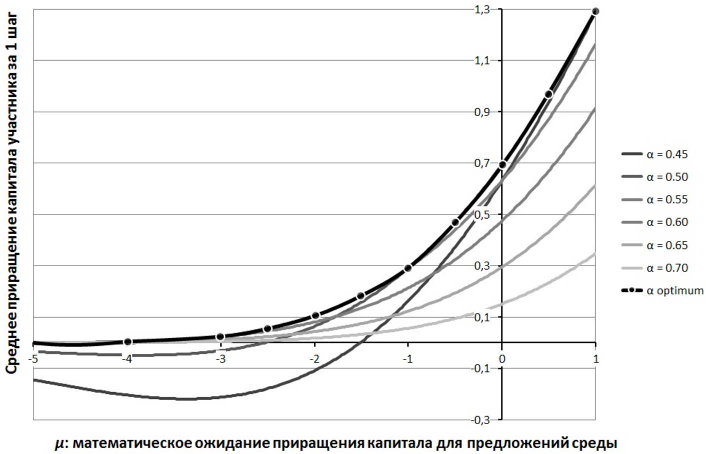
ных $\mu$ обгоняет кривые, соответствующие $\alpha \geqslant 0{,}5$ (см. также рис. 5). Это означает, что в благоприятной среде можно «рискнуть» принимать предложения, поддержанные не большинством, а несколько меньшей долей общества. Несмотря на то, что большинству они могут быть невыгодны, выгода меньшинства будет систематически превышать ущерб большинства, и в силу независимости приращений капитала участников при достаточном числе шагов это приведет к выгоде для всех.

## 4. Оптимальный порог голосования в обществе, состоящем из эгоистов

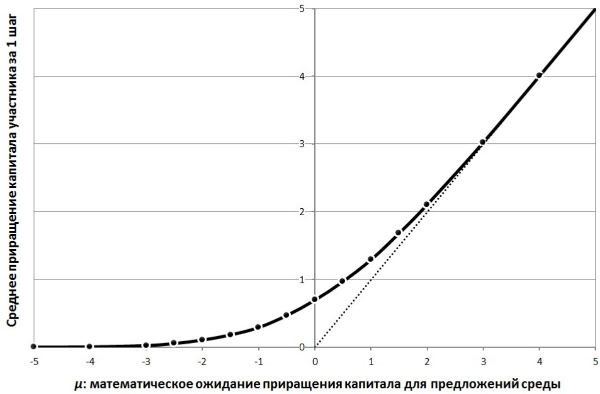
Проведенный анализ показывает, что если $n$ и $\sigma$ фиксированы, то при каждом *уровне благоприятности среды* $\mu$ имеется оптимальное значение[8] порога голосования $\alpha$ – это значение,

[8] *О других подходах к оптимизации порога голосования см.* [7, 8]*, а также* [11, 12] *для случая многократного голосования.*

максимизирующее среднее приращение капитала участника.




*а*)




*б*)

*Рис. 5. а) сплайн, максимизирующий приращение капитала по $\alpha$; б) среднее приращение капитала участника при голосовании с оптимальным порогом $\alpha$ $(n = 21,\ \sigma = 10)$*

Оптимальный порог $\alpha$ можно найти графически. Для всевозможных $\alpha$ построим кривые зависимости $M(\tilde{d})$ от $\mu$ при голосовании с порогом $\alpha$ и каждому $\mu$ сопоставим кривую с наибольшей ординатой при абсциссе $\mu$. Ей и будет отвечать оптимальное $\alpha$. Отметим, что кривой наибольших приращений будет сплайн кривых, показанных на рис. 4 (см. рис. 5), а не их верхняя огибающая[9], поскольку при каждом $n$ возможны лишь $n + 2$ существенно различных порогов голосования $\alpha$: $\{-\frac{1}{n}, 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, 1\}$ (крайние значения здесь соответствуют принятию и отклонению всех предложений).

При голосовании с оптимальным порогом (рис. 5б) среднее приращение капитала участника положительно при любом $\mu$, отсутствует «яма ущерба» и обеспечивается максимально возможный рост капитала при увеличении $\mu$.

Какие значения принимает оптимальный порог голосования? Прежде всего, зависимость его от $\mu$ – «лестница» со ступеньками равной высоты в силу отмеченной выше конечности существенно различных порогов голосования. Если порог $\alpha$ оптимален и $[\alpha_1 n] = [\alpha n]$, то $\alpha_1$ – также оптимальный порог. На рис. 6 показан график среднего значения класса эквивалентности оптимальных порогов голосования как функция $\rho \in [-0{,}5, 0{,}5]$ при $n = 21$; вертикальные отрезки проведены для наглядности.

Если $\bar{\alpha}_0$ – среднее значения класса эквивалентности оптимальных порогов голосования при фиксированных $n, \sigma$ и $\mu$, то сам этот класс есть полуинтервал $[\bar{\alpha}_0 - \frac{1}{2n}, \bar{\alpha}_0 + \frac{1}{2n}[$. За пределами отрезка $\rho \in [-0{,}7,\ 0{,}7]$ при голосовании с порогами, близкими к оптимальному, и заметным числом участников предложения либо практически никогда не принимаются (левее этого отрезка), либо (правее отрезка) практически всегда принимаются (см. рис. 5б). Поэтому задача точного определения оптимального порога теряет здесь практический смысл.

Оценка оптимального порога голосования $\alpha$ в реальных ситуациях представляется в принципе решаемой задачей. Для получения такой оценки нужно из опыта оценить $\rho = \mu/\sigma$ и иметь основания считать, что рассматриваемая модель хотя бы приблизи-

[9] *Огибающая касается бесконечного множества кривых.*

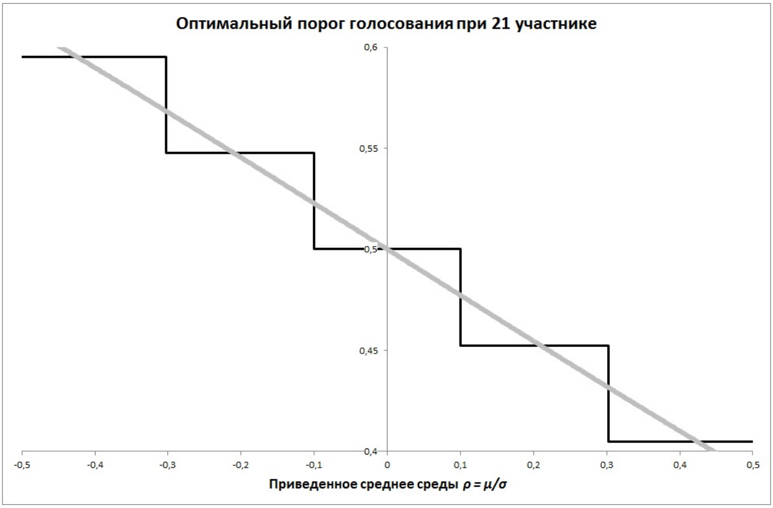



*Рис. 6. Средние значения классов эквивалентности оптимальных порогов голосования $\alpha_0$ («лестница») при $n = 21$ и оценка (6) оптимального порога голосования (серая линия)*

тельно адекватна. Но даже в случае, когда оценивание $\rho$ и вопрос об адекватности модели вызывают затруднения, общий вывод о выгоде повышения порога голосования, когда среда становится менее благоприятной, по-видимому, остается верным. Этот вывод основан на том, что в агрессивной среде совокупные потери меньшинства могут систематически превышать суммарный выигрыш большинства. Здесь проявляется фундаментальное свойство стандартных процедур голосования: голоса учитываются независимо от важности рассматриваемого вопроса для голосующих – от того, много или мало каждый из них приобретает/теряет в случае принятия предложения.

В разделе 5 статьи дана аппроксимация оптимального порога голосования в обществе, состоящем из homines economici.

## *5. Выражение для оптимального порога голосования*

Оценку оптимального порога голосования $\alpha_0$ дает следующая теорема.

**Теорема 1.** *Пусть $\alpha_0$ – порог голосования в обществе, состоящем из эгоистов, обеспечивающий наибольшее значение математического ожидания приращения капитала за один шаг. Тогда использование стандартной нормальной аппроксимации биномиального распределения приводит к:*
*— оценке оптимального порога голосования*

$$\hat{\alpha}_0 = p\left(1 - \frac{q\rho}{f}\right); \tag{6}$$

*— выражению для ожидаемого приращения капитала при голосовании с оптимальным порогом*

$$\hat{M}(\tilde{d}_0) = \mu F\left(\frac{\mu}{\nu}\right) + \nu f\left(\frac{\mu}{\nu}\right), \quad \text{где } \nu = \frac{\sigma f}{\sqrt{pqn}}, \tag{7}$$

*а остальные обозначения приведены в разделе* 1 *и предложении* 1.

Доказательства приведены в приложении.

Порог (6) определяется параметрами среды и не зависит от $n$. Поскольку $p$, $q$ и $f$ есть функции от $\rho$, единственным параметром, определяющим оценку $\hat{\alpha}_0$, является $\rho$. Подробная запись этой зависимости:

$$\hat{\alpha}_0 = F(\rho)\left(1 - \frac{\rho F(-\rho)}{f(\rho)}\right).$$

Ступенчатая зависимость типа «лестницы», показанной на рис. 6, получается из этой оценки применением формулы

$$\bar{\alpha}_0 = \frac{[\hat{\alpha}_0 n] + 0{,}5}{n}.$$

Отметим, что теорема 1 дает исключительно простые аналитические оценки для оптимального порога и соответствующего ему среднего приращения капитала участника. Для сравнения, задачи нахождения абсцисс и ординат минимумов функций $M(\tilde{d})$, показанных на рис. 2 и 4, а также точек их пересечения с горизонтальной осью не приводят к простым аналитическим выражениям.

## 6. Скорость изменения оптимального порога голосования как функция $\rho$

Зависимость $\hat{\alpha}_0$ от $\rho$ на рис. 6 выглядит линейной, однако, в силу финитности $\alpha$ и инфинитности $\rho$, на большем интервале значений аргумента кажущаяся линейность не может не нарушаться (рис. 7).

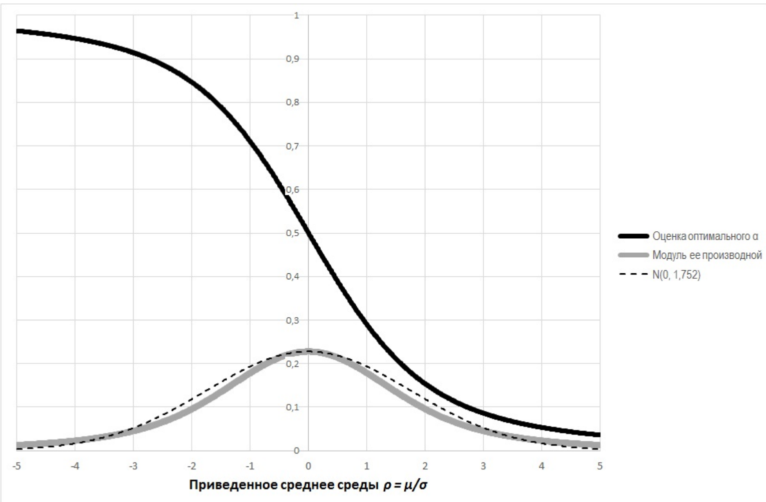



*Рис. 7. Оценка $\hat{\alpha}_0$ оптимального порога голосования и взятая с минусом производная выражения* (6)*. Последняя, интерпретированная как весовая функция распределения, имеет «тяжелые хвосты», что заметно при сравнении ее с нормальной плотностью, показанной пунктиром*

Чтобы найти угол наклона кривой $\hat{\alpha}_0(\rho)$ в нуле, продифференцируем функцию (6) по $\rho$.

**Предложение 2.**

$$\frac{d\hat{\alpha}_0(\rho)}{d\rho} = \frac{(f+p\rho)(f-q\rho)-qp}{f}. \tag{8}$$

Функция $d\hat{\alpha}_0(\rho)/d\rho$ отрицательна; модуль ее показан на рис. 7.

При нейтральной среде ($\rho = 0$) имеем $p = q = 1/2$, $f = 1/\sqrt{2\pi}$. Подставив эти значения в (8), получаем

**Следствие 1.**

$$\frac{d\hat{\alpha}_0(\rho)}{d\rho}\Big|_{\rho=0} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} - \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right) \approx -0{,}2277.$$

Найденное значение производной в нуле не зависит ни от числа участников, ни от других параметров модели. Вывод: если в результате экономического кризиса $\mu$ уменьшилось от 0 до $-\frac{\sigma}{2}$ (т.е. $\rho$ изменилось от 0 до $-\frac{1}{2}$), то оптимальный порог голосования растет с 50% до 61%. Если же $\mu$ уменьшается до $-\sigma$, то (с поправкой на нелинейность $\hat{\alpha}_0(\rho)$) имеем $\hat{\alpha}_0 \approx 71\%$.

## *7. Заключение*

В работе получен и проинтерпретирован ряд соотношений, описывающих голосование с «оптимальным» порогом в предположениях модели социальной динамики, определяемой голосованием в стохастической среде (модель ViSE). Эти соотношения приводят к выводу, что при наступлении неблагоприятной внешней конъюнктуры порог голосования следует повышать, а при улучшающихся условиях – понижать, и указывают – насколько.

В статье также получены аналитические выражения для «ямы ущерба» – зависимости, выражающей скорость разорения эгоистов в умеренно неблагоприятной среде в результате их демократических решений, а также для оптимального порога голосования (его оценка не зависит от числа участников), его производной по благоприятности среды $\big($в нуле это константа $\big(\sqrt{2/\pi} - \sqrt{\pi/2}\big)/2\big)$ и динамики капиталов (полезностей) при голосовании с оптимальным порогом и другими значениями порога. Указанные результаты допускают интерпретацию в терминах принятия реальных коллективных решений в среде, благоприятность и стабильность которой допускают эмпирическую оценку.

## *Приложение*

**Доказательство теоремы 1.** Для нахождения аргумента наибольшего значения приращения капитала посредством дифференцирования в выражении (3) заменим $[\alpha n] + 0{,}5$ на $\alpha n$. При этой замене получаем дифференцируемую функцию, которая в точках $\left\{\frac{k+0,5}{n} \mid k = 0, \ldots, n\right\}$ совпадает с исходной. Тогда вместо (3) имеем

$$\tau = (p - \alpha)\sqrt{\frac{n}{qp}}\,. \tag{П.1}$$

Дифференцируя по $\alpha$ выражение (2) после указанной замены (получившуюся функцию обозначим $\hat{M}(\alpha, \tau, \sigma)$), находим:

$$\frac{d\hat{M}(\alpha, \tau, \sigma)}{d\alpha} = \mu f(\tau)\frac{d\tau}{d\alpha} + \frac{\sigma f}{\sqrt{pqn}} f(\tau)\tau\frac{d(-\tau)}{d\alpha}. \tag{П.2}$$

Условие первого порядка для максимума (равенство нулю первой производной) приводится к виду

$$-\rho = \frac{(\alpha - p)f}{pq}. \tag{П.3}$$

С учетом отрицательности второй производной отсюда выводим (6).

Второе утверждение теоремы доказывается подстановкой оценки (6) оптимального порога голосования в выражение (2).

**Доказательство предложения 2.** Учитывая, что $dp/d\rho = -dq/d\rho = f$ и $df/d\rho = -\rho f$ (поскольку $f = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\rho^2/2}$), получаем

$$\begin{aligned}
\frac{d\hat{\alpha}_0(\rho)}{d\rho} &= \frac{d}{d\rho}p\Big(1 - \frac{q\rho}{f}\Big) = \\
&= f\Big(1 - \frac{q\rho}{f}\Big) + p\Big(-\frac{(-f)\rho f + qf + \rho f q\rho}{f^2}\Big) = \\
&= \frac{(f + p\rho)(f - q\rho) - qp}{f},
\end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

## *Литература*

1. БОРЗЕНКО В.И., ЛЕЗИНА З.М., ЛОГИНОВ А.К. И ДР. *Стратегии при голосовании в стохастической среде: эгоизм и коллективизм* // Автоматика и телемеханика. — 2006. — №2. — С. 140–152.
2. МИРКИН Б.Г. *Проблема группового выбора.* — Москва: Наука, 1974. – 256 с.
3. ЧЕБОТАРЕВ П.Ю. *Аналитическое выражение ожидаемых значений капиталов при голосовании в стохастической среде* // Автоматика и телемеханика. — 2006. — №3. — С. 57–68.
4. ЧЕБОТАРЕВ П.Ю., ЛОГИНОВ А.К., ЦОДИКОВА Я.Ю. И ДР. *Анализ феноменов коллективизма и эгоизма в контексте общественного благосостояния* // Проблемы управления. — 2008. — №4. — С. 30–37.
5. ЧЕБОТАРЕВ П.Ю., ЛОГИНОВ А.К., ЦОДИКОВА Я.Ю.И ДР. *«Снежный ком» кооперации и «снежный ком»-мунизм* // Четвертая международная конференция по проблемам управления: Сборник трудов. — Москва: ИПУ РАН, 2009. — С. 687–699.
6. ЧЕБОТАРЕВ П.Ю., ЛОГИНОВ А.К., ЦОДИКОВА Я.Ю. И ДР. *Об оптимальном пороге голосования* // XIII Апрельская международная научная конференция по проблемам развития экономики и общества: в 4 кн. / Под ред. Е.Г. Ясина. — Т. 4. — Москва: Изд. дом ВШЭ, 2013. — С. 123–132.
7. AZRIELI Y., KIM S. *Pareto efficiency and weighted majority rules* // International Economic Review. — 2014. — Vol. 55. — No. 4. — P. 1067–1088.
8. NITZAN S., PAROUSH J. *Optimal decision rules in uncertain dichotomous choice situations* // International Economic Review. — 1982. — Vol. 23. — No. 2. — P. 289–297.

9. NITZAN S., PAROUSH J. *Are qualified majority rules special?* // Public Choice. — 1984. — Vol. 42. — No. 3. — P. 257–272.
10. O'BOYLE E.J. *The origins of homo economicus: A note* // Storia del Pensiero Economico. — 2009. — Vol. 6. — P. 1–8.
11. RAE D.W. *Decision-rules and individual values in constitutional choice* // American Political Science Review. — 1969. — Vol. 63. — No. 1. — P. 40–56.
12. SEKIGUCHI T., OHTSUKI H. *Effective group size of majority vote accuracy in sequential decision-making* // Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics. — 2015. — Vol. 32. — No. 3. — P. 595–614.

## THE OPTIMAL MAJORITY THRESHOLD AS A FUNCTION OF THE VARIATION COEFFICIENT OF THE ENVIRONMENT

**Pavel Chebotarev**, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Doctor of Science (Moscow, Profsoyuznaya st., 65, pavel4e@gmail.com).
**Vitaly Malyshev**, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, mathematician (vit312@gmail.com).
**Yana Tsodikova**, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, leading engineer (codikova@mail.ru).
**Anton Loginov**, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, senior mathematician (a_k_log@mail.ru).
**Zoya Lezina**, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Cand. Sc., leading researcher (lezinazo@gmail.com).
**Vadim Afonkin**, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, mathematician (afonkinvadim@yandex.ru).

*Abstract: We consider the model of social dynamics determined by collective decisions in a stochastic environment* (*ViSE model*)*. In the paper we investigate the case of a homogeneous society consisting of classically rational economic agents* (*or homines economici, or egoists*)*. Alternatives generated by the environment are random vectors of utility increments for each agent. Increments can be positive or negative. An agent votes for those alternatives which increase her utility. An alternative which has gained more votes than the given majority threshold is accepted and all agents receive corresponding increments to their utilities. Expressions for the optimal majority threshold and the maximum expected utility increment as a function of the parameters of the environment are obtained. An estimate of the rate of change of the optimal threshold at zero is given and this value is an absolute constant.*

Keywords: social dynamics, voting, stochastic environment, homines economici, optimal majority threshold.

*Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии Ф.Т. Алескеровым.*

*Поступила в редакцию 19.01.2016*
*Дата опубликования 31.07.2016.*