

Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН

УПРАВЛЕНИЕ БОЛЬШИМИ СИСТЕМАМИ

Выпуск 65
Январь 2017

**СБОРНИК
ТРУДОВ**

ISSN 1819-2467

Регистрационный номер Эл. №ФС77-44158 от 09 марта 2011 г.

Москва – 2017

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова

**УПРАВЛЕНИЕ
БОЛЬШИМИ
СИСТЕМАМИ**

СБОРНИК ТРУДОВ

Выпуск 65

Москва – 2017

КООРДИНАЦИОННЫЙ СОВЕТ

Академики РАН: Васильев С.Н., Емельянов С.В., Куржанский А.Б., Федосов Е.А., Черноушко Ф.Л.; члены-корреспонденты РАН: Желтов С.Ю., Каляев И.А., Пархоменко П.П., Попков Ю.С.; д-ра техн. наук: Дорофеюк А.А., Кузнецов О.П., Кульба В.В., Лотоцкий В.А., Павлов Б.В., Поляк Б.Т., Рутковский В.Ю.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор: член-корр. РАН Новиков Д.А. **Зам. главного редактора:** д-р физ.-мат. наук Губко М.В. **Отв. секретарь:** канд. техн. наук Базенков Н.И. **Редактор:** канд. техн. наук Квинто Я.И.

Д-ра техн. наук: проф. Алескеров Ф.Т. (ГУ ВШЭ), проф. Алчинов А.И. (ИПУ РАН), проф. Андриевский Б.Р. (ИПМ РАН), проф. Афанасьев В.Н. (МИЭМ), проф. Бахтадзе Н.Н. (ИПУ РАН), проф. Бурков В.Н. (ИПУ РАН), проф. Вишневский В.М. (ИПУ РАН), Галаяев А.А. (ИПУ РАН), д-р физ.-мат. наук проф. Ерешко Ф.И. (ВЦ РАН), д-ра техн. наук Зоркальцев В.И. (ИСЭМ СО РАН), проф. Калашников А.О. (ИПУ РАН), проф. Калянов Г.Н. (ГУ ВШЭ), проф. Каравай М.Ф. (ИПУ РАН), д-р экон. наук, проф. Ключков В.В. (ИПУ РАН), д-ра техн. наук, Коргин Н.А. (ИПУ РАН), проф. Курдюков А.П. (ИПУ РАН), д-ра физ.-мат. наук, проф. Кушнер А.Г., проф. Лазарев А.А. (МФТИ), д-ра техн. наук: проф. Лебедев В.Г. (ИПУ РАН), проф. Мандель А.С. (ИПУ РАН), д-р биол. наук проф. Михальский А.И., д-р физ.-мат. наук, проф. Непейвода Н.Н. (ИПС РАН), д-р экон. наук, проф. Нижегородцев Р.М. (ИПУ РАН), д-ра техн. наук: проф. Орлов А.И. (МГТУ), д-ра физ.-мат. наук: проф. Рапопорт Л.Б. (ИПУ РАН), проф. Райгородский А.М. (МГУ), проф. Савватеев А.В. (РЭШ), д-ра техн. наук: проф. Самуйлов К.Е. (РУДН), проф. Сидельников Ю.В. (МАИ), Совлуков А.С. (ИПУ РАН) д-ра физ.-мат. наук: проф. Соловьев С.Ю. (МГУ), проф. Угольницкий Г.А. (ЮФУ), проф. Уткин В.А. (ИПУ РАН), проф. Хоботов Е.Н. (МГТУ), д-ра физ.-мат. наук: доцент Чеботарев П.Ю. (ИПУ РАН), проф. Чхартишвили А.Г. (ИПУ РАН), проф. Щербаков П.С. (ИПУ РАН).

РЕГИОНАЛЬНЫЕ РЕДАКЦИОННЫЕ СОВЕТЫ

Арзамас – д-р физ.-мат. наук проф. Пакшин П.В. **Волгоград** – д-ра физ.-мат. наук: проф. Воронин А.А., проф. Лосев А.Г. (ВолГУ); **Воронеж** – д-р техн. наук, проф. Баркалов С.А., д-р физ.-мат. наук, проф. Головинский П.А. (ВГАСУ), д-р техн. наук, проф. Подвальный С.Л. (ВГТУ); **Иркутск** – академик РАН Бычков И.В., д-р физ.-мат. наук, проф. Лакеев А.В. (ИДСТУ СО РАН); **Казань** – д-р физ.-мат. наук, проф. Маликов А.И., д-р техн. наук, проф. Сиразетдинов Р.Т. (КГТУ-КАИ); **Липецк** – д-ра техн. наук: проф. Погодаев А.К., Сараев П.В. (ЛГТУ); **Самара** – д-ра экон. наук: проф. Богатырев В.Д., проф. Гераськин М.И., д-р техн. наук, проф. Засканов В.Г. (СГАУ); **Петрозаводск** – д-р физ.-мат. наук, проф. Мазалов В.В., д-р техн. наук, доц. Печников А.А. (ИПМИ КарНЦ РАН); **Санкт-Петербург** – д-р физ.-мат. наук: проф. Петросян Л.А. (СПбГУ), д-р техн. наук проф. Фуртат И.Б. (ИПМ РАН); **Старый Оскол** – д-р техн. наук, проф. Еременко Ю.И. (СТИ).

Адрес редакции: 117997, г. Москва, ул. Профсоюзная, д. 65.

Адрес в интернете: ubs.mtas.ru.

СОДЕРЖАНИЕ

Системный анализ

Иванов Н.Н.

Степень параллелизма обобщенных стохастических сетевых графов 6

Анализ и синтез систем управления

Фургат И.Б.

Динамическая компенсация возмущений в условии насыщения сигнала управления..... 24

Фургат И.Б., Нехороших А.Н.

Робастное управление линейными мультиагентными системами с использованием левых разностей для оценки производных..... 41

Информационные технологии в управлении

Ураков А.Р., Тимеряев Т.В.

Алгоритм решения динамической задачи поиска кратчайших расстояний в графе 60

Сетевые модели в управлении

Макрушин С.В.

*Анализ структуры магистральных электросетей
России: оценка применимости модели тесного мира.* 87

Управление в социально-экономических системах

Новиков Д.А.

*Комплексные модели системной оптимизации
производственно-экономической деятельности
предприятия* 118

Шумов В.В.

*Моделирование миграции населения в задачах
обеспечения безопасности государства* 153

УДК 519.179.2

ББК 22.176 + 65.23

СТЕПЕНЬ ПАРАЛЛЕЛИЗМА ОБОБЩЕННЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СЕТЕВЫХ ГРАФИКОВ

Иванов Н. Н.¹

*(ФГБУН Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)*

Для обобщенного стохастического сетевого графика введено понятие степени параллелизма. Предложена методика определения этой величины, позволяющей производить выбор минимального числа исполнителей сетевого графика, при котором не происходит образование очередей на прохождение дуг.

Ключевые слова: обобщенный стохастический сетевой график, путь, распределения времени прохождения дуг, алгоритм Брона–Кербоша.

1. Введение

Сетевые графики, применяемые для моделирования сложных взаимосвязанных временных процессов, благодаря своей наглядности нашли широкое применение при моделировании процессов выполнения проектной документации, строительства зданий, сборочных процессов, процессов выполнения в реальном времени управляющих программ в вычислительных системах и т.п. В настоящее время эти графики рассматриваются в предположениях, основанных на рассмотрении времен прохождения отдельных дуг как случайных величин с известными распределениями [1].

В работе рассматривается обобщенный вариант стохастических сетевых графиков (ОССГ) [6], в которых допускаются

¹ Николай Николаевич Иванов, доктор технических наук, доцент (ivanov.nni@yandex.ru).

двойственные дисциплины возбуждения вершин: классическая дисциплина «И», которой соответствует возбуждение вершины в результате прохождения всех дуг, в нее входящих (вершина типа $\tilde{\alpha}$ в классификации, приведенной в [1]), и альтернативная дисциплина «исключенное ИЛИ» (далее просто ИЛИ), которой соответствует возбуждение вершины в результате прохождения первой из входящих в нее дуг (вершина типа $\tilde{\beta}$ [1]).

Пользователей подобных графиков не в последнюю очередь интересует вопрос о числе исполнителей, например, бригад сборщиков, строителей, каналов параллельных управляющих вычислительных систем (ВС) и т.п., которые необходимы для реализации комплекса работ, моделируемых отдельными дугами графиков, без образования очередей на их прохождение.

В основу всех рассуждений ниже положен принцип «одна работа – один исполнитель», при этом каждый исполнитель может выполнять любую работу. Очевидно, что при избыточном числе исполнителей отсутствие очередей может сопровождаться простоями исполнителей, что также может быть нежелательным. Таким образом, актуальным является нахождение такого числа исполнителей, при котором отсутствие очередей сочетается с минимизацией простоев исполнителей. Вообще говоря, это число может оказаться зависящим от набора случайных времен прохождения дуг сетевого графика и от распределений этих времен.

В работе поставлена задача нахождения оценки сверху этого числа в предположении, что распределение времени прохождения каждой дуги сетевого графика определено каким-либо образом на полуинтервале $[0, +\infty)$ (это имеет место, например, в случае экспоненциального распределения), которую будем называть степенью параллелизма сетевого графика. В реальности при ограниченных распределениях, заданных на промежутках $[a, b]$, $a \geq 0$, $b < +\infty$, степень параллелизма может служить верхней оценкой числа исполнителей, необходимого для предотвращения образования очередей.

Особое значение приобретает этот показатель при проектировании архитектуры ВС, управляющих в реальном времени по программам, структурированным ОССГ. В работах [2, 4, 5, 8, 9],

посвященных проблеме организации временной надежности управляющих в реальном времени параллельных ВС, рассматривалась структуризация управляющих взаимодействующих программных комплексов с помощью сетевых графиков. При этом предлагалась реализация этих комплексов в ВС с ограниченным числом каналов (как правило, двумя). В дальнейшем процедуры обеспечения временной надежности были дополнены организацией аппаратной надежности для случая одиночной неисправности ВС в двухканальной ВС [10]. Использование ограниченного числа каналов ВС предполагало буферизацию готовых к выполнению программных комплексов, что вызывало необходимость назначения их приоритетов и порядка выполнения.

В дальнейшем определился альтернативный подход к решению упомянутой проблемы, основанный на принципе независимости организации временной надежности выполнения управляющих программ и аппаратной надежности многопроцессорной ВС, на которой они выполняются. При этом в силу новых технических возможностей было предложено выбирать такое число каналов ВС без ограничения, при котором не происходит образования очередей на выполнение программных комплексов, что снимало необходимость буферизации и давало возможность использовать различные схемы резервирования в условиях множественных отказов и сбоев [7–9].

Знание верхней оценки степени параллелизма ОССГ, моделирующего комплекс взаимосвязанных программных модулей, или в ряде случаев его точного значения позволяет выбрать оптимальное число параллельных каналов ВС, при котором не потребуются буферизация программных модулей.

Следует заметить, что визуальное определение степени параллелизма становится весьма затруднительным в случае достаточно большого числа вершин и дуг, особенно в случае, когда ОССГ не является планарным графом [11]. Рассматриваемые ниже процедуры определения этого показателя осуществимы машинным способом, что снимает все проблемы вычислительного характера.

2. Основы метода

Множество дуг сетевого графика в дальнейшем будет обозначено как W . Цепочкой назовем произвольную последовательность связанных дуг. Пустой считается цепочка, не содержащая дуг. Таким образом, две дуги, одна из которых является входной, а другая – выходной для некоторой вершины, связаны пустой цепочкой.

Узел сетевого графика будет называться вершина, имеющая более одной входящей дуги.

Путем в данной работе называется цепочка, которая начинается в начальной вершине сетевого графика и заканчивается в конечной.

Определение 1. Дуги u и v сетевого графика, в котором события наступают в соответствии с дисциплиной «И», находятся в отношении $\varphi \subset W \times W$ ($u\varphi v$), если они не связаны цепочкой (включая пустую цепочку).

Определение 2. Дуги u и v сетевого графика, в котором события могут наступать в соответствии с дисциплинами «И» или «ИЛИ», находятся в отношении φ ($u\varphi v$), если они либо не связаны цепочкой, либо каждая соединяющая их (возможно, пустая) цепочка, содержит хотя бы один узел типа «ИЛИ».

Сетевой график (на примере сетевого графика с вершинами только типа И) задает на множестве W отношение следования $\psi^* \subset W \times W$, при котором две дуги u и v связаны пустой цепочкой и v есть последователь u : $u\psi^*v$. Производя транзитивное и рефлексивное замыкания отношения ψ^* , приходим к отношению частичного порядка ψ , задаваемому матрицей A , у которой $a_{ii} = 1$, $a_{ij} = 1$ и $a_{ji} = 0$, если $u_i\psi u_j$. Матрица A^T обратного отношения ψ^{-1} может быть получена транспонированием матрицы A . Рассмотрим теперь (симметричное, рефлексивное) отношение $\pi = \psi \cup \psi^{-1}$ с матрицей $B = A + A^T - E$. Отношение φ , рассматриваемое в определении 1, описывает отношение между дугами как дополнение по отношению к π ($u, v \in U, u\varphi v \Leftrightarrow u\pi v$). Следовательно, заменяя в матрице B нули единицами, а единицы на нули, получаем симметрическую матрицу C , соответствующую отношению φ . Аналогичные построения проводятся для сетевых

графиков со смешанными типами узлов, за исключением того, что дуги u и v , связанные пустой цепочкой и разделенные вершиной типа «ИЛИ», не могут находиться в отношении ψ^* .

В соответствии с отношением φ (по матрице C) может быть построен неориентированный граф G , вершинами которого являются дуги сетевого графика. Вершины u и v связаны в G дугой в случае, если $u\varphi v$. Представление графа G матрицей C , элементами которой являются $*$ и $-$, предпочтительно в связи с дальнейшими манипуляциями с этим графом ($u * v \Leftrightarrow u\varphi v$).

Максимальный полный подграф графа G называется кликой. Заметим, что у графа G может существовать несколько клик.

Утверждение. Верхняя оценка степени параллелизма сетевого графика при оговоренных выше распределениях времен прохождения дуг не превосходит наибольшее число вершин в кликах графа G . Для графиков с единственной дисциплиной «И» эта оценка является точным значением степени параллелизма.

Доказательство.

Пусть для некоторого набора случайных времен прохождения дуг число одновременно проходимых в некоторый момент времени дуг равно k и не существует наборов и моментов времени, для которых это число больше k . Это означает, что число k является степенью параллелизма рассматриваемого сетевого графика. Очевидно, все эти дуги попарно находятся в отношении φ либо в соответствии с определением 1, либо в соответствии с определением 2. Таким образом, эти дуги образуют полный подграф в некоторой клике графа G , откуда следует неравенство $k \leq N$, где N – кликовое число графа G .

Пусть теперь для некоторого сетевого графика с единственным типом узлов «И» на графе G , построенном в соответствии с определением 1, существует клика максимального размера N . Рассмотрим дуги, входящие в эту клику. Пусть для некоторого случайного набора U времен прохождения всех дуг времена окончания прохождения рассматриваемых N дуг равны t_1, \dots, t_N . Очевидно, что существует константа C такая, что

$$C + \min_{1 \leq i \leq N} \{t_i\} > \max_{1 \leq i \leq N} \{t_i\}.$$

Поскольку для сетевых графиков с единственным типом узлов «И» выполнение отношения φ для каждой пары дуг означает

независимость времен начала и конца их прохождения друг от друга, можно построить теперь случайный набор \tilde{U} , для которого времена окончания прохождения рассматриваемых N дуг совпадают и равны $C + \min_{1 \leq i \leq N} \{t_i\}$, не изменяя при этом времена

прохождения для остальных дуг в сравнении с исходным набором U . Выбирая некоторый момент времени, заключенный в промежутке $[\max_{1 \leq i \leq N} \{t_i\}, C + \min_{1 \leq i \leq N} \{t_i\}]$, получаем, что в этот момент

времени все N дуг проходятся одновременно. Отсюда степень параллелизма удовлетворяет неравенству $k \geq N$, что для сетевых графиков с единственным типом узлов «И» с учетом выше доказанного неравенства приводит к равенству $k = N$. ■

Таким образом, ключевой является задача нахождения клик графа G . Для ее решения может быть привлечен алгоритм Брона–Кербоша [12].

В случае смешанных дисциплин возникновения событий этот метод может завышать оценку степени параллелизма, поскольку выполнение отношения φ является лишь необходимым условием для одновременного прохождения дуг. Это связано с тем, что дуга, первой приходящая в некоторый узел типа «ИЛИ», и некоторые ее дуги-предшественники, не могут одновременно проходиться с дугами, исходящими из данного узла, и с некоторыми их дугами-последователями. Ниже показано, как это можно использовать для снижения получаемых оценок. Вместе с тем, выполнение отношения φ для графиков с дисциплиной «И» является необходимым и достаточным условием для одновременного прохождения дуг (см. доказательство утверждения).

В качестве примера рассматривается граф, представленный на рис. 1. В соответствии с нумерацией дуг, приведенной на рис. 1, по 45 неупорядоченным парам дуг сетевого графика построены две таблицы – матрицы инцидентности графов G_A и G_B для случаев, когда события, представляемые вершинами 2 и 4, наступают по дисциплине «И» (матрица A) и по дисциплине «ИЛИ» (матрица B).

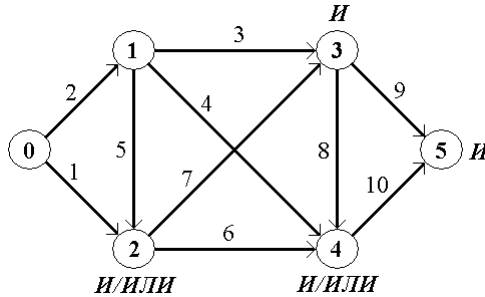


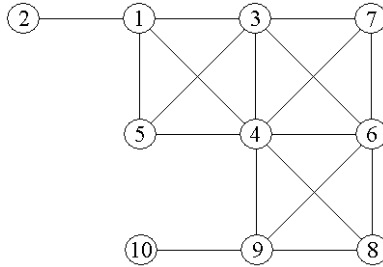
Рис. 1. Сетевой график

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{matrix} & \begin{bmatrix} - & * & * & * & * & - & - & - & - & - \\ * & - & - & - & - & - & - & - & - & - \\ * & - & - & * & * & * & * & - & - & - \\ * & - & * & - & * & * & * & * & * & - \\ * & - & * & * & - & - & - & - & - & - \\ - & - & * & * & - & - & * & * & * & - \\ - & - & * & * & - & * & - & - & - & - \\ - & - & - & * & * & - & * & - & - & - \\ - & - & - & * & - & * & - & - & * & - \\ - & - & - & - & - & - & - & - & * & - \end{bmatrix} \end{matrix}, \quad B = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{matrix} & \begin{bmatrix} - & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\ * & - & - & - & - & * & * & - & - & * \\ * & - & - & * & * & * & * & - & - & * \\ * & - & * & - & * & * & * & * & * & * \\ * & - & * & * & - & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & - & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * & - & - & - & * \\ * & - & - & * & * & * & - & - & * & * \\ * & - & - & * & * & * & - & * & - & * \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * & - \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

Матрица B покрывает матрицу A в том смысле, что если $a_{ij} = a_{ji} = *$, то $b_{ij} = b_{ji} = *$.

Используя алгоритм Брона–Кербоша, получаем следующие множества клик максимального размера. Для графа G_A , представленного матрицей A : $\{(1\ 3\ 4\ 5), (3\ 4\ 6\ 7), (4\ 6\ 8\ 9)\}$, для графа G_B с матрицей B : $\{(1\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 10), (1\ 4\ 5\ 6\ 8\ 9\ 10)\}$. В качестве примера на рис. 2 приведен граф G_A . На этом графе видны приведенные выше клики максимального размера.

Из приведенных множеств клик следует, что для сетевого графика, в котором все узлы имеют тип «И», степень параллелизма равна 4. В то же время для сетевого графика со смешанными дисциплинами возникновения событий верхняя оценка степени параллелизма определяется как 7.

Рис.2. Граф G_A

Для сетевых графиков со смешанной дисциплиной возникновения событий для снижения верхней оценки степени параллелизма можно, основываясь на сказанном выше, из получаемой оценки вычесть число, равное минимальному количеству узлов типа «ИЛИ», входные дуги которых входят в клики максимального размера. Однако при этом потребуют проверки клики, не содержащие входных дуг узлов типа «ИЛИ». В рассматриваемом примере оценка может быть снижена до 5.

3. Альтернативный метод

В качестве альтернативного метода нахождения степени параллелизма можно предложить построение дерева состояний сетевого графика [4, 5].

Состоянием считается вектор, составленный из номеров дуг, проходимых в текущий момент времени, в отличие от прототипа, в котором для фиксированного числа исполнителей учитывалось также множество дуг, находящихся в очереди на прохождение. Но в нашем случае сетевой график выполняется без ограничения ресурсов, поэтому эта составляющая состояния в сравнении с прототипом может быть опущена.

Каждая дуга дерева состояний помечена номером дуги сетевого графика, исходящей из состояния дерева, в котором данная дуга объявлена в качестве составляющей вектора состояния. Начальным состоянием дерева состояний назначается вектор из номеров дуг, исходящих из начальной вершины сетевого графика. Конечному состоянию соответствует пустой вектор.

Алгоритм построения дерева состояний состоит в рекурсивном пополнении состояний дерева, начиная с начального. Если предположить, что построено состояние s k -го уровня этого дерева, то для построения состояний $(k+1)$ -го уровня, непосредственно связанных с состоянием s , нужно из s вывести дуги числом, соответствующим числу дуг сетевого графика, входящих в s . Каждая такая дуга u , помеченная номером выбранной дуги сетевого графика, ведет в некоторое состояние q , которое содержит дуги, входящие в s , за исключением u , и пополненное дугами, активируемыми в случае, если прохождение дуги u вызвало свершение некоторого события.

Построение дерева состояний в лексикографическом порядке может вестись так, что если состояние, соответствующее рассматриваемой вершине, в процессе построения дерева уже было достигнуто ранее, то оно подчеркивается, и построение ее продолжения обрывается.

Дерево состояний обладает тем замечательным свойством, что каждому случайному вектору, составленному из времен прохождения всех дуг сетевого графика, соответствует ровно одна траектория из начальной в заключительную вершину. Таким образом, все ветви дерева имеют длину, равную числу дуг сетевого графика. При этом можно утверждать, что в силу принятых в работе требований к распределениям случайных времен прохождения дуг любая траектория этого дерева реализуема при некотором наборе этих времен.

На рис. 3 приведена начальная часть дерева состояний рассмотренного выше сетевого графика, у которого все узлы имеют тип «И». Дальнейшее построение продолжений для неподчеркнутых вершин дерева не имеет смысла, поскольку в нижних уровнях уже не могут встретиться состояния, у которых длина вектора превышает значение 4.

Таким образом, степень параллелизма рассматриваемого ОССГ равна 4. В приводимом ниже примере показано, что эта оценка для некоторого распределения превышает необходимое число исполнителей, не вызывающее образование очередей.

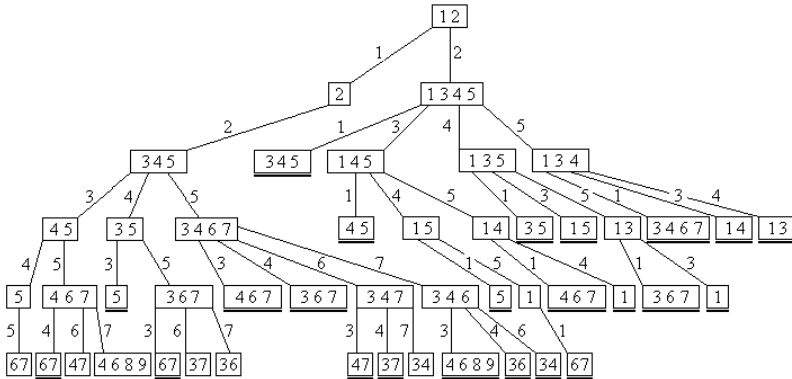


Рис. 3. Дерево состояний графика с дисциплиной «И»

Для сетевых графиков, в которых имеются узлы типа «ИЛИ», построение дерева состояний в свете поставленных в работе задач имеет некоторые отличительные черты. Так, если дуга приходит в некоторый узел типа «ИЛИ», а остальные дуги, ведущие в него же, еще не пройдены, то эти дуги в дальнейшем построении дерева не участвуют, но во всех вершинах-последователях тех вершин, в которых они были активированы, фигурируют в векторах из номеров дуг. При этом их прохождение в зависимости от значений случайных времен прохождения дуг может, вообще говоря, закончиться уже после того, как будет достигнуто заключительное состояние сетевого графика.

На рис. 4 представлена начальная часть левой половины дерева состояний для сетевого графика с рис. 1, в котором узлы 2 и 4 имеют тип «ИЛИ», и в начальном состоянии дуга 1, исходящая из начального состояния, пройдена раньше дуги 2. Например, в вершине (34567) инициализируется дуга 5, ведущая в узел 2 типа «ИЛИ». Однако событие, соответствующее узлу 2, уже свершилось после прохождения дуги 1. По этой причине, исходя из сказанного выше, в вершине (34567) и во всех ее последователях отсутствуют исходящие дуги, помеченные 5.

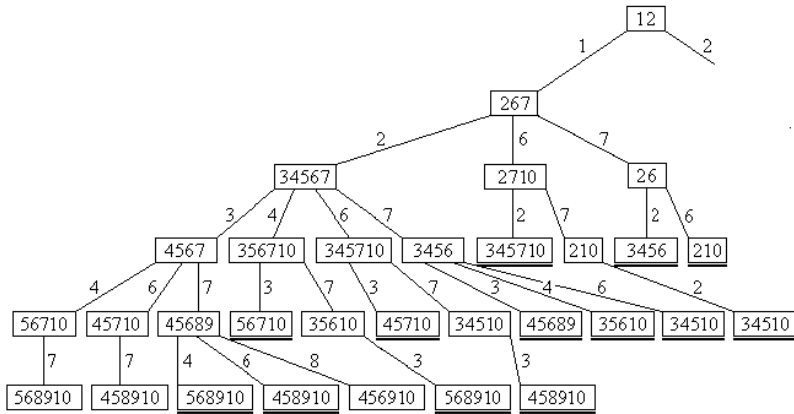


Рис. 4. Дерево состояний графика со смешанной дисциплиной

Таким образом, находя в дереве все состояния максимальной длины, получаем состояния с дугами, которые могут проходиться одновременно при некоторых наборах времен прохождения дуг. В дереве, приведенном на рис. 3, такими состояниями являются состояния (1 3 4 5), (3 4 6 7) и (4 6 8 9), что соответствует проведенному выше анализу. В левой части дерева состояний, приведенной на рис. 3, можно видеть все состояния, соответствующие наборам дуг, не содержащим дугу 1. Состояния, содержащие эту дугу, находятся в правой части дерева, не показанной на рис. 4. Из рис. 4 (в полном объеме) установлено, что точное значение степени параллелизма равно 5.

Полученные значения степени параллелизма (любым из рассмотренных методов) могут оказаться недостижимыми при некоторых наборах случайных времен прохождения дуг. Например, траектория с начальной частью 12345, показанной на рис. 3, не содержит состояний длины, большей 3. По этой причине степень параллелизма является оценочной величиной. Однако ни при каких наборах случайных времен прохождения дуг число потребных исполнителей не может ее превзойти.

Имитационное моделирование сетевого графика, приведенного на рис. 1 с узлами типа «И», было проведено в иллюстративных целях. Была поставлена цель показать, что для распре-

делений, заданных на конечных интервалах, вычисленная каким-либо способом степень параллелизма может не достигаться на некоторых наборах X случайных времен прохождения дуг. Более того, показано, что существуют распределения, для которых ни при каких наборах X степень параллелизма не достигается. Таким образом, степень параллелизма может служить лишь верхней оценкой числа исполнителей, не приводящего к образованию очередей.

Времена прохождения дуг, распределенных по нормальному закону $N(a, \sigma)$, ограниченному на интервалах $(a - 3, a + 3)$, при следующих параметрах распределений: $x_1 = N(5, 5\sqrt{2}, 1)$, $x_2 = x_5 = x_7 = N(8, 1)$, $x_3 = N(6, 1)$, $x_4 = N(6\sqrt{2}, 1)$, $x_6 = N(10\sqrt{2}, 1)$, $x_8 = N(7, 1)$, $x_9 = N(3, 1)$, $x_{10} = N(9, 1)$ (здесь x_i – время прохождения i -й дуги) моделировались по методике, описанной в [3].

Моделирование было проведено на основе программной реализации дерева состояний, начальная часть которого приведена на рис. 3. Оно показало, что вероятности появления состояний (1 3 4 5), (3 4 6 7) и (4 6 8 9) имеют следующие значения: $p_{1345} \approx 0,44$, $p_{3467} \approx 0,07$, $p_{4689} \approx 0$. Таким образом, лишь с вероятностью 0,48 состояния длины 4 при данных распределениях по крайней мере один раз могут оказаться достижимыми.

Для приведенных выше распределений, с уменьшенными в 30 раз среднеквадратическими отклонениями, вероятности перечисленных выше состояний приняли нулевые значения. Необходимое число исполнителей, при котором отсутствуют очереди на прохождение дуг, оказалось равным трем. Этот же результат получен для детерминированных распределений вектора X при нулевых среднеквадратических отклонениях.

В заключение этого раздела проведем сравнительный анализ предложенных методов нахождения степени параллелизма.

1. Метод, основанный на применении алгоритма Брона–Кербоша, для ОССГ с узлами типа «И» в соответствии с доказанным в п. 2 утверждением позволяет найти точное значение степени параллелизма. В случае смешанных дисциплин свершения событий этот метод дает лишь верхнюю оценку этого параметра, что можно считать недостатком метода.

Альтернативный метод позволяет для графиков со смешанными типами узлов получать точные значения степени параллелизма. Для ОССГ с узлами только типа «И» оба метода равнозначны по получаемым результатам.

2. Однако альтернативный метод обладает большей сложностью. В случае его программной реализации потребуется разработка алгоритма построения дерева состояний. В то же время процедура построения матрицы G , используемой в методе п. 2, несравнимо проще, а ее анализ осуществляется стандартным алгоритмом Брона–Кербоша.

3. Точное значение числа исполнителей, необходимое для отсутствия очередей, при распределениях, заданных на конечных интервалах, может быть получено при имитационном моделировании дерева состояний ОССГ. При этом не требуется предварительное построение дерева состояний: для каждого случайного вектора времен прохождения дуг программным путем находится траектория на дереве состояний с определением всех требуемых параметров (максимального числа одновременно проходимых дуг, времени выполнения графика, критического пути и т.п.). Однако этот способ является существенно более трудоемким по сравнению с определением степени параллелизма, особенно при использовании метода, описанного в п. 2. Возможная при этом некоторая избыточность числа исполнителей, например, в случае проектирования архитектуры ВС, на современном этапе не является критичной.

4. Сетевые графики с видоизмененными узлами типа «ИЛИ»

Рассмотрим сетевые графики со смешанными типами узлов, для которых видоизменен алгоритм прохождения дуг, ведущих в узлы типа «ИЛИ». Если в рассмотренных выше графиках все дуги, входящие в некоторый узел типа «ИЛИ», проходились до конца независимо от того, в каком порядке происходит окончание их прохождения, то видоизмененная процедура предполагает, что после прохождения первой из входящих дуг прохождения всех остальных дуг приостанавливается. Также для этих дуг их прохождение блокируется, если оно еще не началось.

На рис. 5 представлен фрагмент графика с видоизмененным узлом 1 типа «ИЛИ», в который первой приходит дуга 1. В этом случае прохождение дуги 2 приостанавливается, если оно уже началось. В противном случае дуга 3 может проходиться одновременно с дугами 4 и 5, чего не может быть в случае, если узел 1 типа «И». Однако по завершении прохождения дуг 4 и 5 прохождение дуги 2 не начнется.

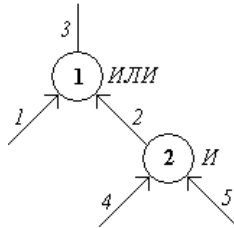


Рис. 5. Фрагмент сетевого графика

Применительно к сетевым графикам этого типа определение отношения φ претерпевает изменение.

*Определение 2**. Дуги u и v сетевого графика с видоизмененными узлами типа «ИЛИ» находятся в отношении φ ($u\varphi v$), если они либо не связаны цепочкой, либо всякая непустая цепочка соединяющих их дуг, содержит хотя бы один узел типа «ИЛИ», для которого ни u , ни v не являются входными.

Для графика на рис. 1, в котором узлы 2 и 4 имеют видоизмененный тип «ИЛИ», матрица графа G имеет вид:

$$C = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{matrix} & \begin{bmatrix} - & * & * & * & * & - & - & - & - & * \\ * & - & - & - & - & * & * & - & - & * \\ * & - & - & * & * & * & * & - & - & * \\ * & - & * & - & * & * & * & * & * & - \\ * & - & * & * & - & - & - & - & - & * \\ - & * & * & * & - & - & * & * & * & - \\ - & * & * & * & - & * & - & - & - & * \\ - & - & - & * & - & * & - & - & - & * \\ - & - & - & * & - & * & - & * & - & * \\ * & * & * & - & * & - & * & - & * & - \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

Алгоритм Брона–Кербоша применительно к графу G с матрицей инцидентности C позволяет найти следующие максимальные клики: (1 3 4 5), (1 3 5 10), (3 4 6 7) и (4 6 8 9). Альтернативный метод, основанный на построении дерева состояний (рис. 5), выявляет аналогичные клики. Знаком ■ на рис. 6 помечено заключительное состояние дерева. На этом дереве также можно проследить траекторию 16237910, при прохождении которой степень параллелизма, равная 4, не достигается.

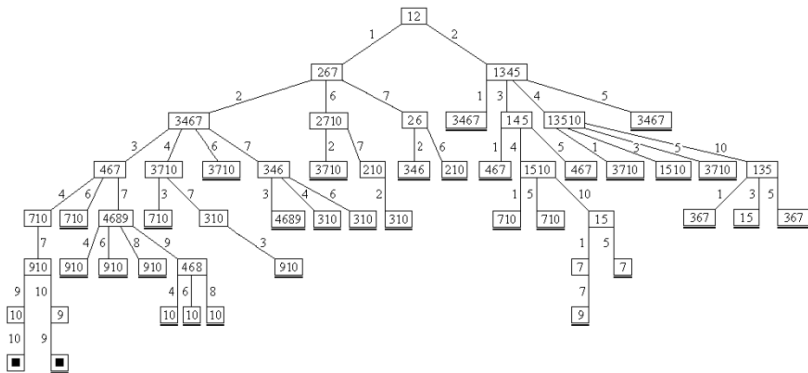


Рис. 6. Дерево состояний графика с блокированием дуг

5. Заключение

В работе рассмотрены два метода нахождения степени параллелизма обобщенных сетевых графиков, в которых допускаются две дисциплины свершения событий. Степень параллелизма характеризует максимальную загруженность производительных ресурсов во время исполнения сетевого графика, при которой не происходит образования очередей.

В случае произвольных ограниченных распределений времени прохождения дуг степень параллелизма может служить верхней оценкой числа исполнителей, при котором не происходит образования очередей на прохождение дуг.

Предложенная методика может служить составной частью построения архитектуры управляющих ВС для определения числа параллельных каналов с различными схемами резервирования.

Литература

1. ГОЛЕНКО-ГИНЗБУРГ Д.И. *Стохастические сетевые модели планирования и управления разработками*. – Воронеж: Научная мысль, 2010. – 283 с.
2. ЕЛИСЕЕВ В.В., ИГНАТУЩЕНКО В.В. *Проблема надежного выполнения сложных наборов задач в управляющих параллельных вычислительных системах* // Проблемы управления. – 2006. – №6. – С. 6–18.
3. ЕРМАКОВ С.М., МИХАЙЛОВ Г.А. *Статистическое моделирование*. – М.: Наука, 1982. – 296 с.
4. ИВАНОВ Н.Н., ИГНАТУЩЕНКО В.В., МИХАЙЛОВ А.Ю. *Статическое прогнозирование времени выполнения комплексов взаимосвязанных работ в многопроцессорных вычислительных системах* // Автоматика и телемеханика. – 2005. – №6. – С. 89–103.
5. ИВАНОВ Н.Н., ИГНАТУЩЕНКО В.В., МИХАЙЛОВ А.Ю. *Вычисление оценок распределения времени выполнения комплексов взаимосвязанных работ в многопроцессорных вычислительных системах* // Труды Института. – М.: ИПУ РАН, 2006. – Том XXVII. – С. 124–135.

6. ИВАНОВ Н.Н. Аналитико-имитационное моделирование обобщенных стохастических сетевых графиков // Управление большими системами. 2015. – Вып. 53. – С. 27–44.
7. ИВАНОВ Н.Н. Резервирование в параллельных вычислительных системах, выполняющих комплексы взаимосвязанных работ // Труды 6-й Международной конференции «Параллельные вычисления и задачи управления» (РАСО'2012, Москва). – М.: ИПУ РАН, 2012. – Т. 1. – С. 134–139.
8. ИВАНОВ Н.Н. Оптимальное резервирование в параллельных вычислительных системах, выполняющих комплексы взаимосвязанных работ // Труды XII Всероссийского совещания по проблемам управления (ВСПУ-2014, Москва). – М.: ИПУ РАН, 2014. – С. 7246–7255.
9. ИВАНОВ Н.Н., ШАСТУН В.В. Определение точных верхних оценок времени выполнения сложных наборов задач в управляющих параллельных вычислительных системах // Автоматика и телемеханика. – 2010. – №9. – С. 174–184.
10. ИГНАТУЩЕНКО В.В., ИСАЕВА Н.А. Резервирование взаимосвязанных программных модулей для управляющих параллельных вычислительных систем: организация, оценка отказоустойчивости, формализованное описание // Автоматика и телемеханика. – 2008. – №10. – С. 142–161.
11. ХАРАРИ Ф. Теория графов. – Москва: Мир, 1973. – 300 с.
12. BRON С., KERBOSH J. Algorithm 457– Finding all cliques of an undirected graph // Comm. of ACM. – 1973. – Vol. 16. – P. 575–577.

THE DEGREE OF PARALLELISM IN GENERALIZED STOCHASTIC NETWORK

Nikolay Ivanov, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Doctor of Science (Moscow, Profsoyuznaya st., 65, ivanov.nni@yandex.ru).

Abstract: We propose a novel concept of parallelism degree for generalized stochastic networks. This concept could be used in design of real-time parallel computing systems. It characterizes the maximal load which does not lead to queue emergence. In the case when arc duration distributed according to arbitrary bounded distributions the parallelism degree estimates the minimum number of processors in the network at which no queues emerges on the network arcs. We also developed a method for finding this parameter.

Keywords: generalized stochastic network, path, distributions of arcs duration, Bron–Kerbosh algorithm.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии А.А. Лазаревым.

*Поступила в редакцию 08.09.2016.
Опубликована 31.01.2017.*

УДК 519.7

ББК Ж 50

ДИНАМИЧЕСКАЯ КОМПЕНСАЦИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ В УСЛОВИИ НАСЫЩЕНИЯ СИГНАЛА УПРАВЛЕНИЯ¹

Фуртат И. Б.²

*(Институт проблем машиноведения РАН,
Университет ИТМО, Санкт-Петербург)*

Предложена схема динамической компенсации возмущений для линейных объектов со скалярными входами и выходами в условиях параметрической неопределенности и внешних ограниченных возмущений. Рассмотрена задача слежения выхода объекта за эталонным сигналом без измерения производных регулируемой переменной. Схема управления обобщена на случай насыщения сигнала регулирования. Приведены условия на параметры объекта и закона управления, при выполнении которых система управления будет работоспособной. Рассмотрен пример моделирования, иллюстрирующий работоспособность приведенной схемы.

Ключевые слова: робастное управление, компенсация возмущений, насыщение сигнала управления.

¹ Результаты раздела 2 получены в ИПМаш РАН при поддержке РФФ (проект №14-29-00142). Результаты разделов 4 и 5 получены при поддержке гранта Президента Российской Федерации (договор №14.W01.16.6325-МД (МД-6325.2016.8)). Другие исследования частично поддержаны грантами РФФИ (№16-08-00282, №16-08-00686), МОН РФ (проект 14.Z50.31.0031) и Правительства РФ (074-U01).

² Игорь Борисович Фуртат, доктор технических наук, доцент (Санкт-Петербург, Большой пр-т В.О., д. 61, тел. (812) 321-47-66, cainenash@mail.ru).

1. Введение

Одним из эффективных способов управления объектами в условиях неопределенностей и возмущений является робастное управление с использованием наблюдателей с большим коэффициентом усиления (high-gain observer). В [1–3, 8] для оценки производных выходного сигнала объекта используются различные модификации данных наблюдателей. В [2] на базе результата [1] получена простая схема управления, представленная последовательным соединением апериодических и форсирующих звеньев. В [6] рассмотрено решение задачи компенсации возмущений с использованием динамического вспомогательного контура и наблюдателя, основанного на последовательном соединении реальных дифференцирующих звеньев. Результат [6] позволил получить в [7] простой регулятор, представленный передаточной функцией, знаменатель которой содержит нулевой корень и малый параметр.

Известно, что на практике необходимо учитывать ограничения на сигнал управления. Значение сигнала управления существенно зависит от начальных условий и параметров объекта управления, а также от параметров системы управления. На практике несоблюдение ограничений на сигнал управления может привести к невыполнению поставленной цели или потере устойчивости замкнутой системы.

Впервые задача управления в условиях неопределенности и насыщения сигнала управления была рассмотрена в [15]. Однако в [15] полученные результаты, касающиеся вопроса насыщения, не имеют строгого доказательства. В [6] на этапе моделирования системы, зная множество возможных значений параметров объекта, предлагалась методика выбора параметров в регуляторе. В [19] для решения задачи функция насыщения сигнала управления заменялась гиперболическим тангенсом от сигнала управления. В [18] предложено адаптивное управление объектами в условии неопределенности, где для частичной компенсации ограничений на сигнал управления параллельно ошибке слежения вводился вспомогательный контур с настраиваемым параметром. В [20] разработан статический

закон управления при условии, что известна модель генератора возмущений. Получены линейные матричные неравенства, выполнение которых гарантирует устойчивость замкнутой системы. В [17] рассмотрено решение задачи управления линейными объектами при использовании H_∞ -подхода. Для обеспечения устойчивости замкнутой системы достаточно решения билинейных матричных неравенств.

Наиболее часто используемым методом управления в условиях насыщения сигнала управления является метод «anti-windup» [9, 11–14, 17]. Если в схеме регулирования используются интегральные составляющие, то в условиях насыщения сигнала управления переменные интегрирующего звена могут быть неограниченными (windup) [9, 12]. В данном случае работоспособность системы управления достигается введением контура, предотвращающего рост параметров в регуляторе (anti-windup, [9, 11–14, 17]).

В работах [9, 11–15, 17–20] используется принцип подавления возмущений за счет сильной обратной связи. В условиях ограничений сигнала управления использование сильной обратной связи может привести к потере устойчивости замкнутой системы. В отличие от [9, 11–15, 17–20], в представленной статье построение схемы управления основано на принципе компенсации возмущений, что позволит разработать закон управления, значение которого противоположно значению неопределенностей. В отличие от [2, 6, 7], в данной статье предложен новый закон динамической компенсации возмущений, частными реализациями которого являются решения [2, 6, 7]. При этом структура нового закона управления напрямую не зависит от динамического порядка объекта, что позволит управлять структурно неопределенными объектами.

В статье рассмотрена задача управления линейными динамическими объектами со скалярными входами и выходами в условиях параметрической неопределенности, внешних возмущений, насыщения сигнала управления и недоступности измерению производных входных и выходных сигналов. Вначале синтезируется алгоритм, обеспечивающий робастность

замкнутой системы по отношению к параметрическим неопределенностям и внешним возмущениям без учета ограничений на функцию управления. Далее полученный результат обобщается для управления в условии насыщения регулирующего сигнала. Приведены условия на параметры модели объекта, эталонной модели и регулятора, при выполнении которых система управления будет работоспособной. Рассмотрен пример моделирования, иллюстрирующий работоспособность предлагаемой схемы.

2. Постановка задачи

Рассмотрим объект управления, модель которого описывается уравнением

$$(1) \quad Q(p)y(t) = R(p)u(t) + f(t),$$

где $y(t) \in R$ – выход объекта; $u(t) \in R$ – сигнал управления; $f(t) \in R$ – неконтролируемое ограниченное возмущение; $Q(p)$, $R(p)$ – линейные дифференциальные операторы с неизвестными коэффициентами, $\deg Q(p) = n$ и $\deg R(p) = m$; $p = d/dt$ – оператор дифференцирования.

Цель управления состоит в поиске закона управления, обеспечивающего выполнение условия

$$(2) \quad |y(t) - y_m(t)| < \delta \text{ при } t > T,$$

где $y_m(t)$ – эталонный сигнал такой, что $|y_m^{(j)}(t)| \leq \bar{y}_m^j$; $y_m^{(j)}(t)$ – j -я производная функции $y_m(t)$, $j = 1, \dots, n$; $\delta > 0$ – точность регулирования; $T > 0$ – время, по истечении которого должно быть выполнено неравенство (2). Дополнительно условию (2), потребуем выполнение условия

$$(3) \quad |u(t)| \leq \bar{u},$$

где $\bar{u} > 0$ – известная величина. Также необходимо, чтобы все переменные в замкнутой системе были ограниченными.

Сформулированную задачу будем решать при следующих предположениях.

Предположения.

1. Неизвестные коэффициенты операторов $Q(p)$, $R(p)$ принадлежат известному ограниченному множеству Ξ .

2. Полином $R(\lambda)$ – гурвицев, где λ – комплексная переменная.

3. Известны числа \bar{f} и \bar{y}_m , где $|f(t)| \leq \bar{f}$ и $\sqrt{\sum_{j=1}^n (\bar{y}_m^j)^2} \leq \bar{y}$.

3. Синтез закона управления без учета насыщения сигнала управления

Рассмотрим сначала синтез алгоритма динамической компенсации возмущений без учета ограничений (3). Представим операторы $Q(p)$ и $R(p)$ в виде

$$(4) \quad R(p) = R_0(p) + \Delta R(p), \quad Q(p) = Q_0(p) + \Delta Q(p),$$

где $Q_0(p)$, $R_0(p)$ – произвольные известные линейные дифференциальные операторы, $\deg Q_0(p) \geq n$, $\deg R_0(p) \leq m$; многочлены $Q_0(\lambda)$ и $R_0(\lambda)$ – гурвицевы; $\Delta Q(p)$ и $\Delta R(p)$ – линейные дифференциальные операторы с неизвестными коэффициентами, $\deg \Delta Q(p) \leq \deg Q_0(p)$, $\deg \Delta R(p) \leq m$. Разложение (4), независимое от структуры эталонной модели, приведено в [5]. В частности, как отмечалось в [4, 5], полиномы $Q_0(\lambda)$ и $R_0(\lambda)$ можно выбирать согласно желаемому качеству переходных процессов в эталонной модели, т.е. $Q_0(p)y_m(t) = R_0(p)r(t)$, где $r(t)$ – гладкое задающее воздействие и $\deg Q_0(p) - \deg R_0(p) = n - m$.

Подставим (4) в (1) и составим уравнение для ошибки слежения $e(t) = y(t) - y_m(t)$ в виде

$$(5) \quad Q_0(p)e(t) = R_0(p)u(t) - \Delta Q(p)y(t) + \Delta R(p)u(t) - Q_0(p)y_m(t) + f(t).$$

Обозначим $\varphi(t) = f(t) - \Delta Q(p)y(t) + \Delta R(p)u(t) - Q_0(p)y_m(t)$ и перепишем уравнение (5) как

$$(6) \quad Q_0(p)e(t) = R_0(p)u(t) + \varphi(t).$$

Из структуры $\varphi(t)$ видно, что она содержит информацию о параметрической неопределенности и внешнем возмущении в (1). Введем оценку $\hat{\varphi}(t)$ функции $\varphi(t)$ в виде

$$(7) \quad \hat{\varphi}(t) = Q_0(p)e(t) - \alpha(p)R_0(p)u(t),$$

где $\alpha(\lambda)$ – гурвицев полином порядка $\gamma = \deg Q_0(p) - \deg R_0(p)$.

Зададим сигнал управления $u(t)$ как

$$(8) \quad u(t) = -\frac{1}{R_0(p)} \hat{\varphi}(t).$$

Подставив (7) в (8), перепишем (8) в виде

$$(9) \quad u(t) = -(1 - \alpha(p))^{-1} R_0^{-1}(p) Q_0(p) e(t).$$

Сформулируем утверждение, при выполнении условий которого закон управления (9) обеспечит выполнение целевого условия (2).

Утверждение 1. Пусть выполнены условия Предположений 1–3. Тогда существуют $\alpha(\lambda)$, $R_0(\lambda)$ и $Q_0(\lambda)$ такие, что для любых параметров (1) из класса Ξ закон управления (9) обеспечивает робастную устойчивость замкнутой системы и выполнение целевого условия (2).

Доказательство Утверждения 1 приведено в Приложении.

Замечание 1. Закон управления (9) не требует точного знания порядков операторов $Q(p)$ и $R(p)$. Поэтому, закон управления (9) работоспособен для класса линейных структурно неопределенных объектов (см., например, [4, 5]).

Замечание 2. Если в объекте (1) $\alpha(p) = const$, то получим результат, подобный [8]; если $\alpha(p) = 1 - (Tp + 1)^{\gamma}$, где $T > 0$, то получим результат [2]. При $\alpha(p) = 2 - (\mu p + 1)^{\gamma}$, где $\mu > 0$ – достаточно малое число, получим результат [6, 7].

4. Структура закона управления в условии насыщения входного сигнала

Рассмотрим теперь решение задачи при дополнительном условии (3). Сформируем закон управления $u(t)$ в виде

$$(10) \quad u(t) = \frac{1}{1 + \sigma} \left(u_c(t) + \sigma \tilde{u} \operatorname{sat} \left(\frac{u_c(t)}{\tilde{u}} \right) \right),$$

$$(11) \quad u_c(t) = -(1 - \alpha(p))^{-1} R_0^{-1}(p) Q_0(p) e(t),$$

где $\sigma > 0$, $0 < \tilde{u} < \bar{u}$. Уравнение (10) необходимо для управления в условиях ограничений (3). В Приложении будет показано, что структура (10) также позволяет получить условия работоспособности синтезируемого закона управления.

Выражение (11) определяет сигнал компенсации параметрических и внешних возмущений в объекте (1).

Замечание 4. Уравнение (10) является аппроксимацией функции насыщения при достаточно большом значении σ . Покажем это. Из (10) следует, что при $|u_c(t)| \leq \tilde{u}$ имеем $u(t) = u_c(t)$, при $|u_c(t)| > \tilde{u}$ следует, что

$u(t) = \frac{1}{1+\sigma} (u_c(t) + \sigma \tilde{u} \operatorname{sgn}(u_c(t)))$. Тогда при $\sigma < \infty$ величина $|u(t)|$ может принимать значения, больше чем \tilde{u} . Однако при $\sigma \rightarrow \infty$ имеем $u(t) \rightarrow \tilde{u} \operatorname{sat}\left(\frac{u_c(t)}{\tilde{u}}\right)$. Значит, при достаточно больших σ

величину \tilde{u} можно выбирать достаточно близкой к \bar{u} . Так, при $\tilde{u} = \bar{u}$ и $\sigma \rightarrow \infty$ имеем $u(t) \rightarrow \bar{u} \operatorname{sat}\left(\frac{u_c(t)}{\bar{u}}\right)$. В дальнейшем будет получено условие выбора величины σ в (10) для обеспечения $|u(t)| \leq \bar{u}$.

Замечание 5. Из (10) видно, что коэффициент σ можно выбирать из условия $\sigma \in (-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$. Однако ради простоты синтеза системы управления положим в (10) $\sigma > 0$.

Перед формулировкой утверждения введем обозначения:

$$W_1 = \left\| Q_0^{-1}(\lambda) R_0(\lambda) (1 - \alpha(\lambda)) \right\|, \quad W_2 = \left\| Q_0^{-1}(\lambda) \right\|,$$

$$W_3 = \sup_{\Xi} \left\| Q_0^{-1}(\lambda) \Delta Q(\lambda) \right\|, \quad W_4 = \sup_{\Xi} \left\| Q_0^{-1}(\lambda) Q(\lambda) \right\|,$$

$$W_5 = \sup_{\Xi} \left\| Q_0^{-1}(\lambda) R(\lambda) \right\|, \quad W_6 = \left\| (1 - \alpha(\lambda))^{-1} R_0^{-1}(\lambda) Q_0(\lambda) \right\|,$$

$$\varepsilon(t) = \left[e(t), \dot{e}(t), \dots, e^{(n)}(t) \right]^T.$$

Здесь и далее под $\|W(\lambda)\|$ будем понимать H_∞ -норму передаточной функции $W(\lambda)$, т.е. $\|W(\lambda)\| = \sup_{\operatorname{Re} \lambda \geq 0} \|W(\lambda)\|_2$.

Сформулируем утверждение, при выполнении условий которого закон управления (10), (11) обеспечит выполнение

условий (2), (3) и ограниченность всех сигналов в замкнутой системе.

Утверждение 2. Пусть выполнены условия Утверждения 1. Тогда при

$$(12) |\varepsilon(0)| \leq W_1 \bar{u},$$

$$(13) \begin{aligned} W_2 \bar{f} + W_4 \bar{y}_m &\leq (W_1 - W_3 W_1 - W_5) \bar{u}, \\ W_1 - W_3 W_1 - W_5 &> 0 \end{aligned}$$

$$(14) \sigma \geq \frac{\bar{u} + W_6 (W_2 \bar{f} + W_4 \bar{y}_m + (W_3 W_1 + W_5) \bar{u})}{\bar{u} - \tilde{u}}$$

система управления (10), (11) обеспечит ограниченность сигналов в замкнутой системе и выполнение целевого условия (2) с точностью

$$(15) \delta = W_2 \bar{f} + W_4 \bar{y}_m + (W_3 W_1 + W_5) \bar{u}.$$

Доказательство Утверждения 2 приведено в Приложении.

Для иллюстрации полученных результатов рассмотрим численный пример.

5. Пример

Рассмотрим объект управления, динамические процессы в котором описываются уравнением

$$(16) (p^3 - q_3 p^2 - q_2 p - q_1) y(t) = ru(t) + f(t).$$

Множество Ξ задано следующими неравенствами: $-1 \leq q_1 \leq 2$, $-4 \leq q_2 \leq -3$, $-0,5 \leq q_3 \leq 1$, $1 \leq r < 20$ и $\bar{f} = 0,4$. Цель управления состоит в обеспечении условий (2), (3), где $\bar{u} = 1$.

Выберем $Q_0(p) = (p + 1)^3$, $R_0(p) = 1$, $\alpha(p) = 2 - (0,01p + 1)^3$ и $\tilde{u} = 0,97$. Согласно (10) и (11) сформируем систему управления, представленную следующими уравнениями:

$$(17) \begin{aligned} u_c(t) &= -\frac{(p+1)^3}{(0,01p+1)^3 - 1} e(t), \\ u(t) &= \frac{1}{1+\sigma} \left(u_c(t) + 0,97\sigma \operatorname{sat} \left(\frac{u_c(t)}{0,97} \right) \right). \end{aligned}$$

Принимая во внимание множество Ξ , воспользуемся условиями (12)–(14): $|\varepsilon(0)| < 1,15 \cdot 10^{-2}$, $\bar{y}_m < 0,21$, $\sigma > 2,3 \cdot 10^8$. Как отмечалось, эти условия достаточно грубые. Результаты моделирования показали, что система управления будет работоспособной, например, при $\bar{y}_m = 0,4$, $|\varepsilon(0)| \leq 0,1\sqrt{3}$ и $\sigma = 10^7$. Положим $\sigma = 10^7$. Рассмотрим объект управления (16) со следующими параметрами: $q_1 = -1$, $q_2 = -4$, $q_3 = 1$, $r = 1$. $f(t) = 0,1 + 0,3\sin t$, $y(0) = 0,1$, $\dot{y}(0) = 0,1$, $\ddot{y}(0) = 0,1$. Эталонный сигнал $y_m(t)$ изображен на рис. 1а. На рис. 1б представлены результаты моделирования по $e(t)$, на рис. 2 – по $u(t)$.

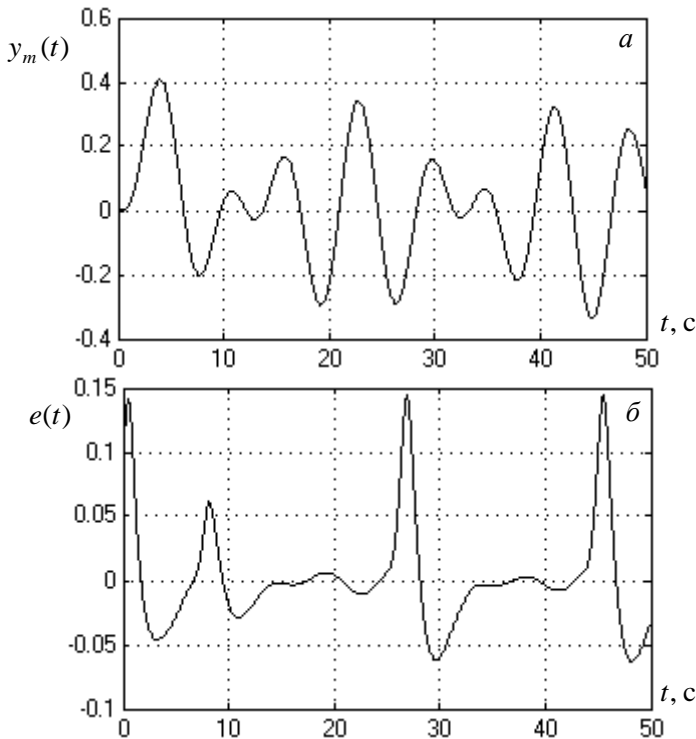


Рис. 1. Переходные процессы по $y_m(t)$ и $e(t)$

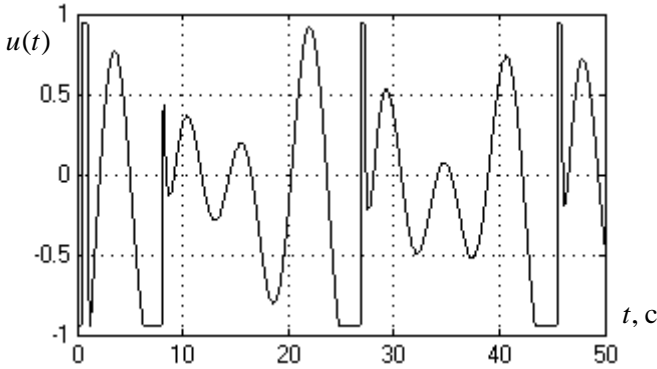


Рис. 2. График сигнала управления $u(t)$

Анализ результатов моделирования показал, что замкнутая система робастна по отношению к внешним возмущениям и параметрической неопределенности из заданного класса Ξ . В системе управления с начала ее функционирования динамическая ошибка не превышает значения 0,15. Из рис. 2 видно, что $u(t)$ находится в заданном отрезке $[-1; 1]$, тогда как без использования (17) (т.е. при $u(t) = u_c(t)$, см. [5, 6]) сигнал $u(t)$ в начальный момент времени достигает значения -10^4 , и только на 0,2 (с) $u(t)$ входит в отрезок $[-1,12; 1,12]$, что недопустимо по условию задачи.

Моделирование показало, что для обеспечения гурвицевости многочлена $P(\lambda)$ коэффициенты оператора $\alpha(p)$ должны быть достаточно малыми, а также необходимо выполнение условия $0 << \|1/\alpha(\lambda)\|_\infty \leq 1$. Стоит отметить, что вместо рационального оператора $\alpha(p)$ можно также использовать дробно-рациональные операторы или звено запаздывания.

6. Заключение

В статье рассмотрен синтез системы управления для линейных динамических объектов со скалярными входами-выходами в условиях параметрической неопределенности, внешних возмущений и насыщения регулирующего сигнала.

Предложена схема управления, обобщающая результаты [2, 6, 7] на случай структурной неопределенности модели объекта и возможности выбора структуры закона управления. Показано, что предложенный закон управления обеспечивает компенсацию параметрических и внешних возмущений. На базе функции, аппроксимирующей насыщение, предложен алгоритм управления в условиях ограничений на регулирующий сигнал. В отличие от [9, 11–15, 17–20], в статье получены условия на параметры объекта управления и регулятора, при выполнении которых схема управления будет работоспособной. Точность регулирования в установившемся режиме зависит от параметров модели объекта управления, закона управления и границ насыщения регулирующего сигнала. Приведены результаты моделирования, иллюстрирующие работоспособность схемы управления. Доказательство работоспособности закона управления базируется на лемме [10, 16], обобщенной для полиномов произвольного порядка.

7. Приложение

Доказательство утверждения 1. Подставим (9) в (5), и, принимая во внимание структуру функции $\varphi(t)$ и разложение (4), перепишем (5) в виде

$$Q(p)e(t) = -R(p)(1 - \alpha(p))^{-1} R_0^{-1}(p) Q_0(p)e(t) - Q(p)y_m(t) + f(t).$$

Преобразуем последнее уравнение к виду

$$P(p)e(t) = (1 - \alpha(p))R_0(p)(f(t) - Q(p)y_m(t)),$$

где $P(p) = (1 - \alpha(p))R_0(p)Q(p) + R(p)Q_0(p)$. Очевидно, что замкнутая система устойчива, если полином $P(\lambda)$ гурвицев для любых значений параметров объекта (1) из множества Ξ . Покажем, что существуют $\alpha(\lambda)$, $R_0(\lambda)$ и $Q_0(\lambda)$ такие, что будет обеспечена гурвицевость полинома $P(\lambda)$. Для этого сформулируем вспомогательную лемму.

Лемма. Пусть заданы многочлены $D(\lambda)$, $T(\lambda)$ порядков w и l соответственно. Тогда существуют многочлены $K(\lambda)$ и $G(\lambda)$

порядков $k \geq 0$ и $g \geq w - 1$ такие, что может быть получен произвольный многочлен $M(\lambda)$ порядка $\mu = \max \{w + k, l + g\}$, который определен следующим соотношением:

$$(П.1) \quad M(\lambda) = D(\lambda)K(\lambda) + G(\lambda)T(\lambda).$$

Доказательство леммы. Рассмотрим многочлены $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ порядков $l + z + \mu$ и $w + z + \mu$ ($z \geq 0$) соответственно, которые обеспечивают выполнение следующего условия:

$$(П.2) \quad D(\lambda)A(\lambda) + B(\lambda)T(\lambda) = M(\lambda),$$

Представив $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ в виде $A(\lambda) = \bar{A}(\lambda)M(\lambda)$ и $B(\lambda) = M(\lambda)\bar{B}(\lambda)$, где $\deg \bar{A}(\lambda) = l + z$, $\deg \bar{B}(\lambda) = w + z$, перепишем (П.2) в виде

$$(П.3) \quad D(\lambda)\bar{A}(\lambda)M(\lambda) + M(\lambda)\bar{B}(\lambda)T(\lambda) = M(\lambda).$$

Преобразуем $M(\lambda)\bar{B}(\lambda)$ как

$$(П.4) \quad M(\lambda)\bar{B}(\lambda) = D(\lambda)N(\lambda) + G(\lambda),$$

где $\deg N(\lambda) = \mu + z$. Подставив (П.4) в (П.3), получим

$$(П.5) \quad D(\lambda)[\bar{A}(\lambda)M(\lambda) + N(\lambda)T(\lambda)] + G(\lambda)T(\lambda) = M(\lambda).$$

Так как $\deg \bar{A}(\lambda)M(\lambda) = \deg N(\lambda)T(\lambda) \geq \deg K(\lambda)$, то выберем $\bar{A}(\lambda)$, $\bar{B}(\lambda)$ такими, что $\bar{A}(\lambda)M(\lambda) + N(\lambda)T(\lambda) = K(\lambda)$. Следовательно, соотношение (П.1) выполнено. Лемма доказана.

Лемма является обобщением Утверждения 1 в [10] и Леммы 2 в [16]. В [10, 16] рассматриваются многочлены $K(\lambda)$ и $G(\lambda)$ такие, что $\deg K(\lambda) = \deg G(\lambda) = w - 1$. Данные условия сужают класс разрабатываемых схем управления. Поскольку в лемме $\deg K(\lambda) = k \geq 0$ и $\deg G(\lambda) = g \geq w - 1$, то лемму можно применять к построению алгоритмов управления для структурно неопределенных объектов.

Согласно лемме существуют $\alpha(\lambda)$, $Q_0(\lambda)$, $R_0(\lambda)$ такие, что можно получить произвольный многочлен $P(\lambda)$, а, следовательно, обеспечить гурвицевость многочлена $P(\lambda)$. Соответствующим выбором $\alpha(\lambda)$, $Q_0(\lambda)$, $R_0(\lambda)$ можно обеспечить требуемое значение δ в целевом условии (2).

Доказательство утверждения 2. Рассмотрим два случая.

1. Предположим, что в процессе функционирования системы $|u_c(t)| \leq \tilde{u}$. Тогда из (10) следует, что $u(t) = u_c(t)$. Значит, будут выполнены условия утверждения 1. Выясним, при каких параметрах объекта и системы управления первый случай будет справедлив. Перепишем (5) в виде

$$(П.6) \quad e(t) = -Q_0^{-1}(p)R_0(p)(1 - \alpha(p))u_c(t).$$

Оценим (П.6) как $|e(t)| \leq W_1|u_c(t)| \leq W_1\tilde{u}$. Так как $|e(t)| \leq |\varepsilon(t)|$, то потребуем, чтобы было выполнено условие

$$(П.7) \quad |\varepsilon(0)| \leq W_1\tilde{u}.$$

Преобразуем уравнение (5) к виду

$$(П.8) \quad e(t) = Q_0^{-1}(p) \times \\ \times [f(t) - \Delta Q(p)e(t) - Q(p)y_m(t) + R(p)u(t)].$$

Оценим правую часть (П.8) как

$$(П.9) \quad Q_0^{-1}(p)[f(t) - \Delta Q(p)e(t) - Q(p)y_m(t) + R(p)u(t)] \leq \\ \leq W_2\bar{f} + W_3W_1\tilde{u} + W_4\bar{y}_m + W_5\tilde{u}.$$

Принимая во внимание $|e(t)| \leq W_1\tilde{u}$ и (П.9), потребуем выполнение условия

$$(П.10) \quad W_2\bar{f} + W_3W_1\tilde{u} + W_4\bar{y}_m + W_5\tilde{u} \leq W_1\tilde{u}.$$

Тогда из (П.10) следуют верхние оценки на \bar{f} и \bar{y}_m в виде

$$(П.11) \quad W_2\bar{f} + W_4\bar{y}_m \leq (W_1 - W_3W_1 - W_5)\tilde{u}, \\ W_1 - W_3W_1 - W_5 > 0.$$

В результате при $|u_c(t)| \leq \tilde{u}$ и при выполнении условий утверждения 1, (П.7) и (П.11) целевое условие (2) будет выполнено.

2. Рассмотрим случай, когда

$$(П.12) \quad \tilde{u} < |u_c(t)| \leq \bar{u}.$$

Так как $|e(t)| \leq |\varepsilon(t)|$ и $|u_c(t)| \leq \bar{u}$, то с учетом (П.7) потребуем, чтобы было выполнено условие (12). Оценим правую часть (П.8) как

$$(П.13) \quad Q_0^{-1}(p)[f(t) - Q(p)y_m(t) - \Delta Q(p)e(t) + R(p)u(t)] \leq \\ \leq W_2 \bar{f} + W_4 \bar{y}_m + (W_3 W_1 + W_5) \bar{u}.$$

Из (П.13) следует (15).

Подставив (П.13) в условие $|e(t)| \leq W_1 \bar{u}$, получим

$$(П.14) \quad W_2 \bar{f} + W_4 \bar{y}_m + (W_3 W_1 + W_5) \bar{u} \leq W_1 \bar{u}.$$

Тогда из (П.14) следуют оценки (13).

В результате при $|u_c(t)| \leq \bar{u}$ и выполнении условий утверждения 1 и оценок (12), (13) будет выполнено целевое условие (2). Результирующие оценки (12), (13) следуют из того, что правые части (12) и (13) меньше, чем правые части (П.7) и (П.11) соответственно.

Теперь определим оценку для коэффициента σ , при котором $|u_c(t)| \leq \bar{u}$. Для этого оценим (10) как

$$\frac{1}{1+\sigma} \left(u_c(t) + \sigma \tilde{u} \operatorname{sat} \left(\frac{u_c(t)}{\tilde{u}} \right) \right) \leq \bar{u}.$$

Разрешим последнее неравенство относительно σ .

$$\sigma \geq \frac{\bar{u} - u_c(t)}{\bar{u} - \tilde{u} \operatorname{sat} \left(\frac{u_c(t)}{\tilde{u}} \right)}.$$

Оценим сверху правую часть последнего неравенства в виде

$$(П.15) \quad \frac{\bar{u} - u_c(t)}{\bar{u} - \tilde{u} \operatorname{sat} \left(\frac{u_c(t)}{\tilde{u}} \right)} \leq \frac{\bar{u} + |u_c(t)|}{\bar{u} - \tilde{u}} \leq \frac{\bar{u} + W_1 |e(t)|}{\bar{u} - \tilde{u}}.$$

С учетом (П.15) и (15) получим результирующую оценку для σ в виде (14).

Очевидно, что оценки (12)–(15) достаточно грубые, но из них видно, что существуют определенные значения параметров объекта, эталонной модели и регулятора, при которых в условиях насыщения сигнала управления можно обеспечить выполнение целевых условий (2) и (3).

Литература

1. БОБЦОВ А.А. *Синтез закона управления для стабилизации нелинейной системы по измерениям выхода* // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2004. – №3. – С. 40–45.
2. БОБЦОВ А.А., ШАВЕТОВ С.В. *Управление по выходу линейным параметрически неопределенным объектом в условиях возмущающих воздействий и неучтенной динамики* // Научно-технический вестник Санкт-Петербургского государственного университета информационных технологий, механики и оптики. – 2011. – №1(71). – С. 33–39.
3. МИРОШНИК И.В., НИКИФОРОВ В.О., ФРАДКОВ А.Л. *Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами*. – СПб: Наука, 2000. – 549 с.
4. ФУРТАТ И.Б., ЦЫКУНОВ А.М. *Адаптивное управление объектами с неизвестной относительной степенью* // Автоматика и телемеханика. – 2010. – №6. – С. 109–118.
5. ФУРТАТ И.Б., ЦЫКУНОВ А.М. *Робастное управление нестационарными нелинейными структурно неопределенными объектами* // Проблемы управления. – 2008. – №5. – С. 2–7.
6. ЦЫКУНОВ А.М. *Алгоритм робастного управления линейными динамическими объектами по выходу* // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2010. – №3. – С. 9–14.
7. ЦЫКУНОВ А.М. *Алгоритм робастного управления нестационарным линейным объектом с компенсацией возмущений* // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2008. – №4. – С. 33–40.
8. ATASSI A.N., KHALIL H.K. *A separation principle for the stabilization of class of nonlinear systems* // IEEE Trans. on Automat. Control. – 1999. – Vol. 44, No. 9. – P. 1672–1687.
9. EDWARDS C., POSTLETHWAITE I. *Anti-windup and Bumpless-transfer Schemes* // Automatica. – 1998. – Vol. 34, No. 2. – P. 199–210.

10. FEUER A., MORSE A.S. *Adaptive control of single-input, single-output linear systems* // IEEE Trans. on Automat. Control. – 1978. – Vol. AC-23, No. 4. – P. 557–569.
11. KANEKO K., OHISHI K. *Anti-windup robust controller considering motor dynamics for speed servo system* // IEEE Int. Conference on Mechatronics (ICM-2013), Vicenza, VI, Italy. – 2013. – P. 694–699.
12. KAPASOURIS P., ATHANS M. *Multivariable Control Systems with Saturating Actuators Antireset Windup Strategies* // American Control Conf. – Boston. – 2004. – P. 1579–1584.
13. LEONOV G.A., ANDRIEVSKII B.R., KUZNETSOV N.V., POGROMSKII A.YU. *Aircraft Control with Anti-Windup Compensation* // Differential Equations. – 2012. – Vol. 48, No. 13. – P. 1700–1720.
14. LOZIER J.C. *A steady-state approach to the theory of saturable servo systems* // IRE Trans. on Automatic Control. – 1956. – May. – P. 19–39.
15. MONOPOLI R. *Adaptive Control for Systems for Hard Saturation* // 14th IEEE Conf. on Decision and Control. – Houston, TX. – 1975. – P. 841–842.
16. NARENDRA K.S., VALAVANI L.S. *Stable Adaptive Controller Design – Direct Control* // IEEE Trans. on Automat. Control. – 1978. – Vol. AC-23, No. 4. – P. 570–583.
17. PATRA S., SEN S., RAY G. *Robust control of uncertain LTI plant with input saturation constraint: H_∞ -loop-shaping approach* // Int. J. of Systems Science. – 2010. – Vol. 41, No. 11. – P. 1337–1351.
18. SCHWAGER M., ANNASWAMY A.M. *Direct Adaptive Control of Multi-Input Plants with Magnitude Saturation Constrains* // 44th IEEE Conf. on Decision and Control, and the European Control Conf. – Seville, Spain. – 2005. – P. 783–788.
19. WEN C., ZHOU J., LIU Z., SU H. *Robust Adaptive Control of Uncertain Nonlinear Systems in the Presence of Input Saturation and External Disturbance* // IEEE Trans. on Automatic Control. – 2011. – Vol. 56, No. 7. – P. 1672–1678.

20. YANG Q., CHEN M. *Robust Control for Uncertain Linear System Subject to Input Saturation* // J. of Applied Mathematics. – 2014. –Vol. 2014. – Article ID 803842. – 12 p.

ALGORITHM FOR DYNAMIC COMPENSATION OF DISTURBANCES UNDER INPUT SIGNAL SATURATION

Igor Furtat, Institute of Problems of Mechanical Engineering Russian Academy of Sciences, ITMO University, Dr.Sc., assistant professor (cainenash@mail.ru).

Abstract: The new algorithm for dynamic compensation of disturbances for linear plants with single input and single output under conditions of parametric uncertainty and external bounded disturbances is proposed. We consider the problem of tracking the plant output to the reference signal without measuring output derivatives. The algorithm is generalized to the given constraints on the control signal. We formulate the conditions depending on the parameters of the plant and the control signal which allow to ensure the stability of the closed loop system. The simulation results illustrate efficiency of the proposed algorithm.

Keywords: robust control, disturbances compensation, control signal constraints.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии А.П. Курдюковым.

*Поступила в редакцию 09.02.2016.
Опубликована 31.01.2017.*

УДК 681.51

ББК Ж 50

**РОБАСТНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМИ
МУЛЬТИАГЕНТНЫМИ СИСТЕМАМИ
С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЛЕВЫХ РАЗНОСТЕЙ
ДЛЯ ОЦЕНКИ ПРОИЗВОДНЫХ¹**

Фуртат И. Б.²

*(Институт проблем машиноведения, Санкт-Петербург,
Университет ИТМО, Санкт-Петербург)*

Нехороших А. Н.³

(Университет ИТМО, Санкт-Петербург)

Предложен робастный алгоритм управления линейными мультиагентными системами в условиях параметрической и структурной неопределенности и внешнего неконтролируемого возмущения. Полученный алгоритм обеспечивает слежение выхода каждого агента за эталонными сигналами с заданной точностью. Приведены результаты моделирования, иллюстрирующие работоспособность алгоритма.

Ключевые слова: робастное управление, задержка, линейно-матричные неравенства (LMI), функционал Ляпунова–Красовского, дескрипторный метод.

¹ Результаты раздела 3 получены в ИПМаш РАН при поддержке РФФ (проект №14-29-00142). Результаты разделов 4 и 5 получены при поддержке гранта Президента Российской Федерации (договор №14.W01.16.6325-МД (МД-6325.2016.8)). Другие исследования частично поддержаны грантами РФФИ (№16-08-00282, №16-08-00686), МОН РФ (проект 14.Z50.31.0031) и Правительства РФ (074-U01).

² Игорь Борисович Фуртат, доктор технических наук, доцент (cainenash@mail.ru).

³ Артём Николаевич Нехороших, инженер (becks94@mail.ru).

1. Введение

Управление мультиагентными системами в условиях неопределенностей и измерения только выхода объекта является актуальной задачей современной теории и практики автоматического регулирования. Децентрализованная схема управления позволяет использовать опыт решения проблемы управления независимыми объектами. Для построения таких схем управления эффективными являются способы адаптивного и робастного управления, где на сегодняшний день предложено достаточно много решений. Если относительная степень объекта больше единицы, то для реализации адаптивных и робастных систем управления необходимы оценки производных входа и выхода объекта, для получения которых, как правило, используются различные динамические наблюдатели.

Для оценки вектора состояния модели объекта с известными параметрами при отсутствии внешнего возмущения широко используется наблюдатель Люенбергера [10]. В [9] предложен фильтр Калмана, оценивающий вектор состояния динамической системы при использовании ряда неполных и зашумленных измерений. В условиях параметрической неопределенности модели объекта и наличия внешних возмущений в [5] был предложен робастный наблюдатель с большим коэффициентом усиления (*high-gain observer*). Другой вид наблюдателя с большим коэффициентом усиления позже был рассмотрен в [1]. В [11, 12] предложен робастный наблюдатель на скользящем режиме (*sliding-mode observer*). В [8] разработан нелинейный наблюдатель расширенного состояния (*nonlinear extended state observer*), основанный на обобщении наблюдателя с большим коэффициентом усиления и наблюдателя на скользящем режиме. В [14] представлен обзор наблюдателей [5, 8, 10–12], примеры расчета и реализации для динамической системы второго порядка, а также приведен сравнительный анализ для каждого наблюдателя при различных видах неопределенностей (параметрическая неопределенность, внешние возмущения и шумы).

Робастные наблюдатели [1, 5, 8, 10–12] нашли широкое применение при синтезе систем управления в условиях неопре-

деленности. Например, в [13] строится закон управления с оценкой производных выхода объекта, которые реализуются с помощью динамического наблюдателя на скользящем режиме [11, 12], где порядок наблюдателя равен размерности вектора состояния модели объекта. В [4] для синтеза системы стабилизации нелинейных динамических объектов используется закон управления, зависящий от оценок производных выхода объекта, которые получены с помощью динамического наблюдателя с большим коэффициентом усиления [5] и порядком, равным размерности вектора состояния модели. В [1] синтезируется робастный закон управления по ошибке слежения, где для оценки производных сигнала ошибки слежения используется наблюдатель с динамическим порядком, равным $\gamma - 1$, где γ – относительная степень объекта управления. В [3] синтезирована робастная система управления с компенсацией внутренних и внешних возмущений с использованием вспомогательного контура. Для оценки производных сигнала, несущего в себе информацию о возмущениях объекта, в [3] используется динамический наблюдатель [5], порядок которого равен $\gamma - 1$.

В [2] предложен регулятор, где для оценки производных используется алгоритм с левыми разностями. В отличие от регуляторов, рассмотренных выше, алгоритм [2] обладает простой структурой, прост в расчете и реализации системы управления и доставляет замкнутой системе требуемые показатели качества. Простота регулятора [2] заключается в его последовательной структуре, т.е. отсутствии обратных связей, имеющих в регуляторах [1, 3–5, 8–13]. Простота реализации заключается в наличии только звеньев с запаздыванием в составе регулятора. Данные качества являются важными при построении системы управления большой группой объектов и позволяют значительно уменьшить общую сложность системы управления. Поэтому статья посвящена обобщению применения регулятора [2] на случай децентрализованного управления линейной мультиагентной системой.

В статье рассматривается построение робастной системы децентрализованного управления по выходу линейными динамическими мультиагентными системами в условиях параметри-

ческой и структурной неопределенности и действия внешних ограниченных возмущений. Для оценки производных в системе управления используются наблюдатели [2], основанные на левых разностях. Приведены результаты моделирования, иллюстрирующие работоспособность алгоритма.

2. Постановка задачи

Пусть динамические процессы каждого агента S_i системы S описываются уравнениями

$$(1) \quad Q_i(p)y_i(t) = k_i R_i(p)u_i(t) + \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^N Y_{ij}(p)y_j(t) + f_i(t),$$

$$p^{k-1}y_i(0) = y_{i0k}, \quad k = 1, \dots, n_i, \quad i, j = 1, \dots, N,$$

где $y_i(t) \in R$ – регулируемая переменная; $u_i(t) \in R$ – сигнал управления; $f_i(t) \in R$ – внешнее неконтролируемое ограниченное возмущение; $Q_i(p)$, $R_i(p)$, $Y_{ij}(p)$ – линейные дифференциальные операторы с неизвестными коэффициентами, $\deg Q_i(p) = n_i$, $\deg R_i(p) = m_i$, $\deg Y_{ij}(p) = n_{ij}$, $n_i > m_i$, $n_i > n_{ij}$, $n_j > n_{ij}$; $k_i > 0$; y_{i0k} – неизвестные начальные условия; $p = d/dt$ – оператор дифференцирования.

При решении задачи на агенты (1) наложены следующие ограничения.

Предположение 1. Неизвестные коэффициенты операторов $Q_i(p)$, $R_i(p)$, $Y_{ij}(p)$ и числа принадлежат известному ограниченному множеству возможных значений Ξ .

Предположение 2. Многочлены $R_i(\lambda)$ – гурвицевы, где λ – комплексная переменная.

Предположение 3. Доступны измерению сигналы $y_i(t)$ и $u_i(t)$, но не их производные.

Требуется спроектировать непрерывную систему управления, обеспечивающую слежение выхода каждого агента $y_i(t)$ за эталонным сигналом $y_{mi}(t)$ так, чтобы было выполнено целевое условие

$$(2) \quad |y_i(t) - y_{mi}(t)| < \delta \quad \text{при } t > T,$$

где $y_{mi}(t)$ – гладкая функция, ограниченная вместе со своими производными, $\delta > 0$, $T > 0$ – время, начиная с которого должно быть выполнено целевое условие (2).

3. Управление структурно определенными объектами

Сначала рассмотрим случай, когда порядки операторов $Q_i(p)$, $R_i(p)$, $Y_{ij}(p)$ известны. Принимая во внимание уравнения (1) и (2), сформируем ошибку слежения $e_i(t) = y_i(t) - y_{mi}(t)$ в виде

$$(3) \quad Q_i(p)e_i(t) = k_i R_i(p)u_i(t) + \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^N Y_{ij}(p)y_j(t) + f_i(t) - Q_i(p)y_{mi}(t),$$

$i, j = 1, \dots, N.$

Из постановки задачи производные $y_i(t)$ и $u_i(t)$ не доступны измерению (предположение 3), тогда зададим закон управления в форме

$$(4) \quad u_i(t) = -\alpha_i \sum_{v=0}^{\gamma_i} d_{vi} \bar{e}_i^{(v)}(t), \quad i = 1, \dots, N,$$

где $\alpha_i > 0$, коэффициенты $d_{0i}, d_{1i}, \dots, d_{\gamma_i i}$ выбираются так, чтобы полиномы $D_i(\lambda) = d_{\gamma_i i} \lambda^{\gamma_i} + d_{(\gamma_i-1)i} \lambda^{\gamma_i-1} + \dots + d_{1i} \lambda + d_{0i}$ были гурвицевыми, $\gamma_i = n_i - m_i$ – относительная степень i -го агента, $\bar{e}_i^{(v)}(t)$ – оценка v -й производной сигнала $e_i(t)$.

Подставим (4) в (3) и перепишем (3) в виде

$$(5) \quad F_i(p)e_i(t) = \psi_i(t) + \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^N Y_{ij}(p)e_j(t), \quad i, j = 1, \dots, N,$$

где $F_i(p) = Q_i(p) + \alpha_i k_i R_i(p) D_i(p)$,

$$\begin{aligned} \psi_i(t) = & f_i(t) - Q_i(p)y_{mi}(t) + \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^N Y_{ij}(p)y_{mj}(t) + \alpha_i k_i R_i(p) \times \\ & \times \left(D_i(p)e_i(t) - \sum_{v=0}^{\gamma_i} d_{vi} \bar{e}_i^{(v)}(t) \right). \end{aligned}$$

Для реализации закона управления (4) воспользуемся выражениями

$$(6) \quad \begin{aligned} \bar{e}_i(t) &= e_i(t), \\ \bar{e}_i^{(1)}(t) &= \frac{\bar{e}_i(t) - \bar{e}_i(t-h)}{h}, \bar{e}_i^{(2)}(t) = \frac{\bar{e}_i^{(1)}(t) - \bar{e}_i^{(1)}(t-h)}{h}, \dots, \\ \bar{e}_i^{(\gamma_i)}(t) &= \frac{\bar{e}_i^{(\gamma_i-1)}(t) - \bar{e}_i^{(\gamma_i-1)}(t-h)}{h}, \quad i = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Очевидно, что с помощью уравнений (6) можно оценить производные сигнала $e_i(t)$ с использованием левых разностей. Подставив (6) в (4), получим систему управления, представленную уравнением

$$(7) \quad u_i(t) = -\alpha_i \sum_{v=0}^{\gamma_i} \left[\frac{d_{vi}}{h^v} \sum_{j=0}^v (-1)^j C_v^j e(t-jh) \right], \quad i = 1, \dots, N,$$

где $C_v^j = \frac{v!}{j!(v-j)!}$ – биномиальные коэффициенты.

Перепишем функции $\psi_i(t)$ в виде суммы

$$(8) \quad \psi_i(t) = \alpha_i k_i R_i(p) g_i(t) + \varphi_i(t),$$

где $\varphi_i(t) = f_i(t) - Q_i(p) y_{mi}(t) + \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^N Y_{ij}(p) y_{mj}(t)$,

$$g_i(t) = D_i(p) e_i(t) - \sum_{v=0}^{\gamma_i} d_{vi} \bar{e}_i^{(v)}(t).$$

Тогда уравнение (5) можно представить в виде

$$(9) \quad \begin{cases} \dot{\varepsilon}_i(t) = A_i \varepsilon_i(t) + \alpha_i k_i B_{1i} g_i(t) + B_{2i} \varphi_i(t) + \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^N B_{3ij} \varepsilon_j(t), \\ e_i(t) = L_i \varepsilon_i(t), \quad i, j = 1, \dots, N, \end{cases}$$

где $\varepsilon_i(t) = [\varepsilon_{i1}(t), \varepsilon_{i2}(t), \dots, \varepsilon_{imi}(t)]$ – вектор последовательных производных ошибки $e_i(t)$, т.е. $\varepsilon_{ij}(t) = e_i^{(j-1)}(t)$, $j = 1, \dots, n_i$; $A_i, B_{1i}, B_{2i}, B_{3ij}, L_i = [1 \ 0 \ \dots \ 0]$ – матрицы, полученные при переходе от (5) к (9).

Учитывая структуру выражения $g_i(t)$, (8) и управляющее воздействие (7), перепишем первое уравнение системы (9):

$$(10) \left\{ \begin{array}{l} \dot{\varepsilon}_i(t) = -\alpha_i k_i B_{1i} \times \\ \quad \times \left[\sum_{v=0}^{\gamma_i} \frac{d_{vi}}{h^v} L_i \varepsilon_i(t) + \sum_{v=1}^{\gamma_i} \sum_{j=1}^v \frac{d_{vj}}{h^v} (-1)^j C_v^j L_i \varepsilon_i(t - jh) \right] + \\ \quad + A_i \varepsilon_i(t) + \alpha_i k_i B_{1i} \rho_i^T \varepsilon_i(t) + B_{2i} \varphi_i(t) + \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^N B_{3ij} \varepsilon_j(t), \\ e_i(t) = L_i \varepsilon_i(t), i, j = 1, \dots, N, \end{array} \right.$$

где вектора ρ_i составлены из коэффициентов операторов $D_i(p)$.

Введем следующие обозначения:

$$\tilde{A}_i = A_i + \alpha_i k_i B_{1i} \rho_i^T - \alpha_i k_i B_{1i} \sum_{v=0}^{\gamma_i} \frac{d_{vi}}{h^v} L_i,$$

$$A = \text{diag} \{ \tilde{A}_1 \quad \tilde{A}_2 \quad \dots \quad \tilde{A}_N \},$$

$$\tilde{F}_{vj}^i = \begin{cases} -\alpha_i k_i B_{1i} \frac{d_{vj}}{h^v} (-1)^j C_v^j L_i, & \text{если } j \leq v \leq \gamma_i, \\ O, & \text{в противном случае} \end{cases},$$

$$F_{vj} = \text{diag} \{ \tilde{F}_{vj}^1 \quad \tilde{F}_{vj}^2 \quad \dots \quad \tilde{F}_{vj}^N \}, i, j = 1, \dots, N,$$

$$Y = \begin{bmatrix} O & B_{312} & \dots & B_{31N} \\ B_{321} & O & \dots & B_{32N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{3N1} & B_{3N2} & \dots & O \end{bmatrix},$$

$$B = \text{diag} \{ B_{21} \quad B_{22} \quad \dots \quad B_{2N} \},$$

$$\varepsilon(t) = [\varepsilon_1^T(t) \quad \varepsilon_2^T(t) \quad \dots \quad \varepsilon_N^T(t)]^T,$$

$$\varphi(t) = [\varphi_1^T(t) \quad \varphi_2^T(t) \quad \dots \quad \varphi_N^T(t)]^T,$$

где O – нулевая матрица соответствующей размерности. Тогда с учетом обозначений можно переписать систему (10)

$$(11) \quad \dot{\varepsilon}(t) = (A + Y)\varepsilon(t) + \sum_{v=1}^{\gamma_i} \sum_{j=1}^v F_{vj} \varepsilon(t - jh) + B\varphi(t).$$

Для формулировки главного результата введем еще следующие обозначения:

$$\Psi_{11}^{11} = P_2^T A_s + A_s^T P_2 + \sum_{v=1}^{\gamma} \sum_{j=1}^v S_{vj},$$

$$\Psi_{11}^{12} = P - P_2^T + A_s^T P_3,$$

$$\Psi_{11}^{22} = -P_3 - P_3^T + \sum_{v=1}^{\gamma} \sum_{j=1}^v jhR_{vj},$$

$$\Psi_{11} = \begin{bmatrix} \Psi_{11}^{11} & \Psi_{11}^{12} \\ * & \Psi_{11}^{22} \end{bmatrix},$$

$$\Psi_{12} = \begin{bmatrix} P_2^T \sum_{v=1}^{\gamma} F_{v1} & 2P_2^T \sum_{v=1}^{\gamma} F_{v2} & \dots & \gamma P_2^T \sum_{v=1}^{\gamma} F_{v\gamma} \\ P_3^T \sum_{v=1}^{\gamma} F_{v1} & 2P_3^T \sum_{v=1}^{\gamma} F_{v2} & \dots & \gamma P_3^T \sum_{v=1}^{\gamma} F_{v\gamma} \end{bmatrix},$$

$$\Psi_{13} = \begin{bmatrix} P_2^T B \\ O \end{bmatrix},$$

$$\Psi_{22} = -he^{-2\chi h} \text{diag} \left\{ \sum_{v=1}^{\gamma} R_{v1}, 2 \sum_{v=1}^{\gamma} R_{v2}, \dots, \gamma \sum_{v=1}^{\gamma} R_{v\gamma} \right\},$$

$$\Psi_{33} = -\beta I,$$

$$\Psi = \begin{bmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} & \Psi_{13} \\ * & \Psi_{22} & O \\ * & * & \Psi_{33} \end{bmatrix},$$

где $\gamma = \max_{i=1, \dots, N} \{\gamma_i\}$; $A_s = A + Y + \sum_{v=1}^{\gamma_i} \sum_{j=1}^v F_{vj}$, $P > 0$, $P_2 > 0$, $P_3 > 0$, $S_{vj} > 0$,

$R_{vj} > 0$, $j \leq v = 1, \dots, \gamma$ – матрицы соответствующих размерностей; I – единичная матрица.

Утверждение 1. Выполнены условия предположений 1–3. Задано число $\chi > 0$. Если существуют $\beta > 0$ и матрицы $P > 0$, $P_2 > 0$, $P_3 > 0$, $S_{vj} > 0$, $R_{vj} > 0$, $j \leq v = 1, \dots, \gamma$, такие что матрица $\Psi < 0$, тогда система управления, представленная законом управления (7), обеспечивает выполнение целевого условия (2) с точностью в установившемся режиме

$$(12) \delta = \Delta \sqrt{\frac{\beta}{2\chi\lambda_{\min}(P)}},$$

и ограниченность всех сигналов в замкнутой системе. В (12)

$$\Delta = \sqrt{\sup_t \{\varphi^T(t)\varphi(t)\}}.$$

Доказательство утверждения приведено в Приложении.

Отметим, что оценка (12), записанная в форме [6, 7], не зависит от h . Однако выражение (12) зависит от $\lambda_{\min}(P)$, где P является решением линейного матричного неравенства $\Psi(h) < 0$.

4. Управление структурно неопределенными объектами

Теперь рассмотрим случай, когда порядки операторов $Q_i(p)$, $R_i(p)$, $Y_{ij}(p)$ неизвестны. Для решения задачи на систему (1) дополнительно к предположениям 1–3 наложим следующее ограничение.

Предположение 4. Известны верхние оценки $\bar{\gamma}_i$ относительной степени γ_i , т.е. $\gamma_i \leq \bar{\gamma}_i$.

Цель управления состоит в выполнении условия (2).

Принимая во внимание уравнения (1) и (2), сформируем ошибку слежения $e_i(t) = y_i(t) - y_{mi}(t)$ в виде (3).

Зададим закон управления в форме

$$(13) u_i(t) = -\alpha_i \sum_{v=0}^{\bar{\gamma}_i} d_{vi} \bar{e}_i^{(v)}(t), \quad i = 1, \dots, N,$$

где $\alpha_i > 0$, коэффициенты $d_{0i}, d_{1i}, \dots, d_{\bar{\gamma}_i i}$ выбираются так, чтобы полиномы $D_i(\lambda) = d_{\bar{\gamma}_i i} \lambda^{\bar{\gamma}_i} + d_{(\bar{\gamma}_i - 1)i} \lambda^{\bar{\gamma}_i - 1} + \dots + d_{1i} \lambda + d_{0i}$ были гурвицевыми. Подставив (13) в (3), получим уравнение вида (5). Очевидно, что всегда существуют числа α_i и полиномы $D_i(\lambda)$ такие, что полиномы $F_i(\lambda)$ будут гурвицевыми.

Для оценки производных сигнала $e_i(t)$ воспользуемся следующими уравнениями

$$\bar{e}_i(t) = e_i(t),$$

$$(14) \quad \bar{e}_i^{(1)}(t) = \frac{\bar{e}_i(t) - \bar{e}_i(t - k_1 h)}{k_1 h}, \bar{e}_i^{(2)}(t) = \frac{\bar{e}_i^{(1)}(t) - \bar{e}_i^{(1)}(t - k_2 h)}{k_2 h}, \dots,$$

$$\bar{e}_i^{(\bar{\gamma}_i)}(t) = \frac{\bar{e}_i^{(\bar{\gamma}_i - 1)}(t) - \bar{e}_i^{(\bar{\gamma}_i - 1)}(t - k_{\bar{\gamma}_i} h)}{k_{\bar{\gamma}_i} h}, \quad i = 1, \dots, N.$$

Здесь $\bar{e}^{(i)}(t)$ – оценка i -й производной сигнала $e_i(t)$, $k_1 > k_2 > \dots > k_{\bar{\gamma}_i} > 0$. Уменьшение запаздывания в каждом последующем уравнении (14) необходимо для увеличения точности оценки каждой последующей производной.

Введем множество $\Theta_i = \{1, \dots, \bar{\gamma}_i\}$, $i = 1, \dots, N$. Подставив (14) в (13), получим

$$(15) \quad u_i(t) = -\alpha_i \left[d_{0i} e_i(t) + d_{1i} \frac{e_i(t) - e_i(t - k_1 h)}{k_1 h} + \dots + \right.$$

$$+ \frac{d_{\bar{\gamma}_i}}{h^{\bar{\gamma}_i} \prod_{i=1}^{\bar{\gamma}_i} k_i} \left(e_i(t) - \sum_{i_1 \in \Theta_i} e_i(t - k_{i_1} h) + \sum_{\substack{i_1, i_2 \in \Theta_i, \\ i_1 < i_2}} e_i(t - h(k_{i_1} + k_{i_2})) + \dots + \right.$$

$$\left. \left. + \sum_{\substack{i_1, i_2, \dots, i_{\bar{\gamma}_i} \in \Theta_i, \\ i_1 < i_2 < \dots < i_{\bar{\gamma}_i}}} e_i(t - h(k_{i_1} + k_{i_2} + \dots + k_{i_{\bar{\gamma}_i}})) \right) \right], \quad i = 1, \dots, N.$$

В результате уравнение замкнутой системы будет представлено выражением (9), где $A_i, B_{1i}, B_{2i}, B_{3ij}, L_i, = [1 \ 0 \ \dots \ 0]$ – матрицы, полученные при переходе от (5) к (9).

Утверждение 2. Выполнены условия предположений 1–4. Существуют коэффициенты $\alpha_i > 0$, $k_1 > k_2 > \dots > k_{\bar{\gamma}_i} > 0$, $i = 1, \dots, N$ и число $h > 0$ такие что, система управления, представленная законом управления (13), обеспечивает выполнение целевого условия (2) и ограниченность всех сигналов в замкнутой системе.

Доказательство утверждения 2 подобно доказательству утверждения 1, поэтому здесь не приводится.

5. Примеры

1. Пусть динамические процессы каждого агента S_i системы S описываются уравнениями

$$(16) \begin{cases} (p^3 + q_{11}p^2 + q_{12}p + q_{13})y_1(t) = k_1(p + r_{11})u_1(t) + n_{12}y_2(t) + f_1(t), \\ (q_{20}p^2 + q_{21}p + q_{22})y_2(t) = k_2u_2(t) + n_{21}y_1(t) + f_2(t). \end{cases}$$

Множество Ξ определено следующими неравенствами

$$(17) \begin{cases} q_{20} = 1, & -3 \leq q_{1i} \leq 3, & -3 \leq q_{2j} \leq 3, & i = 1, 2, 3, & j = 1, 2, \\ 1 \leq k_1 \leq 3, & 1 \leq r_{11} \leq 5, & 1 \leq k_2 \leq 5, & 1 \leq n_{12} \leq 12, & 1 \leq n_{21} \leq 12. \end{cases}$$

Предположим, что $|f_1(t)| \leq 10$, $|f_2(t)| \leq 10$ и порядки операторов в (16) известны.

Пусть $d_2 = 10^{-5}$, $d_1 = 0,1$, $d_0 = 10$. Тогда управляющее воздействие (4) переписывается в виде

$$(18) \begin{aligned} u_i(t) = & -\alpha_i \left(10e_i(t) + 0,1 \frac{e_i(t) - e_i(t-h)}{h} + \right. \\ & \left. + 10^{-5} \frac{e_i(t) - 2e_i(t-h) + e_i(t-2h)}{h^2} \right) = \\ & = -\alpha_i h^2 \left([10h^2 + 0,1h + 10^{-5}]e_i(t) - [0,1h + 2 \cdot 10^{-5}]e_i(t-h) + \right. \\ & \left. + 10^{-5}e_i(t-2h) \right), \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Пусть параметры в (16) заданы следующим образом

$$(19) \begin{cases} q_{11} = 3, & q_{12} = 3, & q_{13} = 3, & k_1 = 3, & r_{11} = 3, & n_{12} = 3, \\ f_1(t) = 1 + \sin(t), & y_1(0) = 1, & \dot{y}_1(0) = 1, & \ddot{y}_1(0) = 1; \\ q_{21} = 3, & q_{22} = 3, & k_2 = 3, & n_{21} = 3, & f_2(t) = 2 + 3\sin(3t), \\ y_2(0) = 1, & \dot{y}_2(0) = 1. \end{cases}$$

Положим, что эталонные сигналы заданы в виде $y_{m1}(t) = y_{m2}(t) = \sin(0,7t)$. На рис. 1 представлены результаты моделирования по ошибке $e_i(t) = y_i(t) - y_{mi}(t)$ при $\alpha_i = 25$ и $h = 0,05$, $i = 1, 2$. График для $e_1(t)$ изображен пунктирной кривой, график для $e_2(t)$ – непрерывной.

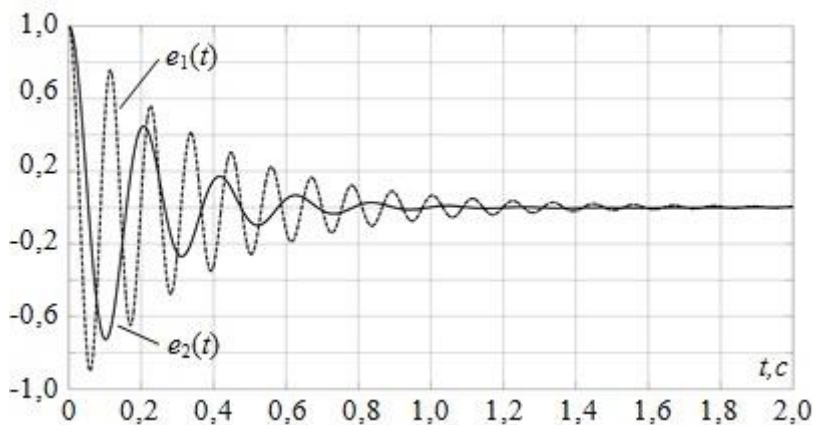


Рис. 1. Результаты моделирования по ошибке при $\alpha_i = 25$ и $h = 0,05$, $i = 1, 2$

Из рис. 1 видно, что заданная точность $\delta = 0,01$ достигается первой системой за время $t_1 = 1,68$ с, второй – за $t_1 = 1,05$ с.

На рис. 2 представлены результаты моделирования по ошибке $e_i(t) = y_i(t) - y_{mi}(t)$ при $\alpha_i = 25$ и $h = 0,01$, $i = 1, 2$.

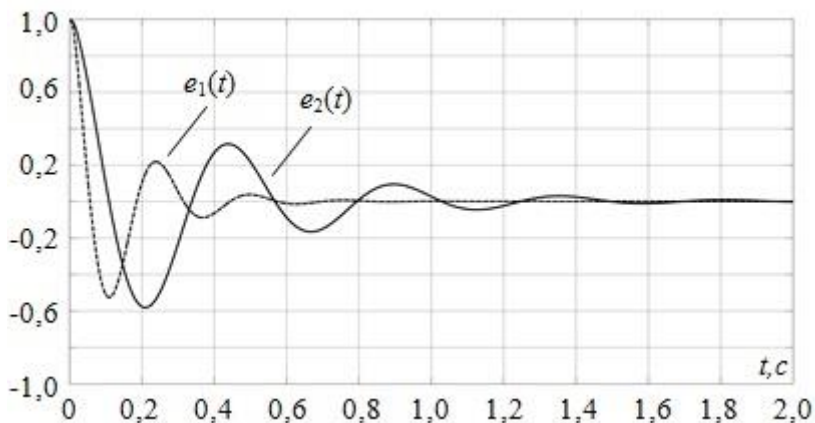


Рис. 2. Результаты моделирования по ошибке при $\alpha_i = 25$ и $h = 0,01$, $i = 1, 2$

Из рис. 2 видно, что заданная точность $\delta = 0,01$ достигается первой системой за время $t_1 = 0,33$ с, второй – за $t_2 = 0,91$ с. Таким образом, уменьшение времени h позволяет увеличить точность системы управления.

2. Пусть динамические процессы каждого агента S_i системы S описываются уравнениями (16), где $q_{20} = 0$ и $q_{21} = 1$. Предположим теперь, что порядки операторов в (16) неизвестны.

Пусть $\bar{\gamma}_1 = \bar{\gamma}_2 = 2$. Положим, что $h = 0,01$, $k_1 = 1$, $k_2 = 0,1$, $d_2 = 10^{-5}$, $d_1 = 0,1$, $d_0 = 10$.

Тогда управляющее воздействие (4) переписывается в виде

$$\begin{aligned}
 u_i(t) &= -\alpha_i \left(10e_i(t) + 0,1 \frac{e_i(t) - e_i(t-h)}{h} + \right. \\
 (20) \quad & \left. + 10^{-5} \frac{e_i(t) - e_i(t-h) - e_i(t-0,1h) + e_i(t-1,1h)}{0,1h^2} \right) = \\
 & = -\alpha_i h^{-2} \left[[h^2 + 0,01h + 10^{-6}] e_i(t) - [0,01h + 10^{-5}] e_i(t-h) - \right. \\
 & \quad \left. - 10^{-6} e_i(t-0,1h) + 10^{-6} e_i(t-1,1h) \right], \quad i = 1, 2.
 \end{aligned}$$

На рис. 3 представлены результаты моделирования по ошибке $e_i(t) = y_i(t) - y_{mi}(t)$ при $\alpha_i = 25$ и $h = 0,05$, $i = 1, 2$.

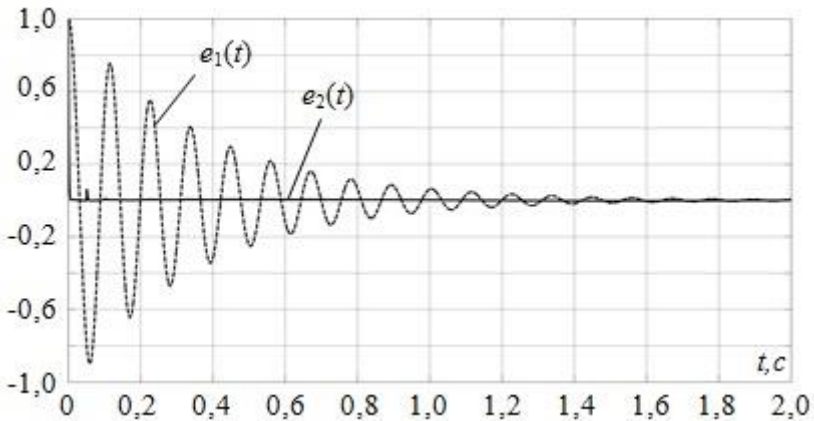


Рис. 3. Результаты моделирования по ошибке при $\alpha_i = 25$ и $h = 0,05$, $i = 1, 2$

Из рис. 3 видно, что заданная точность $\delta = 0,01$ достигается первой системой за время $t_1 = 1,68$ с, второй – за $t_2 = 0,10$ с.

На рис. 4 представлены результаты моделирования по ошибке $e_i(t) = y_i(t) - y_{mi}(t)$ при $\alpha_i = 25$ и $h = 0,01$, $i = 1, 2$.

Из рис. 4 видно, что заданная точность $\delta = 0,01$ достигается первой системой за время $t_1 = 0,33$ с, второй – за $t_2 = 0,04$ с. Таким образом, уменьшение времени h позволяет увеличить точность системы управления так же, как и в случае со структурно определенными объектами.

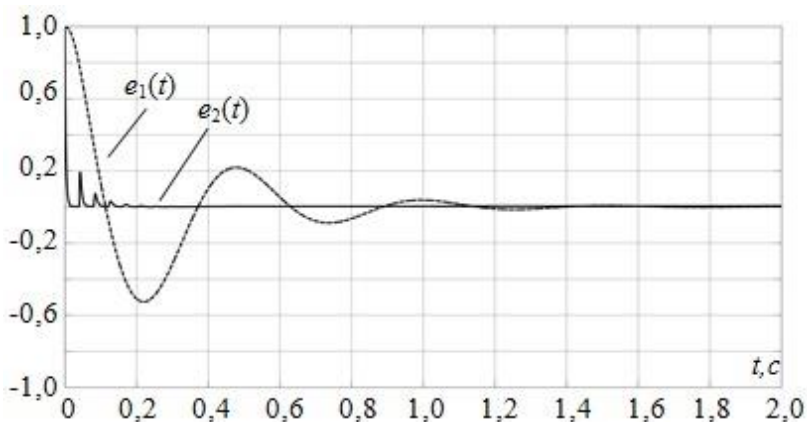


Рис. 4. Результаты моделирования по ошибке при $\alpha_i = 25$ и $h = 0,01$, $i = 1, 2$

6. Заключение

Предложено решение задачи робастного управления линейными динамическими мультиагентными системами в условиях параметрической и структурной неопределенности, а также внешних неконтролируемых ограниченных возмущений. В отличие от [1, 3–5, 8–14] в данной статье для оценки производных использовался наблюдатель, приближенное дифференцирование в котором осуществлялось с помощью левых разностей, что позволило сформировать систему управления, не содержащую динамических составляющих. Полученный алго-

ритм компенсирует неопределенности и возмущения с заданной точностью, зависящей от выбора коэффициентов полинома $D(p)$ и коэффициента α , а также величины параметра h , определяющего точность оценки производных сигнала $e(t)$. Так как предлагаемый алгоритм управления использует звенья с запаздыванием, то их практическая реализация может быть осуществлена, например, на базе ЭВМ с использованием специального программного обеспечения, например MatLab.

Литература

1. БОБЦОВ А.А. *Алгоритм робастного управления в задаче слежения за эталонным сигналом* // Автоматика и телемеханика. – 2003. – №6. – С. 104–113.
2. ФУРТАТ И.Б. *Робастный статический алгоритм управления линейными объектами* // Автоматика и телемеханика. – 2015. – №3 – С. 94–107.
3. ЦЫКУНОВ А.М. *Алгоритмы робастного управления с компенсацией ограниченных возмущений* // Автоматика и телемеханика. – 2007. – №7. – С. 103–115.
4. ATASSI A.N., KHALIL H.K. *A separation principle for the stabilization of class of nonlinear systems* // IEEE Trans. Automat. Control. – 1999. – Vol. 44, №9. – P. 1672–1687.
5. ESFANDIARY F., KHALIL H.K. *Output feedback stabilization of fully linearizable systems* // Int. J. Control. – 1992. – Vol. 56, №5. – P. 1007–1037.
6. FRIDMAN E. *Introduction to Time-Delay Systems. Analysis and Control*. – Basel: Birkhauser, 2014. – 362 p.
7. FRIDMAN E. *Tutorial on Lyapunov-based methods for time-delay systems* // European Journal of Control. – 2014. – Vol. 20. – P. 271–283.
8. HAN J. *A class of extended state observers for uncertain system* // Control Decision. – 1995. – Vol. 10, №1. – P. 85–88.
9. KALMAN R.E. *A new approach to linear filtering and prediction problems* // Trans. ASME – J. Basic Engineer. – 1960. – №82 (Ser. D). – P. 35–45.

10. LUNBERGER D. *Observers for multivariable systems* // IEEE Trans. Automat. Control. – 1966. – Vol. AC-11, №2. – P. 190–197.
11. SLOTINE J.J.E., HEDRICK J.K., MISAWA E.A. *On sliding observers for nonlinear systems* // J. Dynam. Syst., Measurement, Control. – 1987. – Vol. 109. – P. 245–252.
12. UTKIN V.I. *Sliding modes in control and optimization*. – Berlin: Springer-Verlag, 1992 – 286 p.
13. VELUVOLU K.C., KIM M.Y., LEE D. *Nonlinear sliding mode high-gain observers for fault estimation* // Int. J. Syst. Sci. – 2011. – Vol. 42, №7. – P. 1065–1074.
14. WANG W., GAO Z. *A comparison study of advanced state observer design techniques* // Proc. Amer. Control Conf. – 2003. – P. 4754–4759.

Приложение

Доказательство утверждения 1. Для доказательства утверждения 1 воспользуемся вспомогательной леммой.

Лемма [2]. Рассмотрим динамическую систему, описываемую дифференциальным уравнением

$$(П.1) \quad \dot{x}(t) = Ax(t) + f(t) + g(x(t), x(t - \tau_1), \dots, x(t - \tau_n), \mu),$$

где $x(t) \in R^n$, $A \in R^{n \times n}$ – гурвицева матрица, $x(t) \in R^n$ – ограниченная функция, $\tau_i > 0$ – время запаздывания, $i = 1, \dots, n$, $g(x(t), x(t - \tau_1), \dots, x(t - \tau_n), \mu) \in R^n$ – непрерывная функция по совокупности аргументов за исключением, может быть, случая, когда $\mu = 0$, причем $g(x(t), x(t - \tau_1), \dots, x(t - \tau_n), \mu) \rightarrow 0$ при $\mu \rightarrow 0$ и $g(0, 0, \dots, 0, \mu) = 0$. Дополнительно функция $g(\cdot)$ удовлетворяет условию Липшица

$$(П.2) \quad \begin{aligned} & |g(x_1(t), x_1(t - \tau_1), \dots, x_1(t - \tau_n), \mu) - \\ & - g(x_2(t), x_2(t - \tau_1), \dots, x_2(t - \tau_n), \mu)| \leq \\ & \leq L_0(\mu) |x_1(t) - x_2(t)| + L_1(\mu) |x_1(t - \tau_1) - x_2(t - \tau_1)| + \\ & + \dots + L_n(\mu) |x_1(t - \tau_n) - x_2(t - \tau_n)|, \end{aligned}$$

где $L_0(\mu)$, $L_1(\mu)$, \dots , $L_n(\mu)$ – липшицевы константы, причем $\lim_{\mu \rightarrow 0} L_i(\mu) \rightarrow 0$, $i = 1, \dots, n$.

Пусть $\bar{x}(t)$ – решение уравнения

$$\dot{\bar{x}}(t) = A\bar{x}(t) + f(t),$$

где $|\bar{x}(t)| < b < \infty$. Тогда существует $\mu_0 > 0$ такое, что при $\mu \leq \mu_0$ решение $x(t, \mu)$ исходной системы (П.1) удовлетворяет условию $|x(t, \mu)| \leq b$. Причем имеет место равномерный относительно t предельный переход

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} x(t, \mu) = \bar{x}(t).$$

Воспользуемся леммой для анализа системы (9). Из постановки задачи $f_i(t)$ – ограниченные функции, $y_{mi}(t)$ – гладкие ограниченные функции вместе со своими производными, следовательно, функции $\varphi_i(t)$ ограниченные, $i = 1, \dots, N$. Так как $e_i(t)$ – непрерывные функции, то согласно (6)

$$\bar{e}_i^{(1)}(t) \rightarrow p e_i(t), \quad \bar{e}_i^{(2)}(t) \rightarrow p^2 e_i(t), \dots, \quad \bar{e}_i^{(\gamma_i)}(t) \rightarrow p^{\gamma_i} e_i(t)$$

при $h \rightarrow 0, i = 1, \dots, N$.

Значит, $g(t) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$. Поскольку матрица A гурвицева, то для уравнения (9) будут выполнены условия леммы, а, значит, все переменные в системе (9) будут ограниченными.

Покажем теперь, что существует такое $h > 0$, при котором алгоритм (7) будет обеспечивать выполнение условия (2).

Воспользуемся дескрипторным методом [6, 7]. Используя соотношение $\varepsilon(t-h) = \varepsilon(t) - \int_{t-h}^t \dot{\varepsilon}(s) ds$, перепишем (11) в следующем виде:

$$(П.3) \quad \dot{\varepsilon}(t) = A_s \varepsilon(t) - \sum_{v=1}^{\gamma} \sum_{j=1}^v F_{vj} \int_{t-jh}^t \dot{\varepsilon}(s) ds + B \varphi(t).$$

Выберем функционал Ляпунова–Красовского в виде

$$(П.4) \quad V = \varepsilon^T(t) P \varepsilon(t) + \sum_{v=1}^{\gamma} \sum_{j=1}^v \int_{t-jh}^t e^{2\chi(s-t)} \varepsilon^T(s) S_{vj} \varepsilon(s) ds + \\ + \sum_{v=1}^{\gamma} \sum_{j=1}^v \int_{-jh}^0 \int_{t+\theta}^t e^{2\chi(s-t)} \dot{\varepsilon}^T(s) R_{vj} \dot{\varepsilon}(s) ds d\theta.$$

Продифференцируем функционал (П.4) вдоль траектории системы (П.3)

$$\begin{aligned}
 \dot{V} &= 2\varepsilon^T(t)P\dot{\varepsilon}(t) + 2[\varepsilon^T(t)P_2^T + \dot{\varepsilon}^T(t)P_3^T] \times \\
 &\times \left[-\dot{\varepsilon}(t) + A_3\varepsilon(t) - \sum_{v=1}^{\gamma} \sum_{j=1}^v F_{vj} \int_{t-jh}^t \dot{\varepsilon}(s)ds + B\varphi(t) \right] - \\
 &- 2\chi \sum_{v=1}^{\gamma} \sum_{j=1}^v \int_{t-jh}^t e^{2\chi(s-t)} \varepsilon^T(s) S_{vj} \varepsilon(s) ds + \varepsilon^T(t) \sum_{v=1}^{\gamma} \sum_{j=1}^v S_{vj} \varepsilon(t) - \\
 &- \sum_{v=1}^{\gamma} \sum_{j=1}^v e^{-2jh} \varepsilon^T(t-jh) S_t \varepsilon(t-jh) - \\
 &- 2\chi \sum_{v=1}^{\gamma} \sum_{j=1}^v \int_{t+\theta}^0 \int_{t-jh}^t e^{2\chi(s-t)} \dot{\varepsilon}^T(s) R_{vj} \dot{\varepsilon}(s) ds d\theta + \\
 &+ \dot{\varepsilon}^T(t) \sum_{v=1}^{\gamma} \sum_{j=1}^v jh R_{vj} \dot{\varepsilon}(t) - \sum_{v=1}^{\gamma} \sum_{j=1}^v jh \int_{t-jh}^t e^{2\chi(s-t)} \dot{\varepsilon}^T(s) R_{vj} \dot{\varepsilon}(s) ds.
 \end{aligned}
 \tag{П.5}$$

Введем следующие обозначения

$$\omega_1(t) = \text{col}\{\varepsilon(t), \dot{\varepsilon}(t)\},$$

$$\omega_2(t) = \frac{1}{h} \text{col} \left\{ \int_{t-h}^t \dot{\varepsilon}(s) ds, \frac{1}{2} \int_{t-2h}^t \dot{\varepsilon}(s) ds, \dots, \frac{1}{\gamma} \int_{t-\gamma h}^t \dot{\varepsilon}(s) ds \right\}$$

$$\omega(t) = \text{col}\{\omega_1(t), \omega_2(t), \varphi(t)\}.$$

Дифференцируя функционал (П.4), найдем

$$W = \dot{V} + 2\chi V - \beta |\varphi|^2 \leq \omega^T \Psi \omega,$$

где $\chi > 0$ – заданное число, которое определяет скорость затухания функционала Ляпунова-Красовского [6, 7]. Существуют константа $\beta > 0$ и матрицы $P > 0$, $P_2 > 0$, $P_3 > 0$, $S_{vj} > 0$, $R_{vj} > 0$, $j \leq v = 1, \dots, \gamma$, такие, что матрица $\Psi < 0$, тогда $W < 0$. Также задано число $\Delta > 0$, где $\Delta^2 = \sup_t \{\varphi^T(t)\varphi(t)\}$, эллипсоид

$$\tag{П.6} \quad K_{\infty} = \left\{ \varepsilon \in R^n : \varepsilon^T P \varepsilon \leq \frac{\sigma^2 \beta}{2\chi} \right\}$$

является областью экспоненциального притяжения.

Из выражения (П.6) верхняя граница ошибки

$$(П.7) \quad \delta = \Delta \sqrt{\frac{\beta}{2\chi\lambda_{\min}(P)}}.$$

Значение числа δ в (2) может меняться в зависимости от параметров объекта управления (1) и системы управления (7). Утверждение доказано.

ROBUST ALGORITHM USING DELAY FOR MULTI-AGENT SYSTEMS

Igor Furtat, Institute for Problems of Mechanical Engineering RAS, St.-Petersburg, ITMO University, St.-Petersburg, Doctor of Science, assistant professor (cainenash@mail.ru).

Artem Nekhoroshikh, ITMO University, St.-Petersburg, engineer (becks94@mail.ru).

Abstract: The paper describes a robust control algorithm for linear multi-agent systems under parametric and structural uncertainties and external unmeasured disturbances. The algorithm includes an observer component which uses left hand side differences for estimation of the derivatives. This allowed us to form a control system without dynamic components. The resulting algorithm ensures required accuracy of difference between the plant output and the reference signal. The simulation results illustrate the effectiveness of the algorithm.

Keywords: robust control, time delay, LMI, Lyapunov-Krasovskii functional, descriptor method.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии П.В. Пакиным.

Поступила в редакцию 03.07.2016.

Опубликована 31.01.2017.

УДК 519.178

ББК 22.176

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ПОИСКА КРАТЧАЙШИХ РАССТОЯНИЙ В ГРАФЕ

Ураков А. Р.¹, Тимеряев Т. В.²

(Уфимский государственный авиационный
технический университет, Уфа)

Рассматривается полностью динамическая задача поиска кратчайших расстояний между всеми парами вершин неориентированного графа. Для данной задачи предлагается метод решения, учитывающий все возможные изменения расстояний в графе с помощью процедур добавления и удаления ребра. Для процедуры удаления ребра предложен алгоритм, использующий понятие точек, равноудаленных от вершин, инцидентных удаляемому ребру. Алгоритм позволяет существенно уменьшить время решения и объем используемой памяти в практических сценариях. Для доказательства практической эффективности предложенного метода решения произведен вычислительный эксперимент с использованием известных быстрых статических и динамических алгоритмов.

Ключевые слова: динамические кратчайшие расстояния, актуализация графа, коррекция графа, равноудаленные точки.

Введение

Задачи, связанные с поиском кратчайших путей (и расстояний, ассоциированных с этими путями), являются одними из самых исследованных в теории графов. В классической (статической) задаче поиска кратчайших путей между всеми вершинами графа (задача APSP) предполагается, что исследуемый граф – его

¹ Айрат Ренатович Ураков, кандидат физико-математических наук, доцент (urakov@ufanet.ru).

² Тимофей Валерьевич Тимеряев (timeryaev@yandex.ru).

структура и веса ребер (дуг) – не меняются с течением времени. В этом случае кратчайшие пути находятся в графе один раз и в дальнейшем используются без изменений. Для статической задачи разработано большое число изящных алгоритмов с различными областями эффективного применения, среди самых известных из которых алгоритмы Беллмана – Форда, Флойда – Уоршелла, Дейкстры и др. В качестве меры эффективности алгоритма, как правило, используют скорость нахождения решения.

Другой, менее исследованной является *динамическая* разновидность задачи. В динамической задаче предполагается, что подлежащий граф – его структура и веса ребер (дуг) – изменяются с течением времени, в связи с чем необходимо поддерживать вычисленные кратчайшие пути в актуальном состоянии с учетом происходящих изменений. Различают две разновидности динамической задачи: *полностью динамическая* – допустимо увеличение и уменьшение весов ребер, *частично динамическая* – допустимо либо увеличение, либо уменьшение весов ребер. Здесь, как и в случае со статической задачей, важна скорость решения, поэтому эффективное применение методов решения статической задачи – расчет кратчайших путей заново при изменении графа – сильно ограничено (размерностью графа, частотой изменений графа).

В статье предлагается метод решения полностью динамической задачи поиска кратчайших расстояний между всеми вершинами ненаправленного графа с положительными вещественными весами ребер. Следует подчеркнуть, что при решении данной задачи нас интересует лишь актуальность кратчайших расстояний между вершинами, информация о соответствующих путях не актуализируется. Метод решения основан на использовании двух алгоритмов: удаления и добавления ребра, с помощью которых учитываются все возможные модификации графа. Практическая ценность изложенных в статье метода и алгоритмов заключается в том, что в сравнении с известными быстрыми алгоритмами они позволяют решать задачу актуализации расстояний после удаления ребра на разреженных графах быстрее и при этом не используют никакой дополнительной информации кроме рассто-

яний, что позволяет существенно уменьшить использование памяти при решении.

1. Термины и обозначения

В статье используются следующие термины и обозначения.

$G(V, E, w)$ – неориентированный граф G с множеством вершин V , множеством ребер E и весовой функцией на ребрах $w : E \mapsto \mathbb{R}_{>0}$.

$e(a_i, b_j)$ – ребро между вершинами a_i и b_j .

$w(a_i, b_j)$ – вес ребра между вершинами a_i и b_j . Так как граф неориентированный, то $w(a_i, b_j) = w(b_j, a_i)$.

Расстояние между a_i и b_j – кратчайшее расстояние между вершинами a_i и b_j .

$l(a_i, b_j)$ – расстояние между вершинами a_i и b_j , так как граф неориентированный $l(a_i, b_j) = l(b_j, a_i)$.

$[a_i, \dots, b_j]$ – путь от вершины a_i до вершины b_j .

Свойство оптимальности кратчайшего пути – каждый подпуть кратчайшего пути является также кратчайшим, т.е. если $[a_i, \dots, b_j]$ кратчайший путь между a_i и b_j , то любой подпуть $[a_x, \dots, b_y]$ этого пути будет кратчайшем путем между a_x и b_y .

2. Существующие алгоритмы

Первые алгоритмы решения динамических задач поиска кратчайших путей опубликованы в 60–70-х годах прошлого столетия [1, 8, 18, 19]. Алгоритмы в этих работах на основе свойств кратчайших путей определяют пары вершин, между которыми в результате изменения весов ребер могли измениться расстояния. Расстояния между найденными парами пересчитывается с использованием простых алгебраических и логических операций, а также статических алгоритмов поиска кратчайших путей. Временные сложности этих алгоритмов в худшем случае определяются случаем увеличения веса ребра и не дают улучшения по сравнению с полным пересчетом расстояний графа с использованием статических методов.

Авторы [22] представили полностью динамический алгоритм, поддерживающий множественные изменения весов ребер между актуализациями расстояний. В [12] предложили полностью динамический алгоритм для задачи с единственным источником и наибольшей эффективностью на планарных графах и графах с ограниченной степенью вершин. Алгоритмы, улучшающие временную сложность полного пересчета расстояний, были предложены для графов с ограниченными весами ребер [3, 17] и планарных графов [11, 16]. В [7] авторы переложили полностью динамический алгоритм для направленных графов с неотрицательными весами с амортизированным временем $O(n^2 \log^3 |V|)$ для любой последовательности модификаций графа.

Алгоритмы приближенного решения задачи рассмотрены в [4, 15, 24]. Многие алгоритмы, решающие динамическую задачу, хранят вспомогательную информацию, используемую при пересчете расстояний, что требует большого объема оперативной памяти при практической реализации и тем самым ограничивает размерность используемых графов. Для возможности работы с большими графами рядом авторов предложены алгоритмы [14, 21], хранящие вспомогательную информацию под управлением СУБД. Распределенные алгоритмы решения задачи рассматриваются в [5, 23].

3. Метод коррекции графа

Изменение взвешенного графа состоит из операций следующего вида: изменение множества вершин, изменение множества ребер и изменение весов ребер. Требуемое изменение графа легко разложить на последовательность простейших операций, т.е. таких, которые затрагивают только одну вершину или ребро. Если мы будем отслеживать изменения расстояний при каждой простейшей операции, мы будем знать результирующие расстояния рассматриваемого графа.

Добавление/удаление вершины a , несвязанной с другими, изменяет расстояния в графе тривиальным образом – добавляются/удаляются равные бесконечности расстояния между a и всеми

остальными вершинами графа. Операцию изменения списка вершин, связанных с другими вершинами графа, можно свести к операции изменения списка ребер.

Заметим, что если пара вершин a и b связана ребром веса w_1 , то удаление или добавление ребра, связывающего a и b веса w_2 , не повлияет на расстояния, если $w_2 > w_1$. Отсюда следует, что уменьшение веса ребра можно свести к процедуре добавления ребра, а увеличение веса ребра можно свести к процедуре удаления ребра. В первом случае сначала добавляется новое ребро меньшего веса, далее удаляется существующее ребро большего веса, что не повлияет на расстояния (и не требует пересчета). Во втором случае сперва добавляется новое ребро большего веса, что не влияет на расстояния (и не требует пересчета), после этого удаляется существующее ребро меньшего веса.

Таким образом, рассматриваемая задача актуализации расстояний в динамическом графе может быть решена с помощью процедур удаления и добавления ребра. Далее дается описание алгоритмов этих процедур.

4. Добавление ребра

Рассматривается добавление ребра $e(a_0, b_0)$ веса $w(a_0, b_0)$ между вершинами a_0 и b_0 . Необходимо пересчитать расстояния $l(a_i, b_j)$, которые в результате добавления данного ребра уменьшатся. Предполагается, что вес добавляемого ребра меньше текущего расстояния между вершинами $w(a_0, b_0) < l(a_0, b_0)$, так как в противном случае пересчет расстояний производить не нужно.

Добавляемое ребро $e(a_0, b_0)$ можно представлять как «мост», соединяющий множества вершин $A = \{a_i\}$ и $B = \{b_j\}$, которые разбивают множество вершин графа V на вершины, которые ближе к a_0 , и вершины, которые ближе к b_0 :

$$(1) \quad \begin{aligned} A &= \{v \in V | l(v, a_0) \leq l(v, b_0)\}, \\ B &= \{v \in V | l(v, b_0) \leq l(v, a_0)\}. \end{aligned}$$

В случае равенства расстояний до a_0 и до b_0 вершина v может быть помещена в любое из множеств A, B . Будем считать, что $a_0 \in A$ и $b_0 \in B$. При разбиении вершин графа (1), добавляя

ребро $e(a_0, b_0)$, достаточно пересчитать расстояния лишь между парами вершин одна из которых принадлежит A , а другая B , т.е. $(v, u) : v \in A, u \in B$. Если обе вершины принадлежат одному из множеств, например, $v, u \in A$, то расстояние между ними не изменится. Это обусловлено двумя факторами. Во-первых, добавление ребра $e(a_0, b_0)$ не изменит принадлежность вершин множеству A : расстояние от них до a_0 все так же будет не больше чем до b_0 . Действительно, если бы расстояние от, например, v до b_0 изменилось, соответствующий путь имел бы вид $[v, \dots, a_0, b_0]$, что означало бы, что $l(v, a_0) < l(v, b_0)$. Во-вторых, кратчайший путь между v и u не может содержать добавляемое ребро $e(a_0, b_0)$, так как расстояние от обоих v и u до a_0 не больше чем до b_0 , и кратчайший путь $[v, \dots, u]$ между v и u в противном случае содержал бы подпуть вида $[v, \dots, b_0, a_0]$, который не является кратчайшим, что противоречило бы свойству оптимальности кратчайшего пути.

Вершины графа можно поделить между множествами A и B так, что элементы этих множеств вместе со связывающими их ребрами в графе будут образовывать два связанных подграфа. Действительно, это можно сделать, например, отнеся все вершины, которые имеют одинаковое расстояние до a_0 и b_0 , либо к A , либо к B . Более того, в этом случае можно представить объединение вершин из множеств A и B в виде двух деревьев t_A и t_B с корнями a_0 и b_0 соответственно. Для каждого из множеств A и B (при наличии достаточного числа вершин в них) существует несколько вариантов возможных деревьев с корнями a_0 и b_0 . Среди этих вариантов существуют один обладающий полезным свойством.

В *дереве кратчайших путей* с корнем – некоторой вершиной v – длина пути от v до любой другой вершины дерева u равна расстоянию между этими вершинами $l(v, u)$. Если выбрать в качестве деревьев t_A и t_B на множествах A и B деревья кратчайших путей с корнями a_0 и b_0 , соответственно, то, используя свойство этих деревьев, можно сократить число пар вершин (a_i, b_j) , между которыми необходимо пересчитать расстояния.

Предположим, что вершина a_i дерева t_A в направлении от

корня дерева связана ребрами с вершинам $a_{i+1}, a_{i+2}, \dots, a_{i+k}$. Также предположим, что в данный момент времени мы пересчитываем расстояние между a_i и некоторой вершиной b_j дерева t_B . Расстояние между a_i и b_j необходимо пересчитать, если длина пути через добавляемое ребро $e(a_0, b_0)$ будет меньше текущего расстояния между a_i и b_j , т.е. если выполняется условие

$$(2) \quad l(a_i, a_0) + w(a_0, b_0) + l(b_0, b_j) < l(a_i, b_j).$$

Если неравенство (2) не выполняется, величина $l(a_i, b_j)$ не пересчитывается, так как существует путь между a_i и b_j , не проходящий через $e(a_0, b_0)$ и обладающий не большей длиной. Но в этом случае не надо также пересчитывать расстояния между b_j и вершинами $a_{i+1}, a_{i+2}, \dots, a_{i+k}$.

Действительно, так как дерево t_A является деревом кратчайших путей, то в случае пересчета расстояния между, например, a_{i+1} и b_j соответствующий кратчайший путь имел бы вид

$$(3) \quad [a_{i+1}, a_i, \dots, a_0, b_0, \dots, b_j].$$

Если расстояние между a_i и b_j не было пересчитано, потому что выражение (2) имело форму равенства, то нет необходимости пересчитывать и расстояние между a_{i+1} и b_j , так как оно не изменится (не изменится длина подпути $[a_i, \dots, b_j]$). Если же путь между a_i и b_j через $e(a_0, b_0)$ оказался длиннее, чем путь не проходящий через $e(a_0, b_0)$, то кратчайший путь между a_{i+1} и b_j не может иметь вида (3), так как в этом случае кратчайший путь между a_{i+1} и b_j содержал бы не кратчайший подпуть $[a_i, \dots, a_0, b_0, \dots, b_j]$ между a_i и b_j , что нарушало бы свойство оптимальности кратчайшего пути.

Таким образом, если расстояние между данной a_i и некоторой b_j не было пересчитано, то не следует пересчитывать и расстояния между b_j и всеми вершинами исходящими из a_i в сторону от корня дерева t_A вплоть до листовых вершин. На основании этого правила можно уменьшить размеры деревьев t_A и t_B , исключая вершины дерева t_A , которым не следует пересчитывать расстояния до b_0 и вершины дерева t_B , которым не следует пересчитывать расстояния до a_0 . Формально в t_A и t_B включаются,

соответственно, вершины a_i и b_j , удовлетворяющие условиям

$$(4) \quad \begin{aligned} l(a_i, a_0) + w(a_0, b_0) &< l(a_i, b_0), \\ l(b_j, b_0) + w(a_0, b_0) &< l(b_j, a_0). \end{aligned}$$

Схематическое изображение деревьев t_A и t_B представлено на рис. 1. Описание алгоритма пересчета расстояний при добавлении ребра дано в листингах Алгоритм 1, Алгоритм 2. Алгоритмы в данных листингах предполагают, что текущие расстояния между всеми парами вершин графа до добавления ребра $e(a_0, b_0)$ известны.

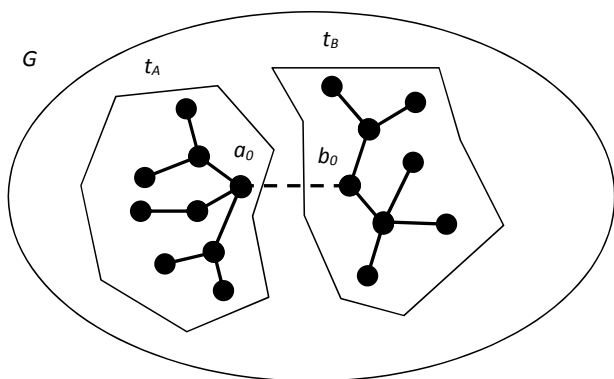


Рис. 1. Деревья t_A , t_B , между парами вершин которых при добавлении ребра $e(a_0, b_0)$ пересчитываются расстояния

Алгоритм 1 (Построение деревьев кратчайших путей).

Построить Дерево Добавления (G, l, v_1, v_2)

1. $t =$ Дерево(Узел(v_1)) // дерево с корнем с индексом v_1
2. $q =$ Очередь(t .Корень()) // q – структура типа FIFO
3. $d =$ Множество(v_1) // d – мн-во посещенных вершин
4. Пока q .Размер() > 0
5. $v = q$.Выбрать()
6. Для всех ребер $e(v, u) \in G.E()$
7. Если d .Содержит(u), то
8. Продолжить // continue
9. Если $l(v_1, u) = l(v_1, v) + G.w(v, u)$, то

10. d .Добавить(u)
11. **Если** $l(u, v_1) + G.w(v_1, v_2) < l(u, v_2)$, **то**
12. $c = \text{Узел}(u)$
13. n .ДобавитьПотомка(c)
14. q .Добавить(c)
15. **Вернуть** t

Алгоритм 2 (Пересчет l при добавлении $e(a_0, b_0)$ веса w_{ab}).

ДобавитьРебро (G, l, a_0, b_0, w_{ab})

1. $G.E$.Добавить($e(a_0, b_0)$)
2. $G.w(a_0, b_0) = w_{ab}$
3. $G.w(b_0, a_0) = w_{ab}$
4. **Если** $l(a_0, b_0) \leq w_{ab}$, **то**
5. **Вернуть**
6. $t_A = \text{ПостроитьДеревоДобавления}(G, l, a_0, b_0)$
7. $t_B = \text{ПостроитьДеревоДобавления}(G, l, b_0, a_0)$
8. $q_a = \text{Очередь}(t_A.\text{Корень}())$
9. **Пока** $q_a.\text{Размер}() > 0$
10. $a_i = q_a.\text{Выбрать}()$
11. $q_b = \text{Очередь}(t_B.\text{Корень}())$
12. **Пока** $q_b.\text{Размер}() > 0$
13. $b_j = q_b.\text{Выбрать}()$
14. $l = l(a_i, a_0) + G.w(a_0, b_0) + l(b_0, b_j)$
15. **Если** $l < l(a_i, b_j)$, **то**
16. $l(a_i, b_j) = l$
17. $l(b_j, a_i) = l$
18. **Для** $k = 1$ **до** $b_j.\text{ЧислоПотомков}()$
19. $q_b.\text{Добавить}(b_j.\text{Потомок}(k))$
20. **Для** $k = 1$ **до** $a_i.\text{ЧислоПотомков}()$
21. $q_a.\text{Добавить}(a_i.\text{Потомок}(k))$

Алгоритм 1 по сути является проходом по графу поиском в ширину, поэтому его временная сложность соответствуют таковой поиска в ширину и равна $O(|V| + |E|)$, пространственная сложность равна $O(|V|^2 + |E|)$ из-за необходимости хранить состояния. Если в алгоритме 2 условие в строке 4 не выполняется, то его временная сложность рассчитывается следующим образом.

Временная сложность сложность строк 6, 7 равна $O(|V| + |E|)$. Выбор и добавление вершин в очереди в строках 10, 13, 19 и 21 производится не больше $|V|$ раз, что с учетом вложенности цикла в строках 12-19 дает временную сложность выполнения строк 9–21 равную $O(|V|^2)$. То есть алгоритм 2 имеет временную сложность $O(|V|^2 + |E|)$. Пространственная сложность алгоритма 2 доминируется пространственной сложностью алгоритма 1 и равна $O(|V|^2 + |E|)$.

5. Алгоритм поиска кратчайших расстояний путем добавления ребер к остовному дереву

Алгоритм пересчета расстояний при добавлении ребра может использоваться для определения расстояний между всеми парами вершина графа (задача APSD). Для этого в графе выбирается произвольное остовное дерево t_f , для которого поиском в ширину находятся расстояния между всеми вершинами. После чего по очереди добавляются $|E| - (|V| - 1)$ не вошедших в t_f ребер графа, и для каждого добавленного ребра выполняется пересчет расстояний.

Алгоритм 3 (Расчет расстояний для дерева).

Вычислить Расстояния Деревя (t_f, l)

1. $q = \text{Очередь}(t_f.\text{Корень}())$
2. $d = \text{Множество}(t_f.\text{Корень}())$
3. **Пока** $q.\text{Размер}() > 0$
4. $v_j = q.\text{Выбрать}()$
5. **Для** $m = 1$ **до** $n.\text{ЧислоПотомков}()$
6. $v_i = v_j.\text{Потомок}(m)$
7. **Для всех** $v_k \in d$
8. $l(v_k, v_i) = l(v_k, v_j) + w(v_j, v_i)$
9. $l(v_i, v_k) = l(v_k, v_i)$
10. $d.\text{Добавить}(v_i)$
11. $q.\text{Добавить}(v_i)$

При обходе дерева t_f расстояния от каждой новой посещаемой вершины v_i до уже посещенных v_k считаются через роди-

тельскую вершину v_j вершины v_i :

$$l(v_k, v_i) = l(v_k, v_j) + w(v_j, v_i).$$

В разделе 7 приведены результаты вычислительного эксперимента, в котором сравнивается время работы алгоритма добавления ребра и скорость выполнения известных алгоритмов поиска кратчайших расстояний. Согласно результатам, можно сделать вывод: использование приведенного алгоритма будет эффективно только при очень малом числе добавляемых ребер. Так как скорость добавления каждого ребра увеличивается пропорционально квадрату числа вершин, как и в других методах поиска кратчайших расстояний, то эффективность для широкого диапазона числа вершин будет ограничена некоторым абсолютным значением. Если опираться на результаты в таблицах 1 и 3, то можно сделать вывод, что алгоритм добавления ребер к дереву быстрее алгоритма Дейкстры, если добавляемых ребер не больше сотни, и быстрее алгоритма разборки-сборки, если добавляемых ребер не больше нескольких десятков.

Описание алгоритма определения расстояний между всеми парами вершин графа с использованием алгоритма пересчета расстояний при добавлении ребра приведено в листингах Алгоритм 3, Алгоритм 4.

Алгоритм 4 (Расчет расстояний между всеми вершинами).

Вычислить Расстояния (G, l)

1. $u = \text{Очередь}()$ // содержит не посещенные ребра
2. $t_f = \text{ВыбратьДерево}(G, u)$ // u заполняется
3. Вычислить Расстояния Древа (t_f, l)
4. Пока $u.\text{Размер}() > 0$
5. $e = u.\text{Выбрать}()$
6. $a_0 = e.\text{Вершина1}()$
7. $b_0 = e.\text{Вершина2}()$
8. $w_{ab} = e.\text{Вес}()$
9. Добавить Ребро (G, l, a_0, b_0, w_{ab})

В алгоритме 3 цикл в строках 3–11 выполняется $|V|$ раз – по разу для каждой вершины дерева. Вложенный цикл в строках 70

7–9 выполняется в худшем случае $|V| - 1$ раз. Таким образом, временная сложность алгоритма 3 равна $O(|V|^2)$. Однако время работы данного алгоритма может быть улучшено до линейного с помощью нахождения всех наименьших общих предков дерева [13]. В алгоритме 4 строка 2 выполняется за $O(|V| + |E|)$ (поиск в ширину), строка 3 за $O(|V|^2)$, цикл в строках 4–9 за $O(|E||V|^2 + |E|^2)$. Таким образом временная сложность алгоритма 4 равна $O(|E||V|^2 + |E|^2)$, пространственная сложность определяется строкой 9 и равна $O(|V|^2 + |E|)$.

6. Удаление ребра и равноудаленные точки

Рассматривается удаление ребра $e(a_0, b_0)$ веса $w(a_0, b_0)$ между вершинами a_0 и b_0 . Необходимо пересчитать расстояния $l(a_i, b_j)$, которые в результате удаления данного ребра увеличатся. Предполагается, что вес удаляемого ребра равен текущему расстоянию между вершинами $w(a_0, b_0) = l(a_0, b_0)$, так как в противном случае пересчет расстояний производить не нужно.

Как и в случае с добавлением ребра, используя выражения (1), множество вершин графа V можно поделить на множества A и B . На этих множествах так же можно построить деревья кратчайших путей t_A и t_B с корнями a_0 и b_0 . Эти деревья будут обладать тем же полезным свойством: если расстояние между a_i и b_j не следует пересчитывать, то не следует пересчитывать и расстояния между всеми потомками a_i и b_j . Размеры деревьев t_A и t_B можно уменьшить, но для этого вместо неравенств (4) следует использовать следующие равенства:

$$(5) \quad \begin{aligned} l(a_i, a_0) + w(a_0, b_0) &= l(a_i, b_0), \\ l(b_j, b_0) + w(a_0, b_0) &= l(b_j, a_0). \end{aligned}$$

Равенства (5) оставляют в деревьях t_A и t_B только те вершины a_i и b_j , для которых существует кратчайший путь до, соответственно, вершин b_0 и a_0 , проходящий через ребро $e(a_0, b_0)$. Так как в графе между любой парой вершин может существовать несколько кратчайших путей, не обязательно, что между вершинами деревьев t_A и t_B , полученных таким образом, произойдет хотя бы один пересчет расстояний.

Существенным отличием процедуры удаления ребра от случая добавления ребра является отсутствие информации о длине кратчайшего альтернативного пути. При добавлении ребра для пересчета расстояния между вершинами a_i и b_j используется неравенство (2), в котором длина известного (до добавления ребра $e(a_0, b_0)$) кратчайшего альтернативного пути $l(a_i, b_j)$ сравнивается с длиной пути через ребро $e(a_0, b_0)$. При удалении ребра известно лишь расстояние между a_i и b_j – длина кратчайшего пути (возможно проходящего через $e(a_0, b_0)$), второй по длине альтернативный путь между a_i и b_j неизвестен. Таким образом, возникает задача просмотра альтернативных путей и выбора из них наименьшего по длине.

На каждом из альтернативных путей между вершинами a_0 и b_0 существует точка, от которой расстояние до a_0 и до b_0 одинаково. Будем называть такие точки *равноудаленными точками* (РУТ). Используя РУТ можно обозначить все возможные варианты альтернативных путей между a_0 и b_0 , ставя в соответствие каждому варианту отличную РУТ. Набор РУТ также определит и все возможные варианты альтернативных путей, не проходящих через ребро $e(a_0, b_0)$, между всеми парами вершин деревьев t_A и t_B . Действительно, пути между вершинами a_i и b_j через РУТ представляют собой пути, в которых вместо ребра $e(a_0, b_0)$ содержится подпуть через РУТ. Будем обозначать РУТ $C = \{c_k\}$, рис. 2 представляет схематическое изображение множества РУТ.

Существует 2 варианта расположения РУТ. Во-первых, РУТ c_k , находящиеся в вершинах графа. Для таких справедливо равенство

$$(6) \quad l(c_k, a_0) = l(c_k, b_0).$$

Во-вторых, РУТ, находящиеся на ребрах. Такие РУТ находятся на ребрах $e(v, u)$, удовлетворяющим всем трем неравенствам

$$(7) \quad \begin{aligned} |l(u, b_0) - l(v, a_0)| &< w(v, u), \\ l(v, a_0) &< l(v, b_0), \\ l(u, b_0) &< l(u, a_0). \end{aligned}$$

Расстояния между РУТ на ребрах c_k и некоторой вершиной z

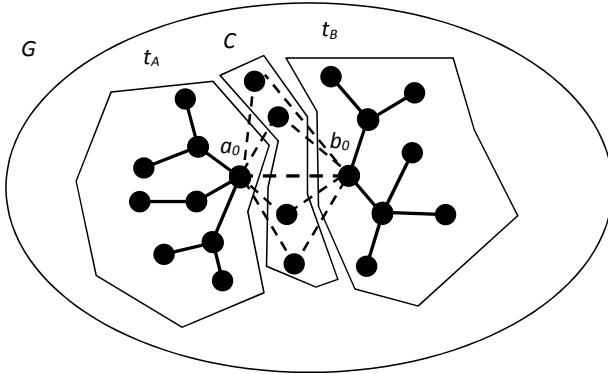


Рис. 2. Множество равноудаленных точек (PVT) C при удалении ребра $e(a_0, b_0)$

определяются формуле

$$(8) \quad l(z, c_k) = \begin{cases} l(z, v) + w'(v, c_k), & \text{если } l(z, a_0) \leq l(z, b_0); \\ l(z, u) + w'(u, c_k) & \text{иначе.} \end{cases}$$

где $w'(v, c_k)$ и $w'(u, c_k)$ – длины отрезков ребра $e(v, u)$, определяемые по формулам

$$(9) \quad \begin{aligned} w'(v, c_k) &= (l(u, b_0) + w(v, u) - l(v, a_0))/2, \\ w'(u, c_k) &= w(v, u) - w'(v, c_k). \end{aligned}$$

Так как РУТ имеют одинаковое расстояние до вершин, инцидентных удаляемому ребру, то при удалении ребра $e(a_0, b_0)$ расстояния от РУТ до всех остальных вершин графа не изменится. Действительно, если бы расстояние между РУТ c_k и некоторой вершиной z после удаления ребра $e(a_0, b_0)$ изменилось, то это значило бы, что до удаления ребра кратчайший путь между z и c_k имел вид $[c_k, \dots, a_0, b_0, \dots, z]$, что невозможно так как наличие не кратчайшего подпути $[c_k, \dots, a_0, b_0]$ противоречило бы свойству оптимальности кратчайшего пути. Таким образом, новое расстояние между вершинами a_i и b_j деревьев t_A и t_B может быть определено как минимальная сумма расстояний через РУТ: $l(a_i, b_j) = \min_k (l(a_i, c_k) + l(c_k, b_j))$. Можно уменьшить число «холостых» проходов по деревьям t_A и t_B (без фактического

пересчета расстояний), если использовать не расстояния до РУТ, а приращения (увеличения) расстояний через РУТ.

Будем обозначать $s(a_i, b_j)$ и называть *приращением расстояния* $l(a_i, b_j)$ увеличение расстояния $l(a_i, b_j)$ после удаления ребра $e(a_0, b_0)$. Тогда новое расстояние между a_i и b_j после удаления $e(a_0, b_0)$ определяется по формуле

$$l(a_i, b_j) = l(a_i, b_j) + s(a_i, b_j).$$

Будем обозначать $s^k(a_i, b_0)$, $s^k(b_j, a_0)$ и называть *приращениями расстояний* $l(a_i, b_0)$, $l(b_j, a_0)$ через РУТ c_k увеличение длин путей между соответствующими вершинами при прокладывании их через РУТ c_k при удалении ребра $e(a_0, b_0)$.

Для вершин, инцидентных удаляемому ребру, приращение определяется просто как минимальное увеличение пути через все существующие РУТ:

$$(10) \quad s(a_0, b_0) = \min_k s^k(a_0, b_0),$$

$$(11) \quad s^k(a_0, b_0) = l(a_0, c_k) + l(c_k, b_0) - w(a_0, b_0).$$

Для отличных от a_0, b_0 вершин деревьев t_A и t_B приращения через РУТ определяются как изменения приращений через РУТ относительно родительского узла в дереве кратчайших путей:

$$(12) \quad \begin{aligned} s^k(a_{i+1}, b_0) &= s^k(a_i, b_0) - w(a_{i+1}, a_i) + l(a_{i+1}, c_k) - l(a_i, c_k), \\ s^k(b_{j+1}, a_0) &= s^k(b_j, a_0) - w(b_{j+1}, b_j) + l(b_{j+1}, c_k) - l(b_j, c_k), \end{aligned}$$

где a_{i+1} и b_{j+1} – прямые потомки узлов a_i и b_j , соответственно, в деревьях t_A и t_B . Справедливость первой из формул (12) показывается следующим образом. По определению, приращение $s^k(a_{i+1}, b_0)$ есть разность между расстоянием $l(a_{i+1}, b_0)$ через вершину c^k после удаления ребра $e(a_0, b_0)$ и расстоянием $l(a_{i+1}, b_0)$ до удаления ребра $e(a_0, b_0)$. Расстояния $l(a_{i+1}, b_0)$ и $l(a_i, b_0)$ через вершину c^k после удаления ребра $e(a_0, b_0)$ равны, соответственно, $l(a_{i+1}, c_k) + l(c_k, b_0)$ и $l(a_i, c_k) + l(c_k, b_0)$. Согласно построению дерева t_A (Алгоритм 1 и (5)), до удаления ребра $e(a_0, b_0)$ справедливо $l(a_{i+1}, b_0) = l(a_i, b_0) + w(a_{i+1}, a_i)$. Таким образом, получаем $s^k(a_{i+1}, b_0) = l(a_{i+1}, c_k) + l(c_k, b_0) - [l(a_i, b_0) + w(a_{i+1}, a_i)] = l(a_{i+1}, c_k) + l(c_k, b_0) - l(a_i, b_0) - w(a_{i+1}, a_i) +$

$l(a_i, c_k) - l(a_i, c_k) = s^k(a_i, b_0) - w(a_{i+1}, a_i) + l(a_{i+1}, c_k) - l(a_i, c_k)$.
Аналогично для второй из формул (12).

Приращения расстояний для отличных от a_0, b_0 вершин a_i и b_j деревьев t_A и t_B определяются как сумма приращений через РУТ от a_i и от b_j с вычетом приращения через РУТ между вершинами удаляемого ребра, так как оно входит в сумму дважды:

$$(13) \quad s(a_i, b_j) = \min_k (s^k(a_i, b_0) + s^k(b_j, a_0) - s^k(a_0, b_0)).$$

Действительно, согласно построению дерева t_A , определению приращения через РУТ, формуле (11) и симметричности весовой функции графа: $s^k(a_i, b_j) = l(a_i, c_k) + l(c_k, b_j) - [l(a_i, a_0) + w(a_0, b_0) + l(b_0, b_j)] = [l(a_i, c_k) + l(c_k, b_0) - l(a_i, a_0) - w(a_0, b_0)] + [l(b_j, c_k) + l(c_k, a_0) - l(b_j, b_0) - w(b_0, a_0)] - [l(a_0, c_k) + l(c_k, b_0) - w(a_0, b_0)] = s^k(a_i, b_0) + s^k(b_j, a_0) - s^k(a_0, b_0)$. Согласно определению множества РУТ, $s(a_i, b_j) = \min_k s^k(a_i, b_j)$, что доказывает корректность (13).

Если для вершины a_i дерева t_A существует нулевое приращение расстояния через РУТ, т.е. $\min_k s^k(a_i, b_0) = 0$, то для a_i и всех ее потомков в дереве t_A вплоть до листового уровня не нужно производить пересчет расстояний ни до одной вершины b_j дерева t_B . Действительно, в этом случае наличие нулевого приращения расстояния через РУТ означает существование альтернативного пути между a_i и b_0 , не проходящего через удаляемое ребро $e(a_0, b_0)$, и имеющего такую же длину, как и путь через $e(a_0, b_0)$. Таким образом, расстояние $l(a_i, b_0)$ пересчитывать не нужно – оно не изменится. Так как t_A и t_B деревья кратчайших путей, кратчайший путь между любым a_x потомком a_i и любым b_y потомком b_0 содержит до удаления ребра $e(a_0, b_0)$ подпуть вида $[a_i, \dots, b_0]$, так как длина $l(a_i, b_0)$ этого подпути не изменилась, то не изменится и расстояние $l(a_x, b_y)$. Аналогичное справедливо и для вершины b_j дерева t_B и ее потомков в случае $\min_k s^k(b_j, a_0) = 0$.

Можно сократить и само число РУТ, используя два правила:

1. Из C можно исключить те РУТ, находящиеся в вершинах, которые смежны только с вершинами, которые тоже являются

ся РУТ в вершинах. В этом случае пути через исключаемые РУТ будут проходить также и через РУТ, которые будут не исключены.

2. Если для деревьев t_A и t_B известны вершины a_f и b_f , находящиеся на наибольшем расстоянии от удаляемого ребра $e(a_0, b_0)$, т.е. $l(a_f, a_0) = \max_i l(a_i, a_0)$ и $l(b_f, b_0) = \max_j l(b_j, b_0)$, а также ближайшая к удаляемому ребру РУТ c_n , т.е. $l(c_n, a_0) = \min_i l(c_i, a_0)$, то нужно оставить в C только те РУТ c_k , для которых верно

$$(14) \quad l(c_k, a_0) < l(a_f, a_0) + l(b_f, b_0) + l(c_n, a_0).$$

Действительно, предположим, что РУТ c_k нельзя удалять из множества C , так как после удаления ребра $e(a_0, b_0)$ кратчайший путь между некоторыми вершинами a_i и b_j , соответственно, деревьев t_A и t_B проходит через c_k , т.е. справедливо неравенство

$$(15) \quad l(a_i, c_k) + l(c_k, b_j) < l(a_i, c_n) + l(c_n, b_j)$$

и при этом для c_k не выполняется (14), т.е.

$$(16) \quad l(c_k, a_0) \geq l(a_f, a_0) + l(b_f, b_0) + l(c_n, a_0).$$

В силу неравенства треугольника, определения РУТ и симметричности весовой функции графа справедливы неравенства

$$\begin{aligned} l(c_k, a_0) - l(a_i, a_0) &\leq l(a_i, c_k), \\ l(c_k, a_0) - l(b_j, b_0) &= l(c_k, b_0) - l(b_j, b_0) \leq l(c_k, b_j), \\ l(a_i, c_n) &\leq l(a_i, a_0) + l(c_n, a_0), \\ l(c_n, b_j) &\leq l(b_j, b_0) + l(b_0, c_n) = l(b_j, b_0) + l(c_n, a_0). \end{aligned}$$

Подставляя данные неравенства в (15), получаем $2 \cdot l(c_k, a_0) - l(a_i, a_0) - l(b_j, b_0) < 2 \cdot l(c_n, a_0) + l(a_i, a_0) + l(b_j, b_0)$. Используя (16), последнее неравенство эквивалентно $2 \cdot [l(a_f, a_0) + l(b_f, b_0) + l(c_n, a_0)] - l(a_i, a_0) - l(b_j, b_0) < 2 \cdot l(c_n, a_0) + l(a_i, a_0) + l(b_j, b_0)$, что эквивалентно $2 \cdot [l(a_f, a_0) + l(b_f, b_0)] < 2 \cdot [l(a_i, a_0) + l(b_j, b_0)]$. Данное неравенство противоречит определению b_f и a_f , что доказывает корректность правила r_2 .

Описание алгоритма пересчета расстояний при удалении ребра приведено в листинге Алгоритм 5.

Алгоритм 5 (Пересчет l при удалении $e(a_0, b_0)$ веса w_{ab}).

Удалить Ребро (G, l, a_0, b_0, w_{ab})

1. $G.E.$ Удалить($e(a_0, b_0)$)
2. $G.w(a_0, b_0) = \infty$
3. $G.w(b_0, a_0) = \infty$
4. **Если** $l(a_0, b_0) < w_{ab}$, **то**
5. **Вернуть**
6. $t_A =$ ПостроитьДеревоУдаления(G, l, a_0, b_0)
7. $t_B =$ ПостроитьДеревоУдаления(G, l, b_0, a_0)
 // ПостроитьДеревоДобавления c (5) вместо (4)
8. $c = \{.НайтиРУТ.(G, l)\}$ // формулы (6, 7), правила $r1, r2$
9. $q_a =$ Очередь($t_A.$ Корень())
10. **Пока** $q_a.$ Размер() > 0
11. $a_i = q_a.$ Выбрать()
12. $S_k = \{.НайтиПриращениеЧерезРут.(G, l, c, a_i)\}$
 // формулы (11, 12, 8, 9)
13. **Если** $\exists s^k \in S_k : s^k > 0$, **то**
14. $q_b =$ Очередь($t_B.$ Корень())
15. **Пока** $q_b.$ Размер() > 0
16. $b_j = q_b.$ Выбрать()
17. $s =$ НайтиПриращение(G, l, c, a_i, b_j)
 // формулы (10, 13)
18. **Если** $s > 0$, **то**
19. $l(a_i, b_j) = l(a_i, b_j) + s$
20. $l(b_j, a_i) = l(b_j, a_i) + s$
21. **Для** $k = 1$ **до** $b_j.$ ЧислоПотомков()
22. $q_b.$ Добавить($b_j.$ Потомок(k))
23. **Для** $k = 1$ **до** $a_i.$ ЧислоПотомков()
24. $q_a.$ Добавить($a_i.$ Потомок(k))

Если в алгоритме 5 условие в строке 4 не выполняется, то его временная сложность рассчитывается следующим образом. Строки 6, 7, 8 выполняются за $O(|V| + |E|)$. Так как строки 12, 17 выполняются за $O(|V|)$ временная сложность строк 10–24 определяется суммарной временной сложностью дважды вложенной строки 17 и равняется $O(|V|^3)$. Таким образом, временная слож-

ность алгоритма 5 равна $O(|V|^3)$, пространственная сложность, как и в предыдущих алгоритмах, равна $O(|V|^2 + |E|)$.

7. Вычислительный эксперимент

Практическая эффективность предложенного метода актуализации расстояний в динамическом графе была оценена с помощью вычислительного эксперимента. В качестве тестовых данных использовались случайные связные подграфы заданной размерности графов автомобильных дорог европейских стран из проекта OpenStreetMap [20]. Эксперимент состоял в удалении случайного ребра, которое не нарушает связности графа, и последующем добавлении этого ребра обратно к графу, при этом фиксировалось время актуализации расстояний после каждой операции. Данная процедура повторялась 100 раз, после чего определялось среднее время актуализации расстояний каждым из сравниваемых алгоритмов. Исходный код предложенных в статье алгоритмов (ДУТ), алгоритма Дейкстры (СД) и алгоритма разборки-сборки графа (СРС) был написан на языке C++, код остальных тестируемых в статье алгоритмов был реализован на языке C. При компиляции использовался 64-битный компилятор MS Visual Studio 2013 с флагом оптимизации O2. Тесты проводились на ЭВМ с процессором Intel Core i5-4690K и объемом оперативной памяти 24 Гбайт.

Предложенные алгоритмы пересчета расстояний (ДУТ) при добавлении ребра (уменьшении веса ребра) и удалении ребра (увеличение веса ребра) сравнивались с решением задачи статическими алгоритмами – полным пересчетом расстояний: n -кратным (по числу вершин графа) запуском алгоритма Дейкстры (СД); алгоритмом разборки и сборки графа ([2], СРС); основанном на алгоритме Дейкстры методом, просматривающем только ребра, содержащиеся в локально кратчайших путях ([6], СЛКП). Также было произведено тестирование быстрых динамических алгоритмов [6]: адаптации алгоритма Кинга ([17], ДК) без ограничения на максимальный вес ребра в графе G с временной и пространственной сложностями $\tilde{O}(n^{2,5}\sqrt{C})$; алгоритма Рамалин-

Таблица 1. Характеристики тестовых графов и среднее время актуализации расстояний статическими алгоритмами

Группа графов (число графов)	Среднее число вершин	Средняя степень	СД, с	СРС, с	СЛКП, с
G1(10)	10^3	2,19	0,059	0,013	0,369
G2(10)	$2 \cdot 10^3$	2,22	0,259	0,046	2,26
G3(10)	$3 \cdot 10^3$	2,23	0,615	0,122	6,07
G4(10)	$4 \cdot 10^3$	2,2	1,1	0,253	12,5
G5(10)	$5 \cdot 10^3$	2,21	1,8	0,376	24,5
G6(10)	$6 \cdot 10^3$	2,21	2,56	0,552	37,8
G7(10)	$7 \cdot 10^3$	2,23	3,63	0,78	61,2
G8(10)	$8 \cdot 10^3$	2,21	4,66	1,08	80,1
G9(10)	$9 \cdot 10^3$	2,22	5,98	1,38	109
G10(10)	10^4	2,2	7,52	1,85	142

Таблица 2. Среднее время (в секундах) актуализации расстояний динамическими алгоритмами после удаления ребра

Группа графов	ДУТ, с	ДК, с	ДРР, с	ДДИ, с
G1	$5,8 \cdot 10^{-4}$	0,325	0,009	0,012
G2	0,003	2	0,027	0,045
G3	0,005	–	0,051	0,104
G4	0,011	–	0,099	0,24
G5	0,016	–	0,108	0,24
G6	0,02	–	0,154	–
G7	0,03	–	0,22	–
G8	0,038	–	0,302	–
G9	0,05	–	0,333	–
G10	0,07	–	0,423	–

гама и Репса ([22], ДРР), использующего при пересчете хранимую информацию о кратчайших путях, с временной сложностью $O(mn+n^2\log n)$ и пространственной сложностью $O(n^2)$; алгоритма Деметреску и Италиано ([7], ДДИ), пользующегося при актуализации расстояний исторически локальными путями с временной сложностью $\tilde{O}(n^2)$ и пространственной сложностью $\tilde{O}(mn)$.

Таблица 3. Среднее время (в секундах) актуализации расстояний динамическими алгоритмами после добавления ребра

Группа графов	ДУТ, с	ДК, с	ДРР, с	ДДИ, с
G1	$3,7 \cdot 10^{-4}$	$1,8 \cdot 10^{-4}$	0,009	0,017
G2	0,001	$1,7 \cdot 10^{-4}$	0,023	0,065
G3	0,003	–	0,044	0,148
G4	0,005	–	0,087	0,343
G5	0,006	–	0,087	0,426
G6	0,008	–	0,129	–
G7	0,012	–	0,183	–
G8	0,015	–	0,253	–
G9	0,02	–	0,272	–
G10	0,029	–	0,349	–

В эксперименте использовалась реализация алгоритма Дейкстры с двоичной кучей из библиотеки Boost Graph Library [25]. Алгоритмы СЛКП, ДК, ДРР и ДДИ использовались в реализации [10]. В тех случаях, когда алгоритмы в реализации [10] не смогли завершить вычисления из-за ошибок в авторском коде, в таблицах стоит прочерк. Характеристики тестовых графов и среднее время актуализации расстояний статическими алгоритмами представлены в таблице 1. Среднее время актуализации расстояний динамическими алгоритмами после удаления и добавления ребра представлены в таблицах 2 и 3 соответственно. Таблица 4 содержит данные о среднем объеме используемой оперативной памяти динамическими алгоритмами. В таблице 5 содержатся дополнительные данные о результатах тестирования разработанного алгоритма ДУТ.

Таблица 4. Средний объем используемой оперативной памяти динамическими алгоритмами

Группа графов	ДУТ, с	ДК, с	ДРР, с	ДДИ, с
G1	5,36 Мбайт	504 Мбайт	155 Мбайт	147 Мбайт
G2	18,7 Мбайт	2,77 Гбайт	618 Мбайт	592 Мбайт
G3	39,2 Мбайт	–	1,35 Гбайт	1,29 Гбайт
G4	70,6 Мбайт	–	2,4 Гбайт	2,28 Гбайт
G5	104 Мбайт	–	3,79 Гбайт	3,45 Гбайт
G6	147 Мбайт	–	5,45 Гбайт	–
G7	200 Мбайт	–	7,36 Гбайт	–
G8	261 Мбайт	–	9,69 Гбайт	–
G9	329 Мбайт	–	12,2 Гбайт	–
G10	406 Мбайт	–	14,8 Гбайт	–

Полученные результаты свидетельствуют о том, что предложенные алгоритмы позволяют существенно сократить время актуализации расстояний после удаления ребра в сравнении с рассмотренными алгоритмами. Так, например, для графов размерности 10^4 время счета меньше в среднем в 6 раз. Быстрейший пересчет расстояний после добавления ребра производит алгоритм ДК, однако из-за ошибок в авторском коде [10] не ясна его скорость на графах размерности больше $2 \cdot 10^3$. Еще одним важным практическим преимуществом предложенных алгоритмов является использование гораздо меньшего объема оперативной памяти в сравнении с другими динамическими алгоритмами.

8. Заключение

На практике взвешенные графы большого размера моделируют такие объекты (например, дорожные сети), для которых крайне маловероятно одновременное изменение весов у большого числа ребер. Скорее, наоборот – изменение ситуации (дорожной обстановки) должно сопровождаться постоянным и очень быстрым процессом пересчета расстояний между вершинами при

Таблица 5. Результаты тестирования алгоритма ДУТ

Группа графов	Добавление. Макс. время, с	Удаление. Макс. время, с	Среднее число РУТ	Макс. число РУТ
G1	0,016	0,016	4,94	29
G2	0,016	0,016	6,66	42
G3	0,031	0,047	9,77	61
G4	0,047	0,14	8,83	58
G5	0,062	0,234	11,5	54
G6	0,078	0,218	10,3	60
G7	0,187	0,343	16,3	78
G8	0,209	0,608	11,5	68
G9	0,211	0,64	15,2	102
G10	0,281	0,904	14,3	85

изменении весов отдельных ребер.

Приведенный динамический алгоритм коррекции кратчайших расстояний позволяет поддерживать актуальные расстояния между вершинами в режиме реального времени даже для графов большой размерности.

Литература

1. РОДИОНОВ В.В. *Параметрическая задача о кратчайших расстояниях* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1968. – Т. 8, №5. – С. 1173–1177.
2. УРАКОВ А.Р., ТИМЕРЯЕВ Т.В. *Алгоритм поиска кратчайших путей для разреженных графов большой размерности* // Прикладная дискретная математика. – 2013. – №1(19). – С. 84–92.
3. AUSIELLO G., ITALIANO G.F., MARCHETTI-SPACCAMELA A., NANNI U. *Incremental algorithms for minimal length paths* // Journal of Algorithms. – 2004. – Vol. 12, №4. – P. 615–638.

4. BASWANA S., HARIHARAN R., SEN S. *Improved decremental algorithms for maintaining transitive closure and all-pairs shortest paths* // Journal of Algorithms. – 2007. – Vol. 62, №2. – P. 74–92.
5. CICERONE S., DI STEFANO G., FRIGIONI D., NANNI U. *A fully dynamic algorithm for distributed shortest paths* // Theoretical Computer Science. – 2003. – Vol. 297, №1–3. – P. 83–102.
6. DEMETRESCU C., EMILIOZZI S., ITALIANO G.F. *Experimental analysis of dynamic all pairs shortest path algorithms* // Proc. of the Fifteenth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms. – Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2004. – P. 362–371.
7. DEMETRESCU C., ITALIANO G.F. *A new approach to dynamic all pairs shortest paths* // Journal of the ACM. – 2004. – Vol. 51, №6. – P. 968–992.
8. DIONNE R. *Etude et extension d'un algorithme de Murchland* // INFOR. – 1978. – №169. – P. 132–146.
9. EVEN S., GAZIT H. *Updating distances in dynamic graphs* // Methods of Operations Research. – 1985. – №49. – P. 371–387.
10. *Experimental Evaluation of Dynamic All Pairs Shortest Path Algorithms* [Электронный ресурс]. – URL: <http://www.dis.uniroma1.it/~demetres/experim/dsp/> (дата обращения: 27.12.2016).
11. FAKCHAROEMPHOL J., RAO S. *Planar graphs, negative weight edges, shortest paths, and near linear time* // Journal of Computer and System Sciences. – 2006. – Vol. 72, №5. – P. 868–889.
12. FRIGIONI D., MARCHETTI-SPACCAMELA A., NANNI U. *Fully dynamic algorithms for maintaining shortest paths trees* // Journal of Algorithms. – 2000. – №34. – P. 351–381.

13. GABOW H., TARJAN R. *A linear-time algorithm for a special case of disjoint set union* // Journal of Computer and System Sciences. – 1985. – Vol. 30, №2. – P. 209–221.
14. GRECO S., MOLINARO C., PULICE C. *Fully dynamic algorithms for maintaining shortest paths trees* // Proc. of the 28th International Conference on Scientific and Statistical Database Management. – New York: ACM, 2016. – P. 9:1–9:12.
15. HENZINGER M., KLEIN P., NANONGKAI D. *Dynamic Approximate All-Pairs Shortest Paths: Breaking the $O(mn)$ Barrier and Derandomization* // Proc. of the 2013 IEEE 54th Annual Symposium on Foundations of Computer Science. – Washington: IEEE Computer Society, 2013. – P. 538–547.
16. HENZINGER M., KLEIN P., RAO S., SUBRAMANIAN S. *Faster shortest-path algorithms for planar graphs* // Journal of Computer and System Sciences. – 1997. – Vol. 55, №1. – P. 3–23.
17. KING V. *Fully dynamic algorithms for maintaining all-pairs shortest paths and transitive closure in digraphs* // Proc. of the 40th Annual Symposium on Foundations of Computer Science. – Washington: IEEE Computer Society, 1999. – P. 81–99.
18. LOUBAL P. *A network evaluation procedure* // Highway Research Record. – 1967. – №205. – P. 96–109.
19. MURCHLAND J. *The effect of increasing or decreasing the length of a single arc on all shortest distances in a graph* // Technical report, LBS-TNT-26. – London: London Business School, Transport Network Theory Unit, 1967.
20. *OpenStreetMap* [Электронный ресурс]. – URL: <http://wiki.openstreetmap.org/wiki/Planet.osm> (дата обращения: 27.12.2016).

21. PANG C., DONG G., RAMAMOCHANARAO K. *Incremental maintenance of shortest distance and transitive closure in first-order logic and SQL* // ACM Transactions on Database Systems. – 2005. – Vol. 30, №3. – P. 698–721.
22. RAMALINGAM G., REPS T. *An incremental algorithm for a generalization of the shortest path problem* // Journal of Algorithms. – 1996. – №21. – P. 267–305.
23. RAMARAO K., VENKATESAN S. *On finding and updating shortest paths distributively* // Journal of Algorithms. – 1992. – Vol. 13, №2. – P. 235–257.
24. RODITTY L., ZWICK U. *Dynamic Approximate All-Pairs Shortest Paths in Undirected Graphs* // SIAM Journal on Computing. – 2012. – Vol. 41, №3. – P. 670–683.
25. *The Boost Graph Library* [Электронный ресурс]. – URL: www.boost.org/doc/libs/1_59_0/libs/graph/doc/index.html (дата обращения: 27.12.2016).
26. THORUP M. *Fully-Dynamic All-Pairs Shortest Paths: Faster and Allowing Negative Cycles* // Proc. of the 9th Scandinavian Workshop on Algorithm Theory. – Berlin: Springer, 2004. – P. 384–396.

ALGORITHM FOR DYNAMIC ALL-PAIRS DISTANCES IN GRAPH

Airat Urakov, Ufa State Aviation Technical University, Ufa,
Candidate of Sciences, docent (urakov@ufanet.ru).

Timofey Timeryaev, Ufa State Aviation Technical University, Ufa
(timeryaev@yandex.ru).

Abstract: Fully dynamic all-pairs graph distances problem for undirected graphs with positive edge weights is considered. Edge weights can change arbitrary so distances between vertices should be kept actual. We propose an algorithm taking into account all possible distance changes by the use of edge addition and deletion procedures. The developed algorithm uses the notion of points equidistant to the vertices incident to the edge being deleted for an edge deletion procedure. This allows to significantly reduce time and memory complexity of the graph distance actualization task in practical scenarios. The conducted computational experiments showed that the proposed algorithms outperforms the fastest known methods.

Keywords: dynamic graph distances, graph update, equidistant points, graph actualization.

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии О.П. Кузнецовым.*

Поступила в редакцию 16.08.2016.

Дата опубликования 31.01.2017.

УДК 519.17 + 621.3.05 + 519.67
ББК 22.1

АНАЛИЗ СТРУКТУРЫ МАГИСТРАЛЬНЫХ ЭЛЕКТРОСЕТЕЙ РОССИИ: ОЦЕНКА ПРИМЕНИМОСТИ МОДЕЛИ ТЕСНОГО МИРА

Макрушин С. В.¹

*(ФГБОУ ВО «Финансовый университет
при Правительстве Российской Федерации», Москва)*

С помощью методов теории сложных сетей проведен анализ топологии и пространственной структуры магистральных электросетей России. В частности, рассмотрен новый подход к анализу принадлежности сети к классу сетей тесного мира. Данный вопрос для магистральных электросетей является дискуссионным и при этом критически важен для проведения анализа их надежности (в частности, устойчивости к каскадным отключениям). Для анализа магистральных электросетей была впервые применена процедура латтисизации и разработана ее модификация – процедура геолаттисизации, позволившая по результатам компьютерного моделирования сделать надежный вывод о принадлежности магистральных электросетей России к сетям тесного мира. Разработанные методы актуальны для анализа любых инфраструктурных сетей, имеющих пространственную привязку.

Ключевые слова: теория сложных сетей, топология сети, тесный мир, электросети, ЕНЭС.

1. Введение

Сети объектов транспортной, энергетической и телекоммуникационной инфраструктуры являются пространственным

¹ Сергей Вячеславович Макрушин, кандидат экономических наук (s-makrushin@yandex.ru, SVMakrushin@fa.ru).

скелетом современной экономики, критически влияющим на ее эффективность. При этом для всех инфраструктурных сетей актуальна задача поиска оптимального баланса между затратами на развитие и содержание сети и обеспечением доступности, надежности и качества предоставляемых сервисов. Полноценное решение этой проблемы невозможно без создания моделей пространственной структуры и топологии сети, позволяющих определить взаимосвязь между структурой сети, ее интегральными характеристиками, определяющими затраты на создание и обслуживание, и пропускной способностью и надежностью сети.

Объектом данного исследования является одна из ключевых инфраструктурных сетей России – Единая национальная электрическая сеть (ЕНЭС) – комплекс магистральных электрических сетей Российской Федерации, основная часть которого управляется ОАО «ФСК ЕЭС»; предметом исследования является топологическая и пространственная структура ЕНЭС. Целью исследования является анализ ключевых топологических свойств сети, в частности, оценка применимости для качественного описания топологии сети модели тесного мира (small world) [23].

Для проведения исследования используются методы теории сложных сетей (ТСС) [2]: при помощи анализа компьютерной модели сети ЕНЭС определяются характеристики сети, анализируется применимость модели тесного мира для описания сети ЕНЭС. За рубежом методы ТСС активно применяются для исследования различных инфраструктурных сетей национального масштаба, в том числе магистральных электросетей. В частности, только в работе [18] рассмотрено 34 научных статьи по анализу магистральных электросетей 26 стран мира методами ТСС. Несмотря на это, научные исследования ЕНЭС с помощью методов теории сложных сетей еще не получили распространения.

Теория сложных сетей (complex network theory или network theory) изучает сложные взаимодействующие системы, которые могут быть представлены в виде сети (графа). Данное направление исследований начало формироваться в конце 1990х годов с целью изучения свойств больших сетевых структур, обладаю-

щих свойствами сложных систем. Математический аппарат теории основывается на теории графов, теории вероятности, математической статистике и некоторых разделах статистической физики. Теория сложных сетей имеет приложения в самых различных областях: биологии, социологии, лингвистике, телекоммуникациях, транспорте, урбанистике, экономике, инфраструктурных сетях. Несмотря на то, что ряд базовых работ по теории сложных сетей (сети Эрдеша–Реньи [8] и пр.) был выполнен в третьей четверти XX века, данное направление как активно развивающийся комплекс взаимосвязанных исследований появилось лишь на рубеже XX и XXI веков. Его развитию послужило появление большого количества доступных для компьютерного анализа массивов данных о сложных сетях и развитие компьютерных инструментов их анализа.

В теории сложных сетей принята терминология, отличная от теории графов: граф принято называть сетью, вершину – узлом, ребро – связью, степенью узла в ТСС называется количество связей, имеющееся у данного узла, а коэффициентом кластеризации узла – количество связей между соседями данного узла (инцидентными узлами), отнесенное к максимально возможному количеству связей, возможному между данными узлами.

2. Модель ЕНЭС

Для анализа ЕНЭС методами теории сложных сетей магистральные электросети рассматриваются в виде сети, в которой электрические подстанции и электростанции представляются узлами сети, а линии электропередач – связями сети.

Данные для формирования модели сети собраны из официальных документов [3] и интерактивной карты ЕНЭС, представленной на сайте ОАО «ФСК ЕЭС» [4]. Формат исходных данных (PDF и интерактивная карта в браузере) позволял использовать только ручную обработку и внесение данных для создания пригодной для проведения исследования компьютерной модели сети ЕНЭС. Так как модель сети ЕНЭС имеет географическую привязку, то для внесения данных была использо-

вана геоинформационная система (ГИС) и глобальная геоинформационная база данных.

В качестве глобальной геоинформационной базы данных был выбран проект OpenStreetMap [17], так как предоставляемые им данные обладают необходимым качеством и являются полностью открытыми. Формат базы OpenStreetMap позволяет полноценно работать с объектами электроэнергетической инфраструктуры, а сама база даже частично содержит необходимую информацию об электростанциях и магистральных электросетях. В качестве ГИС был использован редактор карт проекта OpenStreetMap JOSM. Для удобства при редактировании использовались данные OpenStreetMap, предварительно подготовленные (разделенные по регионам) сообществом GIS-Lab.ru и выложенные в виде файлов в формате OSM [1].

Однако полный набор геоданных по крупным российским регионам оказывался слишком объемным для комфортной работы с ними в редакторе JOSM. Например, размер файла геоданных в формате OSM для Московской области составляет более 200 Мбайт, что значительно превышает возможности JOSM по обработке данных на типичной рабочей станции. Для решения этой проблемы данные, излишние при нанесении объектов электроэнергетической инфраструктуры, были удалены из файла при помощи инструмента osmfilter, что уменьшило объем файлов приблизительно в 10 раз и позволило комфортно работать с геоданными любых регионов Российской Федерации.

В редакторе JOSM на картах регионов были нанесены узлы сети ЕНЭС с указанием названия объекта, его типа (электростанция или подстанция), максимального уровня напряжения, с которым работает узел, его загрузки (на основе данных из [4]), для связей в сети (линий электропередач); был указан их номинальный уровень напряжения. Далее региональные фрагменты ЕНЭС были «склеены» с использованием инструмента osmconvert, в результате чего было получено картографическое представление ЕНЭС, хранящееся в файле формата OSM.

Формат файла OSM является специфичным для геоинформационных систем и не поддерживается библиотеками и инструментами, предназначенными для анализа сложных сетей (в частности, использованной в исследовании библиотекой net-

workx [16] и средой Gephi [11]). Для конвертации данных был использован следующий подход: на языке Python автором был написан конвертор собранных данных из формата OSM в формат CSV (были сформированы два отдельных файла для узлов и связей), полученные данные о ЕНЭС были загружены в инструмент для анализа и визуализации сложных сетей Gephi, после чего были сохранены в формат gexf, который хорошо поддерживается инструментами анализа сложных сетей. В данном формате компьютерная модель ЕНЭС использовалась как набор исходных данных для дальнейших исследований.

В рамках исследования была собрана информация о 514 узлах и 614 связях сети ЕНЭС, включающая координаты узлов, их привязку к регионам, классы напряжения на объектах и другие характеристики. Модель сети построена для основных регионов присутствия ЕНЭС за исключением объектов объединенной энергосистемы Сибири, Востока и Урала (частично). Ее визуализация, выполненная с учетом географической привязки узлов, приведена на рис. 6.а.

На основании модели для сети ЕНЭС рассчитаны базовые интегральные характеристики сети, такие как: диаметр сети (36 переходов), средняя степень узлов (2,49 связи на узел), среднее межузловое расстояние (11,9 переходов), средний коэффициент кластеризации (0,0807). Распределение степеней узлов построенной модели ЕНЭС показано на рис. 1.

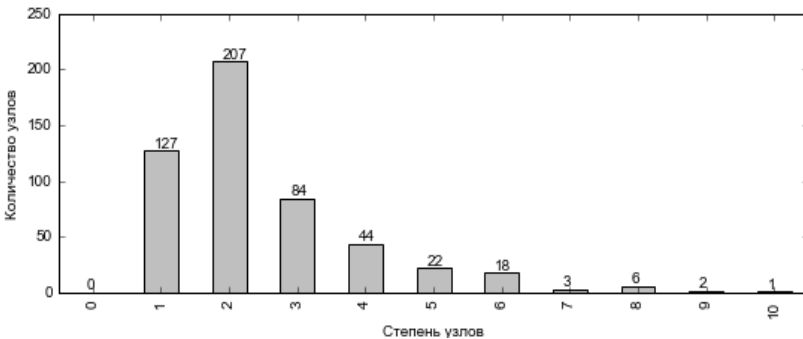


Рис. 1. Распределение степеней узлов сети ЕНЭС

Сравнивая среднюю степень узлов сети ЕНЭС (2,49 связей на узел) с аналогичным показателем, рассчитанным по данным, полученным в 32 зарубежных исследованиях магистральных электрических сетей [18] (медианное значение 2,73 связи на узел), можно отметить, что сеть ЕНЭС является более разреженной по сравнению с большинством европейских и американских аналогов. К сожалению, провести сравнительный анализ других интегральных показателей ЕНЭС и зарубежных магистральных электросетей затруднительно ввиду отсутствия необходимой информации в метаисследовании [18].

3. Модель сетей тесного мира

В большинстве работ, посвященных анализу инфраструктурных сетей и, в частности, магистральных электросетей, методами теории сложных сетей рассматривается вопрос принадлежности исследуемой сети к классу сетей тесного мира. Такое внимание к данному вопросу связано с тем, что модель сетей тесного мира является одной из ключевых в типологии сетей, существующих в ТСС. Для электросетей этот вопрос является особенно важным, так как одним из ключевых свойств сетей тесного мира является способность быстрого распространения (диффузии) информации в сети [19], что в случае электросетей означает возможность быстрого распространения каскадных эффектов, таких как каскадные отключения.

Сети тесного мира являются широко распространенным и хорошо исследованным классом сетей. Феномен сетей тесного мира заключается в том, что эти сети обладают компактностью (небольшой длиной кратчайших путей между всеми парами узлов сети), характерной для случайных сетей (сетей Эрдеша–Реньи) [8], и высоким уровнем кластеризации (средним значением коэффициента кластеризации всех узлов сети), характерным для регулярных сетей («решеток»).

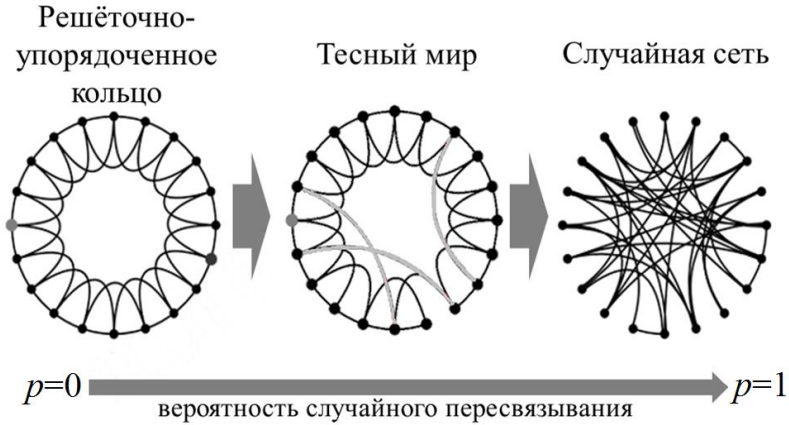


Рис. 2. Иллюстрация из пионерской работы Ваттса и Строгатца [23], демонстрирующая принцип построения сети, обладающей свойствами тесного мира (p – вероятность осуществления пересвязывания связей в сети)

Д. Ваттсом и С. Строгатцом в работе [23] был предложен алгоритм генерации сетей со свойствами тесного мира, который заключается в случайном изменении связей (пересвязывании) в сети, представляющей собой одномерную решетку, этот процесс иллюстрирован на рис. 2. Пересвязывание (relinkage) даже небольшой доли связей регулярной сети (вероятность пересвязывания для каждой связи определяется параметром модели p) приводит к сильному сокращению средней длины кратчайших путей в сети, при этом средний коэффициент кластеризации, присущий исходной решетке, снижается незначительно. Этот феномен продемонстрирован на графике на рис. 3.

Связи в сетях тесного мира, отвечающие за сильное сокращение длины кратчайших путей в сети, принято называть длинными связями (long link или shortcut). Нужно отметить, что это понятие напрямую не связано с длиной связи, более того, во многих сетях понятие длины для связей может быть вообще не определено, что не мешает выявлять в них «длинные связи», связывающие отдаленные в топологическом смысле узлы сети. В модели Ваттса–Строгатца связи, образующиеся в результате

пересвязывания узлов, чаще всего становятся длинными связями (на рис. 2 они отмечены серым цветом).

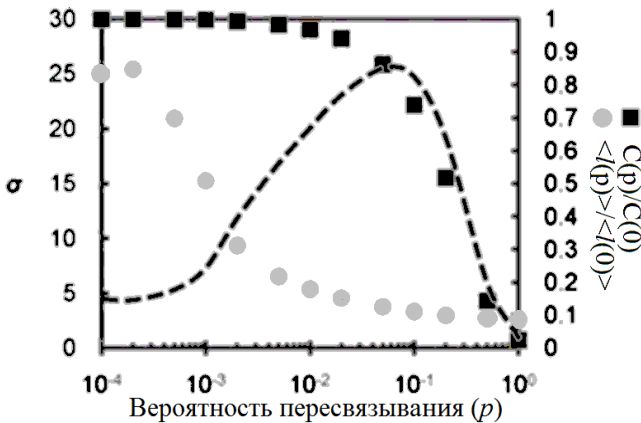


Рис. 3. Изменение основных свойств сети (среднего коэффициента кластеризации C и средней длины путей в сети $\langle l \rangle$) при разных значениях параметра p по отношению к их значениям для решеточно-упорядоченного кольца (правая шкала) и меры принадлежности к сетям тесного мира σ (левая шкала) (рисунок из работы [21])

Для электросетей длинные связи в сети представляют особый интерес, так как исследования каскадных аварий в электросетях показали, что «длинные связи» в сетях тесного мира являются ключевым элементом процесса возникновения каскадных отключений [14]. В целом же в указанном исследовании показано, что триггером начала каскадной аварии является выход из строя ряда элементов сети, приводящий к потере электросетью качеств сети тесного мира.

Несмотря на большое количество исследований магистральных электросетей методами ТСС, на данный момент отсутствует консенсус об их принадлежности к сетям тесного мира. Хотя в пионерских исследованиях [22] давался положительный ответ на этот вопрос, впоследствии относительно ряда

магистральных электросетей сделан вывод о том, что они не относятся к сетям тесного мира [12, 18].

Проведение данного анализа осложняется отсутствием точного критерия принадлежности сети к классу сетей тесного мира. При этом среди исследователей получил распространение подход к типизации сети, имеющий ряд существенных изъянов. В данной работе рассматривается более адекватный метод определения принадлежности сети к сетям тесного мира, не применявшийся ранее для анализа магистральных электросетей, а также его авторская адаптация к задаче анализа сетей, имеющих географическую привязку вершин.

4. Определение принадлежности к сетям тесного мира

Обычно для анализа принадлежности сети к сетям тесного мира выполняется сравнение коэффициента кластеризации и среднего кратчайшего пути у исследуемой сети и случайной сети с аналогичным распределением степеней вершин (долями вершин сети, имеющих данную степень). Распространение получила числовая мера принадлежности к тесному миру, впервые предложенная в [13]:

$$(1) \quad \sigma = \frac{C / C_{rnd}}{\langle l \rangle / \langle l_{rnd} \rangle},$$

где C и C_{rnd} – уровень кластеризации в исследуемой сети и в случайной сети-аналоге, а $\langle l \rangle$ и $\langle l_{rnd} \rangle$ – средняя длина кратчайших путей в этих сетях. Чем больше значение величины σ , тем ближе сеть к состоянию тесного мира, а для сети тесного мира характерно значение $\sigma \gg 1$.

Однако анализ меры σ , проведенный в [21], показывает, что ее применение для построения критерия принадлежности к тесному миру некорректно. В работе [21] показано, что сети, однотипные с точки зрения модели тесного мира, могут иметь значение σ , отличающееся на порядок только из-за различия в размере сети. Таким образом, выбор любого определенного порогового уровня σ в качестве критического значения принадлежности к тесному миру будет некорректен, так как для сетей

разного размера данный уровень будет означать существенно различающуюся структуру сети с точки зрения принадлежности к тесному миру. Кроме того, мера σ не может использоваться для сравнения сетей различного размера.

Кроме того, анализ меры σ , проведенный в [21], показывает, что ее применение для определения принадлежности к тесному миру приводит к неоднозначным результатам: для сетей, находящихся в качественно разных состояниях, с точки зрения обладания свойствами тесного мира могут наблюдаться одинаковые значения σ . Это хорошо проиллюстрировано на рис. 3: на графике зависимости σ от вероятности пересвязывания в модели Ваттса–Строгатца (зависимость изображена пунктирной линией) хорошо продемонстрирована ее немонотонность. Таким образом, одно значение σ может иметь две совершенно различные интерпретации с точки зрения модели тесного мира.

Например, значение σ , рассчитанное нами для ЕНЭС, равно 14,1, что при помощи графика с рис. 3 может быть интерпретировано двояко: либо структура ЕНЭС близка к случайным сетям (значение 14,1 на нисходящей части графика σ), либо к регулярным сетям (значение 14,1 на восходящей части графика σ). И, несмотря на то, что значение σ для ЕНЭС много больше 1, данное значение не может однозначно говорить о принадлежности сети к сетям тесного мира и не может использоваться для сравнения структур сетей с различным количеством узлов. Это вызвано тем, что для интерпретации значения σ для каждой конкретной сети требуется построение индивидуального графика зависимости σ от вероятности пересвязывания в модели Ваттса–Строгатца, так как, как было отмечено выше, поведение σ существенно зависит от размера сети.

Основной причиной недостатков меры принадлежности к тесному миру σ является то, что в ней характеристики сети сравниваются только с аналогичными показателями у случайной сети-аналога и не проводится сравнение с регулярной сетью-аналогом. Иначе говоря, дважды проводится сравнение сети с одним крайним случаем модели Ваттса–Строгатца – случайной сетью с малым диаметром, и ни разу – с другим крайним случаем – регулярной сетью с высокой кластеризацией. Причиной распространения такого подхода является отсутствие простого и

широко известного алгоритма построения регулярной сети-аналога при относительной простоте построения случайной сети-аналога.

Для получения случайной сети с распределением степеней вершин, аналогичным заданной сети (рандомизации сети), достаточно провести большое количество (по сравнению с количеством узлов и связей в сети) случайных пересвязываний, сохраняющих степень узлов сети. Алгоритм случайного пересвязывания заключается в случайном выборе двух пар связанных узлов, разрыве существующих связей внутри пар и создании двух новых связей между узлами, относившимися к разным парам (каждый узел участвует только в одной новой связи). Если вновь образованные связи дублируют уже существовавшие в сети связи, эта попытка пересвязывания отменяется. В результате процедуры степень всех четырех узлов не меняется, количество связей в сети сохраняется, а порядок связей случайным образом изменяется.

Данная процедура была проведена для исследуемой компьютерной модели сети ЕНЭС. Было реализовано 50 повторений процесса рандомизации, по итогам которых были получены средние значения характеристик рандомизированной сети, приведенные в столбце 2 таблицы 1. Средний кратчайший путь в модели ЕНЭС оказался на 4 перехода длиннее, чем в случайной сети-аналоге, а отношение $\langle l \rangle / \langle l_{rnd} \rangle$ имеет значение 1,50, что очень существенно для сетей с одинаковым количеством вершин.

Отношение средней кластеризации в сети ЕНЭС и случайной сети-аналоге C/C_{rnd} равно 21,1, и качественное изменение значения показателя здесь очевидно. Однако кластеризация для ЕНЭС на порядок меньше теоретического максимума, таким образом, значение для ЕНЭС может на порядок отличаться не только от аналогичного значения в рандомизированной сети, но и от аналогичного значения в регуляризованном аналоге. В данном случае, как и говорилось выше, только сравнение с адекватной сетью-аналогом с высокой кластеризацией (регуляризованным аналогом сети) может корректно показать близость сети ЕНЭС к состоянию тесного мира.

5. Мера принадлежности к тесному миру на основе процедуры латтисизации

Преодоление недостатков принятой меры принадлежности сети к тесному миру требует построения регуляризованной сети-аналога с высокой кластеризацией. Построение такой сети представляет большую сложность, чем создание случайного аналога, и пока не получило широкого распространения при анализе сложных сетей на принадлежность к сетям тесного мира. Эта сложность вызвана тем, что для движения в направлении к упорядоченному виду сети требуется информация об исходной структуре решетки и специальная процедура повышения упорядоченности сети. В модели Ваттса–Строгатца вид одномерной решетки изначально задан, однако, в отличие от модельного случая, для реальных сетей информация об их исходной упорядоченной структуре в явном виде отсутствует.

В работе К. Телесфорда и др. [21] было предложено использовать для этих целей алгоритм латтисизации (latticization – приведения к виду решетки), описанный в [20]. Рассмотрение прошедшей латтисизацию сети-аналога позволило Телесфорду с коллегами сформулировать более качественную меру близости сети к тесному миру, имеющую вид

$$(2) \quad \omega = \frac{\langle l_{rnd} \rangle}{\langle l \rangle} - \frac{C}{C_{latt}},$$

где C_{latt} – уровень кластеризации в латтисизированной сети-аналоге. Для сетей тесного мира значение ω должно быть близко к 0, а для всех сетей, полученных в рамках алгоритма Ваттса–Строгатца, значение $\omega \in [-1, 1]$, где значение, близкое к 1, соответствует случайной сети-аналогу, а значение, близкое к -1 , – сети-аналогу с регулярной структурой. В работе [21] показано, что ω слабо чувствительна к размеру анализируемой сети и не демонстрирует одинаковых значений для сетей, находящихся в качественно разных состояниях с точки зрения модели тесного мира Ваттса–Строгатца.

Суть алгоритма латтисизации заключается в многократном проведении процедуры пересвязывания, похожей на шаг процедуры рандомизации сети, но с существенными отличиями:

выполняются только случайные пересвязывания, приводящие к уменьшению суммарной длины связей в сети, при этом степени всех узлов сети и связность сети сохраняются.

Принципиальная схема алгоритма латтисизации приведена в виде псевдокода на рис. 4. На каждой итерации внешнего цикла алгоритма латтисизации (строки 1–19) проводится попытка случайного пересвязывания. Для того чтобы пересвязывание не приводило к изменению степеней узлов, оно выполняется по следующей схеме: случайно выбираются две пары узлов (пара $nodeA$, $nodeB$ и пара $nodeC$, $nodeD$), связанных между собой. Связи внутри пар разрываются и образуются новые перекрестные связи между узлами ($nodeA$, $nodeD$ и $nodeB$, $nodeC$ соответственно). Во внутреннем цикле алгоритма (строки 4–13) для пары узлов $nodeA$, $nodeB$ подбирается подходящая пара узлов $nodeC$, $nodeD$: вторая пара узлов не должна иметь совпадений и связей с узлами первой пары и, главное, длина новых перекрестных связей должна быть меньше, чем длина существующих связей внутри пар. Длина связи в алгоритме принимается равной расстоянию между узлами, определяемому функцией *Distance*, принимающей в виде входных переменных два узла сети.

В алгоритме латтисизации, описанном в [20], расстояние между любыми двумя узлами в сети определяется кольцевой последовательностью узлов по аналогии со структурой, в которой находятся узлы в одномерной решетке (кольце) в алгоритме Ваттса–Строгатца (см. рис. 2). Так как, в отличие от модели Ваттса–Строгатца, при анализе реальной сети информации об исходной кольцевой решетке нет, то кольцевая последовательность узлов определяется случайным образом перед началом процедуры латтисизации. Расстояние между узлами задается равным наименьшему расстоянию между узлами, измеряемому в количестве шагов по кольцевой последовательности между ними. В частности, расстояние между соседними узлами в кольцевой последовательности минимально и равно единице, а расстояние между самыми удаленными узлами, расположенными на противоположных сторонах кольца, равно $[N/2]$, где N – количество узлов в сети.

После успешного выбора двух пар узлов, удовлетворяющих всем требованиям алгоритма, производится пересвязывание узлов (строка 15 на рис. 4), т.е. разрыв двух связей внутри пар узлов и образование двух более коротких перекрестных связей. После пересвязывания проверяется, что сеть сохранила связность, и если это условие нарушается, то операции пересвязывания откатываются и начинается новая итерация поиска двух пар связанных узлов. При этом каждое успешное пересвязывание приводит к повышению локальности связей: связи в сети становятся короче и все больше обуславливаются положением узлов в заданной для определения расстояния кольцевой последовательности.

```

function Latticization(network, rewireTryQty, findCDTryQty)
  /* функция возвращает пересвязанную сеть, network
  должна быть связной */
  1 for i ← 1 to rewireTryQty do /* попытки пересвязывания */
  2   nodeA, nodeB ← RandomChooseLinkedNodes(network) ;
  3   startRewire ← False ;
  4   for j ← 1 to findCDTryQty do /* подбр nodeC и nodeD для
  корректного перекрестного пересвязывания */
  5     nodeC, nodeD = ChooseLinkedNodes(network, nodeA,
  nodeB) ;
  6     if nodeA = nodeC or nodeA = nodeD or nodeB = nodeC or
  nodeB = nodeD or HasLink(network, nodeA, nodeD) or
  HasLink(network, nodeB, nodeC) then
  7       continue ; /* условия не выполнены, начинаем
  новую попытку */
  8     end
  9     if Distance(nodeA, nodeB) + Distance(nodeC, nodeD)
  > Distance(nodeA, nodeD) + Distance(nodeB,
  nodeC) then
  10      startRewire ← True ;
  11      break ; /* подходящие узлы найдены */
  12     end
  13   end
  14   if startRewire then
  /* перекрестное пересвязывание nodeA-nodeB,
  nodeC-nodeD=>nodeA-nodeD, nodeB-nodeC: */
  15   Rewire(network, nodeA, nodeB, nodeC, nodeD) ;
  16   if NumberOfConnectedComponents(network) > 1 then
  /* пересвязывание откатывается т.к. оно
  нарушило связность сети: */
  17   Rewire(network, nodeA, nodeD, nodeB, nodeC) ;
  18   end
  19   end
  20 end
  21 return network
end

```

Рис. 4. Описание алгоритма латтисизации в виде псевдокода

Данный алгоритм не претендует на высокую вычислительную эффективность и достижение глобального минимума длин связей. Применение случайного выбора связанных узлов в нем является просто удобным методом получения субоптимальных решений для вычислительно трудной задачи и за счет большого количества повторений шага алгоритма роль случайности в результате оказывается мало существенной. При этом алгоритм прост в реализации и решает задачу построения сети-аналога с регулярной структурой, высокой локальностью связей и, как следствие, высоким значением среднего коэффициента кластеризации.

Для уменьшения влияния произвола в выборе последовательности узлов в кольцевой последовательности процедура многократно повторяется с различными случайными кольцевыми последовательностями, в итоге выбирается результат, для которого получена наименьшая суммарная длина связей.

Таблица 1. Характеристики рассматриваемых сетей

	1	2	3	4
	ЕНЭС	Случайная сеть-аналог	Латтисизированная (одномерная) сеть-аналог	Геолаттисизированная (двумерная) сеть-аналог
L - вредный кратчайший путь (переходов)	11,9	7,9	62,8	19,1
C - средняя кластеризация в сети (в диапазоне [0, 1])	0,0807	0,0038	0,2010	0,1696

Для анализа магистральных электросетей метод латтисизации ранее не применялся. Для решения этой задачи авторами была разработана собственная реализация алгоритма латтисизации на языке программирования Python, разработанная на основе описания алгоритма латтисизации, предложенного в [20], и

анализа его реализации в библиотеке алгоритмов brain connectivity toolbox [7].

В рамках анализа сети ЕНЭС процедура латтисизации была применена к компьютерной модели сети ЕНЭС, характеристики полученной сети-аналога приведены в столбце 3 таблицы 1. Отношение средних кластеризаций в латтисизированной и исходной сети ЕНЭС C_{latt}/C составило 2,5, однако это заметное различие существенно меньше более чем двадцатикратного различия в отношении C/C_{md} . Средняя длина пути в латтисизированной сети равна 62,8 при 11,9 в исходной модели и 7,9 в рандомизированной, из чего видно, что по длине путей сеть ЕНЭС существенно ближе к рандомизированному аналогу, нежели к регуляризованному при помощи алгоритма латтисизации аналогу. Таким образом, сеть ЕНЭС можно считать близкой к случайной сети-аналогу по средней длине пути и близкой к регулярной сети по уровню средней кластеризации. Значение меры ω , рассчитанное для сети ЕНЭС, составляет 0,26 (расчет значения см. в таблице 2), что говорит о близости сети ЕНЭС к состоянию тесного мира. Положительное значение ω показывает, что по своей структуре сеть ЕНЭС существенно ближе к случайной сети, чем к одномерной решетке.

Таблица 2. Меры принадлежности к тесному миру

Мера	Расчетдлежности	Значениеежнос
$\sigma_{ЕНЭС}$	$\frac{0,0807/0,0038}{11,9/7,9}$	14,1
$\omega_{ЕНЭС ЛАТ}$	$\frac{7,9}{11,9} - \frac{0,0807}{0,2010}$	0,26
$\omega_{ЕНЭС ГЕОЛАТ}$	$\frac{7,9}{11,9} - \frac{0,0807}{0,1696}$	0,19

6. Процедура геолаттисизации

Так как объектом данного исследования является магистральная электросеть, для которой известна географическая привязка узлов сети, то использование одномерной замкнутой

решетки в качестве сети-аналога представляется не совсем корректным, тем более что в литературе широко известны модификации модели Ваттса–Строгатца, в которых для построения сетей тесного мира используются двухмерные решетки [15].

Для построения двухмерной регулярной сети-аналога в рамках работы по анализу сети ЕНЭС была разработана авторская модификация алгоритма латтисизации. В ней расстояние, приписываемое связям в сети, определяется на основе данных о координатах узлов, соединяемых этой связью, при помощи расчета длины (в километрах), соответствующей геодезической линии на поверхности земли. В модифицированном алгоритме это расстояние возвращается при вызове функции Distance. Напомним, что в работе алгоритма латтисизации эта функция используется для проверки сокращения суммарной длины связей при пересвязывании (строка 9 на рис. 4).

Таким образом, каждое успешное пересвязывание в модифицированном алгоритме геопространственной латтисизации (геолаттисизации) приводит к сокращению длины линий уже в географическом понимании и повышению локальности связей не на случайно заданной кольцевой последовательности, а в географическом смысле.

Для анализа применимости предлагаемого подхода геолаттисизации для сетей с пространственной привязкой узлов был рассмотрен модельный пример: сеть, построенная на основе двухмерной решетки с пространственной привязкой узлов и связями, обусловленными пространственной близостью узлов. Анализ применимости проведен по следующей схеме. На модельной сети выполнено случайное пересвязывание небольшой доли связей, т.е. на ее основе получена сеть, обладающая свойствами тесного мира. К этой сети применены процедуры латтисизации и геолаттисизации, по результатам которых проведен анализ точности восстановления исходных характеристик модельной сети и сделан вывод о качестве работы данных процедур для сетей, имеющих пространственно обусловленную структуру связей.

Для построения модельной сети рассмотрен прямоугольник на плоскости размером 10 на 20. В точках прямоугольника, имеющих целочисленные координаты, расположены 200 узлов

(см. рис. 5а). Каждый из узлов соединен с ближайшими соседями по горизонтали и вертикали. В решетке с квадратными ячейками коэффициент кластеризации всех узлов будет равен 0, что не позволит провести на такой модели анализ поведения коэффициента кластеризации, поэтому в каждую вторую ячейку модельной сети были добавлены дополнительные диагональные связи. Направление связей во всех ячейках выбрано одинаковым, а положение ячеек с диагональными связями у соседних рядов ячеек чередуется (см. рис 5а). В итоге модельная сеть, изображенная на рис. 5а, имеет 200 узлов, 456 связей, основные свойства модельной сети приведены в столбце 1 таблицы 3.

Таблица 3. Характеристики модельных сетей

	1	2	3	4
	Исходная сеть	Сеть после случайного пересвязывания	Пересвязанная сеть после латтисизации	Пересвязанная сеть после геолаттисизации
Диаметр сети	28	12	38	23
$\langle l \rangle$ - средний кратчайший путь (переходов)	8,73	5,72	18,83	8,22
C - средняя кластеризация в сети (в диапазоне [0, 1])	0,32	0,30	0,56	0,33

После случайного пересвязывания 14 связей (3% от общего количества связей) модельной сети она приобрела вид, показанный на рис. 5б, при этом диаметр сети уменьшился более чем в 2 раза, а коэффициент средней кластеризации изменился только на 7,6% (абсолютные значения коэффициентов приведены в столбце 2 таблицы 3). Таким образом, пересвязанная модельная сеть приобрела свойства сети тесного мира.

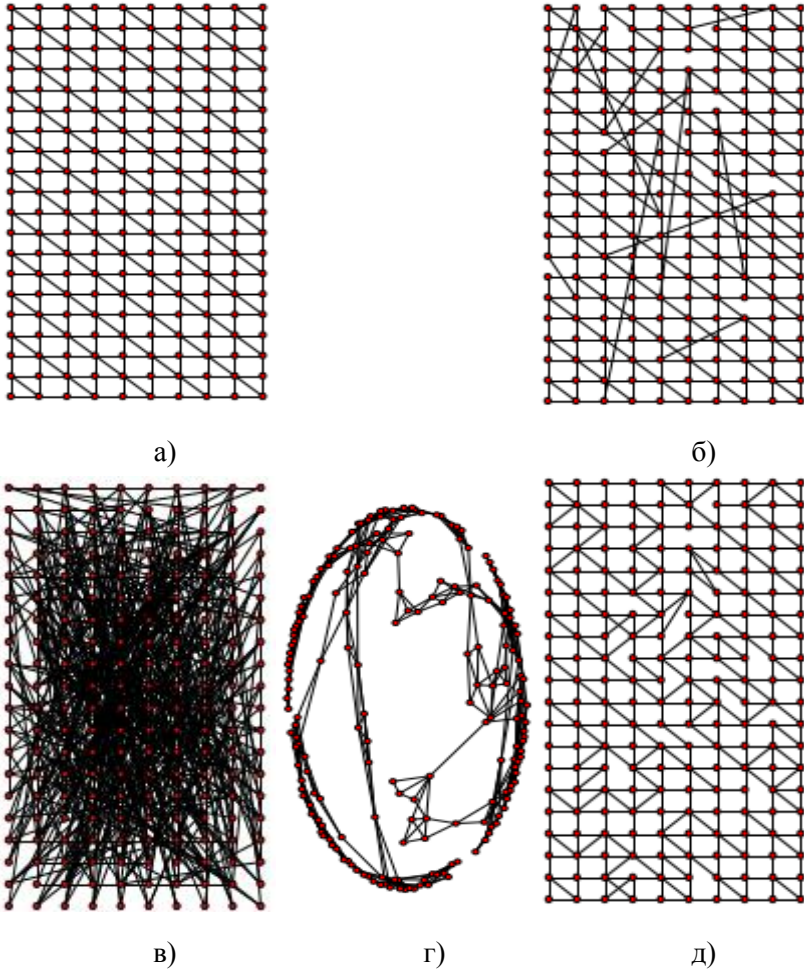


Рис. 5. Визуализация результата работы алгоритма геолаттисизации на сети ЕНЭС: а) исходная модельная сеть; б) модельная сеть после случайного пересвязывания (сеть тесного мира); в) пересвязанная сеть после латтисизации (положение узлов сохранено); г) пересвязанная сеть после латтисизации (положение узлов определено алгоритмом Фрюхтермана–Рэйнгольда); д) пересвязанная сеть после геолаттисизации

К полученной сети тесного мира была применена процедура латтисизации. Для данного примера алгоритмом латтисизации было проведено 1606 пересвязываний из 4000 попыток выполнения пересвязывания. Так как при проведении процедуры латтисизации структура связей подстраивается под кольцевую последовательность узлов, определенную случайным образом, то вид связей для латтисизированной модельной сети на исходной сетке будет казаться случайным (см. рис. 5в). Однако применив алгоритм визуализации графов Фрюхтермана–Рэйнгольда [9] (см. рис. 5г), в котором положение узлов определяется структурой связей в сети, мы можем увидеть, что структура связей, полученная в результате латтисизации, действительно подчинена (естественно, не идеально) некоторой кольцевой последовательности узлов. Значения коэффициентов латтисизированной сети приведены в столбце 3 таблицы 3. Как видно, в результате латтисизации исходные характеристики модельной сети восстановлены очень неточно: значение средней длины кратчайших путей завышено более чем в два раза, средний коэффициент кластеризации завышен более чем на 70%.

Поскольку для упрощения модельного примера узлы в нем имеют привязку на плоскости вместо геопространственной привязки, то для проведения геолаттисизации в модельном примере в качестве меры длины связи использовано евклидово расстояние между узлами вместо определения длины геодезической линии на поверхности земли.

Результат геолаттисизации модельной сети тесного мира, изображенной на рис. 5б, показан на рис. 5д. Даже из визуального анализа рисунка хорошо видна близость структуры геолаттисизированной сети к исходной сети, показанной на рис. 5а. В данном случае алгоритмом геолаттисизации было проведено 69 пересвязываний из 4000 попыток выполнения пересвязывания. Относительно небольшое по сравнению с процедурой латтисизации количество пересвязываний объясняется тем, что в данном случае не происходит преобразования двумерной решетки к кольцевой последовательности и все пересвязывания производятся только для укорачивания длинных связей, которых в рассматриваемой модельной сети всего 14 штук.

Процедура геолаттисизации не способна точно воссоздать исходную конфигурацию связей в модельной сети, однако в результате ее работы сохранилось только 2 связи между узлами, не являющимися ближайшими соседями. Значения коэффициентов геолаттисизированной сети приведены в столбце 4 таблицы 3. Как видно, в результате геолаттисизации исходные характеристики модельной сети восстановлены весьма точно: значения средней длины кратчайших путей отличаются от исходных всего на 6%, а средний коэффициент кластеризации – на 3%. Таким образом, анализ модельного примера показал, что геолаттисизация позволяет намного более точно определить свойства регуляризованного аналога сети в случае, если регулярная структура сети обусловлена пространственным расположением ее узлов.

7. Геолаттисизация сети ЕНЭС

Для повышения производительности алгоритм геолаттисизации был модифицирован. Была изменена работа функции `ChooseLinkedNodes` (строка 5 на рис. 4): вместо случайного выбора связанных узлов `nodeC`, `nodeD` функция стала возвращать связанные узлы, один из которых находится среди m ближайших узлов `nodeA`.

За счет гарантированного появления одной короткой (в географическом смысле) связи среди новых связей вероятность успешного пересвязывания существенно возросла. Для решения задачи поиска m ближайших узлов применена одна из реализаций алгоритма геохеширования [10]. В результате скорость построения географически латтисизированной сети существенно возросла и стала удовлетворительной для проведения исследования сети ЕНЭС.

На рис. 6 изображен результат применения процедуры геолаттисизации к модели ЕНЭС. Как видно на рис. 6б, при возможности длинные связи в сети заменены алгоритмом на связи с более близкими узлами сети, при этом степени всех вершин сохранены. Так как процесс геолаттисизации, так же как и латтисизации, основывается на случайном пересвязывании, то его результат недетерминирован, и приведенное на рис. 6б

изображение является только одним из возможных исходов применения алгоритма.

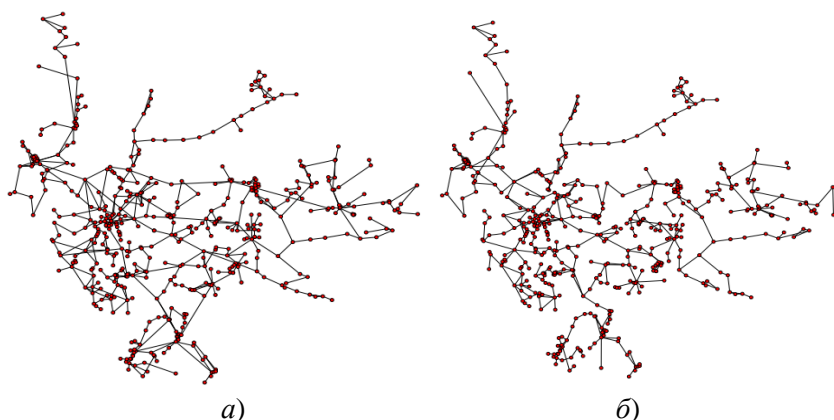


Рис. 6. Визуализация результата работы алгоритма геолаттисизации на сети ЕНЭС: а) исходная модель ЕНЭС с изображением узлов в соответствии с их географическими координатами; б) модель ЕНЭС, прошедшая геолаттисизацию: длинные связи по возможности заменены на более короткие, степень (количество связей) всех узлов сети сохранена

Нужно отметить, что в процедуре латтисизации и пространственная структура узлов (кольцевая последовательность), и процесс пересвязывания имеют случайный характер. В процедуре геолаттисизации пространственная структура узлов имеет объективный характер и определяется географическим местоположением узлов. Таким образом, произвол получения регуляризованного аналога при помощи геолаттисизации существенно меньше и определяется только процедурой пересвязывания узлов, что снижает требования к количеству повторений процедуры для получения репрезентативных результатов.

В результате замены длинных связей на более короткие, локальные, суммарная длина связей между узлами сети снизилась с 48 107 км до 40 579 км, или на 16%. Нужно отметить, что в данном случае речь идет о длине связей, определенной как

длина кратчайшей линии, соединяющей узлы с определенными координатами (геодезической линии), а не о длине ЛЭП. Информация о фактической длине ЛЭП нам недоступна, и ясно лишь, что она больше, чем длина рассматриваемой нами геодезической линии.

Несмотря на то, что геолаттисизация сократила суммарную длину связей, измеряемую в километрах, всего на 16%, в топологическом смысле удаленные связи действительно были очень важны для связывания сети. После геолаттисизации топологические характеристики сети изменились очень существенно: диаметр сети (максимальная величина кратчайшего пути между всеми парами узлов) увеличился с 36 до 55 переходов (вырос на 52%), средняя длина путей увеличилась с 11,9 переходов до 19,1 (выросла на 61%). Таким образом, некоторые из удаленных связей были длинными не только с точки зрения географической метрики, но и являлись «длинными связями» в понимании модели Ваттса–Строгатца, т.е. они обеспечивали «стягивание» сети в компактную структуру.

Важные для расчета меры ω результаты расчета характеристик сети ЕНЭС, прошедшей геолаттисизацию, приведены в столбце 4 таблицы 1. Двумерная модель сети продемонстрировала существенно меньшую среднюю длину путей по сравнению с одномерной – 19,1 вместо 62,8. Это изменение было ожидаемо, так как двумерная решетка с тем же количеством узлов и связей, что и в одномерной решетке, обеспечивает существенно более короткие кратчайшие пути между узлами. Несмотря на такое изменение, данный показатель исходной сети ЕНЭС все равно существенно ближе к случайной сети-аналогу (разница в 33%), чем к регуляризованному геопространственному аналогу (разница в 60%).

Также ожидаемо у геолаттисизированной сети-аналога относительно одномерного регуляризованного аналога снизилась средняя кластеризация: с 0,20 до 0,17. Это объясняется тем, что географическая (двухмерная) мера близости по сравнению с мерой близости на одномерной решетке определяет более широкий круг ближайших соседей. Так как количество связей в сети фиксировано, то связи между узлами, входящими в круг ближайших соседей в двухмерной решетке менее вероятны, что

и объясняет снижение коэффициента кластеризации узлов и, как следствие, средней кластеризации всей сети. В результате значение меры близости к тесному миру ω , рассчитанное для сети ЕНЭС с C_{lat} , определенным по сети, прошедшей геолаттисизацию, составляет 0,19 (расчет значения см. в таблице 2), что существенно ближе к 0, чем величина меры ω , полученная на основе латтисизации.

Таким образом, более адекватная методика построения регуляризованного аналога исследуемой сети указывает на еще большую близость структуры ЕНЭС к сетям тесного мира. При этом качественная оценка большей близости ЕНЭС к случайным сетям, нежели к регулярным, сохраняется. В результате проведенного анализа мы можем считать, что модель тесного мира применима к ЕНЭС. Как следствие, для ЕНЭС является актуальной задача проведения анализа уязвимости ЕНЭС к каскадным отключениям с учетом ее топологии, в первую очередь, ее принадлежности к сетям тесного мира.

8. Выявление критических узлов и связей в сети ЕНЭС

Эмпирический анализ крупномасштабных каскадных отключений в электросетях показал [14], что в электрических сетях за распространение каскадных эффектов отвечают длинные связи. Идентифицировав длинные связи в ЕНЭС, мы можем определить узлы и связи сети, требующие особого внимания при анализе надежности сети к каскадным отключениям.

Из анализа модели тесного мира известно [5, 6], что узлы сетей тесного мира, связанные с длинными связями, обладают высокой центральностью по посредничеству (betweenness centrality). Центральность по посредничеству определяется как доля кратчайших путей, проходящих через данный узел, среди кратчайших путей, построенных для всех узлов сети:

$$(3) \quad g(u) = \sum_{s \neq t \neq u} \frac{\sigma_{st}(u)}{\sigma_{st}},$$

где $\sigma_{st}(u)$ – количество кратчайших путей между узлами s и t , проходящих через узел u , а σ_{st} – количество всех кратчайших

путей между узлами s и t . Центральность по посредничеству характеризует важность узла как посредника на пути между другими узлами. В частности, удаление узла с высокой важностью по посредничеству может привести к увеличению расстояний между многими узлами и, как следствие, увеличению среднего межзвучного расстояния и даже увеличению диаметра всей сети.

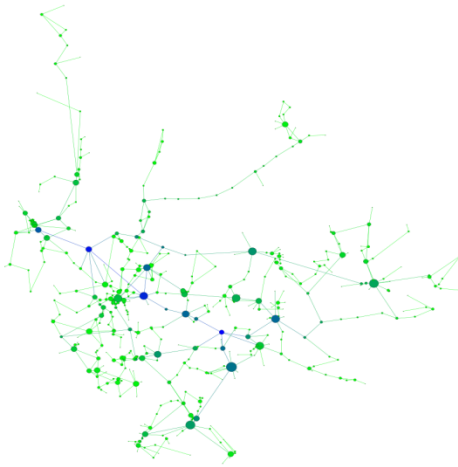


Рис. 7. Визуализация компьютерной модели сети ЕНЭС. Размер узлов определяется количеством связей (степенью) узла, цвет связей определяется центральностью по посредничеству (синие узлы – наиболее центральные)

В рамках данного исследования на основе компьютерной модели ЕНЭС была рассчитана центральность по посредничеству узлов сети ЕНЭС, результаты расчетов визуализированы на сети на рис. 7 и представлены в виде гистограммы на рис. 8. Из рисунков видно, что в сети ЕНЭС есть несколько узлов, имеющих очень высокую центральность по посредничеству и образующих цепь, проходящую через всю центральную часть ЕНЭС. Перечислим состав этой цепи (в скобках приведена центральность узлов по посредничеству): ПС 750 кВ Ленинградская (0,23) – АЭС Калининская (0,32) – ПС 750 кВ Владимирская

(0,30) – ПС 500 кВ Радуга (0,19) – ПС 500 кВ Арзамасская (0,21) – ПС 500 кВ Осиновка (0,19) – ПС 500 кВ Вешкайма (0,35). Особый статус этих узлов с точки зрения центральности по посредничеству подчеркивает анализ распределения всех узлов по этому показателю: среднее значение центральности по посредничеству среди всех узлов сети составляет 0,0213, медиана 0,0038, значение 90-го, 95-го и 98-го перцентилей, соответственно: 0,0667, 0,1121 и 0,1880. Из анализа распределения величины центральности по посредничеству видно, что все перечисленные узлы относятся к 2% узлов с самой высокой центральностью по посредничеству и имеют значение этого показателя на порядок выше среднего значения по всей сети и на два порядка выше медианного значения по всей сети.

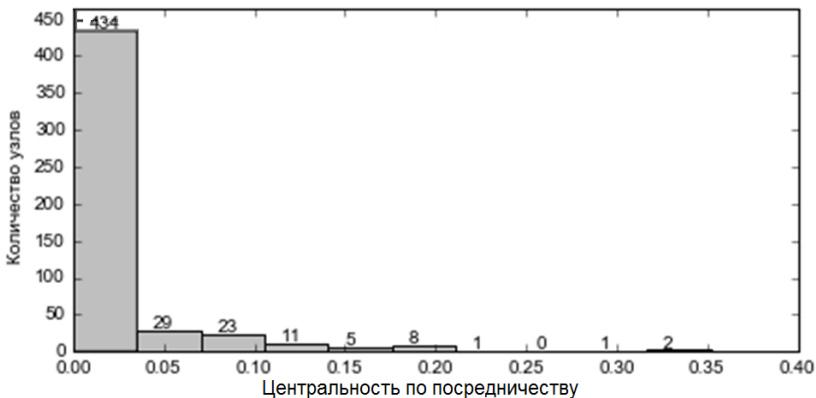


Рис. 8. Гистограмма распределения узлов сети ЕНЭС по уровню центральности по посредничеству

Визуальный анализ позволяет объяснить особую роль этих узлов: они обеспечивают очень короткий (в топологическом смысле) путь через центральную часть сети. Обеспечивается это за счет очень большой протяженности ЛЭП на некоторых участках этой цепочки, что особенно важно ввиду прохождения линий по территории с высокой плотностью узлов, для которой характерны относительно короткие (в географическом смысле) связи между узлами. Большая протяженность ЛЭП в этой це-

почке определяется тем, что они работают с использованием сверхвысокого напряжения (500–750 кВ), а применение данного уровня напряжения рационально только для передачи электроэнергии на большие расстояния.

Таким образом, проведенный анализ центральности по посредничеству позволил идентифицировать узлы и связи ЕНЭС, формирующие структуру тесного мира и требующие особого внимания при анализе надежности сети, в особенности при рассмотрении сценариев каскадных отключений.

9. Выводы

В результате данного исследования разработан новый метод анализа топологической структуры сетей, имеющих пространственную привязку узлов. Данный метод применим для различных инфраструктурных сетей, имеющих географическую привязку узлов и позволяет корректно определить степень близости их структуры к структуре сетей тесного мира. Для решения этой задачи разработана процедура геолаттисизации – новый метод построения регуляризованного аналога для сетей с географической привязкой узлов. На основе характеристик рассматриваемой сети и характеристик ее рандомизированного и регуляризованного аналогов рассчитывается значение числовой меры близости сети к структуре сети тесного мира.

Предложенная мера близости позволяет более корректно идентифицировать структуру сети, проводить более точный сравнительный анализ реальных инфраструктурных сетей с точки зрения их близости к сетям тесного мира. Кроме того, предложенные методы позволяют для проведения сравнительного анализа генерировать искусственные сети-аналоги, обладающие идентичными характеристиками в смысле обладания свойствами тесного мира. Сравнение с этими аналогами позволяет выявлять индивидуальные свойства сети на фоне свойств всего класса сетей с аналогичными топологическими свойствами, что позволяет вывести анализ характеристик сети на качественно новый уровень.

Разработанная мера близости к сетям тесного мира и ее базовый вариант ранее не использовались для анализа структуры

магистральных электросетей. Кроме того, методы теории сложных сетей еще не получили распространения при анализе одной из крупнейших мировых магистральных электросетей – Единой национальной (общероссийской) электрической сети. В данной работе новые методы были применены для исследования свойств ЕНЭС, в результате чего был сделан надежный вывод о принадлежности ЕНЭС к сетям тесного мира. Данный вывод позволяет использовать модель сетей тесного мира для ключевых задач исследования ЕНЭС, таких как анализ вопросов надежности (в частности, устойчивости к каскадным отключениям) и эффективности сети. Так как предыдущие исследования показали ключевую роль «длинных связей» (ключевых структур модели тесного мира) в процессе каскадных отключений, то данной работой, по сути, обоснована необходимость проведения анализа уязвимости ЕНЭС к каскадным отключениям с учетом специфики ее топологии (принадлежности к сетям тесного мира). В данном исследовании не только определены общие характеристики сети, но и идентифицированы «длинные связи» ЕНЭС, формирующие структуру тесного мира и требующие особого внимания при анализе надежности сети.

Необходимо отметить, что принадлежность ЕНЭС к сетям тесного мира определяет не только специфические риски для надежности сети, но и делает сеть более компактной, что положительно сказывается на эффективности передачи электроэнергии на дальние расстояния. Таким образом, принадлежность ЕНЭС к сетям тесного мира является не недостатком ЕНЭС, а ее особенностью, имеющей положительные и отрицательные стороны. Развитие результатов, представленных в данной работе, может позволить корректно учесть специфику ЕНЭС и создать аналитические модели и методы управления, позволяющие минимизировать отрицательные аспекты, присущие топологической структуре ЕНЭС и другим инфраструктурным сетям с аналогичными свойствами.

Литература

1. Данные *OpenStreetMap* в форматах *XML* и *PBF*. – [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://gis-lab.info/projects/osm_dump/.
2. ЕВИН И.А. *Введение с теорию сложных сетей* // Компьютерные исследования и моделирование. – 2010. – Т. 2, №2. – С. 121–41
3. *Схема и программа развития ЕНЭС на 2013–2019 годы*. – Приказ Минэнерго России №309 от 19.06.2013.
4. *Услуги по технологическому присоединению: центры туманья*. – [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://portaltp.fsk-ees.ru/sections/Map/map.jsp>.
5. BARRAT A., BARTHELEMY M., VESPIGNANI A. *The effects of spatial constraints on the evolution of weighted complex networks* // J. Stat. Mech. – 2005. - P. 503
6. BARTHELEMY M. *Spatial Networks* // Condensed Matter, Statistical Mechanics – 2011. - arXiv:1010.0302, Physics Reports №499 - P. 1–101.
7. *Brain Connectivity Toolbox*. – [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.brain-connectivity-toolbox.net>.
8. ERDŐS P., RÉNYI A. *On Random Graphs I* // Publ. Math. Debrecen. - 1959. – Vol. 6, - P. 290–297.
9. FRUCHTERMAN T., REINGOLD E. *Graph drawing by force-directed placement* // Software – Practice and Experience. – 1991. – Vol. 21(11) – P. 1129–1164.
10. *Geohash is a Python module that provides functions for decoding and encoding Geohashes to and from latitude and longitude coordinates*. – [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://github.com/vinsci/geohash/>.
11. *Gephi: The Open Graph Viz Platform*. – [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://gephi.org/>.
12. HAN P., DING M. *Analysis of Cascading Failures in Small-world Power Grid* // Int. J. of Energy Science. – 2011 - Vol. 1, No. 2 - P. 99-104.
13. HUMPHRIES M.D., GURNEY K. *Network 'small-world-ness': a quantitative method for determining canonical network equivalence* // PLoS One 3:e0002051 – 2008.

14. KIM C.J., OBAH O.B. *Vulnerability Assessment of Power Grid Using Graph Topological Indices* // Int. J. of Emerging Electric Power Systems. – 2007. – Vol. 8, Issue 6, Article 4.
15. KLEINBERG J.M. *Navigation in a small world* // Nature. – 2000. – No. 406 – P. 845
16. *NetworkX: Python language software package for the creation, manipulation, and study of the structure, dynamics, and functions of complex networks*. – [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://networkx.github.io/>.
17. *OpenStreetMap*. – [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.openstreetmap.org/>.
18. PAGANI G.A., AIELLO M. *The Power Grid as a Complex Network: a Survey* // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. – 2011. - №392(11). – P. 2688–2700.
19. PANDIT S.A., AMRITKAR R.E. *Random spread on the family of small-world networks* // Phys. Rev. E. – 2001. - No. 63. – Article ID: 041104.
20. RUBINOV M., SPORNS O. *Complex network measures of brain connectivity: uses and interpretations* // Neuroimage. – 2010. – No. 52 – P. 1059–1069.
21. TELESFORD Q.K., JOYCE K.E., HAYASAKA S., BURDETTE J.H., LAURIENTI P.J. *The Ubiquity of Small-World Networks* // Brain Connect. – 2011. - No. 1(5). – P. 367–75
22. WATTS D.J. *Small Worlds: The Dynamics of Networks between Order and Randomness*. - Princeton, NJ, USA: Princeton University Press, 2003.
23. WATTS D.J., STROGATZ S. *Collective dynamics of 'small-world' networks* // Nature. – 1998. – No. 393 – P. 440–442.

ANALYSIS OF STRUCTURE OF THE POWER TRANSMISSION GRID IN RUSSIA: EVALUATION OF THE SMALL WORLD MODEL APPLICABILITY

Sergey Makrushin, Financial University under the Government of the Russian Federation, Moscow, Cand.Sc., assistant professor (s-makrushin@yandex.ru, SVMakrushin@fa.ru).

Abstract: In the paper complex network theory are used for analysis of spatial and topology structure of the United national energy system (UNES). The research is mainly focused on the applicability of the small-world network model to UNES. Small world networks are fragile to cascade failure effects and it implies the importance of this model for power grids network analysis. Although much research on applicability of the small world model to national level transmission grids has been done, there is no consolidated opinion on the subject. In the paper the latticization algorithm and small world criterion based on it have been used for transmission grid analysis for the first time. Geo-lattisization algorithm has been developed for more precise analysis of infrastructure networks with geographic binding of nodes. A reliable conclusion that the small world model is applicable to the UNES has been made using this methods. New methods could be used for others infrastructure networks analysis.

Keywords: complex network theory, network topology, small world, power transmission grid, UNES.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии В.В. Мазаловым.

*Поступила в редакцию 09.06.2016.
Опубликована 31.01.2017.*

УДК 519.86

ББК 22.18

КОМПЛЕКСНЫЕ МОДЕЛИ СИСТЕМНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ПРОИЗВОДСТВЕННО-ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ПРЕДПРИЯТИЯ¹

Новиков Д. А.²

(ФГБУН Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

Рассматривается комплекс последовательно усложняемых моделей принятия производственным предприятием многокритериальных решений относительно объема производства, привлечения/размещения заемных средств, инвестиций в повышение эффективности и в развитие производственных мощностей. Приводятся результаты вычислительных экспериментов, обсуждаются перспективы развития и применения методов системной оптимизации к моделированию производственно-экономической деятельности предприятий.

Ключевые слова: комплексная модель, производственно-экономическая деятельность предприятия, системная оптимизация, вычислительный эксперимент.

1. Введение

Большинство современных объектов управления требуют использования гетерогенных (иерархических, комплексных, гибридных, использующих различные языки описания и т.д.) моделей [28, 44].

Социально-экономические и производственные системы, являясь предметом исследования в том числе математической

¹ Работа поддержана грантом РФФ №16-19-10609.

² Дмитрий Александрович Новиков, член-корреспондент РАН (novikov@ipi.ru).

экономики и исследования операций, могут быть описаны с использованием разнообразного математического аппарата. Различные классы моделей, отражая различные явления и процессы, как правило, слабо связаны между собой. В этом можно убедиться как на примере классических монографий и учебников – см., например, [7, 12, 13, 18, 20, 23, 31, 41, 49], так и на примере многочисленных качественных современных отечественных (см., например, [4, 9, 10, 11, 21, 32, 33]) и зарубежных (см., например, [37, 38, 39, 40, 43, 47, 48]) учебных пособий. Отсутствие комплексности моделей является, с одной стороны, вызовом для соответствующих теорий, а, с другой стороны, порождает методические проблемы: отсутствие у студентов целостной картины и понимания взаимосвязей различных разделов учебных дисциплин не способствует как восприятию и пониманию предмета, так и возможности эффективного использования полученных знаний при решении практических задач в рамках последующей профессиональной деятельности.

Настоящая работа посвящена комплексным моделям системной оптимизации производственно-экономической деятельности предприятий. Обсудим значения двух ключевых терминов – «комплексная модель» и «системная оптимизация».

Комплексное моделирование – параллельное (совместное) рассмотрение нескольких моделей, с достаточной полнотой отражающих различные свойства моделируемого объекта, или/и *последовательное* наращивание сложности модели за счет одновременного учета определенной совокупности его свойств.

В [27] выделены три основных требования, предъявляемых к любым моделям: ингерентность, простота и адекватность – как отношения моделей с тремя остальными «участниками» процесса моделирования: со средой (ингерентность), с субъектом, создающим и/или использующим модель (простота), и с моделируемым объектом (адекватность).

Соотношения между входящими в комплекс частными, быть может, взаимосвязанными моделями и общей (по отношению к ним, в том числе включающей их в себя) комплексной моделью регулируются двумя принципами – принципом эмерджентности и принципом соответствия.

Принцип эмерджентности – общая модель по сравнению с частной или с их семейством должна отражать качественно новые (отсутствующие в каждой из частных моделей) свойства моделируемого объекта. Принцип эмерджентности включает в себя более частные принципы (их список на сегодняшний день не канонизирован и открыт):

- *принцип непротиворечивости* (результаты частных моделей или подмоделей общей модели не должны принципиально противоречить друг другу, или эти противоречия должны разрешаться в рамках более общей модели);

- *принцип наследования* (общая модель должна отражать все свойства моделируемого объекта, учитываемые частными моделями);

- *принцип монотонности* (в случае использования единого критерия эффективности учет новых свойств моделируемого объекта не должен снижать его значение; в противном случае необходимо привлечение более общей модели).

Принцип соответствия традиционен для наук сильной версии [27], требуя, чтобы в определенных «предельных» случаях общая модель превращалась в соответствующую частную.

Что касается *системной оптимизации*, то на сегодняшний день существуют два значения этого термина. Первое значение – нестрогое: максимально широкий спектр всевозможных целенаправленных изменений в моделируемом объекте рассматривается комплексно, с учетом «системности», т.е. взаимосвязей элементов объекта. Второе значение - строгое (принадлежит академику В.М. Глушкову [3], см. также [6]): многокритериальная оптимизационная задача формулируется в рамках комплекса иерархических моделей со взаимосвязанными и изменяемыми в процессе оптимизации ограничениями.

Несмотря на очевидную перспективность подходов системной оптимизации, за прошедшие три с половиной десятилетия это направление развивалось не очень интенсивно. Среди основных «ветвей развития» можно выделить следующие.

Во-первых, монографии [3, 22, 24, 30] по моделированию сложных иерархических систем, отражающие результаты интенсивного развития этого направления в 60-80-х годах XX века. Хотя, справедливости ради, необходимо отметить, что, несмотря

на близость концепций, в явном виде термин «системная оптимизация» в этих работах почти не встречается.

Во-вторых, методы программно-целевого планирования и управления (научная школа В.А. Ирикова): траекторный подход к решению задач программно-целевого управления [34] и системной оптимизации [16, 35], методы системной оптимизации в задачах координации решений [14, 15].

В-третьих, работы по теоретико-игровым и оптимизационным моделям механизмов управления (научная школа В.Н. Буркова), в явном виде использующие и развивающие концепцию системной оптимизации – см. обзор и ряд результатов в [2].

Структура настоящей работы, посвященной достаточно узкому классу задач системной оптимизации и не претендующей на принципиально новые теоретические методы и общие алгоритмы (а носящей скорее методологический - с точки зрения комплексного моделирования – и методический – с точки зрения преподавания соответствующих дисциплин - характер), такова: во втором разделе описывается базовая модель деятельности предприятия, в третьем – основные переменные и диапазоны их значений, используемые в других моделях. Четвертый раздел содержит расширения базовой модели, пятый раздел – комплексные модели. В шестом разделе приведены методические рекомендации по анализу моделей. Заключение содержит краткое обсуждение перспектив применения методов системной оптимизации к моделированию производственно-экономической деятельности предприятий.

2. Базовая модель

Модель 1 (M1, базовая). Рассмотрим производственное предприятие (далее будем называть его «агентом» - «agent» в англоязычной литературе), которое осуществляет производство одного вида товара. *Стоимость сырья* - одной «заготовки» (необходимой для производства единицы товара), которые он закупает, - равна λ_0 рублей, *рыночная стоимость* готовой единицы товара равна λ рублей. *Трудозатраты* зависят от действия

агента - количества $y \geq 0$ производимых единиц товара (*объема производства*) - следующим образом:

$$(1) \quad c(y, r) = \frac{y^2}{2r},$$

где $r > 0$ – коэффициент, отражающий *эффективность производства* (используемых технологий, квалификацию персонала), называемый обычно *типом агента* и имеющий размерность «руб.⁻¹». Отметим, что все приведенные ниже результаты (в том числе и возможность получения аналитических зависимостей) останутся в силе при использовании вместо (1) широко распространенных в экономико-математическом моделировании обобщенных производственных функций типа Кобба–Дугласа:

$$c(y, r) = \frac{1}{\rho} y^\rho r^{1-\rho}, \quad \rho > 1 \quad [12, 17, 46].$$

Прибыль агента равна разности между *выручкой* λy от продаж и *затратами* (равными сумме трудозатрат (1) и затрат $\lambda_0 y$ на приобретение сырья):

$$(2) \quad \Phi_1(\lambda, \lambda_0, r, y) = (\lambda - \lambda_0)y - \frac{y^2}{2r}.$$

Предположим, что постоянные издержки отсутствуют, а имеющиеся средства достаточны для закупки любого количества заготовок. Будем считать, что агент, выбирая объем производства y , заинтересован в максимизации прибыли (в этом проявляется целенаправленность, *рациональность* его поведения как экономического агента):

$$(3) \quad \Phi_1(\lambda, \lambda_0, r, y) \rightarrow \max_{y \geq 0},$$

которая (см. выражение (2)) достигает максимума при объеме производства (с точностью до дискретности числа единиц товара)

$$(4) \quad y_1^*(\lambda, \lambda_0, r) = (\lambda - \lambda_0)r.$$

В этом легко убедиться, вычисляя производную выражения (2) и приравнявая эту производную к нулю, не забыв при этом проверить, что максимизируемая функция (2) вогнутая (имеет в рассматриваемом случае отрицательную вторую производную).

Максимальное значение прибыли равно

$$(5) \quad \Phi_1(\lambda, \lambda_0, r, y_1^*(\lambda, \lambda_0, r)) = (\lambda - \lambda_0)^2 r / 2.$$

Все описываемые в настоящей работе модели были реализованы в программной среде РДС (Расчет Динамических Систем), разработанной в ИПУ РАН [36], с интуитивно понятным интерфейсом, и находятся в свободном доступе по адресу <http://www.mtas.ru/biblio/RDS/M.zip>. На рис. 1 приведена зависимость прибыли агента от объема производства при $\lambda = 10$, $\lambda_0 = 2$, $r = 3$ (вертикальные линии соответствуют реальному (левая линия) и оптимальному – максимизирующему прибыль – действиям агента). Все рисунки также построены в РДС.

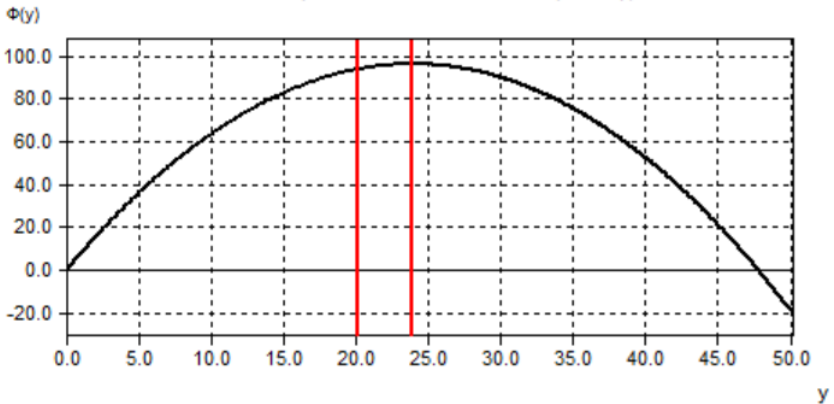


Рис. 1. Зависимость прибыли агента от объема производства в М1

Далее будем усложнять базовую модель, добавляя к ней сначала учет одного из таких эффектов, как возможное наличие:

- технологических ограничений;
- постоянных издержек;
- ограниченности собственных средств;
- заемных средств;
- инвестиций в повышение эффективности³;

³ Понятно, что такие решения, как, например, выбор объема производства и выбор размера инвестиций в повышение его эффективности, имеют разные временные горизонты. Рассмотрение их в рамках

- инвестиций в расширение производства (повышение производственных мощностей);
 - конкуренции на рынке,
 (см. расширения базовой M1 - M2-M8 в разделе 4 и в таблице 1),
 а затем будем добавлять эти эффекты последовательно (см. комплексные M9-M14, таблицу 2 и рис. 3).

Таблица 1. Эффекты, учитываемые в M1-M8

Эффекты	M1	M2	M3	M4	M5	M6	M7	M8
Рациональное поведение (λ_0, λ, r)	+	+	+	+	+	+	+	+
Технологические ограничения (y_0)		+					+	
Постоянные издержки (c_0)			+					
Ограниченность собственных средств (Φ_0)				+				
Заемные средства ($\delta(v)$)					+			
Повышение эффективности ($r(w)$)						+		
Расширение производства ($y_{\max}(u)$)							+	
Конкуренция на рынке								+

3. Основные переменные

Перечислим обозначения основных переменных, используемых ниже, и выбранные условно диапазоны их значений (приводятся в скобках), используемых при численном моделировании.

Входные параметры:

1) $\lambda_0 \geq 0$ - цена сырья ([0; 10]);

одной модели подразумевает использование приведенных (к единому моменту времени) затрат и доходов.

- 2) $\lambda \geq 0$ - цена товара ($[0; 15]$);
- 3) $r \geq 0$ - тип агента ($[0; 5]$), $r_0 \geq 0$ – начальный тип агента ($[0; 5]$);
- 4) $y_0 \geq 0$ – технологическое ограничение ($[0; 50]$);
- 5) $c_0 \geq 0$ – постоянные издержки ($[0; 50]$);
- 6) $\Phi_0 \geq 0$ – начальные средства ($[0; 100]$);
- 7) $\delta \geq 0$ - ставка размещения средств ($[0; 2]$);
- 8) $\delta^+ \geq 0$ - ставка привлечения средств ($[0; 2]$, $\delta^+ \geq \delta$);
- 9) $D \geq 0$ – параметр функции (31) зависимости рыночной цены от суммарного объема производства;
- 10) $\gamma \geq 0$ – параметр функции (31) зависимости рыночной цены от суммарного объема производства;
- 11) $c(y, r)$ – функция затрат агента;
- 12) $r(r_0, \alpha, w)$ – зависимость типа агента от инвестиций в повышение эффективности;
- 13) $y_{\max}(y_0, \beta, u)$ – зависимость технологических ограничений от инвестиций в расширение производственных мощностей;
- 14) α – параметр функции $r(\cdot)$ ($[0; 10]$);
- 15) β – параметр функции $y_{\max}(\cdot)$ ($[0; 10]$).

Выходные параметры:

- 1) $y \geq 0$ – объем производства ($z = \lambda_0 y$ – инвестиции в приобретение сырья) ($[0; 50]$);
- 2) $v \in \mathfrak{R}^1$ - объем привлекаемых ($v > 0$) или размещаемых ($v < 0$) средств ($[0; 100]$);
- 3) $w \geq 0$ – объем инвестиций в повышение эффективности ($[0; 100]$);
- 4) $u \geq 0$ – объем инвестиций в расширение производственных мощностей ($[0; 100]$).

Перейдем к описанию расширений базовой М1.

4. Расширения базовой модели

Модель 2 (M2). Предположим, что в условиях М1 присутствуют ограничения $y_0 \geq 0$ (например, технологические) на объем производства: $y \in [0; y_0]$. Тогда, решая задачу максимизации на отрезке вогнутой функции

$$(6) \quad \Phi_1(\lambda, \lambda_0, r, y) \rightarrow \max_{y \in [0; y_0]}$$

получим, что оптимальным является объем производства

$$(7) \quad y_2^*(\lambda, \lambda_0, r, y_0) = \min \{(\lambda - \lambda_0)r; y_0\}.$$

M2 превращается в M1 при $y_0 = +\infty$, т.е. при отсутствии технологических ограничений, следовательно, принцип соответствия (см. введение) для M2, как и для всех описываемых ниже моделей, выполнен.

Модель 3 (M3). Предположим, что в условиях M1 агент несет постоянные издержки $c_0 \geq 0$ (например, плата за аренду производственных помещений и/или оборудования, оплата коммунальных услуг и т.п.). Прибыль (2) примет вид

$$(8) \quad \Phi_3(\lambda, \lambda_0, r, y) = (\lambda - \lambda_0)y - \frac{y^2}{2r} - c_0.$$

Очевидно, что учет постоянных издержек со знаком минус в выражении (8) не повлияет на вогнутость целевой функции и не изменит оптимального значения объема производства (4), но приведет к необходимости анализа условия безубыточности (прибыль должна быть неотрицательна):

$$(9) \quad c_0 \leq (\lambda - \lambda_0) y_1^*(\lambda, \lambda_0, r) - \frac{(y_1^*(\lambda, \lambda_0, r))^2}{2r}.$$

M3 превращается в M1 при $c_0 \equiv 0$ (т.е. при отсутствии постоянных издержек).

Модель 4 (M4). Предположим, что в условиях M1 начальные средства $\Phi_0 \geq 0$, которые агент может потратить на закупку заготовок, у агента ограничены. Тогда оптимальный (максимизирующий прибыль) объем производства равен

$$(10) \quad y_4^*(\lambda, \lambda_0, r, \Phi_0) = \min \{(\lambda - \lambda_0) r; \Phi_0/\lambda_0\}.$$

M4 соответствует M2 при $y_0 = \Phi_0/\lambda_0$ и превращается в M1 при $\Phi_0 \equiv +\infty$ (неограниченности начальных собственных средств).

Модель 5 (M5). Предположим, что в условиях M1 агент имеет возможность привлечь или предложить любой объем v средств по ставке

$$(11) \quad \delta(v) = \begin{cases} \delta^+, v > 0, \\ 0, v = 0, \\ \delta^-, v < 0; \end{cases}$$

где $0 \leq \delta \leq \delta^+$ - ставки соответственно размещения и привлечения заемных средств (далее, если речь идет только о привлекаемых средствах, будем использовать для соответствующей ставки обозначение δ).

Обозначим через

$$(12) z \in Z(v) = [0; v]$$

сумму, которую, дополнительно к собственным средствам Φ_0 (в настоящей модели принято, что $\Phi_0 = 0$), агент тратит на приобретение сырья; при этом он обеспечивает объем производства $y = z/\lambda_0$, что приводит к получению прибыли (с учетом возврата суммы $(1 + \delta)v$ по кредиту)

$$(13) \Phi_5(\lambda, \lambda_0, r, \delta, v, z) = v - z + \lambda z/\lambda_0 - (1 + \delta(v))v - \frac{z^2}{2(\lambda_0)^2 r}.$$

Оптимальный объем $v_5^*(\lambda, \lambda_0, r, \delta)$ заемных средств и оптимальные затраты $z_5^*(\lambda, \lambda_0, r, \delta)$ на сырье должны максимизировать прибыль (13), а объем привлеченных средств желательно минимизировать, т.е.

$$(14) \Phi_5(\lambda, \lambda_0, r, \delta, v, z) \rightarrow \max_{v \in \mathbb{R}^1, z \in Z(v)}, v \rightarrow \min_{v \geq 0}.$$

Задача (14) принадлежит классу так называемых *задач системной оптимизации*, в которых управляемые переменные входят не только в критерии эффективности, но и в ограничения.

В рассматриваемом случае задача (14) допускает аналитическое решение. Действительно, отметим, что прибыль (13) монотонно убывает по объему v заемных средств и этот объем не может быть отрицательным. Поэтому в оптимальном решении⁴ $v = z$. Подставляя это равенство в выражение (13), получим задачу максимизации вогнутой функции

$$(15) z(\lambda/\lambda_0 - 1 - \delta) - \frac{z^2}{2(\lambda_0)^2 r} \rightarrow \max_{z \geq 0}.$$

Решение задачи (15):

⁴ Из этого наблюдения следует также справедливость вывода о том, что агенту не выгодно в рамках данной модели предоставлять кредиты.

$$(16) \quad z_5^*(\lambda, \lambda_0, r, \delta) = \lambda_0 (\lambda - (1 + \delta) \lambda_0) r.$$

M5 переходит в M1 при $\delta = 0$. Их различие обусловлено тем, что в M1 считается, что агент приобретает сырье «одновременно» с получением выручки от продажи товара. Другими словами, в M5 можно выделить три момента времени – «первый», «второй» и «третий». В первый момент времени агент берет кредит и закупает сырье, во второй – производит товар, в третий – реализует товар, компенсирует трудозатраты и рассчитывается по кредиту. То есть затраты в момент приобретения сырья дисконтируются по ставке δ к моменту получения выручки – ср. выражения (4) и (16) (в последнем цена закупки сырья, «приведенная» к моменту получения выручки равна $(1 + \delta)\lambda_0$). В M1 все три момента времени «совмещены», что соответствует $\delta = 0$.

Модель 6 (M6). Предположим, что в условиях M1 агент имеет возможность, вложив сумму $w \geq 0$, увеличить эффективность до величины $r(w)$ (например, в результате техперевооружения или/и повышения квалификации персонала), где $r(\cdot)$ – известная возрастающая функция. Функция прибыли примет вид

$$(17) \quad \Phi_6(\lambda, \lambda_0, r, w, y) = (\lambda - \lambda_0)y - w - \frac{y^2}{2r(w)},$$

и задача агента будет заключаться в одновременном выборе неотрицательных значений y и w , максимизирующих выражение (17).

Функция (17) вогнута по y при любых положительнозначных функциях $r(w)$ и вогнута по w при выполнении условия

$$(18) \quad r''(w) \leq 2[\ln(r(w))]'.$$

В качестве примера функции, удовлетворяющей условию (18), выберем

$$(19) \quad r(w) = r_0 + \alpha \sqrt{w},$$

где $\alpha \geq 0$ – известная константа. Дифференцируя выражение (17) по каждой из переменных и приравнивая соответствующие производные к нулю, получим систему из двух алгебраических уравнений относительно двух переменных – y и w . Решая эту систему уравнений, находим:

$$(20) y_6^*(\lambda, \lambda_0, r_0, \alpha) = (\lambda - \lambda_0)(r_0 + \alpha^2(\lambda - \lambda_0)^2/4),$$

$$(21) w_6^*(\lambda, \lambda_0, r_0, \alpha) = \alpha^2(\lambda - \lambda_0)^4/16.$$

Подставляя (20) и (21) в (17), получим

$$(22) \Phi_6(y^*(\lambda, \lambda_0), w^*(\lambda, \lambda_0)) = (\lambda - \lambda_0)^2[r_0 + \alpha^2(\lambda - \lambda_0)^2/8]/2.$$

Сравнивая выражения (22) и (5), приходим к выводу, что в рамках М6 при функции эффективности (19) наличие возможности вложений в повышение эффективности производства никогда не приводит к уменьшению прибыли (принцип монотонности – см. введение).

М6 переходит в М1 при $r_0 = r, \alpha = 0$.

Модель 7 (М7). Предположим, что в условиях М2 агент имеет возможность, вложив сумму $u \geq 0$, увеличить технологические ограничения до величины $y_{\max}(u)$ (например, в результате техперевооружения, или/и расширения производственных мощностей, или/и найма дополнительного персонала и т.д.), где $y_{\max}(\cdot)$ – известная возрастающая вогнутая функция. Функция прибыли примет вид

$$(23) \Phi_7(\lambda, \lambda_0, r, u, y) = (\lambda - \lambda_0)y - u - \frac{y^2}{2r},$$

при этом считается, что полная амортизация осуществляется в течение рассматриваемого периода времени (т.е. затраты u целиком входят в целевую функцию Φ_7). Задача агента будет заключаться в одновременном выборе неотрицательных значений y и u :

$$(24) (\lambda - \lambda_0)y - u - \frac{y^2}{2r} \rightarrow \max_{u \geq 0, y \in [0; y_{\max}(u)]}, u \rightarrow \min_{u \geq 0}.$$

Задача (24) является задачей системной оптимизации, однако она допускает простое решение, основывающееся на следующей идее: определим *минимальные затраты на обеспечение допустимости заданного объема производства* $y \geq 0$:

$$(25) u(y) = \min \{u \geq 0 \mid y_{\max}(u) \geq y\}.$$

В силу вогнутости функции $y_{\max}(u)$, функция $u(y)$ – выпуклая. С учетом выражения (25) задача (24) примет вид:

$$(26) (\lambda - \lambda_0)y - u(y) - \frac{y^2}{2r} \rightarrow \max_{y \geq 0},$$

т.е. будет заключаться в поиске безусловного максимума вогнутой функции.

В качестве примера рассмотрим

$$(27) y_{\max}(u) = y_0 + \beta \sqrt{u},$$

где $\beta \geq 0$ - известная константа.

Тогда

$$(28) u(y) = \begin{cases} 0, & y \leq y_0, \\ \frac{1}{\beta^2}(y - y_0)^2, & y \geq y_0. \end{cases}$$

Подставляя выражение (28) в (26) и решая соответствующую задачу максимизации, получим:

$$(29) y_7^*(\lambda, \lambda_0, r, y_0, \beta) = \begin{cases} (\lambda - \lambda_0)r, & (\lambda - \lambda_0)r \leq y_0, \\ \frac{\beta^2(\lambda - \lambda_0) + 2y_0}{\beta^2 + 2r}r, & (\lambda - \lambda_0)r > y_0. \end{cases}$$

M7 переходит в M1 при $y_0 = y_{\max}, \beta = 0$.

Модель 8 (M8). Пусть имеются n агентов, производящих однородный товар, с целевыми функциями типа (2):

$$(30) Q_i(\lambda, \lambda_0, r_i, y) = (\lambda(y) - \lambda_0)y_i - \frac{y_i^2}{2r_i},$$

где $i \in N = \{1, \dots, n\}$ - индекс агента, $y = (y_1, \dots, y_n)$ - вектор действий агентов. Предположим, что рыночная цена линейно убывает с ростом суммарного предложения товара (так называемая линейная олигополия Курно):

$$(31) \lambda(y) = D - \gamma \sum_{i \in N} y_i,$$

а агенты принимают решения об объемах выпускаемых ими товаров однократно, одновременно и независимо. Тогда, подставляя выражение (31) в (30), дифференцируя по y_i и решая соответствующую систему алгебраических уравнений, находим равновесие Нэша игры агентов в нормальной форме:

$$(32) y_i^*(\lambda_0, D, \gamma, r) = \frac{(D - \lambda_0)r_i}{(1 + \gamma r_i)(1 + \gamma \sum_{j \in N} \frac{r_j}{1 + \gamma r_j})}.$$

$r = (r_1, \dots, r_n)$ – вектор типов агентов.

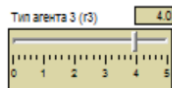
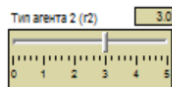
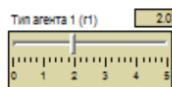
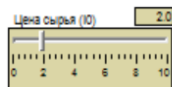
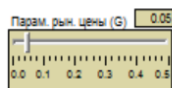
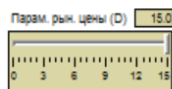
На рис. 2 приведена «панель управления» реализованной в РДС М8 при $D = 15$, $\gamma = 0,05$, $\lambda_0 = 2$, $r_1 = 2$, $r_2 = 3$, $r_3 = 4$ (агент 1 – синяя линия, агент 2 – красная линия, агент 3 – зеленая линия на графиках динамики действий агентов и их прибыли). В качестве предположения о динамике поведения агентов (каждый из которых в каждом периоде наблюдает предыдущие действия всех своих оппонентов и принимает решения независимо от них, т.е. некооперативно) использована гипотеза индикаторного поведения [29, 46] с параметрами g_i – см. рис. 2.

Завершив рассмотрение М2–М8, отличающихся от базовой М1 наличием только одного из «дополнительных эффектов» (см. Таблица 1), перейдем последовательному наращиванию сложности моделей, т.е. к комплексным М9–М14, в которых различные «дополнительные эффекты» добавляются последовательно (см. таблицу 2 и рис. 3).

Таблица 2. Эффекты, учитываемые в М9–М14

Эффекты	М9	М10	М11	М12	М13	М14
Рациональное поведение (λ_0, λ, r)	+	+	+	+	+	+
Технологические ограничения (y_0)	+	+	+	+	+	+
Постоянные издержки (c_0)	+	+	+	+	+	+
Ограниченность собственных средств (Φ_0)		+	+	+	+	+
Заемные средства ($\delta(v)$)			+	+	+	+
Повышение эффективности ($r(w)$)				+	+	+
Расширение производства ($y_{\max}(u)$)					+	+
Конкуренция на рынке						+

ВХОДНЫЕ ДАННЫЕ



ВЫЧИСЛЕНИЯ

BR1(y2,y3)

BR2(y1,y3)

BR3(y1,y2)



Прогресс вычислений

g1 0.5 $\frac{A}{T}$
g2 0.5 $\frac{A}{T}$
g3 0.5 $\frac{A}{T}$

y1_0 20 $\frac{A}{T}$
y2_0 20 $\frac{A}{T}$
y3_0 20 $\frac{A}{T}$

Поиск равновесия

ВЫХОДНЫЕ ДАННЫЕ

Действие агента 1 17.0

Действие агента 2 25.0

Действие агента 3 31.0

Прибыль агента 1 90.2

Прибыль агента 2 134.8

Прибыль агента 3 178.3

Равновесие Нэша

Действие агента 1 17.3

Действие агента 2 24.9

Действие агента 3 31.9

ГРАФИКИ

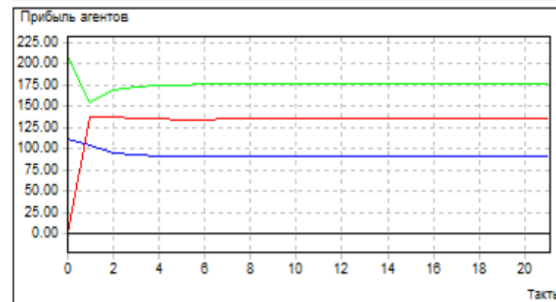
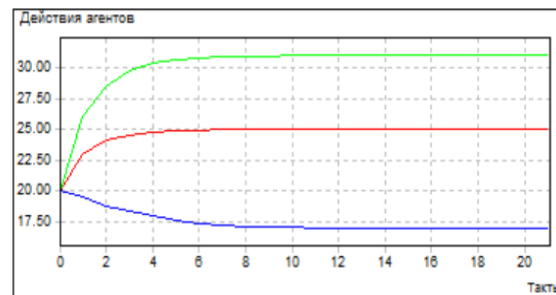


Рис. 2. «Панель управления» и результаты моделирования для M8

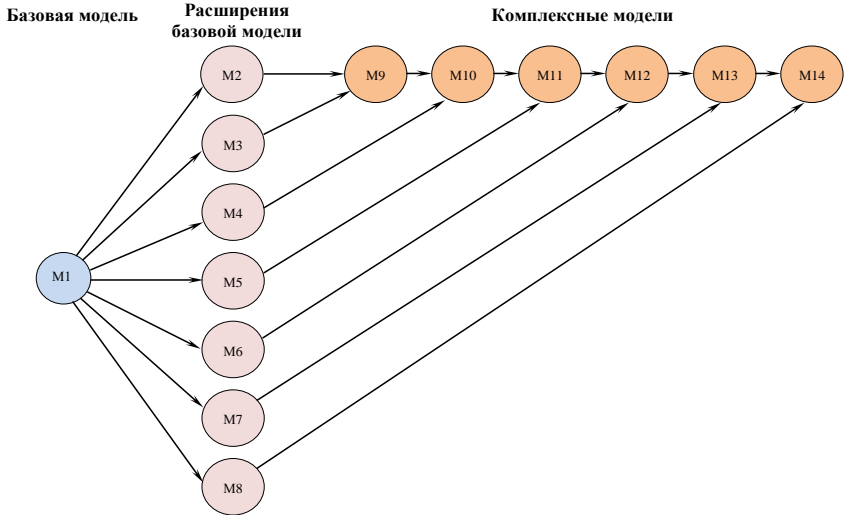


Рис. 3. Структура комплекса M1-M14

5. Комплексные модели

Модель 9 (M9). Предположим, что в условиях M2 агент несет постоянные издержки $c_0 \geq 0$. Прибыль (2) примет вид (8). Как и в M3, учет постоянных издержек со знаком минус в выражении (8) не изменит оптимального значения объема производства (4), но приведет к необходимости анализа условия *безубыточности* (прибыль должна быть неотрицательна – ср. с (9)):

$$(33) \quad c_0 \leq (\lambda - \lambda_0) y_2^*(\lambda, \lambda_0, r, y_0) - \frac{(y_2^*(\lambda, \lambda_0, r, y_0))^2}{2r}.$$

Модель 10 (M10). Предположим, что в условиях M9 начальные собственные средства $\Phi_0 \geq 0$, которые агент может потратить на закупку заготовок и покрытие постоянных издержек, ограничены, а возможность привлечения внешних средств отсутствует. Тогда оптимальный (максимизирующий прибыль) объем производства равен (ср. с (10))

$$(34) \quad y_{10}^*(\lambda, \lambda_0, r, y_0, \Phi_0, c_0) = \min \{(\lambda - \lambda_0)r; y_0; (\Phi_0 - c_0)/\lambda_0\}.$$

M10 является «последней» (по сложности) моделью, допускающей аналитическое решение. «Следующие» (по сложности)

модели (M11–M14) требуют соответствующего вычислительно-го эксперимента.

Модель 11 (M11). Предположим, что в условиях M10 агент имеет возможность привлечь или разместить любой объем v средств по ставке $\delta(v)$. Обозначим через

$$(35) z \in Z_{11}(v, y_0) = [0; \min \{ \lambda_0 y_0; \Phi_0 - c_0 + v \}]$$

сумму, которую агент тратит на приобретение сырья; при этом он обеспечивает объем производства $y = z/\lambda_0$, что приводит к получению прибыли (с учетом возврата/получения суммы $(1 + \delta(v))v$ по кредиту)

$$(36) \Phi_{11}(\lambda, \lambda_0, r, \Phi_0, c_0, \delta(\cdot), v, z) = \Phi_0 - c_0 + v - z + \lambda z/\lambda_0 - \\ - (1 + \delta(v))v - \frac{z^2}{2(\lambda_0)^2 r}.$$

Оптимальный объем $v_{11}^*(\lambda, \lambda_0, r, y_0, \Phi_0, c_0, \delta(\cdot))$ заемных средств и оптимальные затраты $z_{11}^*(\lambda, \lambda_0, r, y_0, \Phi_0, c_0, \delta(\cdot))$ на сырье должны максимизировать прибыль (36), т.е.

$$(37) \Phi_{11}(\lambda, \lambda_0, r, \Phi_0, c_0, \delta(v), v, z) \rightarrow \max_{v \in \mathbb{R}^1, z \in Z_{11}(v, y_0)}.$$

Отметим, что в задаче (37) (а также в задачах (40), (43) и (46)) агент выбирает не действие y , а объем затрат z на приобретение сырья. Так как при постоянной цене сырья λ_0 эти переменные однозначно и монотонно связаны: $y = z/\lambda_0$, то эти задачи могут быть легко переформулированы в терминах действия агента.

Данная модель уже достаточно «богата», для того чтобы отразить наличие у агента нескольких стратегий поведения, являющихся оптимальными при различных соотношениях входных параметров.

Так, например, при $\lambda = 10$, $\lambda_0 = 2$, $r = 3$, $\delta^+ = \delta^- = 0,5$, $y_0 = 30$, $c_0 = 20$, $\Phi_0 = 60$, оптимальным для агента является взять кредит в размере $v^* = 2,5$ и выбрать объем производства $y^* = 21$. Если цена сырья λ_0 возрастает до 7 единиц, то производство становится убыточным (оптимальный объем производства равен нулю), и агенту выгодно превратиться из производственной в кредитную организацию, одолив все остающиеся у него после покрытия постоянных издержек средства: $v^* = \Phi_0 - c_0 = -40$.

«Богатство» данной и последующих моделей (M12-M14) также позволяет формулировать в их рамках *многокритериальные задачи*, характерные для проблематики системной оптимизации. Действительно, наличие достаточного числа «степеней свободы» (первичных и производных переменных, описывающих моделируемую систему), функциональных связей между ними и нескольких критериев, описывающих состояние системы, позволяют ставить и решать разнообразные задачи оптимизации: выбирая тот или иной критерий в качестве оптимизируемого, а остальные рассматривая в виде ограничений; или фиксируя требования к значениям одних критериев, искать систему ограничений, оптимизирующую другой критерий и т.д. – некоторые примеры приводятся ниже в рамках M12 и M13, где считается, что размер кредита должен быть неотрицательным.

Модель 12 (M12). Предположим, что в условиях M11 агент имеет возможность, вложив сумму $w \geq 0$, увеличить эффективность до величины $r(w)$. Множество допустимых затрат на приобретение сырья примет вид

$$(38) z \in Z_{12}(v, w, y_0) = [0; \min \{ \lambda_0 y_0; \Phi_0 - c_0 - w + v \}].$$

Функция прибыли примет вид

$$(39) \Phi_{12}(\lambda, \lambda_0, \Phi_0, c_0, \delta(\cdot), r(\cdot), v, w, z) = \Phi_0 - c_0 + v - z - w + \\ + \lambda z / \lambda_0 - (1 + \delta(v))v - \frac{z^2}{2r(w)(\lambda_0)^2}.$$

Оптимальный объем $v_{12}^*(\lambda, \lambda_0, r(\cdot), y_0, \Phi_0, c_0, \delta(\cdot))$ заемных средств, оптимальные затраты $z_{12}^*(\lambda, \lambda_0, r(\cdot), y_0, \Phi_0, c_0, \delta(\cdot))$ на сырье и оптимальные вложения $w_{12}^*(\lambda, \lambda_0, r(\cdot), y_0, \Phi_0, c_0, \delta(\cdot))$ в повышение эффективности должны максимизировать прибыль (39), т.е.

$$(40) \Phi_{12}(\lambda, \lambda_0, \Phi_0, c_0, \delta(v), r(w), v, w, z) \rightarrow \max_{v \in \mathbb{R}^+, w \geq 0, z \in Z_{12}(v, w, y_0)}.$$

Отметим, что даже если $\delta(\cdot) \equiv 0$, то выполнение условия (18) не гарантирует выпуклости задачи (40), так как переменная w не только входит непосредственно в целевую функцию, но и определяет допустимое множество $Z_{12}(v, w, y_0)$.

Например, при $\lambda = 10$, $\lambda_0 = 2$, $r_0 = 3$, $\delta^+ = \delta^- = 0,5$, $y_0 = 30$, $c_0 = 20$, $\Phi_0 = 60$, $\alpha = 2$ (см. выражение (19)), оптимальным для агента является взять кредит в размере $v^* = 32$, инвестировать

$w^* = 11$ в повышение эффективности и выбрать объем производства $y^* = 30$. Зависимость прибыли Φ агента от размера кредита v и размера инвестиций w для рассматриваемого примера приведена на рис. 4 (здесь и далее при недопустимых значениях переменных прибыль считается равной нулю; линия уровня $\Phi_{12} = 100$ и ее проекции выделены на рис. 4 красным цветом).

В рамках M12 можно находить ответы на множество содержательных вопросов, типичных для подхода системной оптимизации. Например, каков должен быть минимальный объем собственных средств, при которых привлечение заемных средств становится нецелесообразным (ответ: 92,4). Или при каких минимальных технологических ограничениях инвестиции в повышение эффективности не имеют смысла (ответ: 10,6) и т.д.

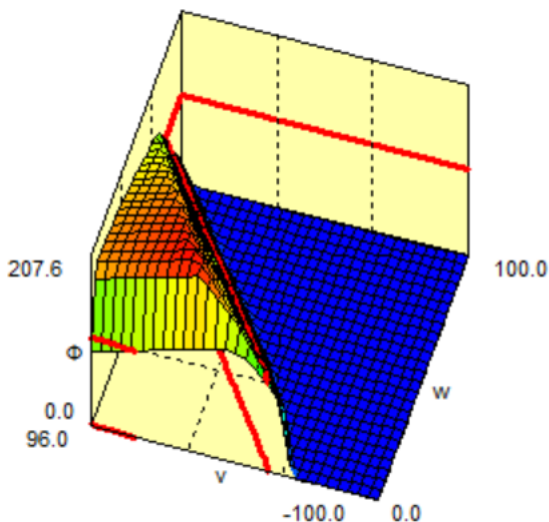


Рис. 4. Зависимость прибыли Φ агента от размера кредита v и размера инвестиций w в M12

Модель 13 (M13). Предположим, что в условиях M12 агент имеет возможность, вложив сумму $u \geq 0$, увеличить технологические ограничения до величины $y_{\max}(u)$. Множество допустимых затрат на приобретение сырья примет вид

$$(41) z \in Z_{13}(v, w, u) = [0; \min \{ \lambda_0 y_{\max}(u); \Phi_0 - c_0 - w - u + v \}].$$

Функция прибыли примет вид

$$(42) \Phi_{13}(\lambda, \lambda_0, \Phi_0, c_0, \delta(\cdot), r(\cdot), y_{\max}(\cdot), v, w, u, z) = \\ = \Phi_0 - c_0 + v - z - w - u + \lambda z / \lambda_0 - (1 + \delta(v))v - \frac{z^2}{2r(w)(\lambda_0)^2}.$$

Оптимальный объем $v^*(\lambda, \lambda_0, r(\cdot), y_{\max}(\cdot), \Phi_0, c_0, \delta(\cdot))$ заемных средств, оптимальные затраты $z^*(\lambda, \lambda_0, r(\cdot), y_{\max}(\cdot), \Phi_0, c_0, \delta(\cdot))$ на приобретение сырья, оптимальные вложения $w^*(\lambda, \lambda_0, r(\cdot), y_{\max}(\cdot), \Phi_0, c_0, \delta(\cdot))$ в повышение эффективности и оптимальные вложения $u^*(\lambda, \lambda_0, r(\cdot), y_{\max}(\cdot), \Phi_0, c_0, \delta(\cdot))$ в расширение производственных мощностей должны максимизировать прибыль (42), т.е.

(43)

$$\Phi_{13}(\lambda, \lambda_0, \Phi_0, c_0, \delta(v), r(w), y_{\max}(u), v, w, u, z) \rightarrow \max_{v \in \mathbb{R}^1, w \geq 0, u \geq 0, z \in Z_{13}(v, w, u)}.$$

Задача (43) является задачей системной оптимизации. Отметим, что вогнутость зависимости $y_{\max}(u)$ и выполнение условия (18), в отличие от расширений базовой модели, не гарантируют выпуклости задачи (43), так как переменные u и w определяют допустимое множество $Z_{13}(v, w, u)$, а зависимость $\delta(v)$ разрывна.

На рис. 5 приведена экранная форма для «панели управления» M13.

Например, при $\lambda = 10$, $\lambda_0 = 2$, $r = 1$, $\delta^+ = \delta^- = 0,1$, $y_0 = 10$, $c_0 = 0$, $\Phi_0 = 100$, $\alpha = 2$, $\beta = 10$ получаем зависимости прибыли агента от выбираемых им параметров, приведенные на рис. 6 и рис. 7 (линия уровня $\Phi_{13} = 300$ и ее проекции выделены на рис. 6 красным цветом; линия уровня $\Phi_{13} = 0$ и ее проекции выделены на рис. 7 красным цветом).

Модель 14 (M14). Пусть деятельность каждого из агентов описывается M13, агенты конкурируют на одном и том же рынке, причем цена сырья λ_0 для них одинакова, а рыночная цена на их продукцию определяется выражением (ср. с (31))

$$(44) \lambda(z_1, \dots, z_n) = D - \frac{\gamma}{\lambda_0} \sum_{j \in N} z_j.$$

ВХОДНЫЕ ДАННЫЕ

Рыночная цена (j) <input type="text" value="10.0"/>	Действие агента (y) <input type="text" value="50.0"/>
Цена сырья (i0) <input type="text" value="2.0"/>	Размер кредита (v) <input type="text" value="70.0"/>
Тип агента (y) <input type="text" value="1.0"/>	Инв. в пов. эфф. (k) <input type="text" value="40.0"/>
Ставка по кредиту (z) <input type="text" value="0.10"/>	Инв. в расшир. пр-ва (u) <input type="text" value="20.0"/>
Мак. ограничение (y0) <input type="text" value="10.0"/>	
Пост. издержки (c0) <input type="text" value="0.0"/>	
Мак. соб. сред. (i00) <input type="text" value="100.0"/>	
Параметр (k) <input type="text" value="2.0"/>	
Параметр (b) <input type="text" value="10.0"/>	

Прогресс вычислений

 Время вычисл... ..

RESTART

Прогресс вычислений!1

 Время вычисл... ..01.4

ВЫХОДНЫЕ ДАННЫЕ

Прибыль агента	342.9
Абс. макс. прибыль агента	168.3
Абс. опт. размер кредита	0.0
Абс. опт. действие агента	10.0
Абс. опт. инв. в повыш. эффект.	4.0
Эффективность (%) =	100.0
Лок. макс. прибыль агента	342.9
Лок. опт. действие агента	50.0

Прогресс построения 3D-графика

 Время вычисл... ..00.7

Абс. макс. прибыль агента	343.3
Абс. опт. действие агента	50.0
Абс. опт. размер кредита	70.0
Абс. опт. инв. в повыш. эффект.	40.0
Абс. опт. инв. в расшир. пр-ва	20.0

Прогресс вычислений!2

 Время вычисл... ..02.9

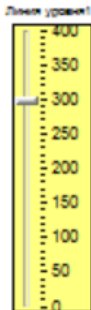


Рис. 5. «Панель управления» для M13

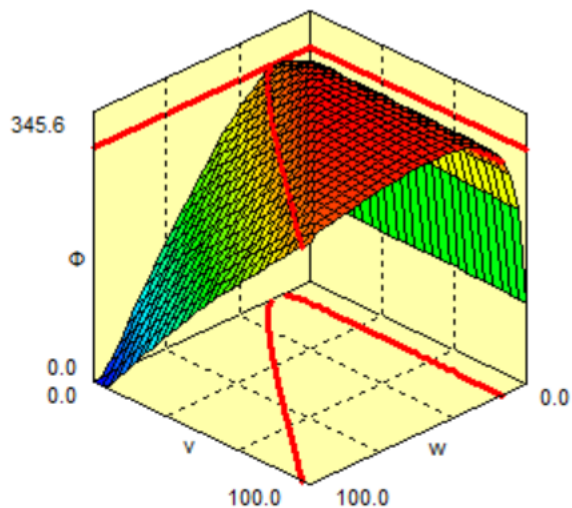


Рис. 6. Зависимость прибыли Φ агента от размера кредита v и размера инвестиций w в М13

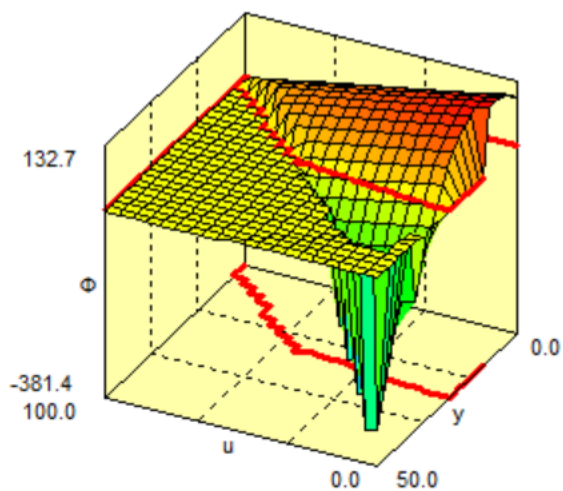


Рис. 7. Зависимость прибыли Φ агента от объема производства u и размера инвестиций u в М13

Воспользовавшись выражениями (42) и (44), определим целевую функцию i -го агента

$$(45) F_i(\lambda_0, \Phi_{0i}, c_{0i}, \delta_i(\cdot), r_i(\cdot), y_{\max i}(\cdot), v_i, w_i, u_i, z_1, \dots, z_n) = \\ = \Phi_{0i} - c_{0i} + v_i - z_i - w_i - u_i + (D - \frac{\gamma}{\lambda_0} \sum_{j \in N} z_j) z_i / \lambda_0 - \\ - (1 + \delta_i(v_i))v_i - \frac{z_i^2}{2r_i(w_i)(\lambda_0)^2}.$$

Рассмотрим игру в нормальной форме между агентами, обладающими целевыми функциями (45). Обозначим через $H_i = \sum_{j \neq i} z_j$ суммарные затраты на приобретение сырья всех

оппонентов i -го агента и вычислим для каждого агента его наилучший ответ на действия оппонентов:

$$(46) BR_i(H_i) = (v_i(H_i), w_i(H_i), u_i(H_i), z_i(H_i)) = \\ = \arg \max_{v \in \mathbb{R}^1, w \geq 0, u \geq 0, z \in Z_{i3}(v, w, u)} [\Phi_{0i} - c_{0i} + v_i - z_i - w_i - \\ - u_i + (D - \gamma \frac{\gamma}{\lambda_0} \sum_{j \in N} z_j) z_i / \lambda_0 - (1 + \delta_i(v_i))v_i - \frac{z_i^2}{2r_i(w_i)(\lambda_0)^2}],$$

$i \in N$.

Имея наилучшие ответы (46), можно численно искать равновесие игры агентов или строить и исследовать в рамках вычислительного эксперимента итерационные процедуры динамики стратегий, сходящиеся к этому равновесию (см. также М8).

На рис. 8 приведена «панель управления» и результаты моделирования для М14 для случая двух агентов ($D = 15$, $\gamma = 0,05$, $\lambda_0 = 1,3$, $r_1 = 1$, $r_2 = 5$, для обоих агентов $\delta = \alpha = \beta = 0$, $c_0 = 0$, $\Phi_0 = 100$, $y_0 = 50$, т.е. возможность займа и осуществления каких-либо инвестиций отсутствует).

Зависимость прибыли Φ и наилучшего ответа $BR_u(Y)$ первого агента от его действия u и действия оппонента Y («нелинейность» обусловлена использованным крупным шагом сетки, который выбран в силу больших временных затрат на вычисление наилучших ответов) приведены на рис. 9 и рис. 10 соответственно.

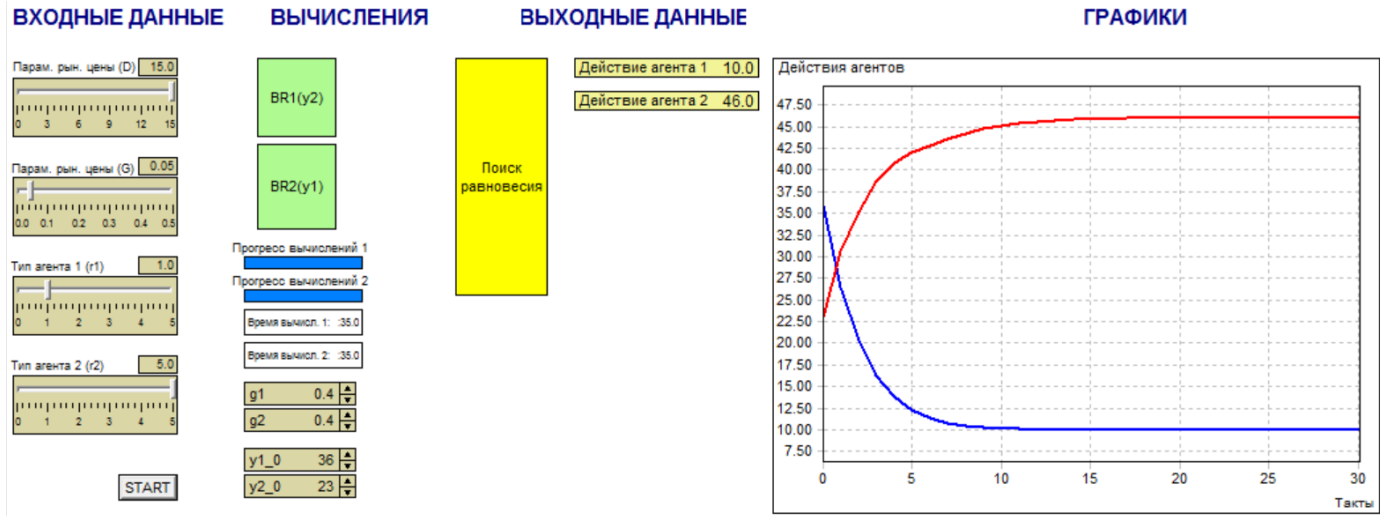


Рис. 8. «Панель управления» и результаты моделирования для M14

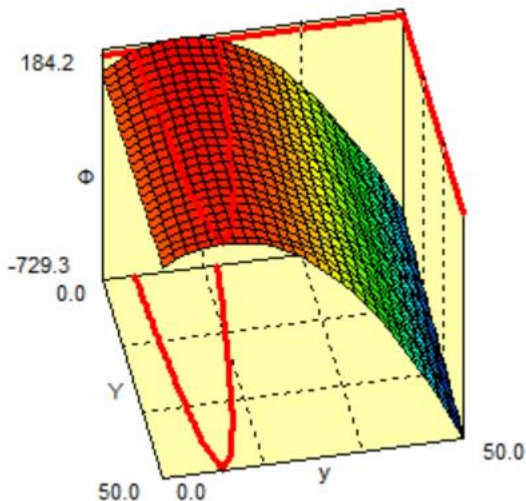
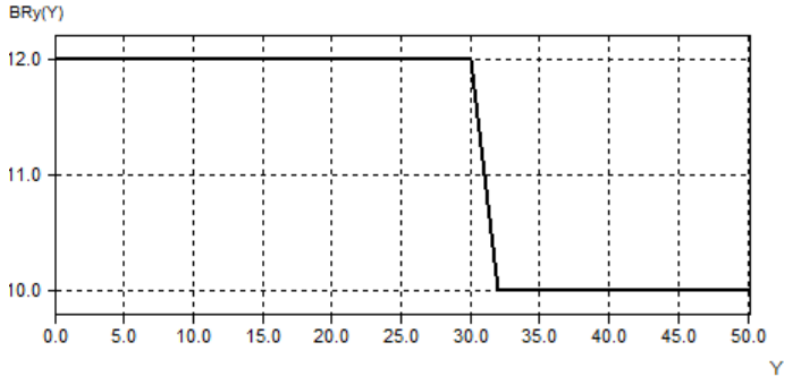


Рис. 9. Зависимость прибыли Φ от действия агента u и действия его оппонента Y в M14

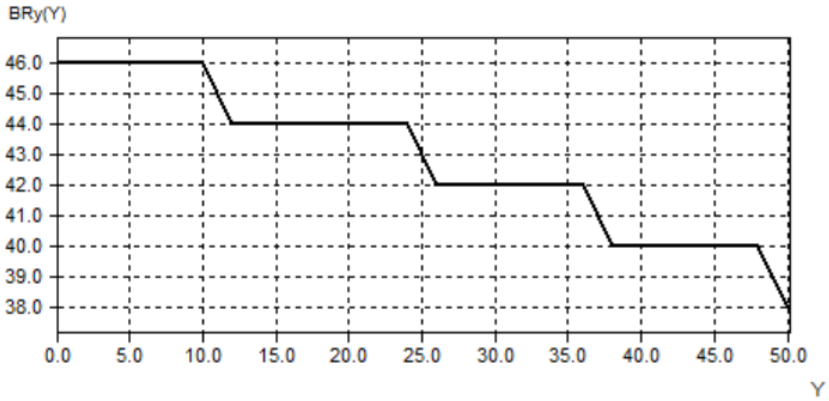
Равновесные действия агентов в рассматриваемом примере - (10; 40). Ситуация радикально меняется, если первый агент получает доступ к кредитным средствам ($\delta_1 = 0,5$) и получает возможность инвестировать в повышение эффективности ($\alpha_1 = 1$). Графики наилучших ответов первого агента $BR_u(Y)$ и $BR_w(Y)$ приведены на рис. 11 и рис. 12 соответственно.

В равновесии вектор действий агентов - (46; 40), $v_1^* = 0$ (собственных средств хватает и на закупку сырья и на инвестиции в повышение эффективности), $w_1^* = 40$.

Специфика M14 заключается в том, что поведение каждого из агентов описывается достаточно сложной моделью – условно можно считать, что M14 является «теоретико-игровой надстройкой» над M13 (в то время как M8 – над M1). Соответственно, в терминах работы [1] M14 использует последовательно-параллельное комплексирование – над несколькими «параллельно» функционирующими моделями M13, описывающими отдельных агентов, надстраивается модель олигополии Курно, отражающая рыночное взаимодействие агентов.



(а)



(б)

Рис. 10. Зависимость наилучшего ответа $BRy(Y)$ первого (а) и второго (б) агентов от действия оппонента Y в $M14$

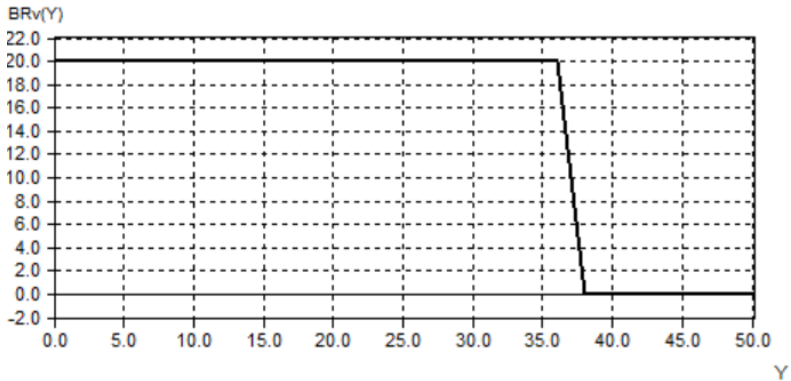


Рис. 11. Зависимость наилучшего ответа $BRv(Y)$ первого агента от действия оппонента Y в $M14$

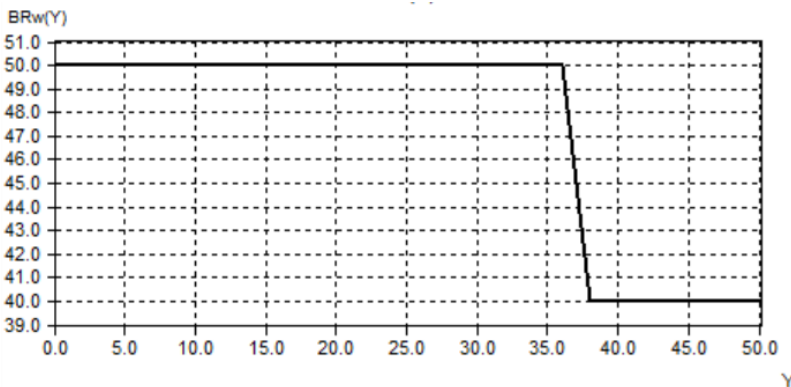


Рис. 12. Зависимость наилучшего ответа $BRw(Y)$ первого агента от действия оппонента Y в $M14$

6. Анализ моделей: методические рекомендации

Приведем возможные этапы анализа $M1$ – $M14$ и им подобных (в порядке возрастания трудоемкости и сложности для начинающего исследователя – например, студента, осваивающего соответствующий профильный учебный курс – моделирование организаций, математические модели в экономике, исследование операций и т.п.).

1. Проанализируйте *сравнительную статику* - зависимости прибыли агента и других выбираемых им параметров (объема производства, размера привлекаемых средств, инвестиций и т.д.), а также рыночного равновесия от значений рыночной цены λ , цены сырья λ_0 , типа агента r , а также от значений параметров (α , β , γ и δ), свойств и конкретного вида функций ($c(\cdot)$, $r(\cdot)$, $\delta(\cdot)$, $y_{\max}(\cdot)$), и приведите соответствующие содержательные интерпретации.

Под «исследованием зависимости» в каждом случае понимается анализ (с построением соответствующих графиков) и интерпретация монотонности, точек экстремума и т.д. при изменении соответствующих параметров модели, осуществляемые тремя методами со сравнением (констатацией совпадения или объяснением наблюдаемых различий) результатов:

а) аналитическое исследование (если возможно получение явного вида соответствующих зависимостей);

б) имитационное моделирование: например, изменение «вручную» входных параметров в соответствующей модели РДС (или в другой – самостоятельной - программной реализации) и фиксация выходных параметров;

в) автоматизированное моделирование - дополнение соответствующей компьютерной модели функционалом автоматического перебора значений входных параметров и построением графиков значений выходных переменных.

2. Проанализируйте проблемы комплексирования и свойства (см. введение) отдельных комплексных моделей.

3. Проанализируйте проблемы программной реализации соответствующих моделей, в т.ч. точность решения оптимизационных задач в зависимости от начальных и конечных шагов алгоритмов оптимизации и т.п.

7. Заключение

Рассмотрены взаимосвязанные имитационные и оптимизационные модели производственно-экономической деятельности предприятия. Перспективными направлениями их развития является отказ от введенных предположений об однократности принятия решений, о наличии единственного производимого товара, об упрощенном представлении процесса производства в виде «производственной функции» типа выражения (1) и др. (при этом в явном виде не выделяются накладные расходы, налоговые отчисления и др.). То есть целесообразно расширение комплекса M1–M14 за счет рассмотрения:

1) номенклатуры производимых товаров с учетом их комплектности, загрузки производственного оборудования и т.д.;

2) логистических процессов, учитывающих состояние складов сырья и готовой продукции, управления запасами;

3) целенаправленной деятельности персонала и руководства предприятия, учитываемых в соответствующих механизмах организационного управления [42, 46]. При этом неизбежно рассмотрение иерархической организационной структуры;

4) большого числа взаимодействующих агентов, различающихся значениями своих параметров (что может привести к появлению качественно новых – «подлинно синергетических» - эффектов в соответствующей сложной системе);

5) нескольких последовательных взаимосвязанных периодов функционирования. В последнем случае, например, удастся рассмотреть задачи распределения прибыли на дивиденды, развитие производства и т.д., с учетом дебиторской и кредиторской задолженности (то есть более широко, чем выше, трактуемой «безубыточности»), задержек в оплате отгруженной продукции и т.д., то есть сформулировать и операционально исследовать традиционный для финансового анализа [8, 19] спектр задач.

Можно выделить несколько крупных «методологических» проблем в построении и исследовании комплексных моделей системной оптимизации организационно-технических, социально-экономических и др. сложных систем.

1. *Гетерогенность* описания моделируемых систем (например, производственное предприятие может описываться с точки зрения соответствующих материальных, финансовых, информационных и других потоков с использованием аппарата исследования операций, непрерывной и дискретной оптимизации и др.) [28, 44].

2. Необходимость комплексирования отдельных моделей и декомпозиции комплексных моделей (см. классификацию данной проблематики и краткий обзор в [1]). Здесь, в частности, возникает *задача определения «оптимальной» последовательности учета новых факторов* в комплексных моделях. Критерием эффективности при этом может быть максимально продолжительное (в смысле длины пути в сети, аналогичной приведенной на рис. 3) сохранение таких позитивных свойств моделей как возможность получения аналитических зависимостей, выпуклость оптимизационных задач и т.п., а методом решения – рассмотрение сети всевозможных последовательностей.

3. Высокая арифметическая сложность (в терминах [26]) численного решения задач системной оптимизации. Действительно, возможная невыпуклость задач оптимизации, или необходимость использования оракулов только нулевого порядка (в силу иерархической структуры моделей и неустойчивости выходов подсистем по входным параметрам, характерной для теоретико-игровых и экономико-математических моделей [25, 45]) зачастую вынуждают исследователя ограничиться использованием лишь «переборных» методов. Например, в M14, реализованной в РДС, расчет на «рядовом» компьютере наилучших ответов по четырем переменным для каждого из двух агентов, даже с использованием достаточно крупной вычислительной сетки, занимает несколько секунд. Увеличение числа переменных (с целью учета новых содержательных эффектов и свойств) и/или числа агентов, и/или уменьшение шага сетки и т.д. приводят к быстрому росту времени вычислений. Возможности распараллеливания присутствуют (например, в M14 вычисление наилучших ответов каждого из агентов при фиксированных значениях входных параметров может производиться независимо), но ограничены (использование теоретико-игровых моделей

подразумевает достаточно сильную «взаимосвязь» между процедурами принятия решений агентами).

Литература

1. БУРКОВ В.Н., КОРГИН Н.А., НОВИКОВ Д.А. *Проблемы комплексирования и декомпозиции механизмов управления организационно-техническими системами* // Проблемы управления. – 2016. – №5. – С. 14–23.
2. БУРКОВ В.Н., ГОРГИДЗЕ И.А., ДЖАВАХАДЗЕ Г.С., ПРАНГИШВИЛИ И.В., ХУРОДЗЕ Р.А. *Системные закономерности и системная оптимизация*. – М.: Синтег, 2004. – 208 с.
3. БУСЛЕНКО Н.П. *Моделирование сложных систем*. – М.: Наука, 1968. – 356 с.
4. ГЕРАСЬКИН М.И., ГРИШАНОВ Г.М. *Экономико-математическое моделирование современных промышленных комплексов*. – Самара: СамНЦ РАН, 2016. – 194 с.
5. ГЛУШКОВ В.М. *О системной оптимизации* // Кибернетика. – 1980. – №5. – С. 89–90.
6. ГЛУШКОВ В.М., МИХАЛЕВИЧ В.С., ВОЛКОВИЧ В.Л., ДИДЕНКО Г.А. *Системная оптимизация в многокритериальных задачах линейного программирования при интервальном задании предпочтений* // Кибернетика. – 1983. – №3. – С. 1–8.
7. ГРАНБЕРГ А.Н., СУСПИЦЫН С.А. *Введение в системное моделирование народного хозяйства*. – Новосибирск: Наука, 1988. – 304 с.
8. ДРАНКО О.И. *Финансовый менеджмент. Технологии управления финансами предприятия*. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2004. – 351 с.
9. ДУДОВ С.И., ВЫГОДЧИКОВА И.Ю., КУПЦОВ С.Н. *Математические методы в экономике*. – Саратов: СГУ, 2014. – 91 с.
10. ЗАМКОВ О.О., ТОЛСТОПЯТЕНКО А.В., ЧЕРЕМНЫХ Ю.Н. *Математические методы в экономике*. – М.: МГУ им. М.В. Ломоносова, 2009. – 384 с.

11. ЗАСКАНОВ В.Г., ИВАНОВ Д.Ю. *Внутрифирменные модели организации производства на предприятиях машиностроения: теория и практика.* – Самара: Изд-во СамНЦ РАН, 2016. – 218 с.
12. ИВАНИЛОВ Ю.П., ЛОТОВ А.В. *Математические модели в экономике.* – М.: Наука, 1979. – 304 с.
13. ИНТРИЛЛИГАТОР М. *Математические методы оптимизации и экономическая теория.* – М.: Прогресс, 1975. – 606 с.
14. ИРИКОВ В.А., ЗОЛУТУХИН И.Н., ЛИСИН Д.С. *Модель портового кластера и алгоритм системной координации его развития // Спецтехника и связь.* – 2012. – №5. – С. 72–76.
15. ИРИКОВ В.А., ТРЕНЁВ В.Н. *Распределённые системы принятия решений. Теория и приложения.* – М.: Физматлит, 1999. – 288 с.
16. ИРИКОВ В.А., ТРЕНЁВ В.Н., АГЕЕВ И.А., ПОЗДНЯКОВ М.Я. *Анализ возможностей на основе параметрической модели системной оптимизации.* – Долгопрудный: МФТИ, 1990. – 68 с.
17. КЛЕЙНЕР Г.Б. *Производственные функции: теория, методы, применение.* – М.: Финансы и статистика, 1986. – 238 с.
18. КОБРИНСКИЙ Н.Е., МАЙМИНАС Е.З., СМЕРНОВ А.Д. *Экономическая кибернетика.* – М.: Экономика, 1982. – 408 с.
19. КОВАЛЕВ В.В. *Финансовый анализ. Методы и процедуры.* – М.: Финансы и статистика, 2006. – 560 с.
20. МАККОННЕЛЛ К., БРЮ С. *Экономикс.* – М.: ИНФРА-М, 1999. – 974 с.
21. МАЛУГИН В.А., ФАДЕЕВА Л.Н. *Количественный анализ в экономике и менеджменте: учебник.* – М.: ИНФРА-М, 2014. – 615 с.
22. МЕСАРОВИЧ М., МАКО Д., ТАКАХАРА И. *Теория иерархических многоуровневых систем.* – М.: Мир, 1973. – 344 с.
23. МИЛГРОМ П., РОБЕРТС Д. *Экономика, организация и менеджмент.* – СПб.: Экономическая школа, 2001. Т.1. – 468 с. Т.2. – 422 с.
24. МИХАЛЕВИЧ В.С., ВОЛКОВИЧ В.Л. *Вычислительные методы исследования и проектирования сложных систем.* – М.: Наука, 1982. – 286 с.

25. МОЛОДЦОВ Д.А. *Устойчивость принципов оптимальности*. - М.: Наука, 1987. – 280 с.
26. НЕСТЕРОВ Ю.Е. *Введение в выпуклую оптимизацию*. – М.: МЦНМО, 2010. – 280 с.
27. НОВИКОВ А.М., НОВИКОВ Д.А. *Методология научного исследования*. – М.: Либроком, 2010. – 280 с.
28. НОВИКОВ Д.А. *Кибернетика: навигатор*. – М.: Ленанд, 2016. – 160 с.
29. ОПОЙЦЕВ В.И. *Равновесие и устойчивость в моделях коллективного поведения*. - М: Наука, 1977. - 248 с.
30. ПЕРВОЗВАНСКИЙ А.А., ГАЙЦГОРИ В.Г. *Декомпозиция, агрегирование и приближенная оптимизация*. - М.: Физматлит, 1979. - 344 с.
31. ПИНДАЙК Р., РУБИНФЕЛЬД Д. *Микроэкономика*. - М.: Дело, 2001. – 808 с.
32. ПОЛШКОВ Ю.Н. *Экономико-математическое моделирование в курсовых и дипломных работах*. – Донецк: ДонНУ, 2016. – 390 с.
33. ПОПОВ А.М., СОТНИКОВ В.Н. *Экономико-математические методы и модели*. – М.: Юрайт, 2013. – 479 с.
34. ПОСПЕЛОВ Г.С., ИРИКОВ В.А. *Программно-целевое планирование и управление*. - М.: Советское радио, 1976. – 404 с.
35. ПОСПЕЛОВ Г.С., ИРИКОВ В.А., КУРИЛОВ А.Е. *Процедуры и алгоритмы формирования комплексных грамм*. - М.: Наука, 1985. – 424 с.
36. РОЩИН А.А. *Расчет Динамических Систем (РДС). Руководство для программистов. Приложение: описание функций и структур. Приложение к руководству для программистов*. - М.: ИПУ РАН, 2012. – 719 с.
37. ЯНКОВОЙ А.Г. *Математико-статистические методы и модели в управлении предприятием: Учебное пособие*. – Одесса: ОНЭУ, 2014. – 250 с.
38. BRAY M., RAZIN R., SARYCHEV A. *Mathematical Economics*. – London: University of London, 2015. – 442 p.
39. FUENTE A. *Mathematical Methods and Models for Economists*. – Cambridge: Cambridge University Press, 2000. – 848 p.

40. HILLIER F., LIEBERMAN G. *Introduction to Operations Research* (8th ed.). – Boston: McGraw-Hill, 2005. – 1061 p.
41. MAS-COLLEL A., WHINSTON M.D., GREEN J.R. *Microeconomic Theory*. – N.Y.: Oxford Univ. Press, 1995. – 981 p.
42. *Mechanism Design and Management: Mathematical Methods for Smart Organizations* / Ed. by Prof. D. Novikov. – New York: Nova Science Publishers, 2013. – 163 p.
43. MORGAN M. *The World in the Model: How Economists Work and Think*. – Cambridge: Cambridge University Press, 2012. – 422 p.
44. NOVIKOV D. *Hierarchical Models in Modern Control Theory // Challenges in Automation, Robotics and Measurement Techniques*. – Heidelberg: Springer, 2016. – P. 3–12.
45. NOVIKOV D.A. *Management of Active Systems: Stability or Efficiency // Systems Science*. – 2001. – Vol. 26, No. 2. – P. 85–93.
46. NOVIKOV D. *Theory of Control in Organizations*. – New York: Nova Science Publishers, 2013. – 341 p.
47. SAYAMA S. *Introduction to the Modeling and Analysis of Complex Systems*. – N.Y.: State University of New York, 2015. – 478 p.
48. TAHA H. *Operations Research: An Introduction* (9th ed.). – NY: Prentice Hall, 2011. – 813 p.
49. WAGNER H. *Principles of Operations Research*. 2nd ed. – NJ Upper Saddle River: Prentice Hall, 1975. – 1039 p.

INTEGRATED MODELS OF SYSTEM OPTIMIZATION OF THE ENTERPRISE ACTIVITY

Dmitry Novikov, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Corresponding member of RAS (novikov@ipu.ru).

Abstract: A set of models with increasing complexity is considered for enterprise multicriteria decision-making. Agents make rational decisions on the volume of production, attraction / placement of borrowed funds, investments in improving the efficiency and in the increasing of productive capacities. These models illustrate the approach of integrated modeling and system optimization to economic applications. The results of simulations are given, prospects for the development and application of the system optimization techniques to the modeling of production and economic activities of enterprises are discussed.

Keywords: integrated models, system optimization, simulation, enterprise production and economic activity.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии В.Н. Бурковым.

*Поступила в редакцию 12.07.2016.
Опубликована 31.01.2017.*

УДК 519.876.2

ББК 32.81

МОДЕЛИРОВАНИЕ МИГРАЦИИ НАСЕЛЕНИЯ В ЗАДАЧАХ ОБЕСПЕЧЕНИЯ БЕЗОПАСНОСТИ ГОСУДАРСТВА

Шумов В. В.¹

(Отделение погранологии

Международной академии информатизации, Москва)

На основе анализа законов миграции и факторов, влияющих на ее интенсивность, предложено расширение гравитационной модели миграции, учитывающее притягивающие и промежуточные факторы. Сформулировано правило выбора мигрантами страны назначения. Оценены параметры модели.

Ключевые слова: законы миграции, гравитационная модель, этническая гетерогенность.

1. Введение

Миграция населения (лат. *migratio* – переселение) – перемещение людей из одного региона (страны, мира) в другой, в ряде случаев большими группами и на большие расстояния. Люди, переселившиеся за пределы государства, называются *эмигрантами*, переселившиеся в данную страну – *иммигрантами*. Разница между численностью первых и вторых – это *миграционное сальдо*, непосредственно (наряду с естественным приростом населения – разницей между родившимися и умершими) влияющее на численность населения [8].

На основе изучения статистических данных Э.Г. Равенштейн сформулировал, в частности, следующие законы миграции [19]:

¹ Владислав Вячеславович Шумов, кандидат технических наук, доцент (vshum59@yandex.ru).

- большинство мигрантов переезжает на короткие расстояния;
- миграция происходит ступенчато;
- каждому миграционному потоку соответствует обратный поток;
- мигранты на длинные расстояния мигрируют в крупные центры промышленности и торговли;
- жители городов менее подвижны, чем жители сельской местности;
- большие города растут главным образом из-за миграции;
- объем миграции увеличивается с развитием промышленности, торговли и транспорта;
- главные причины миграции – экономические.

Э. Ли выделил основные факторы, влияющие на миграцию [17]: притягивающие, отталкивающие и промежуточные. Притягивающие факторы определяют целевую страну (куда идет перемещение людей) и зависит от: возможности получения мигрантами более высоких доходов, безопасности и др. Отталкивающие факторы характеризуют социально-экономические и иные условия страны – источника миграции (безработица, войны, социальные и природные катастрофы и т.д.). Промежуточные факторы возрастают с увеличением расстояния между территориями и выступают в качестве ограничителей миграционных потоков (транспортные расходы, правовые режимы и т.д.). Причем одни и те же факторы влияют на разных людей по-разному.

Обзор моделей миграции представлен в работе [9]. В. Рейли в 1929 г. предложил для анализа миграции использовать гравитационную модель, в которой суммарный миграционный поток (демографическая сила) между объектами (странами, регионами, районами) i и j вычисляется по формуле

$$(1) \quad m_{sij} = k \frac{p_i p_j}{(d_{ij})^2},$$

где k – параметр размерности; p_i (p_j) – мера значимости (например, численность населения) объекта i (объекта j); d_{ij} – расстояние между объектами i и j .

У. Изард сформулировал обобщенную гравитационную модель, в которой миграционный поток равен

$$(2) \quad m_{sij} = k \frac{w_i(p_i)^\alpha w_j(p_j)^\beta}{(d_{ij})^b},$$

где w_i, w_j – веса объектов i и j ; α, β, b – параметры. Данная модель позволяет учитывать, в частности, региональную комплементарность (взаимодополнительность).

На миграцию существенное влияние оказывают этнические, конфессиональные и другие факторы. Известны два подхода к трактовке этнических (культурных) гетерогенностей. При первом подходе измеряется фрагментированность общества (раздробленность страны по некоторому признаку). При втором оценивается поляризованность, учитывающая степень сходства между группами (чем меньше сходства, тем острее антагонизм) [5]. Для измерения этнической гетерогенности используются, в частности, следующие индексы:

- индекс этнолингвистической фрагментированности (ИЭЛФ);
- индекс второстепенной гетерогенности (PH);
- индекс поляризованности Эстебана – Рэя (ER) и др.

Индекс ИЭЛФ рассчитывается по формуле [5]:

$$(3) \quad \text{ИЭЛФ} = 1 - \sum_{i=1}^N s_i^2,$$

где s_i – доля i -й этнической группы в общей численности населения; N – число групп.

Значение индекса ИЭЛФ есть вероятность того, что два случайно выбранных индивида будут принадлежать к разным этническим группам. Однако индекс ИЭЛФ не учитывает дистанцию между группами. Индекс второстепенной гетерогенности вычисляется по формуле [5]

$$(4) \quad PH = 2 \sum_{i=1}^N s_c s_i \tau_{ci},$$

где s_c – доля основной («титულიной») этнической группы в общей численности населения; s_i – доля i -й этнической группы в общей численности населения; τ_{ci} – культурная дистанция (рас-

стояние, безразмерная величина) между s -й и i -й этническими группами.

Различение между группами в политических сообществах производится по одной или нескольким объективным характеристикам: языку, религии, расовой, этнической или племенной принадлежности. Например, в качестве индикатора τ_{ij} языковой дистанции между группами i и j может использоваться выражение [5]

$$(5) \quad \tau_{ij} = 1 - (l/m)^\alpha,$$

где l – число совместно разделяемых двумя языками ветвей лингвистического дерева; m – общее число ветвей, которые могут быть общими для двух языков; $0 \leq \alpha \leq 1$ – параметр.

Перечисленные индексы гетерогенности и поляризованности фиксируют различия между группами, но не дают ответа на вопрос, как выявленные разнородности транслируются в действия.

В войнах (и событиях, затрагивающих безопасность и жизнеспособность государства) ведущую роль играет государствообразующий этнос, на его плечи ложатся основные издержки, он несет максимальные потери убитыми и ранеными. Разумеется, в истории возможны исключения, скорее подтверждающие правило (в 300-е годы армия Западной Римской империи комплектовалась преимущественно германцами и другими варварами, доля римлян в ней неуклонно снижалась [4]; наемная армия времен упадка Византии [6] и др.).

Определим параметр разнородности между государствообразующим этносом (национальностью) s и этносом j по формуле [13, 14]

$$(6) \quad \mu_{sj} = B_{Cs} / B_{Cj},$$

где B_{Cs} – доля потерь от численности этноса s ; B_{Cj} – доля потерь от численности этноса j .

Для оценки параметра разнородности использовались результаты переписи населения СССР 1939 г. и данные по безвозвратным потерям (по национальностям) в годы Великой Отечественной войны [3, 11] (таблица 1).

Таблица 1. Данные по безвозвратным потерям в Великой Отечественной войне по национальностям

Национальность	Численность в СССР в 1939 г.	Безвозвратные потери, тыс. чел.	% потерь от численности	Параметр разнородности	Вхождение в состав России (СССР)
Русские	99591520	5756,0	5,78	1,0	
Украинцы	28111007	1377,4	4,90	1,2	1654 г.
Белорусы	5 275 393	252,9	4,79	1,2	В конце XVIII в.
Татары	4 313 488	187,7	4,35	1,3	1552 г.
Евреи	3 028 538	142,5	4,71	1,2	После разделов Речи Посполитой значительная часть еврейской общины оказалась в Российской Империи
Казахи	3 100 949	125,5	4,05	1,4	1734–1840 гг.
Узбеки	4 845 140	117,9	2,43	2,4	1840–1876 гг.
Армяне	2 152 860	83,7	3,89	1,5	1826–1828 гг.
Грузины	2 249 636	79,5	3,53	1,6	1806 г.
Мордовцы	1 456 330	63,3	4,35	1,3	Не имели своей государственности до XX в.
Чуваши	1 369 574	63,3	4,62	1,3	1552 г.
Азербайджанцы	2 275 678	58,4	2,57	2,3	1826–1828 гг.
Молдаване	260 418	53,9	20,70	0,3	1812 г. (Бессарабия)
Башкиры	843 648	31,7	3,76	1,5	1554–1557 гг.
Киргизы	884 615	26,6	3,01	1,9	1865–1876 гг.
Удмурты	606 326	23,2	3,83	1,5	1554–1558 гг.
Таджики	1 229 170	22,9	1,86	3,1	1864–1895 гг.
Туркмены	812 404	21,3	2,62	2,2	1881–1882 гг.
Эстонцы	143 589	21,2	14,76	0,4	1721 г.
Марийцы	481 587	20,9	4,34	1,3	1552 г.
Буряты	224 719	13,0	5,79	1,0	1689 г.
Коми	422 317	11,6	2,75	2,1	1363 г.
Латыши	114 476	11,6	10,13	0,6	1721 г.
Литовцы	32 624	11,6	35,56	0,2	1721 г.
Народности Дагестана	857 499	11,1	1,29	4,5	1813–1859 гг.
Осетины	354 818	10,7	3,02	1,9	1774 г.
Поляки	630 097	10,1	1,60	3,6	В 1815 г. часть современной Польши

Националь- ность	Числен- ность в СССР в 1939 г.	Безвоз- вратные потери, тыс. чел.	% потерь от числен- ности	Параметр разно- родности	Вхождение в состав России (СССР)
					вошла в состав Рос. империи
Карелы	252 715	9,5	3,76	1,5	1809 г.
Калмыки	134 402	4,0	2,98	1,9	1771 г.
Кабардинцы и балкарцы	206 870	3,4	1,64	3,5	1827 г.
Греки	286 444	2,4	0,84	6,9	
Чеченцы и ингуши	500 088	2,3	0,46	12,6	1721–1783 г.
Финны	143 437	1,6	1,12	5,2	1809 г.
Болгары	113 494	1,1	0,97	6,0	
Чехи, словаки	27 681	0,4	1,45	4,0	
Китайцы	32 023	0,4	1,25	4,6	

Примечание. Процент потерь для Прибалтийских республик, Белоруссии, Украины и Молдавии завышен, поскольку перепись проводилась по состоянию на 17.01.1939 г., а вхождение (расширение за счет западных областей) республик в СССР произошло позже.

Если исключить из таблицы национальности со значением параметра разнородности меньше единицы, то средневзвешенное значение параметра разнородности для СССР того времени будет равно 1,26.

Для приведения значений параметра разнородности к форме индекса гетерогенности IG можно воспользоваться выражением

$$(7) \quad IG = 1 - (\mu_i)^{-\alpha}, \quad \alpha > 0.$$

Для СССР на 1930–1940-е гг. при степени $\alpha = 1$ получим $IG_{30-40} \approx 0,23$. По данным переписи населения СССР 1989 г. значение индекса гетерогенности возросло: $IG_{1989} \approx 0,27$, что объясняется сокращением доли русских в общей численности населения государства.

В качестве недостатка выражения (6) можно отметить, что значение параметра разнородности можно оценить только для этносов (национальностей), входивших в состав единого госу-

дарства и причем только по линии «государствообразующий этнос (русские) – другой этнос».

Еще один параметр, характеризующий этнические разнородности, – межэтнические расстояния [12]. Е. Сороко анализирует смешанные браки по данным переписи населения России 2010 г., соотнося реальные числа наблюдавшихся этнических комбинаций с гипотетическими числами, которые можно было бы ожидать в предположении пропорциональности числа таких браков числу мужчин и женщин соответствующих национальностей. Межэтническое расстояние D_{ij} между этносами i и j является безразмерной величиной. Ее значение 1 соответствует полному отсутствию каких-либо предпочтений национальностей при образовании супружеских пар. Меньшее значение расстояния D_{ij} соответствует большим предпочтениям при формировании пар с данной комбинацией национальностей мужа и жены. Значения больше 1 характеризуют наличие серьезных барьеров, препятствующих образованию смешанных браков с такой комбинацией национальностей.

В таблице 2 представлены оценки межэтнических расстояний между русскими и другими этносами на основании распространенности смешанных браков и оценки параметра разнородности [12; 16].

Таблица 2. Значения межэтнических расстояний и параметра разнородности

№	Национальность	Расстояние D_{ij}	Параметр μ_{ij}
1	Украинцы	0,66	1,2
2	Мордва	0,68	1,3
3	Удмурты	0,71	1,5
4	Армяне	0,74	1,5
5	Чуваши	0,75	1,3
6	Татары	0,84	1,3
7	Казахи	0,97	1,4
8	Азербайджанцы	1,03	2,3
9	Башкиры	1,55	1,5
10	Чеченцы	2,03	12,6

Между значениями параметра разнородности и межэтническими расстояниями коэффициент корреляции не ниже 0,9.

2. Модель миграции и оценка ее параметров

Пользуясь моделью безопасности [16], определим потоки миграции M_{ij} из страны i в страну j , основанные на факторах притяжения:

$$(8) \quad M_{ij} = k_{mi} \frac{w_{bj} D_j (V_j / V_i)}{\sqrt{r_{ij} / r_{i\min}} (\mu_{ij})^2}, \quad r_{i\min} = \min_j r_{ij},$$

где k_{mi} – параметр миграции i -й страны; w_{bj} – базовая суверенность j -го государства; V_i – ВВП на душу населения i -й страны; V_j – ВВП на душу населения j -й страны; D_j – доля городского населения в j -й стране; r_{ij} – расстояние между странами i и j ; $r_{i\min}$ – расстояние от страны i до ближайшей страны из рассматриваемого списка стран; μ_{ij} – параметр разнородности.

Базовая суверенность w_{bj} j -го государства вычисляется по формуле [15]

$$(9) \quad w_{bj} = \left(\frac{z_j}{z_{\max}} \right)^\omega \left(\frac{s_j}{s_{\max}} \right)^{1-\omega}, \quad \omega \approx 0,67,$$

где z_j – численность населения j -й страны; s_j – ее площадь; s_{\max} – площадь крупнейшей страны (России); z_{\max} – численность населения самой многочисленной страны (Китая); ω – параметр эластичности по демографическому фактору.

В терминах гравитационной модели базовая суверенность есть мера значимости страны притяжения, отношение ВВП на душу населения – экономический параметр притяжения; расстояние между странами и параметр разнородности характеризуют меру различий. В модели учитывается тот факт, что с увеличением расстояния транспортные расходы на единицу расстояния сокращаются.

Используя базу данных статистического отдела ЕЭК ООН [2] по долгосрочной эмиграции¹ и другие данные [10, 18], выполнена оценка параметров k_m и μ_{ij} модели (8) для России (эмиграция 2009–2013 гг.), Украины (2011–2012 гг.), Белоруссии

¹ Долгосрочные мигранты – это те, кто покинули страну или переехали из страны на срок не менее одного года.

(2009–2014 гг.), Армении (2011, 2014 гг.), Казахстана (2012–2014 гг.) и Узбекистана (2013–2014 гг.).

В таблице 3 представлены выборочные данные по долгосрочной миграции.

Таблица 3. Потоки долгосрочной миграции (выборочные данные ЕЭК ООН)

Страна прибытия	Поток миграции из страны выезда, чел.					
	Россия	Украина	Беларусь	Армения	Казахстан	Узбекистан
Россия		10064	28254	146883	71696	40611
Украина	49357		3369	3246	686	1836
Беларусь	26440	1228		532	3320	211
Армения	17843	34	175		19	19
Казахстан	41382	466	587	582		34927
Узбекистан	86141	123	144	71	617	
Таджикистан	30017	9	31	—	23	370
Киргизия	23356	—	22	2	364	474
Азербайджан	13888	153	282	—	161	193
Молдавия	15023	674	159	12	31	—
Грузия	3858	100	264	1362	25	16
Вьетнам	3761	91	125	—	—	—
Туркмения	4078	211	924	—	20	148
Эстония	2034	55	70	1	1	—
Израиль	5012	2972	1974	58	277	385
Латвия	1474	61	410	2	11	6
Литва	1106	95	1100	72	12	5
Болгария	921	75	61	159	13	13
Монголия	346	16	—	—	56	—
Чехия	1468	865	278	168	23	—
Индия	2146	77	43	—	3	—
Германия	19415	3462	2799	3315	4202	271
Китай	12697	579	485	—	125	—
Турция	3031	680	357	411	35	58
Греция	651	54	17	2847	15	72
Испания	1827	785	77	2022	3	—
Австрия	572	301	193	222	24	13
Италия	1687	397	613	185	18	100
Швейцария	503	53	109	94	20	—
Польша	483	435	872	648	212	29
Канада	2455	185	322	272	372	34
Великобритания	1249	71	128	172	14	58
США	7369	1866	1336	5601	493	437

Страна прибытия	Поток миграции из страны выезда, чел.					
	Россия	Украина	Беларусь	Армения	Казахстан	Узбекистан
Франция	1511	132	244	4439	9	58
Австралия	1080	36	33	70	24	—
Выехало всего	411943	29105	47842	217937	83051	373566
Учтено в расчетах	394742	28220	47163	177874	82932	80502

В связи с очень малым потоком миграции из Казахстана в Испанию, Францию, Болгарию, Литву, Латвию, Австрию и некоторые другие государства, оценка параметра разнородности для указанных стран характеризуется высокой погрешностью.

Результаты вычислений представлены в таблице 4.

Таблица 4. Оценка параметра разнородности

Страна прибытия	Страна выезда мигрантов					
	Россия	Украина	Беларусь	Армения	Казахстан	Узбекистан
Россия		1,09	0,58	0,68	0,54	0,87
Таджикистан	0,03				0,92	0,43
Киргизия	0,04				0,29	0,45
Узбекистан	0,05	0,60	0,46	2,16	0,52	
Молдавия	0,06	0,16	0,24	2,00	0,71	
Армения	0,07		0,25		1,31	1,95
Грузия	0,17	0,48	0,24	0,48	1,31	
Азербайджан	0,18	0,75	0,45		1,09	1,48
Украина	0,22		0,36	0,78	0,92	0,78
Беларусь	0,22	0,51		1,29	0,30	1,63
Вьетнам	0,24	0,67	0,49			
Казахстан	0,29	1,14	0,86	2,67		0,40
Туркмения	0,32	0,61	0,24		3,60	2,14
Афганистан	0,40		0,27			
Эстония	0,46	1,20	1,06			
Сирия	0,49	0,83	0,47	2,07		
Израиль	0,57	0,35	0,35	6,75	1,57	1,94
Латвия	0,57	1,25	0,50		3,20	
Литва	0,75	1,20	0,38	2,49	3,67	
Болгария	0,76	1,36	1,22	1,99	3,72	
Монголия	0,80				1,63	
Чехия	1,05	0,67	1,05	2,98	4,71	
Индия	1,12	2,57				
Германия	1,13	1,22	1,30	2,55	1,36	7,29
Китай	1,31	2,59	2,40		11,58	

Страна прибытия	Страна выезда мигрантов					
	Россия	Украина	Беларусь	Армения	Казахстан	Узбекистан
Турция	1,51	1,52	1,70	5,42	8,60	9,59
Греция	1,55	2,64		0,82	6,14	3,96
Ирак	1,77		1,60			
Южная Корея	2,17					5,45
Испания	2,17	1,53	4,28	2,14	33,09	
Австрия	2,36	1,59	1,74	3,76	9,32	
Бельгия	2,37		1,77	1,18	7,08	5,67
Италия	2,59	2,58	1,78	8,18	15,04	8,92
Швейцария	2,84	4,16	2,55	6,60	8,39	
Польша	2,90	1,55	1,04	2,29	2,34	8,78
Нидерланды	3,05	2,69	2,10	1,88		
Норвегия	3,08	4,62	4,41			
Канада	3,12	4,96	3,31	9,56	5,44	24,61
Великобритания	3,47	6,69	4,45	9,20	19,50	13,17
США	3,64	3,17	3,29	4,30	9,49	13,87
Франция	3,75	5,84	3,79	2,18	28,74	15,67
Австралия	4,19			16,00	20,63	
Швеция	4,36		3,49	4,97		
Иран		1,12	1,95	5,13		
Нигерия		2,04	1,16			
Дания		3,41	3,22	6,05		

Для оценки параметров модели (отдельно для каждой страны выезда) использовался метод наименьших квадратов. На значения параметра k_{mi} миграции накладывалось ограничение

$$(10) \sum_{j=1}^{n_i} M_{ij} \leq k_{mi} \leq \sum_{j=1}^{N_i} M_{ij},$$

где n_i – количество стран в выборке для страны выезда i ; N_i – общее количество стран (включая неопределенную позицию), куда прибыли мигранты из страны i .

Если применительно к этносам (национальностям) значение параметра разнородности $\mu_{ij} \geq 1$ (основную нагрузку в стране несет государствообразующий этнос), то применительно к отдельным социальным группам в общем случае имеем $\mu_{ij} > 0$. Рассмотрим часть таблицы 4, включающую только перекрестную миграцию (таблица 5).

Таблица 5. Оценка параметра разнородности (выборочно)

Страна j прибытия	Страна i выезда мигрантов					
	1. Россия	2. Украин-на	3. Бела-русь	4. Арме-ния	5. Казах-стан	6. Узбеки-стан
1. Россия		1,09	0,58	0,68	0,54	0,87
2. Украина	0,22		0,36	0,78	0,92	0,78
3. Беларусь	0,22	0,51		1,29	0,30	1,63
4. Армения	0,07		0,25		1,31	1,95
5. Казахстан	0,29	1,14	0,86	2,67		0,40
6. Узбекистан	0,05	0,60	0,46	2,16	0,52	

Из Узбекистана выезжает главным образом население нетитульных национальностей [7], причем доля миграции в Россию составила 50%, в Казахстан – 43%. Значение параметра $\mu_{61} = 0,87$ может свидетельствовать о том, что для мигрантов из Узбекистана в Россию как отдельной социальной группы «своим» этносом преимущественно является российский. При этом параметр разнородности этой группы с населением Узбекистана равен $\mu = 1/\mu_{61} = 1/0,87 = 1,15$. Данная социальная группа считает, что между российским и узбекским этносами различия невелики. В общем потоке эмиграции из России около 21% приходится на Узбекистан. Параметр разнородности между Россией и Узбекистаном с точки зрения мигрантов из России равен $\mu = 1/\mu_{16} = 1/0,05 = 20$. В СССР значение параметра разнородности узбеков и русских равнялось 2,4.

В первом полугодии 2013 г. в общем числе эмигрантов (174,4 тыс. чел.) из Казахстана доля этнических русских составляла 70,9% [1]. За 2012–2014 гг. доля миграции в Россию составила 86%, в Германию – 5%. Можно предположить, что мигранты (в основном – русские) считают, что различия между Россией и Казахстаном оцениваются значением параметра $\mu = 1/\mu_{51} = 1/0,54 = 1,85$. Отметим, что в СССР значение параметра разнородности казахов и русских равнялось 1,4. В общем потоке эмиграции из России около 10% приходится на Казахстан. Параметр разнородности между Россией и Казахстаном с точки зрения мигрантов из России равен $\mu = 1/\mu_{15} = 1/0,29 = 3,45$.

Выезжающие из Украины в Россию не видят различий между украинцами и русскими ($\mu_{21} = 1,09$), тогда как мигранты из России на Украину видят между названными этносами существенное различие.

В таблице 6 для шести стран представлены результаты оценки параметра разнородности различными методами (если значение параметра в таблице 5 меньше единицы, то берется обратное число).

Таблица 6. Сравнительная оценка параметра разнородности

Показатель	Значения параметра разнородности				
	Украина	Беларусь	Армения	Казахстан	Узбекистан
Мигранты в Россию	1,09	1,72	1,47	1,85	1,15
Мигранты из России	4,55	4,55	14,29	3,45	20,0
По результатам Отечественной войны 1941–1945 гг.	1,2	1,2	1,5	1,4	2,4
Мигранты на Украину		2,78	1,28	1,09	1,28
Мигранты с Украины		1,96	—	1,14	1,67
Мигранты в Беларусь	1,96		1,29	3,33	1,63
Мигранты из Беларуси	2,78		4,00	1,16	2,17
Мигранты из Армении	1,28	1,29		2,67	2,16
Мигранты в Армению	—	4,00		1,31	1,95
Мигранты из Казахстана	1,09	3,33	1,31		1,92
Мигранты в Казахстан	1,14	1,16	2,67		2,50
Мигранты из Узбекистана	1,28	1,63	1,95	2,50	
Мигранты в Узбекистан	1,67	2,17	2,16	1,92	

Таким образом, гравитационную модель миграции можно использовать для оценки параметра разнородности. Полученные с ее помощью результаты не противоречат оценкам, выполненным на основе анализа вклада разных национальностей в общую Победу в Великой Отечественной войне 1941–1945 гг.

Из таблицы 4 в частности видно, что в среднем высокие различия (разнородности) характерны для таких стран, как Австралия, Франция, Великобритания, Испания и Канада (среднее значение параметра разнородности выше 8). Тогда как для

Германии, Нидерландов, Чехии и Болгарии эти различия невелики.

При обработке статистических данных нами не учитывались особенности правовых режимов, в определенных условиях оказывающих существенное влияние на потоки миграции. Из выражения (8) видно, что при прочих равных условиях миграционный поток максимален, если население двух соседних стран характеризуется значением параметра разнородности, близким к единице. При различных политических и идеологических разногласиях между странами существенно ограничиваются легальные и нелегальные миграционные потоки, в том числе и за счет оборудования государственной границы глубоко эшелонированными инженерными сооружениями (границы ГДР и ФРГ, Северной и Южной Кореи). Строительство Украиной пограничных сооружений на границе с Россией свидетельствует о том, что имеются существенные идеологические разногласия на уровне элит, тогда как население указанных стран этнически однородно.

Преобразуем выражение (8) и вычислим поток миграции M_{ij} из страны i в страну j с учетом административно-правового режима в области миграции:

$$(11) M_{ij} = k_{mi} \frac{(1 - P_{RMij}) w_{bj} D_j (V_j / V_i)}{\sqrt{r_{ij} / r_{i \min}} (\mu_{ij})^2},$$

где $0 \leq P_{RMij} \leq 1$ – индекс административно-правового режима, действующего в отношении граждан, пытающихся мигрировать из i в j . При $P_{RMij} = 0$ отсутствуют какие-либо ограничения на миграцию между странами i и j . Соответственно, при $P_{RMij} = 1$ невозможна легальная и нелегальная миграция из страны i в страну j .

В выражениях (8) и (11) используется часть законов Э.Г. Равенштейна, характерных в основном только для межгосударственной миграции. Параметр разнородности желательно вычислять по результатам совместных действий этносов. При отсутствии соответствующих статистических данных можно использовать экспертные процедуры, матрицы генетических, географических и лингвистических расстояний.

На основании законов миграции и частного случая гравитационной модели миграции можно сформулировать *правило выбора индивидуального актора*: мигранты выбирают страну назначения с учетом соотношения уровней ВВП на душу населения, урбанизации, емкости страны (характеризуется функцией базовой суверенности), степени разнородности между странами и существующего административно-правового режима миграции.

3. Заключение

Таким образом, нами рассмотрено расширение гравитационной модели миграции, учитывающее притягивающие и промежуточные факторы (по Э. Ли). По статистическим данным за 2009–2014 гг. для некоторых стран СНГ выполнена оценка параметра этнической разнородности. Полученные данные не противоречат оценкам параметра, полученного на основе анализа вклада различных национальностей СССР в Победу в годы Великой Отечественной войны.

Введение индекса административно-правового режима в области миграции позволит формулировать и решать задачи в области управления миграционными потоками.

Литература

1. АСКАРОВ Т. *Почему люди опять уезжают из Казахстана?* – URL: http://forbes.kz/life/pochemu_lyudi_oryat_uezjayut_iz_kazahstana (дата обращения: 10.08.2015).
2. *База данных статистического отдела ЕЭК ООН.* – URL: http://w3.unece.org/PXWeb2015/pxweb/ru/STAT/STAT__30-GE__99-MCH_1 (дата обращения: 17.08.2015).
3. *Всесоюзная перепись населения 1939 года: основные итоги.* – М.: Наука, 1992. – 254 с.
4. ДМИТРИЕВ В.А. *К вопросу о варваризации Римской армии в IV в. н.э. (по данным Аммиана Марцеллина)* // Научные ведомости БелГУ. Серия: История. Политология. Экономика. Информатика. – 2011. – №7(102). – С. 44–56.

5. КАМАЛОВА Р.У. *Этническая гетерогенность: основные понятия и проблемы измерения* // «Полития». – 2013. – №4(71). – С. 127–149.
6. КУЧМА В.В. *Военная организация Византийской империи*. – СПб.: Алетейя, 2001. – 426 с.
7. МАКСАКОВА Л. *Узбекистан в системе международных миграций*. – URL: <http://www.demoscope.ru/weekly/2010/0415/analit03.php> (дата обращения: 04.08.2015).
8. *Миграция населения: теория, политика: учеб. пособие* / Под ред. О.Д. Воробьевой, А.В. Топилина. – М.: Экономическое образование, 2012. – 364 с.
9. *Прикладное прогнозирование национальной экономики: учебное пособие* / Под ред. В.В. Ивантера, И.А. Буданова, А.Г. Коровкина, В.С. Сутягина. – М.: Экономистъ, 2007. – 896 с.
10. *Расстояние калькулятор*. – URL: <http://ru.distance.to/> (дата обращения: 06.08.2015).
11. *Россия и СССР в войнах XX века. Потери вооруженных сил. Статистическое исследование* / Под общ. ред. Г.Ф. Кривошеева. – М.: ОЛМА-ПРЕСС, 2001. – 608 с.
12. СОРОКО Е. *Этнически смешанные супружеские пары в Российской Федерации* // Демографическое обозрение. – 2014. – Т. 1, №4. – С. 96–123.
13. ШУМОВ В.В. *Геополитика и безопасность: математическое моделирование* // Геополитика и безопасность, 2015. № 1 (29). – С. 37–45.
14. ШУМОВ В.В. *Общественная и национальная безопасность: анализ, моделирование и верификация* // Политика и общество. – 2015. – №3(123). – С. 303–319.
15. ШУМОВ В.В. *Пограничная безопасность как ценность и общественное благо: Математические модели*. – М.: ЛЕНАНД, 2015. – 184 с.
16. ШУМОВ В.В. *Государственная и общественная безопасность: Моделирование и прогнозирование*. – М.: ЛЕНАНД, 2016. – 144 с.
17. LEE E.S. *A Theory of Migration* // Demography. – 1966. – Vol. 3, No. 1. – P. 47–57.

18. *National Accounts Main Aggregates Database*. – URL: <http://unstats.un.org/unsd/snaama/selbasicFast.asp> (дата обращения: 05.04.2015).
19. RAVENSTEIN E.G. *The Laws of Migration* // J. of the Statistical Society of London. – 1885. – Vol. 48, No. 2. – P. 167–235.

MIGRATION MODELING: AN EXTENSION OF GRAVITY MODEL

Vladislav Shumov, International Informatization Academy, Moscow, Cand.Sc., senior lecturer (vshum59@yandex.ru).

We consider an extension of the gravity model of migration taking into account attracting and intermediate factors. Our model is based on the experimental analysis of legal migration and factors influencing its intensity. A rule of destination country selection by migrants is formulated. We propose a novel index of administrative regime which reflects how favorable the migration law and regulations are in the given country. The model parameters are estimated from statistical data. The ethnic heterogeneity of former USSR countries was estimated from 2009-2014 years data.

Keywords: laws of migration, gravity model, ethnic heterogeneity.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии Д.А. Новиковым.

*Поступила в редакцию 19.09.2015.
Опубликована 31.01.2017.*