

**Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН**

УПРАВЛЕНИЕ БОЛЬШИМИ СИСТЕМАМИ

***Выпуск 67
Май 2017***

**СБОРНИК
ТРУДОВ**

ISSN 1819-2467

Регистрационный номер Эл. №ФС77-44158 от 09 марта 2011 г.

Москва – 2017

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова

**УПРАВЛЕНИЕ
БОЛЬШИМИ
СИСТЕМАМИ**

СБОРНИК ТРУДОВ

Выпуск 67

Москва – 2017

КООРДИНАЦИОННЫЙ СОВЕТ

Академики РАН: Васильев С.Н., Емельянов С.В., Куржанский А.Б., Федосов Е.А., Черноусько Ф.Л.; члены-корреспонденты РАН: Желтов С.Ю., Каляев И.А., Пархоменко П.П., Попков Ю.С.; д-ра техн. наук: Дорофеев А.А., Кузнецов О.П., Кульба В.В., Лотоцкий В.А., Павлов Б.В., Поляк Б.Т., Рутковский В.Ю.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор: член-корр. РАН Новиков Д.А. **Зам. главного редактора:** д-р физ.-мат. наук Губко М.В. **Отв. секретарь:** канд. техн. наук Базенков Н.И. **Редактор:** канд. техн. наук Квинто Я.И.

Д-ра техн. наук: проф. Алескеров Ф.Т. (ГУ ВШЭ), проф. Алчинов А.И. (ИПУ РАН), проф. Андриевский Б.Р. (ИПМ РАН), проф. Афанасьев В.Н. (МИЭМ), проф. Бахтадзе Н.Н. (ИПУ РАН), проф. Бурков В.Н. (ИПУ РАН), проф. Вишневский В.М. (ИПУ РАН), Галаев А.А. (ИПУ РАН), д-р физ.-мат. наук проф. Ерешко Ф.И. (ВЦ РАН), д-ра техн. наук Зоркальцев В.И. (ИСЭМ СО РАН), проф. Калашников А.О. (ИПУ РАН), проф. Калянов Г.Н. (ГУ ВШЭ), проф. Каравай М.Ф. (ИПУ РАН), д-р экон. наук, проф. Ключков В.В. (ИПУ РАН), д-ра техн. наук, Коргин Н.А. (ИПУ РАН), проф. Курдюков А.П. (ИПУ РАН), д-ра физ.-мат. наук, проф. Кушнер А.Г., проф. Лазарев А.А. (МФТИ), д-ра техн. наук: проф. Лебедев В.Г. (ИПУ РАН), проф. Мандель А.С. (ИПУ РАН), д-р биол. наук проф. Михальский А.И., д-р физ.-мат. наук, проф. Непейвода Н.Н. (ИПС РАН), д-р экон. наук, проф. Нижегородцев Р.М. (ИПУ РАН), д-ра техн. наук: проф. Орлов А.И. (МГТУ), д-ра физ.-мат. наук: проф. Рапопорт Л.Б. (ИПУ РАН), проф. Райгородский А.М. (МГУ), проф. Савватеев А.В. (РЭШ), д-ра техн. наук: проф. Самуйлов К.Е. (РУДН), проф. Сидельников Ю.В. (МАИ), Совлуков А.С. (ИПУ РАН) д-ра физ.-мат. наук: проф. Соловьев С.Ю. (МГУ), проф. Угольницкий Г.А. (ЮФУ), проф. Уткин В.А. (ИПУ РАН), проф. Хоботов Е.Н. (МГТУ), д-ра физ.-мат. наук: доцент Чеботарев П.Ю. (ИПУ РАН), проф. Чхартишвили А.Г. (ИПУ РАН), проф. Щербаков П.С. (ИПУ РАН).

РЕГИОНАЛЬНЫЕ РЕДАКЦИОННЫЕ СОВЕТЫ

Арзамас – д-р физ.-мат. наук проф. Пакшин П.В. **Волгоград** – д-ра физ.-мат. наук: проф. Воронин А.А., проф. Лосев А.Г. (ВолГУ); **Воронеж** – д-р техн. наук, проф. Баркалов С.А., д-р физ.-мат. наук, проф. Головинский П.А. (ВГАСУ), д-р техн. наук, проф. Подвальный С.Л. (ВГТУ); **Иркутск** – академик РАН Бычков И.В., д-р физ.-мат. наук, проф. Лакеев А.В. (ИДСТУ СО РАН); **Казань** – д-р физ.-мат. наук, проф. Маликов А.И., д-р техн. наук, проф. Сиразетдинов Р.Т. (КГТУ-КАИ); **Липецк** – д-ра техн. наук: проф. Погодаев А.К., Сараев П.В. (ЛГТУ); **Самара** – д-ра экон. наук: проф. Богатырев В.Д., проф. Гераськин М.И., д-р техн. наук, проф. Засканов В.Г. (СГАУ); **Петрозаводск** – д-р физ.-мат. наук, проф. Мазалов В.В., д-р техн. наук, доц. Печников А.А. (ИПМИ КарНЦ РАН); **Санкт-Петербург** – д-р физ.-мат. наук: проф. Петросян Л.А. (СПбГУ), д-р техн. наук проф. Фуртат И.Б. (ИПМ РАН); **Старый Оскол** – д-р техн. наук, проф. Еременко Ю.И. (СТИ).

Адрес редакции: 117997, г. Москва, ул. Профсоюзная, д. 65.

Адрес в интернете: ubs.mtas.ru.

СОДЕРЖАНИЕ

Системный анализ

Горелов М.А.

*Максимальный гарантированный результат
в иерархических играх.....* 4

Математическая теория управления

Бойченко В.А.

*Анизотропный анализ в случае ненулевых
начальных условий.....* 32

Управление в социально-экономических системах

Акинфиев В.К.

*Модель конкуренции между нефтедобывающими
компаниями с традиционным и нетрадиционным
способом добычи.....* 52

Управление в медико-биологических и экологических системах

Ратнер С.В.

*Динамические задачи оценки эколого-экономической
эффективности регионов на основе базовых
моделей анализа среды функционирования.....* 81

Управление техническими системами и технологическими процессами

Васильев М.Ю.

*О математической модели конкурентного отбора
мощности.....* 107

УДК 519.865 + 519.95
ББК 22.165

МАКСИМАЛЬНЫЙ ГАРАНТИРОВАННЫЙ РЕЗУЛЬТАТ В ИЕРАРХИЧЕСКИХ ИГРАХ

Горелов М. А.¹

*(Вычислительный центр им. А.А. Дородницына
ФИЦ ИУ РАН, Москва)*

Обсуждается новый метод исследования иерархических игр. Вычисляется максимальный гарантированный результат игрока верхнего уровня в иерархической игре двух лиц. Анализируется устойчивость этой задачи по отношению к изменениям функции выигрыша второго игрока.

Ключевые слова: информационная теория иерархических систем, иерархические игры, максимальный гарантированный результат.

1. Введение

В данной статье обсуждается новый метод исследования иерархических игр. Он уже показал свою эффективность при исследовании нескольких трудных задач [6–13]. Но именно потому, что исследовались сложные модели, простые основные идеи метода «обрастали» сложными техническими деталями. Ниже делается попытка продемонстрировать метод на простой задаче, но более подробно. Метод основан на альтернативном способе определения максимального гарантированного результата.

Традиционное определение максимального гарантированного результата было, видимо, впервые дано Ю.Б. Гермейером [3] и затем многократно использовалось в теории иерархи-

¹ Михаил Александрович Горелов, кандидат физико-математических наук (griever@ccas.ru).

ческих игр [4–5], теории активных систем [1–2], теории контрактов [15–16].

Для вычисления максимального гарантированного результата в играх со сложными информационными обменами Ю.Б. Гермейером был предложен метод, основанный на угадывании структуры оптимальных решений. Этот метод оказался весьма плодотворным, но почему-то плохо воспринимается представителями других научных школ.

Новое определение позволяет решать аналогичные задачи, используя, главным образом, тождественные преобразования формул исчисления предикатов. Возможно, для кого-то такой подход будет более понятным. И, как показывает опыт, в некоторых задачах, где угадать структуру решения трудно, этот метод оказывается работоспособным.

Статья построена следующим образом. В разделе 2 приводятся два определения максимального гарантированного результата и обсуждается связь между ними. В разделе 3 новый метод демонстрируется на примере классической задачи вычисления максимального гарантированного результата в игре Γ_2 . Следующий раздел посвящен неформальному обсуждению некоторых особенностей метода и полученных результатов. В пятом разделе показано, как модифицируется новое определение и, соответственно, метод для игр с доброжелательным или ограниченно рациональным вторым игроком. Последний раздел посвящен демонстрации того, что новое определение удобно и для исследования устойчивости задачи вычисления максимального гарантированного результата по отношению к изменениям параметров игры.

2. Определения

Рассмотрим конфликт, в котором принимают участие два игрока. Первый из них выбирает свои управления (стратегии) из множества U , второй – из множества V . Интересы первого игрока описываются стремлением к максимизации функции g , отображающей декартово произведение $U \times V$ в множество действительных чисел \mathbf{R} . Второй игрок стремится максимизи-

ровать значение функции $h: U \times V \rightarrow \mathbf{R}$. Таким образом задается игра $\Gamma = \langle U, V, g, h \rangle$.

Результат, полученный в данной ситуации каждым из участников конфликта, зависит не только от его выбора, но и от выбора его партнера. Этот выбор, вообще говоря, может быть неизвестен рассматриваемому игроку в момент принятия решений. Поэтому, чтобы получить замкнутую модель конфликта, нужно задать отношение игроков к такого рода неопределенности. Традиционно это делается заданием принципа оптимальности. В данной статье в качестве такового будет использоваться принцип максимального гарантированного результата. Классическое определение, идущее от Ю.Б. Гермейера, выглядит следующим образом.

Определение 1. *Множество рациональных ответов второго игрока на стратегию $u \in U$ первого определяется равенством*

$$(1) \quad BR_{\kappa}(u) = \left\{ v \in V : h(u, v) = \max_{w \in V} h(u, w) \right\},$$

если максимум в этой формуле достигается, и формулой

$$(2) \quad BR_{\kappa}(u) = \left\{ v \in V : h(u, v) \geq \sup_{w \in V} h(u, w) - \kappa \right\}$$

в противном случае (здесь κ – заранее заданное положительное число). Максимальный гарантированный результат первого игрока в игре Γ равен

$$R_{\kappa}(\Gamma) = \sup_{u \in U} \inf_{v \in BR_{\kappa}(u)} g(u, v).$$

Содержательный смысл этих конструкций таков. Предполагается, что игрок номер 1 первым выбирает свою стратегию $u \in U$ и этот выбор становится известным его партнеру. В этом случае результат второго игрока уже зависит только от его собственного выбора. А поскольку его цель состоит в максимизации функции h , естественно предположить, что он выберет стратегию из множества, определенного формулой (1). Проблема возникает в том случае, когда это множество оказывается пустым из-за того, что максимум не достигается. В этом случае нужна «заплатка». Довольно естественно использовать в таком

качестве формулу (2). Зная функцию выигрыша партнера, первый игрок может просчитать такую логику его действий. Поэтому игрок I может рассчитывать на получение выигрыша, не меньшего $\inf_{v \in BR_v(u)} g(u, v)$ в случае выбора стратегии u . А при оптимальных действиях он может получить выигрыш, сколь угодно близкий к $R_1(\Gamma)$.

Дадим альтернативное определение максимального гарантированного результата. Теперь начнем с мотивации.

Предположим, первый игрок выбрал свою стратегию $u \in U$ и этот выбор стал известен его партнеру. В таком случае второй игрок может разделить все множество своих стратегий на две части: выгодные стратегии и невыгодные. Вполне естественно предположить, что это разделение производится с помощью некоторого порогового значения λ его функции выигрыша: стратегии, для которых выигрыш больше или равен этому пороговому значению, являются выгодными, а все прочие – невыгодными. При такой логике поведения партнера первый игрок может рассчитывать на гарантированное получение выигрыша γ , если для любой выгодной стратегии v второго игрока выполняется неравенство $g(u, v) \geq \gamma$. В данном случае не предполагается возможности отказа второго игрока от игры, поэтому множество его выгодных стратегий при любой стратегии u должно быть непустым.

Таким образом, приходим к следующему определению.

Определение 2. Число γ называется гарантированным результатом первого игрока в игре Γ , если существуют такие стратегия $u \in U$ и число λ , что выполняются условия

1°. Существует стратегия $w \in V$, для которой $h(u, w) \geq \lambda$.

2°. Для любой стратегии $v \in V$ либо $g(u, v) \geq \gamma$, либо $h(u, v) < \lambda$.

Точная верхняя грань $R(\Gamma)$ гарантированных результатов называется максимальным гарантированным результатом первого игрока в игре Γ .

Естественно возникает вопрос о соотношении этих двух определений. Начнем со следующего простого результата.

Лемма 1. Для любой игры Γ и любого числа $\kappa > 0$ справедливо неравенство $R(\Gamma) \geq R_\kappa(\Gamma)$.

Доказательство. Достаточно доказать, что любое число $\gamma < R_\kappa(\Gamma)$ является гарантированным результатом в смысле определения 2. Если последнее неравенство выполнено, то существует стратегия $u \in U$, для которой $\inf_{v \in BR_\kappa(u)} g(u, v) \geq \gamma$.

Фиксируем одну из таких стратегий.

Если эта стратегия такова, что максимум $\max_{w \in V} h(u, w)$ достигается, то положим $\lambda = \max_{w \in V} h(u, w)$. При таком выборе множество тех стратегий v , для которых $h(u, w) \geq \lambda$, будет непустым. Следовательно, пункт 1° определения 2 выполнен. Далее, если $v \in BR_\kappa(u)$, то $g(u, v) \geq \inf_{v \in BR_\kappa(u)} g(u, v) \geq \gamma$. А в противном случае $h(u, w) < \lambda$, т.е. выполняется и второй пункт определения 2.

Если для стратегии u максимум $\max_{w \in V} h(u, w)$ не достигается, то положим $\lambda = \sup_{w \in V} h(u, w) - \kappa$. Тогда для любого $w \in BR_\kappa(u)$ неравенство $h(u, w) \geq \lambda$ будет справедливым, поэтому пункт 1° определения 2 выполнен. И вновь, если $v \in BR_\kappa(u)$, то $g(u, v) \geq \inf_{v \in BR_\kappa(u)} g(u, v) \geq \gamma$, а если $v \notin BR_\kappa(u)$, то $h(u, w) < \lambda$, значит, выполнен и пункт 2°.

Лемма доказана.

Равенство $R(\Gamma) = R_\kappa(\Gamma)$, вообще говоря, неверно, как показывает следующий пример.

Пример 1. Пусть $U = [0, 1]$, $V = (0, 1)$, $g(u, v) = h(u, v) = u - v$.

Для любой стратегии u максимум $\max_{w \in V} h(u, w)$ не достигается, поэтому $BR_\kappa(u) = (0, \kappa]$. Следовательно, $\inf_{v \in BR_\kappa(u)} g(u, v) = u - \kappa$ и $R_\kappa(\Gamma) = 1 - \kappa$.

С другой стороны, при любом $\gamma < 1$, $u = 1$ и $\lambda = \gamma$ множество $\{v \in V: h(u, v) \geq \lambda\}$ не пусто, а при совпадающих интересах игроков и $\lambda = \gamma$ условие 2° определения 2 выполняется автома-

тически. Значит, любое $\gamma < 1$ является гарантированным результатом и $R(\Gamma) = 1$.

В приведенном примере результаты $R(\Gamma)$ и $R_\kappa(\Gamma)$ мало отличаются при небольших значениях κ . Этот факт имеет общую природу, как показывает следующее утверждение.

Лемма 2. *Для любой игры Γ справедливо равенство*

$$R(\Gamma) = \lim_{\kappa \rightarrow 0^+} R_\kappa(\Gamma).$$

Доказательство. Из леммы 1 немедленно следует неравенство $R(\Gamma) \geq \lim_{\kappa \rightarrow 0^+} R_\kappa(\Gamma)$. Чтобы доказать обратное неравенство, заметим, что множество $BR_\kappa(u)$ не может расшириться при уменьшении κ . Поэтому величина $R_\kappa(\Gamma)$ с уменьшением κ может только возрасти. Следовательно, достаточно доказать, что для любого гарантированного (в смысле определения 2) результата γ найдется такое значение κ , что $R_\kappa(\Gamma) \geq \gamma$.

Итак, пусть γ – гарантированный результат, а $u \in U$, $w \in V$ и λ – стратегии и число, существование которых предусмотрено определением 2.

Если стратегия u такова, что максимум $\max_{v \in V} h(u, v)$ достигается, то для любой стратегии $v \in BR_\kappa(u)$ имеем

$$h(u, v) = \max_{v \in V} h(u, v) \geq h(u, w) \geq \lambda,$$

следовательно, $g(u, v) \geq \gamma$. Значит, $\inf_{v \in BR_\kappa(u)} g(u, v) \geq \gamma$, и тем более

$R_\kappa(\Gamma) \geq \gamma$ (независимо от κ).

Если же $\max_{v \in V} h(u, v)$ не достигается, то $\sup_{v \in V} h(u, v) > h(u, w)$.

Положим $\kappa = \sup_{v \in V} h(u, v) - h(u, w)$. Тогда для любой стратегии

$v \in BR(u)$ выполняются условия

$$h(u, v) = \sup_{v \in V} h(u, v) - \kappa \geq h(u, w) \geq \lambda.$$

Поэтому $\inf_{v \in BR_\kappa(u)} g(u, v) \geq \gamma$ и, следовательно, $R_\kappa(\Gamma) \geq \gamma$.

Пример 1 указывает основную причину, по которой $R(\Gamma) > R_\kappa(\Gamma)$. Это в свою очередь позволяет выделить важный

класс «хороших»¹ игр, для которых верно равенство $R(\Gamma) = R_\kappa(\Gamma)$.

Определение 3. *Игру Γ назовем хорошей, если для любой стратегии $\omega \in U$ найдется такая стратегия $u \in U$, что*

$$\inf_{v \in BR_\kappa(u)} g(u, v) \geq \inf_{v \in BR_\kappa(\omega)} g(\omega, v)$$

и максимум $\max_{v \in V} h(u, v)$ достигается.

Хорошими являются, например, игры, у которых множества V наделены топологиями и компактны, и при любой фиксированной стратегии u функция $\varphi(v) = h(u, v)$ непрерывна. Но на самом деле класс хороших игр гораздо шире. Об этом речь пойдет в следующем параграфе. Пока же констатируем следующий простой факт.

Лемма 3. *Для любой хорошей игры Γ и любого $\kappa > 0$ справедливо равенство $R(\Gamma) = R_\kappa(\Gamma)$.*

Доказательство. Фиксируем произвольное $\delta > 0$. Пусть γ – произвольное число, меньшее $R_\delta(\Gamma)$, а стратегия ω такова, что $\inf_{v \in BR_\delta(\omega)} g(\omega, v) > \gamma$. Фиксируем стратегию u , существование которой предусмотрено определением 3. Тогда $\inf_{v \in BR_\delta(u)} g(u, v) > \gamma$.

Но стратегия u выбрана так, что $BR_\delta(u) = BR_\kappa(u)$. Следовательно, $\inf_{v \in BR_\kappa(u)} g(u, v) > \gamma$, а тогда $R_\kappa(\Gamma) \geq \gamma$. Так как γ произвольно, получим неравенство $R_\kappa(\Gamma) \geq R_\delta(\Gamma)$. Значит, $R_\kappa(\Gamma) \geq \lim_{\delta \rightarrow 0+} R_\delta(\Gamma)$. Из

этого неравенства и леммы 2 следует, что $R(\Gamma) \leq R_\kappa(\Gamma)$. А в силу леммы 1 $R(\Gamma) \geq R_\kappa(\Gamma)$, что и доказывает нужное утверждение.

Замечание 1. Практически теми же рассуждениями можно доказать обратное неравенство $R_\kappa(\Gamma) \leq \lim_{\delta \rightarrow 0+} R_\delta(\Gamma)$ (это неравенство можно получить и как непосредственное следствие

¹ Возможно, более уместными были бы термины «регулярная» или «согласованная», но эти и похожие термины уже перегружены другими значениями.

лемм 1 и 2). Таким образом, для хороших игр результат $R_\kappa(\Gamma)$ от κ на самом деле не зависит.

3. Игра Γ_2

Теперь можно продемонстрировать новое определение в действии. Рассмотрим модификацию игры Γ , в которой первый игрок до выбора своего управления получает достоверную информацию об управлении, выбранном партнером. Таким образом, он может выбрать свое управление u в зависимости от выбранного вторым игроком управления v , и стратегиями первого игрока становятся функции $u_*: V \rightarrow U$. Множество всех таких функций обозначим через U_* .

Получим новую игру $\Gamma_* = \langle U_*, V, g_*, h_* \rangle$, в которой функции выигрыша g_* и h_* определяются условиями $g_*(u_*, v) = g(u_*(v), v)$ и $h_*(u_*, v) = h(u_*(v), v)$ соответственно. Прежде всего отметим, что два определения максимального гарантированного результата в этой игре при стандартных предположениях совпадают. Это вытекает из следующего утверждения.

Лемма 4. *Если множества U и V наделены топологиями и компактны, а функции g и h непрерывны на $U \times V$, то игра Γ_* является хорошей.*

Доказательство. Начнем с объяснения основной идеи доказательства. Если стратегия ω_* такова, что верхняя грань $\sup_{v \in V} h_*(\omega_*, v) = \sup_{v \in V} h(\omega(v), v)$ достигается, то все очевидно. Это может быть не так, если функция $\omega_*: V \rightarrow U$ разрывна, и соответственно, разрывной в какой-то точке v_0 будет функция $\varphi(v) = h(\varphi_*(v), v)$. Ее график будет выглядеть, например, как на рис. 1. Множество $BR_\kappa(\omega_*)$ на этом рисунке показано жирной линией. Если мы поменяем значение функции ω_* так, чтобы этот график стал выглядеть как на рис. 2, то интересующая нас верхняя грань будет достигаться в одной точке v_0 , и, соответственно, из одной этой точки будет состоять множество рациональных ответов второго игрока на полученную стратегию. Точка v_0 не принадлежит множеству $BR_\kappa(\omega_*)$, но принадлежит

его замыканию, а поэтому выигрыш первого игрока в этой точке будет достаточно большим. Формальные рассуждения могут выглядеть следующим образом.

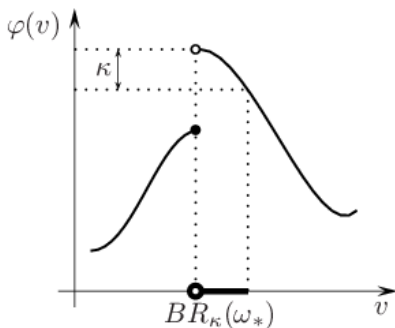


Рис. 1.

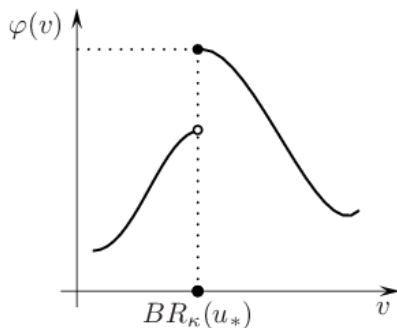


Рис. 2.

Если стратегия ω_* такова, что верхняя грань $\sup_{v \in V} h_*(\omega_*, v)$ достигается, то можно положить $u_* = \omega_*$ и утверждение будет доказано.

В противном случае рассмотрим произвольную последовательность v_1, v_2, \dots , для которой $\lim_{k \rightarrow \infty} h_*(\omega_*, v_k) = \sup_{v \in V} h_*(\omega_*, v)$.

Множество V компактно, следовательно, из этой последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Поэтому, не ограничивая общности, можно считать, что сама эта последовательность сходится к точке v_0 . Поскольку верхняя грань $\sup_{v \in V} h_*(\omega_*, v)$ не достигается, можно считать, что

$v_k \neq v_0$ при $k = 1, 2, \dots$. Последовательность $\omega_*(v_1), \omega_*(v_2), \dots$ принадлежит компактному множеству U , значит, перейдя еще раз к подпоследовательности, можно добиться того, что и последовательность $\omega_*(v_1), \omega_*(v_2), \dots$ будет сходиться к некоторой точке u_0 . Определим функцию u_* условием

$$u_*(v) = \begin{cases} u_0, & \text{если } v = v_0, \\ \omega_*(v) & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

В силу непрерывности функции h

$$\begin{aligned} h_*(u_*, v_0) &= h(u_*(v_0), v_0) = h(u_0, v_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} h(u_*(v_k), v_k) = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} h(\omega_*(v_k), v_k) = \sup_{v \in V} h(\omega_*(v), v). \end{aligned}$$

А при $v \neq v_0$ имеем

$$h_*(u_*, v) = h(u_*(v), v) = h(\omega_*(v), v) < \sup_{v \in V} h(\omega_*(v), v)$$

(поскольку верхняя грань $\sup_{v \in V} h_*(\omega_*, v)$ не достигается).

Поэтому верхняя грань $\sup_{v \in V} h_*(u_*, v)$ достигается в единственной

точке v_0 и, значит, $BR_{\kappa}(u_*) = \{v_0\}$.

Тогда в силу непрерывности функции g

$$\begin{aligned} \inf_{v \in BR_{\kappa}(u_*)} g_*(u_*, v) &= g(u_*(v_0), v_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} g(u_*(v_k), v_k) = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} g(\omega_*(v_k), v_k). \end{aligned}$$

Но поскольку верхняя грань $\sup_{v \in V} h_*(\omega_*, v)$ не достигается и

$\lim_{k \rightarrow \infty} h_*(\omega_*, v_k) = \sup_{v \in V} h_*(\omega_*, v)$, для достаточно больших значений k

имеем $v_k \in BR_{\kappa}(\omega_*)$. Следовательно, для этих значений k выполняются неравенства $g(\omega_*(v_k), v_k) \geq \inf_{v \in BR_{\kappa}(\omega_*)} g_*(\omega_*, v)$ а, значит,

верно неравенство $\lim_{k \rightarrow \infty} g(\omega_*(v_k), v_k) \geq \inf_{v \in BR_{\kappa}(\omega_*)} g_*(\omega_*, v)$. Итак,

$$\inf_{v \in BR_{\kappa}(u_*)} g_*(u_*, v) \geq \inf_{v \in BR_{\kappa}(\omega_*)} g_*(\omega_*, v).$$

Лемма доказана.

Теперь можно продемонстрировать эффективность нового определения.

По определению число γ является гарантированным результатом первого игрока в игре Γ^* , если

$$(3) \quad \begin{aligned} &\exists u_* \in U_* \exists \lambda [\exists w \in V : h_*(u_*, w) \geq \lambda] \& \\ &\& [\forall v \in V g_*(u_*, v) \geq \gamma \vee h_*(u_*, v) < \lambda]. \end{aligned}$$

В этом условии фигурирует функциональное пространство U_* . Ближайшая цель состоит в том, чтобы переформулировать это условие в терминах исходной игры Γ .

Условие (3) равносильно условию

$$(4) \quad \begin{aligned} & \exists u_* \in U_* \exists \lambda [\exists w \in V : h_*(u_*, w) \geq \lambda \ \& \ g_*(u_*, w) \geq \gamma] \ \& \\ & \ \& [\forall v \in V \ g_*(u_*, v) \geq \gamma \vee h_*(u_*, v) < \lambda]. \end{aligned}$$

В самом деле, достаточность условия (4) для выполнения условия (3) очевидна. Необходимость следует из того, что для управления w , существование которого предусмотрена первой частью условия (3), в силу второй части того же условия должно выполняться неравенство $h_*(u_*, w) \geq \gamma$.

В условии (4) поменяем порядок кванторов существования

$$\begin{aligned} & \exists \lambda \exists u_* \in U_* [\exists w \in V : h_*(u_*, w) \geq \lambda \ \& \ g_*(u_*, w) \geq \gamma] \ \& \\ & \ \& [\forall v \in V \ g_*(u_*, v) \geq \gamma \vee h_*(u_*, v) < \lambda] \end{aligned}$$

и перепишем его в виде

$$(5) \quad \begin{aligned} & \exists \lambda [\exists \omega_* \in U_* \exists w \in V : h_*(\omega_*, w) \geq \lambda \ \& \ g_*(\omega_*, w) \geq \gamma] \ \& \\ & \ \& [\exists \varpi_* \in U_* \forall v \in V \ g_*(\varpi_*, v) \geq \gamma \vee h_*(\varpi_*, v) < \lambda] \end{aligned}$$

(здесь важно «разделить» один квантор существования на два).

Условие (5) равносильно условию (4). В самом деле, необходимость условия (5) для выполнения условия (4) очевидна. Для доказательства достаточности придется использовать функциональную структуру множества U_* . Если функции ω_* и ϖ_* удовлетворяют условию

$$\begin{aligned} & [\exists \omega_* \in U_* \exists w \in V : h_*(\omega_*, w) \geq \lambda \ \& \ g_*(\omega_*, w) \geq \gamma] \ \& \\ & \ \& [\exists \varpi_* \in U_* \forall v \in V \ g_*(\varpi_*, v) \geq \gamma \vee h_*(\varpi_*, v) < \lambda], \end{aligned}$$

то функция

$$u_*(v) = \begin{cases} \omega_*(v), & \text{если } g_*(\omega_*(v), v) \geq \gamma, \\ \varpi_*(v) & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

удовлетворяет условию

$$\begin{aligned} & \exists u_* \in U_* [\exists w \in V : h_*(u_*, w) \geq \lambda \ \& \ g_*(u_*, w) \geq \gamma] \ \& \\ & \ \& [\forall v \in V \ g_*(u_*, v) \geq \gamma \vee h_*(u_*, v) < \lambda]. \end{aligned}$$

Теперь можно приступить к упрощению формулы (5).

Условие

$$\exists \omega_* \in U_* \exists w \in V : h_*(\omega_*, w) \geq \lambda \ \& \ g_*(\omega_*, w) \geq \gamma$$

или

$$\exists \omega_* \in U_* \exists w \in V : h(\omega_*(w), w) \geq \lambda \ \& \ g(\omega_*(w), w) \geq \gamma ,$$

очевидно, эквивалентно условию

$$\exists \omega \in U \exists w \in V : h(\omega, w) \geq \lambda \ \& \ g(\omega, w) \geq \gamma .$$

А условие

$$\exists \varpi_* \in U_* \forall v \in V \ g_*(\varpi_*, v) \geq \gamma \vee h_*(\varpi_*, v) < \lambda$$

или, что то же самое,

$$\exists \varpi_* \in U_* \forall v \in V \ g(\varpi_*(v), v) \geq \gamma \vee h(\varpi_*(v), v) < \lambda ,$$

равносильно условию¹

$$\forall v \in V \exists \varpi \in U \ g(\varpi, v) \geq \gamma \vee h(\varpi, v) < \lambda .$$

Таким образом, условие (5) может быть заменено условием

$$\begin{aligned} & \exists \lambda [\exists \omega \in U \exists w \in V : h(\omega, w) \geq \lambda \ \& \ g(\omega, w) \geq \gamma] \ \& \\ & \ \& [\forall v \in V \exists \varpi \in U \ g(\varpi, v) \geq \gamma \vee h(\varpi, v) < \lambda] , \end{aligned}$$

или более простым условием

$$(6) \quad \begin{aligned} & \exists \lambda [\exists \omega \in U \exists w \in V : h(\omega, w) \geq \lambda] \ \& \\ & \ \& [\forall v \in V \exists \varpi \in U \ g(\varpi, v) \geq \gamma \vee h(\varpi, v) < \lambda] . \end{aligned}$$

Итак, справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Число γ является гарантированным результатом в игре Γ_* тогда и только тогда, когда выполнено условие (6).*

Основная цель достигнута. Можно переписать полученный результат в более привычных терминах, заменив кванторы общности и существования операторами максимума и минимума.

Теорема 2. *Пусть множества U и V наделены топологиями и компактны, а функции g и h непрерывны на $U \times V$. Обозначим*

¹ Это центральный момент доказательства теоремы 1. Именно здесь мы избавляемся от функционального пространства U_* . Данный прием появился в теории игр, пожалуй, первым (еще до работ фон Неймана). Но до сих пор он эффективно работает.

$$\Lambda(\gamma) = \left\{ v \in V : \max_{u \in U} g(u, v) < \gamma \right\},$$

$$\Delta(\gamma) = \left\{ (u, v) \in U \times V : g(u, v) \geq \gamma \right\}.$$

Число γ является максимальным гарантированным результатом в игре Γ_* тогда и только тогда, когда либо

$$\max_{(u, v) \in \Delta(\gamma)} h(u, v) > \sup_{v \in \Lambda(\gamma)} \inf_{u \in U} h(u, v),$$

либо

$$\max_{(u, v) \in \Delta(\gamma)} h(u, v) = \sup_{v \in \Lambda(\gamma)} \inf_{u \in U} h(u, v)$$

и верхняя грань в правой части этого равенства не достигается.

Доказательство. Докажем достаточность. Можно взять $\lambda = \max_{(u, v) \in \Delta(\gamma)} h(u, v)$ и в качестве ω и w – одну из точек максимума в последней формуле. Тогда первая часть условия (6) будет выполнена. Кроме того, для $v \in \Lambda(\gamma)$ будем иметь $\inf_{u \in U} h(u, v) < \lambda$, значит, найдется u , для которого $h(u, v) < \lambda$. А для $v \notin \Lambda(\gamma)$ выполнено неравенство $\max_{u \in U} g(u, v) \geq \gamma$, следовательно, найдется такое u , что $g(u, v) \geq \gamma$. Таким образом, выполнена и вторая часть условия (6).

Для доказательства необходимости заметим, что условие

$$\forall v \in V \exists \varpi \in U \quad g(\varpi, v) \geq \gamma \vee h(\varpi, v) < \lambda$$

выполнить тем легче, чем больше λ . Единственным препятствием для увеличения λ является условие

$$\exists \omega \in U \exists w \in V : h(\omega, w) \geq \lambda.$$

Поэтому, не ограничивая общности, можно считать, что $\lambda = \max_{(u, v) \in \Delta(\gamma)} h(u, v)$, а тогда заключение теоремы немедленно следует из условия (6).

Впрочем, из теоремы 1 нетрудно получить и классическую формулу для максимального гарантированного результата в игре Γ_2 . Будем считать, что множества U и V наделены топологиями и компактны, а функции g и h непрерывны на $U \times V$.

Пусть γ – гарантированный результат. Фиксируем λ так, чтобы выполнялось условие

$$(7) \quad \left[\exists \omega \in U \exists w \in V : h(\omega, w) \geq \lambda \ \& \ g(\omega, w) \geq \gamma \right] \ \& \\ \& \left[\forall v \in V \exists \varpi \in U \ g(\varpi, v) \geq \gamma \vee h(\varpi, v) < \lambda \right].$$

Как уже отмечалось, можно считать, что точки ω и w выбраны так, что $h(\omega, w) = \max_{(u,v) \in \Delta(\gamma)} h(u, v)$. А в таком случае, не ограничивая общности, можно считать, что $\lambda = h(\omega, w)$. Но в таком случае $\lambda \leq L$, где

$$L = \max_{v \in V} \min_{u \in U} h(u, v).$$

В самом деле, для любого $v \in V$ найдется $u \in U$, для которого $h(u, v) \leq \lambda$ (для $v \in \Delta(\gamma)$ это следует из второй части условия (7), а для остальных v из соглашения о выборе λ). Но это и есть нужное утверждение.

Если $\lambda = L$, то для любого v из множества

$$E = \left\{ v \in V : \min_{u \in U} h(u, v) = \max_{w \in V} \min_{u \in U} h(u, w) \right\}$$

и любого $u \in U$ выполнено неравенство $h(u, v) \geq \lambda$, а потому в силу условия (7) для любого $v \in E$ должно существовать $u \in U$, для которого $g(u, v) \geq \gamma$, т.е. γ не превосходит величины

$$M = \min_{v \in E} \max_{u \in U} g(u, v).$$

Обратно, если $\gamma \leq M$, то γ – гарантированный результат, поскольку для $v \in E$ найдется $u \in U$, для которого $g(u, v) \geq M \geq \gamma$, а для $v \notin E$ существует такое $u \in U$, что $h(u, v) < L = \lambda$.

Если же $\lambda > L$, то автоматически выполняется условие

$$\forall v \in V \exists u \in U : h(u, v) < \lambda.$$

Поэтому единственным ограничением на величину γ будет условие

$$\exists \omega \in U \exists w \in V : h(\omega, w) \geq \lambda \ \& \ g(\omega, w) \geq \gamma.$$

Следовательно, любое число γ , меньшее чем

$$\sup_{\lambda > L} \max_{(\omega, w) \in D(\lambda)} g(\omega, w)$$

где

$$D(\lambda) = \{(\omega, w) \in U \times V : h(\omega, w) \geq \lambda\}.$$

Но если обозначить

$$D = \{(\omega, w) \in U \times V: h(\omega, w) > L\},$$

то

$$\sup_{\lambda > L} \max_{(\omega, w) \in D(\lambda)} g(\omega, w) = \sup_{(\omega, w) \in D} g(\omega, w) = K.$$

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Теорема 3 (Ю.Б. Гермейер). *Если множества U и V наделены топологиями и компактны, а функции g и h непрерывны на $U \times V$, то $R(\Gamma^*) = \max\{K, M\}$.*

4. Неформальное обсуждение полученных результатов

Приведем еще несколько аргументов в пользу нового определения максимального гарантированного результата.

Обычно исследование иерархической игры проводится в интересах игрока, обладающего правом первого хода. Таким образом, функция выигрыша второго игрока h отражает представления оперирующей стороны о целях партнера. Максимальный гарантированный результат в смысле определения 2 не меняется при любом монотонном преобразовании функции h , т.е. эта функция задает лишь порядок на множестве $U \times V$, описывающий предпочтения второго игрока. Если пользоваться определением 1, то величина κ вводит уже некоторую количественную меру на «шкале ценностей» второго игрока, т.е. в данном случае необходимо предполагать гораздо лучшую информированность оперирующей стороны о противнике.

Попробуем выписать определение гарантированного результата в смысле определения 1 «в кванторах». Число γ является гарантированным результатом тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$\begin{aligned} \exists u \in U: \{[\exists v \in V: \forall w \in V h(u, v) \geq h(u, w)] \Rightarrow \\ \Rightarrow [\forall v \in V g(u, v) < \gamma \Rightarrow \exists w \in V: h(u, w) \geq h(u, v)] \& \\ \& [\forall v \in V: \exists w \in V h(u, v) < h(u, w)] \Rightarrow \\ \Rightarrow [\forall v \in V g(u, v) < \gamma \Rightarrow \exists w \in V: h(u, w) > h(u, v) + \kappa]\}. \end{aligned}$$

Эта формула гораздо сложнее формулы (3). Если измерять сложность формулы количеством использованных кванторов, то сложность увеличивается более чем вдвое. В значительной степени с этим и связана бóльшая эффективность определения 2 при исследовании сложных задач.

Наконец, чисто эстетически «заплата» в определении множества $BR_{\kappa}(u)$ выглядит не слишком привлекательно, а красота при построении теории – не последнее дело.

Из леммы 3, в частности, следует, что если множество V конечно, то два определения максимального гарантированного результата совпадают. Предположение о бесконечности множества V – это, конечно же, идеализация. Но во многих случаях замена большого конечного множества континуумом бывает очень удобна. В этой связи стоит отметить следующее. Если два определения дают разные результаты, то выбор одного из них должен решаться в каждом случае на основе анализа моделируемой системы. Но нужно понимать, что вопрос о предпочтительности одного из определений, это вопрос о том, какое из определений лучше согласуется с идеализацией бесконечности.

К этому добавим еще, что различие двух определений свидетельствует о том, что получившаяся задача не устойчива по отношению к аппроксимации конечными сетками. А потому постановка задачи требует существенного уточнения.

Обратимся к анализу полученных результатов.

Если γ является гарантированным результатом в игре Γ_* , то анализ формулы (6) позволяет построить стратегию, гарантирующую получение такого результата. Для простоты¹ предположим, что множества U и V наделены топологиями и компактны, а функции g и h непрерывны на $U \times V$.

Определим стратегии u_*^+ и u_*^- условиями

$$g(u_*^+(v), v) = \max_{w \in U} g(w, v), \quad h(u_*^-(v), v) = \min_{w \in U} h(w, v)$$

(для любого $v \in V$). Тогда непосредственно проверяется, что искомой является стратегия

¹ В данном случае это действительно не принципиально.

$$u_*^0(v) = \begin{cases} u_*^+(v), & \text{если } g(u_*^+(v), v) \geq \gamma, \\ u_*^-(v) & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Стратегию u_*^- можно естественным образом интерпретировать как стратегию наказания второго игрока. Ее появление в структуре оптимальной стратегии естественным образом объясняется наличием квантора общности в сочетании с неравенством «<» в формуле (6). А они, в свою очередь, присутствуют уже в определении 2, т.е. появление «наказания» в данном случае немедленно вытекает из постановки задачи.

Отметим, что такая структура оптимальной стратегии была изначально *угадана* Ю.Б. Гермейером. Справедливости ради отметим, что его стратегия была даже более «кровожадной», чем построенная только что.

Наконец, отметим, что классическая теорема 3 и теорема 1 предполагают два разных подхода к численному поиску максимального гарантированного результата в игре Γ_* . Теорема 3 предполагает вычисление относительно простого максимина L , решение оптимизационной задачи, и, самое главное, вычисление минимакса M со сложно определяемым множеством E . Если же исходить из теоремы 1, то нужно найти корень функции, для вычисления одного значения которой необходимо решить задачу оптимизации и потом вычислить максимин на множестве $U \times V$. Какой из подходов проще, наверное, зависит от конкретной задачи. Но наличие двух подходов само по себе приятно.

Сказанное в предыдущем абзаце даже в еще большей степени относится к вычислению максимального гарантированного результата в игре Γ , не наделенной дополнительной структурой информационного расширения.

5. Другие определения

Часто рассматривают игры с доброжелательным вторым игроком, т.е. считают, что, принимая свое решение, второй игрок стремится максимизировать собственный выигрыш, а если вариантов получить максимальный выигрыш несколько, то будет выбран тот, который более выгоден первому игроку.

Классическое определение максимального гарантированного результата в этом случае дает величину

$$(8) \quad R'(\Gamma) = \sup_{u \in U} \sup_{v \in BR(u)} g(u, v),$$

где множество $BR(u)$ задается условием

$$(9) \quad BR(u) = \left\{ v \in V : h(u, v) = \max_{w \in V} h(u, w) \right\}.$$

Во многих случаях предположение о доброжелательности упрощает рассматриваемую задачу, но есть и подводные камни.

Во-первых, предположение о доброжелательности – это дополнительная гипотеза, которую на практике проверить достаточно сложно. Поэтому ее широкое применение за пределами чисто академических исследований вызывает вопросы. Подробнее обсуждать эту проблему вряд ли стоит.

Во-вторых, вновь возникает вопрос: а что делать, если максимум в формуле (9) не достигается? И в данном случае, как ни странно, проблема оказывается более острой, чем в рассмотренном выше. Дело в следующем. Из рассуждений двух предыдущих параграфов видно, что при отсутствии гипотезы о доброжелательности в большинстве интересных игр среди оптимальных стратегий первого игрока непременно найдется такая, что максимум в формуле (1) достигается. Поэтому «заплата», даваемая формулой (2), делает постановку задачи логически корректной, но ничего не меняет по существу. В предположении доброжелательности второго игрока это не так. Если мы дополним определение аналогичным образом, то в такой модели первому игроку будет выгодно выбирать стратегию, так, чтобы максимум в формуле (9) не достигался. В этом случае максимальный гарантированный результат будет существенно зависеть от «порога чувствительности» второго игрока, что приведет к усложнению решаемой задачи и т.д.

Альтернативный вариант определения снимает вторую из указанных проблем. Выглядит он так.

Определение 4. Число γ называется гарантированным результатом первого игрока в игре Γ с доброжелательным вторым игроком, если существуют такие стратегия $u \in U$ и число λ , что выполняются условия

1°. Существует стратегия $w \in V$, для которой $h(u, w) \geq \lambda$ и $g(u, v) \geq \gamma$.

2°. Для любой стратегии $v \in V$ либо $g(u, v) \geq \gamma$, либо $h(u, v) \leq \lambda$.

Точная верхняя грань $R(\Gamma)$ гарантированных результатов называется максимальным гарантированным результатом первого игрока в игре Γ с доброжелательным вторым игроком.

Если игра такова, что при любой стратегии u максимум в формуле (9) достигается, то формула (8) дает выражение для максимального гарантированного результата в смысле определения 4.

Определение 4 отличается от определения 2 лишь заменой знака «<» знаком « \leq » в пункте 2°. Поэтому и работать с новым определением можно практически так же. Например, аналоги теорем 1–3 выглядят следующим образом.

Теорема 4. Число γ является гарантированным результатом в игре Γ_* тогда и только тогда, когда выполнено условие

$$\exists \lambda [\exists \omega \in U \exists w \in V : h(\omega, w) \geq \lambda \ \& \ g(\omega, w) \geq \gamma] \ \& \\ \& [\forall v \in V \exists \varpi \in U \ g(\varpi, v) \geq \gamma \vee h(\varpi, v) \leq \lambda].$$

Теорема 5. Пусть множества U и V наделены топологиями и компактны, а функции g и h непрерывны на $U \times V$. Обозначим

$$\Lambda(\gamma) = \left\{ v \in V : \max_{u \in U} g(u, v) < \gamma \right\},$$

$$\Delta(\gamma) = \{ (u, v) \in U \times V : g(u, v) \geq \gamma \}.$$

Число γ является максимальным гарантированным результатом в игре Γ_* тогда и только тогда, когда

$$\max_{(u, v) \in \Delta(\gamma)} h(u, v) \geq \sup_{v \in \Lambda(\gamma)} \inf_{u \in U} h(u, v).$$

Теорема 6. Если множества U и V наделены топологиями и компактны, а функции g и h непрерывны на $U \times V$, то максимальный гарантированный результат первого игрока в игре Γ с доброжелательным вторым игроком равен

$$\max_{(u, v) \in D} g(u, v),$$

где

$$D' = \{(\omega, w) \in U \times V : h(\omega, w) \geq L\},$$

$$L = \max_{v \in V} \min_{u \in U} h(u, v).$$

Доказательство теоремы 4 практически дословно повторяет доказательство теоремы 1. Доказательства теорем 5 и 6 следуют схемам доказательства теорем 2 и 3 соответственно, с некоторыми упрощениями.

Еще один вариант модели возникает, когда предполагают второго игрока ограниченно рациональным, т.е. считают, что он может пойти на небольшие потери своего выигрыша, не считая их принципиальными. По-видимому, во многих случаях такое предположение даже лучше описывает реальность, чем предположение абсолютной рациональности, сделанное в параграфе 2. Классический вариант определения в этом случае выглядит следующим образом.

Определение 5. *Максимальный гарантированный результат первого игрока в игре с ограниченно рациональным игроком нижнего уровня равен*

$$R^{\kappa}(\Gamma) = \sup_{u \in U} \inf_{v \in BR_{\kappa}(u)} g(u, v),$$

где множество рациональных ответов второго игрока определяется равенством

$$BR_{\kappa}(u) = \left\{ v \in V : h(u, v) \geq \sup_{w \in V} h(u, w) - \kappa \right\},$$

а κ – заданное положительное число.

Альтернативное определение может быть сформулировано следующим образом.

Определение 6. *Число γ называется гарантированным результатом первого игрока в игре в игре с ограниченно рациональным игроком нижнего уровня Γ , если существуют такие стратегия $u \in U$ и число λ , что выполняются условия*

1°. *Существует стратегия $w \in V$, для которой $h(u, w) \geq \lambda$;*

2°. *Для любой стратегии $v \in V$ либо $g(u, v) \geq \gamma$, либо $h(u, v) < \lambda - \kappa$.*

Точная верхняя грань $R^{\kappa}(\Gamma)$ гарантированных результатов называется максимальным гарантированным результатом

первого игрока в игре в игре с ограниченно рациональным игроком нижнего уровня.

В данном случае эти два определяют одно и то же число $R^K(\Gamma)$ для произвольной игры Γ . Доказательство в целом повторяет доказательства лемм 1 и 3.

Аналогами теорем 1–2 являются следующие утверждения.

Теорема 7. Число γ является гарантированным результатом в игре с ограниченно рациональным игроком нижнего уровня Γ_* тогда и только тогда, когда выполнено условие

$$\exists \lambda [\exists \omega \in U \exists w \in V : h(\omega, w) \geq \lambda] \& \\ \& [\forall v \in V \exists \varpi \in U : g(\varpi, v) \geq \gamma \vee h(\varpi, v) < \lambda - \kappa].$$

Теорема 8. Пусть множества U и V наделены топологиями и компактны, а функции g и h непрерывны на $U \times V$. Обозначим

$$\Lambda(\gamma) = \left\{ v \in V : \max_{u \in U} g(u, v) < \gamma \right\},$$

$$\Delta(\gamma) = \left\{ (u, v) \in U \times V : g(u, v) \geq \gamma \right\}.$$

Число γ является максимальным гарантированным результатом в игре с ограниченно рациональным игроком нижнего уровня Γ_* тогда и только тогда, когда либо

$$\max_{(u, v) \in \Delta(\gamma)} h(u, v) > \sup_{v \in \Lambda(\gamma)} \inf_{u \in U} h(u, v) + \kappa,$$

либо

$$\max_{(u, v) \in \Delta(\gamma)} h(u, v) = \sup_{v \in \Lambda(\gamma)} \inf_{u \in U} h(u, v) + \kappa$$

и верхняя грань в правой части этого равенства не достигается.

Аналог теоремы 3 тоже может быть сформулирован [14], правда, выглядит он заметно сложнее. Поэтому в данном случае больше оснований предпочесть теорему 8 теореме из [14].

6. Устойчивость и регуляризация

При исследовании любой модели встает вопрос об устойчивости решения задачи по отношению к изменениям параметров модели. В данном параграфе будет показано, как новое

определение максимального гарантированного результата работает при анализе устойчивости по отношению к изменениям функции выигрыша второго игрока. Такой выбор постановки обусловлен, во-первых, тем, что такая задача нетривиальна, но и не приводит к слишком сложным формулам. Во-вторых, обычно исследование иерархических игр обычно производится в интересах игрока, обладающего правом первого хода. А в таком случае интересы партнера – это элемент модели, известный исследователю операции хуже всего.

В общем случае задача вычисления максимального гарантированного результата неустойчива, что показывает следующий пример.

Пример 2. Рассмотрим игру $\Gamma = \langle U, V, g, h \rangle$, в которой $U = V = [0, 1]$, $g(u, v) = v$, $h(u, v) = u$.

В этой игре второму игроку безразлично, какую стратегию выбрать. Поэтому в наихудшем для первого игрока случае он выберет $v = 0$, следовательно, $R(\Gamma) = 0$.

Рассмотрим «возмущенную» игру $\Gamma^\varepsilon = \langle U, V, g, h^\varepsilon \rangle$, где $h^\varepsilon(u, v) = u + \varepsilon v$. Если $\varepsilon > 0$, то при любой стратегии v второму игроку выгодно выбирать $v = 1$, значит, $R(\Gamma^\varepsilon) = 1$.

Таким образом, при сколь угодно малом положительном ε разница между $R(\Gamma)$ и $R(\Gamma^\varepsilon)$ остается большой.

На самом деле, данный простой пример демонстрирует типичную причину появления неустойчивости в рассматриваемой задаче.

Для постановки задачи в общем случае нужна мера близости игр с разными критериями второго игрока. Будем использовать в качестве такой меры величину

$$\rho(\Gamma, \Gamma') = \sup_{(u, v) \in U \times V} |h(u, v) - f(u, v)|,$$

где $\Gamma = \langle U, V, g, h \rangle$, $\Gamma' = \langle U, V, g, f \rangle$.

Предположим, исследователю операции не известна «точная» модель Γ , а известно лишь, что построенная им модель Γ' мало отличается от Γ . Тогда возникает необходимость в получении оценки величины $R(\Gamma)$ в терминах параметров модели Γ' .

Рассмотренные выше конструкции подсказывают нижнюю оценку.

Лемма 5. Если $\rho(\Gamma, \Gamma') \leq \varepsilon$, то $R^{2\varepsilon}(\Gamma') \leq R(\Gamma)$.

Доказательство. Пусть γ – произвольное число, меньшее $R^{2\varepsilon}(\Gamma')$. Фиксируем стратегию u и число λ , существование которых предусмотрено определением 6. Тогда

$$[\exists w \in V: f(u, w) \geq \lambda] \ \& \ [\forall v \in V: g(u, v) \geq \gamma \vee f(u, v) < \lambda - 2\varepsilon].$$

В силу условия $\rho(\Gamma, \Gamma') \leq \varepsilon$ справедливы неравенства $h(u, w) \geq f(u, w) - \varepsilon$ и $h(u, v) \leq f(u, v) + \varepsilon$. Поэтому выполняется условие

$$[\exists w \in V: h(u, w) \geq \lambda'] \ \& \ [\forall v \in V: g(u, v) \geq \gamma \vee h(u, v) < \lambda'],$$

где $\lambda' = \lambda - \varepsilon$.

Непосредственно в силу определения 2 отсюда следует, что γ – гарантированный результат в игре Γ и, значит, $R(\Gamma) \geq \gamma$. В силу произвольности γ отсюда получается нужная оценка. Лемма доказана.

Полученная оценка является неулучшаемой. Чтобы избежать излишних технических деталей, докажем это при некотором дополнительном предположении. А именно, будем считать, что игра Γ' такова, что множество

$$\{(x, y) \mid \exists (u, v) \in U \times V: x = g(u, v), y = f(u, v)\}$$

компактно.

Заметим, что если в игре Γ' множества U и V наделены топологиями и компактны, а функции g и f непрерывны на $U \times V$, то и сама игра Γ' , и любое ее квазиинформационное расширение удовлетворяют сформулированному условию.

Пусть число γ является гарантированным результатом для любой игры Γ , удовлетворяющей условию $\rho(\Gamma, \Gamma') \leq \varepsilon$. Покажем, что тогда $\gamma \leq R^{2\varepsilon}(\Gamma')$.

Итак, фиксируем число γ , удовлетворяющее сформулированному условию. Пусть $\Delta(\gamma) = \{(u, v) \in U \times V: g(u, v) \geq \gamma\}$ и

$$\lambda^0 = \max_{(u, v) \in \Delta(\gamma)} f(u, v)$$

(максимум достигается в силу сделанного предположения об игре Γ'). Рассмотрим игру $\Gamma = \langle U, V, g, h \rangle$, в которой

$$h(u, v) = \begin{cases} \min\{f(u, v) - \varepsilon, \lambda^0 - \varepsilon\}, & \text{если } f(u, v) \geq \lambda^0 - \varepsilon, \\ \max\{f(u, v) + \varepsilon, \lambda^0 - \varepsilon\} & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Очевидно, тогда $\rho(\Gamma, \Gamma') \leq \varepsilon$. Поэтому γ является гарантированным результатом в игре Γ .

Следовательно, найдутся стратегия u и число λ , для которых выполняется условие

$$(10) [\exists w \in V: h(u, w) \geq \lambda] \& [\forall v \in V g(u, v) \geq \gamma \vee h(u, v) < \lambda].$$

В этой формуле должно быть $\lambda \leq \lambda^0 - \varepsilon$. В самом деле, если $\lambda > \lambda^0 - \varepsilon$, то $h(u, w) \geq \lambda > \lambda^0 - \varepsilon$, а тогда $f(u, w) > \lambda^0$ и, в силу выбора числа λ^0 , имеем $g(u, w) < \gamma$. Следовательно, условие $g(u, w) \geq \gamma \vee h(u, w) < \lambda$ неверно, что противоречит условию (10).

Но тогда не ограничивая общности можно считать, что $\lambda = \lambda^0 - \varepsilon$. Действительно, при таком выборе λ первая часть условия (10) выполняется в точке максимума функции $f(u, v)$ на множестве $\Delta(\Gamma)$, а вторая часть условия (10) выполняется при этом значении λ , если она выполняется при каком-то значении $\lambda \leq \lambda^0 - \varepsilon$.

Но при таком выборе λ из условия (10) и способа построения функции h следует, что

$$[\exists w \in V: f(u, w) \geq \lambda^0] \& [\forall v \in V g(u, v) \geq \gamma \vee f(u, v) < \lambda^0 - 2\varepsilon].$$

Следовательно, $\gamma \leq R^{2\varepsilon}(\Gamma')$, что и требовалось доказать.

Эти результаты получены в самом общем виде. Если игра наделена какой-то дополнительной структурой, то и результат может быть детализирован. Например, если мы рассматриваем задачу вычисления максимального гарантированного результата в информационном расширении Γ^* игры Γ , то лемма 5 в сочетании с теоремой 7 или 8 дают «конечномерную» регуляризующую оценку для $R(\Gamma^*)$. При традиционном подходе соответствующую задачу приходилось решать отдельно.

Верхняя регуляризующая оценка, видимо, представляет меньший практический интерес. Но и она может быть получена аналогично нижней оценке.

Пусть число $R^{*\kappa}(\Gamma)$ – точная верхняя грань чисел γ , для которых существуют такие стратегия $u \in U$ и число λ , что выполняются условия

1°. Существует стратегия $w \in V$, для которой $h(u, w) \geq \lambda$;

2°. Для любой стратегии $v \in V$ либо $g(u, v) \geq \gamma$, либо $h(u, v) < \lambda + \kappa$.

Справедлива

Лемма 6. Если $\rho(\Gamma, \Gamma') \leq \varepsilon$, то $R^{*\varepsilon}(\Gamma') \geq R(\Gamma)$.

Доказательство этой леммы мало отличается от доказательства леммы 5.

Содержательную интерпретацию величины $R^{*\kappa}(\Gamma)$ придумать не удастся, но работать с ней можно так же, как с величиной $R^\kappa(\Gamma)$. Например, для вычисления величины $R^{*\kappa}(\Gamma_*)$ можно доказать аналоги теорем 7 и 8, причем доказательства аналогов повторяют доказательства этих теорем практически дословно.

Оценка леммы 6 тоже не улучшаема. Доказательство этого факта в целом следует доказательству неувлучшаемости нижней оценки, но в данном случае удобно использовать следующую конструкцию:

$$(11) \quad h(u, v) = \begin{cases} f(u, v) + \varepsilon, & \text{если } g(u, v) \geq \gamma, \\ f(u, v) - \varepsilon & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Эта конструкция делает доказательство даже проще. Но здесь есть одна тонкость. Рассматриваемые игры могут удовлетворять некоторым топологическим условиям. Например, множества U и V могут быть наделены такими топологиями, что U и V компактны, а функции g и h непрерывны на $U \times V$. Или игра является информационным расширением другой игры, которая обладает таким топологическим свойством. Конструкция формулы (11), очевидно, нарушает это свойство. Поэтому если такое топологическое свойство следует из природы моделируемого конфликта, придется повозиться со «сглаживанием» формулы (11). Впрочем, эти детали выходят за рамки данной статьи.

7. Заключение

В настоящее время нет точного определения термина «теория иерархических игр». Но значительная часть результатов, традиционно относящихся к этой области науки, имеет следу-

ющий вид. Имеется игра Γ и ее информационное расширение $\Gamma_{\#}$. Тем или иным способом задается понятие оптимального решения игры $\Gamma_{\#}$, а затем оно описывается в терминах более простой игры Γ . Возникло понимание того, что соответствующую часть теории можно рассматривать как прикладной раздел исчисления предикатов. Относительно решений типа равновесия по Нэшу это стало ясно довольно давно [5]. Теперь стало понятно, что то же относится и к вычислению максимального гарантированного результата.

Возможно, такой способ построения теории является более предпочтительным, чем традиционный. И уж во всяком случае наличие двух способов будет полезно.

Литература

1. БУРКОВ В.Н. *Основы математической теории активных систем.* – М.: Наука, 1977. – 255 с.
2. БУРКОВ В.Н., НОВИКОВ Д.А. *Теория активных систем: состояние и перспективы.* – М.: Синтег, 1999. – 128 с.
3. ГЕРМЕЙЕР Ю.Б. *Об играх двух лиц с фиксированной последовательностью ходов // ДАН.* – 1971. – Т. 198, №5. – С. 1001–1004.
4. ГЕРМЕЙЕР Ю.Б. *Игры с противоположными интересами.* – М.: Наука, 1976. – 327 с.
5. ГОРЕЛИК В.А., ГОРЕЛОВ М.А., КОНОНЕНКО А.Ф. *Анализ конфликтных ситуаций в системах управления.* – М.: Радио и связь, 1991. – 288 с.
6. ГОРЕЛОВ М.А. *Максимальный гарантированный результат при ограниченном объеме передаваемой информации // Автоматика и телемеханика.* – 2011. – №3. – С. 124–144.
7. ГОРЕЛОВ М.А. *Игра с ошибками при передаче информации // Автоматика и телемеханика.* – 2012. – №12. – С. 137–152.
8. ГОРЕЛОВ М.А. *Игры с обменом недостоверной информацией // Управление большими системами.* – 2013. – Вып. 41. – С. 5–27.

9. ГОРЕЛОВ М.А. *Игры с дорогими информационными обменами* // Управление большими системами. – 2014. – Вып. 49. – С. 37–56.
10. ГОРЕЛОВ М.А. *Игры со случайными ошибками при передаче информации* // Автоматика и телемеханика. – 2015. – №12. – С. 135–153.
11. ГОРЕЛОВ М.А. *Иерархические игры с неопределенными факторами* // Управление большими системами. – 2016. – Вып. 59. – С. 6–22.
12. ГОРЕЛОВ М.А. *Иерархическая игра с умышленно искажаемой информацией* // Автоматика и телемеханика. – 2016. – №4. – С. 99–113.
13. ГОРЕЛОВ М.А. *Иерархические игры со случайными факторами* // Управление большими системами. – 2016. – Вып. 63. – С. 87–105.
14. ГОРЕЛОВ М.А. *Об одной гипотезе в основаниях теории иерархических игр* // Управление большими системами. – 2010. – Вып. 28. – С. 5–23.
15. BOLTON P., DEWATRIPONT M. *Contract Theory*. – Mass.: MIT Press, 2005. – 740 p.
16. LAFFONT J.-J., MARTIMORT D. *The Theory of Incentives: The Principal-Agent Model*. – Princeton: Princeton University Press, 2002. – 440 pp.

MAXIMAL GUARANTEED RESULT IN HIERARCHICAL GAMES

Mikhail Gorelov, Computer Center of RAS, Moscow, Cand.Sc., (griefer@ccas.ru).

Abstract: A new method of investigation of hierarchical two-player games is discussed. This method consists of solving games with complex information exchanges using, for the most part, identical transformation of predicate calculus formulas. We introduce the notion of maximal guaranteed result in a game, give two definitions and discuss the relationship between them. The new method is illustrated on a classical example for which a maximal guaranteed result of a high level player in hierarchical game of two players is calculated. Some particular cases are discussed. Stability of this problem according to variation of the payoff function of the second player is analyzed. We also demonstrate how the definition, and, accordingly, the method are modified for a benevolent or a bounded-rational second player. Also, we show that the new definition is convenient for the investigation of stability of maximal guaranteed result calculation procedure with respect to the parameters of the game.

Keywords: informational theory of hierarchical systems, hierarchical games, maximal guaranteed result.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии А.Г. Чхартишвили.

*Поступила в редакцию 13.11.2016.
Опубликована 31.05.2017.*

АНИЗОТРОПИЙНЫЙ АНАЛИЗ В СЛУЧАЕ НЕНУЛЕВЫХ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ¹

Бойченко В. А.²

(ФГБУН Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

Обычно анизотропийная теория управления изучает линейные стохастические системы с нулевыми начальными условиями. В данной работе объектом анизотропийного анализа являются линейные дискретные стационарные системы с ненулевыми начальными условиями. В соответствии с основными постулатами анизотропийной теории в качестве критерия качества используется обобщённый анизотропийный коэффициент усиления, который определяется как максимум обобщённого среднеквадратичного коэффициента усиления системы с ненулевыми начальными условиями и случайным входом, анизотропия которых не превышает заданного неотрицательного значения a .

Ключевые слова: анизотропийная теория управления, анизотропийная норма, \mathcal{H}_2 -норма, \mathcal{H}_∞ -норма.

Введение

Хорошо известные \mathcal{H}_2 - и \mathcal{H}_∞ -теории построения оптимальных регуляторов, минимизирующих влияние внешних возмущений на выход линейной стационарной системы, основаны на использовании в качестве критериев качества \mathcal{H}_2 - и \mathcal{H}_∞ -норм матричнозначных передаточных функций замкнутых систем. \mathcal{H}_2 -теория предполагает, что на вход системы поступает случай-

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 17-08-00185 А.

² Виктор Александрович Бойченко, научный сотрудник (victor@ipu.ru).

ный сигнал, являющийся гауссовским белым шумом. \mathcal{H}_∞ -теория предполагает, что входное возмущение является квадратично суммируемым сигналом.

В анизотропийной теории управления вводится понятие анизотропийной нормы системы, которая является мерой чувствительности выхода системы к случайному входному сигналу с известным в определённом смысле отклонением от последовательности, являющейся гауссовским белым шумом. Анизотропийная норма системы является индуцированной нормой, предельными случаями которой являются \mathcal{H}_2 - и \mathcal{H}_∞ -нормы, когда анизотропия a входного сигнала $a \rightarrow 0$ и $a \rightarrow \infty$ соответственно.

Обычно в рамках анизотропийной теории управления рассматриваются стохастические системы с нулевыми начальными условиями. Нет никаких принципиальных препятствий для расширения стандартного анизотропийного анализа и включения в рассмотрение систем с ненулевыми начальными условиями, чему и посвящена данная работа.

1. Основополагающие концепции анизотропийного анализа

Приведем основные определения и фундаментальные понятия анизотропийного анализа — анизотропия случайного вектора, средняя анизотропия стационарной эргодической последовательности гауссовских случайных векторов, анизотропийная норма линейной дискретной стационарной системы. Систематическое изложение анизотропийного анализа робастного качества, первоначально разработанного и представленного в [3, 10], можно найти в [1, 2, 6, 9]³.

1.1. АНИЗОТРОПИЯ СЛУЧАЙНОГО ВЕКТОРА

Обозначим через \mathbb{L}_2^m класс \mathbb{R}^m -значных квадратично интегрируемых случайных векторов, распределённых абсолютно

³Список литературы содержится в основном работы научной школы А.П. Курдюкова. Работы по анизотропийной теории вне этой школы отсутствуют.

непрерывно относительно m -мерной лебеговой меры mes_m . Для любого вектора $w \in \mathbb{L}_2^m$ с плотностью распределения вероятности $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}_+$ анизотропия $\mathbf{A}(w)$ определяется в [1, 8] как минимальное информационное уклонение Кульбака–Лейблера $\mathbf{D}(f \| p_{m,\lambda})$ распределения вектора w от семейства гауссовских распределений $p_{m,\lambda}$ на \mathbb{R}^m с нулевым средним и скалярными ковариационными матрицами λI_m :

$$(1) \quad \mathbf{A}(w) = \min_{\lambda > 0} \mathbf{D}(f \| p_{m,\lambda}) = \frac{m}{2} \ln \left(\frac{2\pi e}{m} \mathbf{E}[|w|^2] \right) - \mathbf{h}(w),$$

здесь $\mathbf{E}[\cdot]$ – математическое ожидание, $\mathbf{h}(w)$ – дифференциальная энтропия вектора w относительно mes_m (см., например, [7]). В [1] показано, что минимум в (1) по всевозможным $\lambda > 0$ достигается при $\lambda = \mathbf{E}[|w|^2]/m$.

Обозначим через $\mathbb{G}^m(\Sigma)$ класс \mathbb{R}^m -значных гауссовских случайных векторов w с нулевым средним $\mathbf{E}[w] = 0$ и невырожденной ковариационной матрицей $\text{cov}(w) = \Sigma$. Соответствующая плотность распределения вероятности имеет вид

$$p(w) = (2\pi)^{-m/2} (\det \Sigma)^{-1/2} \exp \left(-\frac{1}{2} \|w\|_{\Sigma^{-1}}^2 \right),$$

где $\|x\|_Q = \sqrt{x^T Q x}$ – норма вектора x , индуцированная положительно определённой симметричной матрицей Q .

Лемма 1 (см. [1]).

а) Анизотропия $\mathbf{A}(w)$, определённая посредством (1), инвариантна относительно вращений и гомотетий w , т.е. $\mathbf{A}(\lambda U w) = \mathbf{A}(w)$ для любого $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и любой ортогональной матрицы $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$.

б) Для любой положительно определённой матрицы $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times m}$

$$\min \{ \mathbf{A}(w) : w \in \mathbb{L}_2^m, \mathbf{E}[w w^T] = \Sigma \} = -\frac{1}{2} \ln \det \frac{m \Sigma}{\text{tr} \Sigma},$$

причём минимум достигается лишь на $w \in \mathbb{G}^m(\Sigma)$.

в) Для любого $w \in \mathbb{L}_2^m$ выполняется $\mathbf{A}(w) \geq 0$, причём $\mathbf{A}(w) = 0$ в том и только том случае, если $w \in \mathbb{G}^m(\lambda I_m)$ для некоторого $\lambda > 0$.

В силу утверждения а) этой леммы анизотропия $\mathbf{A}(w)$ может интерпретироваться как теоретико-энтропийная характеристика неинвариантности распределения случайного вектора w относительно группы унитарных преобразований и характеризует собой неизотропность распределения случайного вектора по направлению. Подобная интерпретация величины $\mathbf{A}(w)$ даёт содержательную физическую интерпретацию теоретико-информационных критериев, возникающих в стохастических задачах управления.

1.2. СРЕДНЯЯ АНИЗОТРОПИЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Пусть $W = \{w_k\}_{-\infty < k < +\infty}$ — стационарная последовательность векторов $w_k \in \mathbb{L}_2^m$, интерпретируемая как дискретный случайный сигнал. Объединим элементы последовательности W , принадлежащие временному интервалу $[s, t]$, в случайный вектор

$$W_{s:t} = \begin{bmatrix} w_s \\ \vdots \\ w_t \end{bmatrix}.$$

Будем предполагать, что $W_{0:N}$ распределен абсолютно непрерывно для каждого $N \geq 0$. Определим согласно [1] *среднюю анизотропию* последовательности W как среднюю интенсивность анизотропии в единицу времени:

$$(2) \quad \bar{\mathbf{A}}(W) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{\mathbf{A}(W_{0:N-1})}{N}.$$

Пусть $V = \{v_k\}_{-\infty < k < +\infty}$ — последовательность независимых случайных векторов $v_k \in \mathbb{G}^m(I_m)$, т.е. m -мерный гауссовский белый шум. Предположим, что $W = GV$ производится из V устойчивым формирующим фильтром с передаточной функцией $G(z) \in \mathcal{H}_2^{m \times m}$. Тогда спектральная плотность W определяется выражением

$$(3) \quad S(\omega) = \widehat{G}(\omega)\widehat{G}^*(\omega), \quad -\pi \leq \omega < \pi,$$

где $\widehat{G}(\omega) = \lim_{r \rightarrow 1^-} G(re^{i\omega})$ — граничное круговое значение передаточной функции $G(z)$. В [9] показано, что средняя анизотропия (2) вычисляется в терминах спектральной плотности (3) и

\mathcal{H}_2 -нормы формирующего фильтра G по формуле

$$(4) \quad \overline{\mathbf{A}}(W) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln \det \frac{mS(\omega)}{\|G\|_2^2} d\omega.$$

Функционал средней анизотропии (4) всегда неотрицателен. Он принимает конечные значения, если формирующий фильтр G имеет полный ранг, в противном случае $\overline{\mathbf{A}}(G) = +\infty$ (см. [9, 10]). Равенство $\overline{\mathbf{A}}(G) = 0$ выполняется тогда и только тогда, когда формирующий фильтр G является системой полного пропускания (фазовращающей системой) с точностью до ненулевого постоянного множителя. В этом случае спектральная плотность (3) имеет вид $S(\omega) = \lambda I_m$, $-\pi \leq \omega < \pi$, для некоторого $\lambda > 0$, так что W представляет собой гауссовский белый шум с нулевым средним и скалярной ковариационной матрицей.

Для вычисления средней анизотропии помимо формулы (4), использующей функцию спектральной плотности S , можно использовать формулу типа Колмогорова–Сегё, которая выражает среднюю анизотропию в терминах вторых стохастических моментов, т.е. в терминах ковариационных матриц.

Пусть $W = GV$ – стационарная гауссовская последовательность, созданная формирующим фильтром $G \in \mathcal{H}_2^{m \times m}$. Введем последовательность предсказателей $\widehat{W} = \{\widehat{w}_k\}_{-\infty < k < +\infty}$ и последовательность ошибок предсказания $\widetilde{W} = \{\widetilde{w}_k\}_{-\infty < k < +\infty}$:

$$(5) \quad \widehat{w}_k = \mathbf{E}[w_k | \{w_j\}_{j < k}], \quad \widetilde{w}_k = w_k - \widehat{w}_k,$$

где $\mathbf{E}[\cdot | \cdot]$ – условное математическое ожидание. Так как при известных $\{w_j\}_{j < k}$ условное математическое ожидание $\mathbf{E}[\widetilde{w}_k | \{w_j\}_{j < k}]$ равно нулю:

$$\mathbf{E}[\widetilde{w}_k | \{w_j\}_{j < k}] = \mathbf{E}[w_k | \{w_j\}_{j < k}] - \widehat{w}_{k|k-1} = 0,$$

то последовательность $\{\widetilde{w}_k\}$ является последовательностью гауссовских векторов с нулевым математическим ожиданием и, в общем случае, с не единичной ковариационной матрицей.

Лемма 2 (см. [2, с. 36]). *Средняя анизотропия (4) последовательности $W = GV$, сгенерированной фильтром $G \in \mathcal{H}_2^{m \times m}$*

максимального ранга, выражается в терминах моментов второго порядка W и \bar{W} следующим образом:

$$(6) \quad \bar{\mathbf{A}}(W) = -\frac{1}{2} \ln \det \left(\frac{m \mathbf{E}[\tilde{w}_0 \tilde{w}_0^T]}{\mathbf{E}[|w_0|^2]} \right).$$

В силу матричного тождества

$$\mathbf{E}[\tilde{w}_0 \tilde{w}_0^T] = (\mathbf{E}[w_0 w_0^T] \mathbf{E}^{-1}[\tilde{w}_0 \tilde{w}_0^T])^{-1} \mathbf{E}[w_0 w_0^T],$$

среднюю анизотропию (6) можно представить в виде суммы временной $\bar{\mathbf{A}}_t(W)$ и пространственной $\bar{\mathbf{A}}_s(W)$ компонент:

$$(7) \quad \bar{\mathbf{A}}(W) = \bar{\mathbf{A}}_t(W) + \bar{\mathbf{A}}_s(W),$$

где

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{A}}_t(W) &= \frac{1}{2} \ln \det \left(\mathbf{E}[w_0 w_0^T] (\mathbf{E}[\tilde{w}_0 \tilde{w}_0^T])^{-1} \right), \\ \bar{\mathbf{A}}_s(W) &= -\frac{1}{2} \ln \det \left(\frac{m \mathbf{E}[w_0 w_0^T]}{\mathbf{E}[|w_0|^2]} \right). \end{aligned}$$

Пространственная составляющая $\bar{\mathbf{A}}_s(W)$ средней анизотропии не зависит от предыстории $\{w_j\}_{j<0}$, совпадает со значением анизотропии $\mathbf{A}(w_0)$ вектора w_0 и характеризует собой неравномерность распределения случайного вектора по компонентам в сечении случайной стационарной последовательности W . Следует отметить, что для скалярных сигналов величина $\bar{\mathbf{A}}_s(W)$ тождественно равна нулю и представляет интерес только при размерности входного сигнала $m > 1$.

Временная составляющая $\bar{\mathbf{A}}_t(W)$ средней анизотропии инвариантна относительно невырожденного преобразования координат в \mathbb{R}^m , т.е. $\bar{\mathbf{A}}_t(W) = \bar{\mathbf{A}}_t(TW)$ для любой невырожденной матрицы $T \in \mathbb{R}^{m \times m}$. Благодаря вероятностной структуре последовательностей, образуемых векторами (5), временной член $\bar{\mathbf{A}}_t(W)$ совпадает с количеством информации \mathbf{I} о векторе w_0 , удержанной в части истории $\{w_j\}_{j<0}$:

$$\bar{\mathbf{A}}_t(G) = \mathbf{I}(w_0, \{w_j\}_{j<0})$$

и, следовательно, характеризует собой «предсказуемость» входного сигнала.

1.3. АНИЗОТРОПИЙНАЯ НОРМА МАТРИЦЫ

Пусть $F \in \mathbb{R}^{p \times m}$ — произвольная фиксированная матрица. Интерпретируя её как линейный оператор со случайным входом $w \in \mathbb{L}_2^m$, определим среднеквадратичный коэффициент усиления оператора F следующим образом (см. [1]):

$$(8) \quad \mathbf{Q}(F, w) = \sqrt{\frac{\mathbf{E}|Fw|^2}{\mathbf{E}|w|^2}}.$$

Для любого фиксированного $w \in \mathbb{L}_2^m$ функция $\mathbf{Q}(\cdot, w)$ задаёт индуцированную норму на $\mathbb{R}^{p \times m}$. Если, помимо квадратичной интегрируемости w , множество входов ничем не ограничено, то величина $\mathbf{Q}(F, w)$ может быть выбрана сколь угодно близкой к наибольшему сингулярному значению $\|F\|_\infty$ матрицы F .

Допустим теперь, что множество входных векторов w ограничено условием $\mathbf{A}(w) \leq a$, где $a \geq 0$ — заданный параметр. Например, если $a = 0$, то в силу утверждения в) леммы 1 множество входов будет состоять только из гауссовских случайных векторов $w_{a=0} \in \bigcup_{\lambda > 0} \mathbb{G}^m(\lambda I_m)$ с нулевым средним и скалярными ковариационными матрицами λI_m . Для любого такого $w_{a=0}$ прямым вычислением получим:

$$\mathbf{Q}(F, w_{a=0}) = \frac{1}{\sqrt{m}} \|F\|_2,$$

где $\|F\|_2 = \sqrt{\text{tr}(F^T F)}$ — фробениусова норма матрицы F .

В случае произвольного $a \geq 0$ определим a -анизотропийную норму матрицы F таким образом (см. [1]):

$$(9) \quad \|F\|_a = \sup \{ \mathbf{Q}(F, w) : w \in \mathbb{L}_2^m, \mathbf{A}(w) \leq a \}.$$

В [4, 10] показано, что a -анизотропийная норма любой фиксированной матрицы $F \in \mathbb{R}^{p \times m}$ является неубывающей функцией средней анизотропии a и удовлетворяет соотношениям:

$$(10) \quad \frac{1}{\sqrt{m}} \|F\|_2 = \|F\|_0 \leq \|F\|_a \leq \lim_{a \rightarrow +\infty} \|F\|_a = \|F\|_\infty.$$

Таким образом, \mathcal{H}_2 - и \mathcal{H}_∞ -нормы являются предельными случаями a -анизотропийной нормы при $a \rightarrow 0$ и $a \rightarrow +\infty$ соответственно.

2. Основные результаты

Рассмотрим объект, который описывается линейной дискретной стационарной системой с ненулевыми начальными условиями:

$$(11) \quad \begin{cases} x_{k+1} = A x_k + B w_k, & x_0 \neq 0, \\ z_k = C x_k + D w_k, & k = 0, 1, 2, \dots; \end{cases}$$

где $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times l}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $D \in \mathbb{R}^{p \times l}$, A – асимптотически устойчивая матрица (спектральный радиус ρ матрицы A меньше единицы $\rho(A) < 1$), $x_k \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния объекта и x_0 – случайный вектор ненулевых начальных условий, $z_k \in \mathbb{R}^p$ – выход, $w_k \in \mathbb{R}^l$ – внешнее случайное возмущение. Пусть вектор начальных условий x_0 и входная последовательность $W = \{w_k\}_{0 \leq k < +\infty}$ удовлетворяют следующим условиям:

$$(12) \quad \mathbf{E} [x_0 w_k^T] = S_{xw} = 0,$$

$$(13) \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{E} [|w_k|^2] < \infty,$$

$$(14) \quad \mathbf{E} [w_j^T w_i] = \text{tr} \mathbf{E} [w_i w_j^T] = \text{tr} S_{ij} = \begin{cases} \text{tr} S_i & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases}$$

Следуя анизотропной теории управления [2] определим обобщённый среднеквадратичный коэффициент усиления Θ для системы (11) с ненулевыми начальными условиями и произвольной входной последовательностью, которые удовлетворяют условиям (12)–(14):

$$(15) \quad \Theta = \sqrt{\frac{\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{E} [|z_k|^2]}{\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{E} [|w_k|^2] + \mathbf{E} [|x_0|^2]}}.$$

Запишем решение системы (11) при $k > 0$ в явном виде (для $k = 0$, $x_0 \neq 0$ и $z_0 = Cx_0 + Dw_0$):

$$x_k = A^k x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1} B w_i,$$

$$z_k = CA^k x_0 + C \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1} B w_i + D w_k.$$

Введем вспомогательное обозначение для выхода $z_k = \overset{\circ}{z}_k + CA^k x_0$, где

$$\overset{\circ}{z}_k = \sum_{i=0}^k Z_{ki} w_i,$$

$$(16) \quad Z_{ki} = \begin{cases} CA^{k-i-1} B & \text{при } 0 \leq i < k, \\ D & \text{при } i = k, \\ 0 & \text{при } i \notin [0, k]. \end{cases}$$

Тогда $|z_k|^2 = z_k^T z_k$ можно представить в виде

$$|z_k|^2 = \overset{\circ}{z}_k^T \overset{\circ}{z}_k + \overset{\circ}{z}_k^T CA^k x_0 + x_0^T (A^k)^T C^T \overset{\circ}{z}_k + x_0^T (A^k)^T C^T CA^k x_0.$$

Усредним это уравнение и при усреднении учтем, что в соответствии с условием (12) $\mathbf{E}[w_k^T M x_0] = \text{tr}(MS_{xw}) = 0$ при $i \neq j$ для любой матрицы M и, следовательно:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left[\overset{\circ}{z}_k^T CA^k x_0 \right] &= \mathbf{E} \left[\sum_{i=0}^k w_i^T Z_{ki}^T CA^k x_0 \right] = \\ &= \sum_{i=0}^k \text{tr} \left(Z_{ki}^T CA^k \mathbf{E} [x_0 w_i^T] \right) = \\ &= \sum_{i=0}^k \text{tr} \left(Z_{ki}^T CA^k S_{xw} \right) = 0, \\ \mathbf{E} \left[x_0^T (A^k)^T C^T \overset{\circ}{z}_k \right] &= \mathbf{E} \left[\left(\overset{\circ}{z}_k^T CA^k x_0 \right)^T \right] = 0. \end{aligned}$$

Тогда числитель в определении (15) примет такой вид (напомним, что операции усреднения, суммирования и взятия следа матрицы

коммутируют между собой):

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{E} [|z_k|^2] &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{E} [|\dot{z}_k|^2] + \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{E} \left[x_0^T (A^k)^T C^T C A^k x_0 \right] = \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{E} [|\dot{z}_k|^2] + \mathbf{E} \left[x_0^T \left(\sum_{k=0}^{+\infty} (A^k)^T C^T C A^k \right) x_0 \right]. \end{aligned}$$

Бесконечная сумма в круглых скобках — это грамиан наблюдаемости Γ

$$(17) \quad \Gamma = \Gamma^T = \sum_{k=0}^{+\infty} (A^k)^T C^T C A^k,$$

который является решением уравнения Ляпунова

$$A^T \Gamma A - \Gamma + C^T C = 0.$$

Введем обозначение $S_{x_0} = \mathbf{E}[x_0 x_0^T]$ и запишем квадрат обобщённого коэффициента усиления (15) в виде

$$(18) \quad \Theta^2 = \frac{\text{tr}(\Gamma S_{x_0}) + \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{E} [|\dot{z}_k|^2]}{\text{tr} S_{x_0} + \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{E} [|w_k|^2]}.$$

Теперь рассмотрим второе слагаемое в числителе дроби (18) и перепишем $|\dot{z}_k|^2 = \dot{z}_k^T \dot{z}_k$ в таком виде

$$\begin{aligned} |\dot{z}_k|^2 &= \sum_{j=0}^k w_j^T Z_{kj}^T \sum_{i=0}^k Z_{ki} w_i = \sum_{i,j=0}^k w_j^T Z_{kj}^T Z_{ki} w_i = \\ &= \sum_{i=0}^k w_i^T Z_{ki}^T Z_{ki} w_i + \sum_{\substack{i,j=0 \\ i \neq j}}^k w_j^T Z_{kj}^T Z_{ki} w_i. \end{aligned}$$

Так же как и в случае начальных условий усредним последнее равенство, но при усреднении воспользуемся условием (14), согласно которому $\mathbf{E}[w_j^T M w_i] = \text{tr}(M S_{ij}) = 0$ при $i \neq j$ для любой матрицы M . Тогда второе слагаемое в числителе (18) примет следующий вид:

$$(19) \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{E} [|\dot{z}_k|^2] = \text{tr} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^k Z_{ki}^T Z_{ki} S_i \right).$$

Согласно определению (16) $Z_{ki} = 0$ при $i > k$, поэтому положим верхний предел суммирования по i равным $+\infty$:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{E} [|\dot{z}_k|^2] = \text{tr} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^{+\infty} Z_{ki}^T Z_{ki} S_i \right).$$

Так как ряд (19) сходится абсолютно, то результат не зависит от порядка суммирования:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{E} [|\dot{z}_k|^2] = \text{tr} \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} Z_{ki}^T Z_{ki} \right) S_i.$$

Сумма в круглых скобках равна $B^T \Gamma B + D^T D$ и не зависит от i . Действительно, так как $Z_{ki} = 0$ при $k < i$, то нижний предел суммирования можно положить равным i :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} Z_{ki}^T Z_{ki} = \sum_{k=i}^{+\infty} Z_{ki}^T Z_{ki}.$$

Согласно (16) $Z_{kk} = D$, поэтому

$$\sum_{k=0}^{+\infty} Z_{ki}^T Z_{ki} = D^T D + \sum_{k=i+1}^{+\infty} Z_{ki}^T Z_{ki}.$$

Выпишем Z_{ki} при $k > i$ в явном виде:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} Z_{ki}^T Z_{ki} = D^T D + \sum_{k=i+1}^{+\infty} B^T (A^{k-i-1})^T C^T C A^{k-i-1} B.$$

Сделаем замену $k = n + i + 1$ и получим:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} Z_{ki}^T Z_{ki} = D^T D + B^T \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (A^n)^T C^T C A^n \right) B.$$

Бесконечная сумма в круглых скобках – это грамиан наблюдаемости Γ (17). Введём обозначение $S_w = \sum_{k=0}^{+\infty} S_k$ и запишем, в итоге, (19) в таком виде:

$$(20) \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{E} [|\dot{z}_k|^2] = \text{tr} [(B^T \Gamma B + D^T D) S_w].$$

Формальный вывод соотношения (20) проиллюстрируем наглядным примером. Для этого выпишем в явном виде несколько первых членов бесконечной суммы (19), предварительно упорядочив слагаемые для каждого \dot{z}_k : сначала слагаемое, пропорциональное $D^T D$, а затем остальные слагаемые в порядке убывания степени матрицы A . В силу громоздкости выражений сначала выпишем первое и второе слагаемые, затем – третье и четвертое:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[|\dot{z}_0|^2]_{1,2} &= \text{tr}(D^T D S_0) \\ \mathbf{E}[|\dot{z}_1|^2]_{1,2} &= \text{tr}(D^T D S_1) + \text{tr}[B^T C^T C B S_0] \\ \mathbf{E}[|\dot{z}_2|^2]_{1,2} &= \text{tr}(D^T D S_2) + \text{tr}[B^T A^T C^T C A B S_0] \\ \mathbf{E}[|\dot{z}_3|^2]_{1,2} &= \text{tr}(D^T D S_3) + \text{tr}[B^T (A^2)^T C^T C A^2 B S_0] \\ \mathbf{E}[|\dot{z}_4|^2]_{1,2} &= \text{tr}(D^T D S_4) + \text{tr}[B^T (A^3)^T C^T C A^3 B S_0] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[|\dot{z}_2|^2]_{3,4} &= \text{tr}[B^T C^T C B S_1] \\ \mathbf{E}[|\dot{z}_3|^2]_{3,4} &= \text{tr}[B^T A^T C^T C A B S_1] + \text{tr}[B^T C^T C B S_2] \\ \mathbf{E}[|\dot{z}_4|^2]_{3,4} &= \text{tr}[B^T (A^2)^T C^T C A^2 B S_1] + \text{tr}[B^T A^T C^T C A B S_2] \end{aligned}$$

Так как ряд (19) сходится абсолютно, то результат не зависит от порядка суммирования, поэтому от суммирования по строкам перейдем к суммированию по столбцам и после очевидных преобразований получим (20).

И, наконец, запишем квадрат обобщённого коэффициента усиления (18) в следующем виде:

$$(21) \quad \Theta^2 = \frac{\text{tr}(\Gamma S_{x_0}) + \text{tr}[(B^T \Gamma B + D^T D) S_w]}{\text{tr} S_{x_0} + \text{tr} S_w} = \frac{\text{tr}(\Lambda S)}{\text{tr} S},$$

здесь Λ and S – квадратные блочно-диагональные матрицы раз-

мером $m = n + l$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Gamma & 0 \\ 0 & B^T \Gamma B + D^T D \end{pmatrix},$$

$$S = \begin{pmatrix} S_{x_0} & 0 \\ 0 & S_w \end{pmatrix}.$$

В соответствии с анизотропной теорией управления [2] определим обобщённый анизотропный коэффициент усиления Θ_a системы (11)–(14) как максимум коэффициента усиления по всем входам, анизотропия $\mathbf{A}(S)$ которых не превышает заданного значения a :

$$(22) \quad \Theta_a^2 = \max_{\mathbf{A}(S) \leq a} \Theta^2 = \max_{\mathbf{A}(S) \leq a} \frac{\text{tr}(\Lambda S)}{\text{tr } S}.$$

Теорема 1. Для любого $a \geq 0$ анизотропный обобщённый коэффициент усиления (22) вычисляется по формуле

$$(23) \quad \Theta_a^2 = \frac{\sum_{i=1}^m \frac{\lambda_i}{1 - q\lambda_i}}{\sum_{i=1}^m \frac{1}{1 - q\lambda_i}},$$

где λ_i – собственные значения неотрицательно определённой матрицы Λ и q – единственное решение уравнения

$$-\frac{1}{2} \ln \det \frac{m(I_m - q\Lambda)^{-1}}{\text{tr}[(I_m - q\Lambda)^{-1}]} = a.$$

Доказательство. Перепишем определение (22) в эквивалентном виде:

$$(24) \quad \Theta_a^2 = \max_S \left\{ \text{tr}(\Lambda S) : -\frac{1}{2} \ln \det(mS) \leq a, \text{tr } S = 1 \right\}.$$

Будем искать максимум этого выражения методом неопределённых множителей Лагранжа. Функция Лагранжа будет иметь вид

$$L[S] = \text{tr}(\Lambda S) + \lambda_1 \left(a + \frac{1}{2} \ln \det(mS) \right) + \lambda_2 (1 - \text{tr } S),$$

где $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_2 \geq 0$ – множители Лагранжа. Решение задачи нахождения экстремума сводится к решению уравнения на производную Фреше $dL[S] = 0$:

$$\begin{aligned} dL[S] &= \operatorname{tr}(\Lambda dS) + \frac{\lambda_1}{2} \operatorname{tr}(S^{-1}dS) - \lambda_2 \operatorname{tr}(dS) = \\ &= \operatorname{tr} \left[\left(\Lambda + \frac{\lambda_1}{2} S^{-1} - \lambda_2 I_m \right) dS \right] = 0. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$S = \sigma(I_m - q\Lambda)^{-1},$$

где $\sigma = \frac{\lambda_1}{2\lambda_2} > 0$ и $q = \frac{1}{\lambda_2} > 0$.

Согласно последнему уравнению матрица S является функцией матрицы Λ . Следовательно, эти матрицы коммутируют между собой:

$$\Lambda S - S\Lambda = 0.$$

Кроме того, они симметричны и неотрицательно определены: грамиан наблюдаемости $\Gamma = \Gamma^T$ – по определению (17), матрица $B^T \Gamma B + D^T D$ – по построению, а матрицы S_{x_0} и S_w^T являются таковыми по определению:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} S_{x_0}^T & 0 \\ 0 & S_w^T \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} S_{x_0} & 0 \\ 0 & S_w \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \Gamma^T & 0 \\ 0 & (B^T \Gamma B + D^T D)^T \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \Gamma & 0 \\ 0 & B^T \Gamma B + D^T D \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Следовательно, существует унитарная матрица $U^* = U^{-1}$, которая одновременно приводит матрицы Λ и S к диагональному виду [5], следовательно, собственные числа λ_i и s_i матриц Λ и S будут связаны соотношением

$$s_i = \frac{\sigma}{1 - q\lambda_i}.$$

Выбирая тем или иным образом матрицу U , можно так или иначе упорядочить собственные значения λ_i матрицы Λ . Для определённости выберем матрицу U таким образом, чтобы собственные значения λ_i были упорядочены по убыванию:

$$\lambda_{\max} = \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{m-1} \geq \lambda_m = \lambda_{\min}.$$

Тогда и собственные значения s_i корреляционной матрицы S будут упорядочены аналогичным образом:

$$s_{\max} = s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_{m-1} \geq s_m = s_{\min}.$$

Для того чтобы собственные числа s_i матрицы S были положительными, необходимо, чтобы положительный параметр q был ограничен:

$$0 \leq q < \lambda_{\max}^{-1}(\Lambda).$$

Для нахождения положительного параметра σ воспользуемся условием $\text{tr } S = 1$:

$$\text{tr } S = \sigma \text{tr} [(I_m - q\Lambda)^{-1}] = 1.$$

Следовательно,

$$\sigma = \frac{1}{\text{tr} [(I_m - q\Lambda)^{-1}]}.$$

Таким образом, корреляционная матрица, на которой коэффициент усиления (24) достигает максимума, равна

$$(25) \quad S(q) = \frac{(I_m - q\Lambda)^{-1}}{\text{tr} [(I_m - q\Lambda)^{-1}]}.$$

Переменная $q \in [0, \lambda_{\max}^{-1}(\Lambda))$ параметризует искомое множество матриц $S(q)$. Используя полученное выражение (25), запишем как функцию q анизотропию $\mathcal{A}(q)$ и обобщённый анизотропийный коэффициент усиления $\Theta^2(q)$:

$$(26) \quad \mathcal{A}(q) = -\frac{1}{2} \ln \det \frac{m(I_m - q\Lambda)^{-1}}{\text{tr} [(I_m - q\Lambda)^{-1}]},$$

$$(27) \quad \Theta^2(q) = \frac{\text{tr} [\Lambda(I_m - q\Lambda)^{-1}]}{\text{tr} [(I_m - q\Lambda)^{-1}]} = \frac{\sum_{i=1}^m \frac{\lambda_i}{1 - q\lambda_i}}{\sum_{i=1}^m \frac{1}{1 - q\lambda_i}}.$$

Функции $\mathcal{A}(q)$ и $\Theta^2(q)$ являются однозначными и неубывающими по q [2], поэтому обобщённый анизотропийный коэффициент усиления как функцию a можно записать в виде $Q_a^2 =$

$Q^2(\mathcal{A}^{-1}(a))$, где \mathcal{A}^{-1} – функция, обратная \mathcal{A} :

$$\Theta_a^2 = \Theta^2(\mathcal{A}^{-1}(a)) = \frac{\sum_{i=1}^m \frac{\lambda_i}{1 - q\lambda_i}}{\sum_{i=1}^m \frac{1}{1 - q\lambda_i}} \quad \text{при } q : \mathcal{A}(q) = a.$$

В качестве примера вычислим обобщённые анизотропийные коэффициенты усиления Θ_0 при $a = 0$ и Θ_∞ при $a \rightarrow +\infty$. Согласно уравнению (26) $a = 0$ тогда и только тогда, когда $q = 0$. Следовательно,

$$\Theta_0^2 = \frac{\text{tr } \Lambda}{m} = \frac{\text{tr } \Gamma + \text{tr}(B^T \Gamma B + D^T D)}{m}.$$

Анизотропия $a \rightarrow +\infty$ при $q \rightarrow \lambda_{\max}^{-1}$, поэтому

$$\Theta_\infty^2 = \lambda_{\max}(\Lambda) = \max(\lambda_{\max}(\Gamma), \lambda_{\max}(B^T \Gamma B + D^T D)).$$

Следует отметить, что матрицы Γ и $B^T \Gamma B + D^T D$ являются числовыми матрицами, поэтому вычисление Θ_0 и Θ_∞ сводится к стандартным операциям линейной алгебры.

3. Численный пример

Рассмотрим численную реализацию системы (11):

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 0,23596 & -0,85556 & -0,68156 \\ -0,77842 & 0,00756 & -0,26014 \\ 1,09960 & -0,93759 & -0,22880 \end{pmatrix}, \\ B &= \begin{pmatrix} -0,52481 & 1,8551 \\ 1,12830 & -0,2773 \\ 0,55014 & 1,06661 \end{pmatrix}, \\ C &= \begin{pmatrix} -2,09920 & 0,37147 & 0,69535 \\ 0,63848 & -0,37418 & 0,87763 \end{pmatrix}, \\ D &= \begin{pmatrix} 1,03360 & 0,60107 \\ 0,41979 & -0,67402 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

На рис. 1 приведены результаты вычисления обобщённого анизотропийного коэффициента усиления Θ_a как функции анизотропии a .

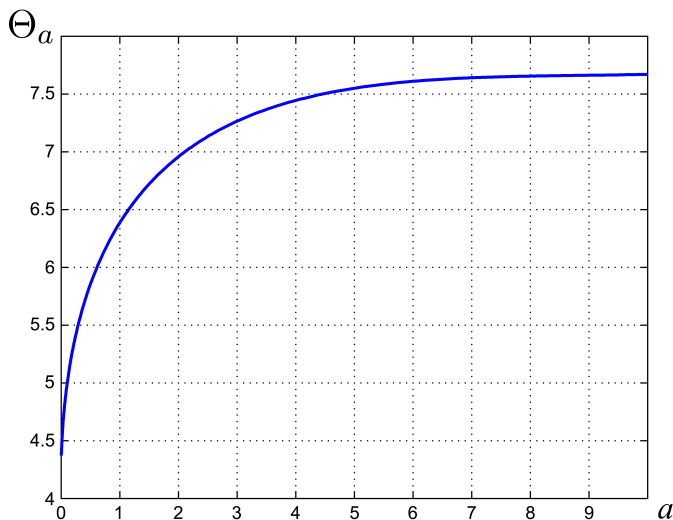


Рис. 1. Обобщённый анизотропный коэффициент усиления

4. Заключение

В работе методами анизотропного анализа исследуются линейные дискретные стационарные системы с ненулевыми начальными условиями. В соответствии с основными постулатами анизотропной теории в качестве критерия качества используется обобщённый анизотропный коэффициент усиления, который определяется как максимум обобщённого среднеквадратичного коэффициента усиления системы с ненулевыми начальными условиями и случайным входом, анизотропия которых не превышает заданного неотрицательного значения a . Вычисление обобщённого анизотропного коэффициента усиления сводится к стандартной процедуре линейной алгебры (нахождение собственных значений матрицы) и решению полиномиального уравнения относительно скалярного параметра q .

Литература

1. ВЛАДИМИРОВ И.Г., ДАЙМОНД Ф., КЛОЕДЕН П. *Анизотропийный анализ робастного качества линейных нестационарных дискретных систем на конечном временном интервале* // Автоматика и телемеханика. – 2006. – №8. – С. 92–111.
2. ВЛАДИМИРОВ И.Г., КУРДЮКОВ А.П., МАКСИМОВ Е.А., ТИМИН В.Н. *Анизотропийная теория управления – новый подход к стохастической теории робастного управления* // Труды IV Междунар. конф. «Идентификация систем и задачи управления» SICPRO '05. – М.: ИПУ РАН, 2005. – С. 29–94.
3. ВЛАДИМИРОВ И.Г., КУРДЮКОВ А.П., СЕМЕНОВ А.В. *Анизотропия сигналов и энтропия линейных стационарных систем* // Доклады АН. – 1995. – Т. 342, №3. – С. 583–585.
4. ВЛАДИМИРОВ И.Г., КУРДЮКОВ А.П., СЕМЕНОВ А.В. *Асимптотика анизотропийной нормы линейных стационарных систем* // Автоматика и телемеханика. – 1999. – №3. – С. 78–87.
5. ГАНТМАХЕР Ф.Р. *Теория матриц*. – М.: Физматлит, 2004. – 560 с.
6. КУСТОВ А.Ю., КУРДЮКОВ А.П., НАЧИНКИНА Г.Н. *Стохастическая теория анизотропийного робастного управления*. – М.: ИПУ РАН, 2012. – 128 с.
7. COVER T.M., THOMAS J.A. *Elements of Information Theory*. – N.Y.: Wiley, 1991. – 542 p.

8. DIAMOND P., KLOEDEN P., VLADIMIROV I.G. *Mean anisotropy of homogeneous Gaussian random fields and anisotropic norm of linear translation-invariant operators on multidimensional integer lattices* // J. Appl. Math. and Stoch. Anal. – 2003. – Vol. 16. – P. 209–231.
9. DIAMOND P., VLADIMIROV I.G., KURDYUKOV A.P., SEMYONOV A.V. *Anisotropy-based performance analysis of linear discrete time invariant control systems* // Int. J. Contr. – 2001. – Vol. 74. – P. 28–42.
10. VLADIMIROV I.G., KURDYUKOV A.P., SEMYONOV A.V. *On computing the anisotropic norm of linear discrete-time-invariant systems* // Proc. 13-th IFAC World Congress. – San-Francisco, CA, USA. – 1996. – P. 179–184.

ANISOTROPY-BASED ANALYSIS FOR CASE OF NONZERO INITIAL CONDITION

Victor Boichenko, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, (victor@ipu.ru).

Abstract: Well-known \mathcal{H}_2 -norm- and \mathcal{H}_∞ -norm-theories allow construction of optimal regulators that minimize external disturbances' influence on the linear time-independent system output. They are based on quality criteria of \mathcal{H}_2 - and \mathcal{H}_∞ -norms of closed-loop transfer functions. In anisotropy theory, a notion of anisotropy norm is introduced. Usually in the context of the anisotropy-based robust performance analysis stochastic systems with zero initial condition are investigated. In this paper we extend this analysis and consider a linear discrete time invariant system under random disturbances and with the nonzero initial condition. In accordance with the basic postulates of the anisotropy-based control theory, the disturbance attenuation capabilities of system are quantified by the anisotropic generalized gain which is defined as the largest root mean square gain of the system with respect to a random input and the nonzero initial condition, anisotropy of which is bounded by a given nonnegative parameter a . A numerical example is considered.

Keywords: anisotropy-based control theory, anisotropic norm, \mathcal{H}_2 -norm, \mathcal{H}_∞ -norm.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии И.Б. Фуртатом.

Поступила в редакцию 05.03.2017.

Дата опубликования 31.05.2017.

УДК 681.5
ББК 65.050

МОДЕЛЬ КОНКУРЕНЦИИ МЕЖДУ НЕФТЕДОБЫВАЮЩИМИ КОМПАНИЯМИ С ТРАДИЦИОННЫМ И НЕТРАДИЦИОННЫМ СПОСОБОМ ДОБЫЧИ

Акинфиев В. К.¹

*(ФГБУН Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)*

Рассматривается задача выбора инвестиционных стратегий нефтяных компаний с традиционным и нетрадиционным способом добычи. Предложена математическая модель, описывающая взаимосвязь между инвестиционными стратегиями компаний и рыночной ценой нефти, которая зависит от соотношения спроса и предложения на мировом рынке нефти. Решение задачи сведено к анализу биматричной игры, в которой матрица выигрышей формируется в результате численного моделирования. Приводятся результаты использования предложенного подхода.

Ключевые слова: инвестиционные стратегии, математическая модель, конкуренция на рынке нефти, биматричная игра.

1. Введение

В последние годы наблюдается существенная ценовая нестабильность на мировом нефтяном рынке. Шок на нефтяном рынке, который произошел во второй половине 2014 года, многие связывают с появлением в США новых технологий добычи трудно извлекаемых залежей нефти (сланцевой нефти). Как

¹ Валерий Константинович Акинфиев, доктор технических наук, ведущий научный сотрудник (akinf@ipu.ru).

следствие этого, страны с традиционной добычей нефти для удержания собственной доли рынка начали наращивать добычу и, соответственно, предложение на рынке. Это привело к переизбытку предложения и резкому падению цен на нефть. Падение нефтяных цен ниже определенного уровня делает нерентабельным инвестиции в добычу сланцевой нефти, что приводит к сокращению ее добычи, снижению давления на рынок и к повышению цен.

Кроме этих факторов (ценовые войны между игроками) на равновесие на рынке существенное влияние оказывает динамика спроса на нефть на мировом рынке, зависящая от большого числа факторов, включая темпы роста экономик стран импортеров и изменение в структуре потребления энергоносителей, связанных с появлением новых технологий.

В свою очередь цена нефти на рынке существенно влияет на уровень рентабельности (прибыльности) нефтедобывающих компаний и, соответственно, на возможность инвестировать необходимые средства в развитие и поддержание уровня добычи нефти. Причем компании с традиционной технологией добычи обладают в этом смысле большей инерционностью по сравнению с компаниями, добывающими сланцевую нефть.

Следует заметить, что на нефтяном рынке среди нефтедобывающих компаний наблюдается существенная асимметрия, связанная с различиями в технологии добычи и технико-экономических характеристиках нефтяных месторождений.

Очень важной характеристикой, влияющей на поведение игроков на рынке при изменении его конъюнктуры, является показатель «точка безубыточности». Точка безубыточности – это уровень цены нефти, при которой прибыль компаний с определенной технологией добычи равна нулю. При этом в себестоимость добычи, как правило, включают инвестиции компаний на поддержание добычи (поддерживающие инвестиции). Если цена на рынке становится меньше точки безубыточности компании, то уровень ее добычи будет заведомо снижаться с некоторым временным лагом. Темп снижения зависит от разницы между рыночной ценой и точкой безубыточности. В период низких цен на нефть (30–35 долл./баррель) снижают инвестиции и добычу компании, добывающие нефть на глубо-

ководных шельфах (североморская нефть, Норвегия, Канада) и, конечно, компании, добывающие сланцевую нефть.

И, напротив, если цена на рынке выше точки безубыточности, то компания имеет возможность инвестировать в развитие и рост добычи. В этом случае у компании имеется возможность выбора того или иного варианта инвестиционной стратегии в зависимости от цели компании и складывающейся конъюнктуры рынка.

Основными критериями выбора игроками своих стратегий является, как правило, удержание или увеличение доли рынка, а также увеличения капитала (стоимости) компании. При этом каждой компании необходимо учитывать возможный выбор инвестиционных стратегий остальными игроками и ожидание изменения динамики спроса в среднесрочной и долгосрочной перспективе. Причем, между игроками возможны коалиции и соглашения, например, между странами ОПЕК.

Существенное влияние на возможные действия игроков в ответ на шоковые изменения цены на рынке оказывают также показатели временного лага между периодом инвестирования и периодом прироста товарной добычи нефти и показатель удельного прироста товарной добычи нефти на единицу инвестиционных вложений. Достаточно условно можно разделить игроков на нефтяном рынке по этим показателям на четыре группы. В таблице 1 приведены количественные и качественные оценки параметров для выделенных групп игроков. Анализ таблицы показывает существенную асимметрию на рынке, которая обуславливает различие в реакции игроков на рыночные шоки и их инвестиционные стратегии.

Взрывной рост добычи сланцевой нефти в США в 2014 году стал неожиданностью для рынка. К началу 2015 года объем добываемой в США сланцевой нефти практически сравнялся с объемом традиционно добываемой нефти – это более 4,5 млн. баррелей в сутки. Для справки, это почти половина от объема добычи нефти в Саудовской Аравии или России [2].

Добыча в основном ведется на трех формациях: Bakken на севере США, Eagle Ford и Permian на юге. В каждом регионе одновременно разрабатываются сотни участков, каждый из которых обладает уникальными характеристиками. Пористость

и проницаемость пласта, его толщина и глубина залегания, а также состав горных пород, расположенных над пластом сланца, могут существенно различаться даже на соседних участках.

Таблица 1.

Параметры	Арабская нефть	Сибирская нефть	Шельфовая нефть	Сланцевая нефть
Точка безубыточности	самая низкая (10 \$/барр.)	средняя (20 \$/барр.)	высокая (35 \$/барр.)	самая высокая (50 \$/барр.)
Временной лаг между периодами инвестирования и прироста добычи	средний (12–24 мес.)	высокий (24–36 мес.)	высокий (24–36 мес.)	самый низкий (3–12 мес.)
Удельные инвестиционные издержки на прирост добычи	низкая	высокая	самая высокая	высокая

Коммерчески выгодная добыча сланцевой нефти стала возможной благодаря технологиям горизонтального бурения и гидравлического разрыва пласта (англ. fracking). Технологии добычи постоянно совершенствуются, однако по объемам добычи из каждой отдельной скважины сланцевая нефть в любом случае уступает традиционно добываемой нефти. Уже в первый год после гидроразрыва объем извлекаемой сланцевой нефти падает более чем в два раза, а через пять лет скважина закрывается, так как низкий дебет нефти делает добычу нерентабельной. При добыче нефти из традиционных пластов дебет в среднем падает лишь на 5–7% в год, и общий объем извлекаемой нефти кратно выше.

Также сланцевая нефть уступает традиционно добываемой с точки зрения стоимости добычи. Как горизонтальное бурение, так и применение гидроразрыва в несколько раз увеличивают стоимость бурения отдельной скважины, и чем глубже залегает пласт сланца и ниже его проницаемость, тем дороже обходится применение этих технологий. С учетом стоимости аренды земли уровень безубыточности добычи сланцевой нефти на разных участках варьируется от 40 до 80 долларов США за баррель. Такой большой разброс цифр в первую очередь отражает непостоянность геологических характеристик каждого конкретного

участка, так как основным компонентом стоимости добычи сланцевой нефти является стоимость бурения [2].

Коммерческое использование новых технологий добычи сланцевой нефти позволило США в течение 2011–2014 годов увеличить почти вдвое собственную добычу нефти до уровня 9,2 млн баррелей в сутки. В это же период остальные нефтедобывающие страны свой уровень добычи либо увеличивали незначительно, либо даже снижали. Так, например, добыча нефти в России в последние годы росла с темпом около 1% в год. При этом на старых месторождениях добыча нефти падала на 1,5–2% в год, а на новых месторождениях – росла на 3–3,5% в год.

Если в период до 2013 года рост предложения нефти на рынке компенсировался ростом спроса, то в 2014 году потребление нефти росло более низкими темпами, и разница между спросом и предложением достигла 1,5–2,0 млн баррелей в сутки. Такой дисбаланс спроса и предложения привел к шоковому снижению цены на нефть.

Страны ОПЕК могли бы снизить уровень добычи нефти и таким образом ликвидировать избыток предложения, что помогло бы цене вернуться на более высокий уровень. Однако в 2014 году страны ОПЕК отказались от использования такой стратегии. Это решение объясняется нежеланием потерять долю рынка в пользу, прежде всего, производителей США, которые в случае быстрого восстановления цены на нефть смогли бы и дальше наращивать добычу нефти. Страны ОПЕК предпочли на первом этапе оставить вопрос балансировки спроса и предложения рыночным механизмам: низкая цена сделает добычу на дорогостоящих проектах нерентабельной, и предложение сократится. Производители сланцевой нефти уже отреагировали на снижение цен на нефть сокращением объемов бурения на наименее выгодных месторождениях: количество активных буровых установок к 2016 году снизилось почти в два раза.

Следует отметить, что нефтяные цены для многих стран, в том числе и России, являются ключевым фактором, влияющим на макроэкономические показатели и потенциал роста экономики. В этой связи представляется важным вопрос о том, будет ли сланцевая нефть оказывать большое влияние на нефтяной рынок

в течение ближайших 10–15 лет. По прогнозам ряда экспертов, добыча сланцевой нефти может пройти пик уже в 2020–2025 годах. Другие эксперты считают, что доля добычи сланцевой нефти в общемировой добыче будет расти вплоть до 2045–2050 годов. По их мнению, этому будет способствовать развитие технологий добычи и успешность разведочных работ. Однако слабая макроэкономическая среда может привести к сокращению инвестиций не только в США, но и в других странах. При этом запуск в эксплуатацию новых месторождений, которые сейчас находятся на ранней стадии разработки, может быть отложен. Это может негативно сказаться на темпах роста глобальной добычи нефти в среднесрочной и долгосрочной перспективе.

Все эти факторы объясняют большой интерес к исследованиям направленным на разработку различных количественных методов моделирования нефтяных рынков и анализа поведения его участников с учетом различных вариантов развития событий и сценариев. Главной целью этих исследований, очевидно, является прогнозирование уровня мировой добычи, спроса и цены на нефть.

2. Методы моделирования рынка нефти

Интерес к моделированию и прогнозированию уровня мировой добычи, спроса и цены на нефть всегда был высоким. Первые исследования в этой области рассматривали задачу прогнозирования времени пика добычи нефти, как для отдельных стран, так и в целом для мировой добычи нефти. Так как нефть является не возобновляемым ресурсом, то предполагается, что когда-нибудь общемировая добыча достигнет пика и далее будет снижаться.

Так, Кинг Хабберт в 1956 году предложил математическую модель, которая предполагает, что общее количество добытой нефти на некотором месторождении как функция времени следует логистической кривой [7]. Темп добычи нефти является производной этой функции, а ее график имеет колоколообразную форму, который известен как кривая Хабберта. Хабберт и его последователи предполагали, что те же модели, которые

позволили успешно предсказать пик добычи традиционной нефти в США, применимы и к другим случаям, таким как пик мировой добычи нефти. Были опубликованы различные оценки времени прохождения пика мировой добычи нефти, причём некоторые из этих результатов не подтвердились. Это привело к критике метода. Тем не менее, в США до сих пор существует ассоциация по исследованию пика нефти и газа ASPO (The Association for the Study of Peak Oil and Gas), целью которой является проведение исследований по оценке сроков и последствий прохождения глобального пика нефти и газа. Пример подобных исследований приведен в работе [7].

В последние годы большое число исследований по прогнозированию динамики добычи нефти и пика добычи проводилось с использованием более сложных моделей. Так, например, в [10] предложена модель ACEGES, которая представляет собой агенто-ориентированную модель добычи традиционной нефти для 93 стран. Модель учитывает четыре ключевых фактора неопределенности, а именно: предполагаемые расчетные конечные извлекаемые запасы, оценку роста спроса на нефть, предполагаемый рост добычи нефти и предполагаемую точку пиковой добычи в разных странах. Модель может быть использована для прогнозирования долгосрочных (дискретных и непрерывных) сценариев добычи традиционной нефти. Отметим, что предложенный подход и модель не позволяет прогнозировать нефтяные цены и учитывать их влияние на темпы роста добычи и потребления.

Последние годы усилился интерес к исследованиям в области математического моделирования различных аспектов конкуренции на рынке нефти между производителями традиционной и сланцевой нефти.

В [8] модель ACEGES используется для исследования влияния технологии добычи нетрадиционной нефти на динамику нефтяных рынков. Исследование проведено на примере четырех важных нефтедобывающих стран: Саудовской Аравии, Ирана, Канады и Венесуэлы. На основе полученного вероятностного прогноза делается вывод, что страны, которые богаты обычной нефтью, такие как Саудовская Аравия и Иран, будут оставаться глобальными игроками на нефтяном рынке в течение

первой половины 21 века; однако в течение второй половины 21 века игроки, добывающие нетрадиционную нефть, возьмут власть на мировом нефтяном рынке.

В [5] предложена модель оценки сценариев развития производства традиционной и сланцевой нефти в США, основанная на методологии системной динамики. Исследуются взаимосвязи между динамикой цены на нефть и изменениями в уровне технологии, объема производственных мощностей (буровых установок) и добычи нефти. С помощью статистических данных рынка сланцевой нефти США было выяснено, что лаг между моментом роста цены на нефть и моментом увеличения добычи сланцевой нефти на существующих скважинах составляет 3–5 месяцев. Кроме того, это приводит к более активному росту новых буровых установок с лагом 7–11 месяцев и увеличению добычи нефти с лагом 9–12 месяцев. В целом делается вывод, что сланцевая нефть может получить значительную долю рынка в среднесрочной перспективе, хотя традиционная нефть будет основным источником мирового рынка нефти в долгосрочной перспективе. Полученные результаты позволяют прогнозировать более поздний пик добычи традиционной нефти вследствие увеличения доли сланцевой нефти в ближайшем будущем. Тем не менее, негативное воздействие на окружающую среду сланцевых технологий добычи нефти может привести со стороны правительств к ограничениям на выдачу лицензий на новое бурения, что будет тормозить рост добычи сланцевой нефти.

Следует заметить, что в данной работе цена нефти считается экзогенной переменной (сценарии динамики нефтяных цен задаются заранее). При этом важнейшие вопросы балансирования рынка нефти и ценообразования в данном исследовании также не рассматриваются.

В [9] предложена модель долгосрочного прогноза добычи нетрадиционной нефти, основанная на методе разностных уравнений. Используя различные сценарии мирового потребления нефти, показано, что глобальный пик добычи нетрадиционной нефти произойдет примерно в 2080 году, причем максимальный уровень добычи нетрадиционной нефти составит порядка 50–80 млн баррелей в сутки.

Исследования, проведенные в [4], показывают, что пик тра-

диционной нефтедобычи, вероятно, пройдет между 2020 и 2030 годами, и объем традиционной нефтедобычи будет сокращаться после 2025 года. Эти вопросы исследуются с использованием модели системной динамики, которая учитывает альтернативные сценарии спроса и естественного истощения мировых запасов энергетических ресурсов, а также учитывает рыночные механизмы перехода от традиционных к нетрадиционным способам добычи нефти.

Следует заметить, что результаты прогноза у разных авторов довольно сильно отличаются друг от друга. Так, в [4] делается оптимистический прогноз для развития сланцевой нефти. Тогда как другие исследования показывают, что пик добычи сланцевой нефти придется только на вторую половину 21 века.

В [6] анализируются тенденции в области инвестиционной политики в нефтяном секторе с учетом новых вызовов для нефтяных компаний, связанных прежде всего с ужесточением требований и ограничений по защите окружающей среды, увеличением налоговой нагрузки для компаний. Кроме того, компаниям приходится инвестировать в новые нефтяные проекты с более сложными геологическими условиями, что приводит к существенному повышению инвестиционных издержек, длительности инвестиционного цикла и задержкам ввода в эксплуатацию новых месторождений. В работе построена эконометрическая модель, основанная на использовании техники Arellano-Бонд GMM, которая позволяет анализировать выше перечисленные факторы на инвестиционную политику компаний. Если многие из этих негативных факторов, как ожидается, сохранятся и даже усилятся в ближайшем будущем, то ограничения в области увеличения поставок нефти останутся доминирующим фактором колебаний цен на нефть.

В [3] исследуется модель спроса и предложения на нефтяном рынке. Спрос на нефть и предложение имеют очень низкую ценовую эластичность, и эта характеристика делает цены на нефть крайне неустойчивыми. Нефтяные цены могут изменяться в более широких пределах, чем цены на другие товары. Кроме того, на динамику роста спроса на нефть влияет кредитно-денежная политика на рынке долларовых активов. Проводится анализ денежно-кредитной политики США низких или отрица-

тельных реальных процентных ставок, которая, по утверждению авторов, является дестабилизирующим фактором для нефтяных рынков. В работе показано, что денежно-кредитная политика в области процентных ставок и курса доллара США стимулирует мировой спрос на нефть в условиях ограниченных поставок нефти, что приводит к неадекватно высоким ценам на нефть, которые являются ограничителем для мирового экономического роста.

Следует отметить, что задача моделирования нефтяного рынка (включая прогнозирование динамики нефтяных цен) с учетом всех факторов, влияющих на его параметры, является исключительно сложной. Поэтому в работе основное внимание уделено моделированию причинно-следственных связей между рыночным спросом на «физическую» нефть, предложением ее со стороны производителей и ценой, которая «балансирует» спрос и предложение. При этом из поля зрения, конечно, выпадают многие важные моменты, такие, например, как влияние на цену нефти параметров финансовых рынков, включая политику ФРС США в области процентных ставок и курса доллара, протекционистская политика ряда стран и многое другое, включая «психологические» реакции участников рынка на изменение его волатильности. Каждый из этих факторов требует отдельного исследования. Поэтому любое исследование этих вопросов с помощью математического моделирования страдает односторонностью. Это показывает и приведенный в данном разделе обзор публикаций.

Целью данной работы является построение макроэкономической модели, позволяющей анализировать связь между выбором игроками своих инвестиционных стратегий и рыночной ценой нефти, которая определяется соотношением спроса и предложения, и, возможными сценариями динамики мирового потребления нефти. Нас будет интересовать прежде всего исследование поведения цены на нефть в среднесрочной перспективе с учетом нового возмущающего фактора – появления на рынке нефтедобывающих компаний, использующих технологию добычи сланцевой нефти.

Проведение многовариантных расчетов с использованием разработанной модели позволит дать игровой анализ рацио-

нальных инвестиционных стратегий игроков и исследовать их влияние на процесс поиска рынком равновесия и равновесных цен в зависимости от внешних условий и параметров асимметрии на рынке [1].

3. Модель

Рассмотрим рынок, на котором присутствует N агентов (производителей нефти). Далее рассматривается временной промежуток (прогнозный период) равный T периодов: $t = 1, \dots, T$. Обозначим через $D(t)$ динамику рыночного спроса на нефть, – это экзогенная переменная, график изменения которой задается заранее для различных внешних по отношению к модели макроэкономических сценариев.

Пусть $P(t)$ – рыночная цена нефти в период t . Предполагается, что в каждый период времени рыночная цена формируется на основе соотношения спроса $D(t)$ и суммарного предложения со стороны агентов $S(t)$. $S(t)$ определяется в каждый период t как $S(t) = \sum_{i=1}^N S_i(t)$, где $S_i(t)$ – предложение нефти на рынок агентом i , которое определяется его производственной мощностью по добыче нефти. Тогда

$$(1) \quad P(t) = P(0) \cdot \left(1 + \gamma \cdot \frac{D(t) - S(t)}{D(t)} \right),$$

где $P(0)$ – цена на рынке на начало прогнозного периода (начальные условия). Если $D(t) - S(t) \geq 0$, то возникает дефицит предложения на рынке и цена растет, в противном случае – избыток предложения и, соответственно, цена падает. Заметим, что суммарное предложение со стороны агентов $S(t)$ зависит от их инвестиционных стратегий, которые определяются в данной модели, в том числе динамикой рыночной цены на нефть. Параметр γ – эластичность цены нефти по величине превышения спроса над предложением.

3.1. МОДЕЛЬ ПОВЕДЕНИЯ АГЕНТОВ

Производственная мощность агентов. Производственная мощность агента рассчитывается с помощью рекуррентного

соотношения $S_i(t) = S_i(t-1) + V_i(t)$, где $V_i(t)$ – изменение производственной мощности агента i в период t , который зависит от объема ранее сделанных инвестиций. $S_i(0)$ – начальная мощность производства (добычи нефти):

$$(2) \quad V_i(t) = F_i(I_i(t - \tau_i) - I_i^*).$$

Здесь функция F_i задает зависимость между изменением производственных мощностей агента и, соответственно, его предложением нефти на рынке и объемом инвестиций; $I_i(t)$ – объем инвестиций в развитие производственных мощностей агента i в период t ; τ_i – временной лаг между периодом инвестирования и периодом соответствующего изменения производственных мощностей; I_i^* – объем инвестиций, необходимых для поддержания уровня добычи нефти.

Следует пояснить особенность нефтяной отрасли, которая состоит в следующем: если агент инвестирует в развитие производства меньше величины I_i^* , то объем его добычи $V_i(t)$ будет падать с некоторым временным лагом τ_i . И наоборот: для того чтобы производственная мощность агента росла, необходимо чтобы объем его инвестиций превышал величину I_i^* :

если $I_i(t) = I_i^*$, то $V_i(t) = 0$;

если $I_i(t) \geq I_i^*$, то $V_i(t) \geq 0$;

если $I_i(t) \leq I_i^*$, то $V_i(t) \leq 0$.

Типичный вид функции F_i представлен на рис. 1.

Инвестиционные стратегии агентов. Далее предполагается, что агенты принимают инвестиционные решения в условиях высокой волатильности рынка и неопределенности относительно прогнозной динамики спроса $D(t)$. Агенты могут наблюдать в каждом периоде t лишь за изменением цены нефти и прогнозировать ее изменение на следующие несколько периодов. Агенты на каждом шаге t принимают инвестиционные решения на основе этой доступной информации в соответствии с некоторым заранее заданным алгоритмом, который будет описан далее.

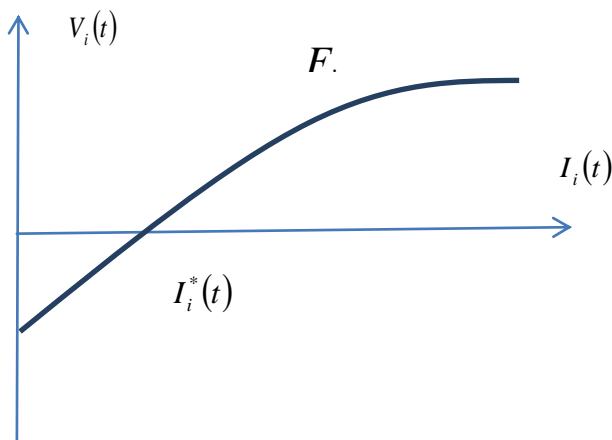


Рис. 1. Вид функции F_i

Пусть P_i^* – точка безубыточности агента i , равная цене нефти на рынке, при которой прибыль агента равна нулю. Поэтому если в период t $P(t) \geq P_i^*$, то у агента i прибыль от операционной деятельности положительна и он имеет возможность инвестировать в развитие производственных мощностей и, соответственно, в поддержание или увеличение уровня добычи нефти. В противном случае у агента возникают операционные убытки и, соответственно, инвестиции равны нулю:

$$(3) \quad I_i(t) = \omega_i(P(t) - P_i^*),$$

где функция ω_i задает зависимость между инвестициями агента и разницей между рыночной ценой нефти и его точкой безубыточности.

Подставим выражение (3) в (2), получим

$$(4) \quad V_i(t) = F_i(\omega_i(P(t - \tau_i) - P_i^*) - I_i^*).$$

Заметим, что в выражении (4) переменной величиной является только $P(t)$, остальные параметры являются константами. Далее, заменим функции F_i и ω_i на функцию μ_i , тогда

$$(5) \quad V_i(t) = \mu_i((P(t) - P_i^*), I_i^*, \tau_i).$$

Предлагаемый подход состоит в построении функциональной зависимости μ_i на основе анализа рыночного поведения агентов, параметров способа добычи нефти, представленных, например, в таблице 1, и некоторых допущений. Функциональная зависимость μ_i описывает поведение агентов на рынке в зависимости от динамики цены нефти, которая, в свою очередь, зависит от выбора агентами инвестиционных стратегии и динамики мирового спроса на нефть $P(t)$.

Далее будем предполагать, что функциональная зависимость μ_i задает максимально возможный прирост производственных мощностей агента в зависимости от $P(t)$. Вместе с тем, агенты могут сознательно выбирать уровень своей инвестиционной активности и, соответственно, прирост производственной мощности и объем предложения нефти на рынке, прогнозируя последствия своего выбора на баланс спроса и предложения. Пусть параметр α_i характеризует инвестиционную активность агента i , $0 \leq \alpha_i \leq 1$. Величины α_i являются параметрами модели, которые могут выбираться агентами:

$$(6) \quad V_i(t) = \alpha_i \mu_i((P(t) - P_i^*), I_i^*, \tau_i).$$

Заметим, что если $\alpha_i = 1$, то агент выбирает агрессивную политику, направленную на максимальное наращивание производственных мощностей по добыче нефти и захвату рынка. Напротив, если $\alpha_i = 0$, то агент сознательно «замораживает» добычу или даже снижает ее, тем самым ослабляет давление на рынок в надежде на более высокие цены.

Множество возможных инвестиционных стратегий каждого агента совпадает с множеством точек единичного отрезка. Без потери общности в рамках решения данной задачи можно рассматривать конечный набор стратегий.

Заметим, что модель (1)–(4), (6) является замкнутой и позволяет, задавая на входе параметры модели и сценарии динамики спроса $D(t)$, рассчитать динамику предложения со стороны агентов, изменение их рыночной доли и динамику нефтяных цен.

3.2. КРИТЕРИИ ЭФФЕКТИВНОСТИ СТРАТЕГИЙ

Рассмотрим далее критерии эффективности, которыми руководствуются агенты при выборе своих инвестиционных стратегий. Будем предполагать, что каждый агент заинтересован в выборе такой инвестиционной стратегии (с учетом возможного выбора стратегий конкурентов), которая обеспечит сохранение или увеличение его рыночной доли и одновременно максимизацию поступления денег от продажи нефти. Последний критерий важен, так как его максимизация позволят агентам получать достаточно денежных средств для инвестиций в поддержание и увеличение своих производственных мощностей и, соответственно, уровня добычи нефти.

Критерий 1. Доля рынка. Пусть $B(t)$ – общий объем поставок нефти в период t , который рассчитывается по формуле $B(t) = \min\{D(t); S(t)\}$. Предположим, что загрузка производственных мощностей всех агентов одинакова, тогда объем поставок агента i вычисляется следующим образом: $B_i(t) = B(t) \frac{S_i(t)}{S(t)}$.

Соответственно, доля рынка агента в каждый период времени равна $m_i(t) = \frac{B_i(t)}{B(t)}$. Критерий 1 может быть выражен следующим образом:

$$(7) \quad m_i(T) \rightarrow \max \quad i = 1, N.$$

Агенты стараются максимизировать свою рыночную долю в конце прогнозного периода, используя, в том числе, стратегию ценовых войн. В случае конечного набора возможных стратегий агентов задача сводится к анализу матричной антагонистической игры с нулевой суммой.

Критерий 2. Доход от продажи. Вторым критерием эффективности стратегий агентов является общая стоимость поставок нефти за прогнозный период, которая вычисляется следующим образом: $Inc_i = \sum_{t=1}^{t=T} P(t)B_i(t)$. Заметим, что агенты в ряде стран являются госкомпаниями и должны учитывать в выборе своих инвестиционных стратегий интересы государства, связанные с пополнением доходных статей бюджета за счет

нефтяных доходов. Поэтому в некоторых случаях этот критерий в краткосрочной перспективе может быть более важным, чем рыночная доля агентов.

В данной постановке задачи нас будет интересовать в первую очередь агенты двух типов: компании, добывающие нефть по традиционной технологии, и компании, добывающие трудно извлекаемую (сланцевую) нефть. Поэтому далее будем рассматривать рынок типа дуополия, на котором представлены два агента. Пусть конечное множество инвестиционных стратегий агента 1 состоит из K элементов, где k – номер стратегии ($k = 1, \dots, K$). Соответственно, для агента 2 множество инвестиционных стратегий состоит из J элементов ($j = 1, \dots, J$). По результатам проведения серии расчетов на модели для каждого сценария $D(t)$ можно построить матрицу выигрышей агентов $Inc_{k,j}^1, Inc_{k,j}^2$.

В этом случае решение задачи сводится к анализу биматричной игры с платежными матрицами $Inc_{k,j}^1, Inc_{k,j}^2$. Данная задача достаточно хорошо исследована. Как известно, условием существования хотя бы одной равновесной точки Нэша в чистых стратегиях (k_0, j_0) является выполнение следующих неравенств:

$$(8) \quad Inc_{k_0 j_0}^1 \geq Inc_{k j_0}^1, k = \overline{1, K};$$

$$(9) \quad Inc_{k_0 j_0}^2 \geq Inc_{k_0 j}^2, j = \overline{1, J}.$$

Если такая точка существует, то она считается решением данной задачи.

Возможность получения решения (равновесной точки Нэша) биматричной игры в чистых стратегиях в общем случае не гарантировано и зависит от свойств матрицы $Inc_{k,j}^1, Inc_{k,j}^2$. Метод решения данной задачи включает проведение серии расчетов на имитационной модели, построение платежной матрицы, ее анализ и поиск решения [1].

В смешанных стратегиях равновесная точка всегда существует и может быть найдена различными методами, например сведением к задаче ЦЛП или к линейной задаче дополнителности. Заметим, что смешанное равновесие Нэша служит не очень

«удобным» вариантом решения данной игры, поскольку игровая ситуация разыгрывается только один раз.

Заметим, что платежные матрицы $Inc_{k,j}^1, Inc_{k,j}^2$ задаются имитационной моделью, поэтому в качестве основного метода исследования данной задачи будет использоваться метод численного моделирования.

Следует отметить, что в исследуемой задаче предполагается, что агенты однократно выбирают свои инвестиционные стратегии и сохраняют их на протяжении всего прогнозного периода. При этом, как показано выше, задача сводится к анализу одношаговой матричной игры. Если снять это допущение и считать, что агенты на протяжении прогнозного периода могут менять свои инвестиционные стратегии, т.е., например, до некоторого периода времени придерживаются «агрессивной» инвестиционной политики, а после него – сокращают объем инвестиций и постепенно «сворачивают бизнес».

В такой постановке исследуемая задача может быть сведена к анализу многошаговой (динамической) матричной игры, и в силу специфики рассмотренных сценариев спроса на нефть оптимальные решения будут иметь «кусочно-постоянный» вид. Решение задачи может быть получено с помощью анализа последовательности одношаговых матричных игр и проведения серии численных экспериментов с разработанной моделью.

В следующем разделе приводятся результаты практического использования разработанной модели для анализа и выбора инвестиционных стратегий нефтяных компаний с традиционным и нетрадиционным способом добычи. Будет показано, что во многих случаях существуют решения исследуемой задачи (равновесные точки Нэша) в чистых стратегиях, анализ которых позволяет сделать ряд интересных для практики выводов.

4. Моделирование и анализ результатов

Рассмотрим рынок типа «дуополия», на котором представлены агенты двух типов: компании, добывающие нефть по традиционной технологии, и компании, добывающие трудно

извлекаемую (сланцевую) нефть. Рассматривается прогнозный период с 2016 года по 2031 год (15 периодов).

В расчетах использованы следующие параметры модели:

Предполагается, что в начальный период спрос и предложение на рынке сбалансированы, т.е. $B(0) = D(0) = S(0)$, и равны 90 млн баррелей в сутки; $P(0)$ – равновесная рыночная цена нефти, равная 45 долларов США за баррель.

Параметр эластичности цены γ равен 26,2. Это означает, что при отклонении величины небаланса в период t от равновесного значения (в период $t = 0$) на b процентов, соответственно, рыночная цена нефти изменится по отношению к ее равновесному значению на $26,2b$ процентов (с тем же знаком). Значение параметра эластичности цены γ оценено в результате анализа данных поквартальной динамики мирового спроса на нефть, поставок со стороны производителей и рыночных цен на нефть за период с 1 кв. 2013 года по 3 кв. 2016 года. Данные представлены на сайте International Energy Agency (<https://www.iea.org/oilmarketreport/omrpublic>).

Прогноз динамики мирового спроса на нефть $D(t)$. Международное энергетическое агентство (IEA) в своем ежегодном исследовании «Прогноз мировой энергетики 2016» рассматривает три сценария развития спроса и предложения на рынке нефти до 2040 года. Основной сценарий учитывает последствия выполнения Парижского договора о сокращении вредных выбросов (Nationally Determined Contributions, NDC) и существенное замедление роста потребления углеводородного топлива в мире. По этому сценарию мировой спрос на нефть к 2040 году возрастет на 12%, до 103,5 млн баррелей в сутки. Наибольшую долю в росте спроса за этот период обеспечат Индия и Китай, при этом Китай станет крупнейшим потребителем нефти, опередив к началу 2030-х годов по этому показателю США. Более консервативный сценарий предусматривает ежегодный рост мирового спроса на нефть до 2030 года в среднем на уровне 1,0–1,5%. При этом мировой спрос на нефть к 2040 году возрастет до 108,5 млн баррелей в сутки. Наиболее амбициозный сценарий предполагает в ближайшие годы резкий рост количества электромобилей, а также широкое распространение возоб-

новляемых источников энергии, включая биотопливо. В соответствии с этим сценарием глобальный спрос на нефть достигает пика к 2020 году (на уровне 95–96 млн баррелей в сутки), после чего глобальный спрос на нефть будет снижаться.

В расчетах рассматривается два крайних сценария: консервативный (сценарий 1) и «амбициозный» (сценарий 2). Сценарий 1 предусматривает равномерный рост мирового спроса на нефть на уровне 1,5% в год. В сценарии 2 предполагается, что в период с 2016 по 2020 год происходит рост спроса на уровне 1,0% в год, в период с 2021 по 2025 годы – стабилизация спроса и далее после 2025 года – падение спроса на уровне 1,0% в год.

Параметр $S_i(0)$ (начальная мощность по добыче нефти). Агент 1 (традиционная технология добычи нефти) – 86,4 млн баррелей в сутки (или 96% мирового рынка). Агент 2 (технологии добычи сланцевой нефти) – 3,6 млн баррелей в сутки (4% мирового рынка). Эти данные соответствуют фактическому соотношению мировой добычи между производителями традиционной и сланцевой нефти в начале 2016 года.

Таблица 2. Традиционная добыча нефти

Интервал цены нефти, \$/баррель						
0–20	20–40	40–60	60–80	80–100	100–120	120–140
Прирост добычи, %						
–5,0%	–0,5%	0,5%	1,0%	1,5%	2,0%	2,5%

Таблица 3. Добыча сланцевой нефти

Интервал цены, \$/баррель						
0–20	20–40	40–60	60–80	80–100	100–120	120–140
Прирост добычи, %						
–50,0%	–20,0%	0,0%	20,0%	30,0%	35,0%	40,0%

Точка безубыточности P_i^* агентов принята на уровне: агент 1 – 20 долл./баррель и агент 2 – 50 долл./баррель. В соответствии с этим функциональная зависимость μ_i , задающая значения максимально возможного прироста производственной

мощности агентов в зависимости от $P(t)$, представлена в таблицах 2 и 3.

Временной лаг между периодом инвестирования и периодом соответствующего изменения производственных мощностей τ_i равен: для агента 1 – два периода и агента 2 – один период. Приведенные данные отражают существенное отличие (асимметрию) параметров модели агента 1 и агента 2. Так, данные, приведенные в таблице 3, отражают короткий инвестиционный цикл в секторе сланцевой нефти и способность сланцевых компаний быстро реагировать на ценовые сигналы активно наращивать или сокращать инвестиции и, соответственно, объем добычи и предложения на рынке. Как отмечалось ранее, компании добывающие нефть по традиционной технологии обладают большей инерционностью (таблица 2).

Будем рассматривать три возможные инвестиционные стратегии агентов, задаваемые параметром их инвестиционной активности α_i : стратегия 1 ($\alpha_i = 1$), стратегия 2 ($\alpha_i = 0,75$) и стратегия 3 ($\alpha_i = 0,5$).

Варьируя заданный набор стратегий агентов для каждого сценария динамики мирового спроса на нефть $D(t)$, с помощью разработанной модели можно построить матрицы выигрышей, соответствующие выбранным критериям эффективности. Критерий 1 – доля рынка каждого агента в % и критерий 2 – суммарная за все периоды стоимость поставленной на рынок нефти (млрд. долл. США).

Сценарий 1. В соответствии с этим сценарием рыночный спрос на нефть на протяжении прогнозного периода растет равномерно с темпом 1,5% в год (рис. 4). Матрицы выигрышей агентов приведены в таблице 4 и 5.

Первый элемент матрицы (таблица 5) соответствует выигрышу первого игрока, а второй элемент – выигрышу второго игрока. В таблице полужирным шрифтом выделены максимальные элементы столбцов матрицы первого игрока и максимальные элементы строк матрицы второго игрока. Анализ полученной матрицы показывает наличие единственной равновесной точки Нэша, которая соответствует выбору агентом 1 инвестиционной стратегии 3, а агентом 2 инвестиционной стратегии 1

($k = 3$ и $j = 1$). Элементы матрицы первого и второго игрока в этой точке выделены полужирным шрифтом.

Таблица 4. Матрица выигрышей агента 2 по критерию 1 (%)

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$
$k = 1$	13,8	11,5	11,2
$k = 2$	16,5	15,0	12,8
$k = 3$	16,8	16,1	14,7

Таблица 5. Матрица выигрышей по критерию 2 (млрд. \$)

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$
$k = 1$	87,3\7,7	90,5\7,6	101,4\7,4
$k = 2$	87,4\8,7	95,3\8,8	104,8\8,5
$k = 3$	91,0\10,2	96,4\10,1	108,5\10,0

При реализации сценария 1 наилучшей стратегией агента 1 с точки зрения критерия 2 является выбор стратегии 3 при любом ответе агента 2. Это означает, что агенту 1 выгодно придерживаться сдержанной инвестиционной стратегии ($\alpha_i = 0,5$), что позволяет ему поддерживать нефтяные цены на достаточно высоком уровне, в интервале 50–70 долл. США за баррель.

Заметим, что при реализации сценария 1 рыночная доля компаний, добывающих сланцевую нефть, при любом сочетании вариантов стратегий игроков, будет существенно увеличена с 4% (2016 год) до 13,8%–17,1% (2031 год). Если агент 1 хочет минимизировать потерю своей доли рынка из-за агрессивной стратегии агента 2, то он должен выбрать стратегию 1, но при этом потери его по критерию 2 составят около 5%.

Напротив, для агента 2 с точки зрения любого критерия наилучшей стратегией является стратегия 1. Это мы наблюдаем на рынке: сланцевые компании США, как только цена нефти становится выше их точки безубыточности, используют, как правило, агрессивную инвестиционную стратегию, направленную на увеличение добычи и захват доли рынка. Заметим, что в случае реализации сценария 1 агенту 2 удастся существенно потеснить на рынке агента 1 (таблица 4).

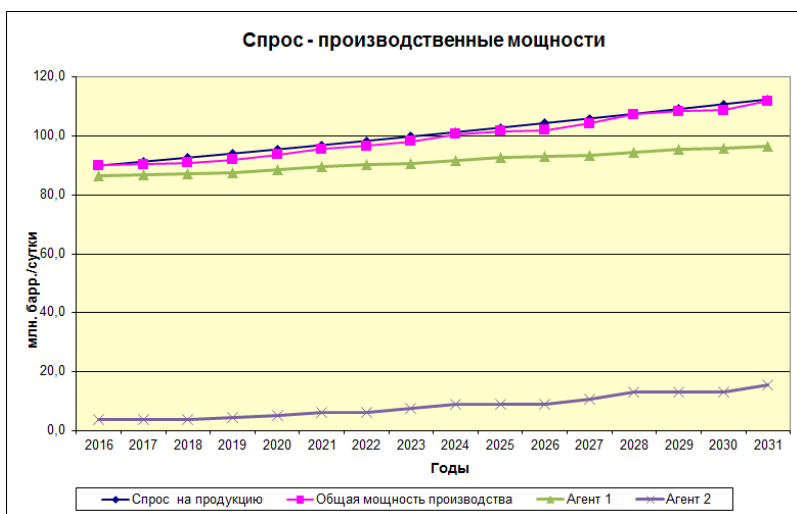


Рис. 2. Спрос – производственные мощности, сценарий 1

На рис. 2 показана динамика предполагаемого рыночного спроса на нефть для сценария 1 и динамики роста производственных мощностей и, соответственно, предложения со стороны игроков (агент 1 и агент 2). На рис. 3 показана динамика цены на нефть. Колебания цены вокруг значения в 60 долларов США за баррель связаны с выбором сланцевыми компаниями агрессивной инвестиционной стратегии. Колебания графика с периодом примерно в три года объясняется коротким инвестиционным циклом сланцевых компаний. При увеличении цены выше 60 долл. США за баррель сланцевые компании начинают увеличивать инвестиции, что приводит с временным лагом в один год

к увеличению предложения нефти и баланс на рынке нарушается, что приводит в свою очередь к соответствующему снижению цены.

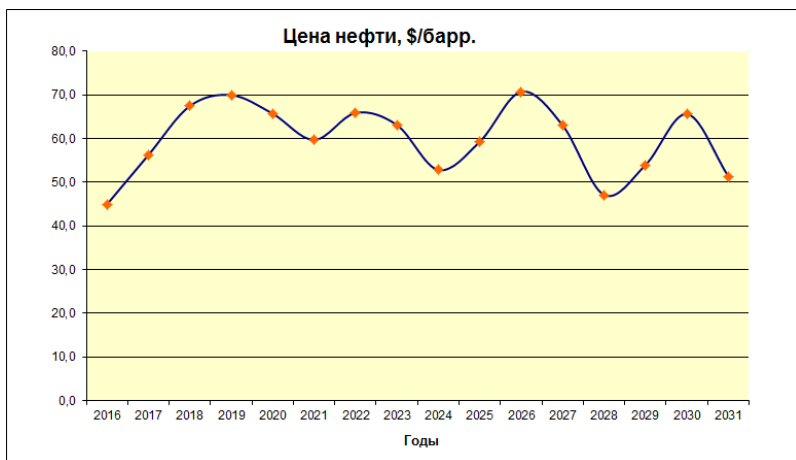


Рис. 3. Цена нефти, сценарий 1

На рис. 4 показана динамика цены нефти для вырожденного случая, когда на рынке отсутствуют компании, добывающие сланцевую нефть. Расчеты показывают, что равновесной ценой нефти в этом случае является цена 90 долл. США за баррель.

Сценарий 2. В соответствии с этим сценарием рыночный спрос на нефть в период с 2016 по 2020 год растет с темпом 1,0% в год, в период с 2021 по 2025 годы – происходит стабилизация спроса (нулевой рост) и, далее, после 2025 года – происходит падение спроса с темпом 1,0% в год. Матрицы выигрышей агентов приведены в таблице 6 и 7. На рис. 5 показана динамика предполагаемого рыночного спроса на нефть и динамики роста производственных мощностей и, соответственно, предложения со стороны игроков (агент 1 и агент 2). На рис. 6 показана динамика цены на нефть.

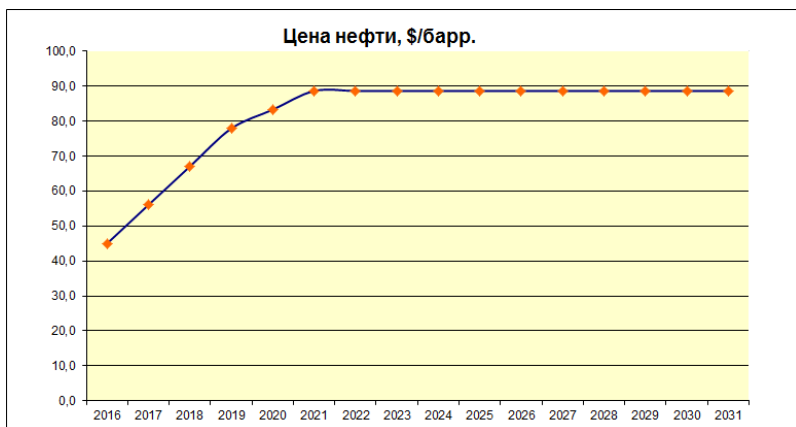


Рис. 4. Цена нефти, сценарий 1

Таблица 6. Матрица выигрышей агента 2 по критерию 1 (%)

	j=1	j=2	j=3
k=1	1,3	1,7	2,0
k=2	1,5	1,6	1,8
k=3	1,9	2,3	2,9

Таблица 7. Матрица выигрышей по критерию 2 (млрд. \$)

	j=1	j=2	j=3
k=1	56,5\2,2	57,3\2,3	60,0\2,4
k=2	59,0\2,4	57,9\2,4	59,5\2,5
k=3	57,8\2,8	58,0\2,8	61,0\2,8

В таблице 7 полужирным шрифтом выделены максимальные элементы столбцов матрицы первого игрока и максимальные элементы строк матрицы второго игрока. Анализ полученных матриц показывает наличие единственной равновесной точки Нэша, которая соответствует выбору обоими игроками инвестиционной стратегии 3 ($k = 3$ и $j = 3$).

Это означает, что обоим игрокам выгодно придерживаться сдержанной инвестиционной стратегии ($\alpha_i = 0,5$), что позволит им даже при неблагоприятной динамике спроса на рынке поддерживать нефтяные цены до 2025 года на уровне выше 40 долларов США за баррель. Поскольку цена нефти 40 долларов США за баррель значительно ниже точки безубыточности для компаний, добывающих сланцевую нефть, то это приводит к тому, что добыча сланцевой нефти после 2022 года станет убыточной и будут существенно сокращаться.

Анализ результатов расчетов, приведенных в таблице 6, показывает, что при реализации сценария 2 сланцевые компании не смогут конкурировать с компаниями, добывающими традиционную нефть, их рыночная доля уменьшится с 4% (2016 год) до 1,3%–2,9% (2031 год).

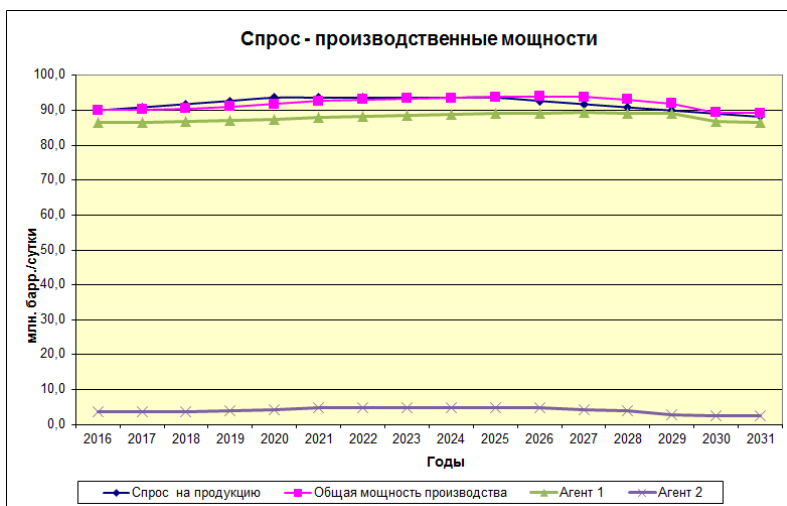


Рис. 5. Спрос – производственные мощности, сценарий 2

Заметим, что, в соответствии со сценарием 2, пик спроса на нефть будет пройден в период с 2023 по 2025 год. Далее цена нефти будет снижаться более быстрыми темпами и достигнет минимума в 2028 году. По-видимому, все игроки в этой ситуации будут вынуждены сокращать добычу для того, чтобы сбалансировать мировой рынок нефти на новых уровнях, что приведет к 2030 году к кратковременному росту цены нефти до уровня 40 долларов США.

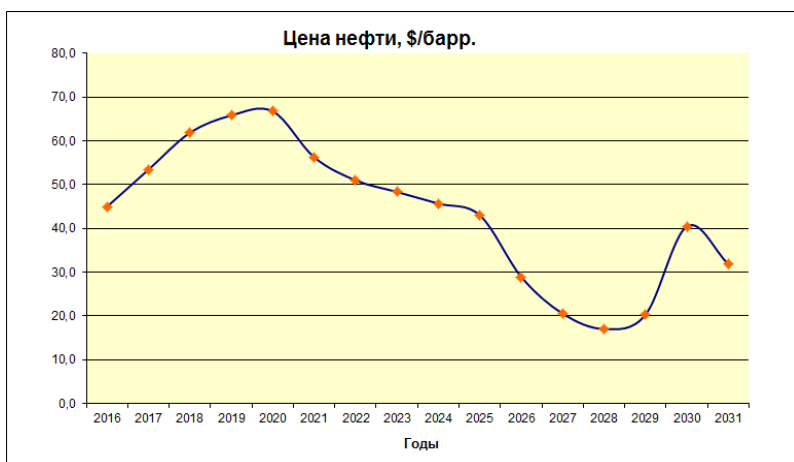


Рис. 6. Цена нефти, сценарий 2

Как видно из анализа приведенных данных, сценарий 2 является крайне пессимистическим для нефтедобывающего сектора. После 2025 года многие игроки с высокой точной безубыточности вынуждены будут уйти с рынка. Оставшимся игрокам придется сокращать инвестиции в поддержание добычи и новые проекты, что будет приводить к сокращению предложения на рынке и к поиску нового ценового равновесия в условиях сокращения мирового спроса на нефть и замену ее новыми, альтернативными источниками энергии.

4. Заключение

Рассмотрена задача оценки и выбора инвестиционных стратегий нефтедобывающих компаний в условиях конкуренции между компаниями с традиционным и нетрадиционным способом добычи. Задача сведена к анализу биматричной игры, в которой матрица выигрышей формируется в результате численного моделирования. Метод решения данной задачи включает проведение серии численных расчетов на разработанной имитационной модели, построение платежных матриц для различных сценариев и их анализ.

Результаты моделирования показывают, что при благоприятном сценарии мирового спроса на нефть (сценарий 1) нетрадиционная нефть может получить значительную долю рынка в среднесрочной перспективе, хотя добыча традиционной нефти будет оставаться основным источником поставок на мировой рынок нефти. К 2019–2020 годам проекты сланцевой нефти, которые сейчас только планируются, могут стать ключевой частью кривой предложения, причем уровень безубыточности этих проектов составит 55–60 долларов США за баррель. Вероятно, в среднесрочной перспективе равновесная цена на нефть будет колебаться около этого уровня. В случае реализации сценария 2 избыток предложения нефти по сравнению со спросом может привести к раннему пику для обычной нефти и существенному снижению нефтяных цен.

Следует заметить, что рассмотренная в работе модель сознательно упрощена и не учитывает некоторые существенные факторы, в том числе возможное изменение точки безубыточности вследствие перехода компаний к разработке более затратных месторождений, а также совершенствование технологий добычи, приводящее к сокращению затраты на разработку и добычу нефти.

Практический интерес представляет также разработка методов решения исследуемой задачи для случая трех и более игроков, что позволит сделать прогнозы параметров нефтяного рынка, полученные с помощью предложенных методов, более реалистичными. Кроме этого, большой интерес представляет анализ решения исследуемой задачи с учетом соотношения

динамики истощения разведанных запасов нефти и, соответственно, естественного снижения ее добычи и сокращения мирового спроса на нефть.

Литература

1. АКИНФИЕВ В.К. *Моделирование инвестиционных стратегий компаний в условиях неопределённости* // Управление большими системами. – 2016. – Вып. 61. – С. 136–167.
2. ПОЛЯКОВА Т.В. *Перспективы развития добычи сланцевых углеводородов в Северной Америке* // Вестник МГИМО. – 2014. – № 1 (34). – С. 97–105.
3. ASKARI H., KRICHENE N. *An oil demand and supply model incorporating monetary policy* // Energy. – May, 2010. – Vol. 35, Iss. 5. – P. 2013–2021.
4. GREENE D.L., HOPSON J.L., LI J. *Have we run out of oil yet? Oil peaking analysis from an optimist's perspective* // Energy Policy. – 2006. – No. 34. – P. 515–531.
5. HOSSEINI S.H., SHAKOURI G.H. *A study on the future of unconventional oil development under different oil price scenarios: A system dynamics approach* // Energy Policy. – 2016. – No. 91. – P. 64–74.
6. HVOZDYK L. MERCER-BLACKMAN V. *What Determines Investment in the Oil Sector? A New Era for National and International Oil Companies* // IDB working paper series (IDB-wp-209). – Inter-American Development Bank, 2010. – P. 46.
7. MAGGIO G.Ã., CACCIOLA G. *A variant of the Hubbert curve for world oil production forecasts* // Energy Policy. – 2009. – No. 37. – P. 4761–4770.
8. MATSUMOTO K.Ö., VOUDOURIS V. *Potential impact of unconventional oil resources on major oil-producing countries: scenario analysis with the ACEGES model* // Nat. Resour. Res. – 2015. – No. 24. – P. 107–119.
9. MOHR S.H., EVANS G.M. *Long term prediction of unconventional oil production* // Energy Policy. – 2010. – No. 38. – P. 265–276.

10. VOUDOURIS V. DI MAIO C. *ACEGES 1.0 Documentation: Simulated scenarios of conventional oil production* // London Metropolitan Business School Working Papers Series. – August, 2010. – No. 12. – P. 14. – URL: <http://ssrn.com/abstract=1652361>.

A MODEL OF COMPETITION BETWEEN OIL COMPANIES WITH CONVENTIONAL AND UNCONVENTIONAL OIL PRODUCTION

Valerij Akinfiev, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Doctor of Science, professor (akinf@ipu.ru).

Abstract: This paper examines the problem of investment strategies choice of oil companies with conventional and unconventional oil production. A mathematical model describing the relationship between the oil companies' investment strategies and the oil price, which depends on the ratio of supply and demand on the world oil market, is constructed and discussed. Solution is reduced to the analysis of a bimatrix game, where in the payoff matrix is formed by numerical simulation. Two possible scenarios of play are presented, a stable one and a volatile one. We present an illustrative example of the proposed approach. The obtained results show that unconventional oil production, including shale oil, will occupy a significant portion of the market in the medium term. Average market price of oil is expected to reach 55-60 \$ per barrel. This model, however, does not account for possible technology advancements, which could lower the expense of oil extraction and, thus, market price.

Keywords: investment strategies, mathematical model, competition in the oil market, bimatrix game.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии В.В. Ключковым.

Поступила в редакцию 26.12.2016.

Опубликована 31.05.2017.

УДК 338.2
ББК 65.05.3

ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ОЦЕНКИ ЭКОЛОГО-ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ЭФФЕКТИВНОСТИ РЕГИОНОВ НА ОСНОВЕ БАЗОВЫХ МОДЕЛЕЙ АНАЛИЗА СРЕДЫ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ¹

Ратнер С.В.²,

*(ФГБУН Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)*

Проведен сравнительный анализ применимости нескольких методов решения динамических задач анализа среды функционирования (АСФ) к вопросам мониторинга эколого-экономической эффективности хозяйственной деятельности региональных экономических систем (на примере регионов Центрального федерального округа). Рассматриваются метод формирования временных рядов на основе точечных оценок эколого-экономической эффективности, метод Малкмвиста и метод окна. Анализируются на устойчивость и адекватность результаты, полученные при различной ширине окна. Сравнение полученных результатов позволяет сделать вывод об однозначной предпочтительности метода окна для решения задач мониторинга эколого-экономической эффективности регионов не только с вычислительной, но и с содержательной точки зрения.

Ключевые слова: анализ среды функционирования, непараметрическая оптимизация, динамические задачи, метод окна.

¹ Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 16-06-00147_a «Разработка моделей анализа среды функционирования для оптимизации траекторий развития региональных экономических систем по экологическим параметрам».

² Светлана Валерьевна Ратнер, доктор экономических наук (lanarat@mail.ru, тел. (495) 334-79-00).

1. Введение

Анализ среды функционирования (в англоязычном варианте Data Envelopment Analysis, DEA) в настоящее время представляет собой развитую методологию сравнительной оценки эффективности функционирования различных производственных объектов по широкому набору входных и выходных показателей их деятельности. Эффективность в контексте анализа среды функционирования понимается как отношение взвешенной суммы выходов производственного объекта (полезных результатов деятельности, например, объема произведенной продукции) к взвешенной сумме его входов (потребляемых ресурсов), что позволяет классифицировать объекты как эффективные только в том случае, когда они производят наибольшие выходы при наименьших входах [14]. Базовые и модифицированные модели анализа среды функционирования успешно применяются для решения широкого класса практических задач управления: от формирования рейтингов предприятий [10], регионов [5], научно-инновационных программ [4] до выбора оптимальных путей повышения эффективности производственных объектов, деятельность которых на данный момент не является эффективной [6]. При этом в качестве производственных объектов могут рассматриваться как отдельные экономические агенты, так и их некоторые интеграционные образования (корпорации, кластеры, региональные экономические системы), главное, чтобы их деятельность могла быть описана одинаковым набором входных и выходных параметров.

Одним из основных факторов популярности DEA как исследовательского метода, безусловно, является наличие доступного программного обеспечения, позволяющего свести сложность решения реальных практических задач к минимуму. Так, в открытом доступе на сегодняшний день представлены пакеты DEA Frontier, MaxDEA, Open Source DEA и др., которые позволяют использовать радиальные модели с постоянной и переменной отдачей на масштаб, ориентированные по входу и выходу. В то же время некоторые более сложные модификации базовых моделей DEA, в частности, позволяющие исследовать эффективность функционирования производственных объектов в

динамике, в вышеперечисленных пакетах реализованы уже в виде дополнительных опций, предоставляемых на платной основе.

Наиболее распространенным в литературе методом оценки эффективности функционирования производственных объектов в динамике является метод, основанный на расчете индекса Малкмвиста [21]. В отличие от простого сравнения коэффициентов эффективности каждого из исследуемых производственных объектов в момент времени t и в момент времени $t + 1$, рассчитанных в результате решения двух независимых задач DEA, при расчете индекса Малкмвиста учитывается также изменение самой границы эффективности множества производственных объектов, которое может иметь место в период между моментами t и $t + 1$. При этом сложность решения задачи и необходимый объем вычислений существенно увеличиваются.

Преодолеть данные трудности и свести задачу мониторинга эффективности производственных n объектов в динамике к последовательному решению двух или более базовых моделей DEA можно, используя прием, называемый в некоторых источниках «window analysis» [15], суть которого близка к методу скользящего среднего. Идея метода состоит в выборе окна наблюдения для каждого производственного объекта определенной ширины w (например, логично взять $w = 4$, если данные для каждого производственного объекта представлены поквартально). Тогда каждый набор входных и выходных данных в момент времени от 1 до w представляет отдельный «производственный объект», т.е. задача оценки сравнительной эффективности решается для $w \times n$ «производственных объектов», а для каждого реального производственного объекта в результате рассчитывается w коэффициентов эффективности. Далее окно сдвигается на одно наблюдение вправо и вновь рассчитывается w коэффициентов эффективности для каждого производственного объекта. В итоге в качестве динамической меры эффективности производственного объекта может быть взято среднее арифметическое коэффициентов эффективности, рассчитанных для данного момента времени при разных границах окна. Такой подход позволяет обеспечить робастность оценок эффективности и в тоже время выявить тренды в изменении эффективности

производственных объектов, оставаясь при этом в зоне работоспособности базовых моделей DEA, обеспеченных программными продуктами открытого доступа.

Апробация данного метода была проведена на примере решения задачи оценки сравнительной комплексной эколого-экономической эффективности региональных экономических систем (РЭС). Статический случай был рассмотрен в работе [8], где в качестве эффективных (в контексте концепции устойчивого развития) признаны регионы, производящие максимальные полезные экономические и социальные эффекты (выраженные как ВРП и количество населения) при минимальных объемах негативного воздействия на окружающую среду (выбросах в атмосферу, водные объекты и загрязнение почв). Динамический случай (в той же содержательной постановке) рассмотрен в данной работе.

Задача мониторинга эффективности РЭС в динамике решалась тремя способами: 1) простым расчетом коэффициентов эффективности для каждой РЭС в течение исследуемого периода (2010–2014 гг.); 2) расчетом значений индекса Малкмвиста для каждой РЭС в периоды 2010–2011 гг., 2011–2012 гг. и т.д.; 3) расчетом коэффициентов эффективности для каждой РЭС по методу окна. Сравнение полученных результатов позволяет сделать вывод об однозначной предпочтительности метода окна для решения такого рода задач не только с вычислительной, но и с содержательной точки зрения.

2. Постановка динамической задачи сравнительной оценки эколого-экономической эффективности региональных экономических систем

Рассмотрим задачу об оценке эффективности функционирования региональных экономических систем (РЭС) по набору эколого-экономических показателей за период времени T . Для этого в каждый момент времени t периода T используем базовую ориентированную по входам модель экологического анализа среды функционирования (ЭАСФ) [19], которая отличается от традиционной модели анализа среды функционирования (АСФ) наличием нежелательных выходов. Для всех моментов времени

$t \in (1, \dots, T)$ представим каждую РЭС $_t$ как объект, на вход которого подаются ресурсы (энергия, сырье, труд, капитал и т.д.), а на выходе получается экономический результат, который может быть измерен любых широко используемых на практике показателях, таких как валовый региональный продукт, валовая добавленная стоимость, уровень дохода населения и т.д. Кроме того, на выходе каждого объекта образуются негативные экологические эффекты как неизбежный результат хозяйственной деятельности человека – выбросы загрязняющих веществ в атмосферу, забор природных вод для нужд экономики, твердые отходы, сбросы недостаточно очищенных сточных вод. Для каждого производственного объекта (РЭС $_t$) ищется возможность сокращения входов (объемов затрачиваемых ресурсов) и нежелательных выходов (негативных экологических эффектов) без сокращения желательных выходов (экономического результата). Объекты, которые при минимальном количестве затрачиваемых ресурсов и объеме негативных экологических эффектов производят максимальный экономический результат, возможный в данный момент времени t , признаются эффективными.

Формализация данной задачи возможна следующим образом. Имеется K однородных производственных объектов (ПО), каждый из которых задан N входами и M выходами. Выходы $1, 2, \dots, p$ являются желательными (полезными), а $p + 1, p + 2, \dots, M$ – нежелательными (негативные экологические эффекты).

В коэффициентной форме задача оценки эффективности ПО с индексом 0 в период времени t записывается следующим образом:

$$(1) \quad \max_{u,v} \sum_{m=1}^M u_m y_{m0}^t$$

при ограничениях

$$\sum_{m=1}^M u_m y_{mk}^t - \sum_{n=1}^N v_n x_{nk}^t \leq 0, \quad k = 1, 2, \dots, K;$$

$$\sum_{n=1}^N v_n x_{n0}^t = 1;$$

$$u_m, v_n \geq 0 \quad m = 1, 2, \dots, M, \quad n = 1, 2, \dots, N;$$

где $X^t = (x_{10}^t, \dots, x_{N0}^t) \geq 0$ – вектор входов размерности N в момент времени t ; $Y^t = (y_{10}^t, \dots, y_{M0}^t) \geq 0$ – вектор выходов размерности M в момент времени t ; K – количество производственных объектов; u_m, v_n – неизвестные неотрицательные веса, подлежащие определению.

Задача также может быть сформулирована в двойственной форме:

$$(2) \min_{\lambda} \theta$$

при ограничениях

$$\sum_{n=1}^N x_{nk}^t \lambda_k \leq \theta x_{n0}^t, \quad n = 1, 2, \dots, N;$$

$$\sum_{m=1}^M y_{mk}^t \lambda_k \geq y_{m0}^t, \quad m = 1, 2, \dots, M;$$

$$\lambda_k \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots, K.$$

Для каждого производственного объекта решается дробно-линейная задача математического программирования, в которой максимизируется отношение следующего вида:

$$(3) \quad h = \frac{\sum_{r=1}^p \mu_r y_{r0}^t - \sum_{s=p+1}^N \mu_s y_{s0}^t}{\sum_{i=1}^M v_i x_{i0}^t}$$

при ограничениях

$$(4) \quad \frac{\sum_{r=1}^p \mu_r y_{rj}^t - \sum_{s=p+1}^N \mu_s y_{sj}^t}{\sum_{i=1}^M v_i x_{ij}^t} \leq 1.$$

Отношение (3) при этом называется коэффициентом (или мерой) моментной эколого-экономической эффективности ПО. Объекты, для которых коэффициент моментной эффективности равен единице, признаются эффективными, а остальные – неэффективными в момент времени t . После того как для каждого момента времени $t \in (t_1, \dots, T)$ будут рассчитаны значения коэффициентов эффективности всех РЭС, полученные динамические ряды коэффициентов эффективности исследуются на наличие трендов.

Нежелательные выходы можно также рассматривать наравне с входами модели, тогда моментная мера эффективности примет следующий вид:

$$h^* = \frac{\sum_{r=1}^k \mu_r y_{r0}^t}{\sum_{i=1}^M v_i x_{i0}^t + \sum_{s=k+1}^p \mu_s y_{s0}^t}.$$

В работе [20] было доказано, что меры эколого-экономической эффективности h и h^* являются эквивалентными и могут одинаково успешно использоваться для решения базовых моделей ССР, а в работах [8, 10–11, 19] показано, что в простейшем случае нежелательные выходы (негативные экологические эффекты) могут рассматриваться как единственные входы модели. Такая интерпретация нежелательных выходов вполне оправдана в том случае, когда при решении задачи нет необходимости отслеживать эффективность использования каждого отдельного вида ресурсов (например, энергоэффективность), подаваемых на вход РЭС [8–9]. В данной упрощенной постановке задачи эффективными признаются те ПО, которые производят максимальный социо-экономический результат с минимальными негативными экологическими эффектами. Их множество задает границу эффективности, которая в случае модели ССР представляет собой гиперповерхность выпуклого многогранного конуса. Объекты, значения коэффициентов эффективности которых оказались меньше единицы, посредством пропорционального сокращения входов могут приблизиться к границе эффективности: $(X_0^t, Y_0^t) \Rightarrow (hX_0^t, Y_0^t)$ [3].

Эффективная точка получается из исходной с помощью дополнительных переменных $S^+(s_1^+, \dots, s_N^+)$ и $S^-(s_1^-, \dots, s_M^-)$ посредством сдвига по ним $(hX_0^t - S^-, Y_0^t + S^+)$. Дополнительные переменные определяются на второй фазе решения оптимизационной задачи и трактуются как потенциал снижения негативных экологических эффектов. В некоторых литературных источниках расчет дополнительных переменных также называется методом задания цели [12], так как определенным таким образом потенциал снижения каждого из негативных экологических эффектов является целевым параметром для производ-

ственного объекта в процессе достижения эффективности. Исследование динамических рядов по каждому из целевых параметров также дает множество дополнительной информации для лиц, принимающих решения (ЛПР) в сфере экологического менеджмента региональных экономических систем.

3. Методы решения динамических задач оценки эффективности производственных объектов

Для оценки изменения эффективности ПО во времени в задачах АСФ в настоящее время наиболее часто используется индекс производительности Малмквиста (Malmquist productivity index, MPI), который является непараметрическим методом анализа временных рядов [21].

Обозначим через $h^t(X_0^t, Y_0^t)$ и $h^{t+1}(X_0^{t+1}, Y_0^{t+1})$ меры эффективности ПО₀ в моменты времени t и $t + 1$, рассчитанные посредством решения задачи (1) для моментов времени t и $t + 1$ соответственно. Кроме того, определим $h^t(X_0^{t+1}, Y_0^{t+1})$ – меру эффективности ПО₀ в момент времени t относительно границы эффективности будущего периода $t + 1$ посредством решения следующей задачи:

$$(5) \min_{\lambda} \theta$$

при ограничениях

$$\sum_{n=1}^N x_{nk}^t \lambda_k \leq \theta x_{n0}^{t+1}, \quad n = 1, 2, \dots, N;$$

$$\sum_{m=1}^M y_{mk}^t \lambda_k \geq y_{m0}^{t+1}, \quad m = 1, 2, \dots, M;$$

$$\lambda_k \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots, K.$$

Аналогично определим $h^{t+1}(X_0^t, Y_0^t)$ – меру эффективности ПО₀ в момент времени $t + 1$ относительно границы эффективности прошлого периода t .

Тогда индекс производительности Малмквиста может быть представлен как

$$(6) \quad MPI_0 = \left[\frac{h^t(X_0^{t+1}, Y_0^{t+1})}{h^t(X_0^t, Y_0^t)} \cdot \frac{h^{t+1}(X_0^{t+1}, Y_0^{t+1})}{h^{t+1}(X_0^t, Y_0^t)} \right]^{1/2}.$$

Значения $MPI_0 < 1$, $MPI_0 = 1$ и $MPI_0 > 1$ говорят соответственно о снижении, постоянстве или увеличении эффективности $ПО_0$ в течение исследуемого периода [18]. Кроме того, в литературе часто используют форму представления индекса Малмквиста, в которой изменение производительности (эффективности) представлено в декомпозированном виде, где первая часть представляет собой эффекта сдвига границы эффективности (Frontier Shift Effect), а вторая – эффект роста относительной эффективности (Catch-up Effect).

По сравнению с точечным методом решения динамической задачи, когда расчет мер эффективности ПО осуществляется по каждой точке из интервала наблюдений, а потом полученные точечные значения формируют временной ряд, определение динамики эффективности через расчет индекса Малмквиста позволяет учесть сдвиг границы эффективности. Учитывая то, что АСФ позволяет оценить эффективность ПО только в сравнении с другими ПО, это является важным моментом. В контексте решения задач оценки эколого-экономической эффективности РЭС результат $h^t(X_0^t, Y_0^t) > h^{t+1}(X_0^{t+1}, Y_0^{t+1})$ еще не означает, что с течением времени у РЭС₀ произошло увеличение негативных экологических эффектов или снижение социально-экономических показателей хозяйственной деятельности. Такой результат также может свидетельствовать о том, что у других РЭС (всех или по крайней мере некоторых из них) в момент $t + 1$ по сравнению с моментом t произошло снижение негативных экологических эффектов или улучшение экономических показателей, тогда как показатели РЭС₀ остались на уровне предыдущего временного периода. Расчет индекса Малмквиста позволяет устранить данную неопределенность результата решения точечных задач.

Однако данный метод решения динамических задач оценки эффективности ПО тоже не свободен от недостатков. В качестве основного в контексте решения задач оценки эколого-экономической эффективности регионов можно выделить необ-

ходимость проведения попарного сравнения моментов наблюдений на всем промежутке $t \in (t_1, \dots, T)$. Кроме того, если сформированный точечным методом временной ряд эффективности ПО далее может быть исследован с помощью обычных регрессионных моделей и моделей с распределенными лагами [7], то ряд, состоящий только из значений индекса Малкмвиста, позволяет провести анализ динамики эффективности ПО только на качественном уровне.

Вторым по распространенности методом решения динамических задач АСФ является метод окна, который позволяет сравнить исследуемый объект по эффективности производственной деятельности не только с другими аналогичными объектами, но и с самим собой в другие периоды времени. Для этого каждый из K рассматриваемых ПО_{*i*} представляется в виде набора T однородных объектов ПО_{*i*}^{*t*}, ПО_{*i*}^{*t*}₂, ..., ПО_{*i*}^{*T*}, задаваемых входами $X_i^{t_1}, X_i^{t_2}, \dots, X_i^T$ и выходами $Y_i^{t_1}, Y_i^{t_2}, \dots, Y_i^T$. Базовая задача АСФ вида (1) решается $T - w + 1$ раз для $K \times w$ ($w \leq T$) производственных объектов (или, в контексте данного исследования, регионов) ПО₁^{*t*}_{*j*}, ПО₁^{*t*}_{*j*}+1, ..., ПО₁^{*t*}_{*j*}+ w , ..., ПО_{*K*}^{*t*}_{*j*}, ПО_{*K*}^{*t*}_{*j*}+1, ..., ПО_{*K*}^{*t*}_{*j*}+ w .

Первый раз решение задачи вида (1) осуществляется для временного интервала $t_1, \dots, t_1 + w$. Обозначим его как w_1 . В результате решения задачи \forall ПО_{*i*} вычисляется w коэффициентов моментной эффективности $h^{t_1}(X_i^{t_1}, Y_i^{t_1}), h^{t_1+1}(X_i^{t_1+1}, Y_i^{t_1+1}), \dots, h^{t_1+w}(X_i^{t_1+w}, Y_i^{t_1+w})$, соответствующие ПО_{*i*}^{*t*}₁, ПО_{*i*}^{*t*}₂, ..., ПО_{*i*}^{*t*}_{1+w}.

Далее окно сдвигается на один временной интервал вправо. В результате второго решения задачи по окну $w_2: t_2, \dots, t_2 + w$ вычисляются коэффициенты моментной эффективности $h^{t_2}(X_i^{t_2}, Y_i^{t_2}), h^{t_2+1}(X_i^{t_2+1}, Y_i^{t_2+1}), \dots, h^{t_2+w}(X_i^{t_2+w}, Y_i^{t_2+w})$.

Процесс перемещения окна по периоду наблюдения продолжается до момента $t = T - w + 1$, в результате чего для каждого ПО_{*i*}^{*t*}, за исключением ПО_{*i*}^{*t*}₁ и ПО_{*i*}^{*T*}, рассчитывается несколько коэффициентов моментной эффективности по разным окнам.

Так, $ПО_i^{t_2}$ соответствуют два коэффициента моментной эффективности $h_{w_1}^{t_2}$ и $h_{w_2}^{t_2}$, $ПО_i^{t_3}$ – три коэффициента моментной эффективности $h_{w_1}^{t_3}$, $h_{w_2}^{t_3}$ и $h_{w_3}^{t_3}$ и т.д. В качестве итогового значения коэффициента моментной эффективности принимается среднее арифметическое коэффициентов, полученных по разным окнам:

$$h_{avr}^t = 1/q \sum_{j=1}^q h_{w_j}^t,$$

где q – количество окон, по которым получены коэффициенты моментной эффективности.

В задачах оценки сравнительной энергетической и экологической эффективности производственных объектов зачастую предполагается, что все объекты используют примерно одни и те же технологии производства [23]. Тогда различия в эффективности исследуемых объектов объясняются полностью качеством менеджмента. Данное предположение накладывает некоторые ограничения на применимость метода окна. Так как с течением времени производственные технологии могут меняться, ширину окна нужно полагать достаточно малой, чтобы не допустить сравнения эффективности объектов, работающих на старой технологии, с объектами, работающими на новой, более эффективной технологии. В большинстве исследований, придерживающихся предположения о неизменности технологической базы производственных процессов, ширина окна полагается равной трем годам [23–24]. Однако в контексте решения задачи оценки сравнительной эколого-экономической эффективности региональных экономических систем данное ограничение является несущественным. Нас будет интересовать любое изменение эколого-экономической эффективности региона, вне зависимости, чем оно вызвано: повышением качества менеджмента ресурсов, внедрением новых производственных технологий более высокого класса экологичности, проведением природоохранных мероприятий, или изменением структуры экономики региона с акцентом на развитие высокотехнологичных отраслей [1].

Еще одним ограничением метода окна, часто обсуждаемым в литературе, является устойчивость получаемых оценок коэффициента эффективности. В ряде работ (например, [22]) устойчивость предлагается оценивать по стандартному отклонению

$$(7) \quad STD_i = \sqrt{\frac{\sum_{t=t_1}^T \sum_{k=1}^{T-w+1} (h_{i,w_k}^t - h_{avr}^t)^2}{w \times (T - w + 1)}}$$

или вариации

$$(8) \quad Var_i = \max(h_{i,w}^t) - \min(h_{i,w}^t).$$

В работах других авторов (например, [24]) оценку устойчивости предлагается проводить по размаху значений коэффициентов эффективности, полученных по разным окнам, для каждого момента времени из интервала $t \in (t_1, \dots, T)$:

$$(9) \quad CR_i^t = \max(h_{i,w}^t) - \min(h_{i,w}^t).$$

Вне зависимости от того, используется ли для расчетов формула (7), (8) или (9), оценка устойчивости для начального t_1 и конечного T моментов периода наблюдения проводится только по одному значению. Поэтому в большинстве исследований авторы просто опускают данный момент из рассмотрения, оценивая устойчивость ПО только внутри интервала наблюдения [23–24]. Преодолеть данное ограничение и включить в рассмотрение крайние точки t_1 и T можно посредством «кругового» метода (round robin method), предложенного в работе [22], суть которого заключается в том, что эффективность каждого ПО рассматривается сначала только в момент t_1 , потом в период (t_1, t_2) , далее в период (t_1, t_2, t_3) и так до периода (t_1, \dots, T) . Такой подход позволяет получить более полную картину динамики каждого ПО, включая вопросы устойчивости и наличия трендов, однако вычислительная сложность задачи при этом значительно увеличивается.

Рассмотрим преимущества и недостатки описанных методов решения динамических задач оценки эколого-экономической эффективности региональных экономических систем на конкретном примере оценки устойчивости траекторий

развития регионов Центрального федерального округа в период 2010–2014 гг.

4. Сравнительный анализ результатов решения динамической задачи оценки эколого-экономической эффективности региональных экономических систем разными методами

Пусть каждая региональная экономическая система описывается следующим набором входных и выходных параметров:

x_{1i}^t – годовой объем выбросов загрязняющих веществ в атмосферу от стационарных источников (тыс. т);

x_{2i}^t – годовой объем выбросов загрязняющих веществ в атмосферу от автомобильного транспорта (тыс. т);

x_{3i}^t – годовой объем сброса неочищенных сточных вод (млн м³);

x_{4i}^t – годовой объем сброса недостаточно очищенных сточных вод (млн м³);

x_{5i}^t – годовой объем образования промышленных и бытовых отходов (млн т);

x_{6i}^t – годовой объем забора свежей воды из природных поверхностных и подземных объектов (млн м³);

y_{1i}^t – годовой объем валового регионального продукта, приведенный (дефлированный) к ценам 2010 года (млн руб.);

u_{2i}^t – количество населения в регионе (тыс. чел).

Выбор вышеперечисленных показателей объясняется, с одной стороны, принципом разумной достаточности, с другой стороны – доступностью. Использование представительного набора входов и выходов при моделировании эколого-экономической эффективности РЭС позволяет учесть больше аспектов. Однако в том случае, когда количество входов и выходов близко или превышает количество рассматриваемых ПО, возникает проблема недостаточной дискриминирующей способности АСФ [9, 14, 23–24], которая характеризуется тем, что в

результате решения задачи значительная доля всех ПО признаются эффективными. Поэтому количество входов и выходов модели АСФ не должно быть слишком большим, а выбранные входные и выходные показатели должны быть наиболее информативными.

Российская система статистического учета экологических аспектов хозяйственной деятельности в настоящее время активно совершенствуется. В ежегодных государственных докладах «О состоянии и об охране окружающей среды в Российской Федерации», публикуемых в открытом доступе на официальном сайте Министерства природных ресурсов РФ (www.mnr.gov.ru), показатели антропогенной нагрузки периодически детализируются, добавляются, методики их расчета уточняются. Так, например, в 2010 г. в ежегодных государственных докладах произведена дифференциация показателя объема сброса сточных вод в природные объекты, введен показатель потребления свежей воды в регионе, учитываются способы обращения с отходами (переработка, захоронение), введены показатели климатических изменений и т.д. Это позволяет учитывать больше экологических аспектов при оценке эколого-экономической эффективности РЭС, однако ограничивает период наблюдения отрезками, на которых система статистического учета не претерпевала существенных изменений.

Предложенный набор входных и выходных показателей выполнен на основе учета результатов работ [1–2, 8, 12, 23–24]. Расчет коэффициентов эффективности для каждого региона ЦФО (за исключением г. Москвы как субъекта, представляющего полностью городскую территорию) проводился несколькими разными методами: 1) точечным; 2) по методу окна при ширине окна, равной всему периоду наблюдения; 3) по методу окна при ширине окна три года; 4) по методу окна при ширине окна два года. Результаты расчетов¹ коэффициентов эколого-экономической эффективности регионов ЦФО за период

¹ Все расчеты проводились с использованием пакета прикладных программ открытого доступа MaxDEA на статистических данных, взятых из государственных докладов «О состоянии и об охране окружающей среды в Российской Федерации» за период 2010–2014 гг.

2010–2014 гг., полученные точечным методом, приведены в таблице 1, результаты расчета по методу окна при ширине окна, равной 3 года, приведены в таблице 2.

Таблица 1. Значения коэффициентов эколого-экономической эффективности регионов ЦФО, рассчитанные точечным методом

Регион	2010	2011	2012	2013	2014
Белгородская обл.	1	1	1	1	1
Брянская область	1	1	1	1	1
Владимирская обл.	1	1	1	1	1
Воронежская обл.	1	1	1	1	1
Ивановская область	0,7868	0,7868	0,8301	0,8548	0,7969
Калужская область	1	1	1	1	1
Костромская обл.	1	0,9126	0,9124	0,8283	0,8710
Курская область	1	1	1	1	1
Липецкая область	1	1	1	1	1
Московская обл.	1	1	1	1	1
Орловская область	0,9807	0,9733	1	0,9509	1
Рязанская область	0,8022	0,7974	0,7460	0,7372	0,6928
Смоленская обл.	0,9086	0,9839	0,8283	0,8209	0,9445
Тамбовская область	1	1	1	1	1
Тверская область	1	1	1	1	1
Тульская область	0,8579	0,8136	0,7896	0,6681	0,6258
Ярославская обл.	0,9164	0,9452	0,9292	1	1

Анализируя результаты расчетов, приведенные в таблицах 1 и 2, можно сделать вывод о том, что эколого-экономическая эффективность большинства регионов ЦФО достаточно высокая. Наиболее высокие показатели эколого-экономической эффективности имеют Белгородская, Калужская, Московская, Тамбовская области, наименее высокие – Ивановская, Рязанская и Тульская области.

Метод окна, как и ожидалось, обладает более высокой дискриминирующей способностью за счет того, что каждый раз задача АСФ решается для 3×17 производственных объектов, а не для 17, как в точечном методе, при том же количестве входов и выходов ПО. При использовании метода окна только два объекта – Калужская и Тамбовская области – остаются эффективными на протяжении всего периода наблюдения.

Таблица 2. Значения коэффициентов эколого-экономической эффективности регионов ЦФО, рассчитанные по окну шириной три года

Регион	2010	2011	2012	2013	2014
Белгородская обл.	1	0,9500	1	1	1
Брянская область	1	1	0,9847	1	1
Владимирская обл.	0,9414	0,9188	0,9936	1	1
Воронежская обл.	1	0,9973	0,9588	0,9667	1
Ивановская область	0,7868	0,7330	0,8102	0,7929	0,7466
Калужская область	1	1	1	1	1
Костромская обл.	0,9312	0,8334	0,8339	0,8121	0,7941
Курская область	1	1	0,9419	0,9891	1
Липецкая область	0,9490	0,9997	0,9958	0,9862	1
Московская обл.	0,9675	1	1	1	1
Орловская область	0,9210	0,8925	1	0,9278	0,9396
Рязанская область	0,6581	0,6602	0,6930	0,7155	0,6928
Смоленская обл.	0,8056	0,7892	0,7722	0,8041	0,9205
Тамбовская область	1	1	1	1	1
Тверская область	1	1	0,9273	0,9820	1
Тульская область	0,7681	0,7104	0,7272	0,6561	0,6213
Ярославская обл.	0,8068	0,8517	0,8831	0,9690	1

Для получения более детальных выводов проведем сравнительный анализ результатов расчетов эколого-экономической эффективности отдельных регионов, полученных при различной ширине окна – пять лет, три года, два года, а также результатов, полученных точечным методом (рис. 1–2). Нетрудно заметить, что при использовании окна максимальной ширины (весь период наблюдения), значения коэффициента эффективности у неэффективных объектов минимальные. Поэтому неэффективные объекты становится гораздо проще дифференцировать между собой.

Чем уже ширина окна, тем значение коэффициента эффективности получается выше. С другой стороны, направление изменения динамики эффективности ПО (уменьшение или рост) может меняться на противоположное. Так, например, если анализировать динамику эколого-экономической эффективно-

сти Рязанской области по точкам, то можно заметить ее снижение. Это значит, что относительно других регионов эколого-экономическая эффективность Рязанской области становится с каждым годом все хуже. Если же анализировать динамику по окну, ширина которого равна всему периоду наблюдения, то можно заметить, что эколого-экономическая эффективность Рязанской области повышается. То есть, сравнивая экологичность хозяйственной (производственной и бытовой) системы региона в разные периоды времени, мы можем заметить улучшения. Общий вывод относительно изменения эколого-экономической эффективности региона в данном случае таков: экологическая эффективность хозяйственной системы региона повышается, однако не так быстро, как в других регионах.

Заметим, что анализ изменений эколого-экономической эффективности региона по методу окна с шириной, равной трем или двум годам, в данном случае не позволяет выделить какого-либо явного тренда.

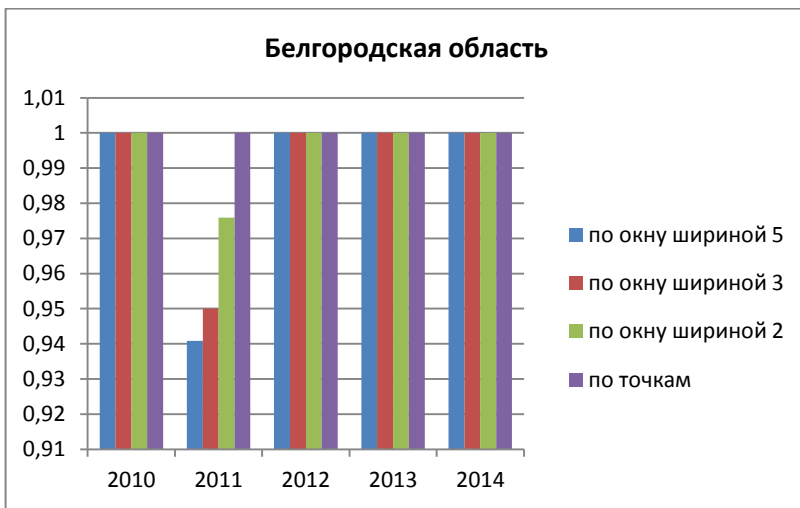


Рис. 1. Сравнение результатов расчетов эколого-экономической эффективности Белгородской области в динамике по разным методам и с разной шириной окна

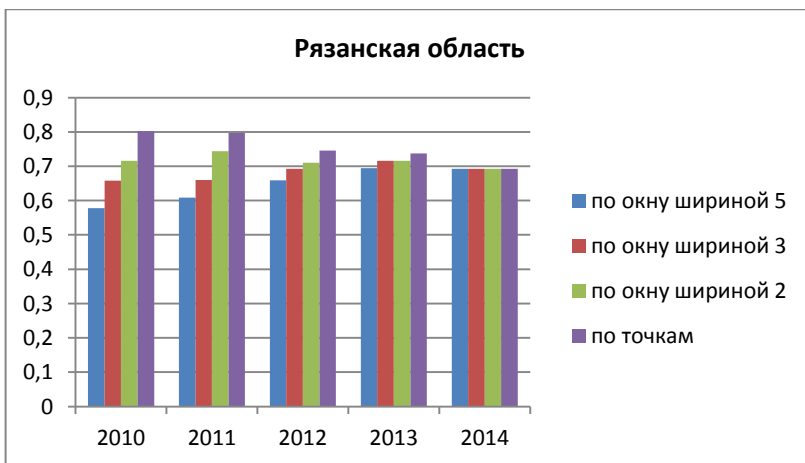


Рис. 2. Сравнение результатов расчетов эколого-экономической эффективности Рязанской области в динамике по разным методам и с разной шириной окна

Сравнивая устойчивость оценок эколого-экономической эффективности, полученных при различной ширине окна по формуле (7), можно отметить, что стандартное отклонение для большинства регионов меняется незначительно (таблица 3).

Наиболее устойчивые показатели эколого-экономической эффективности в течение наблюдаемого периода при различной ширине окна демонстрируют Калужская, Тамбовская, Брянская, Липецкая и Московская области, наименее устойчивые – Костромская, Смоленская, Ярославская области. Заметные изменения устойчивости оценок в зависимости от ширины окна наблюдаются только по Курской и Тульской области, однако даже в этом случае их нельзя признать существенными, так как разница составляет не более 7% от минимального значения коэффициента эффективности. Однако даже столь несущественные различия становятся гораздо более значимыми и заметными при анализе потенциала улучшений эколого-экономической эффективности регионов по методу задания цели.

Таблица 3. Стандартное отклонение оценок эколого-экономической эффективности регионов ЦФО при разной ширине окна

Регион	<i>STD, w=5</i>	<i>STD, w=3</i>	<i>STD, w=2</i>
Белгородская обл.	0,0264	0,0221	0,0171
Брянская область	0,0160	0,0120	0,0036
Владимирская обл.	0,0488	0,0367	0,0241
Воронежская обл.	0,0444	0,0376	0,0236
Ивановская область	0,0376	0,0349	0,0285
Калужская область	0,0000	0,0000	0,0000
Костромская обл.	0,0433	0,0517	0,0681
Курская область	0,0715	0,0444	0,0153
Липецкая область	0,0257	0,0180	0,0104
Московская обл.	0,0280	0,0108	0,0082
Орловская область	0,0570	0,0459	0,0400
Рязанская область	0,0518	0,0364	0,0395
Смоленская обл.	0,0761	0,0500	0,0625
Тамбовская область	0,0000	0,0000	0,0000
Тверская область	0,0429	0,0354	0,0189
Тульская область	0,0264	0,0560	0,0746
Ярославская обл.	0,1172	0,0718	0,0520

5. Анализ потенциала роста уровня экологичности хозяйственной деятельности регионов

Для определения потенциала роста эколого-экономической эффективности тех регионов, чья хозяйственная деятельность в результате решения статической задачи АСФ признана неэффективной, в литературе традиционно применяется метод задания цели [12, 17], суть которого состоит в расчете проекций неэффективных ПО в пространстве входов/выходов на границу эффективности, что позволяет определить целевые ориентиры по сокращению входов/увеличению выходов, достижение которых позволяет стать ПО эффективным. Метод задания цели успешно используется в статических задачах определения потенциала повышения энергоэффективности [12], ресурсосбере-

жения [10, 23], а также при поиске оптимальных направлений согласования приоритетов экологической политики компаний «грязных» отраслей экономики с приоритетами устойчивого развития регионов [6]. Аналогичный подход может быть применен в случае динамической задачи АСФ. Однако содержательная экономическая интерпретация полученных результатов в данном случае должна проводиться с осторожностью.

Рассмотрим целевые параметры выбросов от стационарных источников и автомобильного транспорта для Рязанской области (неэффективный регион на протяжении всего периода наблюдения), рассчитанные точечным методом и по методу окна при разной ширине окна (таблицы 4–5).

Таблица 4. Целевые показатели выбросов от стационарных источников для Рязанской области

Рязанская обл.	2010	2011	2012	2013	2014
$w = 5$	38,16	48,51	48,62	44,71	45,26
$w = 3$	45,06	50,80	56,28		
		48,31	51,49	50,49	
			48,62	44,71	45,26
среднее	45,06	49,55	52,13	47,60	45,26
$w = 2$	38,04	45,64			
		50,80	56,28		
			51,49	50,49	
				44,71	45,26
среднее	38,04	48,22	53,89	47,60	45,26
$w = 1$	59,80	45,64	56,80	50,46	45,26

Таблица 5. Целевые показатели выбросов от автомобильного транспорта для Рязанской области

Рязанская обл.	2010	2011	2012	2013	2014
$w = 5$	76,96	84,72	90,60	90,20	90,73
$w = 3$	87,66	96,02	102,12		
		87,78	93,15	92,45	
			90,60	90,20	90,73
среднее	87,66	91,90	95,29	91,33	90,73
$w = 2$	95,38	106,03			
		96,02	102,12		
			93,15	92,45	
				90,20	90,73
среднее	95,38	101,03	97,63	91,33	90,73
$w = 1$	106,85	106,03	102,57	92,54	90,73

Выделить какие-либо устойчивые тренды в динамике оценок потенциала снижения негативных экологических эффектов не удается. Это объясняется не только отсутствием системности в экологической политике регионов¹, но и изменением значимости (весовых коэффициентов) вклада отдельных негативных экологических эффектов в общую экологическую ситуацию в регионе. Расчет уникальных для каждого ПО весовых коэффициентов, входящих в линейные свертки входов и выходов, является характерной особенностью базовых моделей АСФ и отличает их от многочисленных методов ранжирования [13]. Поэтому выбор ориентира для элиминирования негативных экологических эффектов может проводиться на основе учета предпочтений ЛПР.

С точки зрения развития систем регионального экологического менеджмента целесообразно выбрать такие ориентиры по

¹ Если бы целевые показатели монотонно снижались, это можно было бы интерпретировать как результат действия системы регионального экологического менеджмента, направленной на постоянное элиминирование негативных экологических эффектов за счет проведения природоохранных мероприятий или развития эко-инноваций.

элиминированию негативных экологических эффектов РЭС, которые соответствуют их минимальным возможным показателям, достижимым без сокращения суммарных полезных выходов производственной деятельности экономических агентов и социальной подсистемы РЭС. Такими показателями являются целевые параметры, рассчитанные по окну с шириной, равной всему периоду наблюдения. Так как при решении задачи АСФ по окну максимальной ширины РЭС сравниваются по эффективности, как друг с другом, так и с собой в разные временные моменты периода наблюдения, минимальные возможные показатели негативных экологических эффектов могут быть достигнуты только за счет *комплексного* повышения экологичности хозяйственной деятельности региона, включая повышение эффективности менеджмента ресурсов, переход на наилучшие доступные технологии производства, полный или частичный отказ от «грязных» видов производств и паттернов потребительского поведения.

6. Заключение

Основным результатом данной работы является адаптация метода окна под решение задач мониторинга комплексной эколого-экономической эффективности функционирования региональных производственных систем в динамике. В отличие от простого решения не связанных друг с другом задач оценки сравнительной эффективности РЭС в каждой отдельной точке исследуемого периода, метод окна позволяет выявить динамику эффективности, связанную со сдвигом границ эффективности всего множества рассматриваемых объектов, обусловленную, как правило, внедрением технологических эко-инноваций (наилучших доступных технологий производства) или изменением структуры экономики региона. В отличие от результатов, полученных с помощью расчета индекса Малмквиста, эта динамика в результатах, полученных по методу окна, прослеживается более наглядно и позволяет сделать содержательные выводы относительно целей и направлений развития и совершенствования систем регионального экологического менеджмента.

Оценки эколого-экономической эффективности РЭС по окну максимальной ширины, равной всему периоду наблюдения, позволяют наилучшим образом дискриминировать РЭС, а также рассчитать целевые ориентиры для снижения негативных экологических эффектов, которые могут быть положены в основу комплексных программ совершенствования экологического менеджмента в регионах.

Простота технической реализации предложенного метода и доступность необходимого для его использования программного обеспечения позволяют надеяться на его широкое распространение в практике регионального экологического менеджмента.

Литература

1. ВОРОНИНА Л.А., ИОСИФОВ В.В., ДИРА Д.В., НЕСТЕРЕНКО Е.А. *Мировой опыт налогового стимулирования инвестиций в развитие высокотехнологичных видов экономической деятельности* // Финансы и кредит. – 2012. – №13(493). – С. 63–70.
2. ИОСИФОВ В.В., ДИБРОВА С.С., ПОДВОРОК И.И. *Регулирование негативного воздействия автотранспорта на окружающую среду с помощью стандартов моторного топлива (на примере Краснодарского края)* // Национальные интересы: приоритеты и безопасность. – 2015. – №39(324). – С. 48–60.
3. КРИВОНОЖНО В.Е., САФИН М.М., УТКИН О.Б., ЛЫЧЕВ А.В. *Программный комплекс «EffiVision» для анализа деятельности сложных систем* // Информационные технологии и вычислительные системы. – 2005. – №3. – С. 85–95.
4. МЕЛЬНИКОВ Р.М. *Развитие методологии оценки эффективности научно-инновационных программ с учетом зарубежного опыта* // Инновации. – 2016. – №10. – С. 65–73.
5. ПИСКУНОВ А.А., ИВАНЮК И.И., ДАНИЛИНА Е.П., ЛЫЧЕВ А.В., КРИВОНОЖКО В.Е. *Система рейтингования регионов с использованием методологии АСФ* // Вестник АКСОР. – 2008. – №4. – С. 24–30.

6. РАТНЕР С.В., АЛМАСТЯН Н.А. *Метод согласования экологических приоритетов энергетических компаний и региональных социо-экономических систем* // Инновации. – 2016. – №9. – С. 40–47.
7. РАТНЕР С.В., ИОСИФОВ В.В. *Исследование динамики инвестиционных процессов в машиностроении на основе моделей с распределенными лагами* // Экономический анализ: теория и практика. – 2012. – №29. – С. 43–48
8. РАТНЕР С.В. *Задачи оптимизации траекторий развития региональных социо-экономических систем по экологическим параметрам* // Друкерровский вестник. – 2016. – №2. – С. 30–41.
9. РАТНЕР С.В. *Сетевой анализ среды функционирования в задачах регионального экологического менеджмента* // Проблемы управления. – 2016. – №6. – С. 35–46.
10. ХРУСТАЛЕВ Е.Ю., РАТНЕР П.Д. *Анализ экологической эффективности электроэнергетических компаний России на основе методологии анализа среды функционирования* // Экономический анализ: теория и практика. – 2015. – №35. – С. 33–42.
11. ХРУСТАЛЕВ Е.Ю., РАТНЕР П.Д. *Эко-инновации в электроэнергетике: оценка сравнительной эффективности* // Инновации. – 2015. – №9. – С. 8–14
12. BIAN Y., HE P., XU H. *Estimation of potential energy saving and carbon dioxide emission reduction in China based on an extended non-radial DEA approach* // Energy Policy. – 2013. – No. 63. – P.962–971.
13. CARRILLO M., JORGE J.M. *A multiobjective DEA approach to ranking alternatives* // Expert Systems With Applications. – 2016. – No. 50. – P. 130–139.
14. CHARNES A., COOPER W., RHODES E. *Evaluating program and managerial efficiency: An application of data envelopment analysis to program follow through* // Management Science. – 1981. – No. 27. – P. 668–697.
15. CHARNES A., CLARKE C., COOPER W., GOLANY B. *A development study of DEA in measuring the effect of mainte-*

- nance units in the U.S. Air Force* // Annals of Operation Research. – 1985. – No. 2. – P. 95–112.
16. CHUNG Y.H., FARE R., GROSSKOPF S. *Productivity and undesirable outputs: A directional distance function approach* // J. of Environmental Management. – 1997. – No. 51. – P. 229–240.
 17. COOPER W.W., SEIFORD L.M., TONE K. *Introduction to Data Envelopment Analysis and its Uses* // Springer Science. – 2006. – P. 351.
 18. FÄRE R., GROSSKOPF S. LOVELL C.A.K. *Production Frontiers*. – Cambridge University Press, 1994.
 19. FÄRE R., GROSSKOPF S. *Modelling undesirable factors in efficiency evaluation: comment* // European J. of Operational Research. – 2004. – No. 157. – P. 242–245.
 20. KORHONEN P.J., LUPTACIK M. *Eco-efficiency analysis of power plants: An extension of data envelopment analysis* // European J. of Operational Research. – 2004. – No. 154. – P. 437–446.
 21. MALMQUIST S. *Index numbers and indifference surfaces* // Trabajos de Estadística. – 1953. – No. 4. – P. 209–242.
 22. SUEYOSHI T. *Comparison and analyses of managerial efficiency and returns to scale of telecommunication enterprises by using DEA/WINDOW* // Communications of the Operations Research Society of Japan. – 1992. – No. 37. – P. 210–219.
 23. WANG K., SHIWEI YU., ZHANG W. *China's regional energy and environmental efficiency: A DEA window analysis based dynamic evaluation* // Mathematical and Computer Modelling. – 2013. – No. 58. – P. 1117–1127.
 24. WU H., SHI Y., ZHU W. *Effectiveness of the policy of circular economy in China: A DEA-based analysis for the period of 11th five-year-plan* // Resources, Conservation and Recycling. – 2014. – No. 83. – P. 163–175.

DYNAMIC PROBLEMS OF ESTIMATION OF ECOLOGICAL-ECONOMIC EFFICIENCY OF REGIONS BASED ON BASIC MODELS OF DATA ENVELOPMENT ANALYSIS

Svetlana Ratner, Institute of Control Science, RAS, Moscow, Doctor of Science, professor (lanarat@mail.ru).

Abstract: The paper describes the results of the comparative analysis of the applicability of several methods for solving dynamic DEA-models to the problem of monitoring of the ecological and economic efficiency of economic activities of regional economic systems (on the example of the regions of the Central Federal District, notably Belgorod and Ryazan regions). Methods of forming time series based on point estimates of environmental and economic efficiency, the Malkmquist method and the window method are considered. The results obtained for different window widths are analyzed for stability and adequacy. A comparison of the obtained results allows us to conclude that the window method is uniquely preferable for solving problems of monitoring the ecological and economic efficiency of regions not only from a computational but also from a substantive point of view. Unlike in case of Malkmquist method, system dynamics are more evident, and conclusions can be more easily drawn about the overall direction of the process. Data and graphs used in the comparison are also provided.

Keywords: data envelopment analysis, non-parametric optimization, dynamic tasks, window analysis.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии А.А. Ворониным.

*Поступила в редакцию 14.03.2017.
Опубликована 31.05.2017.*

УДК 338.51
ББК 65.305.9

О МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ КОНКУРЕНТНОГО ОТБОРА МОЩНОСТИ

Васильев М. Ю.¹

*(Институт систем энергетики
им. Л.А. Мелентьева СО РАН, Иркутск)*

Механизм конкурентного отбора мощности в электроэнергетике России рассматривается как оптимизационная математическая модель, нацеленная на обеспечение минимальных затрат на электроснабжение потребителей. Показано, что поскольку для решения дискретной по своей природе задачи применяется модель линейного программирования, на значительной доле возможного диапазона спроса на мощность эта модель не находит оптимального решения. И отклонение от оптимума может быть довольно существенным. Результаты вычислений продемонстрированы на абстрактном примере.

Ключевые слова: электроэнергетика, рынок мощности, конкурентный отбор мощности.

1. Введение

Электрическая мощность – особый товар, покупка которого предоставляет покупателю (потребителю электроэнергии) право требовать от продавца (генерирующей компании) поддержания в готовности генерирующего оборудования для удовлетворения потребности покупателя в электрической энергии. Рынок мощности в России функционирует в форме ежегодно проводимых конкурентных отборов мощности (КОМ), куда поставщики электрической мощности подают заявки, содержащие информацию о мощности, характеристиках и цене каждой генерирующей

¹ Михаил Юрьевич Васильев, научный сотрудник, кандидат технических наук (mikhail-vasilyev@yandex.ru).

единицы мощности (ГЕМ) [1]. К одной ГЕМ тепловой электростанции относится один блок блочной электростанции или все силовое оборудование ТЭЦ, соединенное одной поперечной связью [3].

В ходе отбора системный оператор сопоставляет заявки по цене и отбирает те из них, где цена ниже. При равенстве цен приоритет отдается заявкам с лучшими техническими характеристиками, а при равенстве характеристик приоритетной считается заявка, поданная раньше. Процедура повторяется до тех пор, пока сумма располагаемой мощности отобранных ГЕМ не станет равной ожидаемому спросу на мощность или не превысит его [8]. В результате определяется состав генерирующих единиц, отобранных для обеспечения прогнозируемого спроса, и цена мощности в данной ценовой зоне.

С математической точки зрения конкурентный отбор мощности является оптимизационной задачей, централизованное решение которой системным оператором призвано сократить суммарные издержки потребителей электроэнергии на электроснабжение (См. Статья 32 п. 1 [11]). И оптимальность найденного решения, а значит и тарифы на электроэнергию для конечных потребителей, зависит от постановки задачи и применяемого метода оптимизации.

Несмотря на свою значимость, математическая модель конкурентного отбора мощности не получила большого внимания исследователей. В [10] предложена идея совместного рассмотрения рынков электроэнергии и мощности для отбора. В приводимом автором модельном примере отмечается, что при выборе между более мощной станцией с меньшим одноставочным тарифом и менее мощной станцией с большим одноставочным тарифом станция с меньшим тарифом может создавать большую совокупную финансовую нагрузку на потребителей.

В более поздней работе [2] также используется идея совместного рассмотрения рынков мощности и электроэнергии. Однако в силу примененного исчисления затрат на один мегаватт мощности тезис о дискретности отбора на рынке мощности в явном виде не учитывается.

Вопрос дискретности условно-постоянных затрат обсуждается в [9], однако в несколько ином ракурсе. Автор считает

дополнительный рынок мощности излишним и, следовательно, не рассматривает модель отбора мощности как таковую. Он упоминает, что возможно строить только энергоблоки определенной мощности, а не в точности той, которая нужна для удовлетворения спроса. Таким образом, установленная мощность задействованных блоков в большинстве случаев будет отличаться от необходимой. Однако для реальных рынков с большим числом агрегатов этот эффект, по мнению автора, будет небольшим. Кроме того, некоторые из упомянутых выше исследований под условно-постоянными затратами подразумевают инвестиции в энергоблоки, в то время как на практике для поддержания мощности помимо инвестиций в оборудование требуются затраты на его обслуживание и поддержание в рабочем состоянии.

В России к рынку мощности предъявляются специфические требования. Целями введения рынка мощности большинство зарубежных авторов называет обеспечение необходимого уровня надежности энергосистемы, формирование адекватных ценовых сигналов и гарантий для инвесторов в новую электрическую мощность (например, [13–14]). Математическая постановка в централизованных рынках мощности ограничивается аукционом единой цены [4]. В то же время в России для обеспечения капиталовложений в новую мощность помимо рынка мощности использовались и продолжают действовать долгосрочные договоры на поставку мощности, а в настоящее время перед отбором мощности ставятся в большей мере задачи вывода избыточной и устаревшей мощности из эксплуатации [5], текущей оптимизации функционирования ЭЭС с точки зрения затрат (Статья 32 п. 1 [11]).

Тезис о дискретности отбора в применении именно к модели рынка мощности в России требует дополнительного исследования в связи с тем, что:

– Условно-постоянные затраты уже введенной в строй мощности – это скорее характеристика электростанций, а не отдельных энергоблоков. Возможная экономия затрат, связанных с поддержанием мощности, при длительном выводе из работы одного из энергоблоков электростанции обычно невелика.

– Количество электростанций в ценовых зонах и зонах свободного перетока не всегда велико. Например, во второй ценовой зоне (Сибирь) работает около четырех десятков электростанций и их установленная мощность варьируется от 12 до 6400 МВт. Также существенно варьируются и условно-постоянные издержки этих электростанций. С учетом ограничения пропускных способностей сетей в России можно ожидать значительного расхождения результатов моделей аукциона единой цены и дискретного отбора.

– В действующей модели рынка мощности более крупные станции с меньшими удельными затратами выигрывают у менее крупных станций с большими удельными затратами, что негативно сказывается не только на затратах потребителей, но и на небольших электростанциях [6], поскольку они заведомо проигрывают по показателю удельных затрат. Зная об этом, более крупные станции могут указывать в заявках цены выше издержек без рисков для себя. Таким образом, стратегии участников [12] и уровень конкуренции также зависят от применяемой модели КОМ.

– По некоторым расчетам [7], одновременное наличие рынка мощности и электроэнергии может увеличивать затраты потребителей, если в каждом из них цена формируется по затратам разных замыкающих объектов.

Цель настоящего исследования – показать, что используемая математическая модель конкурентного отбора мощности содержит потенциал повышения эффективности за счет применения дискретной оптимизации. Для количественной оценки возможного эффекта необходимо тестирование моделей на реальных заявках/затратах поставщиков с участием организаций, обладающих подобной информацией.

2. Постановка задачи

Рассмотрим одноузловую изолированную электроэнергетическую систему (ЭЭС), в которой отсутствуют потери и ограничения на объемы передаваемой мощности. В ЭЭС имеется множество поставщиков мощности (электростанций). Поставщики мощности характеризуются следующими показателями:

P_i – располагаемая мощность электростанции i ;

C_i – условно-постоянные издержки электростанции i (либо условно-постоянные издержки за вычетом прибыли, ожидаемой на рынке электроэнергии, следуя [2]).

Для спроса на мощность P_d , изменяющегося в пределах от 0 до суммарной установленной мощности всех электростанций в ЭЭС, рассчитаем для абстрактного примера суммарные условно-постоянные издержки поставщиков, отобранных на рынке мощности. ЭЭС содержит 20 электростанций с установленными мощностями и условно-постоянными затратами, заданными случайным образом.

Расчет проведем для трех моделей КОМ, две из которых близко соответствуют применяемым в России, а третья является оптимизационной задачей дискретного программирования.

3. Линейная модель КОМ

ВАРИАНТ 1

Задан прогнозируемый спрос на мощность P_d , не зависящий от цены мощности. Поставщики мощности формируют заявки на КОМ. Заявка состоит из мощности поставщика P_i и цены этой мощности c_i . Исходим из того, что заявляемая цена связана с величиной издержек поставщика на поддержание мощности выражением

$$(1) \quad c_i = C_i / P_i.$$

В ходе КОМ проводится аукцион единой цены. Поданные заявки сортируются в порядке возрастания цены c_i и определяется множество J электростанций, вошедших в баланс, путем последовательного отбора электростанций в порядке возрастания цены c_i . Отбор проводится до тех пор, пока суммарная располагаемая мощность отобранных электростанций не станет равной величине спроса или не превысит его. Это эквивалентно постановке

$$(2) \quad \max_{i \in J} (c_i) \rightarrow \min$$

при ограничении

$$(3) \quad \sum_{i \in J} P_i \geq P_d.$$

Цена самой дорогой отобранной единицы мощности становится ценой мощности в ценовой зоне:

$$(4) \quad c = \max_{i \in J}(c_i).$$

Вариант 1 применялся для конкурентного отбора мощности в РФ до 2015 года и проводился по зонам свободного перетока ежегодно сроком на 1 год. Вне конкурса отбирались заявки станций, имеющих статус «вынужденного генератора» и работающих по долгосрочным договорам поставки мощности.

ВАРИАНТ 2

Действующая в настоящее время математическая модель КОМ отличается от Варианта 1 тем, что спрос зависит от цены $P_d(c)$. При этом «функция спроса» задается как луч, начинающийся в точке 1 и проходящий через точку 2. Точки 1 и 2 задаются так: объем спроса на мощность в точке 1 соответствует прогнозируемому объему спроса, объем в точке 2 — прогнозируемому объему, увеличенному на 12%:

$$(5) \quad P_1 = P_d, \quad P_2 = 1,12 \cdot P_d.$$

Цена в обеих точках c_1, c_2 устанавливается Правительством РФ.

Объем отобранной мощности и ее цена определяются по пересечению функции предложения, полученной путем упорядочения заявок по возрастанию цены, с «функцией спроса» (рис. 1). Поскольку условно-постоянные затраты неделимы, замыкающая генерирующая единица мощности может быть отобрана только целиком, как и в варианте 1.

Вариант 2 применяется без деления ценовых зон на зоны свободного перетока сроком на три года вперед с ежегодной индексацией цен для поставщиков, отобранных по результатам КОМ. Статус и порядок отбора «вынужденных генераторов» сохранился, но тарифы для них не индексируются. К отбору не допускаются поставщики, в чьих заявках цены превышают c_1 .

Поскольку отбор «вынужденных генераторов» производится вне конкурса, в модели ими пренебрегаем, считая, что они отобраны до решения оптимизационной задачи и величина

спроса на мощность уменьшена на объем предложения мощности «вынужденных генераторов».

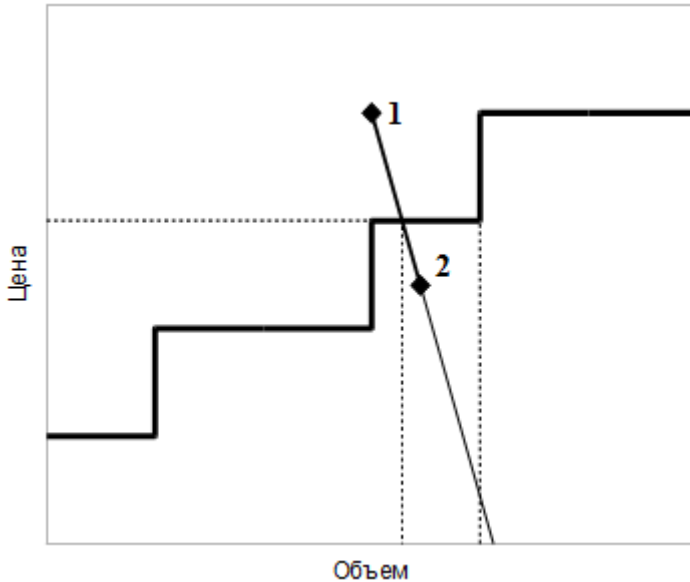


Рис. 1. Графическое представление конкурентного отбора мощности со спросом, зависящим от цены

4. Дискретная математическая модель КОМ

ВАРИАНТ 3

Задан прогнозируемый спрос на мощность P_d , не зависящий от цены мощности. Конкурентный отбор мощности как задача дискретного программирования выглядит как

$$(6) \sum_{i \in J} C_i \rightarrow \min$$

при условии (3). К особенностям такой постановки можно отнести то, что цена мощности не определяется в ходе вычислений и для ее нахождения нужны дополнительные условия.

5. Пример расчета

В ЭЭС имеется двадцать электростанций-поставщиков мощности. Эти поставщики по показателям установленной мощности похожи на поставщиков, работающих во второй ценовой зоне (Сибирь) оптового рынка РФ. Для простоты примера примем понятия генерирующей единицы мощности, электростанции и поставщика эквивалентными (таблица 1). Условно-постоянные издержки поставщиков заданы генератором случайных чисел в денежных единицах (ед.)

Таблица 1. Характеристики электростанций

Номер	Располагаемая мощность, МВт	Условно-постоянные издержки, ед.	Удельные условно-постоянные издержки, ед./МВт
1	1130	3 390	3
2	350	1 401	4
3	445	5 785	13
4	475	19 950	42
5	465	24 180	52
6	275	18 700	68
7	1200	87 600	73
8	270	24 570	91
9	405	47 502	117,29
10	500	60 440	120,88
11	185	22 570	122
12	1110	135 420	122
13	240	31 920	133
14	35	4 716	134,74
15	705	106 455	151
16	1260	223 020	177
17	480	94 276	196,41
18	1310	257 676	196,7
19	485	97 000	200
20	1255	254 562	202,84
Сумма	12580	1 521 133	–

Результаты решения задачи конкурентного отбора мощности по рассмотренным моделям приведены на рис. 2. На рисунке суммарные затраты поставщиков, привлекаемых для поставки мощности, для Варианта 1 (линейная модель со спросом, не зависящим от цены) показаны сплошной жирной линией, для Варианта 2 (линейная модель со спросом, зависящим от цены) — пунктирной линией, для Варианта 3 (дискретная модель со спросом, не зависящим от цены) — сплошной тонкой линией.

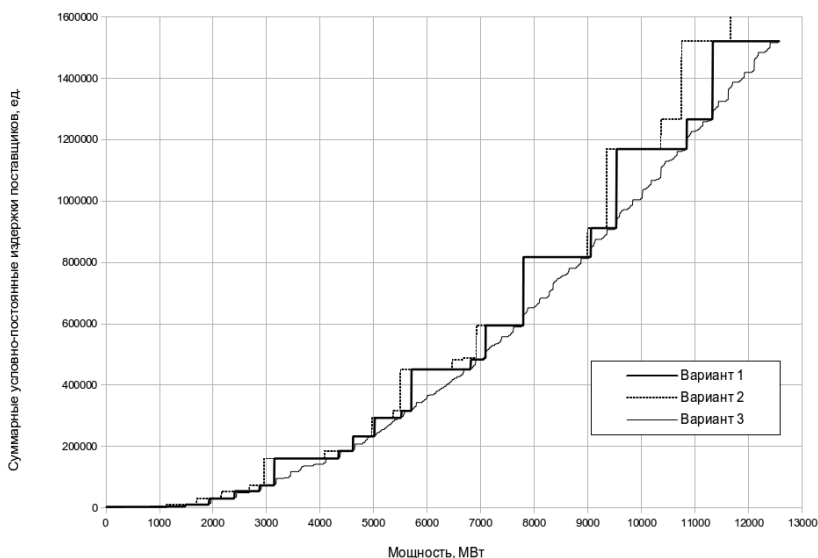


Рис. 2. Суммарные условно-постоянные издержки поставщиков электрической мощности, отобранных в результате КОМ для а) линейной модели со спросом, не зависящим от цены (Вариант 1); б) линейной модели со спросом, зависящим от цены (Вариант 2); в) модели дискретного программирования (Вариант 3)

Видно, что модель дискретного программирования дает результат не хуже, а на значительной доле рассмотренного диапазона даже лучше, чем Варианты 1 и 2, представляющие собой модели рынка мощности в виде аукциона единой цены. То есть замена линейной модели КОМ на модель дискретного програм-

мирования может дать некоторую экономию затрат на поддержание мощности.

Например, для значения прогнозируемого спроса 10 000 МВт модели вариантов 1 и 2 отбирают всех поставщиков кроме 19 и 20, обеспечивая суммарные издержки на поддержание мощности в размере 1 169 571 ед. Модель варианта 3 достигает издержек в размере 1 008 895 ед., исключая из отбора поставщиков 18 и 20.

Для значения прогнозируемого спроса 11 000 МВт результаты линейных моделей расходятся. Вариант 1 дает издержки в размере 1 266 571 ед. (отобраны все поставщики кроме 20-го). Вариант 2 дает издержки в размере 1 521 133 ед. (отобраны все поставщики). Вариант 3 позволяет обеспечить заданную нагрузку при издержках 1 229 935 ед. (не отобраны поставщики 13, 14 и 20).

Номера отобранных в этих двух случаях поставщиков и их суммарные затраты приведены в таблице 2.

Таблица 2. Отобранные поставщики и суммарные издержки на мощность для разных вариантов модели рынка мощности

P_d , МВт	Вариант 1		Вариант 2		Вариант 3	
	Постав- щики	Затраты, ед.	Постав- щики	Затраты, ед.	Постав- щики	Затраты, ед.
10000	1–18	1 169 571	1–18	1 169 571	1–17, 19	1 008 895
11000	1–19	1 266 571	1–20	1 521 133	1–12, 15–19	1 229 935

6. Особенности применения дискретной модели конкурентного отбора мощности

ПРОБЛЕМА ФОРМИРОВАНИЯ ЦЕНОВОГО СИГНАЛА ДЛЯ ИНВЕСТОРОВ

В модели рынка мощности, организованной по принципу аукциона единой цены, информацией для инвесторов о востребованных рынком экономических показателях электростанций является цена мощности. Эта величина получается в ходе отбора как ценовая заявка последней отобранной единицы мощности

или как установленная регулирующим органом цена в точке 1, если суммарная мощность отобранных поставщиков ниже объема спроса на мощность в точке 1.

Применение дискретной модели КОМ не подразумевает цену как результат вычислений. Вычисление цены как удельных условно-постоянных издержек замыкающей генерирующей единицы мощности не совсем корректно, поскольку поставщики с более высокими удельными издержками будут отобраны моделью, в то время как другие поставщики с более низкими удельными издержками могут не быть отобраны.

Соответственно, для дискретной модели требуется дополнительный механизм формирования ценовых сигналов для инвесторов.

В числе возможных решений этой проблемы – вычисление максимальной заявляемой цены абстрактной электростанции, добавленной к множеству электростанций, участвующих в отборе, при которых эта электростанция будет отобрана моделью. Для этого используем следующий алгоритм:

1. Задаем установленную мощность абстрактной электростанции.
2. Добавляем электростанцию заданной мощности к множеству электростанций, участвующих в отборе.
3. Находим максимальную заявленную цену мощности данной электростанции, при которой она будет отобрана на рынке мощности.
4. Выполняем с шага 1 для электростанций другой установленной мощности.

В результате расчетов получим зависимость заявленной цены от установленной мощности вводимой электростанции для абстрактных электростанций, которые были бы отобраны на КОМ. Эта зависимость будет иметь убывающий характер, т.е. инвестор, рассматривающий возможность введения более крупной электростанции, должен будет рассчитывать на более низкую цену мощности, чем инвестор, вводящий небольшую электростанцию.

Более подробное изучение механизмов формирования ценовых сигналов для инвесторов не входит в задачи данной статьи.

ПРОБЛЕМА КОМПЕНСАЦИИ ИЗДЕРЖЕК ОТОБРАННЫХ ЭЛЕКТРОСТАНЦИЙ И ПОЛУЧЕНИЯ ПРИБЫЛИ

В модели аукциона единой цены цена также является механизмом компенсации издержек отобранных электростанций и стимулом для их снижения. При использовании модели дискретного программирования эта задача также решается дополнительным механизмом.

Например, можно для каждой из электростанций, отобранных в КОМ, вычислять максимальную цену, при которой она все еще будет отобрана, и назначать индивидуальную цену мощности для расчетов исходя из полученной величины (возможно, с применением понижающего коэффициента).

УЧЕТ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ФАКТОРОВ

Оба варианта аукциона единой цены подразумевают рассмотрение системы в одноузловом исполнении (т.е. отсутствие ограничений на передачу электроэнергии/мощности по сетям). Учет реальной сети требует дробления ценовой зоны на зоны свободного перетока, что и применялось до 2015 года. В дискретной модели есть возможность вводить дополнительные ограничения на пропускные способности сетей и формировать локальные ценовые сигналы для инвесторов в зависимости от места планируемого строительства новой электростанции/блока.

Также возможен учет дополнительных ограничений на степень маневренности блоков, затрат на производство электроэнергии поставщиками. Однако возможность развития поставки необходимо сопоставлять с трудоемкостью решения задачи.

7. Выводы

Модель конкурентного отбора мощности решает дискретную по своей природе задачу оптимизации отобранных для поставки мощности генерирующих единиц. Действующая модель как в версии до 2015 года (с абсолютно неэластичным фиксированным спросом), так и в более поздней версии (со спросом, зависящим от цены) является разновидностью задачи

линейного программирования и по этой причине далеко не всегда находит действительно оптимальное решение.

Замена линейной модели на модель дискретного программирования позволит находить более оптимальное решение и таким образом снизить суммарные затраты привлекаемых к поставке мощности электростанций. Помимо этого в рамках дискретной модели можно учитывать ограничения пропускных способностей сетей без дробления ценовой зоны на зоны свободного перетока, что особенно актуально для электроэнергетики России.

К особенностям дискретной модели относятся отсутствие цены мощности и, следовательно, необходимость использования дополнительных механизмов для вычисления ценовых сигналов для инвесторов и для компенсации издержек отобранных электростанций и их прибыли. Предложены возможные направления развития алгоритмов решения этих задач без детальной проработки.

Литература

1. АЮЕВ Б.И. *Концептуальные основы рынка мощности в ЕЭС России* // Электрические станции. – 2008. – №8. – С. 4–8.
2. ВАСИН А.А., ГУСЕВ А.Г. *Теоретико-игровые модели управления рынком мощности и электроэнергии* // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. – 2012. – №6. – С. 52–62.
3. *Договор о присоединении к торговой системе оптового рынка* (ред. от 24.10.2016). Ассоциация «НП Совет рынка».
4. ЕРЕМИН В. *Международный опыт организации рынков мощности* [Электронный ресурс]. – URL: <http://www.bigpowernews.ru/research/document38893.phtml> (дата обращения: 07.03.2017).
5. ОПАДЧИЙ Ф., КАТАЕВ А. *Рынок мощности. Изменение модели при переходе от дефицита к избытку* // Энергорынок. – 2016. – №7(142). – С. 34–41.

6. ПАЛАМАРЧУК С.И. *Что сдерживает эффективную работу рынков в электроэнергетике* // ЭКО. – 2014. – №4(478). – С. 136–151.
7. ПОДКОВАЛЬНИКОВ С.В., СЕМЕНОВ К.А., ХАМИСОВ О.В. *Развитие генерирующих мощностей при различной структурной организации электроэнергетических рынков* // Известия РАН. Энергетика. – 2014. – №4. – С. 3–14.
8. *Постановление Правительства РФ от 27.12.2010 №1172 (ред. от 30.11.2016) "Об утверждении Правил оптового рынка электрической энергии и мощности и о внесении изменений в некоторые акты Правительства Российской Федерации по вопросам организации функционирования оптового рынка электрической энергии и мощности"*.
9. СТОФТ С. *Экономика энергосистем. Введение в проектирование рынков электроэнергии*. – М.: Мир. – 2006. – 623 с.
10. ТРАЧУК А.В. *На оптовом рынке электроэнергии. Модель рынка мощности с конкуренцией по полным затратам* // Российское предпринимательство. – 2009. – №12-2. – С. 88–93.
11. *Федеральный закон «Об электроэнергетике» от 26.03.2003 №35-ФЗ*.
12. ФИЛАТОВ А.Ю., АЙЗЕНБЕРГ Н.И. *Математические модели несовершенной конкуренции*. – Иркутск, 2012. – 108 с.
13. BESSER J.G, FARR J.G, TIERNEY S.F. *The Political Economy of Long-Term Generation Adequacy: Why an ICAP Mechanism is Needed as Part of Standard Market Design* // Electricity Journal. – 2002. – Vol. 15, Issue 7. – P. 53–62.
14. CRAMTON P., STOFT S. *A Capacity Market that Makes Sense* // Electricity Journal. – 2005. – Vol. 18, Issue 7. – P. 43–54.

ABOUT MATHEMATICAL MODEL OF THE CAPACITY MARKET

Mikhail Vasilyev, Melentiev Energy Systems Institute of SB RAS, Irkutsk, Cand.Sc., researcher (mikhail-vasilyev@yandex.ru).

Abstract: The capacity market in Russia is considered as an optimization model which is aimed at reaching minimum electricity supply costs for consumers. It is shown that the linear model applied to the discrete problem often does not reach optimum solution. The calculation is done for an abstract example and compared with the results of the discrete model. Competitive power output model solves an optimization problem which is, by its nature, discrete. Current model, either before 2015 (completely inelastic fixed demand) or after (demand depending on price), is a variant of linear programming problem, and thus does not always yield a true optimal solution. Substituting it for a discrete programming problem allows us to find better solutions and to lower costs for all involved power stations. Besides, in this framework we can account for bandwidth limitations without subdividing price zones, which is especially relevant for Russian power systems. Further directions of research are proposed.

Keywords: electric power industry, capacity market.

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии П.С. Щербаковым.*

*Поступила в редакцию 19.12.2016.
Опубликована 31.05.2017.*