УДК 519.86
ББК 22.18+65.42

ИНФОРМАЦИОННОЕ РАВНОВЕСИЕ В МОДЕЛИ ДИНАМИКИ КОЛЛЕКТИВНОГО ПОВЕДЕНИЯ НА КОНКУРЕНТНОМ РЫНКЕ

Алгазин Г. И.[1]**, Алгазина Д. Г.**[2]
(*Алтайский государственный университет, г. Барнаул*)

Приведенная динамическая модель рефлексивного поведения позволяет в рамках единого подхода описывать и прогнозировать взаимодействия на конкурентном рынке агентов Курно и Штакельберга при отсутствии у них общего знания. Теоретическую основу подхода составляют теория игр и теория коллективного поведения, а также их применение для исследования поведения разноинформированных рациональных агентов, имеющих неверные исходные представления о предельных издержках конкурентов. Получены необходимые и достаточные условия сходимости динамических процедур к истинному положению равновесия.

Ключевые слова: информированность агентов, информационное равновесие, коллективное поведение, конкурентный рынок, предельные издержки, агент Курно, агент Штакельберга

1. Введение

Принятие решений рыночными субъектами (интеллектуальными агентами), осуществляющими совместную деятельность, тесно связано с их информированностью, а также информированностью и поведением остальных агентов. В реальных

---

[1] *Геннадий Иванович Алгазин, доктор физико-математических наук, профессор* (*algaz46@yandex.ru*).
[2] *Дарья Геннадьевна Алгазина, кандидат технических наук, доцент* (*darya.algazina@mail.ru*).

системах вполне естественным можно считать допущение, что конкурирующие агенты априори не раскрывают друг другу свои истинные издержки. Поэтому при принятии решений такие агенты могут иметь неверные представления о затратах других агентов.

Один из подходов к принятию агентами решений основан на сочетанном применении теоретико-игровых моделей и моделей теории коллективного поведения. Модели теории игр дают возможность предсказывать поведение агентов при различных предположениях о взаимной информированности агентов и принципах принятия ими решений, в том числе когда информированность агентов не является общим знанием. В сравнении с теорией игр теория коллективного (группового) поведения занимается исследованием динамики поведения агентов при достаточно слабых предположениях относительно их информированности. Отличие коллективного поведения от игрового подчеркивается также и тем, что его условно можно считать «оптимизационным». Объединяет то, что оба исследуют поведение рациональных агентов, и равновесия игры, как правило, являются устойчивыми исходами моделей динамики коллективного поведения [5, 6, 8–10, 13, 17 и др.].

В работах ряда авторов отражены разные аспекты применения моделей адаптивных динамик в модели Курно. В работе [10] рассматривается модель Курно с частным случаем нелинейных функций затрат агентов и неполной информированностью агентов о затратах конкурентов. Однако для модели динамики коллективного поведения не приведено доказательство о сходимости, есть только результаты расчетов, иллюстрирующих, что в некоторых случаях разноинформированные агенты могут в динамике (за счет повторения игры) прийти к истинному информационному равновесию. В работе [8] для модели Курно с квадратичными функциями издержек обсуждается применение адаптивных динамик к задаче рефлексивного разбиения агентов, но также не приводятся конкретные результаты по их сходимости. В [5] доказан ряд теорем о существовании равновесия в моделях адаптивных динамик, но вместе с тем во многих случаях эти теоремы не определяют области сходимости алгоритмов поиска равновесия («неподвижных точек»). В работе [15] показано, что в динамической, повторяемой игре с последовательным порядком игры (когда на каждом шаге игры только одна фирма делает ход) игроки приходят к равновесию Курно–Нэша. Для рынка однородного товара проблемы вычисления равновесия и сходимости адаптивных механизмов к равновесию Курно–Нэша изучались также в работе [6]. В общих предположениях доказана такая сходимость для непрерывного адаптивного процесса. В [7] для случая линейных функций спроса и издержек проводится анализ влияния на сходимость к равновесию Курно–Нэша процессов стратегических рефлексивных игр различных порядков. Процессы рефлексии численно моделируются с помощью рекуррентных соотношений, в качестве которых рассматриваются функции реакции фирм. В статье [4] приводится алгоритм численного нахождения точки равновесия и рассматриваются условия его сходимости для достаточно общей модели рынка с однородным товаром, в рамки которой укладываются как частные случаи модели Курно и Штакельберга. Предлагаемый итерационный процесс направлен на нахождение устойчивой стационарной точки динамической системы, задаваемой дифференциальным уравнением. В [11] представлено исследование по оценке скорости сходимости в дискретном времени адаптивных траекторий к положению равновесия системы с большим числом целенаправленных агентов при предположениях, что точка равновесия существует, единственна и траектории сходятся к этой точке. В статье [12] на примере олигополии Курно рассматриваются модели самостоятельной адаптации агентов к изменяющимся условиям на основе наблюдений за внешней средой, действиями других агентов и результатами их деятельности. Предполагается, что каждый агент наделяет оппонента той же информированностью, какой обладает он сам, а сами агенты различаются лишь информированностью о состоянии природы. Для частного случая иллюстрируется сходимость действий агентов и сходимость оценок агентами состояния природы. В монографии [18] рассматриваются вопросы реакции фирм по Курно и по Штакельбергу, сходимость динамического процесса анализируется в дискретном времени с учетом «хаотичности» поведения фирм, что качественно отличает его от рассматриваемых авторами настоящей статьи моделей процессов коллективного поведения.

В данной статье рассмотрена теоретико-игровая модель конкурентного рынка, характерной особенностью которого является линейный вид функций затрат агентов и обратной функции спроса [1–3, 7, 14, 16 и др.]. В игре агенты выбирают действия однократно, одновременно и независимо. Игра повторяется. Будем также полагать, что агенты априори имеют неверные исходные представления о затратах других агентов и могут от игры к игре на основе модели динамики коллективного поведения изменять свои действия и представления с целью прийти к истинному информационному равновесию – положению равновесия с истинными значениями затрат агентов. Будут рассмотрены две модели поведения агентов на рынке: 1) все агенты действуют по Курно; 2) первый агент действует по Штакельбергу, остальные – по Курно.

2. Базовая модель конкурентного рынка

Рассматривается конкурентный рынок однородного товара, состоящий из n фирм-агентов, которые непосредственно занимаются доведением товаров (услуг) до потребителей.

Под действием i-го агента q_i будем понимать выбор объема оказываемых агентом услуг, объема реализованного товара населению и бизнесу или объема произведенного и реализованного на рынке товара (услуги). Полагаем также, что любое предложение агента на рынке будет реализовано. Агент реализует товар (услугу) потребителю по цене p. Величина выручки (дохода) агента составляет pq_i. Формально интересы фирмы-агента можно записать в виде целевых установок на максимизацию собственной прибыли:

(1) $\Pi_i(p(Q), q_i) = p(Q)q_i - \phi_i(q_i) \to \max_{q_i}, \quad i = 1, \ldots, n.$

Рынок товара (услуг) традиционно описывается невозрастающей функцией спроса. В выражении (1) используется обратная функция спроса, т.е. функция цены $p(Q)$, которая складывается на рынке при общем объеме предложения на рынке товара (услуг) $Q=\sum_{i=1}^{n} q_i$. Учитывается, что p и Q связаны взаимно однозначной зависимостью, а технически удобнее в качестве аргумента рассматривать Q.

Полагаем, что цена продукции и затраты субъектов определяются следующими выражениями:

(2) $p(Q)=a-bQ, \qquad \phi_i(q_i)=c_i q_i+d_i, \quad i = 1, \ldots, n.$

Здесь цена продукции – линейная функция общего объема выпуска агентами, т.е. цена не является фиксированной: она определяется общим уровнем предложения на рынке, а агенты могут наблюдать лишь сложившиеся цены на рынке; издержки фирм $\phi_i(q_i)$ являются также линейными функциями, зависящими только от объема выпуска самого агента.

Используемая здесь модель имеет простой, но адекватный вид для описания достаточно широкого разнообразия конкурентных систем. Важное достоинство приведенной базовой модели состоит также в том, что при обычных для моделей олигополии предположениях о линейности функций затрат и обратной функции спроса, дает возможность аналитического представления и исследования решения. Поэтому она является конструктивной для получения конкретных результатов, их содержательной интерпретации и допускает различные модификации [1–3, 6, 7, 14, 16 и др.].

Оптимальный объем активности фирмы-агента определяется условием $\partial\Pi_i / \partial q_i = 0$, из которого с учетом (2) следует равенство

(3) $$\frac{\partial p}{\partial q_i}=\frac{1}{q_i}\left(c_i-p\right).$$

Далее имеем $\dfrac{\partial p}{\partial q_i}=-b\cdot\dfrac{\partial Q}{\partial q_i}=\dfrac{1}{q_i}\cdot(c_i-a+b\cdot Q)$ или $1+\dfrac{\partial Q_{-i}}{\partial q_i}=\dfrac{1}{q_i}\cdot h_i-1-\dfrac{1}{q_i}\cdot Q_{-i}$, где использованы обозначения:

(4) $$h_i=\frac{a-c_i}{b},$$

(5) $Q_{-i} = \sum_{j \neq i} q_j$.

Окончательно получаем

(6) $q_i = \dfrac{h_i - Q_{-i}}{2 + \dfrac{\partial Q_{-i}}{\partial q_i}}$ для $i = 1, \ldots, n$.

В базовой модели полагаем, что агенты не кооперируются друг с другом. Однако наличие конкуренции между агентами за максимальную прибыль и долю рынка определяет необходимость для каждого агента принимать во внимание поведение агентов-конкурентов.

3. Модель рынка Курно и коллективное поведение

Предположение Курно относительно объемов выпуска сводится к тому, что каждая фирма действует так, как, будто она не ожидает от своих конкурентов изменения объемов выпуска, даже если она сама сделает это.

Формально предположение Курно можно записать в виде условий [1–3, 7 и др.]

(7) $\dfrac{\partial Q_{-i}}{\partial q_i} = 0, \qquad i = 1, \ldots, n.$

Тогда из равенства (6) следует $q_i = \dfrac{h_i - Q_{-i}}{2}$, или

(8) $q_i = h_i - Q, \qquad i = 1,\ldots, n.$

Суммируя по индексу $i = 1, \ldots, n$ левые и правые части полученных равенств (8), имеем: $\sum_{i=1}^{n} q_i = \sum_{i=1}^{n} h_i - nQ,$ или $Q = \sum_{i=1}^{n} h_i - nQ,$ и в итоге $Q = \dfrac{1}{n+1} \cdot \sum_{i=1}^{n} h_i$.

Далее согласно (8) получаем активность (действие) агента, которая рассчитывается по формуле:

(9) $q_i = \dfrac{1}{(n+1)b}\left(a + \sum_{j=1}^{n} c_j - (n+1)c_i\right), \; i = 1, \ldots, n.$

Таким образом, если агенты имеют правильные представления о предельных издержках конкурентов, то по (9) можно найти такой вектор действий (активностей) (q_1, q_2, …, q_n), который будет являться истинным стабильным информационным равновесием – равновесием Курно–Нэша.

Согласно (8) также имеем

(10) $c_i = (1-k)(a - b(Q + q_i)), \ \ i = 1,\ldots, n.$

Агенты, выбирая свои действия, могут иметь неверные исходные представления о предельных издержках других агентов. Оказывается, что в этом случае агенты, наблюдая выбираемые действия, могут в динамике прийти к истинному информационному равновесию.

Здесь и в следующем разделе для построения такой динамики будем использовать *модель индикаторного поведения*, являющуюся наиболее распространенной моделью *теории коллективного (группового) поведения* [5, 6, 8–10, 11, 13, 17].

Приведем для рынка Курно динамическую процедуру уточнения представлений агентов о затратах конкурентов, использующую модель индикаторного поведения.

1. Каждый из агентов независимо от других рассчитывает свое действие (q_i^{t-1}), которое максимизировало бы его прибыль, подставляя в (9) свои собственные предельные издержки (c_i) и свои последние представления о предельных издержках других агентов (c_{ij}^{t-1}), t = 1, 2, … . При этом расчете учитывается, что свои собственные предельные издержки он знает точно, т.е. $c_{ii}^{t-1} = c_i$ и

(11) $q_i^{t-1} = \dfrac{1}{(n+1)b}\left(a + \sum_{j=1}^{n} c_{ij}^{t-1} - (n+1)c_i\right), \ \ i = 1, \ldots, n.$

Примечание: полагаем, что в равновесии Курно и в процедуре уточнения представлений участвуют только конкурентоспособные агенты, т.е. для которых в формуле (9) выполнено условие $q_i > 0$ [7]. Действия агентов становятся известными конкурентам в следующем t-м периоде, агентам полностью доступна информация о параметрах a, b цены и числе агентов n на рынке. Также полагаем, что если в формуле (11) начальные представления о предельных издержках других агентов (c_{ij}^0) у некоторого i-го агента таковы, что $q_i^0 \le 0$, то этот агент не уходит с рынка и использует собственные возможности их уточнения так, чтобы получить $q_i^0 > 0$.

2. Используя полученный в п. 1 наблюдаемый вектор действий агентов (q_1^{t-1}, q_2^{t-1}, …, q_n^{t-1}) и полагая, что в текущем t-м периоде все агенты выберут те же действия, как и в предыдущем ($t-1$)-м периоде, каждый i-й агент рассчитывает свои текущие представления о предельных издержках w_j^{t-1} конкурентов ($j \neq i$, $j = 1, \ldots, n$) из условия максимизации его целевой функции

(12) $w_j^{t-1} = a - b(\sum_{i=1}^{n} q_i^{t-1} + q_j^{t-1})$.

Эти представления будут одинаковы для разных агентов, поскольку все они наблюдают одни и те же действия. Отметим, что формула (12) строится по аналогии с формулой (10) и определяет предельные издержки агентов для равновесного по Курно состояния рынка в ($t-1$)-м периоде (т.е. получается из равенства нулю выражения для производной прибыли агента по объему его выпуска с учетом условия (7)). Другими словами, вектор объемов выпуска (q_1^{t-1}, q_2^{t-1}, …, q_n^{t-1}) определяет *текущее* (в ($t-1$)-м периоде) *информационное равновесие*, так как отражает рациональное поведение агентов. Каждый из них стремится выбором собственного выпуска (q_i^{t-1}) максимизировать свою целевую функцию (1) при предположении Курно (7) о действиях других агентов в рамках своих текущих представлений (w_j^{t-1}) об их предельных издержках и имеющейся у него достоверной информации о параметрах функции спроса (a, b), а также своей функции затрат (c_i, d_i). *Истинным информационным равновесием* будет являться вектор (q_1, q_2, …, q_n), который соответствует правильным представлениям каждого агента о предельных издержках своих конкурентов. Он определяется выражением (9) и является равновесием Курно–Нэша.

3. В соответствии с моделью индикаторного поведения каждый i-й агент изменяет свои представления за предыдущий ($t-1$)-й период о предельных издержках j-го агента, делая от них шаг по направлению к текущим значениям равновесных издержек w_j^{t-1} по формуле

(13) $c_{ij}^{t} = c_{ij}^{t-1} + \gamma_i^t (w_j^{t-1} - c_{ij}^{t-1})$,

где $\gamma_i^t \in [0;1]$ – параметры, определяющие величины шагов.

Затем процесс повторяется с п.1.

Параметры γ_i^t играют большую роль в вопросах сходимости траекторий к положению равновесия. Если с ростом времени γ_i^t слишком быстро стремятся к нулю, то агенты могут сходиться к положению, отличному от равновесного; а если $\gamma_i^t \equiv 0$, то агенты могут стоять на месте. Как в том, так и другом случае агенты могут не достигнуть цели. Чтобы исключить эти случаи и можно было говорить о сходимости, следует к ограничениям $\gamma_i^t \in [0;1]$ ввести дополнительные ограничения [5, 13]. Эти вопросы для исследуемых в статье процессов рассмотрены отдельно в разделе 5.

В проведенных ниже численных примерах мы полагаем, что агенты делают одинаковые шаги, равные $\gamma_i^t \equiv 0{,}5$. Приведенные иллюстрации указывают на достаточно быструю сходимость соответствующих процедур при таких значениях параметров.

Кроме того, пусть в иллюстративном численном примере $n = 2$; $b = 0{,}1$; $a = 100$; $c_1 = c_2 = 10$.

На рис. 1–3 приведены соответствующие этим данным графики динамики представлений агентов, действующих по Курно.

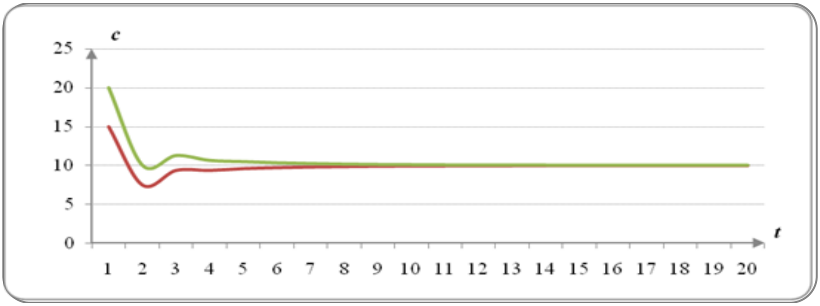

Рис.1. Агенты первоначально переоценивают предельные издержки друг друга ($c_{21} = 20$ *и* $c_{12} = 15$)

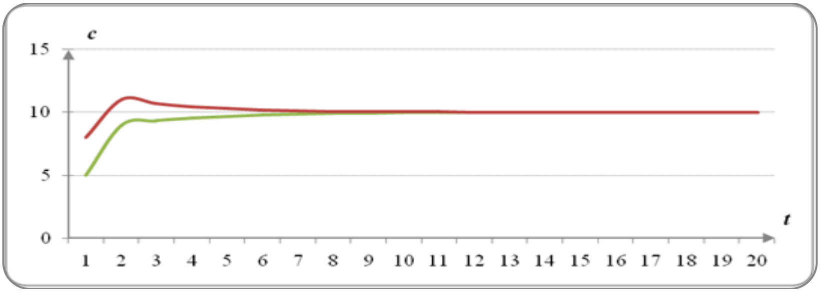

Рис.2. Агенты первоначально недооценивают предельные издержки друг друга (c_{21} = 8 *и* c_{12} = 5)

Процесс на рис. 1 и рис. 2 уже после первого шага приобретает монотонный характер.

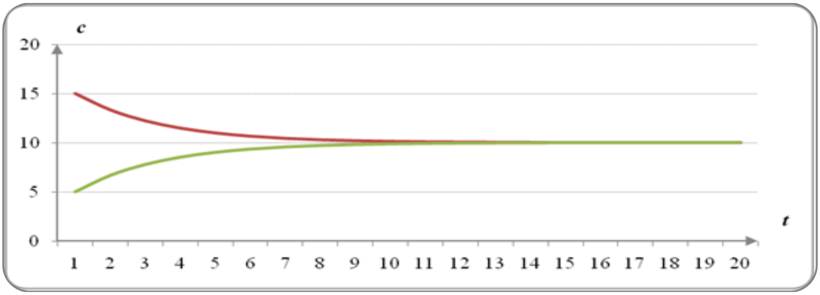

Рис.3. Второй агент первоначально переоценивает предельные издержки первого, а первый недооценивает предельные издержки второго (c_{21} = 15 *и* c_{12} = 5)

4. Модель рынка Курно с агентом Штакельберга и коллективное поведение

Один из агентов занимает лидирующее положение среди остальных агентов так, что он, выбирая свою активность (объем выпуска), точно знает реакцию (уровень активности) на его решение остальных агентов. Агента, выбирающего свои действия по такому правилу, называют фирмой Штакельберга. Остальные агенты, как и раньше, максимизируют собственную прибыль, основываясь на предположении Курно о неменяющейся активности других агентов. Для определенности будем полагать, что по Штакельбергу действует первый агент.

Для формального определения агента Штакельберга рассмотрим выражение (6) оптимального по критерию максимума прибыли объема его выпуска

$$q_1 = \frac{h_1 - Q_{-1}}{2 + \dfrac{\partial Q_{-1}}{\partial q_1}}.$$

Будем исходить из следующих предположениях о поведении агента. Он точно знает параметры функции спроса, своей функции затрат и функций затрат других агентов. Придерживается также гипотезы о том, что другие агенты будут действовать по Курно. Поэтому может рассчитать их общий равновесный объем выпуска, а также скорость изменения их общего объема выпуска в зависимости от изменения его собственного объема выпуска q_1. В соответствии с данными предположениями о поведении агента Штакельберга для модели (1)–(2) эта скорость будет равна [1–4, 7 и др.]

(14) $$\frac{\partial Q_{-1}}{\partial q_1} = -\frac{n-1}{n}.$$

Тогда $q_1 = \dfrac{h_1 - Q_{-1}}{2 - \dfrac{n-1}{n}}$, или $q_1 = \dfrac{n \cdot (h_1 - Q + q_1)}{n+1}$,

(15) $$q_1 = n \cdot h_1 - n \cdot Q.$$

Остальными агентами ($i = 2, \ldots, n$), действующими по Курно, игнорируются изменения, вносимые в общий объем выпуска другими агентами, т.е. имеют место условия (7).

Суммируя левые и правые части равенств (7) по $i = 2, \ldots, n$, а затем с (15), получаем: $Q = (n-1) \cdot h_1 + \sum_{i=1}^{n} h_i - (2n-1) \cdot Q$. Используя ранее введенные обозначения для h_1 и h_i, получаем формальное выражение для Q:

$$Q = \frac{1}{2nb} \cdot \left((2n-1)a - \sum_{i=1}^{n} c_i + (n-1)c_1\right),$$

Тогда по (15) и (7) имеем

(16) $q_1 = \frac{1}{2b} \cdot \left(a + \sum_{i=1}^{n} c_i - (n+1)c_1\right)$;

(17) $q_i = \frac{1}{2nb} \cdot \left(a + \sum_{j=1}^{n} c_j - 2nc_i + (n-1)c_1\right)$, $i = 2, \ldots, n$.

По (14) также имеем

(18) $c_1 = a - b(Q + q_1 / n)$.

Предельные издержки c_i остальных агентов ($i = 2, \ldots, n$) вычисляются по формуле (10).

Для модели рынка Курно с агентом Штакельберга модель динамики уточнения представлений агентов об издержках конкурентов имеет особенности. В модели динамики лидеру точно известны предельные издержки всех участников рынка. Остальные агенты априори не знают точных значений издержек других агентов, в том числе первого агента-лидера. Соответствующая процедура уточнения представлений включает следующую последовательность шагов:

1. Первый агент, зная точные значения собственных предельных издержек и предельных издержек других агентов, рассчитывает по формуле (16) свое действие (q_1), максимизирующее его прибыль.

2. Остальные агенты независимо от других рассчитывают свои действия (q_i^{t-1}), которые максимизировали бы их прибыль, подставляя в (17) свои собственные предельные издержки и свои последние представления c_{ij}^{t-1} о предельных издержках других агентов ($t = 1, 2, \ldots$; $i = 2, \ldots, n$; $j = 1, \ldots, n$). Также при расчете учитывается, что свои собственные предельные издержки агенты знают точно, т.е. $c_{ii}^{t-1} = c_i$ и

(19) $q_i^{t-1} = \frac{1}{2nb}\left(a + \sum_{j=1}^{n} c_{ij}^{t-1} - 2nc_i + (n-1)c_{i1}^{t-1}\right)$, $i = 2, \ldots, n$.

Примечание: полагаем, что в процедуре уточнения представлений участвуют только конкурентоспособные агенты, т.е. для которых в формулах (16) и (17) выпуск больше нуля [7]. Действия агентов становятся известными конкурентам в следующем t-м периоде, агентам полностью доступна информация о параметрах a, b цены и числе агентов n на рынке. Также полагаем, что если в формуле (19) начальные представления о предельных издержках других агентов (c_{ij}^0) у некоторого i-го агента таковы, что $q_i^0 \le 0$, то этот агент не уходит с рынка и использует собственные возможности их уточнения так, чтобы получить $q_i^0 > 0$.

3. Используя, полученный в п. 1 и п. 2 наблюдаемый вектор действий агентов (q_1, q_2^{t-1}, …, q_n^{t-1}), и полагая, что в текущем t-м периоде все агенты выберут те же действия, как и в предыдущем (t – 1)-м периоде, i-й агент Курно (i = 2, …, n) рассчитывает свои текущие представления w_{ij}^{t-1} о предельных издержках других агентов из условия максимизации его целевой функции. Представления будут одинаковы для разных агентов, поскольку все они наблюдают одни и те же действия, т.е. $w_{ij}^{t-1} = w_j^{t-1}$ при $i \ne j$.

Тогда расчет текущих представлений агентов Курно о предельных издержках первого агента выполняется по формуле

$$(20)\quad w_1^{t-1} = a - b(\textstyle\sum_{i=2}^{n} q_i^{t-1} + q_1 + q_1 / n).$$

Соответственно, расчет текущих представлений каждого i-го агента Курно о предельных издержках w_j^{t-1} остальных агентов ($i \ne j$) осуществляется по формуле

$$(21)\quad w_j^{t-1} = a - b(\textstyle\sum_{i=2}^{n} q_i^{t-1} + q_1 + q_j^{t-1}),\ \ j = 2, \dots, n.$$

Вектор объемов выпуска (q_1, q_2^{t-1}, …, q_n^{t-1}) определяет *текущее* (в (t – 1)-м периоде) *информационное равновесие*, так как отражает рациональное поведение агентов. Первый агент стремится выбором собственного объема выпуска (q_1) максимизировать свою прибыль, подставляя в её выражение (1) объемы выпуска других агентов, которые оказываются рациональными с точки зрения их поведения по Курно, при условии его полной информированности о других агентах и параметрах рынка. Каждый из остальных агентов стремится выбором собственного объема выпуска (q_i^{t-1}) максимизировать свою целевую функцию (1) при предположении Курно (7) о действиях других агентов в рамках своих текущих представлений (w_j^{t-1}) об их предельных издержках и имеющейся у него достоверной информации о параметрах функции спроса (a, b), своей функции затрат (c_i, d_i). *Истинным информационным равновесием* будет являться вектор (q_1, q_2, …, q_n), который соответствует правильным представлениям каждого агента о предельных издержках своих конкурентов. Он определяется выражениями (16), (17) и является равновесием Штакельберга.

4. Каждый i-й агент, исключая первого, изменяет свои представления за предыдущий $(t-1)$-й период о предельных издержках j-го агента, делая от них шаг по направлению к текущим равновесным значениям w_j^{t-1} по формуле

(22) $c_{ij}^t = c_{ij}^{t-1} + \gamma_i^t (w_j^{t-1} - c_{ij}^{t-1})$,

где $\gamma_i^t \in [0; 1]$– параметры, определяющие величины шагов($i = 2, \ldots, n$).

Затем процесс повторяется с п. 2.

На рис. 4 и 5 приведены графики динамики представлений второго агента, который действует по Курно. Первый агент действует по Штакельбергу, на графике ему соответствует горизонтальная линия. В расчетах мы полагаем, что $n = 2$; $b = 0{,}1$; $a = 100$; $c_1 = c_2 = 10$ и $\gamma_2^t \equiv 0{,}5$.

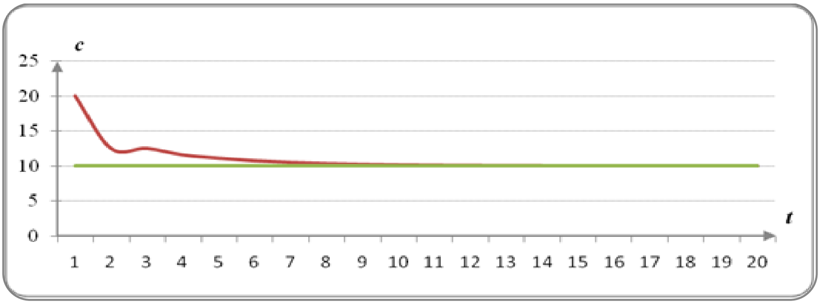

Рис. 4. Второй агент первоначально переоценивает предельные издержки лидера ($c_{21} = 20$ *и* $c_{12} = c_2 = 10$)

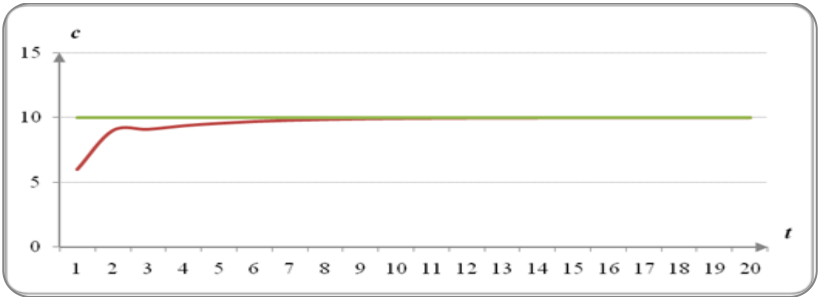

Рис. 5. Второй агент первоначально недооценивает предельные издержки лидера (c_{21} = 6 и $c_{12} = c_2$ = 10)

5. Приложение

Приложение посвящено выводу и обсуждению необходимых и достаточных условий для сходимости динамических процедур уточнения представлений агентов о предельных издержках конкурентов к истинному положению равновесия.

Как и выше, каждую модель рынка рассмотрим отдельно.

5.1. МОДЕЛЬ РЫНКА КУРНО

Из формулы(12) имеем

$$q_i^t = \frac{1}{(n+1)b}\left(a + \sum_{j=1}^n w_j^t - (n+1)w_i^t\right), \quad i = 1, \ldots, n.$$

С учетом этой формулы и (11) получаем следующие преобразования формальных выражений для объемов выпуска

$$q_i^t = \gamma_i^{t+1} q_i^t + \left(1-\gamma_i^{t+1}\right) q_i^t =$$

$$= \frac{\gamma_i^{t+1}}{(n+1)b}\left(a + \sum_{j\neq i}^n w_j^t - n w_i^t\right) + \frac{1-\gamma_i^{t+1}}{(n+1)b}\left(a + \sum_{j\neq i}^n c_{ij}^t - n c_i\right) =$$

$$= \frac{1}{(n+1)b}\left(a + \sum_{j\neq i}^n \left(\gamma_i^{t+1}\cdot w_j^t + \left(1-\gamma_i^{t+1}\right)c_{ij}^t\right) - n c_i\right) + \frac{n\gamma_i^{t+1}\left(c_i - w_i^t\right)}{(n+1)b} =$$

$$= \frac{1}{(n+1)b}\left(a + \sum_{j\neq i}^n c_{ij}^{t+1} - n c_i\right) + \frac{n\gamma_i^{t+1}\left(c_i - w_i^t\right)}{(n+1)b} = q_i^{t+1} + \frac{n\gamma_i^{t+1}\left(c_i - w_i^t\right)}{(n+1)b}.$$

Таким образом, окончательно

(23) $q_i^t = q_i^{t+1} + \frac{n\gamma_i^{t+1}\left(c_i - w_i^t\right)}{(n+1)b}$.

Из формул (4) и (8) имеем $\frac{1}{b}\left(a - c_i\right) = Q + q_i$ и $\frac{1}{b}\left(a - w_i^t\right) = Q^t + q_i^t$, где обозначено $Q^t = \sum_{i=1}^n q_i^t$.

Тогда

(24) $Q^t + q_i^t + \frac{w_i^t}{b} = Q + q_i + \frac{c_i}{b} = \frac{a}{b}$.

Из (23) и (24) имеем

$$Q^t = Q^{t+1} + \frac{n\sum_{i=1}^n \gamma_i^{t+1}\left(c_i - w_i^t\right)}{(n+1)b},$$

$$Q^{t+1} = Q^t + \frac{w_i^t - w_i^{t+1}}{b(1-k)} + \frac{n\gamma_i^{t+1}\left(c_i - w_i^t\right)}{(n+1)b}.$$

Из последних двух равенств получаем:

$$w_i^{t+1} = w_i^t + \frac{n}{n+1}\left[\gamma_i^{t+1}\left(c_i - w_i^t\right) + \sum_{j=1}^n \gamma_j^{t+1}\left(c_j - w_j^t\right)\right];$$

(25) $w_j^{t+1} - w_i^{t+1} = w_j^t - w_i^t + \frac{n}{n+1}\left[\gamma_j^{t+1}\left(c_j - w_j^t\right) - \gamma_i^{t+1}\left(c_i - w_i^t\right)\right]$.

Ввиду того, что технически непросто получить в конечном виде аналитические оценки дополнительных ограничений на параметры γ_i^t, обеспечивающих в общем случае сходимость процессов к положению равновесия, вывод необходимых и достаточных условий сходимости будем проводить для частного случая, когда $\gamma_i^t \equiv \gamma$ (при i = 1, …, n и t = 1, 2, …,). Тогда из (25) следует, что

$$w_j^{t+1} - w_i^{t+1} = (1 - \frac{\gamma n}{n+1})(w_j^t - w_i^t) + \frac{\gamma n}{n+1}\left(c_j - c_i\right).$$

Последнее равенство приводится к виду

$$w_j^{t+1} - w_i^{t+1} = (1 - \frac{\gamma n}{n+1})^{t+1}(w_j^0 - w_i^0) +$$

$$+ \frac{\gamma n}{n+1}\left(c_j - c_i\right)\left[1 + (1 - \frac{\gamma n}{n+1}) + (1 - \frac{\gamma n}{n+1})^2 + \ldots + (1 - \frac{\gamma n}{n+1})^t\right] =$$

$$= (1 - \frac{\gamma n}{n+1})^{t+1}(w_j^0 - w_i^0) + \frac{\gamma n}{n+1}\left(c_j - c_i\right)\frac{\left(1 - (1 - \frac{\gamma n}{n+1})^t\right)}{1 - (1 - \frac{\gamma n}{n+1})} =$$

$$= (1 - \frac{\gamma n}{n+1})^{t+1}(w_j^0 - w_i^0) + \left(c_j - c_i\right) - \left(c_j - c_i\right)(1 - \frac{\gamma n}{n+1})^{t+1} =$$

$$= \left(c_j - c_i\right) + (1 - \frac{\gamma n}{n+1})^{t+1}(w_j^0 - c_j - w_i^0 + c_i).$$

Отсюда следует, что выполнение неравенства $\left|1 - \frac{\gamma n}{n+1}\right| < 1$ является необходимым и достаточным условием для того, чтобы разность равновесных представлений о предельных издержках любых двух агентов сходилась к разности их истинных издержек независимо от начальных представлений. Очевидно, что указанное неравенство будет выполнено при $\gamma \in (0; 1]$.

Продолжим исследование вопросов сходимости для данного частного случая. Обозначим $W^t = \sum_{i=1}^n w_i^t$ и $C = \sum_{i=1}^n c_i$. Из равенства, предшествующего равенству (25), получаем

$$W^{t+1} = W^t + n\sum_{i=1}^n \gamma_i^{t+1}\left(c_i - w_i^t\right) = (1 - n\gamma)W^t + n\gamma C.$$

Или

$$W^{t+1} = (1 - n\gamma)^{t+1}W^0 + n\gamma C\left[1 + (1 - n\gamma) + (1 - n\gamma)^2 + \ldots + (1 - n\gamma)^t\right] =$$

$$= (1 - n\gamma)^{t+1}W^0 + C - C(1 - n\gamma)^{t+1} = C + (1 - n\gamma)^{t+1}(W^0 - C).$$

Для сходимости совокупных равновесных представлений агентов к истинному значению их совокупных предельных издержек необходимо и достаточно, чтобы имело место неравенство $|1 - n\gamma| < 1$. Это неравенство будет выполнено только при условии $\gamma \in (0; 2/n)$.

Сходимость $w_i^t \to c_i$ следует из сходимости суммы сходящихся последовательностей, так как

$$nw_i^t = W^t + \sum_{j \neq i}^n \left(w_i^t - w_j^t\right) \to C + \sum_{j \neq i}^n \left(c_i - c_j\right) =$$

$$= C + (n-1)c_i - \sum_{j \neq i}^n c_j = C + nc_i - C = nc_i.$$

Отметим также, что при невыполнении условия $\gamma \in (0; 2/n)$ имеем $|1 - n\gamma| \geq 1$, и ряд W^t либо сходится к W^0 (при $|1 - \gamma n| = 1$), либо расходится (при $|1 - n\gamma| > 1$). Любой из этих случаев означает, что равновесные представления агентов о предельных издержках конкурентов не сходятся к их истинным значениям.

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Утверждение 1. В модели рынка Курно при $n > 1$ для того, чтобы динамическая процедура уточнения представлений агентов о предельных издержках конкурентов при равных значениях параметров $\gamma_i^t \equiv \gamma$ ($i = 1, \ldots, n$; $t = 1, 2, \ldots$,) сходилась к истинному положению равновесия Курно–Нэша независимо от начальных представлений, необходимо и достаточно выполнение условия $\gamma \in (0; 2/n)$.

В соответствующем иллюстративном примере данное условие утверждения 1 было выполнено, так как полагали $n = 2$ и $\gamma_i^t \equiv 0{,}5$. Из доказанного утверждения следует, что при $n = 2$ процедура будет сходиться для любых равных значений $\gamma \in (0, 1)$, что также было проверено в экспериментах.

5.2. МОДЕЛЬ РЫНКА КУРНО С АГЕНТОМ ШТАКЕЛЬБЕРГА

Аналогичный анализ проведем и для этой модели конкурентного рынка.

На рынке присутствуют агенты с разными принципами поведения, что определяет отличие процедур уточнения представлений агентов и анализа условий их сходимости.

При $i = 2, \ldots, n$ имеем следующие преобразования формальных выражений для объемов выпуска агентов Курно (с учетом равновесных (w_j^t) и неравновесных (c_{ij}^t) их представлений о предельных издержках конкурентов:

$$q_i^t = \gamma_i^{t+1} q_i^t + \left(1-\gamma_i^{t+1}\right) q_i^t = \frac{\gamma_i^{t+1}}{2nb}\left(a + \sum\nolimits_{j\neq i}^n w_j^t - (2n-1) w_i^t + (n-1) w_{i1}^t\right) +$$

$$+ \frac{1-\gamma_i^{t+1}}{2nb}\left(a + \sum\nolimits_{j\neq i}^n c_{ij}^t - (2n-1) c_i + (n-1) c_{i1}^t\right) == \frac{1}{2nb}\left(a + \right.$$

$$\left. + \sum\nolimits_{j\neq i}^n \left(\gamma_i^{t+1} \cdot w_j^t + \left(1-\gamma_i^{t+1}\right) c_{ij}^t\right) - (2n-1) c_i + (n-1)\left(\gamma_i^{t+1} w_{i1}^t + \left(1-\gamma_i^{t+1}\right) c_{i1}^t\right)\right) +$$

$$+ \frac{(2n-1)\gamma_i^{t+1}\left(c_i - w_i^t\right)}{2nb} = q_i^{t+1} + \frac{(2n-1)\gamma_i^{t+1}\left(c_i - w_i^t\right)}{2nb}.$$

Окончательно для агентов i ($i = 2, \ldots, n$)

$$(26)\quad q_i^t = q_i^{t+1} + \frac{(2n-1)\gamma_i^{t+1}\left(c_i - w_i^t\right)}{2nb}.$$

Также для агентов Курно из формул (4) и (8) имеем $\frac{1}{b}\left(a - c_i\right) = Q + q_i$ и $\frac{1}{b}\left(a - w_i^t\right) = Q^t + q_i^t$.

Поэтому

$$(27)\quad Q^t + q_i^t + \frac{w_i^t}{b} = Q + q_i + \frac{c_i}{b} = \frac{a}{b}.$$

Из (26) и (27) имеем

$$Q_{-1}^t = Q_{-1}^{t+1} + \frac{(2n-1)\sum_{i=2}^n \gamma_i^{t+1}\left(c_i - w_i^t\right)}{2nb},$$

$$Q^{t+1} = Q^t + \frac{w_i^t - w_i^{t+1}}{b} + \frac{(2n-1)\gamma_i^{t+1}\left(c_i - w_i^t\right)}{2nb}.$$

Здесь обозначено $Q_{-1}^t = \sum_{i=2}^n q_i^t$. Поскольку $q_1^t = q_1^{t+1} = q_1$, то $Q^t = Q^{t+1} + \frac{(2n-1)\sum_{i=2}^n \gamma_i^{t+1}\left(c_i - w_i^t\right)}{2nb}$ и следует равенство

$$(29)\quad w_i^{t+1} = w_i^t + \frac{2n-1}{2n}\left[\gamma_i^{t+1}\left(c_i - w_i^t\right) + \sum\nolimits_{j=2}^n \gamma_j^{t+1}\left(c_j - w_j^t\right)\right].$$

Из последнего равенства получаем

$$(30)\quad w_j^{t+1} - w_i^{t+1} = w_j^t - w_i^t + \frac{2n-1}{2n}\left[\gamma_j^{t+1}\left(c_j - w_j^t\right) - \gamma_i^{t+1}\left(c_i - w_i^t\right)\right].$$

Далее также рассмотрим частный случай, когда $\gamma_i^t \equiv \gamma$ для $i = 2, \ldots, n$ и $t = 1, 2, \ldots,$. Тогда следует, что

$$w_j^{t+1} - w_i^{t+1} = (1 - \frac{\gamma(2n-1)}{2n})^{t+1}(w_j^0 - w_i^0) +$$

$$+ \frac{\gamma(2n-1)}{2n}\left(c_j - c_i\right)\left[1 + (1 - \frac{\gamma(2n-1)}{2n})^1 + \ldots + (1 - \frac{\gamma(2n-1)}{2n})^t\right] =$$

$$= (1 - \frac{\gamma(2n-1)}{2n})^{t+1}(w_j^0 - w_i^0) + \frac{\gamma(2n-1)}{2n}\left(c_j - c_i\right)\frac{\left(1 - (1 - \frac{\gamma(2n-1)}{2n})^t\right)}{1 - (1 - \frac{\gamma(2n-1)}{2n})} =$$

$$= \left(c_j - c_i\right) + (1 - \frac{\gamma(2n-1)}{2n})^{t+1}(w_j^0 - w_i^0 - c_j + c_i).$$

Отсюда следует, что выполнение неравенства $\left|1 - \frac{\gamma(2n-1)}{2n}\right| < 1$ является необходимым и достаточным условием для того, чтобы разность равновесных представлений о предельных издержках любых двух агентов сходилась к разности их истинных издержек независимо от начальных представлений. Очевидно, что указанное неравенство будет выполнено при $\gamma \in (0; 1]$.

Из формулы (29) после суммирования по индексу $i = 2, \ldots, n$ получаем

$$W_{-1}^{t+1} = W_{-1}^t + \frac{2n-1}{2}\sum_{i=2}^n \gamma_i^{t+1}\left(c_i - w_i^t\right).$$

Продолжим исследование вопросов сходимости для частного случая, когда $\gamma_i^t \equiv \gamma$ ($i = 2, \ldots, n$; $t = 1, 2, \ldots,$). Тогда из предыдущего равенства получаем

$$W_{-1}^{t+1} = (1 - \frac{2n-1}{2}\gamma)W_{-1}^t + \frac{2n-1}{2}\gamma C_{-1}.$$

Здесь обозначено $W_{-1}^t = \sum_{i=2}^n w_i^t$ и $C_{-1} = \sum_{i=2}^n c_i$.

Далее имеем

$$W_{-1}^{t+1} = (1-\frac{2n-1}{2}\gamma)^{t+1}W_{-1}^{0} +$$
$$+\frac{2n-1}{2}\gamma C_{-1}\left[1+(1-\frac{2n-1}{2}\gamma)+(1-\frac{2n-1}{2}\gamma)^2+\ldots+(1-\frac{2n-1}{2}\gamma)^t\right]=$$
$$= C_{-1} + (1-\frac{2n-1}{2}\gamma)^{t+1}(W_{-1}^{0} - C_{-1}).$$

Для сходимости совокупных равновесных представлений агентов Курно к истинному значению их совокупных предельных издержек необходимо и достаточно, чтобы имело место неравенство $\left|1-\frac{2n-1}{2}\gamma\right|<1$. Это неравенство будет выполнено при $\gamma \in (0;\ 4/(2n-1))$.

Сходимость $w_i^t \to c_i$ при $i = 2, \ldots, n$ следует из сходимости суммы сходящихся последовательностей, так как $(n-1)w_i^t = W_{-1}^t + \sum_{j\neq i\neq 1}^{n}\left(w_i^t - w_j^t\right)$.

Теперь покажем сходимость $w_1^t \to c_1$. Из формулы (27) имеем $(n-1)Q^t + Q_{-1}^t + \frac{W_{-1}^t}{b(1-k)} = (n-1)Q + Q_{-1} + \frac{C_{-1}}{b(1-k)}$. Поскольку $q_1^t = q_1$, то получаем, что $nQ^t + \frac{W_{-1}^t}{b(1-k)} = nQ + \frac{C_{-1}}{b(1-k)}$.
Но $W_{-1}^t \to C_{-1}$, поэтому $Q^t \to Q$.

Для первого агента из (4) и (15) имеем формулу

$$Q + \frac{q_1}{n} + \frac{c_1}{b(1-k)} = Q^t + \frac{q_1^t}{n} + \frac{w_1^t}{b(1-k)} = \frac{a}{b}.$$

Из нее следует $Q^t - Q = \frac{c_1 - w_1^t}{b(1-k)}$. Поэтому $w_1^t \to c_1$, что и требовалось доказать.

При невыполнении условия $\gamma \in (0;\ 4/(2n-1))$ будем иметь неравенство $\left|1-\frac{2n-1}{2}\gamma\right|\geq 1$, и равновесные представления агентов Курно о предельных издержках конкурентов не могут сходиться к их истинным значениям, так как ряд W_{-1}^t либо сходится к W_{-1}^{0} (при $\left|1-\frac{2n-1}{2}\gamma\right|=1$) либо расходится (при $\left|1-\frac{2n-1}{2}\gamma\right|>1$).

Таким образом, было доказано следующее утверждение.

Утверждение 2. В модели рынка Курно с агентом Штакельберга при $n > 2$ для того, чтобы динамическая процедура уточнения представлений агентов о предельных издержках конкурентов при равных значениях параметров $\gamma_i^t \equiv \gamma$ ($i = 2, \ldots, n$; $t = 1, 2, \ldots$,) сходилась к истинному положению равновесия Штакельберга независимо от начальных представлений, необходимо и достаточно выполнение условия $\gamma \in (0; 4/(2n-1))$.

Примечание: при $n = 2$ необходимое и достаточное условие, очевидным образом, принимает вид $\gamma \in (0; 1]$.

В соответствующем иллюстративном примере данное условие было выполнено, так как полагали $n = 2$ и $\gamma_i^t \equiv 0{,}5$. Численные эксперименты на модели рынка при $n > 2$ и различных равных значениях параметра γ подтвердили справедливость данного утверждения для сходимости процедуры.

6. Заключение

В статье рассматриваются теоретические основы возможности и целесообразности применения моделей теории игр и теории коллективного поведения для исследования процессов достижения равновесия рациональными агентами на конкурентном рынке в условиях неполной информированности и отсутствия общего знания.

В классе линейных функций спроса и затрат агентов рассмотрены две модели поведения на рынке: 1) все агенты действуют по Курно; 2) первый агент действует по Штакельбергу, остальные – по Курно.

В этих моделях действия агентов существенным образом зависят от взаимных представлений агентов относительно затрат других агентов. Показано, что агенты, априори не располагая соответствующей достоверной информацией о предельных издержках конкурентов, могут, наблюдая выбираемые агентами действия, при повторении игры прийти к положению равновесию с истинными значениями предельных издержек агентов.

Для этих моделей приведена единая динамическая процедура уточнения представлений агентов о предельных издержках конкурентов, использующая подходы теории коллективного (группового) поведения. Приведены условия на параметры динамической процедуры с «равными» шагами, необходимые и достаточные для ее сходимости к положению равновесия с истинными значениями предельных издержек агентов. Обсуждается выполнимость этих условий для каждой из моделей. Приведены иллюстративные численные примеры.

Литература

1. АЛГАЗИН Г.И., АЛГАЗИНА Д.Г. *Моделирование многоагентных франчайзинговых систем*. – Барнаул: АлтГУ, 2009. – 91 с.
2. АЛГАЗИН Г.И., АЛГАЗИНА Д.Г. *Моделирование сетевого взаимодействия на конкурентных рынках* // Управление большими системами. – 2013. – Вып. 43. – С. 172–216.
3. АЛГАЗИН Г.И.,АЛГАЗИНА Ю.Г. *Моделирование поведения экономических агентов в системе «производитель–посредник–конкурентный рынок»* // Управление большими системами. –2011. –№32. –С. 83–108.
4. БУЛАВСКИЙ В.А., КАЛАШНИКОВ В.В. *Метод однопараметрической прогонки для исследования состояния равновесия* // Экономика и математические методы. – 1994. – Т. 30, №4. – С. 129–138.
5. ВАСИН А.А. *Модели динамики коллективного поведения.* – М.: МГУ, 1989. –156с.
6. ВАСИН А.А., ВАСИНА П.А., РУЛЕВА П.Ю. *Об организации рынков однородных товаров* // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2007. – №1. – С. 98–112.

7. ДЮСУШЕ О.М. *Статическое равновесие Курно–Нэша и рефлексивные игры олигополии: случай линейных функций спроса и издержек* // Экономический журнал ВШЭ. – 2006.– №1. – С. 3–32.
8. КОРЕПАНОВ В.О. *Модели рефлексивного группового поведения и управления*. –М.: ИПУ РАН, 2011. –127с.
9. НОВИКОВ Д.А. *Модели стратегической рефлексии* // Автоматика и телемеханика. – 2012. – №1.– С. 3–18.
10. НОВИКОВ Д.А., ЧХАРТИШВИЛИ А.Г. *Модели рефлексивных игр в задачах управления эколого–экономическими системами* // Управление большими системами. –2015. –№55. –С. 362–372.
11. НОВИКОВ Д.А. *Динамика поведения систем с большим числом целенаправленных элементов* // Автоматика и телемеханика. – 1996. – №2.– С. 187–189.
12. НОВИКОВ Д.А. *Модели адаптации команд* //Управление большими системами. –2008. –№20. –С. 57–76.
13. ОПОЙЦЕВ В.И. *Равновесие и устойчивость в моделях коллективного поведения*.– М.: Наука, 1977. – 248 с.
14. HEGJI C.E., MOORE E.C. *On the Economics of Manufactures and Dealers: A Reexamination* // Southwestern Economic Review. – 2006. – P. 107–120.
15. KUKUSHKIN N.S. *Best Response Dynamics in Finite Games with Additive Aggregation* // Games and Economic Behavior. – 2004. – №48. – P. 94–110.
16. METZLER C., HOBBS B.S., PANG J.-S. *Nash – Cournot Equilibria in Power Markets on a Linearized DC network with Arbitrage: Formulations and Properties* // Networks and Spatial Economics. – 2003. – Vol. 3, №2. – P. 123–150.
17. NOVIKOV D., CHKHARTISHVILI A. *Reflexion and Control: Mathematical Models*. – Leiden: CRC Press, 2014. – 298 p.
18. PUU T. *Attractors, Difurcations, & Chaos: Nonlinear Phenomena in Economics*. – Berlin – Heidelberg, 2003. – 549 p.

INFORMATION EQUILIBRIUM IN DYNAMIC MODEL OF COLLECTIVE BEHAVIOR IN A COMPETITIVE MARKET

Gennady Algazin, Altai State University, Barnaul, Doctor of Science, professor (algaz46@yandex.ru).
Darya Algazina, Altai State University, Barnaul, Cand.Sc. associated professor (darya.algazina@mail.ru).

Abstract: *The article presents a dynamic model of reflexive behavior which provides a unified approach to description of interactions of Cournot/Stackelberg agents in a competitive market in the absence of common knowledge. The approach based on game theory and the theory of collective behavior with incomplete information. The model is a conventional Cournout output competition with linear costs and the inverse demand function. Rational agents in the model have incorrect initial beliefs about marginal costs of their competitors. We investigate two cases: (1) all agents act simultaneously and (2) first agent is a Stackelberg leader. We study repeated interactions when the agents dynamically update their actions and beliefs based on observed actions of their competitors. A unified procedure of beliefs update is provided for both cases. Necessary and sufficient conditions for the convergence of dynamic processes to the equilibrium with true beliefs are obtained. The results are illustrated with numerical examples.*

Keywords: incomplete information, information equilibrium, collective behavior, Cournout competitive market, marginal costs, Stackelberg leader.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии В.И. Зоркальцевым.

Поступила в редакцию 25.10.2016.
Опубликована 30.11.2016.