

Институт проблем управления  
им. В.А. Трапезникова РАН

# УПРАВЛЕНИЕ БОЛЬШИМИ СИСТЕМАМИ

*Выпуск 63*  
*Сентябрь 2016*

**СБОРНИК  
ТРУДОВ**

ISSN 1819-2467

Регистрационный номер Эл. №ФС77-44158 от 09 марта 2011 г.

Москва – 2016

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
*Институт проблем управления*  
*им. В.А. Трапезникова*

**УПРАВЛЕНИЕ  
БОЛЬШИМИ  
СИСТЕМАМИ**

**СБОРНИК ТРУДОВ**

*Выпуск 63*

**Москва – 2016**

### КООРДИНАЦИОННЫЙ СОВЕТ

Академики РАН: Васильев С.Н., Емельянов С.В., Куржанский А.Б., Федосов Е.А., Черноушко Ф.Л.; члены-корреспонденты РАН: Желтов С.Ю., Каляев И.А., Пархоменко П.П., Попков Ю.С.; д-ра техн. наук: Дорофеев А.А., Кузнецов О.П., Кульба В.В., Лотоцкий В.А., Павлов Б.В., Поляк Б.Т., Рутковский В.Ю.

### РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

**Главный редактор:** член-корр. РАН Новиков Д.А. **Зам. главного редактора:** д-р физ.-мат. наук Губко М.В. **Отв. секретарь:** канд. техн. наук Базенков Н.И. **Редактор:** канд. техн. наук Квинто Я.И. **Техн. редактор:** канд. техн. наук Куливец С.Г.

Д-ра техн. наук: проф. Алескеров Ф.Т. (ГУ ВШЭ), проф. Алчинов А.И. (ИПУ РАН), проф. Андриевский Б.Р. (ИПМ РАН), проф. Афанасьев В.Н. (МИЭМ), проф. Бахтадзе Н.Н. (ИПУ РАН), проф. Бурков В.Н. (ИПУ РАН), проф. Вишневский В.М. (ИПУ РАН), Галаев А.А. (ИПУ РАН), д-р физ.-мат. наук проф. Ерешко Ф.И. (ВЦ РАН), д-ра техн. наук Зоркальцев В.И. (ИСЭМ СО РАН), проф. Калашников А.О. (ИПУ РАН), проф. Калянов Г.Н. (ГУ ВШЭ), проф. Каравай М.Ф. (ИПУ РАН), д-р экон. наук, проф. Ключков В.В. (ИПУ РАН), д-ра техн. наук, Коргин Н.А. (ИПУ РАН), проф. Лазарев А.А. (МФТИ), д-ра техн. наук: проф. Лебедев В.Г. (ИПУ РАН), проф. Мандель А.С. (ИПУ РАН), д-р биол. наук проф. Михальский А.И., д-р физ.-мат. наук, проф. Непейвода Н.Н. (ИПС РАН), д-р экон. наук, проф. Нижегородцев Р.М. (ИПУ РАН), д-ра техн. наук: проф. Орлов А.И. (МГТУ), д-ра физ.-мат. наук: проф. Рапопорт Л.Б. (ИПУ РАН), проф. Райгородский А.М. (МГУ), проф. Савватеев А.В. (РЭШ), д-ра техн. наук: проф. Самуйлов К.Е. (РУДН), проф. Сидельников Ю.В. (МАИ), Совлуков А.С. (ИПУ РАН) д-ра физ.-мат. наук: проф. Соловьев С.Ю. (МГУ), проф. Угольницкий Г.А. (ЮФУ), проф. Уткин В.А. (ИПУ РАН), проф. Хоботов Е.Н. (МГТУ), д-ра физ.-мат. наук: доцент Чеботарев П.Ю. (ИПУ РАН), проф. Чхартишвили А.Г. (ИПУ РАН), проф. Щербаков П.С. (ИПУ РАН).

### РЕГИОНАЛЬНЫЕ РЕДАКЦИОННЫЕ СОВЕТЫ

**Арзамас** – д-р физ.-мат. наук проф. Пакшин П.В. **Волгоград** – д-ра физ.-мат. наук: проф. Воронин А.А., проф. Лосев А.Г. (ВолГУ); **Воронеж** – д-р техн. наук, проф. Баркалов С.А., д-р физ.-мат. наук, проф. Головинский П.А. (ВГАСУ), д-р техн. наук, проф. Подвальный С.Л. (ВГТУ); **Иркутск** – академик РАН Бычков И.В., д-р физ.-мат. наук, проф. Лакеев А.В. (ИДСТУ СО РАН); **Казань** – д-р физ.-мат. наук, проф. Маликов А.И., д-р техн. наук, проф. Сиразетдинов Р.Т. (КГТУ-КАИ); **Липецк** – д-ра техн. наук: проф. Погодаев А.К., Сараев П.В. (ЛГТУ); **Самара** – д-ра экон. наук: проф. Богатырев В.Д., проф. Гераськин М.И., д-р техн. наук, проф. Засканов В.Г. (СГАУ); **Петрозаводск** – д-р физ.-мат. наук, проф. Мазалов В.В., д-р техн. наук, доц. Печников А.А. (ИПМИ КарНЦ РАН); **Санкт-Петербург** – д-р физ.-мат. наук: проф. Петросян Л.А. (СПбГУ), д-р техн. наук проф. Фуртат И.Б. (ИПМ РАН); **Старый Оскол** – д-р техн. наук, проф. Еременко Ю.И. (СТИ).

**Адрес редакции:** 117997, г. Москва, ул. Профсоюзная, д. 65.

**Адрес в Интернете:** [ubs.mtas.ru](http://ubs.mtas.ru).

## СОДЕРЖАНИЕ

### *Системный анализ*

---

**Скороходов В. А.**

*Задача нахождения порогового значения в эргодической ресурсной сети* ..... 6

### *Математическая теория управления*

---

**Железнов К. О.**

*Решение задачи анализа с возмущением во входе и выходе*..... 24

### *Сетевые модели в управлении*

---

**Тихонов А. В.**

*Анализ структуры сети Интернет с помощью обобщенных маршрутов* ..... 38

### *Управление в социально-экономических системах*

---

**Барабанов И. Н., Новиков Д. А.**

*Динамические модели управления возбуждением толпы в непрерывном времени* ..... 71

**Горелов М. А.**

*Иерархические игры со случайными факторами* ..... 87

**Рогаткин А. Д.**

*Оценка вероятности редких событий в поведении толпы* ..... 106

***Управление техническими системами  
и технологическими процессами***

---

**Лазарев А. А., Бронников С. В.,  
Герасимов А. Р. и др.**

*Математическое моделирование планирования  
подготовки космонавтов.....* 129

***Управление подвижными объектами и навигация***

---

**Белявский А. О., Томашевич С. И.**

*Синтез адаптивной системы управления  
квадрокоптером методом пассивации.....* 155



УДК 519.1  
ББК 78.34

## ЗАДАЧА НАХОЖДЕНИЯ ПОРОГОВОГО ЗНАЧЕНИЯ В ЭРГОДИЧЕСКОЙ РЕСУРСНОЙ СЕТИ

Скороходов В. А.<sup>1</sup>

(Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону)

*Рассмотрена задача поиска порогового значения в эргодической ресурсной сети. Показано, что данная задача сводится к решению системы уравнений, описывающей закономерности перераспределения ресурса для каждой вершины сети. Разработан алгоритм сложности  $O(n^3)$  нахождения порогового значения в произвольной эргодической ресурсной сети.*

Ключевые слова: эргодическая ресурсная сеть, пороговое значение, предельное состояние, распределение потока.

### **Введение**

Ресурсные сети – динамические графовые модели распространения ресурса – введены и достаточно хорошо изучены в работах О. П. Кузнецова и Л. Ю. Жиликовой (см., например, [5, 7]). Ресурсная сеть – это сеть, для каждой дуги которой указана пропускная способность, а для каждой вершины – величина находящегося в ней ресурса. В каждый момент дискретного времени ресурс каждой вершины перераспределяется между смежными с ней вершинами по определённым правилам. Таким образом, между каждыми последовательными моментами времени по дугам сети проходит поток. При этом правила функционирования сети таковы, что обязательно выполняются два условия. Первое – это условие замкнутости сети, т.е. ресурс ни в какой вершине сети не добавляется извне и не исчезает. Второе – условие неразрывно-

---

<sup>1</sup> Владимир Александрович Скороходов, кандидат физико-математических наук, доцент (pdvaskor@yandex.ru).

сти: ресурс, выходящий из вершины, вычитается из ее ресурса, а входящий в вершину – прибавляется к ее ресурсу.

Поскольку ресурс перераспределяется между вершинами в некоторой пропорции, то задача предельного распределения ресурса в сети схожа как с задачей поиска сбалансированного потока, рассмотренной в статье [2], так и с задачами о распределении потока, рассмотренными в статье [9]. Остановимся подробнее на указанных работах.

В статье [2] рассмотрена модель произвольной ориентированной сети с неограниченными пропускными способностями дуг, каждая из вершин которой производит некоторый поток ресурса. Предполагается, что время дискретно и на любом временном шаге каждая вершина распределяет пришедший в нее поток по исходящим дугам в заданной пропорции. Поток, пришедший в каждую вершину-сток, поглощается полностью. В статье [2] доказано, что в случае, когда каждая из вершин графа связана путем со стоком, при любом наборе величин производимого в вершинах потока существует единственный «сбалансированный» поток. Также приведены аналитические формулы для вычисления предельного потока.

В статье [9] рассмотрены задачи о максимальном потоке в произвольной ориентированной сети, для каждой дуги которой вместе с пропускной способностью задана вторая величина – доля приходящего в её начальную вершину потока, которая должна быть пропущена по этой дуге. Рассмотрены два вида такого распределения потока: жёсткое и нежёсткое. В случае жёсткого распределения приходящий в некоторую вершину поток распределяется по выходящим дугам строго в указанных для дуг долях. В случае нежёсткого распределения приходящий в некоторую вершину поток распределяется по выходящим дугам таким образом, чтобы долевая пропорциональность величин потока выполнялась только для тех дуг, на которых полученная величина потока меньше пропускной способности. Последнее означает, что в некоторых случаях нежёстко распределённый поток, приходящий в некоторую вершину, можно «продать» по выходя-

щим дугам помимо того, что проходит через данную вершину при условии жёсткого распределения.

В статье [4] доказано, что в регулярных сетях существует единственное пороговое значение ресурса, т.е. такое значение, что при величине суммарного ресурса, не превосходящем его, процессы перераспределения ресурса в сети эквивалентны процессам случайного блуждания на графе. Однако процесс нахождения порогового значения методами, описанными в работах [4]–[6], представляется довольно затруднительным.

В настоящей работе рассмотрена задача поиска порогового значения в эргодической (сильно связной) ресурсной сети с применением подходов, описанных в работах [2] и [9]. Показано, что данная задача сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений, описывающей закономерности перераспределения ресурса для каждой вершины сети.

## 1. Основные понятия

Приведём основные понятия, необходимые для дальнейшего изложения (см. [5, 7, 8]).

**Определение 1.** Ресурсной сетью называют связную ориентированную сеть  $G(X, U, f)$  ( $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ ) без стоков, для каждой дуги  $u$  которой указана пропускная способность  $c(u)$ , и задана вектор-функция  $Q(t) = (q_1(t), \dots, q_n(t))$ , где  $q_i(t) \geq 0 \forall i \in [1; n]_{\mathbb{Z}}$ .

Величина  $q_i(t)$  называется количеством ресурса в вершине  $x_i$  в момент времени  $t$ , а вектор  $Q(t)$  – состоянием сети в момент времени  $t$ .

Здесь и далее полагаем, что графом (сетью) является тройка  $G(X, U, f)$ , где  $X$  – множество вершин,  $U$  – множество дуг, а  $f$  – отображение, которое каждой дуге ставит в соответствие пару вершин (начальную и конечную).

Для того чтобы определить вектор-функцию  $Q(t)$ , задаётся вектор  $Q(0) = (q_1(0), \dots, q_n(0))$  начального распределения ресурса в сети  $G$  и указываются правила перераспределения ре-

сурсов (правила функционирования сети):

$$q_i(t+1) = q_i(t) - \sum_{u \in [x_i]^+} F(u, t) + \sum_{u \in [x_i]^-} F(u, t) \quad \forall i \in [1; n]_Z,$$

где величины  $F(u, t)$  – величины ресурсного потока выходящего по дуге  $u$  в момент времени  $t$  – определяются следующим образом (для определённости будем считать, что  $x_j$  – начальная вершина дуги  $u$ ):

$$(1) \quad F(u, t) = \begin{cases} c(u), & q_j(t) > \sum_{v \in [x_j]^+} c(v); \\ \frac{c(u)}{\sum_{v \in [x_j]^+} c(v)} \cdot q_j(t), & q_j(t) \leq \sum_{v \in [x_j]^+} c(v). \end{cases}$$

Здесь и далее через  $[x]^+$  будем обозначать множество дуг, выходящих из вершины  $x$ , а через  $[x]^-$  – множество дуг, входящих в вершину  $x$ .

**Определение 2.** Состояние  $Q(t)$  называется устойчивым, если выполняется  $Q(t) = Q(t+1)$ .

Согласно правилам перераспределения ресурса, если  $Q(t)$  устойчиво, то для всех натуральных  $i$  имеет место равенство  $Q(t) = Q(t+i)$ .

**Определение 3.** Состояние  $Q^* = (q_1^*, \dots, q_n^*)$  называется асимптотически достижимым из состояния  $Q(0)$ , если для каждого  $i \in [1; n]_Z$  и всякого  $\varepsilon > 0$  существует  $t_\varepsilon$  такое, что для всех  $t > t_\varepsilon$  имеет место неравенство  $|q_i^* - q_i(t)| < \varepsilon$ .

**Определение 4.** Состояние  $Q^*$  называется предельным для начального состояния  $Q(0)$  в ресурсной сети  $G$ , если оно либо устойчиво и существует такой момент времени  $t$ , что  $Q^* = Q(t)$ , либо оно асимптотически достижимо из  $Q(0)$ .

**Определение 5.** Ресурсную сеть будем называть эргодической, если она является сильно связной.

**Определение 6.** Эргодическую ресурсную сеть будем называть регулярной, если существует по крайней мере два контура, длины которых являются взаимно простыми числами.

**Определение 7.** Эргодическую ресурсную сеть будем называть  $d$ -циклической, если наибольший общий делитель длин всех её контуров равен числу  $d$ .

Определим множества вершин  $Z^+(t)$  и  $Z^-(t)$  следующим образом. Будем говорить, что для всех  $j \in [1; n]_Z$  в момент времени  $t$  вершина  $x_j \in Z^-(t)$ , если  $q_j(t) \leq \sum_{v \in [x_j]^+} c(v)$ , в противном

случае будем говорить, что  $x_j \in Z^+(t)$ .

Другими словами, множество  $Z^-(t)$  состоит из тех вершин  $x_j$  ресурсной сети, которые в момент времени  $t$  передают по выходящим дугам весь свой текущий ресурс, т.е. каждая дуга  $u$ , выходящая из вершины  $x_j \in Z^-(t)$ , насыщается ресурсным потоком по второму правилу (вторая строка) в (1). Множество  $Z^+(t)$  образуется теми вершинами, для которых при полном насыщении своих выходящих дуг ресурсным потоком – работая по правилу 1 (первая строка) в (1) – передаёт не весь свой текущий ресурс.

**Определение 8.** Будем говорить, что вершина  $x$  переходит в зону  $Z^-$ , если найдётся такой момент времени  $t'$ , что  $x \in Z^-(t) \forall t \geq t'$ .

Обозначим через  $W = \sum_{i=1}^n q_i(0)$  величину суммарного ресурса сети.

**Определение 9.** Пороговым значением для ресурсной сети  $G$  будем называть такую величину  $T$ , для которой если  $W \leq T$ , то все вершины ресурсной сети  $G$  перейдут в зону  $Z^-$ . В противном случае для каждого момента времени  $t$  множество  $Z^+(t) \neq \emptyset$ .

## 2. Нахождение порогового значения в эргодической ресурсной сети

Рассмотрим вопрос о нахождении порогового значения для эргодической ресурсной сети  $G$ .

Поскольку все вершины сети в предельном состоянии при  $W \leq T$  распределяют ресурс по второму правилу (вторая строка) в (1), следовательно, перераспределение ресурса между вершина-

ми можно рассматривать как жёстко распределённый поток (см. [9]) в сети, каждая вершина  $x$  которой является одновременно и источником с потенциалом  $q_x^*$  (см. [2]), и стоком. Последнее становится возможным, поскольку в предельном состоянии при  $W \leq T$  весь ресурс перераспределяется за один такт, и в каждой вершине в следующий момент  $t + 1$  оказывается столько же ресурса, сколько было в момент времени  $t$  для всех  $t \in \mathbb{Z}_+$ .

Таким образом, для величин пропускной способности  $c(u)$  и величин предельного потока  $F^*(u)$  справедливы следующие выражения ([3, 9]):

$$(2) \quad \begin{cases} \sum_{u \in [x]^-} F^*(u) - \sum_{u \in [x]^+} F^*(u) = 0, & \forall x \in X; \\ 0 \leq F^*(u) \leq c(u), & \forall u \in U. \end{cases}$$

$$(3) \quad F^*(u_i) \cdot c(u_j) = F^*(u_j) \cdot c(u_i) \quad \forall u_i, u_j \in [x]^+, \quad \forall x \in X.$$

Отметим, что структура произвольной эргодической ресурсной сети такова, что при дополнительных условиях, когда считаем каждую вершину и источником, и стоком, она удовлетворяет условиям  $s$ -охватываемости и  $t$ -охватываемости (см. [9]). Последние соответственно означают, что для каждой вершины  $x$  существует путь из какого-нибудь источника в вершину  $x$  и существует путь из вершины  $x$  в какой-нибудь сток. Отсюда следует, что для нахождения порогового значения можно воспользоваться методом, описанным в работах [2] и [9]. Согласно этому методу для сети  $G$  составим систему линейных алгебраических уравнений, которые описывают закономерности распределения ресурса из каждой вершины при условии, что все вершины находятся в зоне  $Z^-$  и достигнуто предельное состояние  $Q^*$ . Её решение позволит определить пороговое значение для сети  $G$ .

Систему уравнений относительно неизвестных  $F(u)$  – количества ресурса, проходящего по дуге  $u$ , и  $Q_x$  – количества ресурса в вершине  $x$ , будем строить в три этапа:

*Этап 1.* Для каждой вершины  $x$  составим уравнения следующего вида:

$$(4) \quad F(u) - \frac{c(u)}{\sum_{v \in [x]^+} c(v)} \cdot Q_x = 0 \quad \forall u \in [x]^+,$$

$$(5) \quad Q_x - \sum_{v \in [x]^-} F(v) = 0.$$

**Замечание 1.** Уравнения (4) (первого вида) обеспечивают выполнение равенства (3). Уравнения (5) (второго вида) связывают величину входящего в вершину  $x$  потока с величиной ресурса в этой вершине, таким образом обеспечивая выполнение равенства в условии (2).

*Этап 2.* К уравнениям, построенным на этапе 1, добавим уравнение вида  $F(w) = z$ , где  $z \in R_+$  и  $w$  – произвольная дуга сети  $G$ . Таким образом, получили систему уравнений

$$(6) \quad \begin{cases} F(u) - \frac{c(u)}{\sum_{v \in [x]^+} c(v)} \cdot Q_x = 0, & \forall x \in X, \forall u \in [x]^+; \\ Q_x - \sum_{v \in [x]^-} F(v) = 0, & \forall x \in X; \\ F(w) = z. \end{cases}$$

Покажем, что решение системы (6) существует и единственно.

Зафиксируем нумерации во множествах вершин и дуг:  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n\}$  и  $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ . Здесь и далее будем считать, что  $m = |U|$ . Основную матрицу системы (6) обозначим через  $A$ . При этом порядок следования элементов в строке матрицы  $A$  таков, что вначале указываются коэффициенты при неизвестных  $F(u)$ , затем при неизвестных  $Q_x$ .

**Теорема 1.** *Решение системы уравнений (6) существует и единственно для любого действительного значения  $z$ .*

**Доказательство.** Основная матрица системы (6) без послед-

ней строки имеет следующий вид:

$$A' = \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \\ \hline a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array} \right),$$

где величины  $a_{ij}$  и  $b_{ij}$  определяются по следующим правилам:

$$a_{ij} = \begin{cases} -1, & u_j \in [x_i]^-; \\ 0, & u_j \notin [x_i]^- \end{cases}; \quad b_{ij} = \begin{cases} \frac{-c(u_i)}{\sum_{v \in [x_j]^+} c(v)}, & u_i \in [x_j]^+; \\ 0, & u_i \notin [x_j]^+ \end{cases}.$$

Обозначим через  $B$  матрицу, состоящую из элементов  $b_{ij}$ . Отметим, что для элементов  $b_{ij}$  матрицы  $B$  имеет место следующее соотношение:

$$(7) \quad \sum_{i=1}^m b_{ij} = -1 \quad \forall j \in [1; n]_Z.$$

Покажем, что  $\text{rank } A' = m + n - 1$ . Для этого проведём элементарные преобразования строк матрицы  $A'$  таким образом, чтобы исключить все ненулевые элементы  $a_{ij}$ . В результате получим матрицу  $A'_1$  такую, что

$$A'_1 = \left( \begin{array}{c|c} E_m & B \\ \hline \Theta & D \end{array} \right),$$

где  $E_m$  – единичная матрица порядка  $m$ ,  $\Theta$  – матрица порядка  $n \times m$ , все элементы которой равны нулю.

Таким образом, получили, что  $\text{rank } A' = \text{rank } E_m + \text{rank } D$ , и поскольку  $\text{rank } E_m = m$ , то покажем, что  $\text{rank } D = n - 1$ .

Рассмотрим отдельно матрицу  $D$ . Её элементы  $d_{ij}$  таковы, что

$$\sum_{i=1}^n d_{ij} = 0 \quad \forall j \in [1; n]_Z.$$

Это следует из правил построения системы (6) и соотношения (7). Более того, для матрицы  $D$  имеет место равенство  $D = (E - P)^T$ , где  $P$  – стохастическая матрица (см. [1, 5]) ресурсной сети  $G$ .

Матрица  $P$  является неотрицательной, следовательно (см. [1]), её наибольшее по модулю собственное значение  $r$  является положительным и простым корнем характеристического многочлена, и поскольку  $P$  является стохастической матрицей, то  $r = 1$ . Отсюда и из сильной связности ресурсной сети  $G$  следует, что  $\text{rank } D = \text{rank } (E - P)^T = n - 1$ .

В итоге показали, что  $\text{rank } R = m + n - 1$ , следовательно, элементарными преобразованиями расширенная матрица системы (6) может быть приведена к следующему виду:

$$A'' = \left( \begin{array}{cccccccc|c} 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha_{m+n-1} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & z \end{array} \right),$$

где  $\alpha_i \neq 0$  для всех значений  $i \in [1; m + n - 1]_Z$ . Последнее следует из нетривиальной разрешимости задачи о максимальном потоке в сети, которая является одновременно  $s$ -охватываемой и  $t$ -охватываемой (см. [9]).

Для определённости обозначим через  $p$  номер столбца, содержащего единицу в последней строке (т.е. будем считать, что  $w = u_p$ ). Выполним элементарное преобразование для строки  $A''_p$ :  $A''_p - A''_{m+n+1}$ . В левой части полученной строки  $A'_p$  остался единственный ненулевой элемент  $\alpha_p$ , находящийся в последнем столбце. При помощи этого элемента элементарными преобразованиями исключим остальные элементы столбца  $p$ .

В результате получили, что  $\text{rank } A = \text{rank } A'' = m + n$ . Следовательно, решение системы линейных уравнений (6) существует и единственно.

Для ресурсной сети  $G$  рассмотрим две системы вида (6), которые отличаются только последним уравнением. Положим  $F(u) = z_1$  последним уравнением первой системы, а  $F(u) = z_2$  – последним уравнением второй системы. Пусть  $(F', Q')$  и  $(F'', Q'')$  – соответственно решения первой и второй системы вида (6).

**Теорема 2.** Если  $z_1 \geq z_2$ , то имеют место следующие соотношения:

$$(8) \quad \begin{cases} F'(u_i) \geq F''(u_i), & \forall i \in [1; m]_Z; \\ Q'_{x_j} \geq Q''_{x_j}, & \forall j \in [1; n]_Z. \end{cases}$$

**Доказательство.** Аналогично доказательству теоремы 2 в [9] соотношения (8) напрямую следуют из неравенства  $z_1 \geq z_2$  и полученного в доказательстве теоремы 1 общего вида решения системы (6):

$$(F, Q) = z \cdot (\xi_1, \dots, \xi_m, \zeta_1, \dots, \zeta_n)^T,$$

где  $\xi_i = 1$ , если  $u_i = u$ .

В качестве следствия теоремы 2 выступает следующая теорема.

**Теорема 3.** Величина порогового значения  $T$  в ресурсной сети может быть найдена при помощи следующего алгоритма.

**Алгоритм 1.**

Шаг 0. Положим  $V = \emptyset$ ,  $\bar{V} = U \setminus V$ .

Шаг 1. Выберем произвольную дугу  $u$  множества  $\bar{V}$ . Решаем систему уравнений (6), в качестве последнего уравнения полагаем уравнение  $F(u) = c(u)$ .

Шаг 2. Для каждой дуги  $w \in \bar{V}$  выполняем проверку подстановкой решения системы уравнений, рассмотренной на шаге 1, и если неравенство в условии (2) выполняется, то  $V := V \cup \{w\}$ .

Шаг 3. Если  $V \neq U$ , то полагаем  $\bar{V} = U \setminus V$  и возвращаемся на шаг 1. Иначе полученное на шаге 1 решение системы вида (6) является искомым и пороговое значение  $T$  может быть найдено следующим образом:

$$T = \sum_{i=1}^n Q_{x_i}.$$

Вычислительная трудоёмкость алгоритма 1 определяется трудоёмкостью решения системы линейных алгебраических уравнений, которая исходя из общего вида системы (6) и доказательства теоремы 1 ограничена величиной  $O(n^3)$ , где  $n = |X|$ . Таким образом трудоёмкость алгоритма 1 ограничена величиной  $O(m \cdot n^3)$ , и в худшем случае, когда сеть  $G$  является плотной, она ограничена величиной  $O(n^5)$ . Однако, аналогично тому, как было отмечено в [9], трудоёмкость алгоритма 1 может быть уменьшена ввиду общего вида решения системы (6), указанного в доказательстве теоремы 2. Действительно, получив решение системы (6), одновременно с ним определяется пропорциональность его элементов. Таким образом, нет необходимости в повторном решении системы.

Пользуясь пропорциональностью элементов решения и тем, что один из них (в части  $F$ ) должен совпадать с пропускной способностью соответствующей дуги, полученное решение системы с трудоёмкостью, ограниченной величиной  $O(n^2)$ , может быть приведено к искомому. Таким образом, вычислительная трудоёмкость алгоритма 1 может быть уменьшена до  $O(n^3)$ .

### 3. Существование предельного состояния при $W = T$

Рассмотрим вопрос о существовании предельного состояния в эргодической ресурсной сети  $G$  при  $W = T$ .

Пусть  $Q(0)$  – начальное состояние в сети  $G$ . При этом состоянии  $Q(0)$  таково, что  $W = \sum_{i=1}^n q_i(0) = T$ . В случае, когда сеть  $G$  является регулярной, для любого начального состояния существует единственное предельное состояние (см. [4, 8]). Та-

ким образом, рассмотрим только случаи нерегулярной эргодической сети.

Полагаем, что наибольший общий делитель длин всех контуров в сети  $G$  равен  $d$ . Для марковской цепи, соответствующей такой ресурсной сети, не существует предельного распределения (см. [8]). Значит, по [5] для случая  $W < T$  начальное состояние определяет существование предельного (см. [5]), поскольку в большинстве случаев количество ресурса в каждой вершине будет периодически повторяться с периодом  $d$ . Однако случай  $W = T$  существенно отличается от предыдущего.

По теореме 1 из [6] при  $W \geq T$  потоки стабилизируются, предельный поток существует и единственен и в сети существует предельное состояние для любого начального состояния. Пороговое значение  $T$  составляется из элементов решения системы (6) при условии (3), описывающем закономерности распределения ресурса в случае, когда все вершины находятся в зоне  $Z^-$ , и условии максимальной ресурсного потока, проходящего в сети  $G$ .

Таким образом, справедлива следующая теорема.

**Теорема 4.** *Состояние  $Q$ , полученное последним при применении алгоритма 1 для нахождения порогового значения сети, является предельным для любого начального состояния  $Q(0)$  с суммарным ресурсом величины  $W = T$ .*

Доказательство напрямую следует из теоремы 1 в [6] и теоремы 3.

Пример 1. Рассмотрим ресурсную сеть  $G_1$  на рис. 1. Для удобства (чтобы не загромождать рисунок) каждая пара противоположных дуг изображена одним ребром. Т.е. каждая вершина сети  $G_1$  соединена дугой с каждой из оставшихся вершин и, кроме того, в вершинах 1 и 4 имеются петли.

Отметим, что сеть  $G_1$  является регулярной, поскольку существуют по крайней мере два контура, длины которых – простые числа (см. [9]). Далее также будет рассмотрен пример эргодической сети, которая не является регулярной.

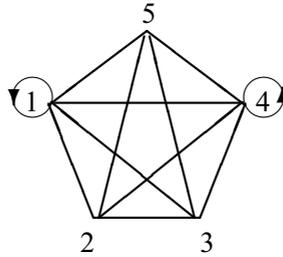


Рис. 1. Регулярная сеть  $G_1$  с петлями

Матрица пропускных способностей для сети  $G_1$  имеет вид

$$C_1 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 5 & 5 & 0 & 5 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Зафиксируем нумерацию дуг сети следующим образом:  
 $f(u_1) = (1, 1)$ ,  $f(u_2) = (1, 2)$ ,  $f(u_3) = (1, 3)$ ,  $f(u_4) = (1, 4)$ ,  
 $f(u_5) = (1, 5)$ ,  $f(u_6) = (2, 1)$ ,  $f(u_7) = (2, 3)$ ,  $f(u_8) = (2, 4)$ ,  
 $f(u_9) = (2, 5)$ ,  $f(u_{10}) = (3, 1)$ ,  $f(u_{11}) = (3, 2)$ ,  $f(u_{12}) = (3, 4)$ ,  
 $f(u_{13}) = (3, 5)$ ,  $f(u_{14}) = (4, 1)$ ,  $f(u_{15}) = (4, 2)$ ,  $f(u_{16}) = (4, 3)$ ,  
 $f(u_{17}) = (4, 4)$ ,  $f(u_{18}) = (4, 5)$ ,  $f(u_{19}) = (5, 1)$ ,  $f(u_{20}) = (5, 2)$ ,  
 $f(u_{21}) = (5, 3)$ ,  $f(u_{22}) = (5, 4)$ .

Решая для ресурсной сети  $G_1$  систему вида (6), полагая  $F(u_1) = 2$  в качестве последнего уравнения, получим следующий набор значений:  $F(u_i) = 2$ ,  $\forall i \in [1; 22]_Z$  и  $Q_1 = Q_4 = 10$ ,  $Q_2 = Q_3 = Q_5 = 8$ .

Поскольку для найденного решения системы вида (6) выполняется  $F(u_{19}) > c(u_{19})$ , то необходимо выполнить пересчёт, пользуясь пропорциональностью элементов решения. В результате такого пересчёта получим искомый набор значений:  $F(u_i) = 1$ ,  $\forall i \in [1; 22]_Z$  и  $Q_1 = Q_4 = 5$ ,  $Q_2 = Q_3 = Q_5 = 4$ .

Таким образом, пороговое значение для ресурсной сети  $G_1$  равно  $T = 22$ . Предельное состояние  $Q^* = Q$  при величине ресурса в сети  $W = T$ . •

Пример 2. Рассмотрим 3-циклическую ресурсную сеть  $G_2$  на рис. 2.

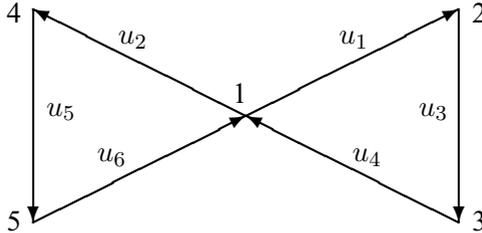


Рис. 2. Ресурсная сеть  $G_2$

Матрица пропускных способностей имеет вид

$$C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решая для ресурсной сети  $G_2$  систему вида (6), полагая  $F(u_1) = 2$  в качестве последнего уравнения, получим следующий набор значений:  $F(u_1) = F(u_3) = F(u_4) = 2$ ,  $F(u_2) = F(u_5) = F(u_6) = 4$ ,  $Q_1 = 6$ ,  $Q_2 = Q_3 = 2$ ,  $Q_4 = Q_5 = 4$ . Выполняя пересчёт с использованием пропорциональности, получим искомый набор значений:  $F(u_1) = F(u_3) = F(u_4) = 1$ ,  $F(u_2) = F(u_5) = F(u_6) = 2$ ,  $Q_1 = 3$ ,  $Q_2 = Q_3 = 1$ ,  $Q_4 = Q_5 = 2$ .

Таким образом, пороговое значение для ресурсной сети  $G_2$  равно  $T = 9$ . Предельное состояние  $Q^* = Q$  при величине ресурса в сети  $W = T$ . На рис. 3 приведены графики динамического изменения величины ресурса в сети  $G_2$  при начальном состоянии  $Q(0) = (0, 0, 6, 0, 3)$ .

Следует отметить формулу для вычисления порогового значения  $d$ -циклической ресурсной сети, приведённую в [6, стр. 24]

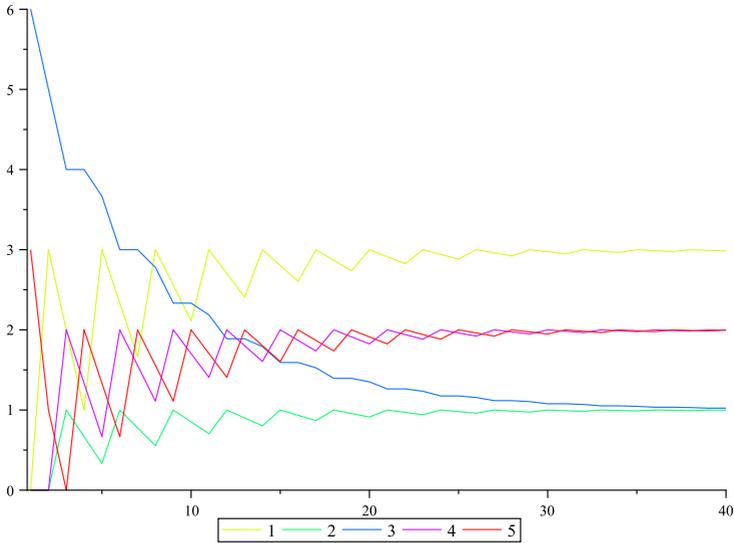


Рис. 3. Графики динамического изменения величин ресурсов в сети  $G_2$ , где 1, 2, 3, 4, 5 – номера узлов сети  $G_2$

как следствие 2 к теореме 2:

$$(9) \quad T = \min_i \frac{r_i^{out}}{q_i^{1*}},$$

где  $r_i^{out} = \sum_{v \in [x_j]^+} c(v)$ , а элементы  $q_i^{1*}$  являются средними ариф-

метическими соответствующих компонент предельных векторов  $Q_j^{1*}$  ( $j \in [1; q]_Z$ ) при  $W = 1$  и произвольном начальном состоянии. Однако вычисление последних представляется довольно затруднительным для произвольной ресурсной сети, а именно, в тех случаях, когда значение  $d$  заранее неизвестно. Существующие алгоритмы поиска только величины  $d$  имеют вычислительную трудоёмкость  $O(n^3)$ , что уже сравнимо с трудоёмкостью алгоритма 1. С другой стороны, в [6] показано, что вектор  $Q^{1*} = (q_1^{1*}, \dots, q_n^{1*})$  является единственным положительным собственным вектором стохастической матрицы ресурсной сети, а значит, трудоёмкость его вычисления ( $O(n^3)$ ) должна быть сравнима с трудоёмкостью алгоритма 1.

Приведём вариант решения задачи поиска порогового значения в ресурсной сети  $G_2$  при помощи формулы (9).

Сеть  $G_2$  является 3-циклической ресурсной сетью, в которой множество вершин разбивается на три циклических множества:  $\{1\}$ ,  $\{2, 4\}$  и  $\{3, 5\}$ . Тогда для произвольного начального состояния при величине ресурса  $W = 1$  предельные векторы имеют вид:

$$Q_1^{1*} = (1; 0; 0; 0; 0), Q_2^{1*} = \left(0; \frac{1}{3}; 0; \frac{2}{3}; 0\right), Q_3^{1*} = \left(0; 0; \frac{1}{3}; 0; \frac{2}{3}\right).$$

Найдём компоненты  $q_i^{1*}$  вектора  $Q^{1*}$  как среднее арифметическое соответствующих компонент векторов  $Q_j^{1*}$ ,  $j \in \{1, 2, 3\}$ . Получим

$$Q^{1*} = \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{9}; \frac{1}{9}; \frac{2}{9}; \frac{2}{9}\right).$$

Для каждой вершины  $i$  вычислим значение величины  $\frac{r_i^{out}}{q_i^{1*}}$ :

$$\frac{r_1^{out}}{q_1^{1*}} = \frac{6}{\frac{1}{3}} = 18, \quad \frac{r_2^{out}}{q_2^{1*}} = \frac{2}{\frac{1}{9}} = 18, \quad \frac{r_3^{out}}{q_3^{1*}} = \frac{1}{\frac{1}{9}} = 9,$$

$$\frac{r_4^{out}}{q_4^{1*}} = \frac{4}{\frac{2}{9}} = 18, \quad \frac{r_5^{out}}{q_5^{1*}} = \frac{2}{\frac{2}{9}} = 9.$$

Минимум достигается в вершинах 3 и 5. Таким образом, получили  $T = 9$ . •

### Литература

1. ГАНТМАХЕР Ф.Р. *Теория матриц*. — М.: Наука, 1966. — 576 с.
2. ЕРЗИН А.И., ТАХОНОВ И.И. *Задача поиска сбалансированного потока* // Сибирский журнал индустриальной математики. — 2006. — Т. IX, №4(28). — С. 50–63.
3. ЕРУСАЛИМСКИЙ Я.М., СКОРОХОДОВ В.А., КУЗЬМИНОВА М.В., ПЕТРОСЯН А.Г. *Графы с нестандартной достижимостью: задачи, приложения*. — Ростов-на-Дону: Южный федеральный университет, 2009. — 195 с.
4. ЖИЛЯКОВА Л.Ю. *Несимметричные ресурсные сети. I. Процессы стабилизации при малых ресурсах* // Автоматика и телемеханика. — 2011. — №4. — С. 133-143.
5. ЖИЛЯКОВА Л.Ю. *Эргодические циклические ресурсные сети. I. Колебания и равновесные состояния при малых ресурсах* // Управление большими системами. — 2013. — №43. — С. 34–54.
6. ЖИЛЯКОВА Л.Ю. *Эргодические циклические ресурсные сети. II. Большие ресурсы* // Управление большими системами. — 2013. — №45. — С. 6–29.
7. КУЗНЕЦОВ О.П., ЖИЛЯКОВА Л.Ю. *Двусторонние ресурсные сети – новая потоковая модель* // Доклады АН. — 2010. — Т. 433, №5. — С. 609–612.
8. СКОРОХОДОВ В.А. *Устойчивость и стационарное распределение на графах с нестандартной достижимостью* // Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. — 2007. — №4. — С. 17–21.
9. СКОРОХОДОВ В.А., ЧЕБОТАРЕВА А.С. *Задача о максимальном потоке в сети с особыми условиями распределения потока* // Дискретный анализ и исследование операций. — 2015. — Т. 22, №3. — С. 55–74.

## THE PROBLEM OF FINDING THE THRESHOLD VALUE IN ERGODIC RESOURCE NETWORK

**Vladimir Skorokhodov**, Southern Federal University,  
Rostov-on-Don, Cand.Sc., Associated Professor  
(pdvaskor@yandex.ru).

*Abstract: Resource network is a graphical model of diffusion proposed earlier in the literature. Every node of the network stores some amount of “resource”. This resource disseminates through networks according to the specified rules. Earlier it was proved that if the total amount of resource in the network does not exceed some threshold value that the diffusion process is equivalent to the random walk in the related Markov chain. The problem of finding the threshold value in ergodic resource network is considered. It is shown that this problem is reduced to solving of system of equations, which describes the principles of redistribution of resource for each node of a network. The  $O(n^3)$  complexity algorithm for finding the threshold value in arbitrary ergodic network is developed.*

**Keywords:** ergodic resource network, threshold value, limit state, flow distribution, random walks in networks.

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии О. П. Кузнецовым.*

*Поступила в редакцию 15.12.2015.*

*Дата опубликования 30.09.2016.*

УДК 977.1  
ББК 161.8

## РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ АНАЛИЗА С ВОЗМУЩЕНИЕМ ВО ВХОДЕ И ВЫХОДЕ

Железнов К. О.<sup>1</sup>

(ФГБУН Институт проблем управления  
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

*Предлагается метод решения задачи анализа для линейной системы управления с возмущением, подаваемым на вход и выход системы. На примере тестовой задачи из COMPlеib демонстрируется его более высокая эффективность по сравнению со стандартным подходом.*

Ключевые слова: линейные матричные неравенства, техника инвариантных эллипсоидов, задача слежения.

### **Введение**

Задачи управления регулируемым выходом системы управления можно разбить на два класса, которые отличаются по целям управления: задачи синтеза заданного поведения, когда требуется обеспечить наличие у замкнутой системы управления некоторых заданных свойств, и оптимальные задачи, когда требуется оптимизировать некий критерий качества работы замкнутой системы. Как правило, указанные задачи рассматриваются при наличии внешних возмущений и помех, которые являются неизмеряемыми. При таких условиях требуется выполнение основной цели системы при компенсации внешних возмущений и помех.

Первой работой, посвященной созданию систем, не зависящих от внешних возмущений, является [11]. Такие системы получили название инвариантных [3]. Данная работа посвящена решению одной из возможных задач управления первого класса —

---

<sup>1</sup> Кирилл Олегович Железнов, аспирант  
(kirill.zheleznov@phystech.edu).

задаче слежения, которая является одной из основных задач как линейной, так и нелинейной теории управления и не теряет актуальности и сейчас. Наибольшее внимание уделяется решению различных постановок задач слежения и их приложений в линейных системах. Ключевые аспекты теоретического аппарата данной теории изложены в [6, 7, 14, 23]. К основным подходам к решению указанной задачи можно отнести линейное следящее управление (Linear Tracking Control, [16]); подход, основанный на применении векторных функций Ляпунова [4, 12]; естественное следящее управление (Natural Tracking Control, [17]); метод линейных матричных неравенств (Linear Matrix Inequalities, LMI), который приобрел значительную популярность в последнее время [13, 21, 22, 26, 27]. Предпринимаются попытки исследования постановок задач слежения при неполной априорной информации, в частности, при неизвестных верхних границах возмущений [8]. В данной работе используется метод инвариантных эллипсоидов [5], который также основан на технике LMI.

Целью работы является исследование задачи управления регулируемым выходом линейной системы в одной из разнообразных постановок задачи анализа для задачи слежения, восходящей к Р. Калману [18].

В данной работе, в отличие от [2], рассматривается постановка задачи анализа, при этом источником возмущений и помех является один и тот же векторный сигнал (в частности, аналогичная система управления рассматривается в [9]). Стандартным подходом к решению таких задач является предположение, что возмущения на входе и выходе системы предполагаются разными (независимыми). Это позволяет оценивать каждую из частей выхода системы по отдельности и затем суммировать полученные оценки. Но если возмущение во входе и выходе системы имеет одинаковый источник, то такое предположение «огрубляет» оценку, поскольку не учитывает внутреннюю связь системы. По этой причине решение таких задач без указанного предположения представляется более сложным, чем решение задач, в которых возмущения во входе и выходе предполагаются разными

(независимыми). Стоит отметить, что используемая постановка задачи (которая будет детально описана ниже) включает в себя частный случай, когда возмущения и помехи являются независимыми. Существуют разнообразные примеры систем, в которых возмущение и помехи имеют одинаковый источник. В частности, при перелетах источником помех является ветер. Он оказывает влияние как непосредственно на состояние системы, так и на все измерительные приборы (необязательно с одинаковой интенсивностью).

С технической точки зрения полученные далее задачи сводятся к решению задачи полуопределенного программирования (Semi-Definite Programming, SDP) и одномерной оптимизации. Для ее решения существуют эффективные программные средства, в частности – свободно распространяемые пакеты SDPT3 [24, 25] и YALMIP [20] на базе системы MATLAB.

Для демонстрации эффективности предложенных подходов использовалась задача из стандартной библиотеки COMPlеib [19]. Данная библиотека содержит математические модели как практических задач, так и их упрощенных учебных версий. Она широко используется для тестирования и сравнения алгоритмов решения различных задач в теории управления.

## 1. Постановка задачи анализа

В дальнейшем нам потребуются два следующих определения.

**Определение 1.** *Эллипсоид с центром в начале координат*

$$(1) \quad \mathcal{E}_P = \{x \in \mathbb{R}^n : x^\top P^{-1}x \leq 1\}, \quad P \succeq 0,$$

*называется инвариантным для непрерывной системы  $\dot{x} = Ax + Dw$ , если из условия  $x(0) \in \mathcal{E}_P$  следует  $x(t) \in \mathcal{E}_P$  для всех моментов времени  $t \geq 0$ . Это означает, что вектор фазового состояния системы будет находиться внутри эллипсоида  $\mathcal{E}_P$ , если он находится в этом эллипсоиде в начальный момент времени.*

**Определение 2.** *Эллипсоид с центром в начале координат*

$$\mathcal{E}_{CPC^\top} = \{z \in \mathbb{R}^l : z^\top (CPC^\top)^{-1}z \leq 1\}, \quad P \succeq 0,$$

называется ограничивающим по выходу для динамической системы

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Dw, & x(0) &= x_0, \\ z &= Cx, \end{aligned}$$

соответствующим инвариантному эллипсоиду (1). Соответственно, если состояние  $x_0$  принадлежит инвариантному эллипсоиду с матрицей  $P$ , то выход системы  $z(t)$  будет находиться в эллипсоиде  $\mathcal{E}_{CPC^T}$  для всех  $t \geq 0$ .

Теперь сформулируем задачу анализа. Рассмотрим линейную непрерывную систему управления

$$(2) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Dw, & x(0) &= x_0, \\ y &= Cx + Ew, \end{aligned}$$

где  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $D \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $E \in \mathbb{R}^{m \times p}$ ,  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  — это фазовое состояние системы,  $w \in \mathbb{R}^p$  — внешнее возмущение, такое что

$$(3) \quad \dot{w} = -\delta w + \Delta, \quad \|\Delta\| \leq 1,$$

где  $\delta \in \mathbb{R}^1 > 0$  определяется условиями задачи, а  $\Delta \in \mathbb{R}^p$  — неизвестная ограниченная аддитивная компонента. Целью является нахождение минимального (по критерию следа) ограничивающего эллипсоида, содержащего выход  $y$ .

Здесь и далее  $\|\cdot\|$  — евклидова норма вектора.

## 2. Решение задачи

### 2.1. Подход на основе суммирования эллипсоидов

В данном разделе рассматривается стандартный подход к решению задачи (см., например, [10]), который состоит в следующем. Будем строить грубую оценку, получая искомый эллипсоид как сумму эллипсоидов для векторов  $Cx$  и  $Ew$ . Найдя ограничивающий эллипсоид для каждого из слагаемых, можно получить минимальный ограничивающий эллипсоид (по критерию следа) для выхода  $y$ . Нам потребуется следующее утверждение.

**Утверждение 1.** Если вектор  $l \in \mathbb{R}^n$  лежит в эллипсоиде с матрицей  $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , а вектор  $h \in \mathbb{R}^n$  — в эллипсоиде с матрицей

$H \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , то вектор  $(l + h)$  лежит в эллипсоиде с матрицей  $(\frac{1}{\varepsilon}L + \frac{1}{1-\varepsilon}H) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  при  $\forall \varepsilon \in (0, 1)$ .

**Доказательство.** Если вектор  $l \in \mathbb{R}^n$  лежит в эллипсоиде с матрицей  $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , то он удовлетворяет неравенству

$$l^\top L^{-1}l \leq 1,$$

и если вектор  $h \in \mathbb{R}^n$  — в эллипсоиде с матрицей  $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , то он удовлетворяет неравенству

$$h^\top H^{-1}h \leq 1.$$

Таким образом, задача состоит в определении матрицы минимального эллипсоида  $R$  такой, что

$$(4) \quad (l + h)^\top R^{-1}(l + h) \leq 1 \quad \text{при} \quad l^\top L^{-1}l \leq 1 \quad \text{и} \quad h^\top H^{-1}h \leq 1.$$

Вводя в рассмотрение вектор  $s = \begin{pmatrix} l \\ h \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n}$ , представим условие (4) в виде

$$(5) \quad s^\top \begin{pmatrix} R^{-1} & R^{-1} \\ R^{-1} & R^{-1} \end{pmatrix} s \leq 1$$

$$(6) \quad \text{при} \quad s^\top \begin{pmatrix} L^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} s \leq 1 \quad \text{и} \quad s^\top \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & H^{-1} \end{pmatrix} s \leq 1.$$

В силу  $S$ -процедуры с двумя ограничениями условие (5) эквивалентно выполнению линейного матричного неравенства

$$(7) \quad \begin{pmatrix} R^{-1} & R^{-1} \\ R^{-1} & R^{-1} \end{pmatrix} - \varepsilon \begin{pmatrix} L^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \delta \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & H^{-1} \end{pmatrix} \preceq 0$$

$$(8) \quad \text{при} \quad \varepsilon, \delta > 0 \quad \text{таких, что} \quad \varepsilon + \delta \leq 1.$$

По лемме Шура (7) равносильно

$$R^{-1} - \varepsilon L^{-1} \preceq R^{-1}(R^{-1} - \delta H^{-1})^{-1}R^{-1}.$$

Домножая слева и справа на  $R$ , а затем снова применяя лемму Шура, получим

$$\begin{pmatrix} R - \varepsilon RL^{-1}R & I \\ I & R^{-1} - \delta H^{-1} \end{pmatrix} \preceq 0,$$

что, согласно критерию Сильвестра, равносильно выполнению следующих неравенств

$$\begin{aligned} R - \varepsilon RL^{-1}R &\preceq 0, \\ (R - \varepsilon RL^{-1}R)(R^{-1} - \delta H^{-1}) - I &\succeq 0. \end{aligned}$$

Первое из которых равносильно  $R \succeq \frac{1}{\varepsilon}L$ , а второе —

$$I - \varepsilon RL^{-1} - \delta RH^{-1} - \varepsilon \delta RL^{-1}RH^{-1} - I \succeq 0 \Leftrightarrow R \succeq \frac{1}{\delta}H + \frac{1}{\varepsilon}L.$$

Поскольку ищется минимальный эллипсоид, то, полагая  $\delta = \delta_{max} = 1 - \varepsilon$ , приходим к утверждению теоремы.

Нам понадобится определить матрицу минимального инвариантного эллипсоида  $W$  для возмущения  $w$ . Для этого воспользуемся следующим утверждением, установленным в [7].

**Лемма 1.** Эллипсоид  $\mathcal{E}_P = \{x \in \mathbb{R}^n : x^\top P^{-1}x \leq 1\}$ ,  $P \succ 0$ , является инвариантным для системы

$$\dot{x} = Ax + Dw, \quad \|w\| \leq 1,$$

тогда и только тогда, когда его матрица  $P$  удовлетворяет линейным матричным неравенствам

$$AP + PA^\top + \alpha P + \frac{1}{\alpha}DD^\top \preceq 0, \quad P \succ 0.$$

Теперь можно сформулировать следующую лемму.

**Лемма 2.** Возмущение  $w$ , удовлетворяющее (3), содержится в инвариантном эллипсоиде с матрицей

$$(9) \quad W = \frac{1}{\delta^2}I.$$

**Доказательство.** Применяя лемму 1 при  $A = -\delta, D = I$ , получим, что матрица инвариантного эллипсоида  $W$  удовлетворяет неравенству

$$-2\delta W + \alpha W + \frac{1}{\alpha}I \preceq 0.$$

Откуда получаем

$$W \geq \frac{1}{\alpha(2\delta - \alpha)} I.$$

Исследуя функцию  $\frac{1}{\alpha(2\delta - \alpha)}$  на минимум, находим, что минимальное значение достигается при  $\alpha = \delta$ . Лемма доказана.

Отметим, что найденный эллипсоид является минимальным по критерию вложенности. Этот критерий является более «строгим», чем критерий следа. Для формулировки теоремы нам понадобится следующая лемма, установленная в [7].

**Лемма 3.** *Образом эллипсоида*

$$\mathcal{E}_P = \{x \in \mathbb{R}^n : x^\top P^{-1}x \leq 1\}, \quad P \succ 0,$$

при линейном отображении  $z = Cx$ , где  $C$  — матрица максимального строчного ранга, является эллипсоид

$$\mathcal{E}_{CPC^\top} = \{z \in \mathbb{R}^l : z^\top (CPC^\top)^{-1}z \leq 1\}, \quad P \succ 0.$$

Теперь можно сформулировать следующую теорему.

**Теорема 1.** *Решение задачи минимизации*

$$\operatorname{tr} \frac{1}{\varepsilon\delta^2} E^\top E + \frac{1}{1-\varepsilon} C^\top SC \rightarrow \min$$

при ограничениях

$$(10) \quad AS + SA^\top + \beta S + \frac{1}{\beta} DD^\top \preceq 0, \quad S \succ 0,$$

где минимизация проводится по матричным переменным  $S = S^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$  и числовым параметрам  $\varepsilon \in (0, 1)$  и  $\beta > 0$ , определяя матрицу ограничивающего эллипсоида  $\hat{R} = \frac{1}{\varepsilon\delta^2} E^\top E + \frac{1}{1-\varepsilon} C^\top \hat{S} C$ .

**Доказательство.** Применяя леммы 1 и 3 к системе (2), получаем, что решение задачи минимизации  $\operatorname{tr} C^\top SC \rightarrow \min$  при ограничениях (10) определяет матрицу ограничивающего эллипсоида для выхода  $Cx$ . Применяя лемму 2 и суммируя полученные эллипсоиды, при помощи утверждения 1 приходим к утверждению теоремы.

2.2. Основной результат

Вводя в рассмотрение вектор

$$z = \begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+p)},$$

перепишем систему (2) в виде

$$(11) \quad \dot{z} = \underbrace{\begin{pmatrix} A & D \\ 0 & -\delta I \end{pmatrix}}_{\tilde{A}} z + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \Delta \end{pmatrix}}_{\tilde{w}},$$

$$y = (CE)z = \tilde{C}z.$$

**Теорема 2.** Решение  $\hat{Q}$  задачи минимизации  
(12)  $\text{tr } H \rightarrow \min$   
при ограничениях

$$(13) \quad \begin{pmatrix} Q\tilde{A} + \tilde{A}^\top Q + \alpha Q & Q \\ Q & -\alpha I \end{pmatrix} \preceq 0,$$

$$(14) \quad \begin{pmatrix} H & I \\ I & Q \end{pmatrix} \succeq 0,$$

$$(15) \quad Q \succeq \gamma I, \quad \gamma \in \mathbb{R}^1 \geq 0,$$

где минимизация проводится по матричным переменным  $Q = Q^\top \in \mathbb{R}^{(n+l) \times (n+l)}$ ,  $H = H^\top \in \mathbb{R}^{(n+l) \times (n+l)}$  и числовому параметру  $\alpha > 0$ , определяет матрицу  $\hat{P} = \hat{Q}^{-1}$  инвариантного эллипсоида для системы (11).

**Доказательство.** Применяя лемму 1 к (11), получим, что матрица инвариантного эллипсоида  $P$  должна удовлетворять

$$\tilde{A}P + P\tilde{A}^\top + \alpha P + \frac{1}{\alpha}I \preceq 0.$$

Домножив данное неравенство слева и справа на  $Q$ , получаем

$$Q\tilde{A} + \tilde{A}^\top Q + \alpha Q + \frac{1}{\alpha}QQ \preceq 0,$$

что, согласно лемме Шура, равносильно

$$\begin{pmatrix} Q\tilde{A} + \tilde{A}^\top Q + \alpha Q & Q \\ Q & -\alpha I \end{pmatrix} \preceq 0.$$

Чтобы свести задачу минимизации  $\text{tr } P = \text{tr } Q^{-1}$  к линейной, введем матрицу  $H = H^T$  такую, что  $Q^{-1} \leq H$ . Последнее неравенство эквивалентно линейному матричному неравенству (14). Нетрудно видеть, что тривиальное решение  $Q = 0$  удовлетворяет системе (13), (14). Такое решение хоть и является корректным, но означает, что инвариантным эллипсоидом с матрицей  $Q^{-1}$  является все пространство. Для того чтобы избежать при численном решении сходимости к решению  $Q = 0$ , в систему добавляется техническое условие (15). Тогда при выборе достаточно малого  $\gamma$  система будет иметь решение, отличное от тривиального.

*Пример 1.* Продемонстрируем предложенный подход на примере видоизмененной задачи AC5 из библиотеки COMPlеib, где

$$A = \begin{pmatrix} -4,3760 & 1,0000 & -0,1209 & 0 \\ 8,9117 & -3,5000 & -130,7500 & 0 \\ 1,0000 & 5,000 & -153,5000 & 1,000 \\ -1,0000 & -10,0000 & -5,0000 & -3,5500 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

При использовании стандартного подхода 1 при  $\delta = 0,2$  получим следующую матрицу эллипса

$$\widehat{M}_1 = \begin{pmatrix} 0,8045 & -0,8452 \\ -0,8452 & 37,6434 \end{pmatrix},$$

след которой равен 36,9390.

При использовании предлагаемого подхода получим следующую матрицу

$$\widehat{Q} = \begin{pmatrix} 4,3213 & -2,0168 & -2,2524 & -0,0522 & -0,7185 \\ -2,0168 & 3,8277 & -0,6608 & 0,8856 & 0,2765 \\ -2,2524 & -0,6608 & 108,7736 & -0,0367 & -0,5232 \\ -0,0522 & 0,8856 & -0,0367 & 0,3629 & 0,0948 \\ -0,7185 & 0,2765 & -0,5232 & 0,0948 & 0,2488 \end{pmatrix}.$$

Ей соответствует следующая матрица эллипса

$$\widehat{M}_2 = \begin{pmatrix} 3,8817 & -0,8077 \\ -0,8077 & 11,0059 \end{pmatrix},$$

след которого равен 14,8875.

Результирующие эллипсы изображены на рис. 1. Синим цветом изображен эллипс, полученный при решении задачи стандартным подходом, а красным цветом — эллипс, полученный при использовании предлагаемого подхода. При этом по критерию следа второй эллипс (красный) оказался меньше второго эллипса (синего) на примерно 60%. Таким образом, на рассматриваемом примере видно, что предлагаемый подход оказался эффективнее стандартного.

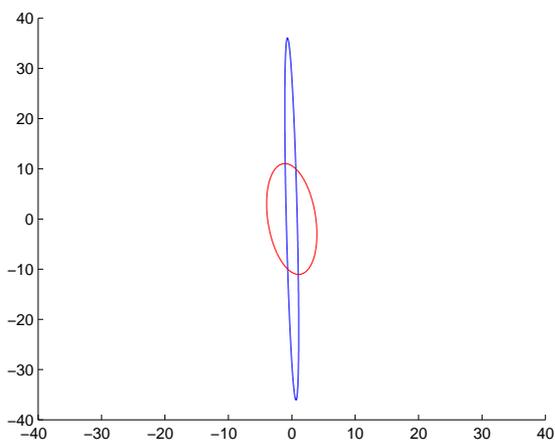


Рис. 1. Ограничивающие эллипсы при использовании двух подходов

•

### 3. Выводы и перспективы

В работе предложен новый подход решения задачи анализа при одинаковом возмущении, подаваемом на вход и на выход

системы. В описанном примере на основе задачи AC5 след ограничивающего эллипсоида при использовании предлагаемого подхода оказался примерно в полтора раза меньше, чем при использовании стандартного подхода. При этом в предлагаемом подходе требуется минимизация по одному числовому параметру вместо двух в стандартном подходе. В дальнейшем планируется применение предлагаемого подхода для синтезирования оптимального управления в задаче слежения.

### **Литература**

1. АХОБАДЗЕ А. Г., КРАСНОВА С. А. *Задача слежения в линейных многомерных системах при наличии внешних возмущений* // Автоматика и телемеханика. – 2009. – №6. – С. 21–27.
2. ЖЕЛЕЗНОВ К. О., ХЛЕБНИКОВ М. В. *Применение метода инвариантных эллипсоидов для решения линейной задачи слежения* // Труды МФТИ. – 2013. – Т. 5, №1. – С. 115–121.
3. ЛЕЗИНА З. М., ЛЕЗИН В. И. *Щипанов и теория инвариантности*. – М.: УРСС, 2004. – 428 с.
4. МАТРОСОВ В. М. *К теории устойчивости движения* // Прикладная математика и механика. – 1962. – Т. 26, №5. – С. 885–895.
5. НАЗИН С. А., ПОЛЯК Б. Т., ТОПУНОВ М. В. *Подавление ограниченных внешних возмущений с помощью метода инвариантных эллипсоидов* // Автоматика и телемеханика. – 2007. – №3. – С. 106–125.
6. ПОЛЯК Б. Т., ХЛЕБНИКОВ М. В., ЩЕРБАКОВ П. С. *Управление линейными системами при внешних возмущениях: Техника линейных матричных неравенств*. – М.: УРСС, 2014. – 560 с.
7. ПОЛЯК Б. Т., ЩЕРБАКОВ П. С. *Робастная устойчивость и управление*. – М.: Наука, 2002. – 303 с.

8. СОКОЛОВ В.Ф. *Робастное слежение при неизвестных верхних границах возмущений и помехи измерений* // Автоматика и телемеханика. – 2013. – №1. – С. 98–115.
9. ЦЫКУНОВ А.М. *Робастная система слежения с компенсацией возмущений и помех* // Вестник Астраханского государственного технического университета. Серия: Управление, вычислительная техника и информатика. – 2014. – №1. – С. 54–61.
10. ШОЛОХОВ А. В. *Об эллипсоидальной аппроксимации суммы двух эллипсоидов по минимуму объема* // Кибернетика и системный анализ. – 2011. – №6. – С. 138–144.
11. Щипанов Г.В. *Теория и методы проектирования автоматических регуляторов* // Автоматика и телемеханика. – 1939. – №47. – С. 49–66.
12. Bellman R. *Vector Lyapunov Functions* // J.S.I.A.M. Control. – 1966. – Vol. 1, №1. – P. 32–34.
13. BOUOUDEN S., CHADLI M., FILALI S., EL HAJJAJI A. *Fuzzy model based multivariable predictive control of a variable speed wind turbine: LMI approach* // Renewable Energy. – 2012. – Vol. 37, №1. – P. 434–439.
14. BOYD S., EL GHAOUI L., FERON E., BALAKRISHAN V. *Linear matrix inequalities in system and control theory*. – SIAM, 1994. – 250 p.
15. CERVANTES I., ALVAREZ-RAMIREZ J. *On the PID tracking control of robot manipulators* // Systems & control letters. – 2001. – Vol. 142, №1. – P. 37–46.
16. GRUJIĆ L.T. *Tracking control of linear systems*. – CRC Press, 2013.
17. GRUJIĆ L.T., MOUNFIELD W.P. *Natural tracking PID process control for exponential tracking* // AIChE journal. – 1992. – Vol. 38, №4. – P. 555–562.
18. KALMAN R.E. *Contributions to the theory of optimal control* // Bol. Soc. Mat. Mexicana. – 1960. – Vol. 5, №2. – P. 102–119.
19. LEIBFRTZ F. *COMPl<sub>e</sub>ib: COstrained Matrix-optimization*

- Problem library. Version 1.1* // Univ. Trier, Germany. URL: [www.compleib.de](http://www.compleib.de).
20. LÖFBERG J. *YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB* // Computer Aided Control Systems Design, 2004 IEEE International Symposium – 2004. – P. 284–289.
  21. LIAO F., WANG J.L., YANG G.-H. *Reliable robust flight tracking control: an LMI approach* // Control Systems Technology, IEEE Transactions on. – 2002. – Vol. 10, №1. – P. 76–89.
  22. PHAT V.N., KNOGTHAM Y., RATCHAGIT K. *LMI approach to exponential stability of linear systems with interval time-varying delays* // Linear Algebra and its Applications. – 2012. – Vol. 436, №1. – P. 243–251.
  23. SKOGESTAD S., POSLETHWAITE I. *Multivariable feedback control: analysis and design*. – New York: Wiley, 2007. – 608 p.
  24. TOH K., TODD M., TÛTÛNCÛ R. *SDPT3—a MATLAB software package for semidefinite programming, version 1.3* // Optimization methods and software. – 1999. – Vol. 11, №1–4. – P. 545–581.
  25. TÛTÛNCÛ R., Toh K., Todd M. *Solving semidefinite-quadratic-linear programs using SDPT3* // Mathematical programming. – 2003. – Vol. 95, №2. – P. 189–217.
  26. ZHANG H., SHI I., MEHR A. S., HUANG H. *Robust FIR equalization for time-varying communication channels with intermittent observations via an LMI approach* // Signal Processing. – 2011. – Vol. 91, №7. – P. 1651–1658.
  27. ZHANG B., ZHENG W.X., XU S. *Passivity analysis and passive control of fuzzy systems with time-varying delays* // Fuzzy Sets and Systems. – 2011. – Vol. 174, №1. – P. 83–98.

## **ANALYSIS PROBLEM SOLUTION WITH DISTURBANCE BOTH IN INPUT AND OUTPUT**

**Kirill Zheleznov**, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow,  
Ph.D. candidate (kirill.zheleznov@phystech.edu).

*Abstract: The conventional approach to disturbances suggests that input and output disturbances are independent. This assumption can lead to inaccurate estimation when input and output disturbances originates from a common source. New tracking problem solution method for linear systems with identical disturbance in both system's input and output is suggested. Our technique is based on semi-definite programming and scalar optimisation. Its higher effectiveness in comparison with conventional method is shown on example task from COMPlеib.*

**Keywords:** linear matrix inequalities, invariant ellipsoid techniques, tracking problem.

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии И. Б. Фуртатом.*

*Поступила в редакцию 09.02.2016.*

*Дата опубликования 30.09.2016.*

УДК 004.89 + 004.85 + 004.55 + 519.878  
ББК 32.973.202

## АНАЛИЗ СТРУКТУРЫ СЕТИ ИНТЕРНЕТ С ПОМОЩЬЮ ОБОБЩЁННЫХ МАРШРУТОВ

**Тихонов А. В.<sup>1</sup>**  
(Яндекс, Москва)

*Поисковые системы – важные элементы сети Интернет, помогающие пользователю находить нужную информацию. Развитие поисковых систем требует понимания задач пользователей сети Интернет и принципов их навигационного поведения. Для анализа навигационных паттернов предлагается понятие обобщённых маршрутов, с помощью которого проводится исследование страниц сети с точки зрения навигационного поведения пользователей по отношению к ним; выявляются несколько ярко выраженных классов страниц и демонстрируется, что, помимо схожих навигационных сценариев, страницы этих классов имеют также характерную специфику функциональности и содержимого. Исследование поведенческих паттернов, применяемых пользователями для решения задач, позволяет обнаружить сценарии навигации, которые сейчас плохо поддержаны, но предоставляют интерес для дальнейшего развития сервисов сети.*

Ключевые слова: анализ сети Интернет, пользовательское поведение, навигация в сети Интернет, кластеризация страниц сети Интернет.

### **1. Введение**

В настоящее время поисковые системы играют значительную роль в организации и поддержке пользовательского доступа к информации в сети Интернет по причине чрезвычайного

---

<sup>1</sup> Алексей Тихонов, руководитель службы аналитики поиска, Яндекс, Москва (altsoph@yandex-team.ru).

размера и сложности последней. Для предоставления ответов на пользовательские запросы поисковая система должна регулярно находить и анализировать структурированные и неструктурированные источники информации и затем генерировать ответы, представляемые на странице результатов поиска. Существует, однако, разница между представлением релевантного запросу результата на странице результатов поиска и предоставлением пользователю прямой ссылки на действительно нужную ему страницу, соответствующую решению его поисковой задачи. Одним из этапов решения задачи управления поисковыми системами и их совершенствования является подзадача выявления и анализа устойчивых пользовательских сценариев использования сети Интернет, поиска и потребления онлайн-контента.

Известно, что в настоящее время значительная часть трафика генерируется без какого-либо участия поисковых систем. Так, в [13] показано, что только 6,8% пользовательских сессий начинаются с поисковой системы, а в [11] указывается, что доля непосредственных визитов с поиска на типовой сайт в среднем составляет менее 22%. Постоянное уточнение представлений о спектре возможных задач пользователя является важной частью развития современной поисковой системы, позволяющей наращивать долю задач пользователя, в которых использование поисковой системы может быть полезным. Как показано в данной работе, пользователи посещают страницы различного типа поразному. Понимание типичных путей, которыми пользователи достигают целевых страниц, может помочь также и в понимании финальных целей пользователей, задавших поисковый запрос.

В данной статье производится анализ пользовательского навигационного поведения в сети Интернет и предлагается новый метод анализа пользовательского трафика, развивающий стандартный метод, основанный на анализе источников переходов. Каждый визит страницы имеет не более одного источника, содержащего адрес предыдущей посещенной страницы (страницы, с которой был совершен переход на данную по ссылке). Значение источника может отсутствовать (например, в случаях прямого ввода адреса страницы в браузер, открытия страницы

из закладок и т.п.). Рассматривались несколько типов источников:

- *social* – страница-источник расположена на домене одной из популярных социальных сетей;
- *search* – страница-источник принадлежит поисковой системе;
- *internal* – страница-источник расположена на том же домене второго уровня, что и страница-получатель;
- *external* – страница-источник расположена на другом домене второго уровня;
- в отдельный тип *none* выделялись случаи отсутствия источника.

Как показано в данной работе, множество значений источников визитов, входящих на станицу, достаточно хорошо характеризует роль данной страницы в сети Интернет. Однако ещё больше информации о роли страницы можно извлечь, анализируя не только непосредственные источники переходов, но и полные маршруты пользователей от начала сеанса работы до достижения целевой страницы. Для этого в данной работе предлагается использовать обобщенные маршруты, позволяющие компактно хранить и анализировать ключевую информацию обо всём пути пользователя – с акцентами на точке начала маршрута, точке достижения домена (сайта) целевой страницы и непосредственном предшественнике (источнике) целевой страницы. Показывается, что различные распределения частот обобщенных маршрутов характерны для страниц с различным содержанием и функциональностью. Более глубокое понимание этих связей может позволить расширить множество задач пользователей, поддерживаемое функциями поисковых систем.

Проведенное полномасштабное исследование большого числа различных страниц сети Интернет с точки зрения навигационных паттернов их посещения показывает, что все множество страниц можно рассматривать как совокупность нескольких существенно различных кластеров страниц разного типа: новости, форумы, социальные сети, контент для взрослых, сервисы поисковых систем и т.п. Интересно, что обнаруживается

также крупный кластер, в посещении страниц которого в настоящее время никак не участвуют поисковые системы.

Среди основных результатов данной работы можно перечислить следующие:

- Предложен формализм обобщённых маршрутов для анализа пользовательского поведения в сети Интернет.
- Показано, что на основе распределения входящих визитов по типам обобщенных маршрутов страницы сети Интернет могут быть автоматически сгруппированы в несколько кластеров. Страницы в каждом из этих кластеров играют определённую роль в сети Интернет.
- Проведен анализ найденных кластеров с точки зрения навигационных сценариев и достижимости страниц кластера с помощью поисковых систем. В частности, обнаружен крупный кластер, страницы из которого почти никогда не появляются в результатах поиска. Углубленное изучение этого кластера может помочь в дальнейшем улучшении сервисов, предоставляемых поисковыми системами.

Дальнейший материал организован следующим образом: в следующем разделе описаны предшествующие исследования пользовательского поведения в сети Интернет. В третьем разделе описаны использованные в данном исследовании данные, в четвертом разделе изложен предлагаемый подход к описанию и классификации навигационных маршрутов.

Основная часть исследования представлена в разделах 5 и 6: сначала описываются предварительные эксперименты, а затем полномасштабная кластеризация множества страниц российского сегмента сети Интернет. В седьмом разделе приводятся выводы и обсуждаются возможные направления дальнейших исследований.

## **2. Обзор существующих работ**

Навигационное поведение пользователей сети Интернет и влияние поисковых систем на это поведение является темой ряда различных работ.

В [12] показано, что поисковые системы влияют на 13,6% пользовательских переходов. Сюда включены посещения страниц поисковых систем, навигация по страницам с результатами и посещение результатов с помощью перехода по ссылкам со страницы с результатами поиска. Показано также, что одна пятая всех сайтов, посещаемых пользователями, посещается только через поисковые системы. Приводятся различные характеристики навигационных сессий, в том числе распределение длины сессий, среднее время на каждой странице в сессии, число страниц в сессии и число уникальных сайтов в сессии.

Авторы [4] показывают, что широкая популярность поисковых систем смещает общую активность (посещаемость) в сети в сторону популярных сайтов. Они оценивают влияние этого фактора на эволюцию веб-страниц и приходят к выводу о том, что в случае ранжирования результатов поиска по популярности новой странице требуется значительное время для получения трафика, даже если качество страницы очень велико. Исходя из этого, можно сделать вывод, что поисковые системы способны влиять на пользовательское поведение и привычки путем изменения алгоритмов ранжирования и введения новой функциональности, увеличивающей число задач, которые можно решать с помощью поисковой системы. Как следствие, могут существовать пути увеличения множества задач, в решении которых поисковые системы являются основным инструментом.

С другой стороны, в работе [1] приводятся аргументы к тому, что широкое распространение поисковых систем может создавать и уравнивающий эффект. Поисковые системы повышают шансы новой страницы быть обнаруженной пользователями в случае, если она содержит уникальный контент, релевантный интересам пользователя, выраженным в его поисковом запросе.

Согласно [7], все страницы могут быть разделены на несколько классов:

- контентный (новости, порталы, игры, вертикальные сервисы, мультимедиа);
- коммуникационный (почта, социальные сети, форумы, блоги, чаты);

- поисковый (веб-поиск, объектный поиск, мультимедийный поиск).

Авторы рассматривают различные типы значений источника перехода с целью анализа путей, которыми пользователи перемещаются между страницами внутри и между доменов и классов страниц, а также возможного воздействия поисковых систем на эти пути.

В нашей работе мы развиваем анализ, проведенный в [7], в нескольких направлениях. Во-первых, наша цель состоит в изучении навигационных профилей отдельных страниц (в [7] изучается статистика, агрегированная по типам источников). Во-вторых, вдобавок к типам источников мы рассматриваем полные навигационные пути и их классы. Наконец, мы выявляем несколько типичных кластеров страниц, сформированных по принципу подобия паттернов входящего трафика.

В [5] навигационные пути рассматриваются с пользовательской точки зрения; авторы анализируют и сравнивают поведение различных демографических групп. В нашей работе мы, напротив, концентрируемся на свойствах страниц и маршрутов, приводящих к ним. Пользовательские навигационные привычки также исследуются в [6]. Показано, что пользователи склонны предпочитать некоторые домены и могут переходить на результаты поиска с этих доменов, даже если на странице результатов присутствуют более релевантные результаты из других источников.

Навигационные пути и их значение при исследовании поискового поведения также анализируются в [2, 3, 16, 18]. В частности, в [18] с помощью различных метрик демонстрируется, что в среднем всякая страница, фигурирующая в навигационном пути, начинающемся с поиска, является важной для индексирования поисковой системой. В [3] статистика навигационных путей, начинающихся с поиска, используется для улучшения ранжирования документов на странице результатов поиска.

Статистика пользовательского навигационного поведения успешно используется для построения новых моделей релевантности и авторитетности [10]. Таким образом, анализ взаи-

мосвязей между пользовательским навигационным поведением и свойствами страниц является важным инструментом для получения и уточнения информации о роли и качестве данных страниц. Так, например, в [20] демонстрируется, как можно улучшить качество алгоритма BrowseRank, используя статистику положения страниц в навигационных путях пользователей.

В [9, 12] показано, что популярность страницы и динамика её популярности существенно зависят от расположения страницы и могут быть предсказаны на её основании. Исходя из этого, можно предположить, что и поведенческие сценарии, приводящие пользователей к странице, также зависят от типа и расположения данной страницы. Таким образом, изучение пользовательских навигационных сценариев может помочь в понимании структуры сети Интернет и роли различных страниц в ней, и, наоборот, можно пытаться предсказывать подходящие навигационные сценарии для новых или ещё не существующих страниц на основании их расположения.

Авторы [17] анализируют корреляцию между субъектом поиска, объектом поиска и поисковым поведением. Они проводят кластеризацию пользователей поисковых систем на основании поисковых запросов и анализируют результирующие кластера. Анализ, предлагаемый нами, близок по подходу, но вместо исследования множества пользователей мы сосредотачиваемся на исследовании страниц.

### **3. *Использованные данные***

#### **3.1. *ИСХОДНЫЙ МАССИВ ДАННЫХ***

В работе использовались данные о активности пользователей Яндекс.Браузера, добровольно согласившихся предоставлять анонимизированную статистику, а именно, о всех посещениях ими страниц интернета за период в три месяца: с 1 августа 2013 г. по 31 октября 2013 г. Популярность различных страниц существенно различна; только 2% всех этих страниц были посещены не менее чем 20 различными пользователями за наблюдаемый период, при этом визиты на эти страницы составляют 65% всех визитов на все возможные страницы за период. Стра-

ницы с менее чем 20 различными посетителями за период были удалены из дальнейшего рассмотрения с тем, чтобы исключить из анализа технические (одноразовые) страницы, а также страницы, содержащие персональные данные (например, страницы личной почты, персональных настроек и т.п.).

Далее из множества страниц были выделены два существенно важных подмножества: поисковые страницы (страницы поисковых систем) и социальные страницы (страницы социальных сетей). Поисковые страницы важны в рамках данного исследования, так как одна из его целей – выяснение влияния поисковых систем на навигационное поведение пользователей. Социальные сети также заметно обуславливают навигацию современного пользователя сети Интернет, а сами пользователи, находясь на страницах социальных сетей, демонстрируют специфическое поведение [8].

Поисковыми считались страницы, принадлежащие домену одной из трех популярнейших поисковых систем в России: yandex.ru, google.ru и mail.ru (вместе данные системы покрывают около 97% всего российского поискового трафика). Страница была отнесена к социальным в случае, если она принадлежит домену одной из 22 наиболее популярных в России социальных сетей.

Таким образом, в дальнейшей работе использовалась информация о посещениях пользователями нашей выборки множества выбранных нами страниц. Каждая запись о посещении содержит четыре поля:

- уникальный обезличенный идентификатор пользователя;
- идентификатор момента времени визита;
- адрес посещённой страницы;
- адрес страницы-источника, с которой был осуществлён переход (поле может быть пустым в случаях, когда пользователь переходит по закладкам или вручную указывает адрес страницы в адресной строке).

### 3.2. ПОСТРОЕНИЕ СЕССИЙ И РЕФЕРАЛЬНЫХ ДЕРЕВЬЕВ

По аналогии с подходом, использованным в [7], будем анализировать пользовательские маршруты по рассматриваемым страницам, построенные на базе пользовательских сессий (см. рис. 1 в качестве примера).

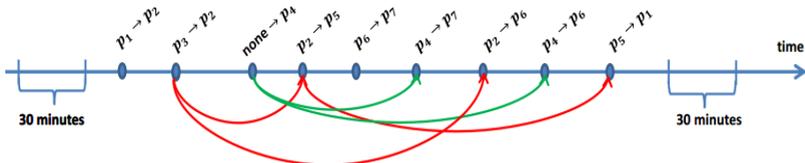


Рис. 1. Пример навигационной сессии и ее реферального леса

Определим пользовательскую сессию как последовательность посещения страниц одним пользователем, в которой пауза между двумя соседними посещениями не превышает 30 минут. Это пороговое значение – одно из наиболее широко используемых при решении задачи построения поисковых или навигационных сессий [15].

Для каждой такой пользовательской сессии определим реферальный лес (совокупность реферальных деревьев) следующим способом:

- Рассмотрим граф над множеством вершин, каждая из которых соответствует одному из посещений пользователя в рамках данной сессии и задана триплетом  $\langle t, \text{ref}, \text{targ} \rangle$  с компонентами  $t$  (временная метка),  $\text{ref}$  (страница-источник перехода),  $\text{targ}$  (страница-цель перехода).

- Ориентированное ребро из  $\langle t_1, \text{ref}_1, \text{targ}_1 \rangle$  в  $\langle t_2, \text{ref}_2, \text{targ}_2 \rangle$  создается в том, и только в том случае, когда выполняются следующие правила:

- $\text{targ}_1 = \text{ref}_2$ ;
- $t_1 < t_2$ ;
- в данной сессии не существует записи  $\langle t_3, \text{ref}_3, \text{targ}_3 \rangle$  такой, что  $\text{targ}_3 = \text{ref}_2$  и  $t_1 < t_3 < t_2$ .

- Руководствуясь этими правилами, рассмотрим последовательно все возможные пары посещений в текущей сессии и определим множество рёбер нашего графа.

В общем случае полученный граф будет лесом, так как отсутствие циклов гарантируется требованием упорядочивания посещений по времени.

Далее будем рассматривать связные компоненты этого графа (реферальные деревья) независимо.

Каждое из реферальных деревьев имеет выделенную корневую запись – это запись, в которую нет входящих ребёр, а её временная метка минимальна среди всех вершин данного дерева.

Определим тип каждого дерева по его корневой записи:

- Будем считать дерево начавшимся с поиска (search), если метка корневой записи дерева имеет вид `<*, ref = SERP, *>` или `<*, *, targ = SERP>`, где **SERP** – страница результатов поиска любой из поисковых систем.

- Для прочих деревьев началом считается timeout, если корневая запись в дереве имеет источник, отличный от пустого,

- и none в противном случае.

Наконец, определим навигационный маршрут для каждого посещения страницы (т.е. для каждого узла рассматриваемого графа) как путь от корня реферального дерева, относящегося к этому посещению, до самого этого посещения.

#### **4. Обобщённые навигационные маршруты**

Описанное в конце предыдущего раздела понятие навигационного маршрута, соответствующего конкретному посещению страницы, позволяет описать всю информацию о перемещениях с начала его сессии пользователя, приведших его к данной странице. Однако навигационные маршруты могут иметь произвольную длину и содержание, поэтому они плохо поддаются сравнению и классификации.

В настоящем разделе мы предлагаем понятие обобщённого навигационного маршрута, лишённое этих недостатков.

Определим обобщённый навигационный маршрут как совокупность трёх характеристик, рассчитываемых на основе навигационного маршрута:

- тип источника страницы (referrer);

- тип источника домена (domain referrer) – тип источника посещения первой страницы в маршруте, чей домен совпадает с доменом целевой страницы (т.е. тип страницы, с которой пользователь попал на домен целевой страницы);
- тип начала пути (тип корня реферального дерева) – search, none или timeout.

Типы начала пути были описаны в предыдущем разделе, а здесь мы формально определим типы referrer и domain referrer.

По аналогии с [7], мы будем рассматривать 7 типов значений источника целевой страницы: RefNone, RefSocialInternal, RefSocialExternal, RefSearch, RefMainPage, RefInternal и RefExternal. Описание этих типов может быть найдено в таблице 1 (см. также алгоритм 1 для определения типа referrer). Сначала осуществляется проверка, располагается ли страница-источник на одном домене второго уровня со страницей-получателем (Internal) или на разных (External). В первом случае дополнительно проверяется, была ли страница-источник главной страницей сайта (MainPage).

Далее, как было указано ранее, помечаются страницы-источники, принадлежащие поисковым системам и социальным сетям. Помимо информации о непосредственном источнике визита важно включить в рассмотрение более общую информацию о перемещениях пользователя, поэтому мы расширяем [7] путем добавления таких характеристик маршрута, как тип domain referrer (тип последней страницы, предшествующей попаданию на домен целевой страницы): DomNone, DomTimeout, DomSocial, DomSearch, DomOther; и тип начала пути: OriginNone, OriginTimeout, OriginSearch (см. описания этих типов в таблице 1).

Таким образом, каждый маршрут может соответствовать одному из  $3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$  обобщенных маршрутов. В следующем разделе мы покажем, что частоты реализации этих обобщенных маршрутов по отношению к конкретной странице можно использовать для определения роли этой страницы в сети Интернет.

Таблица 1. Значения характеристик обобщённого маршрута

<b>Тип источника страницы</b>	<b>Описание</b>
RefNone	Пустое значение
RefSocialInternal	Источник принадлежит тому же домену, и тот является социальной сетью
RefSocialExternal	Источник принадлежит другому домену, и тот является социальной сетью
RefSearch	Источник является страницей результатов поиска
RefMainPage	Источник является главной страницей того же домена
RefInternal	Источник является другой страницей того же домена
RefExternal	Источник является некоторой страницей другого домена (не поиском и не страницей социальной сети)
<b>Тип источника домена</b>	<b>Описание</b>
DomNone	Пустое значение
DomTimeout	Разрыв сессии произошёл по превышению паузы в 30 минут
DomSocial	Переход на целевой домен произошёл со страницы социальной сети
DomSearch	Переход на целевой домен произошёл со страницы результатов поиска
DomOther	Переход на целевой домен произошёл с другой страницы (не поиска и не социальной сети)
<b>Тип начала пути</b>	<b>Описание</b>
OriginNone	Пустое значение
OriginTimeout	Разрыв сессии произошёл по превышению паузы в 30 минут
OriginSearch	Началом сессии является поиск

Алгоритм 1. Определение типа источника

```
if referrer = none then
  type = RefNone;
else
  if referrer ∈ a social network then
    if referrer ∈ the same domain as the target
      page then
        type = RefSocialInternal;
      else
        type = RefSocialExternal;
  else
    if referrer ∈ search then
      type = RefSearch;
    else
      if referrer ∈ the same domain as the
        target page then
        if referrer = main page of the domain
          then
            type = RefMainPage;
          else
            type = RefInternal;
      else
        type = RefExternal;
```

На рис. 2 представлены примеры нескольких обобщенных маршрутов.

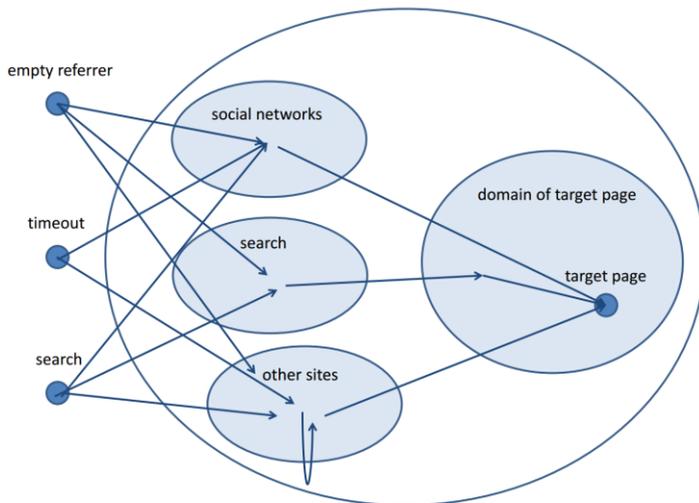


Рис. 2. Схема типов обобщённых маршрутов

Анализ экспериментальных данных показывает, что наиболее популярными обобщенными маршрутами являются:

1. (OriginTimeout, DomTimeout, RefInternal) – 29%.  
После длительного бездействия пользователь переходит по нескольким страницам в рамках одного домена.
2. (OriginNone, DomNone, RefInternal) – 19%.  
После прямого захода (через ручной ввод адреса или с помощью закладок) на домен пользователь перемещается по нескольким страницам на этом домене.
3. (OriginNone, DomNone, RefNone) – 7%.  
Пользователь попадает на целевую страницу за один шаг без referrer (через ручной ввод адреса или с помощью закладок).
4. (OriginNone, DomNone, RefSocialInternal) – 6%.  
Первый переход пользователя не содержит referrer, затем он перемещается по нескольким страницам, все из которых (включая целевую) расположены в социальной сети.

5. (OriginSearch, DomSearch, RefInternal) – 5%.  
Маршрут пользователя начинается на поиске, затем пользователь переходит на целевой домен, а затем перемещается в пределах домена до целевой страницы.
6. (OriginTimeout, DomTimeout, RefSocialInternal) – 5%.  
После длительного бездействия пользователь перемещается по нескольким страницам, все из которых (включая целевую) расположены в социальной сети.
7. (OriginTimeout, DomOther, RefExternal) – 4%.  
После длительного бездействия пользователь посещает одну или несколько страниц на одном или нескольких внешних доменах, и затем в один переход перемещается на целевую страницу на целевом домене.
8. (OriginNone, DomNone, RefMainPage) – 3%.  
Пользователь напрямую (через ручной ввод адреса или с помощью закладок) попадает на главную страницу целевого домена, а оттуда за один переход переходит на целевую страницу.
9. (OriginTimeout, DomTimeout, RefMainPage) – 3%.  
После длительного бездействия пользователь переходит на главную страницу целевого домена, а оттуда за один переход переходит на целевую страницу.
10. (OriginSearch, DomSearch, RefSearch) – 3%.  
Пользователь переходит на целевую страницу непосредственно со страницы результатов поиска поисковой системы.

## 5. Эксперименты

В данном разделе представлены некоторые экспериментальные результаты, подтверждающие важность и информативность выделенных нами характеристик обобщённых маршрутов (типы источников страницы, типы источников домена и типы начала пути) для описания паттернов навигации пользователей по сети и решаемых ими задач.

В частности, мы исследовали связь объективных свойств страницы с характеристиками наиболее популярных путей, при-

водящих к ней. Для этих целей рассматривались следующие базовые объективные характеристики страницы:

- Глубина вложенности страницы, рассчитанная как число символов «/» в ее адресе после домена (0 в случае главной страницы). Эта показатель, обычно называемый «глубиной адреса» (url depth), часто используется для аппроксимации реальной удалённости страницы от главной страницы сайта [19]. Мы предполагали, что этот показатель должен коррелировать с навигационной доступностью страницы, а она, в свою очередь, – отчасти определять навигационное поведение.

- Текущий возраст страницы, т.е. разность между последним днем анализируемого периода (31 октября 2013 года) и днем, когда адрес страницы был впервые обнаружен поисковой системой Яндекс (Яндекс интенсивно индексирует и переиндексирует сотни миллионов страниц ежедневно). Мы планировали проверить, влияет ли возраст страницы на то, какими способами пользователи на нее приходят.

- Размер домена, т.е. число документов, известных поиску, принадлежащих тому же домену, что и рассматриваемая страница. Эта характеристика определяет абсолютный размер домена, на котором находится страница, что, по нашему мнению, также может определять пользовательское навигационное поведение.

- Популярность страницы, оцениваемая как число различных пользователей (из нашей выборки), посетивших рассматриваемую страницу в течение анализируемого периода времени хотя бы 1 раз.

Результат анализа корреляции между перечисленными характеристиками страницы и характеристиками обобщённых маршрутов приведён на рис. 3. Здесь мы разделили значения каждой характеристики на 10 групп так, чтобы доля страниц в каждой корзине равнялась 10%. (Единственным исключением стала характеристика «глубина вложенности страницы», для которой использовалась шкала 0, 1, 2, 3, 4, 5+, так что последняя корзина содержит менее 10% страниц.) Затем были рассчитаны

доли каждого значения источников переходов на страницу в каждой корзине.

В качестве выводов анализа этих долей можно заключить:

- Страницы, более близкие к главной странице сайта, принимают большую долю внешнего трафика и меньшую долю внутреннего трафика: логично, что более глубоко размещенные страницы чаще достигаются путем внутренней навигации по сайту.

- Прямые заходы (с пустым значением источника) чаще всего происходят на главные страницы сайтов (или на ближайшие к ним страницы). Главные страницы также имеют большую долю поискового трафика, чем более глубокие страницы.

- Популярные страницы имеют высокую долю переходов с главной страницы (что логично, так как на главной странице обычно размещают ссылки на наиболее важные страницы сайта). Интересно, что менее популярные страницы имеют большую долю поискового трафика, возможно, по той причине, что их сложно обнаружить другим способом.

- Страницы с более крупных доменов получают больше внутреннего и меньше внешнего трафика. Доля переходов с главной страницы больше для страниц с небольших доменов (так как число ссылок, которое можно эффективно разместить на главной странице, ограничено).

- Более старые страницы получают большую долю внешнего трафика (старые страницы со временем становятся лучше известны за пределами собственного сайта). Старые страницы также получают большую долю визитов с пустыми источниками (т.е. через закладки или с прямым набором адреса вручную). Для молодых страниц более свойственны переходы с главной страницы сайта (например, ссылки на новости с главной страницы новостного сайта).

Далее, полностью аналогично рассматривалась взаимосвязь характеристик страниц с типами источников домена и типами начала пути. Корреляции между этими показателями можно изучить на рис. 4 и рис. 5.

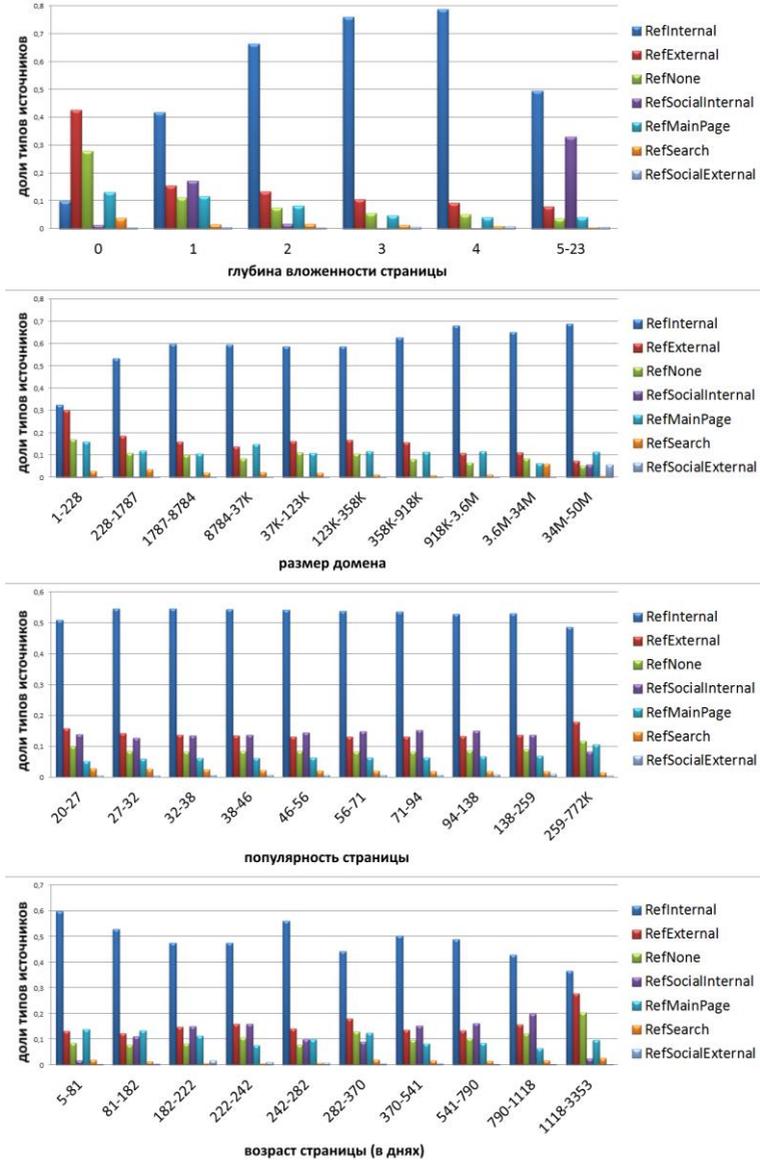


Рис. 3. Связь типов источников и свойств страниц

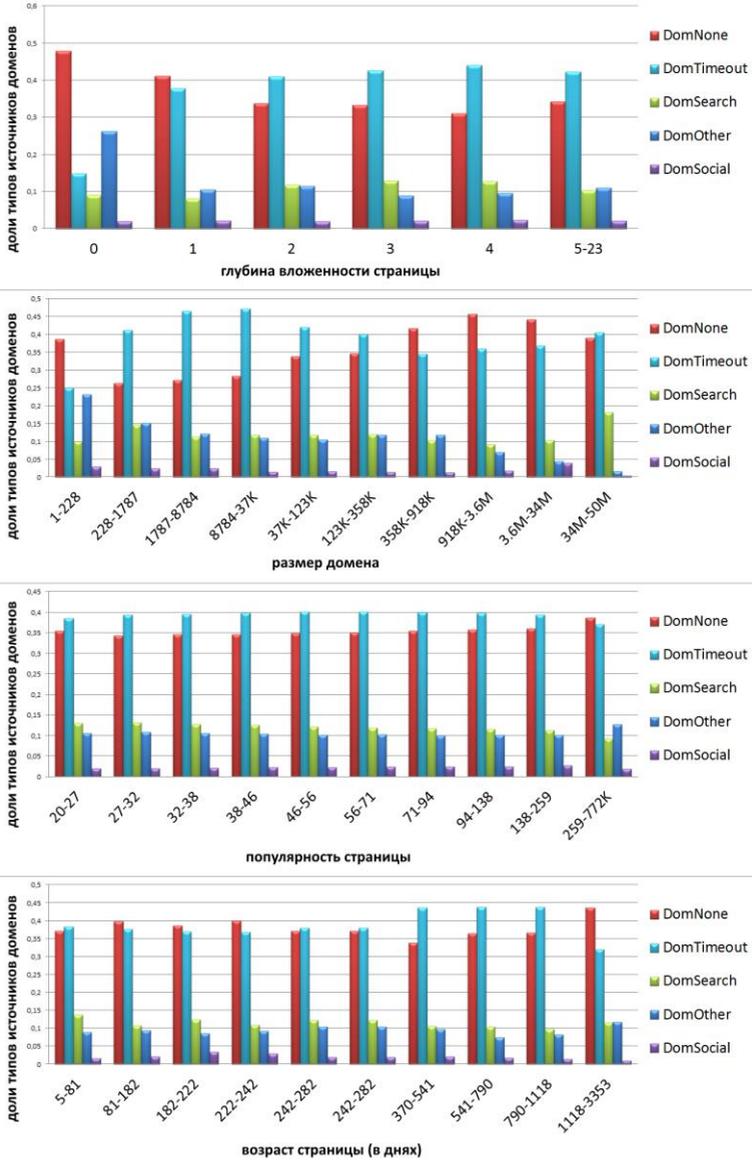


Рис. 4. Связь типов источников доменов и свойств страниц

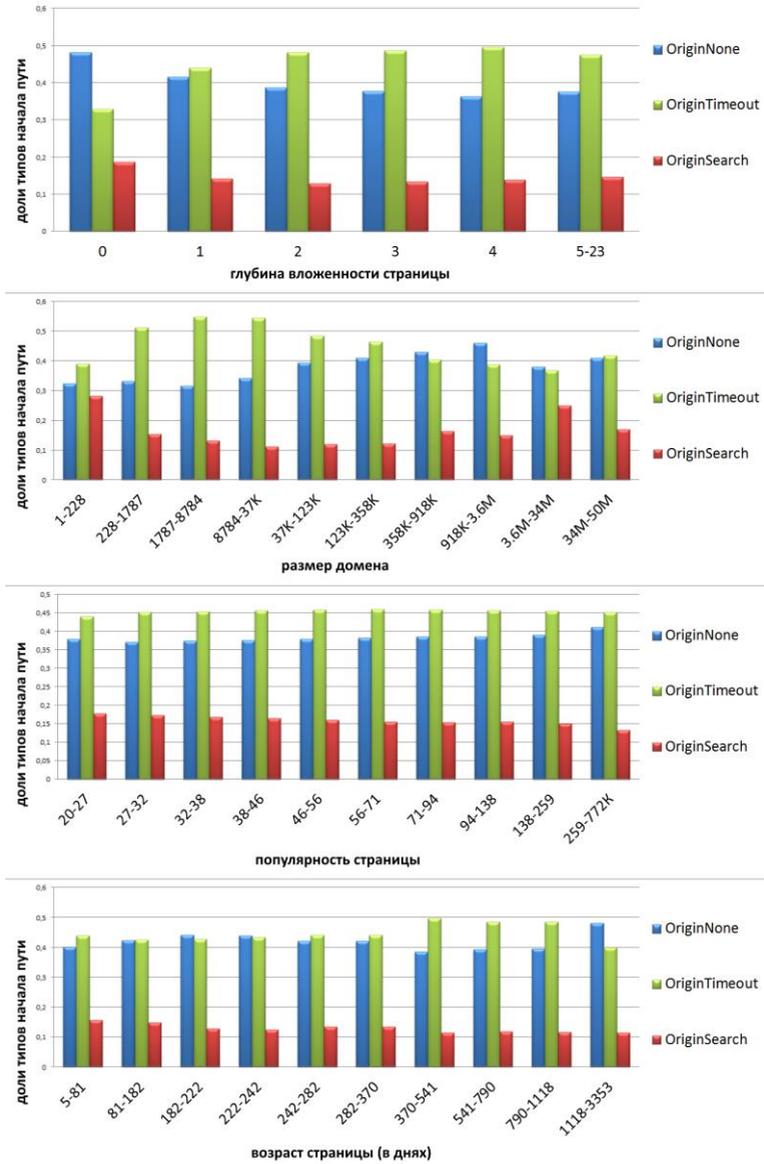


Рис. 5. Связь типов начала пути и свойств страниц

Некоторые наблюдения:

- Более старые страницы получают больший процент поисковых переходов, однако пути на молодые страницы чаще имеют поиск как начало маршрута, хотя и содержат промежуточные переходы.

- Важной представляется связь между глубиной вложенности страницы и долей поискового трафика в визитах на нее.

Как было отмечено ранее, наибольшую долю поисковых визитов имеют главные страницы сайтов, с другой стороны, наибольшая доля переходов, в которых поисковым был предварительный заход на домен, имеется у страниц с глубиной вложенности 3–4 от главной страницы. Это может соответствовать сценарию, когда пользователь достигает заглавной страницы сайта с помощью навигационного поиска, а затем перемещается к целевой странице, используя внутреннюю навигацию сайта.

## **6. Анализ множества страниц сети Интернет**

### *6.1. КЛАСТЕРИЗАЦИЯ*

В предыдущем разделе было продемонстрировано, что выделенные характеристики маршрутов коррелируют с базовыми характеристиками страниц. В этом разделе излагаются результаты попытки выявления групп страниц, «похожих» в терминах характеристик входящего трафика, а именно, кластеризации страниц согласно распределениям частот входящих обобщенных маршрутов.

Как было описано в разделе 3, в настоящем исследовании используется 105 обобщенных маршрутов. Таким образом, каждой странице может быть сопоставлен 105-мерный вектор длины 1, каждая координата которого равна доле входящих визитов по соответствующему обобщенному маршруту среди всех входящих визитов на эту страницу. Для дальнейших экспериментов мы сформировали из наших входных данных равномерно случайную выборку размером в 500 тысяч страниц и кластеризовали их с помощью алгоритма кластеризации *expectation-maximization*. Число кластеров определялось автоматически путем оптимизации с помощью перекрёстной проверки. Результа-

том кластеризации стали 7 различных кластеров. В таблице 2 представлены размеры полученных кластеров.

Таблица 2. Размеры кластеров

Кластер	Число страниц	Число визитов	Число визитов на страницу
1	6,8%	12,8%	311
2	4,1%	7,6%	301
3	49,6%	39,3%	130
4	10,6%	14,1%	219
5	6,2%	6,2%	164
6	21,6%	18%	137
7	1,1%	1,9%	291

С целью проверки устойчивости результатов кластеризации вся процедура была повторена для независимой случайной выборки из 500 тысяч страниц. Результатом вновь оказались 7 кластеров с сопоставимыми размерами, центрами и свойствами. Размеры кластеров двух сравниваемых разбиений и евклидовы расстояния между их центроидами приведены в таблице 3.

Таблица 3. Сопоставление кластеризаций двух выборок

	<b>7%</b>	<b>4%</b>	<b>49%</b>	<b>11%</b>	<b>6%</b>	<b>22%</b>	<b>1%</b>
<b>7%</b>	<b>0,08</b>	0,88	1,14	0,95	1,19	0,90	0,89
<b>4%</b>	0,93	<b>0,02</b>	0,88	0,68	0,91	0,51	0,88
<b>48%</b>	1,17	0,86	<b>0,01</b>	0,42	1,21	0,46	1,03
<b>10%</b>	0,98	0,66	0,67	<b>0,25</b>	1,05	0,46	0,81
<b>7%</b>	1,22	0,91	1,22	1,07	<b>0,00</b>	1,00	1,06
<b>23%</b>	0,96	0,53	0,43	0,30	1,01	<b>0,04</b>	0,55
<b>1%</b>	0,91	0,79	1,01	0,74	1,13	0,51	<b>0,03</b>

Для проверки независимости результатов кластеризации от использованного алгоритма была дополнительно предпринята кластеризация тех же выборок с помощью алгоритма *K-means* с числом кластеров, заданным равным 7. Полученные кластеры также оказались близки к результатам EM-кластеризации. Оценка согласованности Rand index [14] для между

EM-кластеризацией и  $K$ -means-кластеризацией для двух анализируемых независимых случайных выборок составила 0,81 в первом и 0,83 во втором случае.

## 6.2. ОПИСАНИЕ КЛАСТЕРОВ

В данном подразделе приводятся описания полученных кластеров, включающие в себя значения ряда их характеристик и нашу интерпретацию их специфики. Рассматривались следующие характеристики:

- типичные домены;
- типичные характеристики маршрутов, ведущих на страницы кластера;
- типичные обобщенные маршруты.

Для определения списка типичных доменов воспользуемся следующей логикой:

- Для каждого из доменов  $D$  в нашей выборке построим распределение множества его страниц по кластерам.
- Обозначим за  $DC$  долю страниц домена  $D$ , оказавшихся в кластере.
- Упорядочим для каждого кластера  $C$  все домены по убыванию значения  $DC$ .
- Будем называть наиболее типичными доменами кластера  $C$  первые  $N$  доменов из этого упорядоченного списка.

Понятия «типичные маршруты» и «характеристики маршрутов» вводятся по аналогии. Далее рассматриваются по 25 типичных для кластера доменов и по 5 типичных для кластера характеристик и обобщенных маршрутов.

Тематики типичных доменов кластеров представлены в таблице 4. Отметим, что имена доменов скрыты, но оставлены хорошо передающие их специфику описания. Типичные характеристики маршрутов кластеров представлены в таблице 4.

Таблица 4. Тематики типичных доменов кластеров

<b>Кластер</b>	<b>Тематики типичных доменов</b>
1	Онлайн-магазины Спортивные сайты
2	Форумы на различные темы
3	Продажа авто Мобильные сайты Коллективная закупка
4	Новостные сайты
5	Сайты для взрослых
6	Крупные социальные сети
7	Сервисы поисковых порталов

Таблица 5. Типичные характеристики маршрутов кластеров

<b>Кластер</b>	<b>Типичные характеристики</b>
1	RefMainPage, DomSearch, RefInternal, OriginTimeout, OriginSearch.
2	RefMainPage, DomSocial, RefNone, OriginTimeout, DomSearch.
3	RefInternal, OriginTimeout, OriginNone, DomSocial, DomNone.
4	RefSearch, DomSearch, RefNone, OriginSearch, RefExternal.
5	RefSearch, OriginSearch, DomSocial, RefNone, DomNone.
6	RefSocialInternal, RefExternal, DomOther, RefSearch, RefSocialExternal.
7	RefSocialExternal, DomSocial, RefSearch, OriginSearch, RefNone.

Другие свойства кластеров, в частности, средняя глубина вложенности страниц кластера, средний возраст страниц кластера и средний размер домена страниц кластера, представлены в таблице 6. В этой же таблице приводятся средние длины маршрутов, входящих на страницы кластера.

Таблица 6. Количественные характеристики кластеров

Кластер	Средняя глубина страницы	Средний возраст страницы	Размер домена	Длина пути (mean/median)
1	2,07	494 дня	3М	5,0 / 3
2	1,12	570 дней	0,5М	5,5 / 3
3	2,51	418 дней	6,7М	9,8 / 5
4	2,07	678 дней	2,3М	4,4 / 2
5	1,84	534 дня	2,2М	6,1 / 3
6	1,21	482 дня	2,9М	13,4 / 3
7	1,61	469 дней	6,7М	5,0 / 2

Далее следуют описания полученных кластеров. Каждому из кластеров присвоено условное название, отражающее специфику наиболее типичных для кластера страниц.

Например, кластер 4 получил имя «Новости», хотя это не означает, что он состоит только лишь из новостных страниц. Это означает, что в этом кластере много новостных страниц и что распределение обобщенных маршрутов у страниц из этого кластера типично для новостных страниц.

### 6.2.1. КЛАСТЕР 1: «ОНЛАЙН-МАГАЗИНЫ»

Данный кластер в основном состоит из страниц товаров, размещенных на сайтах интернет-магазинов. Страницы кластера чаще всего достигаются пользователем через поиск или другую форму навигации на главной странице соответствующего сайта. Сюда, например, относятся онлайн-магазины с формой поиска, а также спортивные сайты с формой для организации ставок на результаты будущих спортивных игр. Для всех страниц кластера в среднем 22% входящего трафика является переходами с главной страницы сайта, а еще 71% – переходами с других внутренних страниц того же сайта. Наиболее типичный путь к странице этого кластера выглядит так: чаще всего пользователи попадают на целевую страницу через главную страницу сайта, куда в свою очередь переходят с поисковой системы или вручную. Аналогичные выводы можно получить, анализируя наиболее типичные характеристики страниц кластера. Согласно таб-

лице 2, в данный кластер также входят в среднем достаточно популярные страницы.

#### *6.2.2. КЛАСТЕР 2: «ФОРУМЫ»*

Данный кластер в основном состоит из страниц онлайн-форумов. Его страницы достаточно популярны, хотя и расположены на относительно небольших доменах. Типичный маршрут к такой странице выглядит как переход на главную страницу сайта тем или иным способом, а затем переход на целевую страницу – напрямую или через одну или несколько промежуточных страниц того же домена. Вместе с первым кластером данный покрывает почти весь трафик, проходящий через главные страницы. Из таблицы 6 также следует, что страницы данного кластера очень близки к главной странице по уровню вложенности, что достаточно реалистично для форумов. В среднем страницы этого кластера моложе, чем в других кластерах.

#### *6.2.3. КЛАСТЕР 3: «НЕДОСТУПНЫЕ ДЛЯ ПОИСКА»*

Это самый крупный кластер из получившихся. Он состоит из страниц, практически лишенных поискового трафика. В основном страницы данного кластера расположены на крупных доменах и достаточно сильно удалены от главной страницы. Пути, ведущие на эти страницы, обычно достаточно длинны и почти обязательно проходят через внутренние страницы сайта. Домены данного кластера достаточно разнообразны, так что выделить наиболее типичные затруднительно; однако среди прочих можно упомянуть крупный портал автомобильной направленности, мобильные сайты и онлайн-игры, а также сайты для организации коллективных закупок. В частности, можно отметить, что часть из этих сайтов имеют зоны, закрытые для незарегистрированных пользователей (и для индексации поисковыми системами). Так или иначе, данный кластер представляет наибольший интерес для возможного развития качества существующих навигационных сервисов.

#### *6.2.4. КЛАСТЕР 4: «НОВОСТИ»*

Этот кластер состоит в основном из страниц, принадлежащих новостным сайтам. Пути, ведущие к ним, обычно коротки: их медианная длина равна двум переходам. Пользователи часто используют поисковые системы для попадания на эти страницы.

#### *6.2.5. КЛАСТЕР 5: «САЙТЫ ДЛЯ ВЗРОСЛЫХ»*

Наиболее типичными для данного кластера являются страницы «взрослых» сайтов и других сайтов развлекательной направленности. Анализ типичных маршрутов позволяет понять, что есть два основных, приблизительно одинаково популярных пути достижения этих страниц – через поисковую систему и через главную страницу.

#### *6.2.6. КЛАСТЕР 6: «СОЦИАЛЬНЫЕ СЕТИ»*

Типичные домены этого кластера принадлежат социальным сетям и файловым хостингам. Причина их попадания в один кластер заключается в том, что в современной сети Интернет «тяжелый» контент (видео, музыка, изображения) часто сохраняется на специальных файловых хостингах, а ссылки на него распространяются через социальные сети. Поэтому распределение путей, ведущих на подобные страницы с контентом, похоже на распределение путей, ведущих на страницы социальных сетей. Страницы этого кластера обычно имеют малую глубину вложенности, но при этом пути к некоторым из них могут быть очень длинными (13,4 перехода в среднем), что может объясняться спецификой поведения пользователей социальных сетей.

#### *6.2.7. КЛАСТЕР 7: «СЕРВИСЫ ПОИСКОВЫХ СИСТЕМ»*

Анализ типичных доменов показывает наличие большого количества поддоменов популярных поисковых систем, в том числе: [play.google.com](http://play.google.com), [translate.google.com](http://translate.google.com), [docs.google.com](http://docs.google.com), [disk.yandex.ru](http://disk.yandex.ru), [go.mail.ru](http://go.mail.ru) и пр. Типичные пути к странице этого кластера проходят через поиск или через социальные сети; во-первых, очевидно, что на эти страницы можно перейти непосредственно с поисковых систем; во-вторых, ссылки на подобные страницы достаточно часто распространяются через соци-

альные сети (например, на сайты docs.google.com или disk.yandex.ru). Страницы этого кластера обычно расположены на больших доменах, и пути, ведущие к ним, достаточно коротки.

### 6.3. АНАЛИЗ ПОИСКОВОГО ТРАФИКА

В настоящем разделе предлагается более детальный анализ распределения поискового трафика по выявленным кластерам. На рис. 6 (сверху) отражено, как частота появления каждой из поисковых характеристик обобщенного маршрута (OriginSearch, DomSearch, RefSearch) распределена по рассматриваемым кластерам, например: 24% переходов с характеристикой RefSearch принадлежат кластеру 4.

Изучение рис. 6 позволяет сделать следующие выводы: чаще всего пользователи используют поисковые системы для попадания на новости (Cluster 4), страницы социальных сетей (Cluster 6) и взрослый контент (Cluster 5). Интересно, что, несмотря на то, что кластер 3 содержит примерно половину страниц (и 39% всех пользовательских визитов), он покрывает лишь 1% путей с характеристикой RefSearch, т.е. пользователи почти никогда не попадают на страницы этого кластера с помощью поисковых систем.

Рис. 6 (снизу) демонстрирует, какая доля маршрутов каждого кластера имеет ту или иную поисковую характеристику (OriginSearch, DomSearch, RefSearch): так, например, более 30% путей, ведущих в кластер 7, начинаются с поисковой системы.

### 6.4. АНАЛИЗ РОЛИ ХАРАКТЕРИСТИК

Для оценки влияния характеристик обобщенных маршрутов на результаты кластеризации мы рассчитали условную энтропию кластеров при условии данной характеристики. А именно, для каждой характеристики мы рассмотрели две случайные переменные – cluster, принимающую 7 различных значений, и feature, принимающую значения 0 и 1. Значения условной энтропии приведены в таблице 7.

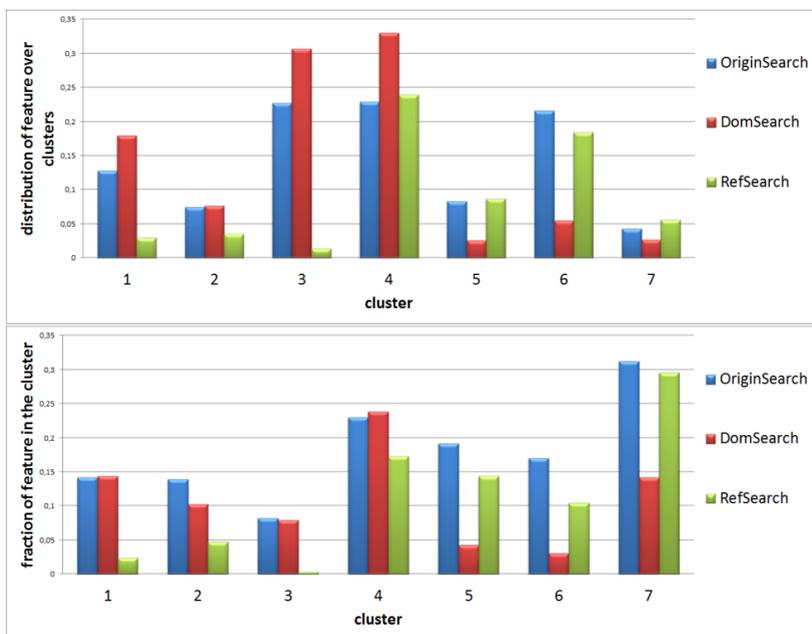


Рис. 6. Связь типов начала пути и свойств страниц

Таблица 7. Условная энтропия кластеров

Характеристика	Условная энтропия
RefInternal	0,606
RefSocialInternal	0,634
RefMainPage	0,684
RefSearch	0,702
RefExternal	0,708
DomSearch	0,711
OriginSearch	0,715

Чем меньше значение энтропии для характеристики, тем более информативна эта характеристика для кластеризации. Например, характеристики RefInternal и RefSocialInternal позволяют разделить кластеры 3 и 6 между собой и отделить их от других кластеров, характеристика RefMainPage важна для кластеров 1 и 2, а RefSearch – для кластеров 4 и 5. Согласно табли-

це 6 характеристики, связанные с типом *referrer*, наиболее важны для кластеризации – это ожидаемый результат, так как очевидно, что ближайшие соседи лучше характеризуют роль страницы в сети Интернет.

## **7. Заключение и выводы**

В данной работе мы предложили новый метод анализа пользовательского навигационного поведения. В частности мы предложили классификацию маршрутов, ведущих к странице, акцентированную на ключевых моментах: начало пути, попадание на целевой домен, попадание на целевую страницу. На основании распределения входящих визитов по предложенным типам маршрутов, все достаточно популярные страницы российского сегмента сети Интернет были кластеризованы на несколько групп по специфике навигационного поведения пользователей по отношению к ним. Нам удалось интерпретировать полученные кластеры и сопоставить им разумные описания, связанные с типами сайтов: онлайн-магазины, форумы, социальные сети, взрослый контент, новости, сервисы поисковых порталов. Мы также обнаружили крупный кластер страниц, почти не получающих входящих визитов с поисковых систем.

Среди перспективных направлений дальнейших исследований можно отметить:

- Проведение более внимательного и детального анализа третьего кластера (страницы, недоступные для поиска) с целью выяснения, что препятствует их появлению в поисковых сценариях, какую часть из этих страниц можно включить в обслуживание поисковой системой и каким образом (например, с помощью создания новых сервисов).

- Проведение более широкого исследования, в котором каждая страница будет характеризоваться не только спектром путей, приводящих на нее, но и спектром исходящих путей – что позволит более точно определить роль каждой страницы в навигационном поведении пользователей сети Интернет.

## Литература

1. BAEZA-YATES R., JR A.P., ZIVIANI N. *The evolution of web content and search engines* // Proc. of the 8th ACM Workshop on Web Mining and Web Usage Analysis. – 2006. – P. 68–73.
2. BAILEY P., WHITE R.W., LIU H., KUMARAN G. *Mining historic query trails to label long and rare search engine queries* // ACM Transactions on the Web. – 2010. – Vol. 4(4). – P. 1–27.
3. BILENKO M., WHITE R.W. *Mining the search trails of surfing crowds: identifying relevant websites from user activity* // Proc. of the 17th International Conference on World Wide Web. – 2008. – P. 51–60.
4. CHO J., ROY S. *Impact of search engines on page popularity* // Proc. of the 13th International Conference on World Wide Web. – 2004. – P. 20–29.
5. GOEL S., HOFMAN J.M., SIRER M.I. *Who does what on the web: A large-scale study of browsing behavior* // Proc. of the 6th International AAAI Conference on Weblogs and Social Media. – 2012. – P. 4–6.
6. IEONG S., MISHRA N., SADIKOV E., ZHANG L. *Domain bias in web search* // Proc. of the 5th ACM International Conference on Web Search and Data Mining. – 2012. – P. 413–422.
7. KUMAR R., TOMKINS A. *A characterization of online browsing behavior* // Proc. of the 19th International Conference on World Wide Web. – 2010. – P. 561–570.
8. LESKOVEC J., BACKSTROM L., KUMAR R., TOMKINS A. *Microscopic evolution of social networks* // Proc. of the 14th ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining. – 2008. – P. 462–470.
9. LIU M., CAI R., ZHANG M., ZHANG L. *User browsing behavior-driven web crawling* // Proc. of the 20th ACM International Conference on Information and Knowledge Management. – 2011. – P. 87–92.

10. LIU Y., GAO B., LIU T.-Y., ZHANG Y., MA Z., HE S., LI H. *Browserank: letting web users vote for page importance* // Proc. of the 31st Annual International ACM SIGIR Conference on Research and Development in Information Retrieval. – 2008. – P. 451–458.
11. MEISS M.R., MENCZER F., FORTUNATO S., FLAMMINI A., VESPIGNANI A. *Ranking web sites with real user traffic* // Proc. of the 9th International Conference on Web Search and Web Data Mining. – 2008. – P. 65–76.
12. OSTROUMOVA L., BOGATYY I., CHELNOKOV A., TIKHONOV A., GUSEV G. *Crawling policies based on web page popularity prediction* // In Advances in Information Retrieval, Lecture Notes in Computer Science. – 2014. – Vol. 8416. – P. 100–111.
13. QIU F., LIU Z., CHO J. *Analysis of user web traffic with a focus on search activities* // WebDB. – 2005. – P. 103–108.
14. RAND W.M. *Objective criteria for the evaluation of clustering methods* // J. of the American Statistical Association. – 1971. – Vol. 66(336). – P. 846–850.
15. SPINK A., PARK M., JANSEN B.J., PEDERSEN J. *Multitasking during web search sessions* // In Information Processing and Management. – 2006. – Vol. 42(1). – P. 264–475.
16. TOLSTIKOV A., SHAKHRAY M., GUSEV G., SERDYUKOV P. *Through-the-looking glass: utilizing rich post-search trail statistics for web search* // Proc. of the 22nd ACM International Conference on Information and Knowledge Management. – 2013. – P. 1897–1900.
17. WEBER I., JAIMES A. *Who uses web search for what: and how* // Proc. of the 4th ACM International Conference on Web Search and Data Mining. – 2011. – P. 15–24.
18. WHITE R.W., HUANG J. *Assessing the scenic route: measuring the value of search trails in web logs* // Proc. of the 33rd International ACM SIGIR Conference on Research and Development in Information Retrieval. – 2010. – P. 587–594.
19. ZHU T., GREINER R., HÄUBL G. *Learning a Model of a Web User's Interests* // Proc. of the 9th International Conference on User Modeling. – 2003. – P. 65–75.

20. ZHUKOVSKIY M., KHROPOV A., GUSEV G., SERDYUKOV P. *Introducing search behavior into browsing based models of page's importance* // Proc. of the 22nd International Conference on World Wide Web Companion. – 2013. – P. 129–130.

## **ANALYSIS OF WEB STRUCTURE USING GENERALIZED NAVIGATIONAL ROUTES**

**Aleksei Tikhonov**, Yandex, Moscow (altsoph@yandex-team.ru).

*Abstract: Online search engines play an increasingly pervasive role in navigating users to the web pages of their interest. Given the ambitions of any major search engine to be a “one-stop service” for all user needs, it is important to understand the ways users find content on the Web. The proposed way of generalized description of navigational patterns used to learn the ways users approach different pages on the Web depending on the characteristics of these pages. We conducted a comprehensive large-scale study of navigational profiles of different web pages and found that the Web consists of several typical non-overlapping clusters formed by pages of similar ranges of incoming traffic. These clusters can be characterized by the functionality and the purpose of their pages. This approach is useful for finding user tasks that can be supported by search systems but not currently covered by them.*

**Keywords:** internet analysis, user behaviour, internet navigation, web clusterization.

*Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии В. В. Мазаловым.*

*Поступила в редакцию 24.05.2016.  
Опубликована 30.09.2016.*

УДК 519.833.2

ББК 32.81

## ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ ВОЗБУЖДЕНИЕМ ТОЛПЫ В НЕПРЕРЫВНОМ ВРЕМЕНИ

**Барабанов И. Н.<sup>1</sup>, Новиков Д. А.<sup>2</sup>**  
(ФГБУН Институт проблем управления  
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

*Формулируется и решается задача динамического управления возбуждением толпы в непрерывном времени за счет выбора числа внедряемых в каждый момент времени «провокаторов».*

Ключевые слова: коллективное поведение, модель Грановеттера, стохастические модели управления толпой.

### 1. Введение

Задачи управления *конформным* принятием решений агентами, осуществляющими бинарный выбор – «бездействовать» или «действовать», - исследуются в рамках моделей *коллективного поведения*, основывающихся на классической модели М. Грановеттера [9] (см. обзоры в [3, 7]). В этой модели предполагается, что каждый *агент* характеризуется собственным *порогом* (числом из отрезка  $[0; 1]$ ) и принимает решение действовать, если действует превышающая этот порог доля его окружения (в противном случае агент бездействует). Динамика доли действующих агентов определяется начальным ее значением и функцией распределения порогов агентов. Следовательно, целенаправленное («экзогенное») изменение числа действующих

---

<sup>1</sup> Иван Николаевич Барабанов, заместитель директора по научной работе ИПУ РАН, кандидат физико-математических наук (ivbar@ipu.ru).

<sup>2</sup> Дмитрий Александрович Новиков, заместитель директора по научной работе ИПУ РАН, доктор технических наук, профессор, чл.-корр. РАН (novikov@ipu.ru).

(в начальный и/или в последующие моменты времени) агентов приводит к изменению динамики поведения всего их коллектива.

Если речь идет о коллективном поведении агентов, составляющих *толпу* [4], то управление содержательно заключается в выборе доли внедряемых в толпу агентов, которые всегда действуют (условно таких агентов называют «*провокаторами*»). Задачи данного класса можно условно классифицировать по следующим основаниям: *дискретность* или *непрерывность* времени, однократность или многократность осуществления управленческих воздействий (соответственно – *постоянные управления* и *управления, зависящие от времени*), *программное* или *позиционное управление*.

В статье [4] сформулирована и решена задача выбора управляющим органом – *центром* – оптимального значения однократного (постоянного во времени) управленческого воздействия на толпу, функционирующую в дискретном времени. В статье [1] эта задача обобщена на случай многократных программных управленческих воздействий, реализуемых также в дискретном времени.

Настоящая работа посвящена моделям управления толпой с непрерывным временем.

Собственно модель толпы (обобщение модели Грановеттера на случай непрерывного времени) заимствована из работ [6, 8]. Так, считается, что если известна *доля*  $x_0 \in [0; 1]$  агентов, действующих в начальный (нулевой) момент времени, то в дальнейшем ее эволюция во времени  $x(t)$ ,  $t \geq 0$ , описывается уравнением

$$(1) \quad \dot{x} = F(x) - x,$$

где  $F(\cdot)$  – известная непрерывная функция, обладающая свойствами функции распределения и содержательно являющаяся функцией распределения порогов агентов [3, 4], такая что  $F(0) = 0$ ,  $F(1) = 1$ . Введение управления (добавление провокаторов)  $u(t) \in [0; 1]$  по аналогии с тем, как это делается в [1, 4], приводит к управляемой динамической системе

$$(2) \quad \dot{x} = u(t) + (1 - u(t))F(x) - x.$$

Изложение материала настоящей работы следующее. Во втором разделе изучаются множество достижимости и свойство «монотонности траекторий» по управлению. Затем (в третьем разделе) в соответствии с приведенной выше системой классификаций исследуется случай постоянных управлений. Четвертый раздел посвящен моделям, в которых цель управления заключается в возбуждении всей толпы. В заключительном (пятом) разделе рассматривается случай позиционного управления.

## 2. Множество достижимости и монотонность

Сформулируем следующую лемму, результат которой используется ниже.

Рассмотрим функции  $G_1(x, t)$  и  $G_2(x, t): R \times [t_0, +\infty)$  – непрерывно дифференцируемые по  $x$  и непрерывные по  $t$ . Кроме того, будем считать, что функции  $G_1$  и  $G_2$  таковы, что решения задач Коши для дифференциальных уравнений  $\dot{x} = G_i(x, t)$ ,  $i = 1, 2$ , с начальными условиями  $(t_0, x_0)$ ,  $x_0 \in R$  бесконечно продолжимы по  $t$ . Обозначим эти решения задач Коши  $x_i(t, (t_0, x_0))$ ,  $i = 1, 2$ , соответственно.

**Лемма.** Пусть  $\forall x \in R, \forall t \geq t_0 \rightarrow G_1(x, t) > G_2(x, t)$ . Тогда  $\forall t > t_0 \rightarrow x_1(t, (t_0, x_0)) > x_2(t, (t_0, x_0))$ .

Доказательство леммы приведено в Приложении.

Заметим, что для справедливости утверждения леммы не обязательно рассматривать неравенство  $G_1(x, t) > G_2(x, t)$  при всех  $x \in R$ , достаточно ограничиться объединением множеств достижимости уравнений  $\dot{x} = G_i(x, t)$ ,  $i = 1, 2$  при выбранных значениях начальных условий  $(t_0, x_0)$ .

Обозначим через  $x_i(u)$  значение доли действующих агентов в момент времени  $t$  при использовании управления  $u(\cdot)$ . В силу того, что  $\forall x \in [0; 1] F(x) \leq 1$ , а правая часть выражения (1) монотонно возрастает по  $u$  при каждом  $t$ , справедливо следующее

**Утверждение 1.** Пусть функция  $F(x)$  такова, что  $F(x) < 1$  при  $x \in [0; 1)$ . Если  $\forall t \geq t_0 \rightarrow u_1(t) > u_2(t)$  и  $x_0(u_1) = x_0(u_2)$  ( $x_0 < 1$ ), то  $\forall t > t_0 x_i(u_1) > x_i(u_2)$ .

Действительно, в силу условий утверждения при всех  $t$  и  $x < 1$  выполняется неравенство  $u_1(t) + (1 - u_1(t))F(x) - x > u_2(t) + (1 - u_2(t))F(x) - x$ , поскольку выпуклая комбинация различных чисел (1 и  $F(x)$ ) строго монотонна. Точка  $x = 1$  является положением равновесия (1) при любых управлениях  $u(t)$ , следовательно, она не достижима ни при каких конечных  $t$ . Применяя лемму, получим, что при одинаковых начальных условиях  $x_i(u_1) > x_i(u_2)$ .

Предположим, что на управления наложено *ограничение*:

$$(3) \quad u(t) \leq \Delta, \quad t \geq t_0,$$

где  $\Delta \in [0; 1]$  – некоторая константа.

Далее будем считать, что  $t_0 = 0$ ,  $x(t_0) = x(0) = 0$ , т.е. в начальный момент времени толпа не возбуждена.

Если *критерием эффективности* является доля агентов, действующих в заданный момент времени  $T > 0$ , то соответствующая *задача терминального управления* имеет вид

$$(4) \quad \begin{cases} x_T(u) \rightarrow \max_{u^{(\cdot)}} \\ (2), (3). \end{cases}$$

Приведем ряд утверждений (утверждения 2–4), являющихся аналогами соответствующих утверждений в [1].

Утверждение 2. Решение задачи (4) имеет вид:  $u(t) = \Delta$ ,  $t \in [0; T]$ .

Обозначим через  $\tau(\hat{x}, u) = \min \{t \geq 0 \mid x_t(u) \geq \hat{x}\}$  самый ранний момент времени, в который доля действующих агентов достигнет заданного значения  $\hat{x}$  (если множество  $\{t \geq 0 \mid x_t(u) \geq \hat{x}\}$  пусто, то положим  $\tau(\hat{x}, u) = +\infty$ ). В рамках рассматриваемой модели можно сформулировать следующую *задачу о быстродействии*:

$$(5) \quad \begin{cases} \tau(\hat{x}, u) \rightarrow \min_{u^{(\cdot)}} \\ (2), (3). \end{cases}$$

Утверждение 3. Решение задачи (5) имеет вид:  $u(t) = \Delta$ ,  $t \in [0; \tau]$ .

Содержательно, как и в моделях с дискретным временем [1], в рамках задачи (4) или (5) центру наиболее выгодно внедрить в толпу в начальный момент времени максимальное допустимое число провокаторов и больше ничего не делать (не пытаться, например, потом уменьшать, а затем опять увеличивать число внедренных провокаторов в последующие моменты времени). Такая структура оптимального решения обусловлена тем, что в моделях (4) и (5) центр не несет затрат на внедрение и/или содержание провокаторов.

Исследуем свойства множества достижимости  $D = \bigcup_{u(t) \in [0; \Delta]} x_T(u)$ ,  $D \subseteq [0; 1]$  в силу того, что правая часть динамической системы (2) обращается в ноль при  $x = 1$ .

С точки зрения возможных приложений значительный интерес представляет случай так называемых *постоянных управлений*:  $u(t) = v$ ,  $t \geq 0$ , при использовании которых доля  $v \in [0; \Delta]$  провокаторов во все моменты времени одинакова. Обозначим через  $x_T(\Delta) = x_T(u(t) \equiv \Delta)$ ,  $t \in [0; T]$ , через  $D_0 = \bigcup_{v \in [0; \Delta]} x_T(v) \subseteq [0; 1]$  -

множество достижимости при постоянных управлениях. Так как  $x_T(v)$  - монотонное (в силу утверждения 1) непрерывное отображение  $[0; \Delta]$  в  $[0; 1]$ , причем  $x_T(0) = 0$ , то справедливо следующее утверждение.

Утверждение 4.  $D_0 = [0; x_T(\Delta)]$ .

Рассмотрим модели, учитывающие *затраты центра на управление*. При фиксированной «цене»  $\lambda \geq 0$  содержания одного провокатора в единицу времени затраты центра за время  $\tau \geq 0$  примут вид:

$$(6) \quad c_\tau(u) = \lambda \int_0^\tau u(t) dt .$$

Пусть заданы монотонные функции: терминальный выигрыш центра  $H(\cdot)$  от доли действующих агентов и текущий выигрыш  $h(\cdot)$ . Тогда «обобщением» задачи (4) будет задача

$$(7) \quad \begin{cases} H(x_T(u)) + \int_0^T h(x(t)) dt - c_T(u) \rightarrow \max_u, \\ (2), (3). \end{cases}$$

Если заданы ограничения на «суммарные» затраты  $C$  центра, то задачу типа (7) можно сформулировать в виде

$$(8) \quad \begin{cases} H(x_T(u)) + \int_0^T h(x(t))dt \rightarrow \max_u, \\ (2), c_T(u) \leq C. \end{cases}$$

Возможным вариантом задач типа (4), (5), (7), (8) будет задача минимизации затрат по обеспечению к моменту времени  $T$  заданной доли  $\hat{x}$  действующих агентов:

$$(9) \quad \begin{cases} c_T(u) \rightarrow \min_u, \\ x_T(u) \geq \hat{x}, \\ (2). \end{cases}$$

Задачи типа (7)–(9) приводятся к стандартным задачам оптимального управления.

Пример 1. Рассмотрим задачу (9) в случае, когда  $F(x) = x$ . Предположим, что  $x_0 = 0$ , а затраты центра задаются (6) с  $\lambda_0 = 1$ . В результате получим следующую задачу оптимального программного управления с закрепленными концами:

$$(10) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= u(1-x), \\ x(0) &= 0, x(T) = \hat{x}, \\ 0 &\leq u \leq \Delta, \end{aligned}$$

$$\int_0^T u(t)dt \rightarrow \min_{u \in [0, \Delta]}.$$

Запишем функцию Понтрягина:  $H = \psi(u(1-x)) - u$  для (10). В соответствии с принципом максимума эта функция должна принимать максимальные значения по  $u$ . В силу линейности функции по  $u$  максимум достигается на концах отрезка  $[0, \Delta]$  в зависимости от знака коэффициента при  $u$ , т.е. можно записать

$$(11) \quad u = \frac{\Delta}{2} (\text{sign}(\psi(1-x) - 1) + 1).$$

Линейность по управлению функции Понтрягина является следствием линейности по управлению и правой части динами-

ческой системы (2), и функционала (6). То есть справедливо следующее

**Утверждение 5.** Если ограничения в задачах оптимального управления типа (7)–(9) линейны по управлению, то оптимальное программное управление будет иметь структуру, описываемую выражением (11), в рамках которой значение управления в каждый момент времени равно либо максимально возможной, либо минимально возможной величине.

Уравнения Гамильтона выглядят следующим образом:

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \psi} = u(1-x),$$

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial H}{\partial x} = u\psi.$$

Краевые условия накладываются только на первое уравнение. Решением первого уравнения при  $u = 0$  будет константа, а при  $u = \Delta$  – функция

$$x(t) = 1 - (1 - x(t_0))e^{-\Delta(t-t_0)}.$$

Из этого выражения возникает ограничение на максимальное число провокаторов, необходимое для того, чтобы суметь перевести толпу из нулевого положения в  $\hat{x}$ :  $\Delta \geq \frac{1}{T} \log \frac{1}{1-\hat{x}}$ .

При этом существует минимальное время  $t_{\min} = \frac{1}{\Delta} \log \frac{1}{1-\hat{x}}$ , в течение которого управление должно принимать максимальное значение  $\Delta$ , а в остальные моменты управление должно быть равным 0. В частности, одним из решений задачи (10) будет

$$(12) \quad u = \begin{cases} \Delta, & t \leq t_{\min}, \\ 0, & t_{\min} < t \leq T; \end{cases}$$

когда максимальное количество провокаторов вводится сразу и поддерживается постоянным в течение  $t_{\min}$ .

Структура оптимального решения данной задачи (кусочно-постоянная функция, принимающая значения 0 или  $\Delta$ ) может привести к необходимости минимизировать количество переключений (разрывов) управления. Такое дополнительное огра-

нение содержательно оправдывается тем, что центр может нести какие-либо дополнительные затраты на ввод или вывод провокаторов. В случае, когда подобное ограничение имеет место в рассматриваемой задаче, из всего множества оптимальных управлений наилучшими остаются либо (12), либо управление

$$u = \begin{cases} \Delta, & t \in [T - t_{\min}, T], \\ 0, & t < T - t_{\min}. \end{cases} \bullet$$

### 3. Постоянные управления

Из выражения (6) следует, что при постоянных управлениях  $c_t(v) = \lambda v t$ . При заданных функциях  $F(\cdot)$  (т.е. при известной зависимости  $x_t(v)$ ) задачи (7)–(9) сводятся к типовым задачам скалярной оптимизации.

Пример 2. Пусть  $F(x) = x$ ,  $T = 1$ ,  $x_0 = 0$ ,  $H(x) = x$ ,  $h(x) = \gamma x$ , где  $\gamma \geq 0$  – известная константа. Из выражения (1) находим:

$$(13) \quad x_t(u) = 1 - \exp\left(-\int_0^t u(y) dy\right).$$

При постоянных управлениях  $x_t(v) = 1 - e^{-vt}$ .

Задача (7) примет вид следующей задачи скалярной оптимизации:

$$(14) \quad e^{-v} \left( \frac{\gamma}{v} - 1 \right) - \frac{\gamma}{v} - \lambda v \rightarrow \max_{v \in [0; \Delta]}.$$

Задача (8) примет вид следующей задачи скалярной оптимизации:

$$(15) \quad e^{-v} \left( \frac{\gamma}{v} - 1 \right) - \frac{\gamma}{v} \rightarrow \max_{v \in [0; \Delta]}.$$

Задача (9) примет вид: 
$$\begin{cases} v \rightarrow \min, \\ v \in [0; 1] \end{cases} \quad \text{Ее решение:}$$

$$v = \log\left(\frac{1}{1 - \hat{x}}\right). \bullet$$

#### 4. Задача возбуждения всей толпы

Рассмотрим «асимптотику» решаемых задач при  $T = +\infty$ . В настоящем разделе будем предполагать, как и для аналогичной модели в [1], что функция  $F(\cdot)$  имеет единственную точку перегиба,  $F(0) = 0$ , уравнение  $F(x) = x$  имеет на интервале  $(0; 1)$  единственное решение – точку  $q > 0$ , причем  $\forall x \in (0; q) F(x) < x, \forall x \in (q; 1) F(x) > x$ . Примеры функций  $F(\cdot)$ , удовлетворяющих введенным предположениям, приведены в [1]. Также будем считать, что целью управления является «возбуждение» всех агентов с наименьшими затратами.

Из введенных предположений о свойствах функции  $F(\cdot)$  следует, что если для некоторого момента времени  $\tau$  выполнено  $x(\tau) > q$ , тогда, даже при  $u(t) \equiv 0 \quad \forall t > \tau$ , траектория  $x_i(u)$  будет неубывающей, причем  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x_i(u) = 1$ . Как отмечалось в [1], со-  
держательно это свойство означает, что рассматриваемая толпа такова, что область притяжения нулевого положения равновесия в отсутствие управления (без внедренных провокаторов) составляет полуинтервал  $[0; q)$ , т.е. в этой толпе достаточно обеспечить «искусственное» возбуждение более чем  $q$  (доли) агентов, а затем даже в отсутствие управления эта толпа будет «сама» стремиться к единичному равновесному состоянию.

Обозначим через  $u^\tau$  решение следующей задачи:

$$(16) \int_0^\tau u(t) dt \rightarrow \min_{u: u(t) \in [0; \Delta], x_\tau(u) > q} .$$

Вычислим  $Q_\tau = \int_0^\tau u^\tau(t) dt$  и найдем  $\tau^* = \arg \min_{\tau \geq 0} Q_\tau$ .

Решение задачи (16) существует (см. содержательные интерпретации в [1]) при условии

$$(17) \Delta > \Delta^* = \max_{x \in [0, q]} \frac{x - F(x)}{1 - F(x)} .$$

В силу введенных предположений о свойствах функции распределения структура оптимального решения рассматриваемой задачи характеризуется следующим образом.

Утверждение 6. Если выполнено условие (17), то  $u^t(t) \equiv 0$  при  $t > \tau$ .

Пример 3. В [2] была построена двухпараметрическая (с параметрами  $a$  и  $b$ ) функция  $F(\cdot)$ , наилучшим образом описывающая структуру распространения активности в русскоязычных сегментах онлайн-социальных сетей (СС) LiveJournal, FaceBook и Twitter. Эта функция имеет вид

$$(18) F_{a,b}(x) = \frac{\arctan(a(x-b)) + \arctan(ab)}{\arctan(a(1-b)) + \arctan(ab)},$$

$$a \in [7; 15], b \in [0; 1].$$

Выберем  $a = 13$  (параметр, соответствующий СС Facebook),  $b = 0,4$ . Тогда, как показано в [1],  $q \approx 0,375$  и  $\Delta^* \approx 0,169$ .

## 5. Позиционное управление

В предыдущих разделах рассматривалась задача синтеза оптимального программного управления. В то же время в задачах управления возбуждением толпы может использоваться и позиционное управление. Рассмотрим два возможных варианта, имеющих прозрачные содержательные интерпретации.

В первом случае задача заключается в поиске закона позиционного управления  $\tilde{y}(x): [0;1] \rightarrow [0;1]$ , обеспечивающего максимальное возбуждение толпы (в смысле задач (4) или (5)) при тех или иных ограничениях на траекторию системы и/или на управление.

Пусть управление ограничено по аналогии с выражением (3):

$$(19) \tilde{y}(x) \leq \Delta, x \in [0;1],$$

и имеется дополнительное ограничение на траекторию:

$$(20) \dot{x}(t) \leq \delta, t \geq 0,$$

где  $\delta > 0$  – известная константа. Содержательно условие (20) означает, например, что слишком быстрый рост (в смысле прироста в единицу времени) доли возбужденных агентов обнаруживается соответствующими органами, делающими дальнейшее управление невозможным. Следовательно, центр, решающий задачу управления возбуждением толпы, должен стремиться

максимизировать значение доли возбужденных агентов при условиях (19) и (20). Решение соответствующей задачи, в силу свойств динамической системы (2), устанавливаемых леммой, имеет простой вид:

$$(21) \tilde{u}^*(x) = \min \left\{ \Delta; \max \left\{ 0; \frac{x + \delta - F(x)}{1 - F(x)} \right\} \right\}.$$

Дробь, фигурирующая в выражении (21), получается в результате приравнивания правой части (1) константе  $\delta$ .

Отметим, что при малых значениях  $\delta$  может оказаться, что не существует неотрицательного управления, удовлетворяющего (20).

Пример 4. Пусть в условиях примера 3  $\delta = 0,35$ . Тогда оптимальное значение позиционного управления приведено на Рис. 1 (пунктиром на данном рисунке изображены биссектриса и функция  $F(\cdot)$ , тонкой непрерывной линией – ограничение сверху, фигурирующее в выражении (21)). •

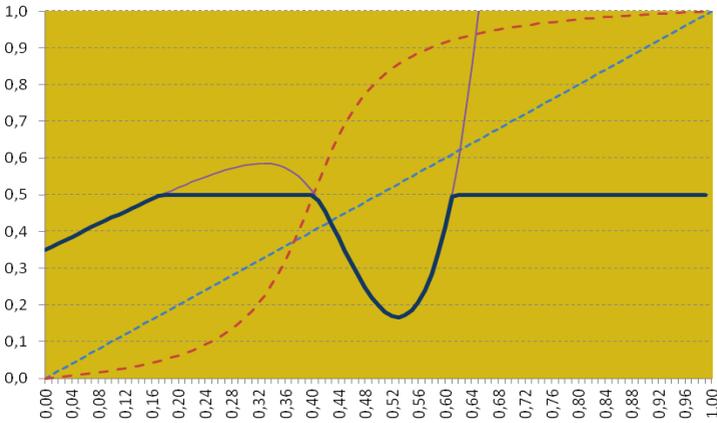


Рис. 1. Оптимальное позиционное управление в примере 4

Второй случай позиционного управления относится к так называемой задаче иммунизации сети [4], в которой управляющий орган заинтересован в снижении доли действующих агентов, причем возможными управлениями с его стороны является

число (или доля) внедряемых в толпу *иммунизаторов* – агентов, которые всегда бездействуют.

Как показано в [4], если  $w \in [0; 1]$  – доля иммунизаторов, то динамика доли действующих агентов будет удовлетворять уравнению

$$(22) \quad \dot{x} = (1 - w)F(x) - x, \quad x \in [0; 1].$$

Пусть  $\tilde{w}(x): [0; 1] \rightarrow [0; 1]$  – позиционное управление, тогда, если цель управляющего органа – снижение доли действующих агентов:

$$(23) \quad \dot{x}(t) \leq 0, \quad t \geq 0,$$

то из (22) получаем следующее условие на позиционное управление:

$$(24) \quad \tilde{w}(x) \geq 1 - \frac{x}{F(x)}.$$

Величина  $\Delta_{\min} = \max_{x \in [0; 1]} \left( 1 - \frac{x}{F(x)} \right)$  характеризует минималь-

ные ограничения на размер управлений в каждый момент времени, при котором система (22) «управляема» в смысле (23).

Пример 5. В условиях примера 4 ограничение (24) снизу на величину позиционного управления изображено жирной линией на Рис. 2 (пунктиром на данном рисунке изображены биссектриса и функция распределения  $F(\cdot)$ ).

Величина  $\Delta_{\min}$  в рассматриваемом примере равна примерно 0,385. ●

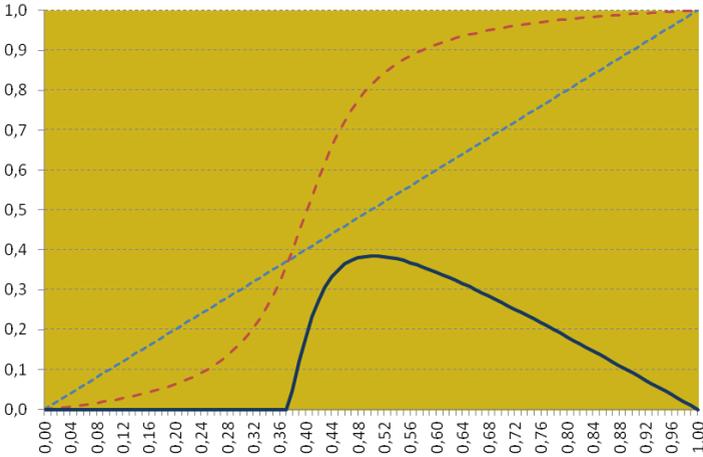


Рис. 2. Минимальное позиционное управление в примере 5

## Заключение

В настоящей работе описаны задачи управления возбуждением толпы в непрерывном времени за счет внедрения в нее провокаторов или иммунизаторов.

Значительный интерес для дальнейших исследований представляет рассмотрение дифференциальной игры, описывающей ситуацию информационного противоборства между двумя управляющими органами, принимающими в непрерывном времени решения о долях (или количествах) внедряемых провокаторов  $u$  и иммунизаторов  $w$  соответственно (соответствующая статическая задача, которая может служить «точкой отсчета», рассмотрена в [6]). Объект управления при этом будет описываться динамической системой

$$\dot{x} = u(1-w) + (1-u-w+2uw)F(x) - x \quad [4].$$

Вторым перспективным направлением представляется рассмотрение задач динамического (программного и/или позиционного) управления толпой, описываемой уравнением переноса [6]:  $\frac{\partial}{\partial t} p(x,t) + \frac{\partial}{\partial x} ([u + (1-u)F(x) - x] p(x,t)) = 0$ , т.е. моделью, в которой состояние толпы в каждый момент времени опи-

сывается не скалярной долей действующих агентов, а соответствующим распределением  $p(x, t)$  вероятностей.

### Литература

1. БАРАБАНОВ И.Н., НОВИКОВ Д.А. *Динамические модели управления возбуждением толпы в дискретном времени* // Автоматика и телемеханика. – 2016 (в печати).
2. БАТОВ А.В., БРЕЕР В.В., НОВИКОВ Д.А., РОГАТКИН А.Д. *Микро- и макромоделли социальных сетей: идентификация и имитационные эксперименты* // Проблемы управления. – 2014. – №6. – С. 45–51.
3. БРЕЕР В.В. *Модели конформного поведения (обзор)* // Проблемы управления. – 2014. – № 1. – С. 2–13. – №2. – С. 2–17.
4. БРЕЕР В.В., НОВИКОВ Д.А., РОГАТКИН А.Д. *Стохастические модели управления толпой* // Управление большими системами. – 2014. – №52. – С. 85–117.
5. НОВИКОВ Д.А. *Модели информационного противоборства в управлении толпой* // Проблемы управления. – 2015. – №3. – С. 29–39.
6. РОГАТКИН А.Д. *Модель Грановеттера с непрерывным временем* // Управление большими системами. – 2016 (в печати).
7. СЛОВОХОТОВ Ю.Л. *Физика и социофизика* // Проблемы управления. – 2012. – Ч. 1. – №1. – С. 2–20; Ч. 2. – № 2. – С. 2–31; Ч. 3. – №3. – С. 2–34.
8. АКХМЕТZHANOV A.R., WORDEN L., DUSHOFF J. *Effects of Mixing in Threshold Models of Social Behavior* // Phys. Rev. – 2013. – E 88. 012816.
9. GRANOVETTER M. *Threshold Models of Collective Behavior* // AJS. – 1978. – Vol. 83, No. 6. – P. 1420–1443.

**ПРИЛОЖЕНИЕ**

Доказательство леммы. По условию леммы,  
 $G_1(x_0, t_0) > G_2(x_0, t_0)$ , т.е.  $\left. \frac{d}{dt} x_1(t, (t_0, x_0)) \right|_{t=t_0} > \left. \frac{d}{dt} x_2(t, (t_0, x_0)) \right|_{t=t_0}$ .

Поэтому найдется такое число  $\varepsilon > 0$ , что  $\forall t \in (t_0, t_0 + \varepsilon) \rightarrow x_1(t, (t_0, x_0)) > x_2(t, (t_0, x_0))$ , т.е. график решения первого уравнения лежит выше графика второго на всем полуинтервале  $(t_0, t_0 + \varepsilon]$ . Покажем, что такое расположение графиков справедливо для всех  $t \geq t_0$ .

Предположим противное, т.е.  $\exists \hat{t} : x_1(\hat{t}, (t_0, x_0)) = x_2(\hat{t}, (t_0, x_0)) = \hat{x}$ . Без ограничения общности будем считать, что  $\hat{t}$  – первый момент достижения графиком  $x_2$  графика  $x_1$ , т.е.  $\hat{t} = \inf \{t > t_0 + \varepsilon : x_1(t, (t_0, x_0)) = x_2(t, (t_0, x_0))\} < +\infty$ . Очевидно, что  $\hat{t} \geq t_0 + \varepsilon > t_0$  и что  $\forall t \in (t_0, \hat{t}) \rightarrow x_1(t, (t_0, x_0)) > x_2(t, (t_0, x_0))$ . Отсюда для  $\tau \in [0, \hat{t} - t_0)$  справедливо

$$x_1(\hat{t} - \tau, (t_0, x_0)) - x_1(\hat{t}, (t_0, x_0)) > x_2(\hat{t} - \tau, (t_0, x_0)) - x_2(\hat{t}, (t_0, x_0)),$$

так как вторые слагаемые в обеих частях этого неравенства одинаковы и равны  $\hat{x}$ . Поделим обе части неравенства на  $-\tau$  (знак неравенства сменится на противоположный) и перейдем к пределу при  $\tau \rightarrow 0$ . В результате получим соотношение для производных решений  $x_1$  и  $x_2$  в точке  $\hat{t}$ :

$$\left. \frac{d}{dt} x_1(t, (t_0, x_0)) \right|_{t=\hat{t}} \leq \left. \frac{d}{dt} x_2(t, (t_0, x_0)) \right|_{t=\hat{t}}, \text{ откуда следует, что}$$

$G_1(\hat{x}, \hat{t}) \leq G_2(\hat{x}, \hat{t})$ . Выполнение этого неравенства одновременно с выполнением условия утверждения невозможно, следовательно, предположение неверно. Лемма доказана.

## CONTINUOUS-TIME DYNAMIC MODELS OF MOB EXCITATION

**Ivan Barabanov**, Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS,  
Moscow, Cand. Sc., (ivbar@ipu.ru).

**Dmitriy Novikov**, Trapeznikov Institute of Control Sciences of  
RAS, Moscow, Dr. Sc., (novikov@ipu.ru).

*Abstract: The mob excitation control problem is considered using the continuous-time modification of well-known threshold model of collected behavior introduced by Granovetter. Every agent decides whether to participate in a collective action or to be passive. Here we investigate the case when there is a number of agents which are active by default. These agents are called here “provokers”. We analyze the possibility to control the final state of the whole mob. The desired state of the mob is achieved by introducing an appropriate number of “provokers” at each moment of control.*

Keywords: collective behavior, Granovetter’s model, stochastic models of mob control.

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии И. Б. Фуртатом.*

*Поступила в редакцию 30.12.2015.  
Опубликована 30.09.2016.*

УДК 519.865 + 519.95  
ББК 22.165

## ИЕРАРХИЧЕСКИЕ ИГРЫ СО СЛУЧАЙНЫМИ ФАКТОРАМИ

Горелов М. А.<sup>1</sup>

(Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН,  
Москва)

*Рассматривается иерархическая игра двух лиц, в которой функция выигрыша игрока нижнего уровня зависит от случайного фактора. В момент принятия решений игрок нижнего уровня знает реализацию этого фактора. Игрок верхнего уровня, принимая решение, знает только распределение вероятностей на множестве возможных значений этого фактора.*

Ключевые слова: информационная теория иерархических систем, игры с неопределенными факторами, максимальный гарантированный результат.

### **1. Введение**

В данной работе рассматривается иерархическая игра двух лиц, в которой выигрыш игрока нижнего уровня зависит от неопределенного фактора, выбор которого не контролируется ни одним из участников конфликта. Аналогичная модель была рассмотрена в [4]. Отличие заключается в том, что в данной работе игрок верхнего уровня более информирован о характере неопределенности. А именно, кроме множества возможных значений неопределенного фактора в момент принятия решений он знает некое вероятностное распределение на этом множестве. Соответственно, предполагается, что он ориентируется на математическое ожидание своего выигрыша.

---

<sup>1</sup> Михаил Александрович Горелов, кандидат физико-математических наук (griever@ccas.ru).

Такая задача является более сложной<sup>1</sup>, однако ее удается решить с помощью метода, предложенного в [4]. Впрочем, появляются и некоторые детали, которые представляют самостоятельный интерес.

Иерархические игры с вероятностной неопределенностью изучались гораздо более активно, чем аналогичные модели с интервальной неопределенностью. В России исследования велись в рамках теории иерархических игр [6–7, 10–13] и теории активных систем [3, 5, 8]. За рубежом соответствующий раздел науки получил название теории контрактов [14–15]. Обстоятельный обзор полученных результатов содержится в [1].

Рассмотренная ниже задача была впервые поставлена А.Д. Халезовым в [6–7]. Благодаря новому методу исследования удается избавиться от двух дополнительных предположений, сделанных при решении задачи в [6–7]. Одно из этих предположений заключается в наличии «универсальной» стратегии наказания игрока нижнего уровня, не зависящей от значения неопределенного фактора. Второе предположение носит характер «общности положения». Оно не слишком ограничительно, но довольно трудно проверяемо.

Изложение в статье построено следующим образом. В разделе 2 дается определение игры со случайным фактором. Эта модель «замыкается» заданием принципа оптимальности, в данном случае – принципа максимального гарантированного результата, который определяется в разделе 3. Определение дается по схеме, отличной от предложенной Ю.Б. Гермейером и ставшей классической. В разделе 4 решается задача вычисления максимального гарантированного результата. В разделе 5 на основе найденного решения строится оптимальная стратегия первого игрока. В разделе 6 обсуждается связь нового определения максимального гарантированного результата с классическим.

Игра со случайным фактором – довольно сложная конструкция. Поэтому пока не удалось доказать, что два определения

---

<sup>1</sup> *Этому утверждению можно придать точный математический смысл. Подробнее об этом будет сказано в заключении.*

максимального гарантированного результата всегда приводят к одному ответу<sup>1</sup>. Впрочем, два определения заведомо приводят к одинаковым результатам, например, если множество стратегий второго игрока конечно (это несложно доказывается по схеме, приведенной, например, в [4]). Предположение о бесконечности множества стратегий – это, конечно же, математическая абстракция, во многих случаях весьма удобная. Таким образом, вопрос о предпочтительности одного из определений, если они действительно не совпадают, – это вопрос о том, какое из них лучше согласуется с абстракцией бесконечности. В разделе б приводятся некие аргументы в пользу того, что новое определение в этом плане предпочтительнее. Кроме того, из сравнения рассуждений параграфов 3–5 с аналогичными рассуждениями в [6–7] видно, что новое определение логически проще и удобнее в обращении. По этим причинам можно рассматривать разделе б как некую дань традиции. Цель его написания состояла в том, чтобы убедить в этом читателя.

## 2. Игры со случайными факторами

Игрой со случайными факторами в дальнейшем будем называть набор  $\Gamma = \langle U, V, A, g, h, \wp \rangle$ . Здесь  $U, V$  и  $A$  – множества;  $g$  – функция, отображающая декартово произведение  $U \times V$  в множество действительных чисел  $\mathbf{R}$ ;  $h: U \times V \times A \rightarrow \mathbf{R}$ ;  $\wp$  – вероятностная мера на множестве  $A$ .

Предполагается, что в игре принимают два участника, которых будем называть первым и вторым игроками. Множество  $U$  интерпретируется как множество управлений первого игрока, множество  $V$  – как множество управлений его партнера. Будем полагать, что интересы первого и второго игроков описываются стремлением к максимизации функций  $g$  и  $h$  соответственно. Значение неопределенного фактора  $\alpha \in A$  выбирается некоторой

---

<sup>1</sup> Впрочем, и построить пример, в котором различие имеется, пока тоже не удалось.

третьей стороной – Природой. Этот выбор осуществляется случайным образом в соответствии с распределением  $\wp$ .

Будем предполагать, что все параметры модели  $\Gamma$  известны первому игроку. Будем считать его риск-нейтральным по отношению к имеющейся природной неопределенности, т.е. будем предполагать, что он всякий раз согласен на усреднение своего результата по заданной вероятностной мере. Относительно второго игрока достаточно предполагать, что ему известны множества  $U$ ,  $V$  и  $A$  и его собственная функция выигрыша  $h$ .

Сделаем традиционные технические предположения, заметно упрощающие дальнейшее изложение. Множества  $U$  и  $V$  будем считать наделенными топологиями и компактными. Функцию  $g$  будем считать непрерывной по совокупности своих аргументов. Будем предполагать также, что при любом фиксированном  $\alpha \in A$  функция  $h$  непрерывна на множестве  $U \times V$ .

Основные результаты будут получены при следующем дополнительном предположении. Множество  $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$  будем считать конечным (обозначим  $N = \{1, 2, \dots, n\}$ ). Соответственно, вероятностное распределение  $\wp$  будем отождествлять с набором  $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$  неотрицательных действительных чисел  $p_i$ , в сумме дающих единицу. Число  $p_i$  интерпретируется как вероятность реализации значения  $\alpha_i$  неопределенного фактора.

Игра  $\Gamma$  описывает возможности и интересы игроков. Опишем динамику принятия решений и информированность участников конфликта.

Будем предполагать, что события разворачиваются следующим образом. Вначале реализуется конкретное значение неопределенного фактора  $\alpha \in A$ . Эта реализация становится известной второму игроку. Зная  $\alpha$ , второй игрок выбирает свое управление  $v \in V$ , и достоверная информация об этом выборе становится доступной первому игроку. Используя всю эту информацию, первый игрок выбирает свое управление  $u \in U$ .

Все сказанное формально описывается игрой со случайными факторами  $\Gamma^* = \langle U^*, V^*, A, g^*, h^*, \wp \rangle$ , в которой  $U^*$  – семейство всех функций  $u^*: V \rightarrow U$ ,  $V^* = V$ , а функции выигрыша опреде-

ляются следующими условиями:  $g_*(u_*, v_*) = g(u_*(v_*), v_*)$  и  $h_*(u_*, v_*, \alpha) = h(u_*(v_*), v_*, \alpha)$ .

Адекватное описание анализируемого конфликта дает игра  $\Gamma_*$ , но наличие ее связи с игрой  $\Gamma$  позволит в дальнейшем получить содержательные выводы о характере оптимальных решений в рассматриваемой ситуации.

### 3. Максимальный гарантированный результат

На сей раз удобно сразу начать с неклассического варианта определения максимального гарантированного результата.

Допустим, первый игрок выбрал стратегию  $u_* \in U_*$  и сообщил партнеру об этом выборе, и к тому же реализовалось значение  $\alpha \in A$  неопределенного фактора. Тогда для второго игрока его выигрыш однозначно связан с выбором его же стратегии. Поэтому он может разделить все множество своих стратегий  $V_*$  на выгодные и невыгодные. Предположим, что это разделение происходит с помощью порогового значения, т.е. существует такое число  $\lambda$ , что стратегии  $v_*$ , для которых  $h_*(u_*, v_*, \alpha) < \lambda$  второй игрок считает невыгодными, а все остальные – выгодными. Разумеется, множество выгодных стратегий не должно быть пустым, поскольку по условию какой-то выбор второй игрок сделать должен.

Тогда первый игрок может оценить множество выгодных стратегий и, соответственно, наихудший результат  $\chi(\alpha)$ , который он может получить при разумных действиях партнера. Поскольку мы предполагаем первого игрока риск-нейтральным, он будет ориентироваться на максимизацию математического ожидания  $\gamma = M\chi(\alpha)$ . Точную верхнюю грань величины этого математического ожидания по всем выборам стратегии  $u_* \in U_*$  естественно считать максимальным гарантированным результатом первого игрока.

Эти соображения являются мотивировкой следующего определения.

**Определение 1.** Число  $\gamma$  является гарантированным результатом первого игрока в игре  $\Gamma_*$ , если существуют такая стратегия  $u_*$  и такая случайная величина  $\chi(\alpha)$ , что для любого  $\alpha \in A$

найдется число  $\lambda$ , для которого выполняется одно из двух условий:

1°. Существует  $u_* \in V_*$ , для которого  $h_*(u_*, v_*, \alpha_i) \geq \lambda$ .

2°. Для любого  $v_* \in V_*$  либо  $g_*(u_*, v_*) \geq \gamma(\alpha)$ , либо  $h_*(u_*, v_*, \alpha_i) < \lambda$ ,

и, кроме того,  $\gamma \geq M\gamma(\alpha)$ . Точная верхняя грань гарантированных результатов первого игрока называется его максимальным гарантированным результатом.

С этим определением можно уже работать стандартным образом.

#### 4. Вычисление максимального гарантированного результата

Далее, чтобы каждый раз не оговариваться, будем считать, что все вероятности  $p_i$  строго больше нуля. Разумеется, это не ограничивает общности рассуждений.

Дальнейшие рассуждения удобно провести формально. Перепишем определение 1 с учетом конечности множества  $A$ :

$$\exists u_* \in U_* \exists \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n \forall i \in N \exists \lambda (\exists v_* \in V_* : h(u_*, v_*, \alpha_i) \geq \lambda) \& \\ \& (\forall v_* \in V_* g_*(u_*, v_*) \geq \gamma_i \vee h_*(u_*, v_*, \alpha_i) < \lambda) \& \sum_{i=1}^n p_i \gamma_i \geq \gamma.$$

Удобно поменять в этой формуле порядок кванторов общности и существования:

$$\exists u_* \in U_* \exists \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n \exists \lambda_1, \lambda_2, \dots, \\ \dots, \lambda_n \forall i \in N (\exists v_i \in V_* : h(u_*, v_i, \alpha_i) \geq \lambda_i) \& \\ \& (\forall v_* \in V_* g_*(u_*, v_*) \geq \gamma_i \vee h_*(u_*, v_*, \alpha_i) < \lambda_i) \& \sum_{i=1}^n p_i \gamma_i \geq \gamma.$$

Проанализируем первую часть этой формулы, соответствующую пункту 1° определения 1. Пусть для каждого  $i$  стратегия  $v_i \in V_* = V$  удовлетворяет условию этого пункта, а  $u_i = u_*(v_i)$ .

Тогда в силу второго пункта определения должны, в частности, выполняться условия

$$(1) \quad v_i = v_j \Rightarrow u_i = u_j,$$

$$(2) \begin{cases} g(u_i, v_i) \geq \gamma_i, \\ h(u_i, v_i, \alpha_i) \geq \lambda_i, \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

и

$$(3) \begin{cases} g(u_j, v_j) \geq \gamma_i, \\ h(u_j, v_j, \alpha_i) < \lambda_i, \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, n^l.$$

Обозначим через  $H(\gamma)$  множество всех наборов

$$\Xi = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, u_1, u_2, \dots, u_n, v_1, v_2, \dots, v_n),$$

удовлетворяющих условиям (1)–(3) и  $\sum_{i=1}^n p_i \gamma_i \geq \gamma$ .

Справедлива

**Лемма 1.** Число  $\gamma$  является максимальным гарантированным результатом в игре  $\Gamma_*$  тогда и только тогда, когда

$$(4) \begin{cases} \exists \Xi \in H(\gamma) \exists u_* \forall i \in N \forall v_* \in V_* (g_*(u_*, v_*) \geq \gamma_i \vee \\ \vee h_*(u_*, v_*, \alpha_i) < \lambda_i). \end{cases}$$

**Доказательство.** Необходимость, по сути, уже доказана. Докажем достаточность.

Фиксируем стратегию  $u_*$ , набор чисел  $\gamma_i, \lambda_i$  и управлений  $u_i$  и  $v_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), существование которых предусмотрено условием леммы. Определим функцию  $\omega_*: V \rightarrow U$  следующим образом. Положим  $\omega_*(v_i) = u_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), а для остальных значений аргументов пусть  $\omega_*(v_i) = u_*(v_i)$ .

Для  $\alpha = \alpha_i$  положим  $\gamma(\alpha) = \gamma_i$ .

Покажем, что выполняется условие 1°. Пусть  $\alpha = \alpha_i$ . Тогда выберем  $w_* = v_i$  и  $\lambda = \lambda_i$ . Тогда по построению функции  $\omega_*$  будем иметь  $h_*(\omega_*, w_*, \alpha_i) = h(\omega(v_i), v_i, \alpha_i) = h(u_i, v_i, \alpha_i) \geq \lambda_i = \lambda$ .

Установим справедливость условия 2°. Пусть заданы произвольные параметр  $\alpha = \alpha_i$  и стратегия  $v_* \in V_*$ . Фиксируем  $\lambda = \lambda_i$ .

Если  $v_* = v_j$  для некоторого  $j$ , то в силу условия (3) имеем либо  $g_*(\omega_*, v_*) = g(\omega(v_j), v_j) \geq \gamma_i = \gamma(\alpha)$ , либо

---

<sup>1</sup> Разумеется, здесь можно считать, что  $j \neq i$ .

$$h_*(\omega_*, v_*, \alpha_i) = h(\omega(v_j), v_j, \alpha_i) = h(u_j, v_j, \alpha_i) < \lambda_i = \lambda.$$

В противном случае в силу условия (4) имеем либо

$$g_*(\omega_*, v_*) = g(\omega_*(v_*), v_*) = g(u_*(v_*), v_*) = g_*(u_*, v_*) \geq \gamma_i = \gamma(\alpha),$$

либо

$$\begin{aligned} h_*(\omega_*, v_*, \alpha_i) &= h(\omega(v_*), v_*, \alpha_i) = h(u(v_*), v_*, \alpha_i) = \\ &= h_*(u_*, v_*, \alpha_i) < \lambda_i = \lambda. \end{aligned}$$

Таким образом, условие 2° во всех случаях выполнено.

Неравенство  $\gamma \geq \mathbf{M}\gamma(\alpha)$  выполняется в силу определений функции  $\gamma$  и множества  $H(\gamma)$ .

Лемма доказана.

Поменяем в формуле (4) порядок кванторов общности:

$$\begin{aligned} \exists \Xi \in H(\gamma) \exists u_* \forall v_* \in V_* \forall i \in N ( g_*(u_*, v_*) \geq \gamma_i \vee \\ \vee h_*(u_*, v_*, \alpha_i) < \lambda_i ). \end{aligned}$$

Далее используем структуру множеств стратегий в игре  $\Gamma_*$ .  
Предыдущая формула может быть переписана в виде

$$\begin{aligned} \exists \Xi \in H(\gamma) \exists u_* \forall v \in V \forall i \in N ( g(u_*(v), v) \geq \gamma_i \vee \\ \vee h(u_*(v), v, \alpha_i) < \lambda_i ). \end{aligned}$$

А теперь можно поменять местами кванторы общности и существования:

$$(5) \quad \begin{aligned} \exists \Xi \in H(\gamma) \forall v \in V \exists u \in U \forall i \in N ( g(u, v) \geq \gamma_i \vee \\ \vee h(u, v, \alpha_i) < \lambda_i ). \end{aligned}$$

Это условие выписано уже полностью в терминах исходной игры  $\Gamma$ , поэтому основную задачу данной статьи можно считать решенной.

Заменив кванторы операторами верхних и нижних границ<sup>1</sup>, можно записать полученный результат в чуть более слабой, но, может быть, более привычной форме.

**Теорема 1.** Для того чтобы число  $\gamma$  было гарантированным результатом в игре  $\Gamma_*$ , необходимо, чтобы выполнялось

---

<sup>1</sup> Функция  $K(\gamma, \alpha)$  может быть разрывной, поэтому внешняя верхняя грань, вообще говоря, не достигается.

$$\inf_{\Xi \in H(\gamma)} \max_{v \in V} \min_{u \in U} \max_{i=1,2,\dots,n} \min(\gamma_i - g(u, v), h(u, v, \alpha_i) - \lambda_i) \leq 0,$$

и достаточно, чтобы выполнялось

$$\inf_{\Xi \in H(\gamma)} \max_{v \in V} \min_{u \in U} \max_{i=1,2,\dots,n} \min(\gamma_i - g(u, v), h(u, v, \alpha_i) - \lambda_i) < 0.$$

## 5. Оптимальная стратегия

Структура формулы (5) позволяет уже без большого труда выписать оптимальную стратегию первого игрока.

Пусть  $\gamma$  – гарантированный результат. Тогда выполняется условие (4). Фиксируем произвольный набор

$$\Xi = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, u_1, u_2, \dots, u_n, v_1, v_2, \dots, v_n),$$

существование которого гарантирует это условие.

Определим функцию  $u_*: V \rightarrow U$  следующим образом.

Если  $v = v_i$  для некоторого  $i = 1, 2, \dots, n$ , то положим  $u_*(v) = u_i$ .

В противном случае условие (5) гарантирует, что система из  $n$  совокупностей неравенств

$$(6) \quad \begin{cases} g(u, v) \geq \gamma_i, \\ h(u, v, \alpha_i) < \lambda_i, \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

имеет решение относительно  $u$ . Выберем любое из них и обозначим его через  $u_*(v)$ .

Таким образом, функция  $u_*$  будет полностью определена. Положим  $\chi(\alpha) = \gamma_i$ , если  $\alpha = \alpha_i$ .

Если значение  $\alpha = \alpha_i$ , то выбрав  $\lambda = \lambda_i$  и  $w_* = v_i$ , получим  $h_*(u_*, w_*, \alpha_i) = h(u_*(v_i), v_i) = h(u_i, v_i) \geq \lambda_i$  (неравенство справедливо, поскольку набор  $\Xi$  принадлежит множеству  $H(\gamma)$ , а, следовательно, выполняется условие (2)). Таким образом, условие 1° определения 1 выполнено.

Докажем справедливость условия (3). Для  $\alpha = \alpha_i$  положим  $\lambda = \lambda_i$ . Выберем любую стратегию  $v_* \in V_*$ .

Если для некоторого  $i$  выполняется равенство  $v_* = v_i$ , то в силу условия (2) имеем  $g_*(u_*, v_*) = g(u_*(v_i), v_i) = g(u_i, v_i) \geq \gamma_i = \chi(\alpha)$ .

В противном случае в силу условия (б) имеем либо  $g_*(u_*, v_*) = g(u_*(v_*), v_*) \geq \gamma_i = \gamma(\alpha)$ , либо  $h_*(u_*, v_*, \alpha_i) = h(u_*(v_*), v_*) < \lambda_i$ .

Таким образом, условие 2° во всех случаях выполнено. Неравенство  $\gamma \geq \mathbf{M}\gamma(\alpha)$  выполняется в силу определения множества  $H(\gamma)$  и принадлежности набора  $\Xi$  этому множеству.

Таким образом, построенная стратегия  $u_*$  – искомая.

## 6. Классическое определение максимального гарантированного результата

Традиционно определение максимального гарантированного результата дают в иной форме, предложенной Ю.Б. Гермейером. В данном разделе эта постановка будет сравнена с рассмотренной выше. Приведем классическое определение.

Будем предполагать, что игрок номер 1 первым выбирает свою стратегию  $u_* \in U_*$  и сообщает о своем выборе партнеру.

Второй игрок доверяет этому сообщению. Поскольку к моменту принятия решений он знает и реализацию неопределенного фактора, для него задача выбора его стратегии  $v_*$  из множества  $V_*$  сведется к обычной задаче оптимизации. Поэтому естественно предполагать, что этот выбор будет произведен из множества

$$BR(u_*, \alpha) = \left\{ v_* \in V_* : h_*(u_*, v_*, \alpha) = \max_{w_* \in V_*} h_*(u_*, w_*, \alpha) \right\}.$$

Так как на структуру функции  $u_*$  не накладывается никаких ограничений, максимум в последней формуле может не достигаться. В таком случае естественно предположить, что существует такое положительное число  $\kappa$ , что выбранная вторым игроком стратегия будет принадлежать множеству

$$BR(u_*, \alpha) = \left\{ v_* \in V_* : h_*(u_*, v_*, \alpha) \geq \sup_{w_* \in V_*} h_*(u_*, w_*, \alpha) - \kappa \right\}.$$

Формально нужно считать, что параметр  $\kappa$  известен первому игроку, но ниже будет показано, что от этого параметра мало что зависит.

При сделанных предположениях первый игрок гарантированно может рассчитывать на выигрыш

$$\inf_{v_* \in BR(u_*, \alpha)} g_*(u_*, v_*).$$

Этот выигрыш зависит от неопределенного фактора  $\alpha \in A$ , не известного первому игроку. Но поскольку первый игрок считается риск-нейтральным, он будет ориентироваться на результат

$$\mathbf{M} \inf_{v_* \in BR(u_*, \alpha)} g_*(u_*, v_*),$$

где символом  $\mathbf{M}$  обозначен оператор вычисления математического ожидания по вероятностному распределению  $\wp$ . При сделанных выше предположениях

$$\mathbf{M} \inf_{v_* \in BR(u_*, \alpha)} g_*(u_*, v_*, \alpha) = \sum_{i=1}^n p_i \inf_{v_* \in BR(u_*, \alpha_i)} g_*(u_*, v_*).$$

Таким образом, максимальный гарантированный результат первого игрока равен

$$R = \sup_{u_* \in U_*} \mathbf{M} \inf_{v_* \in BR(u_*, \alpha)} g_*(u_*, v_*).$$

Обозначим через  $R'$  максимальный гарантированный результат в смысле определения 1. Достаточно просто получается следующий результат.

**Лемма 2.** Для любой игры  $\Gamma$  справедливо неравенство  $R' \geq R$ .

**Доказательство.** Фиксируем произвольное число  $\gamma < R$ . Тогда существует такая стратегия  $u_* \in U_*$ , что

$$\mathbf{M} \inf_{v_* \in BR(u_*, \alpha)} g_*(u_*, v_*) \geq \gamma.$$

Положим  $\gamma_i = \inf_{v_* \in BR(u_*, \alpha_i)} g_*(u_*, v_*)$ . Очевидно,  $\sum_{i=1}^n p_i \gamma_i \geq \gamma$

Пусть  $\lambda_i = \max_{v_* \in V_*} h_*(u_*, v_*, \alpha_i)$  для тех  $i$ , для которых максимум в этой формуле достигается, и  $\lambda_i = \sup_{v_* \in V_*} h_*(u_*, v_*, \alpha_i) - \kappa$  для остальных значений  $i$ .

Покажем, что число  $\gamma$  является гарантированным результатом в смысле определения 1. Стратегия  $u_*$  уже выбрана. Определим случайную величину  $\chi(\alpha)$ , положив  $\chi(\alpha) = \gamma_i$ .

Для любого  $\alpha_i \in A$  выберем  $\lambda = \lambda_i$ . Тогда для  $w_* \in BR(u_*, \alpha_i)$  справедливо неравенство  $h_*(u_*, w_*, \alpha_i) \geq \lambda$ , т.е. пункт 1° определения 1 выполнен.

Если стратегия  $v_*$  второго игрока принадлежит множеству  $BR(u_*, \alpha_i)$ , то в силу определения числа  $\chi(\alpha)$  имеет место неравенство  $g_*(u_*, v_*) \geq \chi(\alpha)$ . А если стратегия  $v_*$  не принадлежит множеству  $BR(u_*, \alpha_i)$ , то в силу выбора числа  $\lambda$  и определения множества  $BR(u_*, \alpha_i)$  справедливо неравенство  $h_*(u_*, v_*, \alpha_i) < \lambda$ . Следовательно, пункт 2° тоже выполнен.

Как уже отмечалось, справедливо и неравенство  $\gamma \geq \mathbf{M}\chi(\alpha)$ .

Значит,  $\gamma$  – гарантированный результат, и потому  $R' \geq \gamma$ . А поскольку  $\gamma$  – произвольное число, удовлетворяющее неравенству  $\gamma < R$ , будем иметь  $R' \geq R$ , что и требовалось доказать.

Обратное неравенство доказать пока не удастся. Все упирается в следующее предположение.

**Гипотеза.** Для любого  $\gamma < R$  существует такая стратегия  $u_* \in U_*$ , что

$$\mathbf{M} \inf_{v_* \in BR(u_*, \alpha)} g_*(u_*, v_*) \geq \gamma$$

и для любого  $\alpha \in A$  верхняя грань  $\sup_{v_* \in V_*} h_*(u_*, v_*, \alpha)$  достигается.

Если гипотеза неверна, то величина  $R$  будет, вообще говоря, зависеть от параметра  $\kappa$ . А величина  $R'$  от  $\kappa$  не зависит. Таким образом, свойство, сформулированное в гипотезе, является необходимым условием выполнения равенства  $R' = R$ . Если же гипотеза верна, то неравенство  $R' \leq R$  устанавливается без особого труда.

Геометрия рассматриваемой задачи довольно сложна, поэтому доказать гипотезу не получается. Впрочем, и попытки построить опровергающий ее пример натываются на серьезные трудности. Поэтому гипотеза кажется довольно правдоподобной.

Для величины  $R$  можно получить нижнюю оценку, аналогичную только что полученной верхней. Она представляет определенный самостоятельный интерес, поэтому остановимся на ней несколько подробнее.

И в классическом определении, и в определении 1 неявно предполагается, что второй игрок абсолютно рационален, то есть стремится абсолютно точно реализовать максимум своего выигрыша, по крайней мере, если этот максимум достигается. Видимо, это предположение адекватно описывает реальность далеко не всегда. Как альтернативу можно принять гипотезу ограниченной рациональности в духе Г. Саймона [9]. А именно, можно предположить, что существует такое число  $\kappa$ , что второй игрок не чувствителен к разнице своих выигрышей, меньшей  $\kappa$ . Тогда определение 1 следует заменить следующим.

**Определение 2.** Число  $\gamma$  является  $\kappa$ -гарантированным результатом первого игрока в игре  $\Gamma_*$ , если существуют такая стратегия  $u_*$  и такая случайная величина  $\gamma(\alpha)$ , что для любого  $\alpha \in A$  найдется число  $\lambda$ , для которого выполняется одно из двух условий:

1°. Существует  $w_* \in V_*$ , для которого  $h_*(u_*, w_*, \alpha_i) \geq \lambda$ .

2°. Для любого  $v_* \in V_*$  либо  $g_*(u_*, v_*) \geq \gamma(\alpha)$ , либо  $h_*(u_*, v_*, \alpha_i) < \lambda - \kappa$ ,

и, кроме того,  $\gamma \geq \mathbf{M}\gamma(\alpha)$ . Точная верхняя грань  $\kappa$ -гарантированных результатов первого игрока называется его максимальным  $\kappa$ -гарантированным результатом.

По аналогии с теоремой 1 можно получить необходимые и достаточные условия того, что  $\gamma$  является  $\kappa$ -гарантированным результатом.

Условия (2) и (3) заменяются условиями

$$(7) \quad \begin{cases} g(u_i, v_i) \geq \gamma_i, \\ h(u_i, v_i, \alpha_i) \geq \lambda_i, \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

и

$$(8) \quad \begin{cases} g(u_j, v_j) \geq \gamma_i, \\ h(u_j, v_j, \alpha_i) < \lambda_i - \kappa, \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Если обозначить через  $H_\kappa(\gamma)$  множество всех наборов

$$\Xi = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, u_1, u_2, \dots, u_n, v_1, v_2, \dots, v_n),$$

удовлетворяющих условиям (1), (7), (8) и  $\sum_{i=1}^n p_i \gamma_i \geq \gamma$ , то окончательный результат можно сформулировать следующим образом.

**Теорема 2.** Для того чтобы число  $\gamma$  было  $\kappa$ -гарантированным результатом в игре  $\Gamma_*$ , необходимо, чтобы величина

$$\inf_{\Xi \in H(\gamma)} \max_{v \in V} \min_{u \in U} \max_{i=1,2,\dots,n} \min(\gamma_i - g(u, v), h(u, v, \alpha_i) - \lambda_i + \kappa)$$

была неположительной, и достаточно, чтобы эта величина была отрицательной.

**Доказательство** этой теоремы практически дословно повторяет доказательство теоремы 1, поэтому приводить его не станем.

Обозначим максимальный  $\kappa$ -гарантированный результат через  $R''$ . Обещанная оценка выглядит следующим образом.

**Лемма 3.** Для любой игры  $\Gamma$  справедливо неравенство  $R'' \leq R$ .

**Доказательство.** Пусть  $\gamma$  –  $\kappa$ -гарантированный результат,  $u_*$  и  $\chi(\alpha)$  – стратегия и случайная величина, существование которых предусматривает определение 2. Для  $\alpha = \alpha_i$  обозначим через  $\lambda_i$  величину  $\lambda$ , удовлетворяющую этому определению.

В силу пункта 1° для некоторой стратегии  $w_*$  выполняется неравенство  $h_*(u_*, w_*, \alpha_i) \geq \lambda_i$ , значит,

$$l_i = \sup_{w_* \in BR(u_*, \alpha_i)} h(u_*, w_*, \alpha_i) \geq \lambda_i.$$

Если стратегия  $v_*$  принадлежит множеству  $BR(u_*, \alpha_i)$ , то справедливо неравенство  $h_*(u_*, w_*, \alpha_i) \geq l_i - \kappa$ . Тогда в силу пункта 2° определения 2 имеет место неравенство  $g_*(u_*, v_*) \geq \chi(\alpha_i)$ . Следовательно,

$$\inf_{v_* \in BR(u_*, \alpha_i)} g_*(u_*, v_*) \geq \chi(\alpha_i).$$

Применив к этому неравенству оператор вычисления математического ожидания, получим

$$\mathbf{M} \inf_{v_* \in BR(u_*, \alpha_i)} g_*(u_*, v_*) \geq \mathbf{M} \chi(\alpha_i) \geq \gamma$$

и тем более

$$R'' = \sup_{u_* \in U_*} \mathbf{M} \inf_{v_* \in BR(u_*, \alpha_i)} g_*(u_*, v_*) \geq \gamma.$$

Поскольку сказанное справедливо для любого  $\kappa$ -гарантированного результата  $\gamma$ , получим нужное неравенство  $R'' \leq R$ .

**Замечание.** Если положить

$$BR''(u_*, \alpha) = \left\{ v_* \in V_* : h_*(u_*, v_*, \alpha) \geq \sup_{w_* \in V_*} h_*(u_*, w_*, \alpha) - \kappa \right\}$$

(независимо от того, достигается верхняя грань в этой формуле или нет), то получим

$$R'' = \sup_{u_* \in U_*} \mathbf{M} \inf_{v_* \in BR''(u_*, \alpha)} g_*(u_*, v_*).$$

Действительно, неравенство

$$R'' \leq \sup_{u_* \in U_*} \mathbf{M} \inf_{v_* \in BR''(u_*, \alpha)} g_*(u_*, v_*),$$

по сути, только что доказано. Доказательство обратного неравенства аналогично доказательству леммы 2. Таким образом, на самом деле имеется «классический» вариант определения  $\kappa$ -гарантированного результата, причем эквивалентность этих определений не зависит ни от топологических свойств рассматриваемой игры, ни от предположения о конечности множества  $A$ .

Выше был, надеюсь, наглядно продемонстрирован более конструктивный характер определения 1 по сравнению с классическим вариантом. Стоит упомянуть еще одну причину, по которой новое определение стоит предпочесть классическому, если они не эквивалентны.

Практически всегда бесконечное множество – это более удобная замена большого конечного (например, часто считают прибыль действительным числом, в то время как она измеряется целым числом копеек). Эта замена правомерна, если решения задач в обоих случаях близки. Нетрудно видеть, что если сформулированная выше гипотеза неверна, то с классическим вариантом определения максимального гарантированного результата это не так.

Предположим, что топологии на множествах  $U$  и  $V$  задаются некоторыми метриками. Аппроксимируем эти множества конечными  $\varepsilon$ -сетями. Что произойдет с максимальным гаранти-

рованным результатом? В аппроксимирующей игре верхняя грань в определении множества рациональных ответов будет достигаться. Поэтому максимальный гарантированный результат не будет зависеть от  $\kappa$ , т.е., если гипотеза неверна, он будет отличаться на конечную величину от максимального гарантированного результата в аппроксимируемой игре при сколь угодно малом  $\varepsilon$ !

Таким образом, задача вычисления классического максимального гарантированного результата неустойчива по отношению к конечным аппроксимациям игры и потому требует уточнения. Разумеется, нельзя утверждать, что от этого недостатка свободно новое определение. Несовпадение необходимых и достаточных условий в теореме 1 говорит как раз о возможности неустойчивости. Однако причин возникновения неустойчивости в данном случае меньше.

## **7. Заключение**

Как отмечалось выше, задачи со стохастическими неопределенными факторами сложнее аналогичных задач с интервальными неопределенностями. После проведенного исследования это становится понятным. В первом случае к двум кванторам общности и существования добавляется еще оператор вычисления математического ожидания. Причем возможность перестановки разноименных операторов зависит от информационной структуры рассматриваемой игры. Понятно, что чем больше типов операторов, тем более жесткие условия нужно наложить на задачу, чтобы ее удалось решить.

В [4] удалось воспользоваться тем, что в определении максимального гарантированного результата рядом стояли два квантора общности и их удалось поменять местами. В данной же работе вместо одного из этих кванторов общности оказался оператор вычисления математического ожидания, и выбранная структура информированности не позволила произвести перестановку естественным образом. Пришлось использовать искусственный прием, откуда и появилось дополнительное ограничение на конечность множества неопределенных факторов  $A$ .

Стоит отметить еще одно отличие постановки задачи в данной работе от задачи, рассмотренной в [4]. В [4] предусматривалась возможность добровольной передачи не обязательно достоверной информации от второго игрока к первому. Такая возможность может быть выгодной обоим игрокам (и уж, во всяком случае, не принесет им вреда), поэтому, видимо, такую возможность следует предусматривать в постановке. Кроме того, такое увеличение информированности «регуляризует» решение задачи и делает его поиск более простым.

Сделанное предположение о конечности множества  $A$  позволило решить задачу в более сложном варианте. Но и вариант с добровольным обменом информации может быть исследован аналогично. Условие (1) из определения множества  $\Xi$  нужно будет исключить, и дальнейшие рассуждения из раздела 4 повторятся практически дословно. А конструкции раздела 5 нужно будет поменять достаточно естественным образом.

Количество «разумных» постановок игровых задач с неопределенными факторами весьма велико. Поэтому исследование одной из них, наверное, представляет не слишком большой интерес, если оно не диктуется конкретными практическими нуждами. В данной работе, как и в [4], основная цель состояла в демонстрации возможностей метода решения таких задач. Задачи, которые были поставлены раньше, но не решены в полном объеме, подходят для этой цели как нельзя лучше. Именно этим и определялся их выбор.

### **Литература**

1. БУРКОВ В.Н., ЕНАЛЕЕВ А.К., НОВИКОВ Д.А. *Механизмы стимулирования в вероятностных моделях социально-экономических систем* // Автоматика и телемеханика. – 1993. – №11. – С. 3–30.
2. БУРКОВ В.Н., ЕНАЛЕЕВ А.К., НОВИКОВ Д.А. *Вероятностная задача стимулирования* // Автоматика и телемеханика. – 1993. – №12. – С. 140–145.
3. БУРКОВ В.Н., НОВИКОВ Д.А. *Оптимальные механизмы стимулирования в активной системе с вероятностной не-*

- определенностью II* // Автоматика и телемеханика. – 1995. – №10. – С. 121–126.
4. ГОРЕЛОВ М.А. *Иерархические игры с неопределенными факторами* // Управление большими системами. – Вып. 59. – М.: ИПУ РАН, 2016. – С. 6–22
  5. ЕНАЛЕЕВ А.К., НОВИКОВ Д.А. *Оптимальные механизмы стимулирования в активной системе с вероятностной неопределенностью I* // Автоматика и телемеханика. – 1995. – №9. – С. 117–126.
  6. КОНОНЕНКО А.Ф., ХАЛЕЗОВ А.Д. *Общее решение задачи Центр – Агент с несимметричной информацией в условиях неопределенности и риска* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2000. – Т. 40. – №4. – С. 532–545.
  7. КОНОНЕНКО А.Ф., ХАЛЕЗОВ А.Д., ЧУМАКОВ В.В. *Принятие решений в условиях неопределенности.* – М.: ВЦ АН СССР, 1991. – 197 с.
  8. НОВИКОВ Д.А. *Стимулирование в вероятностных активных системах: роль неопределенности* // Автоматика и телемеханика. – 1997. – №8. – С. 168–177.
  9. САЙМОН Г. *Науки об искусственном.* – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 144 с.
  10. ХАЛЕЗОВ А.Д. *Приближенное вычисление оптимальной стратегии в играх с фиксированной последовательностью ходов при неполной информации* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1979. – Т. 19. – №2. – С. 527–533.
  11. ХАЛЕЗОВ А.Д. *Об одном классе многошаговых конфликтов в условиях риска* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1982. – Т. 22. – №1. – С. 42–48.
  12. ХАЛЕЗОВ А.Д. *Применение уточняемых стратегий в многошаговых конфликтах в условиях риска* // Автоматика и телемеханика. – 1990. – №2. – С. 113–123.
  13. ХАЛЕЗОВ А.Д. *Общее решение задачи Центр – Агент с симметричной информацией в условиях риска* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2001. – Т. 41. – №3. – С. 374–383.
  14. BOLTON P., DEWATRIPONT M. *Contract Theory.* – Cambridge: The MIT Press, 2004. – 744 pp.

15. LAFFONT J.-J., MARTIMORT D. *The Theory of Incentives: The Principal-Agent Model*. – Cambridge: The MIT Press, 2002. – 440 pp.

## **HIERARCHICAL GAMES UNDER UNCERTAINTY**

**Mikhail Gorelov**, Computer Center of RAS, Moscow, Cand.Sc., (griefer@ccas.ru).

*Abstract: The two-players hierarchical game is considered. The payoff function of low-level player (agent) depends on a random variable. The low-level player knows the value of this variable at the moment of decision making. And high-level player (principal) knows only probability distribution on the domain when making his decision. We obtain the optimal strategy for the principal under the assumption that she is trying to maximize the guaranteed payoff. This results are tightly coupled with some work in the theory of contracts.*

Keywords: informational theory of hierarchical systems, games under uncertainty, maximal guaranteed payoff, contract theory.

*Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии Г. А. Угольником.*

*Поступила в редакцию 10.11.2015.*

*Опубликована 30.09.2016.*

УДК 51-77  
ББК 60.55.372

## **ОЦЕНКА ВЕРОЯТНОСТИ РЕДКИХ СОБЫТИЙ В ПОВЕДЕНИИ ТОЛПЫ**

**Рогаткин А. Д.<sup>1</sup>**

*(ФГБУН Институт проблем управления РАН, Москва)*

*Исследуется предложенная в [2] модель поведения толпы, которая является обобщением модели конформного порогового коллективного поведения М. Грановеттера [13] на случай неопределённости относительно значений порогов агентов. Вероятность события, состоящего в выходе системы из некоторого множества состояний (т.е. в так называемом возбуждении толпы), оценивается при помощи асимптотического результата, полученного в [8]. Теоретические оценки типа больших уклонений уточняются при помощи численных оценок, полученных методом статистических испытаний. Полученные результаты дают возможность оценить надёжность обеспечения невозбуждения толпы в тех случаях, когда вероятности событий слишком малы для применения метода статистических испытаний. Приведены рекомендации по выбору параметров, обеспечивающих заданную вероятность выхода системы из множества заданных состояний.*

Ключевые слова: модель Грановеттера, конформное коллективное поведение, управление толпой, большие уклонения, статистические испытания.

---

<sup>1</sup> Рогаткин Андрей Дмитриевич, аспирант  
(andreyrogatkin@gmail.com).

## **1. Введение**

В работах М. Грановеттера [13] и Т. Шеллинга [14] предложены модели коллективного поведения, которые сегодня лежат в основе множества различных подходов к математическому и физическому описанию социальных явлений [3, 4, 5, 9]. Единой для этих подходов является ситуация, в которой агенты осуществляют бинарный выбор - действовать или бездействовать - в дискретные моменты времени, ориентируясь при этом на действия своего окружения. При этом ключевой характеристикой агента является его порог, при превышении которого обстановкой агент изменяет свое поведение. В течение последних десятилетий пороговые модели получили широкое распространение, в частности, одним из современных направлений исследований является их развитие – решетки связанных отображений (Coupled Map Lattices) [10, 11, 15].

В классических работах М. Грановеттера и Т. Шеллинга не учитывается неполнота информации, которая важна для приложений, в том числе для решения задачи управления надежностью социальных систем. В реальных ситуациях, как правило, пороги агентов не известны точно, а известно их вероятностное распределение. В настоящей работе для описания поведения толпы (раздел 2) используется предложенная в [2] модель, которая является обобщением модели конформного порогового коллективного поведения М. Грановеттера [13] на случай вероятностной неопределенности относительно значений порогов агентов.

В разделе 3 используется полученная автором в [8] асимптотика типа больших уклонений для оценки вероятности редких событий в поведении толпы. В качестве функции распределения порогов агентов используется двухпараметрическое семейство функций, полученное в [1, 6] на основании исследования социальных сетей Facebook, Livejournal и Twitter. Показано, что грубая логарифмическая асимптотика типа больших уклонений может применяться для численной оценки вероятностей редких событий при помощи «калибровки» оценки методом статисти-

ческих испытаний (раздел 4) на множестве параметров, позволяющих получать оценки статистическим методом.

В разделе 5 решается задача управления надежностью социальных систем. Находится множество значений параметров системы, обеспечивающих на заданном промежутке времени заданную надежность.

## 2. Описание модели

Рассмотрим конечное множество агентов  $N = \{1, 2, \dots, n\}$ . Каждый из агентов имеет некоторый порог сопротивления социальному давлению  $\theta_i \in [0, 1]$ ,  $i \in N$ , (далее – порог; под социальным давлением понимается то, сколько других агентов действует). На шаге  $k$  агент  $i \in N$  выбирает одно из двух состояний  $\omega_{ik} \in \{0, 1\}$  (если  $\omega_{ik} = 1$ , то говорят, что агент «действует», иначе говорят, что он «бездействует»), его состояние на шаге  $k + 1$  определяется по правилу

$$(1) \quad \omega_{i(k+1)} = \begin{cases} 1, & \frac{1}{n} \sum_j \omega_{jk} - \theta_i \geq 0, \\ 0, & \frac{1}{n} \sum_j \omega_{jk} - \theta_i < 0. \end{cases}$$

Согласно правилу (1), агент действует, если состояние системы  $x_k = 1/n \sum_i \omega_{ik}$  не ниже, чем его порог. Такое поведение называется конформным. Динамика состояния системы во времени при этом подчиняется рекуррентному соотношению

$$(2) \quad x_{k+1} = F_n(x_k),$$

где

$$(3) \quad F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \chi(\theta_i \leq x).$$

Здесь  $\chi$  обозначает индикатор множества.

В работах [2, 8], был рассмотрен случай, при котором в правой части выражения (1) имеется неопределённость: вместо известных порогов агентов рассматривается последовательность

$\theta_1(\omega), \dots, \theta_n(\omega)$  независимых одинаково распределённых (с распределением  $F(\cdot)$ ) случайных величин на вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Такая ситуация возникает, например, когда пороги агентов не известны точно, но агенты выбраны случайно из множества агентов с известным распределением порогов.

Эмпирическая функция распределения порогов агентов в этом случае запишется как

$$(4) \quad F_n(x, \omega) = \frac{1}{n} \sum_i \chi(\theta_i(\omega) \leq x).$$

При фиксированных  $F$  и  $x_0$  получаем, что выражением

$$x_1^n(\omega) = F_n(x_0, \omega),$$

...

$$(5) \quad x_k^n(\omega) = F_n(x_{k-1}(\omega), \omega),$$

...

$$x_K^n(\omega) = F_n(x_{K-1}(\omega), \omega)$$

задана последовательность случайных конечных последовательностей  $\{\bar{x}^n(\omega) = (\bar{x}_1^n(\omega), \dots, \bar{x}_K^n(\omega))\}$  - траекторий системы, каждая из которых имеет некоторое распределение  $P_n$  на пространстве  $\mathbb{R}^K$ , определяемое как  $P_n(A) = \mathbb{P}\{\omega: \bar{x}^n(\omega) \in A\}$ . На рис. 1 показан пример одной реализации эмпирической функции распределения и соответствующей ей траектории системы.

В работе [8] была доказана следующая асимптотика для распределений траекторий системы:

$$(6) \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log P_n(U) \geq -\inf_U H(\bar{y})$$

для любого открытого множества  $U \in \mathcal{B}(S)$ ,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log P_n(C) \leq -\inf_C H(\bar{y})$$

для любого замкнутого множества  $C \in \mathcal{B}(S)$ , где

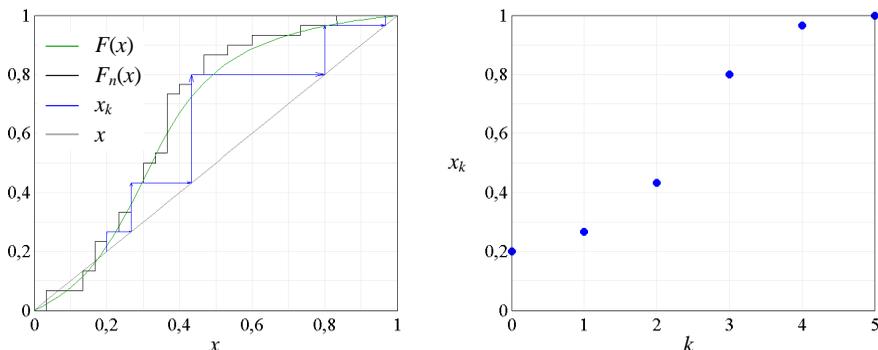


Рис. 1. Реализация случайной траектории, соответствующей функции распределения  $F(\cdot)$ . Диаграмма Ламерея (слева).

Траектория системы (справа),  $n = 30$

$$(7) \quad H(\bar{y}) = \begin{cases} y_1 \ln \frac{y_1}{F(y_0)} + (1 - y_K) \ln \frac{1 - y_K}{1 - F(y_{K-1})} + \\ + \sum_{k=1}^{K-1} (y_{k+1} - y_k) \ln \frac{y_{k+1} - y_k}{F(y_k) - F(y_{k-1})}, \bar{y} \in Y_1, \\ (1 - y_1) \ln \frac{1 - y_1}{1 - F(y_0)} + y_K \ln \frac{y_K}{F(y_{K-1})} + \\ + \sum_{k=1}^{K-1} (y_k - y_{k+1}) \ln \frac{y_k - y_{k+1}}{F(y_{k-1}) - F(y_k)}, \bar{y} \in Y_2, \\ +\infty, \bar{y} \notin Y_1 \cup Y_2, \end{cases}$$

и введены обозначения  $y_0 \triangleq x_0$ ,  $0 \cdot \ln(0) \triangleq 0$ ,

$$Y_1 = \left\{ \bar{y} \in [0, 1]^K : y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_m = y_{m+1} \dots = y_K \right\},$$

$$m \in \{0, \dots, K\},$$

$$Y_2 = \left\{ \bar{y} \in [0, 1]^K : y_0 > y_1 > y_2 > \dots > y_m = y_{m+1} \dots = y_K \right\},$$

$$m \in \{0, \dots, K\}.$$

Асимптотические результаты типа (6) изучаются в теории больших уклонений [12].

В работах [1, 6] показано, что конформное поведение в сетевых структурах имеет эквивалентное модели Грановеттера математическое описание, в котором структура сети заключена в некоторую функцию, имеющую свойства функции распределения. В [1, 6] было проведено исследование социальных сетей Facebook, Livejournal и Twitter и показано, что реальные социальные сети хорошо моделируются функциями из двухпараметрического семейства

$$(8) \quad F(x, \theta, \lambda) = \frac{\arctg \lambda (x - \theta) + \arctg(\lambda \theta)}{\arctg \lambda (1 - \theta) + \arctg(\lambda \theta)},$$

где  $\lambda \in (0, +\infty)$  - параметр, носящий название «коэффициент неоднородности» и характеризующий степень отличия функции распределения от равномерного распределения, а  $\theta \in [0, 1]$ -параметр, называемый «единым относительным порогом» и характеризующий происходящий в сети процесс принятия решения. В [1, 6] показано, что значения коэффициента неоднородности составляют  $\lambda_F = 13,01$ ;  $\lambda_L = 9,18$ ;  $\lambda_T = 7,34$  для социальных сетей Facebook, Livejournal и Twitter соответственно. На рис. 2 изображены различные кривые из параметрического семейства (8).

В настоящей работе изучается вероятность события  $A \in \mathcal{F}$ , состоящего в том, что случайный процесс (5) с заданным начальным условием (например,  $x_0 = 0,2$ ) превысит в некоторый момент времени точку выхода (например,  $x_{вых} = 0,5$ ) при различных количествах  $n$  агентов в системе. Формальное определение данного события запишется как

$$(9) \quad A^n = \left\{ \omega \in \Omega : \exists k \in \square \quad x_k^n(\omega) > x_{вых} \right\}.$$

Событие  $A^n$  далее называется *выходом из области* социальной системы, состоящей из  $n$  агентов. Вероятность выхода из области в описанной модели зависит только от теоретической функции распределения порогов агентов  $F(\cdot)$  и их количества  $n$ . В случае функций распределения из двухпараметрического семейства (8) введём для нее обозначение

$$(10) \quad P_{вых}^n(\theta, \lambda) = P \left\{ \omega \in A^n \right\}, \quad F(x) = F(x, \theta, \lambda).$$

Асимптотическая оценка (6) для вероятности  $P_{\text{вых}}^n(\theta, \lambda)$  принимает вид

$$(11) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log P_{\text{вых}}^n(\theta, \lambda) = - \inf_{\bar{y} \in A^n} H(F(\cdot, \theta, \lambda), \bar{y}).$$

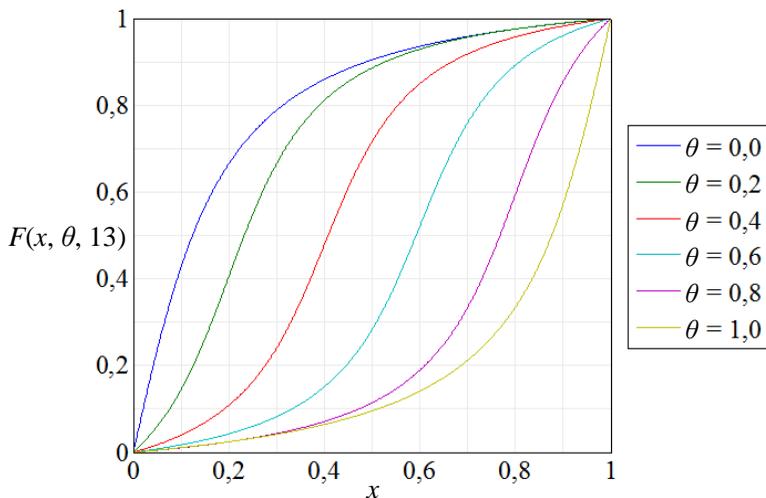


Рис. 2. Кривые из семейства (8) при  $\lambda = 9,18$  и различных  $\theta \in [0, 1]$

### 3. Оценка вероятности выхода из области

В данном разделе приведены результаты вычисления  $P_{\text{вых}}^n(\theta, \lambda)$  методом статистических испытаний для  $n_1 = 50$ ,  $n_2 = 100$  и  $n_3 = 200$  и показано, как с применением асимптотики (11) они могут быть продолжены для более высоких значений  $n$ .

Оценка (11) может быть переписана в виде

$$(12) P_{\text{вых}}^n(\theta, \lambda) = c(n, \theta, \lambda) e^{-n \inf_{\bar{y} \in A^n} H(F(\cdot, \theta, \lambda), \bar{y})},$$

где  $c(n, \theta, \lambda)$  удовлетворяет

$$(13) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log c(n, \theta, \lambda)}{n} = 0 \text{ для всех } \theta, \lambda,$$

т.е. изменяется «меньше чем экспоненциально» по  $n$ . Не зная константы  $c(n, \theta, \lambda)$ , нельзя определить значение вероятности  $P^n_{\text{вых}}(\theta, \lambda)$  с заданной точностью. По этой причине утверждения типа (11) иногда называют «грубая логарифмическая асимптотика». Асимптотика (11) может применяться для получения численной оценки вероятности  $P^n_{\text{вых}}(\theta, \lambda)$  только при наличии дополнительной информации о константе  $c(n, \theta, \lambda)$ . В данной работе значение этой константы определялось приближённо при помощи полученной методом статистических испытаний оценки  $\tilde{P}^n_{\text{вых}}(\theta, \lambda)$ , изображённой на рис. 3. Подробное описание алгоритма проведения статистических испытаний дано в следующем разделе.

Качественные различия в  $P^n_{\text{вых}}(\theta, \lambda)$  как функции двух переменных  $(\theta, \lambda)$  при различных  $n$  хорошо иллюстрируются линиями уровня (кривыми, на которых  $P^n_{\text{вых}}(\theta, \lambda)$  постоянна). На рис. 4 изображены линии уровня  $\tilde{P}^n_{\text{вых}}(\theta, \lambda)$ , определяемые как функции  $\lambda_1^n(\theta)$ ,  $\lambda_2^n(\theta)$  и  $\lambda_3^n(\theta)$ , удовлетворяющие

$$(14) \begin{aligned} \tilde{P}^n_{\text{вых}}(\theta, \lambda_1^n(\theta)) &= 10^{-2}, \\ \tilde{P}^n_{\text{вых}}(\theta, \lambda_2^n(\theta)) &= 10^{-3}, \\ \tilde{P}^n_{\text{вых}}(\theta, \lambda_3^n(\theta)) &= 10^{-4}. \end{aligned}$$

Приближенное значение  $\hat{c}(\theta, \lambda)$  константы  $c(n, \theta, \lambda)$  находилось на основании данных статистических испытаний следующим образом:

1. При помощи метода численной оптимизации вычислялась оценка  $\hat{I}(\theta, \lambda)$  функции

$$(15) I(\theta, \lambda) = \inf_{\bar{y} \in A^n} H(F(\cdot, \theta, \lambda), \bar{y}).$$

2. Приближенное значение  $\hat{c}(\theta, \lambda)$  константы  $c(n, \theta, \lambda)$  находилось по формуле

$$(16) \hat{c}(\theta, \lambda) = \frac{\hat{P}^n_{\text{вых}}(\theta, \lambda)}{e^{-\hat{I}(\theta, \lambda)}}$$

при  $n = 200$ .

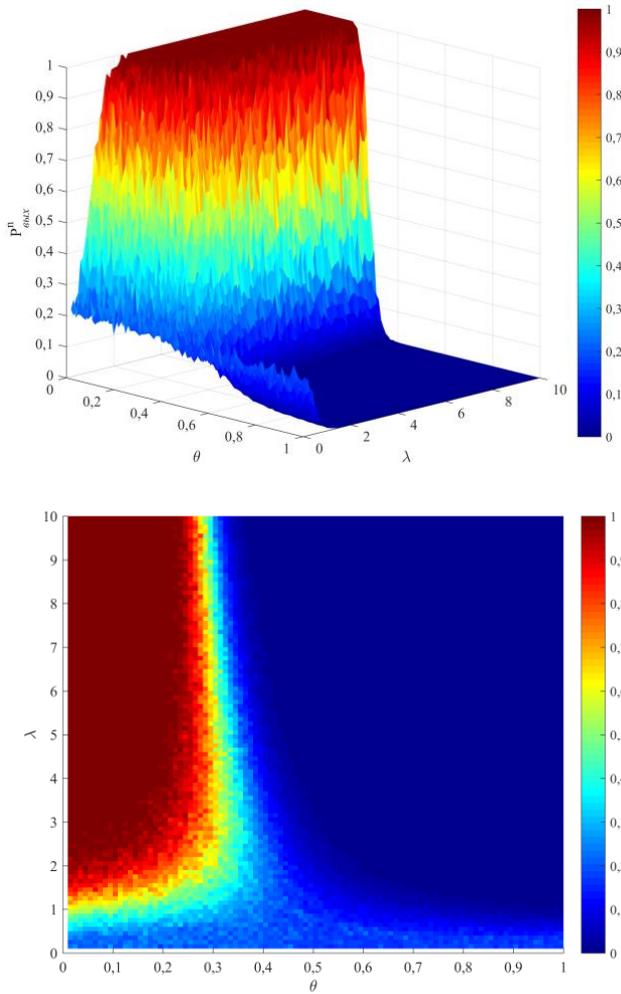


Рис. 3. Зависимость вероятности выхода из области от параметров  $\theta, \lambda$ , полученная методом статистических испытаний при  $n = 50$ . Сверху – график функции  $P_{\text{вых}}^n(\theta, \lambda)$ , снизу – цветное изображение функции  $P_{\text{вых}}^n(\theta, \lambda)$

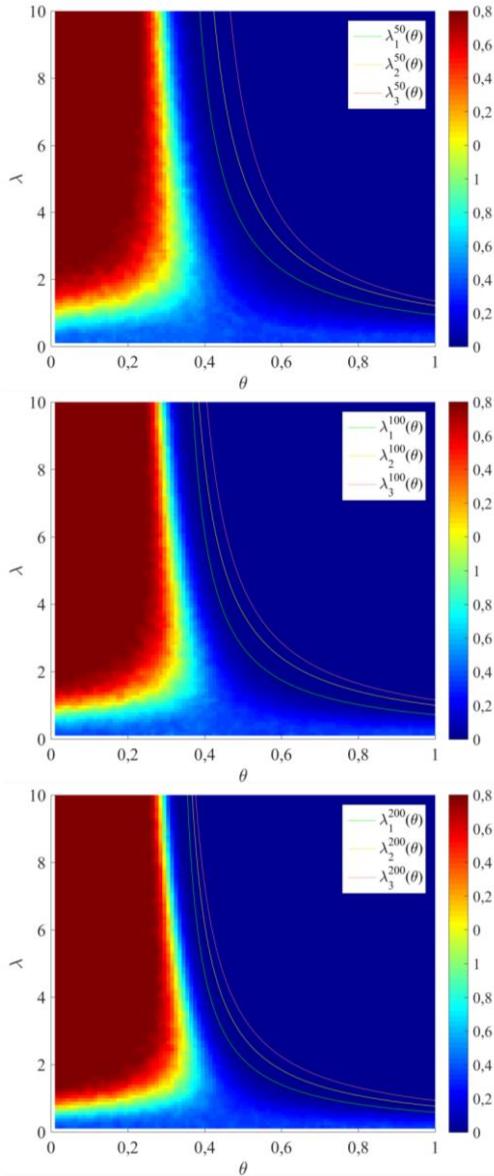


Рис. 4. Кривые равной вероятности выхода (линии уровня) для различного числа агентов социальной сети  $n_1 = 50$ ,  $n_2 = 100$  и  $n_3 = 200$

Полученное значение  $\hat{c}(\theta, \lambda)$  для различных  $(\theta, \lambda)$ , применялось для того, чтобы записать «совмещённую» оценку в виде

$$(17) P_{\text{вых}}^n(\theta, \lambda) = \hat{c}(\theta, \lambda) e^{-n\hat{t}(\theta, \lambda)}.$$

Оценка (17) вероятности выхода из области применима при любых значениях  $n$ , в том числе тех, для которых невозможно получить результат методом статистических испытаний из-за ограничений на вычислительные ресурсы. Это позволяет оценивать вероятность выхода из области для реальных социальных систем, состоящих из большого числа агентов. Важно отметить, что оценка (17) получена объединением аналитического результата (11) и численных расчётов.

Построенная в данном разделе оценка вероятности для выхода из области (обозначенного выше  $A^n$ ) может быть также построена и для любого другого события (подмножества допустимых траекторий системы  $Y_1 \cup Y_2$ ). Для этого необходимо подставить соответствующее подмножество траекторий в (15) в качестве множества, на котором происходит оптимизация функционала  $H(\cdot)$ . Таким образом, исследователь может оценить вероятность любого возможного события, вычислив ее численно для некоторого значения  $n$  и осуществив «калибровку»

(15)–(17).

#### 4. Алгоритм статистических испытаний

В работе [2] показано, что случайные траектории (5) имеют конечную длину, т.е. не более чем за  $n$  шагов система достигает некоторого (случайного) конечного состояния, которое не изменится с дальнейшим течением времени. Этот факт лежит в основе вычислительного эксперимента для определения вероятности  $P_{\text{вых}}^n(\theta, \lambda)$ , который был реализован в программной среде MATLAB и описывается далее. При помощи метода обратного преобразования функции распределения  $F(\theta, \lambda)$  генерировалась конечная последовательность из  $n$  реализаций случайных порогов  $\theta_1, \dots, \theta_n$ , по которым вычислялась эмпирическая функция распределения (4). Далее при начальном условии  $x_0 = 0,2$  со-

гласно (5) вычислялись первые  $n$  членов последовательности  $x_k^n$ . Считалось, что произошёл выход из области, если выполнялось  $\max_{k=1\dots n}\{x_k^n\} \geq x_{\text{вых}}$ , где  $x_{\text{вых}} = 0,5$ . Эта процедура повторялась до выполнения условия

$$(18) \min \{q_l, (1 - q_l)\} = \frac{10}{l},$$

где

$$(19) q_l = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^l \chi \left( \max_{k=1\dots n} \{x_k^{ni}\} \geq x_{\text{вых}} \right)$$

– доля реализаций траектории  $x_k^{ni}$  с выходом из области,  $l$  – номер испытания в серии экспериментов. Затем вероятность выхода вычислялась на основании значения  $l$ , при котором произошла остановка процедуры, при помощи оценки, описание которой приведено в приложении «Оценка малого параметра геометрического распределения».

В силу ограничений на вычислительные ресурсы, в тех случаях, когда условие (18) не было достигнуто после  $l = 10^5$  шагов, процедура останавливалась и соответствующая вероятность принималась равной нулю. Таким образом, методом статистических испытаний оценивались вероятности в интервале  $(10^{-4}, 1 - 10^{-4})$ . Для остальных значений вероятности  $P_{\text{вых}}^n(\theta, \lambda)$  (очень близких к нулю или единице) статистическая оценка не может быть выполнена за разумное время в связи с ограничением на использованные вычислительные ресурсы. Применяемый для решения этой проблемы в статистических испытаниях метод *замены меры* в данном случае не применялся в связи с трудностями, возникающими при аналитических преобразованиях семейства мер  $P_n(A) = \mathbb{P}\{\omega: \bar{x}^n(\omega) \in A\}$  (выписанное в явном виде это семейство мер можно найти в работе [2]).

## 5. Обеспечение надежности социальных систем

Рассмотрим социальную систему (толпу, социальную сеть и т.п.) со стохастическим пороговым поведением (5). Как показано в [2], такая система не более чем за  $n$  шагов приходит к

«равновесию» (действия агентов перестают изменяться). В силу случайности порогов агентов, состояние системы, при котором достигается это равновесие (результатирующее состояние), случайно. Выше были приведены оценки вероятности события, состоящего в том, что результатирующее состояние системы находится вне заданной области (при условии, что первоначально система находилась в заданной области), при различных значениях коэффициента неоднородности и единого относительного порога системы. Вероятность выхода системы из заданной области в общем случае зависит от параметров системы, как было показано выше. Ниже изучается задача обеспечения *надёжности* социальной системы при условии, что вероятность выхода  $p$  известна как функция основных параметров системы  $p = p(n, \theta, \lambda) \equiv P_{\text{вых}}^n(\theta, \lambda)$ .

Пусть реализация порогов агентов, и, следовательно, достижение равновесия повторяется многократно через равные промежутки времени  $\tau$ , которые называются «быстрое время». Тогда за время  $t$ , называемое «медленное время», достижение равновесия произойдёт  $m = [t / \tau]$  раз, где  $[\cdot]$  обозначает целую часть числа. Согласно [7], *надёжностью* социальной системы называется вероятность сохранения её основных параметров внутри допустимой области. Для социальной системы основным наблюдаемым параметром является среднее действие агентов. Допустимой областью является множество  $[0, x_B)$ . Так как достижение равновесия многократно повторяется во времени, надёжность зависит от рассматриваемого промежутка времени. Обозначим через  $R(t)$  *функцию выживания* – вероятность того, что за время  $t$  система ни разу не выйдет из допустимой области. Функция выживания, согласно определению надёжности, является надёжностью системы на временном интервале  $t$ .

Введём бернуллиевскую случайную величину  $\xi \in \{0, 1\}$ , которая равна единице, если система в момент времени  $t_m = m\tau$  вышла из допустимой области, и равна нулю в противоположном случае. Вероятности этих событий равны соответственно  $p$  и  $1 - p$ . Функция выживания по определению может быть записана как

$$R(t) \equiv P(\xi_1 = \xi_2 = \dots = \xi_{[t/\tau]} = 0),$$

что приводит к результату

$$(20) R(t) = (1 - p)^{\left[ \frac{t}{\tau} \right]}.$$

При малых  $p$ , таких что  $p \ll 1/m = 1/[t/\tau]$ , выражение (20) может быть приближено

$$(21) R(t) = 1 - p \left[ \frac{t}{\tau} \right].$$

Задача управления надёжностью социальных систем состоит в том, чтобы найти множество параметров, при которых надёжность системы при заданном времени  $T$  окажется не меньше, чем заданный порог  $\delta$ .

Рассмотрим иллюстративный пример. Пусть задача состоит в обеспечении надёжности  $\delta = 1 - 10^{-2}$  для социальной системы с числом агентов  $n = 10^7$  на промежутке времени, таком что  $m = [t/\tau] = 10^3$ . Решение задачи выглядит следующим образом.

1. Подставить данные в уравнение (20) и найти максимально допустимую вероятность выхода  $p$ . В данном случае применимо приближение (21), принимающее вид  $\delta = 1 - pm$ , откуда выражается

$$(22) p = \frac{1 - \delta}{m} = \frac{10^{-2}}{10^3} = 10^{-5}.$$

2. Решить уравнение  $\hat{c}(\theta, \lambda) e^{-n \inf_{\bar{y} \in A^n} H(F(\cdot, \theta, \lambda), \bar{y})} = p$  и найти соответствующую линию уровня  $\hat{\lambda}(\theta)$  в пространстве параметров  $(\theta, \lambda)$ . Множество параметров  $(\theta, \lambda)$ , обеспечивающее надёжность не меньше чем  $\delta$ , лежит «правее и выше» найденной линии уровня, в области, изображённой зелёным цветом на рис. 5.

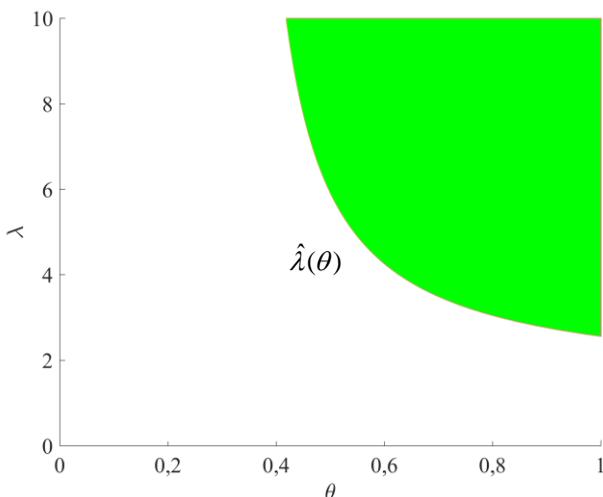


Рис. 5. Множество параметров  $(\theta, \lambda)$ , обеспечивающее надёжность, не превышающую  $\delta$  (зеленым цветом)

## 6. Заключение

Задача обеспечения надёжности социальной системы – её нахождения в заданном множестве состояний - требует оценки вероятностей редких событий. Зачастую эти вероятности настолько малы, что не позволяют применять для своей оценки метод статистических испытаний. Точные аналитические оценки и метод замены меры не всегда удаётся применить в связи со сложностью исследуемых моделей. В настоящей работе показано, что грубая логарифмическая асимптотика типа больших уклонений может применяться для численной оценки вероятностей редких событий при помощи «калибровки» оценки методом статистических испытаний на множестве параметров, позволяющих получать оценки статистическим методом. Оценку типа больших уклонений, как правило, легче получить аналитически, чем более точные оценки. Применение предлагаемой методики проиллюстрировано на модели конформного коллективного поведения. Построена численная оценка для различных

параметров модели. Приведён пример применения построенной оценки для задачи обеспечения надёжности – вероятности нахождения социальной системы в заданном «допустимом» множестве состояний.

### Литература

1. БАТОВ А.В., БРЕЕР В.В., НОВИКОВ Д.А., РОГАТКИН А.Д. *Микро- и макромоделли социальных сетей. Ч.2. Идентификация и имитационные эксперименты* // Проблемы управления. – 2014. – №6. – С. 45–51.
2. БРЕЕР В.В., РОГАТКИН А.Д. *Вероятностная модель порогового поведения в многоагентных системах* // Автоматика и телемеханика. – 2015. – №8. – С. 56–77.
3. БРЕЕР В.В. *Модели толерантного порогового поведения (от Т. Шеллинга – к М. Грановеттеру)* // Проблемы управления. – 2016. – №1. – С. 11–20.
4. БРЕЕР В.В. *Модели конформного поведения. Ч.1. От философии к математическим моделям* // Проблемы управления. – 2014. – №1. – С. 2–13.
5. БРЕЕР В.В. *Модели конформного поведения. Ч. 2. Математические модели* // Проблемы управления. – 2014. – №2. – С. 2–17.
6. БРЕЕР В. В. , НОВИКОВ Д. А. , РОГАТКИН А. Д. *Микро- и макромоделли социальных сетей. Ч. 1. Основы теории* // Проблемы управления. – 2014. – №5. – С. 28–33.
7. БУРКОВ В.Н., НОВИКОВ Д.А. *Как управлять проектами.* – М.:СИНТЕГ, 1997. – 188 с.
8. РОГАТКИН А.Д. *Большие отклонения в социальных системах с пороговым конформным поведением* // Автоматика и телемеханика (в печати).
9. СЛОВОХОТОВ Ю.Л. *Физика и социофизика. Ч. I. Физические основы социальных явлений. Влияние солнечной активности на процессы в обществе. Движение в системе «живых частиц»* // Проблемы управления. – 2012. – №1. – С. 2–20.

10. CHAOUIYA C, OURRAD O, LIMA R. *Majority Rules with Random Tie-Breaking in Boolean Gene Regulatory Networks* // PLoS ONE 8(7): e69626. doi:10.1371/journal.pone.0069626. 2013.
11. CHAZOTTES J, FERNANDEZ B. *Dynamics of Coupled Map Lattices and of Related Spatially Extended Systems*. – Springer, Lecture Notes in Physics, Vol. 671, 2005.
12. DEUSCHEL J., STROOCK D. *Large deviations*. – N.Y.: Academic Press, 1989. – 283 p.
13. GRANOVETTER M. *Threshold Models of Collective Behavior* // American Journal of Sociology. – 1978. – Vol. 83. – P. 1420–1443.
14. SCHELLING T. *Micromotives and Macrobehavior*. – N.Y.: WW Norton & Co, 1978. – 272 p.
15. VOLCHENKOV D., LIMA R. *Random Shuffling of Switching Parameters in a Model of Gene Expression Regulatory Network* // Stochastics and Dynamics. – 2005. – Vol. 5(01). – P. 75–95.

### **ПРИЛОЖЕНИЕ. ОЦЕНКА МАЛОГО ПАРАМЕТРА ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ**

Оценка малого параметра геометрического распределения.  
Изображенные на рис. 6 функции вероятности геометрических распределений с параметром  $p \in (0, 1)$  имеют вид

$$(23) P_p(k) = p(1-p)^{k-1}.$$

Задача состоит в построении статистической оценки параметра  $p$  по конечной выборке независимых одинаково распределённых случайных величин с распределением (23). Специфика задачи состоит в том, что  $p$  предполагается малым ( $p \ll 1$ ).

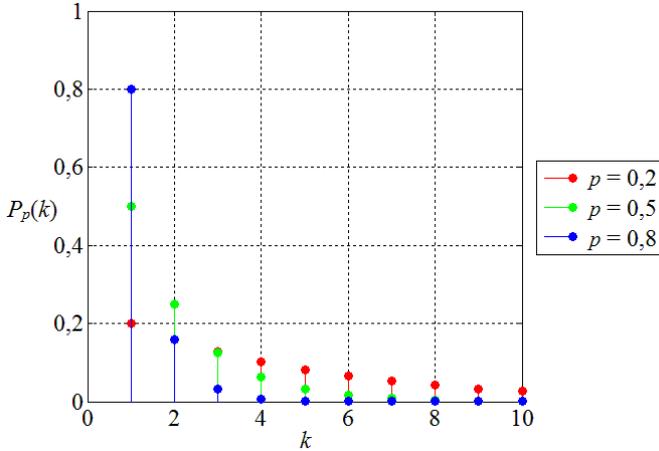


Рис. 6. Функции вероятности семейства распределений (23) при различных  $p$

Найдём оценку параметра  $p$  при помощи метода максимального правдоподобия. Запишем определение оценки максимального правдоподобия:

$$(24) \hat{p} = \arg \max_{p \in [0,1]} \prod_{i=1}^n L(p, \xi_i),$$

где  $\xi_1, \dots, \xi_n$  - последовательность независимых, одинаково распределённых случайных величин с функцией вероятности (23), а  $L(p, k) \equiv P_p(k)$  - функция правдоподобия. Максимизируя произведение функций правдоподобия, получаем

$$(25) \hat{p} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \xi_i} = \frac{1}{\bar{\xi}}, \text{ где } \bar{\xi} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i.$$

Найдём математическое ожидание оценки  $\hat{p}$ :

$$(26) \begin{aligned} E\hat{p} &\equiv \sum_{m=n}^{+\infty} \frac{n}{m} \mathbf{P} \left( \bar{\xi} = \frac{m}{n} \right) = \\ &= \sum_{m=n}^{+\infty} \frac{n}{m} \binom{m-1}{n-1} p^n (1-p)^{m-n} = \frac{(1-p)^n}{x^n} \sum_{m=n}^{+\infty} \frac{n}{m} \binom{m-1}{n-1} x^m, \end{aligned}$$

где введено обозначение  $x = 1 - p$ , а  $\binom{m-1}{n-1}$  – биномиальный

коэффициент. Для степенного ряда (26) затруднительно найти аналитический предел в элементарных функциях при произвольном  $n$ . При  $n = 1$  получаем

$$(27) \quad E\hat{p} = \frac{1-x}{x} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{x^m}{m} = \frac{1-x}{x} (-\ln(1-x)) = -\frac{p \ln p}{(1-p)}.$$

Выражение (27) показывает, что оценка максимального правдоподобия при  $n = 1$  «очень плохая» для малых  $p$ . Действительно, предел отношения

$$(28) \quad \lim_{p \rightarrow 0} \frac{E\hat{p}}{p} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{-\ln p}{1-p} = +\infty$$

равен бесконечности. Случай  $n = 1$  является в этом смысле вырожденным и не рассматривается подробно в настоящей работе. Далее под изучением оценок при малых  $p$  будет пониматься изучение их предельных свойств типа (28). В качестве иллюстрации найдём математическое ожидание  $\hat{p}$  при  $n = 2$ :

$$\begin{aligned} (29) \quad E\hat{p} &= \frac{2(1-x)^2}{x^2} \sum_{m=2}^{+\infty} \frac{m-1}{m} x^m = \\ &= \frac{2(1-x)^2}{x^2} \left( \sum_{m=2}^{+\infty} x^m - \sum_{m=2}^{+\infty} \frac{1}{m} x^m \right) = \frac{2(1-x)^2}{x^2} \left( x^2 \sum_{m=0}^{+\infty} x^m - \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{x^m}{m} + x \right) = \\ &= \frac{2(1-x)^2}{x^2} \left( \frac{x^2}{1-x} - (-\ln(1-x)) + x \right) = \\ &= 2 \left( (1-x) + \frac{(1-x)^2 \ln(1-x)}{x^2} + \frac{(1-x)^2}{x} \right) = \\ &= 2 \left( p + \frac{p^2 \ln p}{(1-p)^2} + \frac{p^2}{(1-p)} \right) = \\ &= 2 \left( \frac{p^2 \ln p}{(1-p)^2} + \frac{p}{(1-p)} \right) = 2 \frac{p^2 \ln p + p(1-p)}{(1-p)^2}. \end{aligned}$$

График  $E\hat{p}$  при  $n = 2$  изображён на рис. 6.

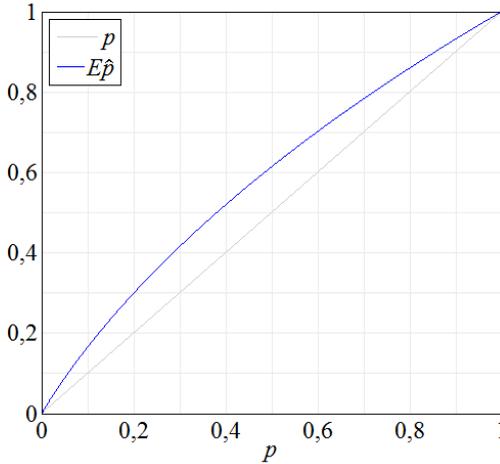


Рис. 7. График математического ожидания оценки максимального правдоподобия  $\hat{p}$  при  $n = 2$

Как видно из (29) и рис. 7, при  $n = 2$  оценка максимального правдоподобия смещённая: при всех  $p \in (0, 1)$  математическое ожидание  $E\hat{p} > p$ . В точках 0 и 1 распределение и математическое ожидание не существуют.

Учитывая тождество  $\lim_{p \rightarrow 0} p \ln p = 0$ , получаем, что при  $n = 2$  для малых  $p$  оценка  $\hat{p}$  смещена в два раза:

$$\begin{aligned}
 \lim_{p \rightarrow 0} \frac{\hat{p}}{p} &= \lim_{p \rightarrow 0} 2 \frac{p \ln p + (1-p)}{(1-p)^2} = \\
 (30) \quad &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{2p \ln p}{(1-p)^2} + \lim_{p \rightarrow 0} \frac{2}{(1-p)} = 0 + 2 = 2,
 \end{aligned}$$

что можно также записать в виде

$$(31) \quad E\hat{p} = 2p + o(p).$$

Выражение (31) подсказывает вид несмещённой при  $n = 2$  для малых  $p$  оценки

$$(32) \quad \tilde{p} = \frac{1}{2} \hat{p} = p + o(p),$$

которая имеет в четыре раза меньшую дисперсию, чем оценка максимального правдоподобия  $\hat{p}$ . Оценка (32) изображена на рис. 8.

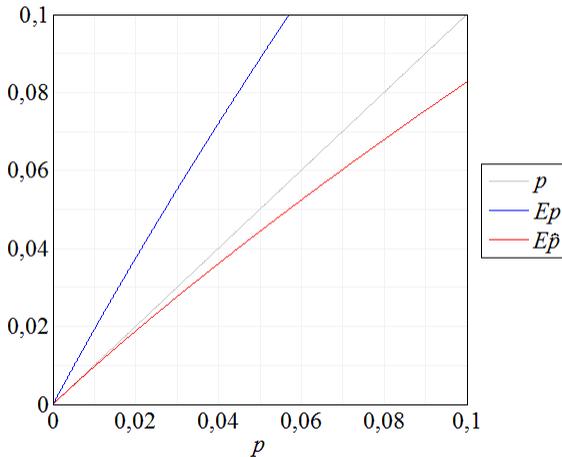


Рис. 8. Математическое ожидание несмещённой оценки  $\tilde{p}$  в сравнении с оценкой максимального правдоподобия  $\hat{p}$

Оценка (32) «лучше» оценки максимального правдоподобия, так как имеет меньшую дисперсию и является несмещённой при малых  $p$ . Поставим перед собой задачу построения статистической оценки  $p$ , оптимальной с точки зрения квадратичного риска:

$$(33) \quad E(\bar{p} - p)^2 \rightarrow \min_{\bar{p}},$$

в классе оценок

$$(34) \quad \tilde{p}(c) = c\hat{p},$$

где  $p \in \mathbb{R}$ .

Оказывается, что задачу нахождения оптимальной в смысле (33) оценки можно решить, не вычисляя риск в явном виде. Действительно, квадратичный риск можно переписать в виде

$$(35) \quad \begin{aligned} E(\bar{p} - p)^2 &= E(\bar{p} - E\bar{p} + E\bar{p} - p)^2 = \\ &= E(\bar{p} - E\bar{p})^2 + 0 + E(E\bar{p} - p)^2 = \text{Var } \bar{p} + b^2(\bar{p}), \end{aligned}$$

где  $b(\bar{p}) \equiv E\bar{p} - p$  – смещение оценки  $\bar{p}$ . Равенство (35) носит в англоязычной литературе название *bias-variance decomposition*, а идея уменьшения риска за счёт уменьшения дисперсии при увеличении смещения известна как *bias-variance tradeoff*. Если обозначить дисперсию оценки  $\tilde{p}$  через

$$(36) \quad \tilde{\sigma}^2(p) \equiv \text{Var } \tilde{p},$$

то можно выразить дисперсию оценки  $\bar{p}$  через  $\tilde{\sigma}^2$ :

$$(37) \quad \text{Var } \bar{p} = c^2 \text{Var } \tilde{\sigma}^2(p) = c^2 \tilde{\sigma}^2(p).$$

Смещение оценки  $\bar{p}$  имеет вид

$$(38) \quad b(\bar{p}) = E\bar{p} - p = cp - p = (c-1)p.$$

Тогда квадратичный риск оказывается равным

$$(39) \quad E(\bar{p} - p)^2 = c^2 \tilde{\sigma}^2(p) + (c-1)^2 p^2.$$

Оптимизируя по  $c$ , находим оптимальную константу

$$(40) \quad \bar{c} = \frac{p^2}{p^2 + \tilde{\sigma}^2(p)}.$$

Подставляя (40) в (39) в качестве  $c$ , получаем

$$(41) \quad \begin{aligned} E(\bar{p} - p)^2 &= \frac{p^4 \tilde{\sigma}^2(p)}{(p^2 + \tilde{\sigma}^2(p))^2} + \frac{p^2 \tilde{\sigma}^4(p)}{(p^2 + \tilde{\sigma}^2(p))^2} = \\ &= \frac{p^2 \tilde{\sigma}^2(p)}{p^2 + \tilde{\sigma}^2(p)} = p^2 - \frac{p^4}{p^2 + \tilde{\sigma}^2(p)}. \end{aligned}$$

Можно показать, что  $\tilde{\sigma}^2(p) = p^2 \ln p + o(p^2 \ln p)$ , а, следовательно, для построенной нами смещённой оценки выполнено

$$(42) \quad E(\bar{p} - p)^2 = p^2 + o(p^2).$$

Оценка для случая  $n = 10$  в данной работе была построена аналогичным образом численно.

## ESTIMATION OF RARE EVENTS PROBABILITY IN MOB BEHAVIOR

**Andrey Rogatkin**, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow,  
PhD student (andreyrogatkin@gmail.com).

*Abstract: We develop a collective behavior model proposed in [2]. The model is a generalization of the M. Granovetter's conformity threshold behavior model for the case of uncertainty in agents' threshold values. We estimate the probability of exit of a system from a given set of states (i.e. in mob excitation) using an asymptotic result derived in [8]. Theoretical estimations of large deviations type are refined using numerical estimations obtained with the help of statistical simulations. Obtained results allow us to estimate stability of excitation prevention in the cases when the probabilities of events are too small for using statistical simulations. We give recommendations on the choice of parameters which guarantee a given probability threshold of exit of the system from a given set of states.*

**Keywords:** M. Granovetter's model, conformity collective behavior, mob control, large deviations, statistical simulations.

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии П. Ю. Чеботарёвым.*

*Поступила в редакцию 30.03.2016.  
Опубликована 30.09.2016.*

УДК 519.854.2

ББК 22.1

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЛАНИРОВАНИЯ ПОДГОТОВКИ КОСМОНАВТОВ

Лазарев А. А.<sup>a,b,c,d,1</sup>, Бронников С. В.<sup>e,2</sup>, Герасимов А. Р.<sup>a,3</sup>,

Мусатова Е. Г.<sup>a,4</sup>, Петров А. С.<sup>a,c,5</sup>, Пономарев К. В.<sup>f,6</sup>,

Харламов М. М.<sup>f,7</sup>, Хуснуллин Н. Ф.<sup>a,8</sup>, Ядренцев Д. А.<sup>f,9</sup>

<sup>a</sup>(ФГБУН Институт проблем управления

им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

<sup>b</sup>(ФГБОУ ВПО «Московский государственный университет

им. М.В. Ломоносова», Москва)

<sup>c</sup>(ФГАОУ ВПО Национальный исследовательский университет

«Высшая школа экономики», МЛАВР, Москва)

<sup>d</sup>(ФГБОУ ВПО «Московский физико-технический институт

(государственный университет)», Москва)

<sup>e</sup>(Ракетно-космическая корпорация «Энергия»

им. С.П. Королёва, Королёв)

<sup>f</sup>(Научно-исследовательский испытательный центр подготовки

космонавтов им. Ю.А. Гагарина, Звёздный городок)

---

<sup>1</sup> Александр Алексеевич Лазарев, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией, (jobmath@mail.ru), г. Москва, ул. Профсоюзная, д. 65, тел. (495) 334-87-51).

<sup>2</sup> Бронников Сергей Васильевич, кандидат технических наук, начальник отделения (sergey.bronnikov@rsce.ru).

<sup>3</sup> Герасимов Алексей Романович, техник (alexey9113@gmail.com).

<sup>4</sup> Мусатова Елена Геннадьевна, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник (neko1yar@mail.ru).

<sup>5</sup> Петров Алексей Сергеевич, техник (petrovalexeyserg@gmail.com).

<sup>6</sup> Пономарев Константин Владимирович, зам. начальника отдела (k.ponomarev@gctc.ru).

<sup>7</sup> Харламов Максим Михайлович, зам. начальника (m.kharlamov@gctc.ru).

<sup>8</sup> Хуснуллин Наиль Фаридович, старший инженер-разработчик (nhusnullin@gmail.com).

<sup>9</sup> Ядренцев Денис Александрович, начальник отдела (D.Yadrentsev@gctc.ru).

*Рассматриваются задачи планирования подготовки космонавтов для работы на Международной космической станции. Разработаны математические модели объёмного и календарного планирования, описывающие подготовку космонавтов. Предложены методы решения задач, а также проведено их исследование на реальных исходных данных.*

Ключевые слова: теория расписаний, комбинаторная оптимизация, планирование, Международная космическая станция.

## **Введение**

Среди множества разнообразных задач, возникающих в космонавтике, особое место занимают задачи планирования. Для успешной работы экипажей Международной космической станции (МКС) требуется составление подробного расписания подготовки космонавтов.

Полная подготовка космонавтов — очень длительный, дорогостоящий и технически сложный процесс, включающий в себя комплекс мероприятий, направленных на формирование и поддержание у космонавтов совокупности определенных знаний, навыков и умений, необходимых для надежного и безопасного выполнения программы космического полета. Подготовкой космонавтов занимается научно-исследовательский испытательный Центр подготовки космонавтов (ЦПК) им. Ю.А. Гагарина [16] совместно с Ракетно-космической корпорацией «Энергия» им. С.П. Королёва [15].

В данный момент расписания подготовки космонавтов составляются специалистами ЦПК «вручную». Соответственно, каждое изменение плана подготовки при возникновении нестандартных ситуаций приводит к значительным трудозатратам, так как необходимо решать задачу большой размерности с горизонтом планирования до 2–3 лет. Сложность добавляет тот факт, что одновременно на подготовке на разных этапах находится около 30 космонавтов (10 экипажей). Кроме этого, каждый обучаемый имеет индивидуальный план и объем подготовки, кото-

рый зависит от опыта прошлых экспедиций и роли в предстоящем полёте. Вышеперечисленные факторы обусловили необходимость разработки новых методов построения расписаний и автоматизации процесса планирования для повышения эффективности и уменьшения трудозатрат при составлении интегрированного плана-графика подготовки экипажей для работы на МКС.

Статья имеет следующую структуру. В первом разделе рассматриваются общее описание проблемы, связанные с ней понятия. Далее представлен обзор существующих подходов. В третьем разделе ставится задача объёмного планирования, представлены модели и алгоритмы её решения. В следующей части статьи предлагается модель календарного планирования. Раздел 5 содержит описание используемых методов решения и результаты вычислительного эксперимента по решению задачи календарного планирования на реальных данных.

## **1. Описание проблемы**

Предметом деятельности экипажа, согласно принятой в РКК «Энергия» и ЦПК формулировке, являются бортовые комплексы (БК): бортовые системы пилотируемых космических аппаратов (ПКА), научные эксперименты, полетные операции [1]. Общее количество БК для ПКА типа МКС может достигать сотни. По каждому БК космонавт должен выполнять различные задачи. Задачи по различным БК можно сгруппировать по направлениям: например, использование БК для личных потребностей в процессе полета, управление БК при нормальной работе (при отсутствии отказов, нештатных ситуаций), управление БК при возникновении расчетных нештатных ситуаций, управление БК при возникновении нерасчетных нештатных ситуаций, проведение обслуживания БК (замена выработавших ресурс элементов), проведение ремонтно-восстановительных работ и др.

По каждому БК космонавт должен обладать определенной квалификацией. Квалификация отражает уровень профессиональной подготовки космонавта по данному БК и задает одностороннее подмножество задач, которое он может выполнять.

Квалификация пользователя позволяет выполнять некоторый набор задач по определенному бортовому комплексу. Квалификация оператора позволяет выполнять все задачи, предназначенные для космонавта с квалификацией пользователя, а также некоторое множество дополнительных задач. Квалификация специалиста позволяет космонавту выполнять все задачи по данному БК. По разным БК у космонавта может быть разная квалификация. Количество необходимых квалификаций по каждому БК для каждого экипажа заранее известны. Необходимо только определить, кто из членов экипажа и какую квалификацию по разным БК должен получить так, чтобы экипаж был готов к моменту старта ПКА.

Для космической станции (КС) возможны различные варианты состава экипажа. Например, на МКС экипаж состоит из 6 человек. В составе экипажа 3 космонавта, которые управляют российским сегментом (РС), 3 – американским сегментом (АС). В состав экипажа входит командир экспедиции, 0–2 участника полета, 3–5 бортинженеров. Два члена экипажа, работающие на различных сегментах, могут иметь одинаковые функциональные позиции, например, бортинженеры, а составы решаемых ими задач могут отличаться более чем на 90 процентов. Для космонавтов, работающих на одном сегменте, отличия в составе задач могут составлять десятки процентов.

КС является развивающейся системой. От экспедиции к экспедиции существенно меняется программа полета, состав БК и задач. Поэтому для КС невозможно установить универсальное соответствие между функциональной позицией космонавта и квалификационными требованиями по каждому БК на этапе проектирования КС. Для каждой экспедиции КС необходимо решать задачу определения квалификационных требований к каждому члену экипажа по каждому БК.

Планирование подготовки космонавтов МКС можно логически разделить на два этапа: задача объемного планирования и задача календарного планирования.

Исходные данные задачи объемного планирования представляют собой известный набор БК и требуемое количество космо-

навтов различной квалификации для каждого БК. Задача состоит в том, чтобы равномерно распределить подготовку по квалификациям БК между космонавтами.

Следующим важным этапом планирования подготовки является задача календарного планирования. После того как решена задача объёмного планирования, для каждого космонавта определен набор БК, по которым его необходимо подготовить, заданы необходимые ему квалификации по этим бортовым комплексам, т.е. известно множество занятий, которые космонавт должен пройти. Необходимо составить календарный план подготовки, при этом не должны быть нарушены ресурсные ограничения и директивные сроки подготовки всех экипажей. Выделяют следующие виды календарного планирования:

- оперативное, от 1 недели до 1 месяца;
- стратегическое, с горизонтом планирования 2,5–3 года.

## **2. Обзор существующих решений**

Задача объёмного планирования учебной нагрузки космонавтов является одним из вариантов классической комбинаторной задачи о разбиении [12, 13]. Задача календарного планирования подготовки космонавтов представляет собой частный случай NP-трудной задачи планирования с ограничением на ресурсы (RCPSP, resource-constrained project scheduling problem) [6] с дополнительными специфическими ограничениями. Для решения задач RCPSP большой разменности широкое распространение получили различные эвристические подходы [9]: поиск с заданным приоритетом, алгоритмы локального поиска, генетические алгоритмы, метод муравьиных колоний и др.

Перечислим некоторые известные нам работы по решению задач планирования в космической отрасли. Обзор детерминированных, вероятностных и нечетких моделей сделан в [4]. В работе рассмотрены базовые алгоритмы построения детальных планов полетов и ряд методов планирования работ на МКС, которые используются на практике в Центре управления полета-

ми (ЦУП) в г. Королёв, даны оценки их применимости. Кроме того, автором приведено описание методологии взаимодействия разных центров управления полетами в ходе выполнения международных программ, а также представлены положения для разработки автоматизированной системы планирования работ на МКС с классификацией полетных операций и их формализация в базе данных.

В работе [2] предложен подход к адаптивному планированию полетных операций на основе мультиагентных систем. Подход позволяет формировать резервные планы, прогнозировать расход на МКС воды, топлива и пищи. Также осуществляется контроль за излишним или недостающим оборудованием. В [5] описана разработка мультиагентной системы интерактивной доводки планов полетных операций.

В работе [3] представлен генетический алгоритм распределения операций между группами космонавтов и формирования расписаний действий экипажа на борту МКС для достижения поставленных целей экспедиции.

В американском национальном управлении по воздухоплаванию и исследованию космического пространства (NASA) в 2009 году была внедрена система «STAR» для организации обучения экипажа, инструкторов и специалистов по управлению полетами, позволяющая обеспечивать интегрированную разработку учебного плана, составлять отчетность, строить расписания для персонала и оборудования, а также осуществлять обратную связь после учебных мероприятий для оптимизации учебных планов [7].

Для формирования расписания работ Марсохода в Исследовательском центре NASA использовались методы программирования в ограничениях (Constraint Programming) [8].

В Европейском космическом агентстве применяется несколько различных подходов для планирования операций в зависимости от вида задачи. При помощи одного из точных методов программирования в ограничениях формируется базовое расписание, удовлетворяющее основным ограничениям. Методы локального поиска (метод покоординатного спуска, поиск с запретами, метод

имитации отжига, генетические алгоритмы) используются для оптимизации локальных критериев и выполнения специфических условий [10].

В работе [14] описана возможность применения системы PERT на примере Европейского космического агентства для формирования долгосрочного расписания подготовки космонавтов. Метод обеспечивает оценку и анализ времени выполнения, трудозатрат и потребности в других ресурсах проекта, на основе соответствующих характеристик и зависимостей входящих в него задач. Данный подход относится к вероятностным методам. Самой популярной частью PERT является метод критического пути, опирающийся на построение сетевого графика (сетевой диаграммы PERT). Данный подход был успешно применен для планирования 2 млн заданий на проекте американского космического агентства «Аполлон» для отправки астронавтов на поверхность Луны.

Отметим, что описанные выше задачи отличаются от рассматриваемой в данной статье как горизонтом планирования, так и специфическими ограничениями, возникающими при планировании подготовки космонавтов в ЦПК, о которых будет сказано ниже.

### **3. Задача объёмного планирования**

#### **3.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ**

Введем следующие обозначения:

- $I$  – множество космонавтов;
- $B$  – множество бортовых комплексов;
- $Q$  – множество возможных квалификаций космонавта по БК;
- $p_{bqe}$ ,  $b \in B$ ,  $q \in Q$ ,  $e \in \{0, 1\}$ , – время подготовки, необходимое для получения квалификации  $q$  по бортовому комплексу  $b$  опытным ( $e = 1$ ) или неопытным ( $e = 0$ ) космонавтом;

- $n_{bq}$  – требуемое количество космонавтов с квалификацией  $q$  по бортовому комплексу  $b$ ;
- $T$  – максимальное время подготовки, ограниченное датой старта и предстартовой подготовкой.

Необходимо подготовить экипаж из  $|I|$  космонавтов, для РС МКС обычно  $|I| = 3$ . Космонавты могут быть либо опытными ( $e = 1$ ), т.е. ранее принимавшими участие в полётах, либо неопытными ( $e = 0$ ). Имеется  $|B|$  бортовых комплексов, для работы с которыми должны быть подготовлены члены экипажа. Для МКС используются три основные квалификации ( $|Q| = 3$ ): специалист ( $q = 3$ ), оператор ( $q = 2$ ), пользователь ( $q = 1$ ). Время подготовки космонавта по БК зависит от его опыта и требуемой квалификации по этому бортовому комплексу. Из практики известны средние времена подготовки  $p_{bqe}$  космонавта по бортовому комплексу  $b$  на квалификацию  $q$ .

Введём переменные  $x_{ibq} \in \{0, 1\}$  такие, что  $x_{ibq} = 1$  тогда и только тогда, когда космонавт  $i$  должен получить квалификацию  $q$  по бортовому комплексу  $b$ .

Определим функцию суммарного времени подготовки космонавта  $i$ :

$$\tau_i = \sum_{b,q,e} p_{bqe} x_{ibq}, \quad i \in I.$$

Требуется найти значения переменных, которые удовлетворяют следующим требованиям:

$$(1) \quad \max_{i \in I} \tau_i \rightarrow \min \quad \text{или}$$

$$(2) \quad \min_{i \in I} \tau_i \rightarrow \max \quad \text{или}$$

$$(3) \quad \max_{i \in I} \tau_i - \min_{i \in I} \tau_i \rightarrow \min,$$

$$(4) \quad \sum_{q \in Q} x_{ibq} \leq 1, \quad i \in I, \quad b \in B,$$

$$(5) \quad \sum_{i \in I} x_{ibq} = n_{bq}, \quad b \in B, \quad q \in Q,$$

$$(6) \quad \tau_i \leq T, \quad i \in I.$$

Варианты (1)–(3) целевых функций для задачи равномерного распределения нагрузки космонавтов при подготовке взяты по аналогии с вариантами NP-трудной задачи о разбиении [13]. Фактически данные варианты постановок направлены на решение задачи подготовить всех членов экипажа как можно быстрее. Учитывая, что подготовка в составе экипажа длится более двух лет, а график занятий космонавтов очень плотный, проблема подготовки экипажа в срок является актуальной. Опытному космонавту требуется меньшее время на освоение БК с соответствующей квалификацией, чем неопытному, и если неопытному космонавту назначить слишком высокие квалификации по многим БК, то провести подготовку в срок не удастся.

Ограничение (4) означает, что один космонавт по одному бортовому комплексу не может иметь более чем одну квалификацию. Ограничение (5) говорит о том, что число космонавтов, подготовленных по каждому бортовому комплексу в каждой квалификации, должно удовлетворять поставленным требованиям. Условие (6) означает, что вся подготовка должна быть выполнена в срок, где  $T$  определяется датой старта.

### 3.2. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Для решения задачи объёмного планирования были использованы два подхода: эвристический и точный. Был разработан жадный алгоритм (Алгоритм 1), на каждом шаге которого квалификация с наибольшим временем подготовки присваивается космонавту с наименьшим суммарным временем подготовки.

**Алгоритм 1** Жадный алгоритм.

1.  $\forall x_{ibq} = 0$ ;
2.  $\forall \tau_i = 0$ ;
3.  $\text{sort}(B, p_{bq1})$ ;
4. for each  $b$ :  
     $M = \text{Sort\_indexes}(\tau_i)$ ;  
     $L = \text{Sort\_indexes}(p_{bqe})$ ;  
     $k = 3$ ;  
    for  $v = 1$  to 3:  
        while  $n_{bL[v]} \neq 0$   
             $\tau_{M[k]} = \tau_{M[k]} + p_{bqe}$ ;  
             $x_{M[k]bL[v]} = 1$ ;  
             $n_{bL[v]} - -$ ;  
             $k - -$ ;
5. return  $x_{ibq}, \tau_i$ ;

Для нахождения точного решения задачи на реальных данных был использован пакет программного обеспечения IBM ILOG CPLEX MIP Optimizer 12.6.2<sup>10</sup>, который позволяет решать задачи целочисленного линейного программирования. При расчетах использовалась целевая функция (1), т.е. минимизировалось максимальное время подготовки. Время решения задачи ограничивалось 5 секундами.

Было рассмотрено 4 возможных случая перестановок между квалификациями космонавтов:

- а) все три космонавта являются неопытными;
- б) все три космонавта опытные;

---

<sup>10</sup> <http://www-01.ibm.com/software/commerce/optimization/cplex-optimizer/>

- в) один космонавт опытный и два неопытные;  
 г) два космонавта опытные и один неопытный.

Полученные результаты приведены в таблице 1. В таблице используются следующие обозначения: в первом столбце перечислены номера примеров исходных данных для эксперимента, во втором столбце для каждого примера указаны степени подготовленности в соответствии с приведённым выше списком. В следующих колонках приведены результаты работы двух алгоритмов. В колонке «max» записано максимальное время подготовки космонавта из экипажа, в колонке «min» — минимальное время подготовки космонавта из экипажа. В колонке  $\delta$  указано значение разности между максимальным и минимальным временем подготовки космонавтов экипажа.

Таблица 1. Решение задачи объёмного планирования

#	Опыт	Жадный алгоритм			CPLEX		
		max	min	$\delta$	max	min	$\delta$
1	а	889,5	887,0	2,5	888,05	887,75	0,3
	б	570,5	569	1,5	570	569,5	0,5
	в	721,7	694,5	27,2	697,25	695,25	2
	г	669,7	598,0	71,7	616,5	612,75	3,75
2	а	266,25	265	1,25	265,75	265,2	0,55
	б	234,2	233	1,2	233,75	233,25	0,5
	в	245,5	244,0	1,5	244,45	244	0,45
	г	235,0	233,25	1,75	233,75	233,25	0,5
3	а	660,2	659,5	0,7	659,85	659,75	0,1
	б	353,5	353,05	0,45	353,5	353	0,5
	в	497,95	493,5	4,45	484,05	481,75	2,3
	г	398,05	394,0	4,05	393,5	392,5	1
4	а	925,75	924,2	1,55	925	924,8	0,2
	б	587	586,5	0,5	587	586,5	0,5
	в	774,5	694,5	80,0	731,5	730,75	0,75
	г	649,2	648,5	0,7	628,75	628	0,75

Из таблицы 1 видно, что CPLEX дает значительно лучший результат для всех целевых функций, за исключением примера 3б

для функции (3) и примеров 3б–3г и 4г для функции (2). При этом в жадном алгоритме разрыв между занятостью космонавтов достигает 80 часов, т.е. больше двух рабочих недель. Можно сделать вывод, что на тех исходных данных, которые были представлены ЦПК, задачи объёмного планирования могут быть решены точными методами.

#### 4. Задача календарного планирования

Рассмотрим теперь задачу составления расписания подготовки космонавтов к работе на МКС. Предполагается, что для каждого космонавта уже определены необходимые уровни квалификации и наборы этапов освоения бортовых комплексов на предыдущем этапе в процессе объёмного планирования.

Вначале зададим временные интервалы.

- $W$  — множество рабочих недель в планируемом периоде. Максимально  $|W| = 156$  недель (3 года).
- $D_w = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  — множество рабочих дней в неделе  $w \in W$ . При необходимости оператор может изменить данное множество для любой из недель, уменьшив количество дней (например, планируемый период начинается не с понедельника, на данную неделю выпадают праздничные дни и т.д.) или, в некоторых случаях, увеличив.
- $H_{wd} = \{1, 2, \dots, 18\}$  — множество получасовых интервалов в рабочий день  $d \in D_w$  недели  $w \in W$ . Например, первый интервал начинается в 9:00, а последний заканчивается в 18:00. В некоторых случаях возможно изменение длительности рабочего дня. В ЦПК при планировании также используется получасовой интервал в качестве единицы времени.

Как будет показано далее, при данном временном разбиении будет удобно работать с ограничениями типа «не больше двух раз в неделю», «в первой половине дня» и т.д. С другой стороны, для

вычисления длительности занятий необходимо иметь линейное разбиение горизонта планирования. Для этого расположим все тройки  $(w, d, h)$  в лексикографическом порядке и каждой тройке поставим в соответствие ее номер:  $(w, d, h) \rightarrow t(w, d, h)$  (см. рис. 1). Обозначим через  $T$  множество всех  $t(w, d, h)$ .

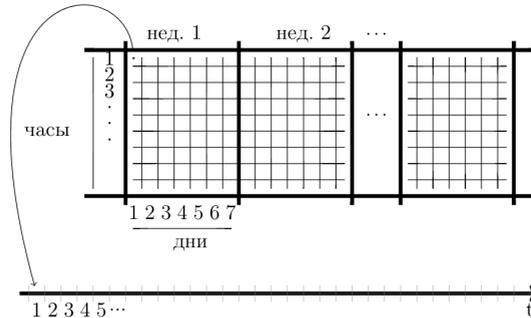


Рис. 1. Временные интервалы задачи

В случае, когда все недели и рабочие дни стандартные (т.е.  $D_w = D = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $H_{wd} = H = \{1, 2, \dots, 18\}$ ), имеем  $|T| = |W| \cdot |D| \cdot |H| = 14040$ , а значение  $t(w, d, h)$  может быть вычислено по формуле

$$t(w, d, h) = (w - 1) \cdot |D| \cdot |H| + (d - 1) \cdot |H| + h.$$

В общем случае получаем

$$t(w, d, h) = \sum_{w'=1}^{w-1} \sum_{d' \in D_{w'}} |H_{w'd'}| + \sum_{d'=1}^{d-1} |H_{wd'}| + h.$$

Обозначим множество всех троек  $(w, d, h)$  через  $Y$ :

$$Y = \{(w, d, h) | w \in W, d \in D_w, h \in H_{wd}\}.$$

Экипажи поступают на обучение в разное время, с некоторыми интервалами (см. рис. 2), зависящими от назначенных дат старта.

Введем обозначения.

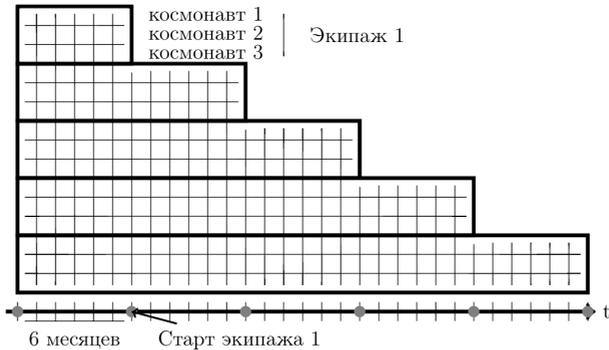


Рис. 2. Расписания тренировок для всех экипажей

- $I$  – множество всех космонавтов;
- $J$  – множество всех этапов подготовки (занятий);
- $C$  – множество экипажей;
- $I_c$  – множество космонавтов из экипажа  $c \in C$ ;
- $J_c$  – множество занятий экипажа  $c \in C$ ;
- $B_i$  – множество бортовых комплексов, которые необходимо изучить космонавту  $i, i \in I$ ;
- $J_i$  – множество занятий космонавта  $i$ ;
  - $J_i^b$  – множество занятий космонавта  $i$ , по изучению бортового комплекса  $b \in B_i$ ;
  - $J_i^F$  – множество этапов физической подготовки космонавта  $i$ ;
  - $J_i^L$  – множество этапов языковой подготовки космонавта  $i$ ;
- $\tau_i^b$  – максимально допустимая длительность изучения бортового комплекса  $b$  космонавтом  $i$ . Поскольку космонавты могут изучать БК в разном объеме, данная величина зависит не только от БК, но и от космонавта.

- $p_j$  – длительность занятия  $j \in J$ ;
- $R$  – множество возобновляемых ресурсов. Каждый космонавт также является ресурсом, доступным в количестве 1 в течение рабочего дня.
- $JR_r$  – множество занятий, для проведения которых требуется ресурс  $r \in R$ ;
- $ra_{rwdh}$  – количество ресурса  $r \in R$ , доступное в интервале  $h$  дня  $d$  недели  $w$ ;
- $rc_{jr}$  – количество ресурса  $r \in R$ , требуемое для проведения занятия  $j \in J$ ;
- $e_j, l_j$  – верхняя и нижняя временные границы проведения занятия  $j$  (например, некоторые тренировки должны проводиться зимой, или заданы четкие даты проведения учений). Соответственно обозначим множество занятий, для которых заданы такие границы, через  $J^{bound}$ . Директивные сроки также могут быть описаны с помощью данных границ.
- $G_i = (J_i, \Gamma_i)$  – граф отношений предшествования между занятиями космонавта  $i$ . Если  $(j_1, j_2) \in \Gamma_i$ , то занятие  $j_1$  должно выполняться раньше, чем занятие  $j_2$ .
- $H_i = (J_i, \mathcal{H}_i)$  – граф отношений строгого следования между занятиями космонавта  $i$ . Если  $(j_1, j_2) \in \mathcal{H}_i$ , то занятие  $j_2$  должно проводиться строго через  $h_{j_1j_2}$  интервалов после  $j_1$ , где  $h_{j_1j_2}$  – стоимость дуги  $(j_1, j_2)$ .

Операции, которые занимают несколько рабочих дней (командировка, учения и т.д.), разобьем на однодневные занятия, между которыми установим порядок строгого следования, т.е. вместо одной многодневной операции получаем несколько однодневных занятий, следующих друг за другом.

Введем булеву переменную  $x_{jwdh}$ , которая равна 1 тогда и только тогда, когда в интервал  $h$  дня  $d$  недели  $w$  начинается занятие  $j \in J$ . В противном случае переменная равна 0.

Опишем ограничения задачи.

В каждый интервал времени должно быть достаточно ресурсов:

$$(7) \quad \sum_{j \in JR_r} r c_{jr} \sum_{\substack{h' > 0, \\ h - p_j + 1 \leq h' \leq h}} x_{jwdh'} \leq r a_{rwdh}, \\ \forall r \in R, \forall (w, d, h) \in Y.$$

В неравенстве (7) для каждого  $(w, d, h) \in Y$  рассматриваются только занятия, выполняемые в данный момент, т.е. начавшиеся в интервале  $[h - p_j + 1; h]$ . Количество необходимых для данных занятий ресурсов не должно превосходить  $r a_{rwdh}$ .

Все космонавты должны пройти все этапы в необходимом объеме:

$$(8) \quad \sum_{\substack{(w, d, h) \in Y, \\ h + p_j - 1 \leq |H_{wd}|}} x_{jwdh} = 1, \quad \forall j \in J.$$

Неравенство  $h + p_j - 1 \leq |H_{wd}|$  под знаком суммы означает, что необходимо проведение каждого занятия в течение дня, без переноса на следующий день.

В неделю у каждого космонавта должно быть не более  $a_f$  занятий физической подготовкой:

$$(9) \quad \sum_{j \in J_i^F} \sum_{d \in D_w} \sum_{h \in H_{wd}} x_{jwdh} \leq a_f, \quad \forall i \in I, \forall w \in W.$$

При этом не может быть больше  $b_f$  занятий физической подготовкой в день:

$$(10) \quad \sum_{j \in J_i^F} \sum_{h \in H_{wd}} x_{jwdh} \leq b_f, \quad \forall i \in I, \forall w \in W, \forall d \in D_w.$$

Аналогичные ограничения вводятся для изучения иностранного языка.

В каждую неделю у космонавта должно оставаться  $a_{ad}$  часов ( $2a_{ad}$  полчасовых интервалов) для выполнения административ-

ных обязанностей (например, самоподготовку, работу с документацией и т.д.):

$$(11) \quad \sum_{j \in J_i} \sum_{d \in D_w} \sum_{h \in H_{wd}} p_j x_{jwdh} \leq \sum_{d \in D_w} |H_{wd}| - 2a_{ad}, \quad \forall i \in I, \forall w \in W.$$

Нельзя планировать в один день более  $b_{day}$  часов изучения одного БК:

$$(12) \quad \sum_{j \in J_i^b} \sum_{h \in H_{wd}} p_j x_{jwdh} \leq 2b_{day}, \\ \forall i \in I, \forall b \in B_i, \forall w \in W, \forall d \in D_w.$$

Отношения предшествования принимают следующий вид:

$$(13) \quad \sum_{(w,d,h) \in Y} t(w, d, h)(x_{j_2wdh} - x_{j_1wdh}) \geq p_{j_1}, \\ \forall i \in I, \quad \forall (j_1, j_2) \in \Gamma_i.$$

Отношения строгого следования:

$$(14) \quad \sum_{(w,d,h) \in Y} t(w, d, h)(x_{j_2wdh} - x_{j_1wdh}) = p_{j_1} + h_{j_1j_2}, \\ \forall i \in I, \quad \forall (j_1, j_2) \in \mathcal{H}_i.$$

В некоторых случаях возникает необходимость исключения тех или иных временных интервалов для определенных занятий. Пусть  $[h_1; h_2]$  — временной отрезок, в который не могут выполняться некоторые занятия, а  $J_{[h_1; h_2]}$  — множество занятий.

$$(15) \quad \sum_{j \in J_{[h_1; h_2]}} \sum_{h_1 - p_j + 1 \leq h \leq h_2} x_{jwdh} = 0, \quad \forall w \in W, \quad \forall d \in D_w.$$

Например, в качестве  $[h_1; h_2]$  может выступать обеденное время,  $J_{[h_1; h_2]}$  — все занятия, за исключением тех, которые могут выполняться в обед (например, дегустация бортовых блюд или длительные занятия, не подразумевающие перерывов на обед, учебные выезды и т.д.). Другой вариант:  $[h_1; h_2]$  — временной отрезок, включающий обеденное время, два часа до обеда и два часа после обеда,  $J_{[h_1; h_2]}$  — занятия физической подготовкой.

Ограничение на продолжительность изучения бортового комплекса:

$$(16) \quad \sum_{(w,d,h) \in Y} t(w, d, h)(x_{j_{ib}^f wd h} - x_{j_{ib}^s wd h}) + p_{j_{ib}^f} \leq \tau_i^b,$$

$$\forall i \in I, \quad \forall b \in B_i,$$

где  $j_{ib}^s$  — первое занятие космонавта  $i$  по бортовому комплексу  $b$ ,  $j_{ib}^f$  — заключительное занятие космонавта  $i$  по бортовому комплексу  $b$ . Если точный порядок проведения занятий для некоторого БК не задан,  $j_{ib}^s$  и  $j_{ib}^f$  могут быть введены искусственно.

Временные ограничения на проведение занятий (занятие  $j$  не может начинаться вне временного интервала  $[l_j; e_j]$ ):

$$(17) \quad x_{jwhd} = 0,$$

$$\forall j \in J^{bound}, \forall (w, d, h) \in Y : t(w, d, h) \leq e_j - 1,$$

$$(18) \quad x_{jwhd} = 0,$$

$$\forall j \in J^{bound}, \forall (w, d, h) \in Y : t(w, d, h) \geq l_j + 1.$$

Ограничения на одновременное проведение занятий:

$$(19) \quad x_{j_1 wd h} = x_{j_2 wd h}, \quad \forall (j_1, j_2) \in J_{12}^c, \quad \forall (w, d, h) \in Y, \quad \forall c \in C,$$

$$(20) \quad x_{j_1 wd h} = x_{j_2 wd h} = x_{j_3 wd h},$$

$$\forall (j_1, j_2, j_3) \in J_{123}^c, \quad \forall (w, d, h) \in Y, \quad \forall c \in C,$$

где  $J_{12}^c, J_{123}^c$  — множества занятий, проводимых одновременно двумя или тремя членами экипажа  $c$  соответственно.

Таким образом, ставится задача построения расписания, удовлетворяющего ограничениям (7)–(20). В общем случае данная задача является NP-трудной в сильном смысле.

## 5. Методы решения и вычислительный эксперимент

Для решения задачи (7)–(20) использовалось два подхода на базе решателей IBM ILOG CPLEX.

Первый подход — применение, как и в разделе 3 для решения задачи объёмного планирования, решателя MIP Optimizer, предназначенного для решения задач целочисленного линейного программирования. Однако, в отличие от задачи (1)–(6), задача (7)–(20) имеет большую размерность и эффективность применения данного метода не является очевидной.

Второй подход к решению задачи календарного планирования заключался в использовании решателя программирования в ограничениях CP Optimizer. Для применения данного подхода, задача была переформулирована как «задача по удовлетворению ограничениям» (Constraint Satisfaction Problem). Для этого вместо булевой переменной  $x_{jwdh}$  использовалась целочисленная переменная  $s_j$  — момент начала занятия  $j \in J$ , а неравенства (7)–(20) были переписаны на языке OPL с использованием встроенных функций IBM ILOG CPLEX CP. Достоинством метода программирования в ограничениях является используемая в нем фильтрация множества допустимых значений переменных  $s_j$  [11]. Наличие большого числа ограничений (как в представленной задаче) способствует большей эффективности фильтрации и, соответственно, уменьшению времени решения задачи.

В качестве исходных данных для вычислительного эксперимента были использованы реальные данные по подготовке космонавтов для работы с ТПК «Союз», предоставленные ЦПК. В этих данных отношения предшествования между занятиями для каждого космонавта задавались в соответствии со следующими принципами.

- Внутри каждого БК задан порядок проведения занятий.
- Имеется ориентированный граф бортовых комплексов (ГБК), вершины которого соответствуют изучаемым БК. Два БК соединены дугой, если космонавт должен изучить первый БК прежде чем приступить к изучению второго БК.
- С использованием информации по первым двум пунктам для каждого космонавта  $i$  строится граф отношений предшествования  $G_i$ .
- Существуют занятия вне графа предшествования, которые должны выполняться периодически, вне зависимости от порядка изучения дисциплин, например, занятия английским языком, физической подготовкой, медицинские обследования.

В первом вычислительном эксперименте БК были расположены цепочкой. Рассматривалась задача составления расписания для одного экипажа из трех космонавтов.

В таблице 2 представлены параметры тестовых задач. В первой колонке указан номер тестового примера, во второй колонке — суммарное количество занятий для трёх космонавтов, в третьей — количество изучаемых БК, в четвёртой — горизонт планирования в неделях. В таблице 3 представлены сравнительные

Таблица 2. Параметры тестовых задач

#	Количество занятий	Количество БК	Горизонт планирования
1	99	1	3
2	120	2	4
3	163	3	5
4	201	4	6
5	213	5	6
6	229	7	7
7	283	10	8

результаты решения задачи (7)–(20) с использованием IBM ILOG CPLEX MIP и IBM ILOG CPLEX CP. Вычисления осуществлялись на рабочей станции с процессором Intel Xeon E5-2673, 2.4GHz и 15Gb оперативной памяти. В таблице использовались следующие обозначения: # — номер тестового примера (в соответствии с таблицей 2), Время, с — время в секундах, Перем. — количество переменных в задаче, Огр. — количество ограничений, Итер. — количество итераций алгоритма, Ветв. — количество ветвлений алгоритма. Из эксперимента видно явное преимущество использования подхода программирования в ограничениях. Поэтому в следующем вычислительном эксперименте использовался только решатель IBM ILOG CPLEX CP.

Второй вычислительный эксперимент проводился на реальных данных. Граф бортовых комплексов представлен на рис. 3. Решались задачи с различным количеством экипажей. Каждый экипаж должен был изучить 19 бортовых комплексов. Временной горизонт для каждого экипажа составлял 20 недель. Разница меж-

Таблица 3. Сравнение двух подходов к решению задачи календарного планирования для 1 экипажа

#	CPLEX MIP				CPLEX CP			
	Время, с	Перем.	Огр.	Итер.	Время, с	Перем.	Огр.	Ветв.
1	09,06	26820	37620	21922	0,250	291	2170	1272
2	30,75	52680	60066	54234	0,329	363	2788	1512
3	559,84	73500	87846	5019412	0,438	492	3548	2008
7	375,834	108720	121578	2032790	0,703	606	4263	2784
4	374,63	115200	125466	2022320	0,610	642	4348	2912
5	346,30	144480	157920	820534	0,640	654	4374	2648
6	6657,98	204000	210646	16917014	1,317	852	5738	3448

ду стартами подготовок экипажей задавалась равной 6 неделям. Такой небольшой промежуток (на практике он составляет не менее 4 месяцев) был выбран для усложнения тестовых задач, чтобы у экипажей возникала «борьба» за ресурсы, т.е для возможности одновременного использования одних и тех же тренажёров разными экипажами. Как видно из таблицы 4, расписание для 5 экипажей на 44 недели было построено менее чем за 5 минут. Зависимость времени работы решателя от количества экипажей указана на рис. 4.

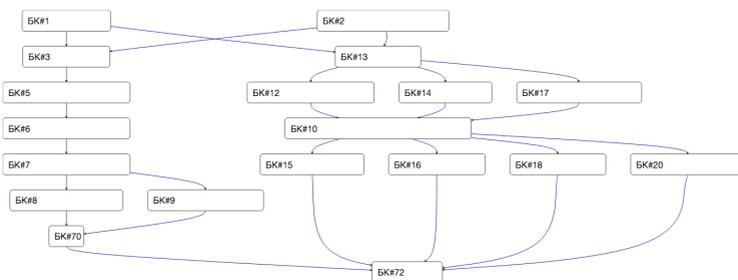


Рис. 3. Граф бортовых комплексов во втором эксперименте

Необходимо отметить, что на начальном этапе в работе по данному проекту принимали участие Гущина В.П., Морозов Н.Ю., Сологуб А.А., Садыков Р.Р., за что авторы признательны им.

Таблица 4. Вычислительный эксперимент с несколькими экипажами

Экипажи	Время, м:с	Перем.	Огр.	Итер.
1	0:07.45	2682	24432	4419
2	0:27.10	5505	50848	13276
3	0:55.86	7605	66620	28509
4	1:56.42	11004	101532	70534
5	4:16.61	14835	142816	102920

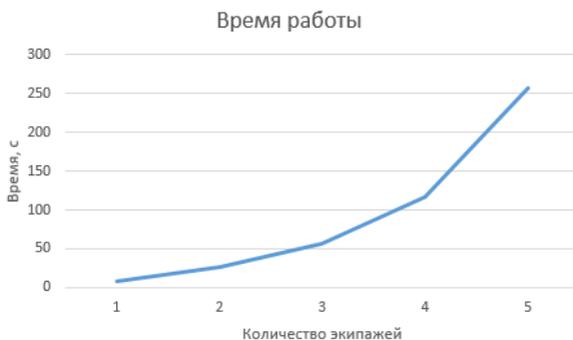


Рис. 4. Время решения задачи для случая с несколькими экипажами

## 6. Заключение

В статье описаны особенности планирования подготовки космонавтов к выполнению космических полётов и обоснована актуальность проблемы составления расписания подготовки. Предложены математические модели планирования подготовки космонавтов к работе на МКС. Общая задача планирования разбивается на задачу объёмного планирования, в котором выбирается множество занятий для каждого члена экипажа, и задачу календарного планирования, решение которой позволяет определить порядок проведения занятий и их времена начала и окончания. Предложены методы решения поставленных задач, проведены вычислительные эксперименты на реальных данных.

В дальнейшем планируется доработка математической модели для поддержки других видов подготовок, в частности, для работы на РС МКС, разработка автоматизированного рабочего места (АРМ), которое позволит ускорить процесс планирования подготовки экипажей для работы на МКС.

### Литература

1. БРОННИКОВ С.В. *Разработка требований к подготовке экипажей космической станции* // Космическая техника и технологии. – 2015. – №1(8). – С. 81–87.
2. КУЗЬМИН В.В., НОВИКОВ А.Л., ПОЛНИКОВ А.С. *Результаты внедрения интерактивной мультиагентной системы построения программы полета, грузопотока и расчета ресурсов рс МКС* // В кн.: XX Научно-техническая конференция молодых ученых и специалистов: материалы. Королев, РКК «Энергия» им. С.П. Королева, 10-14 июня 2014 г. – С. 607–609.
3. ОРЛОВСКИЙ Н.М. *Математические модели и алгоритмы автоматизированной системы планирования работы экипажа*: Дис. канд. техн. наук (05.13.01). – ЮРГ-ПУ(НПИ), Новочеркасск, 2015. – 181 с.
4. СТАНИЛОВСКАЯ В.И. *Автоматизация планирования пилотов долговременных орбитальных комплексов*: Дис. канд. техн. наук (05.07.09). – РКК «Энергия», Королев, 2008. – 193 с.
5. СТАНИЛОВСКАЯ В.И., БЕЛЯЕВ А.М., ЛАХИН О.И., НОСКОВА А.И., ИВАНОВА Д.Н. *Подход к адаптивному планированию полетных операции? россии?ского сегмента международной? космической? станции на основе мультиагентных технологии?* // В кн.: Труды XVII Международной конференции «Проблемы управления и моделирования в сложных системах»: материалы. Самара, 22-25 июня 2015 г. – С. 147–157.

6. ARTIGUES C., DEMASSEY S., NERON E. *Resource-Constrained Project Scheduling: Models, Algorithms, Extensions and Applications*. – Wiley-ISTE, 2008. – 288 p.
7. AU K., SANTIAGO S., PAPASIN R., WINDERM M., LE T. *Streamlining Space Training Mission Operations with Web Technologies. An Approach to Developing Integral Business Applications for Large Organizations* // IEEE Fourth International Conference on Space Mission Challenges for Information Technology (SMC-IT), 2011. – P. 159-166. – doi:10.1109/SMC-IT.2011.18.
8. BRESINA J.L., JONSSON A.K., MORRIS P.H., RAJA K. *Activity Planning for the Mars Exploration Rovers* // ICAPS. – 2005. – 10 p.
9. BRUCKER P., KNUST S. *Complex Scheduling*. – Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg, 2012. – 324 p.
10. CESTA A., CORTELLESSA G., FRATINI S., ODDI A. *Looking for MrSPOCK: Issues in Deploying a Space Application* // ICAPS 2008 SPARK Workshop. - 2008.
11. DECHTER R. *Constraint Processing*. – Morgan Kaufmann, 2003. – 480 p.
12. KORF R.E. *A complete anytime algorithm for number partitioning* // Artificial Intelligence. – 1998. – Vol. 106. – P. 181–203.
13. KORF R.E. *Objective functions for multiway number partitioning* // Proc. of the Third Annual Symposium on Combinatorial Search, SOCS 2010, Stone Mountain, Atlanta, Georgia, USA, 2010.
14. SPAGNULO, M., FLEETER, R., BALDUCCINI, M., NASINI, F. *Space Program Management : Methods and Tools* // Spagnulo, M., Fleeter, R., Balduccini, M., Nasini, F., Springer-Verlag New York - 2013. - 352 c.
15. <http://www.energia.ru/> (дата обращения: 30.08.2015).
16. <http://www.gctc.ru/> (дата обращения: 30.08.2015).
17. [http://www.dlr.de/rb/en/desktopdefault.aspx/tabid-6816/4256\\_read-6303/](http://www.dlr.de/rb/en/desktopdefault.aspx/tabid-6816/4256_read-6303/) (дата обращения: 30.08.2015).

## **MATHEMATICAL MODELING OF THE ASTRONAUT TRAINING SCHEDULING**

**Alexander Lazarev**, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow State University, International Laboratory of Decision Choice and Analysis Higher School of Economics, Moscow Institute of Physics and Technology State University, Moscow, Doctor of Science, professor (Moscow, Profsoyuznaya st., 65, (495)334-87-51, jobmath@mail.ru).

**Sergey Bronnikov**, Rocket and Space Corporation Energia after S.P. Korolev, Moscow, Cand.Sc., Head of Department (sergey.bronnikov@rsce.ru).

**Aleksey Gerasimov**, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Cand.Sc., Researcher, (alexey9113@gmail.com).

**Elena Musatova**, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Cand.Sc., Senior Researcher, (nekolyap@mail.ru).

**Aleksey Petrov**, Institute of Control Sciences of RAS, International Laboratory of Decision Choice and Analysis, Higher School of Economics, Moscow, Junior Researcher (petrovalexeyserg@gmail.com).

**Konstantin Ponomarev**, YU.A. Gagarin Research & Test Cosmonaut Training Center, Star City, Deputy Head of Department (k.ponomarev@gctc.ru).

**Maxim Kharlamov**, YU.A. Gagarin Research & Test Cosmonaut Training Center, Star City, Deputy Head (m.kharlamov@gctc.ru).

**Nail Khusnullin**, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Senior Software Developer (nhusnullin@gmail.com).

**Denis Yadrentsev**, YU.A. Gagarin Research & Test Cosmonaut Training Center, Star City, Head of Department (D.Yadrentsev@gctc.ru).

*Abstract: Astronauts training is a long-term, complex and expensive process that lasts from two to three years and require individual approach to each participant. The paper presents an attempt to formalize this process. We consider a set of related problems of the astronaut training scheduling. The first problem is to distribute qualifications for various onboard systems between astronauts, i.e. to determine the set of tasks for each astronaut. The second problem is to determine start moments for all considered tasks. For this issue a mathematical models based on integer linear programming and constraint programming are proposed. Computational results of the implemented models and experiments on real data are presented.*

Keywords: scheduling theory, combinatorial optimization, planning, International Space Station.

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии Н. И. Базенковым.*

*Поступила в редакцию 21.04.2016.*

*Дата опубликования 30.09.2016.*

УДК 681.52  
ББК Ж 30

## СИНТЕЗ АДАПТИВНОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ КВАДРОКОПТЕРОМ МЕТОДОМ ПАССИФИКАЦИИ<sup>1</sup>

Белявский А. О.<sup>a 2</sup>

Томашевич С. И.<sup>a, b 3</sup>

<sup>a)</sup> (Университет ИТМО, Санкт-Петербург)

<sup>b)</sup> (ФГБУН Институт проблем машиноведения РАН,  
Санкт-Петербург)

*Работа посвящена синтезу адаптивного управления для системы стабилизации квадрокоптера на основе метода пассивации. Показано построение системы стабилизации квадрокоптера в случае использования ПД-регуляторов и с помощью метода обратной связи. Приведены примеры моделирования и произведено сравнение предложенного метода с другими.*

Ключевые слова: БПЛА, квадрокоптер, пассивация, адаптивное управление.

### **Введение**

В последнее время наблюдается рост интереса к беспилотным летательным аппаратам (БПЛА) в связи с большей доступностью и относительной простотой управления. Цели, которые ставятся перед БПЛА, могут варьироваться от съемок фото- и видеоматериалов до транспортировки каких-либо легких грузов,

---

<sup>1</sup> Разработка алгоритма на основе метода пассивации выполнена при поддержке Правительства Российской Федерации (грант 074-U01).

<sup>2</sup> Андрей Олегович Белявский, магистрант  
(belyavskiy.a.o@gmail.com).

<sup>3</sup> Станислав Игоревич Томашевич, аспирант  
(tomashevich.stanislav@gmail.com).

именно поэтому движение в пространстве должно выполняться с высокой точностью.

Особое распространение получили такие БПЛА как квадрокоптеры – ультралегкие ЛА, обладающие четырьмя винтами. Эта популярность подтверждается большим количеством статей и квалификационных работ, которые посвящены исключительно квадрокоптерам [15, 23, 40, 42]. Самым распространенным способом стабилизации является использование ПИД-регуляторов и их разновидностей, поэтому существует множество работ, посвященных проектированию регуляторов такого типа, например, [17, 29, 33, 36, 44]. Также существуют адаптивные алгоритмы для управления системой стабилизации квадрокоптера. Алгоритмы на основе бэкстеппинга могут быть найдены в [21, 34, 35, 45]. Алгоритмы других типов рассмотрены в [7, 25, 26, 27, 31, 33, 37, 38]. На основе имеющихся алгоритмов стабилизации можно вводить управления для движения по заданным траекториям в пространстве, таким алгоритмам посвящена, например, работа [2].

Основным принципом использования большинства вышеуказанных алгоритмов является знание параметров квадрокоптера, например масс, моментов инерций и коэффициентов сопротивления воздуха, коэффициентов тяги винта и многих других. Очевидно, что в полете все параметры могут меняться, поэтому одним из эффективных способов управления в условиях параметрической неопределенности является применение методов адаптивного управления, которые не используют параметры БПЛА. Также положительной стороной применения таких алгоритмов является то, что они более универсальны: параметры двух идентичных квадрокоптеров могут различаться ввиду, например, небольших дефектов винтов, разных аккумуляторов и многих других расхождений. Таким образом, становится очевидной цель создания более универсальных алгоритмов, которые работают в различных условиях для одного квадрокоптера, а также переносятся на другие квадрокоптеры с минимальной корректировкой настроек.

Также одной из приоритетных задач является использование как можно меньшего количества измеряемых сигналов, таких как скорости, ускорения и т.д. Этому вопросу специально посвящены многие работы, например, в работе [43] предложен способ управления, основанный только на знании координат, без их производных.

В данной работе используется более полная математическая модель. Многие работы используют упрощенные модели, в которых сделано множество допущений, например, не учитывается аэродинамический эффект, хотя его учет крайне важен. В этом можно убедиться по работам [22, 23, 28, 40], в которых показано, насколько сложна динамика квадрокоптера, учитывая взаимодействие между всеми его узлами. Кроме того, в настоящей работе предложен алгоритм управления высотой и углами поворота на основе метода пассивации, не использующий информации о параметрах квадрокоптера. В самой модели не считается, что углы тангажа и крена не влияют друг на друга, а алгоритм строится, учитывая эти перекрестные взаимодействия. Это является положительной стороной, в то время как в других работах опускается это взаимодействие и максимально упрощается модель движения.

В данной работе ставится задача синтеза закона управления положением квадрокоптера для перемещения внутри помещения. Эта задача довольно актуальна в связи с уменьшением размеров и масс квадрокоптеров, что позволяет им функционировать в помещении (см. [14, 16, 20, 39, 41]). Закон управления необходимо синтезировать на основе метода пассивации [1] для избежания использования знания многих параметров квадрокоптера. С ее помощью разработаны алгоритмы управления ЛА, но для управления вертолетом [38]. Сама модель квадрокоптера основана на моделях из работ [4, 19, 33]. Такой алгоритм позволит не учитывать некоторые параметры системы, которые требуется знать при проектировании управления на основе ПИД-регуляторов. Также необходимо сравнить работу регулятора с другими типами при подъеме на небольшую высоту и при стабилизации малых углов.

## 1. Математическая модель квадрокоптера

### 1.1. Координаты движения

Неинерциальная система отсчета (НСО) связывается с квадрокоптером и движется относительно инерциальной системы отсчета (ИСО). ИСО, в свою очередь, связана с Землей и задана ортогональными координатными осями  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$ . В системе отсчета квадрокоптера оси  $O_bX_b$ ,  $O_bY_b$ ,  $O_bZ_b$  ортогональны между собой, а с осями инерциальной системы отсчета – сонаправлены и параллельны. Центр  $O_b$  находится в центре масс квадрокоптера. Основной задачей квадрокоптера является перемещение в нужную точку в ИСО, в то время как движение сопровождается наклонами системы, которые происходят в ИСО и НСО по-разному, поэтому необходимо правильно соблюдать переходы из одной системы в другую. Углы, на которые квадрокоптер отклоняется относительно неподвижной системы, являются углами Эйлера и обозначаются  $\gamma$ ,  $\vartheta$  и  $\psi$ . На рис. 1 представлены обе системы отсчета, основные направления и углы, которые формируют общее движение системы. Линейное положение квадрокоптера описывается переменными  $x$ ,  $y$ ,  $z$  – координатами центра масс [5].

### 1.2. Конструкция квадрокоптера

Квадрокоптер имеет симметричную структуру с четырьмя двигателями, расположенными на лучах по осям  $O_bX_b$  и  $O_bZ_b$  на расстоянии  $l$  от центра масс. Матрица инерции имеет следующий вид:

$$(1) \quad I_A = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_z & 0 \\ 0 & 0 & I_y \end{bmatrix},$$

где  $I_x$ ,  $I_y$ ,  $I_z$  – моменты инерции при вращении вдоль соответствующих осей,  $I_x = I_z$ .

Квадрокоптер можно представить в виде шара с закрепленными на концах лучей четырьмя шарами, означающими двигатели. Также в модели учтена инерция винтов, представленных в

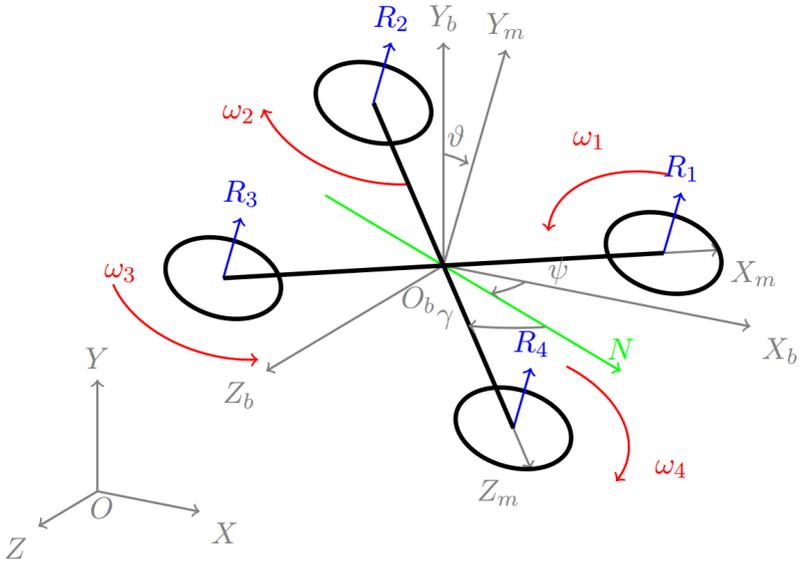


Рис. 1. Схематичное изображение квадрокоптера

виде стержней, закрепленных посередине на оси винтов перпендикулярно им. На рис. 2 показано данное представление квадрокоптера.

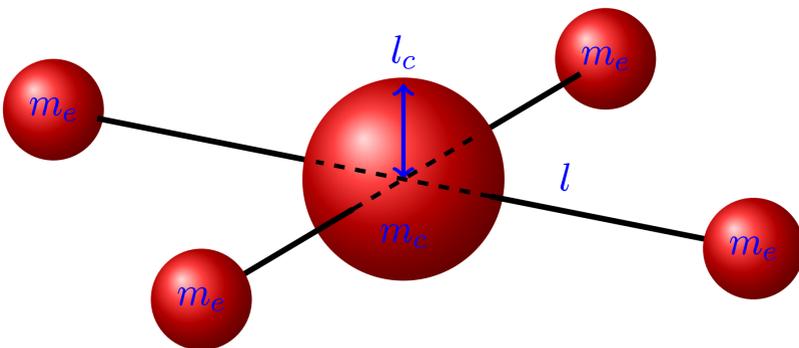


Рис. 2. Схематичное изображение квадрокоптера

Инерции считаются следующим образом:

$$(2) \quad I_x = I_z = \frac{1}{2}m_c l_c^2 + 2m_e l^2, \quad I_y = \frac{1}{2}m_c l_c^2 + 4m_e l^2,$$

где  $m_c$  – масса центра квадрокоптера;  $l_c$  – радиус центра шара, которым описывается центр квадрокоптера;  $m_e$  – масса двигателя. Также необходимо учитывать инерцию ротора двигателя  $I_r$ :

$$(3) \quad I_r = \frac{1}{3}m_p R^2,$$

где  $m_p$  – масса несущего винта, а  $R$  – его радиус. Общая масса считается как сумма всех элементов:

$$(4) \quad m = m_c + 4m_e + 4m_p.$$

### 1.3. Вращение роторов и управления

Вращение ротора каждого двигателя описывается выражением  $\dot{\omega}_i = I_r(\tilde{\omega}_i - \omega_i)$ , где  $\tilde{\omega}_i$  – желаемая скорость, определяемая контроллером оборотов на платформе квадрокоптера [32]. Два винта вращаются по часовой стрелке, два – против, а их скорости ограничиваются как  $0 < \omega_{min} \leq \omega_i \leq \omega_{max}$ . В полете винт не может двигаться реверсивно, имеет пределы вращения и не может быть остановлен. Ввиду относительной малости момента инерции ротора двигателя  $I_r$  и постоянной времени цепи якоря, в дальнейшем инерционность двигателя не учитывается.

Вместе силы четырех роторов создают тягу  $\tau_y$  в направлении оси  $O_b Y_b$ . Крутящий момент  $\tau$  состоит из моментов  $\tau_\gamma$ ,  $\tau_\vartheta$  и  $\tau_\psi$  в направлении, соответствующем углу поворота системы отсчета квадрокоптера.

Введем формулы вырабатываемых сил по соответствующим осям и углам вращения:

$$(5) \quad \tau_y = k_l(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4),$$

$$(6) \quad \tau = \begin{bmatrix} \tau_\gamma \\ \tau_\vartheta \\ \tau_\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l(\omega_2 - \omega_4) \\ l(\omega_1 - \omega_3) \\ a_r(\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4) \end{bmatrix},$$

где  $a_r$  – постоянная вращательного движения.

Кроме того, в модели квадрокоптера требуется учитывать суммарную скорость  $\omega_R$ , которая рассчитывается следующим образом:

$$(7) \quad \omega_R = \omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4.$$

Пересчет скоростей, исходя из задающих воздействий, происходит по следующей формуле:

$$(8) \quad \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \omega_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{2l} & -\frac{1}{4a_r} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2l} & 0 & \frac{1}{4a_r} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2l} & -\frac{1}{4a_r} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2l} & 0 & \frac{1}{4a_r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_y \\ \tau_\gamma \\ \tau_\vartheta \\ \tau_\psi \end{bmatrix}.$$

В реальной системе присутствуют различные аэродинамические воздействия, например: зависимость тяги от угла атаки, взаимодействие лопастей винта и воздушного потока. Модель, учитывающая эти факторы, обладает высокой сложностью и содержит большое число параметров, которые трудно рассчитать. Поэтому на этапе синтеза алгоритмов управления этими факторами будем пренебрегать, их значимость для поведения системы определится в результате экспериментальных исследований.

#### 1.4. Свод основных формул

Основываясь на вышеперечисленных работах, сформируем совокупность уравнений, полностью описывающих динамику квадрокоптера. Система выглядит следующим образом:

$$(9) \quad \begin{cases} m\dot{V}_x = \tau_y(C_\psi S_\vartheta C_\gamma + S_\psi S_\gamma) - V_x A_x, \\ m\dot{V}_y = -mg + \tau_y(C_\vartheta C_\gamma) - V_y A_y, \\ m\dot{V}_z = \tau_y(S_\psi S_\vartheta C_\gamma - C_\psi S_\gamma) - V_z A_z, \\ \dot{\gamma} = \omega_x + S_\gamma T_\vartheta \omega_z + C_\gamma T_\vartheta \omega_y, \\ \dot{\vartheta} = C_\gamma \omega_z - S_\gamma \omega_y, \\ \dot{\psi} = \frac{S_\gamma}{C_\vartheta} \omega_z + \frac{C_\gamma}{C_\vartheta} \omega_y, \\ I_x \dot{\omega}_x = (I_y - I_z) \omega_y \omega_z - I_r \omega_z \omega_r + \tau_\gamma, \\ I_y \dot{\omega}_y = (I_z - I_x) \omega_x \omega_z + \tau_\psi, \\ I_z \dot{\omega}_z = (I_x - I_y) \omega_x \omega_y + I_r \omega_x \omega_r + \tau_\vartheta, \end{cases}$$

где  $V_x, V_y, V_z$  – линейные скорости по соответствующим осям;  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  – угловые скорости вращения квадрокоптера вокруг соответствующих осей;  $A_x, A_y, A_z$  – аэродинамические коэффициенты по соответствующим осям;  $S_\alpha = \sin(\alpha)$ ,  $C_\alpha = \cos(\alpha)$ ,  $T_\alpha = \operatorname{tg}(\alpha)$ ;  $g$  – ускорение свободного падения.

Таблица 1. Параметры математической модели

Параметр	Величина	Параметр	Величина	Размерность
Массы, кг		Коэффициенты		
$m_c$	1	$g$	9,81	м/с <sup>2</sup>
$m_e$	0,1	$k_l$	$3 \cdot 10^{-6}$	кг · м
$m_p$	0,01	$a_r$	0,033	кг · м
$m$	1,44	$A_x$	0,25	кг/с
Моменты инерций, кг·м <sup>2</sup>		$A_y$	0,25	кг/с
$I_x$	0,0151	$A_z$	0,25	кг/с
$I_y$	0,0253	$l$	0,225	м
$I_z$	0,0151	$l_c$	0,1	м
$I_r$	$5,38 \cdot 10^{-5}$	$R$	0,127	м

За основу взят реальный квадрокоптер, некоторые параметры которого были получены с помощью идентификации в работе [13] (см. также [24]). Величины, используемые в математической модели, приведены в таблице 1.

## 2. Синтез ПД-регуляторов

Линеаризуем модель квадрокоптера, используя управляющие воздействия как входы, а результирующую координату  $y$  и углы – как выходы. Линеаризацию системы (9) произведем в нулевой точке, считая, что углы  $\gamma$ ,  $\vartheta$ ,  $\psi$  – малы, соответствующие синусы близки к нулю, косинусы близки к единице. Также считаем, что все взаимные произведения угловых скоростей  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  близки к нулю, как и произведения  $I_r \omega_x, I_r \omega_z$ , ввиду малости  $I_r$ . Окончательно получим систему линеаризованных

уравнений, описывающих динамику:

$$(10) \quad \begin{cases} m\ddot{y} = -mg + \tau_y - \dot{y}A_y, \\ \dot{\gamma} = \omega_x, \\ \dot{\vartheta} = \omega_z, \\ \dot{\psi} = \omega_y, \\ I_x\ddot{\gamma} = \tau_\gamma, \\ I_y\ddot{\vartheta} = \tau_\vartheta, \\ I_z\ddot{\psi} = \tau_\psi, \end{cases}$$

откуда получим следующие передаточные функции от входов  $\tau_y, \tau_\gamma, \tau_\vartheta, \tau_\psi$  к выходам  $y, \gamma, \vartheta, \psi$  соответственно:

$$(11) \quad \begin{aligned} W_y(s) &= \frac{m^{-1}}{s(s + A_y m^{-1})}, & W_\gamma(s) &= \frac{I_x^{-1}}{s^2}, \\ W_\vartheta(s) &= \frac{I_z^{-1}}{s^2}, & W_\psi(s) &= \frac{I_y^{-1}}{s^2}, \end{aligned}$$

которые описывают движение вдоль оси  $OY$  и по углам  $\gamma, \vartheta, \psi$  соответственно.

Для управления движением квадрокоптера будем использовать ПД-регуляторы, так как П-регулятор сделает систему управления углами колебательной, при использовании ПИ-регулятора в системе управления углами также будут два комплексных корня, а при ПИД-регуляторе порядок системы возрастает до третьего. Для выбора коэффициентов воспользуемся методом стандартных переходных функций, основываясь на желаемом времени переходных процессов.

Для синтеза регуляторов используем метод модального управления [3]. Поскольку перерегулирование при полете в помещении должно быть исключено, зададим желаемый характеристический многочлен замкнутой системы  $D(s)$  в форме бинома Ньютона  $D(s) = s^2 + 2\omega_0 s + \omega_0^2$ , где  $\omega_0$  – параметр, определяющий быстродействие. Сначала рассчитаем коэффициенты для вертикального перемещения вдоль оси  $OY$ , для остальных перемещений процесс будет аналогичным. Пусть необходимо, чтобы время переходного процесса составляло 1 с, тогда желаемая частота  $\omega_0 = 4,8$ . Обращаясь к желаемому полиному и решая по-

лучившиеся уравнения, находим пропорциональный и дифференциальный коэффициенты регулятора:  $K_p^y = 33,18$  и  $K_d^y = 13,58$  соответственно. Коэффициенты для углов  $\gamma$ ,  $\vartheta$ ,  $\psi$  рассчитываются аналогично. Полученные данные сведены в таблицу 2.

### 3. Линеаризация обратной связью

При синтезе ПД-регуляторов была использована линеаризованная в нулевой точке модель, что упростило важные члены в динамике. Чтобы избежать этого, воспользуемся методом линеаризации модели замыканием обратной связи [12, 30], однако, в отличие от работы [18], при синтезе управления используется более полная модель динамики движения. Пусть есть система

$$(12) \quad \ddot{\bar{x}} = f(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, t) + g(\bar{x}, t)\Theta,$$

где  $\bar{x}$  – вектор состояния системы;  $f$  – вектор-функция соответствующих размеров;  $g$  – функция входа;  $\Theta$  – управляющее воздействие;  $t$  – время. Тогда используя закон управления

$$(13) \quad \Theta = g(\bar{x}, t)^{-1}(v - f(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, t)),$$

где  $v$  – новое управление, можно преобразовать систему (12) к виду

$$(14) \quad \ddot{\bar{x}} = v,$$

что позволяет задать динамику изменения  $\bar{x}$ .

#### 3.1. Стабилизация по углам

Уравнение изменения углового положения из системы (10) можно преобразовать как

$$(15) \quad \dot{\eta} = (I_A W_\eta)^{-1} \left( (I_A W_\eta \dot{\eta}) \times (W_\eta \dot{\eta}) - I_A \dot{W}_\eta \dot{\eta} - \right. \\ \left. - I_r W_\eta \eta \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \omega_R \right) + (I_A W_\eta)^{-1} \tau,$$

где  $W_\eta$  – матрица поворота, имеющая вид

$$(16) \quad W_\eta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -S_\vartheta \\ 0 & C_\gamma & C_\vartheta S_\gamma \\ 0 & -S_\gamma & C_\vartheta C_\gamma \end{bmatrix},$$

и представить в виде (12):

$$(17) \quad \begin{aligned} \bar{x} = \eta, \quad f(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, t) &= (I_A W_\eta)^{-1} \left( (I_A W_\eta \dot{\eta}) \times (W_\eta \dot{\eta}) - \right. \\ &\quad \left. - I_A \dot{W}_\eta \dot{\eta} - I_r W_\eta \eta \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \omega_R \right), \\ g(\bar{x}, t) &= (I_A W_\eta)^{-1}, \quad \Theta = \tau. \end{aligned}$$

Тогда управляющее воздействие  $\tau$  должно иметь вид

$$(18) \quad \tau = I_A W_\eta \zeta - (I_A W_\eta \dot{\eta}) \times (W_\eta \dot{\eta}) + I_A \dot{W}_\eta \dot{\eta} + I_r W_\eta \eta \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \omega_R,$$

где  $\zeta$  – вспомогательное управление. Подставляя (18) в (17), получим

$$(19) \quad \ddot{\eta} = \zeta.$$

Зададим  $\zeta$  как

$$(20) \quad \zeta = \ddot{\zeta}_t - k_2(\dot{\eta} - \dot{\zeta}_t) - k_1(\eta - \zeta_t),$$

где  $\zeta_t = [\gamma_t \quad \vartheta_t \quad \psi_t]^\top$  – вектор задающих воздействий для каждого из углов, а  $k_1^\zeta, k_2^\zeta$  – коэффициенты, выбираемые разработчиком. Теперь подставляя (20) в (19) и учитывая, что  $\eta - \zeta = e_\eta$  – ошибка слежения, получим модель движения системы:

$$(21) \quad \ddot{e}_\eta + k_2^\zeta \dot{e}_\eta + k_1^\zeta e_\eta = 0,$$

в которой, задавая коэффициенты  $k_1^\zeta$  и  $k_2^\zeta$ , выбирается динамика затухания ошибки. Эти коэффициенты могут быть выбраны, например, методом стандартных полиномов.

### 3.2. Стабилизация по высоте

Аналогичным способом реализуем стабилизацию по высоте: возьмем соответствующее уравнение из (9) и представим в виде (12):

$$(22) \quad \bar{x} = y, \quad f(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, t) = -g - \frac{A_y}{m} \dot{y}, \quad g(\bar{x}, t) = \frac{C_\vartheta C_\gamma}{m}, \quad \Theta = \tau_y.$$

Аналогично случаю с углами управление должно иметь вид

$$(23) \quad \tau_y = \frac{m}{C_\vartheta C_\gamma} \left( g + \frac{A_y}{m} \dot{y} + \zeta_y \right),$$

где  $\zeta_z$  – вспомогательное управление. Зададим его следующим образом:

$$(24) \quad \zeta_y = \ddot{y}_t - k_2^y(\dot{y} - \dot{y}_t) - k_1^y(y - y_t),$$

где  $y_t$  – задающее воздействие по оси  $OY$ . Подставляя (23) в (22) и учитывая, что  $e_y = y - y_t$  – рассогласование, получим уравнение динамики ошибки:

$$(25) \quad \ddot{e}_y + k_2^y \dot{e}_y + k_1^y e_y = 0.$$

Коэффициенты  $k_1^y$  и  $k_2^y$  выбираются таким образом, чтобы ошибка сходилась по желаемой траектории. Исходя из этого, данный метод позволяет качественно задавать движение системы, однако его главным недостатком является сложность законов управления, а также необходимость знания и использования практически всех параметров квадрокоптера. В качестве моделирования были использованы значения коэффициентов, обеспечивающих схождение к задающим воздействиям за 1 секунду, полученные из метода стандартных многочленов и приведенные в таблице 2.

## 4. Алгоритм на основе пассивации

### 4.1. Сигнально-параметрический регулятор

Для управления воспользуемся сигнально-параметрическим регулятором (СПР) на основе метода пассивации, который более подробно описан в [1]. Очевидным плюсом является адаптивная составляющая, позволяющая управлять положением системы, не зная ее параметров.

Пусть объект описывается моделью ВСВ:

$$(26) \quad \dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + B\tilde{u}, \quad \tilde{y} = C\tilde{x},$$

где  $\tilde{x} \in R^n$  – вектор состояния;  $\tilde{u} \in R^m$  – вход модели;  $\tilde{y} \in R^l$  – выход модели;  $A, B, C$  – матрицы соответствующих размерностей.

Пусть цель работы алгоритма состоит в стабилизации по состоянию:

$$(27) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{x}(t) = 0.$$

Дополнительно потребуем осуществление скользящего режима вдоль поверхности  $\sigma = 0$ , где  $\sigma = G\tilde{y}$ ,  $G$  – матрица размерности  $l \times n$ .

Зададим тогда закон управления в следующем виде:

$$(28) \quad \dot{\tilde{y}} = -\gamma_\sigma \text{sign } \sigma, \quad \sigma = G\tilde{y},$$

где  $\gamma_\sigma > 0$  – параметр, выбираемый разработчиком.

Для последующих выкладок потребуется определение гипер-минимальнофазовости [9].

**Определение 1.** *Гипер-минимально-фазовой передаточной функцией называется минимально-фазовая (ее числитель – гурвицев многочлен) функция с единичной относительной степенью и положительным высокочастотным коэффициентом усиления  $GCB$ .*

Воспользуемся теоремой о пассивации [10].

**Теорема 1.** *Цель управления (27) достигается для модели (26) с законом управления (28) тогда, когда выполнены следующие условия: существует положительно-определенная матрица  $P = P^\top > 0$  и такой вектор  $K_*$ , что выполняется  $PA_* + A_*^\top P < 0$ ,  $PB = GC$  и  $A_* = A + BK_*^\top C$ . Другими словами, если функция  $GC(\lambda I_n - A)^{-1}B$  – гипер-минимально-фазовая, то при достаточно большом выбранном коэффициенте  $\gamma_\sigma$  с управлением (28) достигается цель управления (27).*

Для того чтобы избежать зависимости устойчивости системы от начальных условий, воспользуемся сигнально-параметрическим адаптивным законом управления [1]:

$$(29) \quad \begin{aligned} \dot{\tilde{y}} &= -K^\top(t)\tilde{y}(t) - \gamma_\sigma \text{sign}(\sigma(\tilde{y})), \quad \sigma(\tilde{y}) = G\tilde{y}, \\ \dot{K}(t) &= \sigma(\tilde{y})\Gamma\tilde{y}(t), \end{aligned}$$

$\Gamma = \Gamma^\top > 0$  – матрица соответствующей размерности.

**Замечание 1.** Условия стабилизации объекта управления сильной обратной связью известны из ряда работ по высокоточному управлению, по системам с переменной структурой и т.д. [8, 11]. Следует заметить, что в этих работах предполагается использование полного набора производных от выхода объекта (или их оценивание дифференцирующими наблюдателями), в то

время как согласно теореме 1 достаточно измерения  $k - 1$  производной, где  $k$  – относительная степень передаточной функции объекта по отношению к выходу  $\sigma$ . Кроме того, в используемом алгоритме содержится и параметрическая составляющая, которой нет в традиционных системах управления с переменной структурой.

В случае скалярного входа вместо алгоритма (29) может быть использована следующая модификация алгоритма, обеспечивающая скользящий режим вдоль поверхности  $\sigma \equiv 0$ :

$$(30) \quad \begin{aligned} \ddot{u} &= -k(t)\ddot{y}(t) - \gamma_\sigma \text{sign}(\sigma(\tilde{y})) \sqrt{|\sigma(\tilde{y})|}, & \sigma(\tilde{y}) &= G\tilde{y}, \\ \dot{k}(t) &= \gamma_k \sigma(t)^2, \end{aligned}$$

где  $\gamma_k > 0$  подлежит выбору разработчиком.

Модифицированное слагаемое с функцией знака  $\text{sign}$  обеспечивает более гладкое управление, чем немодифицированный алгоритм (29). Здесь  $\sigma$  может быть обозначена как «ошибка адаптации», поэтому равенство  $\sigma \equiv 0$  означает успешное достижение цели управления.

Коэффициент усиления  $K(t)$  в (29) ( $k(t)$  в (30)) может бесконечно расти при наличии внешних возмущений (например, из-за упраздненных членов движения, принятых за возмущения), поэтому необходимо его ограничить. Для этого воспользуемся окончательным алгоритмом:

$$(31) \quad \begin{aligned} \ddot{u} &= -k(t)\ddot{y}(t) - \gamma_\sigma \text{sign}(\sigma(\tilde{y})) \sqrt{|\sigma(\tilde{y})|}, & \sigma(\tilde{y}) &= G\tilde{y}, \\ \dot{k}(t) &= \gamma_k \sigma(t)^2 - \alpha_k (k(t) - k^0), & k^0 &= k(0), \end{aligned}$$

где  $\alpha_k \geq 0$  регулирует обратную связь. Этот алгоритм является усеченным алгоритмом супер-твистинга [6].

Для скалярного случая и возможности измерения текущей координаты со скоростью алгоритм может трактоваться следующим образом: введем ошибку выполнения алгоритма для перемещений и углов как

$$(32) \quad e_h(t) = h^*(t) - h(t),$$

где  $h^*(t)$  – задающее воздействие,  $h(t)$  – текущие значения. Тогда зададим поверхность для скользящего режима как

$$(33) \quad \sigma(t) = e_h(t) - \alpha_h \dot{h}(t),$$

где  $\alpha_h > 0$  – параметр алгоритма, отвечающий за скорость схождения ошибки.

Тогда динамика движения будет описываться следующим образом:

$$(34) \quad \alpha_h \dot{h}(t) + h(t) = h^*(t),$$

что соответствует динамике апериодического звена и качественно подходит к функционированию квадрокоптера для движения без перегулирования.

#### 4.2. Адаптивное управление высотой

Рассмотрим уравнение, описывающее движение по высоте из системы (9), и учтем, что углы крена и тангажа во время движения малы, более того, подъем или спуск при движении квадрокоптера осуществляется преимущественно без наклонов. Тогда движение будет описываться следующим уравнением:

$$(35) \quad \ddot{y} + A_y m^{-1} \dot{y} = m^{-1} \tau_y - g.$$

Передачная функция этого движения совпадает с полученной ранее в выражении (11), однако имеет относительную степень, равную 2. Чтобы пассивировать систему, необходимо задать управление через текущую координату и ее скорость. Перейдем от (35) к модели ВСВ и предположим, что измерению доступен вектор с координатой и скоростью  $\tilde{x}_y = [y \ \dot{y}]^T$ :

$$(36) \quad \dot{\tilde{x}}_y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -A_y m^{-1} \end{bmatrix} \tilde{x}_y + \begin{bmatrix} 0 \\ m^{-1} \end{bmatrix} \tau_y, \quad \tilde{y}_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tilde{x}_y,$$

где  $\tilde{y}_y$  – новый выход системы, включающий и координату, и скорость. Тогда необходимо выбрать матрицу  $G_y$  так, чтобы функция  $G_y C_y (sI_2 - A_y)^{-1} B_y$  была гипер-минимально-фазовой, где матрицы  $A_y$ ,  $B_y$ ,  $C_y$  – матрицы состояния, входа и выхода соответственно в выражении (36), а  $I_2$  – единичная матрица размерности  $2 \times 2$ . Выберем матрицу  $G_y = [1 \ \alpha_y]$ , где  $\alpha_y > 0$  – параметр регулирования. Тогда функция  $G_y C_y (sI_2 - A_y)^{-1} B_y = \frac{\alpha_y s + 1}{m s^2 + A_y s}$  – минимально-фазовая ( $\alpha_y > 0$ ), имеет единичную относительную степень и  $G_y C_y B_y = \alpha_y m^{-1} > 0$ , поэтому управление движением (35) по теореме 1 может быть задано с помощью сигнально-параметрического регулятора (31).

### 4.3. Адаптивное управление углами наклона

Рассмотрим уравнения изменения углового положения квадрокоптера из системы (10) и воспользуемся предположением, что скорости  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  малы, поэтому первый член можно считать малым и отбросить. Также будем считать, что  $\omega_x = \dot{\gamma}$ ,  $\omega_y = \dot{\psi}$ ,  $\omega_z = \dot{\vartheta}$ , что следует из формул (9) при подстановке малых углов. Тогда вращательное движение (рыскание) можно отделить от остальных и записать в виде

$$(37) \quad \ddot{\psi} = I_y^{-1} \tau_\psi,$$

что можно представить в модели вида ВСВ с вектором состояния  $\tilde{x}_\psi = [\psi \quad \dot{\psi}]^T$ :

$$(38) \quad \dot{\tilde{x}}_\psi = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tilde{x}_\psi + \begin{bmatrix} 0 \\ I_y^{-1} \end{bmatrix} \tau_\psi, \quad \tilde{y}_\psi = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tilde{x}_\psi.$$

Выбирая  $G_\psi = [1 \quad \alpha_\psi]$ , где  $\alpha_\psi > 0$  – параметр регулирования, получаем передаточную функцию  $G_\psi C_\psi (sI_2 - A_\psi)^{-1} B_\psi = \frac{\alpha_\psi s + 1}{I_z s^2}$ , где матрицы  $A_\psi$ ,  $B_\psi$ ,  $C_\psi$  – матрицы состояния, входа и выхода соответственно в выражении (38), которая является гипер-минимально-фазовой, что означает по теореме 1, что есть возможность воспользоваться регулятором (31).

Движения по углам  $\vartheta$  и  $\gamma$  сведутся в систему

$$(39) \quad \begin{bmatrix} \ddot{\gamma} \\ \ddot{\vartheta} \\ \dot{\gamma} \\ \dot{\vartheta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -I_r I_x^{-1} \omega_R & 0 & 0 \\ I_r I_x^{-1} \omega_R & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\gamma} \\ \dot{\vartheta} \\ \gamma \\ \vartheta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_x^{-1} & 0 \\ 0 & I_x^{-1} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_\gamma \\ \tau_\vartheta \end{bmatrix},$$

$$\tilde{y}_{\gamma\vartheta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\gamma} \\ \dot{\vartheta} \\ \gamma \\ \vartheta \end{bmatrix}.$$

Получившаяся система является многомерной, поэтому принцип работы с ней несколько отличается и описан в книге [9].

Пусть матрица  $P(s)$  – матрица размерности  $4 \times 4$  из правильных дробно-рациональных функций от  $s$ , имеющая вид  $G_{\gamma\vartheta} C_{\gamma\vartheta} (sI_4 - A)^{-1} B_{\gamma\vartheta}$ , где  $I_4$  – единичная матрица  $4 \times 4$ , матрицы  $A_{\gamma\vartheta}, B_{\gamma\vartheta}, C_{\gamma\vartheta}$  соответствуют матрицам состояния входа, вы-

хода из выражения (39), а матрица  $G_{\gamma\vartheta}$  имеет размерность  $2 \times 4$  и выбирается разработчиком.

**Определение 2.** Матрица  $P(s)$  называется минимально-фазовой, если многочлен  $\delta(s)\det P(s)$  гурвицев. Матрица  $P(s)$  называется строго минимально-фазовой, если многочлен  $\delta(s)\det P(s)$  гурвицев, а матрица  $\Gamma_P = \lim_{|s| \rightarrow \infty} sP(s)$  симметрична и положительно определена. Многочлен  $\delta(s)$  считается как  $\delta(s) = \det(sI_4 - A_{\gamma\vartheta})$ .

Введем управление вида

$$(40) \quad \tilde{u}(t) = \xi^\top(t)\tilde{y}(t), \quad \dot{\xi}_j = -(G_j\tilde{y})\Gamma_j\tilde{y},$$

где  $j = 1, \dots, m$ , а  $m$  – размер вектора управления  $\tilde{u}(t)$ ,  $\xi_j$  – столбцы матрицы настраиваемых параметров  $\xi$ ,  $G_j$  – соответствующая строка матрицы  $G$ ,  $\Gamma_j = \Gamma_j^\top > 0$  – матрицы размера  $l \times l$ , где  $l$  – размер вектора выхода.

**Теорема 2.** Для системы (26) с управлением (40) выполняется целевое условие (27), если матрица  $GW(s)$  строго минимально-фазовая.

То есть можно использовать регулятор (31), но в варианте для многомерных систем (40), который также необходимо модернизировать, убрав зависимость от начальных условий и внешних возмущений. Тогда окончательно алгоритм управления (40) с учетом скалярного случая (31) принимает вид

$$(41) \quad \tilde{u}(t) = \xi^\top(t)\tilde{y}(t) - \gamma_M \text{sign}(\sigma(\tilde{y}))\sqrt{|\sigma(\tilde{y})|},$$

$$\sigma(\tilde{y}) = G_j\tilde{y} - h^*, \quad \dot{\xi}_j = -(G_j\tilde{y})\Gamma_j\tilde{y} - \alpha_M(\xi - \xi_0), \quad \xi_0 = \xi(0).$$

Выбирая матрицу  $G_{\gamma\vartheta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha_\gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \alpha_\vartheta \end{bmatrix}$ , выражение  $P_{\gamma\vartheta} = G_{\gamma\vartheta}C_{\gamma\vartheta}(sI_4 - A_{\gamma\vartheta})^{-1}B_{\gamma\vartheta}$  является передаточной матрицей и равняется

$$(42) \quad P_{\gamma\vartheta} = \frac{1}{s(I_x^2 s^2 + I_r^2 \omega_R^2)} \begin{bmatrix} I_x s^2 + I_x \alpha_\gamma s & -I_r \omega_R (s + \alpha_\gamma) \\ I_r \omega_R (s + \alpha_\vartheta) & I_x s^2 + I_x \alpha_\vartheta s \end{bmatrix}.$$

Многочлен  $\delta(s)$  равен  $I_x^{-2}(I_x^2 s^3 + I_r^2 \omega_R^2 s)$ , тогда многочлен  $\delta(s)\det P_{\gamma\vartheta} = I_x^{-2}(s^2 + (\alpha_\gamma + \alpha_\vartheta)s + \alpha_\vartheta \alpha_\gamma)$  является гурвицевым.

Теперь рассчитаем  $\Gamma_P = \lim_{|s| \rightarrow \infty} sP_{\gamma\vartheta}$ :

$$(43) \quad \Gamma_P = GCB = \begin{bmatrix} I_x^{-1} & 0 \\ 0 & I_x^{-1} \end{bmatrix},$$

которая выполняет требуемое условие  $\Gamma = \Gamma^\top > 0$ , отсюда по теореме 2 можно видеть, что для данной системы также можно использовать сигнально-параметрический-регулятор.

### 5. Моделирование

На основе всего вышесказанного можно сформировать три алгоритма управления системой стабилизации квадрокоптера и сравнить их функционирование. В качестве цели движения выбран подъем на высоту 0,2 метра и поворот на углы, не превышающих 0,2 радиан. Параметры для алгоритмов различных типов приведены в таблице 2.

Таблица 2. Коэффициенты регуляторов

	ПД-регулятор		ЛОС		СПР				
	$K_p$	$K_d$	$K_1$	$K_2$	$\alpha$	$\varsigma$	$\gamma_k$	$\gamma_\sigma$	$k^0$
$z$	33,18	13,58	23,04	9,6	1/3	1	100	225	17
$\psi$	0,58	0,24	23,04	9,6	1/3	1	10000	0,2	2
$\gamma$	0,35	0,14	23,04	9,6	1/3	1	$100I_4$	10	$\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$
$\vartheta$	0,35	0,14	23,04	9,6	1/3	1	$100I_4$	10	$\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$

Результаты моделирования приведены на рис. 3–4.

На рис. 5–6 представлено слежение за задающим сигналом для всех трех алгоритмов. Заданы ненулевые начальные условия

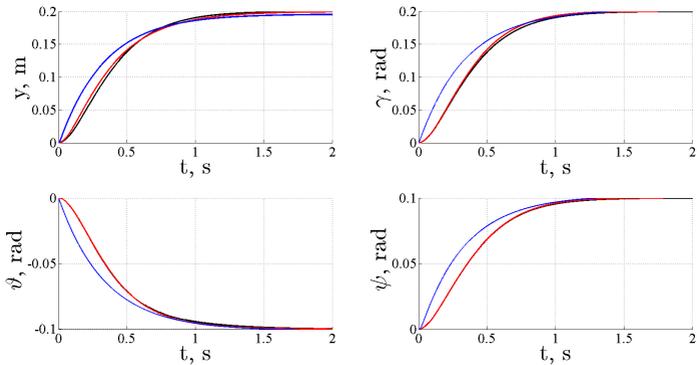


Рис. 3. Изменение координат при работе адаптивного алгоритма (синие линии), при работе системы при линеаризации обратной связи и с ПД-регуляторами (черные и красные линии соответственно)

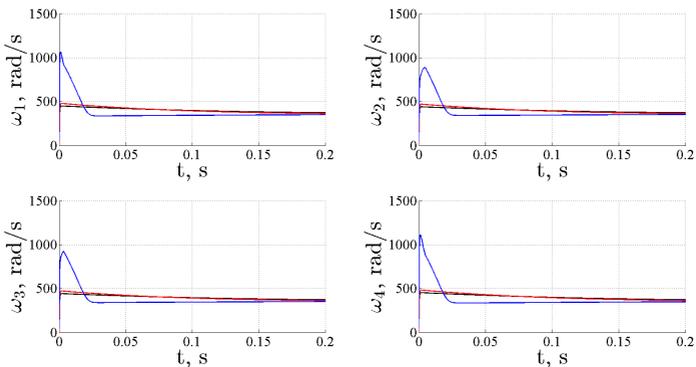


Рис. 4. Изменение угловых скоростей винтов при работе адаптивного алгоритма (синие линии), при работе системы при линеаризации обратной связи и с ПД-регуляторами (черные и красные линии соответственно)

для углов ( $\gamma_0 = -0,1$ ,  $\vartheta_0 = 0,15$ ,  $\psi_0 = 0,2$  рад) и задающие воздействия в виде импульсов разной частоты и с различным заполнением. Как видно из рис. 3–6, движение квадрокоптера с предложенным сигнально-параметрическим алгоритмом опережает движение с прочими алгоритмами ввиду того, что при его использовании движение сводится к аperiodическому звену. Из рис. 4 и 6 также видно, что сигнально-параметрический алгоритм имеет более жесткое управление, сильнее раскручивая винты, что накладывает ограничение на его использование или более аккуратный подход.

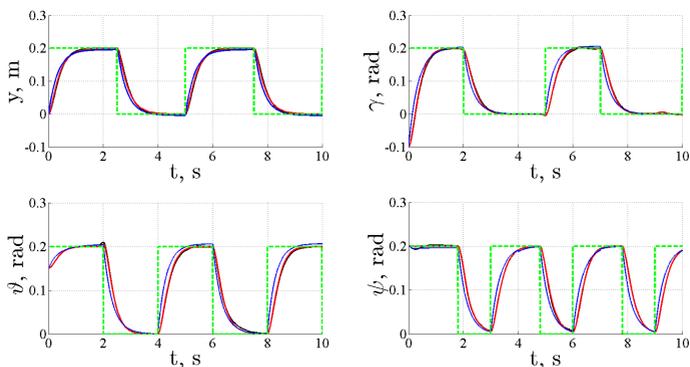
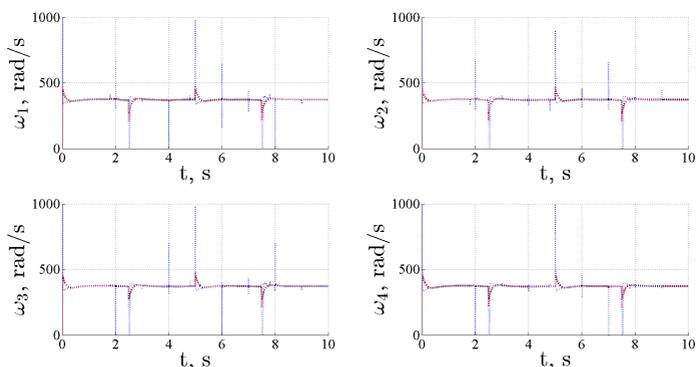


Рис. 5. Изменение координат при работе адаптивного алгоритма (синие линии), при работе системы при линеаризации обратной связи и с ПД-регуляторами (черные и красные линии соответственно) во время слежения за задающим воздействием

## 6. Заключение

В работе была предложена система стабилизации квадрокоптера с использованием сигнально-параметрических регуляторов для скалярного случая сигнала управления (стабилизация в вертикальной плоскости и по углу рыскания) и для векторного (ста-



*Рис. 6. Изменение угловых скоростей винтов при работе адаптивного алгоритма (синие линии), при работе системы при линеаризации обратной связи и с ПД-регуляторами (черные и красные линии соответственно) во время слежения за задающим воздействием*

билизация по углам крена и тангажа). Предложенный алгоритм обладает очевидным достоинством, которое выражается в том, что не требуется знать ни одного параметра квадрокоптера для проектирования системы управления. Кроме того, алгоритм учитывает особенность перекрестного взаимодействия наклонов по углам крена и тангажа, не опуская соответствующие члены в математической модели. Однако присутствует характерная особенность для High-Gain алгоритмов: заметно возросшее управление – винты квадрокоптера раскручиваются сильнее, чем при использовании других рассмотренных алгоритмов.

В остальном предложенный алгоритм качественно не отличается от алгоритмов, использующих конкретные параметры квадрокоптера. В следующих работах планируется внести учет максимально возможных скоростей вращения винтов и предложить формирование управлений исходя из этих ограничений.

### Литература

1. АНДРИЕВСКИЙ Б.Р., ФРАДКОВ А.Л. *Метод пассивации в задачах адаптивного управления, оценивания и синхронизации* // Автоматика и телемеханика. – 2006. – №11. – С. 3–37.
2. БЕЛОКОНЬ С.А., ЗОЛУХИН Ю.Н., КОТОВ К.Ю., МАЛЫЦЕВ А.С., НЕСТЕРОВ А.А., СОБОЛЕВ М.А., ФИЛИППОВ М.Н., ЯН А.П. *Управление параметрами полёта квадрокоптера при движении по заданной траектории* // Автометрия. – 2013. – С. 32–42.
3. БЕСЕКЕРСКИЙ В.А., ПОПОВ Е.П. *Теория систем автоматического управления*. – М.: Наука, 1975.
4. ГУРЬЯНОВ А.Е. *Моделирование управления квадрокоптером* // Инженерный вестник. – 2014. – №8. – С. 522–534.
5. *Динамика летательных аппаратов в атмосфере. Термины, определения и обозначения*. – Государственный Комитет СССР по Стандартам, 1981.
6. ЕМЕЛЬЯНОВ С.В., КОРОВИН С.К., ЛЕВАНТОВСКИЙ Л.В. *Новый класс алгоритмов скольжения второго порядка* // Математическое моделирование. – 1990. – Том 2, №3. – С. 89–100.
7. ЖУЧКОВ Р.Н. *Применение идей прогнозирующего управления в синтезе стабилизирующего управления сетевыми объектами* // Управление большими системами. – 2013. – Вып. 46. – С. 147–162.
8. МЕЕРОВ М.В. *Синтез структур систем автоматического регулирования высокой точности*. – М.: Физматгиз, 1959.
9. ФРАДКОВ А.Л. *Адаптивное управление в сложных системах*. – М.: Наука, 1990. – 296 с.

10. ФРАДКОВ А.Л. *Синтез адаптивной системы стабилизации линейного динамического объекта* // Автоматика и телемеханика. – 1974. – №12. – С. 96–103.
11. УТКИН В.И. *Скользющие режимы и их применения в системах с переменной структурой*. – М.: Наука, 1974.
12. ХАЛИЛ Х.К. *Нелинейные системы*. – М., Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2009. – 832 с.
13. AMELIN K., TOMASHEVICH S., ANDRIEVSKY B. *Recursive Identification of Motion Model Parameters for Ultralight UAV* // IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline). – 2015. – P. 7–12.
14. ANGELETTI G., PEREIRA VALENTE J.R., IOCCHI L., NARDI D. *Autonomous Indoor Hovering with a Quadrotor* // Proc. of Workshop on Mini and Micro UAV for Security and Surveillance. – 2008. – P. 472–481.
15. BALAS C. *Modelling And Linear Control Of A Quadrotor*. – MSc Thesis. – Cranfield, 2007.
16. BILLS C., CHEN J., SAXENA A. *Autonomous MAV Flight in Indoor Environments using Single Image Perspective Cues* // IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA). – 2011.
17. BOLANDI H., REZAEI M., MOHSENIPOUR R., NEMATI H., SMAILZADEH S.M. *Attitude Control of a Quadrotor with Optimized PID Controller* // Intelligent Control and Automation. – 2013. – Vol. 4, Issue 3. – P. 335–342.
18. BONNA R., CAMINO J.F. *Trajectory Tracking Control of a Quadrotor Using Feedback Linearization* // Proc. of the XVII International Symposium on Dynamic Problems of Mechanics DINAME-2015. – 2015.
19. BOUABDALLAH S. *Design and control of quadrotors with application to autonomous flying*. – MSc thesis. – Swiss Federal Institute of Technology, 2007.

20. BOUABDALLAH S., MURRIERI P., SIEGWART R. *Design and Control of an Indoor Micro Quadrotor* // Proc. of the IEEE International Conference on Robotics and Automation. – 2004. – Vol. 5.
21. BOUABDALLAH S., SIEGWART R. *Backstepping and sliding-mode techniques applied to an indoor micro quadrotor* // IEEE International Conference on Robotics and Automation, Barcelona, Spain. – 2005. – P. 2259–2264.
22. BOUABDALLAH S., SIEGWART R. *Full Control of a Quadrotor* // IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. – 2007. – P. 153–158.
23. CUTLER M.J. *Design and Control of an Autonomous Variable-Pitch Quadrotor Helicopter*. – S.M. Thesis. – Massachusetts Institute of Technology, Massachusetts, 2012.
24. CZERWINSKI E., SZEWC M., WOJTUNIK I., AWREJCEWICZ J., OLEJNIK P. *Mathematical model, computer aided design and programming of a multifunctional flying object* // Aviation. – 2014. – Vol. 18, Issue 1. – P. 28–39.
25. EMRAN B.J., YESILDIREK A. *Robust Nonlinear Composite Adaptive Control of Quadrotor* // International Journal of Digital Information and Wireless Communications. – 2014. – P. 213–225.
26. FANG Z., GAO W., ZHANG L. *Robust Adaptive Integral Backstepping Control of a 3-DOF Helicopter* // International Journal of Advanced Robotic Systems. – 2012. – Vol. 9. – P. 1–8.
27. GVOTH J., BLAHO M., MUDRAKOVA T. *Parameters Optimization For Unmanned Aerial Vehicle Control* // Proc. of the 22nd Annual Conference In Technical Computing. – 2014. – P. 27.
28. HOFFMANN G.M., HUANG H., WASLANDER S.L., TOMLIN C.J. *Quadrotor helicopter flight dynamics and control: Theory and experiment* // Proc. of the AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference. – 2007.

29. JUNIOR J.C.V., DE PAULA J.C., LEANDRO G.V. AND BONFIM M.C. *Stability Control of a Quad-Rotor Using a PID Controller // Brazilian Journal of Instrumentation And Control.* – 2012. – P. 15–20.
30. LEE D., KIM H.J., SASTRY S. *Feedback linearization vs. adaptive sliding mode control for a quadrotor helicopter // International Journal of Control Automation and Systems.* – 2009. – Vol. 7, Issue 3. – P. 419–428.
31. LEE T., LEOK M., HARRIS N. MCCLAMROCH. *Geometric Tracking Control of a Quadrotor UAV on SE(3) // 49th IEEE Conference on Decision and Control.* – 2010. – P. 5420–5425.
32. LUPASHIN S., HEHN M., MUELLER M.W., SCHOELLIG A.P., SHERBACK M., D'ANDREA R. *A platform for aerial robotics research and demonstration: The Flying Machine Arena // Mechatronics.* – 2014. – Vol. 24, Issue 1. – P. 41–54.
33. LUUKKONEN T. *Modelling and control of quadcopter // Independent research project in applied mathematics.* – Espoo, 2011.
34. MADANI T., BENALLEGUE A. *Backstepping control for a quadrotor helicopter // IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, Beijing, China.* – 2006. – P. 3255–3260.
35. MADANI T., BENALLEGUE A. *Control of a quadrotor mini-helicopter via full state backstepping technique // IEEE Conference on Decision and Control, San Diego, CA, USA.* – 2006. – P. 1515–1520.
36. MUSTAPA M.Z. *Altitude Controller Design for Quadcopter UAV // Jurnal Teknologi (Sciences & Engineering).* – 2015. – P. 181–188.
37. NICOL C., MACNAB C.J.B., RAMIREZ-SERRANO A. *Robust Neural Network Control Of A Quadrotor Helicopter // Canadian Conference on Electrical and Computer Engineering.* – 2008. – P. 1233–1237.

38. PEAUCELLE D., FRADKOV A.L., ANDRIEVSKY B., MAHOUT V. *Robust Simple Adaptive Control with Relaxed Passivity and PID control of a Helicopter Benchmark* // Preprints of the 18th IFAC World Congress Milano (Italy). – 2011. – P. 2315–2320.
39. REGULA G., LANTOS B. *Backstepping based control design with state estimation and path tracking to an indoor quadrotor helicopter* // Periodica Polytechnica Electrical Engineering. – 2010. – P. 1–10.
40. RICH M. *Model development, system identification, and control of a quadrotor helicopter*. – Graduate Theses and Dissertations. – Ames, 2015.
41. ROBERTS J.F., STIRLING T.S., ZUFFEREY J.-C., FLOREANO D. *Quadrotor Using Minimal Sensing For Autonomous Indoor Flight* // European Micro Air Vehicle Conference and Flight Competition (EMAV2007). – 2007.
42. SCHMIDT M.D. *Simulation And Control Of A Quadrotor Unmanned Aerial Vehicle*. – MSc Thesis. – University of Kentucky, Kentucky, 2011.
43. STEVANOVIC S., KASAC J., STEPANIC J. *Robust Tracking Control of a Quadrotor Helicopter Without Velocity Measurement* // Proc. of the 23rd International DAAAM Symposium. – 2012. – Vol. 23, No. 1. – P. 595–600.
44. SZAFRANSKI G., CZYBA R. *Different Approaches of PID Control UAV Type Quadrotor* // Proc. of the International Micro Air Vehicles Conference. – 2011. – P. 70–75.
45. ZHEN H., QI X., DONG H. *An Adaptive Block Backstepping Controller for Attitude Stabilization of a Quadrotor Helicopter* // Wseas Transactions On Systems And Control. – 2013. – Vol. 8, Issue 2.

## PASSIVITY-BASED METHOD FOR QUADROTOR CONTROL

**Tomashevich Stanislav**, ITMO University, postgraduate  
(tomashevich.stanislav@gmail.com).

**Belyavskiy Andrey**, ITMO University, master  
(belyavskiy.a.o@gmail.com).

*Abstract: In the paper we consider the passification-based adaptive control system for stabilization of a quadrotor. We propose an algorithm of altitude and rotation angle which does not require any information about the parameters of the quadrotor. Also our algorithm takes into account the mutual influence of the quadrotor's pitch and roll. We designed the stabilization system using PD-controller and feedback linearization method. Results of simulation are presented and compared with results of two alternative methods.*

Keywords: UAV, quadrotor, passivity, adaptive control.

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии А. П. Курдюковым.*

*Поступила в редакцию 17.09.2015.*

*Дата опубликования 30.09.2016.*