

УДК 519.7

ББК Ж 50

ДИНАМИЧЕСКАЯ КОМПЕНСАЦИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ В УСЛОВИИ НАСЫЩЕНИЯ СИГНАЛА УПРАВЛЕНИЯ¹

Фуртат И. Б.²

*(Институт проблем машиноведения РАН,
Университет ИТМО, Санкт-Петербург)*

Предложена схема динамической компенсации возмущений для линейных объектов со скалярными входами и выходами в условиях параметрической неопределенности и внешних ограниченных возмущений. Рассмотрена задача слежения выхода объекта за эталонным сигналом без измерения производных регулируемой переменной. Схема управления обобщена на случай насыщения сигнала регулирования. Приведены условия на параметры объекта и закона управления, при выполнении которых система управления будет работоспособной. Рассмотрен пример моделирования, иллюстрирующий работоспособность приведенной схемы.

Ключевые слова: робастное управление, компенсация возмущений, насыщение сигнала управления.

¹ Результаты раздела 2 получены в ИПМаш РАН при поддержке РФФ (проект №14-29-00142). Результаты разделов 4 и 5 получены при поддержке гранта Президента Российской Федерации (договор №14.W01.16.6325-МД (МД-6325.2016.8)). Другие исследования частично поддержаны грантами РФФИ (№16-08-00282, №16-08-00686), МОН РФ (проект 14.Z50.31.0031) и Правительства РФ (074-U01).

² Игорь Борисович Фуртат, доктор технических наук, доцент (Санкт-Петербург, Большой пр-т В.О., д. 61, тел. (812) 321-47-66, cainenash@mail.ru).

1. Введение

Одним из эффективных способов управления объектами в условиях неопределенностей и возмущений является робастное управление с использованием наблюдателей с большим коэффициентом усиления (high-gain observer). В [1–3, 8] для оценки производных выходного сигнала объекта используются различные модификации данных наблюдателей. В [2] на базе результата [1] получена простая схема управления, представленная последовательным соединением апериодических и форсирующих звеньев. В [6] рассмотрено решение задачи компенсации возмущений с использованием динамического вспомогательного контура и наблюдателя, основанного на последовательном соединении реальных дифференцирующих звеньев. Результат [6] позволил получить в [7] простой регулятор, представленный передаточной функцией, знаменатель которой содержит нулевой корень и малый параметр.

Известно, что на практике необходимо учитывать ограничения на сигнал управления. Значение сигнала управления существенно зависит от начальных условий и параметров объекта управления, а также от параметров системы управления. На практике несоблюдение ограничений на сигнал управления может привести к невыполнению поставленной цели или потере устойчивости замкнутой системы.

Впервые задача управления в условиях неопределенности и насыщения сигнала управления была рассмотрена в [15]. Однако в [15] полученные результаты, касающиеся вопроса насыщения, не имеют строгого доказательства. В [6] на этапе моделирования системы, зная множество возможных значений параметров объекта, предлагалась методика выбора параметров в регуляторе. В [19] для решения задачи функция насыщения сигнала управления заменялась гиперболическим тангенсом от сигнала управления. В [18] предложено адаптивное управление объектами в условии неопределенности, где для частичной компенсации ограничений на сигнал управления параллельно ошибке слежения вводился вспомогательный контур с настраиваемым параметром. В [20] разработан статический

закон управления при условии, что известна модель генератора возмущений. Получены линейные матричные неравенства, выполнение которых гарантирует устойчивость замкнутой системы. В [17] рассмотрено решение задачи управления линейными объектами при использовании H_∞ -подхода. Для обеспечения устойчивости замкнутой системы достаточно решения билинейных матричных неравенств.

Наиболее часто используемым методом управления в условиях насыщения сигнала управления является метод «anti-windup» [9, 11–14, 17]. Если в схеме регулирования используются интегральные составляющие, то в условиях насыщения сигнала управления переменные интегрирующего звена могут быть неограниченными (windup) [9, 12]. В данном случае работоспособность системы управления достигается введением контура, предотвращающего рост параметров в регуляторе (anti-windup, [9, 11–14, 17]).

В работах [9, 11–15, 17–20] используется принцип подавления возмущений за счет сильной обратной связи. В условиях ограничений сигнала управления использование сильной обратной связи может привести к потере устойчивости замкнутой системы. В отличие от [9, 11–15, 17–20], в представленной статье построение схемы управления основано на принципе компенсации возмущений, что позволит разработать закон управления, значение которого противоположно значению неопределенностей. В отличие от [2, 6, 7], в данной статье предложен новый закон динамической компенсации возмущений, частными реализациями которого являются решения [2, 6, 7]. При этом структура нового закона управления напрямую не зависит от динамического порядка объекта, что позволит управлять структурно неопределенными объектами.

В статье рассмотрена задача управления линейными динамическими объектами со скалярными входами и выходами в условиях параметрической неопределенности, внешних возмущений, насыщения сигнала управления и недоступности измерению производных входных и выходных сигналов. Вначале синтезируется алгоритм, обеспечивающий робастность

замкнутой системы по отношению к параметрическим неопределенностям и внешним возмущениям без учета ограничений на функцию управления. Далее полученный результат обобщается для управления в условии насыщения регулирующего сигнала. Приведены условия на параметры модели объекта, эталонной модели и регулятора, при выполнении которых система управления будет работоспособной. Рассмотрен пример моделирования, иллюстрирующий работоспособность предлагаемой схемы.

2. Постановка задачи

Рассмотрим объект управления, модель которого описывается уравнением

$$(1) \quad Q(p)y(t) = R(p)u(t) + f(t),$$

где $y(t) \in R$ – выход объекта; $u(t) \in R$ – сигнал управления; $f(t) \in R$ – неконтролируемое ограниченное возмущение; $Q(p)$, $R(p)$ – линейные дифференциальные операторы с неизвестными коэффициентами, $\deg Q(p) = n$ и $\deg R(p) = m$; $p = d/dt$ – оператор дифференцирования.

Цель управления состоит в поиске закона управления, обеспечивающего выполнение условия

$$(2) \quad |y(t) - y_m(t)| < \delta \text{ при } t > T,$$

где $y_m(t)$ – эталонный сигнал такой, что $|y_m^{(j)}(t)| \leq \bar{y}_m^j$; $y_m^{(j)}(t)$ – j -я производная функции $y_m(t)$, $j = 1, \dots, n$; $\delta > 0$ – точность регулирования; $T > 0$ – время, по истечении которого должно быть выполнено неравенство (2). Дополнительно условию (2), потребуем выполнение условия

$$(3) \quad |u(t)| \leq \bar{u},$$

где $\bar{u} > 0$ – известная величина. Также необходимо, чтобы все переменные в замкнутой системе были ограниченными.

Сформулированную задачу будем решать при следующих предположениях.

Предположения.

1. Неизвестные коэффициенты операторов $Q(p)$, $R(p)$ принадлежат известному ограниченному множеству Ξ .

2. Полином $R(\lambda)$ – гурвицев, где λ – комплексная переменная.

3. Известны числа \bar{f} и \bar{y}_m , где $|f(t)| \leq \bar{f}$ и $\sqrt{\sum_{j=1}^n (\bar{y}_m^j)^2} \leq \bar{y}$.

3. Синтез закона управления без учета насыщения сигнала управления

Рассмотрим сначала синтез алгоритма динамической компенсации возмущений без учета ограничений (3). Представим операторы $Q(p)$ и $R(p)$ в виде

$$(4) \quad R(p) = R_0(p) + \Delta R(p), \quad Q(p) = Q_0(p) + \Delta Q(p),$$

где $Q_0(p)$, $R_0(p)$ – произвольные известные линейные дифференциальные операторы, $\deg Q_0(p) \geq n$, $\deg R_0(p) \leq m$; многочлены $Q_0(\lambda)$ и $R_0(\lambda)$ – гурвицевы; $\Delta Q(p)$ и $\Delta R(p)$ – линейные дифференциальные операторы с неизвестными коэффициентами, $\deg \Delta Q(p) \leq \deg Q_0(p)$, $\deg \Delta R(p) \leq m$. Разложение (4), независимое от структуры эталонной модели, приведено в [5]. В частности, как отмечалось в [4, 5], полиномы $Q_0(\lambda)$ и $R_0(\lambda)$ можно выбирать согласно желаемому качеству переходных процессов в эталонной модели, т.е. $Q_0(p)y_m(t) = R_0(p)r(t)$, где $r(t)$ – гладкое задающее воздействие и $\deg Q_0(p) - \deg R_0(p) = n - m$.

Подставим (4) в (1) и составим уравнение для ошибки слежения $e(t) = y(t) - y_m(t)$ в виде

$$(5) \quad Q_0(p)e(t) = R_0(p)u(t) - \Delta Q(p)y(t) + \Delta R(p)u(t) - Q_0(p)y_m(t) + f(t).$$

Обозначим $\varphi(t) = f(t) - \Delta Q(p)y(t) + \Delta R(p)u(t) - Q_0(p)y_m(t)$ и перепишем уравнение (5) как

$$(6) \quad Q_0(p)e(t) = R_0(p)u(t) + \varphi(t).$$

Из структуры $\varphi(t)$ видно, что она содержит информацию о параметрической неопределенности и внешнем возмущении в (1). Введем оценку $\hat{\varphi}(t)$ функции $\varphi(t)$ в виде

$$(7) \quad \hat{\varphi}(t) = Q_0(p)e(t) - \alpha(p)R_0(p)u(t),$$

где $\alpha(\lambda)$ – гурвицев полином порядка $\gamma = \deg Q_0(p) - \deg R_0(p)$.

Зададим сигнал управления $u(t)$ как

$$(8) \quad u(t) = -\frac{1}{R_0(p)} \hat{\varphi}(t).$$

Подставив (7) в (8), перепишем (8) в виде

$$(9) \quad u(t) = -(1 - \alpha(p))^{-1} R_0^{-1}(p) Q_0(p) e(t).$$

Сформулируем утверждение, при выполнении условий которого закон управления (9) обеспечит выполнение целевого условия (2).

Утверждение 1. Пусть выполнены условия Предположений 1–3. Тогда существуют $\alpha(\lambda)$, $R_0(\lambda)$ и $Q_0(\lambda)$ такие, что для любых параметров (1) из класса Ξ закон управления (9) обеспечивает робастную устойчивость замкнутой системы и выполнение целевого условия (2).

Доказательство Утверждения 1 приведено в Приложении.

Замечание 1. Закон управления (9) не требует точного знания порядков операторов $Q(p)$ и $R(p)$. Поэтому, закон управления (9) работоспособен для класса линейных структурно неопределенных объектов (см., например, [4, 5]).

Замечание 2. Если в объекте (1) $\alpha(p) = const$, то получим результат, подобный [8]; если $\alpha(p) = 1 - (Tp + 1)^{\gamma}$, где $T > 0$, то получим результат [2]. При $\alpha(p) = 2 - (\mu p + 1)^{\gamma}$, где $\mu > 0$ – достаточно малое число, получим результат [6, 7].

4. Структура закона управления в условии насыщения входного сигнала

Рассмотрим теперь решение задачи при дополнительном условии (3). Сформируем закон управления $u(t)$ в виде

$$(10) \quad u(t) = \frac{1}{1 + \sigma} \left(u_c(t) + \sigma \tilde{u} \operatorname{sat} \left(\frac{u_c(t)}{\tilde{u}} \right) \right),$$

$$(11) \quad u_c(t) = -(1 - \alpha(p))^{-1} R_0^{-1}(p) Q_0(p) e(t),$$

где $\sigma > 0$, $0 < \tilde{u} < \bar{u}$. Уравнение (10) необходимо для управления в условиях ограничений (3). В Приложении будет показано, что структура (10) также позволяет получить условия работоспособности синтезируемого закона управления.

Выражение (11) определяет сигнал компенсации параметрических и внешних возмущений в объекте (1).

Замечание 4. Уравнение (10) является аппроксимацией функции насыщения при достаточно большом значении σ . Покажем это. Из (10) следует, что при $|u_c(t)| \leq \tilde{u}$ имеем $u(t) = u_c(t)$, при $|u_c(t)| > \tilde{u}$ следует, что

$$u(t) = \frac{1}{1+\sigma} (u_c(t) + \sigma \tilde{u} \operatorname{sgn}(u_c(t))).$$
 Тогда при $\sigma < \infty$ величина $|u(t)|$ может принимать значения, больше чем \tilde{u} . Однако при $\sigma \rightarrow \infty$ имеем $u(t) \rightarrow \tilde{u} \operatorname{sat}\left(\frac{u_c(t)}{\tilde{u}}\right)$. Значит, при достаточно больших σ величину \tilde{u} можно выбирать достаточно близкой к \bar{u} . Так, при $\tilde{u} = \bar{u}$ и $\sigma \rightarrow \infty$ имеем $u(t) \rightarrow \bar{u} \operatorname{sat}\left(\frac{u_c(t)}{\bar{u}}\right)$. В дальнейшем будет

получено условие выбора величины σ в (10) для обеспечения $|u(t)| \leq \bar{u}$.

Замечание 5. Из (10) видно, что коэффициент σ можно выбирать из условия $\sigma \in (-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$. Однако ради простоты синтеза системы управления положим в (10) $\sigma > 0$.

Перед формулировкой утверждения введем обозначения:

$$W_1 = \left\| Q_0^{-1}(\lambda) R_0(\lambda) (1 - \alpha(\lambda)) \right\|, \quad W_2 = \left\| Q_0^{-1}(\lambda) \right\|,$$

$$W_3 = \sup_{\Xi} \left\| Q_0^{-1}(\lambda) \Delta Q(\lambda) \right\|, \quad W_4 = \sup_{\Xi} \left\| Q_0^{-1}(\lambda) Q(\lambda) \right\|,$$

$$W_5 = \sup_{\Xi} \left\| Q_0^{-1}(\lambda) R(\lambda) \right\|, \quad W_6 = \left\| (1 - \alpha(\lambda))^{-1} R_0^{-1}(\lambda) Q_0(\lambda) \right\|,$$

$$\varepsilon(t) = \left[e(t), \dot{e}(t), \dots, e^{(n)}(t) \right]^T.$$

Здесь и далее под $\|W(\lambda)\|$ будем понимать H_∞ -норму передаточной функции $W(\lambda)$, т.е. $\|W(\lambda)\| = \sup_{\operatorname{Re} \lambda \geq 0} \|W(\lambda)\|_2$.

Сформулируем утверждение, при выполнении условий которого закон управления (10), (11) обеспечит выполнение

условий (2), (3) и ограниченность всех сигналов в замкнутой системе.

Утверждение 2. Пусть выполнены условия Утверждения 1. Тогда при

$$(12) |\varepsilon(0)| \leq W_1 \bar{u},$$

$$(13) \begin{aligned} W_2 \bar{f} + W_4 \bar{y}_m &\leq (W_1 - W_3 W_1 - W_5) \bar{u}, \\ W_1 - W_3 W_1 - W_5 &> 0 \end{aligned}$$

$$(14) \sigma \geq \frac{\bar{u} + W_6 (W_2 \bar{f} + W_4 \bar{y}_m + (W_3 W_1 + W_5) \bar{u})}{\bar{u} - \tilde{u}}$$

система управления (10), (11) обеспечит ограниченность сигналов в замкнутой системе и выполнение целевого условия (2) с точностью

$$(15) \delta = W_2 \bar{f} + W_4 \bar{y}_m + (W_3 W_1 + W_5) \bar{u}.$$

Доказательство Утверждения 2 приведено в Приложении.

Для иллюстрации полученных результатов рассмотрим численный пример.

5. Пример

Рассмотрим объект управления, динамические процессы в котором описываются уравнением

$$(16) (p^3 - q_3 p^2 - q_2 p - q_1) y(t) = ru(t) + f(t).$$

Множество Ξ задано следующими неравенствами: $-1 \leq q_1 \leq 2$, $-4 \leq q_2 \leq -3$, $-0,5 \leq q_3 \leq 1$, $1 \leq r < 20$ и $\bar{f} = 0,4$. Цель управления состоит в обеспечении условий (2), (3), где $\bar{u} = 1$.

Выберем $Q_0(p) = (p + 1)^3$, $R_0(p) = 1$, $\alpha(p) = 2 - (0,01p + 1)^3$ и $\tilde{u} = 0,97$. Согласно (10) и (11) сформируем систему управления, представленную следующими уравнениями:

$$(17) \begin{aligned} u_c(t) &= -\frac{(p+1)^3}{(0,01p+1)^3 - 1} e(t), \\ u(t) &= \frac{1}{1+\sigma} \left(u_c(t) + 0,97\sigma \operatorname{sat} \left(\frac{u_c(t)}{0,97} \right) \right). \end{aligned}$$

Принимая во внимание множество Ξ , воспользуемся условиями (12)–(14): $|\varepsilon(0)| < 1,15 \cdot 10^{-2}$, $\bar{y}_m < 0,21$, $\sigma > 2,3 \cdot 10^8$. Как отмечалось, эти условия достаточно грубые. Результаты моделирования показали, что система управления будет работоспособной, например, при $\bar{y}_m = 0,4$, $|\varepsilon(0)| \leq 0,1\sqrt{3}$ и $\sigma = 10^7$. Положим $\sigma = 10^7$. Рассмотрим объект управления (16) со следующими параметрами: $q_1 = -1$, $q_2 = -4$, $q_3 = 1$, $r = 1$. $f(t) = 0,1 + 0,3\sin t$, $y(0) = 0,1$, $\dot{y}(0) = 0,1$, $\ddot{y}(0) = 0,1$. Эталонный сигнал $y_m(t)$ изображен на рис. 1а. На рис. 1б представлены результаты моделирования по $e(t)$, на рис. 2 – по $u(t)$.

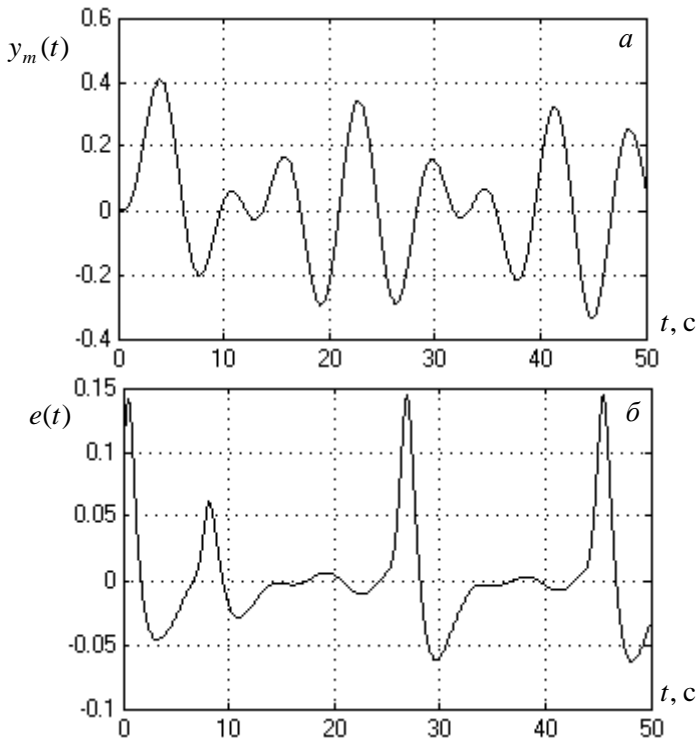


Рис. 1. Переходные процессы по $y_m(t)$ и $e(t)$

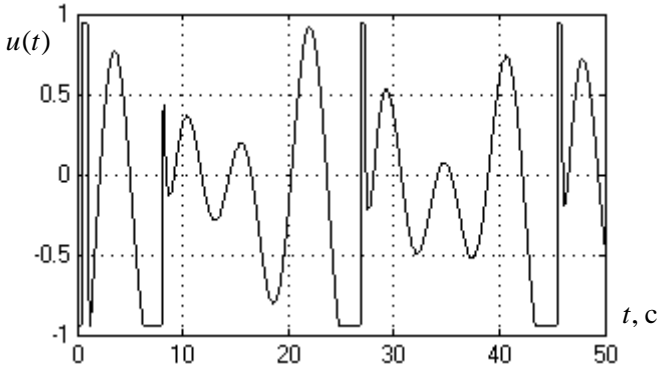


Рис. 2. График сигнала управления $u(t)$

Анализ результатов моделирования показал, что замкнутая система робастна по отношению к внешним возмущениям и параметрической неопределенности из заданного класса Ξ . В системе управления с начала ее функционирования динамическая ошибка не превышает значения 0,15. Из рис. 2 видно, что $u(t)$ находится в заданном отрезке $[-1; 1]$, тогда как без использования (17) (т.е. при $u(t) = u_c(t)$, см. [5, 6]) сигнал $u(t)$ в начальный момент времени достигает значения -10^4 , и только на 0,2 (с) $u(t)$ входит в отрезок $[-1,12; 1,12]$, что недопустимо по условию задачи.

Моделирование показало, что для обеспечения гурвицевости многочлена $P(\lambda)$ коэффициенты оператора $\alpha(p)$ должны быть достаточно малыми, а также необходимо выполнение условия $0 << \|1/\alpha(\lambda)\|_{\infty} \leq 1$. Стоит отметить, что вместо рационального оператора $\alpha(p)$ можно также использовать дробно-рациональные операторы или звено запаздывания.

6. Заключение

В статье рассмотрен синтез системы управления для линейных динамических объектов со скалярными входами-выходами в условиях параметрической неопределенности, внешних возмущений и насыщения регулирующего сигнала.

Предложена схема управления, обобщающая результаты [2, 6, 7] на случай структурной неопределенности модели объекта и возможности выбора структуры закона управления. Показано, что предложенный закон управления обеспечивает компенсацию параметрических и внешних возмущений. На базе функции, аппроксимирующей насыщение, предложен алгоритм управления в условиях ограничений на регулируемый сигнал. В отличие от [9, 11–15, 17–20], в статье получены условия на параметры объекта управления и регулятора, при выполнении которых схема управления будет работоспособной. Точность регулирования в установившемся режиме зависит от параметров модели объекта управления, закона управления и границ насыщения регулирующего сигнала. Приведены результаты моделирования, иллюстрирующие работоспособность схемы управления. Доказательство работоспособности закона управления базируется на лемме [10, 16], обобщенной для полиномов произвольного порядка.

7. Приложение

Доказательство утверждения 1. Подставим (9) в (5), и, принимая во внимание структуру функции $\varphi(t)$ и разложение (4), перепишем (5) в виде

$$Q(p)e(t) = -R(p)(1 - \alpha(p))^{-1} R_0^{-1}(p) Q_0(p)e(t) - Q(p)y_m(t) + f(t).$$

Преобразуем последнее уравнение к виду

$$P(p)e(t) = (1 - \alpha(p))R_0(p)(f(t) - Q(p)y_m(t)),$$

где $P(p) = (1 - \alpha(p))R_0(p)Q(p) + R(p)Q_0(p)$. Очевидно, что замкнутая система устойчива, если полином $P(\lambda)$ гурвицев для любых значений параметров объекта (1) из множества Ξ . Покажем, что существуют $\alpha(\lambda)$, $R_0(\lambda)$ и $Q_0(\lambda)$ такие, что будет обеспечена гурвицевость полинома $P(\lambda)$. Для этого сформулируем вспомогательную лемму.

Лемма. Пусть заданы многочлены $D(\lambda)$, $T(\lambda)$ порядков w и l соответственно. Тогда существуют многочлены $K(\lambda)$ и $G(\lambda)$

порядков $k \geq 0$ и $g \geq w - 1$ такие, что может быть получен произвольный многочлен $M(\lambda)$ порядка $\mu = \max \{w + k, l + g\}$, который определен следующим соотношением:

$$(П.1) \quad M(\lambda) = D(\lambda)K(\lambda) + G(\lambda)T(\lambda).$$

Доказательство леммы. Рассмотрим многочлены $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ порядков $l + z + \mu$ и $w + z + \mu$ ($z \geq 0$) соответственно, которые обеспечивают выполнение следующего условия:

$$(П.2) \quad D(\lambda)A(\lambda) + B(\lambda)T(\lambda) = M(\lambda),$$

Представив $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ в виде $A(\lambda) = \bar{A}(\lambda)M(\lambda)$ и $B(\lambda) = M(\lambda)\bar{B}(\lambda)$, где $\deg \bar{A}(\lambda) = l + z$, $\deg \bar{B}(\lambda) = w + z$, перепишем (П.2) в виде

$$(П.3) \quad D(\lambda)\bar{A}(\lambda)M(\lambda) + M(\lambda)\bar{B}(\lambda)T(\lambda) = M(\lambda).$$

Преобразуем $M(\lambda)\bar{B}(\lambda)$ как

$$(П.4) \quad M(\lambda)\bar{B}(\lambda) = D(\lambda)N(\lambda) + G(\lambda),$$

где $\deg N(\lambda) = \mu + z$. Подставив (П.4) в (П.3), получим

$$(П.5) \quad D(\lambda)[\bar{A}(\lambda)M(\lambda) + N(\lambda)T(\lambda)] + G(\lambda)T(\lambda) = M(\lambda).$$

Так как $\deg \bar{A}(\lambda)M(\lambda) = \deg N(\lambda)T(\lambda) \geq \deg K(\lambda)$, то выберем $\bar{A}(\lambda)$, $\bar{B}(\lambda)$ такими, что $\bar{A}(\lambda)M(\lambda) + N(\lambda)T(\lambda) = K(\lambda)$. Следовательно, соотношение (П.1) выполнено. Лемма доказана.

Лемма является обобщением Утверждения 1 в [10] и Леммы 2 в [16]. В [10, 16] рассматриваются многочлены $K(\lambda)$ и $G(\lambda)$ такие, что $\deg K(\lambda) = \deg G(\lambda) = w - 1$. Данные условия сужает класс разрабатываемых схем управления. Поскольку в лемме $\deg K(\lambda) = k \geq 0$ и $\deg G(\lambda) = g \geq w - 1$, то лемму можно применять к построению алгоритмов управления для структурно неопределенных объектов.

Согласно лемме существуют $\alpha(\lambda)$, $Q_0(\lambda)$, $R_0(\lambda)$ такие, что можно получить произвольный многочлен $P(\lambda)$, а, следовательно, обеспечить гурвицевость многочлена $P(\lambda)$. Соответствующим выбором $\alpha(\lambda)$, $Q_0(\lambda)$, $R_0(\lambda)$ можно обеспечить требуемое значение δ в целевом условии (2).

Доказательство утверждения 2. Рассмотрим два случая.

1. Предположим, что в процессе функционирования системы $|u_c(t)| \leq \tilde{u}$. Тогда из (10) следует, что $u(t) = u_c(t)$. Значит, будут выполнены условия утверждения 1. Выясним, при каких параметрах объекта и системы управления первый случай будет справедлив. Перепишем (5) в виде

$$(П.6) \quad e(t) = -Q_0^{-1}(p)R_0(p)(1 - \alpha(p))u_c(t).$$

Оценим (П.6) как $|e(t)| \leq W_1|u_c(t)| \leq W_1\tilde{u}$. Так как $|e(t)| \leq |\varepsilon(t)|$, то потребуем, чтобы было выполнено условие

$$(П.7) \quad |\varepsilon(0)| \leq W_1\tilde{u}.$$

Преобразуем уравнение (5) к виду

$$(П.8) \quad e(t) = Q_0^{-1}(p) \times \\ \times [f(t) - \Delta Q(p)e(t) - Q(p)y_m(t) + R(p)u(t)].$$

Оценим правую часть (П.8) как

$$(П.9) \quad Q_0^{-1}(p)[f(t) - \Delta Q(p)e(t) - Q(p)y_m(t) + R(p)u(t)] \leq \\ \leq W_2\bar{f} + W_3W_1\tilde{u} + W_4\bar{y}_m + W_5\tilde{u}.$$

Принимая во внимание $|e(t)| \leq W_1\tilde{u}$ и (П.9), потребуем выполнение условия

$$(П.10) \quad W_2\bar{f} + W_3W_1\tilde{u} + W_4\bar{y}_m + W_5\tilde{u} \leq W_1\tilde{u}.$$

Тогда из (П.10) следуют верхние оценки на \bar{f} и \bar{y}_m в виде

$$(П.11) \quad W_2\bar{f} + W_4\bar{y}_m \leq (W_1 - W_3W_1 - W_5)\tilde{u}, \\ W_1 - W_3W_1 - W_5 > 0.$$

В результате при $|u_c(t)| \leq \tilde{u}$ и при выполнении условий утверждения 1, (П.7) и (П.11) целевое условие (2) будет выполнено.

2. Рассмотрим случай, когда

$$(П.12) \quad \tilde{u} < |u_c(t)| \leq \bar{u}.$$

Так как $|e(t)| \leq |\varepsilon(t)|$ и $|u_c(t)| \leq \bar{u}$, то с учетом (П.7) потребуем, чтобы было выполнено условие (12). Оценим правую часть (П.8) как

$$(П.13) \quad Q_0^{-1}(p)[f(t) - Q(p)y_m(t) - \Delta Q(p)e(t) + R(p)u(t)] \leq \\ \leq W_2 \bar{f} + W_4 \bar{y}_m + (W_3 W_1 + W_5) \bar{u}.$$

Из (П.13) следует (15).

Подставив (П.13) в условие $|e(t)| \leq W_1 \bar{u}$, получим

$$(П.14) \quad W_2 \bar{f} + W_4 \bar{y}_m + (W_3 W_1 + W_5) \bar{u} \leq W_1 \bar{u}.$$

Тогда из (П.14) следуют оценки (13).

В результате при $|u_c(t)| \leq \bar{u}$ и выполнении условий утверждения 1 и оценок (12), (13) будет выполнено целевое условие (2). Результирующие оценки (12), (13) следуют из того, что правые части (12) и (13) меньше, чем правые части (П.7) и (П.11) соответственно.

Теперь определим оценку для коэффициента σ , при котором $|u_c(t)| \leq \bar{u}$. Для этого оценим (10) как

$$\frac{1}{1+\sigma} \left(u_c(t) + \sigma \tilde{u} \operatorname{sat} \left(\frac{u_c(t)}{\tilde{u}} \right) \right) \leq \bar{u}.$$

Разрешим последнее неравенство относительно σ .

$$\sigma \geq \frac{\bar{u} - u_c(t)}{\bar{u} - \tilde{u} \operatorname{sat} \left(\frac{u_c(t)}{\tilde{u}} \right)}.$$

Оценим сверху правую часть последнего неравенства в виде

$$(П.15) \quad \frac{\bar{u} - u_c(t)}{\bar{u} - \tilde{u} \operatorname{sat} \left(\frac{u_c(t)}{\tilde{u}} \right)} \leq \frac{\bar{u} + |u_c(t)|}{\bar{u} - \tilde{u}} \leq \frac{\bar{u} + W_1 |e(t)|}{\bar{u} - \tilde{u}}.$$

С учетом (П.15) и (15) получим результирующую оценку для σ в виде (14).

Очевидно, что оценки (12)–(15) достаточно грубые, но из них видно, что существуют определенные значения параметров объекта, эталонной модели и регулятора, при которых в условиях насыщения сигнала управления можно обеспечить выполнение целевых условий (2) и (3).

Литература

1. БОБЦОВ А.А. *Синтез закона управления для стабилизации нелинейной системы по измерениям выхода* // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2004. – №3. – С. 40–45.
2. БОБЦОВ А.А., ШАВЕТОВ С.В. *Управление по выходу линейным параметрически неопределенным объектом в условиях возмущающих воздействий и неучтенной динамики* // Научно-технический вестник Санкт-Петербургского государственного университета информационных технологий, механики и оптики. – 2011. – №1(71). – С. 33–39.
3. МИРОШНИК И.В., НИКИФОРОВ В.О., ФРАДКОВ А.Л. *Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами*. – СПб: Наука, 2000. – 549 с.
4. ФУРТАТ И.Б., ЦЫКУНОВ А.М. *Адаптивное управление объектами с неизвестной относительной степенью* // Автоматика и телемеханика. – 2010. – №6. – С. 109–118.
5. ФУРТАТ И.Б., ЦЫКУНОВ А.М. *Робастное управление нестационарными нелинейными структурно неопределенными объектами* // Проблемы управления. – 2008. – №5. – С. 2–7.
6. ЦЫКУНОВ А.М. *Алгоритм робастного управления линейными динамическими объектами по выходу* // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2010. – №3. – С. 9–14.
7. ЦЫКУНОВ А.М. *Алгоритм робастного управления нестационарным линейным объектом с компенсацией возмущений* // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2008. – №4. – С. 33–40.
8. ATASSI A.N., KHALIL H.K. *A separation principle for the stabilization of class of nonlinear systems* // IEEE Trans. on Automat. Control. – 1999. – Vol. 44, No. 9. – P. 1672–1687.
9. EDWARDS C., POSTLETHWAITE I. *Anti-windup and Bumpless-transfer Schemes* // Automatica. – 1998. – Vol. 34, No. 2. – P. 199–210.

10. FEUER A., MORSE A.S. *Adaptive control of single-input, single-output linear systems* // IEEE Trans. on Automat. Control. – 1978. – Vol. AC-23, No. 4. – P. 557–569.
11. KANEKO K., OHISHI K. *Anti-windup robust controller considering motor dynamics for speed servo system* // IEEE Int. Conference on Mechatronics (ICM-2013), Vicenza, VI, Italy. – 2013. – P. 694–699.
12. KAPASOURIS P., ATHANS M. *Multivariable Control Systems with Saturating Actuators Antireset Windup Strategies* // American Control Conf. – Boston. – 2004. – P. 1579–1584.
13. LEONOV G.A., ANDRIEVSKII B.R., KUZNETSOV N.V., POGROMSKII A.YU. *Aircraft Control with Anti-Windup Compensation* // Differential Equations. – 2012. – Vol. 48, No. 13. – P. 1700–1720.
14. LOZIER J.C. *A steady-state approach to the theory of saturable servo systems* // IRE Trans. on Automatic Control. – 1956. – May. – P. 19–39.
15. MONOPOLI R. *Adaptive Control for Systems for Hard Saturation* // 14th IEEE Conf. on Decision and Control. – Houston, TX. – 1975. – P. 841–842.
16. NARENDRA K.S., VALAVANI L.S. *Stable Adaptive Controller Design – Direct Control* // IEEE Trans. on Automat. Control. – 1978. – Vol. AC-23, No. 4. – P. 570–583.
17. PATRA S., SEN S., RAY G. *Robust control of uncertain LTI plant with input saturation constraint: H_∞ -loop-shaping approach* // Int. J. of Systems Science. – 2010. – Vol. 41, No. 11. – P. 1337–1351.
18. SCHWAGER M., ANNASWAMY A.M. *Direct Adaptive Control of Multi-Input Plants with Magnitude Saturation Constrains* // 44th IEEE Conf. on Decision and Control, and the European Control Conf. – Seville, Spain. – 2005. – P. 783–788.
19. WEN C., ZHOU J., LIU Z., SU H. *Robust Adaptive Control of Uncertain Nonlinear Systems in the Presence of Input Saturation and External Disturbance* // IEEE Trans. on Automatic Control. – 2011. – Vol. 56, No. 7. – P. 1672–1678.

20. YANG Q., CHEN M. *Robust Control for Uncertain Linear System Subject to Input Saturation* // J. of Applied Mathematics. – 2014. –Vol. 2014. – Article ID 803842. – 12 p.

ALGORITHM FOR DYNAMIC COMPENSATION OF DISTURBANCES UNDER INPUT SIGNAL SATURATION

Igor Furtat, Institute of Problems of Mechanical Engineering Russian Academy of Sciences, ITMO University, Dr.Sc., assistant professor (cainenash@mail.ru).

Abstract: The new algorithm for dynamic compensation of disturbances for linear plants with single input and single output under conditions of parametric uncertainty and external bounded disturbances is proposed. We consider the problem of tracking the plant output to the reference signal without measuring output derivatives. The algorithm is generalized to the given constraints on the control signal. We formulate the conditions depending on the parameters of the plant and the control signal which allow to ensure the stability of the closed loop system. The simulation results illustrate efficiency of the proposed algorithm.

Keywords: robust control, disturbances compensation, control signal constraints.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии А.П. Курдюковым.

*Поступила в редакцию 09.02.2016.
Опубликована 31.01.2017.*