

**Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН**

УПРАВЛЕНИЕ БОЛЬШИМИ СИСТЕМАМИ

Выпуск 62
Июль 2016

**СБОРНИК
ТРУДОВ**

ISSN 1819-2467

Регистрационный номер Эл. №ФС77-44158 от 09 марта 2011 г.

Москва – 2016

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова

**УПРАВЛЕНИЕ
БОЛЬШИМИ
СИСТЕМАМИ**

СБОРНИК ТРУДОВ

Выпуск 62

Москва – 2016

КООРДИНАЦИОННЫЙ СОВЕТ

Академики РАН: Васильев С.Н., Емельянов С.В., Куржанский А.Б., Федосов Е.А., Черноушко Ф.Л.; члены-корреспонденты РАН: Желтов С.Ю., Каляев И.А., Пархоменко П.П., Попков Ю.С.; д-ра техн. наук: Дорофеев А.А., Кузнецов О.П., Кульба В.В., Лотоцкий В.А., Павлов Б.В., Поляк Б.Т., Рутковский В.Ю.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор: член-корр. РАН Новиков Д.А. **Зам. главного редактора:** д-р физ.-мат. наук Губко М.В.; **Отв. секретарь:** канд. техн. наук Базенков Н.И.; **Редактор:** канд. техн. наук Квинто Я.И. **Техн. редактор:** канд. техн. наук Куливец С.Г.

Д-ра техн. наук: проф. Алескеров Ф.Т. (ГУ ВШЭ), проф. Алчинов А.И. (ИПУ РАН), проф. Андриевский Б.Р. (ИПМ РАН), проф. Афанасьев В.Н. (МИЭМ), проф. Бахтадзе Н.Н. (ИПУ РАН), проф. Бурков В.Н. (ИПУ РАН), проф. Вишневский В.М. (ИПУ РАН), Галаев А.А. (ИПУ РАН), д-р физ.-мат. наук проф. Ерешко Ф.И. (ВЦ РАН), д-ра техн. наук Зоркальцев В.И. (ИСЭМ СО РАН), проф. Калашников А.О. (ИПУ РАН), проф. Калянов Г.Н. (ГУ ВШЭ), проф. Каравай М.Ф. (ИПУ РАН), д-р экон. наук, проф. Ключков В.В. (ИПУ РАН), д-ра техн. наук, Коргин Н.А. (ИПУ РАН), проф. Курдюков А.П. (ИПУ РАН), д-ра физ.-мат. наук, проф. Кушнер А.Г., проф. Лазарев А.А. (МФТИ), д-ра техн. наук: проф. Лебедев В.Г. (ИПУ РАН), проф. Мандель А.С. (ИПУ РАН), д-р биол. наук проф. Михальский А.И., д-р физ.-мат. наук, проф. Непейвода Н.Н. (ИПС РАН), д-р экон. наук, проф. Нижегородцев Р.М. (ИПУ РАН), д-ра техн. наук: проф. Орлов А.И. (МГТУ), д-ра физ.-мат. наук: проф. Рапопорт Л.Б. (ИПУ РАН), проф. Райгородский А.М. (МГУ), проф. Савватеев А.В. (РЭШ), д-ра техн. наук: проф. Самуйлов К.Е. (РУДН), проф. Сидельников Ю.В. (МАИ), Совлуков А.С. (ИПУ РАН) д-ра физ.-мат. наук: проф. Соловьев С.Ю. (МГУ), проф. Угольницкий Г.А. (ЮФУ), проф. Уткин В.А. (ИПУ РАН), проф. Хоботов Е.Н. (МГТУ), д-ра физ.-мат. наук: доцент Чеботарев П.Ю. (ИПУ РАН), проф. Чхартишвили А.Г. (ИПУ РАН), проф. Щербаков П.С. (ИПУ РАН).

РЕГИОНАЛЬНЫЕ РЕДАКЦИОННЫЕ СОВЕТЫ

Арзамас – д-р физ.-мат. наук проф. Пакшин П.В. **Волгоград** – д-ра физ.-мат. наук: проф. Воронин А.А., проф. Лосев А.Г. (ВолГУ); **Воронеж** – д-р техн. наук, проф. Баркалов С.А., д-р физ.-мат. наук, проф. Головинский П.А. (ВГАСУ), д-р техн. наук, проф. Подвальный С.Л. (ВГТУ); **Иркутск** – академик РАН Бычков И.В., д-р физ.-мат. наук, проф. Лакеев А.В. (ИДСТУ СО РАН); **Казань** – д-р физ.-мат. наук, проф. Маликов А.И., д-р техн. наук, проф. Сиразетдинов Р.Т. (КГТУ-КАИ); **Липецк** – д-ра техн. наук: проф. Погодаев А.К., Сараев П.В. (ЛГТУ); **Самара** – д-ра экон. наук: проф. Богатырев В.Д., проф. Гераськин М.И., д-р техн. наук, проф. Засканов В.Г. (СГАУ); **Петрозаводск** – д-р физ.-мат. наук, проф. Мазалов В.В., д-р техн. наук, доц. Печников А.А. (ИПМИ КарНЦ РАН); **Санкт-Петербург** – д-р физ.-мат. наук: проф. Петросян Л.А. (СПбГУ), д-р техн. наук проф. Фуртат И.Б. (ИПМ РАН); **Старый Оскол** – д-р техн. наук, проф. Еременко Ю.И. (СТИ).

Адрес редакции: 117997, г. Москва, ул. Профсоюзная, д. 65.

Адрес в Интернет: ubs.mtas.ru.

СОДЕРЖАНИЕ

Системный анализ

Рудько И. М. <i>Применение порядковых статистик в задачах обнаружения в частотной области</i>	6
Чиркова Ю. В. <i>Цена анархии в задаче максимизации минимальной задержки машин в системе обслуживания</i>	30

Анализ и синтез систем управления

Величко А. С. <i>Параллельные алгоритмы для задач условной оптимизации большой размерности с декомпозицией ограничений</i>	60
Еременко Ю. И., Глушенко А. И. <i>О разработке метода выбора структуры нейронной сети для решения задачи адаптации параметров линейных регуляторов</i>	75

Управление в социально-экономических системах

Алексеев А. О., Спирина В. С., Коргин Н. А. <i>Технология управления объектом коммерческой недвижимости с учётом потребительских предпочтений</i>	124
Чеботарев П. Ю., Малышев В. А., Цодикова Я. Ю., Логинов А. К., Лезина З. М., Афонькин В. А. <i>Оптимальный порог голосования как функция коэффициента вариации среды</i>	169

Управление подвижными объектами и навигация

Амелин К. С., Андриевский Б. Р.,

Томашевич С. И., Фрадков А. Л.

*Передача данных с адаптивным кодированием
между квадрокоптерами в формации*.....

188

***Программы и системы моделирования объектов,
средств и систем управления***

Антоненко А. В., Лошкарев И. В., Панков В. С.,

Угольницкий Г. А.

*Теоретико-игровые модели стимулирования
инноваций и их идентификация (на примере
электроэнергетики)*.....

214

УДК 621.396
ББК 22.172

ПРИМЕНЕНИЕ ПОРЯДКОВЫХ СТАТИСТИК В ЗАДАЧАХ ОБНАРУЖЕНИЯ В ЧАСТОТНОЙ ОБЛАСТИ¹

Рудько И. М.²

(ФГБУН Институт проблем управления РАН, Москва)

Для систем обнаружения, работающих в частотной области, реализующих алгоритм проверки двух статистических гипотез и использующих энергетический критерий обнаружения, разработан алгоритм обнаружения сигналов на фоне шума, основанный на статистических свойствах усеченных порядковых статистик (УПС). Приведены сравнительные результаты моделирования системы обнаружения, реализующей «классический» (однопороговый) алгоритм и системы обнаружения, реализующей алгоритм на основе УПС (двухпороговый).

Ключевые слова: дискретные составляющие, спектральная плотность мощности, теория случайных функций, проверка статистических гипотез, порядковая статистика, математическое моделирование.

1. Введение

Во многих системах обработки локационной информации, работающих в пассивном режиме, системах спектрального анализа и анализа вибраций решаются задачи обнаружения сигнала на фоне помехи, причем статистические свойства сигнала и помехи одинаковы и единственным их отличием являются энергии (дисперсии).

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ 13-08-00744А.

² Игорь Михайлович Рудько, кандидат технических наук, с.н.с. (igor-rudko@mail.ru).

При этом, например, в пассивных локационных системах [1] сигнал появляется в случайные моменты времени, его продолжительность также случайна, известными параметрами являются только статистические свойства помехи, и даже энергетические спектры шума и сигнала близки по форме.

Рассмотрим обнаружитель, работающий по принципу сравнения некоторой скалярной функции от наблюдений (решающей статистики) с порогом, выбираемым из условия заданной вероятности ложной тревоги α . По этому принципу устроены почти все системы обнаружения [1, 5]. Пусть решение о наличии или отсутствии сигнала принимается на основе полученной после предварительной обработки сигнала совокупности независимых гауссовских случайных величин X_1, X_2, \dots, X_N с нулевым математическим ожиданием. Обозначим через $\sigma_{\text{ш}}^2$ дисперсию помехи, а через σ_c^2 – дисперсию сигнала. При отсутствии сигнала случайные величины X_i имеют дисперсию $\sigma_{\text{ш}}^2$ (гипотеза $H_0: N(0, \sigma_{\text{ш}}^2)$), а при наличии сигнала – дисперсию $\sigma_{\text{ш}}^2 + \sigma_c^2$ (гипотеза $H_1: N(0, \sigma_{\text{ш}}^2 + \sigma_c^2)$).

При сделанных предположениях решающая статистика представляет собой монотонное отношение правдоподобия, и тем самым в данном случае существует равномерно наиболее мощный критерий (правило решения) для проверки гипотезы $H_0 - \sigma_c^2 = 0$ (сигнал отсутствует) против альтернативы $H_1 - \sigma_c^2 > 0$ (сигнал есть) [7], а оптимальное правило принятия решения формулируется следующим образом: величина

$$Y = \sum_{i=1}^N X_i^2$$

сравнивается с порогом h , и если $Y \leq h$, то принимается решение, что сигнала нет, а если $Y > h$, то принимается решение, что сигнал имеется. При этом порог h определяется из условия

$$\int_h^{\infty} f_{\text{ш}}(y) dy = \alpha,$$

где α – заданная вероятность ложной тревоги, а $f_{\text{ш}}(y)$ – плотность вероятности статистики Y в случае отсутствия полезного сигнала. При сформулированных выше предположениях

$$f(y) = \frac{1}{2^{N/2} \sigma^N \Gamma(\frac{N}{2})} \left(\frac{y}{\sigma^2}\right)^{\frac{N}{2}-1} e^{-\frac{y}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma^2} k_N\left(\frac{y}{\sigma^2}\right), \quad y \geq 0,$$

где $k_N(y)$ – плотность вероятности χ^2 -распределения с N степенями свободы, а нормирующий параметр $\sigma^2 = \sigma_{ш}^2$ для гипотезы H_0 и $\sigma^2 = \sigma_c^2 + \sigma_{ш}^2$ для гипотезы H_1 .

В настоящей работе для систем обнаружения, производящих обработку сигналов в частотной области, реализующих алгоритм проверки двух статистических гипотез и использующих энергетический критерий обнаружения, исследуется алгоритм обнаружения сигналов на фоне шума, основанный на статистических свойствах усеченных порядковых статистик (УПС) [9, 10].

2. Моменты усеченной порядковой статистики

В работах [9, 10] введено понятие усеченные порядковые статистики (УПС) и исследованы их моменты.

Рассмотрим выборку, состоящую из m независимых случайных величин X_i : $\{X_1, \dots, X_i, \dots, X_m\}$. Пусть случайная величина X_i описывается функцией плотности распределения

$$(1) \quad f(x) = \frac{1}{\sigma^2} k_n\left(\frac{x}{\sigma^2}\right), \quad x \geq 0,$$

где $k_n(\cdot)$ – плотность центрального χ^2 -распределения с n степенями свободы; σ^2 – дисперсия случайной величины X_i (нормирующий параметр). Функция распределения случайной величины X_i описывается формулой

$$(2) \quad K_n(x) = \frac{1}{2^{n/2} \sigma^n \Gamma(n/2)} \int_0^x u^{n/2-1} e^{-u/2\sigma^2} du = \int_0^{x/\sigma^2} k_n(u) du.$$

Сравним статистические свойства случайных величин Z и W , сформированных из случайной выборки X_i , $1 \leq i \leq m$, двумя различными способами:

- $Z = \sum_{i=1}^m X_i$ – имеет центральное χ^2 -распределение с nm степенями свободы и математическим ожиданием

$$(3) \quad \mu_Z = nm\sigma^2$$

и дисперсией

$$(4) \quad \sigma_Z^2 = 2nm\sigma^4,$$

и в силу центральной предельной теоремы при достаточно больших значениях m ее функция плотности распределения нормализуется

$$Z \sim N(\mu_Z, \sigma_Z^2).$$

• $W = \sum_{i=k}^m X_{(i)}$, где $X_{(i)}$, $1 \leq i \leq m$, – упорядоченные величины

(порядковые статистики) выборки X_i , такие, что

$$(5) \quad X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(k)} \leq \dots \leq X_{(m)}, \text{ а } 1 \leq k \leq m.$$

Параметры m и k являются фиксированными параметрами.

Если случайные величины X_i статистически независимы и одинаково распределены, то случайные величины $X_{(i)}$ зависимы из-за неравенств между ними. В дальнейшем будем называть статистику W усеченной порядковой статистикой (УПС), а параметр k – порогом отсека.

В работе [4] приведены выражения для вычисления моментов порядковых статистик, используя которые можно вычислить моменты УПС W .

Для выборки, описываемой формулами (1), т.е. плотностью распределения $f(x)$, и (2) – функцией распределения $K_n(x)$, формулы для вычисления моментов приобретают следующий вид:

– математическое ожидание μ_j величины $X_{(j)}$ определяется по формуле

$$\mu_j = \frac{m!}{(j-1)!(m-j)!} \int_0^{\infty} K_n\left(\frac{x}{\sigma^2}\right)^{j-1} \left[1 - K_n\left(\frac{x}{\sigma^2}\right)\right]^{m-j} x f(x) dx,$$

– дисперсия

$$\sigma_j^2 = \frac{m!}{(j-1)!(m-j)!} \int_0^{\infty} K_n\left(\frac{x}{\sigma^2}\right)^{j-1} \left[1 - K_n\left(\frac{x}{\sigma^2}\right)\right]^{m-j} (x - \mu_j)^2 f(x) dx,$$

– ковариация

$$\sigma_{jk} = E[(X_{(j)} - \mu_j)(X_{(k)} - \mu_k)] = \frac{m!}{(m-k)!(k-j-1)!(j-1)!} \int_0^{\infty} \int_0^y C(x, y) x y f(x) f(y) dx dy,$$

где

$$C(x, y) = K_n \left(\frac{x}{\sigma^2} \right)^{j-1} \left[K_n \left(\frac{y}{\sigma^2} \right) - K_n \left(\frac{x}{\sigma^2} \right) \right]^{k-j-1} \left[1 - K_n \left(\frac{y}{\sigma^2} \right) \right]^{m-k}.$$

Для случайной величины W математическое ожидание определяется по формуле

$$(6) \quad \mu_w(k) = \sum_{j=k}^m \mu_j, \quad 1 \leq k \leq m,$$

а дисперсия с учетом зависимости случайных величин $X_{(i)}$ [6]:

$$(7) \quad \sigma_w^2(k) = \sum_{l=k}^m \sigma_l^2 + 2 \sum_{k \leq j < l \leq m} \sigma_{jl}, \quad 1 \leq k \leq m.$$

Аналитические исследования статистических свойств случайной величины W очень сложны, и поэтому большинство последующих результатов получено на ПК с использованием симульного программирования в среде *MATLAB*.

В работе [10] приведены примеры гистограмм для выборок Z и W и их аппроксимации нормальными распределениями $Z \sim N(\mu_z, \sigma_z^2)$ и $W \sim N(\mu_w, \sigma_w^2)$. Наблюдается достаточно близкое совпадение гистограммы случайной величины W и нормального закона распределения, что позволяет ниже использовать аппроксимацию $W \sim N(\mu_w, \sigma_w^2)$.

На рис. 1 приведены рассчитанные по формулам (6) и (7) зависимости математических ожиданий $\mu_w(k)$ и с.к.о. $\sigma_w(k)$ от порога при следующих значениях параметров: $n = 8$, $m = 12$, $\sigma = 1$. Для случайной величины W порог k дискретный, $1 \leq k \leq m$. Из графиков видно, что $\mu_w(k)$ и $\sigma_w(k)$ – монотонно убывающие функции, причем, как следует из (3) и (4), $\mu_w(1) = \mu_z = nm$ и $\sigma_w(1) = \sigma_z = (2nm)^{1/2}$.

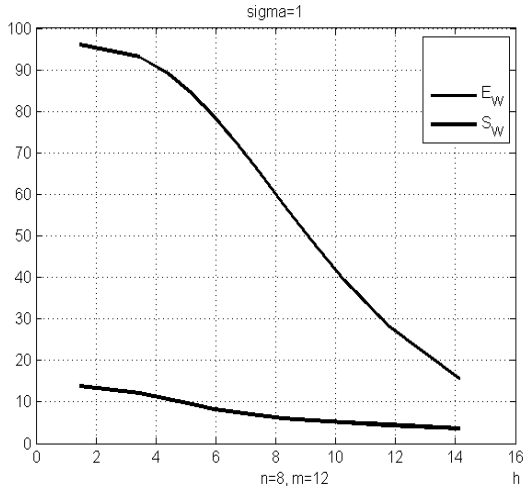


Рис. 1. Зависимости математических ожиданий $\mu_w(k)$ (на рис. — E_w) и с.к.о. $\sigma_w(k)$ (на рис. — S_w) от порога k

3. Применение УПС в задачах обнаружения

Пусть на входе системы обнаружения принимается сигнал, описанный во Введении и состоящий из аддитивной смеси полезного сигнала $\eta(t)$ и помехи $\zeta(t)$. Математической моделью сигнала и помехи служит случайный процесс, так что задача обнаружения сигнала на фоне помех решается на основе статистической теории принятия решений. Распределение случайного процесса будем считать гауссовским.

Рассмотрим систему обнаружения, состоящую из последовательно соединенных входного (преддетекторного) фильтра, детектора, интегратора и порогового устройства (устройства принятия решения), т.е. реализующую обнаружение по энергетическому критерию [5, 6]. Пусть $S(t)$ — случайный процесс на выходе преддетекторного фильтра, имеющий равномерный энергетический спектр в полосе пропускания фильтра. После детектирования и интегрирования на интервале $[0, T_0]$, на выхо-

де интегратора имеем $\int_0^{T_0} S^2(t)dt$. Представляя непрерывный во времени случайный процесс $S^2(t)$ дискретными отсчетами с шагом $i \Delta t$, где $T_0 = N \Delta t$, $\Delta t = 1/2 \Delta F$, Δt – интервал дискретизации по времени, ΔF – полоса пропускания входного фильтра системы обнаружения, получаем

$$(8) \quad X = \sum_{i=1}^N S^2(i\Delta t).$$

Для некоррелированности отсчетов достаточно принять, что $\Delta t \geq \tau_k$, где τ_k – интервал корреляции процесса $S(t)$.

3.1. «КЛАССИЧЕСКАЯ» ЗАДАЧА ПРОВЕРКИ ДВУХ ГИПОТЕЗ

Закон распределения энергии принимаемого сигнала, заданный плотностью вероятности $f(x)$ случайной величины X , позволяет математически описать вероятностные характеристики обнаружения: вероятность правильного обнаружения и вероятность ложной тревоги:

$$P_{\text{лт}} = \int_h^{\infty} f_{\text{ш}}(x)dx, \quad P_{\text{обн}} = \int_h^{\infty} f_{\text{с+ш}}(x)dx,$$

где h – порог обнаружения; $f_{\text{ш}}(x)$ – плотность вероятности случайной величины X при гипотезе H_0 ; $f_{\text{с+ш}}(x)$ – плотность вероятности X при гипотезе H_1 .

Плотность распределения статистики X для гауссовского процесса $S(t)$ описывается плотностью распределения (1). Поскольку распределение для гипотезы H_0 отличается от распределения для гипотезы H_1 только величиной дисперсии, то дисперсия статистики X с плотностью распределения (1) равна

$$(9) \quad \begin{cases} \sigma_0^2(X) = 2N\sigma_{\text{ш}}^4 & \text{в случае гипотезы } H_0, \\ \sigma_1^2(X) = 2N(\sigma_{\text{ш}}^2 + \sigma_{\text{с}}^2)^2 & \text{в случае гипотезы } H_1. \end{cases}$$

Здесь N – число степеней свободы, которое в случае цифровой обработки равно числу слагаемых в сумме (8), а в случае аналоговой обработки определяется как $N = 2T_0\Delta F$.

Определим отношение сигнал/помеха в полосе ΔF как

$$(10) \rho = \frac{\sigma_c^2}{\sigma_{ш}^2}.$$

Тогда дисперсия в случае гипотезы H_1 запишется в виде

$$\sigma_1^2(X) = 2N[\sigma_{ш}^2(1+\rho)]^2 = 2N\sigma_{ш}^4(1+\rho)^2.$$

Таким образом, для гипотезы H_0 вероятность ложной тревоги $P_{лт}$ является функцией от $\sigma_{ш}^2$ и N , а для гипотезы H_1 вероятность правильного обнаружения $P_{обн}$ является функцией от $\sigma_{ш}^2$, N и ρ .

Определим вероятность обнаружения как $P_{обн} = \beta$, тогда $P_{необн} = 1 - \beta$, и в соответствии с (2) и (4)

$$(11) P_{необн} = 1 - \beta = \int_0^h \frac{1}{\sigma_1^2} k_N \left(\frac{x}{\sigma_1^2} \right) dx = \int_0^{h/\sigma_1^2} k_N(u) du = K_N(h/\sigma_1^2).$$

Здесь порог h определяется из первого уравнения (9) путем задания вероятности ложной тревоги $P_{лт} = \alpha$. Тогда аналогично формуле (11)

$$1 - \alpha = \int_0^{h/\sigma_0^2} k_N(u) du = K_N(h/\sigma_0^2).$$

В работе [3] приведены соотношения, связывающие между собой величины $P_{лт}$, $P_{обн}$ и ρ . Если

$$P_{лт} = \alpha = 1 - \int_0^{h/\sigma_0^2} k_N(u) du = K_N(h/\sigma_0^2) = 1 - K_N(h_0),$$

то вероятность обнаружения согласно (11) определяется выражением:

$$P_{обн} = \beta = 1 - K_N \left(\frac{h}{\sigma_1^2} \right) = 1 - K_N(h_1) = 1 - K_N \left(\frac{h}{(1+\rho)} \right).$$

При больших N χ^2 -распределение аппроксимируется гауссовским распределением $N(\mu, \sigma^2)$ со следующими параметрами:

$$\begin{cases} \mu_0 = N\sigma_{ш}^2, & \sigma_0^2 = 2N\sigma_{ш}^4 & \text{в случае гипотезы } H_0, \\ \mu_1 = N(\sigma_{ш}^2 + \sigma_c^2), & \sigma_1^2 = 2N(\sigma_{ш}^2 + \sigma_c^2)^2 & \text{в случае гипотезы } H_1. \end{cases}$$

Тогда

$$(12) \begin{cases} P_{\text{лт}} = \alpha = 1 - \Phi\left(\frac{h - m_0}{\sigma_0}\right) = 1 - \Phi(\tilde{h}_0), \\ P_{\text{обн}} = \beta = 1 - \Phi\left(\frac{h - m_1}{\sigma_1}\right) = 1 - \Phi(\tilde{h}_1). \end{cases}$$

где $\Phi(\cdot)$ – функция нормального распределения.

Приведенный выше «классический» алгоритм базируется на существовании равномерно наиболее мощного критерия для проверки гипотезы H_0 против альтернативы H_1 . При этом используется вся информация, содержащаяся в оцениваемой выборке X .

3.2. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ УПС В ЗАДАЧЕ ПРОВЕРКИ ДВУХ ГИПОТЕЗ

Разобьем интервал наблюдения $[0, T_0]$ на m равных частей. Тогда формулу (8) можно представить как

$$X = \sum_{i=1}^m X_i,$$

где X_i согласно свойству аддитивности χ^2 -распределения также имеют χ^2 -распределение с $n = N/m$ степенями свободы.

В таком представлении X полностью совпадает с рассмотренной в п. 2 случайной выборкой, состоящей из m случайных независимых величин X_i : $\{X_1, \dots, X_i, \dots, X_m\}$, причем Z описывает «классическую» задачу проверки двух гипотез, а W описывает задачу, рассматриваемую ниже.

Рассмотрим, как изменяется $P_{\text{лт}}$, $P_{\text{обн}}$ и ρ в зависимости от порога отсечения k в УПС W . Математическое ожидание $\mu_w(k)$ и дисперсия $\sigma_w^2(k)$ определяются формулами (6) и (7) и, так же как для случайной величины X , зависят только от дисперсии σ^2 . Таким образом, распределения случайной величины W для шума (H_0) и смеси сигнала с шумом (H_1) различаются только дисперсией (мощностью) σ^2 наблюдаемого сигнала $S(t)$, которая и для статистики Z и для УПС W одинакова. Следовательно, и отношения сигнал/помеха ρ для статистики Z и для УПС W также одинаковы.

Обычно для исследования зависимостей $P_{лт}$, $P_{обн}$ и ρ используют рабочие характеристики приемника (систему номограмм) [6], что требует достаточно трудоемких расчетов. В работе [9] используется более простой способ сравнения статистик для гипотез H_0 и H_1 , который может быть применен, если статистики описаны нормальными распределениями: $N_0(\mu_0, \sigma_0^2)$ и $N_1(\mu_1, \sigma_1^2)$.

Вводится коэффициент разделимости

$$(13) \gamma = \frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma_0 + \sigma_1},$$

который определяется из условия равенства ошибок первого (ложная тревога) и второго (пропуск цели) рода, т.е. $P_{ош} = P_{лт} = P_{проп}$. Очевидно, что чем больше γ , тем меньше $P_{ош}$, или, что равносильно, при $P_{лт} = const$ чем больше γ тем больше $P_{обн}$.

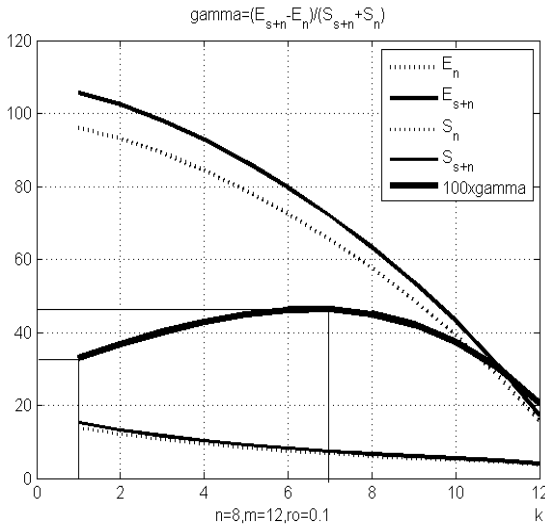


Рис. 2. Значения $\mu_w(k)$ и $\sigma_w(k)$ и соответствующие значения $\gamma(k)$ для гипотез H_0 (E_n и S_n) и H_1 (E_{s+n} и S_{s+n})

На рис. 2 приведены рассчитанные по формулам (6) и (7) значения $\mu_w(k)$ и $\sigma_w(k)$ и соответствующие значения γ , рассчитанные по формуле (13) для гипотез H_0 и H_1 , для следующих значений параметров: $n = 8$, $m = 12$, $\rho = 0,1$. При $k = 1$ $\mu_w(1) = \mu_z$, $\sigma_w(1) = \sigma_z$ и, следовательно, $\gamma_w(1) = \gamma_z$. Существует также оптимальное значение порога отсечения $k_{\text{опт}}$, обеспечивающее максимальную разделяемость (параметр γ_{max}) статистик W для гипотез H_0 и H_1 , что объясняется тем, что числитель в формуле (13) – монотонно убывающая выпуклая функция, а знаменатель – монотонно убывающая вогнутая функция (от параметра k). Функция γ достаточно гладкая, а ее максимум приблизительно совпадает с медианой плотности распределения шума.

Таким образом, процесс принятия решения при использовании УПС W является двухшаговым:

- на первом шаге по случайной выборке X_i , $1 \leq i \leq m$, строится порядковая статистика $X_{(i)}$, по которой для заданного порога отсечения k (первый порог) формируется УПС W ;

- на втором шаге процесс принятия решения тот же, что и в «классическом» алгоритме: а именно, для УПС W по заданной $P_{\text{лт}}$ выставляется порог обнаружения (второй порог), в случае превышения которого принимается решение о справедливости гипотезы H_1 .

Как уже указывалось выше, известными параметрами являются только статистические свойства помехи, а именно, математическое ожидание μ_0 и дисперсия σ_0^2 (см. (9) или (12)). Поэтому порог h определяется согласно формуле (9) из следующего уравнения:

$$\alpha = \int_0^h f_{\text{ш}}(x) dx = \frac{1}{2^{n/2} \sigma_0^n \Gamma(n/2)} \int_0^h x^{n/2-1} e^{-x^2/2\sigma_0^2} dx,$$

где α – заданный уровень квантиля, который, как следует из рис. 2, должен быть близок к медиане шума, чтобы обеспечить максимальное значение коэффициента разделяемости γ .

Рассмотрим вопрос о выборе порога отсечения k (первый порог). Как показано в [10], выбирать фиксированный порог (равный, например, медиане шума) нельзя. Из определения УПС W следует, что для того чтобы сформировать УПС W , необхо-

димому обеспечить условие $k = const$ для нескольких реализаций. Чтобы выполнить это условие, необходимо иметь несколько выборок $\{X_1, \dots, X_i, \dots, X_m\}_j$, где $1 \leq j \leq r$, из которых строится матрица X_{ij} размерностью m строк на r столбцов (будем называть r «глубиной» матрицы памяти). В каждом столбце матрицы X_{ij} строится порядковая статистика $X_{(i)j}$, затем в каждой строке полученной матрицы $X_{(i)j}$ определяются оценки математических ожиданий (вектор-столбец \hat{m})

$$\hat{m}_i = \frac{1}{r} \sum_{j=1}^r X_{(i)j}, \text{ где } 1 \leq i \leq m.$$

Порог отсечения k (первый порог) определяется из условия (14) $k = \arg \min_i |h - \hat{m}_i|$, где $1 \leq i \leq m$.

И уже по этому порогу отсечения k по матрице порядковых статистик $X_{(i)j}$ вычисляются УПС W_j , где $1 \leq j \leq r$.

Таким образом, для реализации предлагаемого алгоритма обнаружения необходимо предварительное накопление выборок $\{X_1, \dots, X_i, \dots, X_m\}_j$, где $1 \leq j \leq r$ (в отличие от «классического» алгоритма), что приводит к задержке в принятии решения на время $T = jT_0$, где $1 \leq j \leq r$. Такая задержка во многих задачах не является существенной. Как показывает проведенное математическое моделирование [9] «глубина» матрицы памяти r может быть достаточно небольшой.

Еще раз подчеркиваем, что если в «классическом» алгоритме для принятия решения используется только вектор X , то в предлагаемом алгоритме – матрица $X_{(i)j}$, в которой текущий вектор X является одним из столбцов.

4. Применение УПС в задачах обнаружения в частотной области

Описанный выше алгоритм обнаружения на основе УПС предполагает работу с широкополосными сигналами во временной области, как следует из формул (8) и (14). Большой интерес представляет также применение УПС в задачах обнаружения в частотной области. Тем более что в задачах обнаружения про-

цессор, работающий во временной области и построенный на основе многоотводной линии задержки, можно заменить эквивалентным процессором, работающим в частотной области согласно алгоритму быстрого преобразования Фурье (БПФ) [8].

В случае, когда спектральная плотность мощности (СПМ) широкополосного сигнала $G_c(f)$ отличается от СПМ помехи $G_n(f)$ (белого шума) и имеет локальные максимумы на некоторых неизвестных частотах, представляет интерес обнаружение таких максимумов.

Пусть на входе системы обнаружения принимается сигнал $S(t)$, который обрабатывается по алгоритму БПФ со следующими параметрами: Δt – интервал дискретизации по времени, $T_0 = l \Delta t$ – длина реализации, $\Delta f = 1 / T_0$ – разрешающая способность БПФ, $\Delta F = l \Delta f / 2$ – полоса анализа БПФ (полоса пропускания входного фильтра системы обнаружения).

Известно [2], что для белого шума оценки СПМ в узкой полосе Δf имеют центральное χ^2 -распределение с $n = 2N_c$ степенями свободы, где N_c – число сглаженных (накопленных) СПМ. За время $T_N = N_c T_0$ формируется матрица размерностью $(N_c \times l / 2)$ в координатах (время – j , частота – i), каждый элемент которой g_{ij} имеет центральное χ^2 -распределение с двумя степенями свободы. Для получения сглаженных оценок СПМ производится накопление

$$(15) \hat{G}_i = \sum_{j=1}^{N_c} g_{ij}, \text{ где } 1 \leq i \leq l / 2.$$

Накопив по времени r оценок (15), получаем матрицу G_{ij} , статистические свойства которой полностью идентичны свойствам матрицы X_{ij} , описанной выше в п. 3.2, за исключением того, что матрица G_{ij} сформирована в координатах (частота – i , время – j).

Как уже указывалось выше, при решении задачи обнаружения во временной области строится матрица $X_{(ij)}$, каждый столбец которой задается формулой (5), а число столбцов определяется «глубиной» матрицы памяти r .

Проводить обработку матрицы G_{ij} с применением УПС можно как по координате «время», так и по координате «частота»:

- В первом случае УПС строится по координате «частота», а координата «время» играет роль «глубины» матрицы памяти. Если при обработке во временной области отношение сигнал/помеха ρ в широкой полосе ΔF определялось формулой (10), то в частотной области определяется обобщенным отношением сигнал/помеха в широкой полосе ΔF [5]

$$(16) \quad \rho' = \frac{\sigma_{c\Sigma}^2}{\sigma_{m\Sigma}^2} = \frac{\sum_{i=1}^{l/2} \sigma_{ci}^2}{\sum_{i=1}^{l/2} \sigma_{mi}^2},$$

где σ_c^2 и σ_m^2 – дисперсии, соответственно, сигнала и шума в узкой полосе Δf_i .

Очевидно, что если и сигнал и шум – «белый шум», то $\rho' = \rho$, а если сигнал отличается от «белого шума», то в силу теоремы Парсеваля [2], которую можно применить отдельно для сигнала и шума, получаем $\sigma_{c\Sigma}^2 = \sigma_c^2$, $\sigma_{m\Sigma}^2 = \sigma_m^2$ где σ_c^2 и σ_m^2 определяются по формуле (10), т.е. опять $\rho' = \rho$.

В каждом столбце матрицы G_{ij} строится порядковая статистика $G_{(ij)}$, затем в каждой строке полученной матрицы $G_{(ij)}$ определяются оценки математических ожиданий (вектор-столбец \hat{m})

$$\hat{m}_i = \frac{1}{r} \sum_{j=1}^r G_{(ij)}, \text{ где } 1 \leq i \leq l/2.$$

Порог отсеечения k (первый порог) определяется из условия:

$$(17) \quad k = \arg \min_i |h - \hat{m}_i|, \text{ где } 1 \leq i \leq l/2.$$

И уже по этому порогу отсеечения k по матрице порядковых статистик $G_{(ij)}$ вычисляются УПС W_j , где $1 \leq j \leq r$.

- Во втором случае УПС строится по координате «время», а координата «частота» играет роль «глубины» матрицы памяти.

В каждой строке матрицы G_{ij} строится порядковая статистика $G_{i(j)}$, затем в каждом столбце полученной матрицы $G_{i(j)}$

определяются оценки математических ожиданий (вектор-строка \hat{m})

$$\hat{m}_j = \frac{2}{l} \sum_{i=1}^{l/2} G_{i(j)}, \text{ где } 1 \leq j \leq r.$$

Порог отсечения k (первый порог) определяется из условия:

$$(18) \quad k = \arg \min_j |h - \hat{m}_j|, \text{ где } 1 \leq j \leq r.$$

И уже по этому порогу отсечения k по матрице порядковых статистик $G_{i(j)}$ вычисляются УПС W_i , где $1 \leq i \leq l/2$.

При этом в каждом элементе разрешения БПФ Δf_i отношение сигнал/помеха ρ_i определяется по формуле

$$\rho_i = \frac{\sigma_{ci}^2}{\sigma_{ши}^2}.$$

Таким образом, в каждом элементе разрешения БПФ Δf_i можно проводить процедуру обнаружения независимо и обнаруживать локальные максимумы СПМ сигнала.

5. Результаты статистического моделирования

Как уже указывалось выше, аналитические исследования статистических свойств случайной величины W очень сложны, и даже с использованием символьного программирования в среде *MATLAB* на ПК не удастся рассчитать моменты статистики W для $m > 16$. В то же время реализация рассматриваемого алгоритма обнаружения на основе УПС достаточно проста и мало зависит от значений параметров m и n . Статистическое моделирование алгоритма обнаружения на основе УПС позволяет получить результаты для значительно больших значений параметров m и n и сравнить их с имеющимися аналитическими результатами.

5.1. МОДЕЛЬ «ЦВЕТНОГО» ШУМА

В качестве модели «цветного» шума используем процесс авторегрессии второго порядка над нормальным белым шумом с единичной дисперсией $x_t \sim N(0, 1)$ [2]:

$$z_t = \alpha_1 z_{t-1} + \alpha_2 z_{t-2} + x_t.$$

Легко показать, что дисперсия σ_z^2 этого процесса определяется по формуле:

$$\sigma_z^2 = \frac{(1 - \alpha_1)\sigma_x^2}{1 - \alpha_2(1 + \alpha_2 - \alpha_2^2) - \alpha_1^2(1 + \alpha_2)},$$

а плотность распределения $f(z)$ определяется следующим образом: $z_t(1 - \alpha_1 z^{-1} - \alpha_2 z^{-2}) = x_t$, где z — оператор Z -преобразования [2], тогда

$$z_t = \sum_{k=0}^{\infty} h_k x_{t-k}$$

и в силу центральной предельной теоремы $z_t \sim N(0, \sigma_z^2)$.

Для выполнения условий стационарности z_t нужно, чтобы параметры α_1 и α_2 лежали в области [2]

$$\alpha_1 + \alpha_2 < 1,$$

$$\alpha_1 - \alpha_2 < -1,$$

$$-1 < \alpha_2 < 1.$$

Для приведения z_t к единичной дисперсии необходима нормировка $\dot{z}_t = z_t / \sigma_z \sim N(0, 1)$.

На языке MATLAB была создана программа, генерирующая процесс авторегрессии второго порядка \dot{z}_t , СПМ которого для различных значений τ приведены на рис. 3, где $\tau = \sqrt{-\alpha_2}$, $\tau = 0$ — белый шум.

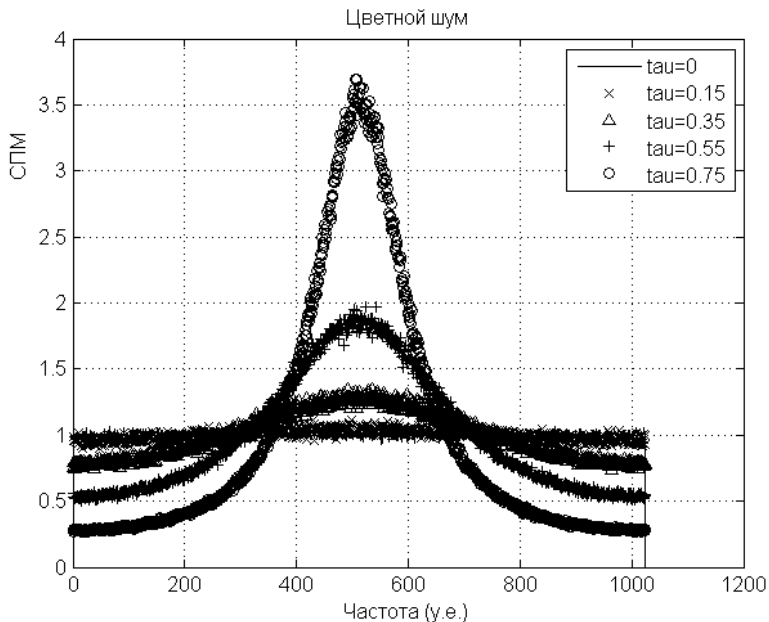


Рис. 3. СПМ процесса авторегрессии второго порядка \dot{z}_t

5.2. МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМЫ ОБНАРУЖЕНИЯ

В качестве модели сигнала на входе системы обнаружения $S(t) = \eta(t) + \zeta(t)$ используются генераторы случайных чисел, распределенных по нормальному закону с единичной дисперсией $x_t \sim N(0, 1)$.

Алгоритм моделирования следующий:

1. Формируются три выборки (вектора), состоящие из l случайных величин x_t : $\{x_{t1}, \dots, x_{ti}, \dots, x_{tl}\} - X_{ш}, X_0$ и X_c .
2. Из выборки X_c согласно п. 5.2 формируется выборка «цветного» шума Z с заданным τ .
3. Формируется выборка $X_{c+ш} = X_0 + \rho Z$, где ρ — отношение сигнал/помеха в широкой полосе ΔF .
4. По алгоритму БПФ вычисляются оценки СПМ выборок $X_{c+ш}$ и $X_{ш}$ длиной $l/2$.

5. Пп. 1–4 повторяются N_c раз для получения по формуле (15) выборочных сглаженных спектральных оценок [2] СПМ \hat{G}_i , где $1 \leq i \leq l/2$, для случаев шума и сигнала + шума.

6. П. 5 повторяется m раз – формируются матрицы G_{ij} для случаев шума и сигнала + шума.

7. По матрице G_{ij} для координат «время» или «частота» по приведенному выше алгоритму строятся оценки УПС W и соответствующие им оценки Z для «классического» алгоритма (порог отсечения $k = 1$)

8. Пп. 1–7 повторяются M раз с целью получения массивов результатов для последующей статистической обработки.

Параметры модели:

$l = 256$ – длина реализации;

$l/2 = 128$ – число частотных отсчетов БПФ;

$N_c = 8$ – число накопленных СПМ;

$h = 15,34$ – медиана χ^2 -распределения с $n = 2N_c = 16$ степенями свободы (первый порог);

$P_{лт} = 0,01$ – вероятность ложной тревоги при определении порога для «однопорогового» алгоритма и второго порога для «двухпорогового» алгоритма.

$M = 8192$ – длина выборки для статистической обработки.

На рис. 4 приведены оценки СПМ:

- выборочный белый шум $X_{ш}$ – линия 1;
- выборочный «цветной» шум Z с заданным $\tau = 0,58$ – линия 3;
- выборочный для белого шума $X_{с+ш} = X_0 + \rho X_c$, где $\rho = 0,1$ – линия 6;
- выборочный УПС для белого шума $X_{с+ш} = X_0 + \rho X_c$, где $\rho = 0,1$ – линия 2;
- выборочный для цветного шума $X_{с+ш} = X_0 + \rho Z$, где $\rho = 0,1$ – линия 4;
- выборочный УПС для цветного шума $X_{с+ш} = X_0 + \rho Z$, где $\rho = 0,1$ – линия 5.

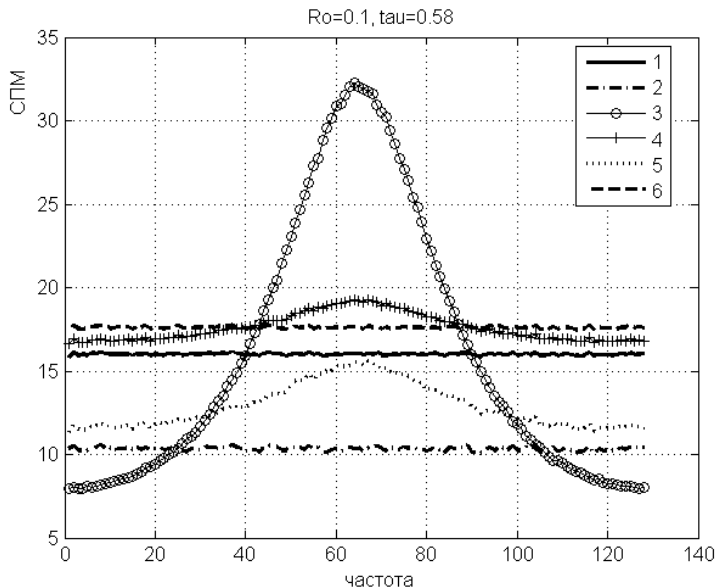


Рис. 4. Оценки СПМ моделируемых процессов

5.3. ПОСТРОЕНИЕ УПС ПО КООРДИНАТЕ «ЧАСТОТА»

В работе [9] рассматривалась работа «двухпорогового» алгоритма обнаружения на основе УПС во временной области и матрица $X_{(ij)}$ для вычисления УПС строилась в координатах (время, время), моделировалось обнаружение сигнала (белого шума) на фоне помехи (белого шума).

В настоящей работе моделируется обнаружение сигнала (цветного шума) на фоне помехи (белого шума) в частотной области. Как указывалось выше, матрица G_{ij} формируется в координатах (время – j , частота – i) из оценок СПМ (15).

Порог отсекается определяется по формуле (17).

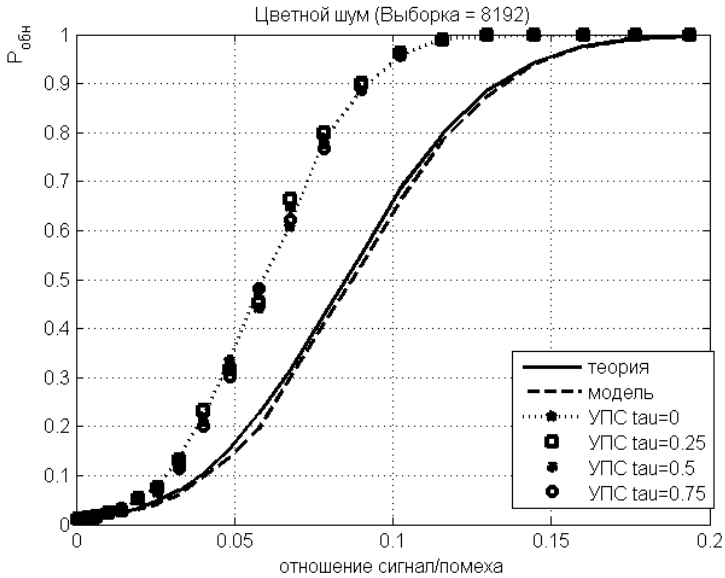


Рис. 5. Сравнение $P_{\text{обн}}$ для «однорогового» и «двухорогового» алгоритмов с различными τ

На рис. 5 приведены вероятности обнаружения $P_{\text{обн}}$ для «однорогового» и «двухорогового» алгоритмов при обнаружении сигнала, описываемого процессом авторегрессии второго порядка с различными τ (см. п. 5.2). При $\tau = 0$ сигнал – белый шум. Для «однорогового» алгоритма на рис. 5 приведены графики теоретический (теория) и рассчитанный по модели (модель).

Из приведенных графиков следует, что $P_{\text{обн}}$ практически не зависит от значений τ , а зависит только от обобщенного отношения сигнал/помеха в широкой полосе ΔF (16), что и следовало ожидать в силу теоремы Парсевала [2]

Результаты моделирования обнаружения в частотной области совпадают с результатами моделирования во временной области, приведенными в работе [9].

5.4. ПОСТРОЕНИЕ УПС ПО КООРДИНАТЕ «ВРЕМЯ»

В этом случае в каждом элементе разрешения БПФ Δf_i можно проводить процедуру обнаружения независимо и обнаруживать локальные максимумы СПМ сигнала.

Параметры модели те же, что в п. 5.3.

Порог отсеечения определяется по формуле (18).

Моделируется обнаружение сигнала (цветного шума) на фоне помехи (белого шума) для различных отношений сигнал/помеха в широкой полосе ΔF при условии, что максимум узкополосной компоненты сигнала (дискретная составляющая – ДС) превышает в 2 раза (на 3 дБ) его непрерывную часть ($\tau = 0,58$). Превышение на 3 дБ выбрано потому, что в инженерных приложениях [5] часто считают такое превышение минимально возможным для обнаружения реальных узкополосных сигналов.

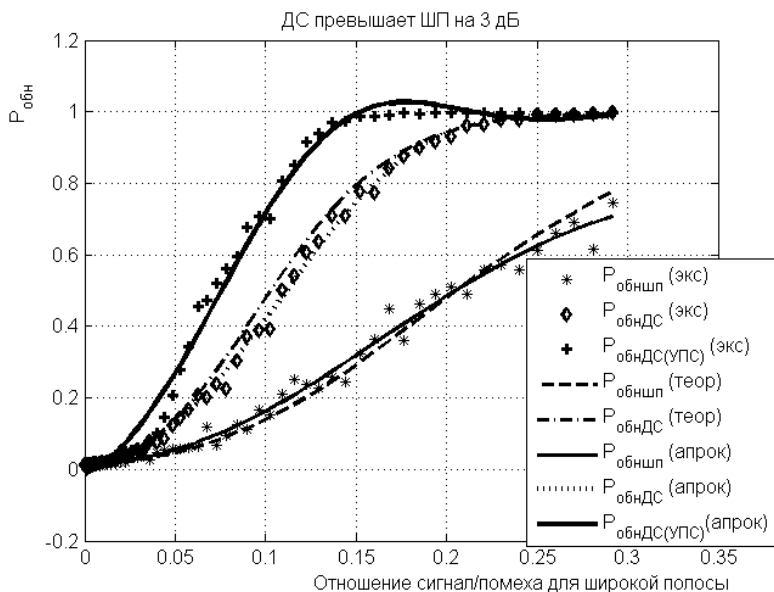


Рис. 6. Сравнение $P_{обн}$ для «однопорогового» и «двухпорогового» алгоритмов при обнаружении локального максимума цветного шума (ДС)

На рис. 6 приведены результаты моделирования вероятности обнаружения $P_{\text{обн}}$ для «однопорогового» и «двухпорогового» алгоритмов в элементе разрешения БПФ Δf_i , на котором находится максимум цветного шума ($i = 64$).

Для «однопорогового» алгоритма приведены графики (теория и эксперимент) вероятности обнаружения $P_{\text{обн}}$ для двух случаев (с одинаковыми отношениями сигнал/помеха в широкой полосе ΔF):

- обнаружения белого шума на фоне белого шума – $P_{\text{обнШП(теор)}}$ и $P_{\text{обнШП(экс)}}$;
- обнаружения цветного шума на фоне белого шума – $P_{\text{обнДС(теор)}}$ и $P_{\text{обнДС(экс)}}$.

Приведены также графики полиномиальной аппроксимации экспериментальных данных – $P_{\text{обнШП(апрок)}}$ и $P_{\text{обнДС(апрок)}}$

Для «двухпорогового» алгоритма приведены график экспериментальных данных $P_{\text{обнДС(УПС)(экс)}}$ и график его полиномиальной аппроксимации $P_{\text{обнДС(УПС)(апрок)}}$.

Из графиков рис.6 следует, что алгоритм с применением УПС обеспечивает существенный выигрыш в вероятности обнаружения $P_{\text{обн}}$ по сравнению с классическим алгоритмом.

Из сравнения графиков 4 и 5 на рис. 4 видно, что СПМ УПС имеет более выраженный максимум, чем у исходной СПМ.

6. Заключение

Разработан алгоритм обнаружения сигналов на фоне шума, основанный на свойствах усеченных порядковых статистик, который позволяет обеспечить большую вероятность обнаружения $P_{\text{обн}}$ при заданной вероятности ложной тревоги $P_{\text{лт}}$ по сравнению с «классическим» алгоритмом проверки двух гипотез. Выигрыш достигается за счет введения дополнительного порога, отсекающего малые значения обрабатываемого сигнала. Этот порог в случае временной обработки определяется с использованием информации, содержащейся в предыдущих реализациях сигнала, которая в «классическом» алгоритме не используется, а в случае обработки в частотной области с использованием ин-

формации, содержащейся во всем частотном диапазоне спектрального анализа.

Приводятся результаты статистического моделирования.

Литература

1. БУРДИК В.С. *Анализ гидроакустических систем*. – Л.: Судостроение, 1988. – 392 с
2. ДЖЕНКИНС Г., ВАТТС Д. *Спектральный анализ и его приложения*. – Т. 1. – М.: Мир, 1971. – 316 с.
3. ДОБРОВИДОВ А.В., КУЛИДА Е.Л., РУДЬКО И.М. *Выбор траектории движения объекта в конфликтной среде* // Системы управления. – 2011. – №3. – С. 64–75.
4. ДЭЙВИД Г. *Порядковые статистики*. – М.: Наука, 1979. – 336 с.
5. ЗАРАЙСКИЙ В.А., ТЮРИН А.М. *Теория гидролокации*. – Л.: ВМА, 1975. – 604 с.
6. ЛЕВИН Б.Р. *Теоретические основы статистической радиотехники*. – Т. 1. – М.: Советское радио, 1969. – 752 с.
7. ЛЕМАН Э. *Проверка статистических гипотез*. – М.: Наука, 1964. – 408 с.
8. МОНЗИНГО Р.А., МИЛЛЕР Т.У. *Адаптивные антенные решетки*. – М.: Радио и связь, 1986. – 446 с.
9. РУДЬКО И.М. *Применение порядковых статистик в задачах обнаружения* // Управление большими системами. – 2012. – №37. – С. 63–83.
10. РУДЬКО И.М. *Статистические свойства суммы членов усеченного вариационного ряда* // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2013. – №1(14). – С. 124–130.

APPLYING ORDER STATISTIC TO DETECTION PROBLEMS IN THE FREQUENCY DOMAIN

Igor Rudko, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Cand.Sc. (igor-rudko@mail.ru).

Abstract: We study detection systems operating in the frequency domain and implementing two statistical hypothesis testing with energy criterion. We propose an algorithm of signal detection in the presence of interference based on the statistical properties of the truncated order statistics (TOS). The performance of the algorithm is measured by simulation where the signal is modeled as colored noise and the interference modeled as white noise. The detection system that implements the algorithm-based two-threshold TOS criterion outperforms the “classic” one-threshold algorithm.

Keywords: discrete components, spectral power density, the theory of random functions, statistical hypothesis testing, order statistic, mathematical modeling.

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии А.А. Галяевым.*

*Поступила в редакцию 22.08.2015.
Опубликована 31.07.2016.*

УДК 519.711.7

ББК 22.1

ЦЕНА АНАРХИИ В ЗАДАЧЕ МАКСИМИЗАЦИИ МИНИМАЛЬНОЙ ЗАДЕРЖКИ МАШИН В СИСТЕМЕ ОБСЛУЖИВАНИЯ¹

Чиркова Ю. В.²

(ФГБУН Институт прикладных математических исследований
Карельского научного центра РАН, Петрозаводск)

Исследуется игра максимизации минимальной задержки системы обслуживания. Игроки распределяют свои задачи различного объема между машинами, различающимися скоростями обслуживания. Каждый игрок стремится минимизировать время обслуживания своей задачи на выбранной им машине. Выигрышем системы является минимальная среди всех машин задержка. Оптимальным для системы распределением задач по машинам является такое, где максимизируется наименьшая среди всех машин задержка. Для общего случая N машин найдена нижняя граница цены анархии и для случая трех машин найдено ее точное значение. Для двух машин доказано, что при добавлении в систему новой третьей машины цена анархии не изменяется либо растет. Также предложен алгоритм вычисления точного значения цены анархии на примере системы трех машин.

Ключевые слова: система обслуживания, максимизация минимальной задержки, равновесие по Нэшу, цена анархии.

Введение

Баланс загрузки – одна из основных проблем в сетях и системах распределенных вычислений, поскольку оптимизация загрузки

¹ Работа поддержана Программой фундаментальных исследований ОМН РАН и грантами РГНФ №15-02-00352_a и РФФИ №16-51-55006.

² Юлия Васильевна Чиркова, кандидат физико-математических наук, (julia@krc.karelia.ru).

ки обеспечивает эффективное использование ресурсов. Современные системы, такие как телекоммуникационные сети, системы облачных вычислений, GRID и т.п., состоят из независимых компонент, в них зачастую отсутствует возможность централизованного управления компонентами. В частности, пользователи в узлах и протоколы передачи данных не могут взаимодействовать друг с другом для поддержания определенного уровня загрузки. Более того, на практике они ведут себя эгоистично по отношению к свободным ресурсам. Поэтому применение методов глобальной оптимизации часто оказывается неприемлемым, так как обычно нет возможности обеспечить выполнение получаемых оптимальных планов использования ресурсов систем (расписаний обращений к серверам, норм занимаемой пропускной способности каналов передачи данных и т.п.). Теоретико-игровой подход позволяет рассматривать баланс загрузки как игру, в которой участники действуют эгоистично и могут достигать некоторого равновесного состояния, когда никому не выгодно отклоняться от выбранной стратегии. Сравнение таких равновесий с глобальным оптимумом позволяет оценить эффективность системы.

В работе рассматривается задача максимизации минимальной задержки машин, также известная как задача составления расписания [1], в виде игры, которая аналогична КР-модели (Koutsoupias, Papadimitriou) [8,9] с параллельными каналами различной пропускной способности, с тем отличием, что оптимизацией для системы считается максимизация минимальной задержки среди всех машин [4, 13, 14], а не минимизация максимальной задержки. Множество задач различных объемов должно быть распределено между машинами с различными скоростями обслуживания, на которых задачи будут выполняться. Объемом задачи считается время ее обслуживания на свободной машине со скоростью 1. Загрузкой машины является суммарный объем выполняющихся на ней задач. Отношение загрузки к скорости машины определяет ее задержку, т.е. время завершения работы данной машины. Каждый игрок выбирает машину для обслуживания своей задачи, стараясь минимизировать свою задержку. Иг-

роки действуют эгоистично и достигают равновесия по Нэшу – такого распределения задач на машинах, когда никому из игроков не выгодно единолично менять выбранную машину на другую. В данной статье рассматривается только чистое равновесие по Нэшу, известно [5,6], что для игр такого типа оно всегда существует. Выигрышем системы (или социальным выигрышем) для полученного распределения задач на машинах является минимальная задержка среди всех машин. Цена анархии [4] – это максимум отношения оптимального выигрыша системы к выигрышу системы в наихудшем равновесии по Нэшу.

Постановка задачи, где система стремится максимизировать минимальную задержку среди всех машин, возникла из концепции справедливого разделения и эффективного использования ресурсов в сетях. В работе [4], впервые исследующей эффективность равновесия в данной модели, приводятся примеры мотивации выбора такого критерия оптимальности работы системы. Основная идея состоит в том, что все компоненты системы должны быть по-возможности максимально нагружены и как можно меньше простаивать. Например, если каждый игрок платит системе за выполнение своей задачи сумму, равную его задержке, то, во-первых, не должно быть «привилегированных» игроков, платящих значительно меньше остальных благодаря удачному выбору машины, во-вторых, не должно быть машин, приносящих мало или не приносящих прибыли.

В предшествующих работах получены следующие точные значения и оценки цены анархии в играх максимизации минимальной задержки в чистых стратегиях:

- для $N \geq 2$ машин со скоростями $1 \leq \dots \leq s$ [4] цена анархии не ограничена, если $s \geq 2$;
- для произвольного числа одинаковых машин [2, 4] цена анархии близка к значению 1,7, являющемуся верхней оценкой цены анархии;
- для двух машин со скоростями $1 \leq s$ [13] цена анархии

равна

$$\begin{cases} \frac{2+s}{(1+s)(2-s)} & \text{для } 1 \leq s \leq \sqrt{2}, \\ \frac{2}{s(2-s)} & \text{для } \sqrt{2} < s < 2; \end{cases}$$

- для трех машин со скоростями $1 = 1 \leq s$ [13] цена анархии равна

$$\frac{2+s}{2(2-s)} \text{ для } 1 \leq s < 2;$$

- для иерархической модели двух машин со скоростями $1 \leq s$ и задачами двух типов, где первая машина может выполнять задачи обоих типов, а вторая – только задачи второго типа [14], цена анархии равна

$$\begin{cases} \frac{1+s}{s} & \text{для } 1 \leq s \leq s_0, \\ \frac{2+s}{(1+s)(2-s)} & \text{для } s_0 < s \leq \sqrt{2}, \\ \frac{2}{s(2-s)} & \text{для } \sqrt{2} < s < 2, \end{cases}$$

где s_0 – наибольший корень уравнения $\frac{1+s}{s} = \frac{2+s}{(1+s)(2-s)}$.

В данной работе получена нижняя оценка цены анархии для системы с числом машин от трех, также найдено точное значение оценки цены анархии для трех машин со скоростями $1 \leq r \leq s < 2$:

$$\begin{cases} \frac{2+s}{(1+r)(2-s)} & \text{для } rs \leq 2, \\ \frac{2}{r(2-s)} & \text{для } rs > 2. \end{cases}$$

Также для трех машин доказано, что при добавлении в систему новой машины цена анархии не изменяется либо растет. Для случая N машин предлагается метод нахождения точного значения цены анархии путем решения ряда задач линейного программирования. Данный метод описан на примере трех машин и реализован в виде программы, позволяющей получать графики цены анархии как функции от скорости самой быстрой из трех машин и визуально сравнивать их с графиками оценок.

1. Модель

Рассмотрим систему $S = S(N, v)$, состоящую из N обслуживающих машин со скоростями $v_1 = 1 \leq \dots \leq v_N = s$. Заметим, что такой выбор скоростей машин в системе не нарушает общность, так как всегда можно пронормировать скорости, разделив их на скорость самой медленной машины. Система используется множеством игроков $U = U(n, w)$, где каждый из n игроков выбирает машину для обслуживания своей задачи. Объем задачи игрока j равен w_j , $j = 1, \dots, n$. Суммарный объем всех задач обозначим как $W = \sum_{j=1}^n w_j$. Время выполнения задачи объемом w на свободной машине i со скоростью v_i равно w/v_i .

Рассмотрим следующую игру $\Gamma = \langle S(N, v), U(n, w), \lambda \rangle$ в чистых стратегиях. Полагаем, что каждый игрок может выбирать любую из машин. Стратегией игрока j является номер машины l_j , которую он выбирает для выполнения своей задачи. Тогда профиль стратегий в игре Γ – это вектор $L = (l_1, \dots, l_n)$. Загрузку машины i , т.е. суммарный объем задач на ней, обозначим как $\delta_i(L) = \sum_{j=1, \dots, n: l_j=i} w_j$. Задержка машины i обозначается как

$$\lambda_i(L) = \sum_{j=1, \dots, n: l_j=i} w_j / v_i = \frac{\delta_i(L)}{v_i};$$

заметим, что она одинакова для всех игроков, выбравших данную машину.

Предполагаем, что целью системы является минимизация простаивающей наименее занятой машины, т.е. максимизация времени ее работы или задержки на ней. Выигрыш системы определяется как минимальная среди всех машин задержка

$$SC(L) = \min_{i=1, \dots, N} \lambda_i(L).$$

Обозначим

$$OPT = OPT(S, U) = \max_{L \text{ профиль в } \Gamma(S, U, \lambda)} SC(L)$$

– оптимальный выигрыш, или выигрыш системы в оптимальном случае, где максимум находится среди всех возможных профилей стратегий в игре $\Gamma(S, U, \lambda)$.

Профиль стратегий L , где ни одному игроку не выгодно единолично менять выбранную в L машину на другую для выполнения своей задачи, называется чистым равновесием по Нэшу. Для того чтобы дать формальное определение, обозначим через $L(j \rightarrow i) = (l_1, \dots, l_{j-1}, i, l_{j+1}, \dots, l_n)$ профиль, получаемый из профиля L , если игрок j меняет выбранную им в L машину l_j на некоторую машину i , а все остальные игроки сохраняют свои стратегии неизменными.

Определение 1. Профиль стратегий L называется чистым равновесием по Нэшу тогда и только тогда, когда каждый игрок выбрал машину с минимальной задержкой, т.е. для каждого игрока $j = 1, \dots, n$ выполняется $\lambda_{l_j}(L) \leq \lambda_i(L(j \rightarrow i))$ для всех машин $i = 1, \dots, N$.

Определение 2. Ценой анархии для системы S называется максимум отношения оптимального выигрыша к выигрышу системы в наихудшем равновесии:

$$PoA(S) = \max_U \frac{OPT(S, U)}{\min_{L - \text{равновесие по Нэшу в } \Gamma(S, U, \lambda)} SC(L)}.$$

2. Общий случай N машин

Приведем в данном разделе предположения и результаты, которые будут использованы в дальнейшем анализе.

Пусть имеется $N \geq 2$ машин со скоростями $v_1 = 1 \leq \dots \leq v_N = s$. Если количество задач n меньше числа машин N , то очевидно, что для любого профиля выигрыш системы будет нулевым. Для этого случая значение отношения оптимального выигрыша к равновесному по определению считаем равным 1. Далее полагаем, что $n \geq N$.

Если $s \geq 2$, то цена анархии не ограничена [4]. Далее везде будем полагать, что $s < 2$. Если количество задач n более или

равно числу машин N , то в оптимальном случае, очевидно, все машины будут заняты. Более того, в любом равновесии в этом случае также все машины будут заняты.

Очевидна следующая оценка для оптимального выигрыша системы:

$$(1) \quad OPT \leq \frac{W}{\sum_{i=1}^N v_i},$$

так как минимальная задержка на машине не может быть больше, чем в случае, когда все задержки на машинах одинаковы.

Следующие леммы определяют оценки для равновесных задержек и объемов некоторых задач на машинах. Для полноты изложения леммы, заимствованные из внешних источников, также приведем с доказательствами.

Лемма 1. [13] *Если общее число задач n не меньше числа машин N , то для любого равновесного профиля загрузки всех машин больше нуля.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный равновесный профиль L . Пусть на некоторой машине i загрузка равна 0. Тогда найдется машина k , на которой находится не менее двух задач. Так как $v_1 = 1 \leq \dots \leq v_N = s < 2$, выполняется $v_i > \frac{v_k}{2}$. Пусть w_k – объем минимальной задачи на k . Если она перейдет на свободную машину i , то ее задержка станет равна $\frac{w_k}{v_i} < \frac{2w_k}{v_k} \leq \lambda_k(L)$, т.е. уменьшится по сравнению с задержкой в профиле L .

Для профиля L обозначим n_k число задач на машине k .

Лемма 2. [13] *Если L – равновесный профиль и $SC(L) = \lambda_i(L)$, то для любой машины k из $n_k > \frac{v_k}{v_i}$ следует $\lambda_k(L) \leq \frac{n_k v_i}{n_k v_i - v_k} \lambda_i(L)$;*

Доказательство. Пусть w – наименьшая по объему задача на машине k . Тогда $w \leq \frac{v_k}{n_k} \lambda_k(L)$. L – равновесие, тогда $\lambda_k(L) \leq \lambda_i(L) + \frac{w}{v_i} \leq \lambda_i(L) + \frac{v_k}{n_k v_i}$, откуда $\lambda_k(L) \leq \frac{n_k v_i}{n_k v_i - v_k} \lambda_i(L)$.

Лемма 3. *Если L – равновесный профиль и $SC(L) = \lambda_i(L)$, то для любой машины k из $n_k \geq 2$ и $1 \leq \frac{v_k}{v_i} < 2$ следует, что объем любой задачи w_j на машине k не более $\frac{v_i v_k}{2v_i - v_k} \lambda_i(L)$. Более*

того, суммарный объем остальных задач на k также не превосходит $\frac{v_i v_k}{2v_i - v_k} \lambda_i(L)$.

Доказательство. Пусть на машине k не менее двух задач. Пусть w – объем наименьшей на k задачи. Тогда объем остальных задач на k равен $v_k \lambda_k(L) - w$. Так как L – равновесие, то $\lambda_k(L) = \frac{v_k \lambda_k(L)}{v_k} \leq \lambda_i(L) + \frac{w}{v_i}$, откуда $v_k \lambda_k(L) - w \leq v_k \lambda_i(L) + \left(\frac{v_k}{v_i} - 1\right) w \leq v_k \lambda_i(L) + \left(\frac{v_k}{v_i} - 1\right) w_{j:l_j=k} \leq v_k \lambda_i(L) + \left(\frac{v_k}{v_i} - 1\right) (v_k \lambda_k(L) - w)$. Тогда $w \leq w_{j:l_j=k} \leq v_k \lambda_k(L) - w \leq \frac{v_i v_k}{2v_i - v_k} \lambda_i(L)$.

Следующая теорема определяет нижнюю границу для цены анархии для системы с $N \geq 3$ машин. Данная граница определяется скоростями трех машин в системе: первой и второй, которые являются самыми медленными, и последней, самой быстрой.

Теорема 1. Для системы $N \geq 3$ машин со скоростями $v_1 = 1 \leq v_2 = r \leq v_3 \leq \dots \leq v_N = s < 2$ цена анархии не меньше чем

$$(2) \quad est(r, s) = \min\left\{\frac{2+s}{(1+r)(2-s)}, \frac{2}{r(2-s)}\right\}.$$

Доказательство. Для доказательства верхней оценки цены анархии достаточно привести примеры систем, дающих указанные в условии теоремы значения отношения оптимального выигрыша к наихудшему равновесному. Пусть в системе каждая машина i имеет скорость v_i для всех $i = 1, \dots, N$.

1. Пусть сначала $rs \leq 2$. Тогда $est(r, s) = \frac{2+s}{(1+r)(2-s)}$. Рассмотрим набор задач: $w_1 = w_2 = (1+r)s$, $w_3^i = v_i(2+s)$, где $i = 3 \dots, N$, $w_4 = 2r - s$, $w_5 = 2 - rs$. В равновесии L задачи w_1 и w_2 находятся на машине N , каждая задача w_3^i , $i = 3 \dots, N$, на машине $i - 1$, задачи w_4 и w_5 на машине 1. Покажем, что это равновесие и найдем выигрыш системы.

Загрузка на машине N равна $2s(1+r)$, на машине 1 она равна $(1+r)(2-s)$. На каждой из машин $i = 2, \dots, N - 1$ загрузка равна $v_{i+1}(2+s)$. Так как $\lambda_N(L) = 2(1+r) > (1+r)(2-s) = \lambda_1(L)$ и $\lambda_i(L) = \frac{v_{i+1}(2+s)}{v_i} \geq (1+r)(2-s) = \lambda_1(L)$, $i = 2, \dots, N - 1$, благодаря тому, что $2+s > 1+r$, $v_{i+1} \geq v_i$ и $2-s \leq 1$, то на машине 1 задержка наименьшая и равна загрузке.

Обозначим $\lambda_i^j(L) = \lambda_i(L) + \frac{w_j}{v_i}$ задержку на машине i в случае, если задача j отклонится от профиля L и перейдет на машину i с другой машины. Задача w_1 или w_2 не перейдет на машину i , $i = 2, \dots, N - 1$, так как $\lambda_N(L) = 2(1 + r) \leq (2 + s) + (1 + r) \leq \frac{v_{i+1}(2+s)+s(1+r)}{v_i} = \lambda_i^1(L) = \lambda_i^2(L)$. Также она не перейдет на машину 1, так как $\lambda_N(L) = 2(1 + r) = (1 + r)(2 - s) + s(1 + r) = \lambda_1^1(L) = \lambda_1^2(L)$. Каждая из задач w_3^i , $i = 3, \dots, N$, не перейдет на машину N , так как $\lambda_{i-1}(L) = \frac{v_i(2+s)}{v_{i-1}} \leq 2(1+r) + \frac{v_i(2+s)}{s} = \lambda_N^{i3}(L)$, что равносильно неравенству $(s - v_{i-1})v_i(2 + s) \leq 2sv_{i-1}(1 + r)$, которое справедливо, благодаря $s - v_{i-1} < 1$, $2 + s < 4$ и $2\frac{s}{v_i}v_{i-1}(1 + r) \geq 4$. Также никакая из задач w_3^i , $i = 3, \dots, N$, не перейдет на машину $j > i - 1$, так как $\lambda_{i-1}(L) = \frac{v_i(2+s)}{v_{i-1}} < \frac{2v_i(2+s)}{v_j} \leq \frac{(v_i+v_j)(2+s)}{v_j} = \lambda_j^{i3}(L)$. Кроме того, w_3^i не перейдет на более медленную машину 1 или $j < i - 1$, и ни одна задача с машины 1 не перейдет на другую машину, так как на машине 1 задержка минимальна. Поэтому данный профиль является равновесием с выигрышем $(1 + r)(2 - s)$.

Рассмотрим профиль, в котором каждая задача w_3^i , $i = 3, \dots, N$, находится на машине i , задачи w_1 и w_4 на машине 2 и задачи w_2 и w_5 на машине 1. Для этого профиля выигрыш системы равен $2 + s$, значит, $OPT \geq 2 + s$.

2. Пусть теперь $rs > 2$. Тогда $est(r, s) = \frac{2}{r(2-s)}$. Рассмотрим набор задач: $w_1 = w_2 = rs$, $w_3^i = 2v_i$, $i = 3, \dots, N$, $w_4 = r(2 - s)$. В равновесии w_1 и w_2 находятся на машине N , каждая задача w_3^i , $i = 3, \dots, N$, на машине $i - 1$, задача w_4 на машине 1. Покажем, что это равновесие и найдем выигрыш системы.

Так как $\lambda_N(L) = 2r > r(2 - s) = \lambda_1(L)$ и $\lambda_i(L) = \frac{2v_{i+1}}{v_i} \geq r(2 - s) = \lambda_1(L)$, $i = 2, \dots, N - 1$, благодаря $\frac{2}{v_i} \geq 1$, $v_{i+1} \geq r$ и $2 - s < 1$, то на машине 1 задержка наименьшая и равна $r(2 - s)$. Задача w_1 или w_2 не перейдет на машину i , $i = 2, \dots, N - 1$, так как $\lambda_N(L) = 2r = r + r \leq \frac{2v_{i+1}+rs}{v_i} = \lambda_i^1(L) = \lambda_i^2(L)$, а также на машину 1, так как $\lambda_N(L) = 2r = r(2 - s) + rs = \lambda_1^1(L) = \lambda_1^2(L)$. Задача w_3^i , $i = 3, \dots, N$, не перейдет на машину N , так как $\lambda_{i-1}(L) = \frac{2v_i}{v_{i-1}} \leq 2r + \frac{2v_i}{s} = \lambda_N^{i3}(L)$, благодаря $\frac{2v_i(s-v_{i-1})}{s} \leq 2rv_i$.

Также никакая из задач $w_3^i, i = 3, \dots, N$, не перейдет на машину $j > i - 1$, так как $\lambda_{i-1}(L) = \frac{2v_i}{v_{i-1}} \leq \frac{4v_i}{v_j} \leq \frac{2(v_i+v_j)}{v_j} = \lambda_j^{i3}(L)$. Кроме того, w_3^i не перейдет на более медленную машину 1 или $j < i - 1$. Ни одна задача на машине 1 не перейдет на другие машины с не меньшей задержкой. Поэтому данный профиль является равновесием с выигрышем $r(2 - s)$.

Рассмотрим профиль, в котором каждая задача $w_3^i, i = 3, \dots, N$, находится на машине i , задачи w_1 и w_4 на машине 2 и задача w_2 на машине 1. Для этого профиля выигрыш системы равен 2, значит, $OPT \geq 2$.

В обоих рассмотренных случаях отношение оптимального выигрыша к равновесному равно $est(r, s)$, следовательно, цена анархии не меньше данного значения.

Из полученной оценки (2) видно, что при увеличении скорости самой быстрой машины и приближении ее к значению 2 нижняя граница цены анархии неограниченно растет. Соответственно, получаем следствие из предыдущей теоремы.

Следствие 1. Для системы $N \geq 3$ машин со скоростями $v_1 = 1 \leq v_2 = r \leq v_3 \leq \dots \leq v_N = s < 2$ цена анархии стремится к бесконечности при $s \rightarrow 2 - 0$.

Следующая теорема показывает, что для нахождения цены анархии достаточно ограничиться рассмотрением только тех игр, для которых оптимальный выигрыш системы равен 1.

Теорема 2. Цена анархии для системы S равна

$$PoA(S) = \max_{U_1: OPT(S, U_1)=1} \frac{1}{\min_{L - \text{равновесие по Нэшу в } \Gamma(S, U_1, \lambda)} SC(L)}.$$

Доказательство. Покажем, что в любой игре $\Gamma(S, U, \lambda)$ объемы задач можно пронормировать таким образом, что оптимальный выигрыш будет равен единице, а значение отношения оптимального выигрыша к выигрышу в наихудшем равновесии не изменится.

Пусть L – наихудшее равновесие в игре $\Gamma(S, U, \lambda)$ с произвольным множеством игроков $U(n, w)$, где объем задачи каж-

дого игрока j равен w_j , а L_{OPT} – оптимальный профиль в этой игре. Значение выигрыша системы в L равно SC , и выигрыш системы в оптимальном профиле равен OPT . Отношение оптимального выигрыша системы к наихудшему равновесному $\frac{OPT}{SC}$. Так как L – равновесие, то для любого игрока j

$$\frac{\sum_{k=1, \dots, n: l_k = l_j} w_k}{v_{l_j}} \leq \frac{\sum_{k=1, \dots, n: l_k = i} w_k + w_j}{v_i} \text{ для любой машины } i.$$

Рассмотрим теперь игру с тем же набором машин и игроков, но где у каждого игрока j объем задачи равен $\frac{w_j}{OPT}$. Значение выигрыша системы в L равно $\frac{SC}{OPT}$, и выигрыш системы в L_{OPT} равен 1. Благодаря свойству линейной однородности задержек на машинах относительно их загрузок профили L и L_{OPT} являются, соответственно, наихудшим равновесием и оптимальным профилем в новой игре. В частности, L является равновесием в новой игре, так как для любого игрока j справедливо

$$\frac{\sum_{k=1, \dots, n: l_k = l_j} w_k}{v_{l_j} OPT} \leq \frac{\sum_{k=1, \dots, n: l_k = i} w_k + w_j}{v_i OPT} \text{ для любой машины } i.$$

Пусть L – не наихудшее равновесие в новой игре. Тогда в ней существует равновесие L' с выигрышем системы $\frac{SC'}{OPT}$, такое что выигрыш системы в L' меньше выигрыша системы в L , т.е. $\frac{SC'}{OPT} < \frac{SC}{OPT}$. Но тогда в исходной игре профилю L' соответствует выигрыш системы $SC' < SC$, и равновесие L' хуже равновесия L . Аналогично, L_{OPT} является оптимальным профилем в новой игре. Тогда отношение оптимального выигрыша системы к выигрышу в наихудшем равновесии в новой игре также равно $\frac{OPT}{SC}$.

Следовательно, любой игре $\Gamma(S, U, \lambda)$ соответствует игра $\Gamma(S, U_1, \lambda)$ с объемами задач, нормированными таким образом, что $OPT(S, U_1) = 1$. При этом отношения оптимального выигрыша к выигрышу в наихудшем равновесии для обеих игр одинаковы. Значит, для нахождения цены анархии достаточно рассмотреть только те игры, в которых оптимальный выигрыш равен 1.

3. Случай 3 машин

Точное значение цены анархии для случая двух машин найдено в работе [13]. Рассмотрим теперь случай, когда система S состоит из 3 машин. В данном разделе без потери общности полагаем, что скорости машин следующие: $v_1 = 1 \leq v_2 = r \leq v_3 = s$, т.е. машина 1 – самая медленная, машина 2 имеет среднюю скорость и машина 3 – самая быстрая.

Лемма 4. Для системы трех машин со скоростями $v_1 = 1 \leq v_2 = r \leq v_3 = s$ для любой задачи объемом w_k справедливо $OPT \leq \frac{W-w_k}{1+r}$.

Доказательство. Пусть существует такая задача w_k , находящаяся на машине i в оптимальном профиле L , что $OPT > \frac{W-w_k}{1+r}$. Тогда оптимальные задержки на всех машинах больше $\frac{W-w_k}{1+r}$. Кроме того, понятно, что $\lambda_i(L) \geq \frac{w_k}{v_i}$. Отсюда $W = v_i \lambda_i(L) + v_j \lambda_j(L) + v_l \lambda_l(L) > w_k + (v_j + v_l) \frac{W-w_k}{1+r} \geq w_k + (1+r) \frac{W-w_k}{1+r} = W$.

Лемма 5. Для системы трех машин со скоростями $v_1 = 1 \leq v_2 = r \leq v_3 = s$, если известно, что две задачи с объемами w_{k_1} и w_{k_2} в оптимальном профиле находятся на одной и той же машине, то справедливо $OPT \leq \frac{W-w_{k_1}-w_{k_2}}{1+r}$.

Доказательство. Пусть $OPT > \frac{W-w_{k_1}-w_{k_2}}{1+r}$ и задачи с объемами w_{k_1} и w_{k_2} в оптимальном профиле находятся на машине i . Тогда оптимальные задержки на всех машинах больше $\frac{W-w_{k_1}-w_{k_2}}{1+r}$ и $\lambda_i(L) \geq \frac{w_{k_1}+w_{k_2}}{v_i}$. Тогда $W = v_i \lambda_i(L) + v_j \lambda_j(L) + v_l \lambda_l(L) > w_{k_1} + w_{k_2} + (v_j + v_l) \frac{W-w_{k_1}-w_{k_2}}{1+r} \geq w_{k_1} + w_{k_2} + (1+r) \frac{W-w_{k_1}-w_{k_2}}{1+r} = W$.

Теорема 3. Для системы трех машин со скоростями $v_1 = 1 \leq v_2 = r \leq v_3 = s < 2$ цена анархии не превосходит $est(r, s) = \min\left\{\frac{2+s}{(1+r)(2-s)}, \frac{2}{r(2-s)}\right\}$.

Доказательство. В ходе доказательства рассматриваются случаи с определенным количеством задач на каждой из двух машин с наибольшей задержкой. Для каждого случая показыва-

ется справедливость указанной в условии теоремы оценки цены анархии. Пусть L – равновесный профиль и $SC(L) = \lambda_i(L)$, т.е. машина i имеет наименьшую задержку. Рассмотрим различные случаи равновесия L .

1. На машинах j и l находится по одной задаче. В оптимальном профиле эти две задачи займут не более двух машин. Тогда в оптимальном профиле будет машина k , на которую попадет частично или полностью равновесная загрузка машины i и ничего больше. То есть $OPT \leq \frac{v_i \lambda_i(L)}{v_k} \leq s \lambda_i(L)$. По лемме 9 $s \leq est(r, s)$.

2. На машине j находится $n_j \geq 2$ задач, на машине l находится $n_l = 1$ задача. По лемме 2 $\lambda_j(L) \leq \frac{2v_i}{2v_i - v_j} \lambda_i(L)$. По лемме

$$4 \text{ OPT} \leq \frac{v_i \lambda_i(L) + \frac{2v_i v_j}{2v_i - v_j} \lambda_i(L)}{1+r} = \lambda_i(L) \frac{2v_i^2 + v_i v_j}{(1+r)(2v_i - v_j)}.$$

а) Пусть сначала $v_i \geq v_j$. Тогда $2v_i^2 + v_i v_j \leq 3v_i^2$, так как данное выражение возрастает по v_j . Также $2v_i - v_j \geq v_i$, так как данное выражение убывает по v_j . Тогда $OPT \leq \lambda_i(L) \frac{3v_i}{1+r} \leq \lambda_i(L) \frac{3s}{1+r} \leq \lambda_i(L) est(r, s)$ по лемме 10.

б) Пусть теперь $v_i < v_j$. Тогда по лемме 11 $\frac{2v_i^2 + v_i v_j}{(1+r)(2v_i - v_j)} < \frac{2+s}{(1+r)(2-s)}$.

Рассмотрим теперь два случая. Первый, когда $v_i = r$ и $v_j = s$. В этом случае по лемме 12 $\frac{2r^2 + rs}{(1+r)(2r-s)} < \frac{2}{r(2-s)}$.

Второй случай, когда $v_i = 1$. По лемме 3 $w_k \leq \frac{v_k}{2-v_k} \lambda_i(L) \leq \frac{s}{2-s} \lambda_i(L)$ и $v_j \lambda_j(L) - w_k \leq \frac{s}{2-s} \lambda_i(L)$ для любой задачи объемом w_k из находящихся на машине j .

Если все задачи, находящиеся в профиле L на машине j , останутся там же и в оптимальном профиле, то возможны два варианта. Либо единственная в равновесии задача на машине l остается там же и в оптимальном профиле, тогда загрузка машины i может только уменьшиться при переходе к оптимальному профилю. Либо единственная задача уходит с машины l , тогда на машине l в оптимальном профиле может оказаться загрузка не более чем $\lambda_i(L)$, которая придет с машины i . В обоих вариантах $OPT \leq \lambda_i(L)$.

Если при переходе к оптимальному профилю задачи с машины j уходят только на l , то возможны те же два варианта. Если единственная в равновесии задача на машине l остается там же и в оптимальном профиле, то загрузка машины i может только уменьшиться при переходе к оптимальному профилю. Тогда $OPT \leq \lambda_i(L)$. Либо единственная задача уходит с машины l , тогда на машине l в оптимальном профиле может оказаться загрузка не более чем $\lambda_i(L) + \frac{s}{2-s}\lambda_i(L)$, которая придет с машин i и j . Тогда $OPT \leq \lambda_i(L) \frac{1+\frac{s}{2-s}}{v_l} \leq \lambda_i(L) \frac{1+\frac{s}{2-s}}{r} = \lambda_i(L) \frac{2}{r(2-s)}$.

Если при переходе к оптимальному профилю часть задач с машины j попадает на i , то возможны те же два варианта. Если единственная в равновесии задача на машине l остается там же и в оптимальном профиле, то на машине j загрузка станет не более чем $\lambda_i(L) + \frac{s}{2-s}\lambda_i(L)$, которая складывается из того, что останется на j и может прийти с i . Тогда $OPT \leq \lambda_i(L) \frac{1+\frac{s}{2-s}}{v_j} \leq \lambda_i(L) \frac{1+\frac{s}{2-s}}{r} = \lambda_i(L) \frac{2}{r(2-s)}$. Если единственная задача уходит с машины l , тогда на машине l в оптимальном профиле может оказаться загрузка не более чем $\lambda_i(L) + \frac{s}{2-s}\lambda_i(L)$, которая придет с машин i и j .

3. На машинах j и l находится ровно по две задачи: $n_j = n_l = 2$. Всего на машинах j и l четыре задачи, машин всего три, поэтому в оптимальном профиле как минимум две из этих задач (w_{k_1} и w_{k_2}) попадут на одну машину. Тогда по лемме 5 $OPT \leq \frac{W-w_{k_1}-w_{k_2}}{1+r} = \frac{v_i\lambda_i(L)+w_{k_3}+w_{k_4}}{1+r}$, где w_{k_3} и w_{k_4} – остальные две задачи, находящиеся на машинах j и l .

Рассмотрим машину $k \in \{j, l\}$. Если $v_i \leq v_k$, то по лемме 3 объем любой из задач на машине k не превосходит $\lambda_i(L) \frac{v_i v_k}{2v_i - v_k}$.

Пусть теперь $v_i > v_k$. L – равновесие, поэтому $\lambda_k(L) \leq \lambda_i(L) + \frac{w}{v_i}$, где w – меньшая по объему задача на машине k . Отсюда $w \geq v_i \lambda_k(L) - v_i \lambda_i(L)$. По лемме 2 $\lambda_k(L) \leq \lambda_i(L) \frac{2v_i}{2v_i - v_k} \leq 2\lambda_i(L)$, так как $2v_i - v_k \geq v_i$, откуда $w \leq \lambda_i(L)$. Вторая, большая по объему задача на машине k имеет объем $v_k \lambda_k(L) - w \leq v_k \lambda_k(L) = v_i \lambda_i(L) - (v_i - v_k) \lambda_k(L) \leq v_i \lambda_i(L) - (v_i - v_k) \lambda_i(L) = v_k \lambda_i(L) \leq r \lambda_i(L) \leq \lambda_i(L) \frac{rs}{2r-s} \leq \lambda_i(L) \frac{s}{2-s}$.

а) Пусть $v_i = s$, тогда $OPT \leq \lambda_i(L) \frac{s+2r}{1+r} \leq \lambda_l(L) \frac{3s}{1+r} \leq \lambda_i(L) est(r, s)$ по лемме 10.

б) Пусть $v_i = r$, тогда $OPT \leq \lambda_i(L) \frac{r+2\frac{rs}{2r-s}}{1+r} = \lambda_i(L) \frac{2r^2+rs}{(1+r)(2r-s)} \leq \lambda_i(L) est(r, s)$ по лемме 11.

в) Пусть $v_i = 1$, тогда $OPT \leq \lambda_i(L) \frac{r+2\frac{s}{2r-s}}{1+r} = \lambda_i(L) \frac{2+s}{(1+r)(2r-s)}$. С другой стороны, так как машин три, то обязательно будут две машины α и β , на которые попадет не более одной задачи из рассматриваемой четверки задач и, возможно, часть загрузки с машины i . Тогда OPT не больше, чем минимум задержки из этих машин: $OPT \leq \min_{\alpha \neq \beta} \{ \lambda_i(L) \frac{2}{v_\alpha(2-s)}, \lambda_i(L) \frac{2}{v_\beta(2-s)} \} \leq \min \{ \lambda_i(L) \frac{2}{1(2-s)}, \lambda_i(L) \frac{2}{r(2-s)} \} = \lambda_i(L) \frac{2}{r(2-s)}$.

4. На машинах j и l следующее распределение задач: $n_j \geq 2$, $n_l \geq 3$. По лемме 2 $\lambda_j(L) \leq \lambda_i(L) \frac{2v_i}{2v_i-v_j}$ и $\lambda_l(L) \leq \lambda_i(L) \frac{3v_i}{3v_i-v_l}$. Тогда, в соответствии с оценкой (1), $OPT \leq \lambda_i(L) \frac{v_i + \frac{2v_i v_j}{2v_i-v_j} + \frac{3v_i v_l}{3v_i-v_l}}{1+r+s} \leq \lambda_i(L) est(r, s)$ по леммам 13 и 14.

Следующая теорема является частным случаем теоремы 1 для системы трех машин.

Теорема 4. Для системы N машин со скоростями $v_1 = 1 \leq v_2 = r \leq v_3 = s < 2$ цена анархии не менее чем $est(r, s) = \min \{ \frac{2+s}{(1+r)(2-s)}, \frac{2}{r(2-s)} \}$.

Тогда из теорем 3 и 4 следует точное значение цены анархии для системы трех машин.

Теорема 5. Для системы трех машин со скоростями $v_1 = 1 \leq v_2 = r \leq v_3 = s < 2$ цена анархии точно равна

$$\begin{cases} \frac{2+s}{(1+r)(2-s)} & \text{для } rs \leq 2, \\ \frac{2}{r(2-s)} & \text{для } rs > 2. \end{cases}$$

Наличие точного значения цены анархии позволяет установить возможность роста цены анархии при добавлении в систему новой машины, т.е. ситуации, качественно аналогичной парадоксу Браесса [7, 10–12], когда при наращивании мощности системы

ухудшаются ее характеристики. Следующая теорема доказывает, что при добавлении в систему новой машины цена анархии либо растет, либо не меняется.

Теорема 6. Для системы S , состоящей из 2 машин со скоростями $1 \leq s$ цена анархии не уменьшается при добавлении новой машины со скоростью $1 \leq q < 2$.

Доказательство. 1. Пусть в систему добавляется новая машина со скоростью $q \leq s$. Если $qs \leq s^2 < 2$, то цена анархии не уменьшается, так как $\frac{2+s}{(1+s)(2-s)} \leq \frac{2+s}{(1+q)(2-s)}$. Если $s^2 > 2$ и $qs \leq 2$, то цена анархии не уменьшается, так как $\frac{2}{s(2-s)} \leq \frac{2+s}{(1+s)(2-s)} \leq \frac{2+s}{(1+q)(2-s)}$. Если $s^2 > 2$ и $qs > 2$, то цена анархии не уменьшается, так как $\frac{2}{s(2-s)} \leq \frac{2}{q(2-s)}$.

2. Пусть в систему добавляется машина, которая по скорости превосходит имеющиеся, $s < q < 2$. Если $qs \leq 2$, то $s^2 \leq 2$, и цена анархии не уменьшается, так как $\frac{2+s}{(1+s)(2-s)} \leq \frac{2+q}{(1+s)(2-q)}$. Если $qs > 2$ и $s^2 \leq 2$, то цена анархии не уменьшается, так как $\frac{2+s}{(1+s)(2-s)} \leq \frac{2}{s(2-s)} \leq \frac{2}{s(2-q)}$. Если $qs > 2$ и $s^2 > 2$, то цена анархии не уменьшается, так как $\frac{2}{s(2-s)} \leq \frac{2}{s(2-q)}$.

4. Численный метод нахождения цены анархии

В предыдущем разделе получено аналитическое выражение для цены анархии для системы трех машин. В данном разделе предлагается метод вычисления цены анархии на примере системы трех машин, аналогичный вычислению цены анархии для игры баланса загрузки [3]. Данный метод может быть обобщен на системы с произвольным количеством машин, при этом возрастает количество задач линейного программирования, которые необходимо решать, а также число переменных и ограничений в них. В частности, для системы N машин необходимо решить $N!$ задач линейного программирования с $(2^N - 1)^{N-1}$ подзадачами в каждой на N^2 неизвестных.

Рассмотрим следующую систему линейных уравнений для компонент векторов $a = (a_1, a_2, a_3)$, $b = (b_1, b_2, b_3)$,

$$c = (c_1, c_2, c_3).$$

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{a_1+a_2+a_3}{v_i} \leq \frac{b_1+b_2+b_3 + \min_{k=1,2,3; a_k > 0} a_k}{v_j}, \\ \frac{a_1+a_2+a_3}{v_i} \leq \frac{c_1+c_2+c_3 + \min_{k=1,2,3; a_k > 0} a_k}{v_l}, \\ \frac{b_1+b_2+b_3}{v_j} \leq \frac{c_1+c_2+c_3 + \min_{k=1,2,3; b_k > 0} b_k}{v_l}, \\ \frac{a_1+a_2+a_3}{v_i} \geq \frac{b_1+b_2+b_3}{v_j} \geq \frac{c_1+c_2+c_3}{v_l}, \\ \max_{k=1,2,3} a_k > 0, \\ \max_{k=1,2,3} b_k > 0, \\ a_k, b_k, c_k \geq 0, k = 1, 2, 3. \end{array} \right.$$

Данная система представляет собой набор гиперплоскостей в 9-мерном пространстве, проходящих через точку $(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$, и множество решений представляет собой область пространства, ограниченную данными гиперплоскостями. Система совместна, так как, например, $a_1 = a_2 = a_3 = \alpha v_i$, $b_1 = b_2 = b_3 = \alpha v_j$, $c_1 = c_2 = c_3 = \alpha v_l$ является ее решением для всех $\alpha > 0$. При этом множество ее решений не ограничено, так как α может быть сколь угодно большим.

Рассмотрим систему S с тремя обслуживающими машинами со скоростями $1 \leq r \leq s < 2$. Пусть L – равновесие по Нэшу для системы S с тремя машинами и n игроками, такое что i – номер машины с наибольшей задержкой в данном профиле, машина j имеет среднюю по порядку задержку, l – наименьшую. Положим, что в равновесии L на машине i находится суммарный объем задач, равный $\sum_{k=1, \dots, n: l_k=i} w_k = a_1 + a_2 + a_3$, на машине j – объем $\sum_{k=1, \dots, n: l_k=j} w_k = b_1 + b_2 + b_3$ и на машине l – объем $\sum_{k=1, \dots, n: l_k=l} w_k = c_1 + c_2 + c_3$. Объем задач на каждой машине некоторым образом разделен на три части, так, что каждая из компонент трехмерных векторов a , b и c либо нулевая, либо положительная и включает в себя объем не менее чем одной задачи.

Лемма 6. Пусть L – такое равновесие по Нэшу для игры с

тремя машинами i, j, l и n игроков, что

$$\begin{aligned} \lambda_i(L) &\geq \lambda_j(L) \geq \lambda_l(L), \\ \sum_{k=1, \dots, n: l_k=i} w_k &= a_1 + a_2 + a_3, \\ \sum_{k=1, \dots, n: l_k=j} w_k &= b_1 + b_2 + b_3, \\ \sum_{k=1, \dots, n: l_k=l} w_k &= c_1 + c_2 + c_3, \end{aligned}$$

где для всех $k = 1, 2, 3$ каждая компонента a_k равна либо нулю, либо объему не менее чем одной задачи на машине i , b_k равна либо нулю, либо объему не менее чем одной задачи на машине j , и c_k равна либо нулю, либо объему не менее чем одной задачи на машине l . Тогда набор векторов a, b, c является решением системы (3).

Доказательство. Пусть L – равновесие по Нэшу и $\lambda_i(L) \geq \lambda_j(L) \geq \lambda_l(L)$. При этом по лемме 1 все $\lambda_k(L) > 0, k = i, j, l$. Тогда выполняются следующие неравенства

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\sum_{k=1, \dots, n: l_k=i} w_k}{v_i} \leq \frac{\sum_{k=1, \dots, n: l_k=j} w_k + \min_{k=1, \dots, n: l_k=i, w_k > 0} w_k}{v_j}, \\ \frac{\sum_{k=1, \dots, n: l_k=i} w_k}{v_i} \leq \frac{\sum_{k=1, \dots, n: l_k=l} w_k + \min_{k=1, \dots, n: l_k=i, w_k > 0} w_k}{v_l}, \\ \frac{\sum_{k=1, \dots, n: l_k=j} w_k}{v_j} \leq \frac{\sum_{k=1, \dots, n: l_k=l} w_k + \min_{k=1, \dots, n: l_k=j, w_k > 0} w_k}{v_l}, \\ \frac{\sum_{k=1, \dots, n: l_k=i} w_k}{v_i} \geq \frac{\sum_{k=1, \dots, n: l_k=j} w_k}{v_j} \geq \frac{\sum_{k=1, \dots, n: l_k=l} w_k}{v_l}. \end{array} \right.$$

Поскольку каждое ненулевое значение a_k , где $k = 1, 2, 3$, равно объему не менее чем одной задачи на машине i , то $\min_{k: a_k > 0} a_k \geq \min_{k: l_k=i, w_k > 0} w_k$, что обеспечивает выполнение первых двух неравенств системы (3). Аналогично, $\min_{k: b_k > 0} b_k \geq \min_{k: l_k=j, w_k > 0} w_k$. Это означает выполнение системы (3).

Лемма 7. Любое решение системы (3) определяет равновесие по Нэшу L в игре с системой S из 3 машин i, j, l и игроками,

задачи которых соответствуют ненулевым компонентам векторов a , b и c , а задержки упорядочены следующим образом: $\lambda_i(L) \geq \lambda_j(L) \geq \lambda_l(L)$.

Доказательство. Пусть набор векторов a , b и c является решением системы (3). Рассмотрим игру с тремя машинами i , j и l . Пусть каждая из ненулевых компонент векторов a , b и c является объемом задачи очередного игрока. Предположим, что профиль L такой, что задачи с объемами $a_k > 0$ размещаются на машине i , задачи с объемами $b_k > 0$ – на машине j и задачи с объемами c_k – на машине l . Поскольку выполняются все неравенства системы (3), профиль L является искомым равновесием по Нэшу.

Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 7. Любому равновесию по Нэшу L в игре с системой S , состоящей из 3 машин i , j , l и с n игроками соответствует равновесие по Нэшу L' в игре с той же системой S и не более 9 игроками, в котором на каждой машине размещено не более 3 задач, а задержки на машинах в L и L' совпадают.

Доказательство. Рассмотрим равновесие по Нэшу L в игре с системой S , состоящей из 3 машин с n игроками. Пронумеруем машины так, что $\lambda_i(L) \geq \lambda_j(L) \geq \lambda_l(L)$. Согласно лемме 6, для любого равновесия по Нэшу в игре с системой S и любым количеством игроков есть соответствующее решение a , b , c системы (3). Согласно лемме 7, это решение определяет такое равновесие по Нэшу L' в игре с системой S , что ненулевые компоненты вектора a являются объемами задач на машине i , ненулевые компоненты b – объемами задач на машине j и ненулевые компоненты c – объемами задач на машине l . По определению сумма компонент вектора a равна загрузке на машине i в профиле L . Следовательно, задержки на машине i совпадают в обоих равновесиях L и L' . Аналогично, для машин j и l задержки на них в равновесии L совпадают с соответствующими задержками в равновесии L' .

Из данной теоремы следует, что достаточно рассматривать только те игры, где в равновесии на каждой машине находится

не более трех задач и равновесие является решением системы (3). При этом область значений затрат системы совпадает с областью значений для игр с произвольным числом игроков.

Пусть компоненты векторов a, b, c выбираются таким образом, что в оптимальном профиле, дающем максимум выигрыша системы, на машине i находится суммарный объем задач, равный $a_1 + b_1 + c_1$, на j – объем $a_2 + b_2 + c_2$, на l – объем $a_3 + b_3 + c_3$. При этом в оптимальном профиле наименьшей может оказаться задержка на любой из трех машин. Кроме того, согласно теореме 2, объемы задач можно считать пронормированными таким образом, чтобы в оптимальном профиле минимальная среди всех машин задержка была строго равна 1. В нашем случае это означает, что справедливы следующие неравенства

$$\begin{aligned} a_1 + b_1 + c_1 &\geq v_i, \\ a_2 + b_2 + c_2 &\geq v_j, \\ a_3 + b_3 + c_3 &\geq v_l, \end{aligned}$$

причем как минимум одно из них выполняется как равенство.

Лемма 8. *Решение задачи линейного программирования относительно компонент векторов a, b, c*

$$(4) \text{ LPP}(v_i, v_j, v_l) : \left\{ \begin{array}{l} c_1 + c_2 + c_3 \rightarrow \min \\ (r1) \quad \frac{a_1 + a_2 + a_3}{v_i} \leq \frac{b_1 + b_2 + b_3 + \min_{k: a_k > 0} a_k}{v_j}, \\ (r2) \quad \frac{a_1 + a_2 + a_3}{v_i} \leq \frac{c_1 + c_2 + c_3 + \min_{k: a_k > 0} a_k}{v_l}, \\ (r3) \quad \frac{b_1 + b_2 + b_3}{v_j} \leq \frac{c_1 + c_2 + c_3 + \min_{k: b_k > 0} b_k}{v_l}, \\ (r4) \quad \frac{a_1 + a_2 + a_3}{v_i} \geq \frac{b_1 + b_2 + b_3}{v_j} \geq \frac{c_1 + c_2 + c_3}{v_l}, \\ (r5) \quad \max_{k=1,2,3} a_k > 0, \\ (r6) \quad \max_{k=1,2,3} b_k > 0, \\ (r7) \quad a_k, b_k, c_k \geq 0, k = 1, 2, 3, \\ (r8) \quad a_1 + b_1 + c_1 \geq v_i, \\ (r9) \quad a_2 + b_2 + c_2 \geq v_j, \\ (r10) \quad a_3 + b_3 + c_3 \geq v_l \end{array} \right.$$

дает минимальное значение выигрыша системы в равновесии по Нэшу среди всех игр, в которых в равновесии не более трех задач

на каждой машине, i, j, l – номера машин в порядке уменьшения задержки, а оптимальный выигрыш системы равен 1.

Доказательство. По лемме 7 любое решение неравенств $(r1) - (r7)$ задачи $LPP(v_i, v_j, v_l)$ определяет равновесие в игре с тремя машинами, где на каждой машине находится не более трех задач и i, j, l – номера машин в порядке уменьшения задержки.

Целевая функция в данной задаче ограничена снизу гиперплоскостями, соответствующими неравенствам $(r8) - (r10)$. Неравенства $(r1) - (r7)$ допускают сколь угодно малые неотрицательные значения целевой функции, в том числе нулевое. Следовательно, минимум задачи достигается на одной из границ, соответствующих трем последним неравенствам, что гарантирует выполнение одного из них как равенства, а значит, оптимальные затраты для игры, соответствующей решению задачи $LPP(v_i, v_j, v_l)$, строго равны 1.

Тогда для нахождения точного значения цены анархии для системы S с тремя машинами нужно решить ряд задач линейного программирования $LPP(v_i, v_j, v_l)$ для всех перестановок $(1, r, s)$. Минимальное из этих решений соответствует значению $\frac{1}{PoA(S)}$. То есть справедлива следующая теорема.

Теорема 8. Цена анархии для системы трех машин S равна величине $PoA(S)$, обратной значению

$$\frac{1}{PoA(S)} = \min_{(v_i, v_j, v_l) - \text{перестановки } (1, r, s)} \left\{ \frac{c_1 + c_2 + c_3}{v_l} \mid a, b, c - \text{решение } LPP(v_i, v_j, v_l) \right\},$$

где $LPP(v_i, v_j, v_l)$ – задача линейного программирования (4).

Доказательство. Согласно лемме 8, решение задачи (4) дает минимальное значение выигрыша системы в равновесии по Нэшу, где i, j, l – номера машин в порядке уменьшения задержки, среди всех игр, в которых в равновесии не более трех задач на каждой машине, а оптимальный выигрыш равен 1. Минимум решения среди задач для всех возможных перестановок $(1, r, s)$ в качестве значений (v_i, v_j, v_l) даст минимальное значение выигрыша системы в равновесии по Нэшу среди всех игр, в которых

в равновесии не более трех задач на каждой машине, а оптимальный выигрыш равен 1.

По теореме 7 для любого равновесия в игре с системой обслуживания трех машин S и произвольным числом игроков можно найти соответствующее равновесие в игре с теми же машинами и множеством не более 9 игроков, где на каждой машине находится не более трех задач, причем выигрыши системы в обоих равновесиях совпадают. Значит, для нахождения цены анархии достаточно ограничиться рассмотрением игр, где в равновесии на каждой машине находится не более трех задач.

По теореме 2 для нахождения цены анархии достаточно ограничиться рассмотрением игр, где выигрыш системы в оптимальном профиле строго равен 1.

5. Вычислительные эксперименты

Для нахождения оценок цены анархии в модели с тремя машинами разработано программное обеспечение, реализующее метод нахождения цены анархии, приведенный в предыдущем разделе. Данное программное обеспечение позволяет визуально сравнить на графике теоретические значения цены анархии и численно найденные путем решения ряда задач линейного программирования. Кроме того, данная программа дает возможность увидеть изменение цены анархии для большего числа машин, для которого еще не получены теоретические оценки. Параметры системы S задаются как опции программы, при этом скорость первой машины считается равной 1, для следующих задаются точные значения, при этом для скорости одной из машин задается диапазон значений. Таким образом можно наблюдать, как изменяется значение цены анархии при изменении скорости одной из машин.

На графиках рис. 1 и рис. 2 представлены примеры оценок цены анархии для различных значений скоростей второй и третьей машины. На рис. 1 скорость второй машины равна $r = 1,1$, а скорость третьей меняется в диапазоне $s \in [r, 2)$. На рис. 2 скорость самой быстрой машины равна $s = 1,7$, а скорость второй

меняется в диапазоне $r \in [1, s]$. Здесь теоретические и расчетные значения цены анархии совпадают.

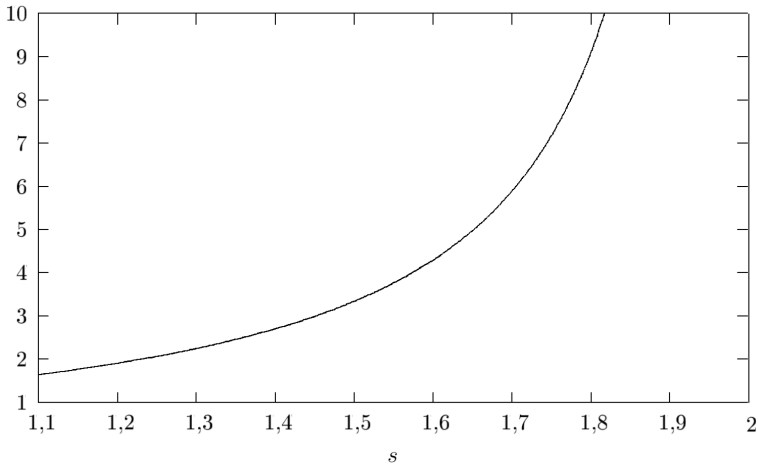


Рис. 1. Цена анархии для системы S , где $r = 1,1, s \in [r, 2)$

Более интересным является следующий пример. Рассматривается система четырех машин со скоростями $v_1 = 1 \leq v_2 = q \leq v_3 = r \leq v_4 = s < 2$. На графике рис. 3 и рис. 4 представлено изменение цены анархии в сравнении с нижней оценкой цены анархии (2), которая, фактически является значением цены анархии для трех из этих четырех машин со скоростями $1 \leq r \leq s < 2$. На рис. 3 представлено изменение цены анархии для следующих случаев. В области A значение q изменяется в диапазоне $[1, r]$, $r = 1,3, s = 1,5$. В области B $q = 1,3$, значение r изменяется в диапазоне $[q, s]$, $s = 1,5$. В области C $q = 1,3, r = 1,5$, значение s изменяется в диапазоне $[r, 2)$. Для этих случаев цена анархии для четырех машин совпадает с ее нижней оценкой (2).

На рис. 4 представлено изменение цены анархии для систем, где скорости машин достаточно мало отличаются друг от друга, т.е. в нормированном виде достаточно близки к единице. В этом случае наблюдается превышение значения цены анархии, представленной тонкой линией на рис. 4, над значением ее оценки

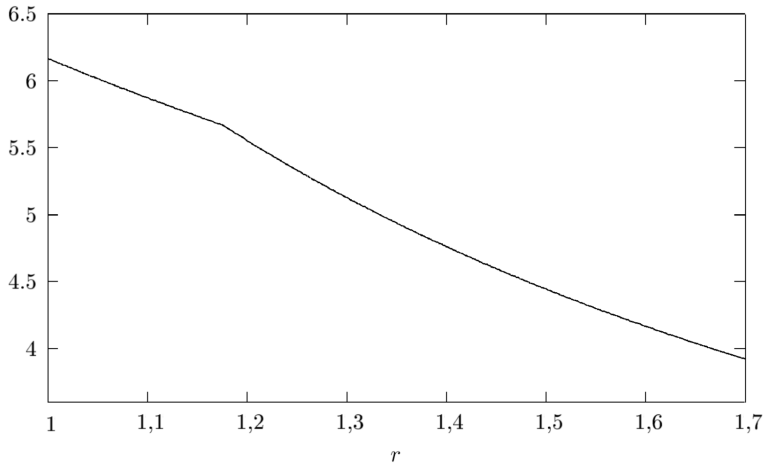


Рис. 2. Цена анархии для системы S , где $s = 1,7, r \in [1, s]$

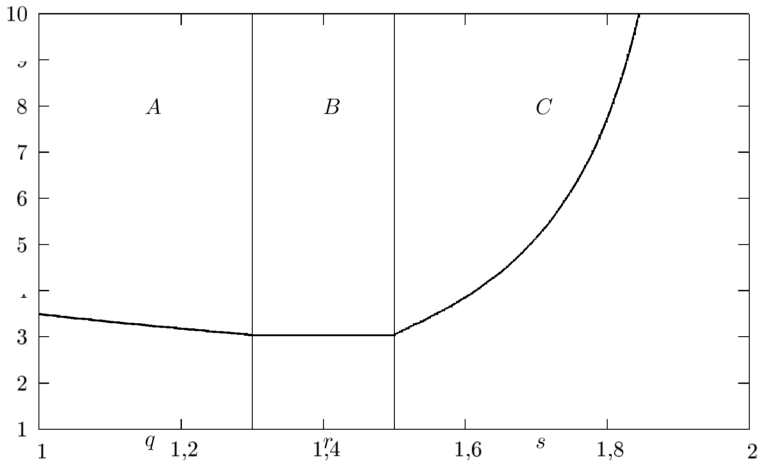


Рис. 3. Цена анархии для системы S четырех машин

(2), представленной жирной линией. При росте скоростей машин оба графика сливаются. В области A значение q изменяется в диапазоне $[1, r]$, $r = 1,05$, $s = 1,1$. В области B $q = 1,05$, значение r изменяется в диапазоне $[q, s]$, $s = 1,1$. В области C $q = 1,05$, $r = 1,1$, значение s изменяется в диапазоне $[r, 1,3)$.

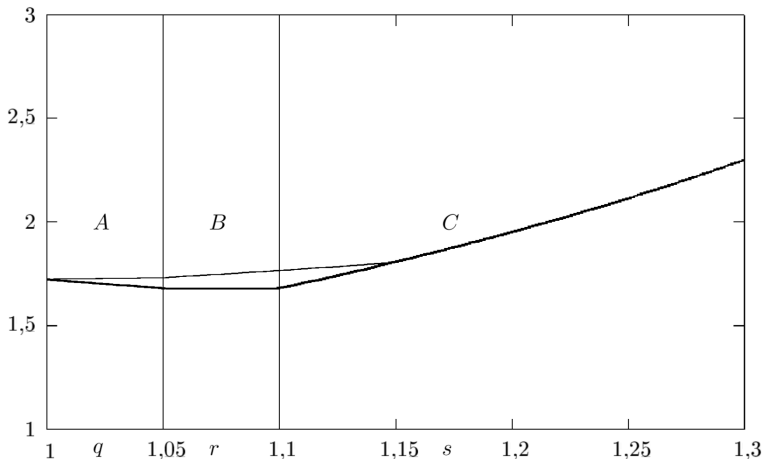


Рис. 4. Цена анархии для системы S четырех машин с малыми значениями скоростей

6. Заключение

Для системы обслуживания с N машинами и n игроками получена нижняя граница цены анархии в игре баланса загрузки. Более детально рассмотрена модель с тремя машинами, для которой найдено точное значение цены анархии и доказано, что цена анархии не меняется или растет при добавлении новой машины в систему трех машин. Также разработана методика вычисления точного значения цены анархии на примере трех машин. Данная методика может быть обобщена на системы с большим количеством машин, при этом возрастает количество задач линейного программирования, которые необходимо решать, а также число переменных и ограничений в них. Разработана программная ре-
54

лизация алгоритма вычисления точного значения цены анархии, с помощью которой проведены численные эксперименты сравнения полученных оценок цены анархии с ее точным значением, показывающие корректность полученных оценок. Для случая четырех машин в системе вычислительные эксперименты показывают частичное совпадение цены анархии для трех и четырех машин в системе, аналитическое подтверждение данного факта требует дальнейшего исследования.

7. Приложение

В данное приложение вынесены вспомогательные леммы, которые были использованы в доказательствах в разделе 3.

Лемма 9. Для любых вещественных $1 \leq r \leq s < 2$ справедливо $s \leq \min\left\{\frac{2+s}{(1+r)(2-s)}, \frac{2}{r(2-s)}\right\}$.

Доказательство. $\frac{2}{r(2-s)} \geq \frac{2}{s(2-s)} \geq s$, так как $s^3 - 2s^2 + 2 = s(s-1)^2 + (2-s) > 0$.

$\frac{2+s}{(1+r)(2-s)} \geq \frac{2+s}{(1+s)(2-s)} \geq s$, так как $s^3 - s^2 - s + 2 > s^3 - 2s^2 + 2 = s(s-1)^2 + (2-s) > 0$.

Лемма 10. Для любых вещественных $1 \leq r \leq s < 2$ справедливо $\frac{3s}{1+r} \leq \min\left\{\frac{2+s}{(1+r)(2-s)}, \frac{2}{r(2-s)}\right\}$.

Доказательство. Во-первых, $3s \leq \frac{2+s}{2-s}$, так как $3s^2 - 5s + 2 = (s-1)(3s-2) > 0$. Во-вторых, $\frac{3s}{1+r} \leq \frac{2}{r(2-s)}$, поскольку $6rs - 3rs^2 - 2 - 2r = r(6s - 3s^2 - 2) - 2 = r(1 - 3(s-1)^2) - 2 \leq r - 2 < 0$.

Лемма 11. Для $v_i < v_j$, $v_i, v_j \in \{1, r, s\}$, где вещественные $1 \leq r \leq s < 2$, справедливо $\frac{2v_i^2 + v_i v_j}{2v_i - v_j} \leq \frac{2+s}{2-s}$.

Доказательство. Если $v_i < v_j$, то $\frac{2v_i^2 + v_i v_j}{2v_i - v_j}$ убывает по v_i и возрастает по v_j , так как $4v_i^2 - 4v_i v_j - v_j^2 < 0$ и $v_i(2v_i - v_j) + 2v_i^2 + v_i v_j > 0$.

Лемма 12. Для любых вещественных $1 \leq r \leq s < 2$ справедливо $\frac{2r^2 + rs}{(1+r)(2r-s)} < \frac{2}{r(2-s)}$.

Доказательство. Неравенство в условии равносильно $f(r, s) = -r^2s^2 - 2s(r^3 - r^2 - r - 1) + 4(r^3 - r^2 - r) < 0$, проверим его истинность. Покажем, что $f'_r(r, s) = -2rs^2 + 2(2 - s)(3r^2 - 2r - 1) < 0$, тогда $f(r, s) \leq f(1, s) = -s^2 + 4s - 4 = -(2 - s)^2 < 0$.

Для каждого фиксированного s функция $f'_r(r, s)$ представляет собой параболу с ветвями, направленными вверх. Следовательно, наибольшее ее значение достигается на одном из концов отрезка $r \in [1, s]$. На левом конце $f'_r(1, s) = -2s^2 < 0$. На правом конце $f'_r(s, s) = -8s^3 + 16s^2 - 6s - 4 = -8s(s - 1)^2 - 2(2 - s) < 0$.

Лемма 13. Для $v_i \neq v_j \neq v_l$, $v_i, v_j, v_l \in \{1, r, s\}$, где вещественные $1 \leq r \leq s < 2$, справедливо $f(v_i, v_j, v_l) = v_i + \frac{2v_i v_j}{2v_i - v_j} + \frac{3v_i v_l}{3v_i - v_l} \leq 1 + \frac{2s}{2-s} + \frac{3s}{3-s}$.

Доказательство. Очевидно, что $f(v_i, v_j, v_l)$ возрастает по v_j и v_l , поэтому $f(v_i, v_j, v_l) \leq v_i + \frac{2sv_i}{2v_i - s} + \frac{3sv_i}{3v_i - s} = g(v_i)$.

Покажем, что $g(v_i)$ убывает по v_i . Производная $g'_{v_i}(v_i) = 1 - \frac{2s^2}{(2v_i - s)^2} - \frac{3s^2}{(3v_i - s)^2}$ возрастает по v_i и, значит, не превосходит $g'_{v_i}(s) = 1 - 2 - \frac{3}{4} < 0$.

Тогда $g(v_i) \leq g(1) = 1 + \frac{2s}{2-s} + \frac{3s}{3-s}$.

Лемма 14. Для любых вещественных $1 \leq r \leq s < 2$ справедливо $\frac{1 + \frac{2s}{2-s} + \frac{3s}{3-s}}{1+r+s} \leq \min\left\{\frac{2+s}{(1+r)(2-s)}, \frac{2}{r(2-s)}\right\}$.

Доказательство. Покажем сначала, что $1 + \frac{2s}{2-s} + \frac{3s}{3-s} \leq \frac{(1+r+s)(2+s)}{(1+r)(2-s)}$. Правая часть неравенства убывает по r , поэтому достаточно показать, что $1 + \frac{2s}{2-s} + \frac{3s}{3-s} \leq \frac{(1+2s)(2+s)}{(1+s)(2-s)}$. Это равносильно $s \leq s^2$, что выполняется при $s \geq 1$.

Покажем теперь, что $1 + \frac{2s}{2-s} + \frac{3s}{3-s} \leq \frac{2(1+r+s)}{r(2-s)}$. Правая часть неравенства убывает по r , поэтому достаточно показать, что $1 + \frac{2s}{2-s} + \frac{3s}{3-s} \leq \frac{2(1+2s)}{s(2-s)}$. Это неравенство равносильно $-4s^3 + 11s^2 - 4s - 6 = -s(2s - 3)^2 - (2 - s)(3 - s) < 0$.

Литература

1. ANDELMAN N., FELDMAN M., MANSOUR Y. *Strong*

- price of anarchy* // Proc. of the 18th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA), 2007. – P. 189–198.
2. CHEN X., EPSTEIN L., KLEIMAN E. ET AL. *Maximizing the minimum load: The cost of selfishness* // Theoretical Computer Science. – 2013. – Vol. 482. – P. 9–19.
 3. CHIRKOVA YU. V. *Price of anarchy in machine load balancing game* // Automation and Remote Control. – 2015. – Vol.76, Issue 10. – P. 1849–1864.
 4. EPSTEIN L., KLEIMAN E., VAN STEE R. *Maximizing the minimum load: the cost of selfishness.* // Proc. of the 5th International Workshop on Internet and Network Economics, Lecture Notes in Computer Science, 2009. – Vol. 5929. – P. 232–243.
 5. EVEN-DAR E., KESSELMAN A., MANSOUR Y. *Convergence time to Nash equilibria* // Proc. of the 30th International Colloquium on Automata, Languages and Programming (ICALP2003), 2003. – P. 502–513.
 6. FOTAKIS D., KONTOGIANNIS S. C., KOUTSOUPIAS E., ET AL. *The structure and complexity of nash equilibria for a selfish routing game* // Proc. of the 29th International Colloquium on Automata, Languages and Programming (ICALP2002), 2002. – P. 123–134.
 7. KORILIS Y. A., LAZAR A. A., ORDA A. *Avoiding the Braess paradox in non-cooperative networks* // J. Appl. Prob. – 1999. – No. 36. – P. 211–222.
 8. KOUTSOUPIAS E., PAPADIMITRIOU C. H. *Worst-case Equilibria* // Proc. of STACS, 1999. – P. 404–413.
 9. LÜCKING T., MAVRONICOLAS M., MONIEN B., AND ETC. *Which is the Worst-case Nash Equilibrium?* // Proc. of the 26th International Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science, 2003, LNCS 2747. – P. 551–561.
 10. MAZALOV V. V. *Mathematical Game Theory and Applications.* – New York: Wiley, 2014. – 432 p.

11. MURCHLAND J. D. *Braess's paradox of traffic flow* // Transportation Research. – 1970. – No. 4. – P. 391–394.
12. ROUGHGARDEN T., TARDOS É. *How bad is selfish routing?* // Journal of the ACM. – 2002. – Vol. 49, No. 2. – P. 236–259.
13. TAN Z., WAN L., ZHANG Q., AND ETC. *Inefficiency of equilibria for the machine covering game on uniform machines* // Acta Informatica. – Vol. 49, Issue 6, September 2012. – P. 361–379.
14. WU Y., CHENG T. C. E., JI M. *Inefficiency of the Nash equilibrium for selfish machine covering on two hierarchical uniform machines* // Information Processing Letters. – Vol. 115, Issue 11, 1 July 2015. – P. 838–844.

PRICE OF ANARCHY FOR MAXIMIZING THE MINIMUM MACHINE LOAD

Julia Chirkova, Institute of Applied Mathematical Research of Karelian Research Centre of RAS, Petrozavodsk, Cand.Sc.
(julia@krc.karelia.ru).

Abstract: The maximizing the minimum machine delay game with uniformly related machines is considered. Players choose machines with different speeds to run their jobs trying to minimize job's delay, i.e. chosen machine's completion time. The social payoff is the minimal delay over all machines. For the general case of N machines we find the lower bound for Price of Anarchy (PoA), and for the case of 3 machines we find its exact value. We prove that the PoA either remains the same or increases when an additional third machine is included into the system with two machines. Also we propose a method of computation the PoA value and illustrate it for 3 machines.

Keywords: Nash equilibrium, cover, maximizing the minimum load, price of anarchy, selfish load balancing.

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии А.В. Савватеевым.*

Поступила в редакцию 17.04.2016.

Дата опубликования 31.07.2016.

УДК 519.85

ББК 22.18

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ ДЛЯ ЗАДАЧ УСЛОВНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ БОЛЬШОЙ РАЗМЕРНОСТИ С ДЕКОМПОЗИЦИЕЙ ОГРАНИЧЕНИЙ

Величко А. С.¹

*(Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН,
Владивосток)*

Для класса задач условной оптимизации рассматриваются параллельные алгоритмы на основе метода проекции градиента и декомпозиции ограничений задачи условной оптимизации. Использование предлагаемого подхода продемонстрировано для класса задач линейного программирования большой размерности. Эффективность алгоритма показана на специальном вычислительно трудоемком наборе тестовых задач.

Ключевые слова: параллельный алгоритм, метод проекции градиента, декомпозиция, большая размерность.

Введение

В работе [5] для решения задач условной оптимизации рассматривался алгоритм двойственных отсечений, на основе которого строились его различные модификации и параллельные реализации. Разработанные алгоритмы использовались для эффективного решения задач линейного программирования большой размерности путем их декомпозиции по ограничениям, в частности при решении задач двухэтапного стохастического программирования.

Несмотря на вычислительную эффективность, данный подход ограничен в своем использовании возможностью решения

¹ Андрей Сергеевич Величко, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник (vandre@dvo.ru).

только структурированных двублочных задач, параллельный алгоритм предполагает только двухпроцессорный вариант выполнения. В работе [4] предложен альтернативный подход к распараллеливанию решения квадратичной оптимизационной задачи с ограничениями, основанный на двойственной постановке оптимизационной задачи и нелинейном методе Якоби.

Совершенствование численных методов является актуальной проблемой для решения задач с большим числом ограничений и/или переменных. Для задач линейного программирования классические алгоритмы типа симплекс-метода имеют неполиномиальную оценку сложности, а известные алгоритмы с полиномиальной вычислительной сложностью и линейной оценкой скорости сходимости при практическом использовании для задач большой размерности могут демонстрировать очень медленную сходимость по числу итераций и времени работы алгоритма.

В данной статье рассматриваются алгоритмы решения задач условной оптимизации на основе метода проекций градиента и декомпозиции ограничений. Этот подход является более универсальным по сравнению с построением двойственных отсечений [5], поскольку, во-первых, он применяется при решении задач условной оптимизации с ограничениями общего вида и произвольным числом подмножеств множества ограничений исходной задачи, во-вторых, – может использоваться для решения нелинейных задач и позволяет реализовать различные модификации последовательных и параллельных алгоритмов.

1. Метод проекций градиента для задач условной оптимизации

Рассмотрим экстремальную задачу

$$(1) \quad \min_{x \in V} h(x),$$

где $h(\cdot)$ – выпуклая дифференцируемая функция на допустимом множестве $V = \bigcap_{i \in I_m} C_i, I_m = \overline{1, m}$, которое представляет собой пересечение конечного числа выпуклых замкнутых множеств C_i

в R^n . Будем в дальнейшем считать, что $V \neq \emptyset$ и рассматриваемая задача (1) имеет решение.

Класс методов проекции градиента, применяемый для решения задачи (1), заключается в построении последовательности точек $x^{s+1} = P_V(x^s - \lambda_s g^s)$, $s = 0, 1, \dots$, где P_V – оператор проекции точки на множество V , вектор $-g^s$ – антиградиент функции h в точке x^s в предположении конечности и дифференцируемости функции h на множестве V . Вектор x^{s+1} является решением задачи поиска проекции точки на выпуклое замкнутое множество и $x^{s+1} = \arg \min_{x \in V} \|x - x^s + \lambda_s g^s\|^2$.

Начальное приближение x^0 и шаговые множители λ_s лучше выбирать с учетом специфики задачи.

Пристальный интерес к задаче нахождения проекции точки на множество, поиска точки, принадлежащей пересечению выпуклых множеств (convex feasibility problem) и проекции на пересечение множеств (best approximation problem) появился еще в 60-х годах XX века. К наиболее известным работам, повлиявшим на развитие этого класса численных методов оптимизации, можно отнести работы Л.М. Брэгмана [2], И.И. Еремина [3], Б.Т. Поляка [9], Е.Г. Гольштейна [8], Baushcke H. [18], Censor Y. [20], Bertsekas D. [19].

Выбор определенной последовательности шаговых множителей λ_s в конкретном классе задач может повлиять на скорость и характер сходимости метода проекций градиента. Рассматриваемый метод был сначала обоснован для шаговых множителей, зависящих от константы Липшица для градиента функции h [14]. В работе Б.Т. Поляка [15] рассматривался шаг в виде $\lambda_s = \gamma(h(x^s) - h(x^*)) / \|g^s\|^2$, $0 < \gamma < 2$, где x^* – оптимальное решение. Зачастую в литературе используется последовательность шагов вида $\lambda_s = a / (b + s)$ [12, 14], где a, b – выбираемые положительные параметры. В работе [13] было показано, что метод проекций градиента можно использовать для более общего случая оператора P_V и последовательности шаговых множителей λ_s .

2. Декомпозиция ограничений и блочные задачи линейного программирования

Задачи линейного программирования могут рассматриваться как частный случай задачи (1), когда множество $V = \{x : a^i x \leq q_i, i = \overline{1, M}\}$ – пересечение линейных полупространств, $h(x) = cx$ и градиент g^s функции h на множестве V равен вектору c , т.е. задача (1) принимает вид

$$(2) \quad \min_x \{cx : a^i x \leq q_i, i = \overline{1, M}\}.$$

Класс задач линейного программирования и задач с ограничениями типа линейных неравенств является важным объектом для разработки эффективных численных методов оптимизации, поскольку зачастую на промежуточных шагах алгоритмов для нелинейных или недифференцируемых задач требуется решение такого класса вспомогательных задач. Рассматриваемый класс линейных задач взят лишь в качестве примера, наглядно демонстрирующего применяемую методику.

Рассмотрим два способа декомпозиции ограничений задачи (1).

Первый подход состоит в представлении множества V допустимых решений задачи (2) в виде пересечения множеств $C_i = \{x \in R^n : D_i x \leq b^i\}, i \in I_m = \{1, \dots, m\}$, содержащих различные ограничения исходной задачи. Здесь D_i – матрицы коэффициентов левой части ограничений, b^i – векторы.

При таком определении множества V алгоритм проекций градиента для решения задачи (2) представляет собой итерационный процесс $x^{s+1} = P_s(x^s - \lambda_s g^s), s = 0, 1, \dots$, где P_s – оператор проекции вектора $x^s - \lambda_s g^s$ на множество C_{i_s} , индексы $\{i_s\}$ последовательно принимают значения из множества I_m , т.е. $i_0 = 1, i_1 = 2, \dots, i_{m-1} = m, i_m = 1, \dots$ вектор градиента g^s не зависит от x^s и равен вектору c .

Вектор $x^{s+1} = P_s(x^s - \lambda_s c)$ определяется в результате решения задачи

$$(3) \quad \min_{x \in C_{i_s}} \|x - x^s + \lambda_s c\|^2.$$

Второй подход к декомпозиции ограничений задачи (2) заключается в другом представлении допустимого множества V . Определим сначала векторы $v_i \in R^n$ и $q \equiv v_1 \times \cdots \times v_m \in R^{mn}$. Пусть $V = \bigcap_{i \in I_{m+1}} \hat{C}_i$, где множества $\hat{C}_i = \{q : D_i v^i \leq b^i\}$, $i \in I_m$ и множество $\hat{C}_{m+1} = \{q : v_i = v_j \text{ для всех } i \neq j\}$.

В этом случае алгоритм проекций для решения задачи (4) можно представить в виде следующего итерационного процесса. На каждом шаге $s = 0, 1, \dots$ на первом этапе решаются задачи $r_i = P_i(q^s - \lambda_s \hat{g}^s)$, где P_i – оператор проекции вектора $(q^s - \lambda_s \hat{g}^s)$ на множество \hat{C}_i , $i \in I_m$, вектор $\hat{g}^s \equiv g_1^s \times \cdots \times g_m^s$, где g_i^s – градиент функции h в точке v_i^s , он не зависит от q^s и равен вектору c . Вектор r_i представим в виде декартова произведения $p_1 \times \cdots \times p_m$.

В результате решения задач первого этапа оптимальный вектор r_i^* для конкретного i будет определяться только оптимальным значением компоненты p_i^* и не будет зависеть от p_j для всех $j \neq i$, поскольку множество \hat{C}_i определяется только i -й компонентой декартова произведения, составляющего вектор q^s . Отметим, что векторы p_i определяются в результате решения задач (3) для $i_s = i$ и $x \equiv p_i$. В силу специфики определения множества \hat{C}_i возникающие задачи (3) на первом этапе каждого шага рассматриваемого алгоритма могут решаться параллельно для разных i .

На втором этапе шага s алгоритма полагаем $q^{s+1} = P_{m+1}(p_1^* \times \cdots \times p_m^*)$.

Рассмотрим задачу блочного линейного программирования с непустым допустимым множеством и конечной целевой функцией на множестве допустимых решений:

$$(4) \quad f(y^*) = \min_y \sum_{i=1}^m f_i(y), \quad f_i(y) = \min_{z_i} \{c_i z_i : A_i z_i \geq d_i - B_i y\},$$

где $i \in I_m$, y – вектор связывающих переменных; z_i – векторы блочных переменных в подзадачах определения функций $f_i(y)$; A_i, B_i – матрицы; d_i – векторы соответствующих размерностей. Обозначим допустимое множество задачи (4) за V_m .

Рассмотрим более подробно первый способ представления

допустимого множества задачи (4) в виде пересечения множеств C_i .

Пусть $C_i = \{(z_i \times y) : A_i z_i \geq d_i - B_i y\}$ – замкнутые выпуклые множества, $i \in I_m$. По построению множеств C_i очевидно, что $V_m = V = \bigcap_{i \in I_m} C_i$. Определим вектор $x = (z_1, z_2, \dots, z_m, y)'$,

где ' – операция транспонирования, тогда в обозначениях задачи (1) имеем $h(x) = \sum_{i=1}^m f_i(y) = cx, c = (c_1, c_2, \dots, c_m, 0)'$.

Рассмотрим задачу (3) для некоторого $i = i_s$. Поскольку множество C_i содержит ограничения только на векторы z_i, y , тогда при решении задачи (3) будут определены оптимальные значения векторов \tilde{z}_i, \tilde{y}_i и $z_i^{s+1} = \tilde{z}_i, y_i^{s+1} = \tilde{y}_i, i \in I_m$, а $z_j^{s+1} = z_j^s - \lambda_s c$ для $j \in I_m \setminus \{i\}$.

Рассмотрим второй подход к описанию допустимого множества V_m задачи (4).

Определим множества $\hat{C}_i = \{(\{z^i\}, \{u^i\}) : A_i z^i \leq d_i - B_i u^i\}, i \in I_m$ и множество $\hat{C}_{m+1} = \{(\{z^i\}, \{u^i\}) : u^1 = u^2 = \dots = u^m\}$. Очевидно, что $V_m = V = \bigcap_{i \in I_{m+1}} C_i$.

Обозначим $\hat{x} = (z_1, z_2, \dots, z_m, u_1, u_2, \dots, u_m)'$, тогда в обозначениях задачи (1) имеем $h(\hat{x}) = \sum_{i=1}^m f_i(u_i) = \hat{c}\hat{x}$, здесь $\hat{c} = (c_1, c_2, \dots, c_m, 0, \dots, 0)'$.

Рассмотрим задачу (3) для некоторого $i = i_s$. Поскольку множество C_i содержит ограничения только на векторы z_i, u_i , тогда получим $z_j^{s+1} = z_j^s - \lambda_s c$ и $u_j^{s+1} = u_j^s$ для $j \in I_m \setminus \{i\}$. Решение задачи (3) для множества C_{m+1} приводит к определению оптимальных $\tilde{u}_i = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m u_i^s$ и $\tilde{z}_i = z_i^s$. Значит полагаем $u_i^{s+1} = \tilde{u}_i$ и $z_i^{s+1} = \tilde{z}_i$.

3. Разработка параллельных алгоритмов и вычислительные эксперименты

В работах [1, 3, 16, 19] для задач решения систем неравенств, в том числе соответствующих необходимым и достаточным усло-

виям экстремума для задач линейного программирования, предлагается осуществлять проекции на отдельные ограничения типа равенств-неравенств или на систему ограничений типа равенств. Такие задачи имеет аналитическое решение, в результате получающиеся алгоритмы являются привлекательными с точки зрения простоты реализации на ЭВМ. Это направление использования проекционных итерационных методов берет свое начало с работы С. Качмажа 1937 г. (перевод на английский язык см. в [22]).

В работе Д.В. Долгого и Е.А. Нурминского [10] алгоритмы проекций рассматривались для специального представления допустимого множества задачи (1) в виде внешне заданных полупрозоров, а ускоренный вариант метода предполагает представление допустимого множества в виде пересечения двух множеств, которые динамически меняются.

В данной статье, в отличие от приведенных выше работ, во-первых, предлагается рассматривать оптимизационные задачи с различным числом ограничений не менее двух, не переходя к эквивалентной системе равенств-неравенств. Во-вторых, используются в общем случае ограничения типа неравенств, что не позволяет получить простого аналитического выражения для решения, на чем основаны метода типа Качмажа. В третьих, при параллелизации алгоритма рассматриваются представления допустимого множества задачи (1) в наиболее общем представлении: в виде пересечения подмножеств, соответствующих нескольким ограничениям исходной задачи, каждое из которых есть пересечение линейных полупространств, соответствующих отдельным ограничениям.

Параллельный алгоритм проекций для задачи (1) в рамках первого подхода к представлению ограничений имеет вид
$$x^{s+1} = \sum_{j=1}^m w_j P_j(x^s - \lambda_s g^s), \quad s = 0, 1, \dots,$$
 где P_j – оператор проекции вектора $x^s - \lambda_s g^s$ на множество C_j , $j = 1 \dots, m$, g^s – градиент функции h в точке x^s . Проекции P_j вектора $x^s - \lambda_s g^s$ на множества C_j осуществляются на параллельных процессорах.

Выбор весовых коэффициентов может быть тривиальным

($w_j = 1/m$) или более сложным [2, 9, 11].

Недостатком первого подхода к представлению допустимого множества задачи (4) является последовательный характер алгоритма по вектору связывающих переменных y , что затрудняет распараллеливание процесса вычислений.

Для параллельного решения задачи условной оптимизации (1) можно использовать второй подход с введением искусственного множества C_{m+1} . В этом случае вычисление проекций на отдельные множества C_i , т.е. решение задач (3), осуществляется параллельно на m процессорах. Процесс $m + 1$, реализующий решение задачи проекции на множество C_{m+1} , по сути осуществляет лишь пересчет искусственно введенных векторов переменных v^i , уже полученных ранее в результате решения задач проекции на множества $C_i, i \in I_m$. Таким образом, каждая из m задач поиска проекции содержит только один блок ограничений, определяемых индексом i , что позволяет надеяться на уменьшение объема вычислений и количества используемой памяти для хранения данных по каждому блоку ограничений по сравнению с решением задачи (4). С другой стороны, платой за уменьшение количества ограничений при решении каждой из задач проекции является необходимость решения квадратичной, а не линейной задачи.

Используя второй подход к декомпозиции ограничений блочной задачи условной оптимизации (4) параллельный алгоритм имеет вид $x^{s+1} = P_j(x^s - \lambda_s c), s = 0, 1, \dots$, где P_j – оператор проекции вектора $x^s - \lambda_s c$ на множество $C_j, j \in I_{m+1}$. На $(s + 1)$ -м шаге определяются оптимальные значения z_i^*, u_i^* в результате решения задачи проекции вектора $x^s - \lambda_s c$ на множество C_i . Тогда для $i \in I_m$ получаем $z_i^{s+1} = w_i z_i^* + (1 - w_i)(z_i^s - \lambda_s c)$, и с учетом задачи проекции на множество C_{m+1} имеем $u_i^{s+1} = w_i u_i^* + \sum_{j \neq i} w_j u_j^s + \frac{w_{m+1}}{m} \sum_{j=1}^m u_j^*$.

В вычислительных экспериментах на задачах линейного программирования с ограничениями типа неравенств (2) использовались случайно генерируемые данные разных размерно-

стей для тестовой задачи, описанной в работе [6, 13]. В этих вычислительно-трудоемких тестах система неравенств строилась как набор m случайных опорных плоскостей к n -мерной сфере с центром в случайной точке x^0 с нормально распределенными координатами и радиусом $r = \theta \|x^0\|$, $\theta \in (0, 1)$.

Алгоритм реализован [7] с использованием свободно распространяемого программного обеспечения Octave [21]. Параллельная реализация алгоритма для многопроцессорной вычислительной архитектуры с распределенной памятью реализована с использованием свободно распространяемого программного обеспечения: библиотеки функций интерфейса передачи сообщений OpenMPI [23] и пакета MPI для Octave [24]. Расчеты проводились на вычислительных мощностях центра коллективного пользования ДВО РАН «Дальневосточный вычислительный ресурс» [17]. Для решения задач проекции на множество использовался алгоритм решения задачи с квадратичной целевой функцией на линейных ограничениях (функция `qp` в Octave).

На рис. 1 показана вычислительная сложность алгоритма, которая близка к полиномиальной.

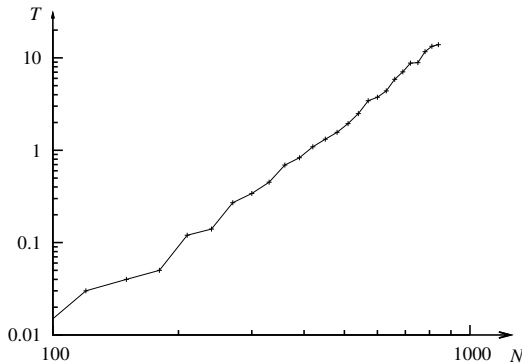


Рис. 1. Вычислительная сложность алгоритма

Характер сходимости параллельного алгоритма при простом

выборе шаговых множителей вида $\lambda_s = \frac{a}{b+s}$ и весовых коэффициентов $w_j = 1/m$ показан на рис. 2. Он демонстрирует важный эффект ускорения сходимости на последних шагах алгоритма по мере приближения к оптимуму, чего лишены классические последовательные алгоритмы проекции градиента. По оси ординат в логарифмической шкале расположены значения $q_s = |h(x^s) - h(x^*)|$ абсолютного отклонения точного решения от приближенного, получаемого на итерациях алгоритма.

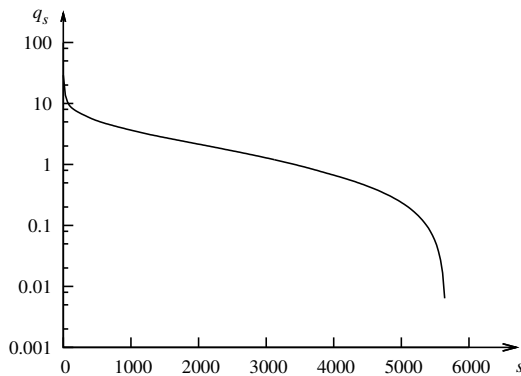


Рис. 2. Сходимость алгоритма. s – номер итерации, q_s – абсолютная погрешность приближенного решения

Величина эффективности R_n параллельного алгоритма определяется как отношение времени выполнения алгоритма на одном процессоре к времени выполнения алгоритма на n параллельных процессорах.

На рис. 3 показана фактическая величина показателя эффективности R_n параллельного алгоритма в зависимости от числа используемых процессоров n .

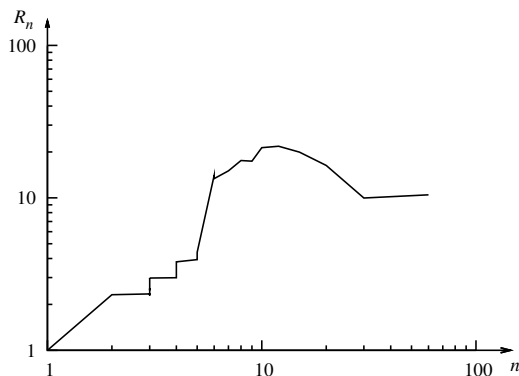


Рис. 3. Эффективность параллельного алгоритма: n – число процессов, R_n – отношение времени работы алгоритма с одним процессом к времени выполнения параллельного алгоритма

4. Выводы

В работе рассматривались подходы к построению параллельных алгоритмов на основе совмещения двух идей: декомпозиции ограничений задач условной оптимизации и организации вычислений на основе метода проекций градиента, применяемых для решения независимых задач оптимизации на подмножествах множества ограничений исходной задачи.

Разработан и реализован параллельный алгоритм для многопроцессорных вычислительных систем с распределенной памятью с использованием функций интерфейса передачи сообщений OpenMPI. Хорошие показатели качества алгоритма показаны на специальном вычислительно-трудоемком наборе тестовых исходных данных для задачи линейного программирования большой размерности по числу ограничений.

Наиболее эффективной оказывается стратегия декомпозиции допустимого множества V в задаче (1) на небольшое число подмножеств. Декомпозиция по отдельным ограничениям задачи, когда подмножества содержат по одному ограничению и число про-

цессов принимает большое значение, не является эффективной с точки зрения показателя R_n , как это может показаться на первый взгляд.

Литература

1. БЕРДНИКОВА Е.А., ЕРЕМИН И.И., ПОПОВ Л.Д. *Распределенные фейеровские процессы для систем линейных неравенств и задач линейного программирования* // Автоматика и телемеханика. – 2004. – №2. – С. 16–32.
2. БРЭГМАН Л.М. *Релаксационный метод нахождения обшей точки выпуклых множеств и его применение для задач выпуклого программирования* // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. – 1967. – Т. 7, №3. – С. 620–631.
3. ВАСИН В.В., ЕРЕМИН И.И. *Операторы и итерационные процессы фейеровского типа. Теория и приложения.* – Екатеринбург: УрО РАН, 2005. – 200 с.
4. ВЕЛИЧКО А.С. *Двойственный алгоритм для задач регуляризации с недифференцируемыми стабилизаторами* // Вычислительные технологии. – 2014. – №2. – С. 14–20.
5. ВЕЛИЧКО А.С. *Об алгоритме двойственных отсечений для задачи двухэтапного стохастического программирования* // Известия ВУЗов. Математика. – 2006. – №4. – С. 78–81.
6. ВЕЛИЧКО А.С. *О выборе шага в проективных алгоритмах для задач линейного программирования большой размерности* // Дальневосточный математический журнал. – 2012. – №2. – С. 160–170.
7. ВЕЛИЧКО А.С. *Решение задач оптимизации методом последовательных проекций с различными способами выбора начального приближения и шаговых множителей* : св. о гос. рег. прог. для ЭВМ Росс. Фед. 2011614018 от 24.05.11; заявл. 06.04.11; опубл. 20.09.2011. В бюлл.: RU ОБПБТ, №3. С. 319.

8. ГОЛЬШТЕЙН Е.Г., ТРЕТЬЯКОВ Н.В. *Модифицированные функции Лагранжа. Теория и методы оптимизации.* – М.: Наука, 1989. – 400 с.
9. ГУРИН Л.Г., ПОЛЯК Б.Т., РАЙК Э.В. *Методы проекций для отыскания общей точки выпуклых множеств* // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. – 1967. – Т. 7, №6. – С. 1211–1228.
10. ДОЛГИЙ Д.В., НУРМИНСКИЙ Е.А. *Ускоренный параллельный метод проекций для решения задачи о наименьшем расстоянии* // Вычислительные методы и программирование. – 2006. – Т. 7. – С. 273–277.
11. КАРМАНОВ В.Г. *Оценки сходимости итерационных методов минимизации* // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. – 1974. – Т. 14, №1. – С. 3–14.
12. НЕСТЕРОВ Ю.Е. *Введение в выпуклую оптимизацию.* – М.: Издательство МЦНМО, 2010. – 280 с.
13. НУРМИНСКИЙ Е.А. *Фейеровские процессы с малыми возмущениями* // Доклады АН. – 2008. – Т. 422, №5. – С. 601–605.
14. ПОЛЯК Б.Т. *Введение в оптимизацию.* – М.: Наука, 1983. – 384 с.
15. ПОЛЯК Б.Т. *Минимизация негладких функционалов* // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. – 1969. – Т. 9, №3. – С. 509–521.
16. ПОЛЯК Б.Т. *Рандомизированные алгоритмы решения выпуклых неравенств* // Стохастическая оптимизация в информатике. – 2005. – Т. 1, №1. – С. 150–169.
17. *Центр коллективного пользования ДВО РАН «Дальневосточный вычислительный ресурс».* – [Электронный ресурс] – URL: <http://www.cc.dvo.ru> (дата обращения: 15.01.2016).
18. BAUSCHKE H.H., BORWEIN J.M. *On projection algorithms for solving convex feasibility problems* // SIAM Review. – 1996. – Vol. 38, №3. – P. 367–426.
19. BERTSEKAS D.P., TSITSIKLIS J.N. *Parallel and*

- Distributed Computation: Numerical Methods.* – Athena Scientific, 1997. – 735 p.
20. CENSOR Y., ZENIOS S.A. *Parallel optimization: theory, algorithms, and applications.* – Oxford University Press, 1997. – 541 p.
 21. *GNU Octave.* – [Электронный ресурс] – URL: <http://www.octave.org> (дата обращения: 15.01.2016).
 22. KACZMARZ S. *Approximate solution of systems of linear equations* // *International Journal of Control.* – 1993. – Vol. 57, №6. – P. 1269–1271.
 23. *OpenMPI.* – [Электронный ресурс] – URL: <http://www.open-mpi.org> (дата обращения: 15.01.2016).
 24. *MPI package for Octave.* – [Электронный ресурс] – URL: <http://octave.sourceforge.net/mpi/> (дата обращения: 15.01.2016).

PARALLEL ALGORITHMS WITH FEASIBLE SET PARTITIONING FOR LARGE-SCALE OPTIMIZATION PROBLEMS

Andrei Velichko, Institute for Automation and Control Processes of FEB RAS, Vladivostok, Cand.Sc., researcher (vandre@dvo.ru).

Abstract: We consider parallel algorithms for the class of constrained optimization problems. The algorithms are based on the two ideas: gradient projection method and decomposition of the set of constraints into disjoint subsets with different number of constraints. The proposed approach is used for a class of large-scale linear programming problems. A number of simulations was made to analyze computational complexity, convergence speed and the parallelization efficiency. The algorithms show a good performance for the special special computationally difficult benchmark problem. The most efficient decomposition strategy is to partition the feasible set into a relatively small number of subsets. The decomposition by separate constraints demonstrates less efficiency of parallelization.

Keywords: parallel algorithm, gradient projection method, decomposition, large-scale problem.

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии В.И. Зоркальцевым.*

Поступила в редакцию 01.02.2016.

Дата опубликования 31.07.2016.

УДК 004.89 + 681.51

ББК 32.813

О РАЗРАБОТКЕ МЕТОДА ВЫБОРА СТРУКТУРЫ НЕЙРОННОЙ СЕТИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ АДАПТАЦИИ ПАРАМЕТРОВ ЛИНЕЙНЫХ РЕГУЛЯТОРОВ

Еременко Ю. И.¹, Глущенко А. И.²

*(Старооскольский технологический институт
им. А.А. Угарова (филиал) ФГАОУ ВО НИТУ «МИСиС»,
Старый Оскол)*

Рассмотрена проблема выбора структуры нейронной сети (НС), осуществляющей в составе нейросетевого оптимизатора настройку параметров П-, ПИ- или ПИД-регулятора в реальном времени при управлении нелинейными объектами. Предложен подход, позволяющий без построения модели объекта управления (ОУ) определять количество слоев сети и нейронов в них, функции активации и время задержки сигналов выхода ОУ, подаваемых на вход НС. Разработан алгоритм построения и инициализации НС нейросетевого оптимизатора. Результаты численных экспериментов на моделях ОУ и практической реализации для двух электронагревательных печей показали экономию времени и энергоносителя на выполнение графика заданий при использовании оптимизатора по сравнению с обычным линейным регулятором, что подтверждает адекватность предложенного подхода.

¹ Юрий Иванович Еременко, доктор технических наук, профессор (erem49@mail.ru).

² Антон Игоревич Глущенко, кандидат технических наук, доцент (г. Старый Оскол, м-н Макаренко, д. 42, тел. (4725) 45-12-17, strondutt@mail.ru).

Ключевые слова: нейронная сеть, адаптивное управление, ПИД-регулятор, нейросетевой оптимизатор, выбор структуры нейронной сети, время задержки входных сигналов.

1. Введение

В промышленности значительная часть контуров управления технологическими процессами функционирует на основе ПИД-алгоритма регулирования [23]. Данный закон управления обладает рядом преимуществ, таких как простота понимания и реализации и высокая надежность. В то же время он является линейным, а реальные объекты управления (ОУ) в большинстве случаев нелинейны. Подобное несоответствие приводит к тому, что коэффициенты регулятора, подобранные при первичной настройке для конкретного режима работы ОУ, не позволяют получать сходных по качеству переходных процессов в других режимах. Это ведет к увеличению времени на отслеживание уставок и расхода энергоносителя.

Примером таких объектов являются нагревательные ОУ – печи нагрева литой заготовки, дуговые печи и пр. Изменение задания, графика уставок, степени загрузки печи при постоянных коэффициентах ПИД-регулятора зачастую приводит к снижению качества регулирования и к росту энергозатрат на ведение технологических процессов, поскольку для подобных ОУ принудительное охлаждение невозможно, ввиду чего наличие даже небольшого перерегулирования требует длительного времени на охлаждение [59].

Теоретически для каждого состояния ОУ необходимо подбирать свои значения коэффициентов регулятора. Однако в реалиях производства чаще всего используют всего один набор таких коэффициентов для всех режимов и не производят их перенастройку ввиду трудоемкости данного процесса.

Для решения указанной проблемы необходимо построение адаптивных или оптимальных систем управления технологическим процессом. Одним из наиболее проработанных подходов к построению оптимальных регуляторов является методика аналитического конструирования оптимальных регуляторов

(АКОР) [1, 8, 9, 11, 12, 14, 16, 17, 50]. Конечная цель АКОР состоит в получении закона управления аналитическим путем, исходя из предъявляемых к качеству управления требований, формализованных в форме интегрального критерия качества. Теория АКОР достаточно проработана применительно, в первую очередь, к линейным объектам и квадратичным функционалам-критериям качества [9, 12, 14]. Применение указанных подходов для синтеза управляющих систем для нелинейных объектов приводит к нелинейным краевым задачам. Решение подобных задач представляет собой выполнение сложных вычислительных процедур [14]. Кроме того, достаточно сложно решаемой остается проблема выбора весовых коэффициентов для минимизируемого функционала оптимальности. И, что не менее важно, не устанавливается функциональная связь между реальными показателями качества управления и весовыми коэффициентами функционала оптимальности, что приводит к многократному повторению процедуры синтеза регулятора, основанному на знании модели объекта управления, для достижения требуемых показателей переходных процессов [14]. Кроме того, построение оптимального регулятора [1, 8, 9, 11, 12, 14, 16, 17, 50] предполагает отказ от классической структуры ПИД-регулятора, что, ввиду вышесказанного, повышает сложность внедрения подобных разработок на производстве.

Таким образом, более перспективным подходом представляется проведение оперативной адаптации параметров существующего ПИД-регулятора, являющегося привычным для работников производства. Для настройки указанных регуляторов разработано достаточно большое число методов, обзор которых подробно приведен в [24, 55, 56]. В целом среди них можно выделить группу классических методов, таких как:

1) метод Циглера–Никольса [80] (требуется либо наличие модели ОУ, либо вывод системы управления на границу устойчивости), в большинстве случаев позволяющий получать коэффициенты, значения которых достаточно далеки от оптимальных;

2) методы, основанные на построении модели ОУ с помощью специального испытательного сигнала (ступенчатого [18,

31, 53, 59, 63] или полигармонического [15, 19]): метод частотной идентификации и настройки А.Г. Александрова [19], метод, положенный в основу работы адаптивных ПИД-регуляторов фирмы Siemens [59] (на подобном же принципе основаны адаптивные регуляторы фирм Omron, Control Station и др.) и пр.

Эти методы предполагают полный отказ от используемых в настоящее время в регуляторе коэффициентов и подбор новых. Моменты времени, когда необходимо использовать метод адаптации, определяются человеком, как и амплитуда испытательного сигнала. Таким образом, применение данных методов для автоматической оперативной подстройки параметров регуляторов является затруднительным.

Кроме того, метод, описанный в [19], сталкивается с определенными сложностями при идентификации ОУ с постоянной времени более 800 с, а для методов, основанных на применении ступенчатого тестового сигнала, в частности [59], результаты идентификации ОУ даже в сходных условиях могут весьма существенно отличаться. В целом же построение модели реального нелинейного объекта управления является весьма нетривиальной и трудноосуществимой в реалиях производства задач.

В то же время человек, занимающийся на производстве настройкой линейных регуляторов, способен осуществлять их подстройку в реальном масштабе времени без тестовых сигналов и модели. Это возможно благодаря его знаниям, опыту, способностям к обучению, обобщению и прогнозированию. Указанные характеристики в определенной мере позволяют воспроизводить интеллектуальные методы, что делает перспективным их применение для рассматриваемой проблемы.

Методы роя частиц [20] и генетических алгоритмов [27, 70, 71, 75] применяются для решения задач оптимизации, причем изначально случайным образом генерируется исходное множество решений. В случае с задачей настройки параметров регулятора, каждое решение – это набор значений параметров K_p , K_I , K_D . В качестве целевой функции выступает некоторая оценка качества переходного процесса, получаемого при конкретных значениях параметров регулятора. Метод является итерационным, т.е. в регулятор необходимо последовательно подставлять

все имеющиеся в популяции наборы параметров и, для оценки их оптимальности, проводить опыты на реальном объекте. Или иметь точную модель ОУ, что, как уже упоминалось выше, является достаточно сложной проблемой.

Настройка ПИД-регулятора с помощью нечеткой логики [10, 33, 34, 42, 68, 76, 79] и экспертных систем [21] может осуществляться без использования модели ОУ. В частности, в экспертных системах в базе правил указано на сколько процентов следует изменить амплитудное значение того или иного коэффициента регулятора в зависимости от текущей ситуации, описанной в условии конкретного правила. Проблемой подобных подходов является отсутствие механизма обучения, поскольку первоначально степень нелинейности ОУ достаточно тяжело оценить. В связи с чем в базу правил (в частности, в их следствия) ЭС необходимо будет вносить изменения уже в процессе работы. В случае с использованием нечеткой логики для создания настройщика параметров регулятора его входные и выходные переменные определяют в диапазоне $[-1;1]$ или $[0;1]$. Реальные же измеряемые на ОУ значения параметров затем приводятся в данные диапазоны с помощью коэффициентов нормировки. Также поступают с получаемыми с выходов настройщика значениями K_P , K_I , K_D (их переводят из промежутка $[0;1]$ в диапазон, требуемый для данного ОУ). Данные коэффициенты нормировки также необходимо подстраивать в процессе работы.

Нейронные сети (НС), в свою очередь, обладают нелинейными свойствами и способностью к обучению (в том числе оперативному), что придает адаптивные свойства нейросетевым системам управления. В частности, Сигеру Омату в [58] предложил схему управления на основе автонастройки коэффициентов ПИД-регулятора K_P , K_I , K_D с помощью НС (рис. 1, где e – рассогласование).

Однако реализация идей С. Омату в том виде, в котором они были изложены в его трудах, не всегда позволяет получать заявленные результаты. Это во многом связано с тем, что НС, обучаясь по некоторой обучающей выборке, не обладает в итоге сведениями о специфике того объекта, которым управляет

(наличие ограничений, например, на значения управляющего воздействия; несимметричность ОУ – для печей управление процессом остывания отличается от процессов нагрева и пр.).



Рис. 1. Схема управления с нейросетевым оптимизатором параметров регулятора

Использование схемы С. Омату нашло отражение в трудах многих ученых и разработчиков [3, 6, 28–30, 36, 37, 61, 62, 74]. Однако каждое конкретное применение требовало сложной детальной настройки под конкретную задачу и объект управления (в частности – наличие нейросетевой модели ОУ).

В целом главным преимуществом НС является возможность оперативного дообучения, в то время как специфика работы ОУ может быть задана, например, набором правил, определяющим ситуации, в которых обучение НС целесообразно. Поэтому в рамках данной работы предлагается скомбинировать метод применения НС для коррекции коэффициентов регулятора с базой правил ситуаций, когда необходимо проводить такую настройку. В качестве следствий в правилах выступают скорости обучения нейронов НС [4].

Целью данной работы является разработка методики выбора структуры и параметров нейронной сети, производящей настройку параметров линейного регулятора, по априорным знаниям об ОУ без проведения процедуры идентификации. Кроме того, в рамках данного исследования рассмотренная выше схема была реализована в среде Matlab. Проведен ряд модельных экспериментов, подтверждающих применимость нейросетевого оптимизатора, построенного на основе предложенного подхода, к ОУ с различной динамикой. Данный подход

также был проверен на лабораторных муфельных электронагревательных печах СНОЛ-1,6,2,5.1/11-И4 и СНОЛ 40/1200. Было проведено сравнение работы систем управления с нейросетевым оптимизатором, включающим в себя две нейронных сети, и обычным ПИ-регулятором для различных режимов работы ОУ по загрузке и графику заданий.

2. Постановка задачи

Объектом исследований является схема управления, представленная на рис. 1. ОУ описывается двумя апериодическими звеньями первого порядка со звеном задержки (1). Первое из них является моделью самого ОУ, а второе – моделью средства измерения значений контролируемого параметра для рассматриваемого ОУ:

$$(1) \quad W(s) = \frac{K}{T_1 s + 1} \cdot \frac{1}{T_2 s + 1} \cdot e^{-\tau \cdot s},$$

где $W(s)$ – передаточная функция ОУ, K – коэффициент усиления ОУ; T_1 – постоянная времени ОУ, с; T_2 – постоянная времени измерительного прибора, с; τ – время запаздывания, с.

Таким образом, процессы, происходящие внутри ОУ, могут быть представлены в следующем виде:

$$(2) \quad T_1 T_2 y''(t) + (T_1 + T_2) y'(t) + y(t) = K \cdot u(t - \tau),$$

где u – управляющее воздействие; t – текущий момент времени, с; $y(t)$ – выход ОУ в текущий момент времени.

ПИД-регулятор имеет вид

$$(3) \quad u(t) = K_p e(t) + K_I \int_0^t e(\tau) d\tau + K_D \frac{de(t)}{dt},$$

где $e(t)$ – рассогласование между заданием и выходом ОУ; K_p , K_I , K_D – настраиваемые параметры регулятора. Рассогласование вычисляется как разность сигнала задания (уставки) $r(t)$ и выхода ОУ $y(t)$.

Уравнение (2), используя (3), можно представить в виде

$$(4) \quad T_1 T_2 y''(t) + (T_1 + T_2) y'(t) + y(t) = K \cdot (K_p e(t - \tau) + K_I \int_0^{t-\tau} e(p) dp + K_D \frac{de(t - \tau)}{dt}).$$

Такое уравнение отражает одно конкретное состояние ОУ, поскольку T_1 и K здесь являются константами. Для реального ОУ они являются переменными. В частности, для нагревательных объектов постоянная времени печи может изменяться в зависимости от количества материала, загруженного в эту печь. Коэффициент усиления уменьшается по мере увеличения температуры в печи, а кроме того, зависит от качества энергоносителя, подаваемого на печь.

Задачей контура управления, изображенного на рис. 1, является отслеживание графика уставок, представляющего собой набор ступенчатых изменений задания, таким образом, чтобы, с одной стороны, переходные процессы протекали за минимальное количество времени. Это позволит интенсифицировать производство и сократить потери энергоносителя. С другой стороны, качество получаемых переходных процессов по переуправлению, колебательности, статической ошибке должно находиться в пределах допуска.

Соответственно, для поддержания времени переходного процесса близким к минимальному в условиях изменения параметров T_1 и K необходимо оперативно в процессе работы настраивать коэффициенты регулятора K_p , K_I , K_D .

ОУ уже функционирует под управлением П-, ПИ- или ПИД-регулятора и его коэффициенты изначально подобраны для одного из состояний объекта. Задачей является подстройка (а не полное переопределение) коэффициентов регулятора в соответствии с изменениями режима работы ОУ для поддержания времени переходных процессов для всех режимов близким к минимальному.

Для этого предлагается применить нейросетевой оптимизатор параметров линейных регуляторов. Он не предполагает построение модели ОУ. Вместо этого производится оценка ситуации на ОУ (в частности, текущей скорости переходного

процесса) с помощью базы правил с дальнейшими выводами о необходимости обучения НС.

3. Структура нейросетевого оптимизатора

Предлагаемая функциональная схема нейросетевого оптимизатора приведена на рис. 2. Количество выходов оптимизатора зависит от числа настраиваемых параметров регулятора (например, для ПИД – 3, для ПИ – 2).

Авторами установлено [4], что количество НС в нейросетевом оптимизаторе зависит от того, является ли ОУ симметричным [43] или нет. Например, при работе с нагревательными объектами необходимо вести управление двумя различными по своей природе процессами: нагреванием (когда новая уставка больше предыдущей) и охлаждением (когда новая уставка меньше предыдущей). В соответствии с [43], такой ОУ является несимметричным, т.е. для оптимальности ведения и того, и другого процесса требуется два набора коэффициентов регулятора, а не один, поскольку нагревательная печь неспособна вести принудительное охлаждение внутреннего пространства.



Рис. 2. Разработанная функциональная схема нейросетевого оптимизатора параметров линейных регуляторов

В связи с этим предлагается реализовывать нейросетевой оптимизатор в виде двух идентичных нейронных сетей, каждая из которых отвечает за управление коэффициентами регулятора

для своего типа процесса (для печей – нагрева и остывания). Если ОУ симметричный – достаточно одной НС.

При наличии более одной НС переключение между ними предлагается производить в момент очередной смены задания. При этом определяется тип переходного процесса и производится выбор соответствующей сети. Все НС оптимизатора начинают работу с формирования на своем выходе одинаковых коэффициентов регулятора, используемых на ОУ в текущий момент (до внедрения оптимизатора). Метод достижения этой цели, основанный на экстремальном подходе к обучению НС [48], описан в [5]. Затем производится их оперативное обучение методом обратного распространения ошибки [58].

База правил содержит в себе описание ситуаций, когда необходимо вести оперативное обучение НС, а также скорости обучения для ее отдельных нейронов. Подробно данная база приведена в [4]. Разработанный обобщенный алгоритм работы нейросетевого оптимизатора параметров линейных регуляторов приведен на рис. 3.

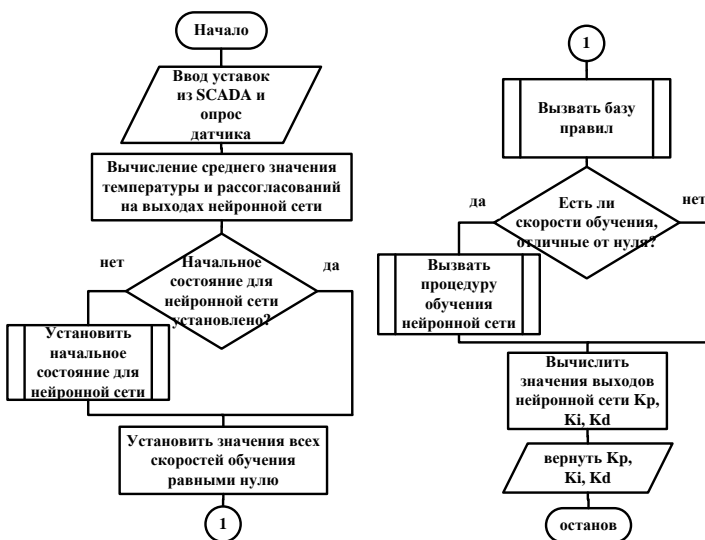


Рис. 3. Разработанный обобщенный алгоритм работы нейросетевого оптимизатора

До начала использования оптимизатора создаются одна или две одинаковых необученных НС. Входные сигналы для НС – задание $r(t)$, выход ОУ $y(t)$, выход линейного регулятора $u(t)$. Выход НС – значения настраиваемых параметров линейного регулятора. Фактически НС представляет собой функцию нескольких переменных, отражающую связь K_P, K_I, K_D с указанными входными параметрами, в частности, $K_P = f^1(r^{-1}, r^{-2}, \dots, r^{-n}, y^{-1}, y^{-2}, \dots, y^{-m}, u^{-1}, u^{-2}, \dots, u^{-k})$. НС аппроксимирует подобные зависимости. Принципы выбора структуры такой НС приведены ниже.

4. Метод выбора структуры нейронной сети

4.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОБЩЕЙ СТРУКТУРЫ СЕТИ

Результатом серии работ [2, 7, 52] А.Н. Колмогорова и В.И. Арнольда стало доказательство теорем о возможности представления непрерывных функций нескольких переменных в виде суперпозиций непрерывных функций одной переменной.

В работе [44] Р. Хехт-Нильсен предложил применить теорему А.Н. Колмогорова для обоснования возможности нейронных сетей аппроксимировать непрерывные функции многих переменных со сколь угодно малой погрешностью.

Строгое математическое доказательство универсальности аппроксимационных свойств двухслойной нейронной сети (входной слой, один скрытый слой, выходной слой) с сигмоидальной функцией (в частности, гиперболический тангенс) активации в скрытом слое и линейной в выходном было дано независимо тремя авторами в работах [32, 39, 45].

В работе [41] доказана универсальная аппроксимационная теорема, обобщающая как результаты А.Н. Колмогорова и Р. Хехт-Нильсена и работ [32, 39, 45], так и аппроксимационную теорему Стоуна–Вейерштрасса [65]. С точки зрения нейронных сетей ее смысл сводится к тому, что для сколь угодно точной аппроксимации любой функции многих переменных достаточно двухслойной структуры НС при условии, что в скрытом слое использована нелинейная функция активации.

Таким образом, основываясь на всех приведенных выше результатах, для решения поставленной задачи будет достаточно двухслойной НС: входной слой – скрытый слой – выходной слой. В скрытом слое должна быть сигмоидальная функция активации, а в выходном – линейная.

4.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЛИЧЕСТВА НЕЙРОНОВ ВО ВХОДНОМ И ВЫХОДНОМ СЛОЯХ НС

Рассмотрим проблему определения количества нейронов во входном слое НС для решения задачи настройки параметров П-, ПИ-, ПИД-регуляторов.

В работах [13, 26] эта проблема рассматривается для задачи построения нейрорегулятора. Несмотря на то, что в данном случае нейронная сеть не заменяет регулятор, а настраивает его, некоторые положения указанных исследований могут быть применены. И в частности тот факт, что нейронная сеть на своих входах должна иметь не меньше информации, чем имеет регулятор. Определим, что включает в себя эта информация.

Рассмотрим ПИД-регулятор. Зависимость выхода регулятора от входа может быть описана в виде (3). В операторной форме уравнение (3) примет вид (5) ($U(s)$ и $Y(s)$ – преобразования Лапласа для $u(t)$ и $y(t)$ соответственно):

$$(5) \quad U(s) = \left(K_p + \frac{K_I}{s} + K_D s \right) Y(s).$$

Соответственно, передаточная функция регулятора $W_c(s)$ примет вид

$$(6) \quad W_c(s) = U(s)/Y(s) = K_p + \frac{K_I}{s} + K_D s.$$

Нейронная сеть, используемая для решения указанной задачи, является дискретной и вызывается раз в Δt секунд. То есть хотя сам регулятор и является непрерывным (условно, поскольку реализован средствами ЭВМ и промышленного контроллера, однако их такт работы намного меньше Δt , поэтому можно заключить, что Δt на его работу не влияет), его работа оценивается нейронной сетью дискретно, поэтому с целью определения состава нейронов входного слоя такой сети переведем данный

закон управления (6) в дискретный вид (7), воспользовавшись заменой $s = (1 - z^{-1}) / \Delta t$:

$$\begin{aligned}
 W_c(z) &= K_P + \frac{K_I \Delta t}{1 - z^{-1}} + K_D \frac{1 - z^{-1}}{\Delta t} = \frac{1}{1 - z^{-1}} (K_P(1 - z^{-1}) + \\
 (7) \quad &+ K_I \Delta t + \frac{K_D}{\Delta t} (1 - z^{-1})^2) = \frac{1}{1 - z^{-1}} \left(\frac{K_D}{\Delta t} z^{-2} - \right. \\
 &\left. - (2 \frac{K_D}{\Delta t} + K_P) z^{-1} + (K_P + K_I \Delta t + \frac{K_D}{\Delta t}) \right).
 \end{aligned}$$

Обозначим $a_1 = (K_P + K_I \Delta t + K_D / \Delta t)$, $a_2 = - (2 K_D / \Delta t + K_P)$, $a_3 = K_D / \Delta t$. Таким образом, разностное уравнение, являющееся аналогом (5), для k -го шага управления (момента времени t_k) имеет вид

$$(8) \quad u(t_k) = a_1 e(t_k) + a_2 e(t_k - \Delta t) + a_3 e(t_k - 2\Delta t) + u(t_k - \Delta t).$$

То есть ПИД-регулятор фактически имеет сведения о рассогласовании в текущий момент, такт назад, два такта назад и о сигнале управления такт назад. Авторы [13, 26] делают вывод о том, что нейронная сеть, заменяющая ПИД-регулятор, должна иметь не меньше информации, чем имеет регулятор, поэтому НС должна иметь 4 входа.

В данном случае вывод имеет сходный вид: настройщик (нейросетевой оптимизатор) ПИД-регулятора не может иметь информации меньше, чем имеет сам регулятор. Но существует одно важное различие. Настройщик должен знать не просто рассогласование в текущий момент, но и текущее значение уставки, поскольку при разных уставках при одинаковом рассогласовании могут быть необходимы различные значения параметров регулятора. В уравнении (8) $e(t)$ есть разница уставки $r(t)$ и выхода ОУ $y(t)$. При этом следует учитывать тот факт, что при построении нейросетевого оптимизатора параметров линейных регуляторов рассматриваются системы управления со ступенчатой сменой уставок (см. п. 2), а настройка ведется только в течение переходного процесса. В таких условиях уставку для конкретного переходного процесса следует считать константой, не зависящей от времени. Тогда уравнение (8) примет вид

$$(9) \quad u(t_k) = (a_1 + a_2 + a_3)r - a_1 y(t_k) - a_2 y(t_k - \Delta t) - a_3 y(t - 2\Delta t) + u(t_k - \Delta t).$$

Таким образом, нейронная сеть для нейросетевого оптимизатора параметров ПИД-регулятора должна содержать пять входов: задание, выход ОУ в текущий момент, такт назад, два такта назад и значение управляющего воздействия в предыдущий момент времени.

Для других законов регулирования, основанных на П-, И-, Д-составляющих, структура входного слоя НС может быть получена таким же образом. Однако НС с пятью входами в полной мере обеспечит настройку как П-, так и ПИ- или ПИД-регулятора.

Количество нейронов в выходном слое определяется количеством настраиваемых параметров регулятора. НС для случая с ПИД-регулятором должна иметь 3 выхода, каждый из которых отвечает за вычисление соответствующего параметра регулятора K_P , K_I , K_D . В выходном слое, в соответствии с [32, 39, 45], должна использоваться линейная функция активации.

4.3. ФУНКЦИЯ АКТИВАЦИИ СКРЫТОГО СЛОЯ НС

В соответствии с рассмотренными ранее теоремами в качестве функции активации скрытого слоя НС должна быть использована нелинейная функция сигмоидального вида. Наиболее часто применимыми функциями являются непосредственно сигмоидальная функция (рис. 4а) $f(s) = 1/(1 + e^{-\alpha s})$, $\alpha = \text{const}$, и гиперболический тангенс $f(s) = (e^{\alpha s} - e^{-\alpha s})/(e^{\alpha s} + e^{-\alpha s})$ (рис. 4б).

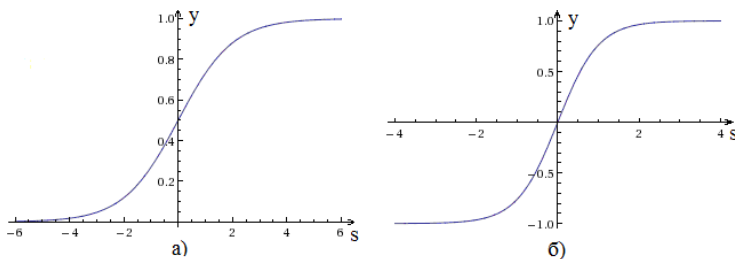


Рис. 4. Обычная сигмоидальная функция (а) и гиперболический тангенс (б)

Они имеют сходные преимущества, в частности, у обеих функций производная может быть легко выражена через саму функцию, что позволяет существенно сократить вычислительную сложность метода обучения (обратного распространения ошибки). Основное различие между ними заключается в том, что область определения для обычной сигмоидальной функции – $[0;1]$, а для гиперболического тангенса – $[-1;1]$.

Для того чтобы осуществить выбор между этими двумя вариантами, необходимо определить допустимы (необходимы) ли отрицательные значения на выходе скрытого слоя НС. Для ответа на этот вопрос следует детальнее рассмотреть принцип работы нейросетевого оптимизатора [4]. Его база правил определяет, когда учить НС, с какой скоростью учить нейроны выходного слоя (причем для отдельных нейронов выходного слоя эта скорость может отличаться) и, самое главное, в каком направлении следует изменять текущее значение параметров регулятора K_P , K_I , K_D (уменьшать или увеличивать). Направление (т.е. знак коррекции весовых коэффициентов между скрытым и выходным слоями НС $\Delta\omega_{kj}^{(2)}(t)$), в соответствии с математической моделью метода обратного распространения ошибки (10) [58], должно определяться знаком скорости обучения нейрона выходного слоя $\eta_k^{(2)}$:

$$\Delta\omega_{kj}^{(2)}(t) = -\eta_k^{(2)} \delta_k^{(2)} O_j^{(1)},$$

$$(10) \quad \omega_{kj}^{(2)}(t+1) = \omega_{kj}^{(2)}(t) + \Delta\omega_{kj}^{(2)}(t),$$

$$\delta_k^{(2)} = e_k;$$

где $\eta_k^{(2)}$ – это скорость обучения для k -го нейрона выходного слоя; $\delta_k^{(2)}$ – это совокупная ошибка k -го нейрона выходного слоя; e_k – это ошибка k -го нейрона выходного слоя (для каждого из каналов K_P , K_I , K_D используется своя формула для расчета данного значения – см. п. 4.5); $O_j^{(1)}$ – это выходной сигнал j -го нейрона скрытого слоя; $\omega_{kj}^{(2)}$ – весовой коэффициент между k -м нейроном выходного слоя и j -м нейроном скрытого слоя.

А для того чтобы, меняя знак скорости обучения $\eta_k^{(2)}$, возможно было менять направление изменения выхода нейрона выходного слоя, все остальные множители в формуле коррек-

ции такого весового коэффициента ($\delta_k^{(2)}$ и $O_j^{(1)}$) данной математической модели должны иметь постоянные знаки. Для совокупной ошибки нейрона $\delta_k^{(2)}$ это невозможно, поскольку она меняет знак в зависимости от знака рассогласования e_k , однако все эти ситуации учтены в правилах базы правил нейросетевого оптимизатора. А вот выход нейронов скрытого слоя $O_j^{(1)}$ должен иметь постоянный знак, например, быть неотрицательным. Поэтому в данном случае целесообразно выбрать сигмоидальную функцию активации.

4.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЛИЧЕСТВА НЕЙРОНОВ В СКРЫТОМ СЛОЕ НС

В соответствии с [66] первоначально необходимо определить, к какому классу относится создаваемая НС: сужающаяся (в скрытом слое нейронов меньше, чем во входном) или расширяющаяся сеть (в скрытом слое нейронов больше, чем во входном). Чем выше требования к различению близких входных векторов, тем более расходящейся должна быть сеть [66]. Основываясь на данном утверждении, можно сделать вывод о том, что в случае с нейросетевым оптимизатором параметров линейных регуляторов сеть должна быть расширяющейся, поскольку похожие входные вектора могут требовать различных значений коэффициентов регулятора (ввиду нелинейности ОУ).

В целом обзор по методикам выбора количества нейронов в скрытом слое приведен в [64]. Данные методы можно разделить на две большие группы: конструктивные [25, 35, 38, 60, 78] и аналитические [22, 44, 46, 47, 57, 67, 69, 72, 73].

Конструктивные методы предполагают добавление (удаление) нейронов в скрытом слое с отслеживанием изменения критерия качества обучения: ошибки обучения, ошибки обобщения и пр. Все конструктивные методы применимы для автономного обучения НС, когда есть готовая обучающая выборка и достаточный объем времени для проведения описанных итеративных процедур. В случае с нейросетевым оптимизатором линейных регуляторов автономная обучающая выборка отсутствует, а обучение необходимо вести в оперативном режиме в

реальном масштабе времени. Поэтому применение указанных методов в данном случае является затруднительным.

В свою очередь, аналитические методы предполагают наличие некоторой математической формулы, позволяющей оценить количество нейронов в скрытом слое НС в зависимости от параметров самой НС и характеристик предметной области, с которой НС предстоит работать.

В частности, в работе [44] Р. Хехт-Нильсен, опираясь на теорему Колмогорова–Арнольда, показал, что в скрытом слое достаточно наличия $(2N + 1)$ нейронов, где N – это число входов НС. Однако уже в работе [54] было обосновано, что число нейронов скрытого слоя должно удовлетворять следующему неравенству: $N_{hid} \geq 2N + 1$. Данный подход может эффективно применяться в качестве нижней оценки количества нейронов. Тогда в скрытом слое НС для ПИД-регулятора должно быть не меньше **11 нейронов**. Подобная оценка может быть легко проведена для любого линейного регулятора, содержащего П-, И-, Д- каналы.

В [46, 47, 67] доказано, что НС прямого распространения с одним скрытым слоем с N нейронами и практически любой нелинейной функцией активации (дифференцируемой и недифференцируемой, непрерывной и с разрывами) в скрытом слое может запомнить и обобщить N различных примеров.

Исходя из работ [48, 49], количество нейронов скрытого слоя и объем обучающей выборки должны совпадать для достижения близкой к нулю ошибки. Для нейросетевого оптимизатора обучение НС ведется в течение конкретного переходного процесса, для которого подбираются параметры регулятора. Тогда можно сделать вывод о том, что количество точек конкретного переходного процесса, которые необходимо предъявить нейронной сети для анализа, должно совпадать с количеством нейронов в скрытом слое. Исходя из оценок Р. Хехт-Нильсена, приведенных выше, получается, что таких точек должно быть не менее 11 для ПИД-регулятора.

Но необходимо учесть еще один факт. Как уже упоминалось ранее, на производстве для борьбы с шумом измеряемые величины – характеристики ОУ или процесса подвергаются

усреднению, причем количество усредняемых точек может быть различным. Например, если усреднение ведется по трем точкам, то для получения 11 усредненных результатов о конкретном переходном процессе после момента смены уставки в реальности потребуется $3 + 1 + 1 + 10 = 15$ измерений. Первые три реальные точки позволят получить первый усредненный выход ОУ, а для случая с ПИД-регулятором необходимо еще иметь выход ОУ такт и два назад. Поэтому для их вычисления потребуется еще $1 + 1 = 2$ измерения. Таким образом будет получен первый входной вектор для НС. А кроме него потребуется еще 10 таких векторов. То есть в данном случае количество нейронов в скрытом слое также должно быть равно 15.

Обобщая полученные результаты, для нейросетевого оптимизатора линейных регуляторов количество нейронов в скрытом слое предлагается вычислять следующим образом:

$$(11) N_{hid} = (2N + 1) + N_{av} + N_{delay} - 1,$$

где N_{hid} – количество нейронов в скрытом слое НС; N – число входов НС; N_{av} – число точек, по которым ведется усреднение данных, получаемых с ОУ (затем эти усредненные данные нормируются и подаются на входы НС); N_{delay} – число входов НС, являющихся задержанными сигналами по выходу ОУ.

И это же число N_{hid} , основываясь на результатах работ [48, 49], определяет количество вызовов НС за время одного переходного процесса. Данный факт будет необходим для п. 4.6.

В экспериментах, проведенных в рамках данной работы, усреднение велось именно по трем точкам. Поэтому структура НС для настройки ПИД-регулятора имеет вид: 5-15-3.

4.5. ОПИСАНИЕ ВЫБРАННОЙ СТРУКТУРЫ НС И МЕТОДА ЕЕ ОПЕРАТИВНОГО ОБУЧЕНИЯ

Выбранная структура нейронной сети приведена на рис. 5. Математическая модель сети представлена в виде (12). Во входном слое расположено 5 нейронов: текущее задание (x_1); задержанный на 1 секунду (x_2), на Δt секунд (x_3) и на $2\Delta t$ секунд (x_4) сигнал по выходу ОУ; задержанный на 1 секунду сигнал управления, формируемый ПИД-регулятором (x_5). Входные сигналы

нормируются в интервал $[0;1]$. Обращение к НС также происходит раз в Δt секунд.

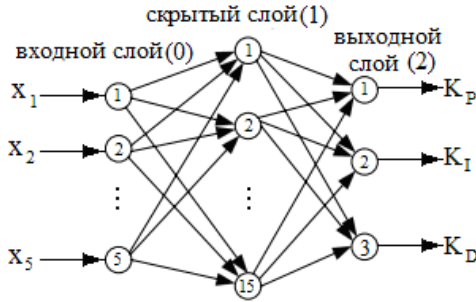


Рис. 5. Структура нейронной сети, применяемой в нейросетевом оптимизаторе параметров ПИД-регулятора

$$s_j^{(1)} = \sum_{i=1}^5 \omega_{ji}^{(1)} \cdot x_i + b_j^{(1)},$$

$$O_j^{(1)} = f^{(1)}(s_j^{(1)}) \quad (j = \overline{1, 15}),$$

$$s_k^{(2)} = \sum_{j=1}^{15} \omega_{kj}^{(2)} \cdot O_j^{(1)} + b_k^{(2)},$$

$$O_k^{(2)} = f^{(2)}(s_k^{(2)}) \quad (k = \overline{1, 3});$$

где $\omega_{ji}^{(1)}$ – весовой коэффициент связи между j -м нейроном скрытого слоя и i -м нейроном входного слоя; $\omega_{kj}^{(2)}$ – весовой коэффициент связи между k -м нейроном выходного слоя и j -м нейроном скрытого слоя; x_i – i -й входной сигнал НС; $b_j^{(1)}$ – линейное смещение j -го нейрона скрытого слоя; $b_k^{(2)}$ – линейное смещение k -го нейрона выходного слоя; $O_j^{(1)}$ – выходной сигнал j -го нейрона скрытого слоя; $O_k^{(2)}$ – выходной сигнал k -го нейрона выходного слоя; $s_j^{(1)}$ – взвешенная сумма для j -го нейрона скрытого слоя; $s_k^{(2)}$ – взвешенная сумма для k -го нейрона выходного слоя; $f^{(q)}$ – функция активации слоя номер q . В частности, $f^{(1)}$ – гиперболический тангенс; $f^{(2)}$ – линейная функция активации; $O_1^{(2)}$ – это K_P , $O_2^{(2)}$ – это K_I , $O_3^{(2)}$ – это K_D .

Все НС нейросетевого оптимизатора предлагается оперативно обучать с помощью алгоритма обратного распространения ошибки. Математическая модель метода в адаптированном для рассматриваемой НС виде представлена в виде (13)–(18). Общей целью обучения является минимизация рассогласования между выходом ОУ $y(t)$ и заданием $r(t)$:

$$(13) E(t) = \frac{1}{2}(r(t) - y(t))^2 \rightarrow \min ,$$

$$(14) \begin{aligned} e_2(t) &= r(t) - y(t), & e_1(t) &= e_2(t) - e_2(t-1), \\ e_3 &= e_2(t) - 2e_2(t-1) + e_2(t-2), \end{aligned}$$

$$(15) \delta_k^{(2)} = e_k \frac{dO_k^{(2)}}{ds_k^{(2)}}, k = \overline{1, 3},$$

$$(16) \delta_j^{(1)} = \sum_{k=1}^3 \delta_k^{(2)} \omega_{kj}^{(2)} \frac{dO_j^{(1)}}{ds_j^{(1)}}, j = \overline{1, 15},$$

$$(17) \begin{aligned} \Delta \omega_{kj}^{(2)}(t) &= \eta_k^{(2)} \delta_k^{(2)} O_j^{(1)} + \alpha \Delta \omega_{kj}^{(2)}(t-1) + \beta \Delta \omega_{kj}^{(2)}(t-2), \\ \Delta b_k^{(2)}(t) &= \eta_k^{(2)} \delta_k^{(2)} + \alpha \Delta b_k^{(2)}(t-1) + \beta \Delta b_k^{(2)}(t-2), \\ \Delta \omega_{ji}^{(1)}(t) &= \eta_j^{(1)} \delta_j^{(1)} O_i^{(0)} + \alpha \Delta \omega_{ji}^{(1)}(t-1) + \beta \Delta \omega_{ji}^{(1)}(t-2), \\ \Delta b_j^{(1)}(t) &= \eta_j^{(1)} \delta_j^{(1)} + \alpha \Delta b_j^{(1)}(t-1) + \beta \Delta b_j^{(1)}(t-2), \\ \omega_{kj}^{(2)}(t+1) &= \omega_{kj}^{(2)}(t) + \Delta \omega_{kj}^{(2)}(t), \\ b_k^{(2)}(t+1) &= b_k^{(2)}(t) + \Delta b_k^{(2)}(t), \\ \omega_{ji}^{(1)}(t+1) &= \omega_{ji}^{(1)}(t) + \Delta \omega_{ji}^{(1)}(t), \\ b_j^{(1)}(t+1) &= b_j^{(1)}(t) + \Delta b_j^{(1)}(t); \end{aligned}$$

где $E(t)$ – целевая функция процесса оперативного обучения; $r(t)$ – это задание по температуре; $y(t)$ – выход ОУ; $\eta^{(1)}$ – скорость обучения для нейронов скрытого слоя; $\eta_k^{(2)}$ – скорость обучения для k -го нейрона выходного слоя; α и β – коэффициенты инерции, применяемые для ускорения сходимости; $\delta_j^{(1)}$ – совокупная ошибка j -го нейрона скрытого слоя; $\delta_k^{(2)}$ – совокупная ошибка k -го нейрона выходного слоя;

e_k – ошибка k -го нейрона выходного слоя; $dO_j^{(q)}/ds_j^{(q)}$ – производная функции активации слоя q .

В соответствии с [58] параметр α был принят равным 0,8, а β – равным $(-0,15)$. Скорость обучения для всех нейронов скрытого слоя $\eta^{(1)}$ является одинаковой и не меняется в течение работы системы. Численное значение данной величины также заимствовано из работы [58] и составляет 10^{-4} . Оптимальность выбранных значений α , β и $\eta^{(1)}$ была проверена экспериментально. Их уменьшение ведет к увеличению количества переходных процессов, требуемых для перенастройки параметров регулятора в результате смены состояния объекта управления. В случае увеличения значений указанных параметров скорость изменения выходных сигналов сети в процессе обучения возрастает, что в некоторых случаях приводит к колебаниям значений K_P , K_I около оптимального значения.

В отличие от [58], в данной работе предлагается сделать значения $\eta_k^{(2)}$ различными для нейронов выходного слоя НС и изменять их в течение работы системы. Пусть $\eta_1^{(2)}$ – скорость коррекции весовых коэффициентов и смещения, отвечающих за формирование выхода НС $O_1^{(2)}$, т.е. K_P . Соответственно, $\eta_2^{(2)}$ отвечает за K_I и $\eta_3^{(2)}$ – за K_D . Необходимость такого подхода вызвана, во-первых, тем фактом, что порядок значений коэффициентов регулятора обычно различается (например, $K_P = 2 \cdot 10^{-1}$, а $K_I = 1,5 \cdot 10^{-4}$), поэтому и скорость их настройки должна быть пропорциональна этому значению. Во-вторых, нет необходимости изменять коэффициенты регулятора постоянно, а в некоторые моменты коррекции требует только один из них.

Поэтому в начале каждой итерации работы нейросетевого оптимизатора все три указанные скорости приравниваются к нулю, а затем происходит вызов разработанной базы правил. Условия правил описывают ситуации, когда необходимо использовать и обучать НС, а следствия – необходимые значения $\eta_1^{(2)}$, $\eta_2^{(2)}$, $\eta_3^{(2)}$. Если какое-либо из правил срабатывает и при этом сигнал выхода ПИД-регулятора находится в допустимых пределах, то происходит обучение НС.

Важным вопросом также остается выбор значения Δt для каждого конкретного ОУ, поскольку данный параметр во многом определяет точность работы НС.

4.6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ ЗАДЕРЖЕК ВХОДНЫХ СИГНАЛОВ НС НЕЙРОСЕТЕВОГО ОПТИМИЗАТОРА

Значение Δt – это и дискретность вызова НС, и время, на которое отстоят друга от друга задержанные сигналы по выходу ОУ, являющиеся входами НС.

Одним из возможных путей решения проблемы выбора Δt является включение этого параметра в алгоритм обучения (например, обратного распространения ошибки) в качестве настраиваемого параметра [51]. Однако это, во-первых, усложняет алгоритм обучения, требуя больше времени и ресурсов. А во-вторых, такой подход применим при автономном обучении, когда есть время и возможность без последствий перебирать значения Δt . В работах [40, 77] предложен итеративный метод выбора структуры НС и времени задержки входных сигналов при построении нейросетевой модели технологического процесса с одним входом – одним выходом и множеством входов – множеством выходов. Данный подход имеет тот же недостаток, что и описанный ранее – он применим только для автономного обучения.

Для выбора значения Δt в задаче построения НС для нейросетевого оптимизатора параметров линейных регуляторов предлагается воспользоваться результатами, описанными в п. 4.4 данной работы. Количество нейронов в скрытом слое, метод определения которого был предложен в п. 4.4, совпадает с числом вызовов НС в течение конкретного переходного процесса. Нейросетевой оптимизатор устанавливается уже в работающую систему управления, где известны текущие значения параметров регулятора (они позволяют системе работать, но не являются оптимальными) и время переходных процессов под управлением данного регулятора для данных значений его параметров. Тогда Δt можно определить, выбрав самый короткий в текущей картине заданий переходный процесс и разделив его на число нейронов в скрытом слое НС. Этого достаточно

для того, чтобы в течение конкретного переходного процесса НС была вызвана достаточное число раз.

В дальнейшем планируется ввести в оптимизатор функцию расчета времени Δt , которая будет автоматически пересчитывать это значение (в сторону уменьшения), если было получено недостаточное количество измерений выхода ОУ.

Для проверки предложенного подхода была проведена серия модельных экспериментов по определению оптимального значения Δt для различных сочетаний значений параметров ОУ, описываемого с помощью (1). Результаты приведены в п. 5.

5. Результаты моделирования работы нейросетевого оптимизатора для различных значений параметров ОУ с целью выбора Δt

База правил, приведенная в [4], разработана для настройки П- и И-каналов регулятора. Поэтому дальнейшие эксперименты проведены для ПИ-регулятора. При этом в экспериментах использовалась НС следующей структуры: 5-15-3. Однако так как производилась настройка ПИ-регулятора, третий выход НС всегда был равен нулю и обучение соответствующего ему нейрона не производилось ($\eta_3^{(2)} = 0$).

В пакете Matlab была реализована система управления моделью ОУ (рис. 6), описываемой (1).

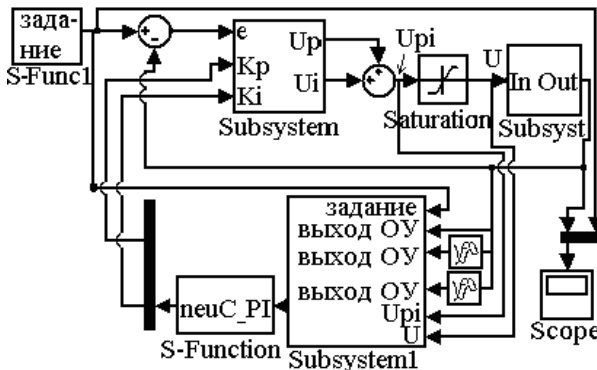


Рис. 6. Система управления с нейросетевым оптимизатором

Контур управления представлен блоком *Subsystem* с ПИ-регулятором с нейросетевым оптимизатором (*S-function neuC_PI*). U_i , U_p , U_{pi} – сигналы управления на выходе i -, p -каналов и всего ПИ-регулятора соответственно, e – текущее рассогласование. Блок *Saturation* использован для ограничения получаемого с ПИ-регулятора сигнала управления U до диапазона $[0;100]$ для придания ОУ, описываемого выражением (1), несимметричных свойств.

Для каждого опыта было использовано по два набора параметров модели (сочетания), между которыми осуществлялось подобное переключение: первое состояние – 12 переходов с параметрами $(T_1, \tau) \rightarrow$ второе состояние – 12 переходов с параметрами $(2 \cdot T_1, 2 \cdot \tau) \rightarrow$ первое состояние – 12 переходов с параметрами (T_1, τ) . Значение T_2 всегда составляло 5% от T_1 . Начальные значения коэффициентов ПИ-регулятора для каждого сочетания были подобраны для первого состояния ОУ. Задачей оптимизатора было сначала подобрать новые коэффициенты для измененного состояния объекта, а затем вернуть исходные параметры при возврате к исходному состоянию ОУ. Для смены уставки выход ОУ должен был удерживаться в 5% окрестности значения разности текущего задания и предшествующего в течение 1800 секунд. Для каждого из сочетаний параметров ОУ также был проведен опыт с обычным ПИ-регулятором, который использовал значения коэффициентов, подобранные для первого состояния ОУ, в течение всего эксперимента.

Всего было проведено 17280 экспериментов: для каждого из трех значений коэффициента усиления ОУ $K = 10, 20$ и 30 было использовано по 144 различных сочетания значений остальных параметров модели ОУ ($T_1 \in [10 \text{ с}; 15000 \text{ с}]$, $\tau \in [1 \text{ с}; 450 \text{ с}]$). Для каждого такого сочетания было проведено по 40 опытов со значениями Δt от 1 секунды до 40 секунд. В каждом таком наборе из 40 опытов выбирался лучший. Для этого был разработан критерий оптимальности в виде суммы следующих значений, нормированных в промежуток $[0;1]$ относительно текущего набора из 40 опытов: время текущего опыта, среднее перерегулирование за весь опыт и сумма квадратов отклонений выхода ОУ от задания за все время опыта. Выби-

рался опыт с минимальным значением критерия среди имеющихся. При этом использовались следующие ограничения: завершены все 36 переходных процессов, среднее перерегулирование за все время опыта не могло быть более 5% от разницы предшествующего и текущего заданий, а общее время опыта должно было быть меньше, чем время, показанное системой с обычным ПИ-регулятором в таких же условиях для такой же модели ОУ. Значение Δt для данного опыта выбиралось как лучшее для данного сочетания параметров ОУ.

В дальнейшем апробация разработанного метода определения структуры и параметров НС произведена на примере муфельных печей, поэтому для моделирования для всех моделей ОУ был выбран следующий график изменения заданий: $590^{\circ}\text{C} \rightarrow 640^{\circ}\text{C} \rightarrow 505^{\circ}\text{C} \rightarrow 590^{\circ}\text{C}$, являющийся уменьшенной в два раза по амплитуде копией графика для печи нагрева литой заготовки перед прокатом.

По итогам моделирования для каждого конкретного набора параметров модели ОУ было определено оптимальное значение параметра Δt . Полученные результаты представлены в виде поверхностей для $K = 10$, $K = 20$ и $K = 30$, отражающих зависимость оптимального значения Δt от T_1 и τ (см. рис. 7–9). Кроме того, по полученным данным аппроксимирован аналитический вид зависимости (19) Δt от K , T_1 и τ .

Для моделей ОУ, в которых $\tau > 0,1T_1$, ни одно из значений Δt не удовлетворяло предъявленным требованиям. Таким образом, для применения нейросетевого оптимизатора необходимо, чтобы $\tau \leq 0,1T_1$.

Экономия по времени на выполнение графика заданий относительно обычного ПИ-регулятора для предлагаемой системы по всем опытам составляло от 3% до 30%, по расходу энергоносителя – от 3% до 31%.

В целом проведенные исследования позволяют сделать вывод о том, что предлагаемый метод настройки параметров регулятора с помощью нейросетевого оптимизатора применим к ОУ с различной динамикой, причем без необходимости изменения структуры НС или базы правил. Однако при этом должно быть выбрано адекватное значение Δt .

$$\begin{aligned}
 \Delta t = & 4.5 - 4.5 \cdot 10^{-12} K^8 + 1.91 \cdot 10^{-23} K^3 T_1^3 \tau^3 + 1.32 \cdot 10^{-15} K^3 T_1^3 - \\
 & - 5.29 \cdot 10^{-12} K^3 T_1^2 + 1.44 \cdot 10^{-8} K^3 T_1 + 1.27 \cdot 10^{-11} K^3 \tau^3 - \\
 & - 8.03 \cdot 10^{-9} K^3 \tau^2 + 3.38 \cdot 10^{-6} K^3 \tau - 5.39 \cdot 10^{-15} K^2 T_1^2 \tau^2 - \\
 & - 3.84 \cdot 10^{-10} K^2 T_1^2 + 1.06 \cdot 10^{-5} T_1^2 / K^2 - 0.12 \cdot T_1 / K^2 - \\
 (19) \quad & - 1.78 \cdot 10^{-7} K^2 \tau^2 - 0.02 \tau^2 / K^2 + 10.45 \tau / K^2 - 320.6 / K^2 - \\
 & - 2.25 \cdot 10^{-6} T_1^2 / K + 2.92 \cdot 10^{-7} K T_1 \tau - 1.39 \cdot 10^{-4} T_1 \tau / K + \\
 & + 2.7 \cdot 10^{-2} T_1 / K - 1.26 \cdot 10^{-3} \tau^2 / K + 0.46 \tau / K + \\
 & + 18.28 / K + 1.84 \cdot 10^{-31} T_1^8 - 8.99 \cdot 10^{-12} T_1^2 \tau^2 + \\
 & + 1.56 \cdot 10^{-9} T_1^2 \tau - 3.49 \cdot 10^{-7} T_1^2 + 1.27 \cdot 10^{-7} T_1 \tau^2 - 1.43 \cdot 10^{-5} T_1 \tau + \\
 & + 4.1 \cdot 10^{-3} T_1 - 1.15 \cdot 10^{-20} \tau^8 - 6.57 \cdot 10^{-5} \tau^2 + 2.28 \cdot 10^{-3} \tau.
 \end{aligned}$$

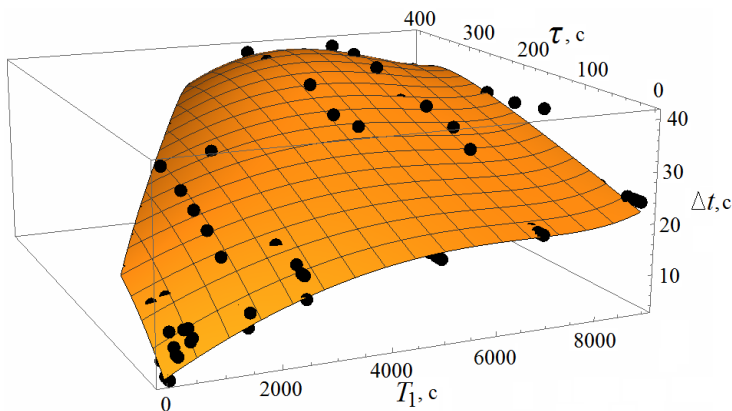


Рис. 7. Зависимость Δt от T_1 и τ при $K = 10$

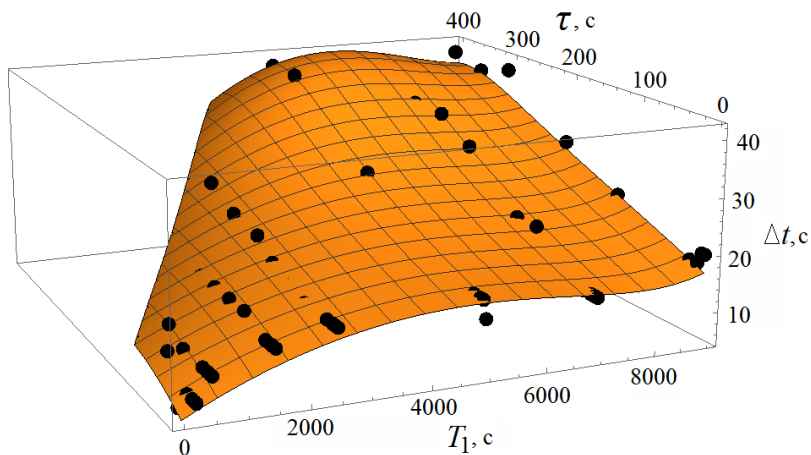


Рис. 8. Зависимость Δt от T_1 и τ для $K = 20$

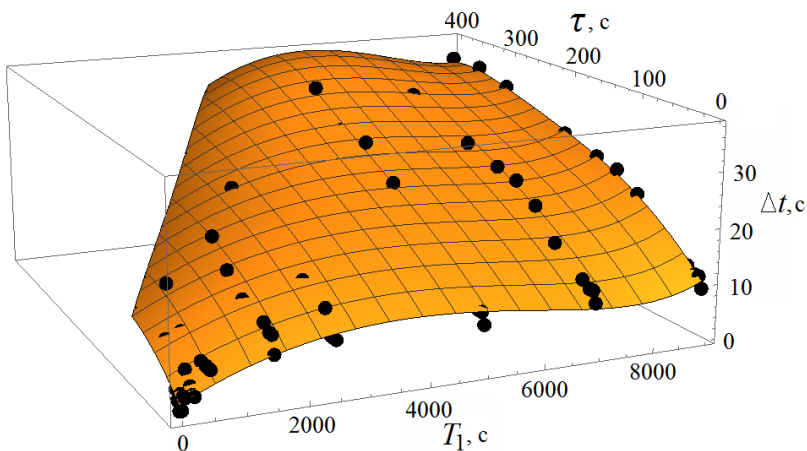


Рис. 9. Зависимость Δt от T_1 и τ для $K = 30$

Для этого может быть использована полученная зависимость (19), но лишь при наличии модели ОУ. Однако в случае

внедрения оптимизатора на реальный ОУ его модель будет неизвестна.

В этом случае для вычисления Δt необходимо будет воспользоваться методом, предложенным в п. 4.6. Проверим адекватность данного метода на основе имеющихся экспериментальных данных. Для этого необходимо показать, что в течение любого переходного процесса нейросетевой оптимизатор в среднем анализирует одинаковое число точек этого процесса (вызывается одинаковым число раз). Причем это число должно совпадать с количеством нейронов в скрытом слое.

При решении данной задачи для каждой из моделей ОУ, используя выбранное оптимальное значение Δt , оценивалось усредненное по всем переходным процессам значение времени T_{III} , в течение которого рассогласование между выходом ОУ и заданием находилось в пределах от 10% до 80% разницы между текущим заданием и предыдущим. Этот промежуток времени важен с точки зрения правил, определяющих моменты обучения нейронной сети. Если НС не будет вызвана в течение этого промежутка времени, то нейросетевой оптимизатор не сможет настроить коэффициенты регулятора, а вызывается такая сеть раз в Δt секунд. Имея значение T_{III} и разделив его на значение Δt для текущей модели ОУ, можно получить, сколько в среднем раз за время переходного процесса был вызван нейросетевой оптимизатор: $N = T_{III} / \Delta t$.

Вычислив значение N для всех опытов, для которых удалось определить оптимальное значение Δt , было замечено, что диапазон значений N составляет [9; 24]. Было решено провести статистический анализ данных результатов. В итоге было получено распределение, приведенное на рис. 10.



Рис. 10. Распределение появления значений N

Согласно критерию Пирсона, данное распределение является нормальным. Математическое ожидание (МО) величины N составляет 15,94, СКО – 3,48. Это дает основание полагать, что для всех сходных экспериментов значение N будет подчиняться данному распределению. Полученное значение математического ожидания величины N практически совпадает с количеством нейронов в скрытом слое НС, что подтверждает адекватность метода вычисления Δt , предложенного в п. 4.6.

По результатам моделирования были выявлены следующие ограничения на применение нейросетевого оптимизатора: 1) задание должно изменяться ступенчато; 2) соотношение транспортного запаздывания к постоянной времени ОУ должно быть менее 0,1 (аналогичное ограничение накладывается, например, на применение адаптивного регулятора фирмы Siemens [59]); 3) минимальная величина ступенчатого изменения задания, для которой нейросетевой оптимизатор сохраняет работоспособность, прямо пропорционально зависит от амплитуды помехи измерения выходной величины ОУ.

На основе рассмотренных выше подходов предлагается общий алгоритм построения и инициализации НС нейросетевого оптимизатора параметров линейных регуляторов.

6. Общий алгоритм выбора структуры НС нейросетевого оптимизатора и ее инициализации

Предлагается следующий обобщенный алгоритм построения и инициализации НС для нейросетевого оптимизатора параметров линейных регуляторов:

1. Для любого линейного регулятора используется двух-слойная нейронная сеть вида: входной слой – скрытый слой – выходной слой. В скрытом слое расположена сигмоидальная функция активации, а в выходном – линейная.

2. Количество входов НС определяется на основе анализа разностного уравнения настраиваемого линейного регулятора. НС не может располагать меньшим объемом информации, чем сам регулятор. В частности, для ПИД-регулятора определен набор из 5 нейронов. В выходном слое находится столько нейронов, сколько составляющих в настраиваемом регуляторе.

3. Для расчета количества нейронов скрытого слоя необходимо знать, сколько входов в НС и по скольким точкам ведется усреднение контролируемых параметров ОУ. Для расчета предлагается использовать формулу (11).

4. Для расчета дискретности вызова НС и времени задержки ее входных сигналов Δt необходимо разделить имеющееся время самого короткого в отслеживаемой картине заданий переходного процесса на количество нейронов в скрытом слое. Также в п. 5 получено аналитическое уравнение для расчета данного параметра, которое возможно применить при наличии оценок параметров модели ОУ, представленной в виде (1).

5. Весовые коэффициенты и смещения для скрытого слоя НС генерируются случайным образом в промежутке $[-1;1]$. Смещения выходного слоя приравниваются к нулю. Матрица весовых коэффициентов выходного слоя рассчитывается с помощью метода экстремального обучения, причем в качестве ожидаемых выходов НС выступают используемые до начала подстройки в линейном регуляторе параметры. Таким образом НС задается «начальное состояние» – в начальный момент она формирует на своих выходах такие значения параметров регулятора, которые использовались до ее подключения.

6. На вход НС поступают усредненные данные, полученные с ОУ. Перед непосредственной подачей на вход нейронов входного слоя они нормализуются в промежуток $[0;1]$.

7. В дальнейшем НС нейросетевого оптимизатора обучается в оперативном режиме по методу обратного распространения ошибки. Скорости обучения нейронов выходного слоя определяет база правил, исходя из ситуации на ОУ.

При этом использование НС для ПИД-регулятора для настройки П- или ПИ-регулятора возможно.

Далее приведены результаты применения нейросетевого оптимизатора на двух муфельных электронагревательных печах.

7. Исследование работы нейросетевого оптимизатора на реальном объекте управления

7.1. ОПИСАНИЕ КОНТУРОВ УПРАВЛЕНИЯ ПЕЧАМИ СНОЛ-1,6.2,5.1/11-И4 И СНОЛ 40/1200

В качестве ОУ для натуральных экспериментов были выбраны муфельные электронагревательные печи типа СНОЛ-1,6.2,5.1/11-И4 и СНОЛ 40/1200. Реализованная система управления такими печами, функциональная схема которой представлена на рис. 11, состояла из трех уровней.

На нижнем уровне находились термопара, измеряющая температуру рабочей зоны печи, и реле, посредством симисторов включающее нагревательный элемент.

Управляющий уровень (Simatic S7-300) осуществлял непосредственное управление муфельной электропечью. Контроллер получал данные от термопары через термопреобразователь, производил их обработку и отправлял на рабочую станцию, от которой он получал значение управляющего воздействия. В контроллере производилась широтно-импульсная модуляция управляющего воздействия и его выдача на исполнительный механизм включения нагревательного элемента.

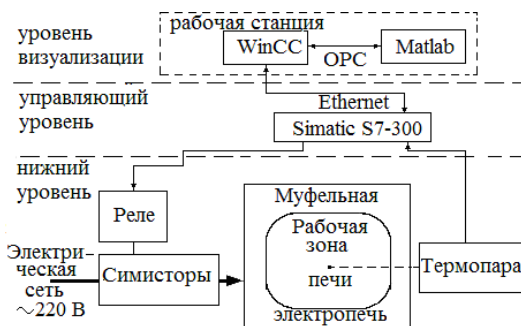


Рис. 11. Функциональная схема системы управления печью

На уровне визуализации находилась рабочая станция с системой визуализации WinCC и пакетом Matlab, в котором реализован нейросетевой оптимизатор параметров ПИ-регулятора. WinCC и Matlab взаимодействовали между собой через OPC-интерфейс посредством тегов.

Схема управления, реализованная в пакете Matlab, приведена на рис. 12. WinCC передавал данные о температуре (*temper*) и уставку (*zadanie*) по температуре в Matlab. Запущенная в Matlab HC формировала значение управляющего воздействия (*upravl*), которое через WinCC поступало в контроллер. *Group1*, *group2* – это OPC блоки соответственно для записи и чтения значений в тегах WinCC.

В Matlab реализован нейросетевой оптимизатор (см. блок *S-function neuc_PI*, рис. 12) параметров ПИ-регулятора (*PI*). Здесь U_i , U_p , U_{pi} – сигналы управления на выходе *i*-, *p*-каналов и всего ПИ-регулятора соответственно. Блок *satur* использован для ограничения сигнала управления с ПИ-регулятора до диапазона $[0; 100]$ единиц. U – управляющее воздействие, подаваемое на ОУ.

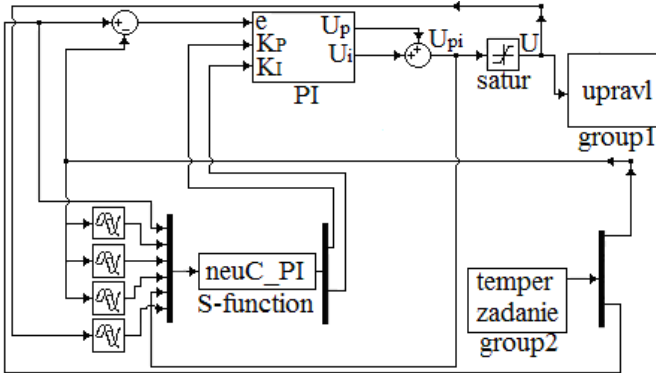


Рис. 12. Схема управления печью, реализованная в Matlab

Блок нейросетевого оптимизатора *S-function* имеет шесть входов. Первые пять из них являются входами НС (см. п. 4.5). Шестой вход необходим для корректной работы базы правил.

Для опытов использовался тот же график смены заданий, что и для модельных экспериментов: $590^{\circ}\text{C} \rightarrow 640^{\circ}\text{C} \rightarrow 505^{\circ}\text{C} \rightarrow 590^{\circ}\text{C}$ и т.д. Для смены уставки температура должна удерживаться в окрестности задания, равной 5% разницы между текущим заданием и предыдущим, в течение 30 минут.

Для пустых печей были подобраны коэффициенты ПИ-регулятора на переходном процессе $505^{\circ}\text{C} \rightarrow 590^{\circ}\text{C}$: 1) СНОЛ-1,6,2,5.1/11-И4: $K_p = 0,6$, $K_i = 6,976 \cdot 10^{-4}$, и 2) СНОЛ 40/1200: $K_p = 2,5$, $K_i = 1,67 \cdot 10^{-2}$. Для обеих печей в соответствии с подходом, предложенным в п. 4.6, было рассчитано значение Δt . Для СНОЛ -1,6,2,5.1/11-И4 $\Delta t = 20$ с, для СНОЛ 40/1200 $\Delta t = 10$ с.

7.2. РЕЗУЛЬТАТЫ НАТУРНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

В рамках исследования для графика заданий $590^{\circ}\text{C} \rightarrow 640^{\circ}\text{C} \rightarrow 505^{\circ}\text{C} \rightarrow 590^{\circ}\text{C}$ для каждой из печей было проведено по два эксперимента: для системы с нейросетевым оптимизатором параметров ПИ-регулятора и для обычного ПИ-регулятора.

Эксперимент заключался в том, что исследовалась работа системы в следующих условиях: с начального момента и до момента, когда задание было изменено 12 раз, муфельная печь была пустой, далее в нее загружалась литая заготовка объемом примерно 30% от рабочего пространства печи, и задание изменялось еще 12 раз, а затем печь разгружалась и проводилось еще 12 переходных процессов. Каждый переходный процесс считался завершенным, если после входа в окрестность задания, равную 5% разницы между текущим заданием и предыдущим, проходило 30 минут. Затем происходила смена задания. Для этого был использован счетчик времени. Если температура в печи выходила за пределы окрестности, то счетчик времени обнулялся. Нейросетевой оптимизатор всегда начинал эксперимент с известными значениями коэффициентов ПИ-регулятора, указанными ранее как оптимальные для пустой печи. Обычный ПИ-регулятор всегда использовал только их.

Результаты экспериментов для печи СНОЛ –1,6.2,5.1/11-И4, полученные с использованием нейросетевого оптимизатора параметров ПИ-регулятора и обычного ПИ-регулятора, для графика смены заданий $590^{\circ}\text{C} \rightarrow 640^{\circ}\text{C} \rightarrow 505^{\circ}\text{C} \rightarrow 590^{\circ}\text{C}$ приведены на рис. 13 и рис. 14. Графики изменения параметров регулятора K_p и K_I также представлены на рис. 14.

До момента загрузки печи болванкой обе системы ведут себя практически одинаково. В период работы загруженной печи система с нейросетевым оптимизатором позволила добиться 4% перерегулирования для процессов нагрева и 2,2% – для охладений, в то время как для обычного ПИ-регулятора для процессов нагрева этот показатель составил 12%, для охлаждения – 4,5%. После разгрузки печи ПИ-регулятор с первого переходного процесса начинает работать как до загрузки печи. Системе с нейросетевым оптимизатором требуется некоторое время, чтобы вернуть параметры регулятора к исходным. Затем системы начинают работать практически идентично.

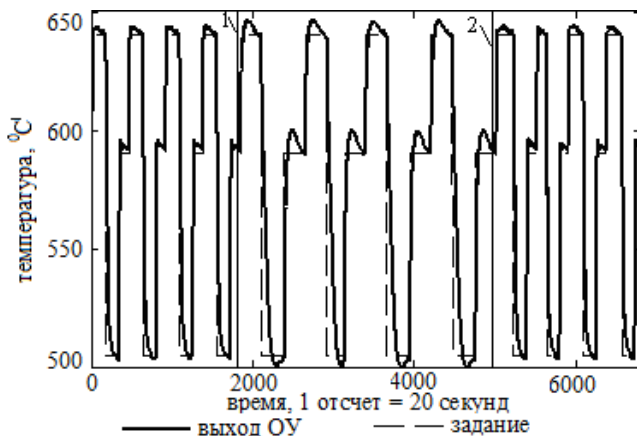


Рис. 13. Результаты для печи СНОЛ–1,6.2,5.1/11-И4 для графика изменения задания $590^{\circ}\text{C} \rightarrow 640^{\circ}\text{C} \rightarrow 505^{\circ}\text{C} \rightarrow 590^{\circ}\text{C}$ для обычного ПИ-регулятора. 1 – момент загрузки печи; 2 – момент разгрузки печи

Общее время опыта для системы с нейросетевым оптимизатором составило 29,08 часа при расходе электроэнергии 15,11 кВт·ч, а для обычного ПИ-регулятора – 37,7 часа при расходе электроэнергии 17,56 кВт·ч. Таким образом, экономия по времени на выполнение задания при использовании нейросетевого оптимизатора составила 23%, а электроэнергии – 14%.

Значение параметра K_I в определенные моменты (остывание печи) оказывалось равным нулю. Это связано со следующими причинами. Большую часть переходного процесса при остывании выход ПИ-регулятора является отрицательным. Допустимые пределы для сигнала управления – $[0; 100]$. Поэтому, в соответствии с п. 4.5, обучение сети не производится, а в соответствии с базой правил, K_I приравнивается к нулю.

Результаты экспериментов для печи СНОЛ 40/1200 приведены на рис. 15–16.

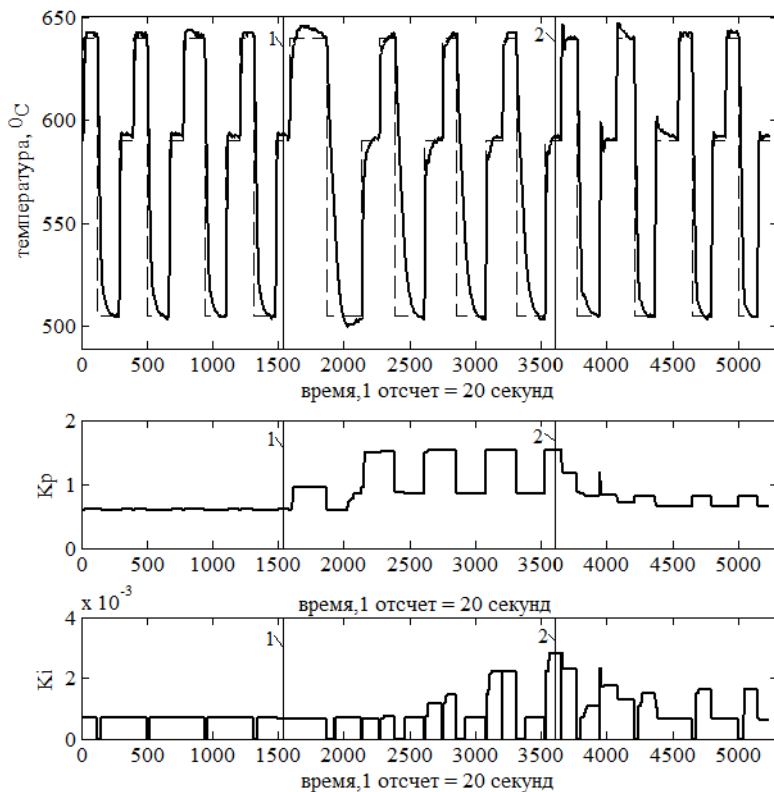


Рис. 14. Результаты для печи СНОЛ–1,6,2,5.1/11-И4 для графика изменения задания $590^{\circ}\text{C} \rightarrow 640^{\circ}\text{C} \rightarrow 505^{\circ}\text{C} \rightarrow 590^{\circ}\text{C}$ для нейросетевого оптимизатора. 1 – момент загрузки печи; 2 – момент разгрузки печи

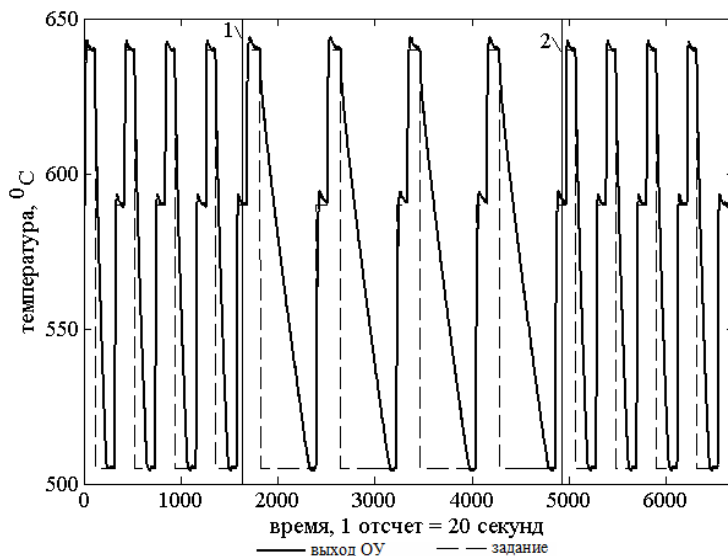


Рис. 15. Результаты системы управления с обычным ПИ-регулятором для печи СНОЛ 40/1200 для графика изменения задания $590^{\circ}\text{C} \rightarrow 640^{\circ}\text{C} \rightarrow 505^{\circ}\text{C} \rightarrow 590^{\circ}\text{C}$, 1 – момент загрузки печи; 2 – момент разгрузки печи.

В период работы загруженной печи система с нейросетевым оптимизатором позволила добиться 4% перерегулирования для процессов нагрева, в то время как для обычного ПИ-регулятора этот показатель составил 9%. Время опыта для системы с нейросетевым оптимизатором составило 35,42 часа при расходе электроэнергии 17,24 кВт·ч, а для обычного ПИ-регулятора – 36,87 часа при расходе 18,37 кВт·ч. Экономия по времени на выполнение графика задания при использовании нейросетевого оптимизатора составила 4%, а электроэнергии – 6%.

Подобные эксперименты были проведены для обеих печей на других графиках изменения задания:

1) $590^{\circ}\text{C} \rightarrow 620^{\circ}\text{C} \rightarrow 570^{\circ}\text{C} \rightarrow 590^{\circ}\text{C}$. В данном случае базовая температура была оставлена равной 590°C , но были уменьшены амплитуды ступенчатых изменений задания. Экономия по

времени относительно системы с обычным ПИ-регулятором составила: а) для печи СНОЛ-1,6.2,5.1/11-И4 – 22,8%, б) для печи СНОЛ 40/1200 – 4,6%. Экономия по расходу электроэнергии относительно системы с обычным ПИ-регулятором составила: а) для печи СНОЛ-1,6.2,5.1/11-И4 – 22,3%, б) для печи СНОЛ 40/1200 – 5,4%.

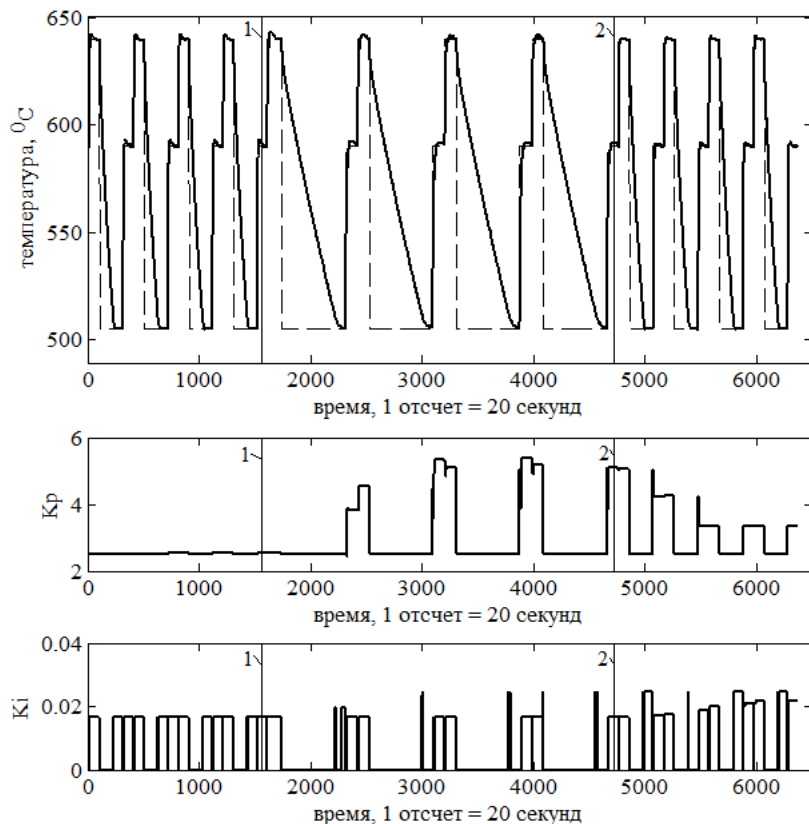


Рис. 16. Результаты применения нейросетевого оптимизатора для печи СНОЛ 40/1200 для графика изменения задания $590^{\circ}\text{C} \rightarrow 640^{\circ}\text{C} \rightarrow 505^{\circ}\text{C} \rightarrow 590^{\circ}\text{C}$, 1 – момент загрузки печи; 2 – момент разгрузки печи

2) $300^{\circ}\text{C} \rightarrow 330^{\circ}\text{C} \rightarrow 240^{\circ}\text{C} \rightarrow 300^{\circ}\text{C}$. В данном случае были изменены и базовая температура, и амплитуды ступенчатых изменений задания. Экономия по времени относительно системы с обычным ПИ-регулятором составила: а) для печи СНОЛ-1,6,2,5.1/11-И4 – 24%, б) для печи СНОЛ 40/1200 – 2,8%. Экономия по расходу электроэнергии относительно системы с обычным ПИ-регулятором составила: а) для печи СНОЛ-1,6,2,5.1/11-И4 – 21%, б) для печи СНОЛ 40/1200 – 5,2%.

3) $150^{\circ}\text{C} \rightarrow 190^{\circ}\text{C} \rightarrow 100^{\circ}\text{C} \rightarrow 150^{\circ}\text{C}$. В данном случае базовая температура вновь была уменьшена. Экономия по времени относительно системы с обычным ПИ-регулятором составила: а) для печи СНОЛ-1,6,2,5.1/11-И4 – 22%, б) для печи СНОЛ 40/1200 – 2,8%. Экономия по расходу электроэнергии относительно системы с обычным ПИ-регулятором составила: а) для печи СНОЛ-1,6,2,5.1/11-И4 – 31%, б) для печи СНОЛ 40/1200 – 3,2%.

4) $1000^{\circ}\text{C} \rightarrow 1050^{\circ}\text{C} \rightarrow 915^{\circ}\text{C} \rightarrow 1000^{\circ}\text{C}$. Подобный опыт проведен только для печи СНОЛ 40/1200. В данном случае температуры находятся около верхней допустимой границы для данной печи. Экономия по времени относительно системы с обычным ПИ-регулятором составила 4,7%, по расходу электроэнергии – 6,7%.

Полученные результаты подтверждают адекватность предложенного метода определения структуры и параметров НС нейросетевого оптимизатора.

Кроме того, необходимо отметить, что при подстройке параметров ПИ-регулятора при постоянном графике уставок и режиме работы печи параметры, K_P и K_I устанавливаются на некоторых постоянных значениях. Это позволяет сделать вывод о том, что оптимизатор может работать и в ином, относительно описанного, режиме. Если в момент его запуска параметры регулятора не позволяют получать требуемого качества переходных процессов, то он произведет их подстройку. После этого, при условии относительной стабильности параметров объекта управления, его возможно отключить. При следующей смене состояния объекта описанную процедуру возможно по-

вторить вновь. Если печь работает для строго определенного графика изменения уставок, объем и структура посяда материала в печь практически не изменяется, а список таких режимов ограничен, то со временем с помощью настройщика возможно подобрать параметры регулятора для всех таких режимов и перейти в режим табличной адаптации (gain scheduling [23]). Однако у непрерывной адаптации существует ряд преимуществ. Во-первых, она позволяет оперативно реагировать на дрейф характеристик объекта. Во-вторых, для реальных печей, например металлургического производства, в зависимости от марки металла меняется график уставок. И даже для одной марки объем посяда металла в печь может существенно отличаться. В-третьих, в случае, например, капитального ремонта печи для всех режимов работы объекта параметры регулятора придется уточнять.

8. Заключение

В статье предложен метод синтеза и инициализации нейронной сети для нейросетевого оптимизатора параметров линейных регуляторов. Для данного метода не требуется наличие модели ОУ, а достаточно лишь априорных сведений о нем: является ли ОУ симметричным или нет, какие значения параметров регулятора используются в настоящее время, какие значения критериев качества переходных процессов являются допустимыми, ограничения на значение управляющего воздействия. Метод может быть применен для линейного регулятора любой структуры, основанной на П-, И-, Д- составляющих. Изложены подходы к выбору количества слоев, нейронов в них, функций активации и времени задержки входных сигналов сети, являющихся выходными сигналами ОУ. Приведен разработанный общий алгоритм синтеза НС.

Предложенный метод синтеза и инициализации нейронной сети нейросетевого оптимизатора параметров линейных регуляторов проверен как на моделях объектов с различной динамикой, так и на реальных лабораторных печах.

Полученные результаты позволяют сделать вывод о том, что использование нейросетевого оптимизатора параметров линейных регуляторов с синтезированной нейронной сетью для учета нелинейных свойств ОУ позволило сократить перерегулирование и время, требуемое на выполнение графика заданий, а также существенно сократить расход электроэнергии. Таким образом, в условиях реального производства на данном агрегате может быть интенсифицировано производство продукции и сокращено удельное энергопотребление. Для всех опытов нейронная сеть имела одинаковую структуру. Так же как и база правил.

В дальнейшем предполагается провести модельные и натурные эксперименты по использованию нейросетевого оптимизатора для управления объектами с другими динамическими характеристиками, в частности, главным электроприводом двухвалковой прокатной клетки.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 15-07-0609215) и фонда Президента РФ (грант №14.У30.15.4865-МК)

Литература

1. АЛЕКСАНДРОВ А.Г. *Оптимальные и адаптивные системы*. – М.: Высшая школа, 1989. – 263 с.
2. АРНОЛЬД В.И. *О функциях трех переменных* // Доклады АН СССР. – 1957. – Т. 114, №4. – С. 679–681.
3. ВАСИЛЬЕВ В.И., ИДРИСОВ И.И. *Алгоритмы проектирования и анализа устойчивости интеллектуальной системы управления* // Вестник Уфимского государственного авиационного технического университета. – 2008. – Т. 11, №1. – С. 34–42.
4. ЕРЕМЕНКО Ю.И., ПОЛЕЩЕНКО Д.А., ГЛУЩЕНКО А.И. *О применении нейросетевого оптимизатора параметров ПИ-регулятора для управления нагревательными печами в различных режимах работы* // Управление большими системами. – 2015. – Вып. 56. – С. 143–175.

5. ЕРЕМЕНКО Ю.И., ПОЛЕЩЕНКО Д.А., ГЛУЩЕНКО А.И. *Об особенностях практической реализации схемы ПИД-нейрорегулятора с самонастройкой для управления печами нагрева* // Приборы и системы. Управление. Контроль. Диагностика. – 2012. – №1. – С. 25–30.
6. ЗМЕУ К.В., МАРКОВ Н.А., ШИПИТЬКО И.А. И ДР. *Безмодельное прогнозирующее инверсное нейроуправление с регенерируемым эталонным переходным процессом* // Информатика и системы управления. – 2009. – №3. – С. 109–117.
7. КОЛМОГОРОВ А.Н. *О представлении непрерывных функций нескольких переменных суперпозициями непрерывных функций меньшего числа переменных* // Доклады АН СССР. – 1956. – Т. 108, №2. – С. 179–182.
8. КРАСОВСКИЙ А.А., БУКОВ В.Н., ШЕНДРИК В.С. *Универсальные алгоритмы оптимального управления непрерывными процессами*. – М.: Наука, 1977. – 272 с.
9. КРУГЛОВ С.П. *Взаимосвязь двух подходов к аналитическому конструированию оптимальных регуляторов* // Автоматика и телемеханика. – 2003. – №4. – С. 56–69.
10. КУДИНОВ Ю.И., КЕЛИНА А.Ю. *Упрощенный метод определения параметров нечетких ПИД регуляторов* // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2013. – №1. – С. 12–22.
11. ЛЕТОВ А.М. *Математическая теория процессов управления*. – М.: Наука, 1981. – 255 с.
12. ЛОВЧАКОВ В.И., СУХИНИН Б.В., СУРКОВ В.В. *Оптимальное управление электротехническими объектами*. – Тула: Издательство ТулГУ, 2004. – 149 с.
13. НАКОНЕЧНИЙ М.В., ГРНЯК Ю.Б., ІВАХІВ О.В. И ДР. *Дослідження стійкості системи з нейроконтролером* // Вісник НТУУ “КПІ”. Серія ПРИЛАДОБУДУВАННЯ. – 2014. – Вип. 48(2). – С. 139–148.
14. ОМОРОВ Т.Т., ДЖОЛДОШЕВ Б.О. *Краткий обзор методов анализа и синтеза нелинейных САУ* // Известия Кыргызского государственного технического университета им. И. Раззакова. – 2012. – №26. – С. 172–183.
15. РОТАЧ В.Я. КУЗИЩИН В.Ф. ПЕТРОВ С.В. *Настройка регуляторов по переходным характеристикам систем управления*

- без их аппроксимации аналитическими выражениями // Автоматизация в промышленности. – 2009. – № 11. – С. 9–12.
16. САЛИХОВ З.Г., АРУНЯНЦ Г.Г., РУТКОВСКИЙ А.Л. *Системы оптимального управления сложными технологическими объектами*. – М.: Теплоэнергетик, 2004. – 496 с.
 17. ФЕЛЬДБАУМ А.А. *Основы теории оптимальных автоматических систем*. – М.: Наука, 1971. – 744 с.
 18. ШУБЛАДЗЕ А.М., КУЗНЕЦОВ С.И. *Автоматически настраиваемые промышленные ПИ и ПИД регуляторы* // Автоматизация в промышленности. – 2007. – №2. – С. 15–17.
 19. ALEXANDROV A.G., PALENOV M.V. *Self-tuning PID-I controller* // Proc. 18th IFAC World Congress, Milano, Italy, 2011. – P. 3635–3640.
 20. ALLAOUA B., GASBAOUI B., MEBARKI B. *Setting up PID DC motor speed control alteration parameters using particle swarm optimization strategy* // Leonardo Electronic Journal of Practices and Technologies. – 2009. – Vol. 14. – P. 19–32.
 21. ANDERSON K.L., BLANKENSHIP G.I., LEBOW L.G. *A rule-based adaptive PID controller* // Proc. 27th IEEE Conf. Decision. Control, 1988. – P. 564–569.
 22. ARAI M. *Bounds on the number of hidden units in binary-valued three-layer neural networks* // Neural Networks. – 1993. – Vol. 6, No. 6. – P. 855–860.
 23. ASTROM K.J., HAGGLUND T. *Advanced PID Control*. – Research Triangle Park: ISA – The Instrumentation, Systems, and Automation Society, 2006. – 461 p.
 24. ASTROM K.J., HAGGLUND T., HANG C.C. et al. *Automatic tuning and adaptation for PID controllers. A survey* // IFAC J. Control Eng. Practice. – 1993. – Vol. 1, No. 4. – P. 699–714.
 25. BARTLETT E.B. *Dynamic node architecture learning: An information theoretic approach* // Neural Networks. – 1994. – No. 7. – P. 129–140.
 26. BAZYLEVYCH O., HIRNYAK Y., IVAKHIV O. *Neural controller for designing of nanopositioning systems* // IEEE International Workshop on Intelligent Data Acquisition and Advanced Compu-

- ting Systems: Technology and Applications. – Rende: IEEE, 2009. – P. 287–290.
27. BINDU R., NAMBOOTHIRIPAD M.K. *Tuning of PID controller for DC servo motor using genetic algorithm* // International Journal of Emerging Technology and Advanced Engineering. – 2012. – Vol. 2, No. 3. – P. 310–314.
 28. BIRBIR Y., NOGAY H.S., TOPUZ V. *Estimation of total harmonic distortion in short chorded induction motors using artificial neural network* // Proceedings of the 6th WSEAS Int. Conf. on Applications of Electrical Engineering. – Istanbul: Istanbul Technical University, 2007. – P. 206–210.
 29. CHEN J., HUANG T. *Applying neural networks to on-line updated PID controllers for nonlinear process control* // J. of Process Control. – 2004. – No. 14. – P. 211–230.
 30. CHEN J., YEA Y. *Neural network-based predictive control for multivariable processes* // Chemical Engineering Communications. – 2002. – Vol. 189. – No. 7. – P. 865–894.
 31. CHIEN K.L., HRONES I.A., RESWICK J.B. *On the automatic control of generalized passive systems* // Trans on ASME. – 1952. – Vol. 74. – P. 633–640.
 32. CYBENKO G. *Approximation by superposition of a sigmoidal function* // Math. Control Systems and Sigansls. – 1989. – No. 2. – P. 303–314.
 33. DEMIROREN A., YESIL E. *Automatic generation control with fuzzy logic controllers in the power system including SMES units* // International Journal of Electrical Power & Energy Systems. – 2004. – Vol. 26(4). – P. 291–305.
 34. ERENOGLU I., EKSIN I., YESIL E. AND ETC. *An intelligent hybrid fuzzy PID controller* // European Conference on Modelling and Simulation. – Bonn: European Council for Modelling and Simulation, 2006. – P. 62–67.
 35. FAHLMAN S.E., LEBIERE C. *The cascade-correlation learning architecture* // Advances in Neural Information Processing Systems. – 1990. – Vol. 2. – P. 524–532.
 36. FANG M., ZHUO Y., LEE Z. *The application of the self-tuning neural network PID controller on the ship roll reduction in random*

- waves // Ocean Engineering. – 2010. – No. 37. – P. 529–538.
37. FERREIRA P.M., FARIA E.A., RUANO A.E. *Neural network models in greenhouse air temperature prediction* // Neurocomputing. – 2002. – Vol. 43(1). – P. 51–75.
 38. FREAN M. *The upstart algorithm: A method for constructing and training feedforward neural networks* // Neural Computation. – 1990. – No. 2. – P. 198–209.
 39. FUNAHASHI K. *On the approximate realization of continuous mappings by neural networks* // Neural Networks. – 1989. – Vol. 2, No. 3. – P. 183–192.
 40. GOMM J.B., YU D.L., WILLIAMS D. *A new model structure selection method for non-linear systems in neural modeling* // UKACC International Conference on Control. – London: Institution of Electrical Engineers, 1996. – P. 752–757.
 41. GORBAN A.N., WUNSCH D. *The general approximation theorem* // Proceedings of the IJCNN. – Anchorage: IEEE, 1998. – P. 1271–1274.
 42. GUZELKAYA M., EKSIN I., YESIL E. *Self-tuning of PID-type fuzzy logic controller coefficients via relative rate observer* // Engineering Applications of Artificial Intelligence. – 2003. – Vol. 16(3). – P. 227–236.
 43. HAGGLUND T., TENGVALL A. *An automatic tuning procedure for unsymmetrical processes* // Proc. 3rd European control conference, 1995. – P. 2450–2455.
 44. HECHT-NIELSEN R. *Kolmogorov's Mapping Neural Network Existence Theorem* // Proc. Int. Conf. Neural Networks. – New York: IEEE Press, 1987. – Vol. III. – P. 11–14.
 45. HORNICK K., STINCHCOMBE M., WHITE H. *Multilayer feedforward networks are universal approximators* // Neural Networks. – 1989. – Vol. 2, No. 5. – P. 359–366.
 46. HUANG G.-B. *Learning capability of neural networks* // Ph.D. Thesis. – Singapore: Nanyang Technological University, 1998. – 137 p.
 47. HUANG G.-B., BABRI H.A. *Upper bounds on the number of hidden neurons in feedforward networks with arbitrary bounded*

- nonlinear activation functions* // IEEE Trans. Neural Networks. – 1998. – Vol. 9(1). – P. 224–229.
48. HUANG G.-B., WANG D.H., LAN Y. *Extreme learning machines: a survey* // International Journal of Machine Learning and Cybernetics. – 2011. – Vol. 2, No. 2. – P. 107–122.
49. HUANG G.-B., ZHU Q.Y., SIEW C.K. *Extreme learning machine: theory and applications* // Neurocomputing. – 2006. – Vol. 70, No. 1. – P. 489–501.
50. KALMAN R.E. *Theory of Optimal Control* // Bullet Soc. Mat. Mech. – 1960. – Vol. 5, No. 1. – P. 106–115.
51. KIM S.-S. *Time-delay recurrent neural network for temporal correlations and prediction* // Neurocomputing. – 1998. – Vol. 20. – P. 253–263.
52. KOLMOGOROV A.N. *On the representation of continuous function of many variables by superpositions of continuous functions of one variable and addition* // Doklady Akademii Nauk USSR. – 1957. – Vol. 114(5). – P. 953–956.
53. KUHN U. *A practice oriented setting rule for pid-controllers: The t-sum-rule* // Automatisierungstechnische Praxis. – 1995. – Vol. 37, No. 5. – P. 10–16.
54. KŮRKOVÁ V. *Kolmogorov's theorem is relevant* // Neural Computation. – 1991. – Vol. 3. – No. 4. – P. 617–622.
55. LEVA A., COX C., RUANO A.E. *Hands-on PID autotuning: a guide to better utilisation* // IFAC Professional Brief. – Laxenburg: IFAC, 2002. – 84 p.
56. LI Y., ANG K., CHONG C. *Patents, software, and hardware for PID control – an overview and analysis of the current art* // IEEE Control Systems Magazine. – 2006. – No. 26(1). – P. 42–54.
57. LIU Y., STARZYK J.A., ZHU Z. *Optimizing number of hidden neurons in neural networks* // Artificial Intelligence and Applications. – 2007. – No. 2. – P. 138–143.
58. OMATU S., KHALID M., YUSOF R. *Neuro-Control and its Applications*. – London: Springer, 1995. – 255 p.
59. PFEIFFER B.-M. *Towards «plug and control»: self-tuning temperature controller for PLC* // Int. J. of Adaptive Control and Signal Processing. – 2000. – No. 14. – P. 519–532.

60. REFENES A.N., CHAN E.B. *Sound recognition and optimal neural network design* // Microprocessing and Microprogramming. – 1992. – Vol. 35, No. 1. – P. 783–789.
61. REYES J., ASTORGA C., ADAM M. AND ETC. *Bounded neuro-control position regulation for a geared DC motor* // Engineering Applications of Artificial Intelligence. – 2010. – No. 23. – P. 1398–1407.
62. RUANO A.E., CRISPIM E.M., CONCEICAO E.Z.E. AND ETC. *Prediction of building's temperature using neural networks models* // Energy and Buildings. – 2006. – Vol. 38(6). – P. 682–694.
63. SCHAEDEL H.M. *A new method of direct PID controller design based on the principle of cascaded damping ratios* // European Control Conference (ECC). – IEEE, 1997. – P. 1265–1271.
64. SHEELA K.G., DEEPA S.N. *Review on methods to fix number of hidden neurons in neural networks* // Mathematical Problems in Engineering. – 2013. – Vol. 2013. – P. 1–11.
65. STONE M.N. *The generalized Weierstrass approximation theorem* // Math. Mag. – 1948. – Vol. 21. – P. 167–183, 237–254.
66. SWINGLER K. *Applying neural networks: a practical guide.* – Waltham: Morgan Kaufmann, 1996. – 317 p.
67. TAMURA S., TATEISHI M. *Capabilities of a four-layered feed-forward neural network: four layers versus three* // IEEE Trans. Neural Networks. – 1997. – Vol. 8(2). – P. 251–255.
68. TAN S.-H., HANG C.-C., CHAI J.-S. *Gain scheduling: from conventional to neuro-fuzzy* // Automatica. – 1997. – Vol. 33, No. 3. – P. 411–419.
69. TRENN S. *Multilayer perceptrons: approximation order and necessary number of hidden units* // IEEE Transactions on Neural Networks. – 2008. – Vol. 19, No. 5. – P. 836–844.
70. UNAL M., AK A., TOPUZ V. AND ETC. *Optimization of PID Controllers Using Ant Colony and Genetic Algorithms.* – London: Springer, 2013. – 85 p.
71. UNAL M., ERDAL H., TOPUZ V. *Trajectory tracking performance comparison between genetic algorithm and ant colony optimization for PID controller tuning on pressure process* // Computer

- Applications in Engineering Education. – 2012. – Vol. 20(3). – P. 518–528.
72. UPADHYAYA B.R., ERYUREK E. *Application of neural networks for sensor validation and plant monitoring* // Neural Technology. – 1992. – Vol. 97. – P. 170–176.
 73. WEIGEND A.S., HUBERMAN B.A., RUMMELHART D.E. *Predicting sunspots and exchange rates with connectionist networks* // Nonlinear Modeling and Forecasting, SFI Studies in the Sciences of Complexity. – New York: Addison-Wesley, 1992. – Vol. 12. – P. 395–432.
 74. WEINZIERL K. *Method for generating control parameters from a response signal of a controlled system and system for adaptive setting of a PID controller* // Patent US 6353766. – 2002.
 75. XIA C. et al. *Speed control of brushless DC motor using genetic algorithm based fuzzy controller* // Proc. 2004 International Conference on Intelligent Mechatronics and Automation, Chengdu, China, 3rd edn. A Treatise on Electricity and Magnetism. – Chengdu: IEEE, 2004. – Vol. 2. – P. 68–73.
 76. YESIL E., GUZELKAYA M., EKSIN I. *Self tuning fuzzy PID type load and frequency controller* // Energy Conversion and Management. – 2004. – Vol. 45(3). – P. 377–390.
 77. YU D.L., GOMM J.B., WILLIAMS D. *Neural model input selection for a MIMO chemical process* // Engineering Applications of Artificial Intelligence. – 2000. – Vol. 13. – P. 15–23.
 78. YUAN H.C., XIONG F.L., HUAI X.Y. *A method for estimating the number of hidden neurons in feed-forward neural networks based on information entropy* // Computers and Electronics in Agriculture. – 2003. – Vol. 40, No. 1. – P. 57–64.
 79. ZHAO Z.Y., TOMIZUKA M., ISAKA S. *Fuzzy gain scheduling of PID controllers* // IEEE Transactions on systems, man, and cybernetics. – 1993. – Vol. 23, No. 5. – P. 1392–1398.
 80. ZIEGLER J., NICHOLS N. *Optimum settings for automatic controllers* // Trans. ASME. – 1942. – No. 65. – P. 759–768.

NEURAL NETWORK STRUCTURE SELECTION METHOD TO SOLVE LINEAR CONTROLLERS PARAMETERS ADJUSTMENT PROBLEM

Yuri Eremenko, Sary Oskol technological institute n.a. A.A. Ygarov (branch) NUST "MISIS", Sary Oskol, Doctor of Science, professor (erem49@mail.ru).

Anton Glushchenko, Sary Oskol technological institute n.a. A.A. Ygarov (branch) NUST "MISIS", Sary Oskol, Cand.Sc (Sary Oskol, Makarenko microdistrict, 42, (4725)45-12-17, strondudd@mail.ru).

Abstract: The problem of a neural network structure selection is considered. It is used as a part of a neural tuner to adjust P-, PI- or PID-controllers parameters online to control nonlinear plants. A method to find a number of network layers, neurons in each of them, choose activation functions and calculate delay time for network delayed inputs is proposed. Such method does not need a plant model. An algorithm to synthesize and initialize the neural network for the neural tuner with the help of a-priori known data about the plant is developed. Having made the experiments with plant models and two electroheating furnaces, we conclude that neural tuner helps to achieve both time and energy consumption decrease to complete setpoint schedule in comparison with conventional linear controller. This fact shows that proposed method is valid.

Keywords: neural network, adaptive control, PID-controller, neural tuner, neural network structure selection, input signals delay time.

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии П.С. Щербаковым.*

*Поступила в редакцию 20.01.2016.
Опубликована 31.07.2016.*

УДК 332.7:[519.86+657.922
ББК 65.223

ТЕХНОЛОГИЯ УПРАВЛЕНИЯ ОБЪЕКТОМ КОММЕРЧЕСКОЙ НЕДВИЖИМОСТИ С УЧЕТОМ ПОТРЕБИТЕЛЬСКИХ ПРЕДПОЧТЕНИЙ¹

Алексеев А. О.², Спирина В. С.³

*(Пермский национальный исследовательский
политехнический университет, Пермь)*

Коргин Н. А.⁴

*(Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)*

Московский физико-технический институт, Москва)

Приводится технология управления объектом коммерческой недвижимости, отличающаяся учетом потребительских предпочтений, а также две постановки задачи управления объектом коммерческой недвижимости. Технология включает на укрупненном уровне три этапа: выявление потребительских предпочтений, верификация моделей и управление. Используя модель, можно осуществлять сценарное моделирование и прогнозирование, в том числе игровое имитационное моделирование. В ходе деловых игр могут разрабатываться проекты управленческих решений, эффективность которых может быть проверена в ходе сценарного моделирования «что будет..., если...». Поиск управленческих решений можно осу-

¹ Статья подготовлена при частичной финансовой поддержке Пермского национального исследовательского политехнического университета и Гранта Президента Российской Федерации МД-6075.2015.9.

² Александр Олегович Алексеев, кандидат экономических наук (614990, Россия, г. Пермь, Комсомольский проспект, д. 29, alekseev@cems.pstu.ru).

³ Варвара Сергеевна Спирина, аспирант (614990, Россия, г. Пермь, Комсомольский проспект, д. 29, spirina@cems.pstu.ru).

⁴ Николай Андреевич Коргин, доктор технических наук, доцент, (117342, Россия, г. Москва, ул. Профсоюзная, д. 65, nkorgin@ipi.ru).

осуществлять методом анализа чувствительности выбранного показателя эффективности к изменению контролируемых параметров.

Ключевые слова: коммерческая недвижимость, потребительская привлекательность, предпочтения, свертка, комплексное оценивание, моделирование и прогнозирование, игровое моделирование, управление.

1. Введение

Управление объектом коммерческой недвижимости должно осуществляться с учетом потребительских предпочтений, потому что при наличии оценок потребительской привлекательности возможно ранжирование (построение рейтинга) и классификация объектов коммерческой недвижимости по их привлекательности, определение вероятностей их посещения потребителями, проживающими в различных зонах удаленности от объектов коммерческой недвижимости, прогнозирование денежных потоков, моделирование арендных отношений, обоснование местоположения для строительства нового объекта и др.

Известны решения части перечисленных выше задач, в том числе часть из которых получена авторами. В данной работе предпринята попытка обобщения этих решений в виде единой технологии управления объектом коммерческой недвижимости, что определяет практическую значимость исследования.

Пользователями предлагаемой технологии являются управляющие коммерческой недвижимостью и предприниматели-арендаторы, заинтересованные в информации о степени посещаемости объектов потенциальными покупателями, необходимой для обоснования арендных отношений и осуществления коммерческой деятельности.

Предлагаемая технология управления объектом коммерческой недвижимости (далее по тексту – ОКН) с учетом потребительской привлекательности будет проиллюстрирована примерами, полученными авторами для торгово-развлекательных комплексов (далее по тексту – ТРК) г. Перми.

2. Степень разработанности проблемы

Первые работы в области оценки потребительской привлекательности коммерческой недвижимости, связанной с проблемой прогнозирования посещаемости, посвящены новому для 60-х гг. XX века формату торговой недвижимости – загородным супермаркетам. Интерес исследователей и практикующих специалистов был сосредоточен на изучении влияния размеров объекта и степени его удаленности от потребителя только на обоснование места строительства супермаркета, а в настоящее время интерес расширился на полное множество задач управления различных форматов коммерческой недвижимости.

Основоположником математической постановки задачи оценивания привлекательности торговой недвижимости, сформулированной в 1963 году [41], следует считать Д.Л. Хаффа (David L. Huff).

Модель, получившая название автора, широко используется в настоящее время. В обзоре [40] упоминается около 20 исследователей, использующих модель Хаффа. Первая работа Хаффа «A Probabilistic Analysis of Shopping Center Trade Areas» [41] активно цитируется в зарубежной литературе. По данным базы цитирования Scopus на момент написания статьи эта работа была процитирована 169 раз только в изданиях, проиндексированных в указанной базе. Так, например, в работе [38] с использованием в основе модели Хаффа определяется размещение «удобств» – магазинов в городе путем построения линий «изо-бенефит» и психо-экономических расстояний; в работе [53] модель Хаффа используется для определения средней цены, по которой следует продавать товар, чтобы оставаться конкурентоспособными и при этом не терять прибыли.

Стоит отметить также, что модель Хаффа начала носить междисциплинарный характер: – ее используют для определения внешних и внутренних факторов управления супермаркетами [37, 47, 53], определения местоположения учреждений здравоохранения [44] и школьного и дошкольного образования [45], оценки городских зеленых насаждений [51], в качестве помощи в расследованиях пищевых отравлений [39], для решения задачи

маршрутизации транспортных средств в городском пространстве [52], для тралового промысла и распределения рыбных продуктов [50], для имитационного моделирования поведения пациента при выборе учреждения здравоохранения [42] и т.д.

Модель Хаффа основана на гипотезе о зависимости привлекательности объекта торговой недвижимости, прямо пропорциональной размеру объекта и обратно пропорциональной расстоянию между потребителем и объектом недвижимости или времени, затрачиваемому на корреспонденцию от места жительства до объекта недвижимости:

$$(1) \quad A_{ij} = \frac{\{S_j\}}{\{T_{ij}\}^\lambda},$$

где i – порядковый номер покупателя (под i -м потребителем подразумевается потребитель, расположенный в точке i); j – порядковый номер объекта коммерческой недвижимости, A_{ij} (от англ. Attractiveness) – привлекательность j -го объекта недвижимости для i -го потребителя; S_j (от англ. Square) – площадь j -го объекта недвижимости; T_{ij} (от англ. Time) – время, затрачиваемое i -м потребителем на дорогу до j -го объекта недвижимости; $\lambda \in [0; 1]$ – параметр, отражающий эффект влияния разных типов объектов на воспринимаемые временные затраты (данный параметр находится эмпирически); $\{ \}$ – численное значение параметра.

Следует отметить, что модель Хаффа в оригинале записана без фигурных скобок, что математически не корректно, поскольку используется время корреспонденции в дробной степени λ , что нарушает размерность оценки привлекательности.

Несмотря на то, что параметр λ отражает эффект влияния разных типов объектов на воспринимаемые временные затраты, в работе [28] эмпирически показано, что значение λ зависит от самого времени корреспонденции. Полученные в [28] данные для расчета значений параметра λ позволили выделить три пешеходно-транспортные зоны объекта коммерческой недвижимости и соответствующие им параметры λ : для первой зоны

(от 45 до 80 мин.¹) $\lambda = 0$; для второй (от 80 до 160 мин.) $\lambda = 0,5$; для третьей (свыше 160 мин.) $\lambda = 1$.

Модель Хаффа (1) ошибочно [40] относят к классу гравитационных моделей, первая из которых была предложена американским экономистом Уильямом Рейли (William Reilly) в 1931 году [46].

Модель Рейли позволяет определить пространственное положение потребителя, в котором альтернативные торговые центры являются для потребителя одинаково привлекательными при допущении, что точка безразличия определяется с учетом расстояния между торговыми центрами и их размерами:

$$(2) \quad d_{xj} = \frac{d_{ij}}{1 + \sqrt{P_i/P_j}},$$

где d_{xj} – «точка безразличия» на расстоянии x_j от меньшего из двух центров; d_{ij} – общее расстояние между двумя центрами; P_i – размер большего центра; P_j – размер меньшего центра.

Хотя модель Хаффа (1) можно рассматривать как частный случай закона розничной гравитации Рейли (2), по мнению самого Хаффа [40] «ее концептуальный фундамент вовсе не соответствует гравитационной модели; ее, скорее, можно отнести к семейству моделей, предназначенных для описания вероятности выбора» (от англ. probabilistic choice behavior), первая из которых была предложена американским экономистом Данканом Люче (Dr. R. Duncan Luce) в 1959 году [43] и основана на предложенной им аксиоме выбора (от англ. choice axiom). Суть аксиомы «независимости от посторонних альтернатив» заключается в том, что вероятность выбора одного элемента над другими из числа многих элементов не зависит от наличия или отсутствия других элементов в множестве. В таком случае альтернативы образуют полную группу событий и вероятность выбора индивидуумом конкретной альтернативы определяется как отношение ее «веса» к сумме весов всех альтернатив:

¹ Здесь и далее указано время, затрачиваемое при передвижении пешком.

$$(3) \quad P(i) = \frac{\omega_i}{\sum_j \omega_j},$$

где ω – вес (мера) конкретной альтернативы.

В своей модели Хафф предложил в качестве веса торговой недвижимости использовать оценку её потребительской привлекательности, а оценивать потребительскую привлекательность согласно выражению (1).

Модели Хаффа (1) и Рейли (2), учитывающие только размер объекта и степень его удалённости от потребителей (расстояние или время), в силу их простоты получили широкую популярность и активно используются по сей день. Однако потребность в более глубоком изучении объектов коммерческой недвижимости может быть удовлетворена только с помощью инструментов многофакторного анализа. В связи с чем возникает потребность в модификации этих моделей, в первую очередь Хаффа как модели, получившей наибольшую известность.

Для различных потребительских групп отношение к одним и тем же параметрам может отличаться, например, размер паркинга является существенным фактором для потребителей, пользующихся личным транспортом, и не существенным для потребителей, пользующихся общественным транспортом. Индивидуальное или коллективное отношение потребителей к объекту коммерческой недвижимости и его параметрам может быть формализовано с помощью различных механизмов комплексного оценивания, которые будут описывать предпочтения потребительских групп. Поэтому модель (1) предложено [27, 30, 49] модифицировать путем расширения перечня существенных факторов, подлежащих приведению их к единой квалиметрической шкале, необходимой для выполнения процедур комплексного оценивания. Свертку параметров объекта коммерческой недвижимости, являющихся существенными факторами, важными для потребителей, предлагается интерпретировать как «Качество объекта недвижимости». Включать фактор времени в свертку не целесообразно, поскольку этот фактор относится не к объекту недвижимости, а индивидуален для каждого потребителя.

В работе [7] помимо введения агрегированного показателя качества объекта недвижимости предлагался ввод дополнительного параметра α , отражающего влияние разных типов (форматов) объектов недвижимости на их привлекательность:

$$(4) \quad A_{ij} = \alpha \times \frac{Q_j}{T_{ij}^\lambda},$$

где Q_j (от англ. Quality) – качество объекта недвижимости.

Главным отличием предлагаемой модели (4) от оригинальной (1) является ее универсальность по отношению к типу и формату коммерческой недвижимости. Введенная авторами свертка Q , описывающая качество объекта коммерческой недвижимости, является функцией многих переменных, набор которых и вид функциональной зависимости индивидуален для каждого типа коммерческой недвижимости. В таком случае модель (1), традиционно применяемая для оценки потребительской привлекательности торговой недвижимости, является частным случаем выражения (4).

Более того, оригинальная модель (1) чаще применяется для решения задачи выбора местоположения строительства нового объекта коммерческой недвижимости, а предлагаемая модель (4) может применяться также на этапе разработки концепции объекта с требуемыми параметрами качества и этапе эксплуатации и управления существующими объектами.

В данной работе в качестве объектов коммерческой недвижимости будут рассматриваться торгово-развлекательные комплексы (далее – ТРК). Поэтому параметр α , отражающий влияние различных типов объектов недвижимости на их привлекательность, в нашем случае будет одинаковым и при вычислениях вероятности выбора потребителем объекта коммерческой недвижимости – сократится, согласно (3).

С учетом предложенных изменений для целей настоящего исследования, посвященного единому формату коммерческой недвижимости, модель оценивания потребительской привлекательности принимает вид:

$$(5) \quad A_{ij} = \frac{\{Q_j\}}{\{T_{ij}\}^\lambda},$$

При исследовании различных форматов объектов коммерческой недвижимости оснований для сокращения параметра α не будет.

Описанные выше предложения модификации модели Хаффа для современных условий и ее корректность обсуждались авторами в работах [7, 49] и на различных мероприятиях [24, 25, 48], где получили положительные отзывы.

На оценку потребительской привлекательности объектов коммерческой недвижимости существенное влияние оказывает время корреспонденции потребителей от места проживания до объекта. Выше было отмечено существование трех пешеходно-транспортных зон относительно объектов коммерческой недвижимости и приведены соответствующие им параметры λ . На пересечении этих зон, в зависимости от расположения исследуемых объектов коммерческой недвижимости, можно выделить несколько секторов (рис. 1).

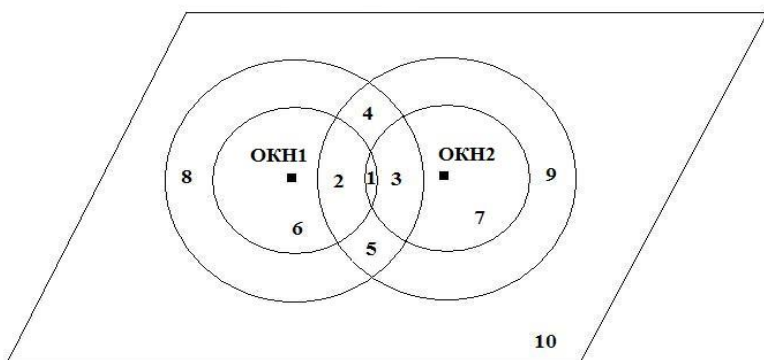


Рис. 1. Выделение секторов на примере двух ОКН

В каждом секторе на потребителей по-разному влияет время корреспонденции до конкретного объекта недвижимости, что выражается в различных значениях λ (таблица 1) и результирующей оценке потребительской привлекательности.

Оценивание потребительской привлекательности объектов коммерческой недвижимости осуществляется для потребителей, проживающих в каждом секторе отдельно, используя выражение (5).

Таблица 1. Распределение параметров λ по секторам на примере двух объектов коммерческой недвижимости

№ сектора	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\lambda_{1\text{ОКН}}$	0	0	0,5	0,5	0,5	0	1	0,5	1	1
$\lambda_{2\text{ОКН}}$	0	0,5	0	0,5	0,5	1	0	1	0,5	1

Согласно (3), вычислив привлекательность объекта, а также привлекательности других объектов-конкурентов, можно определить вероятность того, что покупатели могут быть привлечены в исследуемый объект:

$$(6) \quad P_{ij} = \frac{A_{ij}}{\sum_{j=1}^J A_{ij}}.$$

Зная количество жителей в каждом секторе, можно вычислить количество ожидаемых посетителей (n_j) по формуле

$$(7) \quad n_j = \sum_{k=1}^K (P_{ij}^k \cdot N_k),$$

где P_{ij}^k – вероятность посещения i -м посетителем из k -го сектора j -го объекта недвижимости; N_k – количество жителей k -го сектора; K – количество секторов, $K = 10$ для рассматриваемого примера с двумя ОКН (см. рис. 1).

В общем случае качество объекта коммерческой недвижимости Q зависит от нескольких характеристик x_l , являющихся гетерогенными по отношению друг другу, в связи с чем свертка $Q(x_1, \dots, x_n)$ возможна только с использованием механизмов комплексного оценивания [7].

В качестве возможных подходов к решению задачи комплексного оценивания могут выступать квалиметрические модели комплексного оценивания [1, 13], методы, разработанные в теории важности критериев [20], или известный в теории активных систем [9] матричный механизм комплексного оценивания, основанный на деревьях целей (критериев) и бинарных матриц свертки частных критериев [10, 12, 14, 31–33]. Данный

перечень предполагаемых методов решения задачи комплексного оценивания был предложен в работе [7]. В статье [26] приводятся результаты комплексного оценивания торгово-развлекательных комплексов с помощью матричных механизмов комплексного оценивания. Сравнительный анализ результатов, полученных с помощью матричных механизмов комплексного оценивания и взвешенных методов, используемых в квалиметрии, был проведен авторами в работе [30] и показал эффективность обоих подходов.

Как и в работах других исследователей, посвященных оценке потребительской привлекательности коммерческой недвижимости, в указанных выше работах авторов задача управления коммерческой недвижимостью не рассматривалась. Впервые задача управления объектом коммерческой недвижимости на примере торгово-развлекательного комплекса с учетом потребительских предпочтений, учет которых предлагалось осуществлять с помощью механизма комплексного оценивания, сформулирована в работе [27], где в качестве целевой функции выступало изменение стоимости объекта коммерческой недвижимости:

$$(8) \quad \frac{\Delta V}{V_0} = (1 - \alpha) \sum_{t=1}^T \frac{\Delta n_t}{n_{t0}} \frac{S_t}{S} \cdot 100\%,$$

где V_0 – стоимость объекта коммерческой недвижимости; ΔV – ее изменение стоимости с учетом управления; α – доля операционных расходов на обслуживание и поддержание объекта недвижимости в надлежащем состоянии от потенциального валового дохода; S_t – площадь торгового (развлекательного) помещения t ; S – сумма всех торговых (развлекательных) площадей; n_{t0} – посещаемость торговой (развлекательной) точки t ; Δn_t – изменение посещаемости торговой (развлекательной) точки t с учетом управления коммерческой недвижимостью; T – число торговых (развлекательных) помещений в объекте недвижимости.

В работе [29] в задаче управления j -м объектом коммерческой недвижимости предложена иная целевая функция:

$$(9) \quad \Pr_j(x_{lj}) = \sum_{k=1}^K \left(\frac{\alpha \frac{Q_j(x_{lj})}{T_{ij}^{\lambda(k)}}}{\sum_{j=1}^J \alpha \frac{Q_j(x_{lj})}{T_{ij}^{\lambda(k)}}} \cdot N_k \right) \cdot AR - TFC(x_{lj}) - TVC(x_{lj}),$$

где AR – средний чек; x_l – показатели, характеризующие состояние контролируемых параметров $l \in L$ объекта коммерческой недвижимости; TFC – общие постоянные затраты. Общие переменные затраты (TVC) определяют состояние объекта, т.е. его качество $Q_j(x_{lj})$ и потребительскую привлекательность $A_{ij}(Q_j(x_{lj}), T_{ij}, \lambda(k))$.

Задачи управления формулируются как задачи оптимизации с целевой функцией (8) или (9) и бюджетным ограничением на управление:

$$(10) \quad TFC(x_{lj}) - TVC(x_{lj}) \leq B_j,$$

и ограничением на множество допустимых значений контролируемых параметров $x_{lj} \in X^l \subset R^l$.

Данные задачи управления не противоречат друг другу и содержательно интерпретируются так: найти такое допустимое состояние контролируемых параметров x_{lj} объекта недвижимости, чтобы получить максимальный прирост стоимости (8) или максимальную прибыль (9) при соблюдении бюджетного ограничения (10).

Согласованность задач управления (8), (10) и (9), (10) вытекает из соотношения метода прямой капитализации, согласно которому стоимость недвижимости определяется как отношение чистого операционного дохода (данный термин принят в оценочной деятельности и по сути близок к понятию прибыли, поскольку определяется как доход за вычетом потерь, операционных расходов, страховых взносов и налогов) к ставке капитализации. При неизменном значении ставки капитализации максимизация прибыли будет приводить к максимизации стоимости объекта недвижимости.

Стоит признать, что в (9) вычисляется совокупная прибыль всех торговых и развлекательных точек ОКН, и поскольку в практике управления коммерческой недвижимостью распро-

странена форма взаимодействия между управляющей компанией и арендаторами в виде фиксированной арендной ставки и процента с продаж арендаторов, управляющая компания явным образом заинтересована в увеличении прибыли арендаторов, так как это увеличивает чистый операционный доход объекта коммерческой недвижимости и его стоимость.

В работе [29] помимо новой постановки задачи управления (9), (10) была показана технология графоаналитического поиска ее решения (см. раздел 4.3).

3. Цель работы

Целью данной работы является обобщение ранних [27, 30, 49] и еще неопубликованных результатов авторов в виде технологии управления объектом коммерческой недвижимости с учетом потребительских предпочтений.

Стоит отметить, что в работе будут учтены потребительские предпочтения жителей города Перми, поскольку они являлись респондентами маркетингового исследования, и для внедрения данной технологии в других городах потребуются дополнительные исследования. Далее в работе будут приведены примеры, где в качестве исследуемого формата коммерческой недвижимости были выбраны торгово-развлекательные комплексы.

4. Технология управления объектом коммерческой недвижимости

Технологию управления объектом коммерческой недвижимости (рис. 2б), предлагается строить на основе технологии управления организационными системами (рис. 2а).

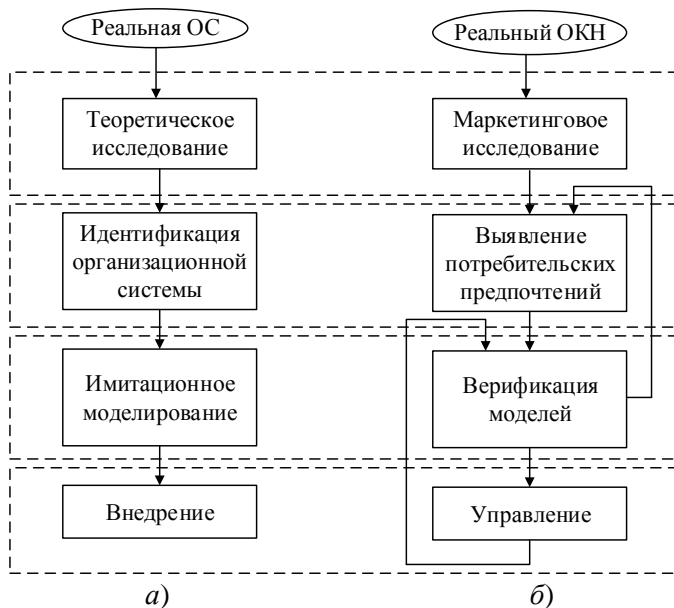


Рис. 2. а) Агрегированная технология управления организационными системами (выполнена на основе [18], стр. 41); б) предлагаемая технология управления объектами коммерческой недвижимости

Под организационной системой в данном исследовании понимается мультиагентная социально-экономическая система (рис. 3), состоящая из собственника или группы собственников, управляющей компании (далее – управляющего), арендаторов и потребителей, местом пересечения интересов которых является объект коммерческой недвижимости (ОКН). Субъектом управления являются управляющий и арендаторы, чьи управленческие решения влияют на посещаемость ОКН потребителями и результаты деятельности субъектов. Таким образом, реальный ОКН является средой для осуществления экономической деятельности в исследуемой системе и является объектом управления.

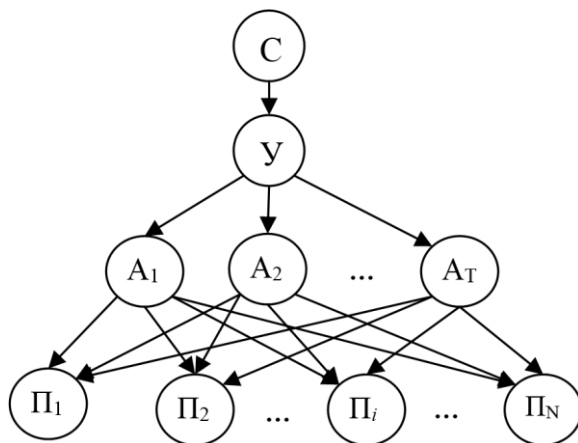


Рис. 3. Схема взаимосвязи участников моделируемой социально-экономической системы. Примечание: С – собственник; У – управляющий; А – арендаторы торговых (развлекательных, офисных и др.) помещений; П – потребители

Проведенные ранее авторами теоретические исследования применимости модели Хаффа и эффективности ее модификации в задаче управления ОКН были рассмотрены в параграфе 2 настоящей статьи. Для решения частных задач управления реальными объектами необходимо дополнительное проведение маркетингового исследования с целью сбора данных о внутреннем и внешнем окружении объекта управления, в том числе опросов потребителей, для анализа мнений которых могут применяться стандартные инструментальные средства обработки статистических данных. Информация о внешнем окружении ОКН, в том числе выделение пешеходно-транспортных зон и образующихся на их пересечении секторов, может быть выполнено с использованием геоинформационных систем (ГИС).

Применительно к технологии управления ОКН процесс идентификации организационной системы представляет собой выявление потребительских предпочтений. Способом формализации моделей потребительских предпочтений является определение параметров механизма комплексного оценивания, напри-

мер, взвешенных коэффициентов [30] или структуры дерева целей и матриц свертки [26]. Используя механизмы комплексного оценивания возможна свертка критериев, характеризующих ОКН с различных позиций, в общую комплексную оценку – качество ОКН (Q), на основе которой вычисляются оценки потребительской привлекательности (5) и вероятность выбора потребителем ОКН (6).

При управлении в социальных и экономических системах, в том числе организационных, эффективным методом исследования является моделирование (математическое и игровое имитационное). Игровое моделирование является способом экспериментального исследования и используется в поведенческой (экспериментальной) экономике, экспериментальной теории игр, дизайне механизмов и др. Прототипом верифицируемой на данном этапе модели является процесс посещения потребителями ОКН, на который влияют управленческие решения, принимаемые субъектами управления, и, безусловно, потребительские предпочтения, идентифицируемые на предыдущем этапе.

Верификация математической модели осуществляется путем сравнения результатов математического моделирования с данными реальных наблюдений о посещении ОКН, и на основе их процентного совпадения строится заключение об адекватности математической модели текущей ситуации. На случай неудовлетворения точности заданному критерию предусмотрена обратная связь с предыдущим этапом (см. рис. 2, б), в ходе которого корректируется модель оценки потребительской привлекательности ОКН (корректировке подлежат параметры модели оценки качества ОКН).

В случае признания модели адекватной, можно осуществлять сценарное моделирование и прогнозирование, в том числе игровое имитационное моделирование, в ходе которого люди выполняют роли субъектов управления и активно влияют на состояние ОКН, пытаясь сделать его более привлекательным для потенциальных потребителей. В ходе деловых игр могут разрабатываться проекты управленческих решений, эффективность которых может быть проверена в ходе сценарного моделирования «что будет..., если...». Окончательный выбор и

утверждение управленческого решения осуществляет управляющий ОКН.

Поиск управления можно осуществлять методом анализа чувствительности выбранного показателя эффективности к изменению контролируемых параметров. Показателями эффективности принимаемых управленческих решений могут быть качество объекта коммерческой недвижимости, его потребительская привлекательность, количество дополнительно привлеченных посетителей, выручка или прибыль торговых и развлекательных точек, а критерием эффективности максимизация указанных показателей [29]. Подробнее о возможностях метода анализа чувствительности см. параграф 4.3 настоящей статьи.

Результаты выполненных ранее исследований [26, 27, 30] показывают, что описанные математические методы и инструментальные средства можно эффективно применять для оценивания потребительской привлекательности объектов коммерческой недвижимости и они могут служить инструментальным базисом системы поддержки принятия решений в задачах управления коммерческой недвижимостью.

На случай изменения внешней среды ОКН, например, появления объекта-конкурента, изменения потребительских предпочтений, предусмотрены обратные связи с этапами верификации математической модели и идентификацией потребительских предпочтений.

Анализ описанных процессов и исследуемых механизмов комплексного оценивания качества ОКН, моделей оценки их потребительской привлекательности, методов управления позволил представить технологию управления объектом коммерческой недвижимости (см. рис. 2) в виде функциональной модели управления, выполненной с помощью нотации IDEF0 (рис. 4), как совокупность процессов и методов.

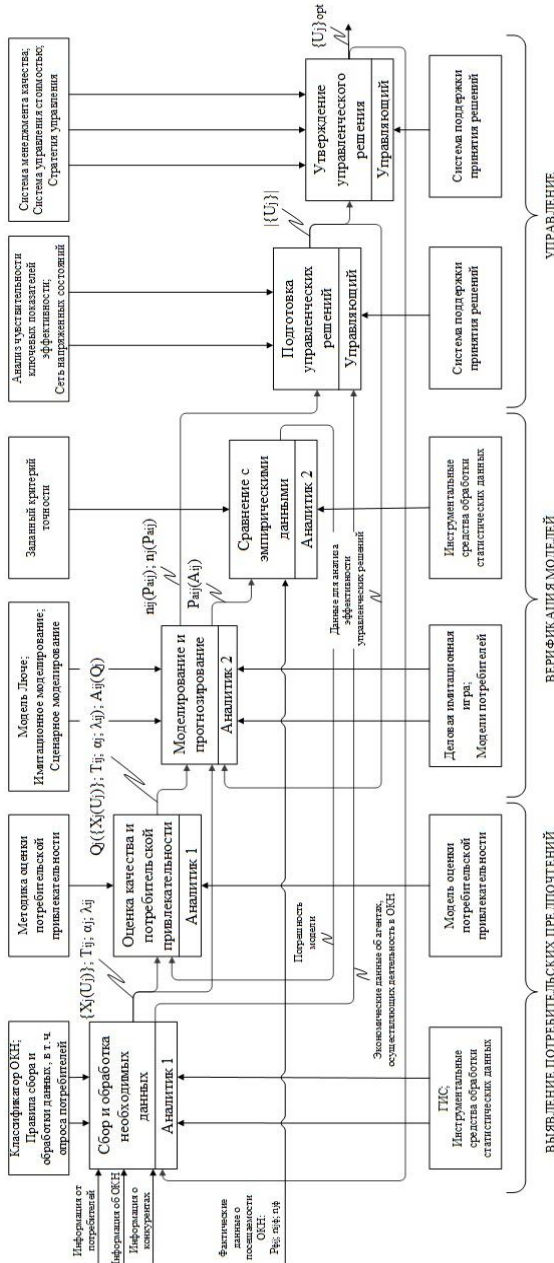


Рис. 4. Функциональная модель технологии управления объектом коммерческой недвижимости, выполненная в нотации IDEF0

Примечание: $\{X_j\}$ – вектор свойств о состоянии j -го объекта коммерческой недвижимости; $\{U_j\}$ – проект управленческого решения для j -го объекта; $\{U_j\}^{opt}$ – оптимальное (рациональное) управленческое решение, принимаемое для j -го объекта; Q_j – качество j -го объекта; T_{ij} – время, затрачиваемое i -м потребителем на дорогу до j -го объекта; A_{ij} – привлекательность j -го объекта для i -го потребителя; P_{ij} – вероятность посещения i -м потребителем j -го объекта (P_{ij} – аналитическое, P_{ij} – репроектированное, полученное с использованием фактических данных о посещениях); n_j, n_{ij} – количество посетителей j -го объекта и торговой точки k в объекте j ; λ_{ij} – параметр, отражающий нахождение i -го потребителя в одной из пешеходно-транспортных зон j -го объекта; a_j – параметр, отражающий влияние

Предлагаемая технология управления ОКН подразумевает наличие следующих ролей:

Аналитик 1 – аналитик-маркетолог, занимающийся анализом внешней и внутренней среды объекта коммерческой недвижимости, включающим опрос мнений посетителей;

Аналитик 2 – аналитик, занимающийся анализом последствий принимаемых управленческих решений и возможных сценариев развития внешней среды;

Управляющий – лицо, занимающееся подготовкой проектов управленческих решений и принимающее окончательное решение.

Дальнейшую структуру работы определили выделенные этапы и роли участников процесса управления ОКН, а содержание разделов параграфа 4 отражает математические и инструментальные методы, которые предлагается применять соответствующим участникам процесса управления.

4.1. ВЫЯВЛЕНИЕ ПОТРЕБИТЕЛЬСКИХ ПРЕДПОЧТЕНИЙ

4.1.1. СБОР И ОБРАБОТКА НЕОБХОДИМЫХ ДАННЫХ

На данном этапе осуществляется сбор данных о существующих арендаторах исследуемых объектов коммерческой недвижимости. Важным элементом является определение существенных факторов, влияющих на привлекательность объекта для потребителей и которые должна учитывать модель комплексного оценивания качества ОКН. Для обеспечения данного требования необходимо проводить опрос потребителей, в ходе которого респондентами определяются факторы, влияющие на их выбор в пользу посещения того или иного ОКН. Так, для жителей г. Перми наиболее существенными факторами являются восемь частных критериев: площадь; эстетический вид; транспортная доступность; акции и скидки; мероприятия; ассортимент; наличие брендов; качество товаров [23].

Для опроса потребителей предлагается использовать 10-балльную шкалу, потому что многие социологические опросы проводятся с помощью данной шкалы, что удобно для респондентов и не требует детальной интерпретации градаций шкалы.

Набор полученных в ходе опроса оценок необходимо проверить с помощью инструментальных средств статистического анализа. Пример результатов опроса доступны на [21], а результаты обработки доступны в [26].

Стоит отметить, что применительно к любому другому формату недвижимости или городу социологическое исследование будет являться обязательным элементом процесса разработки и исследования модели оценивания качества объектов коммерческой недвижимости.

4.1.2. ОЦЕНКА КАЧЕСТВА И ПОТРЕБИТЕЛЬСКОЙ ПРИВЛЕКАТЕЛЬНОСТИ ОКН

Матричная модель комплексного оценивания

В связи с тем, что набор частных критериев в виде списка существенных для потребителей факторов определяется в ходе маркетингового исследования, структура дерева критериев определяется путем их последовательного попарного агрегирования. Пример дерева критериев для оценки качества ТРК был приведен в [30] (рис. 5).

Возможность построения дерева критериев путём агрегирования набора фиксированных частных критериев в интегральную обобщенную оценку исследовалась в работах [31, 32]. Там же исследовалась возможность построения дерева критериев путем декомпозиции общей цели, а также сочетания этих подходов.

Для выявления предпочтений и формализации мнений потребителей о влиянии тех или иных факторов (критериев) на их выбор ОКН в виде логических высказываний «если ..., то ...» целесообразно использовать шкалу {1; 2; 3; 4}, базовая интерпретация которой 1 – «неудовлетворительное», 2 – «удовлетворительное», 3 – «хорошее» и 4 – «отличное» состояние критерия. Хотя в некоторых работах, например, [12], используется шкала {1, 2, 3}, в других, например, [19] – {1, 2, 3, 4, 5}.

Матричный механизм комплексного оценивания требует перевода полученных значений, описывающих состояние критериев исследуемых торгово-развлекательных комплексов, в шкалу [1; 4]. Поскольку применение нечеткой процедуры комплексного оценивания позволяет работать с непрерывной шка-

лой [1; 4], перевод значений, принадлежащих шкале [1; 10], не приведет к «огрублению» мнений респондентов.

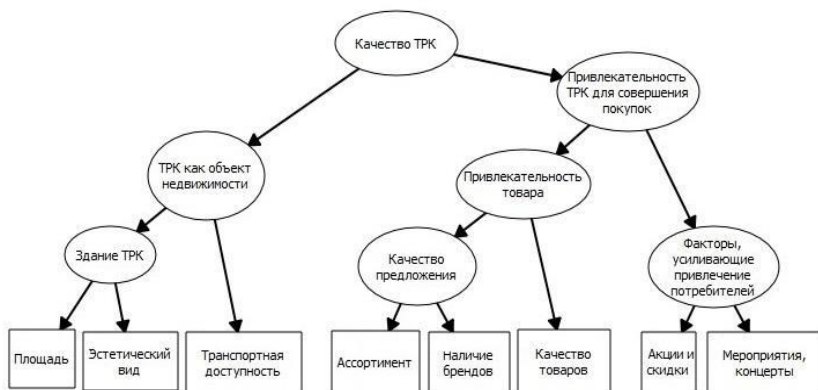


Рис. 5. Структура модели комплексного оценивания качества ТРК, источник [30]

Приведем пример линейных функций приведения. Для монотонно-возрастающих уравнение имеет следующий вид:

$$(11) X_i = 3 \cdot (x_i - x_{i\min}) / (x_{i\max} - x_{i\min}) + 1,$$

для монотонно-убывающих уравнение имеет следующий вид:

$$(12) X_i = 3 \cdot (x_{i\max} - x_i) / (x_{i\max} - x_{i\min}) + 1.$$

На рис. 6 представлен пример матричной модели комплексного оценивания качества ТРК. Для группового определения элементов матриц свертки, например, для выявления предпочтений различных социальных групп, может быть использован подход, описанный в работе [6].

Дискретные матричные свертки могут быть интерполированы с помощью специальной функции [8], процедуры нечеткого комплексного оценивания с максиминными [31, 32] или аддитивно-мультипликативными [5] операциями пересечения и объединения нечетких множеств или специальной функцией интерполяции (13) [4], эквивалентной последнему нечеткому подходу. Интерполяция позволяет сделать модель оценивания качества ОКН непрерывной.

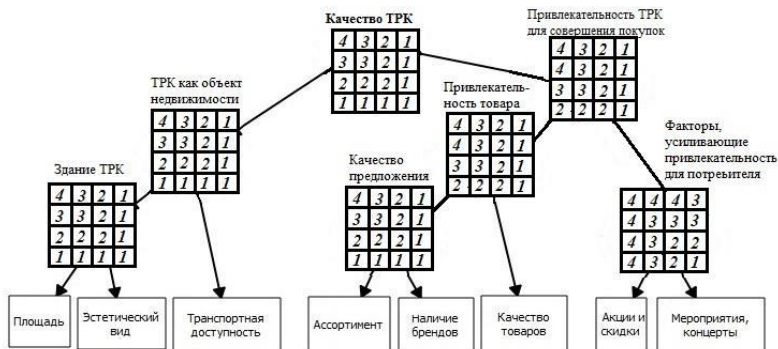


Рис. 6. Матричная модель комплексного оценивания качества ТРК, источник [30]. Примечание. Строки матрицы свертки соответствуют дискретным оценкам, описывающим состояние лево-входящего критерия, столбцы – право-входящего. Начало координат расположено в нижнем правом углу матрицы свертки

$$(13) \quad X(X_1, X_2) = j_6 + (j_8 - j_6) \cdot x_1 + (j_7 - j_6) \cdot x_2 + (j_9 + j_6 - j_8 - j_7) \cdot x_1 \cdot x_2,$$

где x_l – остаток деления по модулю аргумента свертки $X_l \in [1, 4]$:

$$(14) \quad x_l = X_l \bmod 1, \quad X_l \in [1, 4], \quad x_l \in [0, 1],$$

j_6, j_7, j_8 и j_9 – элементы матрицы свертки M , определённые на пересечении следующих строк и столбцов матрицы:

$$(15) \quad j_4 = \max(\min(x_1, 4); 1),$$

$$(16) \quad j_5 = \max(\min(x_2, 4); 1),$$

$$(17) \quad j_6 = M([j_4]; [j_5]),$$

$$(18) \quad j_7 = M(\min(4; [1 + j_4]); [j_5]),$$

$$(19) \quad j_8 = M([j_4]; \min(4; [1 + j_5])),$$

$$(20) \quad j_9 = M(\min(4; [1 + j_4]); \min(4; [1 + j_5])),$$

где $[]$ – целая часть числа.

Требование к непрерывности шкал, используемых в матричных механизмах комплексного оценивания, упоминалось в

работе [16]. Там же отмечалось требование к функции свертки – ее кусочно-гладкость. Среди приведенных подходов к оцениванию условие кусочно-гладкости не выполняется только у максиминной нечеткой процедуры, однако в работе [3] был показан подход, устраняющий данный недостаток. Преимуществом нечетких процедур комплексного оценивания является возможность учета модальных суждений носителей предпочтений.

Используя программные комплексы (см., например, [22]), образующие класс программных продуктов «ДЕКОН» (аббревиатура от «Дерева комплексного оценивания объектов недвижимости»), можно оценить качество любого объекта коммерческой недвижимости по выбранным потребителями критериям. Данный программный продукт позволяет выбирать подход к комплексному оцениванию из перечисленных выше.

Квалиметрическая модель комплексного оценивания

Квалиметрические модели [1, 13] получили широкое распространение в практике комплексного оценивания. Для целей экспертизы и оценки объектов недвижимости применение квалиметрии описано в работе [17]. Результатом комплексного оценивания становится средневзвешенная оценка. Преимуществом данных методов является их простота и то, что данные методы разрабатывались специально для количественного оценивания качества.

В работе [13] приводится ряд таких оценок с рекомендациями их прикладного использования. В работе [30], где оценивалось качество ТРК, применялась геометрическая модель:

$$(21) Q = \prod_{l=1}^L Q_l^{q_l},$$

где q_l – это взвешенные коэффициенты (пример которых для ТРК приводится в [30]), сумма которых должна быть равна единице; Q_l – это значение l -й характеристики. Авторами проводилось исследование всех приведенных в [11] методов, результаты которых оказались близкими друг к другу и реальным данным о посещении ОКН.

Как и в предыдущем случае, оценки, полученные в результате опросов потребителей, должны быть приведены к исполь-

зуемой шкале, на которой определяется Q_i , в данном случае к относительной шкале $[0;1]$. Приведем пример линейных функций приведения. Для монотонно-возрастающих уравнение имеет следующий вид:

$$(22) Q_i = (x_i - x_{i\min}) / (x_{i\max} - x_{i\min}),$$

для монотонно-убывающих уравнение имеет следующий вид:

$$(23) Q_i = (x_{i\max} - x_i) / (x_{i\max} - x_{i\min}).$$

Результаты теоретических исследований показали [30], что модифицированная модель оценки потребительской привлекательности (5), в которой качество ОКН определялось с помощью как матричных (13), так и квалиметрической (21) моделей, дает результаты прогнозирования посещаемости более близкие к реальным данным, чем оригинальная модель Хаффа (1). При этом на точность прогнозирования выбор подхода к комплексному оцениванию влияет не существенно.

Преимуществом квалиметрических методов комплексного оценивания является их простота, что подтверждается применением их в прикладных исследованиях. Так, например, в [15] используется линейная свертка:

$$(24) Q = \sum_{i=1}^L q_i \cdot Q_i.$$

Преимущество матричных механизмов комплексного оценивания заключается в возможности формализации логических правил, по которым осуществляется свертка набора частных критериев в комплексную оценку, используя мнение потребителей. Это позволяет учесть мнения потребителей при моделировании и прогнозировании посещаемости объектов коммерческой недвижимости.

4.2. ВЕРИФИКАЦИЯ МОДЕЛЕЙ

4.2.1. МОДЕЛИРОВАНИЕ И ПРОГНОЗИРОВАНИЕ

Для различных потребительских групп отношение к одним и тем же параметрам привлекательности объекта коммерческой недвижимости может отличаться: например, размер паркинга является существенным фактором для потребителей, пользую-

щихся личным транспортом, и не существенным для потребителей, пользующихся общественным транспортом. Индивидуальное или коллективное отношение потребителей к объекту коммерческой недвижимости и его параметрам может быть формализовано с помощью механизмов комплексного оценивания (см. раздел 4.1), которые будут описывать предпочтения потребительских групп. Наличие непрерывного комплексного показателя позволяет ранжировать любые объекты на всем множестве их представления и определять степень преимущества (недостатка) некоторого объекта перед другими. Это обстоятельство делает возможным описание процедуры выбора (принятия решения) носителем предпочтений и последующее имитационное моделирование его поведения в задаче выбора [2]. В работе [34] отмечается, что модель предпочтений субъекта, воспроизводящая поведение конкретного человека в задаче выбора, считается формой искусственного интеллекта, что создает предпосылки для агентного имитационного моделирования.

Моделированию и прогнозированию посещаемости объектов коммерческой недвижимости при однородных агентах посвящена работа [30]. Для имитационного моделирования поведения неоднородных агентов необходимо для каждого агента определить персонализированную границу допустимых действий. Принцип действия агента в соответствии гипотезой А. Шопенгаэура [35] о законе достаточного основания мотивации, в соответствии с которым при наступлении мотива действие выполняется с такой же неизбежностью, как и следствия физической природы, может быть сформулирован следующим образом: если альтернатива принадлежит множеству действий агента, то у агента есть основание выбрать эту альтернативу и совершить соответствующее этой альтернативе действие.

Моделирование предпочтений потребителей создаёт возможности для организации и проведения деловых имитационных игр с участием как реальных людей, так и автоматов – программных агентов или искусственных участников игры.

Организация и проведение деловых имитационных игр [36] с участием реальных людей, выполняющих некоторые профессиональные роли и действующих по определённым правилам с

заданными условиями игры целями и критериями их достижения, а также с участием программных агентов с формализованными моделями принятия решений, является эффективным способом исследования сложных социально-экономических систем. Выбор игрового имитационного моделирования обусловлен тем, что на рынке услуг по управлению коммерческой недвижимостью нельзя провести реальный эксперимент.

Игровое имитационное моделирование

Деловая имитационная игра «Управление коммерческой недвижимостью» подразумевает, что в роли управляющего и арендаторов выступают люди. Потребители в данной деловой игре реализованы через программных агентов. Программные агенты неоднородны, так как случайным образом генерируются элементы матриц (см. рис. 6), описывающих отношение агента к факторам (см. раздел 4.1.1), которые влияют на привлекательность торгового центра. Люди, принимая какие-либо управленческие решения, ориентируются на то, как их решения повлияют на поведение программных агентов.

В данной имитационной деловой игре управляющие коммерческой недвижимостью выступают в качестве управляющего субъекта. Арендаторы торговых помещений также являются участниками данной игры и выступают в качестве управляемых субъектов, которые способны активно влиять на управляющий субъект. В теории активных систем [9] и теории управления организационными системами [11] управляющий субъект называется Центром, а управляемые субъекты – активными элементами. Активные элементы обладают активностью и стремятся к достижению собственных целей. Управляющий (Центр) заинтересован в максимизации целевой функции (8) или (9). Арендаторы (активные элементы) в свою очередь заинтересованы в максимизации своей прибыли, формируемой от продажи своих товаров конечным потребителям за вычетом затрат и арендной платы. Общим для всех участников игры является заинтересованность в увеличении посещаемости торговых (развлекательных и др.) помещений потенциальными покупателями, поскольку увеличение посещаемости теоретически ведет к увеличению продаж арендатора. Это приводит к увеличению его выручки,

что в конечном счете ведет к увеличению его способности платить большую арендную плату управляющему (Центру).

Игрок, выступающий в роли управляющего коммерческой недвижимостью, может вкладывать деньги в продвижение торгового центра, улучшение эстетической привлекательности и на организацию развлекательных мероприятий для посетителей.

Игроки, выступающие в роли арендаторов, могут продавать товары различного качества, менять ассортимент, предлагать скидки, приобретать франшизу на брендовую продукцию, рекламируемую производителем, или вкладывать деньги в продвижение малоизвестного товара.

Игрок-управляющий сообщает информацию об арендной плате игрокам-арендаторам, которые с учетом информации о посещаемости их торговой точки, стремясь максимизировать собственную прибыль, принимают управленческое решение о том, какую продукцию они будут продавать, в каком ассортименте, по какой цене, с какой скидкой, и сколько они будут тратить денег на рекламу торговой точки. Эту информацию игроки-арендаторы сообщают модератору. Модератор запрашивает у управляющего, сколько он планирует вкладывать денег в продвижение всего торгового центра, в улучшение эстетической привлекательности и на организацию развлекательных мероприятий для посетителей.

Модератор игры, используя модель оценивания потребительской привлекательности (5), вычисляет вероятность выбора потребителями каждой торговой точки (6). Далее, умножая вероятности на число потребителей, проживающих в различных секторах, образованных пересечением пешеходно-транспортных зон ОКН (см. рис. 1, таблицу 1), модератор определяет ожидаемое число посетителей (7). Информация об общем количестве ожидаемых посетителей сообщается управляющему коммерческому движению, который с учетом этой информации корректирует или оставляет арендные платежи без изменений. Персонализированная информация о количестве ожидаемых посетителей конкретной торговой (развлекательной и др.) точки сообщается каждому игроку-арендатору, и с учетом этого они планируют свою коммерческую деятельность на следующий ход.

4.2.2. СРАВНЕНИЕ С ЭМПИРИЧЕСКИМИ ДАННЫМИ

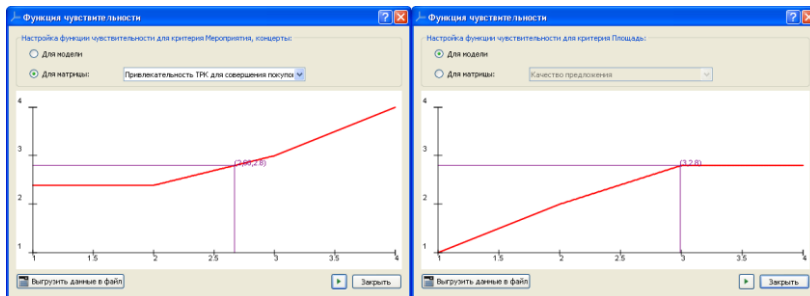
Сравнение результатов математического и игрового моделирования осуществляется с целью верификации моделей, с помощью которых осуществляется поиск управленческих решений. Стоит отметить, что в результате управления состояние ОКН меняется, и в этом случае необходимо сравнивать не только текущую посещаемость, но и увеличенный приток посетителей в результате управления с ожидаемым количеством по модели (см. рис. 2, б – обратная связь между этапами управления и верификации моделей).

4.3. УПРАВЛЕНИЕ

4.3.1. ПОДГОТОВКА УПРАВЛЕНЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ

Одним из способов исследования эффективности принимаемых управленческих решений является анализ чувствительности комплексной оценки к изменению состояния частного критерия. В случае анализа чувствительности матричных механизмов комплексного оценивания [31, 32] функции чувствительности нелинейные и кусочно-гладкие, потому что важность факторов зависит от области определения; в качественных механизмах функции чувствительности гладкие. Функциональные возможности программного комплекса [22] позволяют строить функции чувствительности комплексной оценки к изменению состояния частного критерия, что служит инструментальным базисом системы поддержки принимаемых решений.

Построив функции чувствительности, можно определить перспективное направление для улучшения качества ОКН (рис. 7, а) и критические направления, которые характеризуются тем, что отсутствие управления будет приводить к пассивному ухудшению состояния частного критерия и, соответственно, качества ОКН (рис. 7, б).



а)

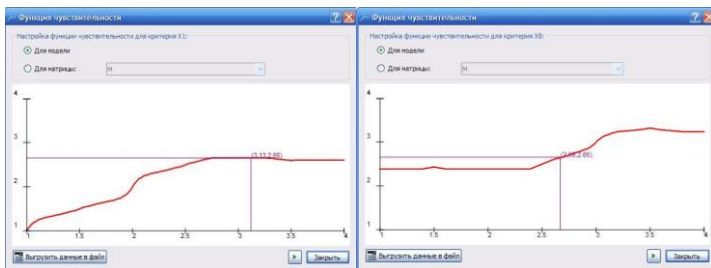
б)

Рис. 7. Пример функций чувствительности, показывающих:
а) перспективное направление; б) критическое направление
развития ТРК

В практике управления недвижимостью выделяют такое понятие как излишняя полезность, когда улучшение отдельного критерия не приводит к эффекту в улучшение объекта недвижимости (рис. 7, б). В результате затраты на улучшение частного критерия следует считать неэффективными, а имеющийся износ по данному критерию неустранимым, поскольку экономически нецелесообразно его устранение.

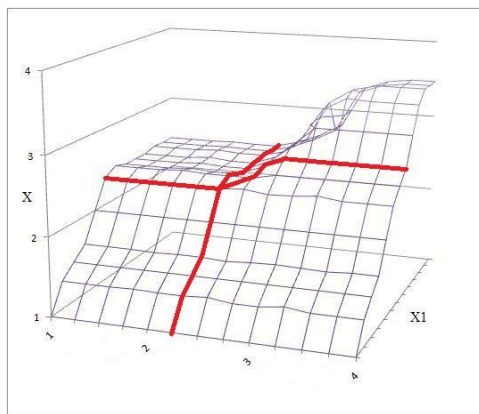
С помощью анализа чувствительности может быть идентифицировано не только такое известное явление как излишняя полезность, но и скрытая полезность (рис. 8).

Признаком скрытой полезности является ситуация, при которой отдельное улучшение частных критериев не приводит к эффекту в улучшение качества ОКН (см. рис. 8, а) или имеет ограниченный эффект (см. рис. 8, б). Совместное же улучшение частных критериев имеет смысл и целесообразно (см. рис. 8, в). В результате накопленные ухудшения частных критериев (износы) можно считать устраняемыми совместно, хотя отдельные попытки их устранения не результативны, почему это явление и было названо авторами скрытой полезностью.



а)

б)



в)

Рис. 8. Пример функций чувствительности, показывающих скрытую полезность

Поскольку в предложенной [30] модели комплексного оценивания «Качество ТРК» входными управляемыми критериями являются как явно-управляемые, так и косвенно-управляемые факторы, целесообразно определить последовательность анализа чувствительности частных критериев. В структуре дерева критериев (см. рис. 5) по степени управляемости можно выделить три группы [29]: управляемые; косвенно-управляемые посредством взаимоотношений между управляющим объектом недвижимости с арендаторами; неуправляемые или частично-управляемые путем модернизации, реконструкции или реновации объекта недвижимости.

Исследовать чувствительность «Качества ТРК» к изменению управляемого критерия необходимо в первую очередь (рис. 9), косвенно управляемых – во вторую (рис. 10, 11) и частично-управляемых – в последнюю (рис. 12).

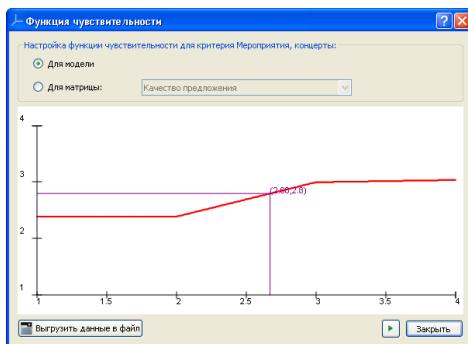


Рис. 9. Функция чувствительности «Качества ТРК» к изменению критерия «Мероприятия» на примере ТРК «Колизей»

Из рис. 9 видно, что, повысив качество проводимых мероприятий в ТРК «Колизей», можно увеличить качество данного ТРК с потребительской точки зрения и, соответственно, потребительскую привлекательность. Следует отметить, что повышать качество мероприятий выше 3,5 не целесообразно. Поскольку для оценивания частных критериев проводился социологический опрос, то при проведении новых мероприятий компании, занимающейся управлением ОКН, необходимо также проводить опросы потребителей.

Из рис. 10 и 11 видно, что качество ТРК «Колизей» можно незначительно улучшить только благодаря акциям и скидкам. Поскольку качество ТРК ведет себя неизменно по отношению к критериям, описывающим товарную составляющую, необходимо отдельно исследовать чувствительность «Качества ТРК» к нескольким переменным, однако данный анализ показывает отсутствие перспектив их совместного развития (рис. 13).

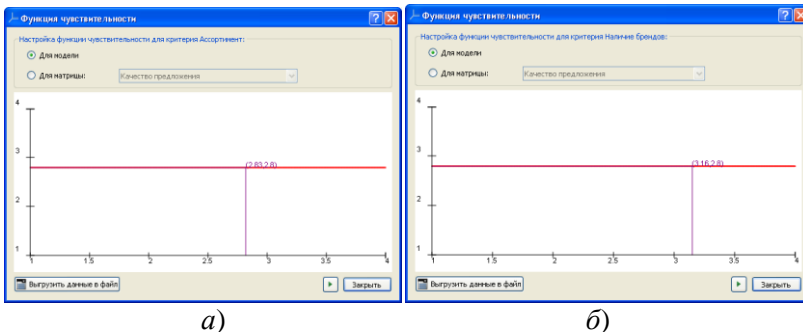


Рис. 10. Функции чувствительности «Качества ТРК» к изменению критериев а) «Ассортимент» и б) «Наличие брендов» на примере ТРК «Колизей»

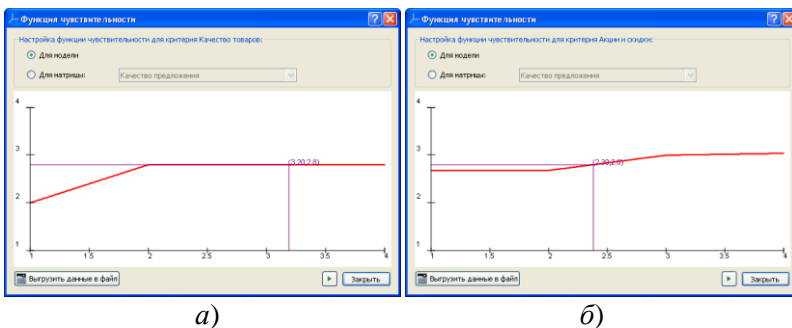
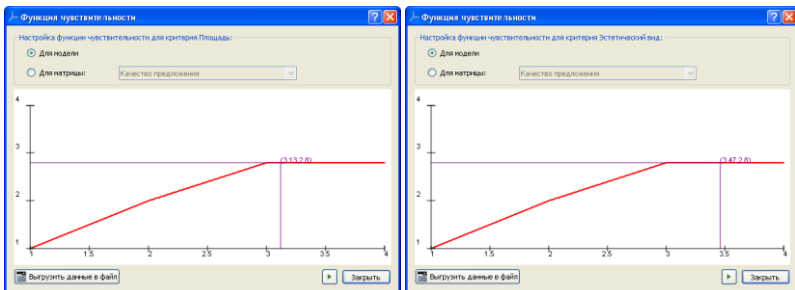


Рис. 11. Функции чувствительности «Качества ТРК» к изменению критериев а) «Качество товаров» б) «Акции и скидки» на примере ТРК «Колизей»

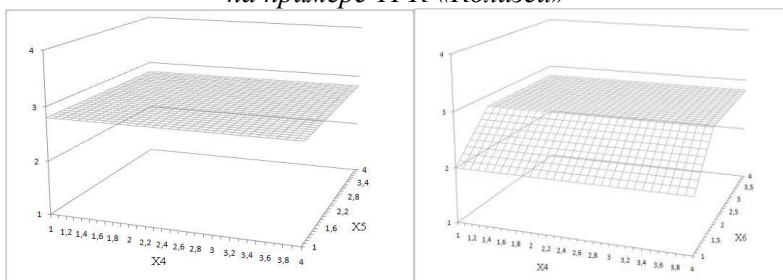
Из рис. 12 видно, что качество ТРК «Колизей» нельзя улучшить благодаря отдельному повышению исследуемых критериев. В силу того, что развитие каждого данного критерия является затратным мероприятием, то исследовать их совместное развитие не целесообразно в данном случае, поскольку развитие критерия «Мероприятия» позволяет при явно меньших затратах повысить качество ТРК и его потребительскую привлекательность (см. рис. 9).



а)

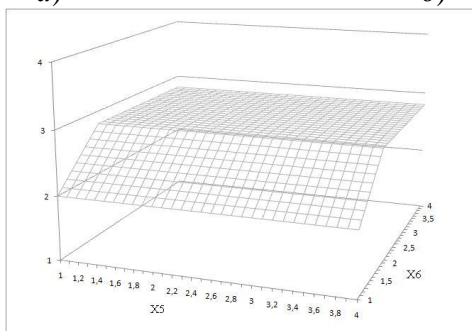
б)

Рис. 12. Функции чувствительности «Качества ТРК» к изменению критериев а) «Площадь» и б) «Эстетический вид» на примере ТРК «Колизей»



а)

б)



в)

Рис. 13. Функции чувствительности «Качества ТРК» (X) к изменению пары критериев: а) «Ассортимент» (X_4) и «Наличие брендов» (X_5); б) «Ассортимент» (X_4) и «Качество товаров» (X_6); в) «Наличие брендов» (X_5) и «Качество товаров» (X_6) на примере ТРК «Колизей»

Целью приведенных выше примеров (см. рис. 9–13) является иллюстрация возможности поиска управленческих решений с помощью анализа чувствительности. С использованием приведенного выше программного комплекса [22] возможен анализ чувствительности только комплексной оценки «Качество ОКН», вычисляемой с помощью матричного механизма комплексного оценивания. Однако в соответствии с постановкой задачи управления (9) требуется найти не только состояние, доставляющее максимум качеству ОКН, а максимум прибыли. Для этого необходимо выполнить анализ чувствительности всех показателей [29], используемых в модели.

На рис. 14 показаны функции чувствительности привлекательности (A) торгово-развлекательных комплексов, определенной по формуле (5), для потребителей, проживающих и работающих в различных секторах, образованных пересечением пешеходно-транспортных зон (см. рис. 1, таблица 1).

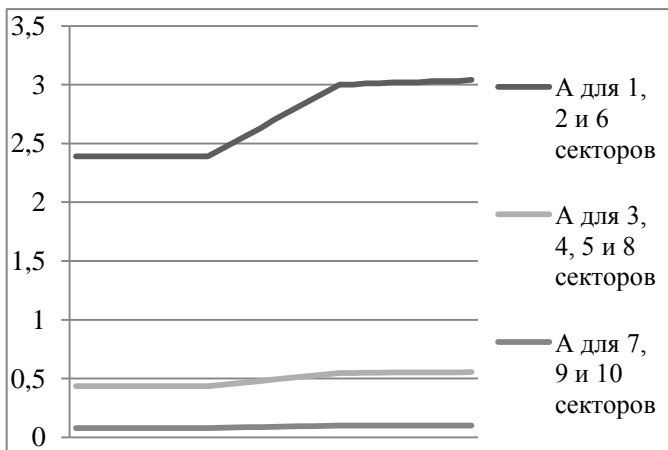


Рис. 14. Функции чувствительности привлекательности ТРК в зависимости от секторов, образованных пересечением пешеходно-транспортных зон, на примере ТРК «Коллизей» [29]

Вероятности посещения исследуемого торгово-развлекательного комплекса жителями, проживающими в раз-

личных секторах, вычислены с помощью формулы (6) и представлены ниже (рис. 15).

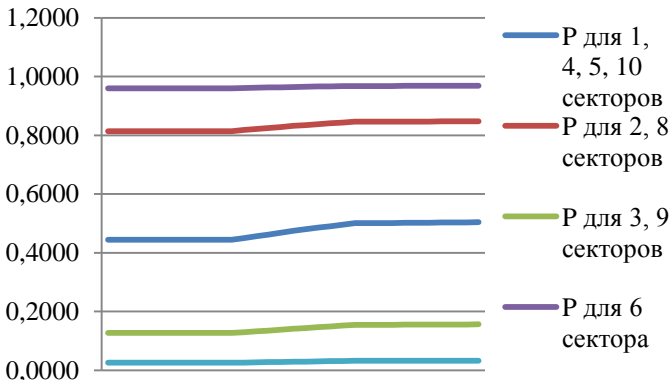


Рис. 15. Функции чувствительности вероятностей посещения потребителями ОКН в зависимости от секторов их проживания на примере ТРК «Колизей» [29]

Для определения потенциального числа покупателей (рис. 16) примем допущение о количестве лиц, проживающих в различных секторах (таблица 2) и используем выражение (7):

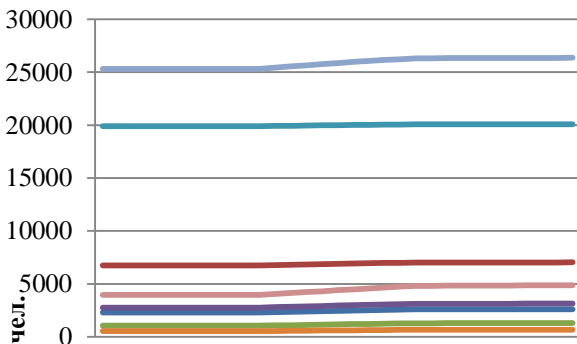


Рис. 16. Функции чувствительности, показывающие зависимость ожидаемого количества посетителей ОКН к изменению управляемого критерия в зависимости от сектора проживания посетителей, на примере ТРК «Колизей» [29]

Примечание. Ожидаемое количество посетителей из 10 сектора не включено в данный график в целях большей наглядности количества посетителей из 1–9 секторов.

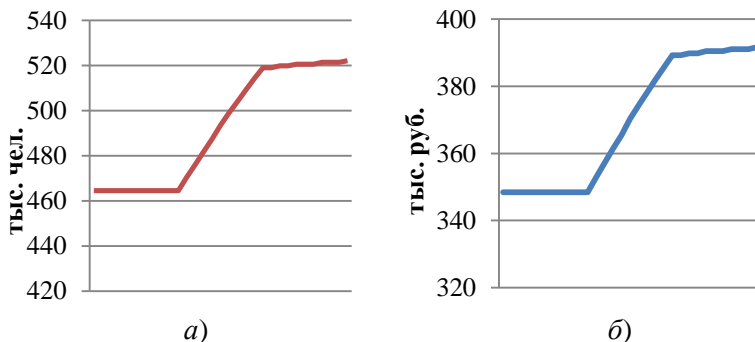


Рис. 17. Функции чувствительности, показывающая зависимость: а) ожидаемого количества посетителей ОКН к изменению управляемого критерия; б) ожидаемого дохода к изменению управляемого критерия, на примере ТРК «Колизей»

Получив данные, приведенные на рис. 14–17, можно решить задачу (9) и определить зависимость совокупной прибыли торговых и развлекательных точек ОКН (рис. 18) от изменения управляемого критерия – качества мероприятий (X_8) – при следующих исходных данных: качество конкурирующего ОКН $Q_2 = 2,99$; значения критериев исследуемого ОКН: $X_1 = 3,13$, $X_2 = 2,83$, $X_3 = 3,62$, $X_4 = 3,47$, $X_5 = 2,39$, $X_6 = 3,2$, $X_7 = 3,16$, $X_8 = 2,68$; средний чек покупателя $Ar = 750$ рублей; данные о количестве потенциальных покупателях приведены в таблице 2.

Для определения затрат на изменение управляемого критерия в качестве допущения, необходимого для вычислений, примем следующее уравнение затратной функции (TC) (25):

$$(25) \quad y = 0,08 \cdot x^2 + 150,$$

где 150 тыс. руб. – условное значение постоянных затрат (TFC).

Поиск оптимального управленческого решения может быть осуществлен с помощью предложенного метода анализа чувствительности, с итерационным использованием которого мо-

жет быть спланирована последовательность мероприятий. Подобная задача актуальна в условиях ограниченного бюджета, так как затраты на реализацию программы последовательных мероприятий могут быть распределены во времени.

Таблица 2. Количество жителей в секторах* (см. рис. 1)

№ сектора (k)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Кол-во жителей в секторе (N_k)	5182	8292	6219	20729	31094	898619				

*Примечание: Количество жителей в секторах принято условно для иллюстрации решения задачи управления.

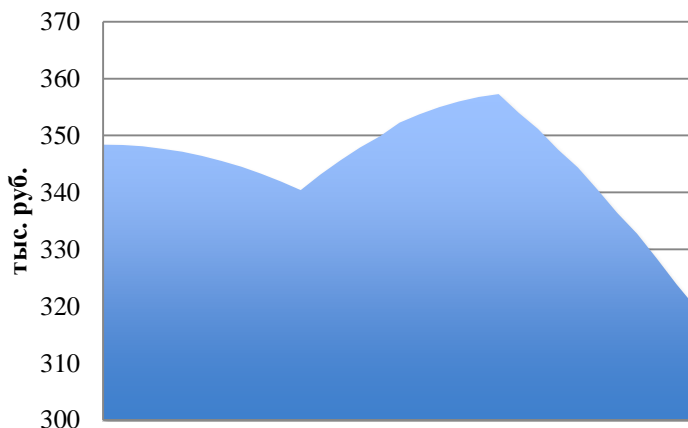


Рис. 18. Зависимость совокупной прибыли торговых помещений ОКН (развлекательных и др.) от изменения управляемого критерия на примере ТРК «Колизей»

4.3.2. УТВЕРЖДЕНИЕ УПРАВЛЕНЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ

Принятие окончательного решения осуществляется в соответствии с выбранным критерием эффективности, при этом управляющий руководствуется согласованной с собственником концепцией развития объекта коммерческой недвижимости и стратегией его управления, а также документами, регламенти-

рующими его деятельность, в том числе системой менеджмента качества, системой управления стоимостью объекта управления и пр.

5. Заключение

Предложенная авторами технология управления объектом коммерческой недвижимости с учетом потребительских предпочтений включает на укрупненном уровне три этапа: выявление потребительских предпочтений, верификация моделей и управление.

На первом этапе для решения частных задач управления реальными объектами необходимо дополнительное проведение маркетингового исследования с целью сбора данных о внутреннем и внешнем окружении объекта недвижимости. Выявление потребительских предпочтений соответствует процессу идентификации организационной системы. Способом формализации моделей потребительских предпочтений является определение параметров механизма комплексного оценивания, с помощью которого возможна многомерная свёртка, позволяющая вычислить оценки потребительской привлекательности и вероятность выбора потребителем того или иного объекта недвижимости.

На втором этапе осуществляется верификация математических и имитационных моделей посещения потребителями объекта недвижимости, на который влияют управленческие решения, принимаемые субъектами управления.

Поиск управления можно осуществлять методом анализа чувствительности выбранного показателя эффективности к изменению контролируемых параметров. Данный подход позволяет найти оптимальное решение в зависимости от одного или двух критериев. Перспективным направлением является постановка многомерной задачи оптимизации и поиска математических методов ее решения.

Задача управления объектом коммерческой недвижимости требует дополнительной теоретико-игровой постановки и исследования стратегии поведения участников данной мультиагентной системы в условиях пересекающихся интересов, в том числе конфликта. В этом ключе перспективным направлением

является исследование устойчивости механизмов принятия решений к стратегическому поведению агентов. Одним из возможных подходов к выполнению данного исследования является игровое имитационное моделирование с привлечение реальных людей и программных агентов. Решению указанных задач будут посвящены будущие работы авторов.

6. Благодарности

Авторы благодарны профессору Харитонову Валерию Алексеевичу за помощь в корректировке статьи, а также выражают признательность рецензентам за их замечания и рекомендации, позволившие улучшить данную статью.

Литература

1. АЗГАЛЬДОВ Г.Г. *Теория и практика оценки качества товаров (основы квалиметрии)*. – М.: Экономика, 1982. – 256 с.
2. АЛЕКСЕЕВ А.О. АЛЕКСЕЕВА И.Е. *Имитационное моделирование поведения неоднородных агентов в мультиагентных системах (на примере рынка недвижимости) // Проблемы управления и моделирования в сложных системах – 2015: труды XVII Межд. конф. (22–25 июня 2015 г., Самара, Россия) / Под ред. акад. Е.А. Федосова, акад. Н.А. Кузнецова, проф. В.А. Виттиха. – Самара: Самар. науч. центр РАН, 2015. – С. 287–303.*
3. АЛЕКСЕЕВ А.О. *Исследование альтернативных подходов к теоретико-множественным операциям над нечеткими множествами в процедуре нечеткого комплексного оценивания // Прикладная математика и вопросы управления. – 2015. – №1. – С. 60–72.*
4. АЛЕКСЕЕВ А.О., АЛЕКСЕЕВА И.Е. *Математическое моделирование предпочтений экономических субъектов (агентов) // Управление экономическими системами. Электронный научный журнал. – 2015. – №76. – [Электронный*

- ресурс]. – URL: <http://www.uecs.ru/uecs-76-762015/item/3441-2015-04-14-13-53-46> (дата обращения: 20.07.2016).
5. АЛЕКСЕЕВ А.О., КАЛЕНТЬЕВА А.С., ВЫЧЕГ-ЖАНИН А.В. И ДР. *Алгоритмические основы нечеткой процедуры комплексного оценивания объектов различной природы // Фундаментальные исследования.* – 2014. – № 3/3. – С. 469–474.
 6. АЛЕКСЕЕВ А.О., КОРГИН Н.А. *О применении обобщенных медианных схем для матричной активной экспертизы // Прикладная математика, механика и процессы управления: III Всерос. науч.-техн. интернет-конф. студентов, аспирантов и молодых учен., 30 ноября – 5 декабря, 2015 г. – Перм. нац. исслед. политехн. ун-т. Пермь, 2015. – [Электронный ресурс] – URL: http://pmmppu.pstu.ru/media/paper_pdf_2015/%D0%90%D0%BB%D0%B5%D0%BA%D1%81%D0%B5%D0%B5%D0%B2_%D0%9A%D0%BE%D1%80%D0%B3%D0%B8%D0%BD.pdf (дата обращения: 20.07.2016).*
 7. АЛЕКСЕЕВ А.О., СПИРИНА В.С., КАВИЕВ М.И. И ДР. *Определение потребительской привлекательности объектов коммерческой недвижимости // Известия вузов. Инвестиции. Строительство. Недвижимость.* – 2013. – №1(4). – С. 8–19.
 8. АНОХИН А.М., ГУСЕВ В.Б., ПАВЕЛЬЕВ В.В. *Комплексное оценивание и оптимизация на моделях многомерных объектов.* – М.: Изд-во Ин-та проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2003. – 79 с.
 9. БУРКОВ В.Н., НОВИКОВ Д.А. *Теория активных систем: состояние и перспективы.* – М.: Синтег, 1999. – 128 с.
 10. БУРКОВ В.Н., НОВИКОВ Д.А. *Как управлять проектами: Научно-практическое издание.* – М.: СИНТЕГ-ГЕО, 1997. – 188 с.
 11. БУРКОВ В.Н., НОВИКОВ Д.А., КОРГИН Н.А. *Введение в теорию управления организационными системами. Учебник / Под ред. Д.А.Новикова.* – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. – 264 с.
 12. БУРКОВ В.Н., НОВИКОВ Д.А., ЩЕПКИН А.В. *Механизмы управления эколого-экономическими системами / Под ред.*

- академика С.Н. Васильева – М.: Изд-во физ.-мат. лит-ры, 2008. – 244 с.
13. ВАРЖАПЕТЯН А.Г. *Квалиметрия: Учебное пособие.* – СПб.: СПбГУАП, 2005 – 176 с.
 14. ГЛОТОВ В.А., ПАВЕЛЬЕВ В.В. *Векторная стратификация.* – М.: Наука, 1984. – 92 с.
 15. ГОЛОВАНЬ О.О., МАРКОВА С.В., СОКУР Я.Ю. *Особливості бізнес-адміністрування закладів швидкого харчування з урахуванням оцінки споживчої прибавливості* // Економічний форум. – 2015. – №4. – С. 229–235.
 16. ГУСЕВ В.Б. *Верификация и применение непрерывных шкал при многокритериальном выборе* / Труды конгресса по интеллектуальным системам и информационным технологиям «AIS-IT'09». – М.: Физматлит, 2009. – Т. 1. – С. 145–151.
 17. *Квалиметрическая экспертиза строительных объектов* – под ред. В.М. Маругина и Г.Г. Азгальдова. – СПб.: Изд-во «Политехника», 2008. – 528 с.
 18. НОВИКОВ Д.А. *Теория управления организационными системами.* – М.: МПСИ, 2005. – 584 с.
 19. ПАВЕЛЬЕВ В.В. *Структурная идентификация целевой функции в задачах выбора многопараметрических объектов* / Идентификация систем и задач управления SICPRO-12: труды IX Международной конференции, г. Москва, 30 января – 2 февраля 2012 г. – М.: ИПУ РАН, 2012. – С. 783–791.
 20. ПОДИНОВСКИЙ В.В. *Введение в теорию важности критериев в многокритериальных задачах принятия решений.* – М.: Физматлит, 2007. – 64 с.
 21. *Результаты опроса, представленные в табличной форме.* – [Электронный ресурс]. – URL: https://docs.google.com/file/d/0B_dG9pJJVt4JX0JFTnFLTDB1d2s/edit; <https://docs.google.com/spreadsheet/ccc?key=0AvdG9pJJVt4JdDNvazlTdTfMYy1qYTJVRlh3SEpOdFE#gid=0> (дата создания: 18.09.2013).
 22. *Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2014660537. Автоматизированная система комплексного оценивания объектов с возможностью выбора нечеткой процедуры свертки в соответствии со степе-*

- нью неопределенности экспертной информации о параметрах их состояния: заявка №2014618056 от 12.08.2014 РФ / А.О. Алексеев, В.А. Харитонов, Р.Ф. Шайдулин, М.И. Мелехин (РФ) – Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 09.10.2014 г. (РФ).
23. СПИРИНА В.С. АЛЕКСЕЕВ А.О. *Разработка и исследование модели комплексного оценивания потребительской привлекательности объектов коммерческой недвижимости* // Master's Journal. – 2013. – №2. – С. 153–164.
 24. СПИРИНА В.С. *Оценка конкурентоспособности объектов коммерческой недвижимости* // Управление большими системами (УБС'2013): Материалы X Всерос. шк.-конф. мол. ученых. – Уфим. гос. авиац. техн. ун-т. – Уфа: УГАТУ, 2013. – Т. 2. – 4 с.
 25. СПИРИНА В.С. *Оценка потребительской привлекательности объектов коммерческой недвижимости с использованием матричных методов комплексного оценивания* // Управление большими системами (УБС'2014): Материалы XI Всерос. шк.-конф. мол. ученых, 9–12 сентября 2014 г., Арзамас / Под общ. ред. Д.А. Новикова, П.В. Пакшина; Ин-т проблем упр. Им. В.А. Трапезникова; Арзамас. политехн. Ин-т Нижегородск. гос. техн. у-та. – Электрон. текстовые дан. (108 файл: 78,7 Мб). – М.: ИПУ РАН, 2014. – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM). – С. 716–731.
 26. СПИРИНА В.С. *Оценка потребительской привлекательности объектов коммерческой недвижимости с использованием матричных методов комплексного оценивания* // Прикладная математика и вопросы управления. – 2015. – №1. – С. 129–140.
 27. СПИРИНА В.С. *Постановка задачи управления объектами коммерческой недвижимости с учетом потребительских предпочтений* // Проблемы управления. – 2015. – №1. – С. 81–87.
 28. СПИРИНА В.С. *Эмпирическое определение коэффициента λ , описывающего степень влияния времени корреспонденции потребителей до торгового центра в формуле Д. Хаффа* // Master's Journal. – 2013. – №1. – С. 243–251.

29. СПИРИНА В.С., АЛЕКСЕЕВ А.О. *Анализ экономической эффективности решений, принимаемых при управлении коммерческой недвижимостью (на примере торгово-развлекательных комплексов)* // Прикладная математика и вопросы управления. – 2016. – №1. – С. 93–108.
30. СПИРИНА В.С., АЛЕКСЕЕВ А.О. *Моделирование и прогнозирование посещаемости коммерческой недвижимости на основе оценки ее потребительской привлекательности (на примере торгово-развлекательных комплексов)* // Актуальные проблемы экономики и права. – 2015. – №1(33). – С. 209–217.
31. ХАРИТОНОВ В.А., БЕЛЫХ А.А. *Технологии современного менеджмента* / Под науч. ред. В.А. Харитонова. – Пермь: Изд-во Перм. гос. техн. ун-та, 2007. – 190 с.
32. ХАРИТОНОВ В.А., ЁЛОХОВА И.В., СТАМАТИН В.И. И ДР. *Интеллектуальные технологии обоснования инновационные решений*: монография под ред. В.А. Харитонова. – Пермь: Изд-во Перм. гос. техн. ун-та, 2010. – 363 с.
33. ХАРИТОНОВ В.А., ВИНОКУР И.Р., БЕЛЫХ А.А. *Функциональные возможности механизмов комплексного оценивания с топологической интерпретацией матриц свертки* // Управление большими системами: сборник трудов. – 2007. – №18. – С. 129–140.
34. ХАРИТОНОВ В.А., АЛЕКСЕЕВ А.О. *Концепция субъектно-ориентированного управления в социальных и экономических системах* // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета. – 2015. – №05 (109). – IDA [article ID]: 1091505043. – [Электронный ресурс]. – URL: <http://ej.kubagro.ru/2015/05/pdf/43.pdf> (дата обращения: 20.07.2016).
35. ШОПЕНГАУЕР А. *О четвероюм законе достаточного основания* / Собрание сочинений: Мир как воля и представления. – М.: Престиж Бук, 2011. – 1032 с.
36. ЩЕПКИН А.В. *Игровое моделирование активных систем* // Человеческий фактор в управлении / Под. ред. Н.А. Абрамовой, К.С. Гинсберга, Д.А. Новикова. – М.: КомКнига, 2006. – С. 475–486.

37. CHEBAT J.-C., MICHON R., HAJ-SALEM N. AND ETC. *The effects of mall renovation on shopping values, satisfaction and spending behaviour* // Journal of Retailing and Consumer Services. – 2014. – Vol. 21, Issue 4. – P. 610–618.
38. D'ACCI L. *Mathematize urbes by humanizing them. Cities as isobenefit landscapes: Psycho-economical distances and personal isobenefit lines* // Landscape and Urban Planning. – 2015. – Vol. 139. – P. 63–81.
39. HU K., RENLY S., EDLUND S. AND ETC. *A modeling framework to accelerate food-borne outbreak investigations* // Food Control. – 2015. – Vol. 59. – P. 53–58.
40. HUFF D.L., BLACK W.C. *The Huff Model in Retrospect* // Applied Geographic Studies. – 1997. – Vol. 1, Issue 2. – P. 83–93.
41. HUFF D.L. *A Probabilistic Analysis of Shopping Center Trade Areas* // Land Economics. – 1963. – Vol. 39, №1. – P. 81–90.
42. KNIGHT V.A., WILLIAMS J.E., REYNOLDS I. *Modelling patient choice in healthcare systems: Development and application of a discrete event simulation with agent-based decision making* // Journal of Simulation. – 2012. – Vol. 6, Issue 2. – P. 92–102.
43. LUCE R.D. *Individual Choice Behavior: A Theoretical Analysis*. – New York: Wiley, 1959. – 176 p.
44. LUO J. *Integrating the huff model and floating catchment area methods to analyze spatial access to healthcare services* // Transactions in GIS. – 2014. – Vol. 18, №3. – P. 436–448.
45. MULLER S., HAASE K., KLESS S. *A multiperiod school location planning approach with free school choice* // Environment and Planning A. – 2009. – Vol. 41, Issue 12. – P. 2929–2945.
46. REILLY W.J. *The Law of Retail Gravitation*. – New York: Knickerbocker Press, 1931. – 183 p.
47. SEVTSUK A. *Location and Agglomeration: The Distribution of Retail and Food Businesses in Dense Urban Environments* // Journal of Planning Education and Research. – 2014. – Vol. 34, Issue 4. – P. 374–393.
48. SPIRINA V.S. *On consumer appeal estimation of commercial real estate* // Инновационные процессы в исследовательской

- и образовательной деятельности: Материалы III Международной научной конференции, г. Пермь, 22 апреля 2014 г. – С. 148–150.
49. SPIRINA V.S., ALEKSEEV A.O. *Forecasting the attendance of retail real estate based on estimation of its attractiveness to consumers* // Actual Problems of Economics. – 2014. – №10(160). – P. 513–526.
 50. TABETA S., NAKAMURA Y., SUTO T. AND ETC. *“Fishery simulator” to vitalize trawl fishery in Ise Bay* // 10th Global Congress on ICM: Lessons Learned to Address New Challenges, EMECS 2013 – MEDCOAST 2013 Joint Conference. Marmaris, Turkey, October, 30, 2013 – November, 3, 2013. – Vol. 1. – P. 513–524.
 51. TONG Z. *Comparison of partitioning methods for estimating the layout of green spaces* // 19th International Conference on Computer-Aided Architectural Design Research in Asia – Rethinking Comprehensive Design: Speculative Counterculture, CAADRIA 2014. Kyoto, Japan, May, 14, 2014 – May, 17, 2014. – P. 873–882.
 52. WANG D.-P., XU Z., YANG C. *Flow interception facility location and vehicle routing problem based on competitive conditions* // Kongzhi yu Juece / Control and Decision. – 2015. – Vol. 30, Issue 6. – P. 1053–1058.
 53. ZHANG Y. *Designing a retail store network with strategic pricing in a competitive environment* // International Journal of Production Economics. – 2015. – Vol. 159. – P. 265–273.

COMMERCIAL REAL ESTATE MANAGEMENT TECHNOLOGY TAKING INTO ACCOUNT CONSUMER PREFERENCES

Alexander Alekseev, Perm National Research Polytechnic University, Perm, Cand. Sc., Associate Professor, Faculty of Civil Engineering, Department of Construction Engineering and Materials Science (alekseev@cems.pstu.ru)

Varvara Spirina, Perm National Research Polytechnic University, Perm, postgraduate student, Faculty of Civil Engineering, Depart-

ment of Construction Engineering and Materials Science (spirina@cems.pstu.ru).

Nikolay Korgin, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Dr. Sc., Leading Scientist, Laboratory of Active Systems, Moscow Institute of Physics and Technology, Associate Professor (nkorgin@ipu.ru).

The management technology of commercial real estate object differing in accounting of consumer preferences and also two problem definitions of management of commercial real estate object is given. The technology includes three stages at the integrated level: identification of consumer preferences, verification of models and management. Using model it is possible to perform scenario modeling and forecasting including game imitating modeling. During business games drafts of administrative decisions which efficiency can be developed it is checked during scenario modeling "what ... if ...". Search of administrative decisions can be carried out by method of the analysis of sensitivity of the chosen efficiency indicator to change of controlled parameters.

Keywords: commercial real estate, consumer appeal, preferences, convolution, complex estimation, modeling and forecasting, game modeling, management.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии В.Н. Бурковым.

Поступила в редакцию 17.01.2016.

Опубликована 31.07.2016.

УДК 342.8
ББК 67.400.5

ОПТИМАЛЬНЫЙ ПОРОГ ГОЛОСОВАНИЯ КАК ФУНКЦИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ВАРИАЦИИ СРЕДЫ¹

Чеботарев П. Ю.², Малышев В. А.³, Цодикова Я. Ю.⁴,
Логинов А. К.⁵, Лезина З. М.⁶, Афонькин В. А.⁷

(ФГБУН Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова
РАН, Москва)

В рамках модели социальной динамики, определяемой коллективными решениями в стохастической среде (модель ViSE), рассмотрен случай однородного общества, состоящего из классически-рациональных экономических субъектов (эгоистов). Получены выражения для оптимального порога голосования и максимального ожидаемого приращения капитала как функции от параметров среды. Найдена оценка скорости изменения оптимального порога в нуле, выражаемая абсолютной константой.

Ключевые слова: социальная динамика, голосование, стохастическая среда, homines есоnотісі, оптимальный порог голосования.

¹ Работа частично поддержана грантом Российского научного фонда (проект 16-11-00063).

² Павел Юрьевич Чеботарев, доктор физико-математических наук, заведующий лабораторией (pavel4e@gmail.com).

³ Виталий Алексеевич Малышев, математик (vit312@gmail.com).

⁴ Яна Юльевна Цодикова, ведущий инженер (codikova@mail.ru).

⁵ Антон Константинович Логинов, старший математик (a_k_log@mail.ru).

⁶ Зоя Марковна Лезина, кандидат технических наук, в.н.с. (lezinazo@gmail.com).

⁷ Вадим Александрович Афонькин, математик (afonkinvadim@yandex.ru).

Эгоист подобен давно сидящему в колодце.

Козьма Прутков

1. Введение

Рассмотрим модель голосования в стохастической среде (модель ViSE – Voting in Stochastic Environment) [1] в случае, когда общество состоит из n классически-рациональных экономических субъектов (*homines economici* [10]), являющихся ограниченными эгоистами (далее – эгоисты). Такой участник в каждом акте выбора максимизирует индивидуальную функцию полезности. Легко видеть, что более выгодных индивидуальных стратегий у участника в этой модели нет. Кооперативные и альтруистические стратегии рассматривались в [1, 3, 4, 5].

Пусть $\alpha \in [0, 1]$ – строгий порог голосования, т.е. число, превышение которого долей общества, поддерживающей предложение, необходимо и достаточно для принятия этого предложения.

Каждый участник характеризуется текущим значением капитала (которое может интерпретироваться также как значение индивидуальной функции полезности). Предложение среды есть вектор предлагаемых приращений капиталов участников. Это понятие позволяет моделировать возможные нововведения, выгодные для одних и невыгодные для других субъектов. В результате принятия такого предложения капиталы первых получают положительные, а капиталы последних – отрицательные приращения.

Предложения последовательно ставятся на голосование, в котором участвуют все субъекты. Каждый homo economicus голосует за те и только те предложения, которые увеличивают его капитал (полезность). Если предложение поддержано долей общества, превосходящей порог α , то оно принимается (используется процедура голосования « α -большинство» [8, 9, 11]), и капиталы участников получают предусмотренные в нем приращения. В противном случае значения капиталов остаются прежними.

Генерация и рассмотрение предложений повторяются многократно, предметом же изучения являются изменения вектора капиталов участников в результате этого процесса. Приводит он

к повышению благосостояния общества в целом или же демократические решения могут систематически снижать суммарный капитал участников? Растет ли имущественное расслоение? Многие ли участники разоряются?

В соответствии с рассматриваемой моделью ViSE приращение капиталов, составляющие предложение среды, есть реализации независимых одинаково распределенных случайных величин. В данной работе изучается случай, когда эти величины имеют распределение $N(\mu, \sigma)$, т.е. нормальны с математическим ожиданием μ и стандартным отклонением σ .

Отношение σ/μ называют коэффициентом вариации случайной величины. Далее нам понадобится *обратный коэффициент вариации*: $\rho = \mu/\sigma$, который будем называть *приведенным средним среды*.

Если $\rho > 0$, то возможности, предоставляемые средой, чаще благоприятны, если же $\rho < 0$, то превалируют невыгодные предложения.

Одна из сторон общественной практики, осмыслению которых может помочь исследование данной модели, – принятие парламентом всевозможных законопроектов, которые «подсказываются самой жизнью» (средой) – экономической и политической конъюнктурой. При этом предполагается, что депутаты, являясь лоббистами тех или иных интересов, приверженцами одних или других взглядов, настолько заинтересованы в принятии или отклонении законопроектов (например, проектов бюджета), что эта заинтересованность адекватно выражается в терминах индивидуальной полезности или капитала. Разумеется, принятие любых других коллективных решений также в определенной степени может рассматриваться в терминах модели ViSE и ее модификаций.

В настоящей работе исследуются вопросы:

– о динамике капиталов участников при сформулированных модельных предположениях;

– об *оптимальном пороге голосования* – пороге, максимизирующем совокупный капитал общества;

– о связи этого порога с показателем ρ , характеризующим благоприятность среды.

2. Зависимость приращений капиталов от параметров среды и числа участников

Зависимость среднего приращения капитала за один шаг от параметров среды и порога голосования рассматривалась в [6], где, в частности, было установлено, что голосование простым большинством (т.е. при $\alpha = 0,5$) в умеренно неблагоприятной среде ведет к разорению общества.

Аналитически эта зависимость выражается следующим предложением.

Предложение 1. *1. В обществе, состоящем из n эгоистов, математическое ожидание приращения капитала участника за один шаг равно*

$$(1) \quad M(\tilde{d}) = \sigma \sum_{x=[\alpha n]+1}^n \left(\rho + \frac{f}{q} \left(\frac{x}{pn} - 1 \right) \right) b(x|n),$$

где $p = F(\rho)$, $q = 1 - p = F(-\rho)$, $f = f(\rho)$, $b(x|n) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$, $F(\cdot)$ и $f(\cdot)$ – функция распределения и плотность стандартного нормального распределения $N(0, 1)$.

2. Использование стандартной нормальной аппроксимации биномиального распределения приводит к приближению

$$(2) \quad \hat{M}(\tilde{d}) = \sigma \left(\rho F(\tau) + \frac{f}{\sqrt{pqn}} f(\tau) \right),$$

где

$$(3) \quad \tau = \frac{pn - [\alpha n] - 0,5}{\sqrt{pqn}}.$$

Предложение 1 следует из леммы о голосующей нормальной выборке [3]. Легко заметить, что p и q – соответственно вероятности положительности и отрицательности одиночного приращения капитала в предложении среды; f/σ – плотность вероятности предложения среды, равного 0.

Нормальную аппроксимацию рекомендуют использовать, когда $pqn \geq 9$. При фиксированном pqn ее точность максимальна

при $p = 0,5$ и снижается, когда p приближается к 0 или 1. В связи с этим при $0,1 < p < 0,9$ нормальное приближение часто применяют уже при $pqn > 5$. Для значений p , очень близких к 0 или 1, иногда требуют выполнения условия $pqn > 25$.

Зависимость среднего приращения капитала участника за один шаг от приведенного среднего среды ρ при 21 участнике и $\alpha = 0,5$ показана на рис. 1.

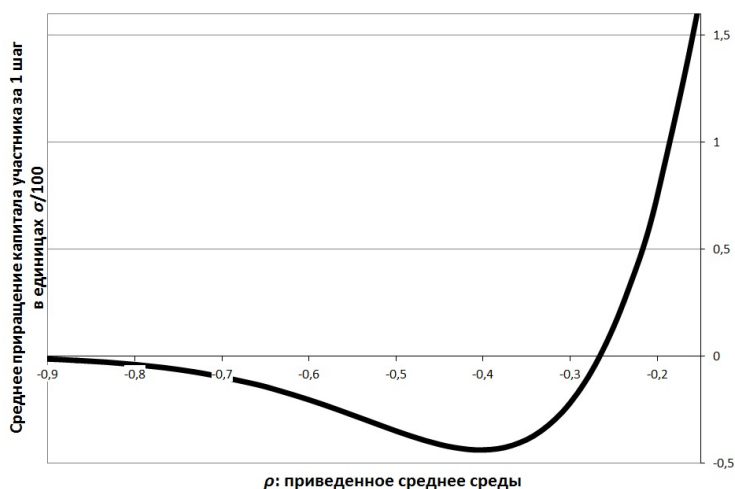


Рис. 1. Среднее приращение капитала участника за один шаг: 21 участник, $\alpha = 0,5$

На рис. 1 видно, что при $\rho \in (-0,9, -0,266)$ среднее приращение капитала составляет заметную отрицательную величину, т.е. предложения, одобренные большинством, оказываются в среднем невыгодными для общества. Соответствующую часть графика будем называть «ямой ущерба». При $\rho < -0,9$ отрицательное $M(\tilde{d})$ очень близко к нулю, поскольку предложения принимаются крайне редко.

Наличие «ямы ущерба» естественно соотносится с результатами А.В. Малишевского [2, с. 92–95], которые впервые про-

демонстрировали, что итог голосования эгоистов может быть крайне невыгоден для них самих (причем всех без исключения). А также – с афоризмом Козьмы Пруткова «эгоист подобен давно сидящему в колоде», выбранным в качестве эпитафии к статье.

Феномен ямы ущерба объясняется тем, что в силу отрицательности ρ положительные предложения среды в среднем имеют меньший модуль, чем отрицательные. В результате совокупный убыток проигравшего меньшинства систематически превосходит совокупный доход выигравшего большинства. Таким образом, несмотря на стремление всех участников к увеличению капитала и одобрение всех изменений большинством, общество разоряется. Итак, в умеренно неблагоприятной среде решения, принимаемые большинством голосов эгоистов, в среднем уменьшают их суммарный капитал!

Как среднее приращение капитала зависит от числа участников? Эта зависимость иллюстрируется рис. 2. При увеличении

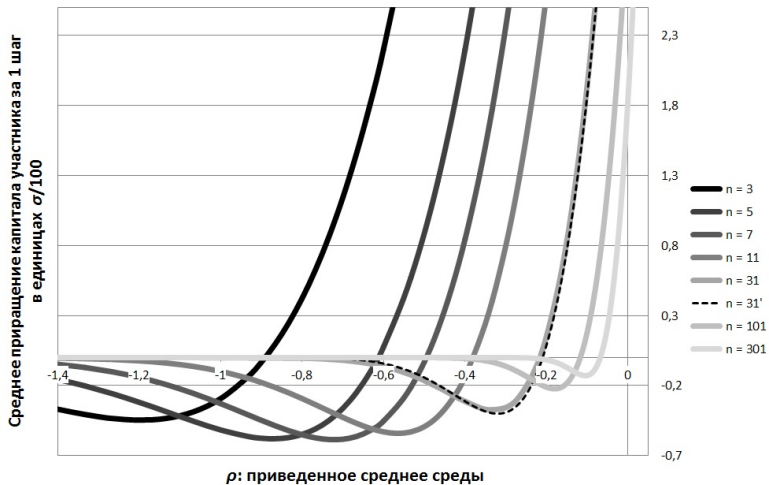


Рис. 2. Среднее приращение капитала участника за один шаг при нечетных n и $\alpha = 0,5$

n точка минимума сдвигается вправо и «яма ущерба» становится уже. Глубина «ямы» сначала увеличивается, достигая максимума при $n = 7$, а при дальнейшем увеличении n стремится к нулю, монотонно уменьшаясь. Отметим, что при малых n аппроксимация (2) имеет недостаточную точность и не отражает начальную тенденцию углубления «ямы» при росте n . При $n = 31$ ее точность (см. пунктирную линию на рис. 2) уже приемлема.

Таким образом, эффект разорения общества в результате решений, принятых большинством, при росте n постепенно ослабевает. При четных n «яма» несколько «мельче», чем при нечетных, поскольку де-факто порог голосования оказывается выше: для принятия предложения необходим перевес минимум в два голоса.

Можно заметить, что форма графиков при разных n сходна. Более того, если обозначить через $\varphi_n(\rho)$ зависимость $M(\tilde{d})$ от ρ при n участниках и фиксированном σ , то при n и n' , превосходящих 15, имеет место приблизительное соотношение

$$(4) \quad \varphi_{n'}(\rho) \approx \sqrt{\frac{n}{n'}} \varphi_n\left(\rho \sqrt{\frac{n'}{n}}\right).$$

Тем самым уменьшение n в k^2 раз приводит к растяжению графика в k раз по обеим осям. Совмещение зависимостей $M(\tilde{d})$ от ρ , полученное с помощью (4) для разных n , иллюстрирует рис. 3, где показаны графики $\sqrt{n} \varphi_n(\rho / \sqrt{n})$. В случае, когда n и n' больше 30, точность приближения (4) достаточно высока.

Из (2) и (4) следует, что k^2 -кратное увеличение числа участников действует аналогично k -кратному уменьшению σ . Соответственно, увеличение дисперсии «уравновешивает» такое же кратное увеличением числа голосующих: график зависимости $M(\tilde{d})$ от ρ при этих одновременных изменениях почти не меняется. Так, при нечетном n , $\alpha = 0,5$ и $\rho = 0$ (нейтральной среде) из (2) и (3) следует

$$(5) \quad \hat{M}(\tilde{d}) = \frac{\sigma}{\pi \sqrt{n}}$$

– исключительно простая формула.

Для вероятностных схем усреднения такая закономерность, разумеется, естественна.

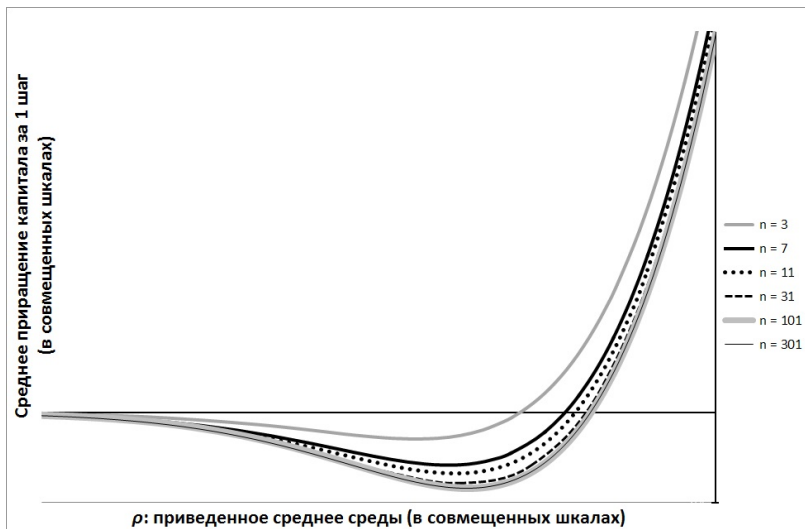


Рис. 3. Совмещение графиков для разных n (рис. 2) посредством масштабирования (4) по двум осям

3. Зависимость динамики капиталов от порога голосования α

При увеличении порога голосования α наблюдаемая «яма ущерба» становится узкой и неглубокой: среднее приращение капитала участника всё меньше заходит в отрицательную область (рис. 4).

В то же время в случае высоких α скорость роста капитала участника при увеличении μ значительно ниже, чем при голосовании простым большинством. Посредством высокого α общество страхуется от ущерба при умеренно отрицательных μ , но одновременно теряет выгоду при больших значениях μ , т.е. когда среда более благоприятна. В числе прочих на рис. 4 (где использована аппроксимация (2)) показана кривая для $\alpha = 0,45$. Она имеет относительно широкую и глубокую «яму ущерба», но при увеличении μ растет быстрее других и в области положитель-

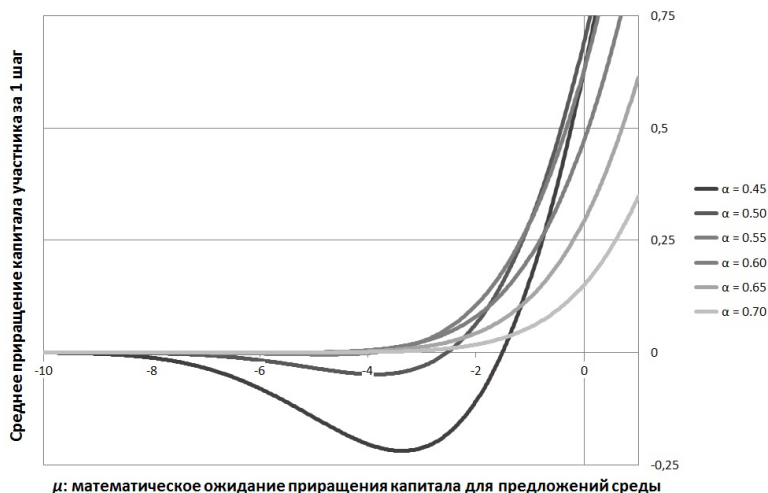


Рис. 4. Среднее приращение капитала участника за один шаг при разных порогах α ($n = 21, \sigma = 10$)

ных μ обгоняет кривые, соответствующие $\alpha \geq 0,5$ (см. также рис. 5). Это означает, что в благоприятной среде можно «рисковать» принимать предложения, поддержанные не большинством, а несколько меньшей долей общества. Несмотря на то, что большинству они могут быть невыгодны, выгода меньшинства будет систематически превышать ущерб большинства, и в силу независимости приращений капитала участников при достаточном числе шагов это приведет к выгоде для всех.

4. Оптимальный порог голосования в обществе, состоящем из эгоистов

Проведенный анализ показывает, что если n и σ фиксированы, то при каждом уровне благоприятности среды μ имеется оптимальное значение⁸ порога голосования α – это значение,

⁸ О других подходах к оптимизации порога голосования см. [7, 8], а также [11, 12] для случая многократного голосования.

максимизирующее среднее приращение капитала участника.

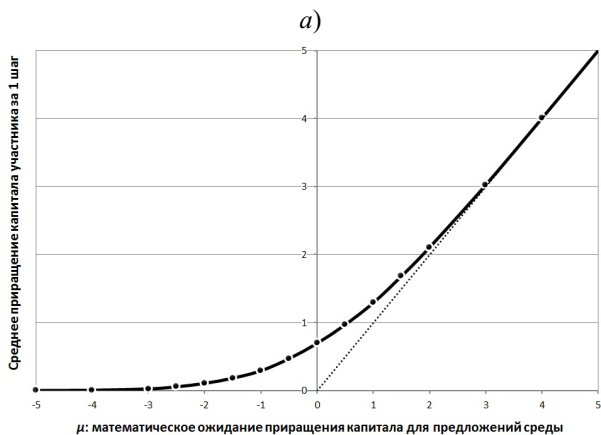
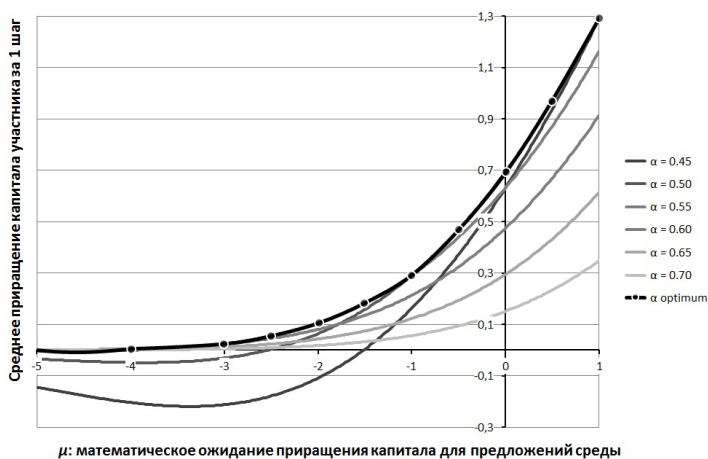


Рис. 5. а) сплайн, максимизирующий приращение капитала по α ;
 б) среднее приращение капитала участника при голосовании с оптимальным порогом α ($n = 21$, $\sigma = 10$)

Оптимальный порог α можно найти графически. Для всевозможных α построим кривые зависимости $M(\tilde{d})$ от μ при

голосовании с порогом α и каждому μ сопоставим кривую с наибольшей ординатой при абсциссе μ . Ей и будет отвечать оптимальное α . Отметим, что кривой наибольших приращений будет сплайн кривых, показанных на рис. 4 (см. рис. 5), а не их верхняя огибающая⁹, поскольку при каждом n возможны лишь $n + 2$ существенно различных порогов голосования α : $\{-\frac{1}{n}, 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1\}$ (крайние значения здесь соответствуют принятию и отклонению всех предложений).

При голосовании с оптимальным порогом (рис. 5б) среднее приращение капитала участника положительно при любом μ , отсутствует «яма ущерба» и обеспечивается максимально возможный рост капитала при увеличении μ .

Какие значения принимает оптимальный порог голосования? Прежде всего, зависимость его от μ – «лестница» со ступеньками равной высоты в силу отмеченной выше конечности существенно различных порогов голосования. Если порог α оптимален и $[\alpha_1 n] = [\alpha n]$, то α_1 – также оптимальный порог. На рис. 6 показан график среднего значения класса эквивалентности оптимальных порогов голосования как функция $\rho \in [-0,5, 0,5]$ при $n = 21$; вертикальные отрезки проведены для наглядности.

Если $\bar{\alpha}_0$ – среднее значения класса эквивалентности оптимальных порогов голосования при фиксированных n, σ и μ , то сам этот класс есть полуинтервал $[\bar{\alpha}_0 - \frac{1}{2n}, \bar{\alpha}_0 + \frac{1}{2n}[$. За пределами отрезка $\rho \in [-0,7, 0,7]$ при голосовании с порогом, близкими к оптимальному, и заметным числом участников предложения либо практически никогда не принимаются (левее этого отрезка), либо (правее отрезка) практически всегда принимаются (см. рис. 5б). Поэтому задача точного определения оптимального порога теряет здесь практический смысл.

Оценка оптимального порога голосования α в реальных ситуациях представляется в принципе решаемой задачей. Для получения такой оценки нужно из опыта оценить $\rho = \mu/\sigma$ и иметь основания считать, что рассматриваемая модель хотя бы приблизи-

⁹ *Огибающая касается бесконечного множества кривых.*

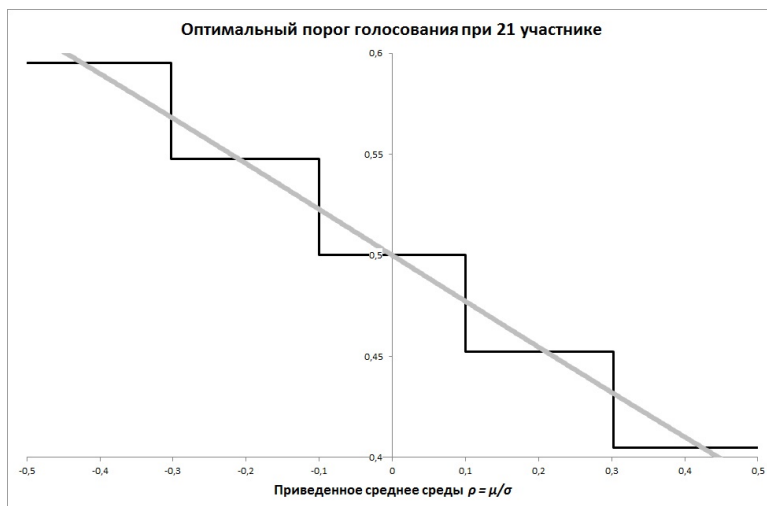


Рис. 6. Средние значения классов эквивалентности оптимальных порогов голосования α_0 («лестница») при $n = 21$ и оценка (б) оптимального порога голосования (серая линия)

тельно адекватна. Но даже в случае, когда оценивание ρ и вопрос об адекватности модели вызывают затруднения, общий вывод о выгоде повышения порога голосования, когда среда становится менее благоприятной, по-видимому, остается верным. Этот вывод основан на том, что в агрессивной среде совокупные потери меньшинства могут систематически превышать суммарный выигрыш большинства. Здесь проявляется фундаментальное свойство стандартных процедур голосования: голоса учитываются независимо от важности рассматриваемого вопроса для голосующих – от того, много или мало каждый из них приобретает/теряет в случае принятия предложения.

В разделе 5 статьи дана аппроксимация оптимального порога голосования в обществе, состоящем из *homines economici*.

5. Выражение для оптимального порога голосования

Оценку оптимального порога голосования α_0 дает следующая теорема.

Теорема 1. Пусть α_0 – порог голосования в обществе, состоящем из эгоистов, обеспечивающий наибольшее значение математического ожидания приращения капитала за один шаг. Тогда использование стандартной нормальной аппроксимации биномиального распределения приводит к:

– оценке оптимального порога голосования

$$(6) \quad \hat{\alpha}_0 = p \left(1 - \frac{q\rho}{f} \right);$$

– выражению для ожидаемого приращения капитала при голосовании с оптимальным порогом

$$(7) \quad \hat{M}(\tilde{d}_0) = \mu F\left(\frac{\mu}{\nu}\right) + \nu f\left(\frac{\mu}{\nu}\right), \quad \text{где } \nu = \frac{\sigma f}{\sqrt{pqn}},$$

а остальные обозначения приведены в разделе 1 и предложении 1.

Доказательства приведены в приложении.

Порог (6) определяется параметрами среды и не зависит от n . Поскольку p , q и f есть функции от ρ , единственным параметром, определяющим оценку $\hat{\alpha}_0$, является ρ . Подробная запись этой зависимости:

$$\hat{\alpha}_0 = F(\rho) \left(1 - \frac{\rho F(-\rho)}{f(\rho)} \right).$$

Ступенчатая зависимость типа «лестницы», показанной на рис. 6, получается из этой оценки применением формулы

$$\bar{\alpha}_0 = \frac{[\hat{\alpha}_0 n] + 0,5}{n}.$$

Отметим, что теорема 1 дает исключительно простые аналитические оценки для оптимального порога и соответствующего ему среднего приращения капитала участника. Для сравнения, задачи нахождения абсцисс и ординат минимумов функций $M(\tilde{d})$,

показанных на рис. 2 и 4, а также точек их пересечения с горизонтальной осью не приводят к простым аналитическим выражениям.

6. Скорость изменения оптимального порога голосования как функция ρ

Зависимость $\hat{\alpha}_0$ от ρ на рис. 6 выглядит линейной, однако, в силу финитности α и инфинитности ρ , на большом интервале значений аргумента кажущаяся линейность не может не нарушаться (рис. 7).

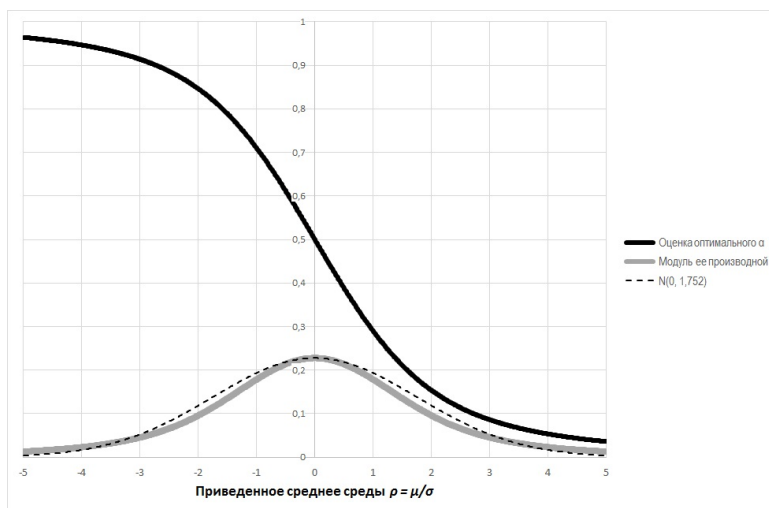


Рис. 7. Оценка $\hat{\alpha}_0$ оптимального порога голосования и взятая с минусом производная выражения (6). Последняя, интерпретированная как весовая функция распределения, имеет «тяжелые хвосты», что заметно при сравнении ее с нормальной плотностью, показанной пунктиром

Чтобы найти угол наклона кривой $\hat{\alpha}_0(\rho)$ в нуле, продифференцируем функцию (6) по ρ .

Предложение 2.

$$(8) \quad \frac{d\hat{\alpha}_0(\rho)}{d\rho} = \frac{(f + p\rho)(f - q\rho) - q\rho}{f}.$$

Функция $d\hat{\alpha}_0(\rho)/d\rho$ отрицательна; модуль ее показан на рис. 7.

При нейтральной среде ($\rho = 0$) имеем $p = q = 1/2$, $f = 1/\sqrt{2\pi}$. Подставив эти значения в (8), получаем

Следствие 1.

$$\left. \frac{d\hat{\alpha}_0(\rho)}{d\rho} \right|_{\rho=0} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \right) \approx -0,2277.$$

Найденное значение производной в нуле не зависит ни от числа участников, ни от других параметров модели. Вывод: если в результате экономического кризиса μ уменьшилось от 0 до $-\frac{\sigma}{2}$ (т.е. ρ изменилось от 0 до $-\frac{1}{2}$), то оптимальный порог голосования растет с 50% до 61%. Если же μ уменьшается до $-\sigma$, то (с поправкой на нелинейность $\hat{\alpha}_0(\rho)$) имеем $\hat{\alpha}_0 \approx 71\%$.

7. Заключение

В работе получен и проинтерпретирован ряд соотношений, описывающих голосование с «оптимальным» порогом в предположениях модели социальной динамики, определяемой голосованием в стохастической среде (модель ViSE). Эти соотношения приводят к выводу, что при наступлении неблагоприятной внешней конъюнктуры порог голосования следует повышать, а при улучшающихся условиях – понижать, и указывают – насколько.

В статье также получены аналитические выражения для «ямы ущерба» – зависимости, выражающей скорость разорения эгоистов в умеренно неблагоприятной среде в результате их демократических решений, а также для оптимального порога голосования (его оценка не зависит от числа участников), его производной по благоприятности среды (в нуле это константа $(\sqrt{2/\pi} - \sqrt{\pi/2})/2$) и динамики капиталов (полезностей) при голосовании с оптимальным порогом и другими значениями порога. Указанные результаты допускают интерпретацию в терминах

принятия реальных коллективных решений в среде, благоприятность и стабильность которой допускают эмпирическую оценку.

Приложение

Доказательство теоремы 1. Для нахождения аргумента наибольшего значения приращения капитала посредством дифференцирования в выражении (3) заменим $[\alpha n] + 0,5$ на αn . При этой замене получаем дифференцируемую функцию, которая в точках $\left\{ \frac{k+0,5}{n} \mid k = 0, \dots, n \right\}$ совпадает с исходной. Тогда вместо (3) имеем

$$(П.1) \quad \tau = (p - \alpha) \sqrt{\frac{n}{qp}}.$$

Дифференцируя по α выражение (2) после указанной замены (получившуюся функцию обозначим $\hat{M}(\alpha, \tau, \sigma)$), находим:

$$(П.2) \quad \frac{d\hat{M}(\alpha, \tau, \sigma)}{d\alpha} = \mu f(\tau) \frac{d\tau}{d\alpha} + \frac{\sigma f}{\sqrt{pqn}} f(\tau) \tau \frac{d(-\tau)}{d\alpha}.$$

Условие первого порядка для максимума (равенство нулю первой производной) приводится к виду

$$(П.3) \quad -\rho = \frac{(\alpha - p)f}{pq}.$$

С учетом отрицательности второй производной отсюда выводим (6).

Второе утверждение теоремы доказывается подстановкой оценки (6) оптимального порога голосования в выражение (2).

Доказательство предложения 2. Учитывая, что $dp/d\rho = -dq/d\rho = f$ и $df/d\rho = -\rho f$ (поскольку $f = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\rho^2/2}$), получаем

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\alpha}_0(\rho)}{d\rho} &= \frac{d}{d\rho} p \left(1 - \frac{q\rho}{f} \right) = \\ &= f \left(1 - \frac{q\rho}{f} \right) + p \left(- \frac{(-f)\rho f + qf + \rho f q\rho}{f^2} \right) = \\ &= \frac{(f + p\rho)(f - q\rho) - q\rho}{f}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Литература

1. БОРЗЕНКО В.И., ЛЕЗИНА З.М., ЛОГИНОВ А.К. И ДР. *Стратегии при голосовании в стохастической среде: эгоизм и коллективизм* // Автоматика и телемеханика. — 2006. — №2. — С. 140–152.
2. МИРКИН Б.Г. *Проблема группового выбора*. — Москва: Наука, 1974. — 256 с.
3. ЧЕБОТАРЕВ П.Ю. *Аналитическое выражение ожидаемых значений капиталов при голосовании в стохастической среде* // Автоматика и телемеханика. — 2006. — №3. — С. 57–68.
4. ЧЕБОТАРЕВ П.Ю., ЛОГИНОВ А.К., ЦОДИКОВА Я.Ю. И ДР. *Анализ феноменов коллективизма и эгоизма в контексте общественного благосостояния* // Проблемы управления. — 2008. — №4. — С. 30–37.
5. ЧЕБОТАРЕВ П.Ю., ЛОГИНОВ А.К., ЦОДИКОВА Я.Ю. И ДР. *«Снежный ком» кооперации и «снежный ком»-мунизм* // Четвертая международная конференция по проблемам управления: Сборник трудов. — Москва: ИПУ РАН, 2009. — С. 687–699.
6. ЧЕБОТАРЕВ П.Ю., ЛОГИНОВ А.К., ЦОДИКОВА Я.Ю. И ДР. *Об оптимальном пороге голосования* // XIII Апрельская международная научная конференция по проблемам развития экономики и общества: в 4 кн. / Под ред. Е.Г. Ясина. — Т. 4. — Москва: Изд. дом ВШЭ, 2013. — С. 123–132.
7. AZRIELI Y., KIM S. *Pareto efficiency and weighted majority rules* // International Economic Review. — 2014. — Vol. 55. — No. 4. — P. 1067–1088.
8. NITZAN S., PAROUSH J. *Optimal decision rules in uncertain dichotomous choice situations* // International Economic Review. — 1982. — Vol. 23. — No. 2. — P. 289–297.

9. NITZAN S., PAROUSH J. *Are qualified majority rules special?* // Public Choice. — 1984. — Vol. 42. — No. 3. — P. 257–272.
10. O'BOYLE E.J. *The origins of homo economicus: A note* // Storia del Pensiero Economico. — 2009. — Vol. 6. — P. 1–8.
11. RAE D.W. *Decision-rules and individual values in constitutional choice* // American Political Science Review. — 1969. — Vol. 63. — No. 1. — P. 40–56.
12. SEKIGUCHI T., OHTSUKI H. *Effective group size of majority vote accuracy in sequential decision-making* // Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics. — 2015. — Vol. 32. — No. 3. — P. 595–614.

THE OPTIMAL MAJORITY THRESHOLD AS A FUNCTION OF THE VARIATION COEFFICIENT OF THE ENVIRONMENT

Pavel Chebotarev, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Doctor of Science (Moscow, Profsoyuznaya st., 65, pavel4e@gmail.com).

Vitaly Malyshev, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, mathematician (vit312@gmail.com).

Yana Tsodikova, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, leading engineer (codikova@mail.ru).

Anton Loginov, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, senior mathematician (a_k_log@mail.ru).

Zoya Lezina, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Cand. Sc., leading researcher (lezinazo@gmail.com).

Vadim Afonkin, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, mathematician (afonkinvadim@yandex.ru).

Abstract: We consider the model of social dynamics determined by collective decisions in a stochastic environment (ViSE model). In the paper we investigate the case of a homogeneous society consisting of classically rational economic agents (or homines economici, or egoists). Alternatives generated by the environment are random vectors of utility increments for each agent. Increments can be positive or negative. An agent votes for those alternatives which increase her utility. An alternative which has gained more votes than the given majority threshold is accepted and all agents receive corresponding increments to their utilities. Expressions for the optimal majority threshold and the maximum expected utility increment as a function of the parameters of the environment are obtained. An estimate of the rate of change of the optimal threshold at zero is given and this value is an absolute constant.

Keywords: social dynamics, voting, stochastic environment, homines economici, optimal majority threshold.

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии Ф.Т. Алескеровым.*

*Поступила в редакцию 19.01.2016
Дата опубликования 31.07.2016.*

УДК 62.50
ББК Ж 30

ПЕРЕДАЧА ДАННЫХ С АДАПТИВНЫМ КОДИРОВАНИЕМ МЕЖДУ КВАДРОКОПТЕРАМИ В ФОРМАЦИИ¹

Амелин К. С.^{b,2}, Андриевский Б. Р.^{a,b,c,3}

Томашевич С. И.^{a,c,4} Фрадков А. Л.^{a,b,c,5}

(ФГБУН Институт проблем машиноведения РАН)^a;
(ФГБОУ ВПО «Санкт-Петербургский государственный
университет»)^b;

(Университет ИТМО, Санкт-Петербург)^c

Представлена и численно исследована процедура адаптивного кодирования для передачи данных между движущимися в формации квадрокоптерами. Идентификация параметров квадрокоптера выполнена обработкой экспериментальных данных, полученных по цифровому каналу связи с ограниченной пропускной способностью. Проведено сравнение полученных результатов с теоретическими. Продемонстрирована эффективность процедуры адаптивного кодирования.

Ключевые слова: кооперативное управление, управление через сети связи, передача данных, квадрокоптер, оценивание.

¹ Работа выполнена в ИПМаш РАН при поддержке РФФ (грант 14-29-00142).

² Константин Сергеевич Амелин, кандидат физико-математических наук, стажер-исследователь (konstantinamelin@gmail.com).

³ Борис Ростиславич Андриевский, доктор технических наук, ведущий научный сотрудник (boris.andrievsky@gmail.com).

⁴ Станислав Игоревич Томашевич, аспирант, стажер-исследователь (tomashevich.stanislav@gmail.com).

⁵ Александр Львович Фрадков, доктор технических наук, профессор, заведующий лабораторией (fradkov@mail.ru).

Введение

В последние десятилетия возрастающее внимание уделяется задачам управления формациями подвижных агентов, которые могут автономно взаимодействовать между собой и с окружающей средой для выполнения разнообразных задач, выходящих за рамки возможностей отдельного агента. Интерес к исследованию многоагентных формаций связан с широкой областью различных потенциальных приложений в таких направлениях, как мобильная робототехника на производстве, автоматизация дорожного движения, мониторинг окружающей среды беспилотными летательными аппаратами (БПЛА), и других. Большое внимание, в частности, уделено разработке протоколов обеспечения консенсуса для кооперативного взаимодействия сетевых систем [1, 7, 11, 12, 33, 36, 37, 43–46, 49].

Так как многоагентная формация представляет собой систему взаимосвязанных динамических объектов, модель ее динамики имеет высокий порядок, и обеспечение устойчивости и качества работы системы в целом является, в общем случае, сложной задачей. Условия устойчивости формации, состоящей из агентов с линейной инвариантной по времени динамикой, могут быть существенно упрощены, если агенты обладают идентичными динамическими свойствами. Известный результат такого рода получен в [24], где анализ устойчивости многоагентной формации сведен к проверке условия устойчивости отдельного агента с учетом спектра матрицы Лапласа, описывающей граф передачи информации между агентами. Ограниченность данного результата состоит в указанных выше предположениях о линейности и идентичности моделей динамики образующих формацию агентов. В ряде работ представлены подходы, позволяющие ослабить эти ограничения. Например, в [10] получен частотный критерий консенсуса в многоагентных системах с *неизвестными нелинейными* связями. Считается, что связи удовлетворяют секторным неравенствам либо их многомерным аналогам, а топология сети может быть неизвестной и меняться с течением времени. Ав-

торы [6, 27] рассмотрели задачу *адаптивной синхронизации* для сетей взаимосвязанных динамических подсистем, представленных в форме Лурье (динамическая линейная часть со статической нелинейностью в обратной связи). Методом скоростного градиента [3] в работе синтезированы децентрализованные алгоритмы адаптивного управления. На основе метода пассивификации и леммы Якубовича–Калмана [9, 25] получены условия синхронизируемости сети. В [17] метод пассивификации используется для построения системы управления агентами, имеющими существенно различные динамические свойства (вследствие вариаций параметров) с быстродействующими адаптивными регуляторами, обеспечивающими близость динамики замкнутых обратной связью локальных систем управления в широкой области значений параметров агентов. Поскольку, благодаря адаптации, обеспечиваются предписанные динамические свойства образующих формацию подсистем, то раскрывается возможность применения указанного выше критерия работы [24].

1. Постановка задачи

Весьма существенную роль в сетевых системах управления играет характер обмена информацией между агентами, так как ограничения по объему информации, циркулирующей между агентами, могут существенно ухудшить динамику системы в целом и даже привести к потере устойчивости, см., например, [2, 31, 32, 38, 42, 47]. В течение последних десятилетий ограничения возможностей оценивания и управления, вызванные конечностью полосы пропускания канала связи, широко рассмотрены в литературе по теории управления, см., например, [2, 4, 18, 19, 30, 39, 42]. В частности показано, что стабилизация линейных систем через канал связи с ограниченной скоростью передачи данных возможна только если пропускная способность канала связи превосходит скорость возрастания энтропии в системе в окрестности состояния равновесия [39–41]. Показано, что в «идеальном» случае (отсутствие возмущений, помех и искажений данных в канале связи) изменением чувствительности

квантователя («зуминг», англ. *zooming*) можно обеспечить асимптотическую стабилизацию системы при квантовании данных по уровню и по времени [20,48]. В ряде других работ рассматривается процедура *адаптивного зуминга*, в которой чувствительность квантователя изменяется в зависимости от текущей скорости изменения передаваемого по каналу процесса [14, 15, 26, 28, 30].

В настоящей работе рассматривается задача исследования динамики процесса управления группой квадрокоптеров, взаимодействующих через сеть связи с ограниченной пропускной способностью и при наличии обратных связей между агентами.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 описано экспериментальное оборудование – группа квадрокоптеров с модулями обмена информацией. Для идентификации параметров модели квадрокоптера в разделе 3 используются экспериментальные данные, обработка которых выполнена методом наименьших квадратов. Результаты параметрической идентификации на основе полученных через канал связи данных приведены в разделе 4. Раздел 5 посвящен синтезу локального регулятора для управления высотой полета квадрокоптера. Протокол кодирования-декодирования данных при передаче по цифровому каналу связи описан в разделе 6. Результаты численного исследования поведения группы квадрокоптеров при квантовании данных в канале связи представлены в разделе 7. Заключительные замечания и направления дальнейших исследований приведены в разделе 8.

2. Экспериментальный комплекс «КвадРой»

Для реализации различных алгоритмов управления, идентификации, обмена данными и проведения экспериментальных исследований в ИПМаш РАН разработан исследовательский экспериментальный комплекс «КвадРой» (*QuadRoy*).

2.1. КРАТКОЕ ОПИСАНИЕ КОМПЛЕКСА

Комплекс «КвадРой» содержит пять ультра-легких БПЛА – квадрокоптеров. Каждый квадрокоптер оборудован автопилотом

Ardupilot Mega 2.6,⁶ включающим инерциальную измерительную систему (ИИС) и *GPS*-приемник сигналов спутниковой навигации. Автопилот *Ardupilot Mega 2.6* построен на интегральных микросхемах *Atmel ATMEGA 2560*, имеет восемь входов и выходов для сигналов с широтно-импульсной модуляцией, три порта универсальной асинхронной приемо-передачи (*UART*), встроенный переходник *USB-FTDI*, восемь аналоговых входов, 4 Мб флеш-памяти для записи телеметрических данных. ИИС содержит блок *Invensense 6 DoF Accelerometer/Gyro MPU-6000* акселерометров и гироскопов, барометр *MS5611-01BA03* и четыре сонара *MB1260 XL-MaxSonar-EZL0*. Корпусом квадрокоптера служит рамка *DJI 450* с радиальными лучами 450 мм в диаметре. На конце каждого из четырех лучей установлен бесколлекторный двигатель с внешним ротором и контроллером. Основные характеристики квадрокоптера: скорость полета: 0–10 км/ч; мощность моторов: по 250 Вт; емкость источника питания – 2600 или 4000 мА·час (в зависимости от выбранной конфигурации). Фотография двух квадрокоптеров представлена на рис. 1.



Рис. 1. Фотография двух квадрокоптеров комплекса «КвадРой»

Для обмена данными между квадрокоптерами и оператором, а также взаимного обмена данными между квадрокоптерами, ис-

⁶ Подробные сведения об автопилоте можно найти на сайте <http://copter.ardupilot.com/>.

пользуются специализированные модули связи – *XBee*-модемы. *XBee* и *XBee-PRO* модули предназначены для работы в стандарте *IEEE 802.15.4* и имеют низкую стоимость, малое энергопотребление и обеспечивают беспроводное сетевое взаимодействие. Дальность передачи на открытой местности составляет до 1000 м. Скорость передачи – до 250 бит/с. Эти устройства используют интерфейс *UART* на основе *RS-232*. Дополнительно на квадрокоптерах размещены микрокомпьютеры *Raspberry Pi B+*, так что модули *XBee* подключены к *Raspberry Pi B+*, которые, в свою очередь, передают данные автопилоту *Arduino Mega*.

2.2. МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ КВАДРОКОПТЕРА

В литературе имеется большое число публикаций, в которых приводятся уравнения динамики квадрокоптера, например в [13, 21–23, 34]. В данной работе использована следующая модель динамики, полученная из уравнений Эйлера–Лагранжа в предположениях что конструкция квадрокоптера (включая рамку и лучи) жесткая, симметричная относительно вертикальной оси, центр масс лежит в начале связанной системы координат, а изгибом конструкции можно пренебречь:

$$(1) \quad \begin{cases} I_x \ddot{\gamma} = (I_y - I_z) \dot{\psi} \dot{\vartheta} + T_\gamma(t), \\ I_y \ddot{\vartheta} = (I_z - I_x) \dot{\psi} \dot{\gamma} + T_\vartheta(t), \\ I_z \ddot{\psi} = (I_x - I_y) \dot{\vartheta} \dot{\gamma} + T_\psi(t), \\ m \ddot{x} = (\sin \psi \cdot \sin \gamma + \cos \psi \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \gamma) F(t), \\ m \ddot{y} = \cos \vartheta \cdot \cos \gamma \cdot F(t) - mg, \\ m \ddot{z} = (\sin \psi \cdot \sin \vartheta \cos \gamma - \cos \psi \cdot \sin \gamma) F(t), \end{cases}$$

где γ, ϑ, ψ – углы Эйлера (крена, тангажа и рыскания соответственно); (x, y, z) – координаты центра масс квадрокоптера в нормальной Земной системе координат; I_x, I_y, I_z – моменты инерции квадрокоптера относительно осей связанной системы координат; $T_\gamma(t), T_\vartheta(t), T_\psi(t)$ – моменты внешних сил, действующих на квадрокоптер; m – его масса; g – ускорение свободного падения. Через $F(t)$ обозначена приложенная к квадрокоптеру сила

тяги, которая вычисляется как сумма

$$(2) \quad F(t) = f_1(t) + f_2(t) + f_3(t) + f_4(t),$$

где $f_i(t)$, $i = 1, \dots, 4$, – силы, приложенные со стороны вращающихся пропеллеров. Эти силы зависят от скорости вращения роторов и поведения воздушного потока вблизи квадрокоптера.

В данной работе рассматривается движение квадрокоптера по высоте $y(t)$ в предположении, что он ориентирован горизонтально. Поэтому углы γ , ϑ в (1) считаются нулевыми, а угол рыскания ψ не существен. Отсюда получаем следующую модель изолированного вертикального движения:

$$(3) \quad m\ddot{y} = F(t) - mg.$$

Уточним модель (3), учтя взаимодействие между вращающимися лопастями и окружающим воздухом. Это взаимодействие имеет сложный характер [34, 35]. Основываясь на работе [34] мы далее предполагаем, что это взаимодействие в вертикальном движении может быть представлено моделью вязкого трения. Тогда вместо (3) используем модель вида

$$(4) \quad m\ddot{y}(t) + K_{\dot{y}}\dot{y}(t) = K_{\Omega} \sum_{i=1}^4 \Omega_i(t) - mg,$$

в которой Ω_i ($i = 1, \dots, 4$) обозначают угловые скорости вращения пропеллеров, $K_{\dot{y}}$ – коэффициент вязкого трения, а параметр K_{Ω} может быть назван *коэффициентом эффективности пропеллеров*.

Далее, с учетом предположения о полете квадрокоптера без наклонов, считаем что $\Omega_1(t) = \dots = \Omega_4(t)$. Временно пренебрегая динамикой электродвигателей (которые обладают малой инерционностью по сравнению с самим квадрокоптером), получим следующую модель динамики вертикального движения:

$$(5) \quad \ddot{y}(t) + K\dot{y}(t) = K_u U_y(t) - g,$$

где $U_y = \sum_{i=1}^4 U_i$ – сигнал управления по высоте (сумма напряжений U_i , приложенных к двигателям), K , K_u приведенные параметры модели. Значения K , K_u зависят от многих факторов, и их сложно вычислить непосредственно. Для нахождения их значений используем идентификацию на основе обработки экспериментальных данных.

3. Идентификация параметров по результатам экспериментов

Значения высоты $y(t_k)$, вертикальной скорости $\dot{y}(t_k)$, ускорения $\ddot{y}(t_k)$ и сигнала управления $U_z(t_k)$ получены экспериментально с помощью бортовых датчиков автопилота в тестовом полете для дискретных моментов времени t_k , $t_k = kT_0$, $k = 0, 1, \dots, N$, N – число измерений, $T_0 = 0,01$ с – интервал квантования, и сохранены в памяти бортового компьютера в виде соответствующих массивов данных. К этим данным применена процедура идентификации по методу наименьших квадратов [8]. Для этого модель динамики (5) приведена к следующему уравнению регрессии:

$$(6) \quad \Phi\Theta = Y,$$

где $Y = [\dot{y}(1), \ddot{y}(2), \dots, \ddot{y}(N)]$, а матрица Φ имеет вид

$$(7) \quad \Phi = \begin{bmatrix} U_y(1) & 1 & \dot{y}(1) \\ U_y(2) & 1 & \dot{y}(2) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ U_y(k) & 1 & \dot{y}(N) \end{bmatrix},$$

где $k = 0, 1, \dots, N$, Θ – вектор неизвестных параметров модели. Исходя из (6), вектор Θ можно вычислить псевдообращением: $\Theta = \Phi^\dagger Y$, где Φ^\dagger – матрица, псевдообратная к Φ .

Применением описанной процедуры к результатам $N = 600$ измерений с интервалом $T_0 = 0,1$ с получены следующие оценки параметров модели (5): $\hat{K}_u = 0,021$ [м/(с²В)], $\hat{g} = 9,6$ [м/с²], $\hat{K} = 0,293$ [м/с], в результате чего (5) численно принимает вид

$$(8) \quad \ddot{y} + 0,293\dot{y} = 0,021U_y - 9,6.$$

Как видно из (8), оценка ускорения свободного падения $\hat{g} = 9,6 \text{ м/с}^2$ получилась близкой к его истинному значению, что косвенно свидетельствует о приемлемой точности полученных оценок.

4. Параметрическая идентификация при передаче данных по каналу связи

Рассмотрим теперь идентификацию параметров модели квадрокоптера на компьютере оператора в процессе полета по данным измерений, передаваемых через аппаратуру связи. В данном эксперименте квадрокоптер, как и ранее, управлялся оператором в ручном режиме, поэтому сигнал управления двигателями измерялся непосредственно на наземном оборудовании. Для осуществления идентификации требуются значения высоты полета $y(t)$, которая измеряется бортовыми датчиками. Данных с датчиков передавались по каналу связи через *XBee* модемы со скоростью $R = 250$ бит/с, а затем применялась процедура идентификации, описанная в разделе 3. В результате выполнения идентификации в течение 40 с полета численно получено следующее уравнение модели:

$$(9) \quad \ddot{y} + 0,267\dot{y} = 0,022U_y - 9,78.$$

Как видно, коэффициенты в (9) несколько отличаются от приведенных в (8), что может свидетельствовать о некотором искажении оценок при передаче данных с ограниченной пропускной способностью канала связи.

Чтобы проиллюстрировать полученные численные результаты, приведем графики измеренной высоты полета квадрокоптера вместе с графиками, полученными интегрированием уравнений (8), (9) при одном и том же управляющем сигнале и одинаковых (взятых из экспериментальных данных) начальных условиях. Графики представлены на рис. 2. Сплошной линией показан график «истинной» (измеренной по данным *GPS*) высоты полета, пунктирная линия получена по модели (8), штрих-пунктирная – по модели (9). С точки зрения авторов, обе модели демонстрируют достаточную для практики точность идентификации пара-

метров. Следует заметить, что процессы практически совпадают в течение 15 с от начального момента. Дальнейшее отклонение процессов естественно вследствие накопления ошибок в разомкнутом (по выходу) контуре.

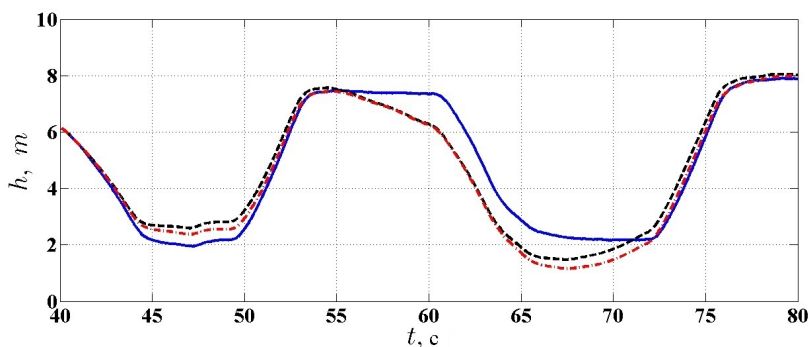


Рис. 2. Графики процессов изменения высоты полета. Сплошная линия – результат измерений, пунктирная линия – вычисление по модели (8), штрих-пунктирная – вычисление по модели (9)

Более детальная информация об отклонении выходов моделей (8), (9) и реальной высоты полета представлена на рис. 3, а об отклонениях процессов между выходами моделей (8) и (9) – на рис. 4. Видно, что в первом случае за первые 15 с ошибка по модулю не превосходит 0,75 м, т.е. 12 % от изменения высоты полета, а во втором – не превосходит 5 %.

5. Синтез алгоритма управления высотой полета

Предполагая, что динамика двигателя описывается моделью аperiодического звена первого порядка с малой постоянной времени $\tau = 0,05$ с

$$(10) \quad W_s(s) = \frac{1}{\tau s + 1},$$

используем следующий пропорционально-дифференциальный (ПД) регулятор в контуре управления вертикальной скоростью

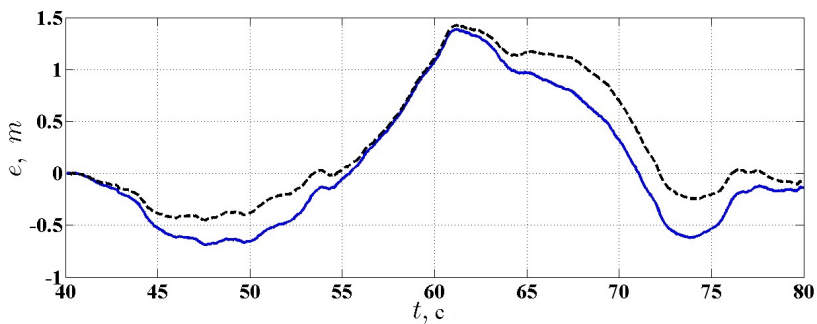


Рис. 3. Графики отклонений выходов моделей (8), (9) от реальной высоты полета

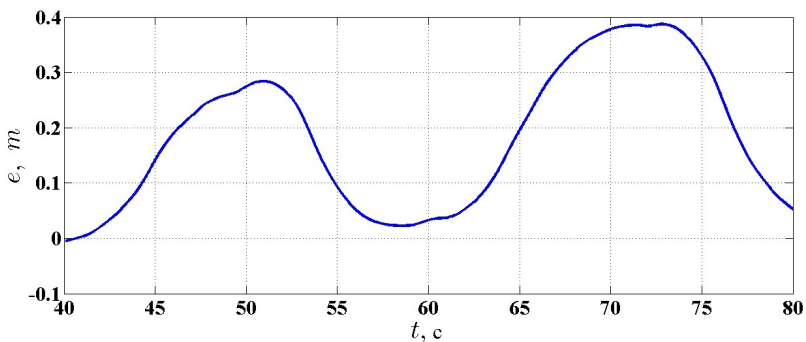


Рис. 4. График отклонений выходов моделей (8) и (9)

полета:

$$(11) \quad W_{PI}(s) = \frac{K_I}{s} + K_P = \frac{K_I(T_1 s + 1)}{s},$$

где K_I, K_P – коэффициенты при интегральной и пропорциональной составляющих сигнала ошибки соответственно; постоянная времени $T_1 = K_P/K_I$.

Основываясь на изложенной в [5] методике, выберем $T_1 = K^{-1} = 3,41$ с. Тогда передаточная функция разомкнутой системы принимает вид

$$(12) \quad W(s) = \frac{K_I K_0}{s(0,05s + 1)},$$

где $K_0 = 0,071$. Теперь выберем K_I так, чтобы выполнить следующее условие (см. [5]):

$$(13) \quad K_I K_0 \tau \leq \frac{M^2 + M\sqrt{M^2 - 1}}{2},$$

где M – показатель колебательности (H_∞ -индекс), который рекомендуется устанавливать в диапазоне $M = 1,1-1,4$ [5]. Выберем $M = 1,2$. Тогда получим

$$(14) \quad K_I \leq 315.$$

Положим $K_I = 16$ с, откуда следует $K_P = K_I T_1 = 54,6$ и найденный ПИ-регулятор (11) имеет передаточную функцию

$$(15) \quad W_{PI}(s) = 54,58 + \frac{16}{s}.$$

Из-за наличия в контуре управления инерционного звена (10), передаточная функция разомкнутой системы принимает вид

$$(16) \quad W_a(s) = \frac{13,6s + 4}{s(s^3 + 20,3s^2 + 28,6s + 6,7)}.$$

6. Процедура кодирования-декодирования данных при передаче по каналу связи

В настоящей работе используется метод *адаптивного* изменения диапазона кодирования в зависимости от текущих данных. Этот метод, первоначально предложенный для кодера без памяти (статического квантователя) в [29], был далее развит для динамических кодеров (кодеры с памятью) [14, 15, 26, 28, 30]. Приведем его краткое описание.

Пусть $\sigma[k]$ – скалярный сигнал, подлежащий передаче по цифровому каналу связи в дискретные моменты времени $t_k = kT$, $k = 0, 1, \dots$ – номер такта передачи данных, $T_0 > 0$ – *интервал дискретности*. Используем следующий *бинарный статический квантователь*

$$(17) \quad q(\sigma, M) = M \operatorname{sign}(\sigma),$$

где параметр M можно назвать *диапазоном квантования*. Выход квантователя

$$(18) \quad \bar{\sigma}[k] = q(\sigma[k], M[k])$$

представляется *однобитовым символом выходного алфавита* и передается по каналу связи. (Тем самым скорость передачи данных по каналу R составляет $1/T$ бит/с.)

Параметр $M[k]$ изменяется согласно следующей процедуре *адаптивного зуминга*:

$$(19) \quad \begin{aligned} \lambda[k] &= (\bar{\sigma}[k] + \bar{\sigma}[k - 1] + \bar{\sigma}[k - 2])/3, \\ M[k + 1] &= m + \begin{cases} \rho M[k], & \text{если } |\lambda[k]| \leq 0,5, \\ M[k]/\rho & \text{иначе,} \end{cases} \\ \lambda[0] &= 0, \quad M[0] = M_0, \end{aligned}$$

где M_0 – начальное значение $M[k]$.

Процедура кодирования-декодирования *полного порядка* использует *встроенный наблюдатель*, построенный по модели источника (генератора) передаваемого сигнала. Основываясь на [16] используем следующую «*кинематическую*» модель источника:

$$(20) \quad \zeta[k + 1] = A\zeta[k], \quad \xi[k] = C\zeta[k], \quad k = 0, 1, \dots,$$

где $\zeta[k] \in \mathbb{R}^2$ – вектор состояния источника, а матрицы A , C имеют вид: $A = \begin{bmatrix} 1 & T_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $C = [1, 0]$.

В дискретном времени наблюдатель для (20) описывается уравнениями:

$$(21) \quad \begin{cases} \hat{\zeta}_1[k+1] = \hat{\zeta}_1[k] + T_0 \hat{\zeta}_2[k] + l_1 \bar{\xi}[k], \\ \hat{\zeta}_2[k+1] = \hat{\zeta}_2[k] + l_2 \bar{\xi}[k], \end{cases}$$

где $\bar{\xi}[k] = q(\xi(t_k) - \hat{\xi}(t_k), M[k])$ – ошибка наблюдения; $\hat{\zeta}_2[k]$ – оценка скорости изменения $\zeta(t)$ в дискретные моменты времени $t_k = kT, k = 0, 1, \dots$; l_1, l_2 – компоненты вектора коэффициентов наблюдателя L . В силу наблюдаемости пары A, C , надлежащим выбором L можно обеспечить любое заданное расположение полюсов матрицы $A - LC$.

Окончательно, алгоритм кодирования с двоичным адаптивным кодером с памятью описывается выражениями (18), (19), (21).

7. Результаты численного исследования динамики формации квадрокоптеров с передачей данных по цифровому каналу

Обратимся теперь к вопросу устойчивости формации квадрокоптеров, динамика каждого из которых описывается передаточной функцией (16). С этой целью применим частотный критерий устойчивости формации работы [24]. В качестве примера рассмотрим граф информационных связей, представленный на рис. 5. Стрелками на графе показаны направления от источника к приемнику информации. Отобразим на комплексной плоскости кривую Найквиста для передаточной функции (16). Как видно из рис. 6, кривая Найквиста при изменении частоты ω от 0 до бесконечности *не охватывает* ни одно из собственных чисел лапласиана для графа связей рис. 5, что свидетельствует об устойчивости формации.

Исследуем теперь влияние процедуры кодирования-декодирования из раздела 6 на поведение формации. Сигнал, поступающий от лидера, квадрокоптера «1» (в рассматриваемом

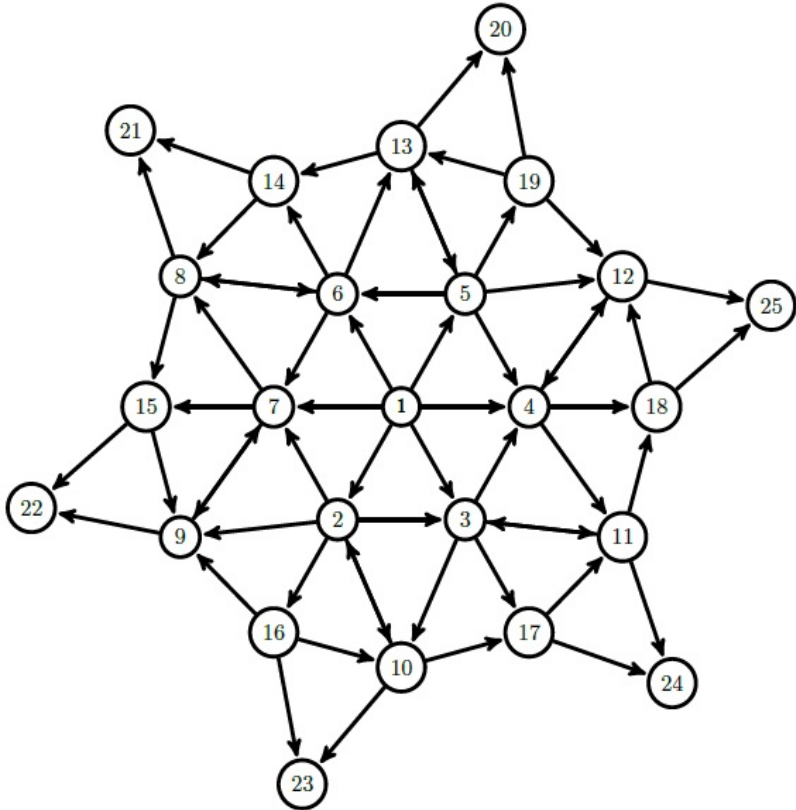


Рис. 5. Граф информационных связей формации из 25 квадрокоптеров

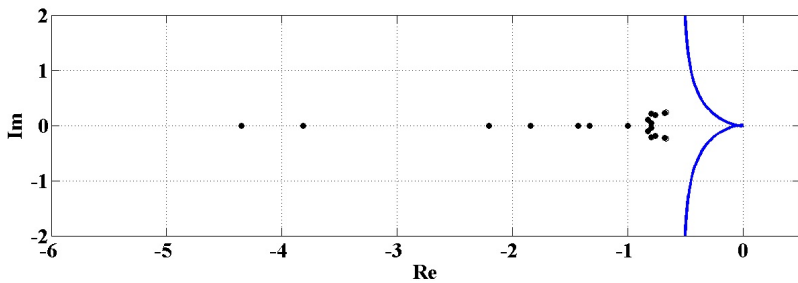


Рис. 6. Кривая Найквиста и собственные числа лапласиана графа информационных связей

случае это высота его полета) кодируется и передается по цифровому каналу связи ведомыми квадрокоптерами, которые обрабатывают этот сигнал, как задающее воздействие. Это соответствует координированному (по высоте) движению группы. Результаты моделирования для скорости передачи данных по каждому каналу $R = 20$ бит/с представлены на рис. 7–8.

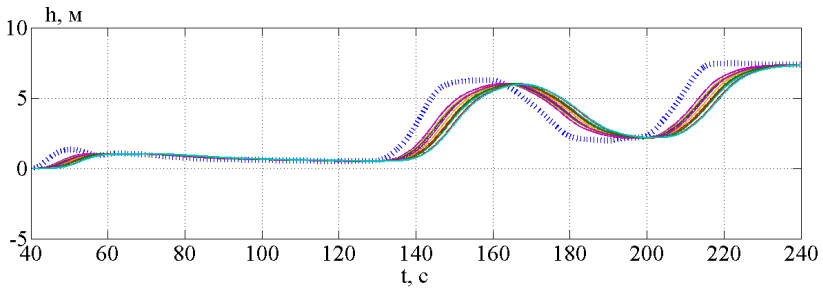


Рис. 7. Отслеживание высоты полета лидера группой квадрокоптеров. Высота полета лидера – пунктирная кривая

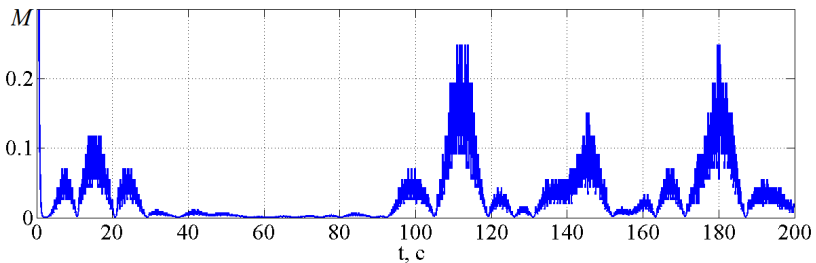


Рис. 8. Адаптивное изменение диапазона кодирования $M[k]$ в канале связи между квадрокоптерами «1» (лидер) и «2» (ведомый)

Работа адаптивного кодера иллюстрируется рис. 8, где в качестве примера показано изменение диапазона кодирования $M[k]$ в канале связи между квадрокоптерами «1» (лидер) и «2» (ведомый). Как видно из графика, диапазон кодирования возрастает на участках с относительно высоким темпом изменения передавае-

мого сигнала, обеспечивая отслеживание его на стороне приемника, и убывает при медленном изменении сигнала, что позволяет повысить точность передачи.

Рис. 9, 10 позволяют сравнить влияние скорости передачи данных по каналу (в битах в секунду) на точность их воспроизведения декодирующим устройством. В качестве примера рассмотрена связь от агента «12» к агенту «25». Видно, что ошибка передачи пренебрежимо мала при $R = 20$ бит/с (рис. 9) и составляет доли метра при $R = 10$ бит/с (рис. 10). Поскольку модули *XBee* позволяют передавать данные со скоростью до $R_{XB} = 250$ бит/с, то для рассматриваемого класса систем указанный диапазон не является ограничительным.

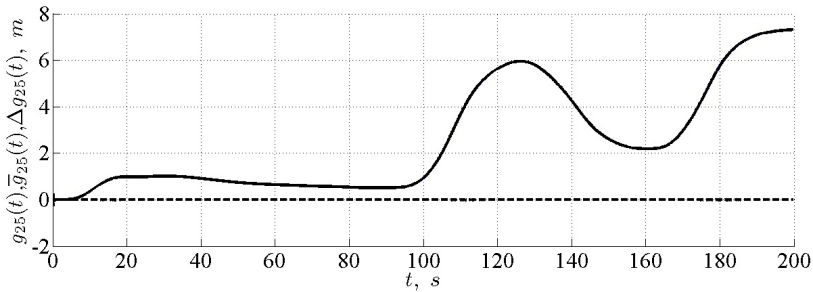


Рис. 9. Вход кодера, выход декодера и ошибка передачи при $R = 20$ bit/s

Согласно результатам работ [14, 15, 26], ошибка передачи данных обратно пропорциональна скорости передачи данных по каналу в битах в секунду R до определенного «порогового» значения, ниже которого она скачком возрастает и процесс передачи данных разрушается. Численно этот результат подтверждается рис. 11, где показана среднеквадратическая ошибка передачи данных от агента «12» к агенту «25» в зависимости от скорости передачи R . Составляющая ошибки процесса слежения, вызванная ошибкой передачи данных $\sigma_{\Delta h}$ в зависимости от R , показана на рис. 12. Данный график получен сравнением результатов моделирования движения ведомого квадрокоптера при точной («с

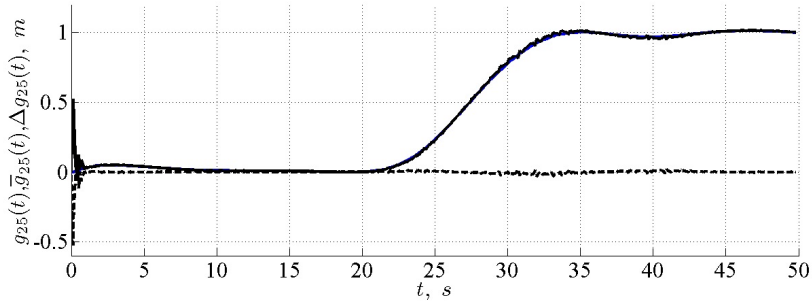


Рис. 10. Вход кодера, выход декодера и ошибка передачи при $R = 0 \text{ bit/s}$.

бесконечной полосой пропускания») передаче данных от ведущего квадрокоптера с движением ведомого при передаче данных через канал связи. Как видно из рисунка, этой величиной можно пренебречь во всем рассмотренном диапазоне R , что говорит о том, что для рассмотренных систем при разумном темпе передачи данных информационные ограничения не являются определяющими.

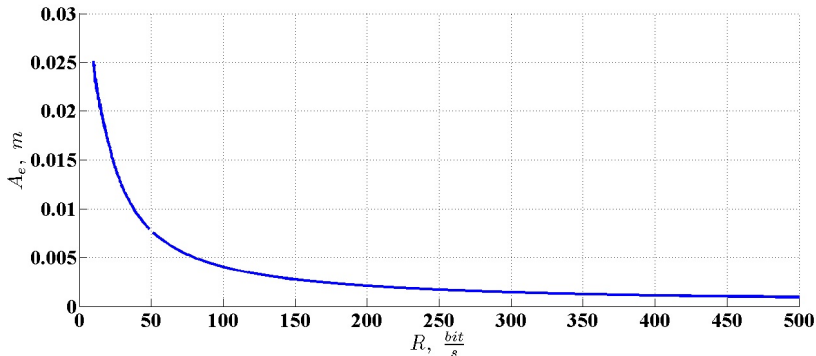


Рис. 11. Среднеквадратическая ошибка $\sigma_{\Delta h, tr}$ передачи данных от агента «12» к агенту «25» в зависимости от R

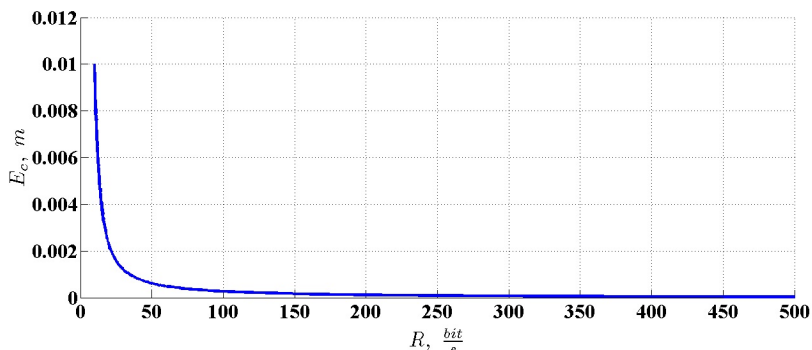


Рис. 12. Среднеквадратическая ошибка $\sigma_{\Delta h}$ отслеживания высоты полета h агентом «25», вызванная кодированием, в зависимости от R

8. Заключение

В статье приведены результаты исследования влияния процесса квантования данных по времени и по уровню на точность передачи данных между квадрокоптерами, движущимися в формации, а также составляющих ошибок слежения за требуемым положением, обусловленных квантованием. Проведена идентификация параметров движения по высоте для экспериментального квадрокоптера комплекса «КвадРой» при хранении результатов испытаний в памяти компьютера, а также при их передаче по цифровому каналу связи. Описана процедура адаптивного кодирования-декодирования данных с динамическим кодером второго порядка и продемонстрирована ее результативность при нестационарности передаваемых сигналов.

В дальнейшем планируется: реализовать адаптивные алгоритмы кодирования-декодирования данных на бортовой аппаратуре квадрокоптеров и провести полетные испытания по исследованию точности и динамики движения формации из четырех квадрокоптеров от пропускной способности канала связи; провести теоретические и экспериментальные исследования по влиянию искажений и потерь данных в каналах связи на характери-

стики движения квадрокоптеров в формации; исследовать возможность применения адаптивных локальных регуляторов для устранения параметрической неопределенности в модели динамики квадрокоптеров.

Литература

1. АМЕЛИНА Н. О. *Мультиагентные технологии, адаптация, самоорганизация, достижение консенсуса* // Стохаст. оптимизация в информатике. – 2011. – Т. 7, №1. – С. 149–185.
2. АНДРИЕВСКИЙ Б. Р., МАТВЕЕВ А. С., ФРАДКОВ А. Л. *Управление и оценивание при информационных ограничениях: к единой теории управления, вычислений и связи* // Автоматика и телемаханика. – 2010. – Т. 4. – С. 34–99.
3. АНДРИЕВСКИЙ Б. Р., СТОЦКИЙ А. А., ФРАДКОВ А. Л. *Алгоритмы скоростного градиента в задачах управления и адаптации* // Автоматика и телемаханика. – 1988. – Т. 12. – С. 3–39.
4. АНДРИЕВСКИЙ Б. Р., ФРАДКОВ А. Л. *Управление и наблюдение через каналы связи с ограниченной пропускной способностью* // Гиропскопия и навигация. – 2009. – №4(67). – С. 103–114.
5. БЕСЕКЕРСКИЙ В. А., ПОПОВ Е. П. *Теория систем автоматического управления*. – СПб.: Профессия, 2003. – 752 с. Изд. 4-е, перераб. и доп.
6. ДЖУНУСОВ И. А., ФРАДКОВ А. Л. *Адаптивная синхронизация сети взаимосвязанных нелинейных систем Лурье* // Автоматика и телемаханика. – 2009. – Т. 7. – С. 111–126.
7. ДЖУНУСОВ И. А., ФРАДКОВ А. Л. *Синхронизация в сетях линейных агентов с обратными связями по выходам* // Автоматика и телемеханика. – 2011. – Т. 8. – С. 41–52.

8. ЛЬЮНГ Л. *Идентификация систем. Теория для пользователя.* – М.: Наука, 1991. – 432 с.
9. *Нелинейные системы. Частотные и матричные неравенства* / Под ред. А.Х. Гелига, Г.А. Леонова, А.Л. Фрадкова. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 608 с.
10. ПРОСКУРНИКОВ А.В. *Частотные критерии консенсуса в многоагентных системах с нелинейными секторными связями* // Автоматика и телемахаика. – 2014. – №11. – С. 110–126.
11. ФУРТАТ И.Б. *Консенсусное управление линейной динамической сетью по выходу с компенсацией возмущений* // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2011. – №4. – С. 12–18.
12. ABDALLAH C., TANNER H. *Complex networked control systems: Introduction to the special section* // IEEE Control Syst. Mag. – 2007. – Vol. 27, No. 4. – P. 3–32.
13. ALTUG E., OSTROWSKI J., MAHONY R. *Control of a quadrotor helicopter using visual feedback* // Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation. – Washington, DC, USA: IEEE Press, 2002. – May. – P. 72–76.
14. ANDRIEVSKY B. *Adaptive coding for transmission of position information over the limited-band communication channel* // Proc. 9th IFAC Workshop Adaptation and Learning in Control and Signal Processing (ALCOSP'2007). – Saint Petersburg: IFAC, 2007. – URL: www.ifac-paperonline.net/Detailed/30266.html.
15. ANDRIEVSKY B., FRADKOV A., PEAUCELLE D. *State estimation over the limited-band communication channel for pitch motion control of LAAS Helicopter benchmark* // Proc. 17th IFAC Symp. Aut. Contr. Aerospace (ACA'2007), Toulouse, France. – IFAC, 2007. – URL: <http://www.ifac-paperonline.net/Detailed/38673.html>.
16. ANDRIEVSKY B., FRADKOV A. L. *Adaptive Coding for Maneuvering UAV Tracking Over the Digital Communication*

- Channel* // Proc. 6th Int. Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops (ICUMT 2014). – St. Petersburg, Russia: IEEE Press, 2014. – October 6–8. – P. 325–330.
17. ANDRIEVSKY B., TOMASHEVICH S. *Passification based signal-parametric adaptive controller for agents in formation* // IFAC-PapersOnLine. – 2015. – Vol. 48, No. 11. – P. 222–226.
 18. BAZZI L., MITTER S. *Encoding complexity versus minimum distance* // IEEE Trans. Inform. Theory. – 2005. – Vol. 51, No. 6. – P. 2103–2112.
 19. BONDARKO V. *Stabilization of linear systems via a two-way channel under information constraints* // Cybernetics and Physics. – 2014. – Vol. 3, No. 4. – P. 157–160.
 20. BROCKETT R., LIBERZON D. *Quantized feedback stabilization of linear systems* // IEEE Trans. Automat. Contr. – 2000. – Vol. 45, No. 7. – P. 1279–1289.
 21. CASTILLO G. P., LOZANO R., DZUL A. E. *Modelling and Control of Mini-Flying Machines. Series: Advances in Industrial Control*. – Springer-Verlag Ltd., 2005.
 22. DAS A., SUBBARAO K., LEWIS F. *Dynamic Inversion of Quadrotor with Zero-Dynamics Stabilization* // Proc. 17th IEEE Int. Conf. on Control Applications, Part of 2008 IEEE Multi-conference on Systems and Control (MSC 2008). – San Antonio, USA: IEEE Press, 2008. – September 3–5.
 23. FANTONI I., LOZANO R. *Non-linear Control for Under-actuated Mechanical Systems. Series: Communications and Control Engineering* / Ed. by E. Sontag, M. Thoma. – London: Springer-Verlag Ltd., 2002.
 24. FAX J., MURRAY R. *Information Flow and Cooperative Control of Vehicle Formations* // IEEE Trans. Automat. Contr. – 2004. – Vol. 8. – P. 1465–1476.
 25. FRADKOV A. *Passification of Nonsquare Linear Systems and Yakubovich-Kalman-Popov Lemma* // Eur. J. Control. – 2003. – Vol. 6. – P. 573–582.

26. FRADKOV A., ANDRIEVSKY B., PEAUCELLE D. *Estimation and control under information constraints for LAAS helicopter benchmark* // IEEE Trans. Contr. Syst. Technol. – 2010. – Vol. 18, No. 5. – P. 1180–1187.
27. FRADKOV A., JUNUSSOV I. *Synchronization of Networks of Linear Systems by Static Output Feedback* // Proc. 50th IEEE Conf. Dec. Contr. (CDC 2011). – Orlando: 2011. – P. 8188–8192.
28. GOMEZ-ESTERN F., CANUDAS DE WIT C., RUBIO F. *Adaptive delta modulation in networked controlled systems with bounded disturbances* // IEEE Trans. Automat. Contr. – 2011. – Vol. 56, No. 1. – P. 129–134.
29. GOODMAN D., GERSHO A. *Theory of an adaptive quantizer* // IEEE Trans. Commun. – 1974. – Vol. COM-22, No. 8. – P. 1037–1045.
30. GOODWIN G., LAU K., CEA M. *Control with communication constraints* // Proc. 12th Int. Conf. on Control Automation Robotics & Vision (ICARCV 2012). – Guangzhou, PRC: IEEE, 2012. – P. 1–10.
31. GOODWIN G., HAIMOVICH H., QUEVEDO D., WELSH J. *A moving horizon approach to networked control system design* // IEEE Trans. Automat. Contr. – 2004. – Vol. 49, No. 9. – P. 1427–1445.
32. ISHII H., FRANCIS B. *Limited Data Rate in Control Systems With Networks*. – New York: Springer-Verlag, 2002. – 180 p.
33. JADBABAIE A., LIN J., MORSE A. S. *Coordination of groups of mobile autonomous agents using nearest neighbour rules* // IEEE Trans. Automat. Contr. – 2003. – Vol. 48. – P. 988–1001.
34. JANUSZ W. C., CZYBA R., SZAFRAŃSKI G. *Model identification and data fusion for the purpose of the altitude control of the VTOL aerial robot* // Proc. 2nd IFAC Workshop on Research, Education and Development of Unmanned Aerial Systems (RED-UAS 2013). – Compiegne, France: IFAC, 2013. – P. 263–269.

35. LEISHMAN J. *Principles of Helicopter Aerodynamics*. 2nd ed. – New York: Cambridge University Press, 2006. – 864 p.
36. LEONARD N. E., FIORELLI E. *Virtual leaders, artificial potentials, and coordinated control of groups* // Proc. 40th IEEE Conf. Decision and Control (CDC 2001). – 2001. – P. 2968–2973.
37. LI Z., REN W., LIU X., FU M. *Distributed containment control of multi-agent systems with general linear dynamics in the presence of multiple leaders* // Int. J. Robust and Nonlinear Control. – 2013. – Vol. 23. – P. 534–547.
38. MATVEEV A., SAVKIN A. *Estimation and Control over Communication Networks*. – Boston: Birkhäuser, 2009. – 533 p.
39. NAIR G., EVANS R., MAREELS I., MORAN W. *Topological feedback entropy and nonlinear stabilization* // IEEE Trans. Automat. Contr. – 2004. – Vol. 49, No. 9. – P. 1585–1597.
40. NAIR G., EVANS R. *Exponential stabilisability of finite-dimensional linear systems with limited data rates* // Automatica. – 2003. – Vol. 39. – P. 585–593.
41. NAIR G., EVANS R., CAINES P. *Stabilising decentralised linear systems under data rate constraints* // Proc. 43rd IEEE Conference on Decision and Control. – Atlantis, Paradise Island, Bahamas: 2004. – P. 3992–3997.
42. NAIR G., FAGNANI F., ZAMPIERI S., EVANS R. *Feedback control under data rate constraints: an overview* // Proc. IEEE. – 2007. – Vol. 95, No. 1. – P. 108–137.
43. NI W., CHENG D. *Leader-following consensus of multi-agent systems under fixed and switching topologies* // Systems & Control Letters. – 2010. – Vol. 59, No. 3–4. – P. 209–217.
44. OLFATI-SABER R., FAX J. A., MURRAY R. M. *Consensus and cooperation in network multi-agent system* // Proceedings of the IEEE. – 2007. – Vol. 95. – P. 215–233.
45. PORFIRI M., ROBERSON D., STILWELL D. *Tracking and formation control of multiple autonomous agents: A two-level consensus approach* // Automatica. – 2007. – Vol. 43, No. 8. –

- P. 1318–1328.
46. REN W., BEARD R. W. *Distributed consensus in multi-vehicle cooperative control*. – London: Springer-Verlag, 2008. – 319 p.
 47. SAVKIN A., CHENG T. *Detectability and output feedback stabilizability of nonlinear networked control systems* // IEEE Trans. Automat. Contr. – 2007. – Vol. 52, No. 4. – P. 730–735.
 48. TATIKONDA S., MITTER S. *Control under communication constraints* // IEEE Trans. Automat. Contr. – 2004. – Vol. 49, No. 7. – P. 1056–1068.
 49. WU Z., GUAN Z., WU X., LI T. *Consensus Based Formation Control and Trajectory Tracing of Multi-Agent Robot Systems* // J. Intelligent and Robotic Systems. – 2007. – Vol. 48, No. 3. – P. 397–410.

DATA EXCHANGE WITH ADAPTIVE CODING BETWEEN QUADROTORS IN THE FORMATION

Konstantin Amelin, Saint Petersburg State University, Cand. Sci.,
Research Assistant (konstantinamelin@gmail.com).

Boris Andrievsky, Institute for Problems of Mechanical
Engineering of the RAS, Saint Petersburg, Doctor of Science,
Leading Research Fellow (boris.andrievsky@gmail.com).

Stanislav Tomashevich, ITMO University, Saint Petersburg, PhD
student, Research Assistant (tomashevich.stanislav@gmail.com).

Alexander L. Fradkov, Institute for Problems of Mechanical
Engineering of the RAS, Saint Petersburg, Doctor of Science,
Professor, Head of the Lab (fradkov@mail.ru).

Abstract: In this paper we study the control dynamics of a group of quadrotors interacting over a network with limited bandwidth and with feedbacks between agents. We investigate how the quantization process affects the accuracy of the data transfer between the quadrotors moving in formation. The parameters of altitude tracking for quadrotor "QuadSwarm" was experimentally identified based on two datasets: first where data records were stored onboard and second where data were transmitted via digital communication link. The adaptive coding procedure with second-order dynamical encoder is presented and numerically studied. The results obtained are compared with the theoretical predictions. The experiments showed the efficacy of the adaptive coding procedure in the case when the transmitted signals are nonstationary.

Keywords: cooperative control, control over communication networks, data transmission, quadrotor, estimation.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии П.В. Пакушиным.

Поступила в редакцию 17.11.2015.

Дата опубликования 31.07.2016.

УДК 519.83+519.86

**ТЕОРЕТИКО-ИГРОВЫЕ МОДЕЛИ
СТИМУЛИРОВАНИЯ ИННОВАЦИЙ
И ИХ ИДЕНТИФИКАЦИЯ
(НА ПРИМЕРЕ ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИКИ)¹**

**Антоненко А. В.², Лошкарев И. В.³, Панков В. С.⁴,
Угольницкий Г. А.⁵**

(Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону)

Рассматриваются теоретико-игровые модели согласования интересов (на примере электроэнергетики). Представлена программная реализация расчетов по моделям. На основе полученных результатов сформированы рекомендации, сделаны выводы о целесообразности ввода счетчиков нового поколения при различных значениях параметров модели.

Ключевые слова: теоретико-игровые модели, электроэнергетический сектор, математическое моделирование, программная реализация.

1. Введение

Цель работы – создание программного комплекса для решения и исследования достаточно простых математических моделей, которые могут быть использованы для решения практических задач мотивационного управления в электроэнергетике, и обсуждение проблем их идентификации.

¹ Работа поддержана РФФИ, проект №15-01-00432а.

² Андрей Валерьевич Антоненко, кандидат технических наук, ассистент (andrei80586@yandex.ru).

³ Илья Витальевич Лошкарев, ассистент (loshkarev.i@gmail.com).

⁴ Владимир Сергеевич Панков, магистр прикладной математики и информатики (+79888987246).

⁵ Геннадий Анатольевич Угольницкий, доктор физико-математических наук, профессор (ougoln@mail.ru).

Математические модели в электроэнергетике представлены в работах [12–14, 16–18]. Взаимодействие субъектов электроэнергетики и согласование их интересов в настоящей статье рассматриваются в рамках теории активных систем [3–5, 10], информационной теории иерархических систем [6–7], теории контрактов [15], теории управления устойчивым развитием активных систем [11].

Основы идентификации математических моделей изложены в эконометрике [8] и теории идентификации [9]. Согласно традиционному подходу, предполагается наличие временных рядов данных, которые обрабатываются с помощью статистических методов.

В работе авторов [1] и предыдущей статье [2] предложен иной подход, который заключается в проведении вычислительных экспериментов для характерных значений параметров моделей. В этом случае можно увидеть зависимость решения от модельных параметров и сформулировать соответствующие рекомендации по управлению.

В работе рассматриваются теоретико-игровые модели; описание программного комплекса и его применение для исследования оптимизационных моделей приведены в статье [2]. Основное внимание здесь вновь уделяется анализу зависимости решений от модельных параметров с помощью программного комплекса.

Практическая значимость работы состоит в создании инструмента для анализа и идентификации параметров моделей стимулирования инноваций в электроэнергетике.

2. Модели стимулирования инноваций в электроэнергетике

2.1. ТЕОРЕТИКО-ИГРОВАЯ МОДЕЛЬ С СИММЕТРИЧНЫМИ ИГРОКАМИ

Рассмотрим игру в нормальной форме с тремя игроками: местный орган управления ($i = 1$), товарищество собственников жилья ($i = 2$) и энергетическая компания ($i = 3$). В целом модель можно записать в следующем виде:

$$(1) \quad g_i(u_1, u_2, u_3) \rightarrow \max, u_i \in U_i, i = 1, 2, 3,$$

где u_i – доля бюджета развития i -го игрока, ассигнуемая на инновации в электроэнергетике; g_i – доход игрока i от этих инноваций. Рассмотрим различные виды функций выигрыша g_i :

1. Степенные функции дохода центра и затрат агента:

$$(2) \quad g_i(u_1, u_2, u_3) = a_i(u_1 + u_2 + u_3)^{\alpha_i} - 0,5 b_i u_i^2,$$

$$a_i > 0, b_i > 0, 0 \leq \alpha_i \leq 1, i = 1, 2, 3.$$

Для нахождения равновесия Нэша необходимо решить систему уравнений

$$(3) \quad \begin{aligned} \frac{\partial g_i(u)}{\partial u_i} &= 0, \\ \frac{\partial g_i(u)}{\partial u_i} &= a_i \alpha_i (u_1 + u_2 + u_3)^{\alpha_i - 1} - b_i u_i, \quad i = 1, 2, 3; \end{aligned}$$

$$\begin{cases} a_1 \alpha_1 (u_1 + u_2 + u_3)^{\alpha_1 - 1} - b_1 u_1 = 0, \\ a_2 \alpha_2 (u_1 + u_2 + u_3)^{\alpha_2 - 1} - b_2 u_2 = 0, \\ a_3 \alpha_3 (u_1 + u_2 + u_3)^{\alpha_3 - 1} - b_3 u_3 = 0. \end{cases}$$

В общем виде требуется численное решение. Упростим модель и рассмотрим частный случай:

$$a_i \equiv a, b_i \equiv b, \alpha_i \equiv \alpha,$$

тогда получаем:

$$a\alpha(3u)^{\alpha-1} = bu,$$

$$bu_1 = bu_2 = bu_3 = bu = a\alpha(3u)^{\alpha-1}, \text{ откуда}$$

$$(4) \quad u^* = \left[\frac{3^{\alpha-1} a \alpha}{b} \right]^{\frac{1}{2-\alpha}}.$$

В безразмерном варианте $a = b = 1$, имеем:

$$(5) \quad u^* = [3^{\alpha-1} \alpha]^{\frac{1}{2-\alpha}}.$$

2. Экспоненциальные функции дохода центра и затрат агента:

$$(6) \quad g_i(u_1, u_2, u_3) = a_i \left(1 - e^{-\alpha_i(u_1 + u_2 + u_3)} \right) - \frac{b_i}{\beta} (e^{\beta u_i} - 1),$$

$$a_i > 0, b_i > 0, \alpha_i \geq 0, \beta_i \geq 0, i = 1, 2, 3.$$

Для нахождения равновесия Нэша необходимо решить систему уравнений

$$\frac{\partial g_i(u)}{\partial u_i} = 0,$$

$$(7) \frac{\partial g_i(u)}{\partial u_i} = a_i \alpha_i e^{-\alpha_i(u_1+u_2+u_3)} - b_i e^{\beta u_i}, \quad i = 1, 2, 3;$$

$$\begin{cases} a_1 \alpha_1 e^{-\alpha_1(u_1+u_2+u_3)} - b_1 e^{\beta u_1} = 0, \\ a_2 \alpha_2 e^{-\alpha_2(u_1+u_2+u_3)} - b_2 e^{\beta u_2} = 0, \\ a_3 \alpha_3 e^{-\alpha_3(u_1+u_2+u_3)} - b_3 e^{\beta u_3} = 0. \end{cases}$$

В общем виде требуется численное решение. Упростим модель и рассмотрим частный случай:

$$a_i \equiv a, \quad b_i \equiv b, \quad \alpha_i \equiv \alpha,$$

тогда получаем $\beta u_1 = \beta u_2 = \beta u_3 = \beta u = \ln\left(\frac{a\alpha}{b}\right) - 3\alpha u$, откуда

$$(8) \quad u^* = \frac{\ln\left(\frac{a\alpha}{b}\right)}{3\alpha + \beta}.$$

В безразмерном варианте $a = b = 1$, имеем:

$$(9) \quad u^* = \frac{\ln(\alpha)}{3\alpha + \beta}.$$

3. Показательные функции дохода центра и затрат агента:

$$(10) \quad g_i(u_1, u_2, u_3) = a_i \left(1 - \alpha_i^{u_1+u_2+u_3}\right) - \frac{b_i}{\ln \beta} (\beta^{u_i} - 1),$$

$$a_i > 0, \quad b_i > 0, \quad 0 < \alpha_i < 1, \quad \beta_i \geq 1, \quad i = 1, 2, 3.$$

Для нахождения равновесия по Нэшу необходимо решить систему уравнений

$$\frac{\partial g_i(u)}{\partial u_i} = 0,$$

$$(11) \quad \frac{\partial g_i(u)}{\partial u_i} = -a_i \ln \alpha_i \alpha_i^{u_1+u_2+u_3} - b_i \beta^{u_i}, \quad i = 1, 2, 3;$$

$$\begin{cases} a_1 \ln \alpha_1 \alpha_1^{u_1+u_2+u_3} + b_1 \beta^{u_1} = 0, \\ a_2 \ln \alpha_2 \alpha_2^{u_1+u_2+u_3} + b_2 \beta^{u_2} = 0, \\ a_3 \ln \alpha_3 \alpha_3^{u_1+u_2+u_3} + b_3 \beta^{u_3} = 0. \end{cases}$$

В общем виде требуется численное решение. Упростим модель и рассмотрим частный случай:

$$a_i \equiv a, \quad b_i \equiv b, \quad \alpha_i \equiv \alpha,$$

тогда получаем

$$(12) \quad 3u \ln \alpha - u \ln \beta = \ln\left(-\frac{b}{a \ln \alpha}\right),$$

откуда

$$(13) \quad u^* = \frac{\ln\left(-\frac{b}{a \ln \alpha}\right)}{3 \ln \alpha - \ln \beta}.$$

В безразмерном варианте $a = b = 1$, имеем:

$$(14) u^* = \frac{\ln\left(-\frac{1}{\ln a}\right)}{3 \ln a - \ln \beta}.$$

Сравнительный анализ приводит к следующим результатам.

Степенные функции дохода центра и затрат агента. Доход центра вдвое больше затрат агента: $a = 20, b = 10; 0 \leq \alpha \leq 1$, шаг по $\alpha = 0,1; 1 \leq \beta \leq 10$, шаг по $\beta = 1$.

Итог: максимум u^* достигается при использовании значений параметров таких, что $2\alpha \geq \beta$, иначе выгодно использовать максимальные возможные значения параметров α и β .

Экспоненциальные функции дохода центра и затрат агента. Затраты агента равны доходу центра: $a = b = 1; 0,2 \leq \alpha \leq 2$, шаг по $\alpha = 0,2; 0,2 \leq \beta \leq 2$, шаг по $\beta = 2$.

Итог: максимум u^* достигается при использовании минимального значения параметра β , при параметре α таком, что $\alpha > \frac{\beta}{2}$ (в общем случае $\alpha > \frac{\beta}{k}$, где $k = b/a$).

Показательные функции дохода центра и затрат агента. Затраты агента равны доходу центра: $a = b = 1; 0,1 \leq \alpha \leq 0,9$, шаг по $\alpha = 0,1; 1 \leq \beta \leq 10$, шаг по $\beta = 1$.

Итог: максимум u^* достигается при использовании значений параметра β , близких к 1 справа и при минимально возможных значениях параметра α .

2.2. ТЕОРЕТИКО-ИГРОВАЯ МОДЕЛЬ ГЕРМЕЙЕРА–ВАТЕЛЯ

Рассмотрим эту модель в иерархической постановке Γ_1 . Первый игрок – компания, устанавливающая энергосберегающие счетчики «Аргус» [2], второй игрок – потребитель (например, ТСЖ). Каждый игрок выбирает, какую часть бюджета потратить на развитие инноваций, причем затраты игроков различаются. Функция общего интереса H характеризует повышение качество обслуживания в сфере энергопотребления, выгодное обоим игрокам (потребителю непосредственно, компании – для увеличения будущих продаж).

$$\begin{aligned} g_1(u_1, u_2) &= aH(u_1, u_2) - b_1u_1 \rightarrow \max, 0 \leq u_1 \leq 1; \\ (15) \quad g_2(u_1, u_2) &= aH(u_1, u_2) - b_2u_2 \rightarrow \max, 0 \leq u_2 \leq 1; \\ & a > 0, b_1 > 0, b_2 > 0. \end{aligned}$$

Здесь u_i – часть бюджета развития, ассигнуемая i -м игроком на развитие инноваций; a – доход игроков при максимальном ассигновании бюджета на развитие инноваций обоими игроками; b_i – затраты i -го игрока при максимальном ассигновании бюджета на инновации.

Рассмотрим функции выигрыша следующего вида: степенные, показательные, экспоненциальные.

1. Степенные функции выигрыша игроков:

$$(16) g_1(u_1, u_2) = a(u_1 + u_2)^\alpha - b_1 u_1 \rightarrow \max, 0 \leq u_1 \leq 1;$$

$$g_2(u_1, u_2) = a(u_1 + u_2)^\alpha - b_2 u_2 \rightarrow \max, 0 \leq u_2 \leq 1;$$

$$0 < \alpha \leq 1, a > 0, b_1 > 0, b_2 > 0.$$

Для нахождения оптимальной реакции ведомого надо решить уравнение (условия второго порядка здесь также выполнены):

$$\frac{\partial g_2}{\partial u_2} = 0,$$

$$(17) \frac{\partial g_2}{\partial u_2} = a\alpha(u_1 + u_2)^{\alpha-1} - b_2,$$

откуда

$$u_2^*(u_1) = \left(\frac{b_2}{a\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} - u_1.$$

Поскольку функция выигрыша ведущего убывает по u_1 :

$$(18) g_1(u_1, u_2^*(u_1)) = a\left(\frac{b_2}{a\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} - b_1 u_1,$$

то:

$$(19) u_1^* = 0, u_2^*(u_1^*) = \left(\frac{b_2}{a\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}.$$

Таким образом, равновесие по Штакельбергу в этой игре:

$$(20) ST_1 = \left\{ \left(0; \left(\frac{b_2}{a\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \right) \right\}.$$

Выигрыши игроков составляют

$$(21) g_1(u_1^*, u_2^*) = a\left(\frac{b_2}{a\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}},$$

$$(22) g_2(u_1^*, u_2^*) = (1 - \alpha)a\left(\frac{b_2}{a\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}.$$

2. Экспоненциальные функции выигрыша игроков:

$$(23) g_1(u_1, u_2) = a(1 - e^{-\alpha(u_1+u_2)}) - b_1 u_1 \rightarrow \max, 0 \leq u_1 \leq 1;$$

$$(24) g_2(u_1, u_2) = a(1 - e^{-\alpha(u_1+u_2)}) - b_2u_2 \rightarrow \max, 0 \leq u_2 \leq 1;$$

$a > 0, \alpha > 0, b_1 > 0, b_2 > 0.$

Для нахождения оптимальной реакции ведомого надо решить уравнение (условия второго порядка здесь также выполнены):

$$\frac{\partial g_2}{\partial u_2} = 0,$$

$$(25) \frac{\partial g_2}{\partial u_2} = a\alpha e^{-\alpha(u_1+u_2)} - b_2,$$

откуда

$$u_2^*(u_1) = \frac{\ln\left(\frac{a\alpha}{b_2}\right)}{\alpha} - u_1.$$

Поскольку функция выигрыша ведущего убывает по u_1 :

$$(26) g_1(u_1, u_2^*(u_1)) = a(1 - e^{-\ln\left(\frac{a\alpha}{b_2}\right)}) - b_1u_1,$$

то

$$(27) u_1^* = 0, u_2^*(u_1^*) = \frac{\ln\left(\frac{a\alpha}{b_2}\right)}{\alpha}.$$

Таким образом, равновесие Штакельберга в этой игре:

$$(28) ST_1 = \left\{ \left(0; \frac{\ln\left(\frac{a\alpha}{b_2}\right)}{\alpha} \right) \right\}.$$

Выигрыши игроков составляют

$$(29) g_1(u_1^*, u_2^*) = a(1 - e^{-\ln\left(\frac{a\alpha}{b_2}\right)}),$$

$$(30) g_2(u_1^*, u_2^*) = a \left(1 - e^{-\ln\left(\frac{a\alpha}{b_2}\right)} \right) - \frac{b_2 \ln\left(\frac{a\alpha}{b_2}\right)}{\alpha}.$$

3. Показательные функции выигрыша игроков:

$$(31) g_1(u_1, u_2) = a(1 - \alpha^{u_1+u_2}) - b_1u_1 \rightarrow \max, 0 \leq u_1 \leq 1;$$

$$g_2(u_1, u_2) = a(1 - \alpha^{u_1+u_2}) - b_2u_2 \rightarrow \max, 0 \leq u_2 \leq 1;$$

$$0 < \alpha < 1, a > 0, b_1 > 0, b_2 > 0.$$

Для нахождения оптимальной реакции ведомого надо решить уравнение (условия второго порядка здесь также выполнены):

$$\frac{\partial g_2}{\partial u_2} = 0,$$

$$(32) \frac{\partial g_2}{\partial u_2} = -a \ln \alpha \alpha^{u_1+u_2} - b_2,$$

откуда

$$\alpha^{u_2} = -\frac{b_2}{a \ln \alpha} \alpha^{-u_1},$$

$$(33) u_2^*(u_1) = \log_{\alpha} \left(-\frac{b_2}{a \ln \alpha} \right) - u_1.$$

Поскольку функция выигрыша ведущего убывает по u_1 :

$$(34) g_1(u_1, u_2^*(u_1)) = \frac{b_2 + a \ln \alpha}{\ln \alpha} - b_1 u_1,$$

то

$$(35) u_1^* = 0, u_2^*(u_1^*) = \log_{\alpha} \left(-\frac{b_2}{a \ln \alpha} \right).$$

Таким образом, равновесие Штакельберга в этой игре:

$$(36) ST_1 = \left\{ \left(0; \log_{\alpha} \left(-\frac{b_2}{a \ln \alpha} \right) \right) \right\}.$$

Выигрыши игроков составляют

$$(37) g_1(u_1^*, u_2^*) = \frac{b_2 + a \ln \alpha}{\ln \alpha},$$

$$(38) g_2(u_1^*, u_2^*) = \frac{b_2}{\ln \alpha} + a - b_2 \log_{\alpha} \left(-\frac{b_2}{a \ln \alpha} \right).$$

2.3. ИЕРАРХИЧЕСКАЯ ТЕОРЕТИКО-ИГРОВАЯ МОДЕЛЬ

Рассмотрим иерархическую игру, в которой первый игрок – ведущий (с правом первого хода), второй – ведомый. Интерпретация та же, что и в предыдущей модели, но теперь Ведущий стремится заинтересовать ведомого во внедрении инноваций, предлагая механизм управления типа Γ_2 . Следуя базовой модели стимулирования [5], можно трактовать u_2 как затраты потребителя на установку счетчиков, а u_1 как компенсацию со стороны компании; g_i – общий доход игрока i от инноваций в ситуации (u_1, u_2) :

$$(39) g_1(u_1, u_2) \rightarrow \max, u_1 \in U_1;$$

$$g_2(u_1, u_2) \rightarrow \max, u_2 \in U_2.$$

Рассмотрим в качестве примера игру:

$$(40) g_1(u_1, u_2) = a_1 u_1 - 0,5 b_1 u_1^2 + c_1 u_2 \rightarrow \max, 0 \leq u_1 \leq 1;$$

$$g_2(u_1, u_2) = a_2 u_2 - 0,5 b_2 u_2^2 + c_2 u_1 \rightarrow \max, 0 \leq u_2 \leq 1,$$

$$a_1 < 0.$$

Для сравнения найдем сначала равновесие Штакельберга в игре Γ_1 :

$$(41) \frac{\partial g_2}{\partial u_2} = a_2 - b_2 u_2 \Rightarrow u_2^* = R_2(u_1) = \frac{a_2}{b_2};$$

$$(42) \frac{\partial g_1(u_1, u_2^*)}{\partial u_1} = a_1 - b_1 u_1 \Rightarrow u_1^* = \frac{a_1}{b_1};$$

$$(43) ST_1 = \left\{ \left(\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2} \right) \right\}.$$

ST_1 является также равновесием Нэша, так как уравнения

$$\frac{\partial g_1}{\partial u_1} = 0, \quad \frac{\partial g_2}{\partial u_2} = 0 \text{ независимы.}$$

Теперь найдем решение игры Γ_2 , используя теорему Гермейера [7]. В нашем примере доминантная стратегия первого игрока есть

$$(44) u_1^D(u_2) \equiv \frac{a_1}{b_1}.$$

Стратегия наказания второго игрока:

$$(45) u_1^P(u_2) \equiv \frac{a_1}{b_1}.$$

Множества:

$$(46) L_2 = \max_{0 \leq u_2 \leq 1} g_2(0, u_2) = g_2\left(0, \frac{a_2}{b_2}\right) = \frac{a_2^2}{2b_2};$$

$$(47) E_2 = \left\{ \left(\frac{a_2}{b_2} \right) \right\};$$

$$(48) D_2 = \{(u_1, u_2) : g_2(u_1, u_2) > L_2\};$$

$$(49) K_2 = g_1(u_1^*, u_2^*) = \frac{a_1^2}{2b_1} + \frac{a_2 c_1}{b_2}.$$

Для нахождения величины K_1 надо решить задачу

$$(50) a_1 u_1 - 0,5 b_1 u_1^2 + c_1 u_2 \rightarrow \max$$

$$(51) \begin{cases} a_2 u_2 - b_2 u_2^2 + c_2 u_2 > \frac{a_2^2}{2b_2}, \\ 0 \leq u_1 \leq 1, 0 \leq u_2 \leq 1. \end{cases}$$

Откуда вновь

$$(52) u_1^* = \frac{a_1}{b_1}, u_2^* = \frac{a_2}{b_2};$$

$$(53) K_1 = \frac{a_2^2}{2b_2} + \frac{a_1 c_2}{b_1}.$$

Так как $E_2 = \{u_2^*\}$, при любом соотношении (K_1, K_2) получаем

$$(54) \tilde{u}_1^*(u_2) = \begin{cases} \frac{a_1}{b_1}, u_2 = \frac{a_2}{b_2}, \\ 0, u_2 \neq \frac{a_2}{b_2}. \end{cases}$$

Таким образом, в данном случае решения игр Γ_1 и Γ_2 совпадают.

3. Программная реализация комплекса

3.1. КРАТКОЕ ОПИСАНИЕ ЯЗЫКА И СРЕДЫ ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Для реализации программного комплекса был выбран язык программирования C#. В качестве среды разработки была выбрана Microsoft Visual Studio 2008.

При решении систем нелинейных алгебраических уравнений использован метод Зейделя (см. Приложение).

3.2. СТРУКТУРА ПРОГРАММНОГО КОМПЛЕКСА

Структура программного комплекса показана на рис. 1.

Разработанная программа состоит из одного окна, на котором расположены четыре вкладки (рис. 2):

- классическая модель стимулирования;
- теоретико-игровая модель с симметричными игроками;
- модель типа Гермейера–Вателя;
- иерархическая теоретико-игровая модель.

Работа с моделью стимулирования описывается в статье [2].

4. Выполнение расчётов и анализ результатов

4.1. РАСЧЕТЫ ПО ТЕОРЕТИКО-ИГРОВОЙ МОДЕЛИ С СИММЕТРИЧНЫМИ ИГРОКАМИ

После проведения расчетов в программном комплексе для моделей со степенными функциями в общем случае и различными значениями параметров $a_i = b_i = 1$, $a_i = 10$, $b_i = 20$, $a_i = 20$, $b_i = 10$ и в случае, когда данные параметры не связаны друг с другом, можно сделать следующие выводы:

1. Относительно особенностей реализации решения методом Зейделя: в силу итерационного решения СНЛАУ при повышении точности при решении каждого следующего из уравнений стало видно, что наиболее точное решение получается для последних итераций. По этой же причине изменение порядка уравнений при решении влияет на погрешность.

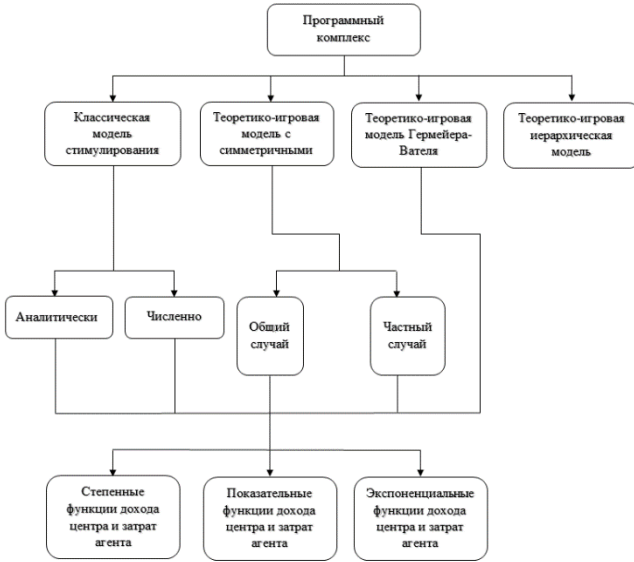


Рис. 1. Структура программного комплекса

Классическая модель стимулирования | Теоретико-игровая модель с симметричными игроками | Модель типа Гермейера - Ватала | Теоретико-игровая иерархическая модель

Выбор типа функций:
 Степенная
 Показательная
 Экспоненциальная

Случай:
 Общий
 Частный

Общий случай:
 Входные параметры модели:
 Значение a1: 1 Значение a2: 2 Значение a3: 3
 Значение b1: 4 Значение b2: 5 Значение b3: 6
 Значение alpha1: 0.8 Значение alpha2: 0.3 Значение alpha3: 0.5
 Значение beta: 1

Решение модели(общий случай):
 Приближение
 u1* = 1 u1* = 0.1605483123 g1* = 0.4819000915
 u2* = 1 u2* = 0.0699820175 g2* = 1.5678783405
 u3* = 1 u3* = 0.2253688286 g3* = 1.8732358227

Частный случай:
 Сетка по a:
 От: 0
 До: 1
 С шагом: 0.1

Построить таблицу оптимальных значений по параметру a

Параметры a и b:
 Значение a: 1
 Значение b: 1
 Оптимальное значение в точке при заданном a:
 Значение a: 0.5
 Оптимум: 0.4367902323

	u*
0	0
0.1	0.1769
0.2	0.251
0.3	0.3133
0.4	0.3736
0.5	0.4368
0.6	0.5072
0.7	0.5898
0.8	0.6914
0.9	0.8223

Описание модели:
 Модель имеет вид:
 $g_i(u_1, u_2, u_3) \rightarrow \max,$
 $u_i \in U_i, i = 1, 2, 3$
 $g_i(u_1, u_2, u_3) =$
 $= a_i(u_1 + u_2 + u_3)^{\alpha_i} - 0.5b_i u_i^2,$
 $a_i > 0, b_i > 0, 0 \leq \alpha_i \leq 1,$
 $i = 1, 2, 3$
 Для нахождения равновесия по Нэшу необходимо решить систему уравнений:
 $\begin{cases} a_1 \alpha_1 (u_1 + u_2 + u_3)^{\alpha_1 - 1} - b_1 u_1 = 0 \\ a_2 \alpha_2 (u_1 + u_2 + u_3)^{\alpha_2 - 1} - b_2 u_2 = 0 \\ a_3 \alpha_3 (u_1 + u_2 + u_3)^{\alpha_3 - 1} - b_3 u_3 = 0 \end{cases}$

Рис. 2. Решение теоретико-игровой модели с симметричными игроками

2. Что касается непосредственно анализа влияния параметров α_i на решение модели, стало понятно, что при равных между собой значениях параметра α_i оптимальные значения u_i^* и выигрыши игроков g_i^* возрастают при росте α_i . При не равных между собой значениях параметров α_i наблюдается та же тенденция. Влияние параметра α_i на решение не зависит от выбора параметров a_i и b_i . Основываясь на этом, можно сказать, что максимальные значения u_i^* и g_i^* достигаются при максимальных значениях параметров α_i .

3. Также можно заключить, что решение модели растёт по параметрам a_i и убывает по параметрам b_i .

При решении модели с показательными функциями в общем случае были рассмотрены варианты со значениями параметров, представленными в таблице 1.

Таблица 1. Варианты значений рассматриваемых модельных параметров

Значения модельных параметров		
$a_i = 1$	$b_i = 1$	$\alpha_i = 0,1$
$a_i = 1$	$b_i = 1$	$\alpha_i = 0,3$
$a_i = 1$	$b_i = 1$	$\alpha_i = 0,5$
$a_i = 1$	$b_i = 1$	$\alpha_i = 0,7$
$a_i = 1$	$b_i = 1$	$\alpha_i = 0,9$
$a_i = 10$	$b_i = 20$	$\alpha_i = 0,1$
$a_i = 10$	$b_i = 20$	$\alpha_i = 0,3$
$a_i = 10$	$b_i = 20$	$\alpha_i = 0,5$
$a_i = 10$	$b_i = 20$	$\alpha_i = 0,7$
$a_i = 10$	$b_i = 20$	$\alpha_i = 0,9$
$a_i = 20$	$b_i = 10$	$\alpha_i = 0,1$

Анализируя полученные результаты, получаем, что по параметру β решение модели u_1^* и u_3^* стремится от $+\infty$ к $-\varepsilon$, а u_2^* стремится от $-\infty$ к $-\varepsilon$, где $\varepsilon < 1$; при этом стремится неравномерно, то возрастая локально, то убывая. При росте параметров α_i решение модели сходится к 0 при меньших значениях параметра β .

Для модели общего вида с показательным видом функций имеет место проблема выхода решения за пределы области допустимых значений переменных. В данном случае полагалось, что

$$(55) u^* = \begin{cases} 0, u^* < 0, \\ u^*, 0 \leq u^* \leq 1, \\ 1, u^* > 1. \end{cases}$$

Наименее заметна эта проблема в случае, когда $a_i > b_i$. Результаты расчетов модели с показательными функциями в общем виде представлены в таблице 2.

Таблица 2. Результаты расчетов по модели с показательными функциями в общем случае; $a_i = b_i = 1$; $\alpha_i = 0,3$

№ п./п.	1	2	3	4	5	6	7	
Входные параметры модели	a_1	1	1	1	1	1	1	1
	a_2	1	1	1	1	1	1	1
	a_3	1	1	1	1	1	1	1
	b_1	1	1	1	1	1	1	1
	b_2	1	1	1	1	1	1	1
	b_3	1	1	1	1	1	1	1
	α_1	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3
	α_2	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3
	α_3	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3
	β	1,5	2	2,5	3	3,5	4	5
Решение модели	u_1^*	1,793	0,275	-0,096	-0,245	-0,32	-0,362	-0,404
	u_2^*	-3,234	-0,029	0,161	0,133	0,083	0,039	-0,027
	u_3^*	6,667	0,195	0,08	0,096	0,099	0,092	0,067
	g_1^*	-0,323	0,129	0,252	0,241	0,197	0,146	0,078
	g_2^*	0,91	0,432	0,078	0,098	0,109	0,105	0,078
	g_3^*	-0,323	0,223	0,169	0,139	0,091	0,047	0,006

В случае экспоненциальных функций проводились расчеты со значениями параметров, представленными в таблице 3.

Можно сказать, что решение модели убывает по параметрам β и b_i , растёт по параметрам a_i , а по параметрам α_i сначала растёт, а затем убывает.

Таблица 3. Значения параметров рассчитываемых моделей

Значения модельных параметров	
$a_i = 1$	$b_i = 1$
$a_i = 10$	$b_i = 20$
$a_i = 20$	$b_i = 10$

Анализ результатов расчетов степенных функций в частном случае показывает, что u^* возрастает по параметрам a , α и убывает по параметру b .

Проанализировав данные расчетов показательных функций со значениями параметров $a = b = 1$, $a = 10$, $b = 20$, $a = 20$, $b = 10$, получаем, что в случае, когда $a \leq b$, значение u^* убывает по параметрам α и β . В случае же, когда $a > b$, значение u^* убывает по параметру β , а по параметру α сначала возрастает, а затем убывает (в случае $a = 20$, $b = 10$, $\beta = 1$, возрастает до значения $\alpha = 0,3$).

Для экспоненциальных функций в частном случае со следующими значениями параметров $a = b = 1$, $a = 10$, $b = 20$, $a = 20$, $b = 10$, значение $u^* > 0$ в случае, когда $a > b$, иначе положительные значения u^* достигаются лишь при недопустимых значениях параметра α : $\alpha > 1$. Значение u^* возрастает по параметру α и убывает по параметру β .

4.2. РАСЧЕТЫ ПО МОДЕЛИ ТИПА ГЕРМЕЙЕРА–ВАТЕЛЯ

Для данной модели также были проведены расчеты для степенных, показательных и экспоненциальных функций. Для степенных функций расчеты проводились при значениях параметров $a = b_2 = 1$, $0 \leq \alpha \leq 1$. Проанализировав данные, можно сказать, что значение u^* возрастает по параметру α , выигрыш 1-го игрока g_1^* убывает, не считая крайнего значения параметра $\alpha = 1$, а выигрыш 2-го игрока g_2^* убывает на всём интервале по α .

При значениях параметров $a = 10$, $b_2 = 20$, $0 \leq \alpha \leq 1$, шаг по $\alpha = 0,1$, значение u^* сначала возрастает по параметру α до значения $\alpha = 0,4$, а затем убывает. Выигрыши 1-го и 2-го игроков g_1^* , g_2^* убывают по параметру α (не считая граничного значения параметра $\alpha = 1$). В случае, когда значения параметров равны

$a = 20, b_2 = 10$, значение u^* возрастает по параметру α , а выигрыши 1-го и 2-го игроков g_1^*, g_2^* сначала убывают, а затем возрастают.

Были рассмотрены показательные функции. В случае значений параметров $a = b_2 = 1$, значение u^* убывает по параметру α , как и выигрыши 1-го и 2-го игроков g_1^*, g_2^* . Если значения параметров $a = 10, b_2 = 20; 0 \leq \alpha \leq 1$, шаг по $\alpha = 0,1$ то u^* убывает по параметру α , как и выигрыши 1-го и 2-го игроков g_1^*, g_2^* . Когда параметры принимают значения $a = 20, b_2 = 10$, то u^* убывает по параметру α , как и выигрыши 1-го и 2-го игроков g_1^*, g_2^* .

В случае экспоненциальных функций и значений параметров: $a = b_2 = 1$, u^* возрастает по параметру α , как и выигрыши 1-го и 2-го игроков g_1^*, g_2^* . Если значения параметров принять равными: $a = 10, b_2 = 20; 0 \leq \alpha \leq 1$, шаг по $\alpha = 0,1$, то u^* возрастает по параметру α , как и выигрыши 1-го и 2-го игроков g_1^*, g_2^* . При значениях, равных: $a = 20, b_2 = 10; 0 \leq \alpha \leq 1$, шаг по $\alpha = 0,1$, u^* возрастает по параметру α , как и выигрыши 1-го и 2-го игроков g_1^*, g_2^* .

5. Заключение

В статье проведён анализ решений ряда тестовых примеров для теоретико-игровых моделей стимулирования инноваций (на примере электроэнергетики). Подчеркнем, что основная цель работы состояла в изучении влияния модельных параметров на решения.

В этой связи можно заключить, что рассмотренные классы моделей описывают качественно различные ситуации. Например, частный случай теоретико-игровой модели с симметричными игроками с экспоненциальным видом функций описывает ситуацию, в которой установка интеллектуальных счётчиков оправдана лишь в случае, когда доход от инноваций каждого из органов управления трёх уровней превышает затраты на внедрение инноваций органа соответствующего уровня управления.

Тем самым решение задачи идентификации теоретико-игровых моделей совмещается с параметрическим исследованием чувствительности решения модели.

6. Приложение

Алгоритм метода Зейделя:

1. Задать начальное приближение $x^{(0)}$ и малое положительное число ε (точность), положить $k = 0$.
2. Вычислить $x^{(k+1)}$, пользуясь значениями, полученными для предыдущих уравнений на текущей итерации.
3. Если $\Delta^{(k+1)} = \max_i |x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}| \leq \varepsilon$, то процесс завершить и положить $x^* = x^{(k+1)}$, иначе $k = k + 1$ и перейти к п. 2.

Теорема Гермейера [7]. Пусть функции выигрыша первого и второго игроков $M_1(x_1, x_2)$, $M_2(x_1, x_2)$ непрерывны на компактах X_1, X_2 (множествах допустимых управлений игроков). Введем следующие функции: стратегию наказания игрока 2 $x_1^P(x_2)$ по правилу $M_2(x_1^P, x_2) = \min_{x_1 \in X_1} M_2(x_1, x_2)$ и доминантную стратегию игрока 1 $x_1^D(x_2)$, которая удовлетворяет условию $M_1(x_1^D, x_2) = \max_{x_1 \in X_1} M_1(x_1, x_2)$. Кроме того, введем величины и множества:

$$(56) L_2 = \max_{x_2 \in X_2} M_2(x_1^P(x_2), x_2);$$

$$(57) E_2 = \{x_2 \in X_2 : M_2(x_1^P(x_2), x_2) = L_2\};$$

$$(58) D_2 = \{(x_1, x_2) : X_1 \times X_2 : M_2(x_1, x_2) > L_2\};$$

$$(59) K_1 = \sup_{(x_1, x_2) \in D_2} M_1(x_1, x_2) \leq M_1(x_1^\varepsilon, x_2^\varepsilon) + \varepsilon,$$

$$(D_2 \neq \emptyset \Rightarrow K_1 = -\infty);$$

$$(60) K_2 = \min_{x_2 \in E_2} \max_{x_1 \in X_1} M_1(x_1, x_2).$$

Тогда гарантированный выигрыш игрока 1 (ведущего) в игре Γ_2 (игре, в которой первый игрок имеет информацию о выборе второго игрока) равен $w_1 = \max(K_1, K_2)$, а соответствующая ε -оптимальная гарантирующая стратегия имеет вид

$$(61) \tilde{x}_1^\varepsilon(x_2) = \begin{cases} x_1^\varepsilon, & x_2 = x_2^\varepsilon, K_1 > K_2, \\ x_1^D(x_2), & x_2 \in D_2, K_1 \leq K_2, \\ x_1^P(x_2) & \text{иначе.} \end{cases}$$

Вид систем нелинейных алгебраических уравнений, решаемых методом Зейделя:

1. Степенные функции:

$$(62) u_1^{(k+1)} = \frac{a_1 a_1 (u_1^{(k)} + u_2^{(k)} + u_3^{(k)})^{\alpha_1 - 1}}{b_1};$$

$$(63) u_2^{(k+1)} = \frac{a_2 a_2 (u_1^{(k+1)} + u_2^{(k)} + u_3^{(k)})^{\alpha_2 - 1}}{b_2};$$

$$(64) u_3^{(k+1)} = \frac{a_3 a_3 (u_1^{(k+1)} + u_2^{(k+1)} + u_3^{(k)})^{\alpha_3 - 1}}{b_3}.$$

2. Экспоненциальные функции:

$$(65) u_1^{(k+1)} = \frac{\ln\left(\frac{a_1 a_1}{b_1}\right) - \alpha_1 (u_1^{(k)} + u_2^{(k)} + u_3^{(k)})}{\beta};$$

$$(66) u_2^{(k+1)} = \frac{\ln\left(\frac{a_2 a_2}{b_2}\right) - \alpha_2 (u_1^{(k+1)} + u_2^{(k)} + u_3^{(k)})}{\beta};$$

$$(67) u_3^{(k+1)} = \frac{\ln\left(\frac{a_3 a_3}{b_3}\right) - \alpha_3 (u_1^{(k+1)} + u_2^{(k+1)} + u_3^{(k)})}{\beta}.$$

3. Показательные функции:

$$(68) u_1^{(k+1)} = \log_{\beta} \left(-\frac{a_1 \ln a_1}{b_1} \right) + \log_{\beta} (a_1) (u_1^{(k)} + u_2^{(k)} + u_3^{(k)});$$

$$(69) u_2^{(k+1)} = \log_{\beta} \left(-\frac{a_2 \ln a_2}{b_2} \right) + \log_{\beta} (a_2) (u_1^{(k+1)} + u_2^{(k)} + u_3^{(k)});$$

$$(70) u_3^{(k+1)} = \log_{\beta} \left(-\frac{a_3 \ln a_3}{b_3} \right) + \log_{\beta} (a_3) (u_1^{(k+1)} + u_2^{(k+1)} + u_3^{(k)}).$$

Литература

1. АНТОНЕНКО А.В., УГОЛЬНИЦКИЙ Г.А. *Модели мотивационного управления в электроэнергетике и проблемы их идентификации* // Управление большими системами. – 2014. – №47. – С. 92–124.
2. АНТОНЕНКО А.В., ЛОШКАРЕВ И.В., ПАНКОВ В.С. И ДР. *Решение задачи стимулирования инноваций в электроэнергетике. Ч.1. Оптимизационные модели* // Управление большими системами. – 2015. – №58. – С. 144–160.
3. БУРКОВ В.Н., НОВИКОВ Д.А. *Теория активных систем: состояние и перспективы*. – М., 1999. – 128 с.
4. БУРКОВ В.Н., ГУБКО М.В., НОВИКОВ Д.А. *Организационные механизмы управления в электроэнергетике* // Управление развитием крупномасштабных систем. – М.: Издательство физико-математической литературы, 2012. – С. 261–278.

5. БУРКОВ В.Н., КОРГИН Н.А., НОВИКОВ Д.А. *Введение в теорию управления организационными системами*. – М.: Книжный дом "ЛИБРОКОМ", 2009. – 264 с.
6. ГЕРМЕЙЕР Ю.Б., ВАТЕЛЬ И.А. *Игры с иерархическим вектором интересов* // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. – 1974. – №3. – С. 54–69.
7. ГОРЕЛИК В.А., ГОРЕЛОВ М.А., КОНОНЕНКО А.Ф. *Анализ конфликтных ситуаций в системах управления*. – М.: Радио и связь, 1991. – 288 с.
8. ДОУГЕРТИ К. *Введение в эконометрику*. – М.: ИНФРА-М, 1999. – 416 с.
9. ЛЬЮНГ Л. *Идентификация систем. Теория для пользователя*. – М.: Наука, 1991. – 432 с.
10. НОВИКОВ Д.А. *Теория управления организационными системами*. – М.: МПСИ, 2005. – 584 с.
11. УГОЛЬНИЦКИЙ Г.А. *Управление устойчивым развитием активных систем*. – Ростов-на-Дону: Издательство ЮФУ, 2016. – 940 с.
12. BAYON L., SUAREZ P., MATIAS J.M. AND ETC. *Influence of forecasting electricity prices in the optimization of complex hydro-thermal systems* // J. of Computational and Applied Mathematics. – 2009. – No. 232. – P. 262–274.
13. FOLEY A.M., GALLACHOIR B.P., HUR J. ET AL. *A strategic review of electricity systems markets* // Energy. – 2010. – No. 35. – P. 4533–4530.
14. HASANI M., HOSSEINI S.H. *Dynamic assessment of capacity investment in electricity market considering complementary capacity mechanisms* // Energy. – 2011. – No. 36. – P. 277–293.
15. LAFFONT J.-J., MARTIMORT D. *The Theory of Incentives. The Principal-Agent Model*. – Princeton, 2002. – 380 p.
16. MIRZA F.M., BERGLAND O. *The impact of daylight saving time on electricity consumption: Evidence from southern Norway and Sweden* // Energy Policy. – 2011. – No. 39. – P. 5008–5025.
17. SHI L., ZENG M., Li L. *A Novel Electricity Marketing Model Integrating Intelligent Disaster-Recovery System* // Systems Engineering Procedia. – 2012. – No. 4. – P. 133–142.

18. STADLER M., KRAUSE W., SONNENSCHNEIN M. ET AL. *Modelling and evaluation of control schemes for enhancing load shift of electricity demand for cooling devices // Environmental Modelling and Software.* – 2009. – No. 24. – P. 285–295.

GAME THEORETIC MODELS OF MOTIVATION OF INNOVATIONS AND THEIR IDENTIFICATION (ON THE EXAMPLE OF THE ELECTRICITY POWER INDUSTRY).

Andrey Antonenko, Southern Federal University, Rostov-on-Don, Ph.D., Assistant (andrei80586@yandex.ru)

Ilya Loshkarev, Southern Federal University, Rostov-on-Don, Assistant (loshkarev.i@gmail.com)

Vladimir Pankov, Rostov-on-Don, M.Sc. (+79888987246)

Gennady Ugolnitsky, Southern Federal University, Rostov-on-Don, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor (ougoln@mail.ru)

Abstract: The article deals with game theoretic models of coordination of interests in the power industry. We consider the problem of multi-tariff electricity meters integration. Four game-theoretic models catching different aspects of the problem are investigated. The players represent local authorities, electricity consumers and power generating company. We developed software simulation toolbox implementing these models. The software can be used to specify parameters of the games and obtain numerical solutions. The results of software simulation are presented and interpreted. Recommendations and conclusions about the feasibility of new-generation electricity meters integration can be given based on the simulation results.

Keywords: game theoretic models, electric power industry, hierarchical games, software simulation.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии М.И. Гераскиным.

Поступила в редакцию 15.01.2015.

Опубликована 31.07.2016.