

**Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН**

УПРАВЛЕНИЕ БОЛЬШИМИ СИСТЕМАМИ

***Выпуск 64
Ноябрь 2016***

**СБОРНИК
ТРУДОВ**

ISSN 1819-2467

Регистрационный номер Эл. №ФС77-44158 от 09 марта 2011 г.

Москва – 2016

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова

**УПРАВЛЕНИЕ
БОЛЬШИМИ
СИСТЕМАМИ**

СБОРНИК ТРУДОВ

Выпуск 64

Москва – 2016

КООРДИНАЦИОННЫЙ СОВЕТ

Академики РАН: Васильев С.Н., Емельянов С.В., Куржанский А.Б., Федосов Е.А., Черноушко Ф.Л.; члены-корреспонденты РАН: Желтов С.Ю., Каляев И.А., Пархоменко П.П., Попков Ю.С.; д-ра техн. наук: Дорофеев А.А., Кузнецов О.П., Кульба В.В., Лотоцкий В.А., Павлов Б.В., Поляк Б.Т., Рутковский В.Ю.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор: член-корр. РАН Новиков Д.А. **Зам. главного редактора:** д-р физ.-мат. наук Губко М.В. **Отв. секретарь:** канд. техн. наук Базенков Н.И. **Редактор:** канд. техн. наук Квинто Я.И.

Д-ра техн. наук: проф. Алескеров Ф.Т. (ГУ ВШЭ), проф. Алчинов А.И. (ИПУ РАН), проф. Андриевский Б.Р. (ИПМ РАН), проф. Афанасьев В.Н. (МИЭМ), проф. Бахтадзе Н.Н. (ИПУ РАН), проф. Бурков В.Н. (ИПУ РАН), проф. Вишневский В.М. (ИПУ РАН), Галаев А.А. (ИПУ РАН), д-р физ.-мат. наук проф. Ерешко Ф.И. (ВЦ РАН), д-ра техн. наук Зоркальцев В.И. (ИСЭМ СО РАН), проф. Калашников А.О. (ИПУ РАН), проф. Калянов Г.Н. (ГУ ВШЭ), проф. Каравай М.Ф. (ИПУ РАН), д-р экон. наук, проф. Ключков В.В. (ИПУ РАН), д-ра техн. наук, Коргин Н.А. (ИПУ РАН), проф. Курдюков А.П. (ИПУ РАН), д-ра физ.-мат. наук, проф. Кушнер А.Г., проф. Лазарев А.А. (МФТИ), д-ра техн. наук: проф. Лебедев В.Г. (ИПУ РАН), проф. Мандель А.С. (ИПУ РАН), д-р биол. наук проф. Михальский А.И., д-р физ.-мат. наук, проф. Непейвода Н.Н. (ИПС РАН), д-р экон. наук, проф. Нижегородцев Р.М. (ИПУ РАН), д-ра техн. наук: проф. Орлов А.И. (МГТУ), д-ра физ.-мат. наук: проф. Рапопорт Л.Б. (ИПУ РАН), проф. Райгородский А.М. (МГУ), проф. Савватеев А.В. (РЭШ), д-ра техн. наук: проф. Самуйлов К.Е. (РУДН), проф. Сидельников Ю.В. (МАИ), Совлуков А.С. (ИПУ РАН) д-ра физ.-мат. наук: проф. Соловьев С.Ю. (МГУ), проф. Угольницкий Г.А. (ЮФУ), проф. Уткин В.А. (ИПУ РАН), проф. Хоботов Е.Н. (МГТУ), д-ра физ.-мат. наук: доцент Чеботарев П.Ю. (ИПУ РАН), проф. Чхартишвили А.Г. (ИПУ РАН), проф. Щербаков П.С. (ИПУ РАН).

РЕГИОНАЛЬНЫЕ РЕДАКЦИОННЫЕ СОВЕТЫ

Арзамас – д-р физ.-мат. наук проф. Пакшин П.В. **Волгоград** – д-ра физ.-мат. наук: проф. Воронин А.А., проф. Лосев А.Г. (ВолГУ); **Воронеж** – д-р техн. наук, проф. Баркалов С.А., д-р физ.-мат. наук, проф. Головинский П.А. (ВГАСУ), д-р техн. наук, проф. Подвальный С.Л. (ВГТУ); **Иркутск** – академик РАН Бычков И.В., д-р физ.-мат. наук, проф. Лакеев А.В. (ИДСТУ СО РАН); **Казань** – д-р физ.-мат. наук, проф. Маликов А.И., д-р техн. наук, проф. Сиразетдинов Р.Т. (КГТУ-КАИ); **Липецк** – д-ра техн. наук: проф. Погодаев А.К., Сараев П.В. (ЛГТУ); **Самара** – д-ра экон. наук: проф. Богатырев В.Д., проф. Гераськин М.И., д-р техн. наук, проф. Засканов В.Г. (СГАУ); **Петрозаводск** – д-р физ.-мат. наук, проф. Мазалов В.В., д-р техн. наук, доц. Печников А.А. (ИПМИ КарНЦ РАН); **Санкт-Петербург** – д-р физ.-мат. наук: проф. Петросян Л.А. (СПбГУ), д-р техн. наук проф. Фуртат И.Б. (ИПМ РАН); **Старый Оскол** – д-р техн. наук, проф. Еременко Ю.И. (СТИ).

Адрес редакции: 117997, г. Москва, ул. Профсоюзная, д. 65.

Адрес в интернете: ubs.mtas.ru.

СОДЕРЖАНИЕ

Системный анализ

Пьяных А.И.

*Многошаговая модель биржевых торгов
с элементами переговоров и счетным множеством
состояний* 6

Резчиков А.Ф., Кушников В.А.,

Иващенко В.А. и др.

*Анализ и прогнозирование характеристик
безопасности авиационных транспортных систем
на основе уравнений системной динамики* 27

Математическая теория управления

Емельянова Ю.П.

*Стабилизация нелинейных систем
Форназини–Маркезини* 49

Информационные технологии в управлении

Сазонов В.В., Скобелев П.О., Лада А.Н. и др.

*Применение мультиагентных технологий
в транспортной задаче с временными окнами
и несколькими пунктами погрузки* 65

Сетевые модели в управлении

Мелентьев В.А.

*«Реберное» масштабирование гиперкубических
вычислительных систем* 81

Управление в социально-экономических системах

Алгазин Г.И., Алгазина Д.Г.

Информационное равновесие в модели динамики коллективного поведения на конкурентном рынке 112

Федянин Д.Н., Чхартишвили А.Г.

Консенсус в социальной сети со сложными узлами..... 137

***Управление в медико-биологических
и экологических системах***

Чернявский А.Л., Дорофеев Ю.А.,

Мандель А.С. и др.

Анализ процесса госпитализации пациентов в крупной клинике методами коллективной многовариантной экспертизы..... 151

УДК 519.83

ББК 22.18

МОДИФИЦИРОВАННАЯ МНОГОШАГОВАЯ МОДЕЛЬ БИРЖЕВОЙ ИГРЫ СО СЧЕТНЫМ МНОЖЕСТВОМ СОСТОЯНИЙ¹

Пьяных А. И.²

*(Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова, Москва)*

Рассматривается упрощенная модель финансового рынка, на котором два игрока ведут торговлю однотипными акциями в течение некоторой последовательности шагов. Первый игрок (инсайдер) информирован о настоящей ликвидной цене акции, которая может принимать любое значение из \mathbb{Z}_+ . В то же время второй игрок знает только вероятностное распределение \bar{p} цены акции и что первый игрок — инсайдер. На каждом шаге торгов игроки делают целочисленные ставки. Игрок, предложивший большую ставку, покупает у другого акцию по цене, равной выпуклой комбинации предложенных ставок с некоторым коэффициентом β . После каждого хода сделанные ставки становятся известны обоим игрокам. В работе получено решение повторяющейся антагонистической игры неограниченной продолжительности для распределений \bar{p} с конечной дисперсией.

Ключевые слова: многошаговые антагонистические игры, асимметричная информация, инсайдерская торговля.

¹ Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №16-01-00353а. Автор признателен своему научному руководителю к.ф.-м.н., доценту В.В. Морозову за помощь в написании данной статьи.

² Артем Игоревич Пьяных, аспирант (artem.pyanykh@gmail.com).

Введение

В данной работе рассматривается упрощенная модель финансового рынка [1, 10], в которой два игрока ведут торговлю однотипными акциями на протяжении $n \leq \infty$ шагов. Перед началом торгов случайный ход определяет цену акции $s \in S$ на весь период торгов в соответствии с вероятностным распределением $\bar{p} = (p^s, s \in S)$. Выбранная цена сообщается первому игроку (инсайдеру). Второй игрок при этом знает только вероятностное распределение \bar{p} и не осведомлен о настоящем значении цены. Второй игрок знает, что первый игрок — инсайдер. На каждом шаге торгов игроки одновременно и независимо назначают некоторую цену за акцию. Игрок, сделавший большую ставку, покупает акцию у другого; если ставки равны, сделки не происходит. После каждого шага торгов выбранные ставки сообщаются игрокам. Задачей каждого игрока является максимизация стоимости итогового портфеля, состоящего из некоторого числа купленных акций и суммы денег, полученных в результате торгов. Данное описание считается известным обоим игрокам.

Впервые подобная задача была рассмотрена Б. Де Мейером и Х. Салей в [9]. В их модели цена акции может принимать два значения 0 и 1, а игроки делают произвольные ставки из отрезка $[0, 1]$. Эту модель будем называть непрерывной. В рамках такой модели торгов на финансовом рынке авторами была продемонстрирована возможность стратегического происхождения броуновского движения в эволюции цен на финансовые активы.

Позднее В.К. Доманским в [10] была исследована модель, в которой цена акции также может принимать два значения 0 и 1, но игроки могут делать ставки только из конечного множества $\{i/m, i = \overline{0, m}\}$, $m \in \mathbb{N}$. Эту модель будем называть дискретной. Формально дискретная модель описывается повторяющейся игрой с неполной информацией (см. [7]). В работе [10] показано, что последовательность верхних значений n -шаговых игр ограничена, что позволяет определить и решить игру с бесконечным

количеством шагов. Установлено, что при применении игроками оптимальных стратегий последовательность ожидаемых ликвидных цен акции образует симметричное случайное блуждание по множеству допустимых ставок с поглощением в крайних точках. В момент поглощения оценка вторым игроком ликвидной цены акции совпадает с истинным значением этой цены. В этот момент торги могут быть остановлены, так как последующий выигрыш первого игрока равен нулю.

Для игр с конечным количеством шагов аналитические решения получены только в частных случаях: М.С. Сандомирской и В.К. Доманским в [6] найдено решение одношаговой игры при произвольном натуральном значении m , а В.Л. Крепс в [2] построено решение n -шаговых игр при $m \leq 3$.

В работе [1] рассмотрено обобщение дискретной модели на случай, когда цена акции может принимать любое значение $s \in S = \mathbb{Z}_+$. Решение игры с бесконечным количеством шагов найдено в предположении конечности дисперсии цены акции. Авторами установлено, что в данном случае оптимальная стратегия инсайдера также порождает симметричное случайное блуждание цен сделок.

В указанных выше работах сделка осуществляется по цене, равной наибольшей из выбранных ставок. Можно, однако, рассмотреть другой механизм, предложенный в [8], и положить цену сделки равной выпуклой комбинации ставок с коэффициентом $\beta \in [0, 1]$, т.е. если игроками были сделаны ставки $i \neq j$, то акция будет продана по цене

$$\beta \max(i, j) + (1 - \beta) \min(i, j).$$

Фактически, в [1, 10] коэффициент β равен 1. Дискретная модель с двумя возможными ценами акции и $\beta = 1/2$ рассмотрена в [4], ее обобщение на случай произвольного $\beta \in [0, 1]$ см. в [5].

В данной работе это обобщение проведено для дискретной модели со счетным множеством возможных значений цены акции. Установлено, что оптимальная стратегия инсайдера порождает случайное блуждание последовательности ликвидных цен акции, которое, однако, уже не является симметричным. описа-

ние возникающих в рассматриваемой модели случайных блужданий дается в п. 4. Появление случайного блуждания в более общей модели подтверждает гипотезу Б. Де Мейера и Х. Салей о возможном стратегическом происхождении случайных флуктуаций цен на фондовых рынках.

Доказательства утверждений вынесены в приложение.

1. Постановка задачи

Пусть множество состояний рынка $S = \mathbb{Z}_+$. Перед началом игры случай выбирает состояние рынка $s \in S$ в соответствии с вероятностным распределением $\bar{p} = (p^s, s \in S)$, имеющим конечную дисперсию состояния $\mathbb{D} \bar{p} < \infty$. Множество всех таких распределений обозначим \bar{P} .

На каждом шаге игры $t = \overline{1, n}$, $n \leq \infty$, игроки делают ставки $i_t \in I, j_t \in J$, где $I = J = \mathbb{Z}_+$. В силу того, что игрок, предложивший бóльшую ставку, покупает акцию у другого по цене, равной выпуклой комбинации предложенных ставок, выплата первому игроку в состоянии s равна

$$a^{s,\beta}(i_t, j_t) = \begin{cases} (1 - \beta)i_t + \beta j_t - s, & i_t < j_t, \\ 0, & i_t = j_t, \\ s - \beta i_t - (1 - \beta)j_t, & i_t > j_t. \end{cases}$$

На шаге t обоим игрокам достаточно принимать в расчет лишь последовательность $(i_1, i_2, \dots, i_{t-1})$ действий первого игрока на предыдущих ходах. Это связано с тем, что информация, получаемая вторым игроком относительно состояния s , может передаваться лишь посредством действий первого игрока. Подробное обсуждение данного факта можно найти в [11].

Обозначим через $\Delta(X)$ совокупность всех вероятностных распределений на множестве X .

Определение 1. Стратегией первого игрока является последовательность ходов $\bar{\sigma} = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$, где $\sigma_t : S \times I^{t-1} \rightarrow \Delta(I)$. Множество стратегий первого игрока обозначим Σ .

Определение 2. Стратегией второго игрока является последовательность ходов $\bar{\tau} = (\tau_1, \dots, \tau_n)$, где $\tau_t : I^{t-1} \rightarrow \Delta(J)$. Множество стратегий второго игрока обозначим Γ .

Таким образом, первый игрок на каждом шаге игры рандомизирует свои действия в зависимости от состояния рынка s и истории своих ставок. Второй игрок, в свою очередь, не имея информации о состоянии рынка s , опирается только на историю ставок инсайдера.

Будем считать, что игроки обладают неограниченными запасами рискованного и безрискованного активов, т.е. торги не могут прекратиться по причине того, что у одного из игроков закончатся акции или деньги. Кроме того, предположим, что в начальный момент времени оба игрока имеют нулевые портфели.

При использовании игроками стратегий $\bar{\sigma}$ и $\bar{\tau}$ ожидаемый выигрыш первого игрока равен

$$K_n^\beta(\bar{p}, \bar{\sigma}, \bar{\tau}) = \mathbb{E}_{(\bar{p}, \bar{\sigma}, \bar{\tau})} \sum_{t=1}^n a^{s_t, \beta}(i_t, j_t),$$

где математическое ожидание берется по мере, индуцированной \bar{p} , $\bar{\sigma}$ и $\bar{\tau}$ на множестве $S \times I^n \times J^n$. Заданную таким образом игру обозначим $G_n^\beta(\bar{p})$.

Определение 3. Если для некоторых стратегий $\bar{\sigma}^* \in \Sigma$, $\bar{\tau}^* \in \Gamma$ выполняются равенства

$$\inf_{\bar{\tau} \in \Gamma} K_n^\beta(\bar{p}, \bar{\sigma}^*, \bar{\tau}) = K_n^\beta(\bar{p}, \bar{\sigma}^*, \bar{\tau}^*) = \sup_{\bar{\sigma} \in \Sigma} K_n^\beta(\bar{p}, \bar{\sigma}, \bar{\tau}^*) \stackrel{\text{def}}{=} V_n^\beta(\bar{p}),$$

то говорят, что игра $G_n^\beta(\bar{p})$ имеет значение $V_n^\beta(\bar{p})$, а стратегии $\bar{\sigma}^*$ и $\bar{\tau}^*$ называются оптимальными.

Нижнее и верхнее значения игры $G_n^\beta(\bar{p})$ обозначим соответственно

$$\underline{V}_n^\beta(\bar{p}) = \sup_{\bar{\sigma} \in \Sigma} \inf_{\bar{\tau} \in \Gamma} K_n^\beta(\bar{p}, \bar{\sigma}, \bar{\tau}), \quad \bar{V}_n^\beta(\bar{p}) = \inf_{\bar{\tau} \in \Gamma} \sup_{\bar{\sigma} \in \Sigma} K_n^\beta(\bar{p}, \bar{\sigma}, \bar{\tau}).$$

Данные функции являются вогнутыми на \bar{P} . Доказательство этого утверждения проводится аналогично [10].

Следуя [1], опишем рекурсивную структуру игры $G_n^\beta(\bar{p})$. Представим стратегию первого игрока в виде $\bar{\sigma} = (\sigma, \bar{\sigma}^i, i \in I)$, где σ — его ход на первом шаге, а $\bar{\sigma}^i$ — его стратегия в игре продолжительности $n - 1$ в зависимости от ставки i , выбранной им на первом шаге. Аналогично, стратегию второго игрока представим в виде $\bar{\tau} = (\tau, \bar{\tau}^i, i \in I)$. Далее, обозначим q^i полную вероятность, с которой первый игрок делает ставку $i \in I$, а $\bar{q} = (q^i, i \in I)$ — соответствующее распределение. Также обозначим $p^{s|i}$ апостериорную вероятность состояния s в зависимости от ставки i первого игрока, и $\bar{p}^i = (p^{s|i}, s \in S)$ — соответствующее апостериорное распределение. Тогда для функции выигрыша первого игрока в игре $G_n^\beta(\bar{p})$ справедлива формула

$$(1) \quad K_n^\beta(\bar{p}, \bar{\sigma}, \bar{\tau}) = K_1^\beta(\bar{p}, \sigma, \tau) + \sum_{i \in I} q^i K_{n-1}^\beta(\bar{p}^i, \bar{\sigma}^i, \bar{\tau}^i).$$

2. Оценка сверху выигрыша первого игрока в игре $G_\infty^\beta(\bar{p})$

В [1] определена следующая чистая стратегия второго игрока $\bar{\tau}^k = (\tau_t^k, t = \overline{1, \infty})$:

$$\tau_1^k = k, \quad \tau_t^k(i_{t-1}, j_{t-1}) = \begin{cases} j_{t-1} - 1, & i_{t-1} < j_{t-1}, \\ j_{t-1}, & i_{t-1} = j_{t-1}, \\ j_{t-1} + 1, & i_{t-1} > j_{t-1}. \end{cases}$$

Другими словами, второй игрок делает ставку равную k на первом шаге, а далее либо подражает инсайдеру, либо смещается на единицу к ставке инайдера предыдущего шага. Положим $x^+ = \max(0, x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Лемма 1. При применении стратегии $\bar{\tau}^k$ в игре $G_n^\beta(\bar{p})$ второй игрок в состоянии s гарантирует себе проигрыш не более

$$h_n^s(\bar{\tau}^k) = \begin{cases} \sum_{t=0}^{n-1} (k - s - t - 1 + \beta)^+, & s \leq k, \\ \sum_{t=0}^{n-1} (s - k - t - \beta)^+, & s > k. \end{cases}$$

Для любого $s \in S$ последовательность $\{h_n^s(\bar{\tau}^k)\}_{n=1}^\infty$ не убывает, ограничена сверху и сходится к

$$(2) \quad h_\infty^s(\bar{\tau}^k) = (s - k + 1 - 2\beta)(s - k)/2.$$

Следующие множества распределений зададим ограничениями на математическое ожидание состояния:

$$\Theta(x) = \{\bar{p} \in \bar{P} : \mathbb{E} \bar{p} = x\},$$

$$\Lambda(x, y) = \{\bar{p} \in \bar{P} : x < \mathbb{E} \bar{p} \leq y\}.$$

Пусть $\bar{\tau}^*$ — стратегия второго игрока, состоящая в применении $\bar{\tau}^k$ при $\bar{p} \in \Lambda(k - 1 + \beta, k + \beta)$. Отметим, что при заданном распределении \bar{p} выбор k зависит от значения β . Отсюда следует, что стратегия $\bar{\tau}^*$ также зависит от β .

Теорема 1. При использовании вторым игроком стратегии $\bar{\tau}^*$ выигрыш первого игрока в игре $G_\infty^\beta(\bar{p})$ ограничен сверху функцией

$$H_\infty^\beta(\bar{p}) = \inf_{k \in J} \sum_{s \in S} p^s h_\infty^s(\bar{\tau}^k).$$

Функция $H_\infty^\beta(\bar{p})$ является кусочно-линейной вогнутой с областями линейности $\Lambda(k - 1 + \beta, k + \beta)$ и областями недифференцируемости $\Theta(k + \beta)$ при $k \in S$. Для распределений \bar{p} с $\mathbb{E} \bar{p} = k - 1 + \beta + \eta$, $\eta \in (0, 1]$, ее значение равно

$$(3) \quad H_\infty^\beta(\bar{p}) = (\mathbb{D} \bar{p} + \beta(1 - \beta) - \eta(1 - \eta)) / 2.$$

Заметим, что в данном случае наблюдается сдвиг областей линейности на β относительно $\mathbb{E} \bar{p}$ в сравнении с областями из [1].

3. Оценка снизу выигрыша первого игрока в игре $G_\infty^\beta(\bar{p})$

Перейдем к описанию стратегии первого игрока, гарантирующей ему выигрыш не менее $H_\infty^\beta(\bar{p})$. Пусть σ_i^s — компонента хода σ первого игрока, т.е. вероятность сделать ставку i в состоянии s . По правилу Байеса $\sigma_i^s = p^{s|i} q^i / p^s$. В частности, справедливы равенства $\sum_{s \in S} \sigma_i^s p^s = q^i$, $i \in I$. Таким образом, ход σ первого игрока можно определить, задав следующие параметры: полные

вероятности q^i сделать ставку i и апостериорные вероятности $p^{s|i}$ для $i \in I$. Тогда его одношаговый выигрыш выражается следующим образом:

$$(4) \quad K_1^\beta(\bar{p}, \sigma, j) = \sum_{i \in I} \sum_{s \in S} q^i p^{s|i} a^{s,\beta}(i, j).$$

Обозначим $L_n^\beta(\bar{p}, \bar{\sigma})$ гарантированный выигрыш первого игрока, использующего стратегию $\bar{\sigma}$ в игре $G_n^\beta(\bar{p})$, т.е.

$$L_n^\beta(\bar{p}, \bar{\sigma}) = \inf_{\bar{\tau} \in T} K_n^\beta(\bar{p}, \bar{\sigma}, \bar{\tau}).$$

Лемма 2. Пусть $\bar{p}_1, \bar{p}_2 \in \bar{P}$, $\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2 \in \Sigma$ — стратегии первого игрока. Тогда для $\bar{p} = \lambda \bar{p}_1 + (1 - \lambda) \bar{p}_2$, $\lambda \in [0, 1]$, найдется такая стратегия $\bar{\sigma}_c \in \Sigma$, что

$$L_n^\beta(\bar{p}, \bar{\sigma}_c) \geq \lambda L_n^\beta(\bar{p}_1, \bar{\sigma}_1) + (1 - \lambda) L_n^\beta(\bar{p}_2, \bar{\sigma}_2).$$

Обозначим e^s вырожденное вероятностное распределение с носителем в точке s . Пусть $\bar{p}^x(l, r) \in \Theta(x)$ — распределение с носителем $\{l, r\}$, $l < r$. При этом распределении вероятности реализации состояний l и r равны $(r - x)/(r - l)$ и $(x - l)/(r - l)$ соответственно, а дисперсия

$$\mathbb{D} \bar{p}^x(l, r) = (x - l)(r - x).$$

Как показано в [1], любое распределение $\bar{p} = (p^s, s \in S) \in \Theta(x)$ может быть представлено в виде выпуклой комбинации распределений с двухточечными носителями следующим образом:

$$(5) \quad \bar{p} = \begin{cases} p^x e^x + \sum_{r=x+1}^{\infty} \sum_{l=0}^{x-1} \alpha_{l,r}(\bar{p}) \bar{p}^x(l, r), & x \in S, \\ \sum_{r=\lfloor x+1 \rfloor}^{\infty} \sum_{l=0}^{\lfloor x-1 \rfloor} \alpha_{l,r}(\bar{p}) \bar{p}^x(l, r), & x \notin S, \end{cases}$$

$$(6) \quad \alpha_{l,r}(\bar{p}) = (r - l) p^l p^r / \sum_{t=0}^{\lfloor x-1 \rfloor} p^t (x - t),$$

где $\lfloor x \rfloor$ — целая часть x , а $\lceil x \rceil$ — наименьшее целое $y \geq x$.

Обозначим через $L^1(\{s^2\})$ банахово пространство последовательностей $(l^s, s \in S)$ с нормой $\|l\| = \sum_{s=0}^{\infty} s^2 |l^s|$. Множества \bar{P} и $\Theta(x)$ являются выпуклыми замкнутыми подмножествами пространства $L^1(\{s^2\})$.

Лемма 3. Пусть последовательность $\{l_n\} \subset L^1(\{s^2\})$ такая, что для любых $s \in S$ и $n \geq 1$ верно $l_n^s \geq 0$, $l_n^s \leq l_{n+1}^s$. Тогда если существует ее сходящаяся по норме подпоследовательность $\{l_{j_n}\}$, то и сама последовательность $\{l_n\}$ сходится по норме.

Лемма 4. Для любого распределения $\bar{p} \in \Theta(x)$ ряд в разложении (5) сходится к \bar{p} по норме.

В силу того, что функционал $\underline{V}_n^\beta(\bar{p})$ вогнут на \bar{P} и по теореме 1 ограничен на данном множестве, то он непрерывен на \bar{P} (см. [3, теорема 1.7.1]). Отсюда и из леммы 4 следует, что для распределений $\bar{p} \in \Theta(x)$ выполнено

$$\begin{cases} \underline{V}_n^\beta(\bar{p}) \geq p^x \underline{V}_n^\beta(e^x) + \sum_{r=x+1}^{\infty} \sum_{l=0}^{x-1} \alpha_{l,r}(\bar{p}) \underline{V}_n^\beta(\bar{p}^x(l,r)), & x \in S, \\ \underline{V}_n^\beta(\bar{p}) \geq \sum_{r=\lfloor x+1 \rfloor}^{\infty} \sum_{l=0}^{\lfloor x-1 \rfloor} \alpha_{l,r}(\bar{p}) \underline{V}_n^\beta(\bar{p}^x(l,r)), & x \notin S. \end{cases}$$

Из данных неравенств, теоремы 1 и леммы 2 следует, что для доказательства совпадения верхней и нижней оценок выигрыша в игре $G_\infty^\beta(\bar{p})$ можно ограничиться рассмотрением только распределений $\bar{p} = \bar{p}^{k+\beta}(l,r) \in \Theta(k+\beta)$, $k \in S$, $l = \bar{0}, \bar{k}$, $r = \bar{k} + 1, \infty$. Для таких распределений мы построим стратегию первого игрока $\bar{\sigma}^*$, для которой $L_\infty^\beta(\bar{p}, \bar{\sigma}^*) = H_\infty^\beta(\bar{p})$. Отсюда будет следовать, что $V_\infty^\beta(\bar{p}) = H_\infty^\beta(\bar{p})$, а $\bar{\sigma}^*$ и $\bar{\tau}^*$ — оптимальные стратегии игроков в игре $G_\infty^\beta(\bar{p})$.

Обозначим $\hat{\sigma}_k$ ход первого игрока, состоящий в выборе ставки из множества $\{k, k+1\}$. Ход $\hat{\sigma}_k$ определяется заданием полных вероятностей q^k, q^{k+1} и апостериорных распределений \bar{p}^k, \bar{p}^{k+1} , причем $q^k + q^{k+1} = 1$. Следующая лемма является обобщением утверждения 2 из [5].

Лемма 5. При использовании $\hat{\sigma}_k$ одношаговый выигрыш первого игрока равен

$$K_1^\beta(\bar{p}, \hat{\sigma}_k, j) = \begin{cases} \mathbb{E} \bar{p} - \beta k - (1 - \beta)j - \beta q^{k+1}, & j < k, \\ (\mathbb{E} \bar{p}^{k+1} - k - \beta)q^{k+1}, & j = k, \\ (k + \beta - \mathbb{E} \bar{p}^k)q^k, & j = k + 1, \\ (1 - \beta)k + \beta j - \mathbb{E} \bar{p} + (1 - \beta)q^{k+1}, & j > k + 1. \end{cases}$$

Определим стратегию $\bar{\sigma}^*$ первого игрока в игре $G_\infty^\beta(\bar{p})$. Введем множество распределений

$$P(l, r) = \left\{ \bar{p}^k(l, r), \bar{p}^{s+\beta}(l, r), k = \overline{l, r}, s = \overline{l, r - 1} \right\}.$$

При $\bar{p} \in P(l, r)$ первый ход σ^* стратегии $\bar{\sigma}^*$ определяется следующим образом. Если $\bar{p} = \bar{p}^l(l, r)$ или $\bar{p} = \bar{p}^r(l, r)$, то первый игрок использует ставки l и r , соответственно, с вероятностью 1. В противном случае он использует $\hat{\sigma}_k$ с параметрами из таблицы 1.

Таблица 1. Параметры хода σ^* при $\bar{p} \in P(l, r)$

\bar{p}	q^k	q^{k+1}	\bar{p}^k	\bar{p}^{k+1}
$\bar{p}^k(l, r)$	β	$1 - \beta$	$\bar{p}^{k-1+\beta}(l, r)$	$\bar{p}^{k+\beta}(l, r)$
$\bar{p}^{k+\beta}(l, r)$	$1 - \beta$	β	$\bar{p}^k(l, r)$	$\bar{p}^{k+1}(l, r)$

На последующих шагах игры ход σ^* применяется рекурсивно для соответствующих значений апостериорных вероятностей. В результате определили стратегию $\bar{\sigma}^*$ для распределения $\bar{p} \in P(l, r)$.

Обозначим $L_n^x(\bar{\sigma}) = L_n^\beta(\bar{p}^x(l, r), \bar{\sigma})$, $\bar{\sigma} \in \Sigma$. Следующая теорема является обобщением утверждения 5 из [5].

Теорема 2. Пусть $\beta \in (0, 1)$. При использовании стратегии $\bar{\sigma}^*$ в игре $G_\infty^\beta(\bar{p})$ для распределения $\bar{p} \in P(l, r)$ гарантированный выигрыш первого игрока удовлетворяет следующей системе:

$$(7a) \quad L_\infty^k(\bar{\sigma}^*) = \beta L_\infty^{k-1+\beta}(\bar{\sigma}^*) + (1 - \beta)L_\infty^{k+\beta}(\bar{\sigma}^*), \quad k = \overline{l + 1, r - 1},$$

$$(7b) \quad L_{\infty}^{k+\beta}(\bar{\sigma}^*) = \beta(1 - \beta) + (1 - \beta)L_{\infty}^k(\bar{\sigma}^*) + \beta L_{\infty}^{k+1}(\bar{\sigma}^*), \quad k = \overline{l, r-1},$$

$$(7c) \quad L_{\infty}^l(\bar{\sigma}^*) = L_{\infty}^r(\bar{\sigma}^*) = 0.$$

Ее решение дает нижнюю оценку выигрыша первого игрока, равную

$$L_{\infty}^{\beta}(\bar{p}^{k+\beta}(l, r), \bar{\sigma}^*) = \frac{(r - k - \beta)(k + \beta - l) + \beta(1 - \beta)}{2}.$$

Поскольку $\mathbb{D} \bar{p}^{k+\beta}(l, r) = (r - k - \beta)(k + \beta - l)$, а распределение $\bar{p}^{k+\beta}(l, r)$ удовлетворяет условию теоремы 1 с $\eta = 1$, выражения для $H_{\infty}^{\beta}(\bar{p}^{k+\beta}(l, r))$ и $L_{\infty}^{\beta}(\bar{p}^{k+\beta}(l, r), \bar{\sigma}^*)$, $k = \overline{l, r-1}$ совпадают. Из теоремы 1 также следует, что

$$H_{\infty}^{\beta}(\bar{p}^l(l, r)) = H_{\infty}^{\beta}(\bar{p}^r(l, r)) = 0.$$

В самом деле, распределения $\bar{p}^l(l, r)$ и $\bar{p}^r(l, r)$ удовлетворяют условию теоремы 1 с $\eta = 1 - \beta$ и имеют нулевую дисперсию.

Для произвольного распределения $\bar{p} \in \Theta(k)$, $k \in S$, стратегию $\bar{\sigma}^*$ определим следующим образом. Если реализуется состояние $s = k$, то гарантированный выигрыш первого игрока не превышает 0 и он прекращает игру. Таким образом, первый игрок, следуя стратегии $\bar{\sigma}^*$, прекращает игру с вероятностью p^k . В противном случае игрок использует конструкцию леммы 2 для построения стратегии, соответствующей выпуклой комбинации распределений $\bar{p}^k(l, r)$ в разложении \bar{p} . Первый ход такой стратегии использует две ставки k и $k + 1$ с полными вероятностями $(1 - p^k)\beta$ и $(1 - p^k)(1 - \beta)$ соответственно. Апостериорные вероятностные распределения являются выпуклыми комбинациями соответствующих апостериорных двухточечных распределений и даются следующими формулами:

$$\bar{p}^k = \frac{1}{1 - p^k} \sum_{r=k+1}^{\infty} \sum_{l=0}^{k-1} \alpha_{l,r}(\bar{p}) \bar{p}^{k-1+\beta}(l, r),$$

$$\bar{p}^{k+1} = \frac{1}{1 - p^k} \sum_{r=k+1}^{\infty} \sum_{l=0}^{k-1} \alpha_{l,r}(\bar{p}) \bar{p}^{k+\beta}(l, r).$$

Для распределений \bar{p} со счетным носителем сходимость по норме данных рядов устанавливается аналогично доказательству леммы 4.

Аналогичные рассуждения справедливы и для распределений $\bar{p} \in \Theta(k + \beta) \cup \Lambda(k, k + \beta)$, $k \in S$.

4. Решение игры $G_\infty^\beta(\bar{p})$

Подчеркнем, что приведенная в п. 3 стратегия инсайдера $\bar{\sigma}^*$ определена только при $\beta \in (0, 1)$.

Нетрудно проверить справедливость следующего равенства:

$$a^{r,\beta}(i, j) = a^{l,1-\beta}(r + l - i, r + l - j).$$

Из него вытекает, что решение игры $G_\infty^\beta(\bar{p}^x(l, r))$ сводится к решению игры $G_\infty^{1-\beta}(\bar{p}^{l+r-x}(l, r))$. При этом ставки, используемые в соответствующих смешанных стратегиях инсайдера, симметричны относительно точки $(l + r)/2$. Аналогичные рассуждения справедливы для игры $G_\infty^\beta(\bar{p})$ при любом распределении $\bar{p} \in \bar{P}$.

Оптимальная стратегия $\bar{\sigma}^*$ инсайдера в игре $G_\infty^\beta(\bar{p})$ при $\beta = 1$ найдена в [1]. Решение $G_\infty^\beta(\bar{p})$ при $\beta = 0$ может быть получено при помощи описанной выше конструкции из решения $G_\infty^\beta(\bar{p})$ при $\beta = 1$. Таким образом, при любом $\beta \in [0, 1]$ справедлива следующая

Теорема 3. *Игра $G_\infty^\beta(\bar{p})$ имеет значение*

$$V_\infty^\beta(\bar{p}) = H_\infty^\beta(\bar{p}) = L_\infty^\beta(\bar{p}),$$

а $\bar{\sigma}^$ и $\bar{\tau}^*$ — оптимальные стратегии игроков.*

Применение первым игроком стратегии $\bar{\sigma}^*$ при $\bar{p} \in P(l, r)$ порождает случайное блуждание последовательности апостериорных вероятностей, изображенное на рисунке 1, которое в отличие от [1] происходит по более широкому множеству и уже не является симметричным, за исключением случая $\beta = 1/2$.

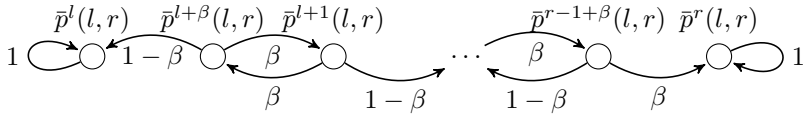


Рис. 1. Случайное блуждание последовательности апостериорных вероятностей, порожденное $\bar{\sigma}^*$

В дополнение к стратегии $\bar{\sigma}^*$ построим еще одну оптимальную стратегию $\bar{\xi}^*$ инсайдера. Введем множество распределений

$$P'(l, r) = \{\bar{p}^l(l, r), \bar{p}^r(l, r)\} \cup \{\bar{p}^{k+\beta}(l, r), k = \overline{l, r-1}\}.$$

При $\bar{p} \in P'(l, r)$ первый ход ξ^* стратегии $\bar{\xi}^*$ определяется следующим образом. Если $\bar{p} = \bar{p}^l(l, r)$ или $\bar{p} = \bar{p}^r(l, r)$, то первый игрок использует ставки l и r , соответственно, с вероятностью 1. В противном случае он использует $\hat{\sigma}_k$ с параметрами из таблицы 2.

Таблица 2. Параметры хода ξ^* при $\bar{p} \in P'(l, r)$

\bar{p}	q^k	q^{k+1}	\bar{p}^k	\bar{p}^{k+1}
$\bar{p}^{l+\beta}(l, r)$	$\frac{1}{1+\beta}$	$\frac{\beta}{1+\beta}$	$\bar{p}^l(l, r)$	$\bar{p}^{l+1+\beta}(l, r)$
$\bar{p}^{r-1+\beta}(l, r)$	$\frac{1-\beta}{2-\beta}$	$\frac{1}{2-\beta}$	$\bar{p}^{r-2+\beta}(l, r)$	$\bar{p}^r(l, r)$
$\bar{p}^{k+\beta}(l, r)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\bar{p}^{k-1+\beta}(l, r)$	$\bar{p}^{k+1+\beta}(l, r)$

Для остальных распределений \bar{p} стратегия $\bar{\xi}^*$ определяется аналогично тому, как это было сделано для стратегии $\bar{\sigma}^*$.

Использование стратегии $\bar{\xi}^*$ при $\bar{p} \in P'(l, r)$ порождает случайное блуждание последовательности апостериорных вероятностей, изображенное на рисунке 2. Данное блуждание симметрично с вероятностями перехода в соседние состояния равными $1/2$, симметрия нарушается только в крайних и соседних к ним состояниях.

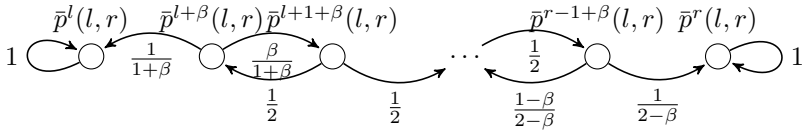


Рис. 2. Случайное блуждание последовательности апостериорных вероятностей, порожденное $\bar{\xi}^*$

Из леммы 4 можно вывести, что

$$L_1^{l+\beta}(\bar{\xi}^*) = \frac{\beta}{1+\beta}, \quad L_1^{r-1+\beta}(\bar{\xi}^*) = \frac{1-\beta}{2-\beta},$$

$$L_1^{k+\beta}(\bar{\xi}^*) = \frac{1}{2}, \quad k = \overline{l+1, r-2}.$$

Отсюда следует, что при использовании стратегии $\bar{\xi}^*$ в игре $G_\infty^\beta(\bar{p})$ для распределения $\bar{p} \in P^l(l, r)$ гарантированный выигрыш первого игрока удовлетворяет следующей системе:

$$(8a) \quad L_\infty^{l+\beta}(\bar{\xi}^*) = \frac{\beta}{1+\beta} + \frac{1}{1+\beta} L_\infty^l(\bar{\xi}^*) + \frac{\beta}{1+\beta} L_\infty^{l+1+\beta}(\bar{\xi}^*),$$

$$(8b) \quad L_\infty^{r-1+\beta}(\bar{\xi}^*) = \frac{1-\beta}{2-\beta} + \frac{1-\beta}{2-\beta} L_\infty^{r-2+\beta}(\bar{\xi}^*) + \frac{1}{2-\beta} L_\infty^r(\bar{\xi}^*),$$

$$(8c) \quad L_\infty^{k+\beta}(\bar{\xi}^*) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} L_\infty^{k-1+\beta}(\bar{\xi}^*) + \frac{1}{2} L_\infty^{k+1+\beta}(\bar{\xi}^*), \quad k = \overline{l+1, r-2},$$

$$(8d) \quad L_\infty^l(\bar{\xi}^*) = L_\infty^r(\bar{\xi}^*) = 0.$$

Нетрудно проверить, что подстановкой

$$H_\infty^\beta(\bar{p}^{k+\beta}(l, r)) = \frac{(r-k-\beta)(k+\beta-l) + \beta(1-\beta)}{2},$$

$$H_\infty^\beta(\bar{p}^l(l, r)) = H_\infty^\beta(\bar{p}^r(l, r)) = 0,$$

вместо $L_\infty^{k+\beta}(\bar{\xi}^*)$, $k = \overline{l, r-1}$, $L_\infty^l(\bar{\xi}^*)$ и $L_\infty^r(\bar{\xi}^*)$ соответственно данные равенства обращаются в тождества. Отсюда, как и для стратегии $\bar{\sigma}^*$, следует, что стратегия $\bar{\xi}^*$ является оптимальной.

Отметим, что в отличие от стратегии $\bar{\sigma}^*$ стратегия $\bar{\xi}^*$ определена при $\beta \in [0, 1]$ и совпадает с оптимальной стратегией инсайдера из [1] при $\beta = 1$. При этом обе стратегии $\bar{\sigma}^*$ и $\bar{\xi}^*$ порождают существенно различные случайные блуждания апостериорных вероятностей.

Приложение

Доказательство. [Лемма 1] Проведем доказательство индукцией по n для случая $s > k$. При $n = 1$ оптимальный ответ первого игрока на $\bar{\tau}^k$ будет $i = k + 1$. Тогда его выигрыш в игре $G_1^\beta(\bar{p})$ равен

$$h_1^s(\bar{\tau}^k) = s - \beta(k + 1) - (1 - \beta)k = s - k - \beta.$$

База индукции проверена. Предположим, что утверждение верно при $n \leq N$. При $n = N + 1$ первый игрок имеет два разумных ответа на $\bar{\tau}^k$: ставка $i = k + 1$, что соответствует покупке акции по наименьшей возможной цене, и ставка $i = k - 1$, что соответствует продаже акции за наибольшую возможную цену. Найдем оценки выигрыша в каждом из случаев. Для $i = k + 1$ выигрыш первого игрока не превосходит величины

$$s - k - \beta + h_N^s(\bar{\tau}^{k+1}) = \sum_{t=0}^N (s - k - t - \beta)^+.$$

Аналогично для $i = k - 1$ тот же выигрыш не превосходит

$$\beta k + (1 - \beta)(k - 1) - s + h_N^s(\bar{\tau}^{k-1}) = \sum_{t=0}^{N-2} (s - k - t - \beta)^+.$$

При $s \leq k$ формула для $h_n^s(\bar{\tau}^k)$ доказывается аналогично. Сходимость последовательности $\{h_n^s(\bar{\tau}^k)\}_{n=1}^\infty$ к $h_\infty^s(\bar{\tau}^k)$ следует из равенств $h_n^s(\bar{\tau}^k) = h_{n+1}^s(\bar{\tau}^k)$ при $n \geq s - k$.

Доказательство. [Теорема 1] Воспользовавшись (2), получим

$$(П.1) \quad \sum_{s \in S} p^s h_\infty^s(\bar{\tau}^j) = (j^2 + (2\beta - 1 - 2\mathbb{E}\bar{p})j - (2\beta - 1)\mathbb{E}\bar{p} + \mathbb{E}\bar{p}^2)/2.$$

Квадратичная функция $f(x) = x^2 + (2\beta - 1 - 2 \mathbb{E} \bar{p})x$ достигает минимума при $x = \mathbb{E} \bar{p} - \beta + 1/2$. Отсюда при $\bar{p} \in \Lambda(k - 1 + \beta, k + \beta)$ выражение (П.1) достигает минимума при $j = k$. Равенство (3) проверяется непосредственной подстановкой $\mathbb{E} \bar{p} = k - 1 + \beta + \eta$ в (П.1).

Доказательство. [Лемма 2] Без потери общности будем считать, что второй игрок использует стратегии $\bar{\tau}$, в которых распределения на множестве ставок имеют конечные математические ожидания. В противном случае ожидаемый выигрыш первого игрока будет равен бесконечности. Множество таких стратегий обозначим T' .

Докажем следующее утверждение: найдется такая стратегия $\bar{\sigma}_c = (\sigma_c, \bar{\sigma}_c^i) \in \Sigma$, что при всех $\bar{\tau} \in T'$ справедливо равенство (П.2) $K_n^\beta(\bar{p}, \bar{\sigma}_c, \bar{\tau}) = \lambda K_n^\beta(\bar{p}_1, \bar{\sigma}_1, \bar{\tau}) + (1 - \lambda)K_n^\beta(\bar{p}_2, \bar{\sigma}_2, \bar{\tau})$. Доказательство проведем по индукции. Пусть $\bar{q}_h = (q_h^i, i \in I)$ и $\bar{p}_h^i = (p_h^{s|i}, s \in S)$ — векторы полных и апостериорных вероятностей, соответствующие первому ходу σ_h стратегии $\bar{\sigma}_h$, $h = 1, 2$. Определим первый ход σ_c стратегии $\bar{\sigma}_c$ параметрами

$$q^i = \lambda q_1^i + (1 - \lambda)q_2^i, \quad i \in I,$$

$$p^{s|i} = \left(\lambda q_1^i p_1^{s|i} + (1 - \lambda)q_2^i p_2^{s|i} \right) / q^i, \quad i \in I, \quad s \in S.$$

Подставив эти выражения в (4), для любого $j \in J$ имеем:

$$K_1^\beta(\bar{p}, \sigma_c, j) = \sum_{i \in I} \sum_{s \in S} q^i p^{s|i} a^{s,\beta}(i, j) =$$

$$\sum_{i \in I, s \in S} q^i \frac{(\lambda q_1^i p_1^{s|i} + (1 - \lambda)q_2^i p_2^{s|i})}{q^i} a^{s,\beta}(i, j) =$$

$$= \lambda K_1^\beta(\bar{p}_1, \sigma_1, j) + (1 - \lambda)K_1^\beta(\bar{p}_2, \sigma_2, j).$$

Осредняя это равенство по произвольному $\tau \in \Delta(J)$, получим (П.2) при $n = 1$. Предположим, что утверждение имеет место при любых $n \leq N$. Поскольку для каждого $i \in I$

$$\bar{p}^i = \frac{\lambda q_1^i}{q^i} \bar{p}_1^i + \frac{(1 - \lambda)q_2^i}{q^i} \bar{p}_2^i,$$

для $\bar{\sigma}_1^i, \bar{\sigma}_2^i$ найдется такая стратегия первого игрока $\bar{\sigma}_c^i$ в игре $G_N^\beta(\bar{p}^i)$, что для любой стратегии $\bar{\tau}^i$

$$K_N^\beta(\bar{p}^i, \bar{\sigma}_c^i, \bar{\tau}^i) = \frac{\lambda q_1^i}{q^i} K_N^\beta(\bar{p}_1^i, \bar{\sigma}_1^i, \bar{\tau}^i) + \frac{(1-\lambda)q_2^i}{q^i} K_N^\beta(\bar{p}_2^i, \bar{\sigma}_2^i, \bar{\tau}^i).$$

В результате для $\bar{\sigma}_c = (\sigma_c, \bar{\sigma}_c^i) \in \Sigma$ и любой стратегии $\bar{\tau} = (\tau, \bar{\tau}^i) \in T'$ в игре $G_{N+1}^\beta(\bar{p})$ справедливо равенство

$$\begin{aligned} K_{N+1}^\beta(\bar{p}, \bar{\sigma}_c, \bar{\tau}) &= K_1^\beta(\bar{p}, \sigma_c, \tau) + \sum_{i \in I} q_i K_N^\beta(\bar{p}^i, \bar{\sigma}_c^i, \bar{\tau}^i) = \\ &= \lambda K_1^\beta(\bar{p}_1, \sigma_1, \tau) + (1-\lambda) K_1^\beta(\bar{p}_2, \sigma_2, \tau) + \\ &+ \sum_{i \in I} q^i \left(\frac{\lambda q_1^i}{q^i} K_N^\beta(\bar{p}_1^i, \bar{\sigma}_1^i, \bar{\tau}^i) + \frac{(1-\lambda)q_2^i}{q^i} K_N^\beta(\bar{p}_2^i, \bar{\sigma}_2^i, \bar{\tau}^i) \right) = \\ &= \lambda K_{N+1}^\beta(\bar{p}_1, \bar{\sigma}_1, \bar{\tau}) + (1-\lambda) K_{N+1}^\beta(\bar{p}_2, \bar{\sigma}_2, \bar{\tau}). \end{aligned}$$

Утверждение доказано. Из него следует

$$\begin{aligned} L_n^\beta(\bar{p}, \bar{\sigma}_c) &= \inf_{\bar{\tau} \in T'} K_n^\beta(\bar{p}, \bar{\sigma}_c, j) \geq \lambda \min_{\bar{\tau} \in T'} K_n^\beta(\bar{p}, \bar{\sigma}_1, j) + \\ &+ (1-\lambda) \min_{\bar{\tau} \in T'} K_n^\beta(\bar{p}, \bar{\sigma}_2, j) = \lambda L_n^\beta(\bar{p}_1, \bar{\sigma}_1) + (1-\lambda) L_n^\beta(\bar{p}_2, \bar{\sigma}_2). \end{aligned}$$

Доказательство. [Лемма 3] Пусть подпоследовательность $\{l_{j_n}\}$ сходится. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует M такое, что для любых $f, g \geq M$ выполнено $\|l_{j_f} - l_{j_g}\| \leq \varepsilon$. Положим N равное j_M .

Для любых $m \geq n \geq N$ можно найти q такое, что $j_q \geq m$. В силу покомпонентной монотонности последовательности $\{l_n\}$ выполнено неравенство

$$\|l_m - l_n\| = \sum_{s=0}^{\infty} s^2 |l_m^s - l_n^s| \leq \sum_{s=0}^{\infty} s^2 |l_{j_q}^s - l_{j_M}^s| = \|l_{j_q} - l_{j_M}\| \leq \varepsilon.$$

Отсюда последовательность $\{l_n\}$ фундаментальна и в силу полноты пространства $L^1(\{s^2\})$ сходится.

Доказательство. [Лемма 4] Проведем доказательство для $x \in S$. Рассмотрим последовательность

$$s_n = p^x e^x + \sum_{r=x+1}^n \sum_{l=0}^{x-1} \alpha_{l,r}(\bar{p}) \bar{p}^x(l, r).$$

Тогда для $m \geq n$ справедливо

$$\begin{aligned} \|s_m - s_n\| &= \left\| \sum_{r=n+1}^m \left(p^r (r-x) \frac{\sum_{l=0}^{x-1} p^l e^l}{\sum_{t=0}^{x-1} p^t (x-t)} + p^r e^r \right) \right\| = \\ &= \sum_{r=n+1}^m p^r \left(r^2 + (r-x) \frac{\sum_{t=0}^{x-1} p^t t^2}{\sum_{t=0}^{x-1} p^t (x-t)} \right). \end{aligned}$$

Так как $\mathbb{D} \bar{p} < \infty$, последовательность s_n — фундаментальна. Ее сходимость к \bar{p} следует из покомпонентного равенства векторов вероятностных распределений:

$$\begin{aligned} \sum_{r=x+1}^{\infty} \alpha_{l,r}(\bar{p}) \frac{r-x}{r-l} &= p^l, \quad l = \overline{0, x-1}, \\ \sum_{l=0}^{x-1} \alpha_{l,r}(\bar{p}) \frac{x-l}{r-l} &= p^r, \quad r = \overline{x+1, \infty}. \end{aligned}$$

Отсюда в силу леммы 3 получаем, что ряд в разложении (5) сходится к \bar{p} по норме.

Доказательство для нецелых значений x проводится аналогично.

Доказательство. [Лемма 5] Можно показать, что

$$a^{s,\beta}(\hat{\sigma}_k, j) = \begin{cases} s - \beta k - (1 - \beta)j - \beta \sigma_{k+1}^s, & j < k, \\ (s - k - \beta) \sigma_{k+1}^s, & j = k, \\ (k + \beta - s) \sigma_k^s, & j = k + 1, \\ (1 - \beta)k + \beta j - s + (1 - \beta) \sigma_{k+1}^s, & j > k + 1. \end{cases}$$

Отсюда непосредственно следует утверждение леммы.

Доказательство. [Теорема 2] Для $\bar{p} \in P(l, r)$ стратегия $\bar{\sigma}^*$ определяется аналогично работе [5] с заменой 0 и m на l и r соответственно. Из леммы 4 нетрудно вывести, что

$$L_1^k(\bar{\sigma}^*) = 0, \quad L_1^{k+\beta}(\bar{\sigma}^*) = \beta(1 - \beta).$$

Для $k = \overline{l+1, r-1}$ имеем

$$\begin{aligned} L_\infty^k(\bar{\sigma}^*) &= L_1^k(\bar{\sigma}^*) + q^k L_\infty^{k-1+\beta}(\bar{\sigma}^*) + q^{k+1} L_\infty^{k+\beta}(\bar{\sigma}^*) = \\ &= \beta L_\infty^{k-1+\beta}(\bar{\sigma}^*) + (1 - \beta) L_\infty^{k+\beta}(\bar{\sigma}^*). \end{aligned}$$

Аналогично для $k = \overline{l, r-1}$ получаем

$$\begin{aligned} L_\infty^{k+\beta}(\bar{\sigma}^*) &= L_1^{k+\beta}(\bar{\sigma}^*) + q^k L_\infty^k(\bar{\sigma}^*) + q^{k+1} L_\infty^{k+1}(\bar{\sigma}^*) = \\ &= \beta(1 - \beta) + (1 - \beta) L_\infty^k(\bar{\sigma}^*) + \beta L_\infty^{k+1}(\bar{\sigma}^*). \end{aligned}$$

Полученная система (7) является системой с трехдиагональной матрицей и решается методом прогонки (см. [5]).

Литература

1. ДОМАНСКИЙ В.К., КРЕПС В.Л. *Теоретико-игровая модель биржевых торгов: стратегические аспекты формирования цен на фондовых рынках* // Журнал Новой экономической ассоциации. – 2011. – Вып. 11. – С. 39–62.
2. КРЕПС В.Л. *Повторяющиеся игры, моделирующие биржевые торги, и возвратные последовательности* // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2009. – №4. – С. 109–120.
3. ПОЛОВИНКИН Е.С., БАЛАШОВ М.В. *Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа*. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.
4. ПЬЯНЫХ А.И. *Об одной модификации модели биржевых торгов с инсайдером* // Математическая теория игр и ее приложения. – 2014. – Т. 6, №4. – С. 68–84.
5. ПЬЯНЫХ А.И. *Многошаговая модель биржевых торгов с асимметричной информацией и элементами переговоров* // Вестн. Моск. ун-та. Сер.15. Вычисл. матем. и киберн. – 2016. – №1. – С. 34–40.

6. САНДОМИРСКАЯ М.С., ДОМАНСКИЙ В.К. *Решение одношаговой игры биржевых торгов с неполной информацией* // Математическая теория игр и ее приложения. – 2012. – Т. 4, №1. – С. 32–54.
7. AUMANN R.J., MASCHLER M.B. *Repeated Games with Incomplete Information*. – Cambridge, Mass.: The MIT Press, 1995.
8. CHATTERJEE K., SAMUELSON W. *Bargaining under Incomplete Information* // Operations Research. – 1983. – Vol. 31, No. 5. – P. 835–851.
9. DE MEYER B. *On the strategic origin of Brownian motion in finance* // International Journal of Game Theory. – 2002. – Vol. 31, No. 2. – P. 285–319.
10. DOMANSKY V. *Repeated games with asymmetric information and random price fluctuations at finance markets* // International Journal of Game Theory. – 2007. – Vol. 36, No. 2. – P. 241–257.
11. MERTENS J.-F., SORIN S., ZAMIR S. *Repeated games*. – Cambridge: Cambridge University Press, 2015.

MODIFIED MULTISTAGE BIDDING MODEL WITH A COUNTABLE SET OF STATES

Artem Pyanykh, Lomonosov Moscow State University, Moscow,
post-graduate student (artem.pyanykh@gmail.ru).

Abstract: A simplified financial market model with two players bidding for one unit of a risky asset for several consecutive stages is considered. First Player (an insider) is informed about the liquidation price of the asset which can take any value in \mathbb{Z}_+ . At the same time Second Player knows only probability distribution \bar{p} of the price and that First Player is an insider. At each bidding stage the players place integer bids. The higher bid wins and one unit of the asset is transacted to the winning player at the cost equal to a convex combination of the bids with some coefficient β . After each stage the bids are announced to the players. In this paper we obtain a solution to an infinitely long zero-sum game for distributions \bar{p} with finite variation. The optimal strategy of the insider player generates a non-symmetric random walk of the asset price which supports the hypothesis that stock price fluctuations have a strategic origin.

Keywords: repeated zero-sum games, asymmetric information, insider trading.

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии Л. А. Петросьяном.*

*Поступила в редакцию 26.04.2016.
Дата опубликования 30.11.2016.*

УДК 681.5

ББК 30.17

АНАЛИЗ И ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК БЕЗОПАСНОСТИ АВИАЦИОННЫХ ТРАНСПОРТНЫХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ УРАВНЕНИЙ СИСТЕМНОЙ ДИНАМИКИ¹

**Резчиков А. Ф.², Кушников В. А.³,
Ивашенко В. А.⁴, Цесарский Л. Г.⁵, Богомолов А. С.⁶,
Филимонюк Л. Ю.⁷, Адамович К. Ю.⁸**
*(Институт проблем точной механики
и управления РАН, Саратов, ОАО «Ил», Москва)*

Разработана совокупность моделей системной динамики, позволяющая осуществлять анализ и прогнозирование основных характеристик безопасности авиационных транспортных систем. Предложен граф причинно-следственных связей между этими характеристиками и внешними воздействиями, положенный в основу построения системы дифференциальных уравнений, решение которой обеспечивает прогнозирование характеристик безопасности на заданных интервалах функционирования. Приведен пример прогнозирования характеристик безопасности пассажирских перевозок в СНГ.

¹ Работа поддержана грантом РФФИ 16-01-00536.

² Александр Федорович Резчиков, член-корреспондент РАН, научный руководитель ИПТМУ РАН (iptmuran@san.ru).

³ Вадим Алексеевич Кушников, директор ИПТМУ РАН, доктор технических наук, профессор (iptmuran@san.ru).

⁴ Владимир Андреевич Иващенко, доктор технических наук, ученый секретарь ИПТМУ РАН, профессор (iptmuran@san.ru).

⁵ Лев Гершионович Цесарский, ведущий инженер-конструктор ОАО «Ил» (iptmuran@san.ru).

⁶ Алексей Сергеевич Богомолов, кандидат физико-математических наук, с.н.с. ИПТМУ РАН, доцент (alexbogomolov@ya.ru).

⁷ Леонид Юрьевич Филимонюк, кандидат технических наук, научный сотрудник ИПТМУ РАН (iptmuran@san.ru).

⁸ Ксения Юрьевна Адамович, аспирантка ИПТМУ РАН (adamovich.ks@gmail.com).

Ключевые слова: авиационная транспортная система, функционирование системы, характеристики безопасности системы, системная динамика, прогнозирование.

1. Введение

Интенсивное развитие отечественного авиастроения, выход на зарубежные рынки авиаперевозок и поддержание обороноспособности страны невозможно обеспечить без существенного повышения уровня безопасности полетов, снижения количества и тяжести аварий и катастроф. Это приобретает особую значимость в условиях, когда количество аварий и авиационных происшествий в странах СНГ за 2000–2011 гг. не имеет выраженной тенденции к уменьшению (рис. 1) [20].

Исследования в области повышения безопасности авиационных перевозок в настоящее время интенсивно ведутся на стыке многих наук, таких как авиастроение, машиностроение, приборостроение, информатика, теория управления и др. [1, 2, 4, 6, 7, 10–13, 15, 18].

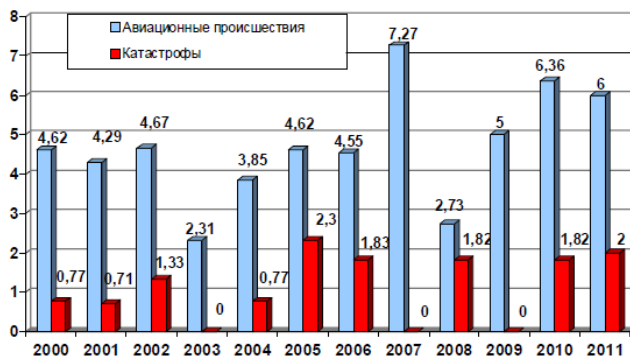


Рис. 1. Количество происшествий и катастроф в гражданской авиации стран Межгосударственного авиационного комитета на 100 тыс. часов налета в 2000–2011 гг.

Один из перспективных путей решения данной проблемы неразрывно связан с применением теории системного анализа и современных средств обработки информации, направленных на совершенствование математических моделей, методов, алгоритмов управления авиационными транспортными системами (АТС) [18].

Разработка теоретических основ управления сложными человеко-машинными системами [18] и практическое использование этих основ позволяют создавать автоматизированные комплексы управления АТС по различным показателям эффективности их функционирования, включая безопасность [11, 16, 17, 19].

Несмотря достигнутые успехи в этом направлении, в настоящее время практически отсутствуют сведения об автоматизированных комплексах управления АТС, позволяющих осуществлять прогнозирование характеристик их безопасности для обеспечения своевременного принятия решений по предотвращению аварий и катастроф.

Необходимо отметить, что решение данной проблемы посредством привлечения даже значительного числа экспертов в области авиации представляется весьма затруднительным. Это обусловлено тем, что учесть большое количество положительных и отрицательных причинно-следственных взаимосвязей между характеристиками безопасности АТС, тем более в сжатые сроки, возможно только с применением современной вычислительной техники.

К тому же обеспечение безопасности функционирования АТС требует системного учета ресурсов, позволяющих осуществлять анализ и парирование всевозможных критических сочетаний ситуаций, вызванных критическими сочетаниями событий, которые возникают при их функционировании [5]. Это также требует применения вычислительной техники.

2. Постановка задачи

Объектом исследования являются АТС стран, подписавших в 1991 году межправительственное соглашение о гражданской авиации и об использовании воздушного пространства – соглашение о Межгосударственном авиационном комитете (МАК).

Задача данного исследования заключается в разработке на базе аппарата системной динамики математической модели для прогнозирования характеристик безопасности функционирования АТС, что необходимо для своевременного принятия решений по предотвращению аварий и катастроф.

3. Метод решения задачи

Для решения задачи предлагается разработать математическую модель на основе системной динамики [8, 9, 25]. Для этого необходимо:

- определить совокупность прогнозируемых переменных, характеризующих безопасность функционирования АТС, и внешние факторы, оказывающие влияние на эти переменные;
- построить граф причинно-следственных связей, отражающий взаимосвязи между переменными и влияние внешних факторов на них [14];
- записать систему уравнений системной динамики и разработать алгоритм ее решения;
- в результате решения системы уравнений определить значения прогнозируемых переменных на заданных интервалах времени;
- выполнить анализ адекватности построенной модели по ретроспективным данным.

Изучение особенностей функционирования АТС, анализ отчетов МАК [20] за многолетний период и консультации со специалистами позволили выделить следующий список характеристик, влияющих на безопасность АТС с учетом того, что разработанная модель предназначена для использования

лицами, принимающими решения по планированию функционирования АТС на длительных временных интервалах:

$X_{\text{трен}}(t)$ – время подготовки пилотов на современных сертифицированных тренажерах (часов в год);

$X_{\text{про}}(t)$ – среднее число авиационных происшествий на 100 тыс. часов налёта в год, ГОСТ В 23743-88 (среднее число аварий не рассматривается в модели, так как оно сильно коррелирует со средним числом происшествий);

$X_{\text{рег}}(t)$ – доля воздушных судов, оснащенных системой аварийной регистрации;

$X_{\text{инф}}(t)$ – степень обеспеченности руководства и службы управления воздушным движением (УВД) информацией об авариях (ввиду того, что некоторые произошедшие аварии расследуются достаточно долго, наиболее полная возможная информация о них может отсутствовать);

$X_{\text{пов}}(t)$ – повторяемость причин авиационных происшествий (отношение количества авиационных происшествий с ранее установленной причиной к общему количеству происшествий на 100 000 часов налёта);

$X_{\text{нар}}(t)$ – среднее количество нарушений инструкций пилотами на 100 тыс. часов налёта (может быть получено на основании результатов расследования авиационных происшествий, в которых выделяются нарушения, ставшие причинами аварий);

$X_{\text{кон}}(t)$ – доля воздушных судов, находящихся на авторском контроле в процессе эксплуатации.

Кроме того, в состав модели входят параметры (внешние факторы), которые в модели полагаются зависящими от перечисленных выше характеристик АТС, но влияют на них. Данный список основан на изучении отчетов МАК, в выводах которых перечисленные факторы выделяются как оказывающие значительное влияние на безопасность АТС, что также подтверждается экспертами:

Res(t) – средняя по воздушным судам выработка ресурса до списания (ГОСТ В 23743-88);

For(t) – доля иностранных воздушных судов;

Obs(t) – доля полетов с использованием системы наблюдения за полетами (Automatic dependent surveillance-broadcast, ADS-B – система, отображающая трафик движения воздушных судов);

Exper(t) – средний лётный стаж пилотов;

Price(t) – стоимость авиационного топлива;

Port(t) – средняя выработка срока службы аэродромного оборудования.

Каждая переменная системы имеет связи с другими переменными и внешними факторами, увеличивающими или уменьшающими ее значение. Для отражения этого взаимодействия построен граф причинно-следственных связей. При этом для каждой переменной в графе существует вершина с обозначением положительных и отрицательных связей.

Вершина графа имеет два дополнительных терминала, в верхний из которых входят дуги от вершин, увеличивающих значение соответствующей переменной, а в нижний – дуги от вершин, уменьшающих ее значение.

Например, на рис. 2 представлена вершина графа, обозначающая переменную $X_{нар}$ – среднее количество нарушений инструкций пилотами.

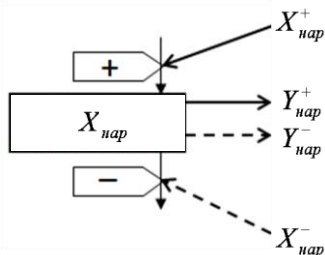


Рис. 2. Вершина графа причинно-следственных связей

Переменные и внешние факторы, положительно влияющие на рост $X_{нар}$, обозначены через $X_{нар}^+$, а отрицательно влияющие – через $X_{нар}^-$. Переменные системы, на рост которых $X_{нар}$ влияет положительно, обозначены через $Y_{нар}^+$, а отрицательно – через

$Y_{\text{нар}}^-$. Пунктирные линии обозначают отрицательные, а сплошные линии – положительные связи.

На рис. 3 представлен граф причинно-следственных связей переменных, характеризующих безопасность авиационной транспортной системы.

На основе графа причинно-следственных связей строится система дифференциальных уравнений, каждое из которых имеет вид

$$\frac{dX_i}{dt} = X_i^+ - X_i^-; \quad F_i^+(\bullet) = S_i^+ \Pi_i^+; \quad F_i^-(\bullet) = S_i^- \Pi_i^-,$$

где X_i – моделируемая характеристика АТС; S_i^+ и Π_i^+ – соответственно сумма внешних факторов и произведение переменных, положительно влияющих на рост переменной X_i , а S_i^- и Π_i^- – отрицательно влияющих.

Таким образом, для составления дифференциальных уравнений системной динамики используется соотношение вида

$$\frac{dX_i}{dt} = S_i^+ \Pi_i^+ - S_i^- \Pi_i^-.$$

На основе данного соотношения построена система дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dX_{\text{трэн}}}{dt} &= f_{\text{инф-трэн}}(X_{\text{инф}}) \mathbf{Obs} - \mathbf{Price}, \\ \frac{dX_{\text{про}}}{dt} &= (\mathbf{Res} + \mathbf{For} + \mathbf{Port}) f_{\text{нар-про}}(X_{\text{нар}}) - \\ &\quad - (\mathbf{Exper} + \mathbf{Obs}) f_{\text{трэн-про}}(X_{\text{трэн}}) f_{\text{рег-про}}(X_{\text{рег}}) \times \\ &\quad \times f_{\text{инф-про}}(X_{\text{инф}}) f_{\text{кон-про}}(X_{\text{кон}}), \\ \frac{dX_{\text{рег}}}{dt} &= f_{\text{кон-рег}}(X_{\text{кон}}) - \mathbf{Price}, \\ (1) \quad \frac{dX_{\text{инф}}}{dt} &= f_{\text{рег-инф}}(X_{\text{рег}}) \mathbf{Obs}, \\ \frac{dX_{\text{пов}}}{dt} &= -(\mathbf{Exper} + \mathbf{Obs}) f_{\text{трэн-пов}}(X_{\text{трэн}}) f_{\text{рег-пов}}(X_{\text{рег}}) \times \\ &\quad \times f_{\text{инф-пов}}(X_{\text{инф}}) f_{\text{кон-пов}}(X_{\text{кон}}), \end{aligned}$$

$$\frac{dX_{\text{нар}}}{dt} = (\mathbf{Price} + \mathbf{For}) - f_{\text{трен-нар}}(X_{\text{трен}})\mathbf{Obs},$$

$$\frac{dX_{\text{кон}}}{dt} = f_{\text{рег-кон}}(X_{\text{рег}})f_{\text{инф-кон}}(X_{\text{инф}})\mathbf{Obs} - \mathbf{For}.$$

Выражения вида $f_{A-B}(X_A)$ обозначают зависимости переменной X_B от X_A , определяемые на основе регрессионных моделей.

С учетом данных выражений система (1) примет вид

$$\frac{dX_{\text{трен}}}{dt} = 0,12X_{\text{инф}}\mathbf{Obs}(t) - 0,02\mathbf{Price}(t),$$

$$\begin{aligned} \frac{dX_{\text{про}}}{dt} = & 0,0004(\mathbf{Res}(t) + \mathbf{For}(t) + \mathbf{Port}(t))(0,8X_{\text{нар}}^2 - \\ & - 0,4X_{\text{нар}}) - 0,08(\mathbf{Exper}(t) + \mathbf{Obs}(t)) \left(\frac{4}{X_{\text{трен}}^2} + \right. \\ & \left. + \lg X_{\text{трен}} \right) \lg 0,25X_{\text{рег}} \lg 0,25X_{\text{инф}} \left(\frac{\lg X_{\text{кон}}}{X_{\text{кон}}^2} \right), \end{aligned}$$

$$\frac{dX_{\text{рег}}}{dt} = 0,15 \lg X_{\text{кон}} - 0,001 \mathbf{Price}(t),$$

$$(2) \quad \frac{dX_{\text{инф}}}{dt} = 0,1X_{\text{рег}}\mathbf{Obs}(t),$$

$$\begin{aligned} \frac{dX_{\text{пов}}}{dt} = & -0,005 (\mathbf{Exper}(t) + \mathbf{Obs}(t))X_{\text{трен}} \lg 0,125X_{\text{рег}} \times \\ & \times X_{\text{инф}} \lg 0,125X_{\text{кон}}, \end{aligned}$$

$$\frac{dX_{\text{нар}}}{dt} = 0,01(\mathbf{Price}(t) + \mathbf{For}(t)) - 0,5 \lg^2 X_{\text{трен}}\mathbf{Obs}(t),$$

$$\frac{dX_{\text{кон}}}{dt} = 0,4X_{\text{рег}} \lg X_{\text{инф}}\mathbf{Obs}(t) - 0,01 \mathbf{For}(t),$$

где внешние факторы:

$$\mathbf{Res}(t) = 1 + 0,5 \sin t,$$

$$\mathbf{Foreign}(t) = 0,25t^2 - 0,2t + 1,$$

$$(3) \quad \mathbf{Obs}(t) = 1 + 0,05t,$$

$$\mathbf{Exper}(t) = 1 + 0,7 \cos t,$$

$$\mathbf{Price}(t) = 0,25t^2 - 1,1t + 2 + 0,5t \sin t,$$

$$\mathbf{Port}(t) = 1 + 0,2 \sin t.$$

Система уравнений (3) получена на основе использования принципов системной динамики. Для формирования правых частей дифференциальных уравнений использованы функции, аппроксимирующие значения внешних факторов модели. Коэффициенты регрессии в системе (2) получены на основе обработки статистических данных [3, 20–24].

При составлении уравнений системы (2) значения переменных и внешних факторов нормируются по соответствующему году. Время исчисляется количеством лет, за момент $t = 0$ принимается 1992 год. С учетом (2) и (3) система (1) приобретает вид

$$\frac{dX_{\text{трн}}}{dt} = 0,12X_{\text{инф}} + 0,06X_{\text{инф}} \sin t - 0,005t^2 + 0,022t -$$

$$- 0,04 - 0,01t \sin t,$$

$$\frac{dX_{\text{про}}}{dt} = 9,6 \cdot 10^{-3} X_{\text{нар}}^2 + 2,24 \cdot 10^{-4} X_{\text{нар}}^2 \sin t + 8 \cdot 10^{-5} X_{\text{нар}}^2 t^2 -$$

$$- 6,4 \cdot 10^{-5} X_{\text{нар}}^2 t - 4,8 \cdot 10^{-4} X_{\text{нар}} + 1,12 \cdot 10^{-4} X_{\text{нар}} \sin t +$$

$$+ 4 \cdot 10^{-5} X_{\text{нар}} t^2 - 3,2 \cdot 10^{-5} X_{\text{нар}} t -$$

$$- (0,016 + 0,056 \cos t + 0,04 \sin t) \times$$

$$\times (4 + X_{\text{трн}}^2 \lg X_{\text{трн}}) \lg 0,25 X_{\text{пер}} \lg 0,25 X_{\text{инф}} \left(\frac{\lg X_{\text{кон}}}{X_{\text{трн}}^2 X_{\text{кон}}^2} \right),$$

$$\frac{dX_{\text{пер}}}{dt} = 0,15 \lg X_{\text{кон}} - 2,5 \cdot 10^{-4} t^2 + 1,1 \cdot 10^{-3} t - 2 \cdot 10^{-3} -$$

$$- 5 \cdot 10^{-4} t \sin t,$$

$$\frac{dX_{\text{инф}}}{dt} = 0,1X_{\text{пер}} + 0,05X_{\text{пер}} \sin t,$$

$$\begin{aligned} \frac{dX_{\text{пов}}}{dt} = & -0,01X_{\text{трен}}X_{\text{инф}} \lg 0,125X_{\text{рег}} \lg 0,125X_{\text{кон}} - 3 \cdot 10^{-3} \cos t \times \\ & \times X_{\text{трен}}X_{\text{инф}} \lg 0,125X_{\text{рег}} \lg 0,125X_{\text{кон}} - \\ & - 2,5 \cdot 10^{-3} \sin t X_{\text{трен}}X_{\text{инф}} \lg 0,125X_{\text{рег}} \lg 0,125X_{\text{кон}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dX_{\text{нар}}}{dt} = & 5 \cdot 10^{-3} t^2 - 0,013t + 0,03 + 5 \cdot 10^{-3} t \sin t - 0,5 \lg^2 X_{\text{трен}} - \\ & - 0,25 \lg^2 X_{\text{трен}} \sin t, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dX_{\text{кон}}}{dt} = & 0,4X_{\text{рег}} \lg X_{\text{инф}} + 0,2X_{\text{рег}} \lg X_{\text{инф}} \sin t - 0,025t^2 + \\ & + 2 \cdot 10^{-3} t - 0,01. \end{aligned}$$

Полученная система нелинейных дифференциальных уравнений решается с использованием метода Рунге-Кутты 4-го порядка. Ниже приведены результаты прогнозирования характеристик безопасности авиационной транспортной системы на временном интервале с 1992 г. по 2009 г. Они позволяют выявить основные тенденции изменения данных характеристик, что необходимо при принятии управленческих решений для обеспечения безопасности функционирования АТС.

4. Анализ результатов решения задачи

При проведении вычислительного эксперимента использованы статистические данные по авиационным происшествиям для 100 тыс. часов налёта за 20 лет [20]. Система (4) решена при следующих начальных условиях: $X_{\text{трен}}(0) = 1$; $X_{\text{про}}(0) = 1$; $X_{\text{рег}}(0) = 1$; $X_{\text{инф}}(0) = 1$; $X_{\text{пов}}(0) = 2$; $X_{\text{нар}}(0) = 3$; $X_{\text{кон}}(0) = 1$. Физический смысл данных начальных условий заключается в том, что значения функций в начальном 1992 году берутся по отношению к соответствующим показателям базового года.

Среди полученных численных решений особый интерес представляет график количества авиационных происшествий $X_{\text{про}}(t)$ (рис. 4).

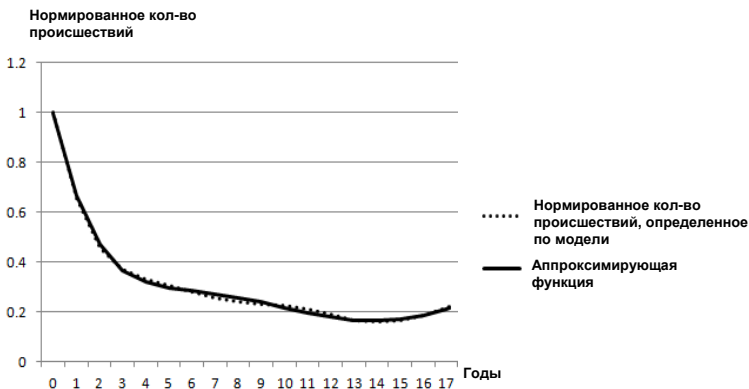


Рис. 4. Динамика нормированного количества авиационных происшествий

Данный график не имеет волнообразных элементов. Это означает, что влияние стоимости авиационного керосина, которая имеет периодическую компоненту, в общем случае отрицательно сказывающейся на количестве происшествий, скомпенсировано постоянно растущим числом более экономичных иностранных воздушных судов и возрастанием времени подготовки экипажей на тренажерах при переобучении и повышении классной квалификации.

Наименьшее количество происшествий $X_{\text{про}}(t)$ зафиксировано в 2006 г., что объясняется минимумом повторяемости инцидентов и минимальным числом зафиксированных нарушений инструкций экипажами воздушных судов, а также сравнительно невысокой стоимостью авиационного керосина, а также возросшим временем подготовки экипажей на тренажерах.

Функция $X_{\text{про}}(t)$ убывает с 1992 г. по 2006 г., что совпадает с промежутком пополнения парка иностранными самолетами, внедрением тренажеров и тренировками экипажей на них.

Функция $X_{\text{про}}(t)$ возрастает с 2006 г. по 2009 г., что объясняется сокращением расходов авиакомпаний, повлекшем за собой уменьшение числа новых воздушных судов, а также

сокращение числа часов работы на тренажерах на фоне роста стоимости авиационного керосина.

На графике имеется точка перегиба, соответствующая 1999 г. – началу периода внедрения систем аварийной регистрации нарушений функционирования пилотажных комплексов нового поколения, что привело к более быстрому сокращению количества ошибок членов экипажей.

Результаты приведенного анализа подтверждаются статистическими данными [3].

На рис. 5 приведена оценка соответствия полученных значений функции $\hat{X}_{про}(t)$ реальным статистическим данным за 1992–2009 гг. [3].

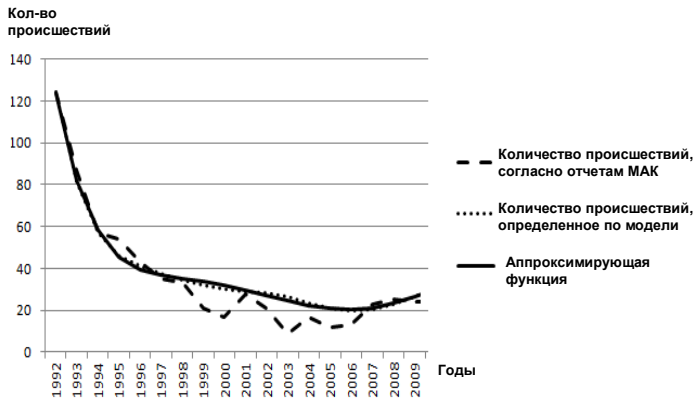


Рис. 5. Фактическое количество авиационных происшествий и его аппроксимация

Из рис. 5 следует, что количество происшествий, определенное по разработанной модели, по тенденции совпадает с данными статистики [3] и наиболее близко к ним в периоды 1992–1998 и 2007–2008 гг.

С целью подтверждения адекватности модели получены значения остаточной, полной регрессии и коэффициента детерминации: $S^2_{\hat{X}_{про} - \hat{X}_{про}} = 51,83$, $S^2_{\hat{X}_{про}} = 815$, $D=0,94$, которые

свидетельствуют о возможности практического использования данной модели.

Для прогноза количества авиационных происшествий в 2010–2013 гг. на основе статистики за 1992–2009 гг. использована аппроксимирующая функция в виде многочлена 6-го порядка:

$$\bar{X}_{\text{про}}(t) = -1,43 \cdot 10^{-5} t^6 - 8,06 \cdot 10^{-6} t^5 + 0,061 t^4 - 1,22 t^3 + 10,82 t^2 - 48,13 t + 123,44$$

В таблице 2 представлены 4 данные по количеству авиационных происшествий в РФ в 2010–2013 гг. на основе официальной статистики и результаты прогнозов, полученные используемыми методами.

Выполним сравнение погрешности прогноза для построенной модели. Для этого вычислим Λ_1 и Λ_2 :

$$\Lambda_1 = \max |X_{\text{про}}(t) - \xi(t)|, \quad \Lambda_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_{\text{про}}(t) - \bar{X}_{\text{про}}(t))^2,$$

где $X_{\text{про}}(t)$ – действительное значение количества авиационных происшествий в t -м году, $\bar{X}_{\text{про}}(t)$ – значение количества происшествий, вычисленное одним из выбранных методов прогнозирования.

Полученные результаты представлены в таблице 1.

Таблица 1. Данные статистики, прогнозы авиационных происшествий за 2010–2013 гг. и ошибки прогнозов

Годы, ошибки	2010 г.	2011 г.	2012 г.	2013 г.	Λ_1	Λ_2
$\bar{X}_{\text{про}}(t)$	25	24	25	24	14	10
$X_{\text{про}}(t)$	31	36	37	31	7	15
Количество авиационных происшествий (фактические данные)	24	38	39	29	–	–

Прогноз, полученный при использовании модели системной динамики, дает меньшие значения ошибок Λ_1 и Λ_2 .

5. Хаотические явления в системе

Разработанная модель позволяет провести вычислительные эксперименты для выявления условий возникновения неустойчивых режимов при функционировании АТС и формирования управляющих воздействий для их предотвращения.

Ниже приведен один из вариантов такого режима, который получен при следующих значениях переменных и внешних факторов системы уравнений (4):

- время подготовки пилотов на современных сертифицированных тренажерах – 22 часа в год (нормированное значение $X_{\text{трен}}(t) = 2,2$);

- доля воздушных судов, оснащенных системой аварийной регистрации – 100% (нормированное значение $X_{\text{рег}}(t) = 5$);

- доля воздушных судов, находящихся на авторском контроле эксплуатации – 80% (нормированное значение $X_{\text{кон}}(t) = 10$);

- обеспеченность руководства и службы УВД информацией об авариях – 70% (нормированное значение $X_{\text{инф}}(t) = 10$);

- средняя по воздушным судам выработка ресурса до списания – 80% (нормированное значение $\mathbf{Res}(t) = 10$);

- доля иностранных воздушных судов составляло 50% (нормированное значение $\mathbf{For}(t) = 1$);

- доля полетов с использованием системы наблюдения за полетами – 50% (нормированное значение $\mathbf{Obs}(t) = 5$);

- средний лётный стаж пилотов – 15 лет (нормированное значение $\mathbf{Exper}(t) = 5$);

- стоимость авиационного топлива – 250 тыс. руб. за тонну (нормированное значение $\mathbf{Price}(t) = 10$);

- средняя выработка срока службы аэродромного оборудования – 80 % (нормированное значение $\mathbf{Port}(t) = 5$).

В результате система уравнений (4) примет вид

$$\begin{aligned}
 \frac{dX_{\text{нар}}}{dt} &= (\mathbf{Price} + \mathbf{For}) \lg(0,07 X_{\text{рег}}) X_{\text{нар}} - \mathbf{Obs} \lg \frac{X_{\text{трени}}}{8} \lg(X_{\text{кон}}) X_{\text{пов}}, \\
 (5) \quad \frac{dX_{\text{пов}}}{dt} &= - \left(X_{\text{про}} - \lg X_{\text{инф}} X_{\text{трени}} \lg X_{\text{рег}}^2 \frac{X_{\text{инф}}}{X_{\text{рег}}} \right) X_{\text{нар}} - \frac{\lg X_{\text{кон}}}{2} X_{\text{пов}}, \\
 \frac{dX_{\text{про}}}{dt} &= 0,6(\mathbf{Res} + \mathbf{For} + \mathbf{Port}) X_{\text{нар}} X_{\text{пов}} - 0,1(\mathbf{Exper} + \mathbf{Obs}) \times \\
 &\quad \times \left(\frac{4}{X_{\text{трени}}^2} + \lg X_{\text{трени}} \right) \frac{\lg X_{\text{кон}}}{X_{\text{кон}}^2} \lg 4 X_{\text{рег}} X_{\text{инф}} \lg 4 X_{\text{инф}} X_{\text{про}}.
 \end{aligned}$$

П

ри фиксированных значениях $X_{\text{трени}}(t) = 2,2$; $X_{\text{рег}}(t) = 5$; $X_{\text{кон}}(t) = 10$; $X_{\text{инф}}(t) = 10$; $\mathbf{Res}(t) = 10$; $\mathbf{For}(t) = 1$; $\mathbf{Obs}(t) = 5$; $\mathbf{Exper}(t) = 5$; $\mathbf{Price}(t) = 10$; $\mathbf{Port}(t) = 5$ система дифференциальных уравнений (5) представляет собой известную систему уравнений Лоренца, имеющую вид

$$\begin{cases} x' = \sigma(y - x), \\ y' = x(r - z) - y, \\ z' = xy - bz; \end{cases}$$

где $x = X_{\text{нар}}$, $y = X_{\text{пов}}$, $z = X_{\text{про}}$, $\sigma = \mathbf{Obs} \log \frac{X_{\text{трени}}}{8} \log X_{\text{кон}} \approx$

$\approx \mathbf{Price} + \mathbf{For} = 10$, $r = -\log(X_{\text{инф}}) X_{\text{трени}} \lg X_{\text{рег}}^2 \frac{X_{\text{инф}}}{X_{\text{рег}}} \approx 28$,

$b = \left(\frac{4}{X_{\text{трени}}^2} + \lg X_{\text{трени}} \right) \frac{\lg X_{\text{кон}}}{X_{\text{кон}}^2} \lg(4 X_{\text{рег}}) X_{\text{инф}} \lg(4 X_{\text{инф}}) \approx 8/3$.

На рис. 6 представлен фазовый портрет (график аттрактора) исследуемой системы.

Таким образом, при приведенных выше сочетаниях значений переменных и внешних факторов система уравнений (5) демонстрирует нестабильное, хаотическое, поведение.

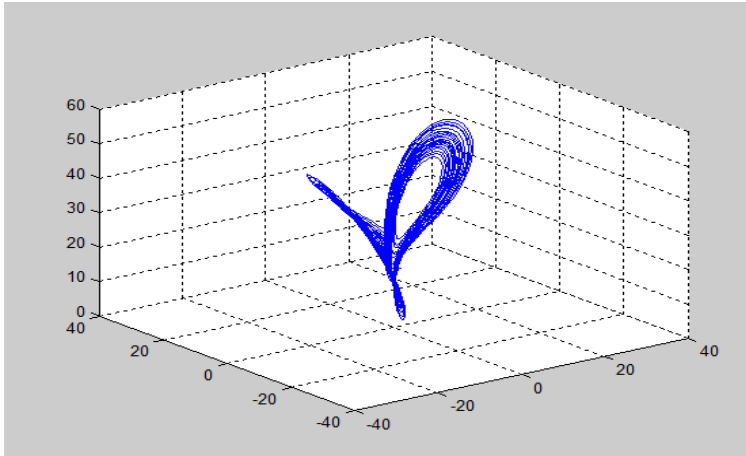


Рис. 6. Фазовый портрет системы при $X_{мрен}(t) = 2,2$, $X_{pec}(t) = 5$,
 $X_{кон}(t) = 10$, $X_{инф}(t) = 10$, $Res(t) = 10$, $For(t) = 1$, $Obs(t) = 5$,
 $Exper(t) = 5$, $Price(t) = 10$, $Port(t) = 5$

6. Заключение

Разработаны модели системной динамики, позволяющие осуществить прогнозирование характеристик безопасности авиационных транспортных систем.

Построен граф причинно-следственных связей, отражающий взаимосвязи между прогнозируемыми переменными. На основе указанного графа составлена система нелинейных дифференциальных уравнений, решение которой позволяет осуществлять анализ и прогнозирование характеристик безопасности функционирования авиационных транспортных систем на заданных интервалах их функционирования.

С помощью разработанной модели выявлены тенденции изменения прогнозируемых характеристик, что может быть полезно при принятии решений для обеспечения безопасности функционирования авиационных транспортных систем.

Приведен пример практического применения предложенного подхода для прогнозирования характеристик безопасности авиационных транспортных систем. Рассмотрен

один из режимов их функционирования, при котором возникают хаотические явления.

Литература

1. ИВАНОВ А.С., ЛАПКОВСКИЙ Р.Ю., УКОВ Д.А., ФИЛИМОНЮК Л.Ю. *Кибернетический подход к моделированию разнородных процессов в мехатронных системах* // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2011. – №1(118). – С. 16–20.
2. ИВАНОВ А.С., ЛАПКОВСКИЙ Р.Ю., УКОВ Д.А., ФИЛИМОНЮК Л.Ю. *Причинно-следственный подход к расследованию аварийных ситуаций в человеко-машинных системах* // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2012. – №2. – С. 38–43.
3. КАЗАК В.М., ТАЧИНИНА Е.Н., ТАЧИНИН Е.В. *Концепция повышения безотказности полета путем применения бортовой интеллектуальной интегрированной системы управления в особых ситуациях в полете* [Электронный ресурс]. – URL: http://www.mak.ru/russian/info/doklad_bp/2005/doklad_2000-2004 (дата обращения: 02.10.2015).
4. КЛЮЕВ В.В., БАЙБУРИН В.Б., РЕЗЧИКОВ А.Ф. и др. *Модели и алгоритмы мониторинга глобальной безопасности на основе деревьев событий* // Контроль. Диагностика. – 2015. – №8. – С. 70–74.
5. КЛЮЕВ В.В., НОВОЖИЛОВ Г.В., РЕЗЧИКОВ А.Ф., БОГОМОЛОВ А.С. *Ресурсный подход к обеспечению безопасности систем «ЧЕЛОВЕК-ОБЪЕКТ-СРЕДА»*. – М.: Издательский дом «Спектр», 2014. – 158 с.
6. КЛЮЕВ В.В., РЕЗЧИКОВ А.Ф., БОГОМОЛОВ А.С., ФИЛИМОНЮК Л.Ю. *Взаимодействие ресурсов сложных человеко-машинных систем в критических ситуациях* // Контроль. Диагностика. – 2013. – №4. – С. 41–45.

7. КЛЮЕВ В.В., РЕЗЧИКОВ А.Ф., БОГОМОЛОВ А.С., ФИЛИМОНЮК Л.Ю. *Концепция комплексного ресурса для исследования безопасности систем «Человек – Объект – Среда»* // Контроль. Диагностика. – 2013. – №8. – С. 44–55.
8. КЛЮЕВ В.В., РЕЗЧИКОВ А.Ф., КУШНИКОВ В.А. и др. *Анализ критических ситуаций, вызванных неблагоприятным течением обстоятельств* // Контроль. Диагностика. – 2014. – № 7. – С. 12–16.
9. МАХОВ С.А. *Математическое моделирование мировой динамики и устойчивого развития на примере модели Форрестера* // Новое в синергетике: Новая реальность, новые проблемы, новое поколение. – М.: Наука, 2007. – С. 79–101.
10. НЕЙМАРК М.С., ЦЕСАРСКИЙ Л.Г., ФИЛИМОНЮК Л.Ю. *Модель поддержки принятия решений при входе воздушных судов в зону ответственности аэропорта* // Общероссийский научно-технический журнал «Полет». – 2013. – №3. – С. 31–37.
11. НОВОЖИЛОВ Г.В., НЕЙМАРК М.С., ЦЕСАРСКИЙ Л.Г. *Безопасность полета самолета: Концепция и технология.* – М.: Изд-во МАИ, 2007. – 196 с.
12. НОВОЖИЛОВ Г.В., РЕЗЧИКОВ А.Ф., НЕЙМАРК М.С. и др. *Причинно-следственный подход к анализу авиационно-транспортных систем* // Общероссийский научно-технический журнал «Полет». – 2011. – №7. – С. 3–8.
13. НОВОЖИЛОВ Г.В., РЕЗЧИКОВ А.Ф., НЕЙМАРК М.С. и др. *Проблема критических сочетаний событий в системе «экипаж – воздушное судно – диспетчер»* // Общероссийский научно-технический журнал «Полет». – 2015. – №2. – С. 10–16.
14. НОВОЖИЛОВ Г.В., РЕЗЧИКОВ А.Ф., НЕЙМАРК М.С. и др. *Управление авиационно-транспортными системами на основе причинно-следственных деревьев событий* // Полет. Общероссийский научно-технический журнал. – 2015. – №6. – С. 13-17.

15. НОВОЖИЛОВ Г.В., РЕЗЧИКОВ А.Ф., НЕЙМАРК М.С. и др. *Человеческий фактор в авиационно-транспортных системах* // Общероссийский научно-технический журнал «Полет». – 2013. – №5. – С. 3–10.
16. РЕЗЧИКОВ А.Ф., БОГОМОЛОВ А.С., ИВАЩЕНКО В.А., ФИЛИМОНЮК Л.Ю. *Подход к обеспечению и поддержанию безопасности сложных систем на основе автоматных моделей* // Сборник трудов «Управление большими системами». – 2015. – Вып. 54. – С. 179–194.
17. РЕЗЧИКОВ А.Ф., ТВЕРДОХЛЕБОВ В.А. *Причинно-следственные комплексы взаимодействий в производственных процессах* // Проблемы управления. – 2010. – №3. – С. 51–60.
18. РЕЗЧИКОВ А.Ф., ТВЕРДОХЛЕБОВ В.А., ИВАЩЕНКО В.А. и др. *Критические ситуации в человеко-машинных системах*. – Саратов: Издательский Центр «Наука», 2015. – 244 с.
19. РЕЗЧИКОВ А.Ф., ЦВИРКУН А.Д., КУШНИКОВ В.А. и др. *Методы прогнозной оценки социально-экономических показателей национальной безопасности* // Проблемы управления. – 2015. – №5. – С. 37–44.
20. *Состояние безопасности полетов в гражданской авиации государств-участников оглашения о гражданской авиации и об использовании воздушного пространства за 20-летний период*. – URL: http://www.mak.ru/russian/info/doclad_bp/2011/bp11-3.pdf (дата обращения: 02.10.2015).
21. *Статистика цен на авиационный керосин*. Информационный центр «Кортес». – URL: www.kortes.com (дата обращения: 02.10.2015).
22. *Статистические данные Межгосударственного авиационного комитета*. – URL: <http://www.mak-iac.org/rassledovaniya> (дата обращения: 02.10.2015).

23. Федеральное агентство воздушного транспорта. *Официальный сайт*. – URL: <http://www.favt.ru> (дата обращения: 02.10.2015).
24. Федеральное агентство воздушного транспорта. *Статистика цен на авиационный керосин*. – URL: http://old.favt.ru/favt_new/?q=dejatelnost/ajeroporty_i_ajerodromy/cenu_na_aviagsm (дата обращения: 02.10.2015).
25. ФОРПЕСТЕР Д. *Мировая динамика*. – М.: ООО «Изд-во АСТ», 2003. – 379 с.

ANALYSIS AND FORECAST OF AIR TRANSPORTATION SAFETY: SYSTEM DYNAMICS MODELING

Alexander Rezhikov, *Institute of Precision Mechanics and Control, Russian Academy of Sciences, Russia, Saratov, Dr Sc., scientific supervisor (iptmuran@san.ru).*

Vadim Kushnokov, *Institute of Precision Mechanics and Control, Russian Academy of Sciences, Russia, Saratov, Dr Sc., director (iptmuran@san.ru).*

Vladimir Ivaschenko, *Institute of Precision Mechanics and Control of RAS, Saratov, Dr Sc., academic secretary (iptmuran@san.ru).*

Lev Tsesarskiy, *public corporation “Il”, Russia, Moscow, heading engineer (iptmuran@san.ru).*

Aleksey Bogomolov, *Institute of Precision Mechanics and Control, Russian Academy of Sciences, Russia, Saratov, Cand.Sc., researcher (alexbogomolov@ya.ru).*

Leonid Filimonyuk, *Institute of Precision Mechanics and Control of RAS, Saratov, Cand. Sc., researcher (iptmuran@san.ru).*

Kseniya Adamovich, *Institute of Precision Mechanics and Control, Russian Academy of Sciences, Russia, Saratov, postgraduate (adamovich.ks@gmail.com).*

Abstract: We developed a complex of system dynamics models intended to analyze and forecast key safety characteristics of an air transportation system. The models use the graph of causal relationships where graph nodes represent characteristics of the transportation system and links represent causal relationships between different characteristics. The graph defines a system of nonlinear differential equations. The regression parameters were estimated from official historical data since 1992 to 2009 years. The causal graph includes system variables such as the number of incidents per year and external parameters such as average pilot flying hours etc. The quality of the model was evaluated on 2010-2013 years incidents statistics in CIS. Our model was able to predict the number of incidents with reasonable accuracy. The additional analysis shows that the system obtained can demonstrate chaotic behavior under specific parameter values. The proposed model can reveal trends in the analyzed safety characteristics of an air transportation system.

Keywords: air transport, aviation safety assessment, system dynamics modeling, incidents forecast.

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии А.И. Орловым.*

*Поступила в редакцию 19.10.2015.
Дата опубликования 30.11.2016.*

УДК 681.51
ББК 3.9.6.5-01

СТАБИЛИЗАЦИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ФОРНАЗИНИ–МАРКЕЗИНИ¹

Емельянова Ю. П.²

(Арзамасский политехнический институт НГТУ
им. Р.Е. Алексеева, Арзамас)

Рассматриваются 2D-системы, описываемые моделью Форназини–Маркезини. Доказаны прямая и обратная теоремы об экспоненциальной устойчивости таких систем в терминах векторной функции Ляпунова. Для решения задач стабилизации вводятся понятия экспоненциальной пассивности и векторной функции накопления. Приводится пример, демонстрирующий эффективность новых результатов.

Ключевые слова: 2D-системы, модель Форназини–Маркезини, устойчивость, функция Ляпунова, стабилизирующее управление, линейные матричные неравенства (ЛМН).

Введение

Системы с многомерной (nD)-динамикой описываются моделями, в которых число независимых переменных n больше одной. Теорию nD -систем очень сложно, а в ряде случаев невозможно, построить простым обобщением теории обычных $1D$ -систем. Например, в случае линейной динамики передаточная функция $2D$ -системы зависит от двух переменных. Отсюда возникает два характеристических полинома и отсутствие единой концепции решения задач устойчивости, управляемости и наблю-

¹ Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №16-38-00192 мол. а.

Автор признателен проф. П.В. Пакшину за ценное обсуждение содержания статьи.

² Юлия Павловна Емельянова, к.ф.-м.н. (EmelianovaJulia@gmail.com).

даемости таких систем. В связи с этим актуальной представляется задача построения общей теории устойчивости и стабилизации nD -систем.

В данной работе рассматривается наиболее часто встречающийся на практике случай $2D$ -систем. Среди этого класса систем распространение получили следующие модели: модель Форназини–Маркезини [8], модель Роессера [19] и модель в форме повторяющегося процесса [20]. Модель Роессера появилась в задачах обработки изображений, где вектор состояния делится на горизонтальную и вертикальную составляющие. Модель Форназини–Маркезини возникла в задачах построения двумерных цифровых фильтров; в модели один вектор состояния, но он является функцией двух независимых дискретных переменных.

Модели в форме повторяющегося процесса используются для описания динамики робототехнических систем, многократно повторяющих одну и ту же операцию на заданном интервале времени, каждый раз возвращаясь в начальное состояние. Эту операцию называют шагом, проходом или итерацией. Таким образом, вектор состояния повторяющегося процесса зависит от двух переменных – времени и номера шага, при этом все шаги имеют одинаковую длительность во времени. Выходной сигнал здесь обычно называется профилем повторения. Измеряя выходной сигнал и сравнивая его с желаемым с помощью управляющего воздействия можно достичь нужной точности выполнения той или иной операции. Такие задачи получили название задач управления с итеративным обучением.

Задачи управления с итеративным обучением являются важнейшим приложением теории $2D$ -систем. Итеративное обучение естественным образом применимо к повторяющимся процессам и основано на запоминании информации с предыдущих операций с целью ее использования на следующих итерациях для повышения точности. Первые результаты по применению итеративного обучения были опубликованы в [14]. Позднее появились теоретические и экспериментальные результаты решения задач управления с итеративным обучением линейными повторяющимися про-

цессами [11, 18, 20].

Исследованию нелинейных 2D-систем посвящено значительно меньше работ [4, 5, 13, 15, 17, 25], несмотря на то, что в инженерной практике задачи встречаются в нелинейной постановке. Например, процесс высокоточного лазерного напыления металла [21, 22], многопроходный процесс резки угольных пластов [20], многопроходная сварка [22]. Если в линейном случае некоторые результаты, полученные для определенной модели, например, для линейных повторяющихся процессов, можно применить и к другим моделям, например, к модели Роессера, то в нелинейном случае необходимо рассматривать каждую модель по отдельности.

В статье рассматриваются нелинейные дискретные системы Форназини–Маркезини. Сформулирована и доказана теорема об экспоненциальной устойчивости таких систем и ее обращение. Далее эта теорема используется для решения задачи стабилизации. В теории 1D-систем одним из наиболее мощных методов решения задач стабилизации является теория диссипативности [23], где важную роль играет понятие пассивности [2]. В данной работе для рассматриваемого случая 2D-систем для решения задач стабилизации вводятся понятия экспоненциальной пассивности и векторной функции накопления. Приводится пример синтеза нелинейного закона управления, обеспечивающего экспоненциальную устойчивость процесса.

1. Постановка задачи

Рассмотрим нелинейную систему Форназини–Маркезини, описываемую следующей моделью в пространстве состояний

$$(1) \quad x_{i+1,j+1} = f(x_{i,j+1}, x_{i+1,j}, u_{i,j+1}, u_{i+1,j}),$$

$$i \geq m \geq 0, \quad j \geq q \geq 0,$$

где $x_{i,j} \in \mathbb{R}^{n_x}$ – вектор состояния, $u_{i,j} \in \mathbb{R}^{n_u}$ – входной вектор управления, f – нелинейная функция, удовлетворяющая требованию $f(0, 0, 0, 0) = 0$. Граничные условия заданы в виде

$$(2) \quad \begin{aligned} x_{i,q} &= \xi_q(i), \quad i \geq m, \\ x_{m,j} &= \eta_m(j), \quad j \geq q, \end{aligned}$$

где $\xi(i)$ и $\eta(j)$ – известные функции от i и j соответственно. Предположим, что существуют конечные вещественные числа $\alpha > 0$, $\beta > 0$ и $0 < \zeta_0 < 1$ такие, что

$$(3) \quad \begin{aligned} |x_{i,q}|^2 &= |\xi_q(i)|^2 \leq \alpha |x_{m,q}|^2 \zeta_0^{i-m}, \quad i \geq m \\ |x_{m,j}|^2 &= |\eta_m(j)|^2 \leq \beta |x_{m,q}|^2 \zeta_0^{j-q}, \quad j \geq q, \end{aligned}$$

здесь $|q|$ обозначает Евклидову норму вектора q , ζ_0 определяет скорость сходимости начальных значений i и j вектора состояния.

1.1. Теорема об экспоненциальной устойчивости и ее обращение

Подавляющее большинство результатов и исследований по теории устойчивости 2D-систем, описываемых моделью Форназини–Маркезини, получены для линейных систем. Работ, посвященных исследованию нелинейных 2D-систем, совсем не много. Среди таких работ важно отметить работу [13], где получены достаточные условия устойчивости и асимптотической устойчивости для нелинейных систем Форназини–Маркезини с использованием второго метода Ляпунова. В [15] получены достаточные условия глобальной асимптотической устойчивости тривиального решения системы, описываемой нелинейной моделью Форназини–Маркезини.

Определение 1. *Нелинейная система (1), (2) называется экспоненциально устойчивой, если существуют такие $\kappa > 0$ и $0 < \lambda < 1$, что*

$$(4) \quad |x_{i,j}|^2 \leq \kappa |x_{m,q}|^2 \lambda^{i-m} \lambda^{j-q}, \quad i \geq m, \quad j \geq q.$$

Отметим, что экспоненциальная устойчивость линейной модели Форназини–Маркезини была рассмотрена в [16], где экспоненциальная устойчивость определялась по-другому.

Для исследования устойчивости 2D-системы (1) попытка использовать второй метод Ляпунова в отличие от 1D-случая приводит к серьезным затруднениям, поскольку 2D-система (1) не описывается в терминах полного приращения вектора состояния

и в результате невозможно найти полное приращение функции Ляпунова.

По этой причине для исследования устойчивости 2D-систем в данной работе используется другой метод – метод векторных функций Ляпунова [4, 5, 6], где вместо полного приращения используется дивергенция векторного поля. Для дальнейшего анализа выберем функцию Ляпунова вида

$$(5) \quad V(x) = \begin{bmatrix} V_1(x_{i+1,j+1}) \\ V_2(x_{i+1,j+1}) \end{bmatrix},$$

где $V_1(x) > 0, x \neq 0, V_2(x) > 0, x \neq 0, V_1(0) = 0, V_2(0) = 0$. Аналог оператора дивергенции этой функции вдоль траекторий системы (1) имеет вид

$$(6) \quad DV(x) = V_1(x_{i+1,j+1}) - V_1(x_{i,j+1}) + \\ + V_2(x_{i+1,j+1}) - V_2(x_{i+1,j}).$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Нелинейная система (1), (2) экспоненциально устойчива, если существует векторная функция (5) и положительные скаляры c_1, c_2, c_3 такие, что*

$$(7) \quad c_1|x|^2 \leq V_1(x) \leq c_2|x|^2,$$

$$(8) \quad c_1|x|^2 \leq V_2(x) \leq c_2|x|^2,$$

$$(9) \quad DV(x) \leq -c_3(|x_{i,j+1}|^2 + |x_{i+1,j}|^2).$$

Доказательство. Из (9), (7) и (8) следует, что существует такая $0 < \bar{c}_3 < c_3$, что

$$(10) \quad DV(x) \leq -c_3(|x_{i,j+1}|^2 + |x_{i+1,j}|^2) \leq \\ \leq -\bar{c}_3(|x_{i,j+1}|^2 + |x_{i+1,j}|^2) \leq \\ \leq -\frac{\bar{c}_3}{c_2} [V_1(x_{i,j+1}) + V_2(x_{i+1,j})].$$

Из (6) и (10) получаем

$$(11) \quad 0 < V_1(x_{i+1,j+1}) + V_2(x_{i+1,j+1}) \leq \left(1 - \frac{\bar{c}_3}{c_2}\right) [V_1(x_{i,j+1}) + \\ + V_2(x_{i+1,j})].$$

Из последнего неравенства (11) следует, что $1 - \frac{\bar{c}_3}{c_2} > 0$, и отсюда получаем, что $\bar{c}_3 > 0$ и $c_2 > 0$, $0 < \frac{\bar{c}_3}{c_2} < 1$ и $0 < 1 - \frac{\bar{c}_3}{c_2} < 1$. Обозначим $\lambda = 1 - \frac{\bar{c}_3}{c_2}$, и выбирая \bar{c}_3 достаточно малой, так что

$$(12) \quad \zeta_0^{\frac{1}{2}} < \lambda < 1,$$

с учетом (11) перепишем (12) в виде

$$(13) \quad V_1(x_{i+1,j+1}) \leq \lambda V_1(x_{i,j+1}) + \lambda V_2(x_{i+1,j}) - V_2(x_{i+1,j+1}).$$

Решая (13) относительно $V_1(x_{i,j+1})$, получим

$$(14) \quad V_1(x_{k+m,j+1}) \leq \lambda^k V_1(x_{m,j+1}) + \sum_{l=m}^{k+m-1} [\lambda V_2(x_{l+1,j}) - V_2(x_{l+1,j+1})] \lambda^{k+m-1-l} = \lambda^k V_1(x_{m,j+1}) + \\ + \lambda \sum_{l=m+1}^{k+m} V_2(x_{l,j}) \lambda^{k+m-l} - \sum_{l=m+1}^{k+m} V_2(x_{l,j+1}) \lambda^{k+m-l},$$

и обозначая

$$W_{k,j} = \sum_{l=m+1}^{k+m} V_2(x_{l,j}) \lambda^{k+m-l},$$

из (14) получим, что

$$(15) \quad W_{k,j+1} \leq \lambda W_{k,j} + \lambda^k V_1(x_{m,j+1}) - V_1(x_{k+m,j+1}).$$

Решая (15) с учетом $W_{k,n}$, имеем

$$W_{k,n+q} \leq \lambda^n W_{k,q} + \sum_{p=q+1}^{n+q} [\lambda^k V_1(x_{m,p}) - V_1(x_{k+m,p})] \lambda^{n+q-p},$$

или

$$\sum_{p=q+1}^{n+q} V_1(x_{k+m,p}) \lambda^{n+q-p} + \sum_{l=m+1}^{k+m} V_2(x_{l,n+q}) \lambda^{k+m-l} \leq \\ \leq \lambda^k \sum_{p=q+1}^{n+q} V_1(x_{m,p}) \lambda^{n+q-p} + \lambda^n \sum_{l=m+1}^{k+m} V_2(x_{l,q}) \lambda^{k+m-l}.$$

Последнее неравенство перепишем в виде

$$(16) \quad \lambda^{-k} \sum_{p=q+1}^{q+n} V_1(x_{k,p}) \lambda^{q-p} + \lambda^{-n} \sum_{l=m+1}^{m+k} V_2(x_{l,n+q}) \lambda^{m-l} \leq \\ \leq \sum_{p=q+1}^{n+q} V_1(x_{m,p}) \lambda^{q-p} + \sum_{l=m+1}^k V_2(x_{l,q}) \lambda^{m-l},$$

и вычисляя правую часть (16) с учетом (3) и (12), имеем

$$(17) \quad \sum_{p=q+1}^{n+q} V_1(x_{m,p}) \lambda^{q-p} + \sum_{l=m+1}^{k+m} V_2(x_{l,q}) \lambda^{m-l} \leq \\ \leq c_2 \left(\sum_{p=q+1}^{q+n} \beta |x_{m,q}|^2 \zeta_0^{p-q} \lambda^{q-p} + \sum_{l=m+1}^{m+k} \alpha |x_{m,q}|^2 \zeta_0^{l-m} \lambda^{m-l} \right) \leq \\ \leq c_2 |x_{m,q}|^2 \left(\beta \sum_{p=q+1}^{q+n} \zeta_0^{\frac{p-q}{2}} \zeta_0^{\frac{p-q}{2}} \lambda^{q-p} + \alpha \sum_{l=m+1}^{m+k} \zeta_0^{\frac{l-m}{2}} \zeta_0^{\frac{l-m}{2}} \lambda^{m-l} \right) \leq \\ \leq c_2 |x_{m,q}|^2 \left(\beta \sum_{p=q+1}^{q+n} \lambda^{p-q} \lambda^{p-q} \lambda^{q-p} + \alpha \sum_{l=m+1}^{m+k} \lambda^{l-m} \lambda^{l-m} \lambda^{m-l} \right) \leq \\ \leq c_2 |x_{m,q}|^2 \left(\beta \sum_{p=0}^{\infty} \lambda^p + \alpha \sum_{l=0}^{\infty} \lambda^l \right) = \frac{c_2 |x_{m,q}|^2 (\alpha + \beta)}{1 - \lambda}.$$

Из (16), (7), (8) и (17), следует, что

$$(18) \quad c_1 \lambda^{-k} \lambda^{-n} |x_{k+m,n+q}|^2 \leq \lambda^{-k} \sum_{p=q+1}^{n+q} V_1(x_{k+m,p}) \lambda^{q-p} + \\ + \lambda^{-n} \sum_{l=m+1}^{k+m} V_2(x_{l,n+q}) \lambda^{m-l} \leq |x_{m,q}|^2 \frac{c_2 (\alpha + \beta)}{1 - \lambda}.$$

И, наконец, из (18) следует (4) при $\kappa = \frac{c_2(\alpha+\beta)}{c_1(1-\lambda)}$ и $\lambda = 1 - \frac{\bar{c}_3}{c_2}$, удовлетворяющих (12), что и требовалось доказать.

В случае 1D-систем важнейшим результатом является обратная теорема Ляпунова, и в данной работе обратная теорема получена для рассматриваемого 2D-случая.

Теорема 2. Если нелинейная система (1), (2) экспоненциально устойчива, то существуют векторная функция Ляпунова (5) и положительные скаляры c_1, c_2, c_3 , удовлетворяющие неравенствам (7), (8) и (9).

Доказательство. Выберем компоненты векторной функции Ляпунова (5) в виде

$$V_1(x_{m,q}) = \alpha \sum_{i=m}^{\infty} \sum_{j=q}^{\infty} |x_{i,j}|^2, \quad V_2(x_{m,q}) = \beta \sum_{i=m}^{\infty} \sum_{j=q}^{\infty} |x_{i,j}|^2, \\ \alpha > 0, \quad \beta > 0, \quad \alpha + \beta = 1.$$

Выбирая $c_1 \leq \min(\alpha, \beta)$, имеем

$$c_1 |x_{m,q}|^2 \leq \alpha \sum_{i=m}^{\infty} \sum_{j=q}^{\infty} |x_{i,j}|^2 = V_1(x_{m,q}), \\ c_1 |x_{m,q}|^2 \leq \beta \sum_{i=m}^{\infty} \sum_{j=q}^{\infty} |x_{i,j}|^2 = V_2(x_{m,q}),$$

и из условия экспоненциальной устойчивости следует, что

$$\sum_{i=m}^{\infty} \sum_{j=q}^{\infty} |x_{i,j}|^2 \leq \kappa |x_{m,q}|^2 \sum_{i=m}^{\infty} \sum_{j=q}^{\infty} \lambda^{i-m} \lambda^{j-q} = \frac{\kappa |x_{m,q}|^2}{(1-\lambda)^2}.$$

Выбирая $c_2 \geq \max(\alpha, \beta) \frac{\kappa |x_{m,q}|^2}{(1-\lambda)^2}$, получим, что справедливы (7) и (8). Вычисляя дивергенцию (6) получим

$$DV(x) = V_1(x_{m+1,q+1}) - V_1(x_{m,q+1}) + V_2(x_{m+1,q+1}) - \\ - V_2(x_{m+1,q}) = \alpha \left(\sum_{i=m+1}^{\infty} \sum_{j=q+1}^{\infty} |x_{i,j}|^2 - \sum_{i=m}^{\infty} \sum_{j=q+1}^{\infty} |x_{i,j}|^2 \right) + \\ + \beta \left(\sum_{i=m+1}^{\infty} \sum_{j=q+1}^{\infty} |x_{i,j}|^2 - \sum_{i=m+1}^{\infty} \sum_{j=q}^{\infty} |x_{i,j}|^2 \right) =$$

$$= -\alpha \sum_{j=q+1}^{\infty} |x_{m,j}|^2 - \beta \sum_{i=m+1}^{\infty} |x_{i,q}|^2 \leq -\alpha |x_{m,q+1}|^2 - \beta |x_{m+1,q}|^2 \leq -\min(\alpha, \beta) (|x_{m,q+1}|^2 + |x_{m+1,q}|^2).$$

Таким образом, выполнено третье условие теоремы (9), где $c_3 = \min(\alpha, \beta)$. Теорема доказана.

2. Экспоненциальная пассивность и стабилизация

В данном разделе решается задача синтеза управления, обеспечивающего экспоненциальную устойчивость системы. Вводятся понятия экспоненциальной пассивности и векторной функции накопления вида (5).

Для дальнейшего анализа введем вспомогательную переменную $z_{i,j} \in \mathbb{R}^{n_z}$ следующего вида:

$$(19) \quad z_{i,j} = h(\bar{x}_{i,j}, \bar{u}_{i,j}),$$

где $\bar{x}_{i,j} = [x_{i,j+1}^\top \ x_{i+1,j}^\top]^\top$, $\bar{u}_{i,j} = [u_{i,j+1}^\top \ u_{i+1,j}^\top]^\top$, вектор h удовлетворяет требованию $h(0, 0) = 0$. Введем понятие пассивности.

Определение 2. *Нелинейная дискретная 2D-система (1), (2) называется экспоненциально пассивной, если существуют векторная функция (5), вектор z вида (19) и положительные постоянные c_1, c_2, c_3 , удовлетворяющие условию*

$$(20) \quad DV(x) \leq z_{i,j}^\top G \bar{u}_{i,j} - c_3 (|x_{i,j+1}|^2 + |x_{i+1,j}|^2),$$

где G – постоянная матрица соответствующего размера.

Это определение является обобщением на 2D-системы определения, введенного в [9] для 1D-систем, а вектор z можно рассматривать как вспомогательный выходной вектор, который используется для синтеза закона управления и обеспечения пассивности системы. Процедура выбора этого вектора в теории 1D-систем известна как процедура пассивации или пассивации [12]. Выбор этого вектора зависит от выбора функции накопления и представляет собой отдельную сложную задачу подобную задаче выбора функции Ляпунова для нелинейных систем.

Таким образом, задача – найти пару (z, V) , удовлетворяющую условию (20), и ниже показано, как эта задача может быть решена для частного случая.

Следующая теорема является расширением хорошо известных результатов теории пассивности 1D-систем [9] на рассматриваемый 2D-случай.

Теорема 3. Пусть дискретная нелинейная 2D-система (1), (2) экспоненциально пассивна. Предположим также, что существует функция $\varphi(z)$ такая, что $\varphi(0) = 0$ и $z^\top G\varphi(z) > 0$ при $z \neq 0$. Тогда закон управления вида

$$(21) \quad \bar{u}_{i,j} = -\varphi(z_{i,j})$$

обеспечивает экспоненциальную устойчивость системы.

Доказательство. Из (20), (21), (7) и (8) следует, что существует такая $0 < \bar{c}_3 < c_3$, что

$$\begin{aligned} DV(x) &\leq -z_{i,j}^\top G\varphi(z_{i,j}) - c_3(|x_{i,j+1}|^2 + |x_{i+1,j}|^2) \leq \\ &\leq -\bar{c}_3(|x_{i,j+1}|^2 + |x_{i+1,j}|^2) \leq -\frac{\bar{c}_3}{c_2} [V_1(x_{i,j+1}) + V_2(x_{i+1,j})], \end{aligned}$$

остальная часть доказательства такая же, как в теореме 1.

Заметим, что векторная функция накопления (5) может рассматриваться как векторная функция Ляпунова для системы (1) с законом управления (21), который обеспечивает экспоненциальную устойчивость системы.

3. Пример

Рассмотрим частный случай системы (1), на котором продемонстрируем процедуру нахождения стабилизирующего управления с обратной связью:

$$(22) \quad x_{i+1,j+1} = A_1 x_{i,j+1} + A_2 x_{i+1,j} + \phi_1(x_{i,j+1}, x_{i+1,j}) u_{i,j+1} + \phi_2(x_{i,j+1}, x_{i+1,j}) u_{i+1,j},$$

где ϕ_1 и ϕ_2 – нелинейные векторные функции. В простейшем случае ϕ_1 и ϕ_2 – постоянные векторы и (22) – линейная 2D-система Форназини–Маркезини. В рассматриваемом частном случае система (22) состоит из линейной части, на которую управление

действует через статические нелинейности ϕ_1 и ϕ_2 , при этом стабилизирующее управление удастся найти в явном виде.

Введем обозначения $A = [A_1 \ A_2]$, $\phi(\bar{x}_{i,j}) = [\phi_1(x_{i,j+1}, x_{i+1,j}) \ \phi_2(x_{i,j+1}, x_{i+1,j})]$. Обозначим положительную (отрицательную определенность) символом \succ (\prec) и выберем векторную функцию накопления в виде (5) с компонентами $V_1(x) = \alpha x^\top P x$, $V_2(x) = \beta x^\top P x$, где $P \succ 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ и $\alpha + \beta = 1$ и удовлетворяют следующему линейному матричному неравенству

$$(23) \quad \begin{bmatrix} A_1^\top P A_1 - \alpha P + Q_{11} & A_1^\top P A_2 + Q_{12} \\ A_2^\top P A_1 + Q_{21} & A_2^\top P A_2 - \beta P + Q_{22} \end{bmatrix} \prec 0,$$

где $Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix} \succ 0$.

В данном случае оператор дивергенции векторной функции Ляпунова (5) будет иметь вид

$$(24) \quad \mathcal{D}V(x) = \bar{x}_{i,j}^\top \left(A^\top P A - \begin{bmatrix} \alpha P & 0 \\ 0 & \beta P \end{bmatrix} \right) \bar{x}_{i,j} + \\ + 2\bar{x}_{i,j}^\top A^\top P \phi(\bar{x}_{i,j}) \bar{u}_{i,j} + \bar{u}_{i,j}^\top \phi^\top(\bar{x}_{i,j}) P \phi(\bar{x}_{i,j}) \bar{u}_{i,j}.$$

Анализ правой части (24) показывает, что если выбрать вспомогательный вектор выхода $z_{i,j}$ в виде

$$(25) \quad z_{i,j} = 2\phi^\top(\bar{x}_{i,j}) P A \bar{x}_{i,j} + \frac{1}{2}\phi^\top(\bar{x}_{i,j}) P \phi(\bar{x}_{i,j}) \bar{u}_{i,j},$$

то будет справедлива следующая оценка:

$$(26) \quad \mathcal{D}V(x) \leq 2z_{i,j}^\top \bar{u}_{i,j} - \lambda_{\min}(Q) |\bar{x}_{i,j}|^2,$$

где $\lambda_{\min}(Q)$ – минимальное собственное значение матрицы Q , и из (26) следует, что система (22)–(25) экспоненциально пассивна относительно выходной переменной $z_{i,j}$ и входной переменной $u_{i,j}$ при $G = 2I$, где I – единичная матрица соответствующего размера. Тогда согласно Теореме 1 стабилизирующий закон управления должен удовлетворять соотношению

$$(27) \quad \bar{u}_{i,j} = -z_{i,j} = -(2\phi^\top(\bar{x}_{i,j}) P A \bar{x}_{i,j} + \frac{1}{2}\phi^\top(\bar{x}_{i,j}) P \phi(\bar{x}_{i,j}) \bar{u}_{i,j}).$$

Из уравнения (27) находим закон управления в явном виде:

$$(28) \quad \bar{u}_{i,j} = -[I + \phi^\top(\bar{x}_{i,j}) P \phi(\bar{x}_{i,j})]^{-1} \phi^\top(\bar{x}_{i,j}) P A \bar{x}_{i,j}.$$

Этот закон будет обеспечивать экспоненциальную устойчивость системы (22).

4. Заключение и перспективы работы

В работе получены достаточные условия экспоненциальной устойчивости нелинейных 2D-систем, описываемых моделью Форназини–Маркезини. Доказана обратная теорема. Получены новые результаты по использованию теории пассивности для анализа устойчивости и решения задач стабилизации рассматриваемого класса 2D-систем. Эти результаты могут служить основой для дальнейшей исследований.

Дальнейшие исследования предполагаются в следующих направлениях. В [24] линейная модель Форназини–Маркезини использовалась для синтеза управления высокоточным прокатом металла. Для большей эффективности управления следует учитывать имеющиеся в этой системе ограничения, в результате которых система становится нелинейной. Разработанная в статье теория может быть применена для этих целей.

Другое направление связано с синтезом управления в системах, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных типа Гурса–Дарбу [1, 7, 10], с использованием дискретных аппроксимаций. Дискретная аппроксимация этих уравнений приводит к уравнениям типа Форназини–Маркезини. Результаты статьи здесь также могут быть эффективно применены.

Литература

1. ПЛОТНИКОВ В.И., СУМИН В.И. *Проблемы устойчивости нелинейных систем Гурса–Дарбу* // Дифференциальные уравнения. – 1972. – Том VII, вып. 5. – С. 845–856.
2. BYRNES C., ISIDORI A., WILLEMS J. *Passivity, feedback equivalence and the global stabilization of minimum phase nonlinear systems* // IEEE Trans. Automat. Contr. – 1991. – Vol. 36. – P. 1228–1240.
3. DU C., XIE L. *Stability analysis and stabilization of uncertain two-dimensional discrete systems: an LMI approach* // IEEE Trans. on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications. – 1999. – Vol. 46. – P. 1371–1374.
4. EMELIANOVA J., PAKSHIN P., GAIKOWSKI K., ROGERS E. *Vector Lyapunov function based stability of a class of applications relevant 2D nonlinear systems* // IFAC Proceedings Volumes (IFAC Papers On Line) – 2014. – Vol. 47, Issue 3. – P. 8247–8252.
5. EMELIANOVA J., PAKSHIN P., GAIKOWSKI K., ROGERS E. *Stability of nonlinear discrete repetitive processes with Markovian switching* // Systems & Control Letters. – 2015. – Vol. 75. – P. 108–116.
6. EMELIANOVA J., PAKSHIN P., GAIKOWSKI K., ROGERS E. *Stability of nonlinear 2D systems described by the continuous-time Roesser model* // Automation and Remote Control. – 2014. – Vol. 7. – P. 845–858.
7. DYMKOV M., GALKOWSKI K., ROGERS E., DYMKOU V., DYMKOU S. *Modeling and Control of a Sorption Process using 2D Systems Theory* // Proc. 7th Int. Worskop on Multidimensional Systems (NDS'11). – 2011. – P. 1–6.

8. FORNASINI E., MARCHESINI G. *Doubly indexed dynamical systems: state models and structural properties* // *Mathematical Systems Theory*. – 1978. – Vol. 12. – P. 59–72.
9. FRADKOV A., HILL D. *Exponential feedback passivity and stabilizability of nonlinear systems* // *Automatica*. – 1998. – Vol. 34. – P. 697–703.
10. HMAMED A., MESQUINE F., TADEO F., BENHAYOUN M., BENZAOUIA A. *Stabilization of 2D saturated systems by state feedback control* // *Multidimensional Systems and Signal Processing*. – 2010. – Vol. 21. – P. 277–292.
11. HLADOWSKI L., GALKOWSKI K., CAI Z., ROGERS E., FREEMAN C.T., LEWIN P.L. *Experimentally supported 2D systems based iterative learning control law design for error convergence and performance* // *Control Engineering Practice*. – 2010. – Vol. 18(4). – P. 339–348.
12. KHALIL H. *Nonlinear Systems*. Third Edition. – New Jersey: Prentice Hall, 2002.
13. KUREK J. *Stability of nonlinear time-varying digital 2-D Fornasini- Marchesini system* // *Multidimensional Systems and Signal Processing*, vol. open access at Springerlink.com – 2012. – P. 1–10.
14. KUREK J.E., ZAREMBA M.B. *Iterative learning control synthesis based on 2D system theory* // *IEEE Trans. on Automatic Control*. – 1993. – Vol. 38. – P. 121–125.
15. LIU D. *Lyapunov stability of two-dimensional digital filters with overflow nonlinearities* // *IEEE Trans. on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*. – 1998. – Vol. 45. – P. 574–577.
16. PANDOLFI L. *Exponential stability of 2D systems* // *Systems & Control Letters*. – 1984. – Vol. 4. – P. 381–385.
17. PAKSHIN P., GAIKOWSKI K., ROGER E. *Stability and stabilization of systems modeled by 2D nonlinear stochastic Roesser models* // *Proc. 7th Int. Workshop on Multidimensional (nD) systems*. – 2011. – P. 1–6.

18. PASZKE W., ROGERS E., GALKOWSKI K., CAI Z. *Robust finite frequency range iterative learning control design and experimental verification* // Control Engineering Practice. – 2013. – Vol. 21. – P. 1310–1320.
19. ROESSER R.P. *A discrete state-space model for linear image processing* // IEEE Trans. on Automatic Control. – 1975. – Vol. AC-20(1). – P. 1–10.
20. ROGERS E., GALKOWSKI K., OWENS D.H. *Control Systems Theory and Applications for Linear Repetitive Processes* // Lecture Notes in Control and Information Sciences. – Springer-Verlag, Berlin. – 2007. – Vol. 349.
21. SAMMONS P.M., BRISTOW D.A., LANDERS R.G. *Iterative learning control of bead morphology in laser metal deposition processes* // Proc. American Control Conference. – 2013. – P. 5962–5967.
22. SAMMONS P.M., BRISTOW D.A., LANDERS R.G. *Height dependent laser metal deposition process modeling* // Journal of Manufacturing Science and Engineering. – 2013. – Vol. 135, No. 5. – P. 1–7.
23. WILLEMS J. *Dissipative dynamical systems part I: General theory* // Arch. Rational Mech. Analysis. – 1972. – Vol. 45. – P. 325–351.
24. YAMADA M., XU L., SAITO O. *2D Model-Following Servo System* // Multidimensional Systems and Signal Processing. – 1999. – Vol. 10. – P. 71–91.
25. YEGANEFAR N., YEGANEFAR N., GHAMGUI M., MOULAY E. *Lyapunov theory for 2D nonlinear Roesser models: Application to asymptotic and exponential stability* // IEEE Trans. on Automatic Control. – 2013. – Vol. 58. – P. 1299–1304.

STABILIZATION OF NONLINEAR 2D- FORNASINI–MARCHESINI SYSTEM

Julia Emelianova, Arzamas Polytechnic Institute of R.E. Alekseev Nizhny Novgorod State Technical University, assistant professor (EmelianovaJulia@gmail.com).

Abstract: The paper considers nonlinear 2D-system described by Fornasini–Marchesini state-space model. Sufficient conditions for the property of exponential stability are developed in terms of vector Lyapunov functions and a converse stability theorem is proved. A form of passivity, termed exponential passivity, is defined and used together with a vector storage function. This technique makes it possible to develop a new control law design algorithm to guarantee exponential stability of the system. As an example the algorithm is applied to a physically relevant case of systems with nonlinear actuator dynamics. Further research will focus on two directions. In earlier work linear Fornasini–Marchesini model was applied to a high-precision rolling system. The results of this paper can be useful to devise a nonlinear control system that will improve the efficiency. Other possible application is related to discrete approximation of Darboux differential equations systems which leads to Fornasini–Marchesini equations. Our results can be applied to problems of this sort.

Keywords: 2D-systems, Fornasini–Marchesini model, exponential stability, Lyapunov function, stabilizing control, linear matrix inequality (LMI).

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии Б. Р. Андриевским.*

Поступила в редакцию 30.07.2016.

Дата опубликования 30.11.2016.

УДК 519.8
ББК 39.37

ПРИМЕНЕНИЕ МУЛЬТИАГЕНТНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ В ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧЕ С ВРЕМЕННЫМИ ОКНАМИ И НЕСКОЛЬКИМИ ПУНКТАМИ ПОГРУЗКИ

Сазонов В. В.¹

*(Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова, Москва)*

Скобелев П. О.²

*(Самарский национальный исследовательский универси-
тет им. ак. С.П. Королева, Самара,*

*Институт проблем управления сложными системами
РАН, Самара)*

Лада А. Н.³, Майоров И. В.⁴

(НПК Разумные решения, Самара)

*Предлагается метод построения расписания в задаче транспорт-
ной логистики MDVRPTW на основе мультиагентного
подхода. Рассматривается мультиагентная система взаимо-
действующих грузовиков, складов и заказов. Для ограничения
интенсивности переговоров агентов предложена организация
сцены на основе триангуляции Делоне. Показано, что решение
мультиагентной системы на 10–30% отличается от извест-
ных эталонных решений, однако значительно превышает их по
скорости получения, что дает возможность применять метод
в системах реального времени.*

¹ Василий Викторович Сазонов, кандидат физико-математических наук, доцент (sazonov@smartsolutions-123.ru).

² Петр Олегович Скобелев, доктор технических наук, профессор (petr.skobelev@gmail.com).

³ Александр Николаевич Лада (lada@smartsolutions-123.ru).

⁴ Игорь Владимирович Майоров (imayorov@smartsolutions-123.ru).

Ключевые слова: мультиагентная система, сеть потребностей и возможностей, транспортная логистика, многокритериальное планирование, реальное время.

1. Введение

Задача планирования доставок грузов с множественными точками погрузки и разгрузки с заданными временными окнами является одной из наиболее важных проблем транспортной логистики. Одним из ключевых принципов, применяющихся в системах построения расписаний транспортных средств обслуживания заказов, будет построение первоначального плана с учетом заданного набора критериев, который служит первым приближением для дальнейшей оптимизации.

В англоязычной литературе задача с временными окнами и множественными загрузками называется *Multiple Depot Vehicle Routing Problem with Time Windows (MDVRPTW)* [4,5].

Для построения начального расписания с заданным набором транспортных средств, заказов и пунктов доставки и последующего перестроения расписания по поступающим внешним событиям применяется подход, основанный на мультиагентных технологиях [8]. Для ускорения взаимодействия агентов при анализе сцены предложена структура, основанная на триангуляции Делоне.

Прототип системы был экспериментально исследован на модельных данных, подготовленных Cordeu [5], на интернет-ресурсе с решением транспортной задачи в различных постановках и ограничениях [6], для которых известны наилучшие результаты. Были сравнены скорость получения результата, устойчивость решения по отношению к порядку поступления заказов и качество решения мультиагентной системы и традиционных алгоритмов.

Показываются преимущества использования и текущие ограничения разработанного метода и намечаются пути дальнейших разработок и исследований.

Показывается необходимость решения задачи управления процессами самоорганизацией в производственно-транспортных

сетях рассматриваемого класса для дальнейшего улучшения качества решений и ускорений работы системы.

2. Постановка задачи

В задачах транспортной логистики необходимо обеспечить выполнение максимального количества поступивших заявок с наименьшими затратами. Уменьшение затрат достигается построением расписания, минимизирующего суммарный пробег грузовиков и времена вынужденного простоя.

Оптимизация расходов по транспортировке увеличивает прибыльность транспортного предприятия, что позволяет предприятию устанавливать сбалансированные тарифы и занимать более выгодную позицию в конкурентной борьбе, поэтому задачи оптимизации логистики крайне востребованы в народном хозяйстве.

Задачи оптимизации логистики весьма разнообразны, большинство из них является *NP*-полными, как классический пример – задача коммивояжера [2]. Алгоритмическая сложность позволяет получить точное решение в случаях небольшой размерности (10–100 заказов), поэтому применяются эвристические приближенные методы. В настоящей работе рассматривается задача, которая возникает при планировании доставки товаров или в работе курьерской службы, называемая Multiple Depot Vehicle Routing Problem with Time Windows (MDVRPTW) [9].

Задача MDVRPTW формулируется следующим образом. Известны координаты складов с товаром и точек заказа товаров. Для каждого склада задано время работы, для потребителей также известен период его обслуживания (разгрузка товара), длительность разгрузки и потребность в товаре. Для каждого склада известно количество грузовиков и характеристики этих грузовиков: грузоподъемность или вместимость и максимальный пробег. Требуется составить маршрут движения всех грузовиков каждого склада так, чтобы обслужить всех или максимально возможное число потребителей таким образом, чтобы путь всех грузовиков был минимальным. Считается, что грузовики начинают маршрут и заканчивают маршрут на складе, к которому они приписаны.

Задача в такой постановке является *NP*-сложной [3]. Существует множество подходов к решению этой задачи, основанных на методе ветвей и границ, генетических алгоритмах [7], поиске с ограничениями [4, 5] и т.д. В указанной постановке задача считается классической, разрабатываемые алгоритмы сравниваются по своим результатам на тестовых данных [5], в этой постановке считается, что все заявки, число грузовиков, расположение и параметры складов известны заранее и требуется построить оптимальное расписание. Подробный обзор современных подходов к решению этой задачи дается в [10].

В настоящей работе рассматривается расширенная постановка задачи адаптивного планирования доставки, т.е. план должен перестраиваться при изменении условий: модификация, отмена, добавления новой заявки, изменение параметров грузовиков и расписания работы склада. План доставки перестраивается в зависимости от поступающих событий.

В работе развивается мультиагентный подход [8] к решению задачи построения начальных расписаний по заданному набору заказов как в статическом (для построения начального расписания), так и динамическом случае, связанном с перестройкой по событиям в реальном времени. Рассматривается модель сети потребностей и возможностей (ПВ-сети) мира транспортной логистики и основные классы агентов, включая агентов заявки, маршрута, грузовика, склада, транспортной сети в целом (предприятия).

Разработаны протоколы взаимодействия указанных агентов, позволяющие итерационно строить начальное расписание и затем непрерывно корректировать решение для улучшения его характеристик.

3. Агентный подход к задаче транспортной логистики

Задачу адаптивного планирования доставок предлагается решать на основе мультиагентного подхода. Агенты в мультиагентной системе (МАС) взаимодействуют путем передачи сообщений асинхронным образом.

Для решения поставленной задачи вводится три типа агентов: агента предприятия, агента заявки и агента грузовика. Агент предприятия осуществляет общую координацию, агенты заявок и грузовиков составляют классическую ПВ-сеть [8]. Агент грузовика стремится перевезти как можно больше заказов и уменьшить себестоимость маршрута, поэтому ему следует привлекать заявки с низким персональным тарифом; агент заявки стремится попасть к тому грузовику, который предложит ему минимальный тариф на перевозку.

Критерием оценки качества расписания доставки в классической постановке является сумма путей всех грузовиков. При необходимости для разработки автоматизированной системы планирования доставки могут быть добавлены наборы критериев и ограничений для учета специфики транспортного предприятия, такие как рабочее время водителя, его квалификация, тип грузовика и т.д.

На рис. 1 изображены маршруты доставки из двух складов двумя грузовиками грузов семи потребителям. Первый маршрут R_1 : $D1 \rightarrow C1 \rightarrow C7 \rightarrow C3 \rightarrow C5 \rightarrow D1$, второй маршрут R_2 : $D2 \rightarrow C6 \rightarrow C4 \rightarrow C2 \rightarrow D2$.

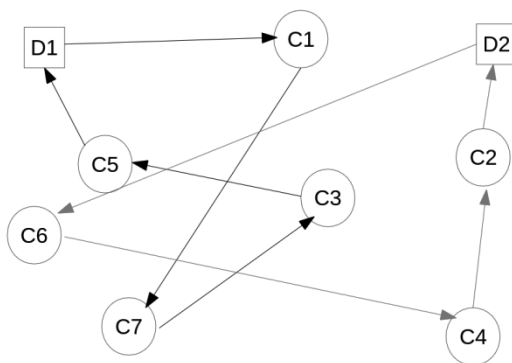


Рис. 1. Схема мира транспортной логистики

Введем некоторые определения.

Длиной маршрута $l(R)$ назовем длину замкнутого пути, который проходит грузовик по маршруту. Обозначим за $w(C)$

массу (объем) потребления заказом C , $d(C)$ – время, затрачиваемое грузовиком на обслуживание (разгрузку) заказа C .

Рассмотрим участок маршрута доставки $C_{i-1} \rightarrow C_i \rightarrow C_{i+1}$, ценой доставки P заказа C_i назовем

$$(1) P(C_i) = |C_{i-1}C_i| + |C_iC_{i+1}| - |C_{i-1}C_{i+1}|,$$

где $i = 1, \dots, N$, N – количество пунктов обслуживания.

Тогда тариф заказа C_i определим как

$$(2) pr(C_i) = \frac{P(C_i)}{w(C_i)}.$$

Средним тарифом маршрута $R C_1 \rightarrow C_2 \rightarrow \dots \rightarrow C_n$ назовем

$$(3) pr(R) = \frac{l(R)}{\sum_{i=1}^n C_i}.$$

Агент грузовика строит маршрут на основе «жадного» принципа, исходя из набора заявок.

Первую заявку агент вставляет в маршрут при активизации. Последующую проверяет по ограничениям веса и временного окна, при необходимости переставляет ее с первой. Далее при добавлении следующей заявки в маршрут грузовика выбирается место между уже стоящих в маршруте заявок. Например: маршрут грузовика $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$, добавляем заявку 4, надо среди 4 вариантов: $4 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$, $1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 3$, $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 3$, $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4$ выбрать наилучший.

Цель переговоров агентов в рамках рассматриваемой сети – сформировать так называемые цепочки доставки: распределить все заявки по грузовикам и определить порядок, в котором грузовик их обслуживает.

В результате взаимодействия агентов в ПВ-сети все заказы будут распределены по агентам транспортных средств.

4. Описание структуры сцены

Каждому агенту доступна только ограниченная информация, связанная с его окружением и ближайшими соседями. На основании имеющейся информации и сообщений, получаемых от других агентов, программный агент может принимать реше-

ния. Скорость работы мультиагентной системы напрямую зависит от количества обрабатываемых агентами сообщений. При построении расписаний доставки агентам заказов предлагается обмениваться сообщениями с соседними по положению в пространстве заказами.

Для организации эффективного взаимодействия между агентами сцены требуется геометрическая структура, которая позволяет быстро находить ближайших соседей (заявки и склады), такая структура также должна быть адаптивной – способной воспринимать инкрементальные изменения сцены (удаление или добавление заявки). Такой структурой является триангуляция Делоне [1] (рис. 2). Известно, что для построения триангуляции требуется затратить $N \log N$ времени, где N – число вершин, и триангуляция содержит все минимальные остовные деревья множества точек.

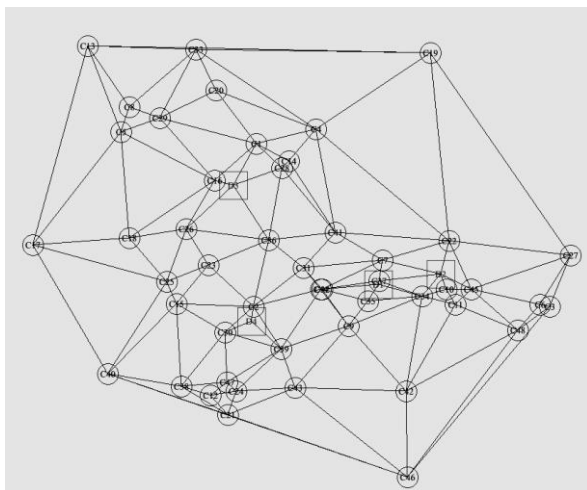


Рис. 2. Структура сцены мира транспортной логистики

Для построения триангуляции используется метод «разделяй и властвуй» со стратегией «строй и перестраивай». Из триангуляции Делоне можно удалить вершину за $O(N)$ и добавить вершину за время $O(N)$ [1].

5. Начальное решение и оптимизация

При инициализации исходной сцены и ее структуры создаются агенты грузовиков и заявок, а также агент предприятия.

Предполагается, что грузовики находятся на складах в точках погрузки и количество грузовиков, приписанных к каждому складу, известно. Далее действуя автономно, но согласованно между собой в рамках ПВ-сети, агенты заявок и грузовиков выстраивают расписание.

Поведение агентов описывается определенными ниже правилами. Агенты обладают конечным набором внутренних состояний и значениями параметров. Агенты работают параллельно по тактам. Каждый такт – один цикл обработки сообщений от других агентов и шаг автомата.

Решение считается найденным, когда у агентов уже нет возможности более улучшить результат.

5.1. ЛОГИКА ПОВЕДЕНИЯ АГЕНТА ГРУЗОВИКА

Агент грузовика может находиться в следующих трех состояниях:

1. CHAIN_STATE_DONT_WAIT – не ждет ни от кого ответов (начальное состояние);
2. CHAIN_STATE_WAITING_FOR_REPLY – ожидает ответа на отправленные запросы заявкам на присоединение к его маршруту;
3. CHAIN_STATE_WAITING_FOR_ACCEPT_MOVEREQUEST – ожидает подтверждение от заявки на переход в его маршрут из маршрута его грузовика.

Логика поведения агента грузовика:

1. В состоянии CHAIN_STATE_DONT_WAIT, если нет запросов от заявок на переход из других маршрутов, грузовик ищет соседние заявки, которые не включены в маршрут – он рассматривает заявки, которые являются соседними с одной из вершин его маршрута. При рассмотрении каждой заявки агент грузовика оценивает, может ли он ее вставить в свое расписание. Если может, то заявке посылается сообщение о предложении, а агент грузовика переходит в состояние CHAIN_STATE_WAITING_FOR_REPLY. Если есть предложения о

переходе от заявок из маршрутов других грузовиков, то они анализируются, если предложение выгодное, то агент грузовика соглашается забрать заявку, посылает ей сообщение и переходит в состояние `CHAIN_STATE_WAITING_FOR_ACCEPT_MOVEREQUEST`. Для грузовика вариант является наиболее выгодным, если он дает минимальный средний тариф.

2. В состоянии `CHAIN_STATE_WAITING_FOR_REPLY` агент грузовика ожидает ответы на отправленные запросы. Приходящие запросы от заявок анализируются. Если пришедший вариант выгоднее, чем те варианты, на которые были отправлены запросы, то посылается подтверждение заявке, приславшей этот вариант, и агент грузовика переходит в `CHAIN_STATE_WAITING_FOR_ACCEPT_MOVEREQUEST`, а всем заявкам, которым были отправлены запросы, посылается отказ. Если пришли ответы от всех заявок, которым они были направлены, то принимается самый выгодный вариант из тех заявок, что согласились, и агент грузовика переходит в состояние `CHAIN_STATE_DONT_WAIT`. Всем нереализованным заявкам посылается отказ, и информация о них удаляется.

3. В состоянии `CHAIN_STATE_WAITING_FOR_ACCEPT_MOVEREQUEST` ждет подтверждение от заявки, на предложение которой согласился агент грузовика. На все остальные запросы агент грузовика отвечает отказом. После получения ответа от заявки грузовик принимает или не принимает ее и переходит в состояние `CHAIN_STATE_DONT_WAIT`.

5.2. ЛОГИКА ПОВЕДЕНИЯ АГЕНТА ЗАЯВКИ

Агент заявки может находиться в следующих пяти состояниях:

1. `CUSTOMER_STATE_NO_PROPOSALS` – нет предложений ни от одного агента грузовика (начальное состояние);

2. `CUSTOMER_STATE_WAITING_FOR_ACCEPT` – ждет принятия в маршрут грузовика;

3. `CUSTOMER_STATE_THEREARE_PROPOSALS` – есть предложения от грузовиков;

4. `CUSTOMER_STATE_WAITING_FOR_REPLY_IMPROVEMENTS` – ждет ответа на посланные запросы на переход к другим грузовикам;

5. `CUSTOMER_STATE_WAITING_FOR_ACCEPT_IMPROVEMENTS` – ждет

перехода от текущего грузовика к другому.

Еще одним из индикаторов состояния агента является признак, обслуживаем ли он (состоит ли он в маршруте какого-либо грузовика).

Логика поведения агента заявки:

1. В состоянии `CUSTOMER_STATE_NO_PROPOSALS` агент заказа ждет предложений грузовиков, если он не входит в маршрут грузовика. По приходу предложений от грузовиков агент заказа переходит в состояние `CUSTOMER_STATE_THEREARE_PROPOSALS`. Если заказ входит в маршрут грузовика, то агент заказа сравнивает средний тариф грузовика и свой тариф заказа. Если тариф заказа выше, чем тариф грузовика, то агент заказа отправляет предложение о переходе соседним цепочкам и переходит в состояние `CUSTOMER_STATE_WAITING_FOR_REPLY_IMPROVEMENTS`.

2. В состоянии `CUSTOMER_STATE_THEREARE_PROPOSALS` агент заказа пребывает заданное число тактов (это настраиваемый параметр, обычно его значение 3–5). Собранные за это число тактов предложения анализируются, выбирается лучшее и агент заказа соглашается и отправляет согласие агенту грузовика, приславшего лучшее предложение, и переходит в состояние `CUSTOMER_STATE_WAITING_FOR_ACCEPT`.

3. В состоянии `CUSTOMER_STATE_WAITING_FOR_ACCEPT` агент заказа прибывает до момента пока либо не придет отказ от грузовика, на предложение которого согласился агент заказа, либо грузовик не включит заявку в маршрут; от предложений всех других агентов грузовиков агент заявки отказывается. После наступления этого события агент заказа переходит в состояние `CUSTOMER_STATE_NO_PROPOSALS`.

4. В состоянии `CUSTOMER_STATE_WAITING_FOR_REPLY_IMPROVEMENTS` агент заказа ждет отправленных заявок на переход другим агентам грузовиков. Когда придут ответы на все отправленные запросы, агент грузовика выбирает агента грузовика, который прислал лучший положительный ответ, отправляет ему подтверждение перехода и переходит в состояние `CUSTOMER_STATE_WAITING_FOR_ACCEPT_IMPROVEMENTS`. Если нет согласных взять заявку, то агент заказа встает в

состояние CUSTOMER_STATE_NO_PROPOSALS.

5. В состоянии CUSTOMER_STATE_WAITING_FOR_ACCEPT_IMPROVEMENTS агент заказа ждет перехода/отказа в переходе от текущего грузовика к согласившемуся ее взять другому грузовику и отвечает отказом на все предложения других грузовиков. После наступления события (ответа или перехода) агент заявки переходит в состояние CUSTOMER_STATE_NO_PROPOSALS.

На рис. 3 показан фрагмент сцены мира транспортной логистики, возле каждого узла, представляющего клиента (отмечен кругом с номером внутри) поставлен параметр персонального тарифа, если тариф отличается от среднего тарифа грузовика, то он обозначается двойным кругом. Узлы, отвечающие складу, помечены квадратом с номером внутри, последовательность посещения грузовиком заказчиков показана стрелками.

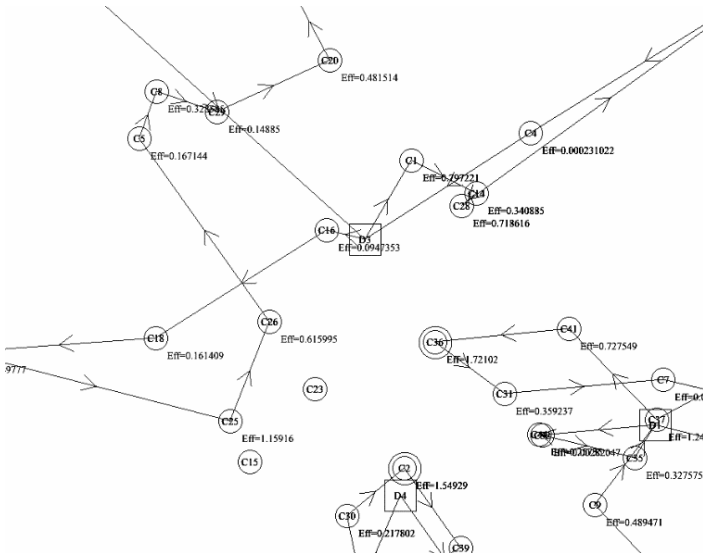


Рис. 3. Взаимодействие агентов

Изменение маршрутов грузовиков прекращается, когда мультиагентная система входит в стабильное состояние, больше

нет нераспределенных заявок и/или ни одна заявка не может улучшить свое положение.

При динамическом изменении сцены (добавлении/удалении/изменении заявки/грузовика) и обновлении структуры сцены (триангуляции Делоне) система выходит из достигнутого «стабильного» состояния и начинает опять к нему стремиться, и расписание перестраивается с учетом новых ограничений.

Таким образом достигается адаптивность и делается возможным быстро обрабатывать происходящие события.

6. Экспериментальное исследование режима планирования в прототипе

Предлагаемый мультиагентный подход был реализован на языке программирования C++, для организации агентов и их взаимодействия использовались структуры данных, специально разработанные авторами для организации работы мультиагентной системы по тактам.

Разработанный планировщик тестировался на известных примерах [5], для которых представлены наилучшие (в настоящее время) варианты решений.

Результаты сравнения и работы программы представлены в таблице 1.

Результаты экспериментов показывают, что заказы и ресурсы достаточно эффективно ведут квазипараллельные встречные «аукционы», которые позволяют системе обходить многие локальные оптимумы, которые могли возникнуть при обычной одной глобальной последовательной «жадной» стратегии.

Взаимодействие агентов учитывает модель «Shared costs» – заказы разделяют между собой стоимость использования грузовика, что ведет к динамическому тарифу, который в каждый момент времени может пересматриваться, вызывая перемещения заявок между грузовиками до достижения устойчивого неравновесия (неустойчивого равновесия).

Таблица 1. Результаты тестирования прототипа планировщика

№	Пример	МАС	Известное лучшее решение	Различие с МАС (%)
1	Pr01	1238,62	1083,98	14,26%
2	Pr02	2205,31	1763,07	25,08%
3	Pr03	3371,24	2408,42	39,97%
4	Pr04	3567,31	2958,23	20,58%
5	Pr07	1732,44	1423,35	21,71%
6	Pr08	2727,46	2150,22	26,84%

При этом любой переход заявки на грузовик делает его еще более выгодным для других заявок, и те заявки, что раньше не решались переходить, могут принять решение и перейти на этот грузовик в любой следующий момент времени, в зависимости от складывающейся ситуации.

Получаемые расписания как «устойчивые неравновесия» являются основой для дальнейшего гибкого изменения расписаний по событиям, приходящим в реальном времени.

7. Заключение

Разработанный прототип системы показал, что МАС с использованием дополнительных структур в сцене взаимодействия агентов позволяют достаточно быстро (менее чем за 1 с на четырёхъядерном процессоре с частотой 2 ГГц) построить вполне приемлемое допустимое решение, которое отличается от наилучшего, известного на данный момент, не более чем на 40%, в среднем 20–25% по набору тестовых примеров.

Однако если характеристики заявок содержат пересекающиеся временные окна, а расстояния велики, то мультиагентная система может построить допустимое решение не для всех заявок, часть заявок останется не выполненной, что часто и происходит на практике.

При анализе и сравнении решений, получаемых при помощи МАС и известных лучших решений, обнаружено, что текущая МАС относительно правильно распределяет заявки по

грузовикам (как в лучших решениях), но недостаточно оптимально осуществляет маршрутизацию грузовика, выстраивая порядок доставки заявок. В дальнейшем указанный недостаток может быть преодолен введением нового агента маршрута для повышения сложности решения, который бы согласовывал решения агентов заявок, при поддержке их более активного взаимодействия, с целью формирования устойчивых согласованных решений.

В дальнейшем планируется экспериментально исследовать устойчивость построенных решений и реализовать схемы проактивного взаимодействия агентов для улучшения результатов. Проактивное взаимодействие будет осуществляться путем применения методов баланса компенсаций за ухудшения для отдельных заказов, когда суммарный выигрыш превосходит возможные потери. Таким образом, перепланирование недостаточно оптимальных участков расписания будет происходить в непрерывном режиме при наличии запаса времени или отсутствии внешних событий.

Работа выполнена при поддержке РФФИ по гранту №16-01-00759.

Литература

1. СКВОРЦОВ А.В. *Триангуляция Делоне и ее применение*. – Томск: Изд-во Томск. ун-та, 2002. – 128 с.
2. APPLEGATE D.L., BIXBY R.M., CHVÁTAL V., COOK W.J. *The Traveling Salesman Problem*. – Princeton University Press Princeton, NJ, USA, 2007. – ISBN 0-691-12993-2.
3. BODIN L., GOLDEN B., ASSAD A., BALL M. *Routing and scheduling of vehicle and crews: The state of the art* // *Computers and Operations Research*. – 1983. – Vol. 10. – P. 63–211.
4. BRÄYSY O., GENDREAU M. *Tabu Search Heuristics for the Vehicle Routing Problem with Time Windows* // *Internal Report STF42 A01022, SINTEF Applied Mathematics, Department of Optimization, Oslo, Norway, 2001.*

5. CORDEAU J.-F., LAPORTE G., MERCIER A. *A unified tabu search heuristic for vehicle routing problems with time windows* // J. of the Operational Research Society. – 2001. – Vol. 52. – P. 928–936.
6. *Vehicle Routing Problem* | NEO Research Group. – URL: <http://neo.lcc.uma.es/vrp/known-best-results/> (дата обращения: 15.06.2016).
7. RAMALINGAN A., VIVEKANANDAN K. *Genetic Algorithm based Solution Model for Multi-Depot Vehicle Routing Problem with Time Windows* // Int. J. of Advanced Research in Computer and Communication Engineering. – 2014. – Vol. 3, Issue 11. – P. 8433–8439.
8. RZEVSKI G., SKOBELEV P. *Managing complexity*. – WIT Press, London-Boston, 2014. – 198 p.
9. TOTH P., VIGO D. *Vehicle Routing Problems, Methods, and Applications*. – Society for Industrial and Applied Mathematics Philadelphia, PA, USA, 2014. – 467 p.
10. Montoya-Torres J.R., López Francob J., Nieto Isazac S., Felizola Jiménez H., Herazo-Padilla N. *A literature review on the vehicle routing problem with multiple depots* // Computers & Industrial Engineering. 2015. – Vol. 79. – P. 115–129.

APPLICATION OF MULTI-AGENT TECHNOLOGIES TO TRANSPORTATION PROBLEM WITH TIME WINDOWS AND MULTIPLE DEPOTS

Vasily Sazonov, Faculty of Computations Mathematics and Cybernetics, Lomonosov Moscow State University, Cand.Sc., assistant professor (sazonov@smartsolutions-123.ru).

Petr Skobelev, Samara University, Doctor of Science, professor (petr.skobelev@gmail.com).

Alexandr Lada, Software Engineering Company “Smart Solutions” Ltd, Samara (lada@smartsolutions-123.ru).

Igor Mayorov, Software Engineering Company “Smart Solutions” Ltd (imayorov@smartsolutions-123.ru).

Abstract: In this paper a multi-agent approach to MDVRP (Multiple Depot Vehicle Routing Problem with Time Windows) problem is presented. The multi-agent system consists of interacting trucks, depots and orders interacting in an artificial environment. Truck agents are seeking to maximize the number of orders delivered with minimal route cost. Order agents are looking for a truck with minimal tariff. Depot agents are in charge for the whole coordination. Every agent can interact only with agents in its local neighborhood. The performance of the system depends on the number of messages processed by every agent. Delaney triangulation based scene structure is proposed to limit the intensity of agent negotiations. The system was evaluated on a number of testbed problems known from literature. It's shown that solutions obtained by the method proposed is worse by 10-30% from best known solutions, but the method is quick enough and then can be applied in real-time systems.

Keywords: multi-agent system, needs-and-means net, transportation management, multicriteria planning, real time.

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии А.А. Лазаревым.*

*Поступила в редакцию 21.06.2016.
Опубликована 30.11.2016.*

УДК 021.8 + 025.1
ББК 78.34

«РЕБЕРНОЕ» МАСШТАБИРОВАНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ¹

Мелентьев В. А.²

(ФГБУН Институт физики полупроводников
им. А.В. Ржанова СО РАН, Новосибирск)

Исследуется проблема повышения потенциала распараллеливания задач в вычислительной системе без наращивания числа ее процессоров: модифицированием исходной топологии, дополняющим ее отношения смежности между процессорами, при том что базовые способы адресации и маршрутизации остаются прежними. Для систем с гиперкубической топологией получены функции предельной распараллеливаемости и топологической масштабируемости на задачах, в которых длина пути между информационно смежными ветвями лимитирована объемами обрабатываемых данных и используемой сетевой технологией. Приведены соответствующие графики, дан их анализ.

Ключевые слова: гиперкубическая вычислительная система, суперкомпьютер, параллелизм, топологическая масштабируемость, реберное масштабирование.

1. Введение

Известно, что ограничение ускорения и эффективности распараллеливания задачи при отсутствии в ней скалярных фрагментов обусловлено наименее быстродействующим компонентом реализующей эту задачу подсистемы [20], каковым, как

¹ Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект №14-07-00169а.

² Виктор Александрович Мелентьев, кандидат технических наук (melva@isp.nsc.ru).

правило, является коммуникационная среда – интерконнект вычислительной системы (ВС). Быстродействие этой среды обусловлено расстояниями между информационно смежными в задачах процессорами [6] и используемой сетевой технологией.

Центральной проблемой горизонтального масштабирования ВС, связанной с ожиданиями соразмерного приращения параллелизма решаемых задач, является то, что увеличение порядка информационного графа задачи приводит к неполиномиальному росту трудоемкости поиска изоморфных его вложений при существенном снижении вероятности наличия таковых. Это связано с тем, что в основе используемых при вложении параллельной задачи алгоритмов лежит сопоставление отношений смежности вершин информационного графа задачи и вершин графа системы. Однако в силу известных технико-экономических факторов полная связность всех процессоров системы реализована быть не может, поэтому условие физической смежности задействованных в параллельной задаче процессоров даже при малом их числе не всегда может быть реализовано, и с масштабированием задачи эта проблема лишь усугубляется.

Для решения этой проблемы в информационную модель ВС предложено представлять графами, отношения смежности вершин в которых удовлетворяют требованиям в части предельно допускаемых для параллельных задач расстояний δ между процессорами организованных для их решения подсистем [9]. Такие графы, порожденные множеством вершин V графа $G(V, E)$ и матрицей δ -достижимости \mathbf{R}_δ , названы графами δ -достижимости $G_\delta(V, E_\delta)$. В них $E_\delta \in \mathbf{R}_\delta$, где R_δ – отношение δ -достижимости, связывающее ребром вершины u и v , если расстояние $d(u - v)$ в графе $G(V, E)$ не превышает величины δ : $(u - v) \in R_\delta \Leftrightarrow d(u - v) \leq \delta$. В [11] установлены функциональные зависимости таких расстояний от собственных задачи объемов вычислительных операций W и обмениваемых данных Q , от требуемых значений ускорения S_p и/или эффективности E_p решения этих задач при их распараллеливании на p ветвей. Большому значению δ при этом соответствует большее значение степени $s(G_\delta)$ получаемого таким образом графа δ -

достижимости G_δ и большее значение его δ -плотности¹ $\varphi(G_\delta) \equiv \varphi_\delta(G)$. Естественно, что вложение в такие графы параллельных задач, ранг которых не превышает δ -плотности, может быть произвольным, а возможности изоморфного вложения в них задач с большим числом ветвей – существенно выше. В [12] проведено исследование функциональной зависимости порядка наибольшей компоненты δ достижимости (δ -клики) гиперкубической ВС² от размерности s гиперкуба и от лимитируемой в нем достижимости δ вершин.

В [11] впервые восполнен пробел в оценке влияния топологии на масштабируемость параллельных систем и решаемых на них задач. С этой целью была предложена разделенная на две составляющие модель параллельных вычислений: первая часть отнесена к параллельным приложениям и приписывает им свойства неограниченной распараллеливаемости [1], вторая отнесена к вычислительной системе, ограничения параллелизма в которой обусловлены дефицитным в сравнении с процессорами быстродействием интерконнекта. Это позволило разделить технологический и топологический аспекты масштабирования системы и исследовать взаимную их обусловленность при масштабировании задач в этой системе. При этом выявлено, что в зависимости от свойственных задаче объемов вычислительных операций W и обмениваемых данных Q ускорение S_p ее решения, минимальное число p используемых при этом процессоров и лимитируемое при этом расстояние δ между информационно смежными процессорами коррелированы используемой в системе сетевой технологией (*Network Technology – NT*). Там же показано, что совместность определенных таким образом параметров для заданного набора (W, Q) -задач, решаемых в системе

¹ По аналогии с плотностью графа G его δ -плотность равна порядку наибольшей в графе δ -достижимости G_δ клики $K(G_\delta)$.

² Здесь и далее, говоря о ВС, по умолчанию предполагаем использование ею сетевой технологии, которая для (W, Q) -задачи ранга p с требуемыми значениями показателей эффективности ее решения обуславливает предельно допустимую достижимость δ .

с заданной NT , определяется топологией BC . Иными словами, при решении на BC некоторой (W, Q) -задачи заданное ускорение S может быть обеспечено при разбиении этой задачи не менее чем на p параллельных ветвей, а так как расстояния между информационно смежными процессорами ограничены используемой в системе NT и не должны превышать некоторого значения $\delta(p)$, то топология должна обеспечить наличие в графе BC соответствующего подграфа δ -достижимости порядка, не меньшего p .

Понятно при этом, что информационно полносвязные задачи предъявляют к топологии BC наиболее жесткие требования, и что наилучшей топологической масштабируемостью система обладает на топологически адекватных ей задачах. В [16] это наглядно продемонстрировано сопоставлением функций топологической масштабируемости гиперкубических BC и предельной распараллеливаемости на них задач с полносвязной, кольцевой и звездной информационными топологиями.

Учитывая очевидную зависимость порядка полносвязной с лимитируемой достижимостью компоненты регулярного графа от его степени, в настоящей работе рассмотрен способ «реберного» масштабирования, суть которого состоит в повышении потенциальных возможностей системы в распараллеливании задач не путем наращивания в ней числа процессоров, а существенно менее дорогостоящим повышением степени графа BC , сохраняющим базовые (исходные) отношения смежности вершин. Необходимым условием при этом является требование использования характерных для исходной топологии BC принципов адресации и алгоритмов маршрутизации.

Исследования, направленные на совершенствование базовых топологий BC , имеют хотя и давнюю [23], но продолжающуюся и поныне историю [4, 24]. Однако при этом, во-первых, реализация условия, сводящего к минимуму затраты на переконфигурацию действующей системы, в качестве необходимого атрибута изменения топологии не рассматривается в предположении, что оно не требует дополнительных усилий. Во-вторых, результаты топологических изменений в таких исследованиях традиционно оценивают коммуникационными критериями, отнесенными непосредственно к **топологии**, — диаметром и

шириной бисекции соответствующего ей графа, тогда как предлагаемая здесь постановка требует выявления формального соответствия топологических модификаций изменениям потенциала параллелизма **системы**.

Изложение сути и демонстрация предлагаемого подхода к оценке таких соответствий, позволяющей проводить сопоставительный анализ собственно параллельных систем, а не используемых ими топологий, и, таким образом, предоставляющей возможность осуществлять обоснованный выбор тех из них, что наиболее соответствуют проблемной ориентации системы, осуществлено на примере систем с гиперкубической топологией. Выбор этой топологии обусловлен прежде всего ее наглядностью и общеизвестностью. Не последнюю роль в выборе сыграло и то, что формальные зависимости масштабируемости систем с «классической» гиперкубической топологией от ее размерности и от заданной для задач достижимости уже определены в [11, 12] и [16], и это позволяет сопоставлять получаемые для модифицированных систем результаты с уже имеющимися. И наконец, несмотря на столь долгую историю использования гиперкубических сетей в построении суперкомпьютеров и несмотря на появление других статических топологий, ориентированных на использование быстродействующих коммутаторов (см., например, [17]) или программируемых логических матриц, использование гиперкуба в сетевой инфраструктуре суперкомпьютеров по-прежнему актуально. В этой связи достаточно упомянуть одного из лидеров высокопроизводительных вычислений – американскую компанию SGI, исследования которой показали, что «с увеличением размеров кластеров преимущества гиперкубических топологий перед «All-to-All»- и «Fat Tree»-топологиями, требующими наличия внешних переключателей и значительного числа кабельных соединений, существенно возрастают» [22]. На это указывают и июньские (2016 г.) рейтинги Top-500, в которых установленный этой же фирмой в NASA обладающий гиперкубической топологией суперкомпьютер PLEIADES [21] занимает лидирующие позиции с 4.09 Pflop/s LINPACK и 132 Tflop/s HPCG: 15-е и 9-е места соответственно.

2. «Реберное» масштабирование вычислительной системы

2.1. ОБЩЕЕ ПОНЯТИЕ О РЕБЕРНОМ МАСШТАБИРОВАНИИ

Общеизвестные понятия «горизонтального» и «вертикального» масштабирования вычислительной системы различаются способами повышения интегральной ее производительности: наращиванием числа составляющих систему процессорных элементов или их заменой более производительными. В отличие от этих понятий, введем понятие «реберного» масштабирования вычислительной системы, состоящее в таком наращивании числа ребер в графе ВС, при котором остаются неизменными не только множество вершин и подмножество ребер исходного графа ВС, но и те базовые его свойства, на которых основана используемая в системе маршрутизация. Учитывая, что сетевые топологии ВС за исключением звездной, как правило, являются регулярными, далее предполагаем, что реберное масштабирование ВС состоит в таком изменении степени ее графа, при котором характерные для изначальной топологии свойства и основанные на них функции маршрутизации могут быть лишь дополнены, сохраняя при этом свою суть. Напомним, что под функцией маршрутизации понимают [19] формализованное правило выбора промежуточных узлов на пути от узла-источника к узлу-получателю.

2.2. РЕБЕРНОЕ МАСШТАБИРОВАНИЕ ГИПЕРКУБИЧЕСКОЙ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

Оценим возможности и особенности осуществления реберного масштабирования на примере систем с гиперкубической топологией. Эта топология достаточно широко используется и не только благодаря известным достоинствам в части простоты ее технического и алгоритмического (в частности, маршрутизации) воплощения. Существует масса примеров того, что именно гиперкубическая информационная топология является наиболее приемлемой в распараллеливании задач [2], достаточно масштабных как по объемам обрабатываемых данных, так и по их вычислительной сложности. И если в реализуемых ранее суперкомпьютерах топология коммуникационной среды (в том числе

гиперкубическая) для заказчика не имела альтернативы (как, например, в машинах семейства nCUBE [4, 5]), то предоставляемые ныне фирмами-производителями средства позволяют заказчику самому воспроизвести в своих системах интерконнект с наиболее подходящей для его задач топологией. К примеру, архитектура RSC PetaStream компании РСК «предоставляет заказчикам большую гибкость выбора типов интерконнекта и топологий создаваемой сети за счет возможности подключения различных карт расширения» [7]; суперкомпьютерная архитектура компании «Т-Платформы» также «позволяет заказчикам реализовать практически любую сетевую топологию» [18], в том числе и гиперкубическую. Добавим к этому, что заказчики суперкомпьютерных систем, как правило, изначально ориентированы на последующее поэтапное наращивание суммарной вычислительной мощности, поэтому производители снабжают первично поставляемую конфигурацию ВС избыточным числом незадействованных в ней портов или предоставляют возможности последующего дооснащения конфигурации необходимым для выбранной топологии числом сетевых адаптеров. Таким образом, возможности реберного наращивания топологии ВС необходимую конструктивную базу, как правило, имеют.

Не оценивая пока что осуществимость реберного масштабирования в гиперкубе с позиции сохранения в нем функции маршрутизации, определяющей путь от источника к получателю через сопоставление двоичных кодов их адресов, рассмотрим возможные варианты такого масштабирования.

Итак, рассмотрим реберное масштабирование s -мерного гиперкуба H_s , $s \geq 2$. Порядок n исходного гиперкуба $n(H_s) = 2^s$, диаметр d равен его степени $d(H_s) = s$. Выделим в гиперкубе H_s подкуб H_k , где $2 \leq k \leq s$. Степень k -мерного куба H_k увеличим на единицу, попарно соединив вершины, находящиеся на наибольшем в нем расстоянии k . Аналогично поступим и с остальными $2^{s-k} - 1$ такими же k -мерными подкубами, составляющими в совокупности s -мерный гиперкуб H_s . Обозначим полученный в результате такого масштабирования граф как $H_{k,s+1}$. Заметим, что число добавленных при этом ребер $R(H_{k,s+1}) - R(H_s) = |E(H_{k,s+1})| - |E(H_s)| = 2^{k-1} \cdot 2^{s-k} = 2^{s-1}$, т.е. вне зависимости от выбора базового для масштабирования гиперкубиче-

ского фрагмента H_k в s -мерном гиперкубе H_s это число является неизменным. Диаметр $d(H_{k,s+1})$ полученного при этом графа $H_{k,s+1}$ определится выражением

$$d(H_{k,s+1}) = \lceil k/2 \rceil + s - k = s - \lfloor k/2 \rfloor$$

и уменьшается с возрастанием k вплоть до $k = s$, – в этом случае диаметр и приобретает минимальное значение: $d(H_{s,s+1}) = s - \lfloor k/2 \rfloor = \lceil s/2 \rceil$.

Оценка изменения ширины бисекции $B(H_{s+1})$ такого графа от k показывает, что $2 \leq k < s \Rightarrow B(H_{s+1}) = B(H_s) = n(H_s)/2 = 2^{s-1}$, однако при $k = s$ ширина бисекции увеличивается вдвое, до равного порядку $n(H_s)$ предельного значения: $k = s \Rightarrow B(H_{s+1}) = n(H_s) = 2^s$.

Таким образом, максимальный с позиции коммуникаций эффект от реберного масштабирования s -мерного гиперкуба H_s – наибольшая ширина бисекции при наименьшем диаметре и при одинаковых дополнительных расходах на интерконнект – может быть достигнут только при $k = s$, т.е. при попарном соединении вершин с равными значению s кодовыми расстояниями между ними. Естественно поэтому, что дальнейшему рассмотрению в данной работе подлежит именно этот, обладающий максимальной коммуникационной эффективностью, случай реберного масштабирования гиперкубической ВС.

В соответствии с данным в подразделе 2.1. определением, используемые в исходной гиперкубической ВС принципы маршрутизации и их программно-алгоритмическое воплощение существенных изменений вследствие реберного наращивания претерпеть не должны. Основой маршрутизации в гиперкубических ВС является принцип двоичного кодирования узлов, заключающийся в тождественности межузловых и межкодовых расстояний, когда коды любой пары смежных узлов отличаются только одним битом [19]. Сохранение этого свойства при реберном масштабировании гиперкубической ВС позволит использовать в ней те же принципы и программно-алгоритмические средства маршрутизации, что и в исходной гиперкубической системе. Предложенный ниже способ бинарного (двухкомпонентного) кодирования вершин реберно масштабированного гиперкуба соответствует этому требованию.

Итак, подвергнем реберному масштабированию s -мерный гиперкуб H_s . Для этого увеличим до $s + 1$ разрядность двоичного адреса его вершин, добавив к нему нулевой разряд слева, и назовем такую адресацию прямой. Введем альтернативную прямой адресацию вершин, проинвертировав все биты прямого адреса и назвав этот адрес обратным. Так как старший бит прямого адреса всегда будет нулевым, то единичное его состояние является отличительным признаком обратного адреса. Обозначения прямого X и обратного \bar{X} адресов вершины x в гиперкубе H_{s+1} различаем по отсутствию и наличию знака инверсии над ними. Из определения этих адресов ясно, что кодовое расстояние между прямым и обратным адресом одной и той же вершины – $d(X, \bar{X}) = s + 1$. Известно, что любой, произвольно взятой в s -мерном гиперкубе, вершине x может быть поставлена в соответствие единственная вершина x_s , отстоящая от нее на расстоянии $d(x-x_s) = s$. То же самое справедливо и для хэмминговых расстояний между кодами адресов таких вершин: $d(X, X_s) = d(\bar{X}, \bar{X}_s) = s$. Учитывая это, получим $d(X, \bar{X}_s) = d(X, \bar{X}) - d(X, X_s) = s + 1 - s = 1$, иначе говоря, $(d(X, X_s) = d(\bar{X}, \bar{X}_s) = s) \Rightarrow (d(X, \bar{X}_s) = d(\bar{X}, X_s) = 1)$. Попарно соединив вершины, для которых хэмминговы расстояния между кодами прямых (или обратных) адресов вершин в H_s равны числу измерений s , получим реберно масштабированный гиперкуб H_{s+1} , в котором смежность вершин a и b задана условием

$$d(a - b) = 1 \Leftrightarrow (d(A, B) = 1) \vee d(A, \bar{B}) = 1.$$

Учитывая, что отношения смежности на множестве всех вершин рассматриваемого графа полностью определены отношениями соседства кодов их адресов, расстояние $d(a-b)$ между любыми двумя вершинами реберно масштабированного гиперкуба H_{s+1} определится минимальным из кодовых расстояний между прямыми/обратными их адресами в любом их сочетании:

$$d(a, b) = \min \{d(A, B), d(A, \bar{B})\} = \min \{d(\bar{A}, \bar{B}), d(\bar{A}, B)\}.$$

Продемонстрируем вышесказанное на примере изображенного на рис. 1 реберно масштабированного 4-мерного гиперкуба H_{4+1} . Вершины в нем сохраняют соответствующие исходному

4D-кубу H_4 пометки; для удобства перевода в двоичную кодировку дадим их в восьмеричной системе. Соответствие прямого X и обратного \bar{X} кодов адресов вершин этим пометкам дано в представленной ниже таблице 1:

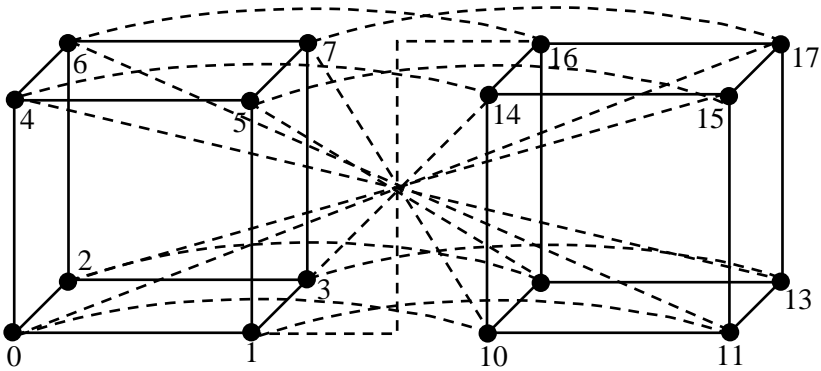


Рис. 1. Реберно масштабированный 4-мерный гиперкуб H_{4+1}

Таблица 1. Соответствие прямых X и обратных \bar{X} адресов вершин x в гиперкубе H_{4+1}

x	X	\bar{X}	x	X	\bar{X}
0	00000	11111	10	01000	10111
1	00001	11110	11	01001	10110
2	00010	11101	12	01010	10101
3	00011	11100	13	01011	10100
4	00100	11011	14	01100	10011
5	00101	11010	15	01101	10010
6	00110	11001	16	01110	10001
7	00111	11000	17	01111	10000

Для взятых в этом графе вершин $a = 5$ и $b = 16$ получим $A = 00101$, $B = 01110$ и $\bar{A} = 11010$, $\bar{B} = 10001$. Как видим, расстояние Хэмминга между отнесенными к вершине прямым и обратным кодами ее адресов не зависит от выбора вершины и равно увеличенному на единицу числу измерений s : $d(00101, 11010) = 5$ и $d(01110, 10001) = 5$. Тожественность

межузловых и межкодовых расстояний в H_{s+1} $d(a-b) = d(A, B) = d(\bar{A}, \bar{B})$ видна из $d(5-16) = d(00101, 01110) = (11010, 10001) = 3$. Коды смежных в H_4 вершин 5 и 7 ($d(5-7) = 1$) являются соседними хоть в прямой ($d(00101, 00111) = 1$), хоть в обратной ($d(11010, 11000) = 1$) их кодировке. Хэммингово расстояние между кодами адресов максимально разнесенных в гиперкубе H_4 друг от друга вершин $a = 5$, $a_4 = 12$ с расстоянием $d(5-12) = 4$ между ними тождественны этому расстоянию: $d(A, A_4) = d(00101, 01010) = 4$ и $d(\bar{A}, \bar{A}_4) = d(11010, 10101)$. При этом хэммингово расстояние между прямым адресом A вершины $a = 5$ и инвертированным адресом \bar{A}_4 максимально удаленной от нее вершины $a_4 = 12$ равно единице: $d(A, \bar{A}_4) = d(00101, 10101) = 1$. Таким образом, соседство¹ прямого кода одной вершины и обратного кода другой указывает на смежность вершин в графе H_{4+1} . Расстояние между вершинами $a = 5$ и $b = 16$ в H_{4+1} – $d(5, 16) = \min(d(00101, 01110), d(00101, 10001)) = \min(3, 2) = 2$. В 7D-кубе H_{7+1} , например, для $a = 5$ и $b = 132$ получим: $A = 00000101$, $B = 01011010$; $\bar{A} = 11111010$, $\bar{B} = 10100101$ и $d(5, 132) = \min(d(00000101, 01011010), d(00000101, 10100101)) = \min(6, 2) = 2$.

Итак, реберное масштабирование ВС с гиперкубической топологией существенно улучшает общепринятые в сопоставлении топологий сетевые показатели:

- диаметр уменьшается вдвое: $d(H_{s+1}) = d(H_s)/2$;
- ширина бисекции увеличивается вдвое: $B(H_{s+1}) = 2B(H_s)$.

При этом, как показано выше, принцип тождественности расстояний между вершинами реберно масштабированного гиперкуба и кодовых расстояний между их адресами сохраняется, а следовательно, сохраняется возможность использования основанных на этом принципе алгоритмов маршрутизации.

¹ Кодовые слова с единичным расстоянием между ними называют соседними.

Отметим также, что заказчики суперкомпьютерных систем, как правило, изначально ориентированы на поэтапное наращивание суммарной вычислительной мощности, поэтому производители систем с фиксированными топологиями (как, например, *nCUBE*) снабжают первично поставляемую конфигурацию ВС избыточным числом незадействованных в ней портов [3, 5]. Для систем же, топологии которых могут конфигурироваться заказчиками, такие производители, как российские РСК [7] и Т-Платформы [18], предоставляют возможность последующего дооснащения первоначально поставляемой конфигурации необходимым для создания выбранной заказчиком топологии числом сетевых адаптеров. Таким образом, и в том, и в другом случаях реберное масштабирование конструктивно вполне осуществимо и не требует характерных для традиционного масштабирования затрат на наращивание в системе числа процессоров.

3. Топологическая масштабируемость реберно модифицируемой гиперкубической ВС

3.1. БАЗОВЫЕ ПОСТАНОВКИ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Постановка задачи распараллеливания алгоритмов с учетом допускаемой достижимости информационно связанных процессоров впервые предложена и использована автором для оценки отказоустойчивости вычислительных систем [15]. Дальнейшее развитие эта постановка получила в работе [8], где был предложен аналитический подход к синтезу регулярных графов с заданными значениями порядка, степени и обхвата, а также в [10], где была поставлена и решена задача синтеза регулярных структур ВС, обладающих при этом минимальными задержками, и в [9], где рассмотрена проблема выявления в графе вычислительной системы компонент, соответствующих размещаемой подсистеме в отношении достижимости и соединимости ее вершин и предложен аналитический метод ее решения, основанный, как и все перечисленные здесь работы, на проективном описании графа вычислительной системы [13, 14]. Развернутое обоснование, основанное на предложенной модели параллельных вычислений, эта постановка впервые получила в [11].

В связи с тем, что полная связность всех процессоров системы при неограниченном ее масштабировании реализована быть не может, а условие физической смежности задействованных в параллельной задаче процессоров не всегда может быть реализовано даже при малом их числе, в [9] информационную модель ВС предложено представлять графами δ -достижимости, отношения смежности вершин в которых удовлетворяют допускаримым размещаемыми подсистемами требованиям в части предельно допускаемых расстояний δ между ними. Максимальное по включению подмножество вершин графа δ -достижимости G_δ , связанных между собой отношениями δ -достижимости, порождает в нем клику $K(G_\delta)$, (δ -клику $K_\delta(G)$ графа G системы), множество вершин которой объединяет в себе подмножество всех основных вершин глобальной δ -компоненты этого графа и подмножество вспомогательных вершин, входящих в состав δ -путей между основными вершинами лишь в качестве промежуточных и не принадлежащих клике $K(G_\delta)$. Подобно плотности $\varphi(G)$ графа G , определяемой порядком его наибольшей клики [9], порядок наибольшей из максимальных δ -клик графа $G(V, E)$ называем плотностью $\varphi(G_\delta)$ графа δ -достижимости, или δ -плотностью $\varphi_\delta(G)$ графа $G(V, E)$: $\varphi(G_\delta) \equiv \varphi_\delta(G)$.

Пусть проблемная ориентация гиперкубической ВС с используемой ею NT определена перечнем распараллеливаемых пользовательских приложений, каждое из которых отвечает условиям неограниченной распараллеливаемости [1], т.е. не содержит скалярных фрагментов и характеризуется объемами (или диапазонами изменения) W и Q вычислительных и обменных операций, равномерно распределяемыми между процессорами подсистемы в зависимости от числа параллельных ветвей p . Согласно предложенной в [11] модели существуют предельные значения допускаемых для каждой из этих задач достижимостей δ , и все решаемые в исследуемой ВС пользовательские задачи могут быть классифицированы в соответствии с этими значениями δ . Тогда выбор топологии, адекватной решаемым в исследуемой системе задачам, может быть обоснован анализом функций δ -плотности сопоставляемых топологий на

соответствующем этим задачам диапазоне $\delta_{\min} \leq \delta \leq \delta_{\max}$ изменения достижимостей.

В работе [12] проведено исследование и определена формальная зависимость порядка $n_{\delta}(H_s)$ максимальной по включению δ -компоненты s -мерного гиперкуба H_s , или, что равнозначно, δ -плотности $\varphi_{\delta}(H_s) \equiv n_{\delta}(H_s)$, от предельно допускаемых задачами расстояний $\delta \leq s$ между информационно-смежными в этих задачах процессорами:

$$(1) \quad \varphi_{\delta}(H_s) = \begin{cases} \sum_{i=0}^{\delta/2} \binom{s}{i} & \text{при четн. } \delta, \\ \binom{s-1}{\lfloor \delta/2 \rfloor} + \sum_{i=0}^{\lfloor \delta/2 \rfloor} \binom{s}{i} & \text{при нечетн. } \delta. \end{cases}$$

В следующем подразделе получим такую зависимость для реберно масштабированного гиперкуба H_{s+1} .

3.2. АНАЛИЗ δ -ПЛОТНОСТИ РЕБЕРНО МОДИФИЦИРОВАННОГО ГИПЕРКУБА

Исследование формальной зависимости δ -плотности $\varphi_{\delta}(H_{s+1})$ осуществим исходя из анализа расстояний между кодами двоичных адресов вершин исходного гиперкуба H_s . Как известно, расстояние $d(a-b)$ между произвольно взятыми в гиперкубе вершинами $a \neq b$ равно кодовому расстоянию $d(A, B)$ между двоичными кодами адресов A, B этих вершин. Для удобства изложения далее мы сохраняем соответствие восьмеричной нумерации вершин двоичному кодированию их прямых адресов (с добавленным нулевым старшим разрядом).

Итак, вершины H_{s+1} , как и вершины исходного гиперкуба $H_s \subset H_{s+1}$, являющегося остовным¹ подграфом H_{s+1} , пронумерованы в восьмеричной системе от 0 до $2^s - 1$, и смежным в H_s вершинам соответствуют соседние в двоичной кодировке прямые в H_{s+1} адреса, причем нулевой вершине a_0 соответствуют нулевой прямой адрес A_0 , все $s + 1$ разрядов которого – нулевые (вес его двоичного кода – $|A_0| = 0$), и обратный адрес $\overline{A_0}$, все

¹ Множества вершин этих графов совпадают.

$s + 1$ разрядов которого – единичные, с весом двоичного кода – $|\overline{A_0}| = s + 1$.

Как известно, кодовое расстояние $d(A, B)$ между двоичными кодами адресов A и B вершин a и b определяется их поразрядным сложением по модулю 2: $d(A, B) = |A \oplus B|$.

Из свойства поразрядного сложения, согласно которому суммирование разряда c с единичным инвертирует значение этого разряда – $c \oplus 1 = \bar{c}$, получим: $B \oplus \overline{A_0} = \bar{B}$, $A \oplus \bar{B} = A \oplus B \oplus \overline{A_0} = \overline{A \oplus B}$. Тогда $|A \oplus \bar{B}| = s + 1 - |A \oplus B|$, и расстояние между вершинами a, b в графе H_{s+1} , полученном в результате реберной надстройки гиперкуба H_s , определится из:

$$d(a - b) = \min\{d(A, B), s + 1 - d(A, B)\}.$$

Отсюда понятно, что расстояние между двумя произвольными вершинами a, b графа H_{s+1} не превышает половины от $s + 1$ и определено на интервале от 1 до $\lfloor (s + 1)/2 \rfloor$:

$$1 \leq d(a - b) \leq \lfloor (s + 1)/2 \rfloor,$$

что соответствует высказанному выше утверждению об уменьшенном диаметре графа H_{s+1} в сравнении с диаметром $d(H_s) = s$.

Произведем оценку хэмминговых расстояний между кодами прямых адресов произвольной пары вершин $a_i \neq a_j$ графа H_{s+1} , где индексы i, j при вершинах a_i, a_j соответствуют весам $|A_i|, |A_j|$ двоичных кодов A_i, A_j прямых адресов этих вершин и указывают на их кодовые расстояния $d(A_0, A_i), d(A_0, A_j)$ от адреса A_0 ракурсной вершины a_0 : $i = |A_i| = d(A_0, A_i)$, $j = |A_j| = d(A_0, A_j)$. Множества вершин с соответствующим индексам i, j числом единичных разрядов обозначим через $A(i), A(j)$: $A(i) = \{a_i \mid i = |A_i|\}$, $A(j) = \{a_j \mid j = |A_j|\}$.

Пусть $0 < i \leq j \leq \lfloor (s + 1)/2 \rfloor$, и $x_{(1)} \leq i$ единичных разрядов A_i совпадают с разрядами A_j . Тогда кодовое расстояние между A_i и A_j в зависимости от $x_{(1)}$ составит

$$(2) \quad d(A_i, A_j) = (i - x_{(1)}) + (j - x_{(1)}) = (i + j) - 2x_{(1)}.$$

В соответствии с (2), минимальным на множестве пар вершин $\{a_i \in A(i), a_j \in A(j)\}$ кодовое расстояние будет при $x_{(1)} = i$: $d_{\min}(A_i, A_j) = (i + j) - 2i = j - i$, а максимальное кодовое расстоя-

ние соответствует максимальному несовпадению ($x_{(1)} = 0$) этих адресов, при этом $d_{\max}(A_i, A_j) = i + j$.

Учитывая, что $d(A, \overline{B}) = s + 1 - d(A, B)$, из (2) получим:

$$d(A_i, \overline{A_j}) = s + 1 - d(A_i, B_j) = (s + 1) - (i + j) + 2x_{(1)}.$$

Так как расстояние $d(a_i - a_j)$ между вершинами $a_i \in A(i)$, $a_j \in A(j)$ в графе H_{s+1} определяется минимумом из расстояний $d(A_i, A_j)$ и $s + 1 - d(A_i, A_j)$, определим предельные значения i, j , при которых попарные расстояния между вершинами из соответствующих множеств $A(i)$, $A(j)$ не превысят заданного значения достижимости δ . Это соответствует условиям

$$(3) \quad (i + j'(\delta)) - 2x_{(1)} \leq \delta$$

или

$$(4) \quad (s + 1) - (i + j''(\delta)) + 2x_{(1)} \leq \delta.$$

Множество $V_\delta(H_{s+1})$ взаимно δ -достижимых в графе H_{s+1} вершин состоит из двух соответствующих неравенствам (3), (4) подмножеств: из заданного в (3) подмножества $V'_\delta(H_{s+1})$ вершин, расстояния между которыми определены кодовыми расстояниями между их прямыми адресами, и из заданного в (4) подмножества вершин $V''_\delta(H_{s+1})$, расстояния которых от вершин из $V'_\delta(H_{s+1})$ определены кодовыми расстояниями обратных адресов вершин из $V''_\delta(H_{s+1})$ от прямых адресов вершин из $V'(\delta)$, при том что расстояния между вершинами внутри $V''_\delta(H_{s+1})$ равны кодовым расстояниям между их прямыми или обратными адресами. Учитывая существенное отличие кодовых расстояний $j = |A_j|$ прямых адресов вершин из подмножеств $V'_\delta(H_{s+1})$ и из $V''_\delta(H_{s+1})$ от A_0 , значения j в (3), (4) проиндексированы соответственно. Понятно, что на интервале $j'(\delta) < j < j''(\delta)$ расстояния $d(a_i - a_j) > \delta$, поэтому ни одна вершина подмножеств $V(j) | j'(\delta) < j < j''(\delta)$ не может входить ни в $V'_\delta(H_{s+1})$, ни в $V''_\delta(H_{s+1})$ и, соответственно, не может быть включена в число вершин, определяющих искомым нами порядок δ -клики (δ -плотность $\varphi_\delta(H_{s+1})$).

Из (3) имеем $i + j'(\delta) \leq \delta + 2x_{(1)}$. Так как это неравенство должно быть справедливым для любого $i \leq j'(\delta)$, то, подставив максимальное значение $i = j'(\delta)$, получим $j'(\delta) \leq (\delta + 2x_{(1)})/2$. Понятно, что минимальным значение $j'(\delta)$ будет при максимальном несовпадении разрядов в прямых адресах A_i, A_j вершин

$a_i \in A(i)$, $a_j \in A(j'(\partial))$, что соответствует $x_{(1)} = 0$, поэтому окончательно рассматриваемое условие при $\partial < \lfloor (s+1)/2 \rfloor^1$ имеет вид

$$(5) \quad j'(\partial) \leq \lfloor \partial/2 \rfloor < \lfloor (s+1)/4 \rfloor.$$

В соответствии с (5) и с формулой ∂ -плотности гиперкуба $H_s(1)$ получим мощность подмножества $V'_\partial(H_{s+1})$:

$$|V'_\partial(H_{s+1})| = \begin{cases} \sum_{i=0}^{\partial/2} \binom{s}{i} & \text{при четн. } \partial, \\ \binom{s-1}{\lfloor \partial/2 \rfloor} + \sum_{i=0}^{\lfloor \partial/2 \rfloor} \binom{s}{i} & \text{при нечетн. } \partial. \end{cases}$$

В отличие от (3) условие (4) отнесено к вершинам, коды прямых адресов A_j которых содержат большее, чем $\lfloor \partial/2 \rfloor$ число единичных разрядов ($|A_j| > \lfloor \partial/2 \rfloor$), и область допустимых при заданной достижимости ∂ значений $j_2(\partial) < j \leq s$ будет отличной от $0 < j \leq j'(\partial)$. Учитывая, что максимум полученного из (4) $j'' \geq s+1-i+2x_{(1)} - \partial$ соответствует $x_{(1)} = i$ и максимальному из $i \leq j'(\partial)$ значению $i = j'(\partial) = \lfloor \partial/2 \rfloor$, получим $j'' \geq s+1 - \lceil \partial/2 \rceil$. Однако, исходя из того, что $d(A_0, \overline{A_0}) = 1$, получим $j'' \geq s - \lceil \partial/2 \rceil = s+1 - \lfloor \partial/2 \rfloor$. Из условий $j'' \geq s+1 - \lceil \partial/2 \rceil$ и $j'' \geq s+1 - \lfloor \partial/2 \rfloor$ выбираем более жесткое: $j'' \geq s+1 - \lfloor \partial/2 \rfloor$.

Тогда для $|V''_\partial(H_{s+1})|$ имеем:

$$|V''_\partial(H_{s+1})| = \begin{cases} \sum_{i=0}^{\partial/2-1} \binom{s}{i} & \text{при четн. } \partial, \\ \binom{s-1}{\lfloor \partial/2 \rfloor - 1} + \sum_{i=0}^{\lfloor \partial/2 \rfloor - 1} \binom{s}{i} & \text{при нечетн. } \partial. \end{cases}$$

Сумма $|V'_\partial(H_{s+1})|$ и $|V''_\partial(H_{s+1})|$ для анализируемого реберно масштабированного гиперкуба H_{s+1} определяет порядок компоненты ∂ -достижимости этого графа, или искомую его ∂ -плотность:

$$\varphi_\partial(H_{(s+1)}) = |V_\partial(H_{(s+1)})| = |V'_\partial(H_{(s+1)})| + |V''_\partial(H_{(s+1)})|.$$

Исходя из этого для четных значений ∂ получим:

¹ Выше мы показали, что при $\partial \geq \lfloor (s+1)/2 \rfloor$ все вершины H_{s+1} входят в состав его ∂ -клики, и его ∂ -плотность $\varphi_\partial(H_{s+1}) = 2^s$.

$$\varphi_{\partial}(H_{(s+1)}) = \sum_{i=0}^{\partial/2} \binom{s}{i} + \sum_{i=0}^{\partial/2-1} \binom{s}{i},$$

а для нечетных –

$$\varphi_{\partial}(H_{(s+1)}) = \binom{s-1}{\lfloor \partial/2 \rfloor} + \sum_{i=0}^{\lfloor \partial/2 \rfloor} \binom{s}{i} + \binom{s-1}{\lfloor \partial/2 \rfloor - 1} + \sum_{i=0}^{\lfloor \partial/2 \rfloor - 1} \binom{s}{i}.$$

Используя общеизвестное для биномиальных коэффициентов соотношение

$$\binom{s+1}{i} = \binom{s}{i-1} + \binom{s}{i},$$

для четных ∂ получим

$$\sum_{i=0}^{\partial/2} \binom{s}{i} + \sum_{i=0}^{\partial/2} \binom{s}{i-1} = \sum_{i=0}^{\partial/2} \binom{s+1}{i}.$$

Выполнив аналогичные действия для нечетных значений достижимости ∂ , получим результирующую формулу ∂ -плотности реберно масштабированного графа H_{s+1} при $\partial < \lfloor (s+1)/2 \rfloor$ и $s > 2$; в иных случаях – при $\partial \geq \lfloor (s+1)/2 \rfloor$ $\varphi_{\partial}(H_{s+1}) = 2^s$, а при $s = 2$ $\varphi_1(H_{2+1}) = 4$:

$$(6) \quad \varphi_{\partial}(H_{(s+1)}) = \begin{cases} \sum_{i=0}^{\partial/2} \binom{s+1}{i} & \text{при четн. } \partial, \\ \left(\binom{s}{\lfloor \partial/2 \rfloor} + \sum_{i=0}^{\lfloor \partial/2 \rfloor} \binom{s+1}{i} \right) & \text{при нечетн. } \partial. \end{cases}$$

Таким образом, ∂ -плотность реберно масштабированного гиперкуба определяется так же, как и ∂ -плотность исходного гиперкуба, но с увеличенным на единицу значением степени s . При этом интервал значений достижимости $0 < \partial < \lfloor (s+1)/2 \rfloor$ в реберно масштабированном гиперкубе в сравнении с интервалом $0 < \partial < s$ в исходном гиперкубе существенно сужен. На представленных в следующем разделе графических примерах будет показано, что это означает, что если для гиперкуба H_s линейный рост производительности системы может быть обеспечен только на задачах с достижимостью $\partial \geq s$, то после его реберной модификации к подмножеству линейно ускоряемых из набора решаемых в данной системе задач добавляются те из них, для которых $\lceil s/2 \rceil \leq \partial < s$, и таким образом число высокоэффективно решаемых в данной системе задач существенно возрастает.

3.3. МАСШТАБИРУЕМОСТЬ РЕБЕРНО МОДИФИЦИРОВАННОГО ГИПЕРКУБА

Как мы уже говорили ранее, каждая из решаемых в исследуемой ВС (W, Q)-задач с учетом параметров используемой в системе NT может быть классифицирована по значениям достижимости $\delta(p)$, обеспечивающими при распараллеливании этой задачи на заданное число p процессоров системы требуемые значения ускорения S_p и/или эффективности E_p [16]. Поэтому далее мы считаем, что набор задач, решаемых в рассматриваемой системе с определенной сетевой технологией, распределен по значениям предельно допустимой для них достижимости $\delta \geq 1$.

В [11, 16] показано, что при решении набора задач усредненное изменение пределов их распараллеливания более выигрышно в системах с большими значениями δ -плотности их графов. Поэтому вполне оправданным является использование δ -плотности в качественной (больше/меньше – лучше/хуже) характеристике графов ВС и в сопоставительном их анализе не только для информационно полносвязных, но и для других классифицированных по значению δ задач из набора, кроме тех из них, информационные топологии которых адекватны топологии системы. Таковыми для гиперкубических ВС, например, являются задачи с кольцевой, линейной и гиперкубической топологиями. Топологически адекватные системе задачи могут быть распараллелены на все $n(G)$ ее процессоров даже при $\delta = 1$, а системы, ориентированные на решение таких задач, являются специализированными. Топологическая специализация системы под некоторый достаточно ограниченный набор решаемых задач является одним из способов повышения эффективности суммарного использования всех ее процессоров, однако она (специализация) ограничивает число потенциальных пользователей системы. Анализ представленных ниже графиков и основанные на нем выводы имеют целью топологическую характеристику гиперкубической ВС как системы универсального назначения.

Анализ функций δ -плотности гиперкуба приведен в [16], поэтому на характерных особенностях этих функций останавливаться здесь мы не будем и дадим графическое их сопоставле-

ние (см. рис. 2) с функциями δ -плотности предложенного нами реберно масштабированного гиперкуба. Из этого рисунка ясно, что с ростом числа измерений s реберно масштабированного гиперкуба функция δ -плотности растет линейно ($\varphi_\delta(H_{s+1}) = 2^s$) пока $s \leq 2\delta$. Последующее наращивание $s \geq 2\delta + 1$ приводит к резкому падению δ -плотности реберно модифицированного гиперкуба от значения $\varphi_\delta(H_{s+1}) = 2^s$ при $s = 2\delta$ до значения δ -плотности $\varphi_\delta(H_{(s+1)})$, характерного для масштабированного гиперкуба с числом измерений, превышающим значение аргумента s на единицу: $s > 2d \Rightarrow \varphi_\delta(H_{s+1}) = \varphi_\delta(H_{(s+1)})$; здесь, в отличие от H_{s+1} , ограниченный скобками индекс в $H_{(s+1)}$ определяет обычный гиперкуб с числом измерений равным $(s + 1)$.

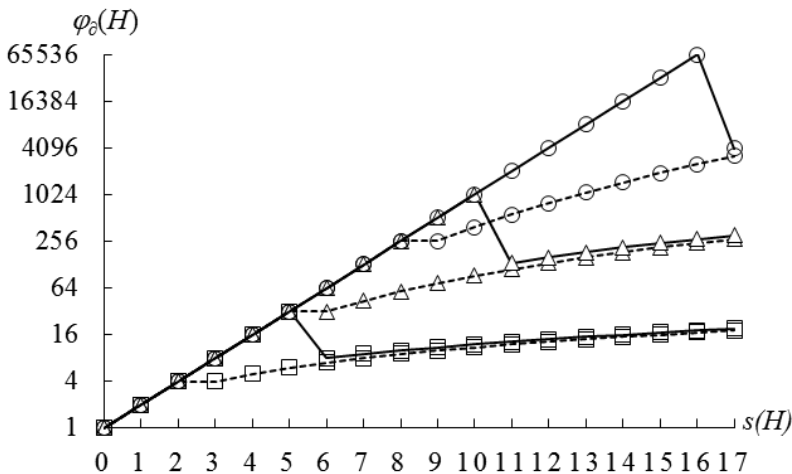


Рис. 2. Функции δ -плотности $\varphi_\delta(H)$:
 гиперкуба H_s (штриховые линии) и реберно
 масштабированного гиперкуба H_{s+1} (сплошные линии);
 $\square - \delta = 2, \triangle - \delta = 5, \circ - \delta = 8$

Это означает, что, несмотря на падение δ -плотности реберно масштабированного гиперкуба при $s \geq 2\delta$, ее значение все равно будет бóльшим, чем для обычного s -куба на величину, соответствующую увеличенному на единицу значению s .

В таблицу 2 сведена часть исходных для построения рис. 2 расчетных данных, достаточная лишь для численной иллюстрации вышесказанного.

Таблица 2. Значения функций δ -плотности: гиперкуба – $\varphi_{\delta}(H_s)$ и реберно масштабированного гиперкуба – H_{s+1}

$\varphi_{\delta}(H)$	H_s			H_{s+1}		
$\delta \backslash s$	9	10	11	9 + 1	10 + 1	11 + 1
1	2	2	2	2	2	2
2	10	11	12	11	12	13
3	18	20	22	20	22	24
4	46	56	67	56	67	79
5	74	92	112	512	1024	134
6	130	176	232	512	1024	2048
7	186	260	352	512	1024	2048
8	256	386	562	512	1024	2048
9	512	512	772	512	1024	2048
10	512	1024	1024	512	1024	2048

Например, в гиперкубе H_9 с числом процессоров $n(H_9) = 512$ при $\delta = 5$ имеем плотность $\varphi_5(H_{10}) = 92$ – заметим, что этот случай с $s = 9$, $\delta = 5$ соответствует условию $\delta \geq \lceil s/2 \rceil$. Масштабирование гиперкуба H_9 до H_{10} увеличивает число процессоров вдвое до $n(H_{10}) = 1024$, но повышает его δ -плотность всего лишь до $\varphi_5(H_{10}) = 112$, тогда как реберное модифицирование этого же гиперкуба до H_{9+1} , не требуя при этом увеличения числа процессоров, – $n(H_{9+1}) = n(H_9) = 512$, повышает δ -плотность до максимально возможного значения $\varphi_5(H_{9+1}) = n(H_9) = 512$. В случае с $\delta = 4$ $s = 9$, когда условие $\delta \geq \lceil s/2 \rceil$ не выполняется, масштабирование числа процессоров с $n(H_9) = 512$ до $n(H_{10}) = 1024$ повышает плотность с $\varphi_4(H_9) = 46$ до $\varphi_4(H_{10}) = 56$, тогда как реберное масштабирование $H_9 \rightarrow H_{9+1}$ повышает плотность до этого же значения $\varphi_4(H_{9+1}) = \varphi_4(H_{10}) = 56$ без наращивания числа процес-

соров в системе, а увеличением только числа ребер. Аналогичную картину можно увидеть из таблицы 2 для задач с $\partial = 2 \leq \lceil s/2 \rceil$ при масштабировании гиперкуба H_{10} : $\varphi_2(H_{10}) = 11$, $\varphi_2(H_{11}) = 12$, $\varphi_2(H_{10+1}) = \varphi_2(H_{11}) = 12$.

Таким образом, если набор решаемых в s -мерной гиперкубической ВС задач определен соответствующим используемой NT интервалом изменения достижимости $\partial_{\min} \leq \partial \leq \partial_{\max}$, то при реберном масштабировании этой ВС часть задач набора, для которых $\lceil s/2 \rceil \leq \partial \leq \partial_{\max}$, в потенциале покажут линейный рост производительности вплоть до максимального их распараллеливания на $p = 2^s$ процессоров. Заметим, что в традиционном гиперкубе такой рост мог бы быть обеспечен лишь на задачах с $s \leq \partial$, что существенно сужает число таких задач и предъявляет значительно более жесткие требования к производительности используемой в системе NT .

Итак, несмотря на то, что в наихудшем случае распараллеливания задач с $\partial_{\min} \leq \partial < \lceil s/2 \rceil$ линейного роста эффективности при реберном масштабировании гиперкубической ВС добиться не удастся, потенциал эффективного распараллеливания задач в такой ВС все же превышает потенциал обычной гиперкубической ВС: такого же в численном выражении эффекта можно достигнуть увеличением числа ее процессоров вдвое, т.е. при пропорционально большей цене. Чтобы убедиться в этом, сопоставим стоимости реберного и традиционного масштабирования s -мерной гиперкубической ВС.

Обычное масштабирование наряду с двойным увеличением числа процессоров от 2^s до $2^{(s+1)}$ требует более чем двойного увеличения числа ребер E в графе $H_{(s+1)}$ от $E(H_s) = 2^s \cdot s/2 = s \cdot 2^{s-1}$ до $E(H_{(s+1)}) = 2^{(s+1)} \cdot (s+1)/2 = (s+1) \cdot 2^s$. Реберное масштабирование графа H_s при неизменном числе процессоров в нем увеличивает число ребер от $E(H_s) = s \cdot 2^s$ до $E(H_{s+1}) = 2^s \cdot (s+1)/2 = (s+1) \cdot 2^{s-1}$, т.е. всего в $(1 + s^{-1})$ раза.

Таким образом, понятно, что даже в наихудшем случае использования недостаточно быстродействующей для набора решаемых задач NT получение одинакового ускорения в гиперкубической ВС достигается практически вдвое дешевле реберным ее масштабированием, чем традиционным. Для задач же с

$\partial \geq \lceil s/2 \rceil$ потенциал распараллеливания в реберно масштабированной гиперкубической ВС максимален и ограничен лишь числом имеющихся в ее составе процессоров.

В том, что реберное, в сравнении с традиционным, масштабирование гиперкуба позволяет добиться существенно большего приращения числа эффективно используемых в решении данной задачи процессоров при условии $\lceil s/2 \rceil \leq \partial < s$, можно убедиться и из рис. 3, сопоставляющего графики функций плотности гиперкубов H_9 , H_{10} и H_{11} и их реберно масштабированных модификаций H_{9+1} , H_{10+1} и H_{11+1} , отнесенные к параллельным задачам, классифицированным по значению предельно допускаемой между их ветвями достижимости ∂ .

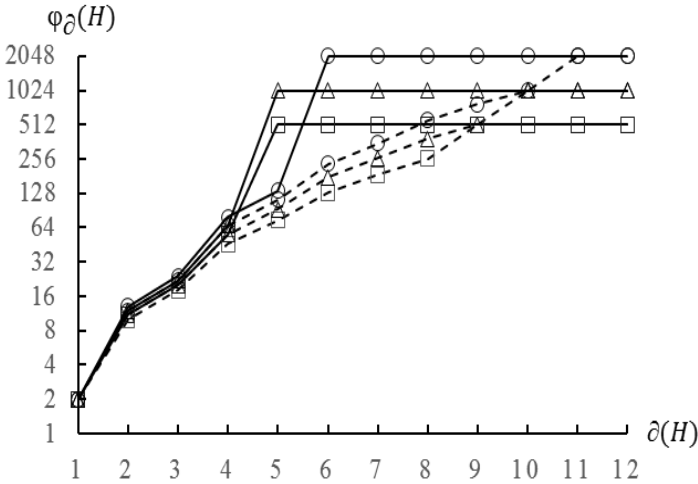


Рис. 3. Функции ∂ -плотности $\phi_{\partial}(H)$: гиперкуба H_s (штриховые линии) и реберно масштабированного гиперкуба H_{s+1} (сплошные линии); $\square - s = 9$, $\Delta - s = 10$, $\circ - s = 11$

Функция топологической масштабируемости $\mu_{\partial}(G)$ системы определена в [11] нормированной порядком $n(G)$ ее графа ∂ -плотностью $\phi_{\partial}(G)$: $\mu_{\partial}(G) = \phi_{\partial}(G)/n(G)$. Учитывая, что предельные значения достижимостей ∂ в системе обусловлены предписанными ей задачами и используемой сетевой технологией,

функция топологической масштабируемости системы характеризует изменение потенциала в распараллеливании предписанных ей задач при изменении порядка n графа G_n системы (в нашем случае $G_n = H_s$ и $n(H_s) = 2^s$, поэтому в качестве аргумента удобней использовать число измерений s исходного гиперкуба H_s). Приведенный ниже рис. 4 позволяет графически сопоставить функции топологической масштабируемости исходного $\varphi_c(H_s)$ и реберно масштабированного гиперкуба $\varphi_c(H_{s+1})$ на классифицированных по значениям δ задач.

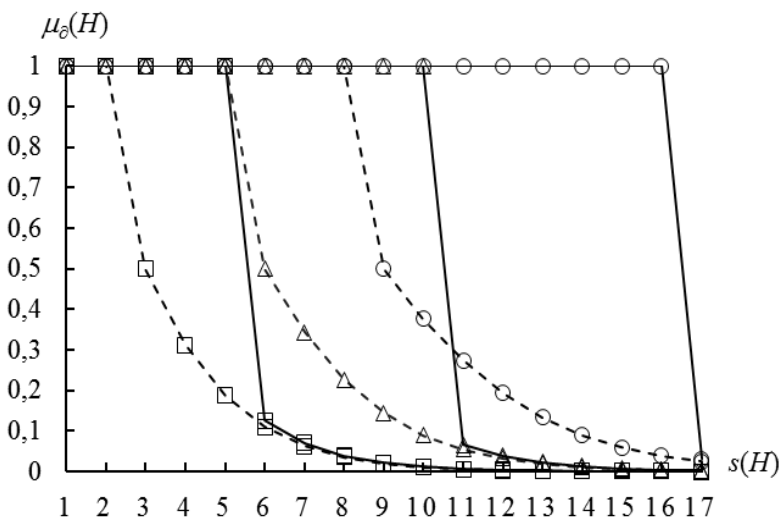


Рис. 4. Функции масштабируемости $\mu_\delta(H)$:
 $\mu_\delta(H_s)$ – гиперкуба (штриховые линии),
 $\mu_\delta(H_{s+1})$ – реберно масштаб. гиперкуба (сплошные линии).
 $\square - \delta = 2$, $\triangle - \delta = 5$, $\circ - \delta = 8$

Из рис. 4 видно, что при традиционном наращивании гиперкубической ВС функция ее топологической масштабируемости на задачах δ -класса имеет максимальное, равное единице, значение, пока $s \leq \delta$. Увеличение числа измерений гиперкуба на единицу сверх δ до $s = \delta + 1$ удваивает число процессоров в системе, но предел распараллеливания δ -задач при этом сохраняется на прежнем уровне, и это соответствует вдвое меньшему

значению функции топологической масштабируемости: $\mu_{\varrho}(H_{(\varrho+1)}) = 0,5$. Последующее увеличение s до значений $s > \varrho + x$, $x > 0$ приводит к незначительному, в сравнении с увеличивающимся при этом числом процессоров, росту функции ϱ -плотности $\varphi_{\varrho}(H_s)$ и, соответственно, к монотонному убыванию функции топологической масштабируемости $\mu_{\varrho}(H_s)$:

$$(s = \varrho + x, x \geq 0) \Rightarrow \mu_{\varrho}(H_{(\varrho+x+1)}) < \mu_{\varrho}(H_{(\varrho+x)}).$$

Сочетание традиционного масштабирования гиперкубической ВС с реберным ее масштабированием сохраняет равное единице значение функции топологической масштабируемости уже до $s = 2\varrho$, тем самым в два раза расширяя границы эффективного масштабирования задач с соответствующим используемой в системе *NT* значением предельной достижимости ϱ . Несмотря на то, что при последующем ($s > 2\varrho + x$, $x > 0$) масштабировании гиперкубической ВС происходит резкое падение функций ее топологической масштабируемости, значение функции $\mu_{\varrho}(H_{(2\varrho+x)+1})$ реберно масштабированной ВС со степенью $s = 2\varrho + x$ все равно будет превышать значение $\mu_{\varrho}(H_{(2\varrho+x)})$:

$$(s = 2\varrho + x, x \geq 0) \Rightarrow \mu_{\varrho}(H_{(2\varrho+x+1)}) > \mu_{\varrho}(H_{(2\varrho+x)}).$$

4. Заключение

Наращивание числа процессорных элементов преследует, как правило, одну или сразу обе цели: предотвращение коллизий, возникающих в связи с дефицитным суммарным потенциалом текущей конфигурации ВС, недостаточным для удовлетворения совмещенных во времени возрастающих потребностей множества пользователей и их задач, и/или увеличение потенциала масштабирования задач для повышения оперативности их решения в данной системе. Предложен подход к исследованию названного в работе реберным масштабированием способа достижения второй из этих целей без дорогостоящего увеличения числа процессорных элементов: наращиванием числа ребер исходной топологии, не требующим перекоммутации имеющихся межпроцессорных связей и изменения соответствующих

исходной топологии системы способов адресации и маршрутизации.

Даны общее описание предложенного подхода и его конкретизация для вычислительных систем с гиперкубической топологией. Показано, что традиционно используемые в сопоставлении коммуникационных возможностей сетей связи показатели – ширина бисекции сети и ее диаметр, в сравнении гиперкубической топологии с ее реберно модифицированным вариантом свидетельствуют об удвоенном преимуществе последнего. Это побудило к поиску возможности сохранения в этом варианте способов адресации и маршрутизации, собственных исходной гиперкубической топологии. Исследовано влияние предложенных в работе изменений гиперкубической ВС на потенциалы распараллеливаемости в ней задач, классифицированных по лимитированной в них достижимости.

Традиционная для гиперкуба адресация вершин, в которой расстояния между его вершинами равны кодовым расстояниям между их адресами, для реберно масштабированного гиперкуба дополнена инверсной (обратной) адресацией, основанной на этом же принципе. Показано, что увеличение при этом разрядности адресного слова на единицу позволяет дополнить гиперкуб ребрами между наиболее удаленными в нем вершинами, получив тем самым единичное расстояние между такими вершинами, соответствующее единичному кодовому расстоянию между прямым адресом одной из них и обратным адресом другой. Это позволяет использовать в модифицированной таким образом системе те же алгоритмы маршрутизации, что и в исходной.

Получена формула δ -плотности реберно масштабированного гиперкуба, показано, что ее значение определяется так же, как и δ -плотность исходного гиперкуба, но с увеличенным на единицу значением его степени s . Это указывает на то, что на задачах, лимитированных достижимостью $0 < \delta < \lfloor (s + 1)/2 \rfloor$, эффект от реберного масштабирования (без удвоения числа процессоров) равнозначен эффекту, который был бы получен при увеличении s на единицу (при удвоении числа процессоров). Кроме того, в реберно масштабированном гиперкубе ин-

тервал $0 < \delta < \lfloor (s+1)/2 \rfloor$ значений лимитируемых задачами достижимостей δ существенно уже интервала $0 < \delta < s$ в исходном гиперкубе. Это означает, что в отличие от исходной гиперкубической ВС, где предельному распараллеливанию вплоть до $n = 2^s$ могут быть подвергнуты только задачи с $\delta \geq s$, в реберно масштабированной ВС круг предельно распараллеливаемых задач может быть существенно расширен за счет задач с вдвое меньшими значениями предельно допускаемой достижимости $\delta \geq \lceil s/2 \rceil$. Этим же интервалам достижимости δ соответствуют и области эффективного масштабирования и реберного масштабирования гиперкубических ВС, что подтверждено в данной работе соответствующими графиками функций их δ -плотности и масштабируемости.

Следует заметить, что, в принципе, реберному масштабированию может быть подвергнут не весь s -мерный гиперкуб, а его k -мерные ($k < s$) фрагменты. Это, как показано в подразделе 2.2, несколько увеличивает диаметр результирующего графа и уменьшает ширину его бисекции. Однако очевидно, что при использовании в ВС недостаточно быстродействующей NT , обуславливающей для решаемых в системе задач малые значения допускаемой достижимости, уменьшение k может привести к повышению значений функции δ -плотности и функции масштабируемости системы именно для таких δ , а следовательно, к увеличению потенциала распараллеливания системы на задачах с малыми значениями предельно допускаемой достижимости. Вероятно, в случаях, когда набор решаемых в некоторой системе задач и используемая в ней сетевая технология имеют достаточно широкий разброс предельных достижимостей, имеет смысл использовать для реберного масштабирования коммутатор, меняющий k в соответствии с потребностями (здесь речь идет о коммутации только дополняющих гиперкубическую ВС линках). Очевидно, что уменьшение при этом размера реберно масштабируемого k -куба положительно скажется и на отказоустойчивости системы, увеличивая число альтернативных маршрутов между вершинами. Однако это уже выходит за рамки поставленных в данной работе целей и требует самостоятельной проработки.

Литература

1. ВОЕВОДИН В.В., ВОЕВОДИН В.В. *Параллельные вычисления*. – СПб.: Изд-во БХВ-Петербург, 2002. – 599 с.
2. ГЕРГЕЛЬ В.П. *Высокопроизводительные вычисления для многоядерных многопроцессорных систем. Учебное пособие*. – Н.Новгород: Изд-во ННГУ им. Н.И. Лобачевского, 2010. – 421 с.
3. ДУБОВА Н. *Суперкомпьютеры nCube // Открытые системы*. – 1995. – №2. – С. 42–47.
4. КАРАВАЙ М.Ф., ПОДЛАЗОВ В.С. *Расширенный обобщенный гиперкуб как отказоустойчивая системная сеть для многопроцессорных систем // Сборник «Управление большими системами»*. – 2013. – Вып. 45. – С. 344–371.
5. КУЗЬМИНСКИЙ М. *Гиперкубические метаморфозы // Computerworld Россия*. – 1997. – №17–18. [Электронный ресурс]. – URL: <http://www.osp.ru/cw/1997/17-18/20140/> (дата обращения: 25.05.2016).
6. МАКАГОН Д., СЫРОМЯТНИКОВ Е. *Сети для суперкомпьютеров // Открытые системы*. – 2011. – №7. – С. 1–8.
7. *Массивно-параллельная архитектура RSC PetaStream [Электронный ресурс]*. – URL: <http://www.rscgroup.ru/ru/our-solutions> (дата обращения: 25.05.2016).
8. МЕЛЕНТЬЕВ В.А. *Аналитический подход к синтезу регулярных графов с заданными значениями порядка, степени и обхвата // Прикладная дискретная математика*. – 2010. – №2. – С. 74–86.
9. МЕЛЕНТЬЕВ В.А. *Вложение подсистем, лимитирующих длину и число путей между вершинами графа вычислительной системы // Сборник «Управление большими системами»*. – 2014. – Вып. 47. – С. 212–246.

10. МЕЛЕНТЬЕВ В.А. *Компактные структуры вычислительных систем и их синтез* // Сборник «Управление большими системами». – 2011. – Вып. 32. – С. 241–261.
11. МЕЛЕНТЬЕВ В.А. *О топологической масштабируемости вычислительных систем* // Сборник «Управление большими системами». – 2015. – Вып. 58. – С.115–143.
12. МЕЛЕНТЬЕВ В.А. *Предельное конфигурирование подсистем в гиперкубических вычислительных системах* // Информационные технологии и вычислительные системы. – 2015. – №2. – С. 20–30.
13. МЕЛЕНТЬЕВ В.А. *Скобочная форма описания графов и ее использование в структурных исследованиях живучих вычислительных систем* // Автометрия. – 2000. – Т. 38, №. 4. – С. 36–52.
14. МЕЛЕНТЬЕВ В.А. *Формальные основы скобочных образов в теории графов* // Труды Второй Междунар. конф. Параллельные вычисления и задачи управления РАСО. – 2004. – С. 694–706
15. МЕЛЕНТЬЕВ В.А. *Функция структурной отказоустойчивости и δ -ограниченная компонента связности графа вычислительной системы* // Прикладная дискретная математика. – 2008. – №2. – С. 102–106.
16. МЕЛЕНТЬЕВ В.А., ШУБИН В.И., ЗАДОРЖНЫЙ А.Ф. *Топологическая масштабируемость гиперкубических параллельных систем и задач* // ISJ Theoretical & Applied Science. – 2015. – №11(31). – С. 122–129.
17. ПОДЛАЗОВ В.С. *Кросскольца – мультикольцевые коммутаторы с малым диаметром и их 1-1-перестраиваемость* // Автоматика и телемеханика. – 2004. – №4. – С. 153–165.
18. *T-Платформы. Суперкомпьютерные решения* [Электронный ресурс]. – URL: <http://www.t-platforms.ru/products/hpc/v-class.html> (дата обращения: 25.05.2016).

19. ЦИЛЬКЕР Б.Я., ОРЛОВ С.А. *Организация ЭВМ и систем: учебник для вузов.* – СПб.: Питер, 2011. – 688 с.
20. AMDAHL G.M *Validity of the single-processor approach to achieving large-scale computing capabilities* // Proc. AFIPS Conference, Atlantic City, N.J., Apr. 18-20. – AFIPS Press, Reston, Va, 1967. – Vol. 30. – P. 483–485.
21. *High-End Computing Capability. Pleiades Supercomputer* [Электронный ресурс]. – URL: <http://www.t-platforms.ru/products/hpc/v-class.html> (дата обращения: 22.08.2016).
22. *SGI Altix ICE: Selecting the Most Effective InfiniBand Topology* [Электронный ресурс]. – URL: <http://www.silicon.hu/sites/default/files/files/SGI ICE 8400 Infiniband topology.pdf> (дата обращения: 22.08.2016).
23. TZENG N., WEI S. *Enhanced hypercubes* // IEEE Trans. Computers. – 1991. – Vol. 40, No. 3. – P. 284–294.
24. XUDING ZHU *The Z-cubes: a hypercube variant with small diameter* // Department of Mathematics, Zhejiang Normal University, China September 24, 2015. [Электронный ресурс]. – URL: <http://arxiv.org/pdf/1509.06884v1.pdf> (дата обращения: 22.08.2016).

EDGE SCALING OF COMPUTING SYSTEMS

Victor Melentiev, Rzhanov Institute of Semiconductor Physics Siberian Branch of RAS, Novosibirsk, Cand. Sc., senior research associate (melva@isp.nsc.ru).

Abstract: The problem we consider is how to increase a parallelization potential of tasks in a computing system not extending the number of its processor units. Our approach is to introduce additional links to initial system topology but preserve all existing links, addressing and routing policies. We provide a general formulation of the proposed approach and detailed description for systems with hypercube topology. In an edge scaled hypercube the conventional addressing scheme is enhanced by inverse addressing. We demonstrate that bisection bandwidth of the modified network is twice as high as of conventional hypercube and the diameter is twice as low. We obtain the scalability functions of a limit parallelization and a topological scalability on tasks with limited path length between branches. The proposed network modification can be applied to a limited k -dimensional fragment of the network with adaptive k selection. The impact on reliability of such systems will be covered in future research.

Keywords: hypercubic computing system, supercomputer, parallelism, topological scalability, edge scaling.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии М.Ф. Караваем.

*Поступила в редакцию 28.05.2016.
Опубликована 30.11.2016.*

УДК 519.86
ББК 22.18+65.42

ИНФОРМАЦИОННОЕ РАВНОВЕСИЕ В МОДЕЛИ ДИНАМИКИ КОЛЛЕКТИВНОГО ПОВЕДЕНИЯ НА КОНКУРЕНТНОМ РЫНКЕ

Алгазин Г. И.¹, Алгазина Д. Г.²

(Алтайский государственный университет, г. Барнаул)

Приведенная динамическая модель рефлексивного поведения позволяет в рамках единого подхода описывать и прогнозировать взаимодействия на конкурентном рынке агентов Курно и Штакельберга при отсутствии у них общего знания. Теоретическую основу подхода составляют теория игр и теория коллективного поведения, а также их применение для исследования поведения разноинформированных рациональных агентов, имеющих неверные исходные представления о предельных издержках конкурентов. Получены необходимые и достаточные условия сходимости динамических процедур к истинному положению равновесия.

Ключевые слова: информированность агентов, информационное равновесие, коллективное поведение, конкурентный рынок, предельные издержки, агент Курно, агент Штакельберга

1. Введение

Принятие решений рыночными субъектами (интеллектуальными агентами), осуществляющими совместную деятельность, тесно связано с их информированностью, а также информированностью и поведением остальных агентов. В реальных

¹ Геннадий Иванович Алгазин, доктор физико-математических наук, профессор (algaz46@yandex.ru).

² Дарья Геннадьевна Алгазина, кандидат технических наук, доцент (darya.algazina@mail.ru).

системах вполне естественным можно считать допущение, что конкурирующие агенты априори не раскрывают друг другу свои истинные издержки. Поэтому при принятии решений такие агенты могут иметь неверные представления о затратах других агентов.

Один из подходов к принятию агентами решений основан на сочетанном применении теоретико-игровых моделей и моделей теории коллективного поведения. Модели теории игр дают возможность предсказывать поведение агентов при различных предположениях о взаимной информированности агентов и принципах принятия ими решений, в том числе когда информированность агентов не является общим знанием. В сравнении с теорией игр теория коллективного (группового) поведения занимается исследованием динамики поведения агентов при достаточно слабых предположениях относительно их информированности. Отличие коллективного поведения от игрового подчеркивается также и тем, что его условно можно считать «оптимизационным». Объединяет то, что оба исследуют поведение рациональных агентов, и равновесия игры, как правило, являются устойчивыми исходами моделей динамики коллективного поведения [5, 6, 8–10, 13, 17 и др.].

В работах ряда авторов отражены разные аспекты применения моделей адаптивных динамик в модели Курно. В работе [10] рассматривается модель Курно с частным случаем нелинейных функций затрат агентов и неполной информированностью агентов о затратах конкурентов. Однако для модели динамики коллективного поведения не приведено доказательство о сходимости, есть только результаты расчетов, иллюстрирующих, что в некоторых случаях разноинформированные агенты могут в динамике (за счет повторения игры) прийти к истинному информационному равновесию. В работе [8] для модели Курно с квадратичными функциями издержек обсуждается применение адаптивных динамик к задаче рефлексивного разбиения агентов, но также не приводятся конкретные результаты по их сходимости. В [5] доказан ряд теорем о существовании равновесия в моделях адаптивных динамик, но вместе с тем во многих случаях эти теоремы не определяют области сходимости алгоритмов поиска равновесия («неподвижных точек»). В работе [15] пока-

зано, что в динамической, повторяемой игре с последовательным порядком игры (когда на каждом шаге игры только одна фирма делает ход) игроки приходят к равновесию Курно–Нэша. Для рынка однородного товара проблемы вычисления равновесия и сходимости адаптивных механизмов к равновесию Курно–Нэша изучались также в работе [6]. В общих предположениях доказана такая сходимость для непрерывного адаптивного процесса. В [7] для случая линейных функций спроса и издержек проводится анализ влияния на сходимость к равновесию Курно–Нэша процессов стратегических рефлексивных игр различных порядков. Процессы рефлексии численно моделируются с помощью рекуррентных соотношений, в качестве которых рассматриваются функции реакции фирм. В статье [4] приводится алгоритм численного нахождения точки равновесия и рассматриваются условия его сходимости для достаточно общей модели рынка с однородным товаром, в рамки которой укладываются как частные случаи модели Курно и Штакельберга. Предлагаемый итерационный процесс направлен на нахождение устойчивой стационарной точки динамической системы, задаваемой дифференциальным уравнением. В [11] представлено исследование по оценке скорости сходимости в дискретном времени адаптивных траекторий к положению равновесия системы с большим числом целенаправленных агентов при предположениях, что точка равновесия существует, единственна и траектории сходятся к этой точке. В статье [12] на примере олигополии Курно рассматриваются модели самостоятельной адаптации агентов к изменяющимся условиям на основе наблюдений за внешней средой, действиями других агентов и результатами их деятельности. Предполагается, что каждый агент наделяет оппонента той же информированностью, какой обладает он сам, а сами агенты различаются лишь информированностью о состоянии природы. Для частного случая иллюстрируется сходимость действий агентов и сходимость оценок агентами состояния природы. В монографии [18] рассматриваются вопросы реакции фирм по Курно и по Штакельбергу, сходимость динамического процесса анализируется в дискретном времени с учетом «хаотичности» поведения фирм, что качественно отли-

чает его от рассматриваемых авторами настоящей статьи моделей процессов коллективного поведения.

В данной статье рассмотрена теоретико-игровая модель конкурентного рынка, характерной особенностью которого является линейный вид функций затрат агентов и обратной функции спроса [1–3, 7, 14, 16 и др.]. В игре агенты выбирают действия однократно, одновременно и независимо. Игра повторяется. Будем также полагать, что агенты априори имеют неверные исходные представления о затратах других агентов и могут от игры к игре на основе модели динамики коллективного поведения изменять свои действия и представления с целью прийти к истинному информационному равновесию – положению равновесия с истинными значениями затрат агентов. Будут рассмотрены две модели поведения агентов на рынке: 1) все агенты действуют по Курно; 2) первый агент действует по Штакельбергу, остальные – по Курно.

2. Базовая модель конкурентного рынка

Рассматривается конкурентный рынок однородного товара, состоящий из n фирм-агентов, которые непосредственно занимаются доведением товаров (услуг) до потребителей.

Под действием i -го агента q_i будем понимать выбор объема оказываемых агентом услуг, объема реализованного товара населению и бизнесу или объема произведенного и реализованного на рынке товара (услуги). Полагаем также, что любое предложение агента на рынке будет реализовано. Агент реализует товар (услугу) потребителю по цене p . Величина выручки (дохода) агента составляет pq_i . Формально интересы фирмы-агента можно записать в виде целевых установок на максимизацию собственной прибыли:

$$(1) \quad \Pi_i(p(Q), q_i) = p(Q)q_i - \phi_i(q_i) \rightarrow \max_{q_i}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Рынок товара (услуг) традиционно описывается невозрастающей функцией спроса. В выражении (1) используется обратная функция спроса, т.е. функция цены $p(Q)$, которая складывается на рынке при общем объеме предложения на рынке товара

(услуг) $Q = \sum_{i=1}^n q_i$. Учитывается, что p и Q связаны взаимно однозначной зависимостью, а технически удобнее в качестве аргумента рассматривать Q .

Полагаем, что цена продукции и затраты субъектов определяются следующими выражениями:

$$(2) \quad p(Q) = a - bQ, \quad \phi_i(q_i) = c_i q_i + d_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Здесь цена продукции – линейная функция общего объема выпуска агентами, т.е. цена не является фиксированной: она определяется общим уровнем предложения на рынке, а агенты могут наблюдать лишь сложившиеся цены на рынке; издержки фирм $\phi_i(q_i)$ являются также линейными функциями, зависящими только от объема выпуска самого агента.

Используемая здесь модель имеет простой, но адекватный вид для описания достаточно широкого разнообразия конкурентных систем. Важное достоинство приведенной базовой модели состоит также в том, что при обычных для моделей олигополии предположениях о линейности функций затрат и обратной функции спроса, дает возможность аналитического представления и исследования решения. Поэтому она является конструктивной для получения конкретных результатов, их содержательной интерпретации и допускает различные модификации [1–3, 6, 7, 14, 16 и др.].

Оптимальный объем активности фирмы-агента определяется условием $\frac{\partial \Pi_i}{\partial q_i} = 0$, из которого с учетом (2) следует равенство

$$(3) \quad \frac{\partial p}{\partial q_i} = \frac{1}{q_i} (c_i - p).$$

Далее имеем
$$\frac{\partial p}{\partial q_i} = -b \cdot \frac{\partial Q}{\partial q_i} = \frac{1}{q_i} \cdot (c_i - a + b \cdot Q) \quad \text{или}$$

$$1 + \frac{\partial Q_{-i}}{\partial q_i} = \frac{1}{q_i} \cdot h_i - 1 - \frac{1}{q_i} \cdot Q_{-i}, \quad \text{где использованы обозначения:}$$

$$(4) \quad h_i = \frac{a - c_i}{b},$$

$$(5) \quad Q_{-i} = \sum_{j \neq i} q_j.$$

Окончательно получаем

$$(6) \quad q_i = \frac{h_i - Q_{-i}}{2 + \frac{\partial Q_{-i}}{\partial q_i}} \quad \text{для } i = 1, \dots, n.$$

В базовой модели полагаем, что агенты не кооперируются друг с другом. Однако наличие конкуренции между агентами за максимальную прибыль и долю рынка определяет необходимость для каждого агента принимать во внимание поведение агентов-конкурентов.

3. Модель рынка Курно и коллективное поведение

Предположение Курно относительно объемов выпуска сводится к тому, что каждая фирма действует так, как, будто она не ожидает от своих конкурентов изменения объемов выпуска, даже если она сама сделает это.

Формально предположение Курно можно записать в виде условий [1–3, 7 и др.]

$$(7) \quad \frac{\partial Q_{-i}}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Тогда из равенства (6) следует $q_i = \frac{h_i - Q_{-i}}{2}$, или

$$(8) \quad q_i = h_i - Q, \quad i = 1, \dots, n.$$

Суммируя по индексу $i = 1, \dots, n$ левые и правые части полученных равенств (8), имеем: $\sum_{i=1}^n q_i = \sum_{i=1}^n h_i - nQ$, или

$$Q = \sum_{i=1}^n h_i - nQ, \quad \text{и в итоге } Q = \frac{1}{n+1} \cdot \sum_{i=1}^n h_i.$$

Далее согласно (8) получаем активность (действие) агента, которая рассчитывается по формуле:

$$(9) \quad q_i = \frac{1}{(n+1)b} \left(a + \sum_{j=1}^n c_j - (n+1)c_i \right), \quad i = 1, \dots, n.$$

Таким образом, если агенты имеют правильные представления о предельных издержках конкурентов, то по (9) можно

найти такой вектор действий (активностей) (q_1, q_2, \dots, q_n) , который будет являться истинным стабильным информационным равновесием – равновесием Курно–Нэша.

Согласно (8) также имеем

$$(10) \quad c_i = (1-k)(a - b(Q + q_i)), \quad i = 1, \dots, n.$$

Агенты, выбирая свои действия, могут иметь неверные исходные представления о предельных издержках других агентов. Оказывается, что в этом случае агенты, наблюдая выбираемые действия, могут в динамике прийти к истинному информационному равновесию.

Здесь и в следующем разделе для построения такой динамики будем использовать *модель индикаторного поведения*, являющуюся наиболее распространенной моделью *теории коллективного (группового) поведения* [5, 6, 8–10, 11, 13, 17].

Приведем для рынка Курно динамическую процедуру уточнения представлений агентов о затратах конкурентов, использующую модель индикаторного поведения.

1. Каждый из агентов независимо от других рассчитывает свое действие (q_i^{t-1}) , которое максимизировало бы его прибыль, подставляя в (9) свои собственные предельные издержки (c_i) и свои последние представления о предельных издержках других агентов (c_{ij}^{t-1}) , $t = 1, 2, \dots$. При этом расчете учитывается, что свои собственные предельные издержки он знает точно, т.е. $c_{ii}^{t-1} = c_i$ и

$$(11) \quad q_i^{t-1} = \frac{1}{(n+1)b} \left(a + \sum_{j=1}^n c_{ij}^{t-1} - (n+1)c_i \right), \quad i = 1, \dots, n.$$

Примечание: полагаем, что в равновесии Курно и в процедуре уточнения представлений участвуют только конкурентоспособные агенты, т.е. для которых в формуле (9) выполнено условие $q_i > 0$ [7]. Действия агентов становятся известными конкурентам в следующем t -м периоде, агентам полностью доступна информация о параметрах a , b цены и числе агентов n на рынке. Также полагаем, что если в формуле (11) начальные представления о предельных издержках других агентов (c_{ij}^0) у некоторого i -го агента таковы, что $q_i^0 \leq 0$, то этот агент не уходит с рынка и использует собственные возможности их уточнения так, чтобы получить $q_i^0 > 0$.

2. Используя полученный в п. 1 наблюдаемый вектор действий агентов $(q_1^{t-1}, q_2^{t-1}, \dots, q_n^{t-1})$ и полагая, что в текущем t -м периоде все агенты выберут те же действия, как и в предыдущем $(t-1)$ -м периоде, каждый i -й агент рассчитывает свои текущие представления о предельных издержках w_j^{t-1} конкурентов ($j \neq i, j = 1, \dots, n$) из условия максимизации его целевой функции

$$(12) \quad w_j^{t-1} = a - b(\sum_{i=1}^n q_i^{t-1} + q_j^{t-1}).$$

Эти представления будут одинаковы для разных агентов, поскольку все они наблюдают одни и те же действия. Отметим, что формула (12) строится по аналогии с формулой (10) и определяет предельные издержки агентов для равновесного по Курно состояния рынка в $(t-1)$ -м периоде (т.е. получается из равенства нулю выражения для производной прибыли агента по объему его выпуска с учетом условия (7)). Другими словами, вектор объемов выпуска $(q_1^{t-1}, q_2^{t-1}, \dots, q_n^{t-1})$ определяет *текущее* (в $(t-1)$ -м периоде) *информационное равновесие*, так как отражает рациональное поведение агентов. Каждый из них стремится выбором собственного выпуска (q_i^{t-1}) максимизировать свою целевую функцию (1) при предположении Курно (7) о действиях других агентов в рамках своих текущих представлений (w_j^{t-1}) об их предельных издержках и имеющейся у него достоверной информации о параметрах функции спроса (a, b), а также своей функции затрат (c_i, d_i). *Истинным информационным равновесием* будет являться вектор (q_1, q_2, \dots, q_n) , который соответствует правильным представлениям каждого агента о предельных издержках своих конкурентов. Он определяется выражением (9) и является равновесием Курно–Нэша.

3. В соответствии с моделью индикаторного поведения каждый i -й агент изменяет свои представления за предыдущий $(t-1)$ -й период о предельных издержках j -го агента, делая от них шаг по направлению к текущим значениям равновесных издержек w_j^{t-1} по формуле

$$(13) \quad c_{ij}^t = c_{ij}^{t-1} + \gamma_i^t (w_j^{t-1} - c_{ij}^{t-1}),$$

где $\gamma_i^t \in [0;1]$ – параметры, определяющие величины шагов.

Затем процесс повторяется с п. 1.

Параметры γ_i^t играют большую роль в вопросах сходимости траекторий к положению равновесия. Если с ростом времени γ_i^t слишком быстро стремятся к нулю, то агенты могут сходиться к положению, отличному от равновесного; а если $\gamma_i^t \equiv 0$, то агенты могут стоять на месте. Как в том, так и другом случае агенты могут не достигнуть цели. Чтобы исключить эти случаи и можно было говорить о сходимости, следует к ограничениям $\gamma_i^t \in [0;1]$ ввести дополнительные ограничения [5, 13]. Эти вопросы для исследуемых в статье процессов рассмотрены отдельно в разделе 5.

В проведенных ниже численных примерах мы полагаем, что агенты делают одинаковые шаги, равные $\gamma_i^t \equiv 0,5$. Приведенные иллюстрации указывают на достаточно быструю сходимость соответствующих процедур при таких значениях параметров.

Кроме того, пусть в иллюстративном численном примере $n = 2$; $b = 0,1$; $a = 100$; $c_1 = c_2 = 10$.

На рис. 1–3 приведены соответствующие этим данным графики динамики представлений агентов, действующих по Курно.

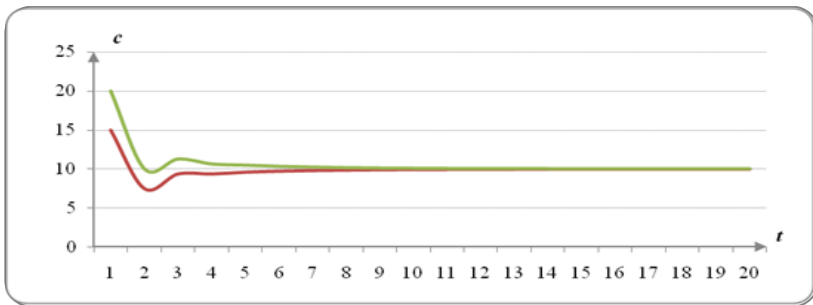


Рис. 1. Агенты первоначально переоценивают предельные издержки друг друга ($c_{21} = 20$ и $c_{12} = 15$)

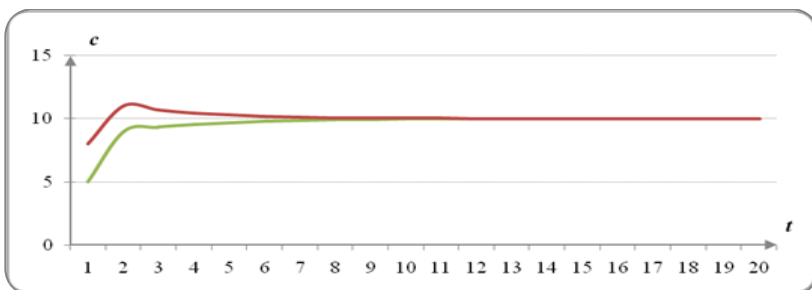


Рис.2. Агенты первоначально недооценивают предельные издержки друг друга ($c_{21} = 8$ и $c_{12} = 5$)

Процесс на рис. 1 и рис. 2 уже после первого шага приобретает монотонный характер.

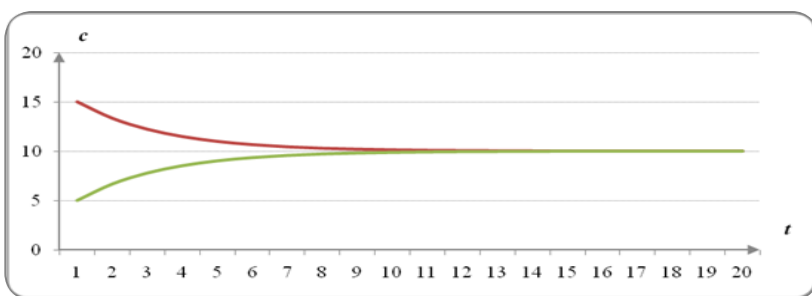


Рис.3. Второй агент первоначально переоценивает предельные издержки первого, а первый недооценивает предельные издержки второго ($c_{21} = 15$ и $c_{12} = 5$)

4. Модель рынка Курно с агентом Штакельберга и коллективное поведение

Один из агентов занимает лидирующее положение среди остальных агентов так, что он, выбирая свою активность (объем выпуска), точно знает реакцию (уровень активности) на его решение остальных агентов. Агента, выбирающего свои действия по такому правилу, называют фирмой Штакельберга. Остальные агенты, как и раньше, максимизируют собственную прибыль, основываясь на предположении Курно о неменяющей-

ся активности других агентов. Для определенности будем полагать, что по Штакельбергу действует первый агент.

Для формального определения агента Штакельберга рассмотрим выражение (6) оптимального по критерию максимума прибыли объема его выпуска

$$q_1 = \frac{h_1 - Q_{-1}}{2 + \frac{\partial Q_{-1}}{\partial q_1}}.$$

Будем исходить из следующих предположений о поведении агента. Он точно знает параметры функции спроса, своей функции затрат и функций затрат других агентов. Придерживается также гипотезы о том, что другие агенты будут действовать по Курно. Поэтому может рассчитать их общий равновесный объем выпуска, а также скорость изменения их общего объема выпуска в зависимости от изменения его собственного объема выпуска q_1 . В соответствии с данными предположениями о поведении агента Штакельберга для модели (1)–(2) эта скорость будет равна [1–4, 7 и др.]

$$(14) \quad \frac{\partial Q_{-1}}{\partial q_1} = -\frac{n-1}{n}.$$

$$\text{Тогда } q_1 = \frac{h_1 - Q_{-1}}{2 - \frac{n-1}{n}}, \text{ или } q_1 = \frac{n \cdot (h_1 - Q + q_1)}{n+1},$$

$$(15) \quad q_1 = n \cdot h_1 - n \cdot Q.$$

Остальными агентами ($i = 2, \dots, n$), действующими по Курно, игнорируются изменения, вносимые в общий объем выпуска другими агентами, т.е. имеют место условия (7).

Суммируя левые и правые части равенств (7) по $i = 2, \dots, n$, а затем с (15), получаем: $Q = (n-1) \cdot h_1 + \sum_{i=1}^n h_i - (2n-1) \cdot Q$. Используя ранее введенные обозначения для h_1 и h_i , получаем формальное выражение для Q :

$$Q = \frac{1}{2nb} \cdot \left((2n-1)a - \sum_{i=1}^n c_i + (n-1)c_1 \right),$$

Тогда по (15) и (7) имеем

$$(16) \quad q_1 = \frac{1}{2b} \cdot \left(a + \sum_{i=1}^n c_i - (n+1)c_1 \right)$$

$$(17) \quad q_i = \frac{1}{2nb} \cdot \left(a + \sum_{j=1}^n c_j - 2nc_i + (n-1)c_1 \right), \quad i = 2, \dots, n.$$

По (14) также имеем

$$(18) \quad c_1 = a - b(Q + q_1/n).$$

Предельные издержки c_i остальных агентов ($i = 2, \dots, n$) вычисляются по формуле (10).

Для модели рынка Курно с агентом Штакельберга модель динамики уточнения представлений агентов об издержках конкурентов имеет особенности. В модели динамики лидеру точно известны предельные издержки всех участников рынка. Остальные агенты априори не знают точных значений издержек других агентов, в том числе первого агента-лидера. Соответствующая процедура уточнения представлений включает следующую последовательность шагов:

1. Первый агент, зная точные значения собственных предельных издержек и предельных издержек других агентов, рассчитывает по формуле (16) свое действие (q_1), максимизирующее его прибыль.

2. Остальные агенты независимо от других рассчитывают свои действия (q_i^{t-1}), которые максимизировали бы их прибыль, подставляя в (17) свои собственные предельные издержки и свои последние представления c_{ij}^{t-1} о предельных издержках других агентов ($t = 1, 2, \dots$; $i = 2, \dots, n$; $j = 1, \dots, n$). Также при расчете учитывается, что свои собственные предельные издержки агенты знают точно, т.е. $c_{ii}^{t-1} = c_i$ и

$$(19) \quad q_i^{t-1} = \frac{1}{2nb} \left(a + \sum_{j=1}^n c_{ij}^{t-1} - 2nc_i + (n-1)c_{i1}^{t-1} \right), \quad i = 2, \dots, n.$$

Примечание: полагаем, что в процедуре уточнения представлений участвуют только конкурентоспособные агенты, т.е. для которых в формулах (16) и (17) выпуск больше нуля [7]. Действия агентов становятся известными конкурентам в следующем t -м периоде, агентам полностью доступна информация о параметрах a , b цены и числе агентов n на рынке. Также полагаем, что если в формуле (19) начальные представления

о предельных издержках других агентов (c_{ij}^0) у некоторого i -го агента таковы, что $q_i^0 \leq 0$, то этот агент не уходит с рынка и использует собственные возможности их уточнения так, чтобы получить $q_i^0 > 0$.

3. Используя, полученный в п. 1 и п. 2 наблюдаемый вектор действий агентов $(q_1, q_2^{t-1}, \dots, q_n^{t-1})$, и полагая, что в текущем t -м периоде все агенты выберут те же действия, как и в предыдущем $(t-1)$ -м периоде, i -й агент Курно ($i = 2, \dots, n$) рассчитывает свои текущие представления w_{ij}^{t-1} о предельных издержках других агентов из условия максимизации его целевой функции. Представления будут одинаковы для разных агентов, поскольку все они наблюдают одни и те же действия, т.е. $w_{ij}^{t-1} = w_j^{t-1}$ при $i \neq j$.

Тогда расчет текущих представлений агентов Курно о предельных издержках первого агента выполняется по формуле

$$(20) \quad w_1^{t-1} = a - b(\sum_{i=2}^n q_i^{t-1} + q_1 + q_1/n).$$

Соответственно, расчет текущих представлений каждого i -го агента Курно о предельных издержках w_j^{t-1} остальных агентов ($i \neq j$) осуществляется по формуле

$$(21) \quad w_j^{t-1} = a - b(\sum_{i=2}^n q_i^{t-1} + q_1 + q_j^{t-1}), \quad j = 2, \dots, n.$$

Вектор объемов выпуска $(q_1, q_2^{t-1}, \dots, q_n^{t-1})$ определяет *текущее* (в $(t-1)$ -м периоде) *информационное равновесие*, так как отражает рациональное поведение агентов. Первый агент стремится выбором собственного объема выпуска (q_1) максимизировать свою прибыль, подставляя в её выражение (1) объемы выпуска других агентов, которые оказываются рациональными с точки зрения их поведения по Курно, при условии его полной информированности о других агентах и параметрах рынка. Каждый из остальных агентов стремится выбором собственного объема выпуска (q_i^{t-1}) максимизировать свою целевую функцию (1) при предположении Курно (7) о действиях других агентов в рамках своих текущих представлений (w_j^{t-1}) об их предельных издержках и имеющейся у него достоверной информации о параметрах функции спроса (a, b), своей функции затрат (c_i, d_i). *Истинным информационным равновесием* будет являться вектор (q_1, q_2, \dots, q_n) , который соответствует правиль-

ным представлениям каждого агента о предельных издержках своих конкурентов. Он определяется выражениями (16), (17) и является равновесием Штакельберга.

4. Каждый i -й агент, исключая первого, изменяет свои представления за предыдущий $(t - 1)$ -й период о предельных издержках j -го агента, делая от них шаг по направлению к текущим равновесным значениям w_j^{t-1} по формуле

$$(22) \quad c_{ij}^t = c_{ij}^{t-1} + \gamma_i^t (w_j^{t-1} - c_{ij}^{t-1}),$$

где $\gamma_i^t \in [0; 1]$ – параметры, определяющие величины шагов ($i = 2, \dots, n$).

Затем процесс повторяется с п. 2.

На рис. 4 и 5 приведены графики динамики представлений второго агента, который действует по Курно. Первый агент действует по Штакельбергу, на графике ему соответствует горизонтальная линия. В расчетах мы полагаем, что $n = 2$; $b = 0,1$; $a = 100$; $c_1 = c_2 = 10$ и $\gamma_2^t \equiv 0,5$.

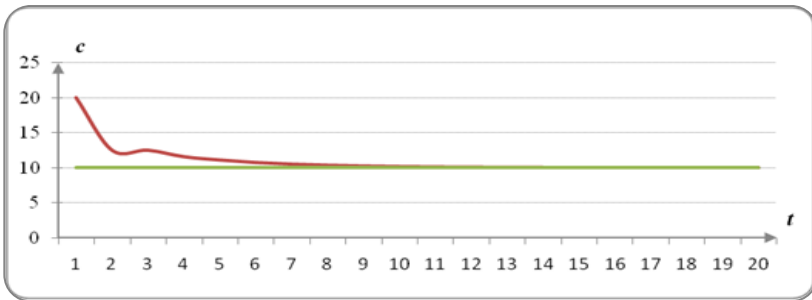


Рис. 4. Второй агент первоначально переоценивает предельные издержки лидера ($c_{21} = 20$ и $c_{12} = c_2 = 10$)

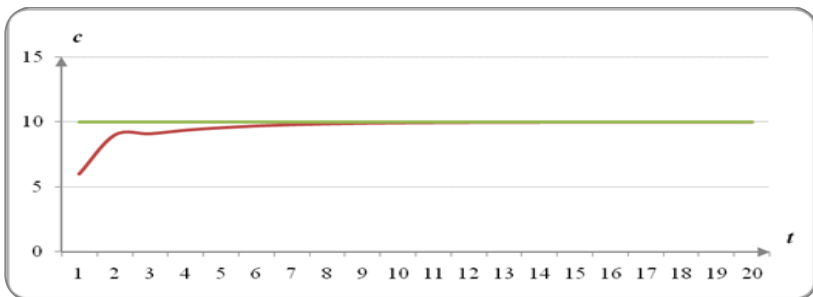


Рис. 5. Второй агент первоначально недооценивает предельные издержки лидера ($c_{21} = 6$ и $c_{12} = c_2 = 10$)

5. Приложение

Приложение посвящено выводу и обсуждению необходимых и достаточных условий для сходимости динамических процедур уточнения представлений агентов о предельных издержках конкурентов к истинному положению равновесия.

Как и выше, каждую модель рынка рассмотрим отдельно.

5.1. МОДЕЛЬ РЫНКА КУРНО

Из формулы (12) имеем

$$q_i^t = \frac{1}{(n+1)b} \left(a + \sum_{j=1}^n w_j^t - (n+1)w_i^t \right), \quad i = 1, \dots, n.$$

С учетом этой формулы и (11) получаем следующие преобразования формальных выражений для объемов выпуска

$$\begin{aligned} q_i^t &= \gamma_i^{t+1} q_i^t + (1 - \gamma_i^{t+1}) q_i^t = \\ &= \frac{\gamma_i^{t+1}}{(n+1)b} \left(a + \sum_{j \neq i}^n w_j^t - n w_i^t \right) + \frac{1 - \gamma_i^{t+1}}{(n+1)b} \left(a + \sum_{j \neq i}^n c_{ij}^t - n c_i \right) = \\ &= \frac{1}{(n+1)b} \left(a + \sum_{j \neq i}^n (\gamma_i^{t+1} \cdot w_j^t + (1 - \gamma_i^{t+1}) c_{ij}^t) - n c_i \right) + \frac{n \gamma_i^{t+1} (c_i - w_i^t)}{(n+1)b} = \\ &= \frac{1}{(n+1)b} \left(a + \sum_{j \neq i}^n c_{ij}^{t+1} - n c_i \right) + \frac{n \gamma_i^{t+1} (c_i - w_i^t)}{(n+1)b} = q_i^{t+1} + \frac{n \gamma_i^{t+1} (c_i - w_i^t)}{(n+1)b}. \end{aligned}$$

Таким образом, окончательно

$$(23) \quad q_i^t = q_i^{t+1} + \frac{n\gamma_i^{t+1}(c_i - w_i^t)}{(n+1)b}.$$

Из формул (4) и (8) имеем $\frac{1}{b}(a - c_i) = Q + q_i$ и

$$\frac{1}{b}(a - w_i^t) = Q^t + q_i^t, \text{ где обозначено } Q^t = \sum_{i=1}^n q_i^t.$$

Тогда

$$(24) \quad Q^t + q_i^t + \frac{w_i^t}{b} = Q + q_i + \frac{c_i}{b} = \frac{a}{b}.$$

Из (23) и (24) имеем

$$Q^t = Q^{t+1} + \frac{n\sum_{i=1}^n \gamma_i^{t+1}(c_i - w_i^t)}{(n+1)b},$$

$$Q^{t+1} = Q^t + \frac{w_i^t - w_i^{t+1}}{b(1-k)} + \frac{n\gamma_i^{t+1}(c_i - w_i^t)}{(n+1)b}.$$

Из последних двух равенств получаем:

$$w_i^{t+1} = w_i^t + \frac{n}{n+1} \left[\gamma_i^{t+1}(c_i - w_i^t) + \sum_{j=1}^n \gamma_j^{t+1}(c_j - w_j^t) \right]$$

$$(25) \quad w_j^{t+1} - w_i^{t+1} = w_j^t - w_i^t + \frac{n}{n+1} \left[\gamma_j^{t+1}(c_j - w_j^t) - \gamma_i^{t+1}(c_i - w_i^t) \right]$$

Ввиду того, что технически непросто получить в конечном виде аналитические оценки дополнительных ограничений на параметры γ_i^t , обеспечивающих в общем случае сходимость процессов к положению равновесия, вывод необходимых и достаточных условий сходимости будем проводить для частного случая, когда $\gamma_i^t \equiv \gamma$ (при $i = 1, \dots, n$ и $t = 1, 2, \dots$). Тогда из (25) следует, что

$$w_j^{t+1} - w_i^{t+1} = \left(1 - \frac{m}{n+1}\right)(w_j^t - w_i^t) + \frac{m}{n+1}(c_j - c_i)$$

Последнее равенство приводится к виду

$$\begin{aligned}
 w_j^{t+1} - w_i^{t+1} &= \left(1 - \frac{\gamma}{n+1}\right)^{t+1} (w_j^0 - w_i^0) + \\
 &+ \frac{\gamma}{n+1} (c_j - c_i) \left[1 + \left(1 - \frac{\gamma}{n+1}\right) + \left(1 - \frac{\gamma}{n+1}\right)^2 + \dots + \left(1 - \frac{\gamma}{n+1}\right)^t \right] = \\
 &= \left(1 - \frac{\gamma}{n+1}\right)^{t+1} (w_j^0 - w_i^0) + \frac{\gamma}{n+1} (c_j - c_i) \frac{\left(1 - \left(1 - \frac{\gamma}{n+1}\right)^t\right)}{1 - \left(1 - \frac{\gamma}{n+1}\right)} = \\
 &= \left(1 - \frac{\gamma}{n+1}\right)^{t+1} (w_j^0 - w_i^0) + (c_j - c_i) - (c_j - c_i) \left(1 - \frac{\gamma}{n+1}\right)^{t+1} = \\
 &= (c_j - c_i) + \left(1 - \frac{\gamma}{n+1}\right)^{t+1} (w_j^0 - c_j - w_i^0 + c_i).
 \end{aligned}$$

Отсюда следует, что выполнение неравенства $\left|1 - \frac{\gamma}{n+1}\right| < 1$

является необходимым и достаточным условием для того, чтобы разность равновесных представлений о предельных издержках любых двух агентов сходилась к разности их истинных издержек независимо от начальных представлений. Очевидно, что указанное неравенство будет выполнено при $\gamma \in (0; 1]$.

Продолжим исследование вопросов сходимости для данного частного случая. Обозначим $W^t = \sum_{i=1}^n w_i^t$ и $C = \sum_{i=1}^n c_i$. Из равенства, предшествующего равенству (25), получаем

$$W^{t+1} = W^t + n \sum_{i=1}^n \gamma_i^{t+1} (c_i - w_i^t) = (1 - n\gamma)W^t + n\gamma C.$$

Или

$$\begin{aligned}
 W^{t+1} &= (1 - n\gamma)^{t+1} W^0 + n\gamma C \left[1 + (1 - n\gamma) + (1 - n\gamma)^2 + \dots + (1 - n\gamma)^t \right] = \\
 &= (1 - n\gamma)^{t+1} W^0 + C - C(1 - n\gamma)^{t+1} = C + (1 - n\gamma)^{t+1} (W^0 - C).
 \end{aligned}$$

Для сходимости совокупных равновесных представлений агентов к истинному значению их совокупных предельных издержек необходимо и достаточно, чтобы имело место неравенство $|1 - n\gamma| < 1$. Это неравенство будет выполнено только при условии $\gamma \in (0; 2/n)$.

Сходимость $w_i^t \rightarrow c_i$ следует из сходимости суммы сходящихся последовательностей, так как

$$\begin{aligned} nw_i^t &= W^t + \sum_{j \neq i}^n (w_i^t - w_j^t) \rightarrow C + \sum_{j \neq i}^n (c_i - c_j) = \\ &= C + (n-1)c_i - \sum_{j \neq i}^n c_j = C + nc_i - C = nc_i. \end{aligned}$$

Отметим также, что при невыполнении условия $\gamma \in (0; 2/n)$ имеем $|1-n\gamma| \geq 1$, и ряд W^t либо сходится к W^0 (при $|1-n\gamma|=1$), либо расходится (при $|1-n\gamma|>1$). Любой из этих случаев означает, что равновесные представления агентов о предельных издержках конкурентов не сходятся к их истинным значениям.

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Утверждение 1. В модели рынка Курно при $n > 1$ для того, чтобы динамическая процедура уточнения представлений агентов о предельных издержках конкурентов при равных значениях параметров $\gamma_i^t \equiv \gamma$ ($i = 1, \dots, n; t = 1, 2, \dots$) сходилась к истинному положению равновесия Курно–Нэша независимо от начальных представлений, необходимо и достаточно выполнение условия $\gamma \in (0; 2/n)$.

В соответствующем иллюстративном примере данное условие утверждения 1 было выполнено, так как полагали $n = 2$ и $\gamma_i^t \equiv 0,5$. Из доказанного утверждения следует, что при $n = 2$ процедура будет сходиться для любых равных значений $\gamma \in (0, 1)$, что также было проверено в экспериментах.

5.2. МОДЕЛЬ РЫНКА КУРНО С АГЕНТОМ ШТАКЕЛЬБЕРГА

Аналогичный анализ проведем и для этой модели конкурентного рынка.

На рынке присутствуют агенты с разными принципами поведения, что определяет отличие процедур уточнения представлений агентов и анализа условий их сходимости.

При $i = 2, \dots, n$ имеем следующие преобразования формальных выражений для объемов выпуска агентов Курно (с учетом равновесных (w_j^t) и неравновесных (c_{ij}^t) их представлений о предельных издержках конкурентов:

$$\begin{aligned}
 q_i^t &= \gamma_i^{t+1} q_i^t + (1 - \gamma_i^{t+1}) q_i^t = \frac{\gamma_i^{t+1}}{2nb} \left(a + \sum_{j \neq i}^n w_j^t - (2n-1)w_i^t + (n-1)w_{i1}^t \right) + \\
 &+ \frac{1 - \gamma_i^{t+1}}{2nb} \left(a + \sum_{j \neq i}^n c_{ij}^t - (2n-1)c_i + (n-1)c_{i1}^t \right) = \frac{1}{2nb} \left(a + \right. \\
 &+ \sum_{j \neq i}^n \left(\gamma_i^{t+1} \cdot w_j^t + (1 - \gamma_i^{t+1}) c_{ij}^t \right) - (2n-1)c_i + (n-1) \left(\gamma_i^{t+1} w_{i1}^t + (1 - \gamma_i^{t+1}) c_{i1}^t \right) \left. \right) + \\
 &+ \frac{(2n-1)\gamma_i^{t+1}(c_i - w_i^t)}{2nb} = q_i^{t+1} + \frac{(2n-1)\gamma_i^{t+1}(c_i - w_i^t)}{2nb}.
 \end{aligned}$$

Окончательно для агентов i ($i = 2, \dots, n$)

$$(26) \quad q_i^t = q_i^{t+1} + \frac{(2n-1)\gamma_i^{t+1}(c_i - w_i^t)}{2nb}.$$

Также для агентов Курно из формул (4) и (8) имеем $\frac{1}{b}(a - c_i) = Q + q_i$ и $\frac{1}{b}(a - w_i^t) = Q^t + q_i^t$.

Поэтому

$$(27) \quad Q^t + q_i^t + \frac{w_i^t}{b} = Q + q_i + \frac{c_i}{b} = \frac{a}{b}.$$

Из (26) и (27) имеем

$$Q_{-1}^t = Q_{-1}^{t+1} + \frac{(2n-1)\sum_{i=2}^n \gamma_i^{t+1}(c_i - w_i^t)}{2nb},$$

$$Q^{t+1} = Q^t + \frac{w_i^t - w_i^{t+1}}{b} + \frac{(2n-1)\gamma_i^{t+1}(c_i - w_i^t)}{2nb}.$$

Здесь обозначено $Q_{-1}^t = \sum_{i=2}^n q_i^t$. Поскольку $q_i^t = q_i^{t+1} = q_i$, то

$$Q^t = Q^{t+1} + \frac{(2n-1)\sum_{i=2}^n \gamma_i^{t+1}(c_i - w_i^t)}{2nb} \text{ и следует равенство}$$

$$(29) \quad w_i^{t+1} = w_i^t + \frac{2n-1}{2n} \left[\gamma_i^{t+1}(c_i - w_i^t) + \sum_{j=2}^n \gamma_j^{t+1}(c_j - w_j^t) \right]$$

Из последнего равенства получаем

$$(30) \quad w_j^{t+1} - w_i^{t+1} = w_j^t - w_i^t + \frac{2n-1}{2n} \left[\gamma_j^{t+1}(c_j - w_j^t) - \gamma_i^{t+1}(c_i - w_i^t) \right]$$

Далее также рассмотрим частный случай, когда $\gamma_i^t \equiv \gamma$ для $i = 2, \dots, n$ и $t = 1, 2, \dots$. Тогда следует, что

$$\begin{aligned}
 w_j^{t+1} - w_i^{t+1} &= \left(1 - \frac{\gamma(2n-1)}{2n}\right)^{t+1} (w_j^0 - w_i^0) + \\
 &+ \frac{\gamma(2n-1)}{2n} (c_j - c_i) \left[1 + \left(1 - \frac{\gamma(2n-1)}{2n}\right)^1 + \dots + \left(1 - \frac{\gamma(2n-1)}{2n}\right)^t \right] = \\
 &= \left(1 - \frac{\gamma(2n-1)}{2n}\right)^{t+1} (w_j^0 - w_i^0) + \frac{\gamma(2n-1)}{2n} (c_j - c_i) \frac{\left(1 - \left(1 - \frac{\gamma(2n-1)}{2n}\right)^{t+1}\right)}{1 - \left(1 - \frac{\gamma(2n-1)}{2n}\right)} = \\
 &= (c_j - c_i) + \left(1 - \frac{\gamma(2n-1)}{2n}\right)^{t+1} (w_j^0 - w_i^0 - c_j + c_i).
 \end{aligned}$$

Отсюда следует, что выполнение неравенства $\left|1 - \frac{\gamma(2n-1)}{2n}\right| < 1$ является необходимым и достаточным условием для того, чтобы разность равновесных представлений о предельных издержках любых двух агентов сходилась к разности их истинных издержек независимо от начальных представлений. Очевидно, что указанное неравенство будет выполнено при $\gamma \in (0; 1]$.

Из формулы (29) после суммирования по индексу $i = 2, \dots, n$ получаем

$$W_{-1}^{t+1} = W_{-1}^t + \frac{2n-1}{2} \sum_{i=2}^n \gamma_i^{t+1} (c_i - w_i^t)$$

Продолжим исследование вопросов сходимости для частного случая, когда $\gamma_i^t \equiv \gamma$ ($i = 2, \dots, n$; $t = 1, 2, \dots$). Тогда из предыдущего равенства получаем

$$W_{-1}^{t+1} = \left(1 - \frac{2n-1}{2} \gamma\right) W_{-1}^t + \frac{2n-1}{2} \gamma C_{-1}.$$

Здесь обозначено $W_{-1}^t = \sum_{i=2}^n w_i^t$ и $C_{-1} = \sum_{i=2}^n c_i$.

Далее имеем

$$\begin{aligned} W_{-1}^{t+1} &= \left(1 - \frac{2n-1}{2}\gamma\right)^{t+1} W_{-1}^0 + \\ &+ \frac{2n-1}{2}\gamma C_{-1} \left[1 + \left(1 - \frac{2n-1}{2}\gamma\right) + \left(1 - \frac{2n-1}{2}\gamma\right)^2 + \dots + \left(1 - \frac{2n-1}{2}\gamma\right)^t \right] = \\ &= C_{-1} + \left(1 - \frac{2n-1}{2}\gamma\right)^{t+1} (W_{-1}^0 - C_{-1}). \end{aligned}$$

Для сходимости совокупных равновесных представлений агентов Курно к истинному значению их совокупных предельных издержек необходимо и достаточно, чтобы имело место неравенство $\left|1 - \frac{2n-1}{2}\gamma\right| < 1$. Это неравенство будет выполнено при $\gamma \in (0; 4/(2n-1))$.

Сходимость $w_i^t \rightarrow c_i$ при $i = 2, \dots, n$ следует из сходимости суммы сходящихся последовательностей, так как $(n-1)w_i^t = W_{-1}^t + \sum_{j \neq i}^n (w_i^t - w_j^t)$.

Теперь покажем сходимость $w_1^t \rightarrow c_1$. Из формулы (27) имеем $(n-1)Q^t + Q_{-1}^t + \frac{W_{-1}^t}{b(1-k)} = (n-1)Q + Q_{-1} + \frac{C_{-1}}{b(1-k)}$. Поскольку

$$q_1^t = q_1, \text{ то получаем, что } nQ^t + \frac{W_{-1}^t}{b(1-k)} = nQ + \frac{C_{-1}}{b(1-k)}.$$

Но $W_{-1}^t \rightarrow C_{-1}$, поэтому $Q^t \rightarrow Q$.

Для первого агента из (4) и (15) имеем формулу

$$Q + \frac{q_1}{n} + \frac{c_1}{b(1-k)} = Q^t + \frac{q_1^t}{n} + \frac{w_1^t}{b(1-k)} = \frac{a}{b}.$$

Из нее следует $Q^t - Q = \frac{c_1 - w_1^t}{b(1-k)}$. Поэтому $w_1^t \rightarrow c_1$, что и требовалось доказать.

При невыполнении условия $\gamma \in (0; 4/(2n-1))$ будем иметь неравенство $\left|1 - \frac{2n-1}{2}\gamma\right| \geq 1$, и равновесные представления агентов Курно о предельных издержках конкурентов не могут сходиться к их истинным значениям, так как ряд W_{-1}^t либо сходится

к W_{-1}^0 (при $\left|1 - \frac{2n-1}{2}\gamma\right| = 1$) либо расходится (при $\left|1 - \frac{2n-1}{2}\gamma\right| > 1$).

Таким образом, было доказано следующее утверждение.

Утверждение 2. В модели рынка Курно с агентом Штакельберга при $n > 2$ для того, чтобы динамическая процедура уточнения представлений агентов о предельных издержках конкурентов при равных значениях параметров $\gamma_i^t \equiv \gamma$ ($i = 2, \dots, n; t = 1, 2, \dots$) сходилась к истинному положению равновесия Штакельберга независимо от начальных представлений, необходимо и достаточно выполнение условия $\gamma \in (0; 4/(2n - 1))$.

Примечание: при $n = 2$ необходимое и достаточное условие, очевидным образом, принимает вид $\gamma \in (0; 1]$.

В соответствующем иллюстративном примере данное условие было выполнено, так как полагали $n = 2$ и $\gamma_i^t \equiv 0,5$. Численные эксперименты на модели рынка при $n > 2$ и различных равных значениях параметра γ подтвердили справедливость данного утверждения для сходимости процедуры.

6. Заключение

В статье рассматриваются теоретические основы возможности и целесообразности применения моделей теории игр и теории коллективного поведения для исследования процессов достижения равновесия рациональными агентами на конкурентном рынке в условиях неполной информированности и отсутствия общего знания.

В классе линейных функций спроса и затрат агентов рассмотрены две модели поведения на рынке: 1) все агенты действуют по Курно; 2) первый агент действует по Штакельбергу, остальные – по Курно.

В этих моделях действия агентов существенным образом зависят от взаимных представлений агентов относительно затрат других агентов. Показано, что агенты, априори не распола-

гая соответствующей достоверной информацией о предельных издержках конкурентов, могут, наблюдая выбираемые агентами действия, при повторении игры прийти к положению равновесию с истинными значениями предельных издержек агентов.

Для этих моделей приведена единая динамическая процедура уточнения представлений агентов о предельных издержках конкурентов, использующая подходы теории коллективного (группового) поведения. Приведены условия на параметры динамической процедуры с «равными» шагами, необходимые и достаточные для ее сходимости к положению равновесия с истинными значениями предельных издержек агентов. Обсуждается выполнимость этих условий для каждой из моделей. Приведены иллюстративные численные примеры.

Литература

1. АЛГАЗИН Г.И., АЛГАЗИНА Д.Г. *Моделирование много-агентных франчайзинговых систем.* – Барнаул: АлтГУ, 2009. – 91 с.
2. АЛГАЗИН Г.И., АЛГАЗИНА Д.Г. *Моделирование сетевого взаимодействия на конкурентных рынках* // Управление большими системами. – 2013. – Вып. 43. – С. 172–216.
3. АЛГАЗИН Г.И., АЛГАЗИНА Ю.Г. *Моделирование поведения экономических агентов в системе «производитель–посредник–конкурентный рынок»* // Управление большими системами. – 2011. – №32. – С. 83–108.
4. БУЛАВСКИЙ В.А., КАЛАШНИКОВ В.В. *Метод однопараметрической прогонки для исследования состояния равновесия* // Экономика и математические методы. – 1994. – Т. 30, №4. – С. 129–138.
5. ВАСИН А.А. *Модели динамики коллективного поведения.* – М.: МГУ, 1989. – 156с.
6. ВАСИН А.А., ВАСИНА П.А., РУЛЕВА П.Ю. *Об организации рынков однородных товаров* // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2007. – №1. – С. 98–112.

7. ДЮСУШЕ О.М. *Статическое равновесие Курно–Нэша и рефлексивные игры олигополии: случай линейных функций спроса и издержек* // Экономический журнал ВШЭ. – 2006. – №1. – С. 3–32.
8. КОРЕПАНОВ В.О. *Модели рефлексивного группового поведения и управления.* – М.: ИПУ РАН, 2011. – 127с.
9. НОВИКОВ Д.А. *Модели стратегической рефлексии* // Автоматика и телемеханика. – 2012. – №1. – С. 3–18.
10. НОВИКОВ Д.А., ЧХАРТИШВИЛИ А.Г. *Модели рефлексивных игр в задачах управления эколого–экономическими системами* // Управление большими системами. – 2015. – №55. – С. 362–372.
11. НОВИКОВ Д.А. *Динамика поведения систем с большим числом целенаправленных элементов* // Автоматика и телемеханика. – 1996. – №2. – С. 187–189.
12. НОВИКОВ Д.А. *Модели адаптации команд* // Управление большими системами. – 2008. – №20. – С. 57–76.
13. ОПОЙЦЕВ В.И. *Равновесие и устойчивость в моделях коллективного поведения.* – М.: Наука, 1977. – 248 с.
14. HEGJI С.Е., MOORE Е.С. *On the Economics of Manufacturers and Dealers: A Reexamination* // Southwestern Economic Review. – 2006. – P. 107–120.
15. KUKUSHKIN N.S. *Best Response Dynamics in Finite Games with Additive Aggregation* // Games and Economic Behavior. – 2004. – №48. – P. 94–110.
16. METZLER С., HOBBS B.S., PANG J.-S. *Nash – Cournot Equilibria in Power Markets on a Linearized DC network with Arbitrage: Formulations and Properties* // Networks and Spatial Economics. – 2003. – Vol. 3, №2. – P. 123–150.
17. NOVIKOV D., CHKHARTISHVILI A. *Reflexion and Control: Mathematical Models.* – Leiden: CRC Press, 2014. – 298 p.
18. PUU T. *Attractors, Difurcations, & Chaos: Nonlinear Phenomena in Economics.* – Berlin – Heidelberg, 2003. – 549 p.

INFORMATION EQUILIBRIUM IN DYNAMIC MODEL OF COLLECTIVE BEHAVIOR IN A COMPETITIVE MARKET

Gennady Algazin, Altai State University, Barnaul, Doctor of Science, professor (algaz46@yandex.ru).

Darya Algazina, Altai State University, Barnaul, Cand.Sc. associated professor (darya.algazina@mail.ru).

Abstract: The article presents a dynamic model of reflexive behavior which provides a unified approach to description of interactions of Cournot/Stackelberg agents in a competitive market in the absence of common knowledge. The approach based on game theory and the theory of collective behavior with incomplete information. The model is a conventional Cournot output competition with linear costs and the inverse demand function. Rational agents in the model have incorrect initial beliefs about marginal costs of their competitors. We investigate two cases: (1) all agents act simultaneously and (2) first agent is a Stackelberg leader. We study repeated interactions when the agents dynamically update their actions and beliefs based on observed actions of their competitors. A unified procedure of beliefs update is provided for both cases. Necessary and sufficient conditions for the convergence of dynamic processes to the equilibrium with true beliefs are obtained. The results are illustrated with numerical examples.

Keywords: incomplete information, information equilibrium, collective behavior, Cournot competitive market, marginal costs, Stackelberg leader.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии В.И. Зоркальцевым.

*Поступила в редакцию 25.10.2016.
Опубликована 30.11.2016.*

УДК 519.8
ББК 22.1

КОНСЕНСУС В СОЦИАЛЬНОЙ СЕТИ СО СЛОЖНЫМИ УЗЛАМИ

Федянин Д. Н.¹, Чхартишвили А. Г.²
(ФГБУН Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

Рассмотрена динамика мнений в сетевых структурах специального вида: каждый узел состоит из двух взаимодействующих между собой агентов. При помощи модели де Гроота исследованы свойства консенсуса, возникающего в таких структурах.

Ключевые слова: сетевая структура, динамика мнений, сложный узел, консенсус, информационное управление.

1. Введение

В последние десятилетия значительно возрос интерес к изучению сетевых структур, в частности – социальных сетей [1–5, 7–12]. Во многом это обусловлено бурным развитием онлайн-социальных сетей (Facebook, Twitter, ВКонтакте и др.) и осознанием их влияния на социально-экономическую и политическую жизнь общества.

Однако социальные сети возникли задолго до изобретения интернета – по сути, они существовали везде, где люди вступали между собой в отношения знакомства, дружбы, вражды и т.п., где они обменивались информацией и мнениями, влияя тем самым друг на друга. Одной из первых моделей, описыва-

¹ Денис Николаевич Федянин, младший научный сотрудник (dfedyanin@inbox.ru).

² Александр Гедеванович Чхартишвили, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник (sandro_ch@mail.ru).

ющих динамику мнений в социальных сетях, была модель, часто называемая моделью де Гроота (см. [3, 4, 7, 10, 12] и др.). В этой модели каждый участник (узел) социальной сети характеризуется своим мнением, которое выражено вещественным числом и на каждом шаге дискретного времени меняется по линейному закону (подробнее см. ниже). Оказалось, что динамика мнений при этом описывается дискретным марковским процессом (см., например, [3]), что позволяет получать аналитические результаты относительно итоговых (за бесконечное время) мнений (см. [1–5, 10–12] и др.). Особенно интересным является случай, когда все участники социальной сети приходят к консенсусу [2, 3, 7], т.е. итоговое мнение оказывается одинаковым у всех участников сети. При этом возникает ряд вопросов, связанных с «вкладом» различных узлов в формирование итогового общего мнения.

В данной работе рассматривается особый случай социальной сети, когда каждый ее узел является сложным – состоит из двух агентов, внешнего и внутреннего, взаимодействующих между собой. При этом информационное взаимодействие узла с остальной сетью осуществляется при помощи внешнего агента, а внутренний агент непосредственно взаимодействует только с внешним. Такая структура сети может интерпретироваться следующим образом: у каждого из взаимодействующих в сети внешних агентов имеется свой индивидуальный советник (друг или консультант), с которым он осуществляет информационное взаимодействие.

Далее в разделе 2 приводится описание известных результатов по консенсусу в социальной сети. В разделе 3 рассмотрена модель со сложными узлами и найдено общее финальное мнение агентов (консенсус). В разделе 4 рассмотрена сеть с двумя сложными узлами, для которой параметры консенсуса могут быть явно выражены через параметры непосредственного взаимного влияния агентов.

2. Модель динамики мнений и консенсус

Будем описывать агентов, входящих в сетевую структуру (для краткости будем также называть ее сетью), множеством $N = \{1, 2, \dots, n\}$. Агенты в сети влияют друг на друга, и степень влияния задается *матрицей прямого влияния* A размерности $n \times n$, где $a_{ij} \geq 0$ обозначает степень доверия i -го агента j -му агенту. Здесь и далее мы будем говорить как о *влиянии*, так и о *доверии*, и считать, что эти два понятия являются противоположными в следующем смысле: выражение «степень доверия i -го агента j -му равна a_{ij} » тождественно по смыслу выражению «степень влияния j -го агента на i -го равна a_{ij} ».

Будем считать выполненным условие нормировки:

$$\forall i \in N \quad \sum_{j \in N} a_{ij} = 1,$$

т.е. предположим, что «суммарное доверие» агента равно единице. Это условие означает, что матрица A является стохастической по строкам. Отметим, что агент может доверять и самому себе, чему соответствует $a_{ii} > 0$.

Пусть у каждого агента в некий начальный момент времени имеется информированность (мнение) по некоторому вопросу. Мнение i -го агента отражает вещественное число x_i^0 , $i \in N$, мнение всех агентов сети отражает вектор-столбец мнений x^0 размерности n . В соответствии с моделью де Гроота агенты в сети взаимодействуют, обмениваясь мнениями. Этот обмен приводит к тому, что мнение каждого агента меняется в соответствии с мнениями агентов, которым данный агент доверяет. Это изменение будем считать линейным, т.е. положим, что мнение агента в следующий момент времени является взвешенной суммой мнений агентов, которым он доверяет (весаами являются степени доверия a_{ij}):

$$x_i^\tau = \sum_{j \in N} a_{ij} x_j^{\tau-1}, \quad i \in N.$$

Если информационное взаимодействие агентов продолжается достаточно долго, то их мнения стабилизируются – сходятся к результирующему мнению

$$x^\infty = \lim_{\tau \rightarrow \infty} x^\tau.$$

Предел

$$W = \lim_{\tau \rightarrow \infty} (A)^\tau$$

существует при довольно слабых условиях (подробнее см., например, [1–3]), которые далее будем считать выполненными, и называется *матрицей результирующего влияния*. Используя этот предел можно записать соотношение

$$x^\infty = Wx^0,$$

где x^0 – вектор начальных мнений; W – матрица результирующего влияния; x^∞ – вектор итоговых мнений.

Если при этом все компоненты вектора итоговых мнений совпадают (для любого вектора начальных мнений), то имеет место *консенсус*. При этом (см. [6]) все строки матрицы W совпадают и элементы этой строки $w = (w_1, \dots, w_n)$ являются единственным решением системы соотношений

$$(1) \quad wA = w, \quad \sum_{i \in N} w_i = 1.$$

Как уже было сказано, динамика мнений в рассматриваемой модели описывается дискретным марковским процессом, где агенту соответствует состояние марковской цепи, а степени доверия – вероятность перехода из одного состояния в другое. Достаточное условие достижения консенсуса (и положительности чисел w_i для всех $i \in N$) при любых начальных мнениях можно сформулировать в терминах марковских цепей следующим образом: все состояния образуют неразложимый аperiодический класс [6]. Далее будем считать это условие выполненным.

Компоненты вектора w характеризуют вес, с которым в общее итоговое мнение входит начальное мнение того или иного агента. Поэтому будем называть его *вектором результирующих влиятельностей* агентов.

3. Консенсус в сети со сложными узлами

Модифицируем рассмотренную выше модель сети. Будем считать, что каждый из узлов множества $N = \{1, 2, \dots, n\}$ является сложным, т.е. состоит из двух агентов, внешнего и внутреннего, взаимодействующих между собой. Информационное взаимодействие узла с другими узлами сети осуществляется при помощи внешнего агента, а внутренний агент непосредственно взаимодействует только с соответствующим внешним агентом.

Для описания степени взаимного доверия агентов в этой сети введем следующие обозначения:

- δ_k – доверие внутреннего агента к внешнему в k -м узле;
- $1 - \delta_k$ – доверие внутреннего агента в k -м узле к себе;
- ε_k – доверие внешнего агента к внутреннему в k -м узле;
- $a_{ij}(1 - \varepsilon_i)$ – доверие внешнего агента i -го узла к внешнему агенту j -го узла.

Поскольку внутренние агенты разных узлов не связаны друг с другом, доверие внутреннего агента i -го узла к внутреннему агенту j -го узла, $j \neq i$, равно 0.

Для всех $k \in N$ будем считать выполненными соотношения $0 < \delta_k < 1$ и $0 < \varepsilon_k < 1$.

Внешнего агента i -го узла будем обозначать i , а внутреннего агента этого же узла – $(i + n)$. Тогда информационное взаимодействие в этой сети можно описать матрицей прямого влияния следующего вида:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} a_{11}(1 - \varepsilon_1) & \dots & a_{1,n}(1 - \varepsilon_1) & \varepsilon_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(1 - \varepsilon_n) & \dots & a_{nn}(1 - \varepsilon_n) & 0 & \dots & \varepsilon_n \\ \delta_1 & \dots & 0 & 1 - \delta_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \delta_n & 0 & \dots & 1 - \delta_n \end{bmatrix}.$$

Будем считать, что для исходной матрицы A в сети достигается консенсус, в котором вектор результирующих влияний описывается системой соотношений (1). Для вектора результирующих влияний справедливо следующее утверждение.

Утверждение 1. Для матрицы \hat{A} достигается консенсус, в котором вектор результирующих влияний имеет следующий вид:

$$\hat{w} = \frac{1}{\Lambda} \left(\frac{w_1}{1-\varepsilon_1}, \dots, \frac{w_n}{1-\varepsilon_n}, \frac{w_1 \varepsilon_1}{\delta_1 (1-\varepsilon_1)}, \dots, \frac{w_n \varepsilon_n}{\delta_n (1-\varepsilon_n)} \right),$$

где введено обозначение

$$(2) \quad \Lambda = \sum_{i \in N} \frac{w_i (\delta_i + \varepsilon_i)}{\delta_i (1-\varepsilon_i)}.$$

Доказательство. Легко видеть, что при добавлении к сети внутренних агентов (с каждым из которых связана петля, поскольку $1 - \delta_k > 0$ – внутренний агент в некоторой степени доверяет сам себе) свойства неразложимости и аperiodичности сохраняются. Поэтому достаточно проверить выполнение соотношений

$$(3) \quad \hat{w} \hat{A} = \hat{w}, \quad \sum_{i \in \{1, \dots, 2n\}} \hat{w}_i = 1.$$

Для проверки второго из соотношений (3) достаточно сравнить сумму i -й и $(i+n)$ -й компонент вектора \hat{w} с равенством (2).

Проверим первое из соотношений (3). Обозначим $z = \hat{w} \hat{A}$ и проверим выполнение равенства $z_j = \hat{w}_j$ отдельно для случаев $1 \leq j \leq n$ и $n+1 \leq j \leq 2n$.

Пусть $1 \leq j \leq n$. Тогда

$$\begin{aligned} z_j &= \sum_{i=1}^{2n} \hat{w}_i \hat{a}_{ij} = \frac{1}{\Lambda} \sum_{i=1}^n \frac{w_i}{1-\varepsilon_i} \cdot a_{ij} (1-\varepsilon_i) + \frac{1}{\Lambda} \frac{w_j \varepsilon_j}{\delta_j (1-\varepsilon_j)} \delta_j = \\ &= \frac{1}{\Lambda} \left(\sum_{i=1}^n w_i a_{ij} + \frac{w_j \varepsilon_j}{1-\varepsilon_j} \right) = \frac{1}{\Lambda} \left(w_j + \frac{w_j \varepsilon_j}{1-\varepsilon_j} \right) = \frac{1}{\Lambda} \frac{w_j}{1-\varepsilon_j} = \hat{w}_j. \end{aligned}$$

Пусть теперь $n+1 \leq j \leq 2n$. Тогда

$$\begin{aligned}
 z_j &= \sum_{i=1}^{2n} \hat{w}_i \hat{a}_{ij} = \frac{1}{\Lambda} \frac{w_{j-n}}{1-\varepsilon_{j-n}} \varepsilon_j + \frac{1}{\Lambda} \frac{w_{j-n} \varepsilon_{j-n}}{\delta_{j-n} (1-\varepsilon_{j-n})} (1-\delta_{j-n}) = \\
 &= \frac{1}{\Lambda} \frac{w_{j-n}}{1-\varepsilon_{j-n}} \varepsilon_{j-n} \left(1 + \frac{1-\delta_{j-n}}{\delta_{j-n}} \right) = \frac{1}{\Lambda} \frac{w_{j-n} \varepsilon_{j-n}}{\delta_{j-n} (1-\varepsilon_{j-n})} = \hat{w}_j.
 \end{aligned}$$

Утверждение 1 доказано. ■

Определим вектор результирующих влиятельностей узлов в сложной сети \bar{w} как вектор, элементы которого равны сумме результирующих влиятельностей внутреннего и внешнего агентов соответствующего узла, т.е. $\bar{w}_i = \hat{w}_i + \hat{w}_{i+n}$, $i \in N$. Тогда

$$(4) \quad \bar{w}_i = \frac{\frac{w_i (\delta_i + \varepsilon_i)}{\delta_i (1-\varepsilon_i)}}{\sum_{j \in N} \frac{w_j (\delta_j + \varepsilon_j)}{\delta_j (1-\varepsilon_j)}}.$$

Покажем, что если все узлы являются идентичными в смысле взаимосвязи внешнего и внутреннего агентов, то влиятельность узла равна влиятельности соответствующего агента в сети с n агентами.

Утверждение 2. Пусть доверие между внутренними агентами и внешними во всех узлах не различается, т.е. $\delta_i = \delta$, $\varepsilon_i = \varepsilon$ для всех i . Тогда результирующая влиятельность каждого узла в такой сети, состоящей из сложных узлов, будет равна его результирующей влиятельности в такой же сети, но состоящей только из простых узлов, т.е. $\bar{w}_i = w_i$.

Доказательство. Достаточно подставить в (4) для всех узлов одни и те же значения $\delta_i = \delta$, $\varepsilon_i = \varepsilon$:

$$\bar{w}_i = \frac{\frac{w_i (\delta_i + \varepsilon_i)}{\delta_i (1-\varepsilon_i)}}{\sum_{j \in N} \frac{w_j (\delta_j + \varepsilon_j)}{\delta_j (1-\varepsilon_j)}} = \frac{\frac{w_i (\delta + \varepsilon)}{\delta (1-\varepsilon)}}{\sum_{j \in N} \frac{w_j (\delta + \varepsilon)}{\delta (1-\varepsilon)}} = \frac{w_i}{\sum_{j \in N} w_j} = w_i. \quad \blacksquare$$

Следующие два утверждения дают ответ на вопрос о том, как зависит результирующая влиятельность узла от параметров взаимного влияния внешнего и внутреннего агентов, составляющих этот узел.

Утверждение 3. Результирующая влиятельность i -го узла монотонно возрастает при увеличении доверия внешнего агента к внутреннему агенту того же узла.

Доказательство. Найдем частную производную

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varepsilon_i} \bar{w}_i &= \frac{\partial}{\partial \varepsilon_i} \left(\frac{w_i (\delta_i + \varepsilon_i)}{\delta_i (1 - \varepsilon_i)} \frac{1}{\sum_{j \in N} \frac{w_j (\delta_j + \varepsilon_j)}{\delta_j (1 - \varepsilon_j)}} \right) = \\ &= \frac{\frac{\partial}{\partial \varepsilon_i} \left(\frac{w_i (\delta_i + \varepsilon_i)}{\delta_i (1 - \varepsilon_i)} \right) \sum_{j \in N} \frac{w_j (\delta_j + \varepsilon_j)}{\delta_j (1 - \varepsilon_j)}}{\left(\sum_{j \in N} \frac{w_j (\delta_j + \varepsilon_j)}{\delta_j (1 - \varepsilon_j)} \right)^2} - \\ &= \frac{\frac{\partial}{\partial \varepsilon_i} \left(\sum_{j \in N} \frac{w_j (\delta_j + \varepsilon_j)}{\delta_j (1 - \varepsilon_j)} \right) \frac{w_i (\delta_i + \varepsilon_i)}{\delta_i (1 - \varepsilon_i)}}{\left(\sum_{j \in N} \frac{w_j (\delta_j + \varepsilon_j)}{\delta_j (1 - \varepsilon_j)} \right)^2} = \\ &= \frac{\frac{\partial}{\partial \varepsilon_i} \left(\frac{w_i (\delta_i + \varepsilon_i)}{\delta_i (1 - \varepsilon_i)} \right) \left(\sum_{j \in N} \frac{w_j (\delta_j + \varepsilon_j)}{\delta_j (1 - \varepsilon_j)} - \frac{w_i (\delta_i + \varepsilon_i)}{\delta_i (1 - \varepsilon_i)} \right)}{\left(\sum_{j \in N} \frac{w_j (\delta_j + \varepsilon_j)}{\delta_j (1 - \varepsilon_j)} \right)^2}. \end{aligned}$$

Из того, что

$$\frac{\sum_{j \in N \setminus \{i\}} \frac{w_j (\delta_j + \varepsilon_j)}{\delta_j (1 - \varepsilon_j)}}{\left(\sum_{j \in N} \frac{w_j (\delta_j + \varepsilon_j)}{\delta_j (1 - \varepsilon_j)} \right)^2} > 0$$

и

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon_i} \left(\frac{w_i (\delta_i + \varepsilon_i)}{\delta_i (1 - \varepsilon_i)} \right) = \frac{w_i}{\delta_i} \frac{1 + \delta_i}{(1 - \varepsilon_i)^2} > 0,$$

следует истинность утверждения 3. ■

Утверждение 4. Результирующая влиятельность узла монотонно убывает при увеличении доверия внутреннего агента к внешнему агенту того же узла.

Доказательство. Достаточно заметить, что соответствующая частная производная строго отрицательна при $w_i > 0$:

$$\frac{\partial}{\partial \delta_i} \bar{w}_i = - \frac{\varepsilon_i C_{\delta_i}}{\left(\sum_{j \in N} \frac{w_j (\delta_j + \varepsilon_j)}{\delta_j (1 - \varepsilon_j)} \right)^2 \delta_i^2} < 0,$$

где

$$C_{\delta_i} = \frac{1}{1 - \varepsilon_j} w_i \sum_{j \in N \setminus \{i\}} \frac{w_j (\delta_j + \varepsilon_j)}{\delta_j (1 - \varepsilon_j)} > 0. \blacksquare$$

Из выражения (4) нетрудно видеть, что при убывании δ_i до нуля влиятельность \bar{w}_i возрастает до максимально возможного значения:

$$\lim_{\delta_i \rightarrow 0} \bar{w}_i = 1.$$

Содержательно это означает, что если внутренний агент узла лишь в малой степени доверяет внешнему агенту, то данный узел обладает высокой влиятельностью.

4. Случай двух узлов

В данном разделе рассмотрим случай двух сложных узлов. В этом случае ситуация полностью описывается всего шестью независимыми величинами: a_{12} , ε_1 , δ_1 , a_{21} , ε_2 , δ_2 , а матрица прямого влияния сети агентов принимает следующий вид:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} a_{11}(1-\varepsilon_1) & a_{12}(1-\varepsilon_1) & \varepsilon_1 & 0 \\ a_{21}(1-\varepsilon_2) & a_{22}(1-\varepsilon_2) & 0 & \varepsilon_2 \\ \delta_1 & 0 & 1-\delta_1 & 0 \\ 0 & \delta_2 & 0 & 1-\delta_2 \end{bmatrix}.$$

Будем считать, что $0 < a_{11}, a_{22} < 1$, – это обеспечивает выполнение условий утверждения 1 (напомним, что матрица является стохастической – сумма элементов в каждой строке равна 1).

Нетрудно убедиться (см. [6, с. 144]), что для матрицы

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

вектор w имеет следующий вид:

$$w = \left(\frac{1-a_{22}}{1-a_{11}+1-a_{22}}, \frac{1-a_{11}}{1-a_{11}+1-a_{22}} \right) = \left(\frac{a_{21}}{a_{12}+a_{21}}, \frac{a_{12}}{a_{12}+a_{21}} \right).$$

Тогда из утверждения 1 следует, что

$$\hat{w} = \frac{\left(\frac{a_{21}}{1-\varepsilon_1}, \frac{a_{12}}{1-\varepsilon_2}, \frac{a_{21}\varepsilon_1}{\delta_1(1-\varepsilon_1)}, \frac{a_{12}\varepsilon_2}{\delta_2(1-\varepsilon_2)} \right)}{\frac{a_{21}(\delta_1+\varepsilon_1)}{\delta_1(1-\varepsilon_1)} + \frac{a_{12}(\delta_2+\varepsilon_2)}{\delta_2(1-\varepsilon_2)}},$$

а для суммарных влиятельности узлов справедливы следующие выражения:

$$\bar{w}_1 = \frac{a_{21}(\delta_1+\varepsilon_1)\delta_2(1-\varepsilon_2)}{a_{21}(\delta_1+\varepsilon_1)\delta_2(1-\varepsilon_2) + a_{12}(\delta_2+\varepsilon_2)\delta_1(1-\varepsilon_1)},$$

$$\bar{w}_2 = \frac{a_{12}(\delta_2+\varepsilon_2)\delta_1(1-\varepsilon_1)}{a_{21}(\delta_1+\varepsilon_1)\delta_2(1-\varepsilon_2) + a_{12}(\delta_2+\varepsilon_2)\delta_1(1-\varepsilon_1)}.$$

Влиятельность каждого узла зависит от всех шести параметров задачи, однако сила зависимости является различной в разных ситуациях. Характеристикой силы локальной (при небольших изменениях параметров) зависимости будем считать частную производную по соответствующему параметру.

Среди параметров, характеризующих узел, можно выделить «внутренние» параметры δ_i и «внешние» параметры a_{ij} (параметры ε_j являются смешанными, поскольку характеризуют как взаимное влияние узлов, так и влияние внутри соответствующих узлов). Оказывается, что при некоторых условиях влиятельность узла сильнее зависит от «внутреннего» параметра.

Утверждение 5. При условии $(\delta_1 + \varepsilon_1)\delta_1 < a_{12}\varepsilon_1$ выполняется неравенство $\left| \frac{\partial}{\partial a_{12}} \bar{w}_1 \right| < \left| \frac{\partial}{\partial \delta_1} \bar{w}_1 \right|$.

Доказательство. Найдем соответствующие частные производные:

$$\frac{\partial}{\partial a_{12}} \bar{w}_1 = - \frac{a_{21}(\delta_1 + \varepsilon_1)(\delta_2 + \varepsilon_2)\delta_1\delta_2(1 - \varepsilon_1)(1 - \varepsilon_2)}{(a_{21}(\delta_1 + \varepsilon_1)\delta_2(1 - \varepsilon_2) + a_{12}(\delta_2 + \varepsilon_2)\delta_1(1 - \varepsilon_1))^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial \delta_1} \bar{w}_1 = - \frac{a_{21}\varepsilon_1 a_{12}(\delta_2 + \varepsilon_2)(1 - \varepsilon_1)\delta_2(1 - \varepsilon_2)}{(a_{21}(\delta_1 + \varepsilon_1)\delta_2(1 - \varepsilon_2) + a_{12}(\delta_2 + \varepsilon_2)\delta_1(1 - \varepsilon_1))^2}.$$

Далее, введем обозначение

$$C = \frac{a_{21}(\delta_2 + \varepsilon_2)(1 - \varepsilon_1)\delta_2(1 - \varepsilon_2)}{(a_{21}(\delta_1 + \varepsilon_1)\delta_2(1 - \varepsilon_2) + a_{12}(\delta_2 + \varepsilon_2)\delta_1(1 - \varepsilon_1))^2} > 0,$$

тогда

$$\left| \frac{\partial}{\partial a_{12}} \bar{w}_1 \right| = (\delta_1 + \varepsilon_1)\delta_1 C, \quad \left| \frac{\partial}{\partial \delta_1} \bar{w}_1 \right| = a_{12}\varepsilon_1 C.$$

Если $(\delta_1 + \varepsilon_1)\delta_1 < a_{12}\varepsilon_1$, то

$$\left| \frac{\partial}{\partial a_{12}} \bar{w}_1 \right| < \left| \frac{\partial}{\partial \delta_1} \bar{w}_1 \right|,$$

что доказывает утверждение. ■

Предположим, что некий управляющий орган может воздействовать на один из параметров (по своему выбору) первого узла a_{12} и δ_1 , стремясь изменить его влияние. Тогда, в соответствии с утверждением 5, в некоторых случаях выгоднее воздействовать на внутренний параметр.

5. Заключение

Для исследования консенсуса в сетевых структурах, где каждый узел состоит из двух взаимодействующих между собой агентов, была использована модель де Гроота. Получено в явном виде выражение, характеризующее зависимость итогового мнения агентов от их начальных мнений при условии достижимости консенсуса (без ограничений на количество агентов или структуру взаимодействия между узлами). Была показана монотонность зависимости влияния узла от изменения доверия между внутренним и внешним агентом одного узла. Для случая двух узлов было показано, при каких условиях внутренний параметр узла является более важным для его влияния, чем внешний.

Перспективным является изучение случаев взаимодействия узлов с более сложной внутренней структурой, а также более сложных моделей изменения мнений агентами.

Литература

1. АГАЕВ Р.П., ЧЕБОТАРЕВ П.Ю. *Сходимость и устойчивость в задачах согласования характеристик (обзор базовых результатов)* // Управление большими системами. – 2010. – Вып. 30. – №1. – С. 470–505.
2. АГАЕВ Р.П., ЧЕБОТАРЕВ П.Ю. *Метод проекции в задаче о консенсусе и регуляризованный предел степеней стохастической матрицы* // Автоматика и телемеханика. – 2011. – №12. – С. 38–59.

3. ГУБАНОВ Д.А., НОВИКОВ Д.А., ЧХАРТИШВИЛИ А.Г. *Социальные сети: модели информационного влияния, управления и противоборства*. – М.: Изд-во физ.-мат. лит-ры, 2010. – 228 с.
4. ЗУЕВ А.С., ФЕДЯНИН Д.Н. *Модели управления мнениями агентов в социальных сетях* // Проблемы управления. – 2011. – №1. – С. 37–45.
5. ФЕДЯНИН Д.Н., ЧХАРТИШВИЛИ А.Г. *Модель информационного управления в активных сетевых структурах при неполной информированности центра* // Проблемы управления. – 2012. – №6. – С. 13–18.
6. ШИРЯЕВ А.Н. *Вероятность*. В 2-х кн. – М.: МЦНМО, 2004. – 928 с.
7. BERGER R.L. *A necessary and sufficient condition for reaching a consensus using DeGroot's method* // J. Amer. Statist. Assoc. – 1981. – Vol. 76. – P. 415–418.
8. DE GROOT M.H. *Reaching a Consensus* // J. of American Statistical Association. – 1974. – No. 69. – P. 118–121.
9. FRIEDKIN N.E., JOHNSEN E.C. *Social Influence Networks and Opinion Change* // Advances in Group Processes. – 1999. – No. 16. – P. 1–29.
10. GOLUB B. AND JACKSON M.O. *Naïve Learning in Social Networks and the Wisdom of Crowds* // American Economic Journal: Microeconomics. – February, 2010. – Vol. 2, No. 1. – P. 112–149.
11. HEGSELMANN R., KRAUSE U. *Opinion dynamics and bounded confidence models, analysis, and simulation* // J. of Artificial Societies and Social Simulation (JASSS). – 2002. – Vol. 5, No. 3. – P. 1–33.
12. JACKSON M. *Social and Economic Networks*. – Princeton: Princeton University Press, 2008. – 520 p

CONSENSUS IN SOCIAL NETWORKS WITH COMPLEX STRUCTURE OF SOCIAL ACTORS

Denis Fedyanin, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, junior researcher (dfedyanin@inbox.ru).

Alexander Chkhartishvili, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Doctor of Science in Mathematics (sandro_ch@mail.ru).

Abstract: We study opinion dynamics in network structures of a special type: each node consists of two agents interacting among themselves. The external agent interacts with the rest of the network and the internal agent interacts only with the external one. For example, every external agent has a personal advisor who doesn't participate directly in the negotiations. We investigate properties of the consensus arising in these network structures under conventional de Groot opinion dynamics model and how the final influences depends on the mutual trust between external and internal agents. The analytical solution for the vector of final influences was obtained. We show that the final influence of a node depends monotonically on the trust between external and internal agents. It was shown for the two-node case under what conditions the internal parameters of a node are more important than the external ones. Our results can potentially be extended to the networks where nodes have more complex internal structure.

Keywords: opinion dynamics, social network, complex node, consensus, influence.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии П.Ю. Чеботарёвым.

Поступила в редакцию 25.02.2016.

Опубликована 30.11.2016.

УДК 519.254 + 004.93'14
ББК 3.32.965.32.965.9

АНАЛИЗ ПРОЦЕССА ГОСПИТАЛИЗАЦИИ ПАЦИЕНТОВ В КРУПНОЙ КЛИНИКЕ МЕТОДАМИ КОЛЛЕКТИВНОЙ МНОГОВАРИАНТНОЙ ЭКСПЕРТИЗЫ

**Чернявский А. Л.¹, Дорофеюк Ю. А.², Мандель А. С.³,
Покровская И. В.⁴**

*(ФГБУН Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)*

Дорофеюк А. А.⁵

*(ФГБУН Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва; Институт
системного анализа ФГУ «Федеральный исследователь-
ский центр «Информатика и управление» РАН, Москва;
НИУ «Высшая школа экономики», Москва)*

Описаны результаты применения методов многовариантной экспертизы для анализа процессов госпитализации больных в крупной клинике (на примере НИИ нейрохирургии им. Н.Н. Бурденко Минздрава РФ, далее ИНХ). Описана методология коллективной экспертизы в варианте независимой многовариантной экспертизы (НМВЭ). В процессе экспертизы были рассмотрены: процесс госпитализации больных в прием-

¹ Александр Леонидович Чернявский, кандидат технических наук, доцент (aschern@ipi.ru).

² Юлия Александровна Дорофеюк, кандидат технических наук, старший научный сотрудник (dorofeyuk_julia@mail.ru).

³ Александр Соломонович Мандель, доктор технических наук, профессор (manfoop@ipi.ru).

⁴ Ирина Вячеславовна Покровская, кандидат технических наук, доцент (ivr750@mail.ru).

⁵ Александр Александрович Дорофеюк, доктор технических наук, профессор (daa2@mail.ru).

ном отделении, характеристики пребывания больных в хирургических отделениях, особенности работы операционного блока, а также возможности использования информационной системы ИНХ как «измерительного инструмента» оценки эффективности различных предложений по совершенствованию управления лечебным процессом.

Ключевые слова: коллективная многовариантная экспертиза, компоненты процесса госпитализации, время ожидания операции, эффективность использования коечного фонда.

1. Введение

Система организации стационарной медицинской помощи в РФ устроена таким образом, что необходимая помощь в ряде случаев может быть оказана только в крупной специализированной больнице в городах-миллионниках, прежде всего в Москве. Примером может служить ФГАУ «НИИ нейрохирургии им. Н.Н. Бурденко Минздрава РФ» (далее – ИНХ), в который поступают больные из всех регионов РФ и из-за рубежа. Больные вызываются на госпитализацию по мере освобождения коек в 10 специализированных хирургических отделениях. В процессе госпитализации проверяются документы, подтверждающие, что больной прошел все необходимые обследования по месту жительства; при необходимости некоторые обследования назначаются повторно. Есть обязательный перечень обследований, выполняемых непосредственно перед госпитализацией (например, анализ крови). Проверяется наличие сопутствующих заболеваний (например, простудных), при которых операция невозможна.

Проведение анализа процессов госпитализации больных в крупной клинике только по базе данных автоматизированной информационной системы не даёт ожидаемых результатов, поскольку в процессах госпитализации огромную роль играет человеческий фактор, влияние которого можно выявить и оценить только с помощью разносторонней экспертной информации. Для её получения, применительно к специфике объекта (круп-

ное медицинское учреждение), в работе использовались разработанные в ИПУ РАН методы коллективной многовариантной экспертизы (КМВЭ) [4, 7]. Поскольку существенная часть экспертов привлекалась «со стороны», т.е. они не работали в ИНХ, то для таких случаев была разработана специальная модификация КМВЭ – метод независимой многовариантной экспертизы (НМВЭ). За счёт использования современных информационных технологий НМВЭ не требует собирать экспертов в одном месте для анализа и разработки предложений по совершенствованию системы управления исследуемого объекта, такие обсуждения проводятся либо заочно, либо в режиме *on-line* видеоконференции экспертами, находящимися в других организациях, городах и даже в других странах.

2. Метод независимой многовариантной экспертизы (НМВЭ)

Одним из методов (инструментариев) получения экспертных знаний, которые можно использовать для решения разнообразных прикладных задач, является экспертиза [6]. При этом основным источником подобных знаний являются эксперты. Проведение экспертизы для анализа и реформирования социально-экономических и организационных систем имеет ряд особенностей, затрудняющих использование классических методов экспертизы. Основную часть экспертной работы, как правило, выполняют «свои» эксперты – высококвалифицированные специалисты, много лет работающие в организации и хорошо знающие её «изнутри». Поскольку каждый такой эксперт занимает определённое место в структуре управления организации, он смотрит на проблему как с точки зрения своих собственных целей, задач и интересов, так и корпоративных интересов «своего» подразделения. Поэтому его мнение заведомо не может быть беспристрастным. А так как в любой организации цели и задачи разных подразделений неизбежно вступают в противоречие друг с другом, трудно ожидать, что эксперты придут к согласованному мнению. Поэтому главную роль в экспертизе такого рода играет не столько само мнение эксперта, сколько его аргу-

ментация, позволяющая судить о степени обоснованности этого мнения. Один из способов проверки обоснованности мнений – это обсуждение спорных вопросов. Наиболее часто такое обсуждение происходит на обычных производственных совещаниях и «оперативках». Однако это не лучший способ выяснения и обсуждения разных мнений: во-первых, из-за нехватки времени, а во-вторых, из-за того, что сотрудники «по политическим причинам» не всегда готовы высказать свое мнение в присутствии начальников, конкурентов и недоброжелателей. Для подобных случаев и были разработаны методы коллективной многовариантной экспертизы (КМВЭ) [4, 7]. В последние годы при решении задач синтеза и совершенствования социально-экономических систем управления используются именно эти методы, которые во многих случаях являются единственным источником получения информации, необходимой для решения подобных задач.

2.1. КОЛЛЕКТИВНАЯ МНОГОВАРИАНТНАЯ ЭКСПЕРТИЗА

Любая коллективная экспертиза предполагает, что наиболее эффективным способом сопоставления, оценки и согласования мнений экспертов является коллективное обсуждение в экспертной комиссии [5]. При обсуждении вопросов, имеющих жизненно важное значение для организации и работающих в ней людей, практически всегда имеется несколько различных, а иногда и прямо противоположных точек зрения. Однако опыт показывает, что совместная работа в рамках одной группы экспертов, придерживающихся разных точек зрения, как правило, оказывается малопродуктивной [5].

Кроме того, иногда эксперты, даже имеющие сходные точки зрения, не могут работать в одной комиссии из-за особенностей личных взаимоотношений («конфликтность», взаимоотношения «начальник–подчиненный» и т.д.). Поэтому целесообразно детально проработать каждую точку зрения в комиссии, состоящей из экспертов-единомышленников, не имеющих конфликтных взаимоотношений.

Методы КМВЭ предполагают, что экспертизу проводит специальная консалтинговая группа, как правило, приглашенная

«со стороны». Входящие в эту группу консультанты проводят всю организационную, подготовительную и расчетную работу; участвуют в работе экспертных комиссий; проводят обработку экспертных оценок и представляют результаты обработки и свое собственное мнение заказчику (ЛПР – лицу, принимающему решение). Такой способ организации коллективного обсуждения обеспечивает каждой из сторон равные возможности. Следует отметить, что аналогичных принципов работы консультантов (без проведения коллективной экспертизы) придерживаются ведущие консалтинговые фирмы мира [5, 8].

2.1.1. КОНЦЕПЦИЯ КМВЭ

Концепция КМВЭ базируется на следующих основных принципах:

- экспертиза проводится в экспертных комиссиях, число которых не меньше числа различных точек зрения на исследуемую проблему;
- в одну и ту же комиссию включаются эксперты, имеющие близкие точки зрения на проблему экспертизы;
- в каждой комиссии работают эксперты, не имеющие конфликтных взаимоотношений;
- для экспертизы отбираются «условно» компетентные эксперты;
- при формировании результатов экспертизы обязательно проводится «перекрёстная экспертиза»: мнение каждой комиссии проходит экспертизу в других экспертных комиссиях;
- организация и проведение экспертизы, обработка экспертных оценок, формирование результатов экспертизы проводится специальной консалтинговой группой, независимой и не заинтересованной в результатах экспертизы.

Для некоторых задач непосредственное применение классических методов КМВЭ оказывается невозможным по следующим причинам:

1. При отсутствии единого руководства никто не может обязать экспертов из разных организаций работать в экспертных комиссиях.

2. Эксперты из разных организаций мало знают о компетенциях друг друга, поэтому предлагаемые в [4, 7] методики оценки «условной» компетентности экспертов оказываются не эффективными.

3. Согласно Концепции, эксперты разбиваются на небольшое число групп «экспертов-единомышленников», имеющих близкие точки зрения на проблему в целом. Из этих групп и формируются экспертные комиссии. При большом количестве экспертов из разных организаций практически невозможно сформировать такие комиссии.

Как уже говорилось выше, для таких случаев была разработана специальная модификация КМВЭ – метод независимой многовариантной экспертизы (НМВЭ) [9].

2.2. НЕЗАВИСИМАЯ МНОГОВАРИАНТНАЯ ЭКСПЕРТИЗА

Основным и весьма существенным отличием НМВЭ от классических процедур КМВЭ состоит в том, что в процессе экспертизы разрабатываются не варианты решения исходной задачи в целом, а выявляются и разрабатываются варианты решения *относительно независимых проблем*, связанных с исходной задачей, совокупное решение которых обеспечивает также решение и исходной задачи.

Реализация метода НМВЭ разбивается на следующие основные этапы.

2.2.1. ЭТАП I НМВЭ – ФОРМИРОВАНИЕ СПИСКА КАНДИДАТОВ В ЭКСПЕРТЫ

Вначале составляется список специалистов, мнение которых будет заведомо полезно для разработчиков системы и которые согласились работать экспертами, это – список первого уровня S_1 . На этом этапе, как и для КМВЭ, используется процедура «снежный ком» [6], в итоге будет сформирован предварительный список S_{pr} из l кандидатов в эксперты.

2.2.2. ЭТАП 2 НМВЭ – ФОРМИРОВАНИЕ СПИСКА ОТНОСИТЕЛЬНО НЕЗАВИСИМЫХ ПРОБЛЕМ

В процессе предварительных интервью с потенциальными экспертами из списка S_{pr} формируется список из n относительно независимых проблем $C_{пр} = \{PR_1, \dots, PR_n\}$, где PR_i – формальное описание i -й проблемы. Такое описание может быть получено, например, как подмножество (подсписок) термов

$$PR_i = \bigcup_{j=1}^{n_i} T_{ij}, T_{ij} \in T_{общ} \text{ из общего множества (списка) термов}$$

$T_{общ} = \{T_1, \dots, T_{n_{общ}}\}$, содержательное описание каждого из которых $T_i \in T_{общ}$ характеризует определённый аспект исследуемой проблемы, а совокупность описаний термов из общего множества $T_{общ}$ полностью покрывает содержательное описание проблемы в целом, здесь: n_i – число термов в формальном описании i -й проблемы PR_i , а $n_{общ}$ – число термов в общем множестве $T_{общ}$.

Такие формальные описания должны удовлетворять следующим условиям. Во-первых, эти проблемы в совокупности покрывают общую проблему экспертизы $PR_{общ}$. В теоретико-множественных терминах это условие можно записать в виде:

$$PR_{общ} \in \bigcup_{i=1}^n PR_i. \text{ Во-вторых, сами проблемы должны быть до-}$$

статочно независимы. В теоретико-множественных терминах это означает, что мощность попарных пересечений формальных описаний проблем существенно меньше мощности формального описания каждой из этих проблем в отдельности, т.е.

$$(1) [M(PR_i \cap PR_j) \ll M(PR_i)] \wedge [M(PR_i \cap PR_j) \ll M(PR_j)],$$

где $M(A)$ – мощность множества A , $i, j = 1, \dots, n$, $i \neq j$. В данном случае (конечность рассматриваемых множеств) мощность множества A совпадает с числом элементов, входящих в это множество, т.е. $M(PR_i) = n_i$, $M(PR_i \cap PR_j) = n_{перij}$, где

$n_{перij}$ – число термов в формальном описании множества $PR_i \cap PR_j$ (пересечение формальных описаний проблем PR_i и PR_j). В этом случае условие (1) имеет вид (1а):

(1a) $n_{\text{пер}i,j} \ll n_i$ и $n_{\text{пер}i,j} \ll n_j$.

На этом же этапе из общего списка $C_{\text{пр}}$ выделяется подписок проблем $C_{\text{пр}}^{\text{нк}} = \{PR_1^{\text{нк}}, \dots, PR_{n_{\text{нк}}}^{\text{нк}}\}$, по способам решения которых, имеются различные мнения (нет консенсуса), где $PR_i^{\text{нк}}$ – формальное описание i -й проблемы, для которой нет консенсуса, а $n_{\text{нк}}$ – общее число таких проблем. При формировании этого подписка консультанты оценивают качество и убедительность аргументации потенциальных экспертов.

2.2.3. ЭТАП 3 НМВЭ – ОЦЕНКА КОМПЕТЕНТНОСТИ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ЭКСПЕРТОВ

На этом этапе производится оценка компетентности потенциальных экспертов. Алгоритм оценки компетентности, разработанный в рамках НМВЭ, существенно отличается от процедуры оценки условной компетентности, используемой в классических схемах КМВЭ [4, 7]. В данном случае необходимо оценивать компетентность эксперта не в целом по исследуемой задаче, а по каждой из n относительно независимых проблем из списка $C_{\text{пр}}$, и в первую очередь – по проблемам из подписка $C_{\text{пр}}^{\text{нк}}$ (по способам решения которых нет консенсуса). Далее приводится краткое описание этого алгоритма.

2.2.3.1. Алгоритм оценки компетентности экспертов для НМВЭ. Информация, используемая алгоритмом, состоит из трех частей – результатов заполнения трёх типов анкет для j -го (оцениваемого) эксперта:

1. Анкета-1 (самооценка), заполняемая j -м экспертом, состоит из $(n + 1)$ раздела – общей информации об эксперте и его деятельности, а также из n разделов, каждый из которых посвящён вопросам по одной из относительно независимых проблем из списка $C_{\text{пр}}$. Анкета заполняется экспертом при участии консультанта, как правило, во время его интервью с экспертом.

2. Анкета-2, заполняемая другими экспертами из предварительного списка кандидатов в эксперты $S_{\text{пр}}$, которая состоит из n разделов – по числу относительно независимых проблем. Вопросы касаются компетентности оцениваемого эксперта по раз-

личным аспектам каждой такой проблемы. Если оцениваемый эксперт работает или сотрудничает с некоторой организацией, то такую анкету заполняет также непосредственный руководитель эксперта в этой организации, либо руководитель подразделения организации, с которым эксперт сотрудничает.

3. Анкета-3 практически совпадает с Анкетой-2, но её заполняют консультанты, интервьюировавшие оцениваемого эксперта.

Во всех трёх типах анкет информация каждого раздела, относящегося к конкретной относительно независимой проблеме, обрабатывается отдельно, вне связи с другими разделами. Другими словами, компетентность эксперта оценивается по каждой такой проблеме независимо. По этой причине работу алгоритма опишем для одной проблемы PR_i .

Среди всех анкет типа 2 отбираются те, в которых заполнены пункты раздела, посвящённого проблеме PR_i (регламент позволяет эксперту не заполнять некоторые разделы Анкеты-2 для j -го эксперта). Вся эта информация представляется в виде $(l_1 + l_2 + 1)$ -мерного вектора интегральных оценок компетентности j -го эксперта по проблеме PR_i :

$$(2) \quad k_i(PR_i) = \{k_j^{(1)}(PR_i), \dots, k_j^{(l_1)}(PR_i), k_j^{(l_1+1)}(PR_i), \dots, k_j^{(l_1+l_2)}(PR_i), k_j^{(l_1+l_2+1)}(PR_i)\},$$

где l_1 – число экспертов, заполнивших раздел PR_i Анкеты-2 для j -го эксперта; l_2 – число консультантов, заполнивших раздел PR_i Анкеты-3 для j -го эксперта, $k_j^{(l_1+l_2+1)}(PR_i)$ – самооценка j -го эксперта, скорректированная консультантами.

Описание алгоритма представляет собой следующую пошаговую итерационную процедуру.

Шаг 1 алгоритма.

$$(3) \quad u_j(PR_i) = \frac{1}{l_1 + l_2 + 1} \sum_{s=1}^{l_1+l_2+1} k_j^{(s)}(PR_i).$$

Для значения $u_j(PR_i)$, рассчитанного по формуле (3), подсчитывается нижняя граница доверительного интервала $\Delta_j^{(H)}$ для выбранного значения доверительной вероятности [2]. В ра-

боте использовалось значение доверительной вероятности, равное для «обычных» выборок 0,95, а для малых выборок – 0,9. Классическая методика построения доверительных интервалов достаточно подробно описана в [2], в прикладных задачах для этого используются специальные таблицы [1].

Если выполняются неравенства

$$(4) \quad u_j(PR_i) \geq a, \quad \Delta_j^{(H)} > b,$$

где a и b – заданные пороговые значения, то j -й эксперт считается компетентным по проблеме PR_i . Если выполняются следующие условия:

$$(5) \quad u_j(PR_i) \geq a, \quad \Delta_j^{(H)} < b,$$

то необходимо провести уточнение данных анкетирования по j -му эксперту по проблеме PR_i . Для этой цели для эксперта, оценка $u_j(PR_i)$ для которого удовлетворяет условию (5), либо проводится повторное анкетирование, либо, в зависимости от величины разности $(b - \Delta_j^{(H)})$, консультанты «переводят» этого эксперта соответственно в группу компетентных или некомпетентных по проблеме PR_i экспертов.

И, наконец, если

$$(6) \quad u_j(PR_i) < a, \quad \Delta_j^{(H)} < b,$$

то эксперт считается некомпетентным по проблеме PR_i .

Выбор констант a и b в значительной степени осуществляется экспертным путём и требует определённого опыта при решении конкретных задач описанного типа. При решении прикладных задач величина a выбирается из требования минимально допустимого уровня компетентности потенциального эксперта в (шкале $[0, 1]$). Выбор порога a в значительной степени определяется «потенциалом» исходного набора экспертов. Значение a в прикладных задачах обычно выбирается в диапазоне 0,5–0,7 (в зависимости от «сложности» проблемы PR_i). Значение константы b напрямую зависит от размера выборки и дисперсии оценок компетентности для тестируемого набора экспертов. Обычно значение $b = (0,8–0,9)a$ для больших и «средних» выборок и $b = 0,7a$ – для малых выборок (с экс-

партной поправкой, зависящей от дисперсии оценок, полученных в результате тестирования).

В итоге j -й эксперт получает одну из оценок компетентности по проблеме PR_i : либо $u_j(PR_i)$, если попадает в группу компетентных по этой проблеме экспертов (выполняется неравенство (4)), либо 0, если попадает в группу некомпетентных по этой проблеме экспертов (выполняется неравенство (6) или он «переведён» в эту группу консультантами при выполнении неравенства (5)). Эта схема реализуется для всех l кандидатов в эксперты из предварительного списка S_{pr} .

Следует обратить внимание, что величины интегральных оценок компетентности $k_j^{(s)}(PR_i)$, входят в выражение (3) меры $u_j(PR_i)$ компетентности j -го эксперта по проблеме PR_i «равноправно», т.е. с одинаковым весом. Абсурдность такой ситуации особенно очевидна для тех экспертов, которые сами попали в категорию некомпетентных по проблеме PR_i , очевидно, что их оценки не нужно учитывать в (3). Однако на первом шаге алгоритма (первой итерации) это сделать просто невозможно, так как распределение всех экспертов на группы компетентных и некомпетентных будет сделано только в самом конце первого шага (первой итерации). Продолжая логику этих рассуждений, приходим к выводу, что оценки $k_j^{(s)}(PR_i)$ в (3) необходимо «взвешивать», в зависимости от уровня компетентности s -го эксперта. В работе для такого «взвешивания» предлагается использовать весовые коэффициенты $v_s(PR_i)$ вида

$$(7) \quad v_s(PR_i) = \begin{cases} u_s(PR_i), & \text{эксперт отнесён к компетентным} \\ 0, & \text{эксперт отнесён к некомпетентным} \end{cases}.$$

Тогда выражение (3) для расчёта меры компетентности экспертов по проблеме PR_i переписывается в виде:

$$(8) \quad u_j(PR_i) = \frac{1}{\sum_{s=1}^{l_1+l_2+1} v_s(PR_i)} \sum_{s=1}^{l_1+l_2+1} v_s(PR_i) k_j^{(s)}(PR_i), \quad j=1, \dots, l,$$

где $v_s(PR_i)$ определяется выражением (7). Веса $v_s(PR_i)$ «экспертов» под номерами $s = (l_1 + 1), \dots, l_2$ (консультанты, заполняю-

щие Анкету-3 для j -го эксперта) по определению равны 1, а для эксперта под номером $s=(l_1 + l_2 + 1)$ (j -й эксперт, заполнивший Анкету-1) значение весового коэффициента равно $v_j(PR_i)$.

Тонкость такой процедуры расчёта состоит в том, что для получения оценок $u_j(PR_i)$ в (8) можно использовать веса $v_s(PR_i)$, рассчитанные с помощью формулы (7) только для оценок $u_s(PR_i)$ и распределения экспертов по группам компетентности (компетентен – некомпетентен), полученных на предыдущей итерации (например, для второй итерации оценки рассчитываются по формуле (3)). Во избежание неправильного толкования, введём в (7) и (8) индекс итерации и перепишем их в виде:

$$(9) \quad v_s^t(PR_i) = \begin{cases} u_s^t(PR_i), & \text{эксперт отнесён к компетентным} \\ 0, & \text{эксперт отнесён к некомпетентным} \end{cases}.$$

$$(10) \quad u_j^{t+1}(PR_i) = \frac{1}{\sum_{s=1}^{l_1+l_2+1} v_s^t(PR_i)} \sum_{s=1}^{l_1+l_2+1} v_s^t(PR_i) k_j^{(s)}(PR_i), \quad j=1, \dots, l.$$

Шаг $t + 1$ алгоритма.

На $(t + 1)$ -й итерации с помощью (10) рассчитываются оценки $u_j^{t+1}(PR_i)$ меры компетентности экспертов по проблеме PR_i с использованием весовых коэффициентов $v_s^t(PR_i)$, которые рассчитываются по формуле (9). Для каждой из этих оценок подсчитывается нижняя граница доверительного интервала $\Delta_j^{t+1, (H)}$. Затем, используя неравенства (4)–(6), в которых вместо $u_j(PR_i)$ и $\Delta_j^{(H)}$ стоит $u_j^{t+1}(PR_i)$ и $\Delta_j^{t+1, (H)}$ соответственно, получаем новые значения весовых коэффициентов $v_s^{t+1}(PR_i)$, а также распределение экспертов по группам компетентности по проблеме PR_i (компетентен – некомпетентен).

Алгоритм прекращает работу на $(N + 1)$ -й итерации при условии, что для всех s справедливо равенство $v_s^N(PR_i) = v_s^{N+1}(PR_i)$.

Совершенно аналогично получают оценки и распределение экспертов по группам компетентности для всех n проблем.

2.2.4. ЭТАП 4 НМВЭ – ФОРМИРОВАНИЕ ЭКСПЕРТНЫХ КОМИССИЙ

На этом этапе происходит формирование экспертных комиссий. Для каждой проблемы, по схеме решения которой среди компетентных (для этой проблемы) экспертов достигнут консенсус, создаётся единственная экспертная комиссия, состоящая из таких экспертов. В задачу каждой такой комиссии входит подготовка для ЛПР развёрнутого предложения по схеме, бизнес-плану, правовой и нормативной базе и пр. необходимых для решения этой проблемы.

Для разработки решения каждой из проблем, по которым имеются разногласия, формируется несколько экспертных комиссий (по числу существенно различных точек зрения на решение этой конкретной проблемы), в каждую из которых входят компетентные эксперты-единомышленники, т.е. эксперты, имеющие приблизительно одинаковые мнения по решению этой конкретной проблемы. При таком подходе общее число комиссий может несколько увеличиться по сравнению с КМВЭ, но это не потребует увеличения числа экспертов: каждый эксперт может работать в нескольких комиссиях, сформированных для решения различных проблем, т.е. участвовать в обсуждении всех вопросов, по которым у него есть обоснованное и компетентное мнение.

2.2.4.1. Процедура формирования экспертных комиссий для проблем, по которым имеются разногласия. Эта процедура во многом сходна с процедурой формирования экспертных комиссий в КМВЭ. Обозначим через l_{nc} число выявленных в процессе предварительных этапов экспертизы проблем PR_i^{nc} , по которым имеются разногласия. Для каждого j -го компетентного по проблеме PR_i^{nc} эксперта на базе информации, содержащейся в анкетах и интервью, формируется n_i -мерный вектор $x_j^i = (x_j^{i,(1)}, \dots, x_j^{i,(n_i)})$, где $x_j^{i,(s)}$ – характеристика мнения j -го эксперта по s -му аспекту проблемы PR_i^{nc} (см. пояснения к формуле (1)). Тогда j -й эксперт представляется точкой x_j^i в n_i -мерном

пространстве X_i характеристик проблемы PR_i^{nc} . Если имеется информация такого рода от k_i компетентных по проблеме PR_i^{nc} экспертов, то в этом пространстве определено положение k_i точек x_j^i , и задача структуризации мнений (выявления групп единомышленников) на решение проблемы PR_i^{nc} сводится к задаче разбиения этих точек в пространстве X_i на группы близких в определённом смысле точек. Считается, что эксперты, попавшие при таком разбиении в одну и ту же группу, являются единомышленниками (имеют сходные точки зрения на решение проблемы PR_i^{nc}). Для получения такого разбиения в прикладных задачах используются алгоритмы из комплекса алгоритмов интеллектуального анализа сложно организованных данных [3], в котором для классификации используется алгоритм структурно-классификационного анализа данных (СКАД).

2.2.5. ЭТАП 5 НМВЭ – РАБОТА СФОРМИРОВАННЫХ ЭКСПЕРТНЫХ КОМИССИЙ

В отличие от КМВЭ в данном случае этап анализа в работе экспертных комиссий практически отсутствует, поскольку все аналитические материалы были сформированы консалтинговой группой ещё на этапе предварительных интервью с кандидатами в эксперты.

Для проблем PR_i^{nc} , по которым сформировано несколько экспертных комиссий, как и для КМВЭ, организуется перекрёстная экспертиза вариантов решения [9]. Результатом обсуждения является либо некий согласованный вариант, либо перечень вариантов с указанием преимуществ и недостатков каждого из них. Такой перечень с соответствующими комментариями готовит консалтинговая группа после завершения процедуры перекрёстной экспертизы по проблеме PR_i^{nc} .

2.2.6. ЭТАП 6 НМВЭ – ФОРМИРОВАНИЕ ИТОГОВОГО ПРОЕКТА РЕШЕНИЯ ПРОБЛЕМЫ

По итоговым результатам обсуждения консалтинговая группа разрабатывает проект решения проблемы в целом с указанием преимуществ и недостатков предлагаемого решения. Окончательное решение предлагается оставить за руководством организации (ЛПР), на базе которого проводится экспертиза.

3. Результаты использования метода НМВЭ при решении задачи анализа процесса госпитализации пациентов в крупной клинике

В предварительный список экспертов S_{pr} вошло 79 кандидатов, в том числе сотрудники базового медицинского учреждения – ИНХ (НИИ нейрохирургии им. академика Н.Н. Бурденко Минздрава РФ), ряда крупных клиник Москвы, имеющих нейрохирургические подразделения, нескольких крупных клиник другого профиля, некоторых институтов РАН и Минздрава РФ, центрального аппарата и организаций Минздрава РФ и др. Всего в работе экспертных комиссий участвовало 43 эксперта. В рамках первых двух этапов НМВЭ был сформулирован список относительно независимых проблем, подлежащих анализу и решению.

1. Проблемы, связанные с госпитализацией больных (приёмное отделение). В частности, были проанализированы следующие аспекты этой проблемы:

1.1. Формирование план-графика рассмотрения документов плановых больных (до их поступления в клинику).

1.2. Формирование обязательного перечня первичных документов, которые требуются от такого типа больных. Анализ имеющихся стандартов в этой области для различных категорий больных (клиники, подразделений здравоохранения администраций субъектов РФ или муниципальных образований, крупных ведомств, РАМН, Минздрава и др.).

2. Проблемы, связанные с предварительным (дооперационным) обследованием госпитализируемых больных.

2.1. Формирование план-графика (маршрута) обследования поступившего больного, и в каком виде он составляется.

2.2. Анализ и оценка эффективности существующих механизмов маршрутизации обследования больного (управление маршрутами больных).

2.3. Категории медперсонала и каких подразделений клиники могут / должны вносить оперативные изменения в маршрут больного и вести мониторинг маршрутов обследования больных, кому доступны результаты этих обследований.

2.4. Механизм принятия решений по результатам такого обследования, форма его реализации.

3. Проблемы, связанные с продолжением маршрута больного в пределах отделения до операции.

Анализ специфики типовых маршрутов (сразу на операцию, подготовка к операции, уточнение диагноза, смена отделения, другие маршруты).

4. Проблемы, связанные с операцией и периодом, непосредственно следующим за операцией.

4.1. Система управления операционным блоком как структурного подразделения клиники. Схема закрепления отделений за конкретными операционными.

4.2. Механизмы оперативного (на следующий рабочий день), среднесрочного и долгосрочного планирования загрузки операционных (очередность больных на операцию), мотивы и алгоритмы коррекции этих планов.

4.3. Механизмы взаимодействия руководства операционного блока и отделений клиники в процессе планирования и управления функционированием операционного блока.

4.4. План операции для конкретного больного, его связь с операционной бригадой (хирург плюс анестезиолог).

4.5. Маршруты больных в период, непосредственно следующий за операцией (основные модули такого маршрута – операционная (возврат), реанимация, палата пробуждения, палата в отделении).

Далее описаны основные результаты проведенного анализа для приемного и хирургических отделений, а также для операционного блока.

3.1. ПРОЦЕСС ГОСПИТАЛИЗАЦИИ БОЛЬНЫХ В ПРИЕМНОМ ОТДЕЛЕНИИ

Поскольку отделения вызывают «своих» больных независимо друг от друга, а общее количество больных достаточно велико (в Институте делается более 7000 операций в год), приемное отделение не справляется, и процедура госпитализации растягивается на много часов, а иногда и дней. Так, например, в сентябре 2014 года было госпитализировано 467 чел., причём только 265 чел. (57%) смогли госпитализироваться в течение одного дня. Распределение этих больных по продолжительности госпитализации показано на рис. 1.

Как следует из рис. 1, больные делятся на две основные группы. Больные первой группы (135 чел.) проходят госпитализацию сравнительно быстро, весь процесс занимает у них не более 3 часов. Средняя продолжительность госпитализации в этой группе 1,6 часа. Больные второй группы (130 чел.) госпитализируются существенно дольше, этот процесс занимает у них от 3 до 8 часов. Средняя продолжительность госпитализации в этой группе 4,9 часа. Госпитализация становится для этих больных тяжёлой нагрузкой и может ухудшить их состояние.



Рис. 1. Распределение больных по продолжительности госпитализации

На этапе анализа выяснилось, что у экспертов – сотрудников ИНХ (администрации, приемного отделения, хирургических отделений) на этот счёт нет единого мнения. Так, например, по мнению администрации, основная причина состоит в несогласованности работы хирургических отделений, из-за чего поток больных неравномерно распределяется по дням недели и создаются пиковые нагрузки. Некоторые врачи приемного отделения полагали, что больные второй группы – это те, кто поздно пришел на госпитализацию. Другие эксперты утверждали, что большая продолжительность госпитализации объясняется существенным отставанием процесса удостоверения результатов анализа крови врачом. Наконец, ряд специалистов хирургических отделений высказывали мнение, что задержка происходит из-за того, что анестезиолог, принимающий окончательное решение о возможности госпитализации по результатам анализов и личного осмотра, ведет прием только с 14:00.

В соответствии с методикой НМВЭ эксперты были распределены по 4 комиссиям (по числу разных мнений), и было организовано перекрестное обсуждение мнения каждой комиссии в других комиссиях. Однако в данном случае, помимо мнений экспертов, удалось получить еще и объективную информацию: данные информационной системы ИНХ, фиксирующей прохождение больных через последовательные этапы процесса госпитализации. Анализ этой информации позволил еще до обсуждения в комиссиях установить ошибочность некоторых точек зрения.

На рис. 2 каждая точка представляет одного больного и указывает время, затраченное им на госпитализацию.

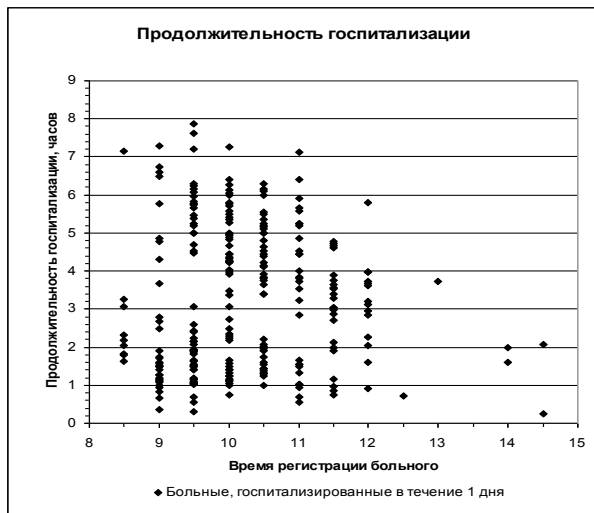


Рис. 2. Зависимость продолжительности госпитализации от времени регистрации

Видно, что продолжительность госпитализации почти не зависит от времени прихода больных, за исключением того, что пришедшие позднее не успевают госпитализироваться до перерыва (с 13 до 14 часов), что увеличивает продолжительность их госпитализации на 1 час. Но этим нельзя объяснить того, что госпитализация затягивается до 17:00 и позже. На рис. 3 и 4 показаны распределения больных по времени взятия анализа крови и его удостоверения врачом. Эти данные опровергают мнение о задержке удостоверения анализа крови врачом как причине замедления госпитализации.

Сравнение рис. 3 и 4 показывает, что процесс удостоверения анализов идет непрерывно, хотя и отстает от процесса взятия анализов в среднем на 1 час 40 мин. При этом большая часть больных первой группы поступает в отделения до 13 час.

Учитывая, что поступлению предшествует регистрация у медсестры (время которого сравним с временем первичной регистрации), можно с уверенностью сказать, что больные

не ждут результатов анализа крови. Это и понятно: на решение о госпитализации результаты анализа не влияют.



Рис. 3. Время взятия анализа крови



Рис. 4. Время удостоверения анализа крови врачом

Таким образом, ни поздний приход больного в приемное отделение, ни задержка результатов анализа крови не объясняют чрезмерно большую продолжительность госпитализации больных второй группы. Объяснение было найдено в ходе перекрестной экспертизы. Как это часто бывает в практике применения перекрестной экспертизы, результат обсуждения оказался

неожиданным для экспертов и отличным от всех предварительно выявленных мнений.

Оказалось, что большая продолжительность госпитализации больных второй группы объясняется двумя причинами.

1. Само разделение больных на две группы в процессе госпитализации объясняется тем, что часть больных (чуть меньше половины) для решения вопроса о возможности госпитализации направляется на консультацию к анестезиологу, который принимает с 14:00 до 15:00. Перенести время приема анестезиолога на утренние часы невозможно, потому что для принятия решения анестезиологу необходимы результаты анализа крови, удостоверение которых врачом заканчивается только к 15:00. Устанавливать же дежурство анестезиолога в течение всей первой половины дня явно нецелесообразно из-за непроизводительной траты его времени в этом случае.

2. Однако дело не только в анестезиологе. Продолжительность госпитализации оказывается столь большой еще и потому, что в очереди к врачам приемного отделения сталкиваются два потока больных: больные, прибывшие на плановую госпитализацию, и первичные больные (а также приехавшие без вызова или их представители), которые получают консультации по организационным вопросам (квоты, способы финансирования, перечень догоспитальных обследований, выяснение возможности досрочной госпитализации и т.д.). Эти больные с утра идут на консультации в хирургические отделения, ожидают там врача, получают консультации и где-то к 11:00 занимают очереди к врачам приемного отделения. Тем самым они резко тормозят процесс плановой госпитализации.

По результатам экспертизы администрации ИНХ были предложены как паллиативные, так и более радикальные меры для уменьшения времени ожидания госпитализации в приемном отделении. К сожалению, радикальные меры требуют привлечения дополнительного персонала. Паллиативные (но относительно легко реализуемые) меры заключаются в следующем:

1. Хотя перенос времени приема анестезиолога на утренние часы невозможен, было бы целесообразно сдвинуть его на час раньше, так чтобы совместить время готовности основной мас-

сы анализов крови не с началом, а с окончанием времени приема анестезиолога.

2. Консультирование приехавших без вызова больных и их представителей, которые приходят с результатами догоспитальных обследований, хотят удостовериться в достаточности этих результатов и выяснить ситуацию с очередью на госпитализацию, целесообразно переложить на поликлинику ИНХ. В настоящее время врачи поликлиники отказываются консультировать по бумагам, не видя самого больного.

Более радикальная мера – переложить на поликлинику работу по консультированию первичных больных по медико-организационным вопросам после получения ими принципиального согласия на лечение в соответствующем хирургическом отделении. Если взять на эту работу хотя бы одного врача (или обучить кого-то из врачей поликлиники), можно было бы существенно сократить время ожидания госпитализации.

В настоящее время администрацией ИНХ принято решение о реализации этого предложения (для этого Минздрав выделил соответствующее финансирование).

3.2. ПРЕБЫВАНИЕ БОЛЬНЫХ В ХИРУРГИЧЕСКИХ ОТДЕЛЕНИЯХ

3.2.1. ВРЕМЯ ОЖИДАНИЯ ОПЕРАЦИИ

Заведующие хирургическими отделениями активно участвуют в планировании процесса госпитализации. На свои компьютеры они получают информацию о больных, ожидающих госпитализации и имеющих на руках результаты догоспитальных обследований. Зная, когда и сколько пролеченных больных они собираются выписать, а также возможности операционного блока и примерную продолжительность операций для разных категорий больных, заведующий отделением может заранее назначить больному время госпитализации, так чтобы не допустить простаивания коек и хирургов.

Поступив в отделение, больные какое-то время находятся там в ожидании операции. При этом некоторым больным требуются дополнительные обследования, консультации и т.д.

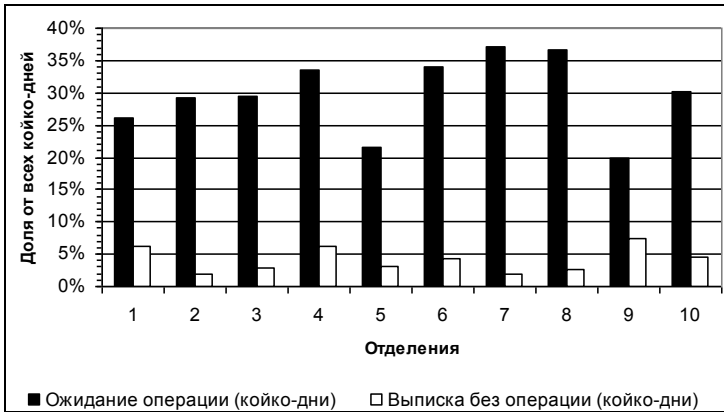
Иногда обнаруживается, что по тем или иным причинам (изменился диагноз, выявились не замеченные на стадии госпитализации сопутствующие заболевания и т.д.) операцию делать нельзя, и больного выписывают. В процессе обсуждения этой проблемы в экспертных комиссиях некоторые эксперты высказывали мнение, что потери, связанные с ожиданием операции и выпиской какого-то количества больных без операции, можно существенно сократить за счёт более тщательного планирования и осуществления госпитализации. Однако точных данных об этих потерях у них не было.

Для предоставления экспертам более точной информации по этому поводу, консалтинговой группой для каждого хирургического отделения был проведен анализ числа прооперированных и выписанных без операции больных в первый и последующие дни после поступления в отделение (за период с января по октябрь 2014 г.). Оказалось, что каждое отделение имеет свой характерный «профиль», или свое распределение времени ожидания операции и времени выписки без операции.

На рис. 5, 6 и в таблице 1 приведены сводные данные по всем отделениям, облегчающие сравнение отделений по разным показателям.

При анализе этих данных прежде всего обращают на себя внимание показатели отделения 5. Среднее число дней в ожидании операции (рис. 6), так же как и среднее число койко-дней в ожидании операции в этом отделении, значительно меньше, чем в других отделениях.

Почти все операции выполняются в первые два дня после госпитализации больного. Поэтому в процессе экспертного обсуждения возник вопрос: почему бы не распространить опыт отделения 5 на все хирургические отделения?



Койко-дней всего	64150
Койко-дней до операции	19244
Койко-дней без операции	2676

Рис. 5. Доли койко-дней в ожидании операции и без операции

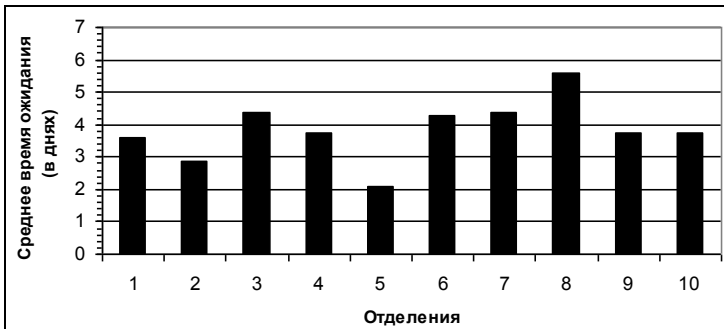


Рис.6. Среднее время ожидания операции

Таблица 1. Сводные данные за период 273 календарных дня (8190 койко-дней в каждом отделении).

Отделения	Прооперировано	Выписано без операции	Койко-дни в ожидании операции	Койко-дни прооперированных	Койко-дни выписанных без операции	Койко-дни всего	% от коечного фонда	В том числе в ожидании операции %	В том числе выписанных без операции %
1	423	66	1583	5672	377	6049	73,9	19,3	0,8
2	477	24	1462	4916	26	4942	60,3	17,9	0,3
3	424	36	1961	6437	195	6632	81,0	23,9	0,4
4	588	84	2298	6431	423	6854	83,7	28,1	1,0
5	564	39	1340	6013	192	6205	75,8	16,4	0,5
6	534	44	2424	6800	308	7108	86,8	29,6	0,5
7	607	26	2680	7059	145	7204	88,0	32,7	0,3
8	449	33	2596	6872	193	7065	86,3	31,7	0,4
9	350	48	1398	6530	521	7051	86,1	17,1	0,6
10	392	32	1502	4744	226	4970	60,7	18,3	0,4

Суть этого опыта заключается в следующем.

1. В отличие от других отделений, в компьютере отделения 5 есть не только список стоящих в очереди больных, но и план работы операционных, в которых отделение оперирует. Поэтому можно заранее назначать первым больным из очереди время операции и вызывать их с таким расчетом, чтобы они госпитализировались прямо накануне операции.

2. Чтобы составляемый таким образом план операций действительно выполнялся, зав. отделением лично обзванивает больных и выясняет их готовность к госпитализации (наличие результатов обязательных догоспитальных обследований) и возможность приехать к назначенному сроку.

Однако заведующие некоторыми другими хирургическими отделениями приводили достаточно убедительные доводы о

том, что в их отделениях невозможно оперативно планировать операции на несколько дней вперед. Во-первых, специфика отделения 5 состоит в том, что у больных этого отделения течение болезни, как правило, достаточно плавное и предсказуемое. В некоторых других отделениях состояние больных изменяется достаточно быстро. Поэтому часто приходится отменять уже назначенные операции, чтобы прооперировать тех, кому операция необходима по срочным показаниям (например, отделения 1 и 7). Черепно-мозговая травма вообще практически не прогнозируема: иногда таких больных надо оперировать с колес, а иногда требуется наблюдение за динамикой процесса, причем довольно длительное (отделение 9). Далее, многие больные требуют повторных обследований (например, МРТ), уточнения диагноза, консилиумов (отделение 8).

Даже, казалось бы, однотипные отделения (детские) имеют свою специфику, влияющую на время ожидания операции. Например, профиль отделения 1 заметно «хуже» профиля отделения 2: значительно меньше операций выполняется в первый день и значительно больше – в последующие. Вот как объясняет это различие заведующий отделением 1: «Во 2-м отделении большой процент операций (например, липома спинного мозга), которые просты (занимают около 1,5 часов) не требуют консилиума, не требуют сложной подготовки и могут быть проведены в 1-й день. У нас же, как правило, операции требуют консультации и обсуждения».

Тем не менее, вторая составляющая опыта отделения 5 – поддержание оперативной связи со стоящими в очереди больными – несомненно полезна для всех отделений и для ИНХ в целом. Например, в отделениях, в которых уделяют большое внимание контролю входного потока больных и еженедельно подают в приемное отделение списки больных, намеченных к госпитализации (отделения 1 и 8), оказывается, что половина больных из этого списка не приезжает (по разным причинам: ухудшилось состояние, не дождавшись вызова, сделали операцию в другом месте и т.д.). Это подтверждает и приёмное отделение. Несомненно, что такие незапланированные сбои входного потока больных отрицательно сказываются на текущей

работе хирургических отделений (хотя количественную оценку потерь здесь дать затруднительно).

Разумеется, нельзя требовать от заведующих отделениями, чтобы они обзванивали больных. Однако, по мнению экспертов из приёмного отделения (с которым трудно не согласиться), в каждом отделении должен быть сотрудник, поддерживающий оперативную связь с больными.

По результатам экспертизы эта рекомендация была внедрена в ИНХ и теперь в каждом отделении есть такой сотрудник.

3.2.2. ВЫПИСКА БОЛЬНЫХ БЕЗ ОПЕРАЦИИ

Пребывание в хирургических отделениях больных, которых, как потом выясняется, нельзя оперировать, крайне нежелательно: это, во-первых, непроизводительные расходы, а во-вторых, они занимают место больных, которые нуждаются в операции. Причины возникновения таких ситуаций следующие:

1) в связи с изменением течения основного заболевания операция стала нецелесообразной;

2) в ходе дополнительных обследований изменился или уточнился диагноз;

3) у пациента выявилось сопутствующее заболевание, не установленное в процессе госпитализации и делающее операцию невозможной;

4) больной в настолько тяжелом состоянии, что не выдержит наркоза.

Среди экспертов нет единого мнения по поводу относительной важности этих причин и размеров «бедствия». Например, по опыту отделения 1 главная причина – вторая. Клиническая информация, с которой приезжают больные, недостаточна, нужны дополнительные исследования и консультации (консилиум). Пример: по диагнозу у больного узловатая опухоль, а после консилиума выясняется, что диффузная и что «в неё лучше не лезть».

Многие эксперты-хирурги считают, что число случаев выписки без операций можно существенно уменьшить, если на осмотр к анестезиологу больные будут направляться не выборочно, как сейчас, а поголовно. Противоположного мнения при-

держиваются эксперты приёмного отделения: они считают, что сложившаяся практика себя оправдывает («если в одном случае из ста не осмотренный анестезиологом больной окажется неоперабельным, это нормально»). Следует отметить, что, например, для отделения 9 выписка без операции не является значимым показателем: «У нас выписанные без операции больные – это не ошибочно госпитализированные, а проходящие консервативное лечение. Дело в том, что наши больные – на грани между операцией и возможностью консервативного лечения. Если такая возможность есть, консервативное лечение предпочтительнее, у нас хирургия составляет около 60%».

3.2.3. ЭФФЕКТИВНОСТЬ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ КОЕЧНОГО ФОНДА В ХИРУРГИЧЕСКИХ ОТДЕЛЕНИЯХ

В таблице 1 были приведены сводные данные, характеризующие использование коечного фонда в хирургических отделениях.

Прежде всего отметим, что средняя по всем отделениям доля койко-дней выписанных без операции больных составляет всего 0,5% от коечного фонда, что подтверждает правоту экспертов приёмного отделения и вывода о нецелесообразности увеличения времени приема анестезиолога в приемном отделении.

Доля койко-дней больных, ожидающих операции, существенно выше и меняется в пределах от 16,4% в отделении 5 до 32,7% в отделении 7. Таким образом, некоторый резерв пропускной способности в отделениях есть и её можно повысить за счёт оперативной связи с больными. Однако на вопрос о том, насколько эта задача актуальна, можно ответить только после анализа пропускной способности операционного блока.

4. Работа операционного блока

Данные работы операционного блока приведены в таблице 2.

Таблица 2 Статистика работы операционного блока

	Операционные, количество операций															Всего	Общее	Ср. длит.
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15			
Отд 1	100	6	180	2	7	1	4	39	11		46	6	65	1	468	1673	3.6	
Отд 2	121	16	215	6	3	3	2	52	13		52	3	13	2	501	1647	3.3	
Отд 3					367	2		24	5	1	5	3	34	3	471	1804	3.8	
Отд 4								14	308		7	1	333	7	698	1900	2.7	
Отд 5					374	3	72	14			7	1	2	4	553	1840	3.3	
Отд 6			326	3	3	2	45	4			150	1	4	1	560	2278	4.1	
Отд 7							368	106	8	1	12		3	145	666	2359	3.5	
Отд 8								26	4	119	3	282	3	6	473	1387	2.9	
Отд 9		274			3		3	1	3	2	4	1	3	6	302	1290	4.3	
Отд 10										222	46	55	22	7	383	1747	4.6	
Всего	348	352	400	342	399	387	390	388	375	345	332	353	482	182				
Общее	1340	1447	1367	1480	1598	1339	1539	1256	1327	1467	1259	1074	936	495				
Ср. длит.	3.9	4.2	3.4	4.4	4	3.5	3.9	2.0	3.5	4.2	3.8	3.2	2.1	2.7				
Число окон	10	13	6	5	3	7	2	11	11	3	17	19	61					
То же, %	2.8	3.7	1.5	1.5	0.8	1.8	0.5	2.8	2.9	0.9	5.1	5.4	12.7					

В строках, соответствующих отделениям, выделенные жирным шрифтом числа указывают количество операций в операционных, преимущественно закрепленных за данными отделениями. Например, отделение 5 оперирует преимущественно в операционной 6 (374 операции).

Для оценки загруженности операционного блока было введено понятие «окно»: промежуток времени 3 часа в интервале от 9:00 до 18:30, в операционные дни (с понедельника по четверг), в течение которого операционная не работала и, теоретически, в ней можно было провести операцию. Все такие окна были найдены путём сквозного просмотра фактической загрузки каждой операционной в течение каждого дня анализируемого периода. Эффективность использования операционной оценивалась как отношение числа окон к числу проведенных за этот период операций.

В действительности операции сплошь и рядом заканчиваются в 23:00 и позже, а срочные операции проводятся по пятницам и в выходные дни. В процессе экспертизы эксперты практически единодушно констатировали, что время после 18:30 и в последние три дня недели можно рассматривать как резерв для повышения пропускной способности операционного блока только после тщательной проработки графика сменности хирургических бригад, повышения мобильности оборудования операционных для его «переброски», в случае необходимости, из одной операционной в другую и других структурно-организационных мероприятий.

Как показывает нижняя строка таблицы 2, доля окон составляет от 0,5% (операционная 7, используемая преимущественно отделением 7) до 3,7 % (операционная 2, используемая преимущественно отделением 9). Следует иметь в виду, что и эти оценки сильно завышены: лишь относительно небольшой процент операций укладывается в 3 часа. Хотя в операционных R1–R4, в которых операции проводятся под рентгеновским контролем, эта доля несколько выше (от 5,1% до 12,7%), приведенные цифры свидетельствуют о том, что в настоящее время операционные загружены почти до предела. Значит, именно операционный блок является тем звеном, которое определяет пропускную способность ИНХ в целом, и проблема повышения пропускной способности отделений за счет сокращения времени ожидания операций на сегодня не столь актуальна.

В связи с почти стопроцентной загруженностью операционного блока возникает проблема распределения операционного времени между отделениями. На эту проблему в процессе экспертизы обратил внимание заведующий отделением 8. В этом отделении проводятся трансназальные операции, которые иногда занимают целый день. Возникает дилемма: сделать одну трансназальную операцию либо несколько более коротких операций. Отделение, имея две мобильные установки для выполнения трансназальных операций, которые можно «выкатить» в любую операционную, могло бы делать вдвое больше трансназальных операций, если бы им выделяли места в других операционных. Этот частный пример показывает, что существует

общая проблема, которая пока решается стихийно: как целенаправленно управлять входным потоком больных, зная потребности в тех или иных видах операций и реальные возможности ИНХ.

5. Использование информационной системы ИНХ как «измерительного инструмента»

При реализации различных предложений по совершенствованию управления лечебным процессом, являющихся результатом многовариантной экспертизы (таких как предложенное изменение времени работы анестезиолога в приемном отделении), возникает проблема оценки результатов. Такого рода предложения можно внедрить, но не так просто оценить эффективность внедрения. Оказалось, что функционирующая в ИНХ информационная система, которая активно использовалась при подготовке материалов для многовариантной экспертизы, может служить достаточно точным инструментом для оценки результатов нововведений. Покажем это на следующем примере.

При изучении динамики госпитализации, было обнаружено, что в период с апреля по май 2014 года произошло заметное ускорение процесса госпитализации (рис. 7).

Доля больных, госпитализированных в течение первого часа после взятия анализа крови (АК), увеличилась с 20% в марте до 35% в апреле и почти до 40% в мае. Оказалось, что начиная с середины апреля по рекомендации консалтинговой группы, проводившей многовариантную экспертизу, дирекция ИНХ для ускорения работы по регистрации больных выделила приемному отделению дополнительную ставку медсестры.

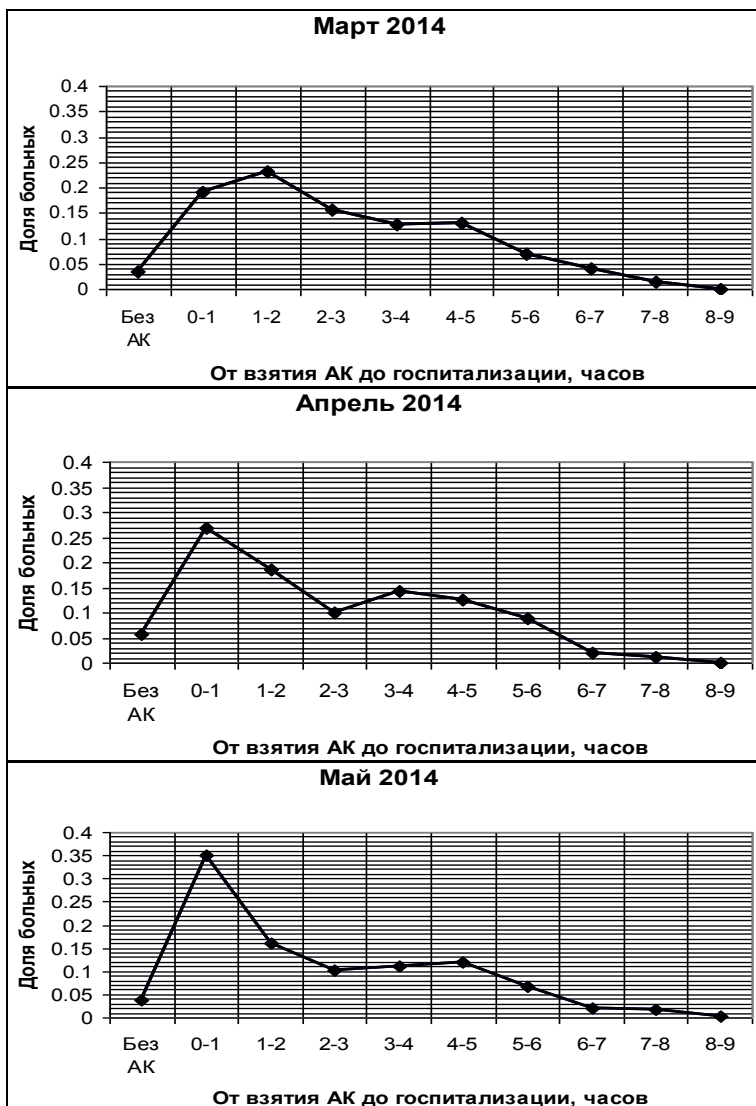


Рис. 7. Улучшение динамики госпитализации в апреле-мае 2014 г.

6. Выводы

Использование ранее не задействованных возможностей функционирующей в ИНХ информационной системы позволило получить достаточно подробные данные о работе приемного отделения, хирургических отделений и операционного блока. В частности, были получены количественные оценки времени ожидания операций в хирургических отделениях и эффективности использования коечного фонда, а также степени загрузки операционного блока. Эти оценки в некоторых случаях подтвердили, а в некоторых опровергли экспертные мнения, полученные в процессе многовариантной экспертизы. В ходе экспертизы были выяснены причины многочасовых очередей госпитализируемых больных и предложены меры по их сокращению. Было показано, что информационную систему ИНХ можно использовать как инструмент для точной оценки результатов различных нововведений.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке **РФФИ**, проекты 14-07-00463-а, 15-07-06713-а, 16-07-00896-а, 16-07-00895-а, 16-29-12880-офи, 16-29-12943-офи.

Литература

1. БОЛЬШЕВ Л.Н., СМИРНОВ Н.В. *Таблицы математической статистики*. – М.: «Наука. Физматлит», 1983. – 416 с.
2. ВЕНТЦЕЛЬ Е.С. *Теория вероятностей*. 4 издание. – М.: Наука, 1969. – 576 с.
3. ДОРОФЕЮК Ю.А., ПОКРОВСКАЯ И.В., КИСЕЛЕВА Н.Е. *Комплекс алгоритмов интеллектуального анализа сложно организованных данных при исследовании слабо формализованных систем управления* // Машинное обучение и анализ данных. – 2014. – Т. 1, №10. – С. 1423–1438.
4. ДОРОФЕЮК А.А., ПОКРОВСКАЯ И.В., ЧЕРНЯВСКИЙ А.Л. *Экспертные методы анализа и совершенствования систем управления* // Автоматика и телемеханика. – 2004. – №10. – С. 172–188.

5. ДОРОФЕЮК А.А., ЧЕРНЯВСКИЙ А.Л. *Консультативная работа по совершенствованию управления в организационных системах (методологические основы)* // Сб.: Методы и алгоритмы анализа эмпирических данных. – М.: ИПУ РАН, 1988.
6. ПАНКОВА Л.А., ПЕТРОВСКИЙ А.М., ШНЕЙДЕРМАН М.В. *Организация экспертизы и анализ экспертной информации.* – М.: Наука, 1984. – 120 с.
7. ПОКРОВСКАЯ И.В., ГОЛЬДОВСКАЯ М.Д., КИСЕЛЁВА Н.Е. *Методы многовариантной экспертизы в задачах поддержки принятия решений в социально-экономических системах управления* // Управление развитием крупномасштабных систем (MLSD'2012): Материалы Шестой международной конференции. Том I. – М.: ИПУ РАН, 2012. – С. 322–324.
8. ЧЕРНЯВСКИЙ А.Л. *Количественные методы исследования организационных систем (обзор).* I, II. // Автоматика и телемеханика. – 1978. – №2, – С. 113–135; – №3. – С. 88–108.
9. ЧЕРНЯВСКИЙ А.Л., ДОРОФЕЮК А.А., ДОРОФЕЮК Ю.А., ПОКРОВСКАЯ И.В. *Метод независимой многовариантной экспертизы в межведомственных задачах организационного управления* // Материалы 8-й Международной конференции «Управление развитием крупномасштабных систем» (MLSD'2015, Москва). – М.: ИПУ РАН, 2015. – Т.2. – С. 393–396.

PATIENTS ADMISSION PROCESS ANALYSIS IN A LARGE CLINIC BY COLLECTIVE MULTIVARIATE EXPERTISE METHODS

Alexander Chernyavsky, V.A.Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, PhD (Computer Sciences), Senior Researcher, (achern@ipu.ru).

Juliya Dorofeyuk, V.A.Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, PhD (Computer Sciences), Senior Researcher, (dorofeyuk_julia@mail.ru).

Alexander Mandel, V.A.Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Doctor of Science (Computer Sciences), Professor, Head of Laboratory, (manfoon@ipu.ru).

Irina Pokrovskaya, V.A.Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, PhD (Computer Sciences), Senior Researcher, (ivp750@mail.ru).

Alexander Dorofeyuk, V.A.Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Head of Laboratory; Institute for System Analysis of the Federal Research Center «Information and Control», RAS, Moscow, Chief Researcher; National Research University «Higher School of Economics», Moscow, Professor; Doctor of Science (Computer Sciences), Professor; (daa2@mail.ru).

Abstract: The article describes multivariate expertise methods applied to analyse the hospitalization process in a large clinic (N.N. Burdenko's Scientific Research Neurosurgery Institute of Health Ministry of Russia, as an example). More than 7000 operations are performed in the clinic every year and the end-to-end treatment process requires optimization. We consider different aspects of the treatment process: admission in the emergency department, multiple characteristics of stay in surgical wards and surgery unit itself. Our goal was to reduce the admission and surgery waiting times. Our approach was to formally organize collective expertise involving both the clinic staff and external specialists as the experts. The formal expertise procedure revealed some solutions that were difficult to foresee on the common sense basis. We use data provided by the hospital information system to evaluate

the effect of various implemented proposals. The formal collective expertise reduced the waiting time significantly and becomes a solid foundation for further optimization decisions such as hiring additional nurse.

Keywords: collective multivariate expertise, hospital admission, operation waiting time, efficiency of bed fund usage.

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии В.В. Мазаловым.*

*Поступила в редакцию 22.08.2016.
Опубликована 30.11.2016.*